

Diego Masotti

**COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO
AMORTECIMENTO ESTRUTURAL ATRAVÉS DE TÉCNICAS
DE AJUSTE DE CURVAS DE FUNÇÕES RESPOSTA EM
FREQUÊNCIA**

Dissertação submetida ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica da Universidade Federal de
Santa Catarina para a obtenção do
Grau de Mestre em Engenharia
Orientador: Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

Florianópolis

2013

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Masotti, Diego
COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO AMORTECIMENTO
ESTRUTURAL ATRAVÉS DE TÉCNICAS DE AJUSTE DE CURVAS DE FUNÇÕES
RESPOSTA EM FREQUÊNCIA / Diego Masotti ; orientador,
Arcanjo Lenzi - Florianópolis, SC, 2013.
188 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Amortecimento Estrutural. 3.
Ajuste de Curvas. 4. Parâmetros Modais. I. Lenzi, Arcanjo.
II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

Diego Masotti

**COMPARAÇÃO DE MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO
AMORTECIMENTO ESTRUTURAL ATRAVÉS DE TÉCNICAS
DE AJUSTE DE CURVAS DE FUNÇÕES RESPOSTA EM
FREQUÊNCIA**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 26 de fevereiro de 2013.

Prof. Júlio César Passos, Dr. Eng.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.
Orientador

Prof. Fábio Fiates, Dr. Eng.
UNISUL/Palhoça

Prof. Júlio Apolinário Cordioli, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Roberto Jordan, Dr. Eng.
Universidade Federal de Santa Catarina

Aos meus pais Mario e Maria e à minha
esposa Ana Paula que são tudo para mim.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço aos meus pais que nunca mediram esforços para proporcionar aos seus filhos uma boa educação e que nos criaram com todo amor, carinho e dedicação. Ao meu pai, cujo entusiasmo pelas conquistas dos filhos é imensurável e contagioso. E à minha mãe, que também vibra muito com as nossas vitórias.

À minha esposa, Ana Paula, pelo amor, compreensão e paciência. E principalmente pelo incentivo e apoio incondicionais.

Ao meus familiares e amigos que sempre deram muita força e sempre torceram para o sucesso deste trabalho.

Ao meu orientador Arcanjo Lenzi, pela oportunidade, pela paciência e pela amizade de todos estes anos. Grande chefe!

Ao Acir, Edmar e Celso pela troca de ideias, sugestões e críticas sempre tão bem-vindas.

Aos colegas de LVA que desde os tempos de Iniciação Científica contribuíram para minha formação acadêmica.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram com este trabalho.

A todos, o meu sincero obrigado.

Obstáculo é aquilo que você enxerga quando tira os olhos do seu objetivo.

(Henry Ford)

RESUMO

A fenomenologia complexa dos mecanismos de amortecimento dos materiais e das estruturas impede a obtenção de modelos precisos para a predição de amortecimento da maior parte das estruturas e sistemas práticos. Isso quer dizer que, ainda hoje e na maioria das vezes, a determinação do amortecimento precisa ser feita de forma experimental, sujeita a diversas formas de erro e incertezas. Dentre as inúmeras formas de determinação de amortecimento, muitas das técnicas estão relacionadas a processos de extração de parâmetros modais que recorrem a processos de ajuste de curvas para a obtenção dos parâmetros modais. Estruturas com diferentes graus de complexidade e diferentes graus de amortecimento requerem o uso de diferentes técnicas de extração de parâmetros modais para minimizar os erros. Neste trabalho, conjuntos de dados analíticos e de simulação numérica, obtidos sob condições controladas, são utilizados para determinar a precisão dos métodos de ajuste de curvas na determinação do amortecimento estrutural. O uso de dados simulados permite calcular o erro percentual de cada um dos métodos. Por fim, dados experimentais serão utilizados para corroborar os resultados obtidos a partir dos dados controlados.

Palavras-chave: Amortecimento; Parâmetros modais; Ajuste de curvas.

ABSTRACT

The complex phenomenology of the damping mechanisms of materials and structures is a hindrance to getting accurate models for the prediction of damping for most of structures and practical systems. This means that still today, in several cases, determination of damping must be done experimentally, subject to various forms of error and uncertainty. Among the several forms of damping determination, many of the techniques are related to methods of modal parameters extraction which use curve fitting to obtain the modal parameters. Structures with different degrees of complexity and different degrees of damping require the use of different techniques of modal parameters estimation to minimize errors. In this work sets of analytical and simulated data are obtained under controlled conditions and used to determine the accuracy of curve fitting methods to estimate the structural damping. The use of simulated data enables to calculate the percentage error of each of the methods. Lastly, experimental data will be used to corroborate the results obtained from the controlled data.

Keywords: Damping; Modal Parameters; Curve-fitting.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: laço de histerese indicando a capacidade de amortecimento do material. Fonte: Cossolino e Pereira [31].	35
Figura 2.2: defeito do tipo linear na estrutura cristalina do material. Fonte: Oliveira [8].	37
Figura 2.3: mecanismo de geração de frentes de onda em uma placa plana. Fonte: adaptado de Martínéz [7].	41
Figura 2.4: Exemplos de mecanismos de bombeamento de ar. Fonte: Adaptado de Beards [10].	42
Figura 2.5: variação do fator de perda em função da temperatura, para materiais viscoelásticos. Fonte: Martínéz [7].	44
Figura 2.6: variação do fator de perda em função da frequência, para materiais viscoelásticos. Fonte: Martínéz [7].	45
Figura 2.7: sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade.	47
Figura 2.8: resposta vibratória de sistemas com diferentes fatores de amortecimento. Fonte: Cossolino e Pereira [31].	49
Figura 2.9: exemplos típicos de laços de histerese. (a) laço linear; (b) a (f) laços não-lineares. Fonte: Lazan [2].	50
Figura 2.10: modelo de sistema com vibração livre com amortecimento de Coulomb.	53
Figura 2.11: curva de decaimento característica de sistema com amortecimento de coulomb. Fonte: Adaptado de Remarks [14].	54
Figura 2.12: resposta de sistema com vibração livre amortecida. Fonte: adaptado de Thorby [11].	58
Figura 2.13: indicação da constante de tempo na curva de decaimento. Fonte: adaptado de Brüel & Kjaer [32].	59
Figura 2.14: relação entre o fator de perda e a razão de amortecimento crítico. Linha cheia ($\eta = 2\xi$); linha pontilhada ($\eta = 2\xi\sqrt{1-\xi^2}$). Fonte: Adaptado de Graesser [13].	61
Figura 3.1: comparação entre curva medida (linha tracejada) e curva ajustada (linha cheia) sem a presença de termos residuais. Fonte: Fladung [20].	76
Figura 3.2: comparação entre curva medida (linha tracejada) e curva ajustada (linha cheia) com a presença de termos residuais. Fonte: Fladung [20].	76
Figura 3.3: matriz de FRFs indicando a seleção de uma única função. Procedimento adotado pelos estimadores locais. Fonte: LMS [20].	79
Figura 3.4: matriz de FRFs indicando a seleção de uma linha inteira de funções. Procedimento adotado pelos estimadores globais. Fonte: LMS [20].	79

Figura 3.5: matriz de FRFs indicando a seleção de mais de um coluna de funções. Procedimento adotado pelos de múltiplas referências. Fonte: LMS [20].	80
Figura 3.6: determinação dos pontos ω_1 e ω_2 , definindo a banda de meia-potência. Fonte: Bratti [30].	83
Figura 4.1: modelo da viga analisada, indicando os pontos de cálculo das FRFs.	122
Figura 4.2: terceiro e quinto modo de flexão da viga simulada.	123
Figura 4.3: FRFs do ponto FRF_1 com diferentes razões de amortecimento.	123
Figura 4.4: magnitude das quatro FRFs da viga com razão de amortecimento crítico prescrito de 0,01%.	124
Figura 4.5: magnitude das quatro FRFs da viga com razão de amortecimento crítico prescrito de 10%.	124
Figura 4.6: modos simétricos 1 e 2 da placa circular na frequência de 65,1 Hz.	125
Figura 4.7: modos simétricos em 248,7Hz.	125
Figura 4.8: pontos de aplicação da força das duas análises harmônicas avaliadas.	127
Figura 4.9: pontos de medição das FRFs da placa circular	128
Figura 4.10: seis FRFs da placa circular extraídas na análise harmônica.	128
Figura 4.11: Malha de ponto de medição da placa com indicação da posição do acelerômetro no ponto 13.	130
Figura 4.12: ajuste gráfico da janela transiente utilizada no sinal da excitação.	131
Figura 4.13: ajuste gráfico da janela exponencial utilizada no sinal de resposta.	132
Figura 4.14: Função coerência de alguns pontos medidos da placa retangular.	132
Figura 4.15: isoladores pneumáticos posicionados sob a carroceria.	134
Figura 4.16: verificação das frequências de montagem do experimento.	135
Figura 4.17: excitador posicionado na região frontal da carroceria	136
Figura 4.18: excitador posicionado na região traseira da carroceria	136
Figura 4.19: Sistema de coordenadas considerado no teste da carroceria. Fonte: Adaptado de Gillespie [33].	137
Figura 4.20: grid de medição com os pontos de medição de resposta (em amarelo) e representação dos excitadores nos pontos de acoplamento com a estrutura.	138

Figura 4.21: gráfico de bode (fase na parte superior) das FRFs cruzadas medidas entre os dois pontos de excitação da estrutura.....	139
Figura 4.22: autoespectro da força aplicada pelo excitador dianteiro, aplicada em três níveis distintos.....	140
Figura 4.23: FRFs do ponto 101 para os três níveis distintos de força do excitador dianteiro.	140
Figura 4.24: FRFs do ponto 9 para os três níveis distintos de força do excitador traseiro.....	141
Figura 4.25: FRFs medidas no mesmo ponto no início (linha preta) e no fim (linha cinza) da sequência de medições.....	141
Figura 4.26: dados do amortecimento do terceiro pico calculado pela banda de meia-potência no programa Pulse Labshop.	143
Figura 4.27: tela de seleção do método de ajuste e da faixa de frequências de ajuste.	144
Figura 4.28: Seleção do período de tempo a ser utilizado para o processo de ajuste.	145
Figura 4.29: exemplo de diagrama de Estabilização.	146
Figura 4.30: gráfico mostrando a FRF medida, a curva sintetizada, e a curva de erro.	147
Figura 5.1: erro percentual do amortecimento calculado para o primeiro modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.....	150
Figura 5.2: erro percentual do amortecimento calculado para o segundo modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.....	151
Figura 5.3: erro percentual do amortecimento calculado para o terceiro modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.....	152
Figura 5.4: erro percentual do amortecimento calculado para o quarto modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.....	153
Figura 5.5: erro percentual do amortecimento calculado para o quinto modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.....	154
Figura 5.6: erro percentual da razão de amortecimento crítico, em função da largura da banda de meia-potência, para todos os casos da viga.....	155
Figura 5.7: erro percentual da razão de amortecimento crítico, em função do número de pontos espectrais dentro da banda de meia-potência, para todos os casos da viga.	156

Figura 5.8: FRF da viga com razão de amortecimento de 5%, mostrando a variação da largura da banda de meia-potência para cada ressonância da estrutura.....	157
Figura 5.9: largura da banda de meia-potência em função da frequência de ressonância do modo, para alguns valores típicos de razão de amortecimento	158
Figura 5.10: análise <i>zoom</i> do primeiro modo da viga, com resolução de 0,001Hz.....	159
Figura 5.11: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 0,01%.	160
Figura 5.12: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 10%.	161
Figura 5.13: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal, para o caso da placa circular	162
Figura 5.14: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da placa retangular.	165
Figura 5.15: identificação dos modos reais com o auxílio da forma modal. ...	166
Figura 5.16: exemplo de sinal de resposta com aplicação da janela exponencial. Fonte: adaptado de Brüel&Kjaer [35].	170
Figura 5.17: elevada densidade modal da carroceria na faixa até 100Hz.....	171
Figura 5.18: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da carroceria. Linha preta indicando o valor médio dos valores estimados.	173
Figura 5.19: funções resposta impulsiva da placa retangular, utilizadas pelo método ERA. Acima, modo com baixo amortecimento e passível de erro de vazamento. Abaixo, curva não suscetível ao problema.	177
Figura 5.20: FRF da viga com síntese realizada pelo método AFPoly.	177
Figura 5.21: FRF da viga com síntese realizada pelo método LSPF.....	178
Figura 5.22: Exemplos de diagrama de estabilização. Acima, calculado por RFP e abaixo calculado por PFD.	179

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: fator de perda típico de alguns materiais de construção mecânica.	46
Tabela 2.2: relação entre os descritores de amortecimento. Fonte: Gade [15].	62
Tabela 3.1: tipos de FRFs.	65
Tabela 3.2: comparação entre os métodos de ajuste de curvas. Fonte: Adaptado de Richardson [19].	82
Tabela 4.1: frequências naturais não amortecidas dos modos de vibração da viga	122
Tabela 4.2: frequências naturais da placa circular. Em destaque modos não simétricos.	126
Tabela 4.3: métodos avaliados para cada um dos casos simulados ou medidos	142
Tabela 5.1: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o primeiro modo da viga.	150
Tabela 5.2: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o primeiro modo da viga	150
Tabela 5.3: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o segundo modo da viga	151
Tabela 5.4: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o segundo modo da viga	151
Tabela 5.5: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o terceiro modo da viga	152
Tabela 5.6: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o terceiro modo da viga	152
Tabela 5.7: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o quarto modo da viga	153
Tabela 5.8: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o quarto modo da viga	153
Tabela 5.9: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o quinto modo da viga	154
Tabela 5.10: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o quinto modo da viga	154
Tabela 5.11: razão de amortecimento crítico calculado pelos diferentes métodos de extração modal para a viga com razão de amortecimento prescrito de 0,01%.	159

Tabela 5.12: erro percentual do amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 0,01%	159
Tabela 5.13: Razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 10%	160
Tabela 5.14: erro percentual do amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 10%	160
Tabela 5.15: erro percentual do amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da placa circular	163
Tabela 5.16: Razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da placa retangular	164
Tabela 5.17: formas modais da placa retangular	167
Tabela 5.18: matriz de MAC (automac) da placa retangular, calculada com os modos extraídos pelo método PFD	169
Tabela 5.19: matriz de MAC (automac) da placa carroceria, calculada com os modos extraídos pelo método PTD	172
Tabela 5.20: matriz de MAC (Crossmac) da placa carroceria, calculada com os modos extraídos pelos métodos RFP e AFPoly	173
Tabela 5.21: Razão de amortecimento crítico calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da carroceria	174

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

A_n	Amplitude de vibração no n -ésimo ciclo
A_0	Amplitude de vibração no ciclo inicial
${}_r A_{jk}$	Constante Modal
c	Coefficiente de amortecimento viscoso [Ns/m]
c_a	Velocidade do som no meio [m/s]
c_c	Amortecimento crítico [Ns/m]
C_q	Coefficiente de amortecimento da lei-do-quadrado [Ns ² /m ²]
D	Taxa de decaimento [dB/s]
DOF	<i>Degree of Freedom</i>
E_D	Energia dissipada por ciclo
E_k	Energia cinética
E_S	Energia potencial
E_{Tot}	Energia mecânica total
F_{ac}	Força de amortecimento viscoso [N]
F_{ah}	Força de amortecimento histerético [N]
F_f	Força de atrito de Coulomb [N]
FFT	Transformada Rápida de Fourier
FRF	Função Resposta em Frequência
GDL	Grau de Liberdade
h	Constante de amortecimento histerético [N/m]
$h(t)$	Função resposta temporal
$H(\omega), H(f)$	Função resposta em frequência
IMAC	Conferência Internacional de Análise Modal
IRF	Função Resposta Impulsiva
k	Constante elástica da mola [N/m]
L	Número de intervalos []

m, M	Massa [kg]
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
MDOF	<i>Multiple Degree of Freedom</i>
MIMO	<i>Multiple-Input, Multiple-Output</i>
N	Tamanho do modelo (número de modos)
PIM	Método da potencia injetada
Q	Fator de qualidade
$R_i(\omega)$	Termos residuais de inércia
$R_s(\omega)$	Termos residuais de rigidez
SDOF	<i>Single Degree of Freedom</i>
SVD	Decomposição em Valores Singulares
SISO	Single Input, single-output
T	Período de oscilação [s]
T_{60}	Tempo de reverberação
$\langle \bar{V}^2 \rangle$	Velocidade média quadrática temporal e espacial
$x(t)$	Deslocamento no tempo [m]
$\dot{x}(t)$	Velocidade no tempo [m/s]
$\ddot{x}(t)$	Aceleração no tempo [m/s ²]
$\langle \bar{Y} \rangle$	Mobilidade média espacial e temporal
W_{diss}	Potência dissipada [J]
W_{ent}	Potência de entrada [J]
$\alpha(\omega)$	Função receptância
δ	Decremento logarítmico []
ϕ	Ângulo de fase [rad]
σ	Constante de Decaimento [1/s]
η	Fator de Perda
ρ_a	Densidade do meio [kg/m ³]
τ	Constante de tempo [s]
$\Delta\omega$	Largura da banda de meia-potência [rad/s]
ω	Frequência natural [rad/s]

ω_d	Frequência natural amortecida [rad/s]
ω_n	Frequência natural não-amortecida [rad/s]
ω_r	Frequência de ressonância [rad/s]
$\omega_{1,2}$	Frequência do ponto de meia-potência [rad/s]
ξ	Razão de amortecimento crítico []
Δt	Intervalo de tempo

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	27
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.1.	Amortecimento	34
2.2.	Mecanismos internos de amortecimento	34
2.2.1.	Defeitos Cristalinos	36
2.2.2.	Macro e Micro-termoelasticidade	38
2.2.3.	Correntes de Eddy (ou correntes parasitas).....	39
2.3.	Mecanismos de amortecimento estrutural	39
2.3.1.	Amortecimento em juntas	40
2.3.2.	Amortecimento por radiação acústica	40
2.3.3.	Amortecimento por bombeamento	41
2.4.	Adição de amortecimento	42
2.4.1.	Ligas de alto amortecimento	43
2.4.2.	Materiais Compósitos.....	43
2.4.3.	Materiais Viscoelásticos.....	44
2.5.	Fatores de amortecimento dos materiais.....	46
2.6.	Modelos de amortecimento.....	46
2.6.1.	Amortecimento Viscoso.....	46
2.6.2.	Amortecimento Histerético	49
2.6.3.	Amortecimento Não-Linear	51
2.7.	Descritores de amortecimento.....	55
2.7.1.	Razão de Amortecimento Crítico - ξ	55
2.7.2.	Fator de perda - η	56
2.7.3.	Fator de Qualidade - Q	56
2.7.4.	Capacidade específica de amortecimento - ψ	57
2.7.5.	Taxa de Decaimento - D	57
2.7.6.	Decremento Logarítmico - δ	57
2.7.7.	Constante de Tempo - τ	58
2.7.8.	Constante de Decaimento - σ	59
2.7.9.	Tempo de reverberação - T_{60}	59
2.7.10.	Inter-relação entre os descritores de amortecimento	60
3.	DETERMINAÇÃO DO AMORTECIMENTO	63
3.1.	Funções Resposta em Frequência	64
3.2.	Método do decaimento livre	65

3.3. Método da Potência de Entrada ou Balanço de Energia	67
3.4. Métodos de Ajuste de Curvas.....	69
3.4.1. Linearidade	70
3.4.2. Invariância Temporal ou Repetibilidade	70
3.4.3. Equações de segunda ordem e reciprocidade	71
3.4.4. Fontes de erros dos estimadores modais	72
3.4.5. Classificação dos Métodos de identificação de Parâmetros Modais	77
3.4.6. Análise Modal de múltiplas referências	81
3.4.7. Análise modal de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO)	81
3.5. Métodos de determinação do amortecimento	83
3.5.1. Método da banda de meia-potência ou Seleção de Pico	83
3.5.2. Método Polyreference Time Domain- PTD	85
3.5.3. Método EigenSystem Realization - ERA.....	90
3.5.4. Método Rational Fractional Polynomial - RFP.....	99
3.5.5. Método Polyreference Frequency Domain- PFD.....	110
3.5.6. Método Alias-Free Polyreference - AFPoly	114
3.5.7. Método Least Squares Partial Fraction - LSPF.....	114
3.5.8. Resumo dos métodos explorados	115
4. PROCEDIMENTOS E MÉTODOS	119
4.1. Modelos Analíticos	119
4.1.1. Caso 1: Modelo da Viga.....	120
4.1.2. Caso 2: Placa Circular	124
4.2. Análise experimental.....	128
4.2.1. Caso 3: Placa Retangular	129
4.2.2. Caso 4: Carroceria Veicular	132
4.3. Extração do amortecimento	142
4.3.1. Banda de meia-potência	142
4.3.2. Demais métodos de ajuste.....	143
5. RESULTADOS E CONCLUSÕES.....	149
5.1. Caso 1: viga.....	149
5.1.1. Banda de meia-potência: Informações adicionais	156
5.1.2. Conclusões do caso da viga	161
5.2. Caso 2: Placa Circular	162
5.2.1. Conclusões do caso da placa circular	163
5.3. Caso 3: Placa Retangular	164
5.3.1. Compensação da janela Exponencial	169
5.3.2. Conclusões do caso da placa retangular	170
5.4. Caso 4: Carroceria	171
5.4.1. Conclusões sobre o caso da carroceria.....	175

5.5. Conclusões Gerais.....	175
5.5.1. Método da banda de meia-potência.....	175
5.5.2. Dos demais métodos.....	176
5.6. Sugestão de trabalhos futuros	179
REFERÊNCIAS	181

1. INTRODUÇÃO

"Todas as estruturas apresentam amortecimento de vibrações, mas apesar da vasta literatura sobre o assunto, o amortecimento ainda é um dos aspectos menos compreendidos na análise de vibrações." Woodhouse [1]

Como destacado por Woodhouse [1] na citação acima, a quantificação do amortecimento é talvez um dos assuntos que requer maior atenção na engenharia estrutural. Diferentemente de propriedades únicas de um sistema estrutural, como inércia e rigidez, que são bem entendidas e determinadas, o amortecimento é dependente de uma série de fatores, como influências externas e materiais de fabricação dos componentes, o que torna difícil sua predição com precisão. Como há grandes incertezas sobre os mecanismos de dissipação de energia nas estruturas, o amortecimento é tradicionalmente tratado como uma quantidade relativamente desconhecida, simplesmente pela dificuldade em defini-lo e quantificá-lo. Como resultado disso, o amortecimento deve ser estimado experimentalmente, visto que é de grande importância para o correto projeto e análise de estruturas vibrantes.

Além disso, o amortecimento tem relação direta com outras propriedades dos materiais e é utilizado nas mais diversas áreas da ciência e das engenharias, como engenharia estrutural, mecânica aplicada, metalurgia, química, tecnologia de borrachas, acústica, mecânica dos fluidos. Dentre estas diversas, podem-se citar algumas aplicações cujo conhecimento do amortecimento é fundamental:

- Estudo de materiais, para a avaliação de alterações microestruturais e ocorrência de defeitos.
- Construção civil, a fim de verificar a integridade de estruturas de concreto e evitar os desastres causados por abalos sísmicos;
- Verificação da qualidade e resistência de soldas e juntas mecânicas;

É fato que a ausência de modelos matemáticos suficientemente precisos para representar as forças de amortecimento é a principal razão pela qual o amortecimento permanece como um dos assuntos menos

compreendidos na análise de vibração geral, apesar da vasta literatura disponível sobre o tema.

A variedade de abordagens que há na literatura tem um ponto negativo, pois gera uma grande quantidade de informações desencontradas e comumente mal interpretadas. Exemplo disso são os inúmeros descritores de amortecimento que são utilizados e que serão abordados no decorrer deste trabalho.

Muitas, também, são as formas existentes de determinação de amortecimento estrutural. Uma considerável porção destes métodos usa funções resposta em frequência para determinar os parâmetros modais, entre os quais está o amortecimento. Geralmente, estes métodos são processos de ajuste de curvas que são suscetíveis a erros, dependendo de fatores como o nível de amortecimento da estrutura, faixa de frequência, a resolução espectral das funções resposta em frequência e a complexidade da estrutura sob análise, fator este que irá definir a existência de modos repetidos e também do fator de sobreposição modal. Ver-se-á que algumas técnicas geram erros grosseiros frente a alguns tipos de conjunto de dados e não são propícias para o uso nestas condições.

Nas últimas décadas, principalmente a partir dos anos 70, houve o desenvolvimento de muitos algoritmos para extração de parâmetros modais e que hoje estão disponíveis em softwares comerciais. Associados a estes métodos existem diversos termos que devem ser compreendidos pelo usuário dos programas para que façam uma correta aplicação dos métodos disponíveis. Familiarizar o usuário com estes termos também é um dos objetivos deste trabalho. Outros objetivos desta dissertação são: reunir dados sobre a determinação de amortecimento estrutural; introduzir a teoria básica que há por trás dos métodos de ajuste; criar senso crítico para a avaliação de resultados de extrações de parâmetros modais.

No que diz respeito à organização deste trabalho, o Capítulo 2 apresenta uma ampla revisão bibliográfica sobre os mecanismos de amortecimento dos materiais, das estruturas e as principais formas de adição de amortecimento estrutural. Em seguida, mostra os modelos de amortecimento mais comumente utilizados e traz uma seção dedicada aos diferentes descritores de amortecimento encontrados na literatura e a correlação entre os mesmos.

O Capítulo 3 explora as principais técnicas de determinação de amortecimento estrutural, discorrendo sobre suas vantagens e limitações e dando atenção especial às técnicas que serão utilizadas neste trabalho.

O Capítulo 4 descreve os modelos analíticos, computacionais e experimentais desenvolvidos para testar a precisão das técnicas de extração de parâmetros modais frente a diferentes fatores de amortecimento, densidade modal e resolução espectral. São testados dois casos analíticos onde as curvas sintetizadas de funções resposta em frequência são isentas de erros de medição e o amortecimento pode ser prescrito com exatidão. De forma complementar, foram realizados dois experimentos para observar o comportamento dos algoritmos de extração modal frente a dados sujeitos a ruído de medição e outras fontes de erro que são descritas no decorrer do capítulo. O primeiro caso estudado foi uma placa retangular simples, medida através de impactação. O segundo caso foi uma carroceria veicular ensaiada na condição de múltiplas excitações e múltiplas respostas, com excitação simultânea de dois pontos distintos da estrutura.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões desta dissertação, acompanhadas da discussão dos resultados e também das sugestões para trabalhos futuros. Os resultados incluem conclusões gerais e também, discussão de resultados específicos dos diferentes casos simulados e dos diferentes métodos de determinação do amortecimento. Ao final do trabalho, ficam claras as limitações de uso e também as vantagens e desvantagens dos métodos estudados.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Iniciando com um contexto histórico sobre as pesquisas envolvendo amortecimento, este Capítulo apresenta uma revisão bibliográfica sobre amortecimento estrutural e mecanismos de amortecimento em materiais e sistemas mecânicos. Explora as diferentes técnicas de determinação experimental de amortecimento estrutural e mapeia diferentes fatores que estão presentes nos experimentos e influenciam na exatidão da determinação do amortecimento.

Pesquisas sobre as propriedades de amortecimento dos materiais e seu significado na engenharia começaram há mais de 200 anos. Em 1784, Coulomb, em sua obra “Memoir on Torsion”, não só levantou hipóteses considerando amortecimento em mecanismos micro-estruturais como também realizou ensaios provando que o amortecimento em oscilações torcionais não era causado pelo atrito com o ar, mas por perdas internas no material (Lazan [2]).

Mas foi apenas a partir dos anos 70, com a evolução da capacidade computacional, que os métodos numéricos de ajuste de curvas e os métodos de extração de parâmetros modais começaram a ser amplamente utilizados para a determinação do amortecimento. Antes de 1970, a estimativa de parâmetros modais era realizada utilizando testes de frequência ressonante senoidal ou de modo normal. Em alguns casos, métodos manuais de ajuste de curva foram aplicados para estimar frequência de ressonância e amortecimento, como os métodos da banda de meia-potência e gráficos de Kennedy-Pancu (Brillhart et al [3]).

Métodos numéricos que permitiam a extração de parâmetros modais a partir de FRFs medidas foram desenvolvidos na década de 1970 e ganharam grande aceitação durante a década de 1980, com sua divulgação em eventos como a Conferência Internacional de Análise Modal (IMAC).

Nos últimos anos, muitos autores publicaram estudos comparando métodos de determinação de amortecimento e também indicando vantagens e desvantagens do uso de algumas técnicas. Em trabalhos que buscam determinar o amortecimento de uma estrutura qualquer, não é incomum os autores utilizarem mais de um método de determinação de amortecimento para verificar qual é o mais adequado ao estudo proposto.

Gade e Herlufsen [15] compararam dados processados através de filtros digitais (bandas de oitava) e analisador de Fourier (FFT) usando técnicas de decaimento livre de vibrações e de ajuste de curvas. Para as análises com filtros digitais, o amortecimento é estimado através da resposta de vibração livre amortecida de um sistema excitado através de impactação. A vantagem do método é ser bastante rápido e trabalhar bem com sistemas de baixo amortecimento. Uma limitação é que os modos de ressonância devem estar em bandas separadas de frequência. Caso contrário, o método dará um valor de amortecimento médio dos modos e que pode ser influenciado pela forma como o teste é conduzido (pontos de excitação e pontos de resposta). Para a análise FFT, o amortecimento foi medido usando o decaimento livre de vibrações; ajuste de curvas usando excitação com martelo de impacto e sinal randômico aplicado a excitador eletromecânico; e decaimento de funções resposta impulsiva usando excitação com sinal pseudo-randômico. Nas análises usando ajuste de curvas, os autores encontram valores superestimados de amortecimento devido ao problema de resolução em frequência insuficiente e o mesmo foi contornado com uma análise do tipo *zoom* ao redor de cada pico de ressonância. A desvantagem deste tipo de análise é que o tempo de aquisição dos sinais pode ser demasiadamente longo. Na última análise FFT, as funções de resposta em frequência são estimadas usando um excitador com sinal pseudo-randômico e o envelope do decaimento da função resposta impulsiva é calculado para cada modo individualmente, usando uma janela retangular para isolar os modos. Este método é mais rápido que o anterior, mas é dependente dos parâmetros da janela aplicada ao sinal e requer que os modos estejam espaçados. Os autores concluíram que de forma geral, a análise FFT é melhor para lidar com estruturas altamente amortecidas e que a análise através de filtros digitais é melhor quando o amortecimento for pequeno. Também concluem que variações muito pequenas nos experimentos geram variações grandes nos valores de amortecimento.

Em outro trabalho, Gade et al [39] compara uma técnica ressonante com uma não-ressonante na determinação do amortecimento de um isolador elastomérico. Os valores de amortecimento medidos foram praticamente iguais e a vantagem do método não-ressonante é que o amortecimento pode ser calculado como uma função contínua na frequência.

Maia [40] descreve e compara alguns métodos de análise modal de um grau de liberdade, incluindo: Amplitude de Pico (*Peak*

Amplitude), Componente Máximo de Quadratura (*Maximum Quadrature Component*), método de Dobson, Ajuste de Círculo e método Inverso. Ele demonstra que o método de Dobson apresenta melhores resultados que o método Inverso e o Ajuste de Círculo.

Collot [41] compara o método da Transformada de *Hilbert* e o método da Meia-potência (incluindo análise *zoom*) e conclui que o método da Transformada de *Hilbert* apresenta melhores resultados em caso de estruturas levemente amortecidas.

Iglesias [16] compara a precisão dos métodos de *Prony* ou Exponencial Complexa, *Ibrahim Time Domain*, *Rational Fraction Polynomial* (RFP) e Transformada de *Hilbert* com relação aos seguintes parâmetros: diferentes razões de amortecimento, truncamento das FRFs e espaçamento entre modos. O autor conclui que o método RFP é o mais robusto considerando as variações de parâmetros impostas. Os métodos de *Prony* e de *Ibrahim* produziram estimativas de amortecimento com mais 80% de erro quando trataram de FRFs com truncamento. Ele ainda adverte que a qualidade da estimativa destes dois métodos é muito afetada pela seleção dos picos de ressonância das FRFs que deve ser feita antes do cálculo da função resposta impulsiva.

Lima [42] utiliza o método da Banda de Meia-potência e do Decaimento para medir o amortecimento de painéis aeronáuticos em diferentes configurações. Nas comparações entre os dois métodos, o autor observa que os valores obtidos através do método do decaimento tendem a subestimar os resultados calculados pelo método da Banda de Meia-potência e que esta diferença pode está associada ao fato do decaimento dos sinais amostrados ser dominado pelos modos de menor amortecimento.

Bratti [30] por sua vez, avalia o amortecimento de painéis aeronáuticos com aplicação materiais viscoelásticos utilizando o Método da Potência de Entrada e o Método do Decaimento aplicado em IRFs. Os métodos indicaram amortecimentos similares, exceto em baixas frequências onde a dispersão dos resultados foi maior. No método do Decaimento esta dispersão é atribuída ao baixíssimo decaimento (queda menor que 10dB) das IRFs e no método da Potência de Entrada, a dispersão é atribuída à ausência de modos nesta faixa, caso que invalida uma das hipóteses assumida neste método.

Embora uma grande variedade de métodos tenha sido descrita nas últimas décadas, apenas um pequeno número tornou-se amplamente conhecido e comumente utilizado. Considerando apenas os métodos

baseados em ajuste de curvas, os métodos *Ibrahim Time-Domain* (ITD), *Least Squares Complex Exponential* (LSCE) e o *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) tornaram-se os mais importantes métodos no domínio do tempo da atualidade. Entre os métodos no domínio da frequência, destacam-se o *Direct Parameter Identification* (FDPI), o *Least Squares Frequency-Domain* e os métodos baseados em *Rational Fraction Polynomial* (RFP). O recém-desenvolvido *Least Squares Frequency Domain* (LSFD) e o *Polyreference LSCE*, também chamado por *Polyreference Time Domain* (PTD), foram introduzidos como novos padrões de estimadores de parâmetros modais para aplicações industriais (Verboven et al [4]).

2.1. AMORTECIMENTO

Amortecimento é a remoção de energia de um sistema vibratório. A energia pode ser transmitida para fora do sistema através de algum mecanismo de radiação ou pode ser dissipada internamente no sistema (Crandall, [34]).

Em sua definição, Jones [6] afirma que amortecimento expressa todas as formas de dissipar energia que de outro modo seria adicionado ao sistema na(s) sua(s) ressonância(s), pelas forças de excitação, durante cada ciclo de resposta.

Em todo sistema vibrante há duas formas principais de dissipação de energia que podem ser classificadas como:

- mecanismos internos ou intrínsecos do material, associados aos defeitos na microestrutura, granularidade e impurezas do material, e a efeitos termoelásticos causados por gradientes locais de temperatura;
- mecanismos externos ou estruturais, associados a perdas de energia por atrito em juntas, parafusos e articulações semirrígidas.

2.2. MECANISMOS INTERNOS DE AMORTECIMENTO

Esta seção do trabalho é dedicada aos micro mecanismos que ocorrem nos materiais e são responsáveis pelo amortecimento. O amortecimento interno, como pode ser chamado, está associado aos

defeitos de microestrutura, como por exemplo, contornos de grãos e impurezas; efeitos termoelásticos causados por gradientes locais de temperatura; efeitos de correntes de Foucault em materiais ferromagnéticos; movimentos de discordâncias em metais; e movimento das cadeias em polímeros. Todos os materiais reais e também as estruturas, sujeitos a ciclos de tensão/deformação, dissipam energia ao longo do ciclo.

Alguns dos mecanismos de dissipação de energia dependem da frequência do ciclo de tensão, enquanto outros mecanismos não apresentam esta dependência. Os mecanismos que não são dependentes da frequência são responsáveis pelos familiares laços do diagrama de tensão-deformação.

Independente da dependência ou não da frequência, todos os materiais e sistemas que dissipam energia de forma cíclica, evidenciam um fenômeno em comum: a curva tensão-deformação forma um laço de histerese e a área dentro do laço de histerese representa a capacidade de dissipação de energia, ou seja, a capacidade de amortecimento do material ensaiado (ver Figura 2.1).

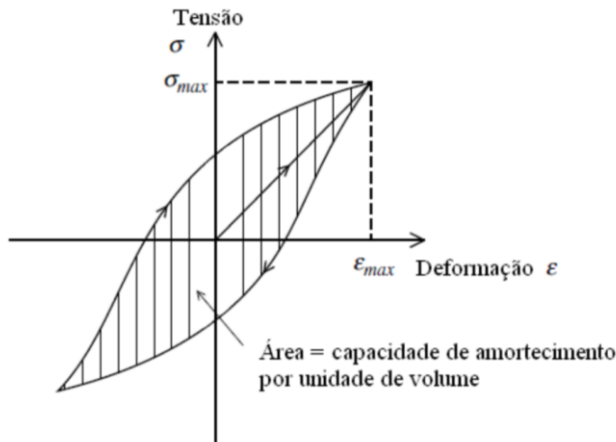


Figura 2.1: laço de histerese indicando a capacidade de amortecimento do material. Fonte: Cossolino e Pereira [31].

Comumente são dois os tipos de modelos utilizados para representar o amortecimento interno, o amortecimento viscoso e o

amortecimento histerético. Estes modelos serão discutidos em detalhes posteriormente, juntamente com outros modelos menos utilizados.

Os principais micro mecanismos de amortecimento são detalhados em seguida. Alguns deles dependem da organização da estrutura atômica do material e estão presentes em apenas algumas categorias de materiais, como metais ou polímeros.

2.2.1. Defeitos Cristalinos

Muitos dos micro mecanismos geradores de amortecimento nos materiais estão associados a defeitos na estrutura cristalina dos mesmos. Os defeitos cristalinos são imperfeições que ocorrem no arranjo periódico regular dos átomos em um cristal. Podem envolver irregularidades na posição dos átomos e no tipo de átomos. Todo cristal exibe defeitos e a quantidade e o tipo de imperfeições depende da forma que o cristal foi formado. Defeitos modificam o comportamento (mecânico, elétrico, químico, ótico e, obviamente, do amortecimento) do material. Geralmente classificados pela sua dimensionalidade, alguns são explorados mais detalhadamente, pois estão fortemente associados à geração de amortecimento:

- defeitos pontuais: vacâncias (lacunas); impurezas intersticiais e substitucionais;
- defeitos lineares: Discordâncias (deslocamentos);
- defeitos planares: ou Interfaciais: superfícies externas, interfaces, fronteiras de grão, contornos de macla (tipo de contorno de grão);
- defeitos volumétricos: Vazios, fraturas, inclusões e outras fases;

2.2.1.1. Defeitos pontuais

Em um cristal apenas uma pequena fração dos sítios atômicos é imperfeita. Apesar de poucos, eles influenciam muito nas propriedades dos materiais (nem sempre de forma negativa). Devido à agitação térmica, os átomos de um cristal real estão sempre vibrando. Quanto maior a energia térmica (ou temperatura), maior será a chance de átomos saírem de suas posições, deixando um vazio em seu lugar. Por outro lado, dentro da rede cristalina existem inúmeros interstícios, espaços

vazios entre os átomos, nos quais é possível alojar outros átomos, afinal, é praticamente impossível obter um material infinitamente puro e sempre haverá impurezas presentes na rede cristalina. Todos estes tipos de defeitos pontuais produzem assimetrias localizadas nos cristais e estas imperfeições levam a um comportamento inelástico quando o material é submetido a tensões cíclicas, produzindo um laço de histerese e efeitos de amortecimento no material.

2.2.1.2. Defeitos Lineares

Também chamados de discordâncias, são defeitos lineares ou unidimensionais em torno do qual alguns átomos estão desalinhados. As discordâncias estão associadas à cristalização e à deformação (origem: térmica, mecânica e supersaturação de defeitos pontuais). Os defeitos lineares são associados principalmente à deformação mecânica. A presença deste defeito é a responsável pela deformação, falha e ruptura dos materiais. A Figura 2.2 mostra um exemplo de linha de discordância, tipo de defeito linear típico.

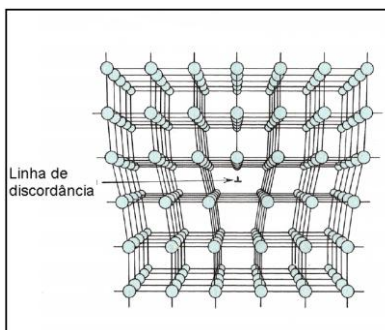


Figura 2.2: defeito do tipo linear na estrutura cristalina do material. Fonte: Oliveira [8].

A base para os efeitos de fricção interna por discordâncias é que o movimento das discordâncias contribui para a deformação total sofrida por um material que está sob carregamento. Sob carregamento cíclico, o componente da deformação associado à discordância pode ficar fora de fase com a tensão aplicada, resultando em amortecimento histerético.

2.2.1.3. Defeitos planares: Contorno de fase e contorno de grão

Como o próprio nome diz, os contornos de fase são as fronteiras que separam fases com estruturas cristalinas e composições distintas e os contornos de grãos são superfícies que separam dois grãos ou cristais com diferentes orientações.

Estas regiões estão em estado de relativa desordem e, portanto, apresentam comportamento viscoso. A energia dissipada no contorno de grão sob tensão ou deformação cisalhantes cíclicos é geralmente grande quando comparada àquela dissipada no interior do grão. A fricção interna associada ao cisalhamento no contorno de grão depende da magnitude do cisalhamento, das propriedades de relaxação do contorno (que é função da temperatura) e também da frequência.

2.2.2. Macro e Micro-termoelasticidade

Sob o ponto de vista macroscópico, quando um material é tensionado não uniformemente e rapidamente (adiabaticamente), são produzidas diferenças locais de temperatura que dependem dos níveis locais de tensão e do material. Os gradientes de temperatura resultantes no material tendem a produzir fluxo de calor se o carregamento não for rapidamente relaxado. Sob vibrações de alta frequência (período muito menor que o tempo necessário para ocorrer o fluxo de calor) o processo se mantém adiabático e reversível e o amortecimento observado é muito pequeno. Em contraste, em baixas frequências o processo permanece isotérmico, mas ainda reversível, e novamente não há dissipação significativa de energia por amortecimento. Se, no entanto, o período do carregamento é comparável ao período necessário para que haja fluxo de calor através dos gradientes de temperatura produzidos, ocorre conversão irreversível da energia mecânica em calor, resultando em amortecimento (Lazan [2]).

Correntes térmicas que levam à fricção interna também existem a nível microscópico. Cristais individuais, agregados na estrutura cristalina possuem propriedades térmicas e mecânicas anisotrópicas. Os grãos vizinhos geralmente possuem orientações diferentes e por isso possuem propriedades térmicas e mecânicas diferentes nas direções das tensões principais no material. Assim, gradientes locais de temperaturas são produzidos mesmo quando o carregamento aplicado macroscopicamente é do tipo tração axial uniforme. Em materiais sob carregamento cíclico a micro-anisotropia pode causar micro-correntes

térmicas através dos contornos de grão resultando em dissipação de energia.

2.2.3. Correntes de Eddy (ou correntes parasitas)

Este mecanismo de dissipação baseia-se no acoplamento dos campos magnéticos e propriedades mecânicas de materiais ferromagnéticos (Lazan [2]). Este efeito dissipa energia em forma de calor e a fricção interna resultante é independente da amplitude, mas dependente da frequência.

As correntes de *Eddy* produzem amortecimento tanto em escala macroscópica como microscópica. O amortecimento gerado por este mecanismo é geralmente muito pequeno, de ordem inferior a 10^{-4} , comparado a outros mecanismos de amortecimento e por isso é geralmente desprezado.

2.3. MECANISMOS DE AMORTECIMENTO ESTRUTURAL

Os mecanismos de amortecimento estruturais ou mecanismos externos de dissipação são aqueles que não são inerentes ao material e sim às propriedades do sistema estrutural vibrante e do meio que o circunda.

O amortecimento estrutural é usualmente estimado através de medições, mas os valores medidos representam o amortecimento total do sistema mecânico. Consequentemente, é necessário estimar o valor de outros tipos de amortecimento, como o interno, para subtrair do valor medido e determinar o valor do amortecimento estrutural propriamente dito. Conforme Martínez [7], usualmente o amortecimento estrutural é muito maior que o amortecimento interno e representa uma grande porção da dissipação de energia em sistemas mecânicos.

Os mecanismos externos de amortecimento abordados neste trabalho são: radiação acústica, dissipação por bombeamento, e amortecimento em juntas.

2.3.1. Amortecimento em juntas

Fricção de contato ou contato deslizante entre diferentes elementos de um sistema mecânico causam amortecimento estrutural. Uma vez que a dissipação de energia depende das características particulares do sistema mecânico, é muito difícil definir um modelo que represente perfeitamente o amortecimento em juntas.

Mecanismos de amortecimento nas juntas e suas proximidades causam dissipação da energia vibratória. Esta dissipação é mínima em juntas soldadas, mas é muito maior em juntas parafusadas e rebitasadas.

Como os materiais não são perfeitamente lisos, uma análise microscópica de uma junta revela saliências que são pressionadas umas contra as outras, suportando todas as forças aplicadas às juntas, produzindo grandes concentrações de tensões, que levam às deformações plásticas e à formação de soldas frias entre as superfícies metálicas da junta. Processos de conversão de energia, tais como endurecimento de materiais e deformações plásticas são processos irreversíveis e são os mecanismos responsáveis pela dissipação de energia em juntas secas.

2.3.2. Amortecimento por radiação acústica

O movimento de vibração de uma estrutura sempre ocorre acoplado com o meio fluido circundante, tal como o ar ou a água, de modo a que a sua resposta seja afetada. Geralmente, este efeito é muito pequeno, de modo que esta fonte de amortecimento não é geralmente suficientemente grande para ser útil. Contudo, existem exceções, tais como painéis aeronáuticos construídos a partir de estruturas finas e extra leves enrijecidas. O efeito de amortecimento do meio fluido circundante depende de uma série de parâmetros, tais como a impedância característica do meio ($\rho_a c_a$), a densidade ρ_a , a velocidade do som no meio c_a , e a massa e rigidez da estrutura.

Por conseguinte, o amortecimento por radiação acústica é muito mais elevado em água ou em óleo do que em ar e este tipo de amortecimento é muito mais eficaz para frequências elevadas do que para baixas.

A Figura 2.3 mostra frentes de onda geradas pela flexão de uma placa. Este mecanismo de dissipação de energia é fortemente afetado pela frequência acústica de coincidência. O equacionamento detalhado de radiação acústica de uma placa infinita pode ser visto em Mead [5] e Oliveira [8].

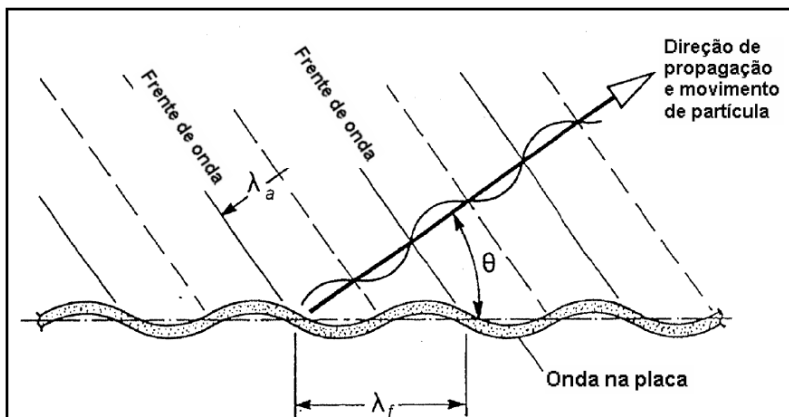


Figura 2.3: mecanismo de geração de frentes de onda em uma placa plana. Fonte: adaptado de Martínéz [7].

2.3.3. Amortecimento por bombeamento

Fatores de perda razoavelmente altos podem ser produzidos em regiões de interstícios entre placas ou entre uniões entre vigas e placas, onde ocorre aprisionamento de ar (Lenzi [9]). Devido à viscosidade do ar, quando a estrutura vibra e força o ar a mover-se de uma região para outra, há dissipação de energia. O fluxo de ar pode ser laminar ou turbulento, dependendo da amplitude da vibração, do volume de ar, do tamanho da região de vazamento do ar, do modo de vibração, frequência e outros. Este mecanismo de dissipação é função da amplitude de vibração dada à característica viscosa da dissipação.

Em baixas frequências, os gradientes de velocidade são pequenos, o mesmo ocorrendo com a dissipação de energia. Nas altas frequências, o ar comporta-se como uma mola rígida, pois não tem tempo para se deslocar e não há dissipação de energia por bombeamento. Já em médias

frequências, os perfis de velocidade são tais que maximizam o amortecimento por bombeamento. A Figura 2.4 mostra alguns exemplos do mecanismo de bombeamento.

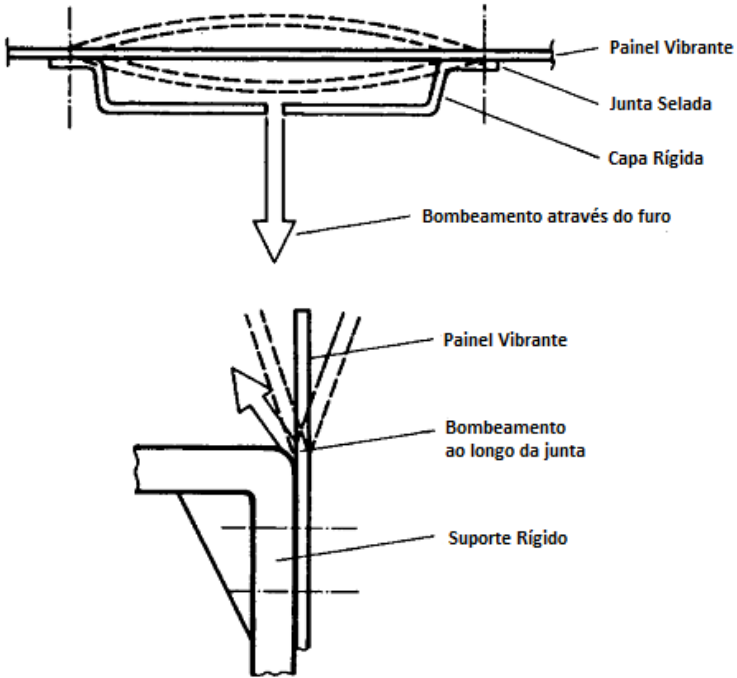


Figura 2.4: Exemplos de mecanismos de bombeamento de ar. Fonte: Adaptado de Beards [10].

2.4. ADIÇÃO DE AMORTECIMENTO

Quando o amortecimento inerente do material ou da estrutura é insuficiente, este pode ser introduzido na estrutura através de amortecedores de vibração ou com a fabricação de parte ou de toda a estrutura usando materiais com elevados coeficientes de amortecimento.

2.4.1. Ligas de alto amortecimento

A influência do amortecimento do material sobre a resposta de uma estrutura ou sistema dinâmico é geralmente muito pequena. No entanto, materiais de ligas especiais têm sido desenvolvidos de tal forma que a sua estrutura permite um aumento de amortecimento no interior do material. Todavia, este ganho de amortecimento é muitas vezes à custa de outras propriedades desejáveis, tais como, rigidez, resistência, usinabilidade e custo, de modo que estes materiais em si não são normalmente adequados para fins estruturais. Por vezes, no entanto, surgem situações em que o uso de tais materiais pode ser benéfico, como em estruturas aeroespaciais. Devido ao comportamento altamente não-linear destes materiais, seu amortecimento é usualmente avaliado experimentalmente.

Em alguns casos, como em ligas metálicas e ligas de cobre-manganês, as propriedades de amortecimento podem ser severamente alteradas através de tratamento térmico.

2.4.2. Materiais Compósitos

Um material compósito é resultante de uma combinação de dois ou mais materiais constituintes, num nível macroscopicamente homogêneo. Exemplos desses compostos são uma matriz de alumínio incorporado com fibras de boro e uma matriz de epóxi incorporado com fibras de carbono. As fibras podem ser longas ou curtas, direcionalmente alinhadas ou aleatoriamente orientadas, ou algum tipo de mistura, dependendo da utilização pretendida do material. Técnicas não convencionais de fabricação e construção são geralmente necessárias para a obtenção destes materiais.

O objetivo original dos compósitos é o de aumentar a rigidez e ao mesmo tempo reduzir o peso de uma estrutura. Isto, naturalmente, tem algum efeito sobre as propriedades dinâmicas, tanto no que se refere às frequências naturais como ao amortecimento. Os materiais compósitos são geralmente caros e a sua aplicação é frequentemente associada às áreas críticas de uma estrutura, como partes de uma fuselagem do avião ou asa, veículos espaciais e carroceria de carros de corrida. Há desvantagens, no entanto, tais como a sua baixa resistência à erosão, alto custo e dificuldades de reparação. Embora não tenham sido originalmente desenvolvidos para as suas propriedades de

amortecimento, os materiais compósitos podem possuir amortecimento elevado. Isto ocorre quando as fibras rígidas são incorporadas em material de matriz altamente amortecida. As fibras dão a resistência e a rigidez necessárias e a matriz provê o amortecimento.

2.4.3. Materiais Viscoelásticos

Amortecimento viscoelástico ocorre em muitos polímeros e é gerado pela relaxação e recuperação da cadeia polimérica quando submetida a uma deformação. Frequência e temperatura têm grande influência sobre o movimento molecular e, portanto, sobre as características de amortecimento.

Por apresentarem grande fator de amortecimento e, por conseguinte, enorme capacidade de atenuar as vibrações e diminuir as amplitudes de deslocamentos, os materiais viscoelásticos são amplamente utilizados e são de grande interesse para diversos ramos da engenharia, tais como: aeroespacial, civil, mecânica e química. Visto seu comportamento complexo em função da temperatura e da frequência, a caracterização e identificação dos materiais viscoelásticos vêm sendo alvo de inúmeros estudos e pesquisas nos últimos anos para que a aplicação destes materiais com propriedades amortecedoras seja eficaz.

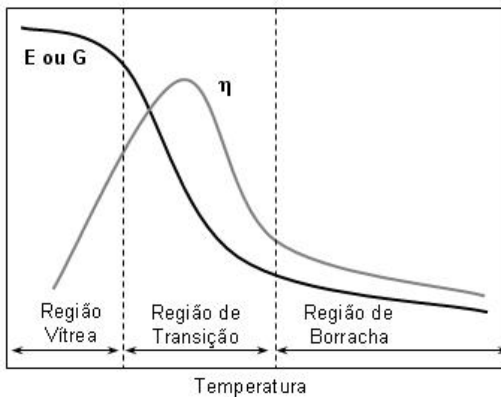


Figura 2.5: variação do fator de perda em função da temperatura, para materiais viscoelásticos. Fonte: Martínéz [7].

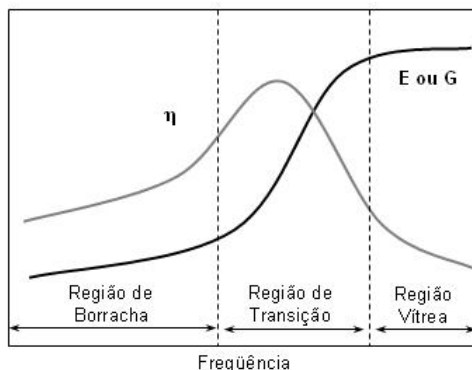


Figura 2.6: variação do fator de perda em função da frequência, para materiais viscoelásticos. Fonte: Martínéz [7].

As Figura 2.5 e 2.6 mostram a variação das propriedades dos materiais viscoelásticos em função de temperatura e frequência. Observa-se que para ambos os casos, o comportamento do material é dividido em três regiões distintas: região vítrea, região de borracha e uma região intermediária chamada de região de transição. É nesta região que os materiais viscoelásticos atingem os valores máximos de fator de perda (η). A definição de fator de perda é mostrada posteriormente, no item 2.7.2.

Em altas temperaturas o material é macio e apresenta mobilidade suficiente para que a deformação acompanhe uma tensão aplicada sem apreciável diferença de fase, desta forma o amortecimento é pequeno. Em baixas temperaturas o material é rígido, com tendência à fragilidade, e relativamente não amortecido, comportando-se como vítreo.

Por sua vez, os efeitos em frequência são opostos aos efeitos de temperatura. O aumento da frequência do carregamento causa efeitos similares à diminuição da temperatura e vice-versa.

2.5. FATORES DE AMORTECIMENTO DOS MATERIAIS

A tabela abaixo mostra o fator de amortecimento de alguns materiais típicos de construção mecânica. Uma tabela com centenas de materiais pode ser encontrada em Lazan [2].

Tabela 2.1: fator de perda típico de alguns materiais de construção mecânica.

<i>Material</i>	<i>Fator de perda, η</i>
Alumínio puro	0,00002 a 0,002
Alumínio liga - Dural	0,0004 a 0,001
Cobre	0,002
Ferro Fundido	0,003 a 0,03
Ligas cobre / manganês	0,05 a 0,1
Aço	0,001 a 0,008
Tungstênio	0,0002
Borracha - natural	0,1 a 0,3
Vidro	0,0006 a 0,002
Concreto	0,01 a 0,06
Baquelite	0,018
LD-400 viscoelástico	0,1 a 0,8
ISD-112 viscoelástico (3M)	0,5 a 2,0

2.6. MODELOS DE AMORTECIMENTO

Da mesma maneira que existem inúmeros mecanismos de geração de amortecimento nos materiais e estruturas, existem também inúmeros modelos para descrever o amortecimento. Os mais usuais são detalhados a seguir.

2.6.1. Amortecimento Viscoso

O movimento de um sistema pode ser descrito por equações diferenciais, baseadas na segunda lei de Newton, que envolvem parâmetros variáveis no tempo. Os sistemas podem também ser classificados de acordo com o número de graus de liberdade (GDL) do

movimento, ou seja, o número de coordenadas independentes necessárias para descrever o movimento.

No modelo viscoso parte-se do pressuposto de que a força de amortecimento é proporcional à velocidade, representando uma oposição ao movimento, sendo descrita pela equação:

$$F_{ac} = -c\dot{x}(t), \quad (2.1)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento viscoso e \dot{x} é a velocidade de deslocamento da massa em relação a um ponto fixo. Como exemplo de um sistema com amortecimento viscoso pode-se imaginar um pistão em um cilindro preenchido com líquido.

Considerando o sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, conforme ilustrado na Figura 2.7, sendo m a massa, k a constante elástica da mola e c o coeficiente de amortecimento viscoso e aplicando-se a segunda lei de Newton a massa m , obtêm-se a equação do movimento para vibração livre:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (2.2)$$

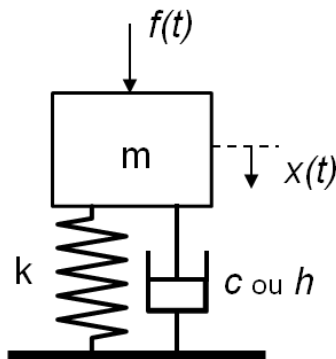


Figura 2.7: sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade.

A solução da Equação (2.2) é dada por:

$$x(t) = Ae^{st}, \quad (2.3)$$

com A e s sendo constantes arbitrárias a serem determinadas.

Substituindo a solução na equação do movimento obtêm-se as soluções para s :

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)}. \quad (2.4)$$

Usando a definição de frequência natural não-amortecida $\omega_n = \sqrt{k/m}$ define-se o amortecimento crítico c_c , que é o valor que torna o radical da Equação (2.4) igual à zero:

$$c_c = 2\omega_n m. \quad (2.5)$$

Define-se também o fator de amortecimento viscoso (ξ), que é a razão entre o coeficiente de amortecimento do sistema e o valor do amortecimento crítico:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\omega_n m}. \quad (2.6)$$

O valor de (ξ) irá determinar o comportamento das raízes $s_{1,2}$, solução da equação característica:

- para $\xi > 1$: há duas soluções reais e o sistema é dito superamortecido;
- para $\xi = 1$: há apenas uma solução real e o sistema é dito criticamente amortecido;
- para $\xi < 1$: há duas soluções complexas e o sistema é dito sub-amortecido.

Neste último caso, reescrevendo a Equação (2.4) em função do fator de amortecimento, tem-se:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n = -\xi\omega_n \pm i\omega_d, \quad (2.7)$$

onde ω_d é definida como a frequência natural amortecida e i é a unidade imaginária.

A Figura 2.8 mostra a resposta vibratória de sistemas com diferentes valores de (ξ).

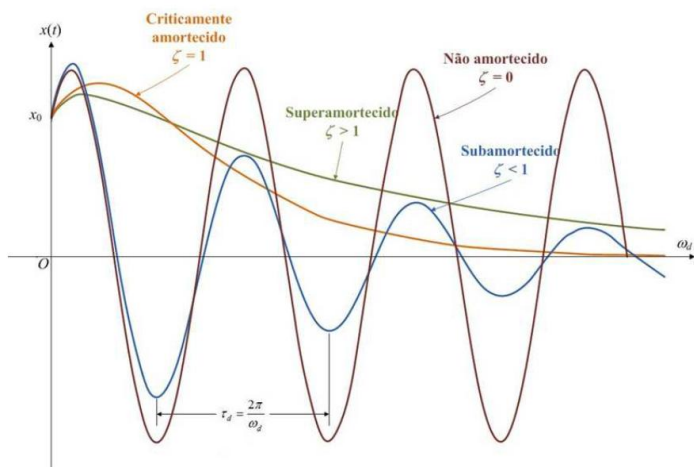


Figura 2.8: resposta vibratória de sistemas com diferentes fatores de amortecimento. Fonte: Cossolino e Pereira [31]

2.6.2. Amortecimento Histerético

Mesmo com níveis muito baixos de tensão, materiais, estruturas e compósitos não têm um comportamento perfeitamente elástico. Inelasticidades se manifestam de diferentes maneiras e levam à dissipação de energia. Materiais e sistemas em serviço são expostos a muitos tipos de carregamentos variáveis e de condições ambientais e

uma grande quantidade de mecanismos inelásticos dissipam energia. Invariavelmente, materiais e estruturas que dissipam energia sob carregamentos cíclicos apresentam um fenômeno em comum: um ciclo de histerese formado pela curva de tensão-deformação. A área dentro do laço representa a energia dissipada por ciclo e por unidade de volume, ou seja, o amortecimento. A energia geralmente é dissipada em forma de calor, mas eventualmente pode ocorrer que uma pequena parcela da energia seja absorvida por modificações estruturais internas que aumentam o nível de energia do sistema.

Alguns exemplos de laços de amortecimento lineares e não-lineares são mostrados na Figura 2.9.

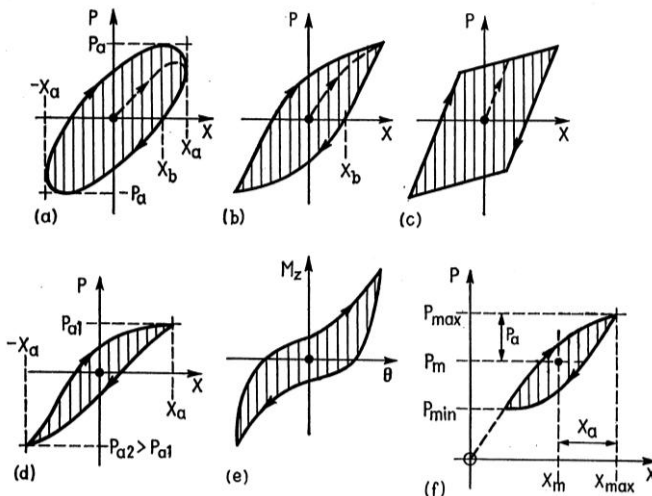


Figura 2.9: exemplos típicos de laços de histerese. (a) laço linear; (b) a (f) laços não-lineares. Fonte: Lazan [2]

O amortecimento histerético, também chamado de amortecimento sólido ou amortecimento estrutural, é geralmente atribuído às fricções internas do material geradas durante o movimento. Neste tipo de amortecimento a força de atrito é diretamente proporcional à velocidade e inversamente proporcional à frequência. Considerando a constante de amortecimento estrutural h , a força de atrito é dada por:

$$F_{ah} = -\frac{h}{\omega} \dot{x}(t). \quad (2.8)$$

Um sistema de um grau de liberdade com amortecimento histerético pode ser observado na Figura 2.7. Aplicando novamente a segunda lei de Newton à massa m , a equação do movimento de vibração forçada é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad (2.9)$$

cuja solução harmônica fica:

$$(k - \omega^2 m + ih)X(\omega) = F(\omega). \quad (2.10)$$

A equação pode ser reescrita na forma da receptância (relação X/F):

$$\frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{(k - \omega^2 m + ih)} = \frac{1/k}{1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2 + i\left(h/k\right)}, \quad (2.11)$$

onde o termo (h/k) é coeficiente de amortecimento histerético.

2.6.3. Amortecimento Não-Linear

Enquanto o amortecimento inerente em estruturas é muitas vezes ligeiramente não-linear, os modelos lineares geralmente funcionam muito bem, fornecendo constantes de amortecimento (as quais normalmente tem que ser medidas, ou estimadas a partir de estruturas semelhantes) que representam de forma satisfatória o comportamento não-linear das estruturas, permitindo que seja possível considerar variações do amortecimento com o tempo, amplitude ou temperatura.

Dois exemplos, aqui tratados, são o amortecimento de Coulomb, associado com atrito de deslizamento, onde uma força de atrito se opõe ao movimento, e o amortecimento da Lei-do-quadrado, o qual é obtido naturalmente quando um fluido é forçado através de um simples orifício.

2.6.3.1. Amortecimento de Coulomb

O amortecimento de Coulomb é resultado da dissipação de energia mecânica causada por fricção devido ao movimento relativo entre componentes e por impacto ou contato intermitente nas articulações de um sistema mecânico ou estrutura. É produzido quando o deslizamento entre superfícies secas ou com lubrificação deficiente gera uma força de atrito opondo-se ao movimento. A magnitude desta força é constante e é o produto da força normal atuando entre as superfícies em contato e do coeficiente de atrito da interface.

Uma grande proporção da energia mecânica dissipada em edifícios, pontes, trilhos e muitas outras estruturas de engenharia civil e maquinários, como robôs e veículos, ocorre através deste mecanismo de amortecimento. Neste sentido o amortecimento interno do material torna-se normalmente muito pequeno quando comparado ao amortecimento de Coulomb.

O comportamento da dissipação de energia depende do sistema mecânico em particular e, portanto, é extremamente difícil desenvolver um modelo analítico generalizado.

Um sistema vibratório livre que apresenta puramente amortecimento de Coulomb pode ser representado pela Figura 2.10.

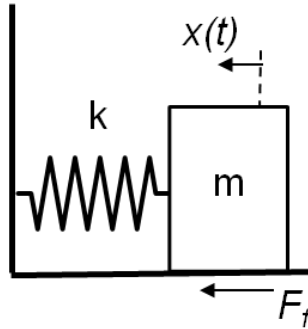


Figura 2.10: modelo de sistema com vibração livre com amortecimento de Coulomb.

A equação do movimento para o diagrama de corpo livre da Figura 2.10 é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = -\text{sgn}(\dot{x})F_f, \quad (2.12)$$

onde F_f é a força de atrito de Coulomb e $\text{sgn}(\dot{x})$ é a função sinal da velocidade definida por:

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\dot{x}) &= 1, & \text{para } \dot{x} > 0, \\ &= 0 & \text{para } \dot{x} = 0, \\ &= -1 & \text{para } \dot{x} < 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

Importante notar que sistemas com amortecimento de Coulomb apresentam o decaimento linear de amplitude e que o movimento cessa quando a amplitude do deslocamento é menor do que F_f/k pois a força da mola k já não é mais suficiente para vencer a força de atrito, conforme mostrado na Figura 2.11.

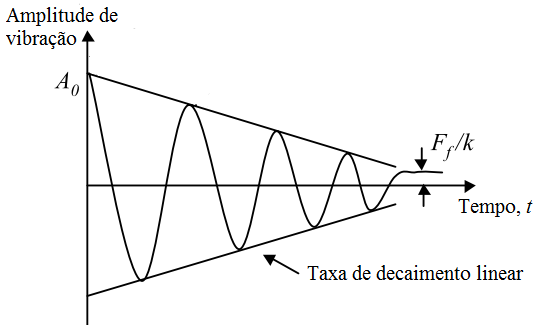


Figura 2.11: curva de decaimento característica de sistema com amortecimento de coulomb. Fonte: Adaptado de Remarks [14].

2.6.3.2. Amortecimento da Lei-do-quadrado

Este tipo de amortecimento é geralmente produzido, na prática, ao forçar o fluido hidráulico através de um pequeno orifício por alguma forma de êmbolo. O fluxo turbulento resultante implica que a pressão atuando no pistão aumenta com o quadrado da velocidade. Se o fluxo for laminar, o amortecimento resultante também será linear, mas isso raramente ocorre, por razões práticas. Na prática, um amortecedor hidráulico geralmente produz uma força proporcional ao quadrado da velocidade do pistão (Thorby [11]). A força F , produzida por um amortecedor, quando o fluido está sendo comprimido é da forma:

$$F = C_q \dot{x}^2, \quad (2.14)$$

onde C_q é o coeficiente de amortecimento da lei-do-quadrado e \dot{x} é a velocidade do pistão hidráulico.

Dispositivos com amortecimento que seguem a lei-do-quadrado são usados em aplicações de absorção de choque, mas podem também ser usados para controlar vibrações. Deve-se mencionar que os amortecedores usados em suspensões de veículos rodoviários, embora operando sob este princípio, geralmente tem uma válvula especial que muda a área do orifício com a taxa de fluxo, de modo que o dispositivo

aproxima-se de um amortecedor viscoso linear, e não como um amortecedor de lei-do-quadrado, como poderia ser esperado.

2.7. DESCRITORES DE AMORTECIMENTO

A variedade de motivos para o estudo de amortecimento, a ampla gama de materiais existentes e os diversos campos de aplicação do amortecimento na engenharia, levam a muitos pontos de vista e objetivos diferentes e também à utilização de várias técnicas experimentais para a determinação de amortecimento. Resultado disso é que na literatura aparecem diferentes unidades para expressar dados de testes de amortecimento.

Muitas áreas da ciência estão interessadas na medição de amortecimento. Físico-químicos têm conduzido estudos em polímeros e elastômeros a baixa tensão, metalurgistas trabalham com metais puros e ligas de alto amortecimento, projetistas têm utilizado todos os tipos de materiais e cada uma das áreas têm sua nomenclatura preferida. Embora a comunicação dentro de um determinado campo seja geralmente bastante eficaz, a comunicação entre as diferentes disciplinas, que muitas vezes utilizam nomenclatura diferente, é geralmente muito difícil.

A grande diversidade e ambiguidade das unidades comumente utilizadas para descrever o amortecimento não só comprometem a comunicação e o entendimento, mas também dificultam a coleta, análise e correlação de dados de amortecimento. O objetivo desta seção é apresentar os principais descritores de amortecimento encontrados na literatura e também mostrar a correlação existente entre os mesmos.

2.7.1. Razão de Amortecimento Crítico - ξ

Já definido anteriormente, a razão de amortecimento crítico também é citada na literatura como fração de amortecimento crítico, fator de amortecimento viscoso ou coeficiente de amortecimento viscoso. Em inglês, são usados os termos *damping ratio* ou *fraction of critical damping*.

A razão de amortecimento crítico é igual à razão entre o amortecimento viscoso, c e o amortecimento que teria existido, se o sistema fosse criticamente amortecido, isto é, um sistema com vibrações livres apresentando um comportamento de decaimento exponencial sem oscilações livres. A razão de amortecimento crítico é mostrada na Equação (2.6).

2.7.2. Fator de perda - η

O fator de perda de um sistema é definido em termos de energia (Liu [12]). É dado pela razão entre a energia dissipada em um ciclo de vibração e a energia vibratória total do sistema:

$$\eta = \frac{W_{diss}}{\omega E_{Tot}} = \frac{E_D}{2\pi E_{Tot}}, \quad (2.15)$$

onde W_{diss} é a potência dissipada; E_{Tot} é a energia mecânica total (armazenada), que é a soma da energia cinética e da energia potencial, $E_{Tot} = E_k + E_S$; E_D é a energia dissipada por ciclo durante o período

T ; $W_{diss} = \frac{1}{T} E_D = \frac{\omega}{2\pi} E_D$. Em inglês, o termo utilizado é *loss factor* ou *loss coefficient*.

2.7.3. Fator de Qualidade - Q

Um termo emprestado do campo da engenharia elétrica é o "fator de qualidade", Q . Este é a ampliação, em ressonância, de um circuito contendo um indutor e um capacitor, e o nome vem do fato de que é uma medida da "qualidade" do indutor, a qual é reduzida pela sua resistência interna. É análogo para a ampliação de um sistema massa-mola-amortecedor na ressonância, o que é de $1/2\xi$ para amortecimento viscoso ou de $1/\eta$ para o amortecimento histerético, ou seja:

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{\eta}. \quad (2.16)$$

Outra definição para Q é a frequência central de uma resposta ressonante dividida pela "largura de banda de meia potência", que é a largura da banda de frequência em que a magnitude da vibração está a cerca de 0,707 do valor da resposta na frequência de ressonância (Thorby [11]).

2.7.4. Capacidade específica de amortecimento - ψ

Possui uma definição similar ao fator de perda η . A diferença entre ambos reside no fato do fator de perda ser expresso por radianos e a capacidade específica de amortecimento ser expressa por ciclo de oscilação, isto é:

$$\psi = 2\pi\eta. \quad (2.17)$$

2.7.5. Taxa de Decaimento - D

Do inglês *decay rate*, indica a inclinação da curva de decaimento de vibração livre amortecida. É expresso em dB/s.

2.7.6. Decremento Logarítmico - δ

Considerando a resposta vibratória de um sistema em vibração livre amortecida (Figura 2.12), o decremento logarítmico, denotado por δ , pode ser calculado pela razão de amplitudes de diferentes ciclos de vibração.

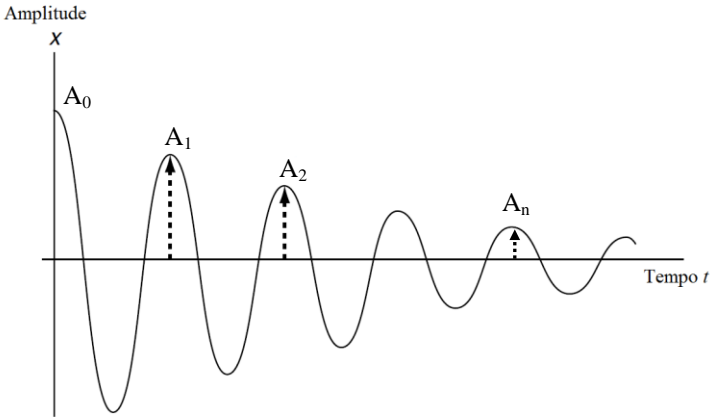


Figura 2.12: resposta de sistema com vibração livre amortecida. Fonte: adaptado de Thorby [11].

Sendo A_n a amplitude de um n -ésimo ciclo após a amplitude inicial A_0 , o decremento logarítmico pode ser calculado pela equação:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{A_0}{A_n} \right). \quad (2.18)$$

2.7.7. Constante de Tempo - τ

A constante de tempo τ é definida como o tempo que a amplitude de um sinal demora a decair de um fator de $e \approx 2,72$. Ou colocando em termos logarítmicos tem-se:

$$10 \log(e^2) = 8,7 \text{dB}. \quad (2.19)$$

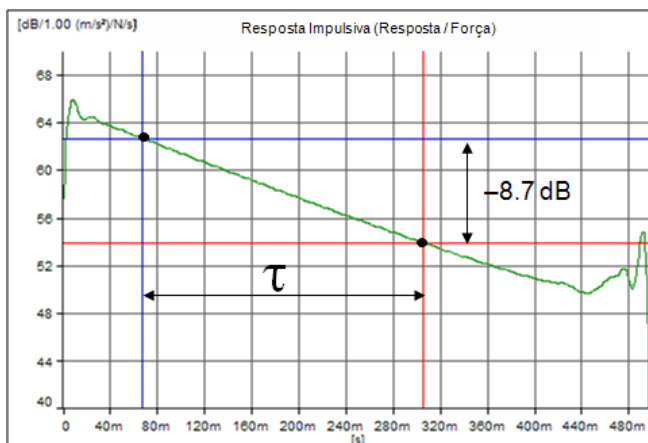


Figura 2.13: indicação da constante de tempo na curva de decaimento. Fonte: adaptado de Brüel & Kjaer [32]

2.7.8. Constante de Decaimento - σ

É definida como a inversa da constante de tempo τ . Indica quantas vezes por segundo a amplitude da vibração decai de 8,7dB.

$$\sigma = \frac{1}{\tau} \quad (2.20)$$

2.7.9. Tempo de reverberação - T_{60}

Outro estimador de amortecimento é o tempo de reverberação (T_{60}) que é amplamente utilizado na área de Acústica Arquitetônica. O T_{60} representa o tempo tomado pela energia vibratória para decair a um milionésimo (60 dB) de seu valor inicial. As curvas de decaimento são normalmente medidas em bandas de frequência, como as bandas de oitava ou um terço de oitava.

2.7.10. Inter-relação entre os descritores de amortecimento

Em medições que envolvem funções resposta em frequência, o amortecimento é usualmente representado por algum dos seguintes descritores: fator de perda, η , fração de amortecimento crítico, ξ , capacidade específica de amortecimento, ψ ou fator de qualidade, Q .

Para medições de decaimento livre, geralmente usa-se a taxa de decaimento, D , constante de tempo, τ ou tempo de reverberação, T_{60} . Na acústica arquitetônica, o tempo de reverberação é exclusivamente utilizado devido às especificações encontradas em normas internacionais publicadas há muitos anos.

Os diferentes descritores de amortecimento estão relacionados às técnicas de determinação do amortecimento e também com as respectivas áreas da ciência onde tiveram origem. Entretanto, existem relações matemáticas para expressar a correlação entre os diferentes descritores citados acima.

Neste trabalho, será detalhada apenas a correlação entre o fator de perda η e a razão de amortecimento crítico ξ que são os descritores mais amplamente utilizados atualmente para expressar o amortecimento estrutural. As expressões que relacionam os demais descritores são sintetizadas na Tabela 2.2. Cabe ressaltar que, em geral, as expressões são aproximações válidas apenas para pequenos valores de amortecimento. O trabalho publicado por Graesser [13] é uma excelente referência de consulta para as relações entre os descritores de amortecimento.

2.7.10.1. Fator de perda e razão de amortecimento crítico

A relação entre estes dois descritores de amortecimento é bastante encontrada na literatura como sendo $\eta = 2\xi$. No entanto, trata-se de uma aproximação válida para pequenos valores de amortecimento e a relação exata entre estes dois parâmetros, demonstrada por Graesser [13] é:

$$\eta = 2\xi\sqrt{1-\xi^2}. \quad (2.21)$$

A relação aproximada tem precisão de 5% para $0 \leq \eta \leq 0,3$. (Liu[12]). O gráfico da Figura 2.14 compara as duas expressões.

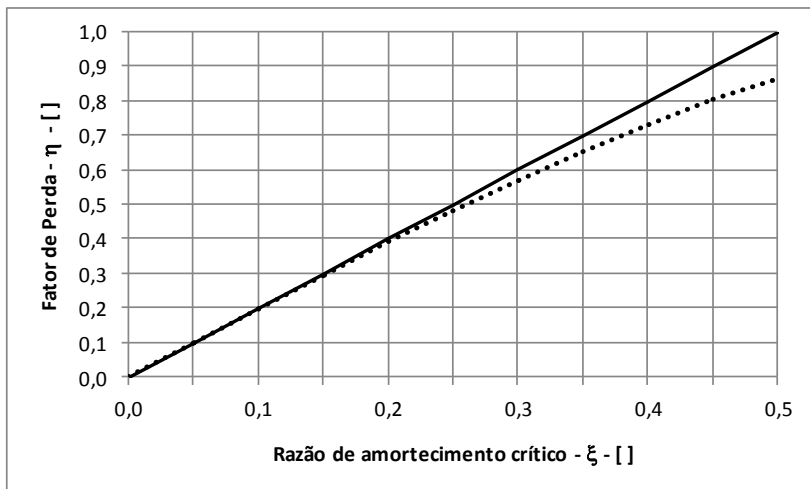


Figura 2.14: relação entre o fator de perda e a razão de amortecimento crítico. Linha cheia ($\eta = 2\xi$); linha pontilhada ($\eta = 2\xi\sqrt{1-\xi^2}$). Fonte: Adaptado de Graesser [13].

Tabela 2.2: relação entre os descritores de amortecimento. Fonte: Gade [15]

	$\eta =$	$\xi =$	$Q =$	$\sigma =$	$\tau =$	$T_{60} =$	$D =$	$\delta =$
Fator de perda η	η	$\frac{\eta}{2}$	$\frac{1}{\eta}$	$\eta\pi f_0$	$\frac{1}{\eta\pi f_0}$	$\frac{2,2}{\eta f_0}$	$4,34\omega_0\eta$	$\eta\pi$
Razão de amortecimento crítico ξ	2ξ	ξ	$\frac{1}{2\xi}$	$2\pi f_0\xi$	$\frac{1}{2\pi f_0\xi}$	$\frac{1,1}{f_0\xi}$	$8,69\omega_0\xi$	$2\pi\xi$
Fator de qualidade Q	$\frac{1}{Q}$	$\frac{1}{2Q}$	Q	$\frac{\omega_0}{2Q}$	$\frac{2Q}{\omega_0}$	$\frac{22Q}{f_0}$	$\frac{4,34\omega_0}{Q}$	$\frac{\pi}{Q}$
Constante de decaimento σ [s ⁻¹]	$\frac{2\sigma}{\omega_0}$	$\frac{\sigma}{\omega_0}$	$\frac{\omega_0}{2\sigma}$	σ	$\frac{1}{\sigma}$	$\frac{6,9}{\sigma}$	$8,69\sigma$	$\frac{\sigma}{f_0}$
Constante de tempo τ [s]	$\frac{1}{\pi f_0\tau}$	$\frac{1}{2\pi f_0\tau}$	$\pi f_0\tau$	$\frac{1}{\tau}$	τ	$6,9\tau$	$\frac{8,69}{\tau}$	$\frac{1}{f_0\tau}$
Tempo de reverberação T_{60} [s]	$\frac{2,2}{f_0 T_{60}}$	$\frac{1,1}{f_0 T_{60}}$	$\frac{f_0 T_{60}}{2,2}$	$\frac{6,9}{T_{60}}$	$\frac{T_{60}}{6,9}$	T_{60}	$\frac{60}{T_{60}}$	$\frac{6,9}{f_0 T_{60}}$
Taxa de Decaimento D [dB/s]	$\frac{D}{4,34\omega_0}$	$\frac{D}{8,69\omega_0}$	$\frac{4,34\omega_0}{D}$	$\frac{D}{8,69}$	$\frac{8,69}{D}$	$\frac{60}{D}$	D	$\frac{D}{8,69f_0}$
Decremento Logarítmico δ	$\frac{\delta}{\pi}$	$\frac{\delta}{2\pi}$	$\frac{\pi}{\delta}$	\mathcal{F}_0	$\frac{1}{\mathcal{F}_0}$	$\frac{6,9}{\mathcal{F}_0}$	$8,69\mathcal{F}_0$	δ

3. DETERMINAÇÃO DO AMORTECIMENTO

Ao proceder com uma análise de resposta dinâmica de uma estrutura, assume-se que as propriedades físicas do sistema (rigidez, massa e amortecimento) sejam conhecidas. Na maioria dos casos, a massa e a rigidez estrutural pode ser avaliadas com relativa facilidade, geralmente através de medições triviais ou simples equações matemáticas generalizadas. Por outro lado, os mecanismos de perdas de energia que existem em estruturas práticas raramente são completamente compreendidos, visto que o amortecimento é dado pela combinação de diferentes mecanismos, tornando extremamente complexa a tarefa de modelar ou prever analiticamente os fatores de amortecimento (Clough [29]). Por esta razão, o amortecimento, na maioria dos sistemas estruturais, deve ser avaliado diretamente a partir de testes experimentais.

Existem vários métodos diferentes para a determinação experimental do amortecimento. Estes podem ser grosseiramente divididos em três grupos (Gade [15]):

- Método de decaimento livre no domínio do tempo;
- Métodos Energéticos ou de Potência de Entrada;
- Métodos de ajuste de curvas.

A escolha do método de determinação de amortecimento depende de diversos fatores, entre os quais podem ser citados: tamanho e complexidade da estrutura, densidade modal, espaçamento entre frequências naturais, existência de modos acoplados, quantidade de amortecimento, não-linearidades.

Ainda dentro de cada método, existem diferentes formas de condução do experimento que irão influenciar a precisão da determinação do amortecimento. Entre as variáveis presentes estão: formas de excitação, formas de medição da resposta da estrutura, aquisição dos dados (janelamento, taxa de amostragem, filtros), e, por fim, variáveis relacionadas ao processamento de sinais (resolução espectral, método de ajuste de curvas).

Inicialmente, este capítulo irá descrever os métodos de determinação de amortecimento e, em seguida, abordar brevemente as principais variáveis que contribuem para a qualidade e precisão da medição e cálculo do amortecimento estrutural. Obviamente, cada um dos métodos tem suas vantagens e desvantagens, além de limitações de uso, que serão abordadas neste texto. Ênfase será dada aos métodos de ajuste de curvas, que são o foco deste trabalho.

3.1. FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

As funções resposta em frequência ou FRFs são o dado de entrada para muitos dos métodos de determinação de amortecimento e por isso, é importante que alguns conceitos e definições sejam bem compreendidos.

As FRFs, descrevem a relação entre as amplitudes complexas das forças aplicadas e as amplitudes complexas das consequentes respostas de um sistema em regime permanente. Uma FRF é uma função da frequência medida entre dois pontos da estrutura e é uma característica dela, independente da força aplicada.

Caso a FRF expresse a relação entre excitação e resposta no mesmo ponto da estrutura, ela é dita pontual. Tratando-se de pontos distintos, a FRF é de transferência.

Na prática, o sinal mecânico da entrada é uma força que excita a estrutura em uma determinada faixa de frequências, com amplitudes e fase conhecidas, medidas através de um transdutor de força. Os métodos mais comuns de excitação da estrutura são através de atuador eletromagnético, também chamado de *shaker* ou através de martelo de impacto.

Tanto os sinais de força como os de resposta (e estes podem ser expressos em termos de aceleração, velocidade ou deslocamento) são medidos no tempo e as FRFs são calculadas através da transformada de Fourier.

Dependendo de como a FRF é expressa, ela recebe um nome particular. As designações mais comuns de FRF são mostrados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: tipos de FRFs.

Tipo da resposta	Resposta/Excitação	Excitação/Resposta
Deslocamento	Receptância	Rigidez Dinâmica
Velocidade	Mobilidade	Impedância Mecânica
Aceleração	Inertância	Massa Aparente

3.2. MÉTODO DO DECAIMENTO LIVRE

Baseia-se na observação da evolução temporal de dissipação de energia. Em particular, é esperado que a resposta da estrutura tenha um decaimento exponencial quando um único modo é excitado. Em faixas de frequências onde a densidade modal é alta, a curva de evolução temporal mostra geralmente batimentos, devido à superposição de modos com diferentes amortecimentos. Isso dificulta o ajuste de uma linha reta na curva logarítmica do decaimento, necessária para obter o valor do amortecimento. Este método é mais adequado para estruturas levemente amortecidas e nos intervalos de baixas frequências.

O método do decaimento é bastante popular para aplicações gerais de controle de ruído e vibrações por ser simples, rápido e não exigir muitos equipamentos (Lenzi, [9]). O método também denominado Decremento Logarítmico consiste em interromper subitamente o suprimento de energia ao componente sendo ensaiado, e registrar o decaimento da energia vibratória.

De acordo com Remarks [14], a ideia original de se utilizar o decaimento de um sistema com vibração livre com amortecimento viscoso foi proposta por em 1863 por Helmholtz, que a utilizou para determinar informações de frequência de notas musicais. Foi, no entanto, Rayleigh, que em 1877 cunhou o termo “decremento logarítmico” para a estimativa do amortecimento. A equação que descreve analiticamente o sistema de amortecimento de vibração livre, representada pela resposta da Figura 2.12 é:

$$y(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \quad (3.1)$$

onde a Equação 3.1 representa um movimento harmônico com decaimento exponencial de amplitude ($Ae^{-\xi\omega_n t}$) e um ângulo de fase ϕ . Uma vez que a amplitude depende da razão de amortecimento (ξ), a taxa de decaimento da amplitude consequentemente depende da quantidade de amortecimento no sistema.

Por sua vez, o decremento logarítmico, denotado por δ , pode ser calculado pela razão de amplitudes de diferentes ciclos de vibração, conforme demonstrado no item 2.7.6 e pela Equação 2.18.

Apesar de sua popularidade, este método tem desvantagens. A primeira é o limite de uso. Uma estrutura cujo fator de perda é 0,16, vibrando livremente, dissipa quase toda a sua energia vibratória em um ciclo (Martinez [7]).

Este método pode ser usado para medição do amortecimento de um único modo ressonante ou a medição da média do amortecimento de um grupo de modos numa banda de frequências. De acordo com Lenzi [9], complicações surgem neste método quando existe um grande número de modos dentro da banda de frequência em análise. O decaimento medido é sempre determinado pelo modo de menor amortecimento (maior tempo de decaimento), subestimando o valor de amortecimento dos demais modos. Em estruturas pouco amortecidas, a diferença entre este método e o método da potência de entrada pode chegar a 10dB.

Conforme Lima [42], em função do grande número de modos, as inclinações das curvas do tempo de reverberação de cada banda de frequências podem ficar distorcidas, desta forma o resultado do fator de perda não pode ser determinado com alto grau de precisão.

De acordo com Gade [15], o uso do método não é recomendado para estruturas cujos fatores de perda sejam superiores que 5% para análises em 1/1 de oitavas, 1,7% para 1/3 de oitavas e a 0,4% para 1/12 de oitavas, devido às características dos filtros passa-banda.

No que diz respeito à excitação da estrutura, idealmente deve ser feita com excitadores de não-contato para evitar que, durante o decaimento, uma quantidade significativa de energia seja dissipada pelo excitador. O martelo de impacto é uma boa alternativa, mas tem limitações para excitar frequências mais altas.

3.3. MÉTODO DA POTÊNCIA DE ENTRADA OU BALANÇO DE ENERGIA

O conceito do método está diretamente baseado na definição de perdas estruturais de energia. Assim, não há nenhuma limitação teórica na aplicação do método em banda larga.

Este método é uma aplicação direta da definição do fator de perda η que é a razão da energia dissipada pelo sistema por ciclo de oscilação pela energia vibratória total do sistema.

Esta definição pode ser escrita na forma de equação:

$$\eta = \frac{E_{diss/ciclo}}{2\pi M \langle \bar{V}^2 \rangle} = \frac{W_{diss}}{2\pi f M \langle \bar{V}^2 \rangle} = \frac{W_{diss}}{\omega M \langle \bar{V}^2 \rangle}, \quad (3.2)$$

onde W_{diss} é a potência dissipada, M é a massa da estrutura, $\langle \bar{V}^2 \rangle$ é a velocidade média quadrática temporal e espacial e $(M \langle \bar{V}^2 \rangle)$ é a energia vibratória total.

A aplicação desta definição requer que sejam respeitadas três premissas:

a) a perda de energia por amortecimento é predominante sobre qualquer outro tipo de perda de energia (radiação acústica, amortecimento devido à interface com outras estruturas ou mecanismos de amortecimento não lineares);

b) toda energia transferida para o componente (W_{ent}) é dissipada pelo amortecimento estrutural, ou seja, $W_{diss} = W_{ent}$. Devido a esta premissa, muitas vezes este método é chamado de (*Power Injeted Method - PIM*);

c) a energia total E_{Tot} é dada pela soma da energia potencial E_S e da energia cinética E_k . A energia potencial não pode ser calculada e nas frequências de ressonância do sistema a energia total pode ser aproximada por duas vezes a energia cinética ($E_{Tot} \cong 2E_k$). Sendo assim, é necessário que o sistema considerado tenha elevada densidade

modal para que a definição seja válida em toda faixa de frequências considerada.

Experimentalmente, a potência de entrada pode ser estimada através de medição da FRF pontual e da força no ponto de excitação:

$$W_{ent} = \frac{1}{2} F_i^2 \operatorname{Re}(\langle \bar{Y}_i \rangle) \quad (3.3)$$

onde F_i é o valor complexo da força aplicada e $\operatorname{Re}(\langle \bar{Y}_i \rangle)$ é a parte real da mobilidade (velocidade / força) da estrutura onde a força é aplicada.

Considerando que tanto excitação como respostas devem ser medidos em inúmeros pontos para ter uma melhor representação espacial, o fator de amortecimento, em função da frequência, pode ser calculado por:

$$\eta(f) = \frac{\operatorname{Re}(\langle \bar{Y}_p \rangle)}{2\pi f M \langle |Y_t|^2 \rangle} \quad (3.4)$$

onde $\langle \bar{Y}_t \rangle$ são funções mobilidade de transferência, medidas entre os diferentes pontos de excitação e resposta do sistema considerado.

Cuidado especial deve ser tomado quando da medição de estruturas leves, como é o caso de chapas finas, onde a radiação acústica pode chegar a ser dominante, particularmente quando o amortecimento estrutural é relativamente baixo. Neste caso, o fator de perda total que será medido inclui um fator de perda por amortecimento e o um fator de perda por radiação acústica. Nestes casos, é comum efetuar as medições de fator de perda em câmara de vácuo.

Em algumas aplicações, a estrutura em análise não pode ser desconectada de outros sistemas. Assim, o fator de perda total envolve todas as formas de vazamento de energia de uma estrutura, inclusive o fator de perda pelo amortecimento nas interfaces com outros subsistemas. Isto é essencialmente importante e pode ser estendido a aplicações onde seja necessário determinar fatores de acoplamento entre sistemas.

3.4. MÉTODOS DE AJUSTE DE CURVAS

Uma análise modal fornece um conjunto de parâmetros modais que caracterizam o comportamento dinâmico de uma estrutura. Estes parâmetros modais formam o modelo modal e é a extração (ou estimativa) dos parâmetros modais que está no caminho entre os dados experimentais e os parâmetros modais que são: frequências naturais (ou modais ou ressonantes), formas modais e fatores de amortecimento.

O ponto de partida é geralmente um conjunto de dados medidos, mais comumente FRFs, mas que também pode ser seu equivalente no domínio do tempo, as IRFs, que passam por um processo de ajuste de curvas.

As técnicas de ajuste de curvas tentam fazer corresponder os dados medidos, com uma determinada expressão analítica, ajustando os dados até obter a melhor solução possível. Em outras palavras, é um processo para determinar um modelo matemático que seja coerente com o conjunto de dados medidos e uma das formas que isto pode ser feito é minimizando as diferenças quadradas entre os dados analíticos e os dados medidos.

Uma vez definidas as expressões analíticas, os parâmetros modais, incluindo o amortecimento, podem ser calculados. A dificuldade em identificar os modos surge quando a densidade modal e amortecimento aumentam.

De acordo com Iglesias [16], a base da formulação teórica das técnicas de extração modal só pode ser estabelecida para sistemas que respeitem quatro aspectos:

- são sistemas lineares;
- são temporalmente invariáveis;
- seu comportamento dinâmico pode ser descrito por uma equação diferencial de segunda ordem e obedece ao Teorema de reciprocidade de Maxwell;
- possuem amortecimento menor que o crítico (sub-amortecidos).

Estruturas ou sistemas que satisfaçam às premissas acima permitem obter FRFs que podem ser ajustadas usando a maioria dos algoritmos de ajuste de curvas. Qualquer violação das premissas leva a dificuldades no ajuste de curvas e a erros nos parâmetros modais resultantes (Formenti e Richardson [17]).

3.4.1. Linearidade

Talvez a suposição de linearidade seja violada na maioria das vezes, ao testar estruturas reais. O tipo mais comum de não-linearidade está associado com estruturas que apresentam mecanismos de enrijecimento ou amolecimento. A resposta destas estruturas depende do nível de excitação utilizada para medir as FRFs.

Estruturas não-lineares são problemáticas porque não exibem modos clássicos de vibração. Modos de vibração são definidos apenas para as estruturas lineares. Do ponto de vista da dinâmica estrutural, uma estrutura não-linear pode ser considerada como uma família de sistemas lineares por partes, com um sistema diferente linear para cada nível de excitação RMS. Isso significa que para estruturas não-lineares, o controle do nível de excitação durante o processo de medição é bastante crítico, motivo pelo qual, a impactação é totalmente desaconselhada para estes casos.

Muitos outros tipos de não-linearidades podem estar presentes em estruturas e todas implicam em dificuldades no processo de ajuste de curvas.

A verificação da linearidade é feita assegurando-se de que as FRFs medidas são independentes das amplitudes de excitação aplicada na estrutura. O teste de linearidade é conduzido medindo-se repetidamente a FRF em um ponto da estrutura, enquanto a amplitude da força de entrada é variada. As várias FRFs medidas devem permanecer inalteradas e esta verificação pode ser feita sobrepondo as curvas medidas.

3.4.2. Invariância Temporal ou Repetibilidade

Esta é a premissa que na maioria dos casos é a mais fácil de controlar. Por exemplo, se a estrutura sob teste muda seu comportamento dinâmico com a temperatura e a umidade, estes parâmetros devem ser controlados durante o teste. A invariância temporal pode ser um grande problema em estruturas que variam sua massa ao longo do tempo, como um míssil em voo, onde a massa varia devido ao consumo de combustível.

A avaliação da repetibilidade serve para garantir que o comportamento dinâmico e o sistema de medição não variam ao longo do tempo e é especialmente importante em casos onde a obtenção das FRF ocorre em diferentes medições. É importante garantir que, para uma dada força de entrada e um dado ponto de resposta, a FRF obtida seja a mesma durante todo o processo de medição. A repetibilidade da estrutura deve ser verificada pelo menos no início e no final de cada etapa de medição. Este processo trivial de verificar a repetibilidade das FRFs de alguns pontos garante não apenas que o comportamento da estrutura é constante, mas também que as condições de teste permaneceram inalteradas.

3.4.3. Equações de segunda ordem e reciprocidade

Muitos dos métodos modais assumem que a resposta dinâmica da estrutura pode ser modelada por uma equação diferencial de segunda ordem com matrizes simétricas de massa, rigidez e amortecimento. O pressuposto da reciprocidade também advém da simetria das matrizes. A reciprocidade nada mais é do que a igualdade entre uma FRF medida num dado ponto A com excitação em um ponto B e a FRF medida em B com excitação no ponto A.

Para um sistema de MDOF com movimento livre amortecido, as soluções da equação característica, $s_{1,2}$, apresentadas na Equação 2.7, podem ser reescritas para cada r -ésimo modo de vibração como:

$$s_r = \omega_{n_r} \left(-\zeta_r + i\sqrt{1 - \zeta_r^2} \right), \quad (3.6)$$

e o seu par conjugado:

$$s_r^* = \omega_{n_r} \left(-\zeta_r - i\sqrt{1 - \zeta_r^2} \right). \quad (3.7)$$

Considerando agora o sistema com vibração forçada, a receptância $\alpha_{jk}(\omega)$, definida como o deslocamento resposta j devido à

força de excitação k , com todas as outras forças iguais a zero, é dada por:

$$H(\omega) = \alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{{}_r A_{jk}}{i\omega - s_r} + \frac{{}_r A_{jk}^*}{i\omega - s_r^*} \right), \quad (3.8)$$

onde a constante N é o número de modos; ${}_r A_{jk} = {}_r \phi_j {}_r \phi_k$ é chamada de constante modal ou ainda resíduo e, ${}_r \phi_j$ é o j -ésimo elemento do r -ésimo auto-vetor $\{\phi\}_r$, associado a forma modal do modo r . As duas raízes (s_r e s_r^*) da equação característica também são chamadas de pólos da função de transferência.

O processo de ajuste de curva consiste em obter dos dados experimentais uma expressão aproximada a expressão analítica (Equação 3.8) dentro de uma faixa de frequências. Neste processo, alguns ou todos os parâmetros modais do modelo são determinados. Pelo menos uma linha ou coluna da matriz de FRFs deve ser determinada para que seja possível calcular os pólos modais (frequência e amortecimento) e obter uma linha (ou coluna) de resíduos modais (formas modais) para cada modo considerado da estrutura.

3.4.4. Fontes de erros dos estimadores modais

Segundo Lee e Richardson [18], quando qualquer procedimento de estimativa de parâmetros é aplicado a um conjunto de dados experimentais, alguns erros podem ocorrer. Em particular, o processo de ajuste de curvas de um conjunto de FRFs as principais fontes de erros são:

- Resolução espectral insuficiente;
- Distorções na medição;
- Ruído na medição;
- Determinação do tamanho do modelo ou número de modos;
- Termos residuais.

3.4.4.1. Resolução espectral insuficiente

Pode ser um problema dependendo do tipo do algoritmo de ajuste de curva utilizado. De forma geral, os estimadores locais com um grau de liberdade são aplicados na FRF na vizinhança de cada pico de ressonância. Conseqüentemente deve haver um número de pontos suficientes nas regiões de ressonância para que o ajuste seja preciso. Não há uma regra fixa para determinar o número de pontos necessários para não haver problemas decorrentes da discretização e diferentes autores apresentam diferentes recomendações. Lee e Richardson [18] recomendam de 5 a 10 pontos entre as frequências de meia potência. Gade e Herlufsen [15] indicam que são necessários ao menos 10 pontos no mesmo intervalo de frequência.

Os estimadores de múltiplos graus de liberdade são menos sensíveis à baixa discretização, pois buscam o ajuste das FRFs procurando os coeficientes que minimizam o erro ao longo de toda a FRF e não apenas dos pontos no entorno dos picos. Entretanto, estes estimadores são mais sensíveis à "forma" das FRFs e podem estimar os parâmetros modais com maior precisão que a resolução das FRFs propriamente ditas, deste que o formato das curvas seja o que mais se aproxima do formato da expressão (3.8).

3.4.4.2. Distorções na medição

Do ponto de visto do ajuste de curvas, este é o aspecto que mais compromete a qualidade dos estimadores modais. Distorção é causada por não-linearidades da estrutura ou por efeitos de truncamento de sinais.

Outra causa comum de distorção nas FRFs é o truncamento dos sinais no domínio do tempo devido ao período de tempo finito do analisador de sinais. Este efeito de janelamento do sinal é conhecido como espalhamento. As distorções por espalhamento acontecem especialmente nas vizinhanças dos picos de ressonância, onde os dados são mais críticos para o processo de ajuste. Espalhamentos podem ser eliminados pelo uso de sinais periódicos para a excitação da estrutura ou podem ser minimizados pela aplicação de janelas temporais nos sinais de resposta.

3.4.4.3. Ruído na medição

Inúmeras são as possíveis fontes de ruído e de incertezas nas medições. Algumas delas são:

- fixação da estrutura sob teste;
- linearidade da resposta dos transdutores;
- ruído tribo-elétrico;
- efeitos de fixação e localização dos transdutores e excitadores;
- processo de conversão analógico-digital.

Todas estas fontes de erro devem ser controladas ou minimizadas, pois contaminam as FRFs, tornando mais difícil a estimativa dos parâmetros modais.

3.4.4.4. Determinação do tamanho do modelo (número de modos)

A etapa mais crítica no ajuste de curva é escolher a ordem do modelo ou equivalente, determinar quantos modos são representados nas FRFs. Os problemas já mencionados (resolução de frequência, distorção na medição e ruído na medição), juntamente com a densidade modal, e raízes repetidas (modos na mesma frequência com formas de modo diferente), todos têm um efeito direto sobre a determinação correta do tamanho do modelo. O tamanho do modelo, por sua vez, afeta diretamente a precisão da estimativa de parâmetros obtidos por ajuste de curva.

A maioria dos programas comerciais de ajuste de curvas exige que o operador escolha a ordem do modelo. Métodos de decomposição em valores singulares (SVD) e métodos iterativos com base em minimização de erros foram desenvolvidos recentemente para auxiliar o operador na escolha do tamanho do modelo, mas a distorção, ruído, alta densidade modal e raízes repetidas ainda podem tornar difícil a escolha do tamanho correto do modelo.

3.4.4.5. Termos residuais

Termos residuais são expressões simplificadas incluídas no modelo de resposta em frequência para explicar a influência dos modos fora da faixa de frequência de interesse (Fladung et al[20]). Os termos residuais também são descritos como "representação assintótica de outros modos", "termos de correção" e "termos de compensação".

Importante salientar que, em inglês, existem dois termos similares e que não podem ser confundidos: "*residuals*", aqui traduzido como termos residuais, representa os termos de correção dos modos fora da faixa de ajuste; "*residues*", aqui traduzido como resíduos, são os termos relacionados às formas modais, conforme já descritos anteriormente.

Considerando os termos residuais, a Equação (3.8), pode ser reescrita:

$$H(\omega) = [R_i(\omega)] + \sum_{r=1}^N \left(\frac{r A_{jk}}{i\omega - s_r} + \frac{r A_{jk}^*}{i\omega - s_r^*} \right) + [R_s(\omega)], \quad (3.9)$$

onde $[R_i(\omega)]$ representa os modos da região inferior e $[R_s(\omega)]$ os modos da região superior de frequências.

Os termos residuais da região inferior representam o termo de inércia dos modos de frequência mais baixa, por isso algumas vezes são referidos como inércia residual. Já os termos residuais da região superior representam a rigidez dos modos de mais alta frequência e por isso são também chamados de flexibilidade residual.

A Figura 3.1 mostra o ajuste de um modo de uma FRF sem a utilização dos termos residuais que representam os modos vizinhos. Já a Figura 3.2 representa o ajuste da mesma FRF, agora considerando os termos residuais. Observa-se que os pontos vizinhos ao pico de ressonância são mais bem representados quando os termos residuais são considerados.

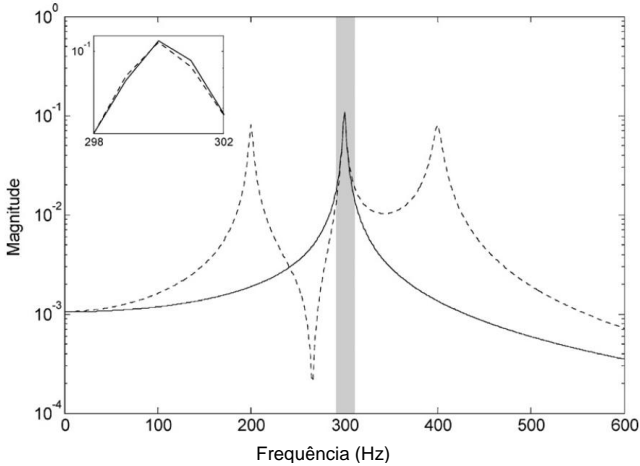


Figura 3.1: comparação entre curva medida (linha tracejada) e curva ajustada (linha cheia) sem a presença de termos residuais. Fonte: Fladung [20].

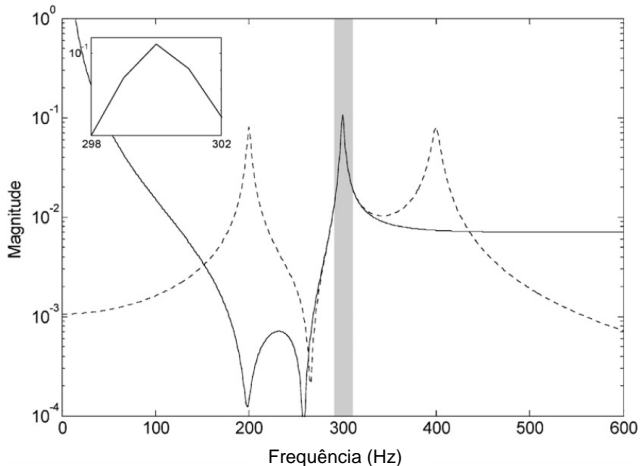


Figura 3.2: comparação entre curva medida (linha tracejada) e curva ajustada (linha cheia) com a presença de termos residuais. Fonte: Fladung [20].

O uso dos termos residuais é limitado a modelos no domínio da frequência, porque os efeitos dos modos fora da faixa de ajuste não são facilmente descritos no domínio do tempo. No domínio da frequência, a contribuição dos modos abaixo, e acima da faixa de frequência de

interesse pode ser separada e expressões simplificadas para os termos residuais podem ser facilmente formuladas. Mas, no domínio do tempo, os modos de interesse e os modos residuais respondem igualmente em toda curva de resposta, isto é, a resposta dos modos na faixa de interesse e fora da faixa de interesse não pode ser separada em segmentos de tempo de resposta.

A complexidade dos termos residuais está diretamente associada à separação entre os modos dentro da faixa de interesse e os modos fora da faixa de interesse. Quando mais próximos estiverem os modos fora da faixa de interesse dos modos da faixa de interesse, maior será o número de termos residuais necessários para representar apropriadamente a contribuição dos modos fora da faixa de interesse.

Os termos residuais são mais importantes nas FRFs pontuais visto que nestas funções, todas as contribuições dos modos da região inferior apresentam fases semelhantes, isto é, há uma soma construtiva de todos os termos. Para as FRFs de transferência, as constantes modais podem apresentar fases opostas, de forma que suas contribuições podem vir a se cancelar (Jordan [21]).

3.4.5. Classificação dos Métodos de identificação de Parâmetros Modais

A maior parte dos estimadores foi desenvolvida no domínio da frequência, e isto se deve principalmente ao fato de que, usualmente, os dados de resposta estão disponíveis neste domínio. Métodos no domínio da frequência também apresentam a interessante característica de que os efeitos dos modos de fora da faixa de frequência de análise podem ser explicados por termos residuais, ou através do aumento da ordem do modelo. Métodos no domínio do tempo, ao contrário, só podem gerar estimativas para os modos dentro da faixa de frequência de análise, não importa quão alto seja a ordem assumida do modelo (Snoeys et al[22]). Todavia, em termos gerais, os métodos no domínio do tempo são melhores para faixas de frequências grandes ou grande número de modos quando comparados aos métodos no domínio da frequência (Silva [36]).

Tanto métodos no domínio do tempo como métodos no domínio da frequência podem ser divididos em métodos diretos e métodos indiretos (ou modais). Nos métodos indiretos a identificação das FRFs é

feita através do modelo modal, isto é, através dos parâmetros modais (frequências naturais, fatores de amortecimento, constantes modais e suas fases). Já nos métodos diretos, a identificação da FRF é feita com base no modelo espacial, ou seja, através da equação geral de equilíbrio dinâmico da qual todos os métodos são derivados.

Outra classificação dos métodos de identificação de parâmetros modais pode ser feita de acordo com o número de modos que podem ser analisados. De acordo com Formenti [17], estes algoritmos podem ser agrupados em quatro categorias:

- local com um grau de liberdade (Local SDOF);
- local com múltiplos graus de liberdade (Local MDOF);
- global;
- múltiplas-referências (*Polyreference*).

3.4.5.1. Estimador Local com um grau de liberdade

Estes algoritmos utilizam apenas uma medição de cada vez e estimam os parâmetros de um modo de cada vez. Em alguns casos, nem todos os parâmetros modais são determinados no processo de ajuste e, por exemplo, a frequência natural pode ser aproximada utilizando-se a frequência do pico de ressonância da FRF.

Estimadores SDOF geralmente apresentam resultados satisfatórios com estruturas que apresentam modos desacoplados e baixa densidade modal.

3.4.5.2. Estimador Local com múltiplos graus de liberdade

Assim como os estimadores locais de um grau de liberdade, estes também utilizam uma medição de cada vez (ver Figura 3.3), mas podem estimar os parâmetros de vários modos de uma só vez. Podem tratar modos fortemente acoplados seja devido ao efeito de alto amortecimento, seja por pequena separação em frequência dos modos.

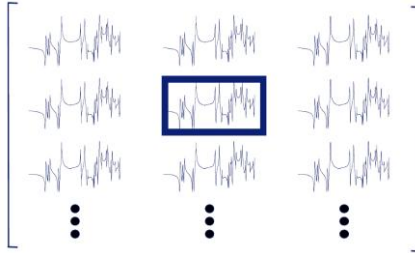


Figura 3.3: matriz de FRFs indicando a seleção de uma única função. Procedimento adotado pelos estimadores locais. Fonte: LMS [20].

3.4.5.3. Estimador Global

A expressão dos termos dos parâmetros modais mostra claramente que todas as FRFs de uma estrutura apresentam o mesmo denominador, uma vez que possuem os mesmos pólos (frequência natural e amortecimento). Os numeradores, que são os resíduos, são diferentes para cada uma das FRFs. Os estimadores globais fazem uso deste fato e utilizam um grande número de FRFs para estimar os parâmetros modais. Este processo resulta em uma estimativa global de frequências de ressonância e amortecimentos para cada modo e, usualmente, fornece uma melhor estimativa das formas modais, especialmente próximo aos pontos de nó, onde os resíduos são pequenos e mal definidos.

Estes estimadores comumente utilizam uma linha ou uma coluna (ver Figura 3.4) da matriz de FRFs.

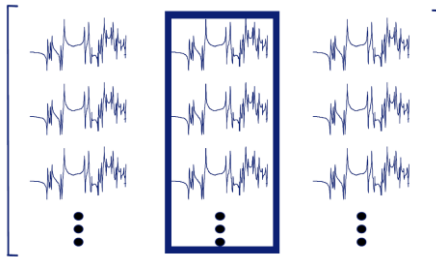


Figura 3.4: matriz de FRFs indicando a seleção de uma linha inteira de funções. Procedimento adotado pelos estimadores globais. Fonte: LMS [20].

3.4.5.4. Estimador de múltiplas referências

Estes algoritmos são uma extensão da ideia empregada nos estimadores globais. Neste caso, utilizam múltiplas referências, isto é, múltiplas linhas ou colunas da matriz de FRFs (ver Figura 3.5). Como cada linha ou coluna da matriz de resíduos contém a forma modal de cada modo, os estimadores de múltiplas referências aproveitam esta característica para obter estimativas adicionais das formas modais através do ajuste de múltiplas linhas ou colunas da matriz de FRFs. Estas múltiplas estimativas são combinadas de maneira a favorecer a referência onde cada modo é mais fortemente representado (isto é, maior participação modal), garantindo uma melhor estimativa de cada forma modal.

Este método permite identificar modos com raízes repetidas (dois ou mais modos com aproximadamente a mesma frequência, mas com diferentes formas modais). Isto não é possível com apenas uma linha ou coluna da matriz de FRFs.

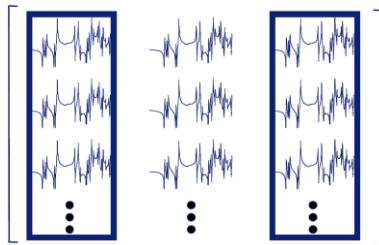


Figura 3.5: matriz de FRFs indicando a seleção de mais de um coluna de funções. Procedimento adotado pelos de múltiplas referências. Fonte: LMS [20].

Neste ponto cabe abrir um parêntese e discutir algumas questões referentes à Análise modal de múltiplas referências (*Multi-reference*) e a Análise Modal de Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas (*Multiple-Input Multiple-Output - MIMO*).

3.4.6. Análise Modal de múltiplas referências

Como já citado acima, alguns casos de análises modais requerem medições de mais de uma referência, isto é, mais de uma linha ou mais de uma coluna da matriz de FRFs. Além do caso de modos com raízes repetidas, a medição de múltiplas referências também é necessária quando não é possível identificar um bom ponto de excitação para todos os modos que se deseja analisar. A estrutura pode, por exemplo, exibir diferentes modos, com deflexões modais predominantes em diferentes partes da estrutura, tornando impossível achar um ponto de excitação onde todos os modos têm participação modal suficiente para um adequado processo de extração modal. Estes modos são usualmente chamados de modos locais e ocorrem, por exemplo, em estruturas complexas compostas de várias partes com diferentes propriedades estruturais.

O caso de raízes repetidas ocorre principalmente em estruturas com algum grau de simetria. O número mínimo de referências necessárias deve ser (pelo menos) igual ao número de modos em uma mesma frequência.

No caso de análise modal com excitação através de um excitador eletromecânico o conjunto de dados de múltiplas referências pode ser obtido simplesmente medindo-se uma coluna de cada vez, isto é, as medições são feitas com o excitador em uma posição, em seguida o excitador é posicionado em outra posição e assim por diante.

Uma solução muito melhor é usar mais de um excitador simultaneamente e executar um teste de múltiplas entradas e múltiplas saídas.

3.4.7. Análise modal de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO)

Este teste é inerentemente um teste de múltiplas referências. A principal vantagem de um teste MIMO é que as forças de excitação são distribuídas em diferentes locais da estrutura. Isso proporciona uma resposta vibratória mais homogênea ao longo da estrutura, especialmente em casos de estruturas grandes e complexas e estruturas com grande amortecimento. Em estruturas deste tipo, o uso de força

concentrada em um único ponto pode resultar em um comportamento não-linear que deteriora a qualidade da estimativa dos parâmetros modais. Excitação em mais de um ponto geralmente fornece uma representação mais próxima das forças de excitação as quais a estrutura esta submetida durante sua operação cotidiana.

O teste MIMO também economiza tempo e melhora a consistência dos dados medidos.

Uma comparação sintetizada dos métodos de extração modal é dada na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: comparação entre os métodos de ajuste de curvas. Fonte: Adaptado de Richardson [19].

Método	Vantagens	Desvantagens
Local SDOF	<ul style="list-style-type: none"> - Rápido - Fácil de usar 	<ul style="list-style-type: none"> - Bom apenas para baixo acoplamento modal
Local MDOF	<ul style="list-style-type: none"> - Bom para alto acoplamento modal - Bom para medições com ruído 	<ul style="list-style-type: none"> - Requer experiência para escolha do número de modos. - Resultados ruins para modos locais e pontos de nós.
Global	<ul style="list-style-type: none"> - Estimativa global de frequências e de amortecimento. - Lida bem com modos locais e pontos nodais. 	<ul style="list-style-type: none"> - Apresenta erros quando medições têm variações de amortecimento e frequência. - Erros em modos com excitação deficiente.
<i>Polyreference</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Bom com raízes repetidas 	<ul style="list-style-type: none"> - Resultados ruins para medições inconsistentes.

3.5. MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DO AMORTECIMENTO

3.5.1. Método da banda de meia-potência ou Seleção de Pico

O método de seleção de pico ou método de banda meia-potência é o método mais rudimentar de todos os métodos de ajuste de curvas. Na verdade, geralmente este método não é implementado como um processo de ajuste de curvas, e sim, como um mero caso de interpolação dos pontos de meia-potência. É um método de um grau de liberdade (GDL) para fazer estimativas locais de frequência modal e do amortecimento. O método é baseado na observação que a resposta do sistema atinge um ponto de máxima amplitude (pico) próximo a frequência natural. O valor de frequência onde o valor extremo é observado é chamado de frequência de ressonância ω_r e é uma boa aproximação da frequência natural não-amortecida para sistemas com baixo amortecimento (ver Figura 3.6).

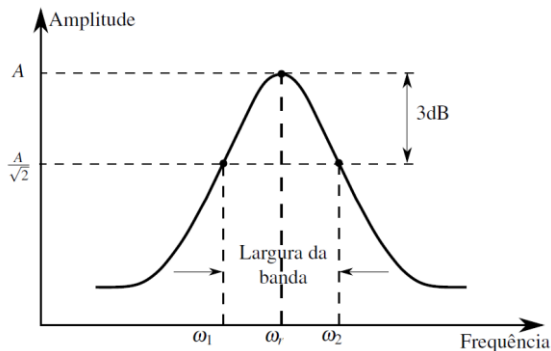


Figura 3.6: determinação dos pontos ω_1 e ω_2 , definindo a banda de meia-potência. Fonte: Bratti [30].

O amortecimento pode ser estimado encontrando-se os pontos ω_1 e ω_2 , em ambos os lados do pico da FRF, que correspondem à metade da amplitude (3dB abaixo) da frequência de ressonância. Os pontos ω_1 e ω_2 são chamados de pontos de meia potência e é daí que

vem o nome do método. Estes pontos também podem ser indicados com a frequência expressa em ciclos por segundo [Hz], e neste caso os termos são denotados por f_1 , f_2 e f_r . A razão de amortecimento crítico é calculada pela relação:

$$\zeta = \frac{\Delta\omega}{2\omega_r} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_r} = \frac{f_2 - f_1}{2f_r} \quad (3.10)$$

Este método é particularmente sensível à resolução espectral e erros significativos podem ser introduzidos em FRFs com baixa resolução onde há grandes probabilidades do valor de pico dos modos ficarem entre duas linhas espectrais. Em inglês, usa-se o termo "*bias*" para indicar este tipo de erro, que em português é chamado de Erro de Discretização na Frequência.

Lyon [23] recomenda que para uma boa estimativa do fator de perda, a largura de banda de meia potência ($\Delta f = f_2 - f_1$) da ressonância analisada deve possuir pelo menos cinco pontos em frequência. Por outro lado, se a estrutura é pouco amortecida, as ressonâncias serão extremamente agudas e consequentemente esta recomendação será difícil de ser respeitada. Nesses casos devem ser utilizados analisadores digitais de sinais com alta resolução ou utilizar as opções de *zoom* da transformada rápida de Fourier (FFT) na largura de banda analisada.

Este método está limitado à não presença de interferência modal, caso em que ocorre uma superposição (parcial ou total) dos picos de resposta de dois ou mais modos.

Observa-se da Equação (3.10) que se um sistema possui amortecimento constante, a largura da banda deve aumentar à medida que as frequências de ressonâncias o fazem. Assim, mesmo que um sistema possua um número de modos por banda constante, ocorrerá uma superposição de picos de ressonância, o que consequentemente dificultará a leitura da largura de banda.

A interferência modal é um fenômeno que também aparece nas respostas de estruturas com alto grau de amortecimento, devido ao alargamento dos picos. Nesta situação, pelo menos um dos pontos de meia potência não pode ser determinado, devido à proximidade dos picos ou ao fato da amplitude da curva decair menos do que 3dB.

Por todos estes fatores citados, observa-se que método está limitado a determinar o amortecimento de modos simples, bem definidos e devidamente espaçados. Entretanto, devido à facilidade de medição e principalmente devido à extrema simplicidade matemática do método, encontra inúmeras aplicações e seu uso é indicado por diversas normas internacionais que tratam sobre a medição de amortecimento, incluindo a ASTM E756 – *Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials* [24] e SAE J1637 – *Laboratory Measurement of the Composite Vibration Damping Properties of Materials on a Supporting Steel Bar* [25]. Importante ressaltar que esta última recomenda que a resolução em frequência das FRFs não deve ser pior do que 0,1Hz.

3.5.2. Método Polyreference Time Domain- PTD

Também conhecido como método da Exponencial Complexa Polyreference (PRCE), este método é uma versão de múltiplas referências do método da Exponencial Complexa dos Mínimos Quadrados (LSCE - *Least Square Complex Exponential*), que por sua vez é uma extensão do método da Exponencial Complexa (CE). O método foi desenvolvido em 1982 por Vold (Maia e Silva [38]) e é uma técnica de extração de parâmetros de dois estágios. No primeiro estágio, os valores de frequência natural amortecida e de amortecimento são extraídos a partir dos dados no tempo. As constantes modais ou resíduos são então calculados no segundo estágio (Allemang e Brown [37]).

O método da Exponencial Complexa é baseado na Equação de um sistema com amortecimento viscoso (Equação 3.8) que pode ser reescrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \left(\frac{r A_{jk}}{\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega'_r)} \right), \quad (3.11)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \omega'_r &= \omega_r \sqrt{(1 - \xi_r^2)} \\
 \omega'_{r+N} &= -\omega'_r \\
 {}_{r+N}A_{jk} &= {}_rA_{jk}^*
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

O método trabalha com a IRF da Equação 3.11 que é obtida através da transformada inversa de Fourier:

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} {}_rA_{jk} e^{s_r t} = \sum_{r=1}^{2N} A'_r e^{s_r t}, \tag{3.13}$$

onde: $s_r = -\omega_r \xi_r + i\omega'_r$. A FRF é medida em intervalos igualmente separados de frequência Δf . Por sua vez, a resposta no tempo $h(t)$, com L intervalos igualmente espaçados de $\Delta t = (1 / \Delta f)$ é dada por:

$$h_l = h(l\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A'_r V_r^l \quad \text{para } l=0, 1, 2, \dots, L, \tag{3.14}$$

onde: $V_r = e^{s_r \Delta t}$. Os valores de A'_r e V_r são desconhecidos. A solução foi proposta por Prony em 1975 (Maia e Silva, [38]). Considerando um número de amostras L maior que $4N$, esta equação pode ser usada para estabelecer um problema de autovalores cuja solução leva às frequências naturais contidas nos parâmetros V_r .

Sempre existe um polinômio em V_r , de ordem L , com coeficientes reais β (chamados de coeficientes auto-regressivos) que podem formar a seguinte combinação:

$$\beta_0 + \beta_1 V_r + \beta_2 V_r^2 + \dots + \beta_L V_r^L = 0, \tag{3.15}$$

ou

$$\sum_{j=0}^L \beta_j V_r^j = 0. \quad (3.16)$$

Multiplicando os coeficientes β em ambos os lados da Equação 3.14 e somando os resultados temos:

$$\sum_{j=0}^L \beta_j V_r^j = \sum_{j=0}^L \left(\beta_j \sum_{r=1}^{2N} (A'_r V_r^j) \right) = \sum_{r=1}^{2N} \left(A'_r \sum_{j=0}^L \beta_j V_r^j \right). \quad (3.17)$$

O somatório interior do último termo desta equação é a mesma da Equação 3.15. Para encontrar os coeficientes β_j consideramos por conveniência $L=2N$, então:

$$\sum_{j=0}^{2N} \beta_j h_j = 0 \quad , \quad \forall V_r \quad \text{com } r = 1, 2, 3, \dots, 2N \quad (3.18)$$

Fixando $\beta_{2N} = 1$, a Equação 3.18 pode ser rearranjada da seguinte maneira:

$$\sum_{j=0}^{2N-1} \beta_j h_j = -h_{2N} \quad , \quad (3.19)$$

ou escrita em forma vetorial:

$$\left\{ \begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{matrix} \right\} = -h_{2N}. \quad (3.20)$$

Poder-se-ia repetir este processo com base na Equação 3.14 usando um conjunto diferente de dados. Considera-se agora o mesmo conjunto de dados, mas deslocado por um intervalo de tempo Δt , isto é:

$$\left\{ \begin{matrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{2N} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{matrix} \right\} = -h_{2N+1}, \quad (3.21)$$

Aplicando sucessivamente este procedimento, chegamos ao conjunto de $2N$ equações:

$$\left[\begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{2N-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{2N-1} & h_{2N} & h_{2N+1} & \dots & h_{4N-2} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} h_{2N} \\ h_{2N+1} \\ \vdots \\ h_{4N-1} \end{matrix} \right\}, \quad (3.22)$$

ou

$$\underset{(2N \times 2N)}{[h]} \underset{2N \times 1}{\{\beta\}} = \underset{2N \times 1}{\{h'\}} \Leftrightarrow \{\beta\} = -[h]^{-1} \{h'\}. \quad (3.23)$$

Conhecendo os coeficientes $\{\beta\}$, é possível calcular as raízes para cada V_r com a Equação 3.15. Usando a Equação $V_r = e^{s_r \Delta t}$ e seu correspondente valor conjugado complexo, pode-se determinar as frequências naturais e fatores de amortecimento. Inserindo os valores de V_r na Equação 3.14 encontram-se os valores das constantes modais e a fase da FRF, resolvendo-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ V_1 & V_2 & \cdots & V_{2N} \\ V_1^2 & V_2^2 & \cdots & V_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{2N-1} & V_2^{2N-1} & \cdots & V_{2N}^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \\ \vdots \\ A'_{2N} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{2N-1} \end{Bmatrix}, \quad (3.24)$$

Para obter uma matriz quadrada de $2N \times 2N$ são considerados somente os primeiros $2N$ valores de h_j . De fato, é suficiente tomar N valores devido a que V_r e A'_r aparecem em pares complexos conjugados.

O método da Exponencial Complexa não precisa de estimativas iniciais dos parâmetros modais, mas deve ser inserido um número inicial de modos (graus de liberdade) na análise. Como estimativa inicial é comum considerar um número superestimado de modos e posteriormente separar os modos genuínos dos modos computacionais. Outra forma de determinar o número correto de modos é realizar a análise repetidas vezes, reduzindo o número de modos a cada vez e verificar a o erro entre as curvas medidas e as curvas sintetizadas pelo algoritmo.

Uma alternativa para o cálculo do número correto de modos é determinar o rank da matriz de coeficientes utilizada para o cálculo dos autovalores.

Considerando agora a extensão do método CE (SISO) para o método LSCE (SIMO), reescrevemos a Equação 3.23 para m IRFs para calcular os coeficientes β que são solução do polinômio da Equação 3.15:

$$\begin{bmatrix} [h]_1 \\ [h]_2 \\ \vdots \\ [h]_m \end{bmatrix} \{\beta\} = \begin{Bmatrix} \{h'\}_1 \\ \{h'\}_2 \\ \vdots \\ \{h'\}_m \end{Bmatrix}, \quad (3.25)$$

ou ainda:

$$\begin{bmatrix} h_G \\ (2Nm \times 2N) \end{bmatrix} \{ \beta \} = \begin{bmatrix} h'_G \\ (2N \times 1) \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

A solução de mínimos quadrados pode ser encontrada através da técnica pseudo-inversa dada por:

$$\{ \beta \} = \left([h_G]^T [h_G] \right)^{-1} [h_G]^T \{ h'_G \}. \quad (3.27)$$

O problema associado ao correto número de modos ainda permanece. O cálculo do rank da matriz $[h_G]$ da Equação 3.26 pode ser utilizado como um indicador do número de modos.

Como citado anteriormente, o método PTD é uma extensão do método LSCE para múltiplas entradas. O equacionamento detalhado deste método é apresentado por Maia e Silva [38], páginas 193 a 199.

A maior desvantagem do método PTD é sua sensibilidade à não-linearidades e à falta de reciprocidade na matriz de FRFs.

3.5.3. Método EigenSystem Realization - ERA

Este método foi introduzido por Juang e Pappa e consiste de uma técnica MIMO de realização balanceada baseada na decomposição de subespaços ortogonais. O objetivo fundamental do método é obter a realização mínima, ou seja, ajustar um modelo em espaço de estado de ordem mínima que descreva as características dinâmicas do sistema, a partir da resposta ao impulso. Posteriormente, os parâmetros modais são calculados através da resolução de um autoproblema envolvendo a matriz do sistema realizado (Maia e Silva [38]).

As equações dinâmicas de equilíbrio de um sistema com amortecimento viscoso de N graus de liberdade podem ser expressas como:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(x(t)), t\}. \quad (3.28)$$

Definindo um vetor de estado de dimensões $2N \times 1$, tem-se:

$$\{u(t)\}_{(2N \times 1)} = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix}, \quad (3.29)$$

Definindo também:

$$[A']_{(2N \times 2N)} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\{f(x, t)\}_{(N \times 1)} = [F]_{(N \times q)} \{\delta(t)\}_{(q \times 1)}, \quad (3.31)$$

$$[B']_{(2N \times q)} = \begin{bmatrix} [0] \\ [M]^{-1}[F] \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

onde $\{\delta(t)\}$ é o vetor de entradas em q posições e $[F]$ é a matriz de coeficientes de entrada, a Equação 3.28 pode ser reescrita em espaço de estado como:

$$\{\dot{u}(t)\}_{(2N \times 1)} = [A']_{(2N \times 2N)} \{u(t)\}_{(2N \times 1)} + [B']_{(2N \times q)} \{\delta(t)\}_{(q \times 1)}. \quad (3.33)$$

É possível relacionar $\{u(t)\}$ com as respostas medidas em p pontos com coordenadas físicas $\{x(t)\}$ através da matriz de transformação $[R]$:

$$\{x(t)\}_{(p \times 1)} = [R]_{(p \times 2N)} \{u(t)\}_{(2N \times 1)}. \quad (3.34)$$

A solução da Equação 3.33 para uma entrada $\{\delta(t)\}$ é dada por:

$$\{u(t)\} = e^{[A'](t-t_0)}\{u(t_0)\} + \int_{t_0}^t e^{[A'](t-\tau)}[B']\{\delta(\tau)\}d\tau, \quad (3.35)$$

para qualquer tempo t depois de um tempo inicial t_0 . Para obter uma representação discreta da Equação 3.35, são considerados diversos intervalos de tempo igualmente espaçados, $0, \Delta t, \dots, k\Delta t$. Tomando $t = (k+1)\Delta t$ e $t_0 = k\Delta t$:

$$\{u((k+1)\Delta t)\} = e^{[A']\Delta t}\{u(k\Delta t)\} + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{[A']((k+1)\Delta t-\tau)}[B']\{\delta(\tau)\}d\tau \quad (3.36)$$

Assumindo que a entrada $\{\delta(\tau)\}$ é constante durante o intervalo de tempo $k\Delta t \leq \tau \leq (k+1)\Delta t$, dado por $\{\delta(k\Delta t)\}$ e fazendo a mudança de variável $\tau' = (k+1)\Delta t - \tau$, segue que:

$$\{u((k+1)\Delta t)\} = e^{[A']\Delta t}\{u(k\Delta t)\} - \int_0^{\Delta t} e^{[A']\tau'}d\tau'[B']\{\delta(k\Delta t)\}. \quad (3.37)$$

Seja:

$$[A] = e^{[A']\Delta t}, \quad (3.38)$$

$$[B] = -\int_0^{\Delta t} e^{[A']\tau'}d\tau'[B'], \quad (3.39)$$

$$\{u(k+1)\} = \{u((k+1)\Delta t)\}, \quad (3.40)$$

$$\{\delta(k)\} = \{\delta(k\Delta t)\}. \quad (3.41)$$

Assim, a Equação 3.37 pode ser escrita como:

$$\{u(k+1)\} = [A]\{u(k)\} + [B]\{\delta(k)\} \quad \text{para } k=0,1,2, \dots \quad (3.42)$$

A Equação 3.34 então torna-se:

$$\{x(k)\} = [R]\{u(k)\}. \quad (3.43)$$

Considerando a resposta a um impulso em $k=0$ e em uma das primeiras variáveis de entrada. Como este: $\{\delta(0)\} = \{1,0,\dots,0\}^T$ e $\{\delta(k)\} = \{0\}$ para $k > 0$. Substituindo na Equação 3.42:

$$\{u(1)\} = [A]\{u(0)\} + [B], \quad (3.44)$$

e portanto:

$$\{x(1)\} = [R]\{u(1)\}. \quad (3.45)$$

Substituindo a Equação 3.44 na Equação 3.45:

$$\{x(1)\} = [R][A]\{u(0)\} + [R][B]. \quad (3.46)$$

Considerando, por simplicidade, $\{u(0)\} = \{0\}$, tem-se:

$$\{u(1)\} = \{B\}, \quad (3.47)$$

e,

$$\{x(1)\} = [R] \{B\} . \quad (3.48)$$

$(p \times 1)$ $(p \times 2N)$ $(2N \times 1)$

Para os demais intervalos de tempo, $\{\delta(k)\} = \{0\}$. Desta maneira:

$$\{u(2)\} = [A]\{u(1)\}, \quad (3.49)$$

e portanto:

$$\{x(2)\} = [R][A]\{B\} . \quad (3.50)$$

Da mesma maneira:

$$\{x(3)\} = [R]\{u(3)\} = [R][A]^2\{B\} . \quad (3.51)$$

Generalizando:

$$\{x(k)\} = [R] [A]^{k-1} \{B\} , \quad (3.52)$$

$(p \times 1)$ $(p \times 2N)$ $(2N \times 2N)$ $(2N \times 1)$

Por fim, considerando o impulso em todas as posições de entrada q , segue que:

$$[X(k)] = [R] [A]^{k-1} [B] . \quad (3.53)$$

$(p \times q)$ $(p \times 2N)$ $(2N \times 2N)$ $(2N \times q)$

As matrizes $[X(k)]$ são usualmente chamadas de parâmetros de Markov e são utilizadas para formar matrizes generalizadas de Hankel, dadas por:

$$[H(k-1)] = \begin{matrix} (prxs) \\ \left[\begin{array}{cccc} [X(k)] & [X(k+1)] & \dots & [X(k+j)] \\ [X(k+1)] & [X(k+2)] & \dots & [X(k+j+1)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [X(k+i)] & [X(k+i+1)] & \dots & [X(k+i+j)] \end{array} \right] \end{matrix}, \quad (3.54)$$

onde $i = 1, \dots, r-1$ e $j = 1, \dots, s-1$, onde r e s são inteiros. Se existe uma medição de resposta de estado inicial, $[H(k-1)]$ é simplesmente substituída por $[H(k)]$. Na Equação 3.54, k será maior ou igual a 1. Substituindo 3.53 na Equação 3.54 tem-se:

$$[H(k)] = [Q][A]^k[W] \quad k \geq 0, \quad (3.55)$$

onde:

$$[Q] = \begin{matrix} (prx2N) \\ \left[\begin{array}{c} [R] \\ [R][A] \\ \vdots \\ [R][A]^{r-1} \end{array} \right] \end{matrix}, \quad (3.56)$$

e,

$$[W] = \begin{matrix} (2Nxqs) \\ \left[[B] \quad [A][B] \quad \dots \quad [A]^{r-1}[B] \right] \end{matrix}. \quad (3.57)$$

As matrizes $[Q]$ e $[W]$ são chamadas de observabilidade e controlabilidade, respectivamente. Importante lembrar que $[H(k)]$ é a matriz de respostas conhecidas e que uma vantagem deste método é que é possível levar em conta apenas respostas boas, isto é, respostas com elevado ruído podem ser removidas do processo de cálculo. O objetivo deste método é reconstruir a Equação 3.53 a partir dos dados experimentais. Este processo é conhecido como realização e implica na determinação das matrizes $[R]$, $[A]$ e $[B]$. Existem infinitas

combinações destas matrizes que podem satisfazer a Equação 3.53, isto é, existem infinitas realizações. O objetivo é obter a realização mínima, correspondente a mínima ordem da formulação do espaço de estado que ainda represente o comportamento dinâmico da estrutura.

Em um primeiro momento procura-se uma matriz $[H]'$ tal que:

$$\begin{matrix} [W] & [H]' & [Q] & = & [I] \\ (2N \times qs) & (qs \times pr) & (pr \times 2N) & & (2N \times 2N) \end{matrix}, \quad (3.58)$$

pré e pós multiplicando por $[Q]$ e $[W]$, respectivamente:

$$[Q][W][H]'[Q][W] = [Q][W]. \quad (3.59)$$

Porém, a partir da Equação 3.55 fica claro que:

$$[Q][W] = [H(0)], \quad (3.60)$$

e desta maneira:

$$[H(0)][H]'[H(0)] = [H(0)], \quad (3.61)$$

e, por conseguinte, $[H]'$ é a pseudo-inversa de $[H(0)]$:

$$[H]'^+ = [H(0)]^+. \quad (3.62)$$

A pseudo-inversa de $[H(0)]$ pode ser calculada através de Decomposição de Valores Singulares:

$$[H(0)] = \begin{matrix} [U] & [\Sigma] & [V]^T \\ (pr \times qs) & (pr \times pr) & (pr \times qs) \end{matrix}. \quad (3.63)$$

A matriz $[H(0)]$ tem $2N$ valores não-singulares ($\text{rank} = 2N$), equivalente a ordem do sistema de espaço de estado. $[H(0)]$ é então recalculada utilizando apenas as primeiras $2N$ colunas de $[U]$ e $[V]$:

$$[H(0)] = [U_{2N}] [\Sigma_{2N}] [V_{2N}]^T, \quad (3.64)$$

$(prxqs) \quad (prx2N) \quad (2Nx2N) \quad (2Nxqs)$

com:

$$[U_{2N}] [U_{2N}]^T = [V_{2N}] [V_{2N}]^T = [I]. \quad (3.65)$$

A matriz $[H]' (= [H(0)]^+)$ é então dada por:

$$[H]' = [V_{2N}] [\Sigma_{2N}]^{-1} [U_{2N}]^T. \quad (3.66)$$

Para obter a realização desejada, parte-se da Equação 3.53, que, para $k \geq 0$, pode ser escrita como:

$$[X(k+1)] = [R][A]^k [B], \quad (3.67)$$

e com o uso da identidade:

$$[X(k+1)] = [E_p]^T [H(k)] [E_q], \quad (3.68)$$

$(pxq) \quad (pxr) \quad (prxqs) \quad (qsxq)$

onde:

$$[E_p]^T = \begin{bmatrix} [I] & [0] & \dots & [0] \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$[E_q] = \begin{bmatrix} [I] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Utilizando as Equações 3.55, 3.58, 3.60, 3.64, 3.65 e 3.66, é possível mostrar que:

$$\begin{aligned} [X(k+1)] &= [[E_p]^T [U_{2N} [\Sigma_{2N}]^{1/2}] \\ &\quad [[\Sigma_{2N}]^{1/2} [U_{2N}]^T [[Q][A]^k [W]] [V_{2N} [\Sigma_{2N}]^{1/2}] \\ &\quad [[\Sigma_{2N}]^{1/2} [V_{2N}]]^T [E_q], \end{aligned} \quad (3.71)$$

que após algumas manipulações matemáticas fica:

$$\begin{aligned} [X(k+1)] &= [[E_p]^T [U_{2N} [\Sigma_{2N}]^{1/2}] \\ &\quad [[\Sigma_{2N}]^{1/2} [U_{2N}]^T [H(1)] [V_{2N} [\Sigma_{2N}]^{1/2}]^k \\ &\quad [[\Sigma_{2N}]^{1/2} [V_{2N}]]^T [E_q]. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Comparando as Equações 3.72 e 3.67 fica claro que a realização desejada pode ser alcançada, onde:

$$[R] = [E_p]^T [U_{2N} [\Sigma_{2N}]^{1/2}], \quad (3.73)$$

$$[A] = [\Sigma_{2N}]^{1/2} [U_{2N}]^T [H(1)] [V_{2N} [\Sigma_{2N}]^{1/2}], \quad (3.74)$$

$$[B] = [\Sigma_{2N}]^{1/2} [V_{2N}]^T [E_q]. \quad (3.75)$$

para determinar os parâmetros modais do sistema, deve-se solucionar um autoproblema baseado na matriz "realizada" $[A]$ dado por:

$$[A]\{\Psi_u\} = \lambda\{\Psi_u\}. \quad (3.76)$$

Por fim, para obter as formas modais em termos das coordenadas físicas do sistema, é preciso usar novamente a matriz de transformação $[R]$:

$$\{\Psi_x\} = [R]\{\Psi_u\}. \quad (3.77)$$

Este método fornece controle sobre os modos calculados, para distingui-los entre modos reais e computacionais. Este controle é resultado da Decomposição de Valores Singulares que em alguns casos pode não estar correto, devido a ruído ou não-linearidades.

3.5.4. Método Rational Fractional Polynomial - RFP

Este método apareceu pela primeira vez em 1982 como um método SISO que logo em seguida foi transformado em um método MIMO. Neste método, a FRF é expressa na forma de frações racionais ao invés de frações parciais e a função erro a ser minimizada é estabelecida de forma que o sistema de equações resultante seja linear, sem a necessidade de estimativas iniciais dos parâmetros modais. Como o sistema de equações lineares envolve matrizes que são mal-condicionadas, as frações racionais são expressas em forma de polinômios ortogonais de Forsythe. Por esta razão, este método é também conhecido como *Rational Fraction Orthogonal Polynomial*.

As FRFs, em termos de receptâncias, para um sistema linear com amortecimento viscoso de N graus de liberdade podem ser expressas como:

$$\alpha(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r + i\omega B_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i2\xi_r \omega_r \omega}, \quad (3.78)$$

onde A_r e B_r são constantes. A equação 3.78 pode ser reescrita com a razão de dois polinômios em $i\omega$:

$$\alpha(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega)^k}. \quad (3.79)$$

Esta é a forma de fração racional da receptância. A função erro entre a FRF analítica $\alpha(\omega)$ e os valores experimentais $\tilde{\alpha}(\omega)$ para cada frequência ω_j , é definido como:

$$e_j = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega_j)^k}{\sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega_j)^k} - \tilde{\alpha}(\omega_j). \quad (3.80)$$

Trabalhando com a função de erro modificada

$$e'_j = e_j \sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega_j)^k \text{ e fazendo } b_{2N} = 1,$$

$$e'_j = e_j \sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega_j)^k - \tilde{\alpha}(\omega_j) \left[\sum_{k=0}^{2N-1} b_k (i\omega_j)^k + (i\omega_j)^{2N} \right]. \quad (3.81)$$

Definindo um vetor erro, incluindo todas as L frequências medidas:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_L \end{Bmatrix}. \quad (3.82)$$

A Equação 3.81 torna-se:

$$\{E\} = \underset{(L \times 1)}{[P]} \underset{(L \times 2N)}{\{a\}} - \underset{(L \times 2N)}{[T]} \underset{(2N \times 1)}{\{b\}} - \underset{(L \times 1)}{\{W\}}. \quad (3.83)$$

Para calcular os coeficientes polinomiais $\{a\}$ e $\{b\}$ é utilizado um procedimento de mínimos quadrados, minimizando a função erro J , definida como:

$$J = \{E^*\}^T \{E\}, \quad (3.84)$$

onde * denota o conjugado complexo. Substituindo a Equação 3.83 na Equação 3.84, e após algumas manipulações, tem-se:

$$J = \{a\}^T \operatorname{Re}([P^*]^T [P]) \{a\} + \{b\}^T \operatorname{Re}([T^*]^T [T]) \{b\} + \{W^*\}^T \{W\} - 2\{a\}^T \operatorname{Re}([P^*]^T [T]) \{b\} - 2\{a\}^T \operatorname{Re}([P^*]^T \{W\}) + 2\{b\}^T \operatorname{Re}([T^*]^T \{W\}), \quad (3.85)$$

sendo que J pode ser minimizado tomando suas derivadas em relação a $\{a\}$ e $\{b\}$ e igualando-as a zero:

$$\operatorname{Re}\left([P^*]^T [P]\right)\{a\} - \operatorname{Re}\left([P^*]^T [T]\right)\{b\} - \operatorname{Re}\left([P^*]^T \{W\}\right) = \{0\}, \quad (3.86)$$

$$\operatorname{Re}\left([T^*]^T [T]\right)\{b\} - \operatorname{Re}\left([T^*]^T [P]\right)\{a\} + \operatorname{Re}\left([T^*]^T \{W\}\right) = \{0\}, \quad (3.87)$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} [Y] & [X] \\ [X]^T & [Z] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}, \quad (3.88)$$

onde:

$$\begin{aligned} [Y] &= \operatorname{Re}\left([P^*]^T [P]\right) \\ [X] &= -\operatorname{Re}\left([P^*]^T [T]\right) \\ [Z] &= \operatorname{Re}\left([T^*]^T [T]\right) \\ [G] &= \operatorname{Re}\left([P^*]^T \{W\}\right) \\ [F] &= -\operatorname{Re}\left([T^*]^T \{W\}\right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

A Equação 3.88 contém as equações normais de um problema de mínimos quadrados. Caso as matrizes $[Y]$ e $[Z]$ sejam identidade, a solução Equação 3.88 deixa de ser mal-condicionada. Sendo assim, ao invés de $[Y] = \operatorname{Re}\left([P^*]^T [P]\right)$ e $[Z] = \operatorname{Re}\left([T^*]^T [T]\right)$, estas matrizes serão representadas pelo produto de duas matrizes ortonormais. Assim, $[P]$ deve ser substituída por:

$$[P] = \begin{bmatrix} \varphi_{1,0} & \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,2N-1} \\ \varphi_{2,0} & \varphi_{2,1} & \cdots & \varphi_{2,2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{L,0} & \varphi_{L,1} & \cdots & \varphi_{L,2N-1} \end{bmatrix} = [G], \quad (3.90)$$

onde $\varphi_{j,i}$ é o polinômio de ordem i , solucionado na frequência ω_j . Da mesma forma, $[T]$ agora é dado por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(\omega_1) & & & \\ & \tilde{\alpha}(\omega_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\alpha}(\omega_L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1,0} & \theta_{1,1} & \dots & \theta_{1,2N-1} \\ \theta_{2,0} & \theta_{2,1} & \dots & \theta_{2,2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{L,0} & \theta_{L,1} & \dots & \theta_{L,2N-1} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

$$= [\tilde{\alpha}][\Theta],$$

e:

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\alpha}(\omega_1)\theta_{1,2N} \\ \tilde{\alpha}(\omega_2)\theta_{2,2N} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}(\omega_L)\theta_{L,2N} \end{Bmatrix}. \quad (3.92)$$

Desta forma, é necessário encontrar as funções complexas φ e θ , tal que os produtos $\text{Re}\left([P^*]^T [P]\right)$ e $\text{Re}\left([T^*]^T [T]\right)$, sejam matrizes unitárias. Isto é possível se φ e θ forem polinômios complexos ortonormais.

A FRF é então escrita em termos destes polinômios, com c_k e d_k como são constantes, ao invés de a_k e b_k :

$$\alpha(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} c_k \varphi_k}{\sum_{k=0}^{2N} d_k \theta_k}. \quad (3.93)$$

Para que os produtos $\text{Re}([P^*]^T [P])$ e $\text{Re}([T^*]^T [T])$, sejam matrizes unitárias, os polinômios φ devem ser calculados usando uma função de ponderação unitária e os polinômios θ devem ser calculados usando uma função de ponderação dada por $|\tilde{\alpha}^2|$. Voltando para a Equação 3.79, e desenvolvendo-a para um caso de 2 GDL (por exemplo), segue que:

$$\alpha(\omega) = \frac{a_0 + a_1(i\omega) + a_2(i\omega)^2 + a_3(i\omega)^3}{b_0 + b_1(i\omega) + b_2(i\omega)^2 + b_3(i\omega)^3 + b_4(i\omega)^4}, \quad (3.94)$$

Para este caso fica claro que cada polinômio pode ser visto como a combinação linear de polinômios ortogonais reais e imaginários, onde os reais são funções pares e os imaginários são funções ímpares, como segue (para θ o procedimento é similar):

Reais (pares)

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= a'_0 \\ \varphi_2 &= a'_2 + a'_3(i\omega)^2 \\ \varphi_4 &= a'_6 + a'_7(i\omega)^2 + a'_8(i\omega)^4, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.95)$$

Imaginários (ímpares)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a'_1(i\omega) \\ \varphi_3 &= a'_4(i\omega) + a'_5(i\omega)^3 \\ \varphi_5 &= a'_9(i\omega) + a'_{10}(i\omega)^3 + a'_{11}(i\omega)^5, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.96)$$

Assim, o numerador da Equação 3.94 será:

$$\begin{aligned}
& a_0 + a_1(i\omega) + a_2(i\omega)^2 + a_3(i\omega)^3 \\
& = a'_0 + a'_1(i\omega) + a'_2 + a'_3(i\omega)^2 + a'_4(i\omega) + a'_5(i\omega)^3, \quad (3.97) \\
& = a'_0 + a'_2 + (a'_1 + a'_4)(i\omega) + a'_3(i\omega)^2 + a'_5(i\omega)^3
\end{aligned}$$

Esta definição para os polinômios não é única, mas definindo-os em termos de funções pares e ímpares, torna-os diretamente relacionados com a natureza hermitica de uma FRF, simplificando os cálculos, como será visto em seguida.

Para se obter alguma vantagem do fato de termos funções pares e ímpares, é necessário considerar a parte positiva e também a parte negativa do espectro de frequências. Se existem L pontos para serem determinados, a propriedade ortogonal será:

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=-L}^L \varphi_{j,k}^* \varphi_{j,i} \right) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases}, \quad (3.98)$$

Escrevendo φ como $\operatorname{Re}(\varphi) + i \operatorname{Im}(\varphi)$, segue que:

$$\sum_{j=-L}^L \left(\operatorname{Re}(\varphi_{j,k}) \operatorname{Re}(\varphi_{j,i}) + \operatorname{Im}(\varphi_{j,k}) \operatorname{Im}(\varphi_{j,i}) \right) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases}, \quad (3.99)$$

De fato, a FRF só é definida para frequências positivas e a Equação 3.99 deve ser transformada para que sejam considerados apenas as funções positivas, dos pontos 1 a L . Extraindo as partes negativas e positivas da Equação 3.99, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=-L}^{-1} \left(\operatorname{Re}(\varphi_{j,k}^-) \operatorname{Re}(\varphi_{j,i}^-) + \operatorname{Im}(\varphi_{j,k}^-) \operatorname{Im}(\varphi_{j,i}^-) \right) + \\
& \sum_{j=1}^L \left(\operatorname{Re}(\varphi_{j,k}^+) \operatorname{Re}(\varphi_{j,i}^+) + \operatorname{Im}(\varphi_{j,k}^+) \operatorname{Im}(\varphi_{j,i}^+) \right) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases}, \quad (3.100)
\end{aligned}$$

De acordo com a definição de funções pares e ímpares, $\text{Re}(\varphi^-) = \text{Re}(\varphi^+)$ e $\text{Im}(\varphi^-) = -\text{Im}(\varphi^+)$ e, portanto:

$$2 \sum_{j=1}^L (\text{Re}(\varphi_{j,k}^+) \text{Re}(\varphi_{j,i}^+) + \text{Im}(\varphi_{j,k}^+) \text{Im}(\varphi_{j,i}^+)) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 1 & k = i \end{cases}, \quad (3.101)$$

ou,

$$\text{Re} \sum_{j=1}^L ((\varphi_{j,k}^+)^* (\varphi_{j,i}^+)) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 0,5 & k = i \end{cases}. \quad (3.102)$$

Para polinômios θ^+ (correspondentes aos polinômios θ_k da Equação 3.93) o equacionamento é similar mas, como visto anteriormente, existe uma função de ponderação igual a $|\tilde{\alpha}(\omega_j)|^2$. E assim:

$$\text{Re} \sum_{j=1}^L ((\theta_{j,k}^+)^* (\theta_{j,i}^+) |\tilde{\alpha}(\omega_j)|^2) = \begin{cases} 0 & k \neq i \\ 0,5 & k = i \end{cases}. \quad (3.103)$$

O problema agora é gerar φ^+ e θ^+ automaticamente de forma que satisfaçam as Equações 3.102 e 3.103. Os polinômios de Forsythe são utilizados por apresentar vantagens computacionais. O equacionamento genérico destes polinômios será apresentado, usando a cotação comum γ , seja para φ ou θ . Sendo q_j a função de ponderação e m o grau do polinômio, a fórmula recursiva é dada por:

$$\begin{aligned}
\gamma_0(\omega) &= 1 \\
\gamma_1(\omega) &= (\omega - u_1)\gamma_0(\omega) \\
\gamma_2(\omega) &= (\omega - u_2)\gamma_1(\omega) - v_1\gamma_0(\omega) \\
&\vdots \\
\gamma_k(\omega) &= (\omega - u_k)\gamma_{k-1}(\omega) - v_{k-1}\gamma_{k-2}(\omega) \\
&\vdots \\
\gamma_m(\omega) &= (\omega - u_m)\gamma_{m-1}(\omega) - v_{m-1}\gamma_{m-2}(\omega)
\end{aligned} \tag{3.104}$$

onde:

$$u_k = \frac{\sum_{j=1}^L \omega_j (\gamma_{k-1}(\omega_j))^2 q_j}{D_{k-1}}, \tag{3.105a}$$

$$v_k = \frac{\sum_{j=1}^L \omega_j \gamma_k(\omega_j) \gamma_{k-1}(\omega_j) q_j}{D_{k-1}}, \tag{3.105b}$$

$$D_k = \sum_{j=1}^L (\gamma_k(\omega_j))^2 q_j. \tag{3.105c}$$

Se, na Equação 3.105, o somatório for estendido de $-L$ até $+L$, pode-se facilmente perceber que u_k é uma função ímpar e v_k é uma par de ω e então u_k será zero e o somatório em v_k e D_k será $2 \sum_{j=1}^L$ ao invés de $\sum_{j=-L}^L$. Assim, a Equação 3.104 torna-se:

$$\begin{aligned}
\gamma_0^+(\omega) &= 1 \\
\gamma_1^+(\omega) &= \omega \gamma_0^+(\omega) \\
\gamma_2^+(\omega) &= \omega \gamma_1^+(\omega) - v_1^+ \gamma_0^+(\omega) \\
&\vdots \\
\gamma_k^+(\omega) &= \omega \gamma_{k-1}^+(\omega) - v_{k-1}^+ \gamma_{k-2}^+(\omega) \\
&\vdots \\
\gamma_m^+(\omega) &= \omega \gamma_{m-1}^+(\omega) - v_{m-1}^+ \gamma_{m-2}^+(\omega)
\end{aligned} \tag{3.106}$$

com,

$$v_k^+ = \frac{2 \sum_{j=1}^L \omega_j \gamma_k^+(\omega_j) \gamma_{k-1}^+(\omega_j) q_j}{D_{k-1}^+} \tag{3.107a}$$

$$D_k^+ = 2 \sum_{j=1}^L (\gamma_k^+(\omega_j))^2 q_j \tag{3.107b}$$

Após calcular todos os polinômios γ_k^+ , estes devem ser normalizados dividindo por $\sqrt{D_k^+}$ e então multiplicados por i^k para obter os polinômios complexos. Para evitar problemas numéricos, a faixa de frequências de interesse é normalizada pelo seu valor máximo.

Aplicando a Equação 3.106, os polinômios $\varphi^+(\omega_j)$ e $\theta^+(\omega_j)$ podem ser calculados fazendo $q_j = 1$ ou $q_j = |\tilde{\alpha}(\omega_j)|^2$, respectivamente. Conhecendo $\varphi^+(\omega_j)$ e $\theta^+(\omega_j)$, é possível calcular as novas matrizes $[P]$ e $[T]$, dadas pelas Equações 3.90 e 3.91, onde φ e θ devem ser entendidos como φ^+ e θ^+ . Agora, a Equação 3.88 será:

$$\begin{bmatrix} [0,5] & [X] \\ [X]^T & [0,5] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{c\} \\ \{d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (3.108)$$

com $[X]$ e $\{G\}$ já definidos anteriormente (Equação 3.89), mas com $[P]$ e $[T]$ agora definidos em termos de φ^+ e θ^+ . Da Equação 3.103 é fácil notar que o vetor $\{F\} = -\text{Re}\left([T^*]^T \{W\}\right)$ é agora um vetor nulo. Multiplicando ambos os lados da Equação 3.108 por 2, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [I] & [X'] \\ [X']^T & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{c\} \\ \{d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G'\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \quad (3.109)$$

onde $[X'] = 2[X]$ e $\{G'\} = 2\{G\}$. Resolvendo a Equação 3.109, segue que:

$$\{d\} = \left[[I] - [X']^T [X'] \right]^{-1} [X']^T \{G'\}, \quad (3.110)$$

$$\{c\} = \{G'\} - [X'] \{d\}. \quad (3.111)$$

Retoma-se agora a Equação 3.93 (onde φ e θ devem ser substituídos por φ^+ e θ^+) com a FRF expressa em termos dos coeficientes $\{c\}$ e $\{d\}$ e os polinômios ortogonais φ^+ e θ^+ .

Para o cálculo dos parâmetros modais, a equação deve ser reescrita em termos dos coeficientes $\{a\}$ e $\{b\}$ através de transformações lineares entre $\{a\}$ e $\{c\}$, e entre $\{b\}$ e $\{d\}$, como segue:

$$\begin{matrix} \{a\} \\ (2N \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} [T_{ac}] \\ (2N \times 2N) \end{matrix} \begin{matrix} \{c\} \\ (2N \times 1) \end{matrix}, \quad (3.112)$$

$$\{b\} = \underset{(2N \times 1)}{[T_{bd}]} \underset{(2N \times 2N)}{\{d\}} + \underset{(2N \times 1)}{\{R\}}. \quad (3.113)$$

Conhecendo $\{b\}$, as raízes dos polinômios complexos podem ser calculadas e estas estão diretamente relacionadas com as frequências de ressonância e os fatores de amortecimento. Com estes resultados, os outros parâmetros modais podem ser calculados, relacionando as Equações 3.78 e 3.79.

3.5.5. Método Polyreference Frequency Domain- PFD

Considerando p pontos de resposta e q pontos de entrada, a matriz de resposta impulsiva, em termos de receptância, para um sistema de N graus de liberdade, pode ser dada por:

$$[H(t)] = \underset{(p \times q)}{[\Psi]} \underset{(p \times 2N)}{[e^{s_r t}]} \underset{(2N \times 2N)}{[W]} \underset{(2N \times q)}{[W]^T}, \quad (3.114)$$

onde $[\Psi]$ é a matriz de formas modais e $[W]$ é a matriz de participação modal. A transformada de Laplace correspondente da Equação 3.114 é:

$$[H(s)] = [\Psi][s[I] - [s_r]]^{-1}[W]^T. \quad (3.115)$$

Sendo:

$$[G(s)] = [s[I] - [s_r]]^{-1}[W]^T, \quad (3.116)$$

a Equação 3.115 pode ser reescrita como:

$$\underset{(p \times q)}{[H(s)]} = \underset{(p \times 2N)}{[\Psi]} \underset{(2N \times q)}{[G(s)]}. \quad (3.117)$$

Aplicando a Transformada de Laplace à primeira derivada da Equação 3.114, ou seja, à matriz de resposta impulsiva em termos de mobilidade, obtém-se:

$$[H(s)]_M = s[H(s)] - [H(t)]_{t=0}, \quad (3.118)$$

onde o subscrito M denota mobilidade. A partir da Equação 3.114 para $t=0$:

$$[H(s)]_M = s[H(s)] - [\Psi][W]^T, \quad (3.119)$$

mas também é válida a igualdade:

$$[H(s)]_M = [\Psi][s_r][G(s)], \quad (3.120)$$

e assim:

$$s[H(s)] - [\Psi][W]^T = [\Psi][s_r][G(s)]. \quad (3.121)$$

Combinando as Equações 3.117 e 3.121 segue que:

$$\begin{bmatrix} [H(s)] \\ s[H(s)] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [0] \\ [\Psi][W]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\Psi][s_r] \end{bmatrix} [G(s)]. \quad (3.122)$$

Da Equação 3.117, o valor de $[G(s)]$ pode ser extraído:

$$[G(s)] = \left([\Psi]^T [\Psi] \right)^{-1} [\Psi]^T [H(s)]. \quad (3.123)$$

E substituindo a Equação 3.123 na Equação 3.120, chega-se a:

$$[H(s)]_M = [\Psi][s_r][(\Psi)^T[\Psi]]^{-1}[\Psi]^T[H(s)], \quad (3.124)$$

ou:

$$[H(s)]_M = \underset{(pxq)}{[A_s]} \underset{(pxp)}{[H(s)]} \underset{(pxq)}{[A_s]}, \quad (3.125)$$

onde $[A_s] = [\Psi][s_r][(\Psi)^T[\Psi]]^{-1}[\Psi]^T$ é chamada de matriz sistema. Pós-multiplicando por $[\Psi]$ tem-se:

$$[A_s][\Psi] = [\Psi][s_r], \quad (3.126)$$

Que representa um problema de autovetores e autovalores que fornece as formas modais $[\Psi]$ e as frequências naturais e fatores de amortecimento a partir de $[s_r]$. O problema agora é determinar a matriz sistema $[A_s]$. Reescrevendo a Equação 3.126:

$$\begin{bmatrix} -[A_s] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\Psi][s_r] \end{bmatrix} = [0], \quad (3.127)$$

e pós-multiplicando ambos os lados por $[G(s)]$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} -[A_s] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Psi] \\ [\Psi][s_r] \end{bmatrix} [G(s)] = [0], \quad (3.128)$$

substituindo a Equação 3.122 na 3.128, obtem-se:

$$-\begin{bmatrix} A_s \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(s) \\ s[H(s)] - [\Psi][W]^T \end{bmatrix} = [0], \quad (3.129)$$

ou,

$$-\begin{bmatrix} A_s \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(s) \\ s[H(s)] - [\Psi][W]^T \end{bmatrix} = [0], \quad (3.130)$$

a partir da qual:

$$\begin{bmatrix} A_s \\ \Psi[W]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(s) \\ I \end{bmatrix} = s[H(s)]. \quad (3.131)$$

$(p \times (p+q))$ $((p+q) \times q)$ $(p \times q)$

Passando para o domínio da frequência, fazendo $s = i\omega$ e considerando L frequências medidas, obtém-se a expressão:

$$\begin{bmatrix} A_s \\ \Psi[W]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(\omega_1) & \dots & H(\omega_L) \\ I & \dots & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(\omega_1) & \dots & H(\omega_L) \\ i\omega_1[I] & \ddots & [0] \\ [0] & & i\omega_L[I] \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

$(p \times (p+q))$ $((p+q) \times Lq)$ $(p \times Lq)$ $(Lq \times Lq)$

Da Equação 3.132 é fácil extrair A_s e $[\Psi][W]^T$. Após resolver o autop problema da Equação 3.126, $[\Psi]$ será conhecido e, portanto, $[W]^T$ pode ser calculado, completando o modelo matemático. O número correto de modos pode ser estimado por Decomposição em Valores Singulares.

De acordo com Maia e Silva [38], este método apresenta bom desempenho para trabalhar com modos próximos. Também aparenta ser

menos sensível a modos computacionais do que os métodos no domínio do tempo e permite o uso de intervalos desiguais de frequência.

3.5.6. Método Alias-Free Polyreference - AFPoly

Este método de múltiplas referências foi desenvolvido por Vold [43] e é baseado no método RFP, também se sua autoria. O método usa polinômios ortogonais no domínio da frequência infinito, correspondendo à família de funções de Green ortogonais no domínio do tempo contínuo.

O método é patenteado pela empresa ATA Engineering e não há muita informação disponível sobre seu equacionamento. Segundo seu criador, o AFPoly alcança melhores resultados que os tradicionais métodos de múltiplas referências devido a forma com que trata os termos residuais. De acordo com o mesmo, o efeito residuais dos modos fora da faixa de análise são mantidos fora da banda e, portanto, anula os efeitos de não-linearidades que podem causar espalhamento.

O algoritmo é baseado na formulação padrão de equações de múltiplas referências para a matriz de polinômios do numerador e do denominador no domínio de Laplace, porém, usando uma base de polinômios ortogonais na faixa de análise do eixo imaginário. A chave para o bom desempenho numérico é resolver as raízes na coordenada polinomial ortogonal, usando uma matriz generalizada que permite solucionar adequadamente centenas de raízes.

3.5.7. Método Least Squares Partial Fraction - LSPF

Trabalhando no domínio da frequência, este estimador local de um GDL pode ser usado apenas em casos de modos desacoplados e bem espaçados. O método requer que os picos de ressonância sejam previamente identificados pelo usuário do programa e assim, o ajuste será realizado ao redor de cada pico, com um número determinado de linhas espectrais.

Como o próprio nome do método já diz, o ajuste de curvas é feito através de mínimos quadrados com a FRF representada na forma de

frações parciais (representada na Equação 3.8). Quando esta forma é utilizada, os parâmetros modais podem ser estimados diretamente a partir do processo de ajuste de curvas. Esta abordagem produz um conjunto de equações lineares que devem ser resolvidos para se determinar os coeficientes modais, e um conjunto de equações não-lineares que deve ser resolvido para obter-se as frequências de ressonância e o amortecimento. Por se tratar de um processo iterativo, o método é propenso a problemas de convergência e elevados tempos de processamento computacional (Fladung [20]).

O método é aproximado, uma vez que ignora a contribuição do conjugado complexo (ver Equação 3.8).

3.5.8. Resumo dos métodos explorados

Esta seção apresenta, de forma resumida, as principais características de cada um dos métodos explorados neste trabalho.

Banda de meia-potência

- Método SDOF no domínio da frequência;
- Bom para dados com baixo e alto amortecimento desde que haja número adequado de pontos na banda de meia-potência;
- Fácil implementação computacional;
- Bom apenas para modos bem espaçados.

Método Polyreference Time - PTD

- Método de múltiplas referências no domínio do tempo;
- Bom para dados com baixo a médio amortecimento;
- Bom para raízes repetidas e modos pouco espaçados quando utilizado com dados de referências múltiplas;
- Alta sua sensibilidade à não-linearidades e à falta de reciprocidade na matriz de FRFs.

Método EigenSystem Realization - ERA

- Método de múltiplas referências no domínio do tempo;
- Bom para dados com baixo a médio amortecimento;
- Bom para raízes repetidas e modos pouco espaçados quando utilizado com dados de referências múltiplas.

Método Rational Fractional Polynomial - RFP

- Método de múltiplas referências no domínio da frequência;
- Bom para dados com baixo e alto amortecimento;
- Bom para raízes repetidas e modos pouco espaçados quando utilizado com dados de referências múltiplas.

Método Polyreference Frequency - PFD

- Método de múltiplas referências no domínio da frequência;
- Bom para dados com baixo e alto amortecimento;
- Bom para raízes repetidas e modos pouco espaçados quando utilizado com dados de referências múltiplas.

Método Alias-Free Polyreference - AFPoly

- Método de múltiplas referências no domínio da frequência;
- Bom para dados com baixo e alto amortecimento em uma ampla faixa de frequência em um único passo;
- Leva em conta o efeito de resíduos fora da faixa de frequência de análise que são causa de distorções devido a efeitos de *aliasing*;
- Bom para raízes repetidas e modos pouco espaçados quando utilizado com dados de referências múltiplas.

Método Least Squares Partial Fraction - LSPF

- Método SDOF no domínio da frequência;
- Ajuste realizado apenas nas vizinhanças dos picos de ressonância;
- Bom para dados com baixo amortecimento;
- Bom apenas para modos bem espaçados.

4. PROCEDIMENTOS E MÉTODOS

Este capítulo apresenta detalhes dos procedimentos e métodos dos ensaios e análises que foram realizadas durante este trabalho de pesquisa, aplicados a exemplos de sistemas físicos.

4.1. MODELOS ANALÍTICOS

A primeira etapa de análise de modelos deste trabalho consistiu em obter FRFs de estruturas sob condições controladas, para avaliar o erro dos diferentes métodos de ajuste de curvas na estimativa do amortecimento modal. Para tal etapa, foram usadas curvas analíticas simuladas, onde é possível prescrever valores conhecidos e precisos de amortecimento. Outros efeitos que podem ser controlados são a resolução espectral e a densidade modal que, conforme visto na revisão bibliográfica, têm forte influência na precisão dos estimadores modais.

É importante salientar que, conforme equacionamento exposto no capítulo anterior, as frequências naturais e os valores de amortecimento podem ser encontrados em qualquer FRF da estrutura (exceto aquelas nas quais a excitação ou a resposta encontram-se em um nó, isto é, posição onde a forma modal é zero) e é por isso que estes parâmetros são algumas vezes chamados de Parâmetros Globais da estrutura. Esta propriedade nos permite simplificar as análises, utilizando um número reduzido de FRFs das estruturas estudadas. Se o foco deste trabalho envolvesse a representação das formas modais das estruturas, o número de FRFs analisadas deveria ser suficiente para representar claramente as formas modais, dentro da faixa de frequências analisada.

Os modelos numéricos foram criados no programa de elementos finitos Ansys Workbench 14.5. As etapas da geração dos modelos, que serão descritas detalhadamente em seguida, foram: criação da geometria, definição e atribuição das propriedades dos materiais, geração da malha, atribuição das condições de contorno, definição dos parâmetros da análise (incluindo amortecimento) e obtenção das respostas (FRFs) requeridas.

Como não podia deixar de ser, atenção especial foi dada à definição do amortecimento dos modelos. De acordo com o Menu de Ajuda do programa Ansys Workbench [26], na análise harmônica por superposição modal, a matriz de amortecimento não é calculada explicitamente, mas sim definida pelo usuário, em termos da razão de amortecimento crítico, neste caso denotado pelo programa como ξ^d .

A razão de amortecimento crítico ξ_i^d para um dado modo de vibração i é a combinação de:

$$\xi_i^d = \xi + \xi_i^m + \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2} \omega_i, \quad (4.1)$$

onde:

ξ = razão de amortecimento modal constante;

ξ_i^m = razão de amortecimento modal para o modo i ;

α = multiplicador da matriz de massa (amortecimento proporcional à massa);

β = multiplicador da matriz de rigidez (amortecimento proporcional à rigidez).

4.1.1. Caso 1: Modelo da Viga

O primeiro modelo foi gerado para avaliar o efeito da resolução espectral nos métodos de extração modal.

Uma viga de aço com dimensões de 400 x 20 x 1,5 mm foi modelada na condição livre-livre (ver Figura 4.1). De forma a obter uma boa representação do comportamento da viga sob flexão, sujeita a um carregamento de força pontual, o sistema foi discretizado utilizando-se o elemento de casca do tipo SHELL163. Outro motivo para a utilização do elemento de casca é devido ao fato da espessura da viga ser muito menor que seu comprimento e largura. O elemento em questão tem quatro nós e seis graus de liberdade por nós, sendo translação em 3 eixos ortogonais e rotação sobre os mesmos 3 eixos. O tamanho dos elementos foi definido de forma a respeitar a condição de 12 elementos por

comprimento de onda de flexão, dentro da faixa de frequência de análise.

Propriedades do aço estrutural utilizado na análise:

- Densidade: 7850 kg/m³;
- Módulo de elasticidade: 210 GPa;
- Coeficiente de Poisson: 0,3.

Em um primeiro momento, foi realizada uma análise modal estrutural não amortecida para determinar os modos de vibração da viga na faixa de 0 a 1600Hz. Em seguida, uma força unitária e pontual foi aplicada na linha central da viga, junto a uma das extremidades. Esta medida foi tomada, pois deseja-se analisar apenas os modos de flexão da viga (evitando os modos de torção) e proporcionar um espaçamento adequado entre as frequências de ressonâncias, evitando a interferência da superposição de modos na análise que busca identificar a influência da resolução espectral na determinação do amortecimento estrutural.

Uma vez definidas todas as condições de contorno e carregamentos, foi realizada uma análise harmônica, resolvida por superposição modal, na faixa entre 0 e 800Hz.

Foram calculados diversos casos, com diferentes resoluções espectrais e diferentes razões de amortecimento. Em todos os casos, o amortecimento foi mantido constante ao longo de toda faixa de frequências de interesse. Foram simuladas vigas com sete diferentes valores de razão de amortecimento - ξ : 0,01%, 0,05%, 0,10%, 0,50%, 1,00%, 5,00% e 10,00%. Para cada um dos valores de amortecimento aplicado, foram rodadas análises com cinco valores distintos de resolução em frequência: 0,125Hz, 0,25Hz, 0,50Hz, 1,00Hz e 2,00Hz. A combinação dos diferentes valores de amortecimento e de resolução espectral resultou em um total de 35 análises.

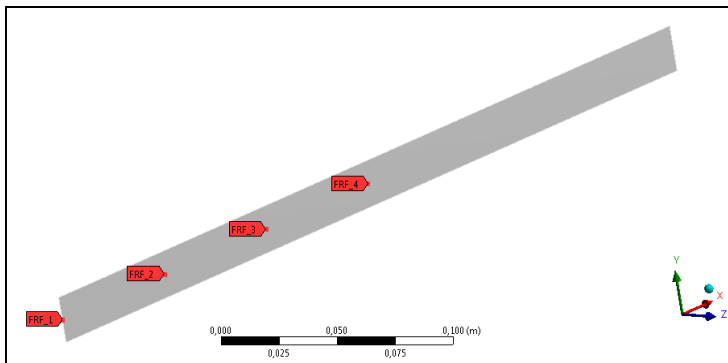


Figura 4.1: modelo da viga analisada, indicando os pontos de cálculo das FRFs.

Para cada uma destas análises, foram extraídas as funções resposta em frequência de quatro nós localizados na linha central da viga, conforme pode ser visto na Figura 4.1. A Tabela 4.1 mostra as frequências naturais da viga obtidas na análise modal. Alguns modos são mostrados na Figura 4.2.

Tabela 4.1: frequências naturais não amortecidas dos modos de vibração da viga

<i>Modo</i>	<i>Frequência Natural [Hz]</i>
1	48,6
2	134,1
3	263,0
4	435,0
5	650,4

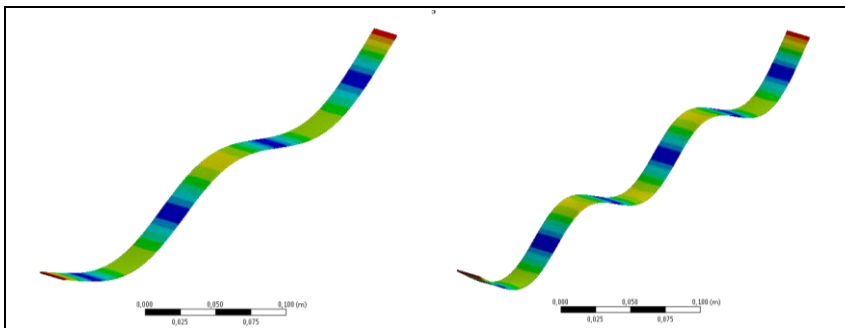


Figura 4.2: terceiro e quinto modo de flexão da viga simulada.

Todas as FRFs da viga foram exportadas para o programa B&K Pulse. Para a avaliação do método da Banda de Meia-potência foram utilizadas apenas as FRFs calculadas na extremidade da viga, no ponto identificado como FRF_1 na Figura 4.1. O método foi avaliado no programa B&K Pulse Labshop 17.0.

Na Figura 4.3 são apresentadas FRFs correspondentes ao ponto FRF_1, com vários valores de amortecimento.

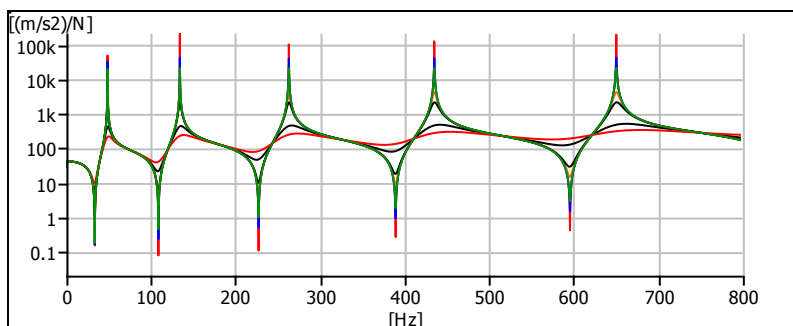


Figura 4.3: FRFs do ponto FRF_1 com diferentes razões de amortecimento.

A avaliação dos demais métodos: Polyreference Frequency Domain, Polyreference Time Domain, Rational Fraction Polynomial, EigenSystem Realization, Least Squares Partial Fraction e Alias-Free Polyreference foram feitas no programa B&K Pulse Reflex Modal 17.0. Neste caso, foram utilizadas as FRFs calculadas nos quatro pontos da viga, indicados na Figura 4.1. Nas Figura 4.4 e 4.5 são apresentadas as

quatro FRFs obtidas para a viga, com razões de amortecimento de 0,01% e 10%, respectivamente.

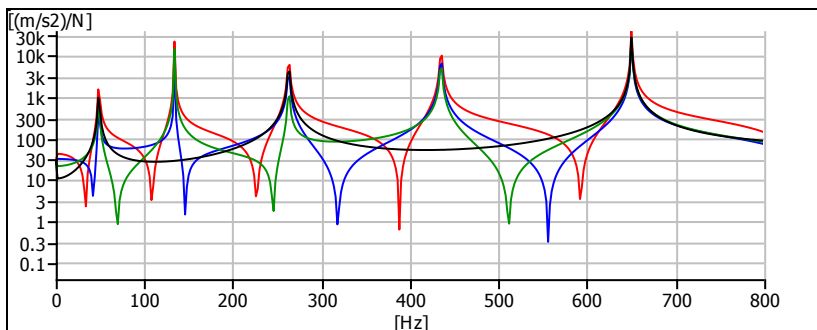


Figura 4.4: magnitude das quatro FRFs da viga com razão de amortecimento crítico prescrito de 0,01%.

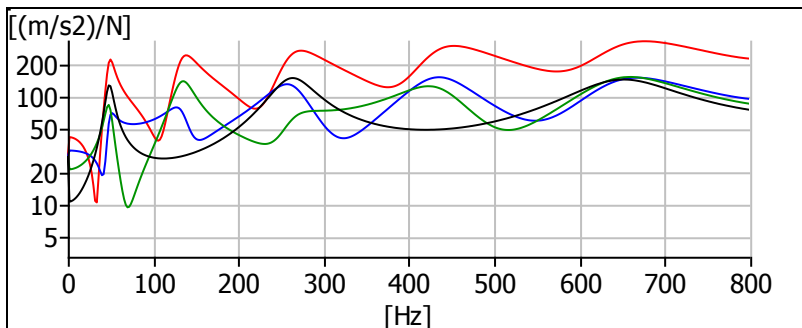


Figura 4.5: magnitude das quatro FRFs da viga com razão de amortecimento crítico prescrito de 10%.

4.1.2. Caso 2: Placa Circular

Este modelo foi gerado para avaliar o efeito de modos simétricos (raízes repetidas) nos métodos de extração modal.

A placa tem diâmetro de 400 mm e espessura de 2 mm e foi modelada na condição livre-livre. O material da placa é aço estrutural com as mesmas propriedades da viga analisada anteriormente. A análise

também foi realizada com o elemento do tipo SHELL163, respeitando a mesma condição de tamanho máximo de elemento.

O procedimento de simulação foi o mesmo utilizado para a viga: análise modal estrutural não amortecida, para determinar os modos de vibração na faixa de 0 a 1600Hz e em seguida, análise harmônica, resolvida por Superposição Modal na faixa entre 0 e 800Hz, com um total de 6400 linhas, ou seja, resolução espectral de 0,125Hz.

A análise modal indicou 22 modos na faixa de 0 a 800Hz, sendo que destes, apenas dois não são modos simétricos. As Figuras 4.6 e 4.7 exemplificam alguns modos simétricos da placa circular.

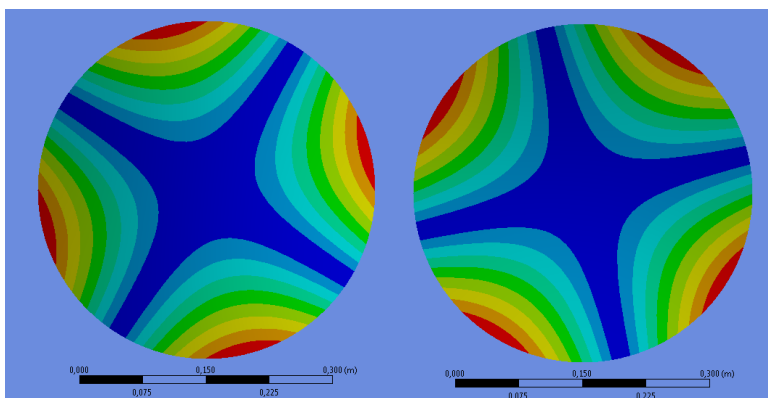


Figura 4.6: modos simétricos 1 e 2 da placa circular na frequência de 65,1 Hz.

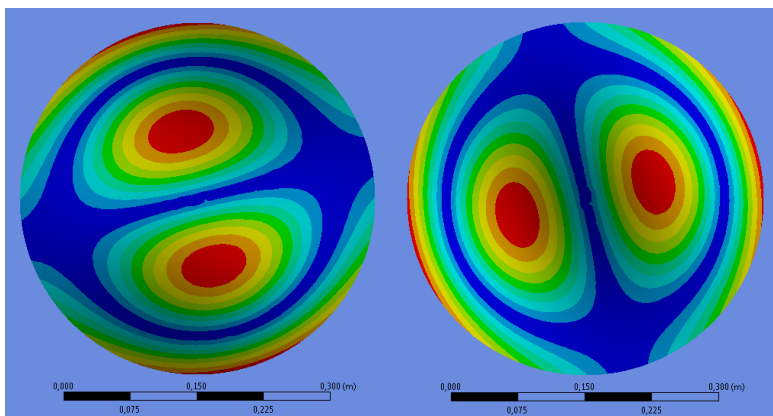


Figura 4.7: modos simétricos em 248,7Hz.

Tabela 4.2: frequências naturais da placa circular. Em destaque modos não simétricos.

<i>Modo</i>	<i>Frequência Natural [Hz]</i>
1	65,1
2	65,1
3	109,4
4	151,0
5	151,0
6	248,7
7	248,7
8	265,0
9	265,0
10	406,3
11	406,3
12	428,1
13	428,1
14	467,1
15	574,6
16	574,6
17	643,2
18	643,2
19	726,4
20	726,5
21	769,4
22	769,4

A razão de amortecimento crítico aplicada foi de 0,50%, constante ao longo de toda faixa de frequências analisada. Como já foi explicado anteriormente, a identificação de modos com raízes repetidas não é possível com apenas uma linha ou uma coluna da matriz de FRFs. É necessário que o número de referências seja igual ou maior que o número de raízes repetidas na mesma frequência. A Tabela 4.2 indica

que a condição de simetria da placa gera sempre dois modos repetidos em cada frequência, indicando que são necessárias pelo menos duas referências para a correta identificação de todos os modos da estrutura. Sendo assim, foram realizadas duas análises harmônicas da placa circular, cada uma delas com um ponto distinto de aplicação de força (ver Figura 4.8). A localização dos pontos de aplicação da força foi escolhida de maneira a maximizar a diferença entre os fatores de participação modal dos modos simétricos, para cada uma das excitações. Esta escolha foi feita através da observação dos pontos de máximo e mínimo deslocamento das formas modais obtidas na análise modal. Quanto maiores forem as diferenças entre os fatores de participação modal, mais facilmente os algoritmos de extração modal são capazes de identificar os modos simétricos.

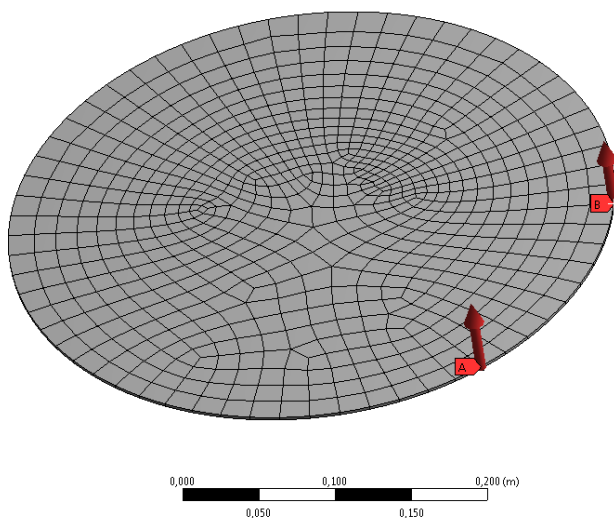


Figura 4.8: pontos de aplicação da força das duas análises harmônicas avaliadas.

A resposta vibratória da placa foi determinada em seis pontos distintos, distribuídos aleatoriamente na superfície da mesma (ver Figura 4.9). Como foram realizadas análises com duas forças distintas, um total de doze FRFs foram exportadas para os algoritmos de ajuste de curvas.

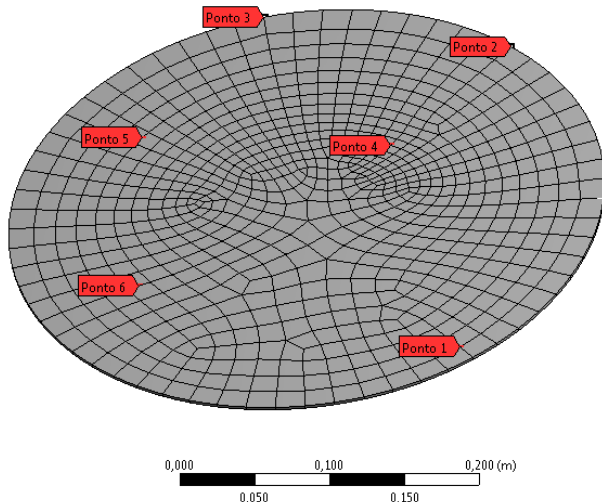


Figura 4.9: pontos de medição das FRFs da placa circular

Na Figura 4.10 são apresentadas as seis FRFs simuladas da placa circular, com a força aplicada no ponto A (ver Figura 4.8).

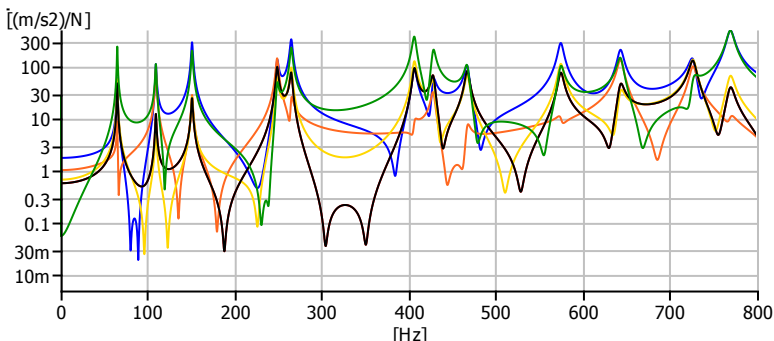


Figura 4.10: seis FRFs da placa circular extraídas na análise harmônica.

4.2. ANÁLISE EXPERIMENTAL

Para complementar a avaliação dos estimadores de parâmetros modais, medições experimentais de duas estruturas distintas foram

realizadas. Ao contrário dos modelos analíticos explorados anteriormente, não é possível conhecer o valor exato do amortecimento das estruturas medidas e, por conseguinte, não é possível avaliar o erro percentual do amortecimento, calculado por cada um dos métodos de extração de parâmetros modais. Entretanto, mesmo que não seja possível realizar os experimentos sob condições totalmente controladas, é importante aplicar os algoritmos de extração de parâmetros modais aos dados experimentais, para observar seu comportamento frente aos erros e incertezas de medição.

Ao contrário do que foi dito anteriormente, nos casos analíticos, é imprescindível que a discretização espacial dos pontos de medição das FRFs seja suficiente para representar adequadamente as formas modais das estruturas dentro da faixa de frequências de interesse, pois as mesmas são utilizadas para verificar a qualidade da extração de parâmetros, através da matriz de MAC, que será detalhada em seguida.

4.2.1. Caso 3: Placa Retangular

A primeira estrutura que foi testada experimentalmente foi uma placa retangular de alumínio. Sua geometria simples permite a realização de um experimento com baixo grau de complexidade, minimizando as incertezas de medição e favorecendo a obtenção de FRFs de boa qualidade. Importante notar que, apesar da relativa simplicidade geométrica da placa, a razão entre comprimento e largura foi escolhida de forma a gerar certo grau de sobreposição dos modos de flexão em ambas as direções, e também dos modos de torção. Com isso, as FRFs da placa atingem níveis de complexidade similares às FRFs de muitas estruturas reais e que são rotineiramente tratadas pelos algoritmos de extração modal.

Preparação do experimento

As dimensões da placa são de 360 x 270 x 5 mm e a mesma foi fixada através de fios finos presos em direção perpendicular à direção de excitação, garantindo a condição de contorno livre. A estrutura foi discretizada em 35 pontos de medição (ver Figura 4.11). Para minimizar os erros devidos à massa do acelerômetro, o mesmo foi mantido fixo e

as medições foram realizadas com a movimentação do martelo de impacto através dos 35 pontos.

Equipamentos de Teste

Os seguintes equipamentos foram utilizados para a realização deste experimento:

- Analisador de sinais B&K Pulse LAN-XI de 6 canais;
- Um acelerômetro uniaxial B&K 4397 com massa de 2,4g;
- Um Martelo de impacto de 100g, tipo B&K 8206-003;
- Programa Pulse LabShop com módulo de análise modal *Modal Test Consultant (MTC)*

Configuração do programa de aquisição de dados

Os testes foram realizados com o programa *Pulse Modal Test Consultant* da B&K. A malha de pontos marcada na estrutura foi reproduzida no software. Os transdutores foram associados aos pontos de medição e uma sequência de medição foi definida.

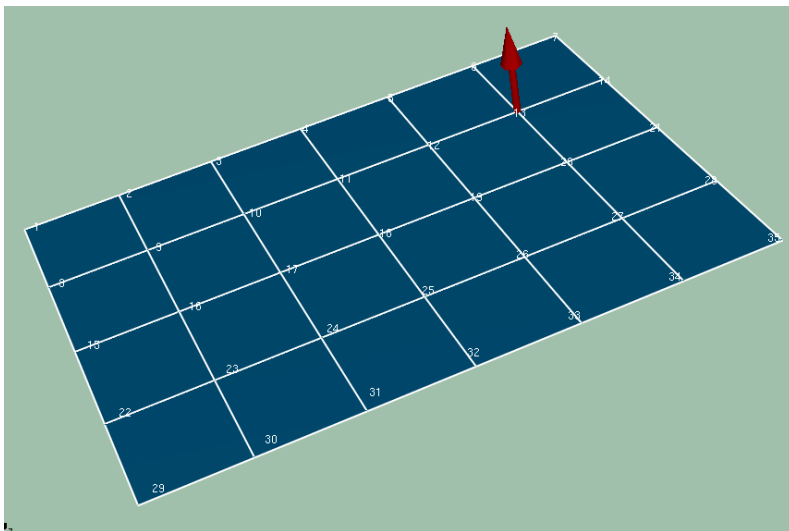


Figura 4.11: Malha de ponto de medição da placa com indicação da posição do acelerômetro no ponto 13.

Em seguida, foi ajustado o nível de disparo da medição (associado ao sinal do martelo de impacto) e também as janelas dos sinais de excitação e resposta. Ao sinal de excitação foi aplicada uma janela do tipo Transiente (ver Figura 4.12). Já para o sinal de resposta, a janela utilizada foi do tipo Exponencial (ver Figura 4.13). Nestas duas figuras, de cima para baixo, são mostradas: a janela aplicada, o sinal sem a aplicação da janela e o sinal já ponderado.

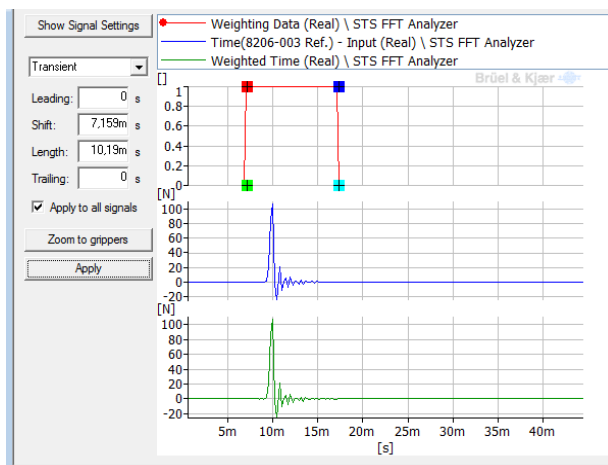


Figura 4.12: ajuste gráfico da janela transiente utilizada no sinal da excitação.

Na configuração do analisador FFT, a frequência máxima de análise foi ajustada para 1600 Hz, dividida em 6400 linhas, resultando na resolução de 0,250 Hz e tempo de aquisição de 4s. As funções resposta em frequências foram calculadas considerando médias lineares de três amostras para cada ponto.

A qualidade das medições foi verificada continuamente através da observação das funções Coerência. A Figura 4.14 mostra a função coerência de alguns pontos escolhidos aleatoriamente. Um valor de coerência unitária em quase toda faixa de frequências indica a excelente qualidade das medições.

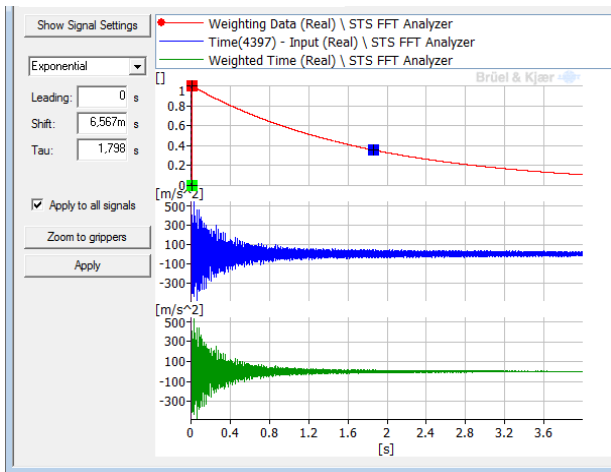


Figura 4.13: ajuste gráfico da janela exponencial utilizada no sinal de resposta.

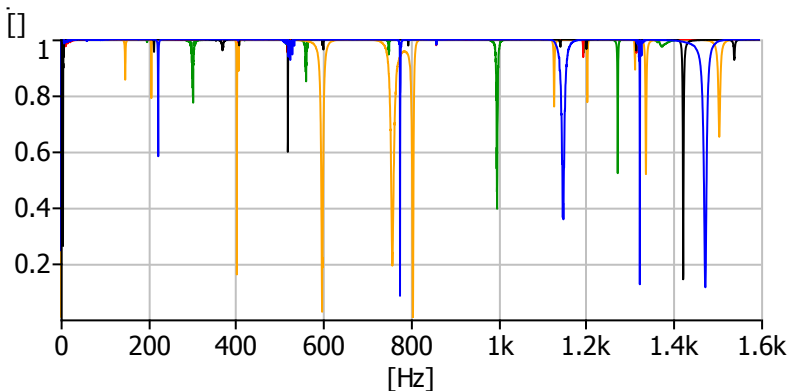


Figura 4.14: Função coerência de alguns pontos medidos da placa retangular.

4.2.2. Caso 4: Carroceria Veicular

Neste último caso analisado, o experimento foi realizado com uma carroceria veicular na condição nua, conhecida pela indústria automotiva como *Body-in-White*. A análise dinâmica deste tipo de estrutura é muito importante, pois seu comportamento vibratório afeta

diretamente o conforto acústico e vibratório dos ocupantes do veículo. O amortecimento tem papel crítico, tanto que é bastante comum a prática de adicionar materiais viscoelásticos na carroceria na linha de montagem, para aumentar a dissipação de energia.

Esta estrutura foi escolhida visto que sua análise modal experimental é um teste de elevada complexidade, devido aos seguintes fatores: natureza complexa da geometria, quantidade de uniões, tamanho da estrutura e elevada densidade modal (incluindo grande número de modos locais).

Foi realizada uma análise modal usando o método de múltiplas entradas e múltiplas saídas - *MIMO*, com centenas de graus de liberdade, que exige elevado esforço computacional e requer grande robustez dos algoritmos de extração modal.

Equipamentos de Teste

Os seguintes equipamentos foram utilizados para a realização deste experimento:

- Analisador de sinais B&K Pulse LAN-XI de 20 canais com 2 geradores de sinal;
- Seis (06) acelerômetros triaxiais B&K 4525B;
- Dois (02) transdutores de força B&K 8230-001;
- Dois (02) excitadores eletrodinâmicos (*shakers*) de 100N tipo B&K4824;
- Programa Pulse LabShop com módulo de análise modal *Modal Test Consultant* (MTC);
- Quatro (04) isoladores pneumáticos (bolsões de ar comprimido).

Preparação do experimento

A carroceria foi testada na condição livre. Para impor tal condição de contorno, a mesma foi montada sobre 04 isoladores pneumáticos com elevada flexibilidade (ver Figura 4.15). Os pontos escolhidos para o apoio dos isoladores na carroceria são pontos de alta rigidez estrutural, para evitar que ocorra qualquer mudança na resposta da estrutura devido a efeitos de massa e/ou rigidez localizadas.



Figura 4.15: isoladores pneumáticos posicionados sob a carroceria.

Depois de posicionados os isoladores foram medidas as frequências de montagem do sistema (modos de corpo rígido), para verificar se as mesmas são suficientemente menores que a primeira frequência de ressonância da estrutura (modo de corpo flexível), e, conseqüentemente, não interferem na resposta da mesma. Aplicando um *zoom* na região de baixa frequência de uma FRF medida na carroceria (Figura 4.16), observa-se que as frequências de montagem estão abaixo de 5Hz, enquanto que o primeiro modo flexível da estrutura está acima de 40Hz, indicando uma montagem adequada do experimento.

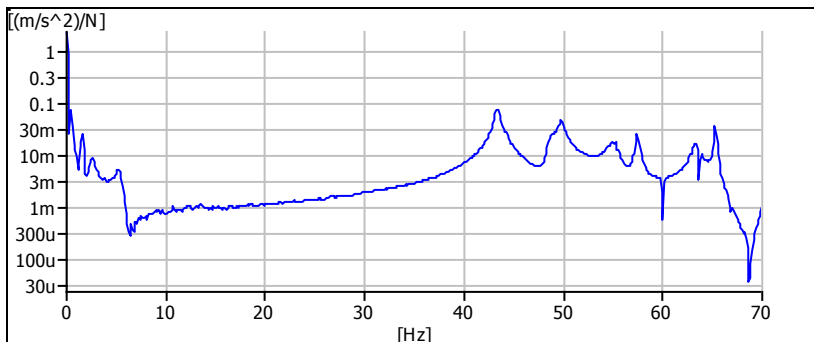


Figura 4.16: verificação das frequências de montagem do experimento.

O sistema foi excitado com 2 excitadores de 100N cada. Para melhor distribuir a energia na carroceria, um dos excitadores é posicionado na parte dianteira da estrutura e outro na parte traseira (Figura 4.17 e 4.18). Os pontos de fixação dos excitadores são escolhidos de forma a excitarem o maior número de modos possível. Para a determinação destes pontos, um pré-teste é necessário, observando a resposta de alguns pontos aleatórios da carroceria quando excitada em diferentes possíveis pontos de fixação. Os pontos onde são obtidas as melhores coerências, foram os pontos escolhidos para fixação dos excitadores na estrutura, pois estes são os pontos que apresentam boa capacidade de transferir energia para a estrutura.

Outro cuidado com o posicionamento dos excitadores é conectá-los com inclinações de aproximadamente 45 graus em relação aos planos ortogonais indicados na Figura 4.19, para que o maior número possível de modos sejam excitados. A força de excitação do excitador é medida com um transdutor de força que é colocado entre o excitador e a estrutura. A ligação mecânica do excitador à estrutura é feita através de um arame de aço, conhecido como *stinger*, que tem a função de garantir que apenas esforços axiais sejam transmitidos para a carroceria e também funciona como um fusível mecânico, protegendo o excitador contra possíveis movimentos inesperados da estrutura.



Figura 4.17: excitador posicionado na região frontal da carroceria



Figura 4.18: excitador posicionado na região traseira da carroceria

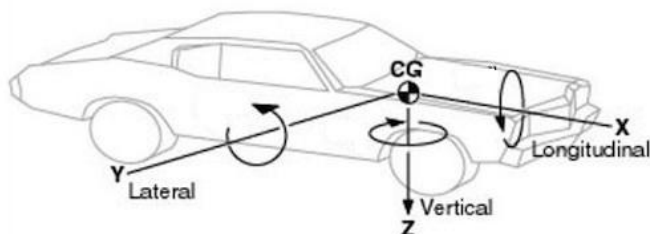


Figura 4.19: Sistema de coordenadas considerado no teste da carroceria. Fonte: Adaptado de Gillespie [33].

Foram marcados 165 pontos de medição na carroceria. A quantidade de pontos e a posição dos mesmos foram escolhidas de forma que representem adequadamente as formas modais da carroceria na faixa de frequência de análise.

Foram utilizados 6 acelerômetros triaxiais para medir a respostas dos 165 pontos, sendo assim, foram necessárias 28 medições para completar a análise. Considerando que foram medidos os três graus de liberdade de cada ponto e que o teste é realizado com duas referências (excitações), totalizam-se 990 FRFs que foram medidas e exportadas para os algoritmos de extração de parâmetros modais.

Configuração do programa de aquisição de dados

A aquisição dos sinais foi realizada com o programa *Pulse Modal Test Consultant* da B&K. A malha de pontos, previamente marcada na carroceria, foi medida com auxílio de uma trena e reproduzida no programa (ver Figura 4.20). A sensibilidade de cada um dos transdutores foi ajustada e, em seguida, uma sequência de medição foi definida e os transdutores associados aos pontos de medição. Este procedimento permite a posterior animação das formas modais da estrutura. A malha de pontos criada no software é mostrada na figura abaixo, assim como a posição e a direção dos excitadores.

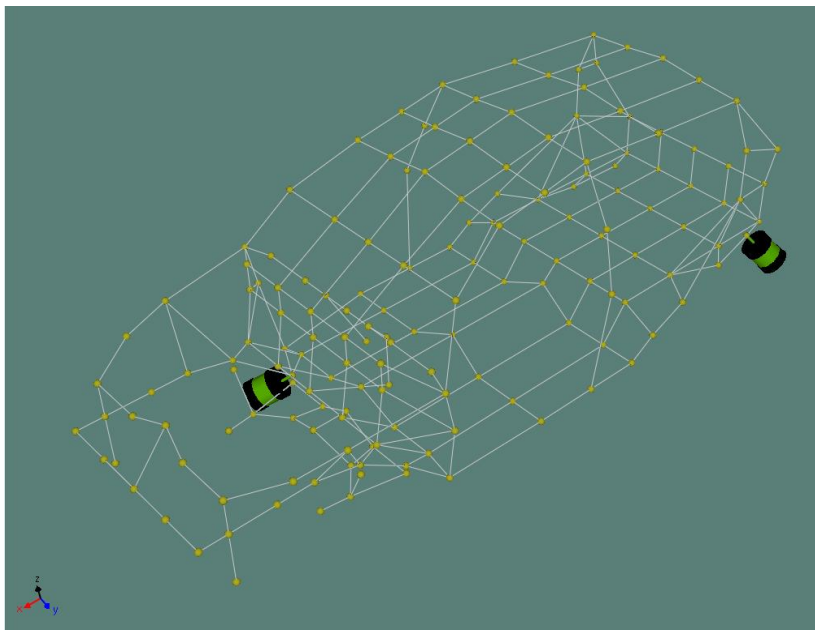


Figura 4.20: grid de medição com os pontos de medição de resposta (em amarelo) e representação dos excitadores nos pontos de acoplamento com a estrutura.

Na configuração do analisador FFT, a frequência de análise foi ajustada para 400 Hz, dividida em 3200 linhas, resultando na resolução de 0,125 Hz e tempo de aquisição de 8s por amostra. As funções resposta em frequências foram calculadas considerando o método de múltiplas entradas e múltiplas saídas – MIMO, com 20 médias amostrais para cada grupo de seis pontos medidos.

O sinal de excitação escolhido foi o Pseudo Randômico, que é um bloco de sinal randômico, repetido a cada período de tempo T . Este período é ajustado para coincidir com o período de aquisição de cada amostra do analisador FFT, minimizando o problema de vazamento (*leakage*), com o uso da janela Retangular nos sinais de resposta.

Dois amostras descorrelacionadas (condição necessária para o teste MIMO) deste tipo de sinal foram geradas em dois canais distintos do analisador e, após passarem por amplificador de sinais, são enviados aos excitadores. O ganho de cada um dos amplificadores é ajustado de

forma que excite suficientemente a carroceria, mantendo-a na faixa de amplitudes onde ela responda linearmente.

A qualidade das medições foi verificada continuamente, através da observação das funções Coerência. Como verificações da qualidade global do teste também foram analisadas a linearidade, a repetibilidade e a reciprocidade da estrutura.

A superposição das curvas, na Figura 4.21, mostra que a reciprocidade é válida em toda faixa de frequências medida.

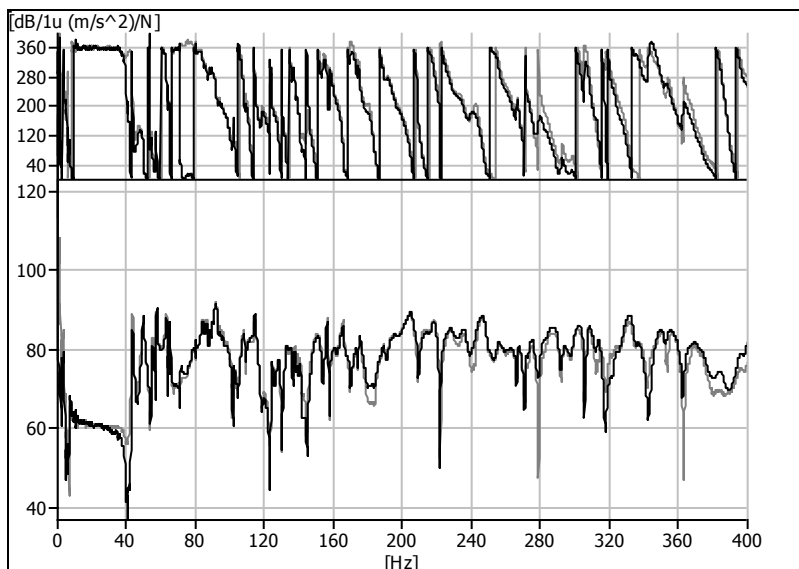


Figura 4.21: gráfico de bode (fase na parte superior) das FRFs cruzadas medidas entre os dois pontos de excitação da estrutura.

Para testar a linearidade da estrutura, três diferentes níveis de força foram utilizadas em cada um dos excitadores e as FRFs de alguns pontos escolhidos aleatoriamente na estrutura, foram medidas durante este procedimento de variação dos níveis das excitações. Na Figura 4.22 são apresentados os espectros de força aplicada pelo excitador dianteiro, em três níveis distintos de potência. As superposições de FRFs mostradas nas Figura 4.23 e na Figura 4.24 comprovam que a estrutura está sendo excitada em sua região linear.

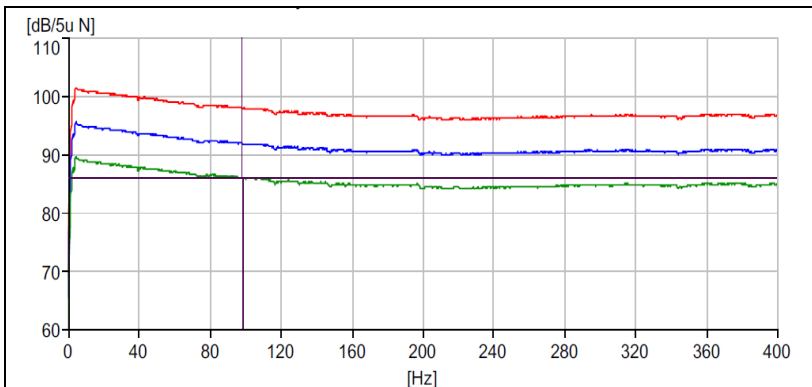


Figura 4.22: autoespectro da força aplicada pelo excitador dianteiro, aplicada em três níveis distintos.

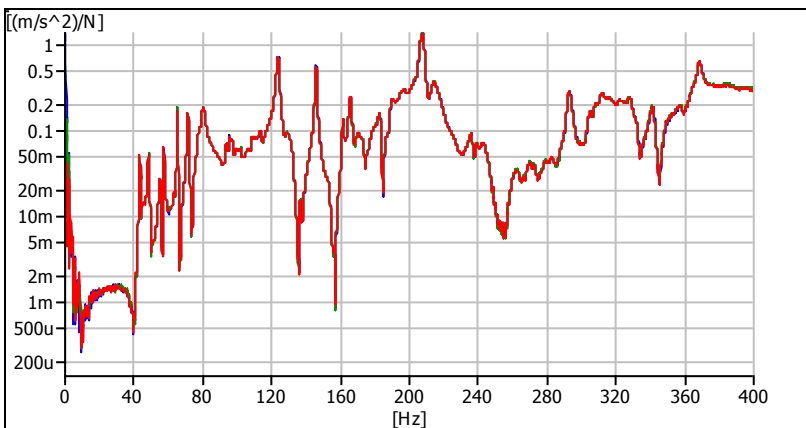


Figura 4.23: FRFs do ponto 101 para os três níveis distintos de força do excitador dianteiro.

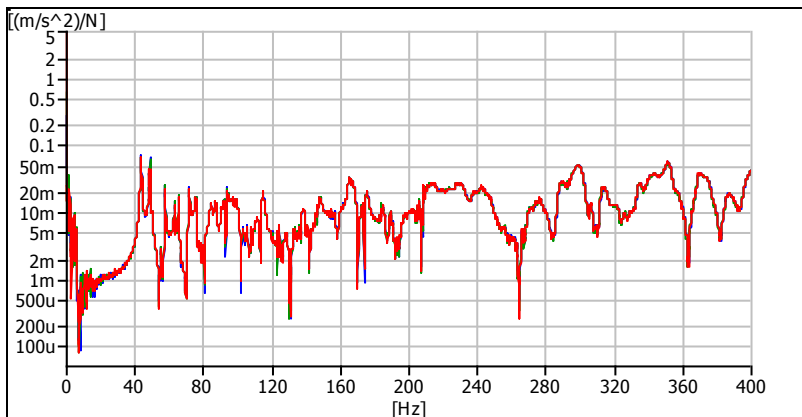


Figura 4.24: FRFs do ponto 9 para os três níveis distintos de força do excitador traseiro.

Por fim, para registrar a repetibilidade do teste, um acelerômetro foi mantido fixo em um ponto da estrutura durante todas as 28 medições necessárias para completar o teste. A superposição das FRFs deste ponto, monitorado ao longo das medições, mostra que não houve variações na estrutura durante as medições. A Figura 4.25 mostra as FRFs medidas no mesmo ponto, no início e no fim do experimento, comprovando a repetibilidade do ensaio.

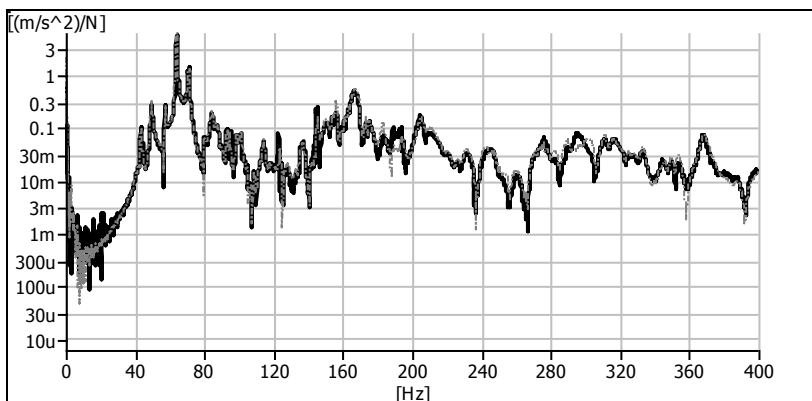


Figura 4.25: FRFs medidas no mesmo ponto no início (linha preta) e no fim (linha cinza) da sequência de medições.

4.3. EXTRAÇÃO DO AMORTECIMENTO

Os quatro casos citados anteriormente foram construídos com o objetivo de avaliar a capacidade dos métodos de extração de parâmetros modais, com foco na determinação do amortecimento. Como a revisão bibliográfica já indica algumas limitações de alguns dos métodos, nem todos os quatro casos foram utilizados para avaliar todos os métodos de extração modal. A Tabela 4.3 indica os casos que foram analisados em cada um dos métodos.

Tabela 4.3: métodos avaliados para cada um dos casos simulados ou medidos

Método de extração	Caso 1: viga	Caso 2: placa circular	Caso 3: placa retangular	Caso 4: carroceria
Banda de Meia-potência	X			
Polyreference Frequency - PFD	X	X	X	X
Polyreference Time - PTD	X	X	X	X
Rational Fraction Polynomial - RFP	X	X	X	X
EigenSystem Realization - ERA	X	X	X	X
Least Squares Partial Fraction - LSPF	X		X	
Alias-Free Polyreference - AFPoly	X	X	X	X

4.3.1. Banda de meia-potência

Apesar de suas limitações, este método tem a vantagem de ser bastante rápido e não requerer grande número de medições. O amortecimento é determinado para cada FRF individualmente e o processo não é propriamente um ajuste de curvas e sim, um processo de interpolação da posição dos pontos de meia-potência, baseado nos pontos vizinhos ao pico de ressonância.

Neste método, as FRF são exportadas para o programa B&K Pulse Labshop. Uma vez que a curva é apresentada graficamente, o valor da razão de amortecimento crítico é calculado e mostrado pelo

programa, sempre que o usuário seleciona o pico cujo amortecimento deseja conhecer. Um exemplo de aplicação está mostrado na Figura 4.26.

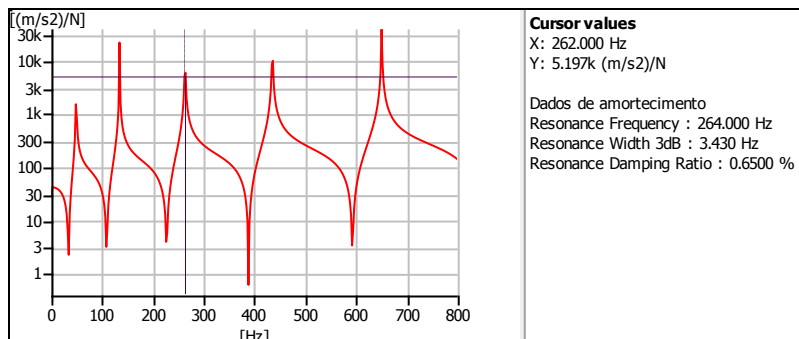


Figura 4.26: dados do amortecimento do terceiro pico calculado pela banda de meia-potência no programa Pulse Labshop.

4.3.2. Demais métodos de ajuste

Os demais métodos de ajuste de curvas são avaliados no programa B&K Pulse Reflex Modal. O procedimento geral e a sequência de passos que deve ser seguida para a extração dos parâmetros modais é descrita logo abaixo. Algumas peculiaridades de cada um dos métodos são citadas em momento oportuno.

Passo 1: seleção das FRFs

Em todos os métodos de ajuste é possível selecionar quais as FRFs que deverão ser consideradas pelo programa para o procedimento de ajuste. Este procedimento permite que o usuário exclua do processo as FRFs que apresentem algum tipo de ruído ou incerteza de medição e que, de alguma forma, possam comprometer a qualidade do ajuste de curvas. No programa Pulse Reflex Modal, as funções são organizadas em uma matriz, conforme os graus de liberdade da excitação e da resposta. Cada uma das colunas representa um ponto de excitação (referência) e cada uma das linhas representa um ponto e direção de

resposta. A seleção das curvas que participam do processo de ajuste é feita de forma gráfica.

Passo 2: escolha do método de ajuste

Após definir as curvas que serão utilizadas no processo de extração modal, deve-se escolher o método que será empregado e ajustar os parâmetros que serão utilizados pelo método, para a extração dos parâmetros. A porção inferior da Figura 4.27 mostra a janela de seleção do método de ajuste.

Na parte superior da mesma figura, é mostrada a janela de seleção da faixa de frequências que será usada no processo de ajuste. Todos os métodos também pedem que o usuário defina, ou o número máximo de iterações que deverá ser realizado para encontrar os modos de vibração, ou o número de modos que supostamente estão presentes na faixa de frequências selecionada.

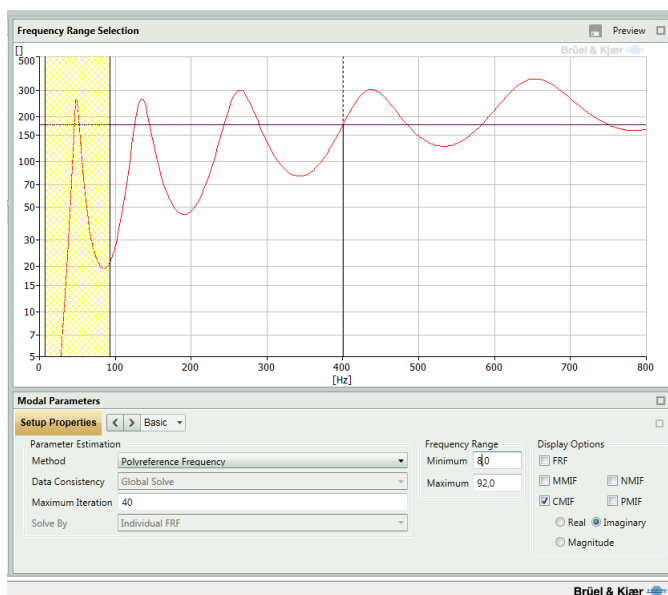


Figura 4.27: tela de seleção do método de ajuste e da faixa de frequências de ajuste.

Os métodos Polyreference Time e EigenSystem Realization são métodos no domínio do tempo e, no momento que o usuário define a faixa de frequências de análise, o programa calcula automaticamente as funções Resposta Impulsiva, através da transformada inversa de Fourier. Estas funções temporais são então mostradas ao usuário, que por sua vez, define o período de tempo que será utilizado no processo de ajuste de curvas (ver parte central da Figura 4.28).



Figura 4.28: Seleção do período de tempo a ser utilizado para o processo de ajuste.

Passo 3: seleção dos modos

Definidos os parâmetros do método de seleção, o programa iterativamente tenta determinar a frequência e amortecimento dos modos presentes na faixa de frequências selecionada. A cada passo do processo iterativo, o número de modos do modelo é aumentado e o algoritmo verifica se os valores de frequência e amortecimento calculados são consistentes com os valores determinados no passo anterior. Enquanto os modos computacionais não reaparecem com valores idênticos de

amortecimento e de frequência, os modos reais da estrutura não mudam significativamente os valores destes parâmetros. Soluções que apresentem repetidamente os mesmos valores de frequência e amortecimento são ditas estáveis e correspondem aos modos reais da estrutura.

O resultado deste processo iterativo é mostrado no Diagrama de Estabilização (Figura 4.29), onde o grau de estabilidade dos modos é indicado através de diferentes símbolos, letras ou cores.

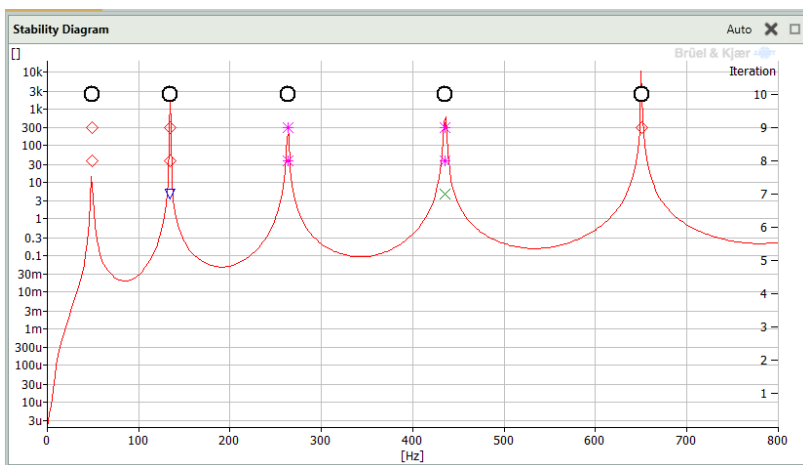


Figura 4.29: exemplo de diagrama de Estabilização.

Uma vez concluído o processo iterativo, a seleção dos modos reais no Diagrama de Estabilização pode ser feita manualmente ou de forma automática.

Cada modo selecionado é utilizado para compor a expressão analítica que irá gerar as curvas sintetizadas que melhor representam as FRFs medidas. Ao selecionar cada modo, o usuário visualiza graficamente o efeito do mesmo nas curvas sintetizadas, que são sobrepostas a cada uma das FRFs medidas (Figura 4.30). No mesmo gráfico ainda é possível visualizar a função erro, que indica a diferença entre a curva medida e a curva sintetizada.

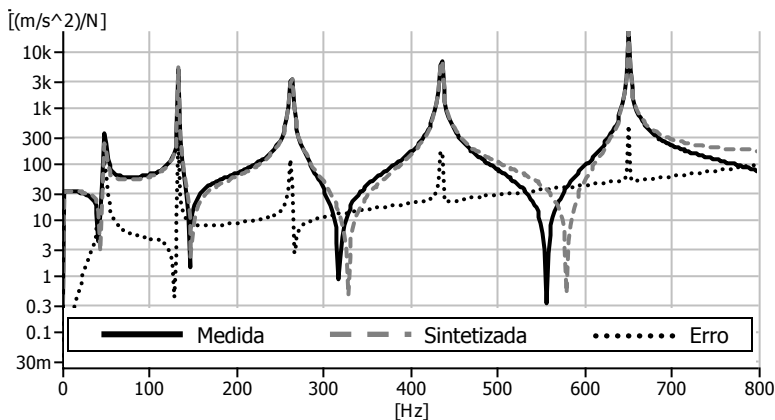


Figura 4.30: gráfico mostrando a FRF medida, a curva sintetizada, e a curva de erro.

Em estruturas simples, como a viga testada, todos os modos são facilmente identificados e as curvas sintetizadas não trazem muita informação ao usuário. Entretanto, em estruturas com modos repetidos e com alta densidade modal, o usuário necessita fazer uso das curvas sintetizadas para auxiliá-lo na seleção correta dos modos reais, diferenciando-os dos modos computacionais.

Passo 4: validação modal

Nos casos analíticos da viga e da placa circular, a quantidade de modos e suas frequências naturais são conhecidas antes do processo de extração de parâmetros, facilitando o processo de seleção dos modos reais identificados pelos métodos iterativos. Já nos casos experimentais da placa retangular e da carroceria veicular, as frequências de ressonância não são previamente conhecidas e a seleção dos modos pode gerar dúvidas para o usuário. Algumas ferramentas de validação modal podem ser utilizadas para auxiliar na identificação dos verdadeiros modos de vibração da estrutura. Neste trabalho, será utilizada a matriz de MAC (*Modal Assurance Criterion*) que faz uma comparação direta dos vetores de resíduos (formas modais). A matriz de MAC que compara os modos m e n , dos modelos distintos j e l , pode ser calculada por (Jordan [21]):

$$MAC(\{\phi_j\}_m, \{\phi_l\}_n) = \frac{|\{\phi_j\}_m^T \{\phi_l\}_n|^2}{(\{\phi_j\}_m^T \{\phi_j\}_m^*) (\{\phi_l\}_n^T \{\phi_l\}_n^*)}. \quad (4.2)$$

Para qualquer sistema, os valores da matriz MAC encontram-se entre 0 (nenhuma correlação entre os modos comparados) e 1 (total correlação entre os modos comparados). Para indicar boa consistência dos modos, a matriz MAC deve apresentar os elementos da diagonal principal com valor próximo de um, e os demais elementos próximos de zero.

Quando o cálculo da matriz MAC é feito entre formas modais do mesmo modelo modal, esta matriz recebe o nome de AutoMAC. A utilidade desta matriz é determinar se um mesmo modo foi selecionado repetidamente no diagrama de estabilização.

A matriz de CrossMAC compara as formas modais de dois modelos modais distintos. Se os modelos comparados são de dois métodos distintos de extração de parâmetros, é possível verificar a equivalência entre os modos encontrados em cada um dos métodos.

5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Este capítulo é dedicado à apresentação dos resultados obtidos nas análises dos quatro casos descritos no capítulo anterior. Inicialmente os resultados de cada caso serão apresentados individualmente, e em seguida, algumas considerações gerais são apresentadas.

Nos dois casos analíticos são apresentados resultados na forma de erro percentual, indicando as diferenças entre os valores de amortecimento prescritos nos modelos e os valores calculados pelos métodos de extração de parâmetros. Este erro é calculado por:

$$\text{Erro (\%)} = \frac{\text{Amortecimento Prescrito} - \text{Amortecimento Calculado}}{\text{Amortecimento Prescrito}} . \quad (5.1)$$

5.1. CASO 1: VIGA

Como indicado pela Tabela 4.3, as FRFs da viga foram analisadas em todos os métodos de extração de parâmetros que foram abordados por este trabalho.

Dada a vasta utilização do método da banda de meia-potência, este foi exaustivamente testado com 35 combinações de valores de resolução espectral e de razão de amortecimento crítico. Foram sete variações de razão de amortecimento e cinco variações de resolução espectral. Cada FRF é composta por cinco modos de vibração e os resultados, apresentados nas Figura 5.1 a 5.5, foram agrupados por modos. Importante observar que os gráficos estão no formato log-log, dada a magnitude de dispersão dos resultados obtidos.

Tabela 5.1: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o primeiro modo da viga.

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
1 - 48Hz	0,01	2,100	1,030	0,455	0,361	0,091
	0,05	2,100	1,030	0,458	0,368	0,101
	0,1	2,100	1,030	0,467	0,385	0,127
	0,5	2,190	1,170	0,721	0,605	0,510
	1	2,490	1,540	1,160	1,050	1,010
	5	5,970	5,210	5,200	5,180	5,180
	10	11,400	11,400	11,400	11,500	11,400

Tabela 5.2: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o primeiro modo da viga

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
1 - 48Hz	0,01	20900,0	10200,0	4450,0	3510,0	810,0
	0,05	4100,0	1960,0	816,0	636,0	102,0
	0,1	2000,0	930,0	367,0	285,0	27,0
	0,5	338,0	134,0	44,2	21,0	2,0
	1	149,0	54,0	16,0	5,0	1,0
	5	19,4	4,2	4,0	3,6	3,6
	10	14,0	14,0	14,0	15,0	14,0

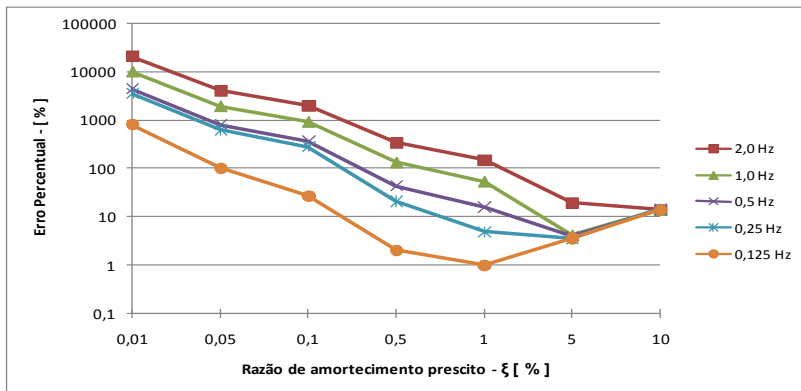


Figura 5.1: erro percentual do amortecimento calculado para o primeiro modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.

Tabela 5.3: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o segundo modo da viga

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
2 - 134Hz	0,01	0,467	0,251	0,152	0,170	0,030
	0,05	0,471	0,256	0,159	0,175	0,051
	0,1	0,482	0,269	0,180	0,190	0,102
	0,5	0,650	0,524	0,532	0,516	0,501
	1	1,020	1,050	1,030	1,010	1,010
	5	5,390	5,430	5,380	5,380	5,380
	10	12,100	12,000	12,000	12,100	12,100

Tabela 5.4: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o segundo modo da viga

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
2 - 134Hz	0,01	4570,0	2410,0	1420,0	1600,0	200,0
	0,05	842,0	412,0	218,0	250,0	2,0
	0,1	382,0	169,0	80,0	90,0	2,0
	0,5	30,0	4,8	6,4	3,2	0,2
	1	2,0	5,0	3,0	1,0	1,0
	5	7,8	8,6	7,6	7,6	7,6
	10	21,0	20,0	20,0	21,0	21,0

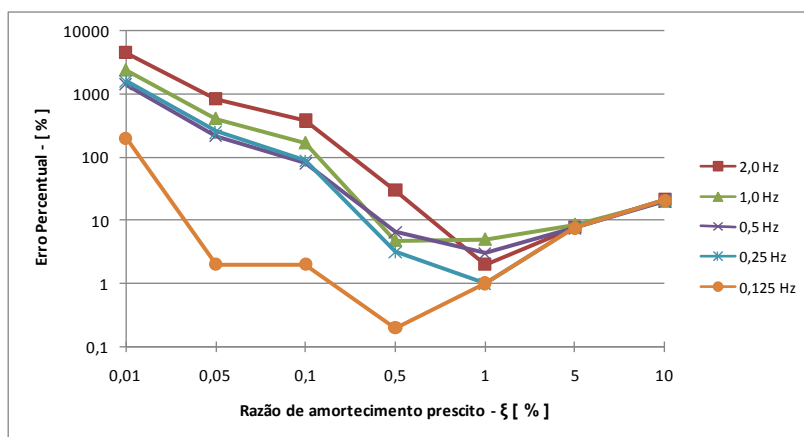


Figura 5.2: erro percentual do amortecimento calculado para o segundo modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.

Tabela 5.5: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o terceiro modo da viga

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
3 - 263Hz	0,01	0,649	0,117	0,062	0,036	0,031
	0,05	0,651	0,129	0,076	0,057	0,058
	0,1	0,656	0,150	0,106	0,106	0,104
	0,5	0,784	0,519	0,505	0,503	0,501
	1	1,110	1,020	1,010	1,010	1,010
	5	5,550	5,590	5,570	5,570	5,570
	10	11,800	12,100	12,100	12,100	12,100

Tabela 5.6: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o terceiro modo da viga

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
3 - 263Hz	0,01	6390,0	1070,0	520,0	260,0	210,0
	0,05	1202,0	158,0	52,0	14,0	16,0
	0,1	556,0	50,0	6,0	6,0	4,0
	0,5	56,8	3,8	1,0	0,6	0,2
	1	11,0	2,0	1,0	1,0	1,0
	5	11,0	11,8	11,4	11,4	11,4
	10	18,0	21,0	21,0	21,0	21,0

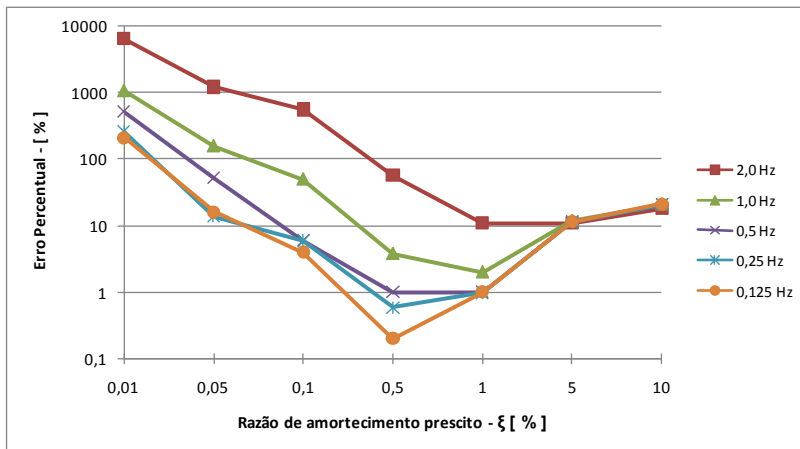


Figura 5.3: erro percentual do amortecimento calculado para o terceiro modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.

Tabela 5.7: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o quarto modo da viga

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
4 - 435Hz	0,01	0,386	0,073	0,04	0,025	0,027
	0,05	0,389	0,086	0,058	0,057	0,054
	0,1	0,399	0,113	0,103	0,103	0,101
	0,5	0,585	0,507	0,504	0,502	0,501
	1	1,03	1,02	1,01	1,01	1,01
	5	5,64	5,76	5,76	5,76	5,76
	10	11,8	12,2	12,2	12,2	12,2

Tabela 5.8: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o quarto modo da viga

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
4 - 435Hz	0,01	3760,0	630,0	300,0	150,0	170,0
	0,05	678,0	72,0	16,0	14,0	8,0
	0,1	299,0	13,0	3,0	3,0	1,0
	0,5	17,0	1,4	0,8	0,4	0,2
	1	3,0	2,0	1,0	1,0	1,0
	5	12,8	15,2	15,2	15,2	15,2
	10	18,0	22,0	22,0	22,0	22,0

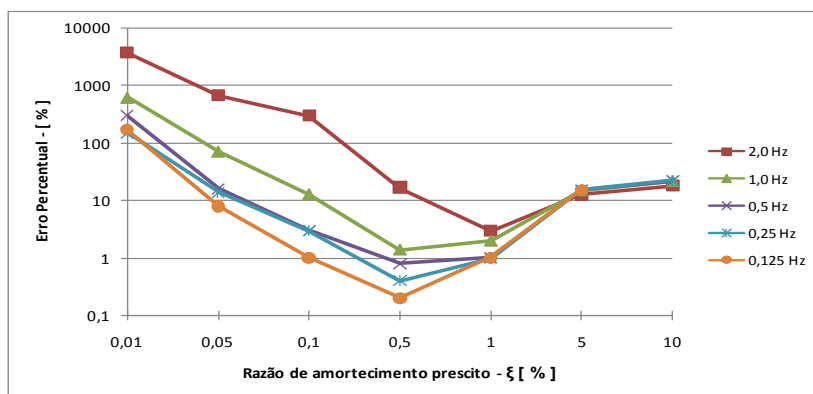


Figura 5.4: erro percentual do amortecimento calculado para o quarto modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.

Tabela 5.9: razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o quinto modo da viga

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
5 - 650Hz		Razão de amortecimento calculado [%]				
	0,01	0,110	0,079	0,036	0,026	0,012
	0,05	0,119	0,100	0,065	0,054	0,050
	0,1	0,142	0,141	0,107	0,103	0,100
	0,5	0,518	0,514	0,502	0,502	0,502
	1	1,040	1,020	1,020	1,010	1,010
	5	5,680	5,950	5,950	5,950	5,950
10	12,400	-	-	-	-	

Tabela 5.10: erro percentual da razão de amortecimento crítico, calculado pelo método da banda de meia-potência, para o quinto modo da viga

Modo	Razão de amortecimento prescrito [%]	Resolução Espectral				
		2,0 Hz	1,0 Hz	0,5 Hz	0,25 Hz	0,125 Hz
5 - 650Hz		Erro Percentual [%]				
	0,01	1000,0	690,0	260,0	160,0	20,0
	0,05	138,0	100,0	30,0	8,0	0,0
	0,1	42,0	41,0	7,0	3,0	0,0
	0,5	3,6	2,8	0,4	0,4	0,4
	1	4,0	2,0	2,0	1,0	1,0
	5	13,6	19,0	19,0	19,0	19,0
10	24,0	-	-	-	-	

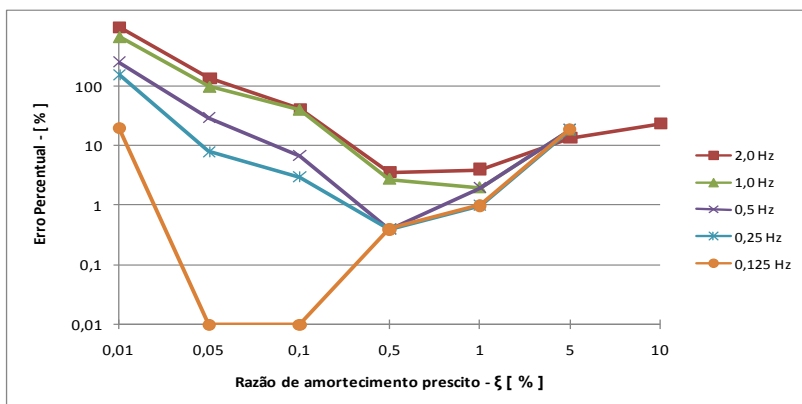


Figura 5.5: erro percentual do amortecimento calculado para o quinto modo da viga para as diferentes combinações de resolução espectral e razão de amortecimento testadas.

A razão pela qual os resultados foram agrupados por modo, é que a frequência de ressonância do modo f_r , entra diretamente no cálculo

da razão de amortecimento crítico, conforme pode ser visto na Equação 3.10. Isso significa que para um mesmo valor de razão de amortecimento, quando maior for o valor da frequência de ressonância, maior será a largura da banda de meia-potência ($\Delta f = f_2 - f_1$). Como a resolução espectral é constante ao longo de toda faixa de frequências, a variação da largura da banda de meia-potência se traduz em variação do número de pontos espectrais dentro da banda. Por fim, como já foi citado na revisão bibliográfica, o número de pontos espectrais influencia diretamente na precisão do método da banda de meia-potência. Esta afirmação pode ser confirmada pelas Figura 5.6 e 5.7 onde o erro percentual calculado para todos os modos, de todas as FRFs da viga, é mostrado em função da largura da banda de meia-potência, e também em função do número de pontos espectrais presentes na banda de meia-potência.

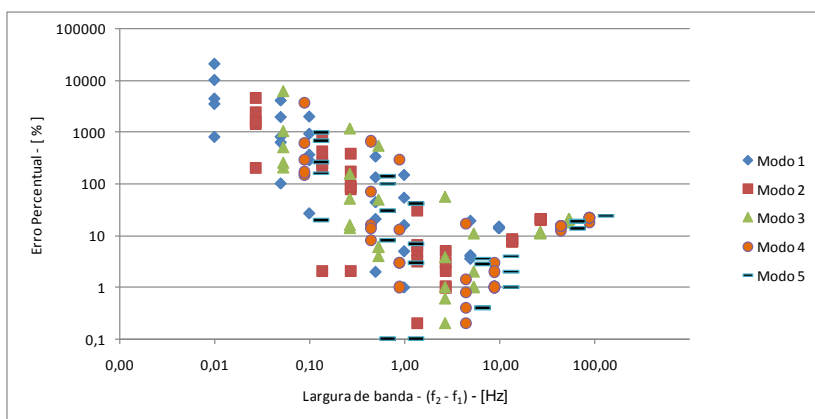


Figura 5.6: erro percentual da razão de amortecimento crítico, em função da largura da banda de meia-potência, para todos os casos da viga.

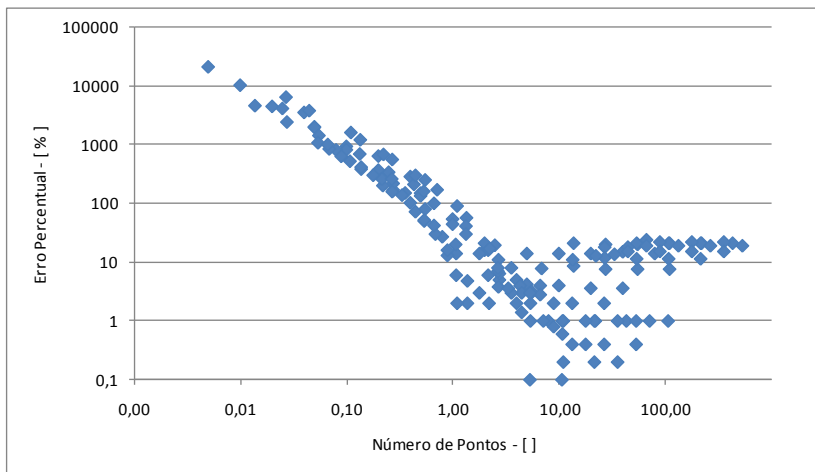


Figura 5.7: erro percentual da razão de amortecimento crítico, em função do número de pontos espectrais dentro da banda de meia-potência, para todos os casos da viga.

5.1.1. Banda de meia-potência: Informações adicionais

Os resultados da análise dos dados da viga através do método da banda de meia-potência mostraram que o método é suscetível a grandes erros, mas pode ser bastante confiável se tomarmos alguns cuidados com os dados analisados. Dada a ampla utilização deste método e sua praticidade de uso, algumas informações complementares serão citadas a seguir:

A forma dos picos de ressonância pode variar muito com a frequência de ressonância e uma simples análise gráfica da FRF pode levar a conclusões equivocadas. Na FRF da Figura 5.8, o amortecimento é constante para toda faixa de frequências e, no entanto, o primeiro pico de ressonância tem um aspecto bastante "pontudo", enquanto que o pico da quinta ressonância é bastante achatado e arredondado.

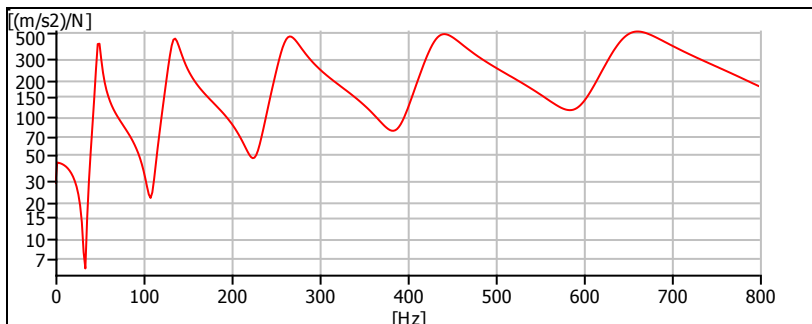


Figura 5.8: FRF da viga com razão de amortecimento de 5%, mostrando a variação da largura da banda de meia-potência para cada ressonância da estrutura.

Não é tarefa simples escolher uma resolução espectral que resulte em um número adequado de pontos na banda de meia-potência para uma ampla faixa de frequências e ampla faixa de razões de amortecimento. Considerando, por exemplo, valores típicos de $f_r = 100\text{Hz}$ e $\xi = 0,1\%$, a largura da banda ($f_2 - f_1$) é de apenas 0,2Hz. Em outro extremo, com $f_r = 1000\text{Hz}$ e $\xi = 10\%$, a largura da banda é de 200Hz. A diferença entre estes dois casos é de três ordens de grandeza!

O gráfico da Figura 5.9 mostra a largura da banda de meia-potência em função da frequência de ressonância f_r , para alguns valores típicos de razão de amortecimento crítico.

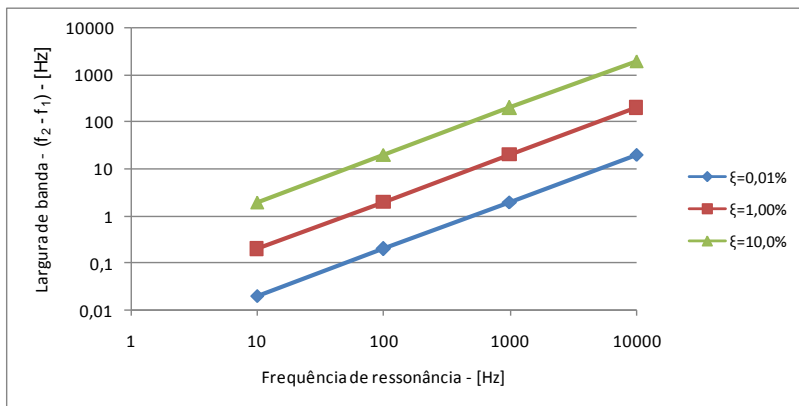


Figura 5.9: largura da banda de meia-potência em função da frequência de ressonância do modo, para alguns valores típicos de razão de amortecimento

Em casos de picos de ressonância muito "afiados", ou seja, baixa frequência de ressonância e baixo valor de amortecimento, é possível aumentar o número de pontos na banda de meia-potência realizando uma análise do tipo zoom ao redor do pico de ressonância. O aumento da resolução espectral afeta diretamente o tempo de aquisição da amostra do analisador FFT visto que um parâmetro é inversamente proporcional ao outro. Este aumento no período de aquisição pode, em alguns casos, inviabilizar a análise. Para ilustrar o exposto acima, considere o primeiro modo da viga, com $f_r=48,65\text{Hz}$ e a razão de amortecimento de $\xi=0,01\%$. Neste caso, a largura da banda de meia-potência é de aproximadamente 10mHz. Para obter-se 10 pontos dentro desta banda, a resolução da análise deve ser de 1mHz, implicando em um tempo de aquisição de $T = (1/0,001) = 1000\text{s} = 16,7$ minutos!

Uma análise "zoom" foi simulada no programa Ansys, utilizando as condições descritas acima. A Figura 5.10 mostra o resultado do valor da razão de amortecimento deste pico de ressonância, calculada pelo método de meia-potência. O programa indica $\xi=0,01\%$, ou seja, exatamente o valor do amortecimento prescrito.

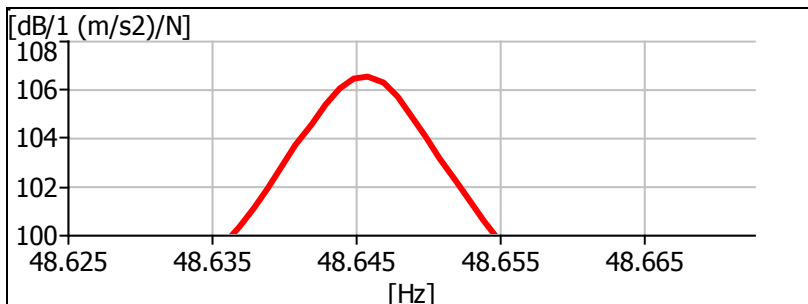


Figura 5.10: análise *zoom* do primeiro modo da viga, com resolução de 0,001Hz.

As FRFs da viga também foram submetidas aos demais métodos de extração de parâmetros.

Foram testados dois conjuntos de dados com valores distintos de razão de amortecimento prescrito ($\xi = 0,01\%$ e $\xi = 10\%$). Os resultados do amortecimento calculado e do erro percentual são indicados nas Tabela 5.11 a 5.14 e nas Figura 5.11 e 5.12.

Tabela 5.11: razão de amortecimento crítico calculado pelos diferentes métodos de extração modal para a viga com razão de amortecimento prescrito de 0,01%.

Modo	Frequência [Hz]	Método de extração					
		LSPF	PTD	ERA	PFD	RFP	AFPoly
Razão de amortecimento calculado [%]							
1	48	0,00963	0,00999	0,00990	0,00998	0,01037	0,01000
2	134	0,00986	0,00999	0,00994	0,01002	0,01000	0,01000
3	263	0,01001	0,01000	0,00990	0,01000	0,01000	0,01000
4	435	0,01002	0,01000	0,00991	0,01000	0,01000	0,01000
5	650	0,00998	0,01000	0,00990	0,01000	0,01000	0,01000

Tabela 5.12: erro percentual do amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 0,01%.

Modo	Frequência [Hz]	Método de extração					
		LSPF	PTD	ERA	PFD	RFP	AFPoly
Erro Percentual [%]							
1	48	3,7	0,1	1,0	0,2	3,7	0,0
2	134	1,4	0,1	0,6	0,2	0,0	0,0
3	263	0,1	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
4	435	0,2	0,0	0,9	0,0	0,0	0,0
5	650	0,2	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0

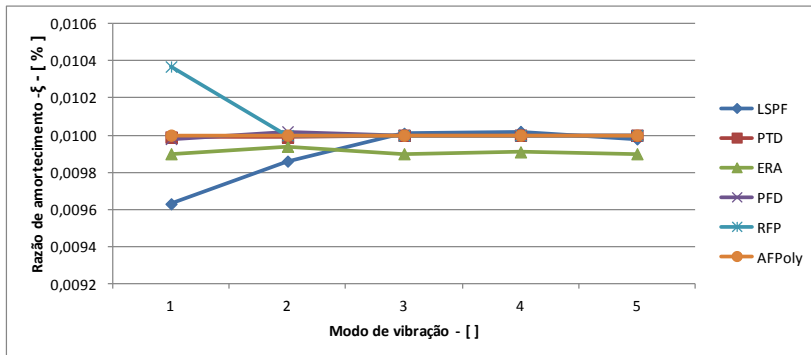


Figura 5.11: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 0,01%.

Tabela 5.13: Razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 10%.

Modo	Frequência [Hz]	Método de extração					
		LSPF	PTD	ERA	PFD	RFP	AFPoly
Razão de amortecimento calculado [%]							
1	48	9,84261	10,00505	10,04280	9,99002	9,91701	10,00003
2	134	10,80956	9,99713	10,38438	10,01353	9,99985	9,99887
3	263	11,36172	9,99864	9,89149	9,99657	10,00087	10,00095
4	435	13,01722	9,99919	10,53805	9,91452	9,99941	10,00251
5	650	13,08258	10,00827	9,89788	10,63798	9,97710	10,07566

Tabela 5.14: erro percentual do amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 10%.

Modo	Frequência [Hz]	Método de extração					
		LSPF	PTD	ERA	PFD	RFP	AFPoly
Erro Percentual [%]							
1	48	1,6	0,1	0,4	0,1	0,8	0,0
2	134	8,1	0,0	3,8	0,1	0,0	0,0
3	263	13,6	0,0	1,1	0,0	0,0	0,0
4	435	30,2	0,0	5,4	0,9	0,0	0,0
5	650	30,8	0,1	1,0	6,4	0,2	0,8

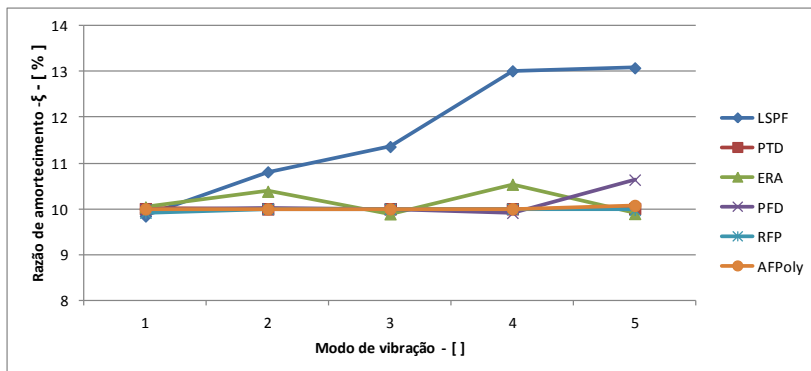


Figura 5.12: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da viga com razão de amortecimento prescrito de 10%.

5.1.2. Conclusões do caso da viga

- O método da banda de meia-potência tem um comportamento distinto dos demais métodos e discutido mais adiante nas conclusões gerais;
- Para o caso da viga com $\xi = 0,01\%$, o algoritmo ERA subestimou todos os valores de amortecimento calculado, porém com erro sempre menor do que 1%;
- Ainda no caso da viga com $\xi = 0,01\%$, os maiores erros foram no cálculo do amortecimento do primeiro modo. Os métodos RFP e LSPF indicaram amortecimento com erro de 3,7%;
- Para o caso da viga com $\xi = 10,0\%$, o método LSPF divergiu dos demais e indicou amortecimento com erro de 30%. O método superestimou os valores de amortecimento e o erro aumentou com o aumento da frequência de ressonância;
- Os métodos RPF, PTD e AFPoly obtiveram resultados parecidos, com erro praticamente nulo nos dois casos da viga testados.

5.2. CASO 2: PLACA CIRCULAR

Neste segundo caso, também modelado numericamente, os métodos da banda de meia-potência e LSPF não foram analisados, pois são estimadores locais de um grau de liberdade, incapazes de identificar os modos repetidos presentes nesta estrutura.

A razão de amortecimento crítica prescrita para a placa circular foi de $\xi = 0,5\%$ para toda a faixa de frequências analisada. O amortecimento calculado por cada um dos métodos é apresentado de forma gráfica (ver Figura 5.13) e o erro percentual é disposto em forma tabular (ver Tabela 5.15).

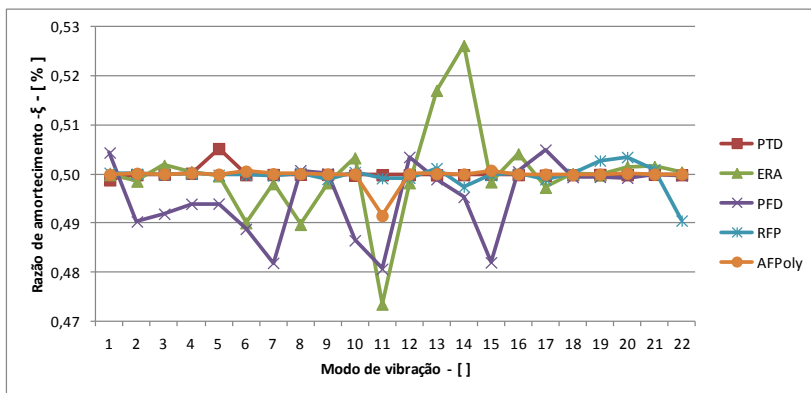


Figura 5.13: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal, para o caso da placa circular

Tabela 5.15: erro percentual do amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da placa circular.

Modo	Frequência [Hz]	Método de extração				
		PTD	ERA	PFD	RFP	AFPoly
		Erro Percentual [%]				
1	65,1	0,2	0,0	0,9	0,0	0,0
2	65,1	0,0	0,3	1,9	0,0	0,0
3	109,4	0,0	0,4	1,6	0,0	0,0
4	151,0	0,0	0,1	1,2	0,0	0,0
5	151,0	1,0	0,1	1,2	0,0	0,0
6	248,7	0,0	2,0	2,2	0,0	0,1
7	248,7	0,0	0,4	3,6	0,1	0,0
8	265,0	0,0	2,1	0,2	0,0	0,0
9	265,0	0,0	0,4	0,0	0,2	0,0
10	406,3	0,0	0,7	2,7	0,1	0,0
11	406,3	0,0	5,3	3,9	0,2	1,7
12	428,1	0,0	0,4	0,7	0,2	0,0
13	428,1	0,0	3,4	0,2	0,2	0,0
14	467,1	0,0	5,2	0,9	0,5	0,0
15	574,6	0,0	0,3	3,6	0,0	0,2
16	574,6	0,0	0,8	0,1	0,0	0,0
17	643,2	0,0	0,5	1,0	0,2	0,0
18	643,2	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0
19	726,3	0,0	0,0	0,1	0,6	0,0
20	726,5	0,0	0,3	0,2	0,7	0,0
21	769,5	0,0	0,3	0,0	0,2	0,0
22	769,5	0,0	0,1	0,1	1,9	0,0

5.2.1. Conclusões do caso da placa circular

- O máximo erro percentual foi de 5,3%, encontrado em um modo calculado pelo método ERA. Este valor é plenamente aceitável para boa parte das aplicações em engenharia;
- A imensa maioria dos valores de amortecimento foi calculada com erro menor que 1,0%, indicando excelente concordância entre os métodos;
- Os algoritmos ERA e PFD tiveram as maiores dispersões de resultados;
- Os métodos PTD e AFPoly extraíram os valores de amortecimento com erro próximo de zero, em toda faixa de frequências analisada;
- Todos os métodos tiveram grandes dificuldades de identificar os modos de ressonância. A faixa de frequência analisada em cada processo iterativo precisou ser bastante reduzida (em

alguns casos contemplando apenas um modo), para que os métodos conseguissem identificar os modos de vibração. O motivo desta dificuldade não está bem claro e deve ser mais bem estudada.

5.3. CASO 3: PLACA RETANGULAR

A placa retangular foi o primeiro caso experimental analisado. Os resultados indicam valores de amortecimento bastante baixos (na ordem de $\xi = 0,05\%$) e praticamente constantes ao longo de toda faixa de análise. Os valores calculados estão apresentados na Tabela 5.16 e Figura 5.14.

Tabela 5.16: Razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da placa retangular

Modo	Frequência [Hz]	Método de extração					
		LSPF	PTD	ERA	PFD	RFP	AFPoly
Razão de amortecimento calculado [%]							
1	177,4	0,06034	0,06041	0,07702	0,06500	0,06159	0,06059
2	211,7	0,05044	0,05048	0,04588	0,05396	0,05080	0,05103
3	406,1	0,03653	0,03519	0,00376	0,03642	0,03242	0,04035
4	420,1	0,02749	0,02752	0,02100	0,02762	0,02719	0,02890
5	517,9	0,02347	0,02410	0,02467	0,01409	0,02441	0,02201
6	621,7	0,03692	0,03689	0,06142	0,03789	0,03764	0,03753
7	800,6	0,05107	0,04946	0,05910	0,03721	0,05102	0,05024
8	857,8	0,02460	0,02014	0,02437	0,02180	0,04092	0,01698
9	1101,3	0,06684	0,06657	0,06219	0,06544	0,06561	0,06640
10	1186,1	0,04347	0,04399	0,04658	0,04463	0,04294	0,04404
11	1227,1	0,04165	0,04145	0,04287	0,04509	0,04170	0,04237
12	1314,5	0,03337	0,03464	0,03750	0,03758	0,03402	0,03740
13	1368,3	0,03572	0,03509	0,03476	0,03473	0,03641	0,03840
14	1583,8	0,06603	0,06477	0,14978	0,04035	0,07842	0,06279
Média		0,04271	0,04219	0,04935	0,04013	0,04465	0,04279
Desvio Padrão		0,01443	0,01461	0,03485	0,01449	0,01535	0,01460

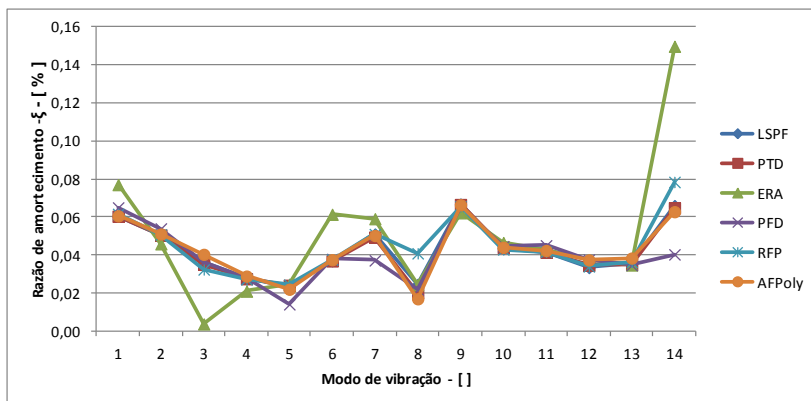


Figura 5.14: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da placa retangular.

Neste caso que foi medido experimentalmente, e que os modos da estrutura não são previamente conhecidos, a visualização da forma modal auxilia na seleção dos modos reais no diagrama de estabilização.

A Figura 5.15 mostra a diferença da forma modal entre duas indicações de modos estáveis em uma mesma frequência. Além de mostrar que se trata do mesmo modo, é possível visualizar que o modo selecionado em 1314,45Hz tem a forma modal mais condizente com a forma esperada para este modo.

Os mesmos quatorze modos de vibração foram identificados por todos os métodos de extração de parâmetros modais. A qualidade da análise pode ser comprovada pela clareza na identificação das formas modais, dispostas na Tabela 5.17 e também pela matriz de MAC mostrada na Tabela 5.18. A matriz MAC com a diagonal principal unitária (e valores baixos fora da diagonal) indica que todos os modos são ortogonais, isto é, não há modos repetidos.

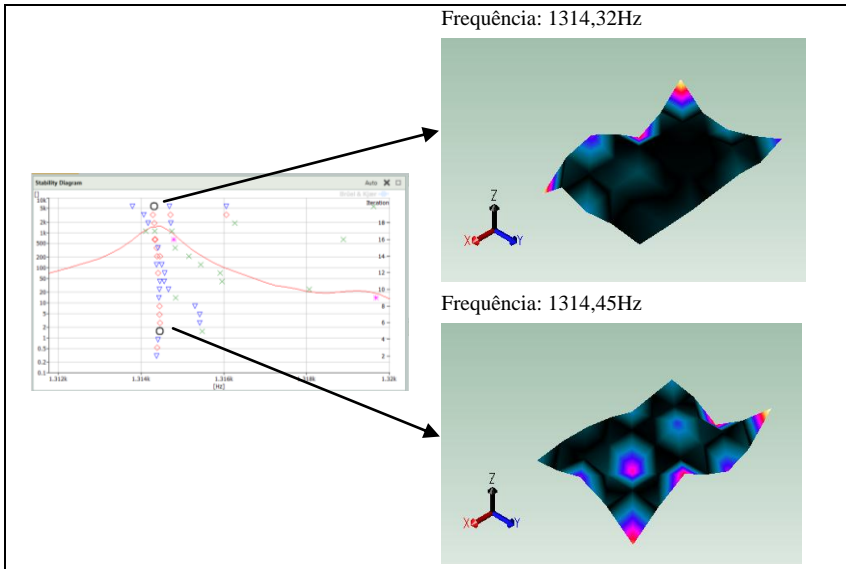
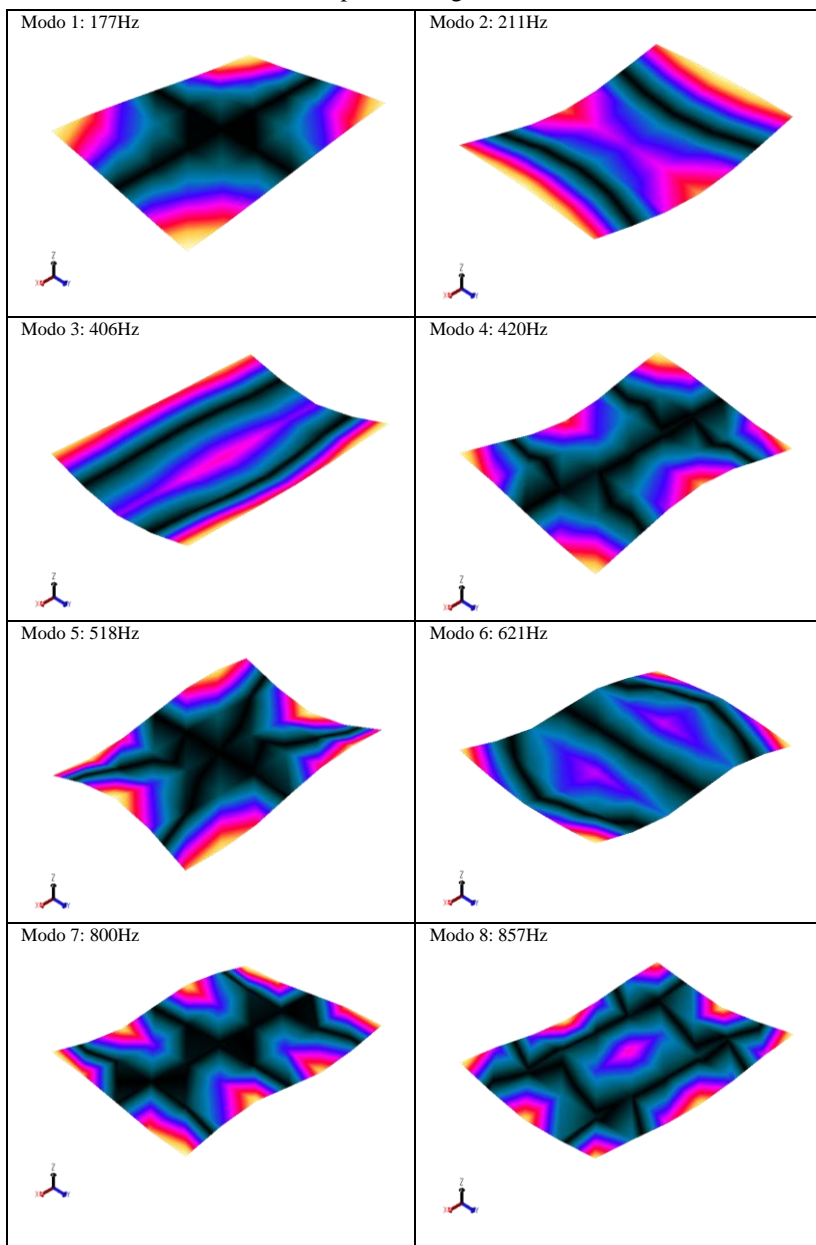


Figura 5.15: identificação dos modos reais com o auxílio da forma modal.

Tabela 5.17: formas modais da placa retangular



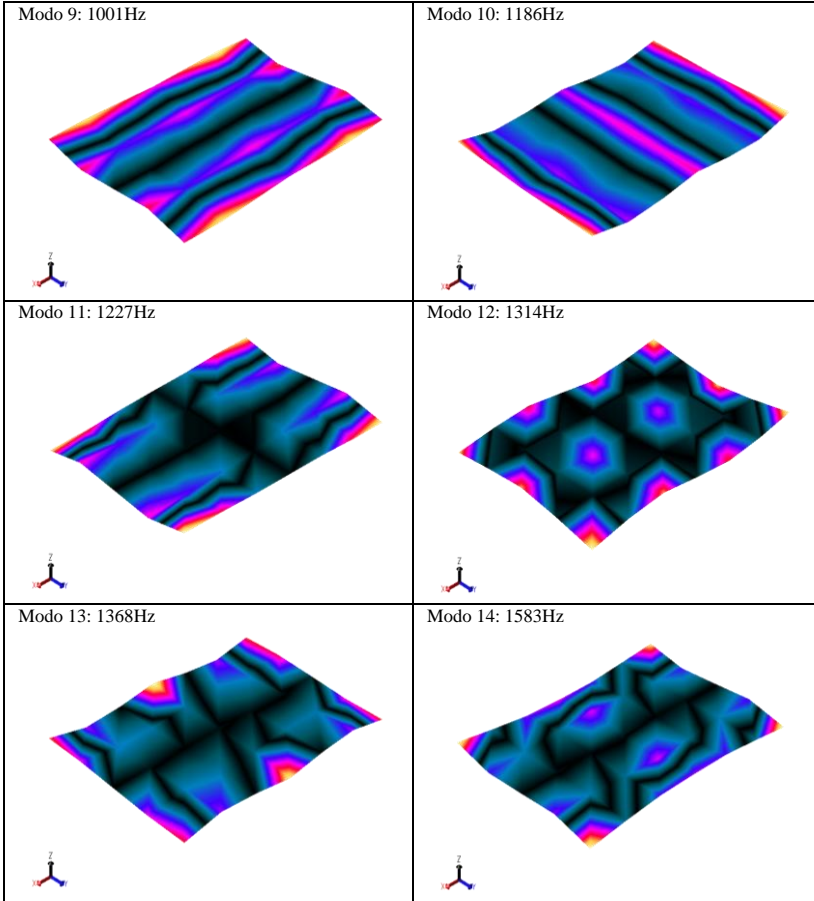


Tabela 5.18: matriz de MAC (automac) da placa retangular, calculada com os modos extraídos pelo método PFD

		Modo														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Modo	1	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0
	2	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0
	3	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	4	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2
	5	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0
	7	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	8	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1
	10	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	11	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	12	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
	13	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0
	14	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0

5.3.1. Compensação da janela Exponencial

No momento da aquisição de dados, foi aplicada uma janela do tipo Exponencial ao sinal de resposta, para evitar o problema de vazamento. A aplicação desta janela introduz um amortecimento "artificial" às curvas de resposta, e este deve ser compensado para que o verdadeiro valor do amortecimento seja conhecido (ver Figura 5.16). Sendo σ_m a constante de decaimento medida, σ_w a constante de decaimento da janela exponencial, o valor corrigido da razão crítica de amortecimento é dada por (Brüel&Kjaer [35]):

$$\xi = \frac{\sigma}{\omega_0} = \frac{\sigma_m}{\omega_0} - \frac{\sigma_w}{\omega_0}, \quad (5.2)$$

onde $\sigma_w = 1/\tau_w$, sendo τ_w a constante de tempo da janela exponencial, indicado na Figura 5.16.

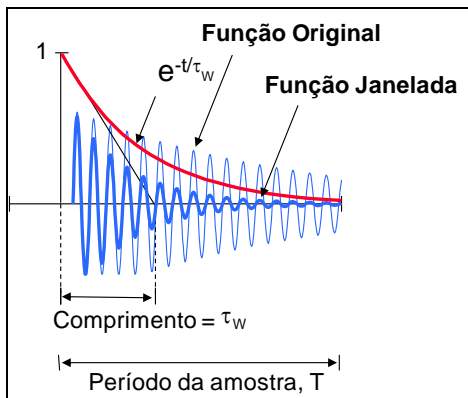


Figura 5.16: exemplo de sinal de resposta com aplicação da janela exponencial. Fonte: adaptado de Brüel&Kjaer [35].

O valor da constante de decaimento aplicada foi de $\sigma_w = 1.798$ s.

Visto que propósito deste trabalho é demonstrar comparativamente os valores de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal, a compensação da janela exponencial não foi aplicada às FRFs da placa retangular.

5.3.2. Conclusões do caso da placa retangular

- Os métodos de extração modal indicaram valores muito parecidos de amortecimento para toda faixa de frequências analisada;
- Os métodos PFD e ERA mostraram uma dispersão um pouco maior nos valores encontrados, quando comparados aos demais métodos;
- Todos os métodos tiveram dificuldades de estabilizar o último modo, em 1583Hz. A causa provável para isso é o truncamento do modo, dada sua proximidade com o valor limite de faixa analisada (1600Hz). Neste modo, o algoritmo ERA indicou amortecimento cerca de três vezes maior que os demais métodos.

5.4. CASO 4: CARROCERIA

O último caso analisado exigiu grande robustez dos algoritmos de ajuste de curvas por se tratar de uma análise MIMO, com alta densidade modal e grande número de graus de liberdades. O experimento foi conduzido até 400Hz mas o processo de extração de parâmetros modais foi feito somente até os 100Hz. Isso porque nesta faixa foram encontrados mais de 30 modos, número suficiente para realizar uma análise adequada dos métodos de extração. Assim como no caso da placa circular, os estimadores de um grau de liberdade não foram testados.

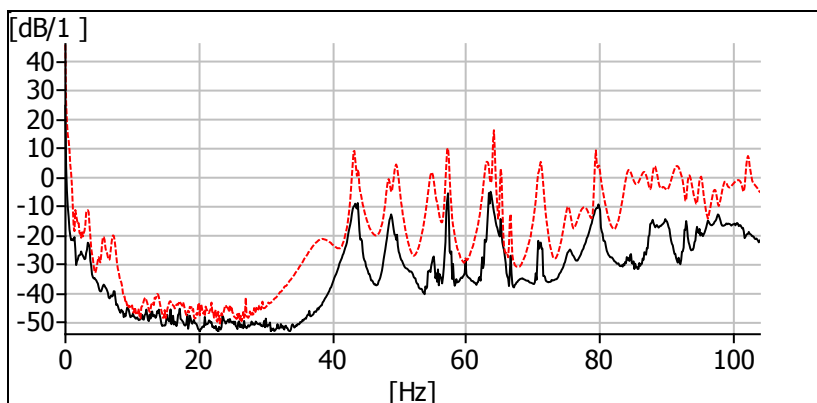


Figura 5.17: elevada densidade modal da carroceria na faixa até 100Hz.

A elevada densidade modal desta estrutura dificulta a identificação dos modos reais no diagrama de estabilização. É comum que alguns modos sejam identificados por um método e não sejam identificados por outro. A observação das curvas de síntese, formas modais e matriz de MAC são as ferramentas que devem ser utilizadas para balizar a correta seleção dos modos reais. A Tabela 5.19 mostra que há um bom grau de ortogonalidade entre os modos extraídos pelo método PTD. Para os demais métodos foram obtidas matrizes com qualidade similar.

As matrizes de CrossMAC, como por exemplo a da Tabela 5.20, foram utilizadas para verificar a equivalência entre os modos identificados em cada um dos métodos de extração modal.

A Tabela 5.21 mostra os valores de razão de amortecimento crítico indicado por cada um dos métodos. Espaços em branco indicam que o modo não foi identificado através daquele método. Estes valores estão também mostrados na Figura 5.18.

Tabela 5.19: matriz de MAC (automac) da placa carroceria, calculada com os modos extraídos pelo método PTD

		Modos - método PTD																																									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38				
Modos - método PT	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Tabela 5.20: matriz de MAC (Crossmac) da placa carroceria, calculada com os modos extraídos pelos métodos RFP e AFPoly

		Modos - método RFP																																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35		
Modos - método AFPoly	1	0.8	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
	2	0.1	0.8	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	3	0.0	0.0	0.9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	4	0.0	0.0	0.0	0.3	0.7	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	5	0.0	0.0	0.0	0.3	0.8	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.8	0.4	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.8	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.1	0.0	0.0	0.0	0.6	0.5	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.3	0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.1	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	
	14	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	0.6	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
	15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	16	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.5	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	
	17	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	18	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	19	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	21	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	22	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	23	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	24	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	26	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	27	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.2

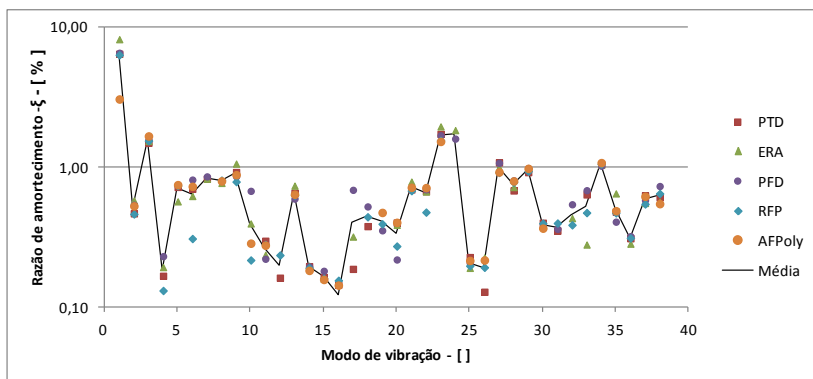


Figura 5.18: razão de amortecimento calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da carroceria. Linha preta indicando o valor médio dos valores estimados.

Tabela 5.21: Razão de amortecimento crítico calculado pelos diferentes métodos de extração modal para o caso da carroceria

Modo	Método de extração					Média por modo
	PTD	ERA	PFD	RFP	AFPoly	
	Razão de amortecimento calculado [%]					
1	6,487	8,242	6,595	6,373	3,084	6,156
2	0,471	0,583	0,542	0,467	0,533	0,519
3	1,506	1,548	1,579	1,553	1,680	1,573
4	0,169	0,195	0,233	0,133		0,182
5	0,728	0,574	0,754	0,743	0,755	0,711
6	0,706	0,627	0,820	0,312	0,734	0,640
7	0,833	0,833	0,865			0,844
8		0,777		0,813	0,802	0,798
9	0,929	1,068	0,866	0,794	0,889	0,909
10		0,399	0,682	0,219	0,289	0,397
11	0,300	0,239	0,223	0,283	0,279	0,265
12	0,164			0,238		0,201
13	0,660	0,743	0,601	0,636	0,645	0,657
14	0,198	0,199	0,197	0,193	0,185	0,194
15	0,165	0,161	0,183	0,162	0,159	0,166
16	0,146	0,084	0,083	0,157	0,145	0,123
17	0,189	0,322	0,694			0,402
18	0,382		0,528	0,445		0,452
19			0,357	0,397	0,478	0,411
20	0,405	0,390	0,221	0,275	0,406	0,340
21	0,698	0,794	0,706	0,684	0,723	0,721
22	0,679	0,675	0,699	0,481	0,719	0,651
23	1,737	1,966	1,698	1,564	1,537	1,700
24		1,850	1,609			1,730
25	0,230	0,192	0,209	0,199	0,217	0,210
26	0,130	0,228		0,194	0,219	0,193
27	1,089	1,005	1,082	0,923	0,930	1,006
28	0,686	0,726	0,811	0,787	0,803	0,762
29	0,927	0,993	0,992	0,943	0,986	0,968
30	0,404		0,375	0,401	0,370	0,387
31	0,355		0,365	0,402		0,374
32		0,436	0,547	0,390		0,458
33	0,643	0,282	0,689	0,477		0,523
34	1,053	1,051	1,031	1,059	1,085	1,056
35	0,484	0,654	0,411	0,475	0,492	0,503
36	0,313	0,286	0,324	0,315		0,309
37	0,632	0,559	0,586	0,550	0,624	0,590
38	0,615	0,571	0,738	0,653	0,553	0,626
Média	0,761	0,886	0,826	0,705	0,726	0,755

5.4.1. Conclusões sobre o caso da carroceria

- Os diferentes métodos chegaram a valores muito parecidos de amortecimento. Excluindo o primeiro modo, que tem valor de amortecimento muito diferente dos demais, a dispersão dos valores de amortecimento estimados foi bastante baixa;
- O método RFP foi o método que indicou o menor valor médio (0,705%) e o algoritmo ERA indicou o maior valor médio (0,886%) de razão de amortecimento crítico;
- Para casos de tamanha complexidade é impossível determinar adequadamente os modos reais da estrutura sem o auxílio das ferramentas de validação modal: síntese de curvas, forma modal e matriz de MAC.

5.5. CONCLUSÕES GERAIS

5.5.1. Método da banda de meia-potência

- Este método apresentou erros que chegaram a mais de 20.000% em casos extremos de baixo amortecimento e baixas frequências de ressonância;
- Ao contrário dos demais métodos, o amortecimento calculado pela banda de meia-potência, nunca é subestimado. Isso é devido à natureza do erro de discretização na frequência, ao qual o método é bastante sensível;
- O método é extremamente sensível à resolução espectral, e ao número de pontos dentro da banda de meia-potência;
- Como pode ser visto na Figura 5.7, com um número adequado de pontos na banda de meia-potência, é possível obter valores de amortecimento com erro inferior a 1,0%. Os menores erros foram obtidos com cerca de 10 pontos na banda;
- A análise "zoom" (Figura 5.10) mostrou que até em casos de picos extremamente finos é possível obter resultados de qualidade. O preço a ser pago por isso é o tempo de aquisição dos sinais de vibração da estrutura.

5.5.2. Dos demais métodos

- Os algoritmos são praticamente insensíveis à resolução espectral. Há indícios de erro associado à resolução espectral, apenas no primeiro modo da viga com $\xi = 0,01\%$. Este caso em particular apresenta pico de ressonância extremamente pontiagudo. Mesmo neste caso extremo, o erro foi menor do que 4%;
- O algoritmo LSPF apresentou grandes erros em caso com elevado amortecimento (Figura 5.12). Por tratar-se de um método de um grau de liberdade, associado ao fato do erro aumentar com o aumento da frequência de ressonância, indica que o mesmo pode estar associado à superposição de modos;
- Em linhas gerais, os métodos apresentaram valores semelhantes de amortecimento.
- O algoritmo ERA apresentou a maior dispersão nos valores de amortecimento calculados;
- É citado na literatura que os métodos no domínio do tempo são suscetíveis a erro na determinação do amortecimento devido ao problema de vazamento. Este erro não foi observado nos métodos ERA e PTD, aqui utilizados (ver Figura 5.19).
- Os algoritmos RFP e AFPoly foram os mais robustos, com os menores erros nos casos aqui estudados. A robustez destes métodos não se refere apenas à determinação de amortecimento, mas também à qualidade das curvas de síntese e, à facilidade do método em encontrar os modos reais da estrutura. As figuras abaixo mostram exemplos da robustez dos algoritmos;
-

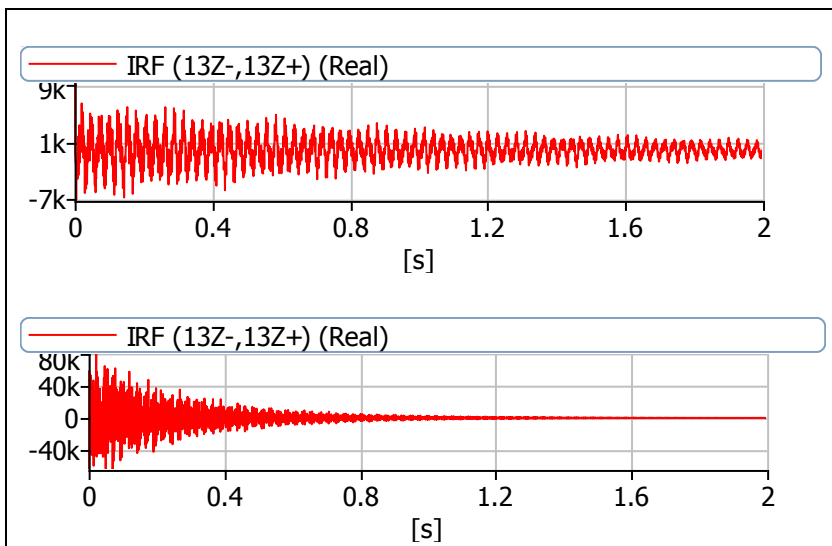


Figura 5.19: funções resposta impulsiva da placa retangular, utilizadas pelo método ERA. Acima, modo com baixo amortecimento e passível de erro de vazamento. Abaixo, curva não suscetível ao problema.

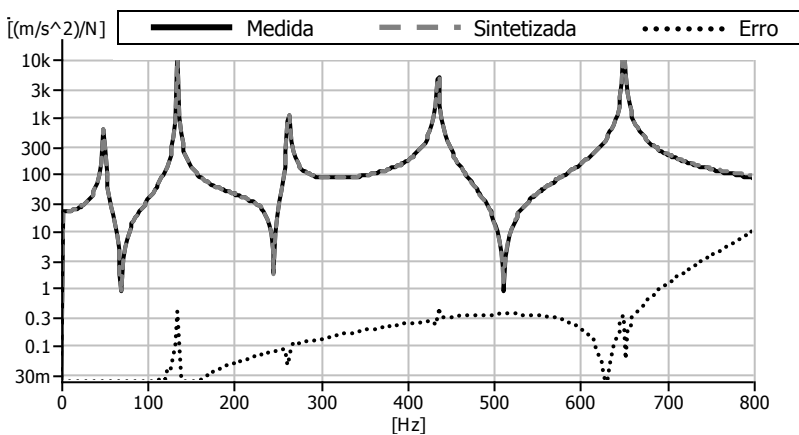


Figura 5.20: FRF da viga com síntese realizada pelo método AFPoly.

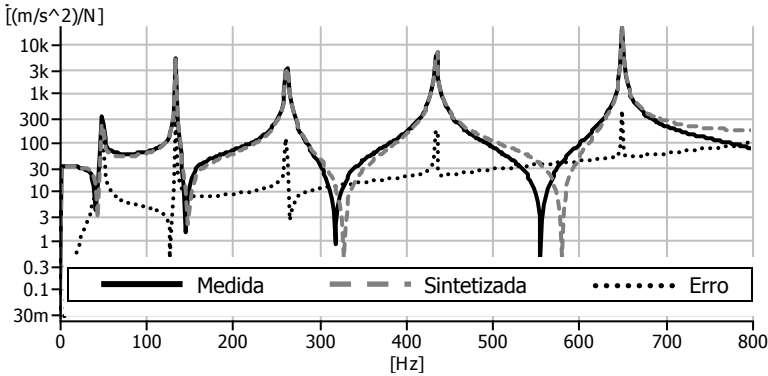


Figura 5.21: FRF da viga com síntese realizada pelo método LSPF

- Apesar do nível cada vez maior de automação dos métodos de extração modal, a experiência do usuário ainda é decisiva para a qualidade das extrações de parâmetro modal.
- Não foram observadas diferenças significativas de tempo de processamento entre os métodos. O tempo de cálculo dos algoritmos é sim bastante influenciado pela quantidade de modos analisados ao mesmo tempo. Para poucos modos, o processamento demorava poucos segundos e para muitos modos, o tempo de processamento atingia poucos minutos.

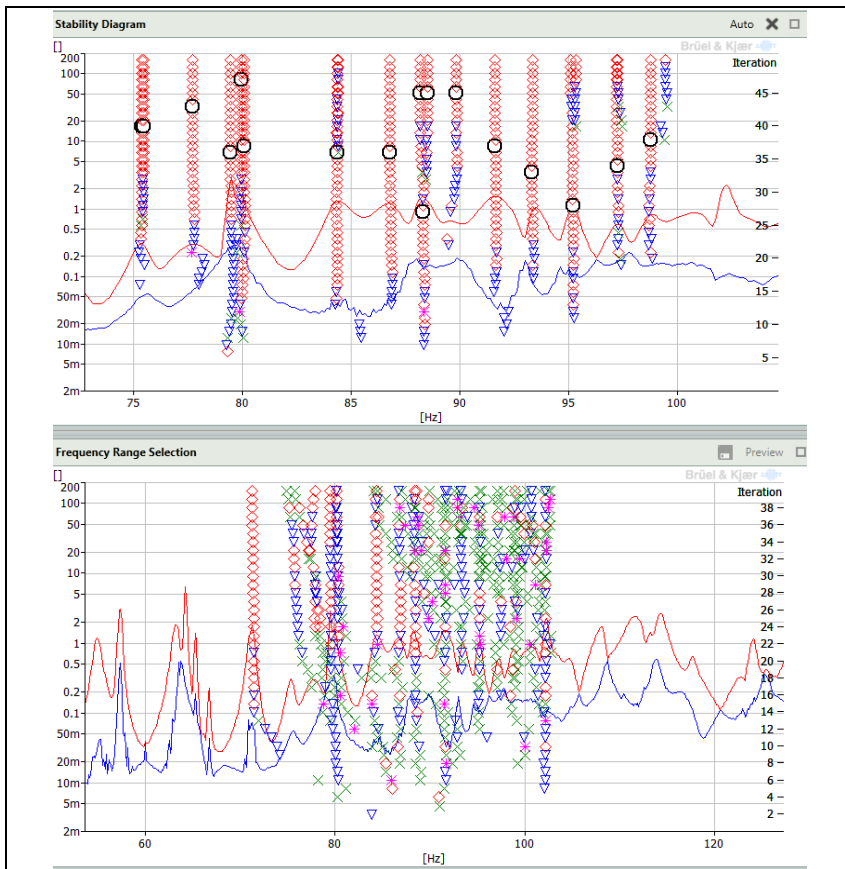


Figura 5.22: Exemplos de diagrama de estabilização. Acima, calculado por RFP e abaixo calculado por PFD.

5.6. SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS

Ao final deste trabalho, muitas questões foram satisfatoriamente respondidas sobre os métodos de determinação de amortecimento. No entanto, no decorrer deste mesmo trabalho, muitos questionamentos surgiram e, por diferentes razões, não puderam ser devidamente

apurados. Estes questionamentos ficam aqui, como sugestões de novos trabalhos de pesquisa.

Os métodos de decaimento e métodos energéticos que foram apenas citados possuem diversas variantes que podem ser foco de uma avaliação similar a que foi feita neste trabalho com os métodos de ajuste de curvas. Os procedimentos experimentais relacionados a estas técnicas têm suas peculiaridades e também podem ser alvo de estudo.

Muitas estruturas reais têm modos próximos com diferentes graus de amortecimento. A mistura destes valores de amortecimento pode causar diferentes interações entre os modos. A separação entre os modos (distância entre ressonâncias) é outro fator que pode influenciar na precisão das técnicas de extração de parâmetros.

Neste trabalho foram utilizados algoritmos comercialmente disponíveis, mas existe a possibilidade de implementação de seus próprios algoritmos e com isso explorar as etapas do processo que mais agregam erros.

Por fim, este trabalho pouco falou sobre as variáveis experimentais na obtenção das FRFs e consequente extração de parâmetros. Técnicas de excitação, formas de fixação, tipos de sensores, tipos de sinais de excitação, janelamentos, filtros, ajustes do analisador de sinais são apenas algumas das fontes de incertezas que estão diretamente associadas à qualidade das extrações de parâmetros modais.

REFERÊNCIAS

- [1] WOODHOUSE, J. **Linear damping models for structural vibration**, Journal of Sound and Vibration, 215(3), 547-569. (1998).
- [2] LAZAN, B. J., **Damping of Materials and Members in Structural Mechanics**. Pergamon Press Ltd. London, 1968.
- [3] BRILLHART, R., NAPOLITANO, K., OSTERHOLT, D., **Utilization of Alias Free Polyreference for Mixed Mode Structures**. International Modal Analysis Conference, 2008.
- [4] VERBOVEN, P., et al. **A New Generation of Frequency-domain System Identification Methods for the Practicing Mechanical Engineer**. SEM X International Congress & Exposition on Experimental & Applied Mechanics (p. 22). 2004
- [5] MEAD, D. J., **Passive Vibration Control**. John Wiley & Sons. Chichester, UK, 1998.
- [6] JONES, D. I. G., **Viscoelastic Vibration Damping**, John Wiley & Sons, 2001.
- [7] MARTINEZ, J., **Implementação do fator de perda na modelagem de painéis reforçados com Alto Grau de Amortecimento**, Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Dissertação de Mestrado, 2008.
- [8] OLIVEIRA, A. **Adição de Amortecimento Estrutural Usando Materiais Viscoelásticos**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, Dissertação de Mestrado, 2004.

- [9] LENZI, A., **Apostila da Disciplina de Análise Estatística Energética**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2006
- [10] BEARDS, C. F., **Structural Vibration: Analysis and Damping**. Arnold, Londres, 1996.
- [11] THORBY, D., **Structural Dynamics and Vibration in Practice**. Butterworth-Heinemann, 2008.
- [12] LIU, W., **Experimental and Analytical Estimation of Damping in Beams and Plates with damping Treatments**. University of Kansas. Tese de Doutorado. 2008.
- [13] GRAESSER, E. J., WONG, C. R., **The relationship of Traditional Damping Measures for Materials with High Damping Capacity**. David Taylor Research Center, 1991
- [14] REMARKS, G., **Damping Characteristics of Reinforced and Prestressed Normal- and High-Strength Concrete Beams**. 2001
- [15] GADE, S., & HERLUFSEN, H. **Digital Filter Techniques vs. FFT Techniques for Damping Measurements (Damping Part I)**. Technical Review, Brüel & Kjaer. No 1. 1994.
- [16] IGLESIAS, A. M., **Investigating Various Modal Analysis Extraction Techniques to Estimate Damping Ratio**. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual da Virgínia. 2000.
- [17] FORMENTI, D., RICHARDSON, M., **Parameter Estimation from frequency Response Measurements using Rational Fraction Polynomials (Twenty Years of Progress)**, International Modal Analysis Conference, 2002

- [18] LEE, M., RICHARDSON, M., **Determining the Accuracy of Modal Parameter Estimation Methods**, International Modal Analysis Conference, 1992.
- [19] RICHARDSON, M. H., **Global Frequency and Damping Estimates from Frequency Response Measurements**. International Modal Analysis Conference, 1986.
- [20] FLADUNG, W., PHILLIPS, A. W., ALLEMANG, R. J., **Application of a generalized residual model to frequency domain modal parameter estimation**. *Journal of Sound and Vibration*, 262(3), 677–705. 2003.
- [21] JORDAN, R., **Apostila da Disciplina de Análise Modal Experimental**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- [22] SNOEYS, R., SAS, P., HEYLEN, W., VAN DER AUWERAER, H., **Trends in Experimental Modal Analysis**. Mechanical Systems and Signal Processing, 1(1), 5–27. 1987.
- [23] LYON, R., DE JONG R. **Theory and Application of Statistical Energy Analysis**. 2ª Ed. Butterworth-Heinemann. USA, 1995.
- [24] ASTM E756-05 - **Standard Method for Measuring Vibration - Damping Properties of Materials**. Estados Unidos: ASTM. 2005
- [25] Society of Automotive Engineers. **SAE J1637: Laboratory Measurement of the Composite Vibration Damping Properties of Materials on a Supporting Steel Bar**. Warrendale: SAE, 1993
- [26] **Menu de ajuda do Programa Ansys WorkBench 2.0 Framework** Versão 14.5.0 de Setembro de 2012.
- [27] LMS International. **Theory and Background**. Material de Treinamento. LMS International. 2000.

- [28] RODRÍGUEZ, M. M., **Analysis of Structural Damping**, Tese de Mestrado, Universidade Tecnológica de Lulea, Suécia, 2006.
- [29] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., **Dynamics of Structures**, McGraw-Hill, New York. 1975.
- [30] BRATTI, G., **Determinação do Amortecimento de Painel Aeronáutico com Material Viscoelástico**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011
- [31] COSSOLINO L.C., PEREIRA, A.H.A., **Amortecimento: classificação e métodos de determinação**. ATCP Engenharia Física. Informativo Técnico-Científico ITC04. Disponível em: <http://www.atcp.com.br/pt/produtos/caracterizacao-materiais/sonelastic.html> Acessado em: 01/09/2012
- [32] BRÜEL & KJAER. **Menu de ajuda do programa Pulse Labshop**. Versão 17.0.
- [33] GILLESPIE, T. D., **Fundamentals of Vehicle Dynamics**. Society of Automotive Engineers, Inc. 1992.
- [34] CRANDALL, S. H., **The Role of Damping in Vibration Theory**, *Journal of Sound and Vibration*, 11(1), 3-18. 1970.
- [35] BRÜEL & KJAER, **FFT Analysis** (Brüel & Kjaer Lecture Note). Material de Treinamento
- [36] SILVA, M. A. B. **Características Vibro-Acústicas de Dois Cárceres de Óleo Feitos de Aço e Material Multicamada**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010

- [37] ALLEMANG, R. J., BROWN, D. L. **Experimental Modal Analysis and Dynamic Component Synthesis - Modal Parameter Estimation**. Cincinnati: Flight Dynamics Laboratory, 1987.
- [38] MAIA, N. M. M., SILVA, J. M. M., **Theoretical and experimental modal analysis**. New York: John Wiley, 1997.
- [39] GADE, S., et al. **Complex Modulus and Damping Measurements using Resonant and Non-resonant Methods**. Technical Review, Brüel & Kjaer. No 2. 1994.
- [40] MAIA, N. M. M., **Reflections on Some SDOF Modal Analysis Methods**. International Modal Analysis Conference, 1990.
- [41] COLLOT, G., **A New Method for Loss Factor Measurements Using the Hilbert Transform Implementation in a Software to Automize the ‘Oberst’ Method**. International Modal Analysis Conference, 1990.
- [42] LIMA, F. S., **Estudo de Comportamento Vibroacústico em Baixas Frequências de Painéis Aeronáuticos de Material Composto**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.
- [43] VOLD, H., RICHARDSON, M., NAPOLITANO, K., HENSLEY, D., **Aliasing in Modal Parameter Estimation - A Historical Look and New Innovations**. International Modal Analysis Conference, 2002.