

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Anelize Zomkowski Salvi

**NOVOS MÉTODOS PARA ENUMERAÇÃO DE CONFIGURAÇÕES  
NÃO ISOMORFAS DE ROBÔS METAMÓRFICOS COM MÓDULOS  
QUADRADOS.**

Florianópolis

2013



Anelize Zomkowski Salvi

**NOVOS MÉTODOS PARA ENUMERAÇÃO DE CONFIGURAÇÕES  
NÃO ISOMORFAS DE ROBÔS METAMÓRFICOS COM MÓDULOS  
QUADRADOS.**

Disertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Daniel Martins, Dr. Eng.  
Coorientador: Prof. Roberto Simoni, Dr. Eng.

Florianópolis

2013

Catálogo na fonte elaborada pela biblioteca da  
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:

<http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html>

Anelize Zomkowski Salvi

**NOVOS MÉTODOS PARA ENUMERAÇÃO DE CONFIGURAÇÕES  
NÃO ISOMORFAS DE ROBÔS METAMÓRFICOS COM MÓDULOS  
QUADRADOS.**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia Mecânica”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Florianópolis, 22 de ABRIL 2013.

---

Prof. Júlio César Passos, Dr. Eng.  
Coordenador do Curso

---

Prof. Daniel Martins, Dr. Eng.  
Orientador

---

Prof. Roberto Simoni, Dr. Eng.  
Coorientador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Edson R. de Pieri, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Presidente

---

Prof. Henrique Simas, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina



Ao meu irmão.





## AGRADECIMENTOS

Coloco-me a pensar em tudo que passou no tempo do mestrado, tanto a agradecer. Conheci pessoas simplesmente especiais, com quem passei a compartilhar intensamente os altos e baixos da vida. Hoje, estou muito feliz por ter amigos únicos e indispensáveis. Por ter minha família ao meu lado, especialmente minha mãe, irmão e o meu namorado e companheiro, Andrea Piga.

Nunca estive tão certa de minhas escolhas. Quem esteve comigo neste período sabe o quão desafiadora foi a minha transição da matemática para este novo ambiente da engenharia. Mas valeu à pena! E muito!

Recordo-me das palavras de Vinícius de Moraes: “A vida é a arte do encontro, embora haja tanto desencontro pela vida. É preciso encontrar as coisas certas da vida, para que ela tenha o sentido que se deseja. Assim, a escolha de uma profissão também é a arte do encontro, porque a vida só adquire vida, quando a gente empresta a nossa vida, para o resto da vida”.

Por isto, agradeço ao meu orientador, Daniel Martins, e ao meu coorientador, Roberto Simoni, que me acolheram verdadeiramente nesta mudança de área, mostrando-me toda a potencialidade da engenharia, sendo sempre pacientes nos ensinamentos. Foi através de vocês que encontrei a profissão para a qual quero emprestar a minha vida. Vocês me ajudaram muito! Muito obrigada!

Agradeço aos membros da banca, o professor Henrique Simas, sempre alegre e incentivador, o professor Edson de Pieri, que mesmo muito atarefado sempre está disposto a ajudar e a contribuir e o professor Marcelo Sobottka, que aceitou o desafio de me ajudar a conciliar matemática/engenharia, aconselhando-me muito durante a dissertação e contribuindo intensamente com o trabalho. Muito obrigada a todos!

Agradeço aos meus colegas de pós-graduação, Daniel Poncé, Bruno Locks Floriani e Luiz Radavelli, pela amizade e companheirismo sinceros e às amigas Diana Trochez e Mariane Lorenno, das quais sinto muitas saudades. E, principalmente, aos colegas da “salinha nerd”, Leonardo Mejia Rincón, Estevan Hideki Murai e Marcos Goulart Reis que além de serem meus amigos/irmãos, ajudaram-me muito durante a dissertação. Ainda me recordo do Leonardo ensinando-me, no início da pós, as bases de um algoritmo... Do Estevan insistindo comigo para fazer desenhos mais bonitos e me explicando

os truques dos softwares de desenho... Mas, em especial, agradeço muito ao Marcos, meu “professor de programação em C”! Quanta paciência deste meu amigo! Se hoje posso dizer que consigo programar e que estou cursando a segunda matéria de programação (e adorando) é devido a ele, não tenho palavras para o agradecer.

Agradeço aos meus amigos do Barddal, amigos de uma vida inteira, que sempre me incentivaram a fazer pós-graduação. Vocês sabem que são especiais, afinal, lá se vão mais de dez anos de uma amizade que não vai acabar nunca! Também, agradeço muito as minhas colegas matemáticas, Helena Günther, Viviam Giacomelli Pedroso e Thais Muraro, que sempre me apoiaram e são amigas raras, assim como a minha “irmã adotiva“, Fernanda Costa.

Agradeço a minha família, aos meus avós, tão amorosos e presentes, sou muito feliz por tê-los comigo. Mas, acima de tudo, agradeço a minha mãe, que sempre batalhou muito para que eu e meu irmão pudéssemos estudar em boas escolas, ensinando-me o valor e o gosto pelo estudo, ao meu irmão, que é meu incentivador maior, amigo e companheiro e ao meu namorado, Andrea Piga, que dá sentido aos meus dias!

*Se você pensa que pode ou se pensa que não pode, de qualquer forma, você está certo.*

**Henry Ford**



## RESUMO

Robôs metamórficos ou robôs modulares reconfiguráveis são robôs constituídos de módulos autônomos e capazes de se conectar a outros módulos. Desta forma, o conjunto de módulos pode assumir novas configurações e funções. Além disto, o crescente interesse neste tipo de robôs deve-se justamente à capacidade de autoconfiguração, pois esta característica confere aos robôs adaptabilidade a novas circunstâncias e tarefas, bem como a capacidade de recuperação de falhas mecânicas. Assim, visto que é a capacidade de assumir diferentes configurações que torna estes robôs versáteis, para que se possam aproveitar todas as potencialidades dos robôs metamórficos, é necessário que se conheçam todas as diversas configurações que um dado número de módulos pode assumir. Neste contexto, o presente trabalho foca-se no problema de enumeração de configurações para robôs metamórficos de módulos quadrados, mais especificamente, no problema de enumeração de configurações distintas ou não isomorfas. Nele, são introduzidos dois novos métodos, que são contribuições originais, para enumeração de configurações distintas para robôs de módulos quadrados. O primeiro método é denominado Método das Simetrias e baseia-se em ferramentas de teoria dos grupos. Por outro lado, o segundo método, denominado Método das Órbitas, baseia-se em ferramentas de teoria dos grupos e de teoria dos grafos. Além disto, ambos os métodos foram implementados em C++ , o que possibilitou a enumeração, para um total de onze módulos, de todas as configurações distintas para robôs de módulos quadrados, bem como outros resultados que são apresentados no trabalho. Estes resultados constituem um avanço frente a literatura existente na área.

**Palavras-chave:** Enumeração, robôs metamórficos, grupos, grafos, Método das Simetrias, Método das Órbitas.



## ABSTRACT

Metamorphic robots or reconfigurable modulate robots are robots constituted of autonomous modules and they are capable of being connect to others modules. The set of modules can assume new configurations and functions. Furthermore, the increase interest on these robots is due to their capability of self-regulation, because that characteristic gives to robots adaptability to news circumstances and tasks and also because of the capacity of mechanical fails recovering. So, once the capacity of assuming different configurations is what takes those robots versatile, for being possible to use all the potentialities of metamorphic robots it is necessary that can be known all of the many configurations that a number of modules can assume. In this context, this paper put a focus on the enumeration problem of configurations to metamorphic robots of square modules, more specifically on distinct configurations or no isomorphic. This report introduces two new methods that are contributions of this study to enumeration of distinct configurations of square module robots. The first method is called the method of symmetry and it is based on tools and theory of groups. The second method is called method of orbits and it is based on tools and theory of groups and graphs. Besides, both methods were implemented in C++, what possibilities the enumeration of, between a total of eleven modules, all distinct configurations of a square modules robot, and also other results that are shown on this paper. These results bring advances to existent literature about the subject.

**Keywords:** Enumeration, metamorphic robots, groups, graphs, method of symmetry , method of orbits .





## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Robô M-Tram no processo de reconfiguração [Murata & Kurokawa 2007]. . . . .	28
Figura 2	2a: Módulo Conro [Støy et al. 2003], 2b: uma configuração do Conro com mais de um módulo [Støy et al. 2003]. . . . .	33
Figura 3	Os lados do módulo 1 executam movimentos uns em relação aos outros. . . . .	34
Figura 4	4a: Módulo quadrado em [Pamecha et al. 1996], 4b: módulo hexagonal [Pamecha et al. 1996] . . . . .	34
Figura 5	5a: Módulo M-Tram [Murata & Kurokawa 2007], 5b: M-Tram em reconfiguração [Murata & Kurokawa 2007]. . . . .	37
Figura 6	6a: Módulo SuperBot [Salemi et al. 2006], 6b: Uma configuração com seis módulos SuperBot [Salemi et al. 2006]. . . . .	37
Figura 7	7a: Robô Atron numa configuração que lembra um carro [Brandt et al. 2007], 7b: configuração que lembra uma cobra [Brandt et al. 2007] . . . . .	38
Figura 8	Em (a) tem-se uma configuração com 3 módulos quadrados, porém em (b) o arranjo de módulos não constitui uma configuração com 3 módulos. . . . .	39
Figura 9	(a) Configurações isomorfas; (b) Configurações não isomorfas. . . . .	40
Figura 10	Todos os distintos tetraminós. . . . .	42
Figura 11	(a) Triominós Fixos; (b) Triominós Livres. . . . .	43
Figura 12	As duas configurações representam a mesma poliforma livre. . . . .	45
Figura 13	Eixos de simetria do triângulo equilátero. . . . .	50
Figura 14	14a: Eixos de simetria do quadrado, 14b: eixos de simetria do retângulo. . . . .	53
Figura 15	Tabuleiro $2 \times 2$ . . . . .	54
Figura 16	Todas as colorações do tabuleiro $2 \times 2$ . . . . .	55
Figura 17	Dois colorações do tabuleiro que são levadas uma na outra pela reflexão na reta $m$ . . . . .	55
Figura 18	Simetrias do quadrado e o grupo de permutações de $I_4$ . . . . .	57
Figura 19	Geração Recursiva das configurações com dois módulos quadrados. . . . .	59
Figura 20	Geração Recursiva das configurações com três módulos quadrados. . . . .	60
Figura 21	(a) Os lados $a$ e $a'$ são simétricos em relação à reta $v$ ; (b) e	

(c) configurações isomorfas obtidas pela anexação de um novo módulo respectivamente aos lados um módulo $a$ e $a'$ do quadrado em (a). . . . .	61
Figura 22 A configuração em que há um módulo na posição $a$ e aquela na qual há um módulo em $a'$ são uma reflexão em $v$ uma da outra. . . . .	62
Figura 23 Os pares $(I, I')$ , $(G, H)$ e $(G', H')$ apresentam pontos simétricos em relação à $v$ . Por outro lado, os pares $(I, I)$ , $(I', I')$ $(G, G')$ e $(H, H')$ apresentam simétricos em relação à reta $h$ . . . . .	62
Figura 24 (a) (b) configurações isomorfas obtidas pela anexação de um novo módulo aos lados $G$ e $G'$ , simétricos em relação à $h$ na Figura 23. .	63
Figura 25 Configuração cujas simetrias são a identidade e as reflexões em $O$ , em $v$ e em $h$ . . . . .	63
Figura 26 (a) Um módulo foi acrescentado a posição 3, (b) Um módulo foi acrescentado a posição 1, posição não simétrica de 3. Por fim, as configurações em (b) e (a) são não isomorfas. . . . .	64
Figura 27 Geração Livre para um total de quatro módulos quadrados, sendo que as posições destacadas em cada configuração são não simétricas e nelas anexa-se o novo módulo. . . . .	65
Figura 28 Configurações isomorfas geradas no processo de Geração Livre. . . . .	66
Figura 29 A configuração em 29a é assimétrica e gera pelo processo de Geração Livre as configurações em 29b e 29c que são isomorfas. . . . .	66
Figura 30 (a) Configuração envolta em um retângulo não quadrado; (b) Configuração envolta em um quadrado. . . . .	69
Figura 31 Uma grade quadrada. . . . .	70
Figura 32 (a) Uma configuração e o sistema de coordenadas a ela associado; (b) Matriz $ID$ da configuração. . . . .	71
Figura 33 Uma configuração e as variáveis $L_{limite}$ e $C_{limite}$ a ela associadas. . . . .	72
Figura 34 Configuração simétrica em relação à $O_x$ . . . . .	74
Figura 35 Configuração simétrica em relação à $O_y$ . . . . .	75
Figura 36 Configuração simétrica em relação à rotação de $\pi$ radianos em torno da origem. . . . .	76
Figura 37 Configuração simétrica em relação à reflexão em $d_p$ . . . . .	77
Figura 38 Configuração simétrica em relação à reflexão em $d_s$ . . . . .	78
Figura 39 Configurações simétricas em relação às rotações de $\frac{\pi}{2}$ e de $\frac{3\pi}{2}$ radianos em torno da origem. . . . .	79
Figura 40 Ponto $A$ de coordenadas $\{j, i\}$ e seu simétrico em relação à $O_x$ , $A'$ , de coordenadas $\{j, -i\}$ . . . . .	80

Figura 41 Exemplo de configuração simétrica em relação à $O_y$ .	82
Figura 42 Configuração que apresenta somente simetria em relação ao eixo $O_x$ e suas variáveis $L_{limite}$ e $C_{limite}$ .	84
Figura 43 Uma configurações simétrica em relação à $O_x$ e a $O_y$ e as variáveis $L_{limite}$ e $C_{limite}$ a ela associadas.	84
Figura 44 Configurações geradas ao se anexar novos módulos a posições permitidas na região de colagem da configuração na Figura 39.	85
Figura 45 Os termos em negrito na matriz $ID_{dp}$ constituem a região de colagem desta configuração que é simétrica em relação à diagonal principal.	86
Figura 46 Os termos em negrito na matriz $ID_{ds}$ constituem a região de colagem desta configuração que é simétrica em relação à diagonal secundária.	86
Figura 47 A configuração em (c) foi obtida da configuração em (a), pelo acréscimo de um módulo. Note que houve aumento da dimensão da matriz obtida, (d), em relação à original, (b).	89
Figura 48 Matrizes de dimensões iguais. A matriz em (d) representa a configuração em (c) e foi obtida, pelo acréscimo de um novo módulo, da matriz em (b), que representa a configuração em (a).	90
Figura 49 O acréscimo de um módulo na $ID_{original}$ , que representa a configuração em (a), gera a configuração não válida $ID_{nova}$ . Ou seja, a configuração em (c) não é válida.	90
Figura 50 Geração de configurações isomorfas pela anexação de novos módulos a posições simétricas em relação à diagonal principal do quadrado.	91
Figura 51 A configuração 3 é obtida pela anexação de um novo módulo das configurações 1 e 2.	95
Figura 52 Geração recursiva de configurações não isomorfas conjuntamente com os Teoremas 2 e 3, sendo que as configurações em cinza são isomorfas a alguma outra configuração.	97
Figura 53 Teste comparativo	103
Figura 54 Teste de Isomorfismo	107
Figura 55 Desenho do grafo cujos vértices são $u, v, w, t, q, z$ e cujas arestas são $vw, uv, zw, zt$ e $uz$ .	112
Figura 56 Grafos isomorfos cujos vértices foram nomeados de modo a exibir o isomorfismo entre eles.	112
Figura 57 A ação do automorfismo $\sigma$ no grafo 57a é representada em	

57b.....	113
Figura 58 (a)Robô metamórfico de módulos hexagonais em [Pamecha et al. 1996], (b) o grafo associado por [Martins & Simoni 2009]. .....	115
Figura 59 Duas configurações isomorfas obtidas da anexação de novo módulo a elementos na mesma órbita. ....	116
Figura 60 Acréscimo de módulo aos representantes das órbitas binárias das configurações com três módulos .....	117
Figura 61 Contribuições de [Martins & Simoni 2009] para enumeração de robôs metamórficos com módulos quadrados.....	118
Figura 62 (b) ilustra a associação de um vértice a cada lado do módulo quadrado em (a). ....	119
Figura 63 Convenção para o norte (N), leste (L), sul (S) e oeste (O) em um módulo. ....	119
Figura 64 Configuração exemplificativa para obtenção da matriz <i>Mgrafo</i> . 119	
Figura 65 Configuração $3L$ .....	122
Figura 66 Grafo erroneamente associado à configuração $3L$ .....	122
Figura 67 Automorfismo $f_1$ do grafo $G$ .....	123
Figura 68 Automorfismo $f_2$ do grafo $G$ .....	123
Figura 69 Automorfismo $f_3$ do grafo $G$ .....	123
Figura 70 Grafo tipo II da configuração $3L$ .....	124
Figura 71 Grafo tipo I da configuração $3L$ .....	125
Figura 72 (a) Configuração com quatro módulos em T, (b) Grafo do tipo I associado à configuração em (a). ....	128
Figura 73 (a)Configuração com quatro módulos em T, (b) Grafo associado à configuração em (a) .....	128
Figura 74 (a)Configuração com quatro módulos em Z, (b) Grafo associado à configuração em (a). ....	130
Figura 75 (a) Configuração assimétrica, (b) Grafo tipo II associado à configuração em (a).....	130
Figura 76 (a) Configuração assimétrica, (b) Grafo tipo I associado à configuração em (a) .....	131
Figura 77 Uma configuração que não é simplesmente conexa. ....	138
Figura 78 Processo de obtenção de uma configuração isomorfa a uma configuração que não pode ser gerada devido a um defeito em um dos módulos. ....	140

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Número de poliminós livres com $n$ quadrados. ....	43
Tabela 2	Número de polihexágonos livres com $n$ hexágonos. ....	44
Tabela 3	Número de poliminós fixos com $n$ quadrados. ....	46
Tabela 4	Número de configurações não isomorfas com $n$ módulos quadrados que foram encontradas pelos métodos propostos. ....	137



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

conf. Número de configurações com  $n$  quadrados





## LISTA DE SÍMBOLOS

$ID$	Matriz identificadora de uma configuração, ver Definição 18
$L_{limite}$	Linha limite, ver Definição 20
$L_{limite}$	Coluna limite, ver Definição 20
$L_{final}$	Linha final, ver Algoritmo 2
$C_{final}$	Coluna final, ver Algoritmo 2
$M_{grafo}$	Matriz que encerra a numeração dos vértices do grafo associado à configuração, ver Algoritmo 10



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	27
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	31
2.1 ROBÔS METAMÓRFICOS .....	31
2.1.1 O que são robôs metamórficos? .....	32
2.1.2 Vantagens na utilização dos robôs metamórficos .....	35
2.1.3 Principais projetos de robôs metamórficos .....	36
2.1.3.1 M-Tran .....	36
2.1.3.2 Superbot .....	36
2.1.3.3 Atron .....	37
2.2 O PROBLEMA DE ENUMERAÇÃO PARA ROBÔS METAMÓRFICOS .....	39
2.3 POLIFORMAS .....	41
2.3.1 O problema de enumeração para poliformas .....	42
2.3.2 A complexidade do problema de enumeração .....	44
<b>3 FERRAMENTAS ALGÉBRICAS</b> .....	49
3.1 PERMUTAÇÕES .....	49
3.2 ISOMETRIAS NO PLANO E SIMETRIAS .....	50
3.3 GRUPOS .....	51
3.3.1 O grupo das bijeções .....	52
3.3.2 O grupo das permutações .....	52
3.3.3 O grupo de simetrias .....	52
3.3.4 Ação de grupo .....	53
3.3.5 Simetrias como permutações .....	57
<b>4 SISTEMÁTICA COMUM AOS NOVOS MÉTODOS DE ENUMERAÇÃO</b> .....	59
<b>5 NOVO MÉTODO DE ENUMERAÇÃO BASEADO NA DETECÇÃO DIRETA DAS SIMETRIAS</b> .....	69
5.1 DETECÇÃO DAS SIMETRIAS DE UMA CONFIGURAÇÃO ...	69
5.1.1 Simetrias das configurações envoltas em um retângulo .....	73
5.1.1.1 Reflexão no eixo $O_x$ (Horizontal) .....	74
5.1.1.2 Reflexão no eixo $O_y$ (Vertical) .....	75
5.1.1.3 Simetria em Rotacional de $\pi$ radianos .....	76
5.1.2 Simetrias específicas das configurações envoltas em um quadrado .....	77
5.1.2.1 Simetria de Reflexão na Diagonal Principal .....	77
5.1.2.2 Reflexão em Relação à Diagonal Secundária .....	78
5.1.2.3 Simetrias rotacionais de $\frac{\pi}{2}$ e de $\frac{3\pi}{2}$ radianos em relação à origem .....	79

5.2	ANEXAÇÃO DE NOVOS MÓDULOS . . . . .	81
5.2.1	As regiões de colagem . . . . .	83
5.2.2	Anexação de novos módulo nas regiões de colagem . . . . .	89
5.3	NOVOS TEOREMAS SOBRE A GERAÇÃO RECURSIVA . . . . .	93
5.4	TESTE DE ISOMORFISMO . . . . .	97
5.5	ALGORITMO DO MÉTODO DAS SIMETRIAS . . . . .	108
6	<b>NOVO MÉTODO DE ENUMERAÇÃO BASEADO NA DETERMINAÇÃO DAS ÓRBITAS . . . . .</b>	<b>111</b>
6.1	CONCEITOS BÁSICOS SOBRE TEORIA DE GRAFOS . . . . .	111
6.2	REVISÃO DAS CONTRIBUIÇÕES DE MARTINS E SIMONI AO PROBLEMA DE ENUMERAÇÃO . . . . .	114
6.3	DUAS NOVAS REPRESENTAÇÕES POR GRAFOS . . . . .	117
6.3.1	Matriz <i>Mgrafo</i> . . . . .	118
6.3.2	Obtenção das Arestas . . . . .	120
6.4	ALGORITMO GERAL DO MÉTODO DAS ÓRBITAS . . . . .	133
7	<b>RESULTADOS COMPUTACIONAIS . . . . .</b>	<b>137</b>
8	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>143</b>
8.1	CONCLUSÕES . . . . .	143
8.2	PUBLICAÇÕES . . . . .	146
8.3	PERSPECTIVAS E TRABALHOS FUTUROS . . . . .	146
	<b>Referências Bibliográficas . . . . .</b>	<b>147</b>
	<b>APÊNDICE A – Demonstrações do Capítulo 3. . . . .</b>	<b>153</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Robôs metamórficos ou robôs modulares reconfiguráveis são robôs constituídos de módulos autônomos capazes de se conectarem e de assumirem novas formas e funções por meio de rearranjos dos seus módulos. [Chirikjian 1994] define-os como uma coleção de módulos mecatrônicos que pode reconfigurar-se de modo dinâmico. Sendo que cada módulo é um robô simples contendo atuadores, sensores, baterias e processadores de energia.

O crescente interesse neste tipo de robôs deve-se justamente à capacidade de autoconfiguração, pois esta característica confere aos robôs adaptabilidade a novas circunstâncias e tarefas, bem como a capacidade de recuperação de falhas mecânicas, como, por exemplo, a perda da funcionalidade de um módulo.

Um robô metamórfico poderia, por exemplo, assumir o formato de uma cobra, no qual seus módulos formariam uma cadeia longilínea e, deste modo, o robô poderia locomover-se através de um tubo estreito. Também, se necessitasse atravessar um terreno irregular, o robô poderia arranjar seus módulos numa configuração quadrúpede ou mesmo hexápode, ou se estivesse em terreno liso e homogêneo poderia assumir uma forma para rápida locomoção (como um círculo). Além disso, os robôs metamórficos podem ser utilizados para construção de estruturas rígidas das mais diversas formas. Suas aplicabilidades vão desde a construção civil, à exploração espacial e marítima, além de tarefas que dependam da capacidade de adaptação desses robôs [Chirikjian 1994, Chirikjian & Pamecha 1996].

A Figura 1 mostra o robô metamórfico M-Tram no processo de reconfiguração do formato quadrúpede para o longilíneo.

Para o caso planar, os tipos de módulos frequentemente encontrados são o quadrado ([Pamecha et al. 1996], [Dumitrescu et al. 2002], [Chiang & Chirikjian 2001]) e o hexagonal ([Pamecha et al. 1996], [Abrams & Ghrist 2004], [Walter et al. 2000], [Dumitrescu et al. 2002], [Walter et al. 2002]). Já para o caso espacial, tem-se os cúbicos, ([Rus & Vona 2001], [Yoshida et al. 1998]) e os dodecaédricos, ([Yim et al. 1997], [Yim et al. 2001]).

Assim, para que se possam aproveitar todas as potencialidades dos robôs metamórficos é necessário que se conheçam todas as diversas configurações que um dado número de módulos pode assumir, visto que é a capacidade de assumir diferentes configurações que torna estes robôs versáteis.

Uma configuração de um robô metamórfico é determinada pela quantidade de módulos necessários a sua constituição, pelo tipo de módulo utilizado e pela maneira com que os módulos conectam-se, sendo que o problema de listar as distintas configurações que um dado conjunto de módulos pode as-

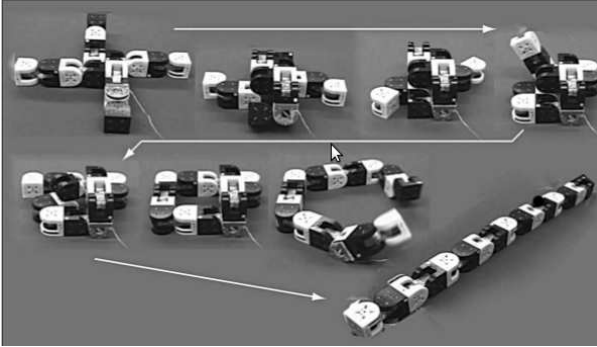


Figura 1: Robô M-Tram no processo de reconfiguração [Murata & Kurokawa 2007].

sumir será denominado problema de enumeração de configurações distintas para robôs metamórficos.

Para teoria dos conjuntos, o termo enumeração está relacionado à listagem de todos os elementos de um dado conjunto, por outro lado, para a combinatória, o termo está relacionado ao número de elementos que possui o conjunto. Como para robôs metamórficos em algumas situações é necessário que sejam conhecidas todas as configurações que um conjunto de módulos pode assumir, o termo enumeração de configurações para robôs metamórficos será utilizado neste trabalho como listagem.

[Martins & Simoni 2009] ressaltam três questionamentos frequentemente encontrados na literatura da área e que estão intimamente relacionados, são eles:

1. Como enumerar as possíveis configurações que cada conjunto de módulos pode assumir, [Chen & Burdick 1998];
2. Como encontrar uma configuração ótima para uma determinada tarefa, [Chen & Burdick 1995], [Bi et al. 2003];
3. Como planejar o movimento de um robô metamórfico, ou seja, como determinar uma sequência de movimentos dos módulos, para que apartir de sua configuração atual seja atingida a configuração desejada, [Pamecha et al. 1997, Chiang & Chirikjian 2001].

Todas as questões apresentadas recaem de algum modo sobre a primeira. Por exemplo, para determinar uma configuração ótima para realização de determinada tarefa é necessário que se conheça em que configurações o robô é capaz de exercer tal tarefa. Também, para determinar uma sequência

de movimentos de uma configuração dada a uma pretendida, deve-se estabelecer que configurações intermediárias o robô metamórfico irá assumir. Assim, o conhecimento prévio das configurações que cada conjunto de módulos consegue assumir pode auxiliar na resposta destes e outros questionamentos relativos aos robôs metamórficos.

Neste contexto, a dissertação tem por objetivos:

- Compreender o problema de enumeração para robôs metamórficos, principalmente estabelecendo um paralelo com o problema de enumeração para poliformas (que é um problema matemático equivalente ao estudado na dissertação);
- Estabelecer as potencialidades e as limitações dos principais métodos existentes na literatura para a enumeração de robôs metamórficos;
- Elaborar e implementar novos métodos de enumeração de configurações para robôs metamórficos de módulos quadrados;
- Avançar, frente aos métodos existentes na literatura para enumeração de robôs com módulos quadrados, na quantidade de módulos para os quais os métodos conseguem proceder a enumeração;
- Fornecer, através dos novos métodos, bibliotecas compactas de configurações constituídas de módulos quadrados.

Duas configurações de robôs metamórficos são consideradas distintas, ou não isomorfas, se não há como obter uma da outra por isometrias, também denominadas movimentos rígidos. No caso de robôs metamórficos com módulos quadrados, duas configurações são consideradas distintas, ou não isomorfas, se não há como obter uma da outra por rotações, translações ou reflexões, pois estas são as isometrias do plano.

Ressalta-se que a dissertação aborda a enumeração de configurações distintas ou não isomorfas para robôs metamórficos de módulos quadrados, em detrimento da enumeração de todas as possíveis configurações. Isto se deve a complexidade do problema de enumeração e principalmente ao crescimento exponencial do número de configurações em relação ao número de módulos, o que será melhor explicado no Capítulo 2.

Dois novos métodos para enumeração de configurações distintas para robôs de módulos quadrados serão introduzidos e são contribuições deste trabalho. O primeiro método a ser apresentado será denominado Método das Simetrias, sendo que este método baseia-se em ferramentas de teoria de grupos. Por outro lado, o segundo método a ser apresentado baseia-se em ferramentas de teoria dos grupos e de grafos, bem como nas contribuições de [Martins & Simoni 2009] ao problema de enumeração para robôs metamórficos planares,

este método será denominado Método das Órbitas. Ambos os métodos foram implementados em C++ , o que possibilitou, para um total de onze módulos, a enumeração de todas as configurações distintas para robôs de módulos quadrados além de outros resultados que serão apresentados no capítulo Resultados Computacionais.

Para melhor compreensão dos resultados a serem apresentados a dissertação é disposta como segue:

- O Capítulo 2 apresenta revisão bibliográfica de tópicos referentes ao problema de enumeração de configurações para robôs metamórficos;
- O Capítulo 3 apresenta algumas noções básicas de álgebra, entre elas a de permutações, grupos, simetrias e ação de grupo;
- O Capítulo 4 introduz os conceitos de Geração Recursiva e de Geração Livre e o Algoritmo 1 que engloba as etapas comuns dos métodos de enumeração propostos;
- O Capítulo 5 apresenta o primeiro dos dois novos métodos de enumeração de configurações não isomorfas para robôs metamórficos com módulos quadrados, o Método das Simetrias. Estes métodos são contribuições originais da dissertação;
- O Capítulo 6 introduz o segundo método de enumeração proposto, o Método das Órbitas;
- O Capítulo 7 apresenta os resultados computacionais das implementações computacionais de ambos os métodos de enumeração;
- O Capítulo 8 engloba as conclusões, as perspectivas e algumas possibilidades de trabalhos futuros relacionados ao tema da dissertação.



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo uma revisão bibliográfica de tópicos referentes ao problema de enumeração de configurações para robôs metamórficos é apresentada.

A seção 2.1 abrange desde a definição formal de robô metamórfico às vantagens na utilização destes robôs frente aos de morfologia fixa. Ela também apresenta três projetos de robôs metamórficos. Na seção 2.2 o problema de enumeração para robôs metamórficos é melhor caracterizado. Por fim, a seção 2.3 introduz as poliformas, bem como o problema de enumeração para estes objetos e discute a complexidade do problema de enumeração tanto para poliformas quanto para robôs metamórficos.

### 2.1 ROBÔS METAMÓRFICOS

Robôs são geralmente especializados em uma tarefa, ou seja, são projetados para desempenhar bem uma única função, como por exemplo a soldagem de componentes ou a paletização, o que dificulta a sua utilização em tarefas distintas das originais.

A solução para esse problema pode estar nos robôs modulares reconfiguráveis, ou metamórficos, que são constituídos de módulos e são capazes de mudar seu próprio formato por reagrupamento dos módulos. Além disso, a mudança de formato do robô pode ocorrer tanto para que ele possa desempenhar uma nova tarefa, quando em resposta a alterações no ambiente. Devido a sua grande versatilidade, robôs metamórficos apresentam especial aplicabilidade a situações nas quais se necessita que o robô seja capaz de exercer tarefas diversas, ou até mesmo previamente desconhecidas, como no caso da exploração espacial.

Por exemplo, suponha que numa missão em Marte, um veículo de exploração descubra uma caverna de onde provém uma luz, porém, a entrada da caverna é muito estreita para que o veículo possa adentrá-la. Para um veículo que apresente morfologia fixa, ou seja, que não possa alterar sua forma, a realização da tarefa seria inviável. Mas, se o veículo fosse constituído de módulos de robôs metamórficos, os módulos poderiam rearranjar-se numa estrutura retilínea, como a de uma cobra, e então, o conjunto dos módulos poderia realizar um movimento de rastejamento e adentrar na caverna. Também, se um robô de morfologia fixa estivesse numa configuração bípede e prendesse uma de suas pernas numa fenda, a menos que houvesse uma forma de retirar o robô desta situação, ele perderia sua funcionalidade. Além disso,

num cenário como o da exploração espacial, isto significaria a perda definitiva do robô. Em contrapartida, se a mesma situação ocorresse com um robô metamórfico, ele poderia eliminar a perna que estivesse presa, rearranjar os módulos restantes em uma nova configuração e continuar a proceder suas tarefas.

Os robôs metamórficos também poderiam ser utilizados na construção civil, pois os módulos são capazes de se agrupar e então, constituir estruturas rígidas, como por exemplo, paredes de edifícios. Além disso, após construídas, se houvesse necessidade de mudar alguma estrutura, bastaria que os módulos se rearranjassem, constituindo assim edificações de morfologia variável.

Desta forma, este tipo de robô tem despertado cada vez mais interesse da comunidade científica, sendo que diferentes projetos de módulos e consequentemente de robôs metamórficos têm sido apresentados. Porém nem todo robô constituído de módulos é considerado um robô metamórfico, para tanto é necessário que os módulos possam reagrupar-se e gerar novas estruturas e configurações de maneira autônoma, ou seja, sem interferência externa. Assim, é necessário que se determine de maneira mais exata o que são robôs metamórficos, o que será discutido a seguir.

### **2.1.1 O que são robôs metamórficos?**

Robôs metamórficos são constituídos de módulos, tipicamente de dez a cem módulos, mas cenários com milhares deles foram simulados, [Støy et al. 2003]. Cada módulo é um robô simples contendo atuadores, sensores, baterias e processadores de energia. A Figura 2a mostra o módulo de um robô Conro, nela é possível notar-se que este módulo possui todos os componentes eletrônicos e mecânicos necessários à constituição de um robô, além disso, a Figura 2b mostra uma configuração obtida pela união dos módulos Conro, [Støy et al. 2003].

Os módulos são geralmente formados por estruturas regulares, como por exemplo quadrados ou cubos, o que facilita o controle do robô e a substituição de módulos defeituosos. Além disto, na maioria dos casos, pede-se que as estruturas sejam capazes de ladrilhar o espaço ao qual pertencem. Sendo que um ladrilhamento do plano consiste no preenchimento do plano, por moldes, sem superposição ou buraco e, para o caso espacial, a definição de ladrilhamento dada pode ser estendida diretamente.

Assim, das condições anteriores tem-se:

- Um módulo plano, na maioria dos casos, é constituído por um polígono regular e o espacial, por um poliedro regular;

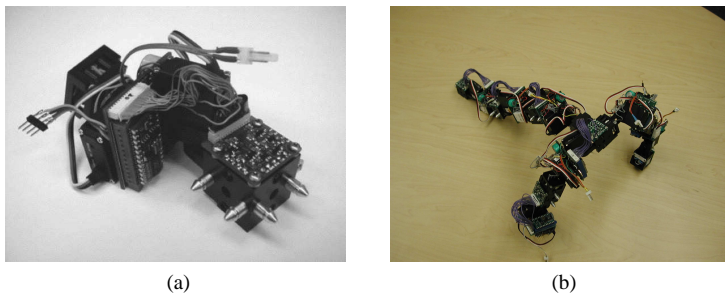


Figura 2: 2a: Módulo Conro [Støy et al. 2003], 2b: uma configuração do Conro com mais de um módulo [Støy et al. 2003].

- O módulo plano geralmente ladrilha o plano e o espacial, o espaço.

Como esta dissertação trata de módulos planos, este caso será melhor analisado a seguir.

Tem-se que os polígonos regulares capazes de ladrilhar o plano são aqueles cujos ângulos internos são divisores de  $360^\circ$  pois, colocados lado a lado, estes polígonos conseguem preencher o plano sem deixar buracos. Deste modo, os polígonos regulares que poderiam inicialmente constituir módulos de robôs metamórficos são o quadrado, o hexágono regular e o triângulo equilátero, pois seus ângulos internos são respectivamente  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  e  $60^\circ$ .

Mas, o triângulo apresenta uma estrutura incapaz de apresentar movimentos internos, ou seja, movimentos de um dos seus lados em relação aos outros. Devido a esta característica, o triângulo não é utilizado como módulo de robô metamórfico.

Para ilustrar o que se entende por movimento relativo de um lado em relação aos demais, observe o módulo hexagonal marcado por 1 na Figura 3. Os lados deste hexágono conseguem realizar movimentos uns em relação aos outros.

Assim, para o caso planar, os tipos de módulos frequentemente encontrados são o quadrado, ([Pamecha et al. 1996], [Dumitrescu et al. 2002], [Chiang & Chirikjian 2001]) e o hexagonal ([Pamecha et al. 1996], [Abrams & Ghrist 2004], [Walter et al. 2000], [Dumitrescu et al. 2002], [Walter et al. 2002]).

As Figuras 4a e 4b, representam módulos quadrados e hexagonais, respectivamente.

Para o caso espacial, tem-se os módulos cúbicos, [Rus & Vona 2001], [Yoshida et al. 1998] e os dodecaédricos, [Yim et al. 1997], [Yim et al. 2001].

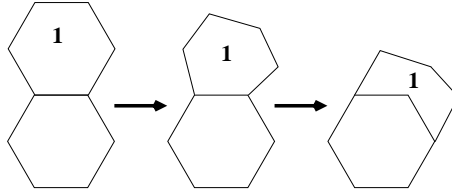


Figura 3: Os lados do módulo 1 executam movimentos uns em relação aos outros.

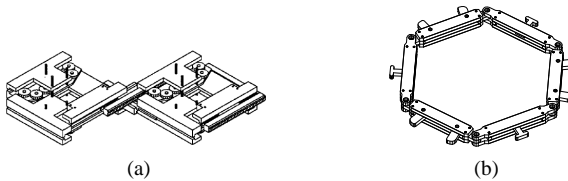


Figura 4: 4a: Módulo quadrado em [Pamecha et al. 1996], 4b: módulo hexagonal [Pamecha et al. 1996]

Cada módulo de um robô metamórfico possui uma maneira de se comunicar com seus vizinhos e de se conectar a outros módulos. O movimento de cada módulo é realizado por uma sequência de conexões deste com outros módulos e, como todos os módulos possuem a capacidade de se mover, o robô metamórfico consegue mudar de forma.

No caso do robô Conro, Figura 2a, os conectores dos módulos são pinos do tipo macho-fêmea, mas existem conectores dos mais diversos tipos, como os magnéticos, [Støy et al. 2003].

O design dos conectores de um módulo é uma etapa importante e bastante desafiadora do projeto de módulos metamórficos. Pois, como resalta [Nilsson 2002], os módulos possuem baixa autonomia energética, a maioria apresenta uma bateria, e como os robôs metamórficos movimentam-se por uma sequência de conexões com outros módulos, estas conexões devem ser feitas de modo eficiente e consumindo a menor quantidade de energia possível.

De acordo com [Murata & Kurokawa 2007], define-se a seguir, de maneira mais exata, o que é necessário para que um robô seja considerado metamórfico.

**Definição 1.** *Robôs metamórficos são robôs que satisfazem as seguintes condições:*

- *Modularidade: Os robôs metamórficos são constituídos de unidades físicas independentes e que encapsulam parte da complexidade destes robôs;*
- *Reconfiguração: Os módulos podem conectar-se de distintos modos para assim constituir diferentes robôs em termos de tamanho, forma e função;*
- *Reconfiguração dinâmica: Os módulos podem conectar-se e desconectar-se enquanto o robô está ativo;*
- *Auto-reconfiguração: O robô muda de maneira autônoma a forma com que os módulos estão conectados.*

Tendo definido o que se entende por robô metamórfico, a próxima subseção discute as vantagens da utilização destes robôs frente aos de morfologia fixa.

### **2.1.2 Vantagens na utilização dos robôs metamórficos**

O uso de robôs metamórficos no desempenho de determinadas tarefas baseia-se em três principais pressupostos [Yim et al. 2002]:

- **Baixo custo:** a produção em massa das unidades modulares pode apresentar um ganho econômico na avaliação do projeto;
- **Versatilidade:** sistemas modulares reconfiguráveis podem desempenhar maior número de funções que os de morfologia fixa, ou mesmo adaptar-se a situações ou ambientes não controlados;
- **Robustez aumentada:** sendo os módulos idênticos, existe a possibilidade da substituição de módulos defeituosos, ou até mesmo o descarte destes módulos, sendo esta ação efetuada pelo próprio robô ou por outras máquinas. Este fato torna o robô modular menos dependente da intervenção humana e com maior potencial de se recuperar de falhas mecânicas.

[Yim et al. 2002] ressalta que os robôs metamórficos devem ser empregados em tarefas e em ambientes que explorem a sua capacidade de adaptabilidade, sendo pouco indicados para o desempenho de tarefas repetitivas ou altamente especializadas, este tipo de função será melhor executada por robôs de morfologia fixa.

Apresentadas as vantagens e características de um sistema robótico modular reconfigurável, o que segue na próxima subseção é uma breve exposição dos principais projetos deste tipo de robô com o intuito de fornecer informações a leitores interessados no projeto de módulos. Porém, a leitura da próxima subseção é facultativa ao entendimento geral da dissertação.

### **2.1.3 Principais projetos de robôs metamórficos**

Atualmente existem alguns projetos de sistemas modulares, principalmente vinculados a universidades e institutos de pesquisa. Entre os projetos existentes, três são apresentados a seguir e foram escolhidas por apresentarem os módulos mais versáteis e adaptativos.

#### **2.1.3.1 M-Tran**

O Modular Transformer, M-TRAN, [Kurokawa et al. 2008], foi projetado e construído em conjunto por dois institutos japoneses, o instituto nacional de ciência industrial e tecnologia do Japão (AIST) e o instituto de tecnologia de Tóquio (TIT). O M-TRAN é considerado um dos projetos mais bem sucedidos na característica de reconfiguração automática efetuada por ligamentos e desligamentos sucessivos dos módulos, [Kurokawa et al. 2008]. Atualmente, foi apresentada a terceira versão dos módulos M-TRAN, na qual foram feitas modificações na estrutura dos módulos, na mecânica de encaixe e na eletrônica, sendo que dimensão dos módulos é de  $65\text{mm} \times 65\text{mm} \times 130\text{mm}$  e sua massa é de 420 gramas, [Kurokawa et al. 2008]. As Figuras 5a e 5b apresentam um módulo M-Tram e um robô M-Tram em reconfiguração, respectivamente.

#### **2.1.3.2 Superbot**

O SuperBot é o robô modular desenvolvido pela Universidade do Sul da Califórnia (USC). Este sistema robótico foi construído para apresentar grande capacidade de reconfiguração e ser aplicável a situações reais, sendo que várias morfologias foram testadas. O projeto tem apoio da agência aeroespacial estadunidense, NASA, pela potencial aplicabilidade deste robô na exploração espacial. O Superbot pode assumir várias configurações como a de uma bola na qual pode locomover-se por rolamento, além de formatos que lembram cobras (para rastejar pelo chão), aranhas (para escalar obstáculos),

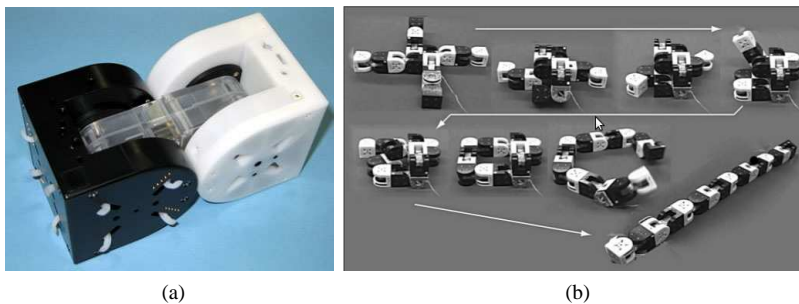


Figura 5: 5a: Módulo M-Tram [Murata & Kurokawa 2007], 5b: M-Tram em reconfiguração [Murata & Kurokawa 2007].

além de poder apresentar longos braços mecânicos e até mesmo possuir dispositivos para voar em ambientes de microgravidade. O módulo do SuperBot é constituído de dois cubos ligados de dimensões  $84\text{mm} \times 84\text{mm} \times 84\text{mm}$  e 6 faces de conexão idênticas.

As Figuras 6a e 6b apresentam um módulo SuperBot e uma configuração com seis destes módulos, respectivamente.

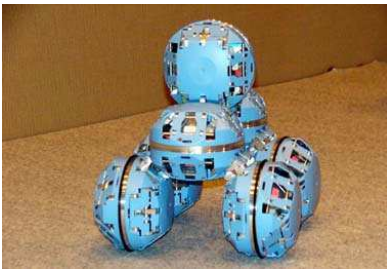


Figura 6: 6a: Módulo SuperBot [Salemi et al. 2006], 6b: Uma configuração com seis módulos SuperBot [Salemi et al. 2006].

### 2.1.3.3 Atron

O robô modular reconfigurável Atron foi desenvolvido na universidade do sul da Dinamarca (SDU), seus módulos assemelham-se a esferas e

são compostos de dois hemisférios que podem rotacionar um sobre o outro, sendo que cada módulo pode ter até oito vizinhos, quatro em cada hemisfério. Cada módulo conecta-se a seus vizinhos por conectores do tipo macho-fêmea, os masculinos parecem pequenos ganchos e os femininos são pequenas barras de alumínio nas quais as garras (conectores masculinos) podem prender-se. Cada módulo tem massa de 850 gramas e diâmetro de 110mm. Atualmente este tipo de robô é o que apresenta maior número de módulos, 100 módulos ao todo. As Figuras 7a e 7b apresentam duas configurações atingidas pelos módulos Atron.



(a)



(b)

Figura 7: 7a: Robô Atron numa configuração que lembra um carro [Brandt et al. 2007], 7b: configuração que lembra uma cobra [Brandt et al. 2007]

Os robôs M-Tran, Superbot e Atron são atualmente os projetos mais promissores na área de robôs metamórficos, isto porque seus módulos são os que apresentam maior adaptabilidade ao meio e maior capacidade de desempenhar distintas tarefas, porém, todos os três projetos encontram-se em fase de testes e os módulos não são comercializados. Desta forma, o desafio destas pesquisas é tornar os módulos cada vez mais versáteis e possibilitar a sua produção em massa.

Ressalta-se que num projeto de robô metamórfico eficiente os módulos são capazes de se agregar nas mais diversas configurações, uma vez que é a capacidade de atingir distintas configurações que torna os robôs metamórficos aptos a desempenhar tarefas variadas.

Além disso, o problema da determinação das configurações distintas para um dado número de módulos está intimamente ligado ao problema de se determinar uma configuração ótima para a realização de uma determinada tarefa, uma vez que para se determinar uma configuração ótima deve-se conhecer que configurações o robô pode assumir. Também, o planejamento da trajetória de um robô metamórfico depende do conhecimento de suas possí-



veis configurações.

A presente dissertação foca-se no problema de enumeração de configurações distintas para robôs metamórficos, sendo que os módulos escolhidos para análise são os quadrados. A escolha dos módulos quadrados deve-se a sua simplicidade estrutural e ao fato de o problema de enumeração para este tipo de módulo possuir um equivalente matemático, a enumeração de polimínos. Do problema de enumeração para polimínos podem ser extraídos resultados que auxiliam na compreensão do problema de enumeração para robôs metamórficos. Estes resultados serão apresentados na seção 2.3.

Mas, antes de apresentar estes resultados, a seção 2.2 introduz mais detalhadamente o que se entende pelo problema de enumeração de configurações distintas para robôs metamórficos e apresenta uma breve revisão das principais bibliografias no assunto.

## 2.2 O PROBLEMA DE ENUMERAÇÃO PARA ROBÔS METAMÓRFICOS

Nesta seção, o problema de enumeração para robôs metamórficos é apresentado de maneira mais detalhada, sendo destacadas as principais bibliografias no assunto.

Primeiramente, dado um conjunto de  $n \in \mathbb{N}^*$  módulos, uma configuração de um robô metamórfico com  $n$  módulos é um arranjo justaposto destes módulos.

Assim, o arranjo de módulos apresentado na Figura 8a é uma configuração composta de três módulos quadrados, porém o arranjo de módulos na Figura 8b não constitui uma configuração com três módulos, pois nela um dos módulos encontra-se isolado dos demais.



Figura 8: Em (a) tem-se uma configuração com 3 módulos quadrados, porém em (b) o arranjo de módulos não constitui uma configuração com 3 módulos.

**Definição 2.** *Duas configurações de robôs metamórficos serão ditas iguais ou isomorfas se houver uma isometria que leve uma configuração na outra.*

**Definição 3.** Uma aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita uma isometria ou movimento rígido do plano se preserva distâncias entre os pontos do  $\mathbb{R}^2$ , isto é,  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ , para todos os pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Para o caso espacial, pode-se estender diretamente a definição de isometria apresentada. Além disso, para robôs metamórficos planares, como os constituídos de módulos quadrados ou de hexagonais, duas configurações serão consideradas distintas ou não isomorfas se não houver translações, rotações, ou reflexões que levem uma a outra, uma vez que as rotações, as translações e as reflexões são as isometrias do plano, como será discutido no Capítulo 3.

O problema de enumerar todas as configurações distintas ou não isomorfas que um dado número de módulos pode assumir é o que se chama de *problema de enumeração de configurações distintas para robôs metamórficos*, [Martins & Simoni 2009], ou, como será tratado neste texto, *problema de enumeração para robôs metamórficos*.

Considere robôs metamórficos de módulos quadrados, as duas configurações na Figura 9a são iguais, ou isomorfas, pois podem ser obtidas, por exemplo, por rotação uma da outra. Por outro lado, as duas configurações na Figura 9b são distintas ou não isomorfas, pois não há como obter uma configuração da outra por rotações, translações, ou reflexões.

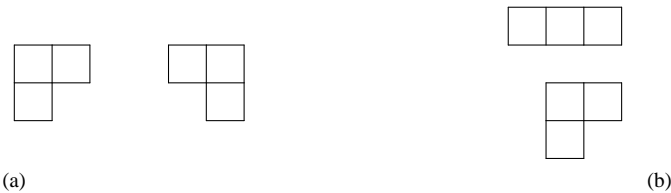


Figura 9: (a) Configurações isomorfas; (b) Configurações não isomorfas.

Ressalta-se que qualquer configuração com três módulos quadrados é isomorfa a alguma das configurações na Figura 9b, pois qualquer configuração com três módulos quadrados é uma rotação, translação, ou reflexão de alguma das configurações em 9b.

O problema de enumeração de configurações distintas para robôs metamórficos de módulos planares foi introduzido por [Chen & Burdick 1998], porém o algoritmo por eles desenvolvido apresenta bastantes limitações, principalmente por considerar duas configurações como distintas não apenas pela maneira com que os módulos estão conectados, mas também pelo tipo de conectores de cada módulo, o que torna o problema de enumeração mais complexo.

[Chitta & Ostrowski 2006] também trataram do problema de enumeração, apresentando um algoritmo para decidir se duas estruturas de robôs metamórficos são isomorfas.

[Martins & Simoni 2009] desenvolveram uma metodologia construtiva para enumerar as configurações não isomorfas para módulos quadrados e hexagonais. Como um dos métodos de enumeração desenvolvidos neste trabalho baseia-se nas contribuições de [Martins & Simoni 2009], a metodologia por eles desenvolvida será melhor discutida no capítulo Método das Órbitas.

Ressalta-se que este texto versa sobre o problema de enumeração de configurações distintas para robôs metamórficos, esta escolha de enfoque está intimamente ligada a complexidade do problema de enumeração. Para que se possa discutir melhor esta complexidade, a seção 2.3 apresenta o problema de enumeração de poliformas, um problema matemático equivalente ao problema de enumeração para robôs metamórficos planares. Do problema de enumeração para poliformas, podem-se extrair informações que possibilitam a melhor compreensão do problema no contexto de robôs metamórficos.

## 2.3 POLIFORMAS

Esta seção apresenta as poliformas e, em especial, o problema de enumeração de poliformas. Ela foi agregada à dissertação para que se possam discutir semelhanças entre o problema de enumeração para poliformas e para robôs metamórficos, principalmente no que concerne à complexidade destes problemas.

Segundo [Redelmeier 1981], poliminós são figuras geométricas formadas a partir da justaposição de quadrados iguais pelos seus lados, ou seja, ligados entre si de modo que pelo menos uma aresta de cada quadrado coincida com uma aresta do outro quadrado. A Figura 10 mostra todos os poliminós distintos constituídos de quatro quadrados, os tetraminós.

De maneira semelhante, uma poliforma é uma figura plana obtida pela justaposição de polígonos idênticos de modo que pelo menos uma aresta de cada polígono coincida com uma aresta do outro polígono. Dependendo de que polígono a poliforma é constituída ela recebe nomes específicos, como poliminós( de quadrados) polihexágonos (de hexágonos regulares) e poliábolo( de triângulos isósceles cujos ângulos internos sejam  $45^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ ). Ressalta-se que poliformas nem sempre são obtidas de polígonos regulares, o que fica evidenciado para o poliábolo.

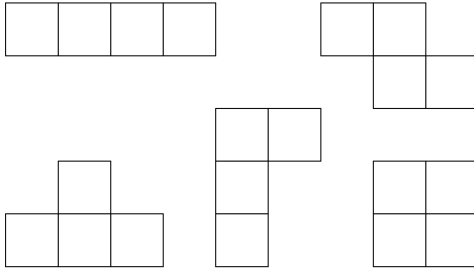


Figura 10: Todos os distintos tetraminós.

### 2.3.1 O problema de enumeração para poliformas

Para poliminós, o problema de enumeração pode ser formulado da seguinte maneira: *quantos distintos poliminós constituídos de  $n$  quadrados existem?* Esta formulação pode ser estendida para outros tipos de poliformas.

A Definição 4 deve-se a [Redelmeier 1981].

**Definição 4.** *Duas poliformas serão consideradas livres, ou não isomorfas, se não há como obter-se uma poliforma da outra através de uma isometria.*

Como poliformas são figuras planas, tem-se que duas poliformas serão consideradas livres se não forem uma rotação, uma translação, ou uma reflexão, uma da outra, pois estas são as isometrias do plano.

Ressalta-se que na Definição 4, foi usada a denominação poliformas livres e não distintas, pois em alguns casos, pode-se considerar as rotações, as translações e as reflexões de uma configuração como configurações distintas entre si, neste caso as poliformas serão denominadas fixas.

Na Figura 11 são mostrados os triominós, poliminós formados de três quadrados, sendo que na Figura 11b tem-se os triominós livres e na Figura 11a tem-se os triominós fixos.

Grande parte das pesquisas sobre enumeração de poliminós e outras poliformas centra-se em contar a quantidade de configurações, sejam elas configurações livres ou fixas, não em listá-las. Isto se deve, principalmente, ao grande crescimento do número de configurações à medida que se aumenta a quantidade de polígonos constituintes da poliforma.

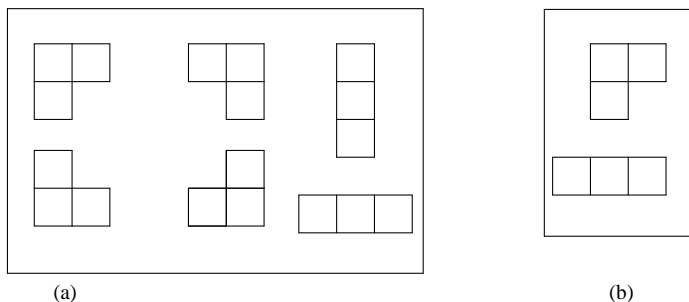


Figura 11: (a) Triominós Fixos; (b) Triominós Livres.

As Tabelas 1 e 2 fornecem, respectivamente, o número de configurações livres para poliminós e para polihexágonos em função da quantidade de polígonos constituintes da poliforma, ou seja, em função do número de quadrados para os poliminós e do número de hexágonos regulares para os polihexágonos. Os resultados nelas apresentados podem ser encontrados em [Redelmeier 1981, Jensen 2003].

Tabela 1: Número de poliminós livres com  $n$  quadrados.

<b>n</b>	<b>conf.</b>	<b>n</b>	<b>conf.</b>
1	1	15	3426576
2	1	16	13079255
3	2	17	50107909
4	5	18	192622052
5	12	19	742624232
6	35	20	2870671950
7	108	21	11123060678
8	369	22	43191857688
9	1285	23	168047007728
10	4655	24	654999700403
11	17073	25	2557227044764
12	63600	26	9999088822075
13	238591	27	39153010938487
14	901971	28	153511100594603

Também, as Tabelas 1 e 2 evidenciam o grande crescimento do número de configurações à medida que se aumentam o número de polígonos

Tabela 2: Número de polihexágonos livres com  $n$  hexágonos.

<b>n</b>	<b>conf.</b>	<b>n</b>	<b>conf.</b>
1	1	12	683101
2	1	13	3274826
3	3	14	15796897
4	7	15	76581875
5	22	16	372868101
6	82	17	1822236628
7	333	18	8934910362
8	1448	19	43939164263
9	6572	20	216651036012
10	30490	21	1070793308942
11	143552		

na poliforma, este crescimento torna o problema de enumeração complexo, principalmente ao se tentar listar as configurações.

Para melhor entendimento do problema de enumeração para poliformas a próxima subseção apresenta resultados teóricos que versam sobre a complexidade deste problema.

### 2.3.2 A complexidade do problema de enumeração

Os próximos resultados são importantes para que se compreenda a complexidade do problema de enumeração.

Primeiramente, poliformas livres são aquelas em que as rotações, translações e reflexões de uma configuração são consideradas a mesma configuração. Assim, as duas configurações na Figura 12 são consideradas a mesma poliforma livre.

Por outro lado, poliformas fixas são aquelas em que as rotações, translações e reflexões de uma configuração são consideradas configurações distintas. Assim, as duas configurações na Figura 12 são poliformas fixas distintas.

Seja  $a_n$  o número de **poliformas fixas ou livres** constituídas de  $n$  polígonos, o limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \lambda \quad (2.1)$$

existe e é diferente de zero [KLARXER 1967].

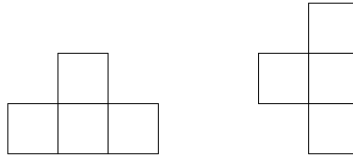


Figura 12: As duas configurações representam a mesma poliforma livre.

Este limite, 2.1, implica que ,

$$a_n > \lambda^n \quad (2.2)$$

ou, em outras palavras que  $a_n$ , cresce exponencialmente em função de  $n$ , o que torna a tarefa de se listar poliformas um problema bastante complexo.

Ressalta-se que qualquer método de enumeração que gere todas as  $a_n$  configurações, sejam elas as configurações fixas, ou as livres, apresentará um crescimento exponencial do tempo necessário para gerar as  $a_n$  configurações. Isto porque, se o número de configurações cresce exponencialmente, o tempo para gerar estas configurações também segue este comportamento.

De outro modo, qualquer algoritmo que tente listar todas as  $a_n$  configurações para cada  $n$  apresentará limitações a medida que  $n$  cresce, devido ao tempo necessário para listar as  $a_n$  configurações.

Devido a este crescimento, a maioria das pesquisas em enumeração de poliformas focam-se na procura por técnicas para contagem de  $a_n$  ou trabalham com a listagem de classes específicas de poliformas.

Estas técnicas de contagem não serão explicadas neste texto devido a sua grande complexidade e principalmente porque para se efetuar um paralelo com o problema de enumeração para robôs metamórficos necessita-se listar as  $a_n$  configurações. Porém, mais detalhes sobre as técnicas de contagem podem ser encontrados em [Redelmeier 1981, Jensen 2003].

Para poliminós, poliformas constituídas de quadrados, existem algoritmos para listagem das classes convexas, como ECO [Lungo et al. 2003], para os convexos e semi-convexos, como em [Feretic 2009], ou para os que ladrilham o plano, em [Fukuda et al. 2008].

Além disso, para **poliminós fixos** tem-se a seguinte estimativa para  $a_n$ :

$$a_n \sim \frac{c\lambda^n}{n} \quad (2.3)$$

na qual as melhores cotas para  $\lambda$  são [Barequet et al. 2005, Klarner & Rivest 1973, Jensen & Guttmann 2000]:

$$3.980137 < \lambda < 4.65 \quad (2.4)$$

Também,

$$c = 0.3169 \quad (2.5)$$

Ressalta-se que esta estimativa trata dos poliminós fixos e não é válida para os livres.

Logo, tratando-se de poliminós fixos,  $a_n$ , tem aproximadamente o comportamento de uma exponencial de base entre 3.980137 e 4.65. Na Tabela 3 pode-se observar o crescimento exponencial do número de configurações, os resultados apresentados nesta tabela podem ser encontrados em [Redelmeier 1981, Jensen 2003].

Tabela 3: Número de poliminós fixos com  $n$  quadrados.

<b>n</b>	<b>conf.</b>	<b>n</b>	<b>conf.</b>
1	1	15	27394666
2	2	16	104592937
3	6	17	400795844
4	19	18	1540820542
5	63	19	5940738676
6	216	20	22964779660
7	760	21	88983512783
8	2725	22	345532572678
9	9910	23	1344372335524
10	36446	24	5239988770268
11	36446	25	20457802016011
12	505861	26	79992676367108
13	1903890	27	313224032098244
14	7204874	28	1228088671826973

Um resultado importante é que o número de **poliminós livres** é aproximadamente  $\frac{1}{8}$  do número de **poliminós fixos** para um dado número de quadrados [Lunnon 1971]. Por exemplo, para 23 quadrados, as Tabelas 3 e 1 mostram, respectivamente, que o número de configurações fixas é de 1344372335524, já o número de configurações livres é de 168047007728, ou seja, o número de configurações fixas é aproximadamente 8 vezes o número de livres. Este resultado será importante para discutir a complexidade



computacional dos métodos de enumeração para robôs metamórficos a serem propostos o que será melhor discutido no Capítulo 7.

No caso de **polihexágonos fixos**, [Voge & Guttmann 2003] provaram que a constante  $\lambda$  existe e tem por cotas:

$$4.8049 \leq \lambda \leq 5.9047 \quad (2.6)$$

A Equação 2.6 evidencia que o crescimento do número de configurações para o caso de polihexágonos é maior que para o caso de poliminós, o que também pode ser observado nas Tabelas 2 e 1.

Consideradas as bases teóricas do problema de enumeração para poliformas, pode-se compreender que se tratando de robôs metamórficos o problema será igualmente complexo. Como o trabalho irá introduzir dois novos métodos para enumeração de configurações distintas para robôs metamórficos de módulos quadrados, o número de configurações encontrado nestes métodos deve coincidir com o número de configurações para poliminós livres. Da complexidade do problema para poliminós, sabe-se que os métodos a serem propostos apresentarão limitações, principalmente devido ao tempo necessário para listar as  $a_n$  configurações, visto que este cresce de maneira exponencial.

O Capítulo 4, introduz as etapas comuns aos métodos enumerativos a serem propostos. Porém, para desenvolver os conceitos teóricos necessários, primeiramente é apresentado o Capítulo 3, que introduz as bases teóricas necessárias à compreensão dos métodos enumerativos a serem propostos. Nele, são apresentados os conceitos de permutações, simetrias, grupos, ação de grupo e órbitas pela ação de um grupo num conjunto. O leitor familiarizado com estes conceitos pode passar ao capítulo sucessivo sem perdas no entendimento dos métodos a serem propostos.



### 3 FERRAMENTAS ALGÉBRICAS

Neste capítulo, algumas noções básicas de álgebra são apresentadas, entre elas a de permutações, grupos, simetrias e ação de grupo, com o intuito de formalizar conceitos que permearão o desenvolvimento do trabalho. Estes conceitos podem ser encontrados em [II Bienal da SBM 2004], além disto, o leitor familiarizado com eles pode passar ao capítulo sucessivo sem perdas no entendimento dos métodos enumerativos a serem propostos.

#### 3.1 PERMUTAÇÕES

**Definição 5.** *Dado um conjunto não-vazio  $X$  uma bijeção  $\pi : X \rightarrow X$  é denominada uma permutação do conjunto  $X$ .*

**Exemplo 1.** *Considere um baralho com 52 cartas inicialmente na ordem  $(b_1, b_2, \dots, b_{52})$ , qualquer embaralhamento destas cartas, por exemplo  $(b_{10}, b_{32}, \dots, b_4)$ , é uma permutação do conjunto  $X = \{b_1, b_2, \dots, b_{52}\}$  das cartas do baralho.*

O conjunto  $S_n = \{\pi : X \rightarrow X, \pi \text{ é uma permutação}\}$ , é o conjunto de todas as permutações de um conjunto  $X$  com  $n$  de elementos, isto é,  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  pode-se mostrar que  $S_n$  terá  $n!$  elementos, [Boldrini et al. 1980].

Costuma-se denotar uma permutação  $\pi$  de  $S_n$  pelo diagrama

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

em que  $\pi(j)$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  representa o valor que da bijeção  $\pi$  aplicada ao elemento  $j$  de  $X$ .

**Exemplo 2.**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$  é uma permutação do conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  em que os elementos 2 e 4 estão fixos.

### 3.2 ISOMETRIAS NO PLANO E SIMETRIAS

O plano cartesiano geométrico é aqui considerado como o produto cartesiano de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 6.** *Uma figura plana  $F$  é um conjunto de pontos de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .*

**Definição 7.** *Uma aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita uma isometria do plano se preserva distâncias entre os pontos do  $\mathbb{R}^2$ , isto é, tal que  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ , para todos os pontos  $x, y \in \mathbb{R}^2$ .*

**Exemplo 3.** *Qualquer translação, rotação ou reflexões (em uma linha ou em um ponto) são isometrias do plano.*

**Proposição 1.** *Toda isometria  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é injetiva.*

**Demonstração da Proposição 1.** *Apêndice A, página 153.*

**Proposição 2.** *Seja  $f$  uma isometria invertível do plano, então sua inversa  $f^{-1}$  é também uma isometria do plano.*

**Demonstração da Proposição 2.** *Apêndice A, página 153.*

**Definição 8.** *Dada uma figura  $F$ , uma simetria de  $F$  é uma isometria invertível.*

Segue da definição que uma simetria leva uma figura em si e preserva distâncias.

**Exemplo 4.** *Um triângulo equilátero apresenta seis simetrias, uma delas é a identidade, duas são rotações em torno do seu centro de gravidade de ângulos  $\frac{2\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$  radianos e três são reflexões através de suas medianas, que são os eixos de simetria do triângulo equilátero, como ilustra a Figura 13.*

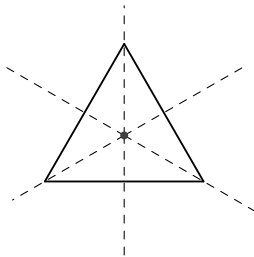


Figura 13: Eixos de simetria do triângulo equilátero.

### 3.3 GRUPOS

**Definição 9.** Um grupo é um par  $(G, *)$  em que  $G$  é um conjunto e  $*$  é uma função de  $G \times G \rightarrow G$  que a cada par  $(a, b) \in G \times G$  associa um elemento  $a * b \in G$ , satisfazendo:

- i) *Associatividade:* Para quaisquer que sejam os elementos  $a, b \in G$ , temos  $a * (b * c) = (a * b) * c$ ;
- ii) *Existência do Elemento Neutro:* Existe um elemento  $e \in G$  tal que  $a * e = e * a = a$ , para todo  $a \in G$ ;
- iii) *Existência de Elemento Inverso:* Para cada elemento  $a \in G$ , existe um elemento  $a^{-1} \in G$  tal que  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

Quando a operação está claramente definida, não utilizamos a notação de par ordenado  $(G, *)$  para grupos, denotando-se o grupo apenas por  $G$ .

**Exemplo 5.** O conjunto dos números inteiros com a operação de adição usual,  $(\mathbb{Z}, +)$ , é um grupo, pois a soma é associativa, o elemento neutro é o número 0 e o inverso de cada  $n \in \mathbb{Z}$  é seu oposto,  $-n$ .

O próximo exemplo é constitui uma observação importante sobre a definição de grupo.

**Exemplo 6.** O conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais com a operação de subtração não formam um grupo. Basta observar que  $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$  e desta forma a subtração não é uma operação nos  $\mathbb{N}$ . Lembre que uma operação  $*$  foi definida como uma função  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$ , ou seja, aplicada a elementos de um conjunto  $G$ , tem de resultar em elementos do próprio conjunto  $G$ .

Logo, para verificar se um par  $(G, *)$  forma um grupo, deve-se atentar ao fato de que  $*$  deve ser realmente uma operação em  $G$ .

**Definição 10.** Se para todos os elementos  $a, b \in G$  de um grupo  $(G, *)$  observa-se a igualdade  $a * b = b * a$ , então o grupo  $G$  é dito abeliano, ou comutativo.

**Exemplo 7.**  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$  são grupos comutativos.

**Definição 11.** Um subconjunto não vazio  $H$  de um grupo  $G$  é um sub-grupo de  $G$  se  $H$  com a operação de  $G$  também for um grupo.

**Exemplo 8.**  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}, +)$  são subgrupos de  $(\mathbb{R}, +)$ .

### 3.3.1 O grupo das bijeções

**Proposição 3.** *Seja  $X$  um conjunto qualquer e  $B_{ij}(X) = \{f : X \rightarrow X, \text{ tal que } X \text{ é uma bijeção}\}$ . O conjunto  $B_{ij}$  munido da operação de composição de funções forma um grupo.*

**Demonstração da Proposição 3.** *Apêndice A, página 153.*

### 3.3.2 O grupo das permutações

**Proposição 4.** *Seja  $X$  um conjunto não vazio, o conjunto  $S_n = \{\pi : X \rightarrow X, \pi \text{ é uma permutação}\}$ , conjuntamente com a operação de composição de funções, forma um grupo, chamado grupo de permutações de  $X$ .*

**Demonstração da Proposição 4.** *Apêndice A, página 154.*

**Exemplo 9.** *O que segue é a caracterização do conjunto  $S_3 = \{\pi : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}, \pi \text{ é uma permutação}\}$  e a operação de composição de funções, ou seja, do grupo de permutações de  $I_3 = \{1, 2, 3\}$ .*

*Os elementos de  $S_3$  são todas as permutações possíveis dos elementos 1, 2, 3 e são mostradas abaixo.*

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*A composta de duas permutações é operada como a composição de funções (pois esta é a operação sobre o grupo).*

$$\pi_1 \circ \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \pi_2$$

### 3.3.3 O grupo de simetrias

**Teorema 1.** *Seja  $F$  uma figura. Então, o conjunto de todas as simetrias de  $F$  com a operação de composição de funções formam um grupo.*

**Demonstração do Teorema 1.** Apêndice A, página 154.

**Exemplo 10.** *Sejam um quadrado e um retângulo com centros geométricos coincidentes com a origem do sistema cartesiano e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, como exemplificam as Figuras 14a e 14b, respectivamente.*

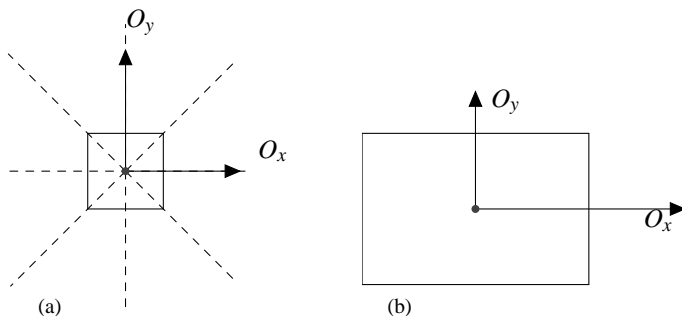


Figura 14: 14a: Eixos de simetria do quadrado, 14b: eixos de simetria do retângulo.

*Então, o grupo de simetrias do quadrado tem 8 elementos: a identidade, as reflexões nos eixos  $O_x$  e  $O_y$  e nas diagonais do quadrado, bem como as rotações de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  radianos em torno da origem. Além disso, o grupo de simetrias do retângulo tem 4 elementos: a identidade, as reflexões nos eixos  $O_x$  e  $O_y$  e a rotação de  $\pi$  radianos em torno da origem (igualmente a reflexão na origem).*

### 3.3.4 Ação de grupo

Um conceito algébrico importante é o de ação de grupo, ele se refere à maneira como um grupo pode interagir com elementos de um dado conjunto.

**Definição 12.** *Seja  $G$  um grupo e  $X$  um conjunto não vazio. Uma ação (à esquerda) de  $G$  sobre  $X$  é uma função*

$$G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \rightarrow g.x$$

*satisfazendo as propriedades:*

- $e_G.x = x$ , para todo  $x \in X$  e em que  $e_G$  é a identidade de  $G$ .

- $(gh).x = g.(h.x)$ , para todo  $g, h \in G$  e para todo  $x \in X$ .

**Exemplo 11.** Seja  $G$  um grupo e  $X$  um conjunto não vazio qualquer. A função definida por

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\rightarrow x \end{aligned}$$

é uma ação de  $G$  em  $X$  chamada trivial.

Note que no exemplo os elementos  $x \in X$  são levados em si pela ação do grupo  $G$ . Outra ação distinta teria de levar os elementos de  $X$  em elementos de  $X$ , na prática permutaria os elementos de  $X$ , podendo ser interpretada como uma mudança na ordem de disposição dos elementos de  $X$ .

Outro exemplo é a ação do grupo de simetrias do quadrado na coloração de um tabuleiro  $2 \times 2$ . Para desenvolver o exemplo, deve-se entender primeiramente o conceito de coloração para o caso estudado.

**Exemplo 12.** Considere um tabuleiro  $2 \times 2$ , tendo suas casas denotadas por  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  como ilustrado na Figura 15.

$\alpha_1$	$\alpha_2$
$\alpha_3$	$\alpha_4$

Figura 15: Tabuleiro  $2 \times 2$ .

Ao colorir-se o tabuleiro de preto e branco, pode-se considerar uma coloração como uma função  $f$ , tal que

$$f : \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \rightarrow \{\text{preto}, \text{branco}\}$$

Todas as 16 colorações possíveis são uma das 16 funções assim obtidas, estas colorações são representadas na Figura 16.

Considere as colorações do tabuleiro  $2 \times 2$  dadas nas Figuras 17a e 17b, bem como a simetria do tabuleiro dada pela reflexão na reta  $m$ .

Tem-se que a simetria de reflexão na reta  $m$ , leva a coloração dada na Figura 17a, na coloração dada na Figura 17b, ou seja, a simetria de reflexão em  $m$  age na coloração da Figura 17a, levando-a na coloração da Figura 17b.



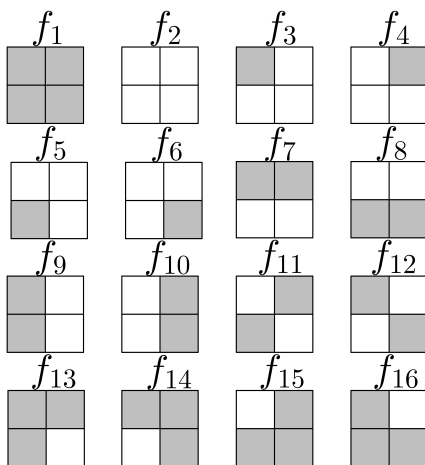


Figura 16: Todas as colorações do tabuleiro  $2 \times 2$ .



Figura 17: Duas colorações do tabuleiro que são levadas uma na outra pela reflexão na reta  $m$ .

*Isto é válido para qualquer simetria do tabuleiro e para quaisquer colorações, ou seja, qualquer simetria do tabuleiro leva uma coloração do tabuleiro em outra coloração do tabuleiro. Assim, o grupo das simetrias do tabuleiro age no conjunto das colorações do tabuleiro levando uma coloração na outra.*

**Definição 13.** *Seja  $G$  um grupo agindo sobre um conjunto  $X$ . A órbita do ponto  $x \in X$ , é o conjunto*

$$\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Em outras palavras, a órbita de um elemento  $x \in X$  pela ação de um grupo  $G$  é o conjunto de elementos de  $X$  para os quais  $x$  pode ser levado pela

ação de  $G$ .

**Exemplo 13.** *Retomando o exemplo das colorações do tabuleiro, tem-se que a coloração dada na Figura 17b está na órbita da coloração dada na Figura 17a pela ação do grupo de simetrias do quadrado, pois a simetria de reflexão na reta  $m$ , leva uma coloração na outra. Além disto, todo par de colorações que for correspondente por uma simetria do quadrado estará na mesma órbita.*

**Definição 14.** *Sejam dois conjuntos  $A$  e  $B$  não vazios. Uma relação  $R$  de  $A$  em  $B$  é qualquer subconjunto do produto cartesiano  $A \times B$ .*

Se  $A = B$  denota-se a relação como relação em  $A$ .

**Definição 15.** *Uma relação  $R$  sobre um conjunto  $A$  é dita de equivalência se:*

- i)  $R$  for reflexiva,  $xRx$  para todo  $x \in A$ ;*
- ii)  $R$  for simétrica,  $xRy \implies yRx$  para todo  $x, y \in A$ ;*
- iii)  $R$  for transitiva,  $xRy$  e  $yRz \implies xRz$ , para todo  $x, y, z \in A$ .*

**Proposição 5.** *Uma ação  $\alpha$  de um grupo  $G$  sobre um conjunto  $X$  introduz uma relação de equivalência em  $X$ .*

As classes de equivalência, conjuntos de elementos que podem ser levados uns nos outros pela relação de equivalência, neste caso, serão dadas pelas órbitas dos elementos.

**Demonstração da Proposição 5.** *Apêndice A, 154.*

**Proposição 6.** *Duas órbitas pela ação de um grupo ou são disjuntas (não compartilham elementos) ou coincidentes.*

**Demonstração da Proposição 6.** *Apêndice A, 154.*

Na prática, este resultado facilita a obtenção das órbitas pela ação de um grupo num dado conjunto. Pois, se um elemento  $y$  está numa órbita conhecida de um elemento  $x$ , a órbita de  $y$  será a mesma de  $x$ , não havendo necessidade de considerar novamente toda ação do grupo sobre  $y$  para determinar sua órbita.

**Exemplo 14.** *Também referente ao exemplo das colorações do tabuleiro, tem-se que a órbita da coloração dada na Figura 17a é a mesma que a da coloração dada na Figura 17b pela ação do grupo de simetrias do quadrado, visto que a reflexão na reta  $m$  leva uma configuração na outra.*

### 3.3.5 Simetrias como permutações

Associando aos pontos médios dos lados de um quadrado números de 1 à 4, obtém-se o conjunto de pontos  $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ . Uma ação do grupo de simetrias do quadrado no conjunto  $I_4$  é dada na Figura 18, esta ação equivale a ação do grupo de permutações de  $I_4$  em  $I_4$ .

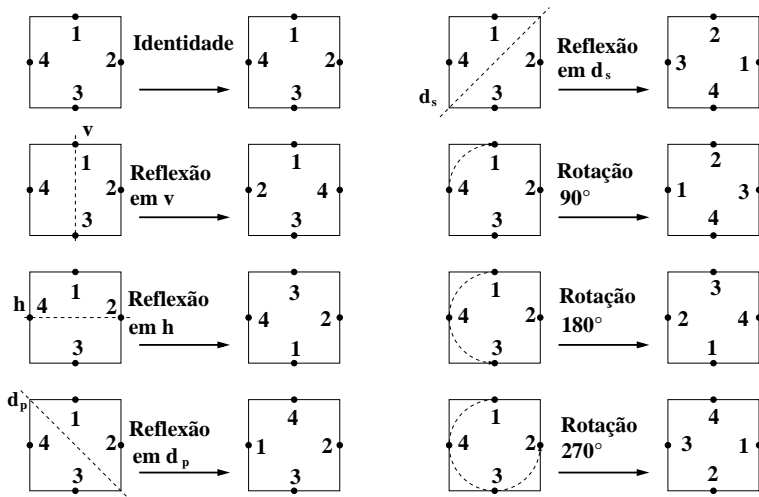


Figura 18: Simetrias do quadrado e o grupo de permutações de  $I_4$ .

Da Figura 18 tem-se que a ação do grupo das simetrias do quadrado no conjunto  $I_4 = \{1, 2, 3, 4\}$  pode ser interpretada como o efeito de se aplicarem todas as permutações de  $I_4$  sobre o próprio conjunto  $I_4$ . Em que  $R_r, R_{r_1}, R_{d_1}, R_{d_2}$ , agem como as reflexões em  $v, h, d_p, d_s$  e  $Rot_\pi, Rot_{\frac{\pi}{2}}, Rot_{\frac{3\pi}{2}}$ , como as rotações de ângulos  $\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  radianos em relação ao centro de gravidade do quadrado, respectivamente.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad R_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad R_{d_s} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad R_{d_p} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad Rot_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Rot_{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} Rot_{\frac{3\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Do exemplo, conclui-se que a ação do grupo de simetrias do quadrado sobre  $I_4$  pode ser capturada através da ação do grupo de permutações de  $I_4$  em  $I_4$ , mas para tanto, fez-se necessária a associação de uma estrutura adequada ao quadrado, no caso os pontos médios dos lados foram associados aos números de 1 à 4.

O exemplo da Figura 18 será útil para o entendimento de como os dois métodos de enumeração a serem propostos estão relacionados. Visto que o Método das Simetrias (Capítulo 5) e o Método das Órbitas (Capítulo 6) irão capturar as simetrias de cada configuração por meio da ação de grupos distintos, porém, estas duas ações deverão ter efeitos idênticos nos pontos a serem considerados, como ocorreu no exemplo da Figura 18.

## 4 SISTEMÁTICA COMUM AOS NOVOS MÉTODOS DE ENUMERAÇÃO

Os capítulos anteriores apresentaram uma visão geral do assunto abordado na dissertação: a enumeração de configurações não isomorfas de robôs metamórficos com módulos quadrados e servem para contextualizar o leitor e para relembrar alguns conceitos algébricos necessários ao desenvolvimento dos novos métodos de enumeração a serem propostos.

Este capítulo, porém, tem uma grande importância para a construção geral da dissertação, pois nele inicia-se a construção teórica dos novos métodos de enumeração que serão formalmente apresentados nos Capítulos 5 e 6.

Neste capítulo, são introduzidos os conceitos de Geração Recursiva e de Geração Livre, nos quais baseiam-se os dois novos métodos propostos. Além disso, para melhor compreensão dos métodos a serem propostos, bem como da ligação entre eles, ao final do capítulo é apresentado o Algoritmo 1 que engloba as etapas comuns destes dois métodos. Ressalta-se que este algoritmo permeia todo desenvolvimento da dissertação.

Retornando ao problema de enumeração, o problema básico consiste em anexar um novo módulo quadrado a cada um dos lados de um quadrado geram-se, assim, todas as configurações com dois módulos quadrados, como ilustra a Figura 19. Este processo será denominado Geração Recursiva das configurações com dois módulos quadrados, pois as configurações com dois módulos são geradas da configuração com um módulo.

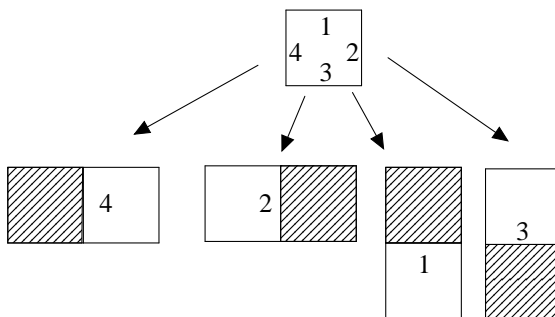


Figura 19: Geração Recursiva das configurações com dois módulos quadrados.

**Definição 16.** *Geração recursiva: o processo de gerar todas as configurações de um robô metamórfico com  $n + 1$  módulos a partir de todas as configurações com  $n$  módulos,  $n \in \mathbb{N}^*$ , é o que se irá chamar de geração recursiva.*

Os métodos enumerativos que serão apresentados baseiam-se na geração recursiva, ou seja, as configurações com  $n + 1$  módulos quadrados serão obtidas das configurações com  $n$  módulos pelo acréscimo de um novo módulo.

Porém, ressalta-se que o processo de geração recursiva implica na geração de configurações isomorfas. Por exemplo, as configurações com dois módulos quadrados na Figura 19 são rotações ou translações umas das outras sendo portanto, isomorfas e elas foram geradas de maneira recursiva da configuração com um módulo

A Figura 20 mostra o processo de geração recursiva das configurações com três módulos quadrados, nela as configurações nas quais o novo módulo foi anexado ao lado 2, ou ao lado 3, ou ao 6 ou ao 5, são isomorfas, bem como aquelas nas quais o módulo foi anexado ao lado 1 ou ao 4.

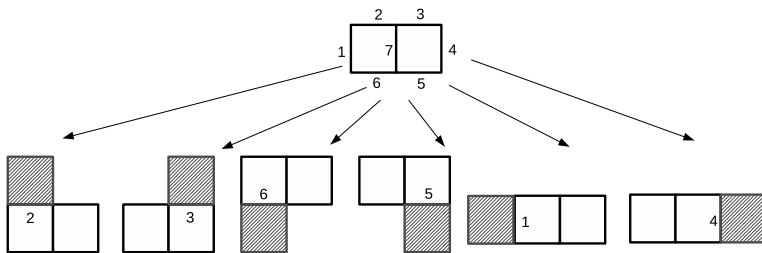


Figura 20: Geração Recursiva das configurações com três módulos quadrados.

Os exemplos anteriores evidenciaram que o processo de geração recursiva apresentado implica na geração de configurações isomorfas. Mas, como este trabalho foca-se na geração de configurações não isomorfas, e os métodos enumerativos nele propostos baseiam-se no processo geração recursiva, uma alteração deste processo deve ser apresentada para que as configurações isomorfas sejam eliminadas. Para tanto, é necessário identificar que caracte-

rísticas presentes nas configurações com  $n$  módulos levam à geração de configurações isomorfas com  $n + 1$  módulos pelo processo recursivo, o que será discutido a seguir.

A Figura 21a apresenta um quadrado e uma reta denotada por  $v$ , sendo que a reflexão em  $v$  é uma simetria deste quadrado e os lados  $a$  e  $a'$  são simétricos em relação à reta  $v$ . Ao se acrescentar um módulo ao lado  $a$ , obtém-se a configuração apresentada na Figura 21b e ao se acrescentar o módulo a  $a'$ , a configuração na Figura 21c.

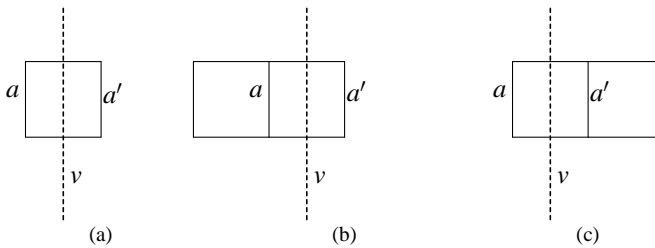


Figura 21: (a) Os lados  $a$  e  $a'$  são simétricos em relação à reta  $v$ ; (b) e (c) configurações isomorfas obtidas pela anexação de um novo módulo respectivamente aos lados um módulo  $a$  e  $a'$  do quadrado em (a).

Tem-se que as configurações nas Figuras 21b e 21c, são isomorfas, pois uma pode ser obtida da outra através de uma rotação, por exemplo. Porém, é importante observar que as configurações nas Figuras 21b e 21c são reflexões em  $v$  uma da outra, como mostra a Figura 22, ou seja, a mesma simetria que leva  $a$  em  $a'$  leva a configuração em que se acrescenta um módulo em  $a$ , Figura 21b, naquela em que se acrescenta o módulo em  $a'$ , Figura 21c. Assim, tem-se que as configurações nas Figuras 21b e 21c são isomorfas segundo a simetria de reflexão em  $v$  que leva  $a$  em  $a'$ .

O acréscimo de um novo módulo a posições simétricas por simetrias da configuração sempre irá gerar configurações isomorfas. Um outro exemplo deste fato é apresentado a seguir.

Seja a configuração na Figura 23, nela os pontos  $G$  e  $G'$  são simétricos em relação à reta  $h$ . Se um novo módulo fosse acrescentado ao ponto  $G$ , a configuração na Figura 24a seria obtida. No entanto, se um novo módulo fosse acrescentado ao ponto  $G'$  a configuração na Figura 24b seria obtida. Porém, as configurações nas Figuras 24a e 24b são uma reflexão em  $h$  uma

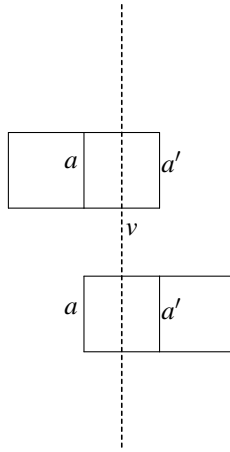


Figura 22: A configuração em que há um módulo na posição  $a$  e aquela na qual há um módulo em  $a'$  são uma reflexão em  $v$  uma da outra.

da outra, sendo portanto isomorfas.

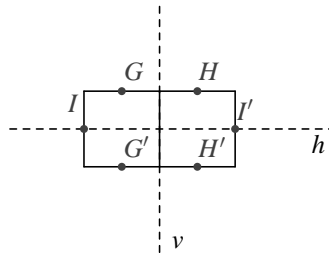


Figura 23: Os pares  $(I, I')$ ,  $(G, H)$  e  $(G', H')$  apresentam pontos simétricos em relação à  $v$ . Por outro lado, os pares  $(I, I)$ ,  $(I', I')$ ,  $(G, G')$  e  $(H, H')$  apresentam simétricos em relação à reta  $h$ .

Ressalta-se que nas configurações nas Figuras 24a e 24b pode-se considerar que o novo módulo tem a mesma vizinhança. De fato, em 24a, o novo módulo foi acrescentado ao lado que contém  $G$ , tendo como vizinhos os pontos  $I$  e  $H$ , por outro lado, em 24b, o módulo foi agregado em  $G'$ , tendo como vizinhos  $I$  e  $H'$ , como  $H'$  é o simétrico de  $H$  em relação a  $h$  e  $H'$ , pode-se considerar que o novo módulo tem a mesma vizinhança em ambos os casos.

Deste modo, sempre que um módulo for agregado à configuração com  $n$  módulos em posições simétricas por simetrias da própria configuração, configurações isomorfas com  $n + 1$  módulos serão geradas, porque o novo mó-



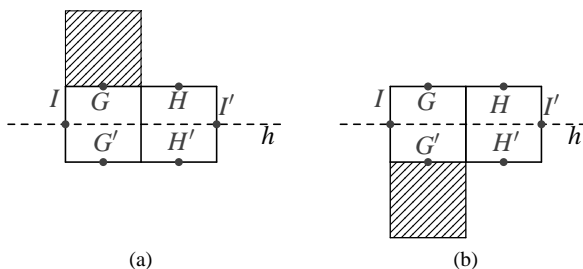


Figura 24: (a) (b) configurações isomorfas obtidas pela anexação de um novo módulo aos lados  $G$  e  $G'$ , simétricas em relação a  $h$  na Figura 23.

dulo terá os mesmos vizinhos e o restante da estrutura permanecerá inalterada.

Portanto, para se evitar a geração de configurações isomorfas, o procedimento para geração recursiva deverá ser alterado. Uma etapa para checagem das simetrias de uma configuração será agregada ao processo, assim, a anexação de novos módulos deverá ser efetuada apenas em posições não simétricas entre si. Este novo processo de geração será denominado Geração Livre.

Para se efetuar o processo de Geração Livre das configurações com três módulos quadrados, deve-se partir da configuração com dois módulos, sendo que a primeira etapa do processo é a checagem das simetrias da configuração com dois módulos.

Na Figura 25 tem-se a configuração com dois módulos, esta configuração tem por simetrias: a identidade e as reflexões nas retas  $h$ ,  $v$  e no ponto  $O$ .

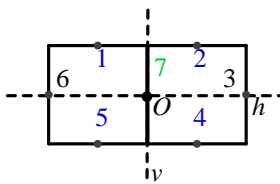


Figura 25: Configuração cujas simetrias são a identidade e as reflexões em  $O$ , em  $v$  e em  $h$ .

**Exemplo 15.** Considere o conjunto dos pontos  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  na Figura 25. Os conjuntos  $A = \{1, 2, 4, 5\}$ ,  $B = \{3, 6\}$  e  $C = \{7\}$  são subconjuntos de  $S$ , sendo que os pontos em cada subconjunto são simétricos por alguma simetria da configuração na Figura 25.

De fato, os pontos de  $S_1$  podem ser levados uns nos outros pelas seguintes simetrias da configuração:

- 1 é simétrico de 5 em relação a  $h$ ;
- 2 é simétrico de 4 em relação a  $h$ ;
- 1 é simétrico de 2 em relação a  $v$ ;
- 5 é simétrico de 4 em relação a  $v$ ;
- 5 é simétrico de 2 em relação ao ponto  $O$ ;
- 1 é simétrico de 4 em relação ao ponto  $O$ .

Por outro lado, os pontos de  $B$ , 3 e 6, são simétricos em relação à  $v$  e o único ponto de  $C$ , o 7, é levado em si, por exemplo, pela identidade.

Resumindo, os conjuntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  apresentam pontos que podem ser levados uns nos outros por alguma simetria da configuração com dois módulos na Figura 25. Logo, pelo processo de Geração Livre, a anexação do novo módulo deve ser feita a apenas um elemento de cada conjunto.

Em relação ao conjunto  $A$ , escolheu-se anexar o módulo ao ponto 1, gerando-se assim, a configuração na Figura 26b. Do conjunto  $B$  o ponto escolhido para anexação de novo módulo foi o 3, gerando-se assim, a configuração na Figura 26a. Por outro lado, no conjunto  $C$  há apenas o ponto 7 e nele não é possível a anexação de novo módulo.

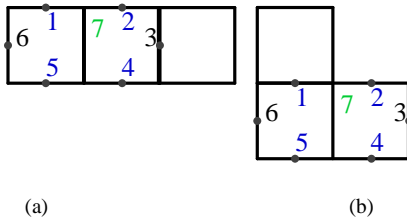


Figura 26: (a) Um módulo foi acrescentado a posição 3, (b) Um módulo foi acrescentado a posição 1, posição não simétrica de 3. Por fim, as configurações em (b) e (a) são não isomorfas.

Também, para exemplificar o processo de Geração Livre, a Figura 27 apresenta-o para um total de quatro módulos quadrados, sendo que os lados

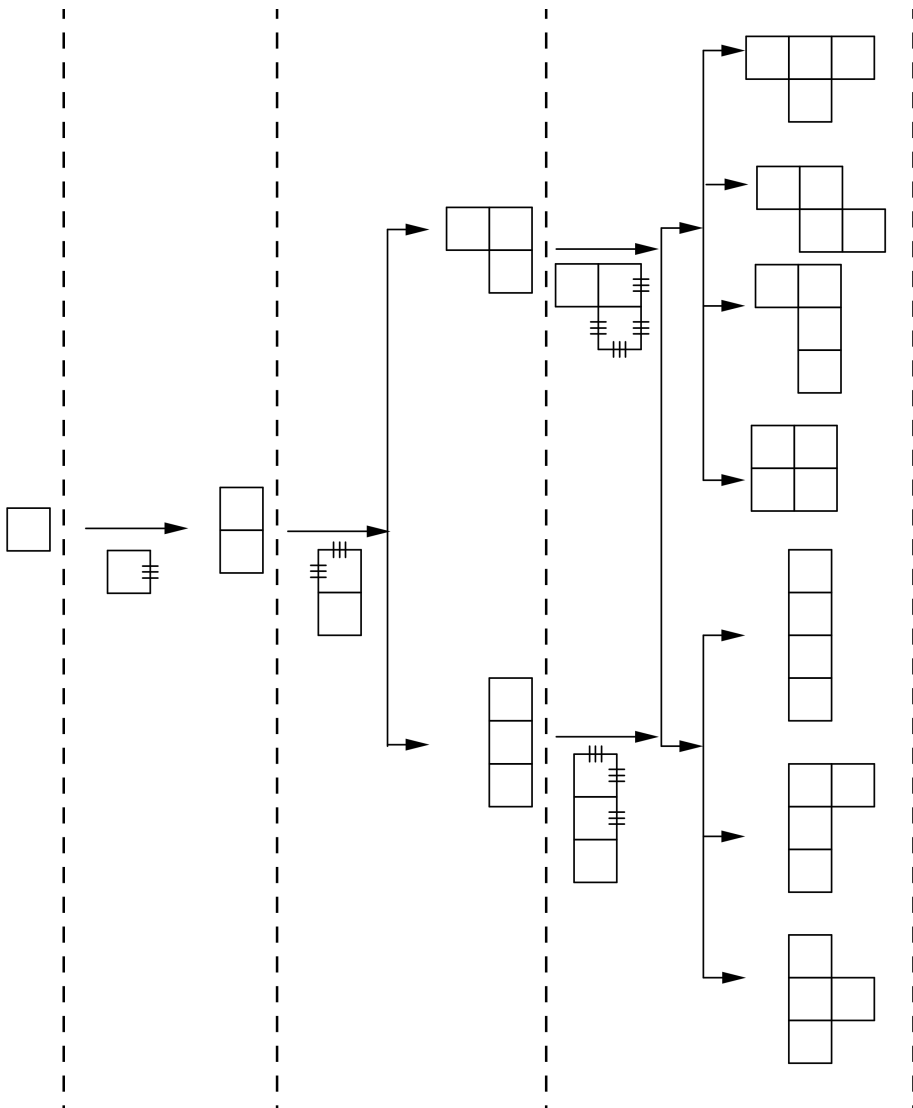


Figura 27: Geração Livre para um total de quatro módulos quadrados, sendo que as posições destacadas em cada configuração são não simétricas e nelas anexa-se o novo módulo.

destacados nos quadrados representam as posições não simétricas escolhidas para anexação do módulo.

Desta Figura, também se conclui que o processo de Geração Livre diminui a quantidade de configurações isomorfas geradas em relação ao processo recursivo, mas não elimina totalmente este problema. De fato, as configurações nas Figuras 28a e 28b são isomorfas.



Figura 28: Configurações isomorfas geradas no processo de Geração Livre.

Um questionamento pertinente é: por que motivo configurações isomorfas são geradas no processo de Geração Livre, mesmo após a checagem das simetrias de cada configuração geradora e anexação somente a posições não simétricas entre si?

Isto se deve a dois fatos distintos:

1. As configurações nas Figuras 28a e 28b foram obtidas de configurações distintas no processo de Geração Livre e são isomorfas, ou seja, como primeiro ponto, tem-se que configurações distintas podem gerar configurações isomorfas no processo de Geração Livre.
2. Configurações assimétricas podem gerar, em certas situações, configurações isomorfas. Por exemplo, a configuração em 29a é assimétrica e gera pelo processo de Geração Livre as configurações em 29b e 29c que são isomorfas.

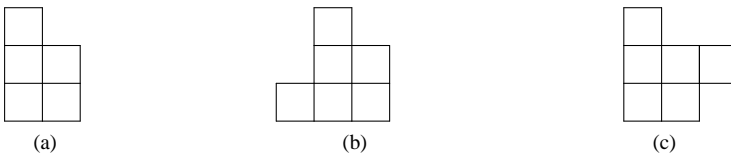


Figura 29: A configuração em 29a é assimétrica e gera pelo processo de Geração Livre as configurações em 29b e 29c que são isomorfas.

Neste contexto, para eliminar as configurações isomorfas remanescentes do processo de Geração Livre, será introduzido um teste, que é contribuição deste trabalho, para checar se duas configurações com módulos quadrados são isomorfas, o teste será denominado teste de isomorfismo.

Assim, para que o processo de geração das configurações com  $n + 1$  resulte apenas em configurações não isomorfas deve-se proceder segundo o algoritmo a seguir, ele engloba as etapas de checagem de simetrias, anexação de novos módulos e também o teste de isomorfismo a ser proposto.

---

**Algoritmo 1:** Etapas comuns dos métodos enumerativos propostos

---

1. Detecte as simetrias das configurações com  $n$  módulos;
  2. Acrescente um novo módulo somente a posições não simétricas entre si de cada configuração com  $n$  módulos, gerando assim as configurações com  $n + 1$  módulos;
  3. Descarte do conjunto das configurações com  $n + 1$  módulos as configurações que forem isomorfas através do teste de isomorfismo.
- 

Os métodos enumerativos a serem propostos seguem os passos do Algoritmo 1, diferindo apenas em como as simetrias são detectadas. No primeiro método, a checagem das simetrias é feita com auxílio dos resultados que serão apresentados nas Proposições 7, 8, 9, 10, 11 e 13. Por outro lado, para o segundo método, o Método das Órbitas, descrito no Capítulo 6 a checagem das simetrias é feita pela introdução de uma representação por grafos para cada configuração de robôs metamórficos com módulos quadrados

O primeiro destes métodos, o Método das Simetrias, será apresentado no próximo capítulo, o Capítulo 5.



## 5 NOVO MÉTODO DE ENUMERAÇÃO BASEADO NA DETECÇÃO DIRETA DAS SIMETRIAS

Neste capítulo, será apresentado o primeiro dos dois novos métodos de enumeração de configurações não isomorfas de robôs metamórficos com módulos quadrados. Os dois novos métodos de enumeração englobam etapas de detecção de simetrias, de anexação de novos módulos e de teste de isomorfismo, como determinado no Algoritmo 1.

No primeiro método, a checagem das simetrias é feita com auxílio dos resultados que serão apresentados neste capítulo nas Proposições 7, 8, 9, 10, 11 e 13. Além disso, o teste de isomorfismo que será introduzido neste capítulo é comum aos dois métodos a serem propostos.

### 5.1 DETECÇÃO DAS SIMETRIAS DE UMA CONFIGURAÇÃO

Nesta seção será discutido quais simetrias pode apresentar uma configuração de um robô metamórfico planar cujos módulos são quadrados e como detectá-las. Ressalta-se que a detecção de simetrias constitui a primeira etapa do Algoritmo 1, ou seja, do processo de geração recursiva de configurações não isomorfas.

Primeiramente, tem-se que uma configuração de um robô metamórfico cujos módulos são quadrados pode estar envolta em um retângulo não quadrado, ou em um quadrado. Como mostram as Figuras 30a e 30b, respectivamente.

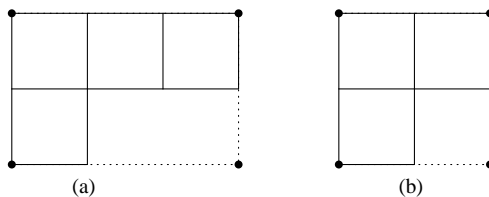


Figura 30: (a) Configuração envolta em um retângulo não quadrado; (b) Configuração envolta em um quadrado.

Deste ponto em diante, será convencionado que o termo retângulo refere-se apenas a retângulos não quadrados.

Uma configuração de um robô metamórfico cujos módulos são quadrados pode apresentar as simetrias do quadrado ou do retângulo que a contém,

dependendo da disposição dos módulos. Assim, o que segue é uma discussão de como detectar a presença de cada uma dessas simetrias. Mas, para tanto, deve-se associar à configuração um sistema de coordenadas cartesianas e uma representação matricial.

**Definição 17.** *Uma grade quadrada é a grade formada ao se ladrilhar (preencher da maneira justaposta) o plano com quadrados.*

Uma ilustração de uma grade quadrada é dada na Figura 31.

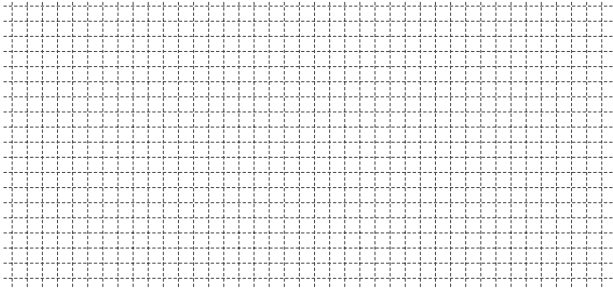


Figura 31: Uma grade quadrada.

**Definição 18.** *Seja  $\alpha$  uma configuração de um robô metamórfico planar de módulos quadrados e considere a grade quadrada formada ao se ladrilhar o plano com quadrados idênticos aos módulos do robô. Sejam  $m$  a quantidade de módulos na mais longa linha horizontal da grade preenchida por módulos do robô e  $n$  a quantidade de módulos na mais longa linha vertical preenchida por módulos do robô. Chama-se matriz  $ID$ ,  $ID_{m \times n}$ , a matriz associada à configuração  $\alpha$  do seguinte modo:*

- $i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}, j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$
- A posição  $0, 0$  é associada ao módulo mais à esquerda e mais acima na grade;

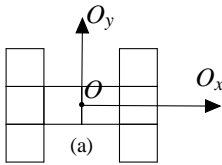
$$ID_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se há módulo na posição } i, j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para cada configuração de robô metamórfico de módulo quadrado é associado um sistema de coordenadas cartesianas conforme a Definição 19.



**Definição 19.** Dada uma configuração  $\alpha$  de um robô metamórfico de módulos quadrados associa-se um sistema de coordenadas do seguinte modo:

1. A origem do sistema de coordenadas deve coincidir com o centro geométrico do menor retângulo ou do quadrado que contiver a configuração;
2. O eixo  $O_x$  é paralelo a um dos pares de lados do retângulo ou quadrado envoltor e  $O_y$  é paralelo ao outro par de lados.



$$ID = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \quad (b)$$

Figura 32: (a) Uma configuração e o sistema de coordenadas a ela associado; (b) Matriz  $ID$  da configuração.

A Figura 32a ilustra a associação do sistema de coordenadas a uma configuração e a Figura 32b, a matriz  $ID$  desta configuração.

Porém, a associação do sistema de coordenadas na Definição 19 não se baseia na estrutura da matriz  $ID$  da configuração, e é esta matriz que será utilizada nos métodos de enumeração a serem propostos, assim, precisa-se extrair o sistema de coordenadas diretamente da matriz  $ID$ , o que é feito na Definição 20. Nela, os conceitos de  $L_{limite}$  e  $C_{limite}$  servem para destacar, respectivamente, a linha da matriz exatamente anterior ou sobre o eixo  $O_x$  e a coluna da matriz exatamente anterior ou sobre o eixo  $O_y$ .

Na Figura 33 tem-se que  $L_{limite}$  é a linha exatamente anterior ao eixo  $O_x$  e que  $C_{limite}$  é a coluna sobre o eixo  $O_y$ . Esta configuração foi escolhida por apresentar um número par de linhas e um número ímpar de colunas e assim, será útil para a compreensão da Definição 20.

Da Figura 33 tem-se também:

1. O número de **linhas** da matriz  $ID$  da configuração é **4** que é um **número par** de linhas e:

a)  $L_{limite} = 1 = \frac{4}{2} - 1$ ;

b)  $O_x$  passa entre as linhas  $1 = \frac{4}{2} - 1$  e  $2 = \frac{4}{2}$ .

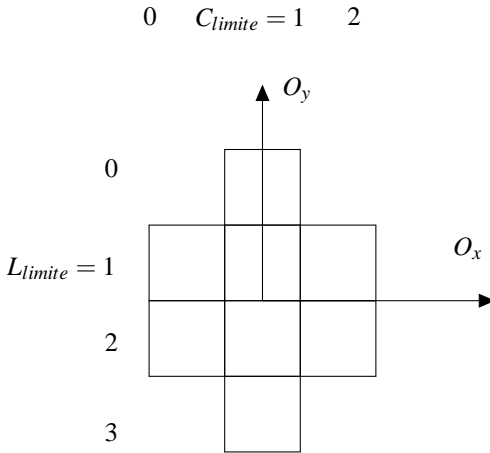


Figura 33: Uma configuração e as variáveis  $L_{limite}$  e  $C_{limite}$  a ela associadas.

2. O número de **colunas** da matriz  $ID$  da configuração é **3** que é um **número ímpar** de colunas e:

a)  $C_{limite} = 1 = \frac{3-1}{2}$ ;

b)  $O_y$  passa entre as linhas  $0 = \frac{3-1}{2} - 1$  e  $1 = \frac{3-1}{2}$ .

Esta maneira de associar um sistema de coordenadas a cada configuração dada pela sua matriz  $ID$  é estendida na Definição 20.

Lembre que estas definições são necessárias para que se determine como checar as simetrias de uma configuração, então, todas devem ser condizentes e aplicáveis com facilidade. Por isto, a necessidade de extrair o sistema de coordenadas diretamente da matriz  $ID$ .

**Definição 20.** Para cada configuração dada pela matriz  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0, \dots, l-1 \\ j=0, \dots, c-1}}$  é associado um sistema de coordenadas cartesianos. A cada linha e coluna da  $ID$  associa-se uma reta, então os eixos  $O_x$  e  $O_y$  são tomados paralelos às linhas e às colunas da matriz, respectivamente, do seguinte modo:

1. Se o número de linhas,  $l$ , for par,  $O_x$  passará entre as linhas  $\frac{l}{2} - 1$  e  $\frac{l}{2}$ , e  $L_{limite} = \frac{l}{2} - 1$ ;

2. Se  $l$  for ímpar  $O_x$  passará sobre a linha  $\frac{l-1}{2}$  e define-se  $L_{limite} = \frac{l-1}{2}$  ;
3. Se o número de colunas,  $c$ , for par  $O_y$  passará entre as colunas  $\frac{c}{2} - 1$  e  $\frac{c}{2}$  e  $C_{limite} = \frac{c}{2} - 1$ ;
4. Se  $c$  for ímpar  $O_y$  passará sobre a coluna  $\frac{c-1}{2}$  e  $C_{limite} = \frac{c-1}{2}$ .

Vale ressaltar que a Definição 20 é condizente com a Definição 19, pois para cada item da Definição 20,  $O_x$  e  $O_y$  estão no meio das linhas e colunas da ID, respectivamente, sendo, portanto, a origem do sistema definido também o centro geométrico do quadrado ou retângulo contentor.

Para o item 1 da Definição 20, pode-se mostrar que de fato  $O_x$  está situada no meio das linhas de ID como segue:

O número de linhas,  $l$ , da ID é par, logo não há uma linha que esteja no meio das outras. Mas como as linhas são numeradas de 0 à  $l - 1$ , os conjuntos  $\{0, 1, \dots, \frac{l}{2} - 1\}$  e  $\{\frac{l}{2}, \dots, l - 1\}$  tem ambos  $\frac{l}{2}$  elementos e são disjuntos, logo se  $O_x$  for alocado entre  $\frac{l}{2} - 1$  e  $\frac{l}{2}$  estará no meio das linhas da ID.

Para o item 2 da Definição 20, a linha  $\frac{l-1}{2}$  é a linha do meio na ID. Para os outros itens, o desenvolvimento é análogo.

As definições de  $L_{limite}$  e  $C_{limite}$  serão utilizadas posteriormente e ajudam a identificar as regiões do robô metamórfico de módulos quadrados nas quais devem-se anexar novos módulos após checadas as simetrias.

Tendo definido a matriz  $ID$  e o sistema de coordenadas para cada configuração, pode-se então discutir como detectar as simetrias de uma configuração para posteriormente proceder a anexação de novos módulos.

### 5.1.1 Simetrias das configurações envoltas em um retângulo

Dado um retângulo com centro geométrico coincidente com a origem do sistema cartesiano e cujos lados (de comprimentos distintos) são paralelos aos eixos coordenados, então grupo de simetrias deste retângulo tem quatro elementos: a identidade, as reflexões nos eixos  $O_x$  e  $O_y$  e a rotação de  $\pi$  radianos em torno da origem (igualmente a reflexão na origem), como ilustrado no Exemplo 10 do capítulo Noções de Álgebra. Assim, dada uma configuração de robô metamórfico com módulos quadrados cujo envoltório seja um retângulo, as simetrias citadas são as únicas que a configuração pode apresentar. Neste contexto, esta subseção discute como detectar a presença de cada uma destas simetrias para configurações envoltas em um retângulo.

### 5.1.1.1 Reflexão no eixo $O_x$ (Horizontal)

Seja a configuração do robô metamórfico dada na Figura 34, ela apresenta simetria em relação ao eixo  $O_x$ . Nela foram destacados os pares de pontos  $D$  e  $D'$ ,  $E$  e  $E'$ ,  $F$  e  $F'$ ,  $G$  e  $G'$ ,  $H$  e  $H'$ ,  $U$  e  $U'$ ,  $V$  e  $V'$ ,  $W$  e  $W'$  que são simétricos em relação ao eixo  $O_x$ .

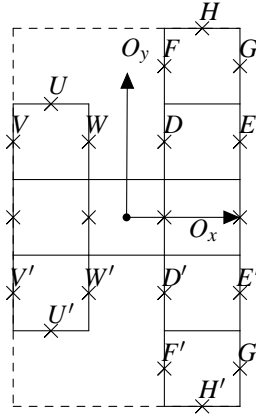


Figura 34: Configuração simétrica em relação à  $O_x$

**Proposição 7.** *Sejam  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0,\dots,l-1 \\ j=0,\dots,c-1}}$ ,  $L_{\text{limite}}$  como na Definição 20, a reflexão em  $O_x$  leva os elementos  $a_{ij}$  nos elementos  $a_{(l-i-1)j}$ .*

*Se, para todo  $i \in \{0, 1, \dots, L_{\text{limite}}\}$  e todo  $j \in \{0, 1, \dots, c-1\}$ ,*

$$a_{ij} = a_{(l-i-1)j} \quad (5.1)$$

*então a configuração apresenta simetria em relação à  $O_x$ .*

**Demonstração da Proposição 7.** *Considere uma configuração dada pela matriz  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0,\dots,l-1 \\ j=0,\dots,c-1}}$ , um elemento  $a_{ij}$  e seu refletido em  $O_x$ , denotado por  $a_{ml}$ , devem estar em uma perpendicular comum à  $O_x$ , ou seja, em uma mesma coluna da  $ID$ , assim,  $j = l$ .*

*Ressalta-se que como tanto para o número par de linhas, quanto para o ímpar, o eixo  $O_x$  foi definido passando no meio das linhas da  $ID$ ,  $O_x$  é aqui considerado na posição  $\frac{l-1}{2}$ .*

Os elementos  $a_{ij}$  e  $a_{ml}$  devem estar equidistantes de  $O_x$ . Como a distância entre  $O_x$  e a linha  $i$  é  $\frac{l-1}{2} - i$ , e a distância da linha  $m$  à  $O_x$  é  $\frac{l-1}{2} - m$ , tem-se  $\frac{l-1}{2} - i = \frac{l-1}{2} - m$  e assim,  $m = l - 1 - i$ . Logo, a reflexão em  $O_x$  leva cada elemento  $a_{ij}$  da  $ID$  no elemento  $a_{(l-i-1)j}$  e também, para que haja simetria horizontal  $a_{ij} = a_{(l-i-1)j}$ .  $\square$

### 5.1.1.2 Reflexão no eixo $O_y$ (Vertical)

A configuração do robô metamórfico dada na Figura 35 apresenta simetria em relação ao eixo  $O_y$ .

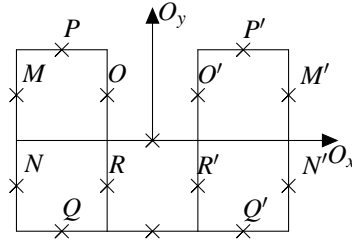


Figura 35: Configuração simétrica em relação à  $O_y$

**Proposição 8.** Sejam  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0,\dots,l-1 \\ j=0,\dots,c-1}}$  e  $C_{limite}$  como na Definição 20, a reflexão em  $O_y$  leva os elementos  $a_{ij}$  nos elementos  $a_{i(c-j-1)}$ .

Se, para todo  $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$  e todo  $j \in \{0, 1, \dots, C_{limite}\}$ ,

$$a_{ij} = a_{i(c-j-1)} \quad (5.2)$$

então a configuração apresenta simetria em relação à  $O_y$ .

**Demonstração da Proposição 8.** Análogo à proposição 7.  $\square$

### 5.1.1.3 Simetria em Rotacional de $\pi$ radianos

A configuração do robô metamórfico dada na Figura 36, apresenta simetria rotacional de  $\pi$  radianos em relação à origem.

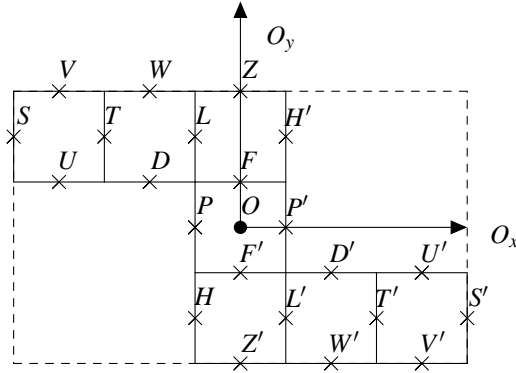


Figura 36: Configuração simétrica em relação à rotação de  $\pi$  radianos em torno da origem.

**Proposição 9.** Sejam  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0,\dots,l-1 \\ j=0,\dots,c-1}}$  a matriz  $ID$  de uma configuração dada e  $L_{limite}$ ,  $C_{limite}$  como na Definição 20, a rotação de  $\pi$  radianos em relação à origem no sentido anti-horário leva os elementos  $a_{ij}$  nos elementos  $a_{(l-i-1)(c-j-1)}$ .

Se, para todo  $i \in \{0, 1, \dots, L_{limite}\}$  e todo  $j \in \{0, 1, \dots, C_{limite}\}$ ,

$$a_{ij} = a_{(l-i-1)(c-j-1)} \quad (5.3)$$

então a configuração apresenta simetria em relação à rotação de  $\pi$  radianos em relação em torno da origem no sentido anti-horário.

**Demonstração da Proposição 9.** Segue das demonstrações anteriores, observando que rotacionar uma configuração de  $\pi$  radianos em relação à origem é equivalente a se aplicar à configuração uma reflexão em  $O_x$ , seguida de uma reflexão em  $O_y$ .  $\square$

### 5.1.2 Simetrias específicas das configurações envoltas em um quadrado

Como discutido no Exemplo 10, o quadrado cujo centro geométrico coincide com a origem do sistema cartesiano e cujos lados são paralelos aos eixos coordenados apresenta oito simetrias: a identidade, as reflexões nos eixos  $O_x$ ,  $O_y$  e nas diagonais do quadrado, bem como as rotações de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  radianos em torno da origem. O que segue é uma discussão de como detectar a presença destas simetrias nas configurações envoltas num quadrado.

A identidade é trivial. Já a detecção das simetrias de reflexão em  $O_x$  e  $O_y$ , bem como a rotação de  $\pi$  radianos foram abordadas na subseção 5.1.1. Falta discutir como identificar se uma configuração envolta em um quadrado apresenta as simetrias de reflexão nas duas diagonais do quadrado e as rotações de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  radianos em torno da origem.

#### 5.1.2.1 Simetria de Reflexão na Diagonal Principal

Observe a Figura 38, em que  $d_p$  é a diagonal principal do quadrado e os pares  $P, P'$ ,  $Q, Q'$ ,  $R, R'$ ,  $S, S'$  e  $T, T'$  são simétricos em relação à  $d_p$ .

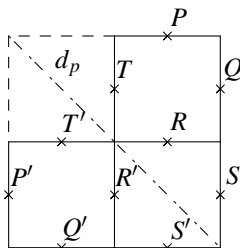


Figura 37: Configuração simétrica em relação à reflexão em  $d_p$ .

**Proposição 10.** *Seja  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0, \dots, l-1 \\ j=0, \dots, l-1}}$ , a reflexão na diagonal principal leva os elementos  $a_{ij}$  nos elementos  $a_{ji}$ .*

*Se, para todo  $i, j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ ,*

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (5.4)$$

*então a configuração apresenta simetria em relação à diagonal principal.*

**Demonstração da Proposição 10.** *A reflexão na diagonal principal é equivalente à operação de transposição para cada matriz  $ID$  dada.  $\square$*

5.1.2.2 Reflexão em Relação à Diagonal Secundária

Observe a Figura 37, em que  $d_s$  é a diagonal secundária do quadrado e os pares  $P, P', Q, Q', R, R', S, S'$  e  $T, T'$  são simétricos em relação à  $d_s$ .

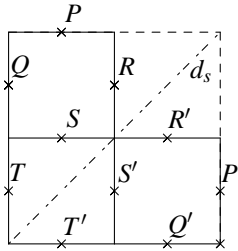


Figura 38: Configuração simétrica em relação à reflexão em  $d_s$ .

**Proposição 11.** *Seja  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0, \dots, l-1 \\ j=0, \dots, l-1}}$ , a reflexão na diagonal secundária leva os elementos  $a_{ij}$  nos elementos  $a_{(l-j-1)(l-i-1)}$ .  
Se, para todo  $i, j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ ,*

$$a_{ij} = a_{(l-j-1)(l-i-1)} \tag{5.5}$$

*então a configuração apresenta simetria em relação à diagonal secundária.*

**Demonstração da Proposição 11.** *Será demonstrada diretamente a igualdade referente à simetria. Note que uma configuração apresenta simetria em relação à diagonal secundária, se sua configuração reflexionada em  $O_y$  e, posteriormente, em  $O_x$  apresenta simetria em relação à diagonal principal. Seja  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0, \dots, l-1 \\ j=0, \dots, l-1}}$  uma matriz que represente uma configuração com simetria em relação à diagonal secundária, ao se aplicarem as reflexões citadas, os elementos na posição  $\{i, j\}$  são levados à posição  $\{(l-i-1)(l-j-1)\}$ . Como a matriz reflexionada apresenta simetria em relação à diagonal principal,  $a_{(l-i-1)(l-j-1)} = a_{ji}$ . Então,  $a_{ij} = a_{(l-j-1)(l-i-1)}$ .  $\square$*



### 5.1.2.3 Simetrias rotacionais de $\frac{\pi}{2}$ e de $\frac{3\pi}{2}$ radianos em relação à origem

Seguem na Figura 39 exemplos de configurações que apresentam simetria de rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos em relação à origem.

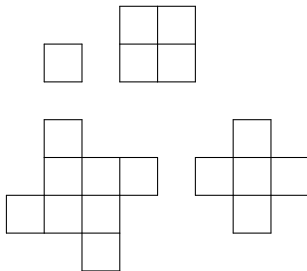


Figura 39: Configurações simétricas em relação às rotações de  $\frac{\pi}{2}$  e de  $\frac{3\pi}{2}$  radianos em torno da origem.

Para construir as transformações que levam uma matriz ID nas matrizes  $ID_{\frac{\pi}{2}}$  e  $ID_{\frac{3\pi}{2}}$  que representem as configurações rotacionadas de  $\frac{\pi}{2}$ , e  $\frac{3\pi}{2}$  radianos no sentido anti-horário em torno da origem, respectivamente, algumas considerações precisam ser feitas.

Primeiramente, necessita-se estabelecer como se determinar a imagem por uma rotação de um ponto no  $\mathbb{R}^2$ , o que é feito na Proposição 12.

**Proposição 12.** *A matriz que representa transformação de rotação por um ângulo  $\theta$  ao redor da origem para um ponto  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  por pré-multiplicação é dada por*

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

**Demonstração da Proposição 12.** *Não será demonstrada. A demonstração pode ser encontrada em [Boldrini et al. 1980].*

Deste modo, pela Proposição 12, tem-se:

1. A rotação de  $\frac{\pi}{2}$  leva um ponto  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  em  $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ .

$$\text{Pois, } \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\text{sen}(\frac{\pi}{2}) \\ \text{sen}(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$$

2. A rotação de  $\frac{3\pi}{2}$  leva um ponto  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  em  $\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ .

$$\text{Pois, } \begin{bmatrix} \cos(\frac{3\pi}{2}) & -\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) \\ \text{sen}(\frac{3\pi}{2}) & \cos(\frac{3\pi}{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}.$$

Seja  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0, \dots, l-1 \\ j=0, \dots, l-1}}$ , associe a cada elemento  $a_{ij}$  da  $ID$  o ponto de coordenadas  $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Ou seja, as linhas são associadas a coordenadas em  $O_x$  e as colunas a coordenadas em  $O_y$ .

A rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos na origem leva o ponto  $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$  no ponto de coordenadas  $\begin{bmatrix} -j \\ i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ .

Mas, o ponto  $\{-j, i\}$  é o simétrico em relação à  $O_x$  do ponto de coordenadas  $\{j, i\}$  como ilustra a Figura 40.

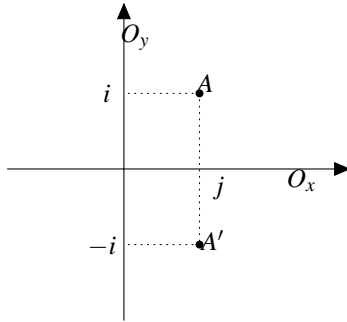


Figura 40: Ponto  $A$  de coordenadas  $\{j, i\}$  e seu simétrico em relação à  $O_x$ ,  $A'$ , de coordenadas  $\{j, -i\}$ .

Como, pela proposição 7, o simétrico em relação à  $O_x$  de  $\{j, i\}$  é  $\{(l-j-1), i\}$ , pela unicidade do simétrico em relação à  $O_x$ ,  $\{-j, i\} = \{(l-j-1), i\}$ .

Desta forma, a rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos na origem leva os elementos  $a_{ij}$  nos elementos  $a_{(l-j-1), i}$ . Por raciocínio análogo, mostra-se que a rotação de  $\frac{3\pi}{2}$  na origem leva  $a_{ij}$  em  $a_{j(l-i-1)}$ .

A discussão acima é resumida na proposição 13.

**Proposição 13.** *Seja  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0, \dots, l-1 \\ j=0, \dots, l-1}}$ , a rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos em relação à origem no sentido anti-horário leva os elementos  $a_{ij}$  nos elementos  $a_{(l-j-1), i}$ .*

para todo  $i, j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$  e a rotação de  $\frac{3\pi}{2}$  radianos em relação à origem no sentido anti-horário leva os elementos  $a_{ij}$  nos elementos  $a_{j(l-i-1)}$ .

Se, para todo  $i, j \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ ,

$$a_{ij} = a_{(l-j-1)i} \quad (5.6)$$

então a configuração apresenta simetria em relação à rotação de  $\frac{\pi}{2}$  e também a  $\frac{3\pi}{2}$  radianos em torno da origem no sentido anti-horário.

**Demonstração da Proposição 13.** Foi demonstrada na discussão que introduziu a proposição.  $\square$

A proposição 13 diz que se uma configuração apresenta simetria em relação a rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos em torno da origem no sentido anti-horário, ela também apresentará simetria em relação à rotação de  $\frac{3\pi}{2}$  nas mesmas condições. Isto porque, uma rotação de  $\frac{3\pi}{2}$  no sentido anti-horário corresponde a uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  no horário e se a rotação de  $\frac{\pi}{2}$  em um sentido deixa a configuração invariante, a rotação no sentido oposto pelo mesmo ângulo também a deixará.

O que segue são observações que serão particularmente úteis ao teste de isomorfismo a ser proposto:

- I) A rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos em relação à origem no sentido anti-horário pode ser vista como uma composição de reflexão em  $O_y$  e posterior transposição da matriz ou da transposição seguida de reflexão em  $O_x$ ;
- II) A rotação de  $\frac{3\pi}{2}$  radianos em relação à origem no sentido anti-horário pode ser vista como uma composição de reflexão em  $O_x$  e posterior transposição da matriz ou da transposição seguida de reflexão em  $O_y$ .

Tendo discutido como detectar as simetrias de uma configuração, deve-se anexar um novo módulo apenas a posições não simétricas entre si para se evitar a geração de configurações isomorfas no processo enumerativo. A próxima subseção versa sobre a etapa de anexação de novos módulos, constituindo a segunda etapa do Algoritmo 1.

## 5.2 ANEXAÇÃO DE NOVOS MÓDULOS

Para que novas configurações sejam geradas no processo de geração recursiva de configurações não isomorfas, os novos módulos devem ser anexados apenas a posições não simétricas entre si. Porém, uma configuração

pode apresentar mais de uma simetria, ou apresentar somente a simetria de identidade. Sendo que uma configuração que apresentar somente a simetria de identidade será considerada assimétrica.

Assim, deve-se considerar a ação de todo o grupo de simetrias do retângulo ou do quadrado que contém a configuração para depois definir-se onde deve ocorrer a anexação do novo módulo, o que será discutido nesta seção.

A configuração na Figura 41 apresenta apenas as simetrias de identidade e de reflexão em relação à  $O_y$ , sendo que os conjuntos de pontos que são simétricos entre si são  $S_P = \{P, P'\}$ ,  $S_Q = \{Q, Q'\}$ ,  $S_M = \{M, M'\}$ ,  $S_N = \{N, N'\}$ ,  $S_O = \{O, O'\}$ ,  $S_R = \{R, R'\}$ ,  $S_W = \{W, W'\}$ ,  $S_S = \{S\}$  e  $S_T = \{T\}$ .

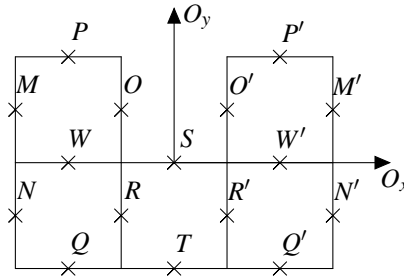


Figura 41: Exemplo de configuração simétrica em relação à  $O_y$ .

A anexação de um novo módulo deve ser feita a apenas um elemento de cada um dos conjuntos  $S_P, S_Q, S_R, S_W, S_S, S_T$ . Por exemplo, pode-se escolher os elementos  $P, Q, R, W, S, T$ . Porém, a determinação destes pontos pode ser executada de modo mais simples. O eixo  $O_y$  é um eixo vertical de reflexão, ou seja, todo ponto à direita de  $O_y$  terá um simétrico à esquerda de  $O_y$ , logo deve-se escolher somente pontos à direita ou à esquerda de  $O_y$  para anexação de novos módulos. No exemplo, os pontos  $P, Q, R, W, S, T$  estão todos à direita de  $O_y$ .

Logo, dada uma configuração, pode-se determinar uma região, que será chamada de região de colagem, na qual a anexação de um novo módulo será permitida, o tipo de região dependerá das simetrias da configuração.

Como observação, no exemplo dado pela Figura 41, os conjuntos  $S_P, S_Q, S_R, S_W, S_S, S_T$ , são as órbitas dos pontos  $P, Q, R, W, S, T$ , respectivamente, pela ação do grupo de simetrias da configuração. Por exemplo, seja  $S_P =$

$\{P, P'\}$ , o ponto  $P$  é levado em  $P$  pela identidade e é levado em  $P'$  pela reflexão em  $O_y$ . Além disso,  $P$  não é levado em nenhum outro ponto por uma simetria da configuração. Em outras palavras, os conjuntos de pontos simétricos entre si por alguma simetria da configuração são as órbitas pela ação do grupo de simetrias da configuração.

Para que não seja necessária a determinação das órbitas pela ação do grupo de simetrias da configuração, o que segue é a extensão do conceito de regiões de colagem para cada uma das possíveis simetrias que uma configuração possa apresentar.

### 5.2.1 As regiões de colagem

Para melhor definir as regiões de colagem, será utilizada a estrutura da matriz  $ID$  da configuração e os conceitos de linha limite,  $L_{limite}$ , e de coluna limite,  $C_{limite}$ , apresentados na Definição 20.

Seja  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0, \dots, l-1 \\ j=0, \dots, c-1}}$  tem-se que o conjunto  $\{0, 1, \dots, L_{limite}\}$  representa o conjunto das linhas acima ou sobre  $O_x$  e o conjunto  $\{0, 1, \dots, C_{limite}\}$  representa o conjunto das colunas à esquerda ou sobre  $O_y$ .

Além disso, se a configuração apresentar somente a simetria de reflexão em relação à  $O_x$ , os elementos  $a_{ij} \in ID$  com  $i \in \{0, 1, \dots, L_{limite}\}$  e  $j \in \{0, 1, \dots, c-1\}$  estão associados a posições não simétricas entre si.

De fato, observe a configuração dada na Figura 42, ela apresenta simetria somente em relação ao eixo  $O_x$ . Assim, todo módulo localizado acima de  $O_x$  apresenta um simétrico abaixo de  $O_x$ . Além disto, os elementos acima de  $O_x$  são aqueles que ocupam posições na matriz  $ID$  com linhas de  $\{0, 1 = L_{limite}\}$  e colunas quaisquer, ou seja, com colunas em  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

Assim, para a configuração na Figura 42 a anexação de novos módulos a posições não simétricas entre si pode ser executada como a anexação de novos módulos às posições com linhas em  $\{0, 1 = L_{limite}\}$  e colunas quaisquer, ou seja, com colunas em  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

Deste modo, conclui-se que se uma configuração apresenta simetria em relação à  $O_x$ , a variável  $L_{limite}$  auxilia na determinação das posições não simétricas.

O mesmo raciocínio pode ser feito para o conceito de  $C_{limite}$  e a presença de simetria em relação à  $O_y$ .

Na Figura 43 é dada uma configuração que apresenta simetria em relação a  $O_x$  e a  $O_y$ .

Como a configuração na Figura 43 apresenta simetria tanto em relação à  $O_x$  quanto em relação à  $O_y$ , devem-se anexar novos módulos:

- Somente acima ou somente abaixo de  $O_x$ ;

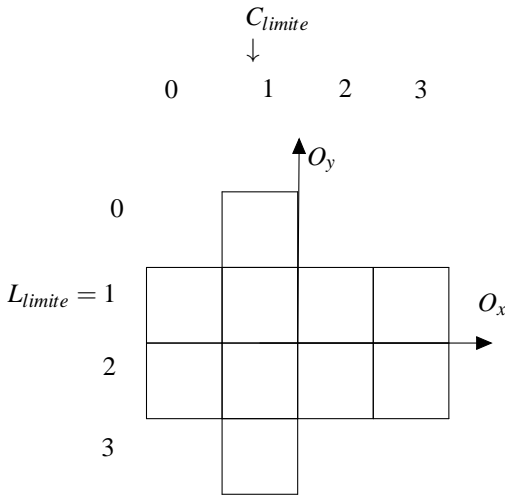


Figura 42: Configuração que apresenta somente simetria em relação ao eixo  $O_x$  e suas variáveis  $L_{limite}$  e  $C_{limite}$ .

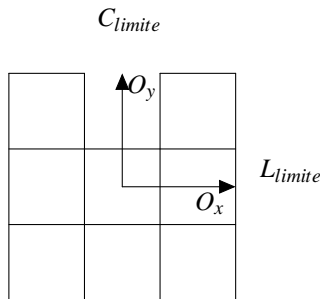


Figura 43: Uma configurações simétrica em relação à  $O_x$  e a  $O_y$  e as variáveis  $L_{limite}$  e  $C_{limite}$  a ela associadas.

- Somente à esquerda ou somente à direita de  $O_y$ .

Escolhendo-se anexar novos módulos acima de  $O_x$  e à esquerda de  $O_y$  determina-se uma região para anexação de novos módulos na configuração dada pela Figura 43. Esta região será denominada região de colagem para a

configuração.

As configuração obtidas após a anexação de um novo módulo na configuração da Figura 43 em todas as posições acima de  $O_x$ , ou seja, com linhas de 0 até  $L_{limite}$ , e à esquerda de  $O_y$ , ou seja, com colunas de 0 até  $C_{limite}$  são apresentadas na Figura 44.

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} & \text{(d)}
 \end{array}$$

Figura 44: Configurações geradas ao se anexar novos módulos a posições permitidas na região de colagem da configuração na Figura 39.

Assim, as variáveis  $L_{limite}$  e  $C_{limite}$  auxiliam na determinação das regiões de anexação de novos módulos, que foram determinadas regiões de colagem, para configurações que apresentam simetria em relação à  $O_x$  ou em relação à  $O_y$ .

Porém, uma configuração pode apresentar outras simetrias. Assim, o que segue é a extensão dos conceitos de  $L_{limite}$  e  $C_{limite}$  para estas simetrias.

Seja  $ID = [a_{ij}]_{\substack{i=0, \dots, J-1 \\ j=0, \dots, C-1}}$ . O Algoritmo 2 irá definir uma linha final, denotada por  $L_{final}$  e uma coluna final, denotada por  $C_{final}$  para anexação de novo módulo à configuração do robô metamórfico planar de acordo com a simetria que apresenta a configuração, constituindo-se assim a região de colagem de novos módulos como a região compreendida entre as linhas  $\{0, 1, \dots, L_{final}\}$  e colunas  $\{0, 1, \dots, C_{final}\}$  da  $ID$ .

As variáveis  $L_{final}$  e  $C_{final}$  para as simetrias de reflexão em  $O_x$ , e  $O_y$  coincidirão com as variáveis  $L_{limite}$  e  $C_{limite}$ , respectivamente. Para as outras simetrias que uma configuração pode apresentar tem-se:

1. Simetria em relação à diagonal principal: A diagonal principal passa sobre os pontos da  $ID$  com  $j = i$ , então  $C_{final} = i$ .

Na Figura 45, a configuração dada pela matriz  $ID_{dp}$  apresenta simetria em relação à diagonal principal. Além disto, os termos em negrito na matriz  $ID_{dp}$  constituem a região de colagem desta configuração.

2. Simetria em relação à diagonal secundária: o mesmo raciocínio do item 1, levando em consideração que para pontos sobre a diagonal secundária vale a igualdade  $j = c - i - 1$ . Assim,  $C_{final} = c - i - 1$ .

Na Figura 46, a configuração dada pela matriz  $ID_{ds}$  apresenta simetria

$$\begin{array}{rcccl}
 & \mathbf{0} & 0 & 1 & \rightarrow i = 0 \implies C_{final} = 0 \\
 ID_{dp} = & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & \rightarrow i = 1 \implies C_{final} = 1 \\
 & 1 & 1 & \mathbf{1} & \rightarrow i = 2 \implies C_{final} = 2
 \end{array}$$

Figura 45: Os termos em negrito na matriz  $ID_{dp}$  constituem a região de cola-gem desta configuração que é simétrica em relação à diagonal principal

em relação à diagonal secundária. Além disto, os termos em negrito na matriz  $ID_{ds}$  constituem a região de colagem desta configuração.

$$\begin{array}{rcccl}
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rightarrow i = 0 \implies C_{final} = 3 - 0 - 1 = 2 \\
 ID_{ds} = & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & \rightarrow i = 1 \implies C_{final} = 3 - 1 - 1 = 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & \rightarrow i = 2 \implies C_{final} = 3 - 2 - 1 = 0
 \end{array}$$

Figura 46: Os termos em negrito na matriz  $ID_{ds}$  constituem a região de cola-gem desta configuração que é simétrica em relação à diagonal secundária

3. Simetria rotacional de  $\frac{\pi}{2}$  radianos: a simetria de  $\frac{\pi}{2}$  divide a  $ID$  em quatro regiões simétricas. Logo, deve-se escolher uma a região equivalente a  $\frac{1}{4}$  da  $ID$ , ou seja, a metade das linhas, como na simetria em  $O_x$ , e a metade das colunas, como na simetria em  $O_y$ . Assim,  $L_{final} = L_{limite}$  e  $C_{final} = C_{limite}$ .

Por exemplo, seja a configuração dada por  $ID_{\frac{\pi}{2}} = \begin{array}{cc} \mathbf{1} & 1 \\ 1 & \mathbf{1} \end{array}$ .

O elemento 1 em negrito na matriz  $ID_{\frac{\pi}{2}}$  é o único elemento pertencente à região de colagem desta matriz.

De fato, a configuração dada por  $ID_{\frac{\pi}{2}}$  apresenta simetria rotacional de  $\frac{\pi}{2}$  radianos em relação à origem. Logo,  $L_{final} = L_{limite}$  e  $C_{final} = C_{limite}$ . Assim, como o número de linhas é 2 que é um número par, tem-se  $L_{limite} = \frac{2}{2} - 1 = 0$  e, portanto,  $L_{final} = 0$ . Também, como o número de colunas é 2 que é um número par, tem-se  $C_{limite} = \frac{2}{2} - 1 = 0$  e  $C_{final} = 0$ . E, deste modo, o único elemento da região de colagem é o elemento de posição  $\{0,0\}$  em  $ID_{\frac{\pi}{2}}$ , ou seja, o elemento 1 em negrito em  $ID_{\frac{\pi}{2}}$ .

4. Simetria rotacional de  $\pi$  radianos: deve-se escolher uma região equivalente a  $\frac{1}{2}$  da  $ID$ , no caso, todas as linhas e metade das colunas como na simetria em  $O_y$ . Ou seja,  $C_{final} = C_{limite}$ .

Por exemplo, seja a configuração dada por  $ID_{\pi} = \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}$ .



Os elementos em negrito na matriz  $ID_\pi$  são os únicos elementos pertencentes à região de colagem desta matriz.

De fato, a configuração dada por  $ID_\pi$  apresenta simetria rotacional de  $\pi$  radianos em relação à origem. Logo,  $C_{final} = C_{limite}$ . Também, como o número de colunas é 3 que é um número ímpar, tem-se  $C_{limite} = \frac{3-1}{2} = 1$  e  $C_{final} = 1$ . E, deste modo, os únicos elementos da região de colagem são os elementos de posição  $\{0,0\}$ ,  $\{0,1\}$ ,  $\{1,0\}$  e  $\{1,1\}$  em  $ID_\pi$ , ou seja, os elementos em negrito.

---

**Algoritmo 2:** Linhas e colunas finais
 

---

**ENTRADA:**  $ID_{m \times n}$

**SAIDA:**  $L_{final}$  e  $C_{final}$

**if**  $ID$  apresenta somente a simetria de reflexão em relação à  $O_x$  **then**

**if** O número de linhas,  $l$ , for par **then**

$$L_{final} = L_{limite} = \frac{l}{2} - 1 \text{ e } C_{final} = c - 1$$

**else**

$$L_{final} = L_{limite} = \frac{l-1}{2} \text{ e } C_{final} = c - 1$$

**end if**

**end if**

**if**  $ID$  apresenta somente a simetria de reflexão em relação à  $O_y$  **then**

**if** O número de colunas,  $c$ , for par **then**

$$C_{final} = C_{limite} = \frac{c}{2} - 1 \text{ e } L_{final} = l - 1$$

**else**

$$C_{final} = C_{limite} = \frac{c-1}{2} \text{ e } L_{final} = l - 1$$

**end if**

**end if**

**if**  $ID$  apresenta somente a simetria de reflexão em relação à diagonal principal **then**

$L_{final} = l - 1$  e  $C_{final}$  é definido para cada linha  $i$  da  $ID$ , sendo

$$C_{final} = i.$$

**end if**

**if**  $ID$  apresenta somente a simetria de reflexão em relação à diagonal secundária **then**

$L_{final} = l - 1$  e  $C_{final}$  é definido para cada linha  $i$  da  $ID$ , sendo

$$C_{final} = c - i - 1.$$

**end if**

**if**  $ID$  apresenta somente a simetria rotacional de  $\pi$  radianos em relação à origem **then**

$L_{final} = l - 1$  e  $C_{final}$  coincide com o caso da simetria em relação à  $O_y$ .

**end if**

**if** Nenhum dos casos anteriores ocorrerem **then**

$L_{final}$  será a menor dentre as determinadas para cada simetria, bem como  $C_{final}$ .

**end if**

---

### 5.2.2 Anexação de novos módulo nas regiões de colagem

Tendo discutido como determinar as regiões de colagem de novos módulos em uma dada configuração, pode-se passar à etapa de anexação de novos módulos do Algoritmo 1, algoritmo que fornece as etapas comuns dos métodos de enumeração a serem propostos.

Primeiramente, deve-se considerar que a anexação de um novo módulo a uma configuração pode gerar aumento da dimensão da matriz  $ID$  gerada em relação a dimensão da  $ID$  original, ou pode ocorrer a substituição de um 0 da  $ID$  original por um 1 que representa o novo módulo e assim, a matriz  $ID$  gerada apresentará a mesma dimensão da  $ID$  original.

Seja a configuração na Figura 47a e sua matriz  $ID$  na Figura 47b. A configuração na Figura 47c é obtida da configuração na Figura 47a pelo acréscimo de um novo módulo acima do módulo na posição  $\{0, 1\}$ . A matriz  $ID$  da configuração assim obtida é dada na Figura 47d.

Como o elemento no qual se anexou o novo módulo encontra-se na primeira linha da  $ID_{original}$ , é necessário acrescentar-se uma linha acima das existentes para alocar o novo módulo.

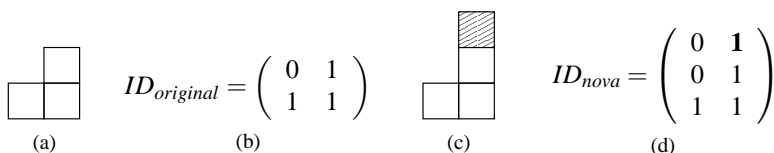


Figura 47: A configuração em (c) foi obtida da configuração em (a), pelo acréscimo de um módulo. Note que houve aumento da dimensão da matriz obtida, (d), em relação à original, (b).

A configuração na Figura 48c, cuja  $ID$  é a  $ID_{nova}$  na Figura 48d, foi obtida ao anexar-se um novo módulo à posição  $\{0,0\}$  da configuração na Figura 48a, ou seja, na  $ID_{original}$ . O elemento adicionado à  $ID_{original}$  é o elemento 1 em negrito na  $ID_{nova}$ . Como previamente havia um 0 na posição  $\{0,0\}$  da  $ID_{original}$ , não há necessidade de se aumentar a dimensão da  $ID_{original}$  para se obter a  $ID_{nova}$ .

Porém, nem todos os zeros na região de colagem podem ser substituídos por 1 para gerar novas configurações pela anexação de um módulo. Observe a Figura 49. Nela, ocorre a anexação de um novo módulo à configuração na Figura 49b, que tem por matriz  $ID$  a  $ID_{original}$ , sendo obtida assim, a configuração na Figura 49d, que tem por matriz  $ID$  a  $ID_{nova}$ . Porém,  $ID_{nova}$  não é uma configuração válida, pois nela há um módulo que não está ligado a

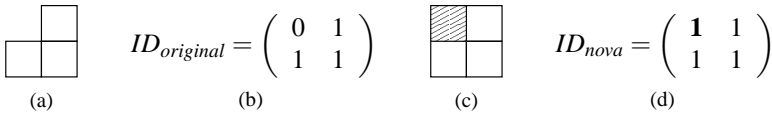


Figura 48: Matrizes de dimensões iguais. A matriz em (d) representa a configuração em (c) e foi obtida, pelo acréscimo de um novo módulo, da matriz em (b), que representa a configuração em (a).

nenhum outro módulo, o elemento 1 em negrito na  $ID_{nova}$ , ou seja, o elemento hachurado na Figura 49d .

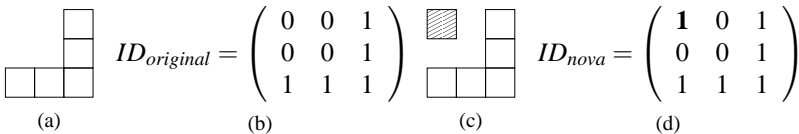


Figura 49: O acréscimo de um módulo na  $ID_{original}$ , que representa a configuração em (a), gera a configuração não válida  $ID_{nova}$ . Ou seja, a configuração em (c) não é válida.

Uma outra ressalva é o que ocorre na situação descrita a seguir. A Figura 50a ilustra uma configuração e sua matriz  $ID$ , esta configuração apresenta simetria em relação à diagonal principal, a ela é acrescentado um novo módulo acima do elemento na posição  $\{0,0\}$ , o que é apresentado na Figura 50b. Porém, se o módulo fosse alocado à esquerda do módulo na posição  $\{0,0\}$  a mesma configuração seria obtida, como mostra a Figura 50c, isto porque, as posições nas quais o novo módulo foi anexado em cada caso são simétricas em relação à diagonal principal.

Desta forma, para evitar geração de configurações isomorfas, se uma configuração apresentar simetria em relação à diagonal principal deve-se optar por acrescentar um módulo acima ou à esquerda do módulo na posição  $\{0,0\}$ . O Algoritmo 3 opta por acrescentá-lo à esquerda.

Por uma análise semelhante, se uma configuração apresentar simetria em relação à diagonal secundária, deve-se optar por acrescentar um novo módulo abaixo ou à direita do último módulo na diagonal secundária. O Algoritmo 3 opta por acrescentá-lo à direita.

Assim, ao se acrescentarem novos módulos a módulos na primeira ou na última linha ou coluna da  $ID$  poderá haver aumento na dimensão da  $ID$  gerada em relação à  $ID$  original. Além disso, ao se acrescentarem módulos a

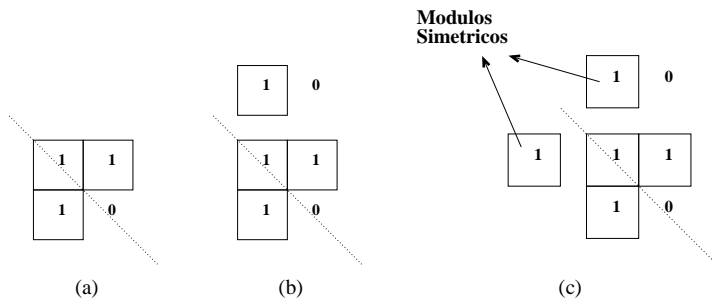


Figura 50: Geração de configurações isomorfas pela anexação de novos módulos a posições simétricas em relação à diagonal principal do quadrado.

posições previamente ocupadas por 0 na  $ID$  nem sempre há geração de uma configuração válida, para se evitar tal fato, o novo módulo deve estar ligado a um pré-existente.

Esta discussão é resumida no Algoritmo 3. Nele, dada  $ID_{l \times c}$  o acréscimo de um novo módulo, gerando um nova matriz  $ID$ , denotada por  $ID_{nova}$ , é feito para cada uma das posições possíveis da região de colagem da  $ID$  original, ou seja, para as posições da  $ID$  original com  $i \in \{0, \dots, L_{final}\}$  e  $j \in \{0, \dots, C_{final}\}$ .

---

**Algoritmo 3:** Geração das configurações com  $n + 1$  módulos
 

---

**ENTRADA:**  $ID_{l \times c}$  que representa uma configuração com  $n$  módulos.

**SAIDA** Matrizes  $ID_{nova}$  que representam configurações com  $n + 1$  módulos.

**if**  $ID_{ij} = 1$  **then**

**if**  $i = 0$ , exceto para configurações com simetria em relação à diagonal principal. **then**

Uma  $ID_{nova}$  é obtida da  $ID$  pelo acréscimo de uma nova linha acima das existentes, mantendo-se o número de colunas da  $ID$  original, sendo que o elemento da nova linha cuja coluna é  $j$  será 1 e os outros 0.

**end if**

**if**  $i = l - 1$ , exceto para configurações com simetria em relação à diagonal secundária. **then**

Uma  $ID$  nova é obtida da  $ID$  original pelo acréscimo de uma nova linha abaixo das existentes, mantendo-se o número de colunas da  $ID$  original, sendo que o elemento da nova linha cuja coluna é  $j$  será 1 e os outros 0.

**end if**

**if**  $j = 0$  **then**

Uma  $ID$  nova é obtida da  $ID$  original pelo acréscimo de uma nova coluna à esquerda das existentes, mantendo-se o número de linhas da  $ID$  original, sendo que o elemento da nova coluna cuja linha é  $i$  será 1 e os outros 0.

**end if**

**if**  $j = c - 1$  **then**

Uma  $ID$  nova é obtida da  $ID$  original pelo acréscimo de uma nova coluna à direita das existentes, mantendo-se o número de linhas da  $ID$  original, sendo que o elemento da nova coluna cuja linha é  $i$  será 1 e os outros 0.

**end if**

**if**  $ID_{i-1,j} = 0$ ,  $ID_{i+1,j} = 0$ ,  $ID_{i,j-1} = 0$ , ou  $ID_{i,j+1} = 0$ . **then**

Uma  $ID$  nova é obtida ao substituir cada um destes elementos 0 por 1, mas, sem que sejam ultrapassadas a linha e a coluna finais para colagem.

**end if**

**end if**

---

Até este ponto, apresentaram-se somente resultados relativos à detecção das simetrias de uma dada configuração e ao acréscimo de novos módulos. Porém, dois novos resultados contribuem para a diminuição da quantidade de configurações isomorfas geradas no processo de geração recursiva. Estes resultados são apresentados pelos Teoremas 2 e 3 que são contribuições desta dissertação.

### 5.3 NOVOS TEOREMAS SOBRE A GERAÇÃO RECURSIVA

Nesta seção serão introduzidos dois novos teoremas que ajudam a diminuir a quantidade de configurações isomorfas geradas no processo recursivo, além de estabelecerem casos em que a checagem de simetrias é desnecessária. O primeiro deles é dado a seguir.

**Teorema 2.** *Na geração recursiva de configurações não isomorfas, para um número de módulos  $n$  maior ou igual a três, tem-se:*

- i) *Todas as configurações com  $n + 1$  módulos em que há algum módulo desalinhado podem ser obtidas de alguma configuração de  $n$  módulos em que há algum desalinhado;*
- ii) *Pode-se considerar a configuração com  $n$  módulos alinhados,  $n \geq 3$ , como geradora apenas das configurações com  $n + 1$  módulos alinhados, sem perda de configurações na totalidade do processo recursivo.*

**Demonstração do Teorema 2.** *A demonstração será feita por indução sobre o número de módulos  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 3$ .*

*Para  $n = 3$  as hipóteses são válidas. De fato, as duas únicas configurações não isomorfas com três módulos são  $ID_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  e  $ID_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Além disso, ao se anexar um novo módulo à  $ID_1$  são obtidas as configurações  $ID_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $ID_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $ID_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Por outro lado, ao se acrescentar um novo módulo à  $ID_2$  são obtidas as configurações em  $ID_{12}$ ,  $ID_{13}$ , além das configurações em  $ID_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  e em  $ID_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .*

*Logo, todas as configurações com quatro módulos em que há algum desalinhamento, podem ser obtidas de  $ID_2$  que é uma configuração com três módulos em que há um módulo desalinhado. Também, pode-se considerar*

$ID_1$  (configuração alinhada) como geradora apenas de  $ID_{11}$  (que também é uma configuração alinhada), uma vez que  $ID_{12}$  e  $ID_{13}$  são geradas de  $ID_2$ . Portanto, para  $n = 3$ , as hipóteses são válidas.

Deste ponto em diante, as afirmações em i e ii serão tratadas conjuntamente.

*Hipótese de indução:* suponha que para um número  $n = k \in \mathbb{N}^*$  e  $n > 3$ , de módulos não há perda de configurações ao se considerar a configuração com  $k$  módulos alinhados como geradora apenas da configuração com  $k + 1$  módulos alinhados. Ou que todas as configurações com  $k + 1$  módulos em que há algum módulo desalinhado provém no processo recursivo de configurações com  $k$  módulos em que há algum módulo desalinhado. Assim, pode-se considerar a configuração com  $k$  módulos alinhados como geradora apenas das configurações com  $k + 1$  módulos alinhados sem perda de configurações.

Será demonstrado que a hipótese é válida para  $k + 1$  módulos.

Seja  $ID_{L+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(n+1) \times 1}$  uma configuração com  $n + 1$  módulos alinhados. A anexação de um novo módulo à  $ID_L$  pode gerar configurações com  $n + 2$  módulos alinhados,  $ID_{L+2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(n+2) \times 1}$ , ou configurações com um módulo desalinhado em relação aos demais como a configuração  $ID_{D+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(n+1) \times 2}$ .

Porém, a configuração  $ID_{D+1}$  pode ser obtida, por exemplo, de

$ID_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times 2}$ , sendo que  $ID_D$  é uma configuração

com  $n$  módulos alinhados e um desalinhado. Para se obter a configuração em  $ID_{D+1}$  de  $ID_D$  acrescentou-se um novo módulo depois de todos módulos alinhados na segunda linha. Procedimento semelhante pode ser usado para se obter qualquer configurações com  $n + 1$  módulos alinhados e um desalinhado de configurações com  $n$  módulos alinhados e um desalinhado. A única ressalva dá-se quando o desalinhamento ocorre acima do último módulo alinhado como em  $ID_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(n+1) \times 2}$ .

Para se obter a configuração em  $ID_S$  de uma configuração com  $n$  módulos alinhados e um desalinhado pode-se, por exemplo, acrescentar um novo módulo antes de todos módulos alinhados na segunda linha da configuração

$ID_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times 2}$ .

Assim, todas as configurações com  $k + 2$  em que há algum desalinhamento podem ser obtidas de alguma configuração com  $k + 1$  módulos em que há algum módulo desalinhado. Como a hipótese de indução garante que as configurações com  $k + 1$  módulos em que há algum módulo desalinhado fo-



ram geradas no processo enumerativo, elas podem gerar as configurações com  $k + 2$  módulos em que há algum módulo desalinhado. Portanto, não haverá perda de configurações ao se considerar a configuração com  $k + 1$  módulos alinhados como geradora da configuração com  $k + 2$  módulos alinhados. Tem-se assim, o resultado.

Este teorema contribui para a diminuição da geração de configurações isomorfas e também evita checagem desnecessária de simetrias. Por exemplo, a configuração  $ID_1 = (1 \ 1 \ 1)$  pode ser considerada no processo recursivo como geradora apenas de  $ID_2 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$ , não havendo necessidade de se checarem as simetrias de  $ID_1$ .

Um resultado semelhante ao do Teorema 2 é apresentado no Teorema 3, sendo que Teorema 3 versa sobre configurações que podem ser impedidas de gerar descendentes no processo recursivo sem perdas de configurações.

Por exemplo, na Figura 51, as configurações 1 e 2 geram pela anexação de novo módulo a configuração 3. Ou seja, no processo recursivo, a configuração 3 é gerada mais de uma vez, tanto da configuração 1 quanto da configuração 2.

Assim, para se evitar esta repetição, o Teorema 3 impedirá a configuração em 1 de gerar descendentes.

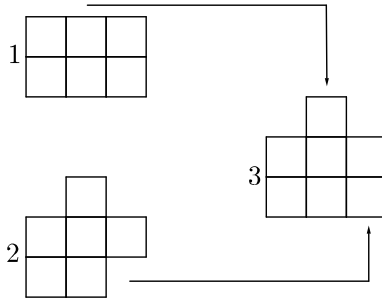


Figura 51: A configuração 3 é obtida pela anexação de um novo módulo das configurações 1 e 2.

Além disto, ressalta-se que a configuração 1 na Figura 51 tem por matriz  $ID$  a matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  cujos elementos são todos iguais a 1.

**Teorema 3.** Na geração recursiva de configurações não isomorfas não há perda de configurações ao se considerar as configurações com  $ID_{m,n}$ ,  $m, n >$

1, tais que  $ID_{i,j} = 1$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  e para todo  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , como impedidas de gerar novas configurações pela anexação de um módulo.

**Demonstração do Teorema 3.** Considere  $ID_S = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{m \times n}$  em que todos os elementos omitidos são iguais a 1, a anexação de um novo módulo pode ocorrer acima, abaixo, à esquerda ou à direita dos pré-existentes.

Considere  $ID_{S+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(m+1) \times n}$  em que todos os

elementos omitidos são iguais a 1, obtida de  $ID_S$  pela anexação de um módulo acima dos existentes. Tem-se que  $ID_{S+1}$  pode ser obtida, por exemplo,

de  $ID_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(m+1) \times n}$  em que todos os elementos omi-

tidos são iguais a 1, substituindo o 0 na última linha e coluna de  $ID_P$  por 1.

Se o novo módulo for acrescentado à direita, à esquerda, ou abaixo dos módulos em  $ID_S$ , podem-se fazer construções semelhantes para mostrar que a nova configuração pode ser obtida a partir de uma configuração distinta de  $ID_S$ . Logo, tem-se o resultado.

Assim como para o Teorema 2, o Teorema 3 será incorporada a técnica de geração recursiva de configurações não isomorfas para diminuir a quantidade de configurações geradas no processo, bem como para diminuir o número de configurações para o qual é necessária a checagem de simetrias.

Isto porque o Teorema 3 mostra que configurações como  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$  podem ser consideradas como não geradoras de descendentes, então para este tipo de configuração não haverá checagem de simetrias nem anexação de novos módulos.

O método de geração recursiva de configurações não isomorfas munido dos resultados dos Teoremas 2 e 3 é ilustrado na Figura 52.

Falta discutir como eliminar as configurações isomorfas remanescentes e que aparecem na Figura 52 em cinza. Para tanto será apresentado um teste de isomorfismo que também é contribuição deste trabalho.

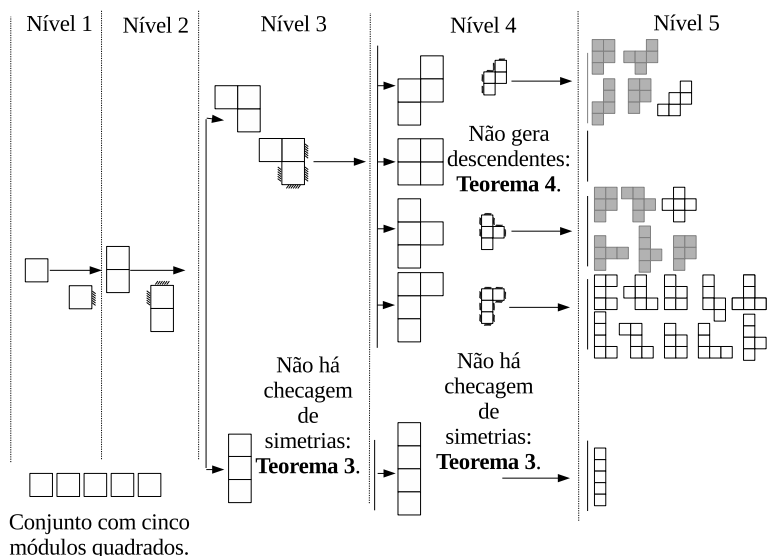


Figura 52: Geração recursiva de configurações não isomorfas conjuntamente com os Teoremas 2 e 3, sendo que as configurações em cinza são isomorfas a alguma outra configuração.

## 5.4 TESTE DE ISOMORFISMO

A última etapa prevista no Algoritmo 1, algoritmo que embasa as etapas comuns dos métodos de enumeração de configurações não isomorfas a serem propostos, é a etapa denominada teste de isomorfismo. Nesta etapa é efetuado um teste para eliminar as configurações isomorfas remanescentes do processo recursivo, visto que a Figura 52 evidencia que mesmo procedendo-se as etapas de checagem de simetria e introduzindo-se os resultados dos Teoremas 2 e 3, configurações isomorfas continuam sendo geradas no processo recursivo. Assim, esta seção introduz o teste de isomorfismo que foi arquitetado como uma série de três subtestes, sendo todos contribuições desta dissertação.

Primeiramente, tem-se que duas configurações de robôs metamórficos planares são isomorfas se existe uma simetria que leve uma na outra, ou seja, se é possível obter uma configuração da outra pela aplicação de uma simetria. Também, foi demonstrado que para robôs de módulos quadrados as possíveis

simetrias são a identidade, as rotações de  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  ou  $\frac{3\pi}{2}$  radianos e as reflexões em  $O_x$ , em  $O_y$ , na diagonal principal, ou na diagonal secundária. Assim, se duas configurações de robôs com módulos quadrados  $\alpha$  e  $\beta$  são isomorfas, então  $\alpha$  pode ser obtida de  $\beta$  pela aplicação de uma ou mais dessas simetrias à configuração  $\beta$  e vice-versa.

Logo, para que duas configurações de robôs cujos módulos são quadrados sejam isomorfas alguma das condições na Proposição 14 deve ocorrer.

**Proposição 14.** *Duas configurações  $\alpha$  e  $\beta$  de robôs metamorfos cujos módulos são quadrados são isomorfas, se, e somente se, para suas matrizes  $ID$ , denotadas por  $ID_\alpha$ ,  $ID_\beta$ , respectivamente, algum dos itens abaixo for satisfeito:*

1.  $ID_\alpha = ID_\beta$ ;
2.  $ID_\alpha^T = ID_\beta$ , em que  $ID_\alpha^T$  representa a matriz transposta de  $ID_\alpha$ ;
3.  $ID_\alpha$  representar a reflexão em  $O_x$  de  $ID_\beta$ ;
4.  $ID_\alpha$  representar a reflexão em  $O_y$  de  $ID_\beta$ ;
5.  $ID_\alpha$  representar a composição da reflexão em  $O_x$  com a reflexão em  $O_y$  de  $ID_\beta$ ,  
(rotação de  $\pi$  radianos em relação à origem);
6.  $ID_\alpha$  representar a composição das operações de transposição e reflexão em  $O_x$  de  $ID_\beta$ ,  
(rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos em relação à origem);
7.  $ID_\alpha$  representar a composição das operações de transposição e reflexão em  $O_y$  de  $ID_\beta$ , (rotação de  $\frac{3\pi}{2}$  radianos em relação à origem);
8.  $ID_\alpha$  representar a composição das operações de transposição, de reflexão em  $O_x$  e de reflexão em  $O_y$  de  $ID_\beta$ .

**Demonstração da Proposição 14.** *Todas as possíveis simetrias estão apresentadas.*

A Proposição 14 fornece regras para verificar se duas configurações são isomorfas através de operações em suas matrizes  $ID$ , o Exemplo 16 ilustra o uso destas regras para verificar se duas configurações são isomorfas.

**Exemplo 16.** *As configurações dadas pelas matrizes  $ID_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $ID_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  são isomorfas.*

De fato, ao se aplicar uma transposição à  $ID_1$ , obtém-se a configuração  $ID_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e ao se aplicar uma reflexão em  $O_y$  à  $ID_1^T$  obtém-se a configuração  $ID_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Como  $ID_V = ID_2$ , pelo item 7 da Proposição 14 as configurações em  $ID_1$  e  $ID_2$  são isomorfas. Vale ressaltar que o item 7 trata de casos em que uma configuração pode ser obtida da outra por uma rotação de ângulo  $\frac{3\pi}{2}$  ao redor da origem no sentido anti-horário, o que pode ser facilmente verificado para  $ID_1$  e  $ID_2$ .

A Proposição 14 foca-se na checagem das simetrias como composição das operações de reflexão em  $O_x$ , em  $O_y$  e de transposição para que se possa elaborar um algoritmo para efetuar o primeiro dos subtestes propostos, que será denominado teste comparativo.

Porém, antes de se introduzir o teste comparativo, considere duas configurações dadas pelas suas matrizes  $ID_1$  e  $ID_2$ , para que elas sejam isomorfas uma das oito condições da Proposição 14 deve ocorrer, que podem ser checadadas pelo processo descrito a seguir. Começa-se checando se  $ID_1 = ID_2$ , se não ocorrer a igualdade deve-se checar se  $ID_2$  representa a reflexão em  $O_x$  de  $ID_1$ , também, se esta igualdade não for verdadeira, checa-se a próxima e assim sucessivamente.

Um dos problemas desta abordagem é que ao se realizarem as operações de reflexão e transposição de uma matriz gera-se uma nova matriz e como o teste tem oito etapas a matriz original a priori não pode ser descartada e pode-se chegar a uma quantidade muito grande de matrizes armazenadas.

Mas, constituindo-se o teste comparativo como nos Algoritmos 4, 5 e 5 o problema do armazenamento de matrizes é contornado. Sendo que o Algoritmo 5 é a continuação do Algoritmo 4. Além disto, a separação do teste comparativo em dois algoritmos deve-se a problemas de tabulação.

Também, os comentários entre parênteses em cada item mostram que o Algoritmos 4 e 5 abrangem todas as condições da Proposição 14. Além disto, eles são arquitetados para que se possam aplicar operações sucessivas de reflexão e transposição sobre as matrizes no teste e também para que se possam descartar matrizes intermediárias.

O uso do teste comparativo é apresentado no Exemplo 17.

**Exemplo 17.** *Sejam as configurações dadas pelas matrizes  $ID_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*

*e  $ID_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  o teste comparativo prova que elas são não isomorfas.*

*De fato:*

1.  $ID_1 \neq ID_2$ ;

2. Tome  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_y$  de  $ID_2$ , então,  $ID_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Fazendo  $ID_2 = ID_2^1$ , tem-se  $ID_2 \neq ID_1$ ;

3. Tome  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_x$  de  $ID_2$ , então  $ID_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Fazendo  $ID_2 = ID_2^1$ , tem-se  $ID_2 \neq ID_1$ ;

4. Tome  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_y$  de  $ID_2$ , então  $ID_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Fazendo  $ID_2 = ID_2^1$ , tem-se  $ID_2 \neq ID_1$ ;

5. Tome  $ID_2^1$  a transposta de  $ID_2$ , então  $ID_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Fazendo  $ID_2 = ID_2^1$ , tem-se  $ID_2 \neq ID_1$ ;

6. Tome  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_x$  de  $ID_2$ , então  $ID_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Fazendo  $ID_2 = ID_2^1$ , tem-se  $ID_2 \neq ID_1$ ;

7. Tome  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_y$  de  $ID_2$ , então  $ID_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Fazendo  $ID_2 = ID_2^1$ , tem-se  $ID_2 \neq ID_1$ ;

8. Tome  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_x$  de  $ID_2$ , então  $ID_2^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Fazendo  $ID_2 = ID_2^1$ , tem-se  $ID_2 \neq ID_1$ .

*Como todos os itens foram refutados, as matrizes são não isomorfas e o teste é considerado falso.*

---

**Algoritmo 4:** Teste Comparativo (parte 1)
 

---

Verifique se  $ID_1 = ID_2$ .

**if** A igualdade for verdadeira **then**

As matrizes são isomorfas e o teste é findado.

**else**

Continue as verificações.

**end if**

(Verificação se a  $ID_2$  original é uma reflexão em  $O_y$  de  $ID_1$ )

1. Denomine  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_y$  de  $ID_2$ ;

2. Faça  $ID_2 = ID_2^1$  e descarte  $ID_2^1$ ;

3. Verifique se  $ID_1 = ID_2$ .

**if** A igualdade for verdadeira **then**

As matrizes são isomorfas e o teste é findado.

**else**

Continue as verificações.

**end if**

(Verificação se a  $ID_2$  original é uma reflexão em  $O_x$  e  $O_y$  de  $ID_1$ )

1. Denomine  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_x$  de  $ID_2$ ;

2. Faça  $ID_2 = ID_2^1$  e descarte  $ID_2^1$ ;

3. Verifique se  $ID_1 = ID_2$ .

**if** A igualdade for verdadeira **then**

As matrizes são isomorfas e o teste é findado.

**else**

Continue as verificações.

**end if**

(Verificação se a  $ID_2$  original é uma reflexão em  $O_x$  de  $ID_1$ )

1. Denomine  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_y$  de  $ID_2$ ;

2. Faça  $ID_2 = ID_2^1$  e descarte  $ID_2^1$ ;

3. Verifique se  $ID_1 = ID_2$ .

**if** A igualdade for verdadeira **then**

As matrizes são isomorfas e o teste é findado.

**else**

Continue as verificações.

**end if**

---

---

**Algoritmo 5:** Teste Comparativo (parte 2, continuação do Algoritmo 4)
 

---

(Verificação se a  $ID_2$  original é uma reflexão em  $O_x$  composta com a operação de transposição de  $ID_1$ )

1. Denomine  $ID_2^1$  a transposta de  $ID_2$ ;
2. Faça  $ID_2 = ID_2^1$  e descarte  $ID_2^1$ ;
3. Verifique se  $ID_1 = ID_2$ .

**if** A igualdade for verdadeira **then**

As matrizes são isomorfas e o teste é findado.

**else**

Continue as verificações.

**end if**

(Verificação se a  $ID_2$  é a matriz transposta de  $ID_1$ )

1. Denomine  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_x$  de  $ID_2$ ;
2. Faça  $ID_2 = ID_2^1$  e descarte  $ID_2^1$ ;
3. Verifique se  $ID_1 = ID_2$ .

**if** A igualdade for verdadeira **then**

As matrizes são isomorfas e o teste é findado.

**else**

Continue as verificações.

**end if**

(Verificação se a  $ID_2$  original é uma reflexão em  $O_y$  composta com a operação de transposição de  $ID_1$ )

1. Denomine  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_y$  de  $ID_2$ ;
2. Faça  $ID_2 = ID_2^1$  e descarte  $ID_2^1$ ;
3. Verifique se  $ID_1 = ID_2$ .

**if** A igualdade for verdadeira **then**

As matrizes são isomorfas e o teste é findado.

**else**

Continue as verificações.

**end if**

(Verificação se a  $ID_2$  original é uma reflexão em  $O_y$  composta com uma reflexão em  $O_x$  e com a operação de transposição de  $ID_1$ )

1. Denomine  $ID_2^1$  a reflexão em  $O_x$  de  $ID_2$ ;
2. Faça  $ID_2 = ID_2^1$  e descarte  $ID_2^1$ ;
3. Verifique se  $ID_1 = ID_2$ .

**if** A igualdade for verdadeira **then**

As matrizes são isomorfas e o teste é findado.

**else**

Continue as verificações.

**end if**

---



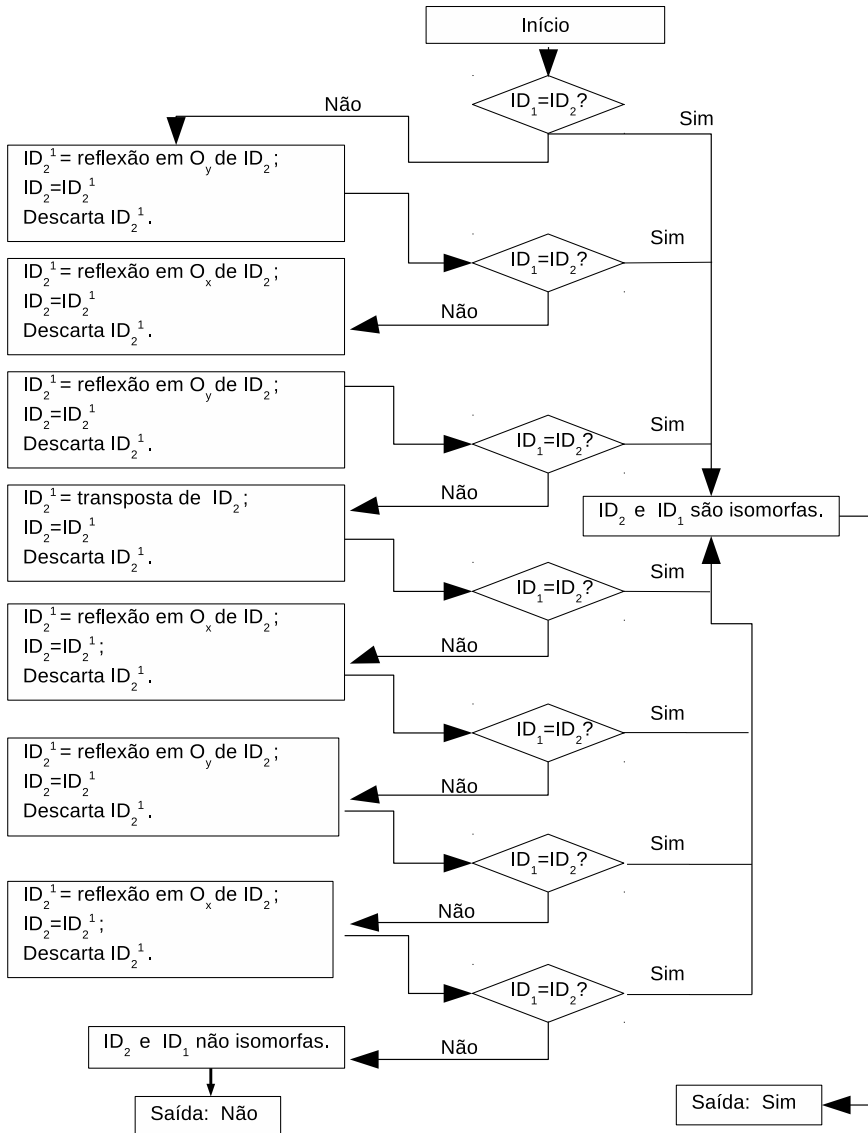


Figura 53: Teste comparativo

O teste comparativo, Algoritmos 4 e 5 é resumido no diagrama de blocos da Figura 53.

Porém, apenas com as ferramentas do teste comparativo, para mostrar que as configurações em  $ID_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $ID_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  são não isomor-

fas precisa-se percorrer os oito etapas. Porém, há maneiras mais diretas de mostrar que as configurações em  $D_1^T$  e  $ID_l$  são não isomorfas. Por exemplo, em  $ID_1^T$  há um módulo ligado a três outros módulos, o que não ocorre em  $ID_l$ , assim uma função que leve  $ID_1^T$  em  $ID_l$  tem que alterar às distâncias relativas entre os módulos, não sendo, portanto, uma simetria, o que prova que as configurações são não isomorfas.

Neste contexto, as Proposições 15 e 16 apresentam casos em que duas configurações podem ser consideradas diretamente como não isomorfas.

**Proposição 15.** *Sejam  $ID_{m \times n}^1$  e  $ID_{l \times k}^2$  matrizes ID de duas configurações para robôs metamórficos cujos módulos são quadrados, se nenhuma das duas condições abaixo for válida, então as configurações são não isomorfas. São elas:*

$$i) m = l \text{ e } n = k;$$

$$ii) m = k \text{ e } n = l.$$

**Demonstração da Proposição 15.** *As simetrias de reflexão em  $O_x$ ,  $O_y$ , e a rotação de  $\pi$  radianos não alteram a dimensão da ID, ou seja, se  $ID^1$  e  $ID^2$  diferirem apenas por alguma destas simetrias, então  $m = l$  e  $n = k$ . No caso de  $ID^1$  e  $ID^2$  diferirem por simetrias de reflexão nas diagonais ou da rotação de  $\frac{\pi}{2}$  radianos, irá ocorrer que  $m = k$  e  $n = l$ . Pois, a simetria de reflexão na diagonal principal opera como a transposição na ID e as outras operam como a composição da transposição com outra simetria que não altera a dimensão da ID. Assim, se nenhum dos casos ocorrer é porque uma configuração não pode ser obtida da outra por uma simetria, logo não são isomorfas.*

**Exemplo 18.** *As configurações em  $ID^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $ID^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  são*

*não isomorfas pela Proposição 15, pois  $ID_{2 \times 2}^1$  e  $ID_{4 \times 1}^2$ .*

O Algoritmo 6 apresenta o teste denominado teste de dimensão, que engloba o caso no qual pode-se considerar duas configurações como não isomorfas pela Proposição 15.

---

**Algoritmo 6:** Teste da dimensão
 

---

**ENTRADA:**  $ID_{m \times n}^1$  e  $ID_{l \times k}^2$   
**if**  $m = l$  e  $n = k$  **then**  
     o teste é verdadeiro;  
**if**  $m = k$  e  $n = l$  **then**  
     o teste é verdadeiro;  
**else**  
     As configurações são não isomorfas e o teste é considerado falso.  
**end if**  
**end if**

---

Para o Exemplo 18, o teste de dimensão é considerado falso e assim, as configurações são não isomorfas.

A Proposição 16, versa sobre as vizinhanças dos módulos, por exemplo, se em uma configuração há um módulo ligado a três outros módulos e na outra não há, então, certamente as configurações são não isomorfas. Pois, como já dito, o isomorfismo preserva a relação de vizinhança.

**Proposição 16.** *Sejam  $ID_{m \times n}^1$  e  $ID_{l \times k}^2$  duas configurações para robôs metamórficos cujos módulos são quadrados, para que  $ID^1$  e  $ID^2$  sejam isomorfas, se existe um módulo em  $ID^1$  ligado a  $n$  outros, isto também deve ocorrer para  $ID^2$  e vice-versa.*

**Demonstração da Proposição 16.** *Se a hipótese não ocorrer a relação de vizinhança não é mantida e as distâncias relativas entre os pontos são alteradas. Logo, não há simetria que leve uma configuração na outra.*

Baseado na Proposição 16, define-se o teste denominado teste de vizinhança, Algoritmo 7.

---

**Algoritmo 7:** Teste de Vizinhança
 

---

**ENTRADA:**  $ID_{m \times n}^1$  e  $ID_{l \times k}^2$   
**if** Existe um módulo em  $ID^1$  ligado a  $n$  outros e isto não ocorre para  $ID^2$   
**then**  
     O teste é considerado falso e as configurações são não isomorfas.  
**else**  
     O teste é considerado verdadeiro.  
**end if**

---

**Exemplo 19.** As configurações em  $ID^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $ID^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  são

não isomorfas pelo Algoritmo 7, pois em  $ID^1$  há um módulo ligado a três outros e para  $ID^2$  os módulos estão ligados a no máximo dois outros e o teste de vizinhança é verdadeiro.

Baseado nos testes de dimensão, vizinhança e comparativo pode-se elaborar um teste geral para verificar se duas configurações são isomorfas, que será denominado teste de isomorfismo, Algoritmo 8.

---

**Algoritmo 8:** Teste de Isomorfismo

---

**ENTRADA:**  $ID^1_{m \times n}$  e  $ID^2_{l \times k}$

Efetue o teste da dimensão

**if** Se o teste da dimensão for falso **then**

1. As configurações são não isomorfas.
2. Fim do Teste de Isomorfismo.

**else**

Efetue o teste de vizinhança

**end if**

**if** Se o teste da vizinhança for falso **then**

1. As configurações são não isomorfas.
2. Fim do Teste de Isomorfismo.

**else**

Efetue o teste da comparação

**end if**

**if** Se o teste da comparação for falso **then**

1. As configurações são não isomorfas.
2. Fim do Teste de Isomorfismo.

**else**

1. As configurações são isomorfas.
2. Fim do Teste de Isomorfismo.

**end if**

---

**Exemplo 20.** Sejam as configurações dadas pelas matrizes  $ID^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e  $ID^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  irá aplicar-se o teste de isomorfismo para elas.

1. *Teste da dimensão:  $ID_{2 \times 3}^1$  e  $ID_{3 \times 2}^2$ , teste verdadeiro. Continua-se o teste de isomorfismo.*
2. *Teste da Comparação:  $ID^2$  apresenta um módulo ligado a três outros, o que não ocorre para  $ID^1$ , teste falso. Logo, as configurações são não isomorfas e o teste de isomorfismo é findado.*

O teste de isomorfismo foi arquitetado para se efetuarem primeiro os subtestes em que seja necessária uma quantidade menor de operações. Um diagrama de blocos deste teste é apresentado na Figura 54.

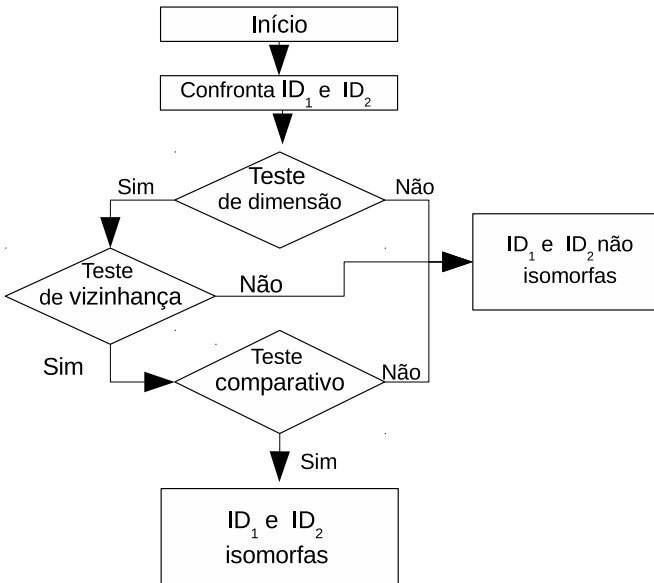


Figura 54: Teste de Isomorfismo

Tendo definido como detectar as simetrias de uma configuração, como efetuar a anexação de novos módulos, bem como os resultados dos Teoremas 2 e 3, além do teste de isomorfismo pode-se por fim apresentar o primeiro novo método de geração recursiva de configurações não isomorfas que será denominado Método das Simetrias.

## 5.5 ALGORITMO DO MÉTODO DAS SIMETRIAS

O primeiro novo método de enumeração de configurações não isomorfas para robôs metamórficos de módulos quadrados será denominado Método das Simetrias, ele abrange os resultados dos Teoremas 2 e 3, e segue as etapas gerais propostas no Algoritmo 1, sendo que:

1. A etapa de checagem de simetrias de uma configuração baseia-se nas Proposições 7, 8, 9, 10, 11 e 13.
2. A anexação de novos módulos dá-se segundo o Algoritmo 3;
3. Para verificar se duas configurações são isomorfas procede-se segundo o Algoritmo 8.

Nesta seção, será apresentado um algoritmo que contempla as etapas do Método das Simetrias, o Algoritmo 9. Sendo que este algoritmo tem por entrada a lista das  $k \in \mathbb{N}^*$  configurações não isomorfas com  $n \geq 3$  módulos quadrados e por saída, a lista das configurações não isomorfas com  $n + 1$  módulos.

Primeiramente algumas estruturas auxiliares precisam ser introduzidas, são elas:

- $L_n$ , a lista das matrizes  $ID$  de todas as  $k \in \mathbb{N}^*$  configurações não isomorfas com  $n$  módulos quadrados,  $n \geq 3$ , sendo que a última matriz  $ID$  da lista  $L_n$  representa a configuração com  $k \in \mathbb{N}^*$  módulos alinhados, ou seja, a  $ID$  que ocupa a última posição da lista  $L_n$  é  $ID = (111\dots 1)_{1 \times n}$ . Desta forma, a lista  $L_n$  pode ser escrita como  $L_n = [ID_{n1}, ID_{n2}, \dots, ID_{nk}]$  com  $ID_{nk} = (111\dots 1)_{1 \times n}$ ;
- $LT_{n+1}$ , a lista onde serão armazenadas temporariamente todas as matrizes  $ID$  que representem configurações com  $n + 1$  e que forem geradas no processo enumerativo;
- $L_{n+1}$ , a lista onde serão armazenadas as  $p \in \mathbb{N}^*$  matrizes  $ID$  que representem configurações com  $n + 1$  módulos e não isomorfas entre si.

Assim, a entrada do Algoritmo 9 será  $L_n$ , o conjunto das configurações com  $n$  módulos quadrados,  $n \geq 3$ , e não isomorfas entre si e a saída será  $L_{n+1}$ , o conjunto das configurações com  $n + 1$  módulos quadrados e não isomorfas entre si.

Além disso, Teoremas 2 e 3 foram incorporados ao Algoritmo 9 da maneira que segue.

O Teorema 2 diz que se pode considerar a configuração  $ID_{nk} = (111\dots 1)_{1 \times n}$ ,  $n \geq 3$ , como geradora apenas da configuração  $ID_{np} = (111\dots 1)_{1 \times (n+1)}$  sem perda de configurações no processo enumerativo. Como regra geral, antes de se anexar um novo a uma configuração devem-se detectar as simetrias desta configuração. Porém, para  $ID_{nk} = (111\dots 1)_{1 \times n}$ ,  $n \geq 3$ , o Teorema 2 mostra que a etapa de checagem de simetrias é desnecessária. Logo, para incorporar a conclusão do Teorema 2 ao Algoritmo 9 deve-se eliminar  $ID_{nk}$  da lista  $L_n$  antes que se proceda a checagem de simetrias para as matrizes em  $L_n$ , o que é feito na segunda linha do Algoritmo 9.

Por outro lado, o Teorema 3 diz que não há perda de configurações no processo enumerativo ao se considerar as configurações com  $ID_{m,n}$ ,  $m, n > 1$  tais que todo elemento da  $ID_{m,n}$  for 1 como não geradoras de novas configurações. Também, tem-se que após eliminar-se  $ID_{nk} = (111\dots 1)_{1 \times n}$  da lista  $L_n$  restam nesta lista apenas matrizes com  $m, n > 1$ . De fato, se houvesse na lista  $L_n$  alguma matriz  $ID_{m,n}$  com  $m = 1$  ou  $n = 1$  além da matriz  $ID_{nk}$  esta matriz seria isomorfa a  $ID_{nk}$ , o que é um absurdo pois  $L_n$  é a lista de configurações com  $n$  módulos e não isomorfas entre si.

Assim, para incorporar o resultado do Teorema 3 ao Algoritmo 9 basta que se verifique se as matrizes remanescentes em  $L_n$  após a eliminação de  $ID_{nk}$  possuem elementos diferentes de 1, se isto não ocorrer elas devem ser eliminadas do processo recursivo pois não geram descendentes. Esta verificação é feita no primeiro ciclo **if** do Algoritmo 9.

Feitas as observações pertinentes, segue abaixo o Algoritmo 9 que representa as etapas do primeiro método enumerativo introduzido por esta dissertação, o Método das Simetrias. Sendo que os resultados computacionais da implementação deste método em C++ podem ser encontradas no Capítulo 7.

---

**Algoritmo 9:** Método das Simetrias
 

---

**ENTRADA:**  $L_n = [ID_{n1}, ID_{n2}, \dots, ID_{nk}]$  com  $ID_{nk} = (111\dots 1)_{1 \times n}$

**SAIDA:**  $L_{n+1} = [ID_{n1}, ID_{n2}, \dots, ID_{np}]$  com  $ID_{np} = (111\dots 1)_{1 \times (n+1)}$

1. Crie as listas  $LT_{n+1}$  e  $L_{n+1}$  inicialmente sem elementos.
2. Retire a última matriz da lista  $L_n$  e descarte-a.

**while** a lista  $L_n$  não estiver vazia **do**

1. Retire a primeira matriz da lista  $L_n$  e denote-a  $ID_r$ .

**if** todo elemento de  $ID_r$  for 1 **then**

Descarte  $ID_r$ .

**else**

1. Verifique as simetrias da configuração dada por  $ID_r$  pelas Proposições 7, 8, 9, 10, 11 e 13;
2. Determine  $L_{final}$  e  $C_{final}$  para  $ID_r$  conforme o Algoritmo 2;
3. Proceda segundo o Algoritmo 3 gerando assim, matrizes  $ID$  que representam configurações com  $n + 1$  módulos e aloque estas matrizes na lista  $LT_{n+1}$ ;

**end if**

**end while**

1. Retire a primeira matriz  $ID$  da lista  $LT_{n+1}$  e coloque-a na lista  $L_{n+1}$ .

**while** a lista  $LT_{n+1}$  não estiver vazia **do**

1. Retire a primeira matriz  $ID$  da lista  $LT_{n+1}$  e denote-a  $ID_q$ ;

2. Proceda o teste de isomorfismo dado pelo Algoritmo 8 entre a matriz  $ID_q$  e cada matriz na lista  $L_{n+1}$ ;

**if**  $ID_q$  for isomorfa a alguma matriz na lista  $L_{n+1}$  **then**

Descarte  $ID_q$ .

**else**

Agregue  $ID_q$  à lista  $L_{n+1}$ .

**end if**

**end while**

Agregue a matriz  $ID = [111\dots 1]_{1 \times (n+1)}$  na última posição da lista  $L_{n+1}$ .

---



## 6 NOVO MÉTODO DE ENUMERAÇÃO BASEADO NA DETERMINAÇÃO DAS ÓRBITAS

Neste capítulo, será apresentado o segundo dos dois novos métodos de enumeração de configurações não isomorfas de robôs metamórficos com módulos quadrados. Este método, como o primeiro, engloba etapas de detecção de simetrias, de anexação de novos módulos e de teste de isomorfismo. Nele, a checagem das simetrias é feita pela introdução de uma representação por grafos para cada configuração de robôs metamórficos com módulos quadrados. Assim, é possível relacionar o grupo de simetrias de cada configuração ao grupo de automorfismos do grafo que a representa. Desta forma, as órbitas pela ação do grupo de automorfismo do grafo em seus vértices irão encapsular as informações necessárias sobre as simetrias da configuração.

A ideia de se detectarem as simetrias de uma configuração de robô metamórfico através de ação do grupo de automorfismo do grafo que a apresenta é devida a [Martins & Simoni 2009]. Desta forma, primeiramente será apresentado uma revisão dos conceitos básicos da teoria dos grafos necessários ao desenvolvimento e das contribuições de [Martins & Simoni 2009].

### 6.1 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE TEORIA DE GRAFOS

Dado um conjunto  $V$ , denota-se por  $V^{(2)} = V \times V$  o conjunto de todos os pares não ordenados de elementos de  $V$ . Assim, cada elemento de  $V^{(2)}$  terá a forma  $\{v, w\}$ , sendo  $v$  e  $w$  dois elementos distintos de  $V$ .

**Definição 21.** *Um grafo é um par  $(V, A)$  em que  $V$  é um conjunto arbitrário e  $A$  é um subconjunto de  $V^{(2)} = V \times V$ . Os elementos de  $V$  são chamados vértices e os de  $A$  são chamados arestas.*

Dado um grafo  $G$ , uma aresta como  $\{v, w\}$  será denotada por  $vw$  ou por  $wv$ , o conjunto dos seus vértices, por  $V(G)$  e o conjunto das suas arestas, por  $A(G)$ . Além disso, será dito que aresta  $vw$  incide em  $v$  e em  $w$  e que os últimos são as pontas da aresta. Também, se  $vw$  é uma aresta, então os vértices  $v$  e  $w$  serão denominados vizinhos ou adjacentes.

**Exemplo 21.** *Considere grafo cujos vértices são  $u, v, w, t, q, z$  e cujas arestas são  $vw, uv, zw, zt$  e  $uz$ , um desenho do mesmo é apresentado na Figura 55.*

**Definição 22.** *Um isomorfismo entre dois grafos  $G$  e  $H$  é uma bijeção  $f$  de*

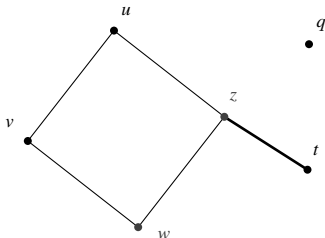


Figura 55: Desenho do grafo cujos vértices são  $u, v, w, t, q, z$  e cujas arestas são  $vw, uv, zw, zt$  e  $uz$ .

$V(G)$  em  $V(H)$  tal que dois vértices  $v$  e  $w$  são adjacentes em  $G$  se, e somente se  $f(v)$  e  $f(w)$  são adjacentes em  $H$ .

Dois grafos  $G$  e  $H$  são isomorfos se existe um isomorfismo entre eles.

**Exemplo 22.** Observe os grafos na Figura 56, seus vértices estão nomeados de modo que se possa visualizar o isomorfismo existente entre eles, note que como há um isomorfismo, as relações de vizinhança entre os vértices são mantidas de um grafo para o outro.

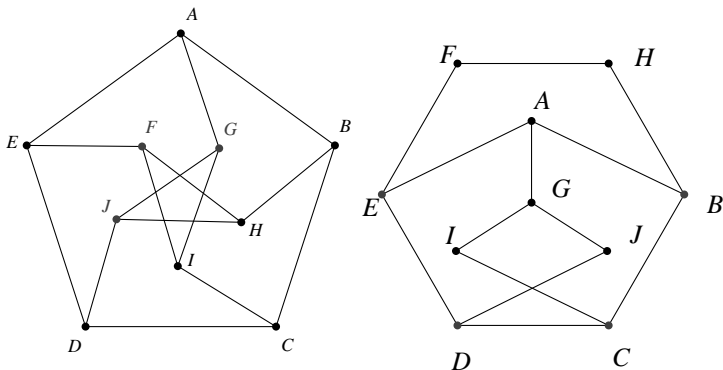


Figura 56: Grafos isomorfos cujos vértices foram nomeados de modo a exibir o isomorfismo entre eles.

**Definição 23.** Um automorfismo de um grafo  $G$  é um isomorfismo de  $G$  em  $G$ .

Em outras palavras, um automorfismo é uma função invertível que aplicada aos vértices de um grafo permuta-os, porém, preserva as vizinhanças.

**Exemplo 23.** Considere o grafo  $G$  na Figura 57a, aplica-se ao conjunto de seus vértices,  $I_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ , a função:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

A função  $\sigma$  é uma permutação em  $I_{11}$  e mantém as relações de vizinhança, portanto é um automorfismo de  $G$ .

A Figura 57b representa o resultado da função  $\sigma$  sobre o grafo  $G$ .

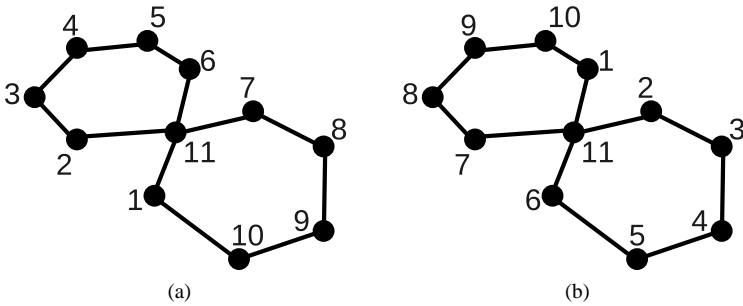


Figura 57: A ação do automorfismo  $\sigma$  no grafo 57a é representada em 57b.

A composição de dois automorfismos é outro automorfismo. Além disso, o conjunto de automorfismos de um grafo  $G$  sob a operação de composição de funções forma um grupo, o grupo de automorfismo do grafo  $G$ . Também, o grupo de automorfismo de um grafo  $G$  age sobre os vértices de  $G$ , permutando-os, mas mantendo as relações de vizinhança entre os vértices, pois cada automorfismo de  $G$  procede de tal modo sobre os vértices de  $G$ , o que foi mostrado no Exemplo 23.

Da definição 13, tem-se dado um  $G$  um grupo agindo sobre um conjunto  $X$ , órbita do ponto  $x \in X$ , é o conjunto  $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ . Assim, para o caso do grupo de automorfismos de um grafo  $G$  agindo sobre seu conjunto de vértices, se um vértice  $x \in G$  for levado em um vértice  $y \in G$  pela ação de algum automorfismo de  $G$ , ou seja, existir  $f \in G$  tal que  $f \cdot x = y$ , então  $x, y$  estarão na mesma órbita pela ação do grupo de automorfismos, ou seja,  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$ .

**Exemplo 24.** Do Exemplo 23, tem-se que  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_6$ , pois  $\sigma(1) = 6$ , ou  $\sigma(6) = 1$ , além disso,  $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_7, \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_8, \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_9, \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_{10}$ .

Para se obterem estas igualdades foi considerado apenas o automorfismo dado pela função  $\sigma$ , porém, o grafo apresenta outros automorfismos,

como, por exemplo, a função dada por:

$$\pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 1 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Ao considerarem-se todos os automorfismos do grafo  $G$ , tem-se:

- $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_6 = \mathcal{O}_7 = \{1, 2, 6, 7\}$ ;
- $\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_8 = \mathcal{O}_{10} = \{3, 5, 8, 10\}$ ;
- $\mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_9 = \{4, 9\}$  e
- $\mathcal{O}_{11} = \{11\}$ .

Apresentados os conceitos básicos da teoria de grafos, pode-se passar as contribuições de [Martins & Simoni 2009] para o problema de enumeração de configurações distintas para robôs metamórficos de módulos planares, afim de as utilizar na detecção das simetrias de uma configuração.

## 6.2 REVISÃO DAS CONTRIBUIÇÕES DE MARTINS E SIMONI AO PROBLEMA DE ENUMERAÇÃO

[Martins & Simoni 2009] introduziram a ideia de se associar a uma estrutura de grafo para cada configuração de robôs metamórficos de módulos planares afim de se detectarem possíveis simetrias da configuração e, assim, evitar-se a geração de configurações isomorfas na enumeração. O que segue é uma breve explicação de suas contribuições.

Considere a configuração de robô metamórfico planar na Figura 58a, sendo que os lados dos hexágonos que a constituem são numerados de 1 a 11, associa-se a ela um grafo como na Figura 58b.

A ação do grupo de automorfismos no grafo já foi apresentada no Exemplo 23, dele tem-se que:

- $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_6 = \mathcal{O}_7 = \{1, 2, 6, 7\}$ ;
- $\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_8 = \mathcal{O}_{10} = \{3, 5, 8, 10\}$ ;
- $\mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_9 = \{4, 9\}$  e  $\mathcal{O}_{11} = \{11\}$ .

Um novo módulo não pode ser conectado a posição 11 por incapacidade mecânica, isto porque, o elemento marcado como 11 está ligado a quatro outros na estrutura do robô metamórfico. Elementos que estão ligados a quatro outros são chamados quaternários, já os que estão ligados a dois outros,

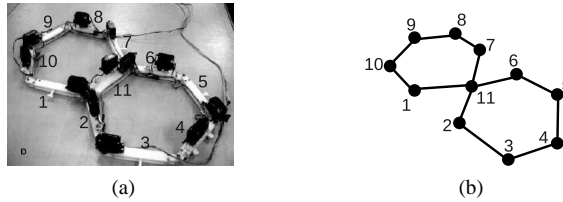


Figura 58: (a) Robô metamórfico de módulos hexagonais em [Pamecha et al. 1996], (b) o grafo associado por [Martins & Simoni 2009].

binários. Assim, os elementos binários são aqueles em que é possível a conexão de novos módulos, portanto, são as órbitas detentoras destes elementos as de interesse. Elas são denotadas órbitas binárias, como na definição a seguir.

**Definição 24.** Segundo [Martins & Simoni 2009]: *Uma órbita binária é aquela constituída apenas de elementos binários.*

No exemplo do robô constituído de dois módulos hexagonais as órbitas binárias são:

- $\theta_1 = \theta_2 = \theta_6 = \theta_7 = \{1, 2, 6, 7\}$ ;
- $\theta_3 = \theta_5 = \theta_8 = \theta_{10} = \{3, 5, 8, 10\}$  e
- $\theta_4 = \theta_9 = \{4, 9\}$ .

Considere a anexação de um novo módulo na posição 3 ou na posição 5 do robô metamórfico com dois módulos hexagonais da Figura 58a, note que as configurações assim obtidas são isomorfas, como ilustram as Figuras 59a e 59b.

A geração de configurações isomorfas ocorre porque  $5 \in \theta_3$  e  $3 \in \theta_3$ , ou seja, os elementos 5 e 3 pertencem a uma mesma órbita pela ação do grupo de automorfismos do grafo na figura 58b, logo existe algum automorfismo deste grafo que leva 5 em 3. Como um automorfismo do grafo não altera as vizinhanças dos seus vértices, de maneira simplificada, pode-se considerar o vértice 5 tem os mesmos vizinhos que o vértice 3. Assim, se um módulo for conectado ao vértice 3 ou ao vértice 5, ele apresentará a mesma vizinhança de módulos, portanto, as configurações em que o novo módulo for conectado à 3 ou à 5 poderão ser consideradas a mesma, ou isomorfas.

Da mesma forma, ao se conectar um novo módulo a elementos numa mesma órbita pela ação do grupo de automorfismos do grafo, configurações isomorfas serão obtidas.

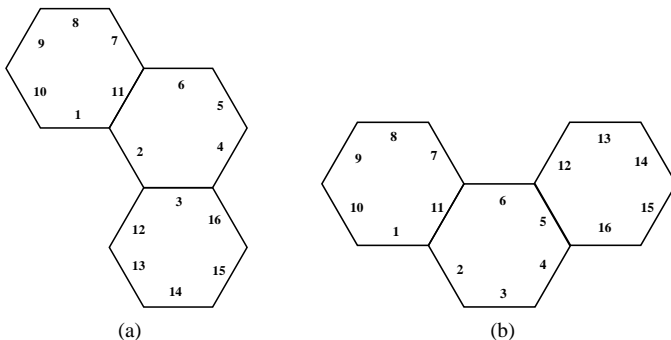


Figura 59: Duas configurações isomorfas obtidas da anexação de novo módulo a elementos na mesma órbita.

Deste modo, os autores sugerem que os novos módulos devem ser conectados apenas a um representante de cada órbita binária, pois assim evita-se a geração de configurações isomorfas. Para cada grafo, as órbitas pela ação do seu grupo de automorfismos são determinadas pelo algoritmo nauty, de McKay [McKay 1998, McKay 2007], que é considerado o algoritmo de referência para checagem de isomorfismos de grafos hoje disponível [Jain & Wysozki 2005, Foggia et al. 2001, Miyazaki 1997].

Assim, [Martins & Simoni 2009] sugerem que para se proceder a anexação um novo módulo a uma dada configuração, deve-se:

**Passo 1** Determinar as órbitas binárias da configuração em questão;

**Passo 2** Conectar um novo módulo a um elemento de cada órbita binária identificada no passo 1.

Por exemplo, as Figuras 60a e 60b representam a obtenção das configurações com quatro módulos quadrados das configurações com três módulos quadrados. Nela, as posições destacadas nas configurações com três módulos quadrados indicam os representantes de cada órbita binária escolhidos para anexação de novo módulo.

[Martins & Simoni 2009], utilizam essa técnica para enumerar todas as configurações não isomorfas de robôs metamórficos cujos módulos são quadrados até um total de 5 módulos e também para os de módulos hexagonais até um número de 4 módulos.

Por fim, sugerem o seguinte algoritmo para enumeração:

**Passo 1** Determine as órbitas binárias da configuração em questão;

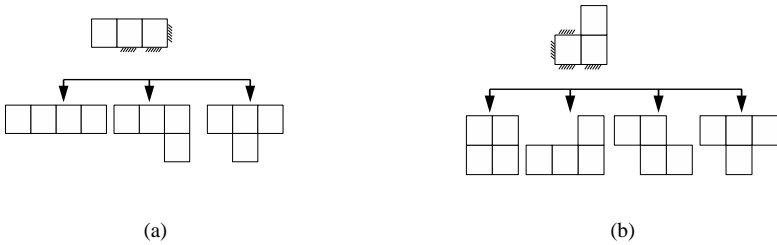


Figura 60: Acréscimo de módulo aos representantes das órbitas binárias das configurações com três módulos

**Passo 2** Conecte um novo módulo a um elemento de cada órbita binária identificada no passo 1;

**Passo 3** Rode um teste de isomorfismo de grafos para eliminar configurações isomorfas remanescentes.

O teste de isomorfismo de grafos é sugerido pois como mostram as Figuras 60a e 60b configurações isomorfas continuam sendo geradas no processo.

Assim, para o caso dos módulos quadrados os resultados por eles obtidos são ilustrados na Figura 61, em que as configurações em cinza são isomorfas e por isto são descartadas.

Baseado no trabalho de [Martins & Simoni 2009], foi desenvolvido um novo método enumerativo para robôs metamórficos cujos módulos são quadrados. Porém, estes autores não descrevem como deve ser feita a associação do grafo à estrutura do robô metamórfico de módulos quadrados para um número qualquer de módulos. Desta forma, primeiramente será discutido como proceder esta associação, resultando em dois grafos distintos para cada configuração de robô metamórfico com módulos quadrados. Estes grafos serão utilizados no método a ser proposto e são contribuições desta dissertação.

### 6.3 DUAS NOVAS REPRESENTAÇÕES POR GRAFOS

Nesta seção serão introduzidas duas maneiras distintas de associar um grafo à estrutura do robô metamórfico com módulos quadrados de modo que suas órbitas pela ação dos respectivos grupos de automorfismo expressem os locais para a anexação dos novos módulos. Ambos os grafos são contribuições originais deste trabalho.

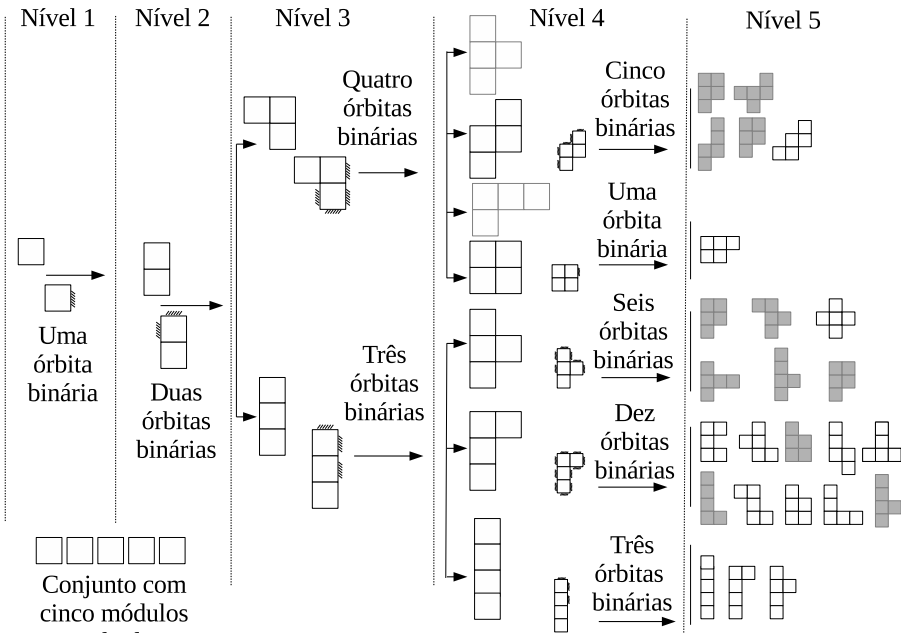


Figura 61: Contribuições de [Martins & Simoni 2009] para enumeração de robôs metamórficos com módulos quadrados.

### 6.3.1 Matriz *Mgrafo*

Dada uma matriz  $ID_{m \times n}$  de uma configuração, o primeiro passo para associação de um grafo a esta configuração é a identificação dos vértices do grafo. A associação é feita do seguinte modo:

1. Cada elemento não nulo da  $ID$  representa um módulo quadrado;
2. A cada lado do quadrado é associado um vértice.

A Figura 62 ilustra a associação dos vértices aos lados de um módulo quadrado.

A escolha pela associação dos lados dos quadrados aos vértices do grafo deve-se ao fato de que novos módulos são anexados aos lados dos quadrados. Assim, os vértices passarão a indicar as regiões de anexação de novos módulos.





Figura 62: (b) ilustra a associação de um vértice a cada lado do módulo quadrado em (a).

Além disto, a numeração segue a seqüência: norte (N), leste (L), sul (S) e oeste (O) segundo a posição dos vértices num módulo. A convenção para o norte, leste, sul e oeste é dada na Figura 63.

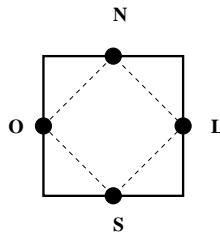


Figura 63: Convenção para o norte (N), leste (L), sul (S) e oeste (O) em um módulo.

Considere a matriz  $ID = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , a configuração dada por esta  $ID$  é representada na Figura 64 em que os pontos destacados de 1 a 16 representam os vértices do grafo a ser associado. .

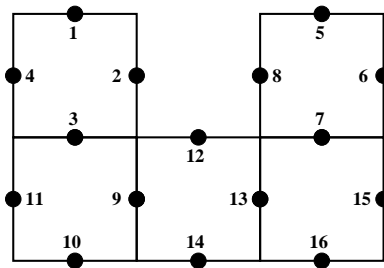


Figura 64: Configuração exemplificativa para obtenção da matriz  $M_{grafo}$ .

Na configuração apresentada, Figura 64, a numeração dos vértices foi obtida começando-se do vértice mais a esquerda e acima, no sentido horário, sendo que cada vértice é numerado apenas uma vez.

Esta numeração pode ser apresentada em uma matriz tridimensional, que será denotada *Mgrafo*.

Para o exemplo anterior:

$$Mgrafo = \begin{pmatrix} [1, 2, 3, 4] & [0, 0, 0, 0] & [5, 6, 7, 8] \\ [3, 9, 10, 11] & [12, 13, 14, 9] & [7, 15, 16, 13] \end{pmatrix}$$
 em que  $[0, 0, 0, 0]$  representa a ausência de módulo.

A matriz *Mgrafo* assim obtida apresenta dimensões  $2 \times 3 \times 4$  e assim, as quantidades de linhas e de colunas da *Mgrafo* correspondem as quantidades da matriz *ID* o que facilita a identificação da correspondência dos vértices com os módulos aos quais eles foram associados.

Tomando-se, por exemplo, o primeiro módulo numerado, nota-se que a numeração  $[1, 2, 3, 4]$ , obedece a sequência norte, leste, sul e oeste para numeração dos vértices, o que ocorre para todos os outros módulos.

Em resumo:

1. A cada elemento não nulo da matriz *ID* é associado um vetor do  $\mathbb{R}^4$  que exprime a numeração dos vértices no módulo;
2. As entradas deste vetor em  $\mathbb{R}^4$  são armazenadas na profundidade da matriz *Mgrafo*;
3. A numeração dos vértices de um módulo é dada na sequência norte, leste, sul e oeste;
4. Cada vértice deve ser numerado apenas uma vez;
5. A cada elemento nulo da matriz *ID* é associado o vetor nulo de  $\mathbb{R}^4$  e as entradas deste vetor são armazenadas na profundidade da matriz *Mgrafo*.

Segue abaixo o Algoritmo 10 para obtenção da *Mgrafo* para cada matriz *ID* dada. Nele, a variável *Contador* auxilia na numeração progressiva dos vértices. Além disso, as vizinhanças de cada vértice são checadas para se evitar que um vértice seja numerado mais de uma vez.

### 6.3.2 Obtenção das Arestas

Esta subseção discute de maneira mais aprofundada como associar um grafo à estrutura do robô com módulos quadrados, resultando em dois novos grafos para cada configuração e que são contribuições deste trabalho.

---

**Algoritmo 10:** Obtenção da Mgrafo
 

---

Defina  $NORTE = 0$ ,  $LESTE = 1$ ,  $SUL = 2$  e  $OESTE = 3$ .

**ENTRADA:**  $ID_{m \times n}$

**SAIDA:**  $Mgrafo_{m \times n \times 4}$

**for**  $i = 0$ , **to**  $i = m - 1$  **do**

**for**  $j = 0$ , **to**  $i = n - 1$  **do**

**if**  $ID_{i,j} = 0$  **then**

$Mgrafo_{i,j,NORTE} = Mgrafo_{i,j,LESTE} = Mgrafo_{i,j,SUL} =$   
        $Mgrafo_{i,j,OESTE} = 0$

**else**

**if**  $ID_{ij} \neq 0$  **for** o primeiro elemento não nulo encontrado ao  
       percorrer-se a  $ID$  **then**

$Mgrafo_{i,j,NORTE} = 1$ ,  $Mgrafo_{i,j,LESTE} = 2$ ,  $Mgrafo_{i,j,SUL} = 3$ ,  
 $Mgrafo_{i,j,OESTE} = 4$  e defina  $Contador = 5$

**else**

**if**  $ID_{i-1,j} = 1$ : **then**

$Mgrafo_{i,j,NORTE} = Mgrafo_{i-1,j,SUL}$

$Mgrafo_{i,j,LESTE} = Contador$  e  $Contador = Contador + 1$ ;

$Mgrafo_{i,j,SUL} = Contador$  e  $Contador = Contador + 1$ ;

**else**

$Mgrafo_{i,j,NORTE} = Contador$  e  $Contador = Contador + 1$

$Mgrafo_{i,j,LESTE} = Contador$  e  $Contador = Contador + 1$ ;

$Mgrafo_{i,j,SUL} = Contador$  e  $Contador = Contador + 1$ ;

**if**  $ID_{i,j-1} = 1$  **then**

$Mgrafo_{i,j,OESTE} = Mgrafo_{i,j-1,LESTE}$

**else**

$Mgrafo_{i,j,OESTE} = Contador$  e  $Contador = Contador + 1$

**end if**

**end if**

**end if**

**end for**

**end for**

---

Primeiramente, aos vértices norte (N), leste (L), sul (S) e oeste (O) de um módulo serão associadas as arestas NL, LS, SO, ON, como na Figura 63. Porém, dada uma configuração de robô metamórfico além das arestas NL, LS, SO, ON de cada módulo pode haver necessidade de se agregarem novas arestas para que o grafo possa representar corretamente a configuração.

Por exemplo, seja a configuração com três módulos quadrados arran-

dados como em um  $L$  na Figura 65, ela será denominada  $3L$ . A escolha desta nomenclatura deve-se ao fato configuração ser constituída de três módulos que formam uma "estrutura em  $L$ ".

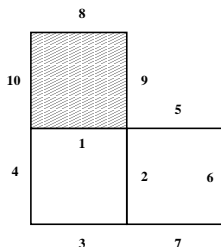


Figura 65: Configuração  $3L$ .

Se o grafo constituído apenas das arestas  $NL$ ,  $LS$ ,  $SO$ ,  $ON$  de cada módulo quadrado for considerado como o grafo representativo da configuração  $3L$ , como na Figura 66, então as órbitas pela ação do grupo de automorfismo não indicarão corretamente as regiões de anexação de módulos.

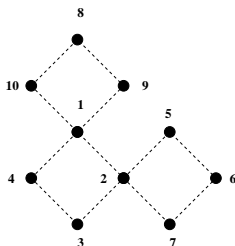


Figura 66: Grafo erroneamente associado à configuração  $3L$ .

Os possíveis automorfismos do grafo na Figura 66, que será denominado grafo  $G$ , são as funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$ , representadas nas Figuras 67, 68 e 69.

Para se determinarem as órbitas pela ação do grupo de automorfismos de  $G$  em seus vértices, tem-se as seguintes observações:

1.  $f_1$  permutou os vértices 5 e 7, mas manteve as relações de vizinhança de cada vértice, sendo, assim, um automorfismo de  $G$ . Portanto, 5 e 7 devem pertencer a uma mesma órbita pela ação do grupo de automorfismos de  $G$  em seus vértices;
2.  $f_2$  permutou os vértices 9 e 10 e é um automorfismo de  $G$ , então 9 e 10 devem pertencer a uma mesma órbita pela ação citada;

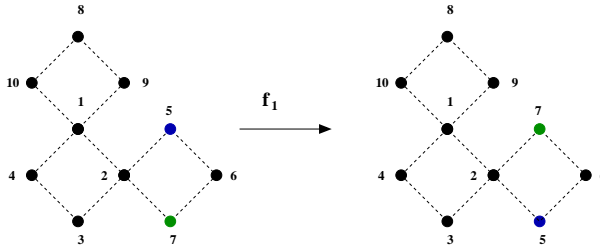


Figura 67: Automorfismo  $f_1$  do grafo  $G$ .

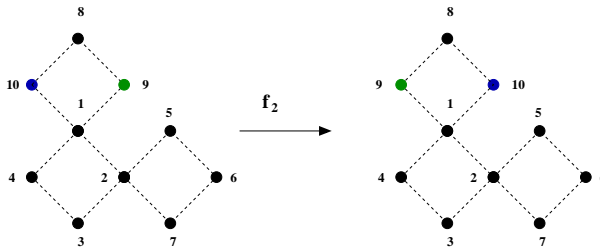


Figura 68: Automorfismo  $f_2$  do grafo  $G$ .

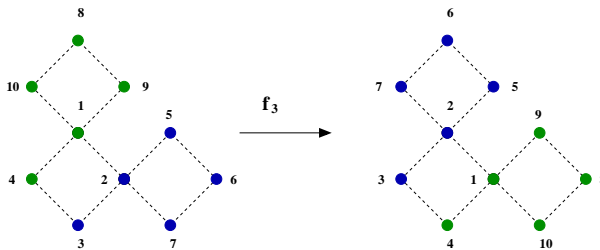


Figura 69: Automorfismo  $f_3$  do grafo  $G$ .

3.  $f_3$  é um automorfismo de  $G$  e permutou os vértices (que devem pertencer, assim, a uma mesma órbita pela ação citada) :

- 1 e 2;
- 3 e 4;
- 5 e 9;
- 6 e 8;
- 7 e 10.

Então, as órbitas pela ação do grupo de automorfismos no grafo da Figura 66 são:

- $\mathcal{O}_1 = \{1, 2\}$ ;
- $\mathcal{O}_3 = \{3, 4\}$ ;
- $\mathcal{O}_5 = \{5, 7, 9, 10\}$ ;
- $\mathcal{O}_6 = \{6, 8\}$ .

Para o grafo da Figura 66, os elementos 5 e 7 pertencem a uma mesma órbita, mas a anexação de novo módulo à posição 5 gera uma configuração distinta daquela obtida ao se anexar um módulo à posição 7. Assim, a associação do grafo é incompleta, pois elementos na mesma órbita devem gerar a mesma configuração pela anexação de novo módulo. Perceba que a anexação de novo módulo à posição 5 gera uma configuração diferente daquela em que se anexa o módulo à posição 7 porque há um módulo acima e à esquerda da posição 5 e não há um módulo abaixo e à esquerda da posição 7, ou seja, os vértices 5 e 7 têm vizinhança distinta.

Um grafo específico para a configuração 3L, Figura 65, é o grafo na Figura 70, ele é obtido do grafo incompleto na Figura 66 pelo acréscimo da aresta (5, 9) e será denominado grafo tipo II da configuração.

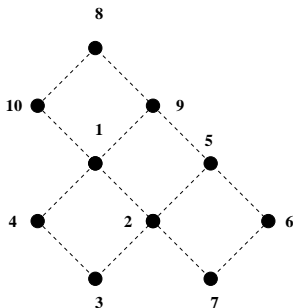


Figura 70: Grafo tipo II da configuração 3L.

A aresta (5, 9) torna os vértices 5 e 9 vizinhos no grafo, uma vez que dois vértices de um grafo são vizinhos se existe uma aresta entre eles. Assim, pode-se dizer que a aresta (5, 9) foi criada para que o vértice 5 pudesse "enxergar" seu vizinho acima e à esquerda, o vértice 9.

As órbitas pela ação do grupo de automorfismo para o grafo correto na Figura 70 são:

- $\mathcal{O}_1 = \{1, 2\}$ ;
- $\mathcal{O}_3 = \{3, 4\}$ ;
- $\mathcal{O}_5 = \{5, 9\}$ ;
- $\mathcal{O}_6 = \{6, 8\}$ ;
- $\mathcal{O}_7 = \{7, 10\}$ .

Os elementos 1 e 2 são quaternários e neles não há anexação de módulos. Escolhendo-se um representante de cada órbita binária, por exemplo

os elementos 4, 8 e 10, tem-se as possíveis posições para anexação de novo módulo.

Assim, fica evidenciado que um grafo corretamente associado à configuração do robô metamórfico deve exprimir as vizinhanças reais dos módulos. Por exemplo, outro grafo que pode ser associado à configuração 3L é dado na Figura 71, ele será denominado grafo tipo I da configuração.

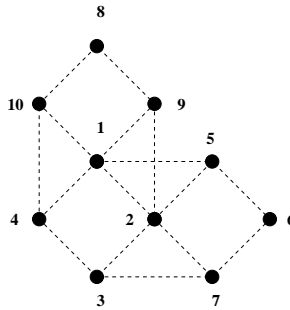


Figura 71: Grafo tipo I da configuração 3L.

O grafo na Figura 71, é obtido do grafo incompleto na Figura 66 pelo acréscimo das arestas (1,5), (3,7), (9,2) e (10,4). Cada aresta foi agregada para adicionar informações sobre as vizinhanças dos vértices. Por exemplo:

1. Aresta (1,5): Permite ao vértice 5 "enxergar" que há um módulo à esquerda e também um módulo acima dele, ou de maneira mais formal, conecta o vértice 5 a um elemento pentanário, o 1;
2. Aresta (3,7): Permite ao vértice 7 "enxergar" que há um módulo a sua esquerda, ou de maneira mais formal, conecta o vértice 7 ao elemento ternário 3;
3. Aresta (9,2): Permite ao vértice 9 "enxergar" que há dois módulos abaixo dele, um à direita e abaixo e o outro diretamente abaixo, ou de maneira mais formal, conecta o vértice 9 a um elemento pentanário, o 2;
4. Aresta (10,4): Permite ao vértice 10 "enxergar" que há um módulo diretamente abaixo dele, ou de maneira mais formal, conecta o vértice 10 ao elemento ternário 4.

Analisando as informações sobre as vizinhanças dadas anteriormente nos itens de 1 à 4 tem-se diretamente que:

- Dos itens 1 e 2 que os vértices 7 e 5 não estão na mesma órbita pela ação do grupo de automorfismos do grafo, isto porque os vértices 7 e 5 apresentam vizinhanças diferentes, então não há um automorfismo que leve um vértice no outro.
- Dos itens 3 e 4 que os vértices 10 e 9 não estão na mesma órbitas pela mesma explicação do caso anterior;
- Dos itens 1 e 4 que os elementos 10 e 5 não estão na mesma órbita, pois não apresentam a mesma vizinhança.

As órbitas pela ação do grupo de automorfismos do grafo na Figura 71 são:

- $\mathcal{O}_1 = \{1, 2\};$
- $\mathcal{O}_3 = \{3, 4\};$
- $\mathcal{O}_5 = \{5, 9\};$
- $\mathcal{O}_6 = \{6, 8\};$
- $\mathcal{O}_7 = \{7, 10\}.$

Em resumo, o grafo na Figura 71, foi obtido do grafo incompleto, Figura 66, pela anexação de arestas que indicam a cada vértice se há vértices ao seu lado ou acima dele. Para tanto foram ligados :

1. Os vértices norte (**N**) **da mesma linha e colunas adjacentes**, 1 e 5 , pela aresta (1, 5);
2. Os vértices sul (**S**) **da mesma linha e colunas adjacentes**, 3 e 7 , pela aresta (3, 7);
3. Os vértices leste (**L**) **da mesma coluna e linhas adjacentes**, 2 e 9, pela aresta (2, 9);
4. Os vértices oeste (**O**) **da mesma coluna e linhas adjacentes**, 4 e 10, pela aresta (4, 10).

Da mesma forma, à configuração com quatro módulos arranjados como em um T, que será denotada  $4T$ , associa-se o grafo na Figura 72b, que será denominado grafo tipo I da configuração. A escolha desta nomenclatura  $4T$  deve-se ao fato configuração ser constituída de quatro módulos que formam uma "estrutura em T".

O Algoritmo 11 descreve a obtenção do grafo tipo I para uma configuração qualquer de robôs cujos módulos são quadrados a partir da matriz *Mgrafo* da configuração, matriz que encerra as informações sobre os vértices do grafo. Sendo que para cada módulo, as quatro primeiras arestas criadas são as arestas NL, LS, SO, ON e elas são criadas no ciclo for da variável auxiliar *K*, pois ela percorre a profundidade da matriz *Mgrafo*, ou seja, as entradas



---

**Algoritmo 11:** Obtenção do grafo tipo I
 

---

**ENTRADA:**  $Mgrafo_{m \times n \times 4}$

**SAIDA:** Grafo tipo I da configuração

**for**  $i = 0$ , **to**  $i = m - 1$  **do**

**for**  $j = 0$ , **to**  $i = n - 1$  **do**

**for**  $k = 0$ , **to**  $k = 3$  **do**

            Defina  $NORTE = 0$ ,  $LESTE = 1$ ,  $SUL = 2$  e  $OESTE = 3$ ;

            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,NORTE}$ ,  $Mgrafo_{i,j,LESTE}$ );

            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,LESTE}$ ,  $Mgrafo_{i,j,SUL}$ );

            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,SUL}$ ,  $Mgrafo_{i,j,OESTE}$ );

            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,OESTE}$ ,  $Mgrafo_{i,j,NORTE}$ );

**end for**

**if**  $Mgrafo_{i,j,NORTE} \neq 0$  e  $Mgrafo_{i,j+1,NORTE} \neq 0$  **then**

        Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,NORTE}$ ,  $Mgrafo_{i,j+1,NORTE}$ );

        Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,SUL}$ ,  $Mgrafo_{i,j+1,SUL}$ );

**end if**

**if**  $Mgrafo_{i,j,NORTE} \neq 0$  e  $Mgrafo_{i+1,j,NORTE} \neq 0$  **then**

        Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,LESTE}$ ,  $Mgrafo_{i+1,j,LESTE}$ );

        Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,OESTE}$ ,  $Mgrafo_{i+1,j,OESTE}$ ).

**end if**

**end for**

**end for**

---

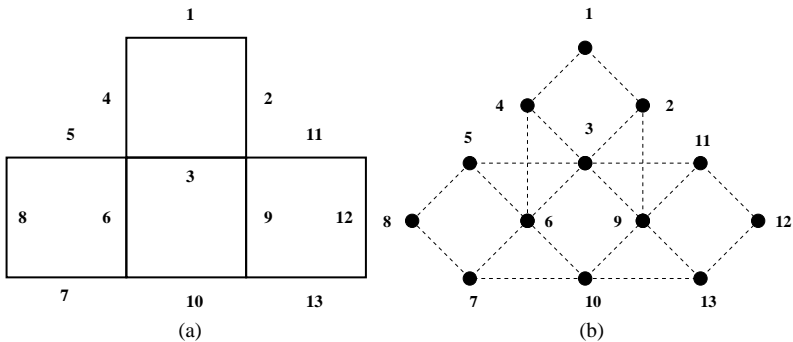


Figura 72: (a) Configuração com quatro módulos em T, (b) Grafo do tipo I associado à configuração em (a).

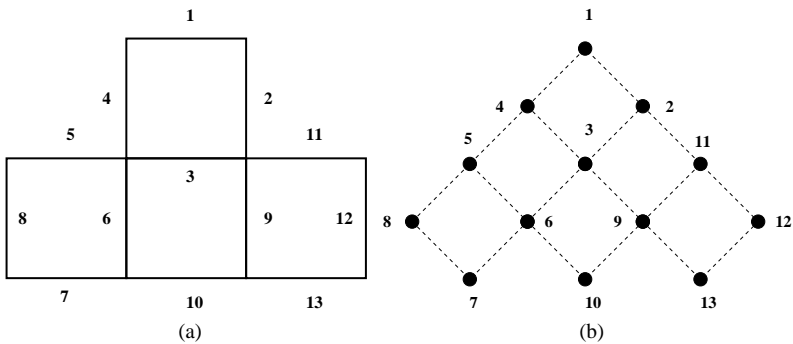


Figura 73: (a) Configuração com quatro módulos em T, (b) Grafo associado à configuração em (a)

do vetor do  $\mathbb{R}^4$ , onde estão encerradas as informações sobre os vértices N, L, S e O em ordem.

Outro grafo para configuração  $4T$ , chamado de grafo tipo II, é dado na Figura 73b, nele além das arestas usuais para cada módulo, NL, LS, SO e ON, foram acrescentadas as arestas:

1. (4, 5) que permite ao vértice oeste 4 "enxergar" seu vizinho abaixo e à esquerda, o vértice norte 5;
2. (2, 11) que permite ao vértice 2 leste "enxergar" seu vizinho abaixo e à direita, o vértice norte 11.

Ou seja, o grafo tipo I exige que sejam verificadas separadamente as vizinhanças superiores, inferiores e laterais de cada vértice, por outro lado o grafo tipo II verifica simultaneamente as vizinhanças laterais e superiores, ou laterais e inferiores de cada módulo.

Para melhor definir-se como agregar as arestas para o grafo de tipo II, será introduzido o conceito de vértice livre para indicar os vértices binários, a nomenclatura foi escolhida pois estes são os vértices nos quais as novas arestas podem incidir.

Por fim, tem-se:

1. Diretamente **abaixo e à direita** de um vértice **leste livre** pode haver vértices **norte** ou **oeste livres**;
2. Diretamente **abaixo e à direita** de um vértice **oeste livre** pode haver vértices **norte** ou **leste livres**;
3. Diretamente **abaixo e à direita** de um vértice **sul livre** pode haver vértices **norte** ou **oeste livres**;
4. Diretamente **abaixo e à esquerda** de um vértice **sul livre** pode haver vértices **norte** ou **leste livres**;
5. Os itens anteriores descrevem as arestas que devem ser criadas no grafo tipo II.

A Figura 74a apresenta uma configuração com quatro módulos quadrados formando um Z e será denominada 4Z, o grafo tipo II associado a esta configuração é dado na Figura 74b, nele, além das arestas usuais foram agregadas as arestas:

- (3, 10) que liga o vértice livre sul 3 ao seu vizinho abaixo e à direita, o vértice livre leste 10;
- (6, 11) que liga o vértice livre leste 6 ao seu vizinho abaixo e à direita, o vértice livre norte 11.

Um caso que particularmente contribui à discussão é dado pela configuração na Figura 76a. Nela, a ausência do módulo indexado por 1 tornaria a configuração simétrica em relação à  $O_x$ . Assim, todos os módulos devem ser capazes de perceber a presença do módulo 1 ou as órbitas irão capturar uma simetria que a configuração não possui.

Para tanto, todos os módulos necessitam estar conectados ao módulo 1, o módulo "causador da assimetria". Isto é feito pelas arestas em vermelho na Figura 75b, ou seja, o vértice oeste livre do módulo 1 foi ligado a todos os vértices norte livre dos módulos a sua esquerda. Além disso, os módulos que

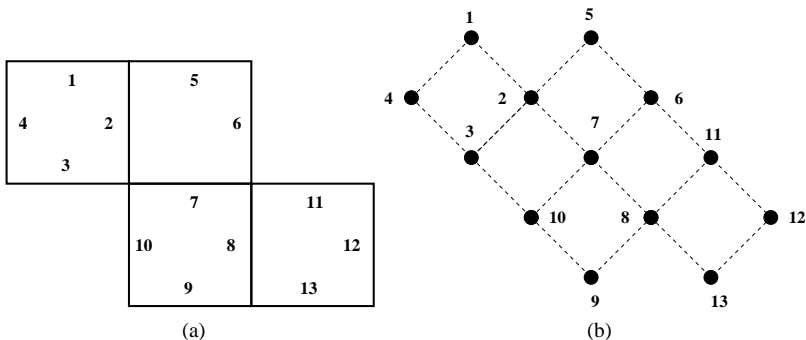


Figura 74: (a)Configuração com quatro módulos em Z, (b) Grafo associado à configuração em (a).

estão na mesma coluna que o módulo 1 estão diretamente ligados aos módulos acima deles. Assim, todos os módulos conseguem perceber o módulo 1 acima e à direita deles. Deste modo, as órbitas refletem corretamente a assimetria da figura, pois cada elemento pertence a uma órbita distinta pela ação do grupo de automorfismos do grafo.

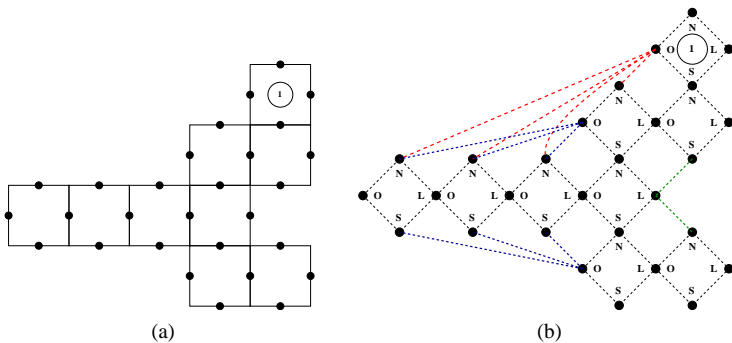


Figura 75: (a) Configuração assimétrica, (b) Grafo tipo II associado à configuração em (a)

O Algoritmo 12 apresenta as etapas para a obtenção do grafo tipo II para uma configuração qualquer de robôs cujos módulos são quadrados. Sendo que, para cada módulo, as quatro primeiras arestas criadas são as arestas NL, LS, SO, ON como para o grafo tipo I. Além disso, uma aresta é criada

para cada par de vértices constituído de:

1. **sul livre** de um módulo e um vértice **oeste livre** de outro módulo **abaixo** do primeiro;
2. **sul livre** de um módulo e um vértice **leste livre** de outro módulo **abaixo** do primeiro ;
3. **leste livre** de um módulo e um vértice **oeste livre** de outro módulo **abaixo** do primeiro;
4. **leste livre** de um módulo e um vértice **norte livre** de outro módulo **abaixo** do primeiro ;
5. **oeste livre** de um módulo e um vértice **leste livre** de outro módulo **abaixo** do primeiro;
6. **oeste livre** de um módulo e um vértice **norte livre** de outro módulo **abaixo** do primeiro.

A entrada do Algoritmo 12 é a matriz  $M_{grafo_{m \times n}}(\mathbb{R}^4)$  e a saída o grafo tipo II da configuração.

Como observação, tem-se que o grafo do tipo I associado à configuração na Figura 76a é dado na Figura 76b. A comparação dos grafos tipo I e tipo II para esta configuração evidencia o fato de que a associação do grafo tipo I é mais direta.

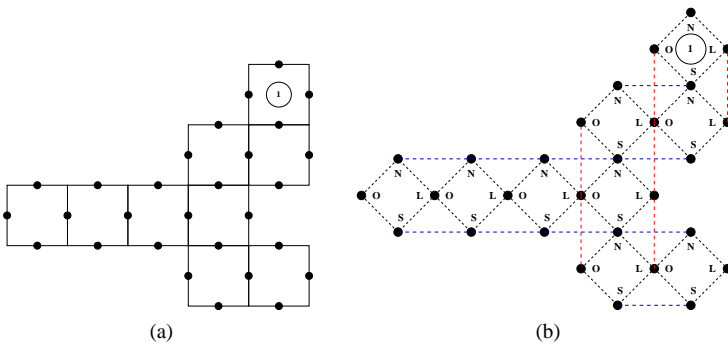


Figura 76: (a) Configuração assimétrica, (b) Grafo tipo I associado à configuração em (a)

---

**Algoritmo 12:** Obtenção do grafo tipo II
 

---

```

Defina  $NORTE = 0$ ,  $LESTE = 1$ ,  $SUL = 2$  e  $OESTE = 3$ 
for  $i = 0$ , to  $i = m - 1$  do
  for  $j = 0$ , to  $j = n - 1$  do
    if  $Mgrafo_{i,j,SUL} \neq 0$ ,  $i \neq m - 1$  e  $Mgrafo_{i+1,j,NORTE} = 0$  then
      for  $c = i + 1$  to  $c = m - 1$  do
        for  $b = 0$ , to  $b = n - 1$  do
          if  $Mgrafo_{c,b,LESTE} \neq 0$ ,  $b \neq n - 1$ ,  $Mgrafo_{c,b+1,OESTE} = 0$ 
          then
            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,SUL}$ ,  $Mgrafo_{c,b,LESTE}$ )
          end if
          if  $Mgrafo_{c,b,OESTE} \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $Mgrafo_{c,b-1,LESTE} = 0$  then
            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,SUL}$ ,  $Mgrafo_{c,b,OESTE}$ );
          end if
        end for
      end for
    end if
    if  $Mgrafo_{i,j,LESTE} \neq 0$ ,  $j \neq n - 1$  e  $Mgrafo_{i,j+1,OESTE} = 0$  then
      for  $c = i + 1$  to  $c = m - 1$  do
        for  $b = 0$ , to  $b = n - 1$  do
          if  $Mgrafo_{c,b,OESTE} \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $Mgrafo_{c,b-1,LESTE} = 0$  then
            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,LESTE}$ ,  $Mgrafo_{c,b,OESTE}$ );
          end if
          if  $Mgrafo_{c,b,NORTE} \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $Mgrafo_{c-1,b,SUL} = 0$  then
            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,LESTE}$ ,  $Mgrafo_{c,b,SUL}$ );
          end if
        end for
      end for
    end if
    if  $Mgrafo_{i,j,OESTE} \neq 0$ ,  $j \neq 0$  e  $Mgrafo_{i,j-1,LESTE} = 0$  then
      for  $c = i + 1$  to  $c = m - 1$  do
        for  $b = 0$ , to  $b = n - 1$  do
          if  $Mgrafo_{c,b,LESTE} \neq 0$ ,  $b \neq n - 1$  e  $Mgrafo_{c,b+1,OESTE} = 0$ 
          then
            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,OESTE}$ ,  $Mgrafo_{c,b,LESTE}$ );
          end if
          if  $Mgrafo_{c,b,NORTE} \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $Mgrafo_{c-1,b,SUL} = 0$  then
            Crie a aresta ( $Mgrafo_{i,j,OESTE}$ ,  $Mgrafo_{c,b,SUL}$ );
          end if
        end for
      end for
    end if
  end for
end for

```

---

## 6.4 ALGORITMO GERAL DO MÉTODO DAS ÓRBITAS

A seção anterior introduziu duas novas representações por grafos para cada configuração de robôs com módulos quadrados. Estas representações servem para que se possam capturar as simetrias presentes nas configurações através da identificação das órbitas pela ação do grupo de automorfismos dos grafo, como estabelecem [Martins & Simoni 2009].

Assim, dada uma matriz  $ID$  deve-se escolher o grafo a ser associado a mesma, ou seja, escolher-se entre o Grafo Tipo I ou o Grafo Tipo II para então passar a determinação das órbitas pela ação do grupo de automorfismos. Assim, pode-se seguir as etapas propostas por [Martins & Simoni 2009] que são:

**Passo 1** Determine as órbitas binárias da configuração em questão;

**Passo 2** Conecte um novo módulo a um elemento de cada órbita binária identificada no passo 1;

**Passo 3** Rode um teste de isomorfismo de grafos para eliminar configurações isomorfas remanescentes.

A determinação das órbitas pela ação do grupo de automorfismos pode ser feita pelo algoritmo Nauty, que pode ser encontrado em [McKay 1998, McKay 2007]. Porém, ao invés de se utilizar um teste de isomorfismo de grafos, pode-se utilizar o mesmo teste de isomorfismo do Método das Simetrias, dado pelo Algoritmo 8.

Assim, dada uma matriz  $ID$  de uma configuração com  $n \in \mathbb{R}^*$ , o segundo novo método de enumeração, denominado Método das órbitas segue os passos dados pelo Algoritmo 13:

---

### Algoritmo 13: Etapas gerais do Método das Órbitas

---

1. Escolha a representação pelo Grafo Tipo I, ou pelo Grafo tipo II;
  2. Determine as órbitas binárias da configuração em questão;
  3. Conecte um novo módulo a um elemento de cada órbita binária identificada no passo 1;
  4. Rode o teste de isomorfismo apresentado no método matricial, dado pelo Algoritmo 8
- 

Porém, para se poderem gerar todas as configurações não isomorfas com  $n + 1$  módulos a partir do conjunto das configurações não isomorfas com

$n$  módulos, devem ser feitas as mesmas considerações apresentadas na seção 5.5.

Resumidamente, tem-se:

- $L_n$  é a lista das matrizes  $ID$  de todas as  $k \in \mathbb{N}^*$  configurações não isomorfas com  $n$  módulos quadrados,  $n \geq 3$ , sendo que a última matriz  $ID$  da lista  $L_n$  representa a configuração com  $k \in \mathbb{N}^*$  módulos, Desta forma, a lista  $L_n$  pode ser escrita como  $L_n = [ID_{n1}, ID_{n2}, \dots, ID_{nk}]$  com  $ID_{nk} = (111\dots 1)_{1 \times n}$ ;
- $LT_{n+1}$ , a lista onde serão armazenadas temporariamente todas as matrizes  $ID$  que representem configurações com  $n + 1$  e que forem geradas no processo enumerativo;
- $L_{n+1}$ , a lista onde serão armazenadas as  $p \in \mathbb{N}^*$  matrizes  $ID$  que representam configurações com  $n + 1$  módulos e não isomorfas entre si.

Por fim, o algoritmo geral para obtenção de todas as configurações não isomorfas com  $n + 1$  módulos, a partir do conjunto das configurações não isomorfas com  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  é apresentado a seguir, sendo que nele estão incluídos os resultados dos Teoremas 2 e 3. Além disto, os resultados computacionais da implementação deste método em C++ podem ser encontradas no Capítulo 7.



---

**Algoritmo 14:** Método das Órbitas
 

---

**ENTRADA:**  $L_n = [ID_{n1}, ID_{n2}, \dots, ID_{nk}]$  com  $ID_{nk} = (111\dots 1)_{1 \times n}$

**SAIDA:**  $L_{n+1} = [ID_{n1}, ID_{n2}, \dots, ID_{np}]$  com  $ID_{np} = (111\dots 1)_{1 \times (n+1)}$

1. Crie as listas  $LT_{n+1}$  e  $L_{n+1}$  inicialmente sem elementos.

2. Retire a última matriz da lista  $L_n$  e descarte-a.

**while** a lista  $L_n$  não estiver vazia **do**

1. Retire a primeira matriz da lista  $L_n$  e denote-a  $ID_r$ .

**if** todo elemento de  $ID_r$  for 1 **then**

Descarte  $ID_r$ .

**else**

1. Escolha entre a representação pelo Grafo Tipo I, ou pelo Grafo tipo II para a  $ID_r$ ;

2. Determine as órbitas pela ação do grupo de automorfismos;

3. Determine as órbitas binárias;

3. Escolha um elemento de cada órbita binária e acrescente a ele um novo módulo, gerando as matrizes  $ID$  que representam configurações com  $n + 1$  módulos e agregue estas matrizes à lista  $LT_{n+1}$ .

**end if**

**end while**

1. Retire a primeira matriz  $ID$  da lista  $LT_{n+1}$  e coloque-a na lista  $L_{n+1}$ .

**while** a lista  $LT_{n+1}$  não estiver vazia **do**

1. Retire a primeira matriz  $ID$  da lista  $LT_{n+1}$  e denote-a  $ID_q$ ;

2. Proceda o teste de isomorfismo dado pelo Algoritmo 8 entre a matriz  $ID_q$  e cada matriz na lista  $L_{n+1}$ ;

**if**  $ID_q$  for isomorfa a alguma matriz na lista  $L_{n+1}$  **then**

Descarte  $ID_q$ .

**else**

Agregue  $ID_q$  à lista  $L_{n+1}$ .

**end if**

**end while**

Agregue a matriz  $ID = [111\dots 1]_{1 \times (n+1)}$  na última posição da lista  $L_{n+1}$ .

---



## 7 RESULTADOS COMPUTACIONAIS

A linguagem de programação adotada para implementar o Método das Simetrias e o Método das Órbitas foi `C++`. Além disso, foram utilizados sistema operacional e compilador em software livres. Foi possível proceder a enumeração de todas as configurações não isomorfas de robôs metamórficos com módulos quadrados para um total de 12 módulos. Além disso, a implementação do Método das Órbitas conseguiu enumerar todas as configurações não isomorfas com 12 módulos utilizando tanto a representação das configurações pelo grafo tipo I quanto a representação pelo grafo tipo II.

Os resultados obtidos para cada número de módulos quadrados até um total de 12 módulos são apresentados na Tabela 4, sendo que o computador utilizado nas simulações tem 4 gigabytes de memória RAM e processador Intel Core 2 Duo - CPU P7550 @ 2.26GHz x 2.

Tabela 4: Número de configurações não isomorfas com  $n$  módulos quadrados que foram encontradas pelos métodos propostos.

Número de módulos quadrados	Número de configurações
1	1
2	1
3	2
4	5
5	12
6	35
7	108
8	369
9	1285
10	4655
11	17073
12	63600

Como a Tabela 1 mostra a quantidade de poliminós livres para um total de 28 quadrados, os métodos apresentados aparentam ser pouco eficientes frente aos existentes, visto que procederam a enumeração para um total de 12 módulos. Porém, os métodos de enumeração utilizados para poliminós não são úteis em muitas situações referentes a robôs metamórficos.

Primeiramente, os números encontrados na Tabela 1 provém de técnicas contagem indireta, ou seja, as configurações não são propriamente gera-

das. De fato, o número de configurações não isomorfas é obtido do número total de configurações por meio de resultados algébricos. Então, não há uma lista destas configurações, apenas o número delas, o que no contexto de robôs metamórficos não é particularmente útil. Por outro lado, nos métodos desenvolvidos nesta dissertação, as configurações são explicitamente listadas.

Poucas bibliografias apresentam a enumeração como listagem de configurações. Entre elas as que alcançam um maior número de módulos respectivamente para o problema de enumeração no contexto de robôs metamórficos e de poliminós, são:

1. [Martins & Simoni 2009] enumeram todas as configurações não isomorfas de robôs metamórficos com módulos quadrados para um total de 5 módulos;
2. [Konstantinova 2000] enumera para um total de 11 quadrados, uma classe específica de poliminós, os simplesmente conexos, ou seja, os que não possuem furos. Um exemplo de configuração que não é simplesmente conexa é dada na Figura 77.

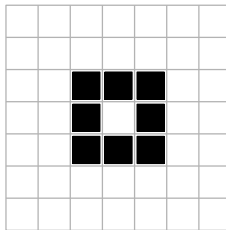


Figura 77: Uma configuração que não é simplesmente conexa.

Ressalta-se que [Konstantinova 2000] enumera uma classe específica de poliminós, não procedendo a enumeração de todas as configurações não isomorfas, e alcança um total de 11 módulos. Em contrapartida, os métodos introduzidos enumeram todas as configurações não isomorfas com 12 módulos quadrados. Portanto, os métodos desenvolvidos na dissertação apresentam um avanço frente aos existentes na literatura.

Em segundo lugar, as técnicas de enumeração propostas baseiam-se no método recursivo de geração, este método é essencialmente pouco eficiente, visto que cada configuração com  $n + 1$  é gerada separadamente de alguma configuração com  $n$  módulos. Logo, todas as configurações com  $n$  módulos precisam ser geradas e armazenadas antes de se gerarem as configurações com  $n + 1$  módulos.

Porém, da geração recursiva tem-se outros resultados importantes no contexto de robôs metamórficos, entre eles:

1. Dada uma configuração com  $n \in \mathbb{N}^*$  módulos é importante saber-se que configurações com  $n + 1$  módulos podem ser dela obtidas para planejar a anexação de novos módulos. Por exemplo, seja a configuração com

$$15 \text{ módulos quadrados em } ID_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tem-se que tanto a implementação do método Matricial quanto a do Método Orbital fornecem todas as configurações não isomorfas com 16 módulos que podem ser obtidas de  $ID_{15}$ . Estas configurações são dadas por  $ID_{16.1}$ ,  $ID_{16.2}$ ,  $ID_{16.3}$ ,  $ID_{16.4}$  e  $ID_{16.5}$  nas quais o elemento 1 em negrito representa o módulo adicionado à  $ID_{15}$ .

$$ID_{16.1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ID_{16.2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ID_{16.3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ID_{16.5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ID_{16.4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Mesmo procedendo a enumeração para um total de 12 módulos quadrados, os métodos podem ser utilizados para configurações específicas com número maior que 12 módulos. Por exemplo, ambas as implementações dos métodos conseguem, gerar as 9947 configurações não isomorfas com 17 módulos que são obtidas de  $ID_{16.2}$  pela anexação de um novo módulo. Como outro exemplo, os métodos conseguem obter todas 36157 as configurações não isomorfas com 20 módulos que são geradas no processo recursivo partindo-se da configuração  $ID_{15}$ .
3. Suponha que um módulo falhe e não seja possível anexar novos módulos a ele. Como ambos os métodos são capazes de dizer que outros módulos são simétricos ao módulo que falhou, pode-se determinar outras maneiras de se obter a configuração desejada. Para tanto, basta que seja anexado um novo módulo a um módulo simétrico ao módulo que falhou. Este processo é ilustrado na Figura 78.

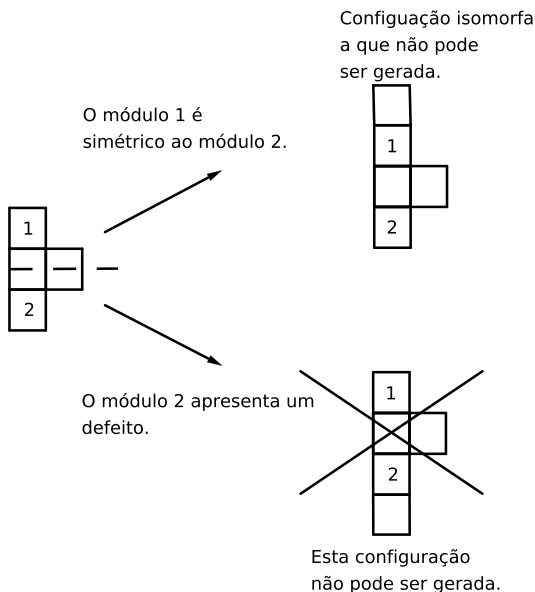


Figura 78: Processo de obtenção de uma configuração isomorfa a uma configuração que não pode ser gerada devido a um defeito em um dos módulos.

Ressalta-se que apenas  $\frac{1}{8}$  de todas as configurações com  $n \in \mathbb{N}^*$  mó-

dulos apresenta alguma simetria distinta da identidade, como foi mostrado no Capítulo 2. Isto implica que para  $\frac{7}{8}$  das configurações após checar as simetrias os métodos retornam a informação de que um novo módulo deve ser anexado a cada posição possível. Deste modo, apenas para  $\frac{1}{8}$  das configurações a etapa de checagem de simetrias ajuda a diminuir o número de configurações isomorfas geradas no processo, para os outros  $\frac{7}{8}$  esta etapa poderia ser dispensada.

Porém, o resultado 3 evidencia que apesar de a etapa de checagem de simetrias incurrir um maior custo computacional no processo enumerativo, ela proporciona outros resultados importantes no contexto de robôs metamórficos.

Desta forma, além de fornecerem todas as configurações não isomorfas constituídas de 12 módulos quadrados, os métodos apresentados podem ser utilizados para configurações específicas com número maior que 12 módulos. Além disto, eles também podem auxiliar na solução de outros problemas pertinentes aos robôs metamórficos de módulos quadrados, principalmente aqueles em que seja necessária a checagem das simetrias de uma configuração.





## 8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A dissertação abordou um assunto de grande interesse para o grupo de robótica da UFSC: a enumeração de configurações não isomorfas de robôs metamórficos. A utilização de ferramentas de teoria de grupos e de teoria de grafos, bem como as contribuições de [Martins & Simoni 2009] ao problema de enumeração, possibilitaram o desenvolvimento de dois novos métodos, que são contribuições da dissertação, para proceder a enumeração de configurações não isomorfas para robôs metamórficos com módulos quadrados.

### 8.1 CONCLUSÕES

Nesta dissertação, foram desenvolvidos e implementados dois novos métodos para a enumeração de configurações não isomorfas para robôs metamórficos com módulos quadrados, o Método das Simetrias (Capítulo 5) e o Método das Órbitas (6). A diferença da maioria dos métodos de enumeração encontrados na literatura, que apenas procedem a contagem do número de configurações, os métodos propostos na dissertação procedem a enumeração como listagem de configurações, ou seja, fornecem a lista de configurações não isomorfas que pode ser obtida para cada número de módulos.

Ressalta-se que o conhecimento prévio das configurações que cada conjunto de módulos consegue assumir pode auxiliar em problemáticas diversas na área de robôs metamórficos. Por exemplo, para determinar uma configuração ótima para realização de determinada tarefa é necessário que se conheça em que configurações o robô é capaz de exercer tal tarefa. Também, para determinar uma sequência de movimentos de uma configuração dada a uma pretendida, deve-se estabelecer que configurações intermediárias o robô metamórfico irá assumir.

Assim, os métodos de enumeração introduzidos fornecem uma biblioteca de configurações que pode ser utilizada tanto para auxiliar no projeto de módulos versáteis e capazes de atingir as mais diversas configurações, quanto no planejamento de trajetória, na determinação de configurações ótimas para determinadas tarefas e outros questionamentos importantes na área.

No desenvolvimento da dissertação, primeiramente, foram introduzidos uma representação matricial para cada configuração de robôs com módulos quadrados, a matriz  $ID$  de uma configuração, e também um sistema de coordenadas associado a cada configuração, respectivamente pelas Definições 19 e 20. Estas definições são necessárias à introdução dos métodos de enumeração propostos e também são contribuições da dissertação.

Para facilitar o entendimento dos métodos propostos, foi introduzido, no Capítulo 4, o Algoritmo 1, que apresenta as etapas comuns de ambos os métodos. Este algoritmo engloba as etapas de checagem das simetrias de uma configuração, de anexação de novos módulos e de teste de isomorfismo, que são as etapas presentes nos dois métodos de enumeração propostos.

Também, foram introduzidos, no Capítulo 5, dois novos teoremas, que são contribuições da dissertação, e que diminuem a geração de configurações isomorfas durante o processo enumerativo, simplificando, deste modo, o processo. São eles os Teoremas 2 e 3. Os resultados destes teoremas foram incorporados tanto ao Método das Simetrias quanto ao Método das Órbitas.

O primeiro método, o Método das Simetrias, baseia-se não somente nos resultados dos Teoremas 2 e 3 como em outras proposições e algoritmos que também são contribuições da dissertação. Entre eles, tem-se:

1. Para checar as simetrias de uma configuração, são utilizados os resultados introduzidos por novas proposições, as Proposições 7, 8, 9, 10, 11 e 13;
2. A anexação de novos módulos é feita segundo o Algoritmo 3 que foi introduzido pela dissertação;
3. O teste de isomorfismo é dado pelo Algoritmo 8 que também foi introduzido pela dissertação. Além disso, este algoritmo baseia-se em novas proposições, as Proposições 6 e 7, 4;
4. O algoritmo geral do método das simetrias engloba todos os resultados anteriores e é dado por um novo algoritmo, o Algoritmo 9.

Por outro lado, o Método das Órbitas, além de seguir o percurso lógico dado pelo Algoritmo 1 e de englobar os resultados dos Teoremas 2 e 3, também se baseia nas contribuições de [Martins & Simoni 2009]. Estes autores introduziram a ideia de associar grafos às configurações de robôs metamórficos planares para capturar as simetrias das configurações. Esta captura é feita pela interpretação de como o grupo de automorfismos do grafo age em seus vértices. Porém, os autores não especificam quais grafos devem ser associados a cada estrutura.

Nesta dissertação, foram introduzidos dois novos grafos que podem ser associados a cada estrutura de robôs metamórficos com módulos quadrados, para um número qualquer de módulos. São eles os grafos tipo I e grafos tipo II, que são obtidos de cada matriz *ID* pelos Algoritmos 12 e 11. Estes algoritmos também são contribuições da dissertação.

O algoritmo geral do método das órbitas, Algoritmo 6.4, foi introduzido na dissertação e permite a checagem das simetrias de uma configuração

tanto utilizando-se o grafo tipo I quanto o grafo tipo II a ela associados. Além disto, este algoritmo utiliza o mesmo teste de isomorfismo introduzido para o Método das Simetrias, o Algoritmo 8.

Das implementações dos novos métodos em *C++* foram extraídos resultados importantes e que constituem um avanço frente aos métodos de enumeração existentes na literatura, entre eles:

1. Os métodos fornecem as diversas maneiras de se obter uma configuração pela anexação de novo módulo a uma configuração pré-existente, o que possibilita o planejamento da anexação de novos módulos, bem como o contorno de falhas mecânicas de um módulo;
2. Os métodos introduzidos enumeram todas as configurações não isomorfas com 12 módulos quadrados, enquanto os métodos encontrados na literatura e que de fato listam as configurações não alcançam esta quantidade de módulos, como por exemplo, os métodos encontrados em [Martins & Simoni 2009] e [Konstantinova 2000];
3. Mesmo procedendo a enumeração para um total de 12 módulos quadrados, os métodos podem ser utilizados para determinar que configurações provém pela anexação de novos módulos de configurações específicas com número maior que 12 módulos.

Outra contribuição desta dissertação é o paralelo que foi estabelecido entre o problema de enumeração para poliminós e para robôs metamórficos. Este paralelo possibilitou principalmente a compreensão da complexidade do problema de enumeração para robôs metamórficos.

Foi evidenciado que o número de configurações cresce exponencialmente com o número de módulos, bem como o tempo necessário para gerar estas configurações. Assim, ficou demonstrado que qualquer método que proceda a enumeração como listagem, como por exemplo os métodos introduzidos na dissertação, apresentará limitações que são inerentes a complexidade do problema.

Também do paralelo com o problema de enumeração para poliminós foi possível a verificação do número de configurações não isomorfas de robôs metamórficos com módulos quadrados, sendo que os números encontrados para robôs metamórficos coincidem com os encontrados na literatura de poliminós.

## 8.2 PUBLICAÇÕES

Durante o período desta dissertação foram publicados um artigo em congresso e um capítulo de livro.

Publicações:

1. SALVI, A. Z. , MARTINS, D., SIMONI, R. e DAI,J. Grupos, Simetrias e a enumeração de configurações não isomorfas para robôs metamórficos planares. X Congreso Argentino de Mecánica Computacional-MECOM. Salta-AR, 2012.
2. SALVI, A. Z. , SIMONI, R. e MARTINS, D. Enumeration Problems: A Bridge Between Planar Metamorphic Robots in Engineering and Polyforms in Mathematics. Advances in Reconfigurable Mechanisms and Robots I. 2012

## 8.3 PERSPECTIVAS E TRABALHOS FUTUROS

A partir do desenvolvimento do presente trabalho poderão ser desenvolvidos trabalhos futuros, como por exemplo:

1. Estender os métodos de enumeração propostos para outros tipos de módulos planares de robôs metamórficos, como por exemplo os hexagonais;
2. Estender os métodos de enumeração para módulos espaciais, como por exemplo os cúbicos;
3. Classificação das configurações obtidas na enumeração segundo propriedades como a mobilidade e a redundância;
4. Inclusão nos métodos propostos de variáveis referentes às tarefas a serem executadas pelos robôs metamórficos para que sejam geradas no processo enumerativo somente configurações em que o robô seja capaz de realizar tais tarefas;
5. Planejamento das etapas de reconfiguração de uma configuração dada para uma configuração pretendida.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMS, A.; GHRIST, R. State Complexes for Metamorphic Robots. **The International Journal of Robot Research**, Multimedia Archives, v. 23, n. 7, p. 811–830, 2004.

BAREQUET, G.; MOFFIE, M.; RIBÓ, A.; ROTE, G. Counting polyominoes on twisted cylinders. In: CITeseer. **Proceedings of Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science**, 2005.

BI, Z.; GRUVER, W.; ZHANG, W. Adaptability of reconfigurable robotic systems. In: ICRA, 2003. **Proceedings of International Conference on Robotics and Automation**, 2003. v. 2, p. 2317–2322.

BOLDRINI, J.; COSTA, S.; FIGUEIREDO, V.; WETZELER, H. Álgebra linear. **Núcleo**, v. 15, 1980.

BRANDT, D.; CHRISTENSEN, D. J.; LUND, H. H. Atron robots: Versatility from self-reconfigurable modules. In: MECHATRONICS AND AUTOMATION, 2007. **Proceedings of International Conference on Mechatronics and Automation**, 2007. p. 26–32.

CHEN, I.; BURDICK, J. Determining task optimal modular robot assembly configurations. In: ICRA, 1995. **Proceedings of International Conference on Robotics and Automation**, 1995. v. 1, p. 132–137.

CHEN, I.-M.; BURDICK, J. W. Enumerating the non-isomorphic assembly configurations of modular robotic systems. **The International Journal of Robotics Research**, SAGE Publications, v. 17, n. 7, p. 702–719, 1998.

CHIANG, C.; CHIRIKJIAN, G. Modular Robot Motion Planning Using Similarity Metrics. **Autonomous Robots**, Springer, v. 10, n. 1, p. 91–106, 2001.

CHIRIKJIAN, G. Kinematics of a metamorphic robotic system. In: ICRA, 1994. **Proceedings of International Conference on Robotics and Automation**, 1994. p. 449–455.

CHIRIKJIAN, G.; PAMECHA, A. Bounds for self-reconfiguration of metamorphic robots. In: ICRA, 1996. **Proceedings of International Conference on Robotics and Automation**, 1996. v. 2, p. 1452–1457.

CHITTA, S.; OSTROWSKI, J. Enumeration and motion planning for modular mobile robots. **Department of Computer and Information Science, University of Pennsylvania, Technical report No. MS-CIS-01-08**, 2006.

DUMITRESCU, A.; SUZUKI, I.; YAMASHITA, M. High speed formations of reconfigurable modular robotic systems. In: ICRA, 2002. **Proceedings of International Conference on Robotics and Automation**, 2002. v. 1, p. 123–128.

FERETIC, S. Polyominoes with nearly convex columns: A semidirected model. **Arxiv preprint arXiv:0910.4573**, 2009.

FOGGIA, P.; SANSONE, C.; VENTO, M. A performance comparison of five algorithms for graph isomorphism. In: IAPR TC-15, 2001. **Proceedings of 3rd IAPR TC-15 Workshop on Graph-based Representations in Pattern Recognition**, 2001. p. 188–199.

FUKUDA, H.; MUTOH, N.; NAKAMURA, G.; SCHATTSCHNEIDER, D. Enumeration of polyominoes, polyiamonds and polyhexes for isohedral tilings with rotational symmetry. **Computational Geometry and Graph Theory**, Springer, p. 68–78, 2008.

JAIN, B.; WYSOTZKI, F. Solving inexact graph isomorphism problems using neural networks. **Neurocomputing**, Elsevier, v. 63, p. 45–67, 2005.

JENSEN, I. Counting polyominoes: A parallel implementation for cluster computing. **Computational Science**, Springer, p. 698–698, 2003.

JENSEN, I.; GUTTMANN, A. Statistics of lattice animals (polyominoes) and polygons. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 33, p. L257, 2000.

KLARNER, D.; RIVEST, R. A procedure for improving the upper bound for the number of  $n$ -ominoes. **Canadian Journal of Math**, Canadian Mathematical Society, v. 25, n. 3, p. 585–602, 1973.

KLARXER, D. Cell growth problems. **Canadian Journal of Math**, Canadian Mathematical Society, v. 19, n. 4, p. 851, 1967.

KONSTANTINOVA, E. V. The constructive enumeration of square animals. **Postech**, Citeseer, v. 10, p. 55, 2000.

KUROKAWA, H.; TOMITA, K.; KOLAJI, S.; YOSHIDA, E.; MURATA, S. Distributed self-reconfiguration of M-Tran III modular robotic system. **The**

**International Journal of Robotics Research**, SAGE Publications, v. 27, n. 3-4, p. 373–386, 2008.

LUNGO, A. D.; FROSINI, A.; RINALDI, S. Eco method and the exhaustive generation of convex polyominoes. **Discret Mathematics and Theoretical Computer Science**. Springer-Verlag, 2003. p. 129–140.

LUNNON, W. Counting polyominoes. **Computers in Number Theory**, Academic Press, 1971.

MARTINS, D.; SIMONI, R. Enumeration of planar metamorphic robots configurations. In: REMAR, 2009. **Proceedings of International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots**, 2009. p. 610–618.

MCKAY, B. **Nauty user's guide**. Computer Science Dept., Australian National University, 2009. Disponível em: <<http://cs.anu.edu.au/bdm/nauty/>>. Acesso em: 27 de Março de 2013

MCKAY, B. D. Isomorph-free exhaustive generation. **Journal of Algorithms**, Elsevier, v. 26, n. 2, p. 306–324, 1998.

MIYAZAKI, T. The complexity of McKay's canonical labeling algorithm. In: AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. **Groups and Computation II: Workshop on Groups and Computation**, 1997. p. 239–256.

MURATA, S.; KUROKAWA, H. Self-reconfigurable robots. **Robotics & Automation Magazine**, IEEE, v. 14, n. 1, p. 71–78, 2007.

NILSSON, M. Connectors for self-reconfiguring robots. **Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on**, IEEE, v. 7, n. 4, p. 473–474, 2002.

PAMECHA, A.; CHIANG, C.J.; STEIN, D.; CHIRIKJIAN, G. Design and implementation of metamorphic robots. In: ASME. **Proceedings of the Engineering Technical Conference**, 1996. p. 1–10.

PAMECHA, A.; EBERT-UPHOFF, I.; CHIRIKJIAN, G. Useful metrics for modular robot motion planning. **Transactions on Robotics and Automation**, v. 13, n. 4, p. 531–545, 1997.

REDELMEIER, D. Counting polyominoes: yet another attack. **Discrete Math**, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 191–203, 1981.

RUS, D.; VONA, M. Crystalline Robots: Self-Reconfiguration with Compressible Unit Modules. **Autonomous Robots**, Springer, v. 10, n. 1, p. 107–124, 2001.

SALEMI, B.; MOLL, M.; SHEN, W.-M. Superbot: A deployable, multi-functional, and modular self-reconfigurable robotic system. In: IROS-2006. **International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2006. p. 3636–3641.

SANTOS, J. P.; BOVO, E. O teorema de Burnside e aplicações. In: II BIENAL DA SBM, 2004, Salvador. **Anais da II Bienal da SBM**, Rio de Janeiro, SBM, 2004.

STØY, K.; SHEN, W.-M.; WILL, P. A simple approach to the control of locomotion in self-reconfigurable robots. **Robotics and Autonomous Systems**, Elsevier, v. 44, n. 3, p. 191–199, 2003.

VOGE, M.; GUTTMANN, A. On the number of hexagonal polyominoes. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 307, n. 2, p. 433–453, 2003.

WALTER, J.; WELCH, J.; AMATO, N. Concurrent metamorphosis of hexagonal robot chains into simple connected configurations. **Robotic Autonomous**, Springer, v. 18, n. 6, p. 945–956, 2002.

WALTER, J. E.; WELCH, J. L.; AMATO, N. M. Distributed reconfiguration of metamorphic robot chains. In: ACM. **Proceedings of the nineteenth annual ACM symposium on Principles of distributed computing**, 2000. p. 171–180.

YIM, M.; LAMPING, J.; MAO, E.; CHASE, J.G. Rhombic dodecahedron shape for self-assembling robots. **Xerox PARC, SPL TechReport P9710777**, 1997.

YIM, M.; ZHANG, Y.; DUFF, D. Modular robots. **Spectrum**, IEEE, v. 39, n. 2, p. 30–34, 2002.

YIM, M.; ZHANG, Y.; LAMPING, J.; MAO, E. Distributed Control for 3D Metamorphosis. **Autonomous Robots**, Springer, v. 10, n. 1, p. 41–56, 2001.

YOSHIDA, E.; MURATA, S.; KUROKAWA, H.; TOMITA, K.; KOKAJI, S. A distributed reconfiguration method for 3D homogeneous structure. In: IROS-98. **Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 1998. v. 2, p. 852–859.



**APÊNDICE A – Demonstrações do Capítulo 3.**



Este apêndice engloba as demonstrações das proposições e dos teoremas apresentados no Capítulo 3.

**Proposição 1** Toda isometria  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é injetiva.

**Demonstração da Proposição 1** Sejam  $t, p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tais que  $f(t) = f(p)$ , então  $d(f(t), f(p)) = 0 = d(t, p)$  e assim,  $t = p$ , logo  $f$  é injetiva.

**Proposição 2** Seja  $f$  uma isometria inversível do plano, então sua inversa  $f^{-1}$  é também uma isometria do plano.

**Demonstração da Proposição 2** Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria do plano e  $f^{-1}$  a função inversa de  $f$ . Seja  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , para mostrar que  $f^{-1}$  é uma isometria do plano, deve-se mostrar que  $d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) = d(a, b)$ .

Como  $f$  é uma isometria em  $\mathbb{R}^2$ ,  $d(a, b) = d(f(a), f(b))$  para todo  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  e assim, como  $(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) \in \mathbb{R}^2$ , tem-se que  $d(f^{-1}(a), f^{-1}(b)) = d(f(f^{-1}(a)), f(f^{-1}(b))) = d(a, b)$ .

**Proposição 3** Seja  $X$  um conjunto qualquer e  $B_{ij}(X) = \{f : X \rightarrow X, \text{ tal que } X \text{ é uma bijeção}\}$ . O conjunto  $B_{ij}$  munido da operação de composição de funções forma um grupo.

**Demonstração da Proposição 3** Todas as funções  $B_{ij}$  têm domínio e imagem iguais a  $X$ , logo a composição destas funções é sempre possível.

A operação de composição de funções é associativa, isto é,  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .

Além disto, a função identidade  $I_x$  quando composta com qualquer função  $f \in B_{ij}$  resulta na própria  $f$ , ou seja,  $f \circ I_x = I_x \circ f = f$ . Assim,  $I_x$  é a identidade do grupo.

Também, como cada  $f \in B_{ij}$  é uma bijeção, cada  $f$  possui uma inversa  $f^{-1}$  que é uma bijeção. Portanto,  $f^{-1} \in B_{ij}$ . Assim,  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_x$  e cada elemento do grupo possui um elemento inverso.

Falta mostrar que a composição de bijeções é uma bijeção. Para tanto, será verificado que a composição de bijeções é inversível.

Sejam  $f, g \in B_{ij}$ , tem-se que existem  $f^{-1}, g^{-1} \in B_{ij}$  e que  $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = I_x$ . Também,  $(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) \circ = g^{-1} \circ (f \circ f^{-1}) \circ g = g^{-1} \circ g = I_x$ . Portanto, pela unicidade do elemento inverso, tem-se  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ . Deste modo,  $(f \circ g)^{-1} \in B_{ij}$ , de onde se conclui que a composta de bijeções é uma bijeção.

Assim, tem-se o resultado.

**Proposição 4** Seja  $X$  um conjunto não vazio, o conjunto  $S_n = \{\pi : X \rightarrow X, \pi \text{ é uma permutação}\}$ , conjuntamente com a operação de composição de funções, forma um grupo, chamado grupo de permutações de  $X$ .

**Demonstração da Proposição 4** Trata-se de um caso particular da Proposição 3, pois toda permutação de elementos de um conjunto  $X$  não vazio é uma bijeção em  $X$ .

**Teorema 1** Seja  $F$  uma figura. Então, o conjunto de todas as simetrias de  $F$  com a operação de composição de funções formam um grupo.

**Demonstração do Teorema 1** .

Primeiramente, deve-se mostrar que a composição de duas simetrias  $f, g : F \rightarrow F$  é uma simetria de  $F$ .

De fato,  $f \circ g : F \rightarrow F$  é uma isometria, pois dados  $p, q \in F$ , tem-se  $d((f \circ g)(p), (f \circ g)(q)) = d(f(g(p)), f(g(q))) = d(g(p), g(q)) = d(p, q)$ . Além disso,  $f \circ g$  é uma função de  $F$  em  $F$  sobrejetiva, pois  $(f \circ g)(F) = f(g(F)) = f(F) = F$ . Assim, tem-se  $f \circ g$  uma simetria de  $F$ .

A função  $I_F : F \rightarrow F$ , identidade em  $F$ , é uma simetria e portanto, ela é o elemento neutro do grupo das simetrias de  $F$ .

Também, por definição, toda simetria  $f$  de uma figura  $F$  é sobrejetiva. E, como toda simetria é uma isometria, toda simetria é injetiva pela Proposição 1. Assim, toda simetria de uma figura  $F$  é bijetiva. E, deste fato, temos que toda simetria  $f$  de  $F$ , possui inversa em  $F$ .

Como  $f^{-1}$  é sobrejetiva e é uma isometria pela Proposição 2,  $f^{-1}$  é uma simetria de  $F$ . Ou seja, toda simetria de  $F$  tem uma inversa que também é uma simetria de  $F$ .

**Proposição 5** Uma ação  $\alpha$  de um grupo  $G$  sobre um conjunto  $X$  introduz uma relação de equivalência em  $X$ .

**Demonstração da Proposição 5** De fato, pode-se estabelecer uma relação  $R$  de equivalência em  $X$  do seguinte modo:  $xRy$  se existir  $g \in G$  tal que  $y = g.x$ . Esta é uma relação de equivalência, pois:

- i)  $x = e_G.x$  e a relação é reflexiva;
- ii) Se  $xRy$  então, existe  $g \in G$  tal que  $y = g.x$ . Também,  $g^{-1} \in G$  e  $x = g^{-1}.y$ , de onde vem  $yRx$  e portanto, a relação é simétrica.
- iii) Se  $xRy$  e  $yRz$ , então existem  $g, h \in G$  tais que  $y = g.x$  e  $z = h.y$ , tem-se  $z = h.g.x$  e assim,  $xRz$ . Assim, a relação é transitiva.

**Proposição 6** Duas órbitas pela ação de um grupo ou são disjuntas (não compartilham elementos) ou coincidentes.

**Demonstração da Proposição 6** Suponha que  $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y \neq \emptyset$ . Ou seja, existe  $z \in \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y$ . Assim, existem  $g, h \in G$  tais que  $z = g.x$  e  $z = h.y$ . Portanto:

$$y = h^{-1}.g.x \quad (\text{A.1})$$

e

$$x = g^{-1}.h.y \quad (\text{A.2})$$

Também, se  $w \in \mathcal{O}_x$ , então existe  $k \in G$  tal que  $w = k.x$ . E, da equação A.2, tem-se  $w = k.g^{-1}.h.y = (kg^{-1}h).y$ , então,  $w \in \mathcal{O}_y$ . De maneira semelhante mostra-se que se  $w \in \mathcal{O}_y$ , então  $w \in \mathcal{O}_x$ . Assim, tem-se  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$ . Ou seja, se as órbitas não forem disjuntas elas serão iguais.