UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CLASSIFICAÇÃO DE FIBRADOS PRINCIPAIS

MÁRCIA RAMPINELLI ZANELLA

OUTUBRO 1980

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

"MESTRE EM CIÊNCIAS"

Especialidade em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina.

William G. Whitley

Prof. William Glenn Whitley, Ph. D.

Banca Examinadora:

Italo J. Dejter

Prof. Italo José Dejter, Ph.D.
Orientador

I Taneja

Prof. Inder Teet Taneja, Ph. D.

Donald Morison Silberger

Prof. Donald Morison Silberger, Ph.D.

A meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Italo José Dejter, pela orientação e estímulo indispensáveis à concretização deste trabalho.

A todos meus professores, pelos sábios e humanos ensinamentos.

Aos caros colegas, pela permanente camaradagem e troca de salutares idéias em busca da almejada meta.

Ao Marcílio, ao Leonardo e ao Fabrício que, privados do convívio familiar, apoiaram-me nos estudos e na elaboração deste trabalho.

À Universidade Federal de Santa Catarina.

RESUMO

Este trabalho apresenta noções da teoria de homotopia e da teoria de fibrados, tendo como objetivo a classificação de fibrados universais. Ainda estabelece uma correspondência da idéia de fibrados, dada por N. Steenrod, com o moderno enfoque dado por G. Bredon.

A B S T R A C T

Concepts from homotopy theory and fibre bundles will be presented to obtain the classification of universal bundles. In addition, we illustrate the relationships between the developments of fibre bundles given by N. Steenrod and G. Bredon.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO 1

CAPITULO 0 - NOÇÕES PRELIMINARES 2

CAPITULO I - NOÇÕES DA TEORIA DE HOMOTOPIA 9

CAPITULO II - NOÇÕES DA TEORIA DE FIBRADOS 17

CAPITULO III - HOMOTOPIA DE FIBRADOS E O TEOREMA DA CLASSIFICAÇÃO 48

APÊNDICE 67

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 70

INTRODUÇÃO

A teoria de fibrados apresenta importantes aplicações de Topologia à Geometria Diferencial. Neste trabalho expomos alguns tópicos fundamentais desta categoria, tendo como objetivo a classificação de fibrados, além de fazer uma comparação do tratamento de N. Steenrod ([9]), que seguimos no decorrer do trabalho, com o moderno enfoque de fibrados através do produto torcido, dado por Glen E. Bredon ([1]).

Para isto, damos algumas noções preliminares, no capítulo 0, bem como noções da teoria de homotopia, no capítulo I, e noções da teoria de fibrados, no capítulo II. E ainda, no capítulo III, abordamos, em especial:

- a classificação de fibrados sobre a n- esfera S^n e com grupo G, reduzindo assim o problema de classificação desses fibrados ao cálculo dos grupos de homotopia de G, $\Pi_{n-1}(G)$;
- a classificação de fibrados principais, através de fibrados universais, que reduz o problema de classificação desses fibrados para um problema de classificação de homotopia.

CAPÍTULO 0

NOÇÕES PRELIMINARES

0.1. DEFINIÇÃO

Se G é um grupo topológico ([2]) e Y é um espaço topológico, dizemos que G é um <u>grupo topológico de transformações de Y</u> relativo a aplicação $\phi : G \times Y \to Y$ se

(i) ϕ é contínua

(ii) $\phi(e,y) = y$, para todo y em Y, e

(iii) $\phi(g, \phi(h,y)) = \phi(gh,y)$, para cada g,h em G e y em Y. Neste caso, dizemos que <u>G opera sobre Y</u> (à esquerda). A aplicação ϕ é chamada uma <u>operação</u> (ou <u>ação</u>) de G sobre Y. O espaço Y, com uma dada ação ϕ de G, é chamado um <u>G - espaço</u> (à esquerda).

Representaremos por gy a imagem do par (g,y) pela aplicação ϕ, ou seja, $\phi(g,y) = gy$, para g em G e y em Y.

Nessas condições, cada g em G induz uma aplicação ϕ: $Y \to Y$ definida por $\phi_g(y) = gy$ todo y em Y, que é um homeomorfismo de Y ([7], pág. 7). Consequentemente, a aplicação $g \mapsto \phi_g$ é um homomorfismo de G no grupo dos homeomorfismos de Y.

0.2. DEFINIÇÃO

Dizemos que G é <u>efetivo</u>, (ou que a ação ϕ é efetiva) se $gy = y$ implica que $g = e$, para todo y em Y. Neste caso, é possível identificar G com o grupo dos homeomorfismos de Y. (Os grupos topológicos de transformações que vamos considerar, no Capítulo II, serão efetivos).

0.3. DEFINIÇÃO

Uma <u>n - variedade</u> é um espaço em que cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa a algum conjunto aberto em R^n. (Nos restringimos a variedades que são separáveis, métricas e conexas).

Um <u>sistema S de coordenadas diferenciáveis em uma n-va-</u>

riedade X é uma família $\{V_j\}$, j em J, de conjuntos abertos cobrindo X e, para cada j, um homeomorfismo

$$\psi_j : E_j \to V_j, \; E_j \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto tal que}$$

$$(1) \quad \psi_j^{-1} \circ \psi_i : \psi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \to \psi_j^{-1}(V_i \cap V_j), \; i, j \text{ em}$$

J, é diferenciável.

Se cada uma de tais aplicações tem derivadas contínuas de ordem r, então S é dito de <u>classe r</u>. Se S é de classe r para cada r então S é dito de classe ∞. Se tais aplicações são analíticas' então S é <u>analítica</u> ou de <u>classe w</u>.

Dois sistemas de coordenadas em X, S e S', de classe r são chamados <u>r - equivalentes</u> se as famílias compostas $\{V_j, V_k'\}$, $\{\psi_j, \psi_k'\}$ formam um sistema de classe r.

Uma <u>n - variedade diferenciável</u> X de classe r é uma variedade X juntamente com uma classe r - equivalente de sistemas de coordenadas X.

Sejam X e X' variedades diferenciáveis de dimensões n e n', respectivamente, de classe $\geq$ r. Uma aplicação f: X $\to$ X' diz-se de classe r se existem sistemas de coordenadas representativos de S e S' tais que a aplicação

$$\psi_k'^{-1} f \; \psi_j : \psi_j^{-1}(V_j \cap f^{-1}(V_k')) \to E_k', \text{ para } j \text{ em } J, \; k \text{ em}$$

J', tem derivadas contínuas de ordem r.

0.4. <u>DEFINIÇÃO</u>

Um <u>grupo de Lie</u> B é um grupo topológico e uma variedade diferenciável de classe 1, em que a operação de B×B em B dada por $(b,b') \mapsto bb'$ e a operação de B em B dada por $b \mapsto b^{-1}$ são aplicações diferenciáveis de classe 1. Qualquer subgrupo fechado G de B é um grupo de Lie.

0.5. <u>DEFINIÇÃO</u>

Seja B um grupo topológico e seja G um subgrupo fechado de B. Definimos uma relação de equivalência em B como segue: dois elementos b e b' de B são ditos <u>equivalentes</u> se e somente existe um elemento $g \in G$ tal que $bg = b'$. Assim os elementos de B estão divididos em classes de equivalência disjuntas chamadas classes à esquerda de G em B.

A classe à esquerda contendo $b \in B$ é o conjunto cujos elementos são essas classes à esquerda de G em B.

Definimos <u>projeção natural</u>

$$p: B \to B/G \quad \text{por } b(b) = b.G.$$

Um subconjunto U de B/G é chamado <u>aberto</u> se $p^{-1}(U)$ é um conjunto aberto de B. Esses conjuntos abertos definem uma topologia em B/G. O conjunto B/G é chamado <u>espaço quociente</u> de B por G. Por definição p é uma aplicação contínua.

A projeção natural p é uma aplicação aberta: para isto, vamos mostrar que $p^{-1}p(U)$ é aberto em B. Seja U um conjunto aberto em B; então $p^{-1}p(U) = U.G = \{ug;\ u \in U,\ g \in G\}$ é aberto em B. Logo $p(U)$ é aberto em B/G.

Vamos verificar agora que B/G é um espaço Hausdorff. Sejam x e x' pontos distintos de B/G, e escolhemos b em $p^{-1}(x)$ e b' em $p^{-1}(x')$. Então $b^{-1}b'$ não está em G. Seja W uma vizinhança de $b^{-1}b'$, com $W \cap G = \phi$. Sejam U e V vizinhanças de b e b', respectivamente, tais que $U^{-1}V \subset W$. Então p(U) e p(V) são vizinhanças de x e x'. Vamos mostrar que essas vizinhanças não têm ponto comum. Suponhamos que exista x" em $p(U) \cap p(V)$ e $p(b") = x"$. Então existem g e g' em G tais que b"g está em U e b"g' está em V. Portanto,

$$(b"g)^{-1}(b"g') = g^{-1}b"^{-1}b"g' = g^{-1}g' \text{ está em } W, \text{ o que}$$

impossível, pois $W \cap G = \phi$

0.6. <u>DEFINIÇÃO</u>

Se x está em B/G e b está em B, definimos a <u>translação à esquerda de x por b</u> por

$$b.x = p(b.p^{-1}(x)).$$

Sob esta operação podemos verificar que

$$(b_1.b_2).x = b_1.(b_2.x), \text{ pois}$$

$$(b_1.b_2).x = p(b_1b_2.p^{-1}(x)),$$

$$b_1 \cdot (b_2 \cdot x) = b_1(pb_2 \cdot p^{-1}(x)) =$$

$$= p(b_1 \cdot p^{-1}(pb_2 \cdot p^{-1}(x))) = p(b_1 b_2 \cdot p^{-1}(x)).$$

E portanto B é um grupo de transformações de B/G relativo a esta operação.

Vamos ver que B é o grupo de homeomorfismos de B/G. Seja U um conjunto aberto em B/G; então $p^{-1}(U)$, $b.p^{-1}(U)$ e $p(b.p^{-1}(U))$ são também abertos. Portanto, b.U é aberto.

0.7. DEFINIÇÃO

Seja G um grupo que opera sobre um conjunto A. Para quaisquer x e x' em A se existe g em G tal que x' = gx, dizemos que o grupo G é transitivo, ou que o grupo G opera transitivamente sobre o conjunto A.

O grupo B opera transitivamente em B/G.

0.8. DEFINIÇÃO

Definimos G_o como a interseção de todos os subgrupos de $b\,G\,b^{-1}$ conjugados a G em B. Então G_o é o subgrupo invariante fechado em B, e é o maior subgrupo de G que é invariante em B. E B/G_o é um grupo topológico de transformações de B/G ([9], pág. 29).

0.9. DEFINIÇÃO

Se B é um grupo de Lie compacto, ou se p': B → X é uma aplicação aberta, então a aplicação natural q: B/G → X é um homeomorfismo. Dizemos então que a projeção natural p e a aplicação p' são topològicamente equivalentes e podemos identificar X ≈ B/G.

PROVA:

Seja B um grupo topológico de transformações transitivo (0.7) de X. Seja x_o em X um ponto base. (Ver def. 1.1.). Definimos a aplicação

p' : B → X por $p'(b) = bx_o$, que é contínua. Seja G o subgrupo dos elementos de B que aplica x_0 em si mesmo. Então G é subgrupo fechado, e para cada x em X, $p'^{-1}(x)$ é uma classe à esquerda de G em B. Isto define uma única aplicação 1 - 1, $q: B/G \to X$ tal que $q(p(b)) = p'(b)$, para todo b em B, onde $p: B \to B/G$ é a projeção natural.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p'} & X \\ p \downarrow & \nearrow q & \\ B/G & & \end{array}$$

Vamos mostrar que q é contínua. Se U é um conjunto aberto em X, $p'^{-1}(U)$ é um aberto em B, e

$$p'^{-1}(U) = (q \circ p)^{-1}(U) = (p^{-1} \circ q^{-1})(U). \text{ Portanto}$$

$q^{-1}(U)$ é aberto em B/G.

A aplicação q^{-1} nem sempre é contínua. Mas se B é compacto, ou se p' é uma aplicação aberta, então q^{-1} será contínua. Isto se deve aos resultados seguintes:

(1) Se B é compacto, B/G também é. E ainda, uma aplicação 1-1 contínua de um espaço de Hausdorff compacto sobre um espaço de Hausdorff é um homeomorfismo.
(2) q^{-1} é contínua se e somente se p' é aplicação aberta.

0.10. PROPOSIÇÃO

O maior subgrupo de 0_k que é invariante em 0_{k+1} consite só do elementoe([9]).

0.11. DEFINIÇÃO

Diz-se que um espaço Y é sólido se, para cada espaço X e cada subespaço A de X, a aplicação $f: A \to Y$ tem uma extensão sobre X, ou seja, se dada uma aplicação $f: A \to Y$, existe uma aplicação $f': X \to Y$ tal que $f'|A = f$.

Qualquer intervalo de números reais (aberto ou fechado) é um espaço sólido. O produto topológico de uma coleção de espaços sólidos é sólido ([6]). Portanto, o n - espaço euclideano e qualquer cubo fechado n - dimensional são sólidos. Seus homeomorfos, as n - células abertas e fechadas, são também sólidos.

0.12. DEFINIÇÃO

Um subespaço A de X é chamado retrato de X se existe uma aplicação $r: X \to A$ tal que $r \circ i = id_A$. Dizemos então que r é uma r e t r a ç ã o de X sobre A. Um espaço métrico compacto X é chamado um retrato absoluto se é um retrato de qualquer espaço métrico separável que contém X.

0.13. PROPOSIÇÃO

Para um espaço métrico compacto Y, as propriedades de retrato absoluto e sólido são equivalentes.

PROVA:

Como uma retração é uma extensão da aplicação identidade, segue que sólido implica retrato absoluto. Reciprocamente, seja Y um retrato absoluto. Mergulhamos Y topològicamente no cubo de Hilbert Z ([3]). Seja $r: Z \to X$ uma retração. Se A é fechado em X e $f: A \to Y$ podemos ver f como uma aplicação de A em Z. Como Z é sólido, f se estende a uma aplicação $f': X \to Z$. Então $r \circ f'$ é uma extensão de f a uma aplicação de X em Y. Portanto Y é sólido.

0.14. PROPOSIÇÃO

Se Y é um espaço sólido tal que $Y \times I$ é normal, então Y é contratível a um ponto y_0, ou seja, Y é localmente contratível ([9]).

0.15. DEFINIÇÃO

Um $C\sigma$- espaço X é um espaço normal, localmente compacto tal que qualquer recobrimento de X por conjuntos abertos é redutível a um recobrimento contável.

0.16. DEFINIÇÃO

Um n - complexo finito, ou CW - complexo finito, X é uma coleção $\{E_i^n, n = 0,1, \ldots, p; i = 1, \ldots, \alpha_n\}$, de subconjuntos fechados de X, satisfazendo às seguintes condições:

Sejam $X^n = \bigcup_{m \leq n} E_i^m$, $\partial E_i^n = E_i^n \cap X^{n-1}$,

$\text{Int } E_i^n = E_i^n - \partial E_i^n$. Então

(i) os conjuntos $\text{Int } E_i^n$ são mútuamente disjuntos;

(ii) existem aplicações $f_i^n : (I^n, \partial I^n) \to (E_i^n, \partial E_i^n)$ tais que: $f_i^n(I^n) = E_i^n$ e f_i^n leva $\text{Int } I^n$ homeomorficamente sobre $\text{Int } E_i^n$;

(iii) um subconjunto A de X é fechado se e somente $A \cap E_i^n$ é fechado.

Os conjuntos E_i^n são chamados n - células de X, e X^n é chamado o n - esqueleto de X.

Um n - complexo X_1 é dito ser um sub-complexo de X se e somente se X_1 é um subespaço de X e cada célula de X_1 é uma célula de X.

Como cada célula é um espaço compacto e X é uma união finita de células segue que X é compacto.

CAPITULO I

TEORIA DE HOMOTOPIA

I.I. DEFINIÇÃO

Seja X um espaço topológico, e seja I o intervalo unitário. Uma curva (ou caminho) em X é uma aplicação $f: I \to X$; diz-se que f começa em f(0) e termina em f(1). Uma curva tal que $f(0) = f(1) = x_0$ é dita ter ponto base x_0 em X. Seja F o conjunto de todas as curvas em X com ponto base em x_0 , ou seja,

$$F = \{f: I \to X; \quad f(0) = f(1) = x_0\}.$$

Dadas as curvas f e g em F, definimos

$$(f.g)(t) = \begin{cases} f(2t), \text{ para } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ g(2t-1), \text{ para } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Para t = 1/2, temos f(1) = g(0).

Duas curvas f e g são ditas homotópicas, denotando - se $f \simeq g$, se existe uma aplicação $h_t: I \to X$, para $0 \leqslant t \leqslant 1$, tal que $h_0 = f$, $h_1 = g$ e $h_t(0) = x_0 = h_t(1)$ para todo t em I. A relação de homotopia é de equivalência, portanto as curvas em F estão divididas em classes equivalentes disjuntas. Seja $\Pi_1(X,x_0)$ o conjunto dessas classes e seja {f} a classe contendo f em F. Seja d a curva degenerada $d(I) = x_0$. Para f em F, seja f^{-1} a curva inversa de f definida por $f^{-1}(t) = f(1-t)$, para qualquer t em I.

As seguintes propriedades fundamentais podem ser verificadas:

(1) se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $f.g \simeq f'.g'$

(2) $(f.g).h \simeq f.(g.h)$

(3) $f.d \simeq f \simeq d.f$

(4) $f.f^{-1} \simeq d \simeq f^{-1}.f$.

De acordo com (1) a classe {f.g} depende somente das classes {f} e {g}. Portanto podemos definir uma multiplicação em $\Pi_1(X, x_0)$:

$$\{f\} . \{g\} = \{f.g\}$$

Por (2), (3) e (4) essa multiplicação torna $\Pi_1(X,x_0)$ um grupo que é chamado <u>grupo fundamental de X em x_0</u>.

1.2. DEFINIÇÃO

Para cada n>1, a definição do grupo de homopotia $\Pi_n(X,x_0)$ é análoga à do grupo fundamental $\Pi_1(X,x_0)$. Definimos o <u>n - cubo</u> I^n, i.é, o produto topológico de n - cópias do intervalo unitário I, como o conjunto dos números reais $t=(t_1, \ldots, t_n)$ para t_i em I, i= 1, ..., n. Uma <u>(n-1) - face</u> de I^n é obtida fazendo alguma coordenada $t_1= 0$ ou 1. A união das (n-1) - faces de I^n formam o <u>bordo de I^n</u>, representado por ∂I^n, que é homeomorfo à (n-1) - esfera unitária S^{n-1}.

Consideramos o conjunto $F^n(X,x_0)$ das aplicações $f: (I^n, \partial I^n) \to (X,x_0)$.

Essas aplicações estão divididas em classes de equivalência chamadas <u>classes de homotopia</u>. Representamos por $\Pi_n(X,x_0)$ o conjunto dessas classes de homotopia.

Se o bordo ∂I^n é identificado a um ponto, obtemos um espaço que é homeomorfo a uma n-esfera S^n com um ponto base y_0. Portanto podemos definir um elemento de $\Pi_n(X,x_0)$ como uma classe de homotopia das aplicações $f:(S^n, y_0) \to (X,x_0)$.

A <u>(n-1) - face inicial</u> de I^n, representada por I^{n-1}, é obtida fazendo $t_n = 0$. A união de todas as (n-1) - faces restantes de I^n é representada por J^{n-1}.

Seja X um espaço topológico, A um subespaço de X, e x_0 um ponto de A. Uma aplicação $f:(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X,A, x_0)$ é uma aplicação contínua de I^n em X que leva I^{n-1} em A e J^{n-1} em x_0. Em particular, leva ∂I^n em A e ∂I^{n-1} em x_0. Representamos por $F^n(X,A,x_0) = F^n$ o conjunto de tais funções.

Definimos uma adição (geralmente não comutativa) em F^n como segue:

Se f e g estão em F^n,

$$(f+g)(t) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & 0\leq t_1\leq 1/2, \\ g(2t_1-1, t_2, \ldots, t_n), & 1/2\leq t_1\leq 1. \end{cases}$$

Se $n \geq 2$ e $t_1 = 1/2$, então

$f(1, t_2, \ldots, t_n) = g(0, t_2, \ldots, t_n) = x_o$

Portanto $f + g$ está em F^n, quando $n \geq 2$.

Duas aplicações f e g de F^n são homotópicas em F^n, denotando-se por $f \simeq g$, se existe uma aplicação $h: I^n \times I \to X$, tal que $h(t,0) = f(t)$, $h(t,1) = f(t)$ e para cada i, $0 \leq i \leq 1$, a aplicação $h(t,i)$ está em F^n.

A relação de homotopia é reflexiva, simétrica e transitiva, portanto divide F^n em classes de equivalência disjuntas , chamadas classes de homotopia. Essas classes são os elementos de $\Pi_n(X,A,x_o) = \Pi_n$.

Se $f_i \simeq g_i$, $(i = 1,2)$ em F^n, podemos combinar essas duas homotopias para formar uma homotopia $f_1 + f_2 \simeq g_1 + g_2$. Portanto, se α e β são elementos de Π_n, todas as somas $f_1 + f_2$, f_1 em α , f_2 em β, estão em alguma classe de homotopia de Π_n. Definimos a adição em Π_n colocando $\alpha + \beta = \gamma$.

Com relação a essa adição, $\Pi_n(X,A,x_o)$ é um grupo chamado <u>n-grupo de homotopia relativo de X mod A com ponto base x_o</u>. Esse grupo é sempre definido para $n \geq 2$. Quando $A = x_o$, escrevemos $\Pi_n(X,A,x_o) = \Pi_n(X,x_o, x_o) = \Pi_n(X,x_o)$ e ainda, se n=1, $\Pi_n(X,x_o)$ coincide com o grupo fundamental $\Pi_1(X,x_o)$.

O grupo $\Pi_n(X,x_o)$ é abeliano para $n \geq 2$ e $\Pi_n(X,A,x_o)$ é abeliano para $n > 2$ ([6]).

1.3. DEFINIÇÃO

Para cada $n > 0$, podemos definir uma aplicação

$\partial: \Pi_n(X,A,x_o) \to \Pi_{n-1}(A,x_o)$.

Se α é um elemento qualquer de $\Pi_n(X,A,x_o)$, então, por definição, α é uma classe de homotopia representada por uma aplicação $f: (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X,A,x_o)$. Se $n = 1$, $f(I^{n-1})$ é um ponto de A que determina β em $\Pi_{n-1}(A,x_o)$. Se $n \geq 1$, então a restrição $f|I^{n-1}$ é uma aplicação de $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$ em (A,x_o) e portanto representa um elemento β em $\Pi_{n-1}(A,x_o)$.

O elemento β em $\Pi_{n-1}(A,x_o)$ não depende da escolha da aplicação f que representa o elemento α em $\Pi_n(X,A,x_o)$. Portanto, podemos definir ∂ por $\partial(\alpha) = \beta$, e é chamado o <u>operador de bordo</u>. Se $n > 1$, ∂ é um homomorfismo ([6]).

1.4. DEFINIÇÃO

Seja uma aplicação $h: (X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$, uma função contínua de X em Y que leva A em B e x_0 em y_0.

Para qualquer f em $F^n(X,A,x_0)$, a composição $h \circ f$ está em $F^n(Y,B,y_0)$, e $f \mapsto h \circ f$ define a aplicação de $F^n(X,A,x_0)$ em $F^n(Y,B,y_0)$. Portanto h define uma aplicação

$$h_*: \Pi_n(X,A,x_0) \to \Pi_n(Y,B,y_0).$$

Para f e g em $F^n(X,A,x_0)$, $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$ está em $F^n(Y,B,y_0)$. Portanto h é um homomorfismo, chamado homomorfismo induzido.

1.5. PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

Os grupos de homotopia $\Pi_n(X,A,x_0)$, o operador bordo ∂ e os homomorfismos induzidos determinam as propriedades fundamentais que são dadas a seguir.

1.5.1. Se $f: (X,A,x_0) \to (X,A,x_0)$ é a aplicação identidade, então f_* é a aplicação identidade em $\Pi_n(X,A,x_0)$, para todo n.

1.5.2. Sejam as aplicações $f: (X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$ e $g: (Y,B,y_0) \to (Z,C,z_0)$. Então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, para todo n.

1.5.3. Seja a aplicação $f: (X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$ e seja $g: (A,x_0) \to (B,y_0)$ a restrição de f. Então $\partial \circ f_* = g_* \circ \partial$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo, para todo n.

$$\begin{tikzcd}
\Pi_n(X,A,x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"'] & \Pi_{n-1}(A,x_0) \arrow[d, "g_*"] \\
\Pi_n(Y,B,y_0) \arrow[r, "\partial"] & \Pi_{n-1}(B,y_0)
\end{tikzcd}$$

Sejam as aplicações inclusão

$$i: (A, x_o) \subset (X, x_o), \quad j: (X, x_o) \subset (X, A, x_o)$$

(ou seja,

$i(x) = j(x) = x$), que induzem as aplicações i_* e j_* para todo n. A sequência

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \Pi_n(A,x_o) \xrightarrow{i_*} \Pi_n(X,x_o) \xrightarrow{j_*} \Pi_n(X,A,x_o) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(A,x_o) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{j_*} \Pi_2(X,A,x_o) \xrightarrow{\partial_*} \Pi_1(A,x_o) \xrightarrow{i_*} \Pi_1(X,x_o),$$ é chamada sequência homotópica de (X,A,x_o). Tal sequência é exata se o núcleo de cada aplicação coincide com a imagem da aplicação precedente.

1.5.4. A sequência homotópica de (X,A,x_o) é exata.

1.5.5. Se $f,g: (X,A, x_o) \to (Y,B,y_o)$ são aplicações homotópicas então:

$f_*, g_*: \Pi_n(X,A,x_o) \to \Pi_n(Y,B,y_o)$ são iguais para cada n.

1.5.6. Se X é um espaço que consiste de um único ponto x_o, então $\Pi_n(X,x_o) = 0$ para cada n.

1.6. <u>DEFINIÇÃO</u>

Uma aplicação $h: (X,A,x_o) \to (Y,B,y_o)$ induz aplicações $h_1: (X,x_o) \to (Y,y_o)$ e $h_2: (A,x_o) \to (B,y_o)$. Essas aplicações induzem homomorfismos de seus correspondentes grupos de homotopia:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \Pi_n(A,x_o) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "h_{2*}"] & \Pi_n(X,x_o) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "h_{1*}"] & \Pi_n(X,A,x_o) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_*"] & \Pi_{n-1}(A,x_o) \arrow[r] \arrow[d, "h_{2*}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \Pi_n(B,y_o) \arrow[r, "i_*"] & \Pi_n(Y,y_o) \arrow[r, "j_*"] & \Pi_n(Y,B,y_o) \arrow[r, "\partial"] & \Pi_{n-1}(B,y_o) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

A comutatividade se verifica em cada quadrado do diagrama. Esse diagrama é chamado <u>homomorfismo da sequência de homotopia de (X,A,x_o) sobre a de (Y,B,y_o) induzida por h</u>.

Se h é um homeomorfismo, então h induz um isomorfismo da sequência de homotopia de (X,A,x_0) sobre a de (Y,B,y_0).

1.7. DEFINIÇÃO

Uma aplicação $h\colon (X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$ é chamada uma equivalência homotópica se existe uma aplicação $k\colon (Y,B,y_0) \to (X,A,x_0)$ tal que $k \circ h$ e $h \circ k$ são homotópicas às aplicações identidade em (X,A,x_0) e (Y,B,y_0), respectivamente.

Se a aplicação identidade de (X,A,x_0) é homotópica à aplicação constante de (X,A,x_0) em x_0, então todos os grupos de homotopia de (X,A,x_0) contêm somente o zero.

1.8. PROPOSIÇÃO

Seja a sequência exata de grupos abelianos e homomorfismos

$$\cdots \to G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} G_{i+3} \to \cdots ,$$

para $i = 0,1,2, \ldots$

Se $G_{3i} = 0$, então f_{3i+1} é um isomorfismo, para $i = 0,1,2, \ldots$

1.9. PROPOSIÇÃO

Os grupos de homotopia $\Pi_q(S^n)$ são nulos, para $q < n$.

1.10. PROPOSIÇÃO

O primeiro grupo de homotopia de S^n não nulo é o de ordem n, e seu grupo é cíclico infinito.

1.11. DEFINIÇÃO

Seja $H_n(X,A)$ o n-grupo de homologia relativo de X mod A com coeficientes inteiros ([5]). Em particular, $H_n(I^n, \partial I^n)$ é um grupo cíclico infinito ([10], pág 58). Seja u_n um gerador de

$H_n(I^n, \partial I^n)$. Dada uma aplicação $f: (I^n, \partial I^n) \to (X,A)$, então $f_* u_n$ está em $H_n(X,A)$. Se $f \simeq g$, então $f_* u_n = g_* u_n$ (1.5.5). Portanto existe, para $n \geq 1$, uma aplicação bem definida

$$\phi : \Pi_n(X,A,x_0) \to H_n(X,A),$$

tal que, $\phi\,[f] = f_* u_n$, que é um homomorfismo, chamado <u>homomorfismo natural</u>, ou <u>homomorfismo de Hurewicz</u>.

O homomorfismo ϕ comuta com as operações h_* e ∂ dos grupos de homotopia e homologia. Mais especificamente, a comutatividade se verifica nos diagramas abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \Pi_n(X,A,x_0) & \xrightarrow{h_*} & \Pi_n(Y,B,y_0) \\ \downarrow\phi & & \downarrow\phi \\ H_n(X,A) & \xrightarrow{h_*} & H_n(Y,B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Pi_n(X,A,x_0) & \xrightarrow{\partial} & \Pi_{n-1}(A,x_0) \\ \downarrow\phi & & \downarrow\phi \\ H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) \end{array}$$

1.12. <u>TEOREMA DE HUREWICZ</u>

Seja A um subespaço de X conexo por caminhos e sejam X e A simplesmente conexos. Seja $\Pi_i(X,A,x_0) = 0$, para $2 \leq i < n$. Então $\phi : \Pi_n(X,A,x_0) \approx H_n(X,A)$ ([8]).

1.13. <u>PROPOSIÇÃO</u>

Se A é conexo por caminhos, $\Pi_n(X,A,x_0)$ independente da escolha do ponto base x_0 em A. Ou seja, cada curva $f: I \to A$ induz um isomorfismo

$$f_*: \Pi_n(X,A,x_1) \approx \Pi_n(X,A,x_0)$$

onde $x_0 = f(0)$, $x_1 = f(1)$. Este isomorfismo satisfaz as propriedades:

(a) se f_1 é uma curva de x_0 a x_1 e f_2 é uma curva de x_1 a x_2, então $(f_1 \circ f_2)_* = f_{1*} \circ f_{2*}$,

(b) se f e g são curvas de x_0 a x_1 e f é homotópica a g, levando seus pontos finais fixos, então $f_* = g_*$ ([5] , página 31).

1.14. <u>PROPOSIÇÃO</u>

Se f é uma curva em A, então f induz isomorfismos dos grupos de homotopia de X, de A e de (X,A) com ponto base x_1 sobre os mesmos grupos de homotopia com base x_0, onde x_0 e x_1 estão em A ([9]).

Isto leva ao diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Pi_n(A,x_1) & \xrightarrow{i_*} & \Pi_n(X,x_1) & \xrightarrow{j_*} & \Pi_n(X,A,x_1) & \xrightarrow{\partial} & \Pi_{n-1}(A,x_1) \\
f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow \\
\Pi_n(A,x_0) & \xrightarrow{i_*} & \Pi_n(X,x_0) & \xrightarrow{j_*} & \Pi_n(X,A,x_0) & \xrightarrow{\partial} & \Pi_{n-1}(A,x_0)
\end{array}$$

A comutatividade se verifica em cada quadrado do diagrama. Portanto f_* é um isomorfismo da sequência de homotopia de (X,A,x_1) sobre a de (X,A,x_0), pelo Lema dos Cinco ([10], pág. 88).

Assim, uma curva fechada f com ponto base x_0, em A induz um automorfismo f_* da sequência de homotopia de (X,A,x_0). Como depende somente das classes de homotopia de f e como (a) se verifica, segue que as operações f_* representam $\Pi_1(A,x_0)$ como um grupo de automorfismos da sequência de homotopia de (X,A,x_0). Da mesma forma, $\Pi_1(X,x_0)$ é um grupo de automorfismos de $\Pi_n(X,x_0)$.

CAPÍTULO II

TEORIA DE FIBRADOS

2.1. DEFINIÇÃO

Consideremos dois espaços topológicos B e X e um grupo topológico de transformações G (Ver 0.2).

Um fibrado β é uma terna $\{B,p,X\}$ onde a aplicação $p\colon B \to X$ é uma aplicação contínua, denominada projeção, juntamente com uma coleção de homeomorfismos

$\phi_j\colon V_j \times Y \to p^{-1}(V_j)$, para $V_j \subset X$, onde $\{V_j\}$ é uma família de conjuntos abertos cobrindo X, indexados pelo conjunto J, que satisfaz as seguintes condições:

(1) Para qualquer j em J, $p\,\phi_j(x,y) = x$, para todo x em V_j e y em Y,

(2) Se a aplicação $\phi_{j,x}\colon Y \to p^{-1}(x)$ é dada por

$$\phi_{j,x}(y) = \phi_j(x,y)$$

então o homeomorfismo $\phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x}\colon Y \to Y$, para cada i,j em J e cada x em $V_i \cap V_j$, coincide com a operação de um elemento g de G,

(3) A aplicação contínua $g_{ji}\colon V_i \cap V_j \to G$, para cada i, j em J, é unicamente determinada por

$$g_{ji}(x) = \phi_{j,x}^{-1} \circ \phi_{i,x}.$$

(Se existisse g'_{ji} em G tal que $g'_{ji}y = g_{ji}y$ para todo y em Y, então $g'_{ji} = g_{ji}$, pois G é efetivo (0.2).

Nas condições da definição 2.1, chamaremos B de um espaço fibrado, ou espaço total, X de espaço base, Y de fibra, G de grupo do fibrado, V_j de vizinhanças coordenadas, ϕ_j de funções coordenadas e g_{ji} de transformações coordenadas. O conjunto Y_x, definido por $Y_x = p^{-1}(x)$, é chamado fibra sobre o ponto x de X.

Se x está em X então cada fibra Y_x é homeomorfa a fibra Y.

Segue da definição das transformações coordenadas que

$$\text{(a)} \quad g_{kj}(x)\, g_{ji}(x) = \phi^{-1}_{k,x}\, \phi_{j,x}\, \phi^{-1}_{j,x}\, \phi_{i,x} =$$
$$= \phi^{-1}_{k,x}\, \phi_{i,x} = g_{ki}(x)$$

para x em $V_i \cap V_j \cap V_k$.

Fazendo $k=j=i$, $g_{ii}(x)\, g_{ii}(x) = g_{ii}(x)$ e então

(b) $g_{ii}(x) = id_G$, para x em V_i.

Fazendo $i=k$, $g_{kj}(x)\, g_{jk}(x) = g_{kk}(x) = id_G$ e então

(c) $g_{jk}(x) = g^{-1}_{kj}(x)$, para x em $V_j \cap V_k$.

2.2. DEFINIÇÃO

Uma seção de um fibrado é uma aplicação $f: X \to B$ tal que $p\, f(x) = x$ para cada x em X.

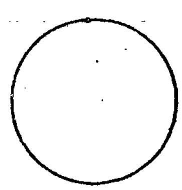
EXEMPLO 1: Fibrado produto

Seja $B = X \times Y$ o espaço produto, e seja $p: B \to X$ a projeção dada por $p(x,y) = x$. Tomando $V_j = X$ e $\phi_j =$ identidade, temos $p\phi_j(x,y) = p(x,y) = x$, e as seções de B são os gráficos das aplicações de X em Y. As fibras são todas homeomorfas, e o grupo G do fibrado consite só do elemento identidade.

EXEMPLO 2: Fita de Möbius

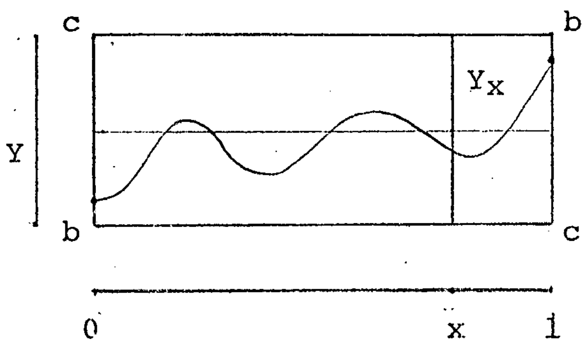
Seja o espaço base X um círculo obtido do segmento de reta $(0,1)$, por identificação de seus extremos 0 e 1.

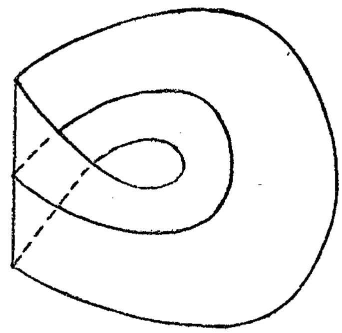
0≡1



X

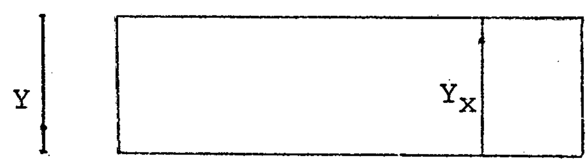
Seja a fibra Y um segmento de reta. O espaço total B é obtido do produto (0,1) × Y, identificando os extremos com uma torsão, conforme a figura abaixo.



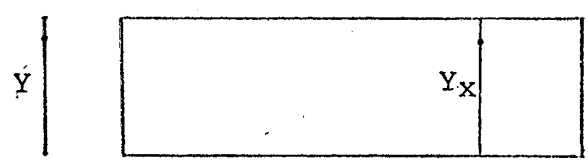


A projeção $(0,1) \times Y \to (0,1)$ induz a projeção $p: B \to X$. Qualquer curva cujos pontos extremos se identificam é uma seção. Existem dois homeomorfismos de Y_x em Y, e_x e g_x, que diferem por uma aplicação $g: Y \to Y$ obtida pela reflexão com relação ao seu ponto médio. Mais especificamente,

$$g_x = g \circ e_x$$

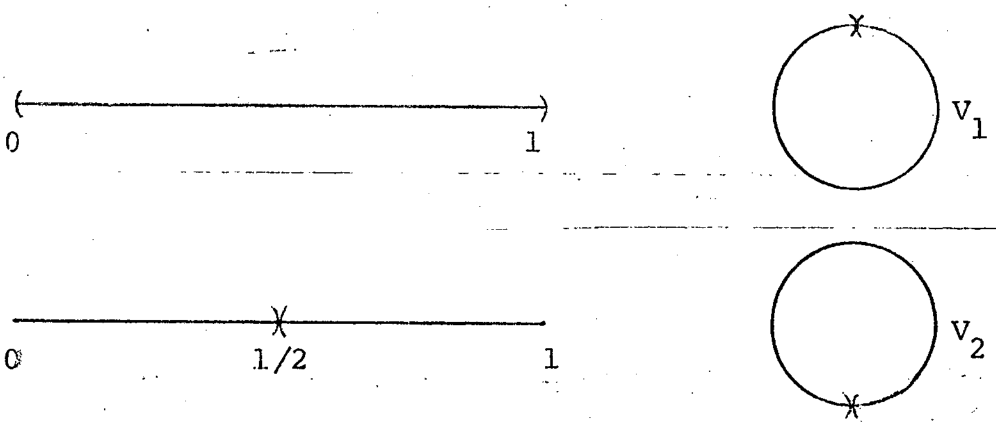


e, $$e_x = g \circ g_x$$

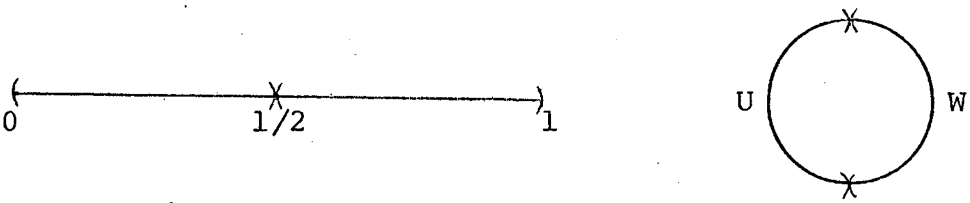


Assim, $G = \{e, g\}$ é um grupo cíclico de ordem 2 gerado por g.

Sejam V_1 e V_2 arcos abertos que cobrem X.



Então $V_1 \cap V_2$ é a união de dois arcos abertos disjuntos U e W.



Definimos as funções coordenadas

$\phi_j \colon V_j \times Y \to p^{-1}(V_j)$, para j= 1,2, por

$\phi_1(x,y) = (x,y)$ e

$$\phi_2(x,y) = \begin{cases} (x,y), & x \text{ em } [0,1/2) \\ (x,\bar{y}), & x \text{ em } (1/2,1]. \end{cases}$$

sendo $\bar{y}$ obtido pela reflexão de y com relação ao ponto médio do segmento Y.

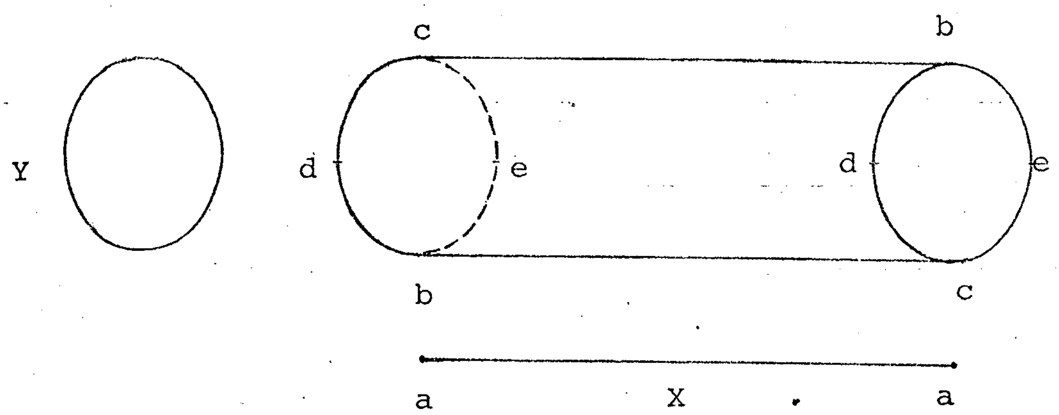
As transformações coordenadas $g_{ji} \colon V_i \cap V_j \to G$, para j= 1,2, são definidas por:

$$g_{12}(x) = \begin{cases} e, & x \text{ em } U \\ g, & x \text{ em } W, \end{cases} \text{ e}$$

$$g_{11} = g_{22} = e \ , \ g_{21} = g_{12}^{-1}.$$

EXEMPLO 3. <u>Garrafa de Klein</u>

A construção anterior é modificada trocando a fibra por um círculo.



Os extremos do cilindro $[0,1] \times Y$ são identificados refletindo no diâmetro d e. O grupo G é o grupo cíclico de ordem 2 gerado por esta reflexão.

EXEMPLO 4. Toro retorcido

O toro retorcido se constrói da mesma forma que no Ex.3, mudando a reflexão do diâmetro d e pela reflexão no centro do círculo, ou seja, a rotação através de 180°. O grupo G é cíclico de ordem 2. Esse fibrado é homeomorfo ao espaço produto $X \times Y$. Mais adiante veremos que, embora não seja um fibrado produto, é equivalente ao fibrado produto no grupo total de rotações de Y.

2.3. DEFINIÇÃO

Sejam β e β' dois fibrados tendo a mesma fibra e o mesmo grupo. Definimos uma aplicação de β em β' por uma aplicação contínua $h: B \to B'$ com as seguintes propriedades:

(1) h leva cada fibra Y_x de B homeomorficamente na fibra $Y_{x'}$ de B', induzindo assim uma aplicação contínua $\bar{h} : X \to X'$ tal que $p' \circ h = \bar{h} \circ p$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & B' \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "\bar{h}"] & X' \end{tikzcd}$$

(2) Se x está em $V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k)$ e $h_x: Y_x \to Y_{x'}$, é a aplicação induzida por h, ($x'=\bar{h}(x)$), então a aplicação

$$\bar{g}_{kj}(x) = \phi'^{-1}_{k,x'}\, h_x\, \phi_{j,x} = p'_k\, h_x\, \phi_{j,x}$$

de Y em Y coincide com a operação de um elemento de G.

(3) A aplicação $\bar{g}_{kj}: V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k) \to G$ assim obtida é contínua.

As funções $\bar{g}_{kj}$ são chamadas <u>transformações de mapeamento</u>.

Segue de (3) de 2.1 e de (2) de 2.3 que

(4) $\bar{g}_{kj}(x)\, g_{ji}(x) = \bar{g}_{ki}(x)$, para x em $V_i \cap V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k)$,

$g'_{lk}(x')\, \bar{g}_{kj}(x) = \bar{g}_{lj}(x)$, para x em $V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k \cap V'_l)$.

2.4. <u>PROPOSIÇÃO</u>

Sejam β e β' dois fibrados tendo a mesma fibra Y e o mesmo grupo G, e seja $\bar{h}: X \to X'$. Seja $\bar{g}_{kj}: V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k) \to G$ um conjunto de aplicações satisfazendo (4). Então existe uma única aplicação $h: \beta \to \beta'$ que induz $\bar{h}$ e que tem $\{\bar{g}_{jk}\}$ como suas transformações de mapeamento ([9]).

2.5. <u>PROPOSIÇÃO</u>

Sejam β e β' fibrados tendo a mesma fibra e o mesmo grupo, e seja $h: \beta \to \beta'$ uma aplicação tal que a aplicação induzida $\bar{h}: X \to X'$ é 1-1 e tem inversa contínua $\bar{h}^{-1}: X' \to X$. Então h tem uma inversa contínua $h^{-1}: B' \to B$ e h^{-1} é uma aplicação de β' em β ([9]).

2.6. <u>DEFINIÇÃO</u>

Dois fibrados β e β' que tem os mesmos espaços base, fi bra e grupo são ditos equivalentes se existe uma aplicação de β em β' que induz a aplicação identidade do espaço base comum. Esta é uma relação de equivalência sendo que a simetria segue de 2.5.

Dois fibrados β e β' são ditos estritamente equivalentes se têm os mesmos espaço total, espaço base, projeção, fibra e grupo e suas funções coordenadas $\{\phi_j\}$, $\{\phi'_k\}$ satisfazem as condições que

$$\bar{g}_{kj}(x) = \phi'_{k,x}\ \phi_{j,x}\ ,\quad x \in V_j \cap V'_k\ .$$

coincidem com a operação de um elemento de G, e a aplicação

$$\bar{g}_{kj}: V_j \cap V'_k \to G$$

assim obtida é contínua.

Podemos ver facilmente que fibrados estritamente equivalentes são equivalentes.

2.7. PROPOSIÇÃO

Sejam β e β' fibrados que têm os mesmos espaço base, fibra e grupo. Então β e β' são equivalentes se e somente se existem aplicações contínuas

$$\bar{g}_{kj}: V_j \cap V'_k \to G\ ,\ j \text{ em } J,\ k \text{ em } J'$$

tais que

$$\bar{g}_{ki}(x) = \bar{g}_{kj}(x)\ g_{ji}(x),\ \text{para } x \text{ em } V_i \cap V_j \cap V'_k$$

e

$$\bar{g}_{lj}(x) = g'_{lk}(x)\ \bar{g}_{kj}(x),\ \text{para } x \text{ em } V_j \cap V_k \cap V'_l.$$

PROVA:

Suponhamos que β e β' são fibrados equivalentes e que $h: \beta \to \beta'$ é uma aplicação de fibrados. Seja a aplicação $\bar{g}_{kj}$, definida em 2.3, por

$$\bar{g}_{kj}(x) = \phi'^{-1}_{k,x}\ h_x\ \phi_{j,x},\ \text{para } x \text{ em } V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k).$$

Como β e β' são equivalentes, a aplicação induzida $\bar{h}$ é a identidade e então x= x'. Logo $\bar{g}_{kj}(x) = \phi'^{-1}_{k,x}\, h_x\, \phi_{j,x}$, para x em $V_j \cap V'_k$. Segue de (4) de 2.3., que essas transformações de mapeamento satisfazem

$$\bar{g}_{kj}(x)\ g_{ji}(x) = \bar{g}_{ki}(x),\ \text{para x em } V_i \cap V_j \cap V'_k \quad \text{e}$$

$$g'_{lk}(x)\ \bar{g}_{kj}(x) = \bar{g}_{lj}(x),\ \text{para x em } V_j \cap V'_k \cap V'_l .$$

Suponhamos agora que são dadas as aplicações $\bar{g}_{kj}: V_j \cap V'_k \to G$, j em J, k em J' tais que

$$\bar{g}_{ki}(x) = \bar{g}_{kj}(x)\ g_{ji}(x)\ ,\ x \text{ em } V_i \cap V_j \cap V'_k \quad \text{e}$$

$$\bar{g}_{lj}(x) = g'_{lk}(x)\ \bar{g}_{kj}(x),\ x \text{ em } V_j \cap V'_k \cap V'_l .$$

No caso em que $\bar{h}$ = id, essas relações implicam as relações (4) de 2.3. Então, por 2.4, existe uma única aplicação h: $\beta \to \beta'$, induzindo $\bar{h}$ que é a identidade. Portanto β e β' são fibrados equivalentes.

2.8. PROPOSIÇÃO

Sejam β e β' dois fibrados, com os mesmos espaço base, fibra, grupo e vizinhanças coordenadas. Sejam g_{ji}, g'_{ji}, suas transformações coordenadas. Então β e β' são equivalentes se e somente se existem aplicações contínuas $\lambda_j: V_j \to G$, j em J, tais que $g'_{ji}(x) = \lambda_j^{-1}(x)\ \ g_{ji}(x)\ \lambda_i(x)$, para x em $V_i \cap V_j$.

PROVA

Se β e β' são equivalentes, então por 2.7, existem $\bar{g}_{kj}: V_j \cap V_k \to G$ tais que

(1) $\bar{g}_{ki}(x) = \bar{g}_{kj}(x)\ g_{ji}(x)$, x em $V_i \cap V_j \cap V_k$, e

(2) $\bar{g}_{lj}(x) = g'_{lk}(x)\ \bar{g}_{kj}(x)$, x em $V_j \cap V_k \cap V_l$.

Fazendo em (1) k=i, temos $\bar{g}_{ii}(x) = \bar{g}_{ij}(x)\ g_{ji}(x)$, para x em $V_i \cap V_j$, então

$$\bar{g}_{ii}(x)\ (g_{ji}\ (x))^{-1} = \bar{g}_{ij}(x), \text{ ou seja,}$$

$$(\bar{g}_{ij}(x))^{-1} = g_{ji}(x)\ (\bar{g}_{ii}(x))^{-1}.$$

Fazendo em (2) k=i e l=j, temos

$$\bar{g}_{jj}(x) = g'_{ji}\ (x)\ \bar{g}_{ij}(x),\ x \text{ em } V_i \cap V_j. \quad \text{Então}$$

$$\bar{g}_{jj}(x)(\bar{g}_{ij}(x))^{-1} = g'_{ji}(x) \quad \text{e assim}$$

$$\bar{g}_{jj}(x)\ g_{ji}(x)(\bar{g}_{ii}(x))^{-1} = g'_{ji}(x).$$

Definindo $\lambda_j = (\bar{g}_{jj})^{-1}$ segue que

$$\lambda_j^{-1}(x)\ g_{ji}(x)\ \lambda_i(x) = g'_{ji}(x), \text{ para, x em } V_i \cap V_j.$$

Suponhamos agora que as aplicações satisfazem

$$g'_{ji}(x) = \lambda_j^{-1}(x)\ g_{ji}(x)\ \lambda_i(x), \text{ para x em } V_i \cap V_j.$$

Definimos: $\bar{g}_{kj}(x) = \lambda_k^{-1}(x)\ g_{kj}(x)$, x em $V_j \cap V_k$.

Fazendo j=i, $\bar{g}_{ki}(x) = \lambda_k^{-1}(x)\ g_{ki}(x)$, x em $V_i \cap V_k$, e de (a) de 2.1, temos

$$\bar{g}_{ki}(x) = \lambda_k^{-1}\ (x)\ g_{kj}(x)\ g_{ji}(x), \text{ para x em } V_i \cap V_j \cap V_k \text{ e}$$

então (1) $\bar{g}_{ki}(x) = \bar{g}_{kj}(x)\ g_{ji}(x)$, para x em $V_i \cap V_j \cap V_k$.

Fazendo agora k=l na função definida acima

$$\bar{g}_{lj}(x) = \lambda^{-1}(x)\ g_{lj}(x),\ x \text{ em } V_l \cap V_j. \quad \text{Então}$$

$$\bar{g}_{lj}(x)\ \lambda_j(x) = \lambda_l^{-1}\ (x)\ g_{lj}(x)\ \lambda_j(x),$$

$$\bar{g}_{lj}(x)\ \lambda_j(x) = g'_{lj}(x) = g'_{lk}(x)\ g'_{kj}(x), \text{ x em}$$

$V_j \cap V_k \cap V_l$.

Então (2) $\bar{g}_{lj}(x) = g'_{lk}(x)\, g'_{kj}(x)\, \lambda_j^{-1}(x) = g'_{lk}(x)\, \bar{g}_{kj}(x)$.

Logo, as aplicações $\bar{g}_{kj}$, definidas acima satisfazem (1) e (2) e por 2.7 segue que β e β' são equivalentes.

2.9. PROPOSIÇÃO

Sejam β e β' fibrados tendo a mesma fibra e mesmo grupo, e seja $h: \beta \to \beta'$ uma aplicação de fibrados. A cada seção $f': X' \to B'$ existe em correspondência uma única seção $f: X \to B$ tal que

$$hf(x) = f'\bar{h}(x), \text{ para } x \text{ em } X.$$

A seção f é dita ser induzida por h e f'.

PROVA

Seja $x' = \bar{h}(x)$. Como $f(x)$ está em Y_x e $h_x: Y_x \to Y_{x'}$ é uma aplicação 1-1, segue que $f(x) = h_x^{-1} f'(x')$, ou seja $h_x f(x) = f'\bar{h}(x)$. Isto define f, e é única. Para provar que f é contínua, basta mostrar que é contínua sobre qualquer conjunto da forma $V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k)$, pois esses conjuntos são abertos e cobrem X. Como $pf(x) = x$ é contínua, resta mostrar que $p_j f(x)$ é contínua, onde $p_j: p^{-1}(V_j) \to Y$ é definida por $p_j(b) = \phi_{j,x}^{-1}(b)$, para $x = p(b)$. A aplicação $\bar{g}_{kj}(x)$ definida anteriormente é contínua e ainda

$$\bar{g}_{kj}(x)\, [p_j f(x)] = \phi'^{-1}_{k,x'}\, h_x \phi_{j,x} p_j f(x) = \phi'^{-1}_{k,x'}\, h_x \phi_{j,x} \phi^{-1}_{j,x} f(x) =$$

$$= \phi'^{-1}_{k,x'}\, h_x f(x) = \phi'^{-1}_{k,x'}\, f'(x') = \phi'^{-1}_{k,x'}\, f'(\bar{h}(x)) = p'_k\, f'(\bar{h}(x)).$$

Portanto $p_j\, f(x) = [\bar{g}_{kj}(x)]^{-1} p'_k f'(\bar{h}(x))$ é contínua.

2.10. TEOREMA DA EXISTÊNCIA

Se G é um grupo topológico de transformações de Y e g_{ij} são as transformações coordenadas no espaço X, então existe um fibrado β com espaço base X, fibra Y, grupo G e as transformações coordenadas g_{ij}. Quaisquer dois tais fibrados são equivalentes.

PROVA

Vamos considerar o conjunto dos índices J para o recobrimento $\{V_j\}$ como um espaço topológico com a topologia discreta. Seja:

$$T = \{(x,y,j) \in X{\times}Y{\times}J;\ x \in V_j\}.$$

Então T é um espaço topológico e é a união dos subconjuntos abertos disjuntos $V_j \times Y \times j$. Definimos uma relação de equivalência:

$$(x,y,j) \sim (x',y',k) \quad \text{se } x = x',\ g_{kj}(x).y = y'.$$

Utilizando a definição de g_{ji}, vamos mostrar que essa relação é de equivalência.

Propriedade Reflexiva:

$$(x,y,j) \sim (x,y,j) \quad \text{pois } x=x \text{ e } g_{jj}(x).y = y.$$

Propriedade simétrica:

Seja $(x,y,j) \sim (x',y',k)$. Então

$x=x'$ e $g_{kj}(x).y = y'$, que implica que $y= g_{kj}^{-1}(x).y' = g_{jk}(x).y'$.

Portanto $(x',y',k) \sim (x,y,j)$.

Propriedade Transitiva:

Supor $(x,y,j) \sim (x',y',k)$ e $(x',y',k) \sim (x'',y'',l)$.

Então: $x=x'=x''$ e $g_{kj}(x).y=y'$ e $g_{lk}(x).y'= y''$.

Mas $g_{lk}(x).g_{kj}(x).y = g_{lk}(x).y'$ e portanto $g_{lj}(x'').y= y''$.

Logo $(x,y,j) \sim (x'',y'',1)$.

Seja B o conjunto das classes de equivalência dessa relação em T. Seja uma aplicação $q: T \to B$, onde

$$(x,y,j) \mapsto \{(x,y,j)\}.$$

Um conjunto U em B é aberto se $q^{-1}(U)$ é um conjunto aberto de T. Então B é um espaço topológico e q é contínua.
Seja $p: B \to X$ uma aplicação definida por $p(\{(x,y,j)\}) = x$. Pela definição da relação de equivalência acima, p é unicamente definida. Se W é um conjunto aberto de X, então $(pq)^{-1}(W) = q^{-1}(p^{-1}(W))$ é a interseção de T com o conjunto aberto $W \times Y \times J$, e portanto, um conjunto aberto de T. Então, por definição, $p^{-1}(W)$ é um conjunto aberto de B; assim p é contínua.

Seja a função coordenada definida por

$$\phi_j(x,y) = q(x,y,j), \text{ para } x \text{ em } V_j \text{ e } y \text{ em } Y.$$

Como q é contínua, ϕ_j também o é.
Temos que $pq(x,y,j) = p(\{(x,y,j)\}) = x$ e então $p\phi_j(x,y) = x$, assim $\phi_j: V_j \times Y \to p^{-1}(V_j)$.

A aplicação ϕ_j é contínua e 1-1, pois se $(x,y,j) \sim (x',y',j)$ então $x=x'$ e $g_{jj}(x) \cdot y = y'$ e assim $y=y'$.

Vamos mostrar que ϕ_j^{-1} é contínua, ou seja, mostrar que se W é aberto em $V_j \times Y$ então $\phi_j(W)$ é aberto em B, i. é, $q^{-1}\phi_j(W)$ é aberto em T. Como os conjuntos, $V_k \times Y \times k$ são abertos e cobrem T, é suficiente provar que $q^{-1}\phi_j(W)$ intercepta $V_k \times Y \times k$ em um conjunto aberto. Essa interseção está contida em $(V_j \cap V_k) \times Y \times k$ que é em si aberto em T. A função q restrita a $(V_j \cap V_k) \times Y \times k$ pode ser fatorada em uma composição $\phi_j \circ r$.

$$(V_j \cap V_k) \times Y \times k \xrightarrow{r} V_j \times Y \xrightarrow{\phi_j} B, \text{ onde } r(x,y,k) = (x, g_{jk}(x) \cdot y).$$

Então r é contínua, e assim $r^{-1}(W)$ é um conjunto aberto.

Seja agora a aplicação $\phi_{j,x}^{-1}\ \phi_{i,x}$ de Y em Y para x em

$V_i \cap W_j$. Se $y' = \phi^{-1}_{j,x} \phi_{i,x}(y)$, segue que $\phi_j(x,y) = \phi_i(x,y')$, ou seja, $q(x,y',j) = q(x,y,i)$, ou $\{(x,y',j)\} = \{(x,y,i)\}$, ou $(x,y',j) \sim (x,y,i)$ e portanto $y' = g_{ji}(x).y$. Assim, para cada y em Y,

$$\phi^{-1}_{j,x} \phi_{i,x}(y) = g_{ji}(x)y .$$

Então as aplicações g_{ji} são as transformações coordenadas do fibrado construído.

Se em 2.8 escolhemos as aplicações λ como sendo constantes e iguais a identidade em G, então quaisquer dois fibrados tendo as mesmas transformações coordenadas são equivalentes. Portanto, o fibrado construído em 2.10., é único a menos de uma equivalência.

Podemos reduzir o problema de classificação de fibrados para o de classificação de transformações coordenadas, através do seguinte resultado.

2.11. PROPOSIÇÃO

A operação que faz corresponder a cada fibrado com espaço base X, fibra Y e grupo G as suas transformações coordenadas, estabelece uma correspondência 1-1 entre as classes de equivalência de fibrados e as classes de equivalência das transformações coordenadas ([9]).

Nos exemplos 2,3 e 4, o espaço base X é o círculo, o grupo G é o grupo cíclico de ordem 2 e as transformações coordenadas g_{ij} são

$$g_{12}(x) = \begin{cases} e, & x \text{ em } U \\ g, & x \text{ em } W, \end{cases}$$

$g_{11} = g_{22} = e$, $g_{21} = g_{12}^{-1}$, conforme foi visto. Permitindo o grupo G atuar em várias fibras, obtemos do teorema 2.10., fibrados correspondentes.

2.12. DEFINIÇÃO

Um fibrado é chamado fibrado produto se existe uma vizinhança coordenada $V=X$ e o grupo G consiste só do elemento identidade.

2.13. PROPOSIÇÃO

Se o grupo de um fibrado consiste só do elemento identidade, então o fibrado é equivalente ao fibrado produto.

PROVA:

Seja β um fibrado com espaço base X, fibra Y e cujo grupo consiste só do elemento identidade, e seja β' o fibrado produto definido acima. Sejam h uma aplicação de β em β' e a aplicação $\bar{g}_{kj}$, definidas em 2.3. Considerando $\bar{h} = id$, $\bar{g}_{kj}$ satisfaz as relações seguintes:

$$\bar{g}_{kj}(x)\ g_{ji}(x) = \bar{g}_{ki}(x) \text{ para } x \text{ em } V_i \cap V_j \cap V'_k$$

$$g'_{lk}(x)\ \bar{g}_{kj}(x) = \bar{g}_{lj}(x), \text{ para } x \text{ em } V_j \cap V'_k \cap V'_l.$$

(Isto segue de (4) da definição 2.3).

Se fazemos $\bar{g}_{kj} = e$, de 2.7 segue que β e β' são equivalentes.

2.14. DEFINIÇÃO

Seja H um subgrupo fechado do grupo topológico G. Se β é um fibrado com grupo H então as mesmas vizinhanças coordenadas, e as mesmas transformações coordenadas, alteradas somente ao considerar seus valores pertencentes a G, definem um novo fibrado, chamado G - imagem de β.

Se dois H - fibrados são equivalentes, então suas G-imagens são equivalentes.

2.15. DEFINIÇÃO

Sejam H e K dois subgrupos fechados de G, e sejam β e β'

fibrados tendo o mesmo espaço base e os grupos H e K, respectivamente. Dizemos que β e β' são equivalentes, (ou G-equivalentes), denotando por $\beta \sim \beta'$, se as G-imagens de β e β' são equivalentes.

Se K é um subgrupo de G contendo só o elemento identidade, então β'' é equivalente ao fibrado do produto e dizemos que o H-fibrado β é G-equivalente ao fibrado produto.

2.16. TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA

Seja β um fibrado com grupo H e transformações coordenadas $\{g_{ji}\}$. Seja H um subgrupo de G. Então β é G-equivalente ao fibrado produto se e somente se existem aplicações

$$\lambda_j: V_j \to G \quad \text{tais que}$$

$$g_{ji}(x) = \lambda_j(x) \quad \lambda_i^{-1}(x), \text{ para } x \text{ em } V_i \cap V_j.$$

PROVA:

Seja β' o fibrado com as mesmas vizinhanças coordenadas que β e com grupo que consiste só do elemento identidade. Então $g'_{ji} = 1$. Por 2.8, β e β' são G-equivalentes se e somente se existem $\lambda_j: V_j \to G$ tais que $g'_{ji}(x) = \lambda_j^{-1}(x)\ g_{ji}(x)\ \lambda_i(x)$, para x em $V_i \cap V_j$. Portanto, $1 = \lambda_j^{-1}(x)\ g_{ji}(x)\ \lambda_i(x)$ e então segue que

$$g_{ji}(x) = \lambda_j(x)\ \lambda_i^{-1}(x), \text{ para } x \text{ em } V_i \cap V_j.$$

EXEMPLO 5:

Seja β o toro retorcido, definido anteriormente. Seja H o grupo de β, H = (e,h), o grupo cíclico de ordem 2. Sejam V_1 e V_2 como definidos no ex. 2. Suponhamos as aplicações $\lambda_j: V_j \to H$, j=1,2, tais que $g_{12}(x) = \lambda_1(x)\ \lambda_2^{-1}(x)$, para x em $V_1 \cap V_2$. Como V_1 e V_2 são conexos e H consiste de 2 elementos, λ_1 e λ_2 devem ser constantes. Fazemos

$$g_{12}(x) = \begin{cases} e, & x \in V \\ h, & x \in W. \end{cases}$$

Para x em U, $g_{12}(x) = e = \lambda_1(x)\ \lambda_2^{-1}(x)$, e para x em W, $g_{12}(x) =$
$= h = \lambda_1(x)\ \lambda_2^{-1}(x) \neq e$.
Absurdo pois λ_1 e λ_2 devem ser constantes. Portanto, esse fibrado não é H - equivalente do fibrado produto.

EXEMPLO 6:

Se considerarmos agora G o grupo total de rotações do círculo Y, então $H = \{e, R_{180°}\}$ é um subgrupo de G. Seja

$$g_{12}(x) = \begin{cases} e, & x \in V \\ R_{180°}, & x \in W. \end{cases}$$

Definimos $\lambda_1(W) = R_{180°}$, $\lambda_1(U) = e$, e extendemos continuamente sobre o resto de V_1 para obter um arco em G unindo essas duas rotações. Definimos: $\lambda_2(V_2) = e$.
Assim temos, $\lambda_j : V_j \to G$, $j=1,2$. Então

$$\lambda_1(x)\ \lambda_2^{-1}(x) = \begin{cases} e, & x \in U \\ R_{180°}, & x \in W, \end{cases} \quad \text{e portanto}$$

$$g_{12}(x) = \lambda_1(x)\ \lambda_2^{-1}(x).$$

Logo β é G- equivalente ao fibrado produto. Assim o toro retorcido não é um fibrado produto, mas é equivalente ao fibrado produto no grupo total de rotações.

2.17. DEFINIÇÃO

Seja B um grupo topológico e seja G um subgrupo fechado de B. Então G é um ponto x_0 de B/G. Uma seção local de G em B é uma função f levando uma vizinhança V de x_0, continuamente sobre B tal que $pf(x) = x$, para cada x em V.

Se B é um fibrado sobre B/G, tal aplicação f existe.

2.18. TEOREMA DE ESTRUTURA DE FIBRADO

Se o subgrupo fechado G de B admite uma seção local f, se H é um subgrupo fechado de G, e $p: B/H \to B/G$ é a aplicação in duzida pela inclusão das classes laterais, então podemos atribuir uma estrutura de fibrado B/H relativo a p. A fibra do fibrado é G/H e o grupo fibrado é G/H_o agindo em G/H como translações à esquerda (0.6), onde H é o maior subgrupo de H_o invariante em G. Qualquer duas seções levam a fibrados estritamente equivalentes. Finalmente, as translações à esquerda de B/H por elementos de B são mapeamentos de fibrados de seu fibrado em si mesmo ([9]).

2.19. <u>COROLÁRIO</u>

Fazendo H = e, temos:

Se G tem uma seção local em B, então B é um fibrado sobre B/G relativo a projeção p que associa a cada b a classe b.G. A fibra de fibrado é G e o grupo é G atuando n a fibra por translações à esquerda.

O teorema da estrutura de fibrado, 2.18, se aplica a qualquer subgrupo fechado G de B. Os exemplos de grupos topológicos que vamos considerar são grupos de Lie.

<u>EXEMPLO 7</u>:

Sejam O_n o grupo ortogonal real de transformações no n espaço euclideano R^n. O_n é um grupo transitivo (0.7) na (n-1) - esfera unitária S^{n-1}. Se x_o está em S^{n-1}, o subgrupo deixando x_o fixo é O_{n-1}. Podemos fazer a identificação

$$S^{n-1} \approx O_n/O_{n-1} \text{ (0.9)}.$$

Então, utilizando 2.19, temos que O_n é fibrado sobre S^{n-1} com fibra e grupo O_{n-1}.

<u>EXEMPLO 8</u>:

Um k - referencial v^k em R^n é um conjunto ordenado de k vetores linearmente independentes. Seja $V'_{n,k}$ o conjunto de todos os k referenciais em R^n, seja L_n o grupo linear completo, e seja $L_{n,k}$ o subgrupo de L_n que deixa fixo cada vetor de um referencial v_o^k. Então podemos identificar $V'_{n,k} \simeq L_n/L_{n,k}$ (0.9), onde o espaço quociente é uma variedade (0.3) com uma estrutura analítica.

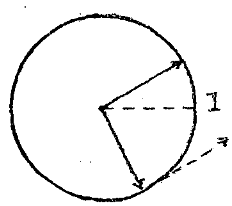
Chamamos $V'_{n,k}$ de <u>variedade de Stiefel dos k - referenciais no n - espaço</u>. Seja $V_{n,k}$ o subespaço de $V'_{n,k}$ dos k - refe -

renciais ortogonais. O grupo ortogonal O_n opera transitivamente em $V_{n,k}$ (0.7). Se O_{n-k} é o subgrupo de O_n deixando fixo um k-referncial ortogonal v_o^k dado, então podemos identificar:

$$V_{n,k} \approx O_n / O_{n-k}.$$

$$\begin{tikzcd} O_n \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & V_{n,k} \arrow[dl, "\approx"] \\ O_n/O_{n-k} & \end{tikzcd}$$

$V_{n,k}$ pode ser interpretado como o espaço dos <u>(k-1)-referenciais ortogonais tangentes em S^{n-1}</u>, pois podemos transladar qualquer vetor v^k ao longo de seu primeiro vetor para seu ponto final em S^{n-1}, e obtemos um (k-1) - referencial de vetores tangentes a um ponto de S^{n-1}.



Seja v_o^n um n - referencial fixo em $\mathbb{R}^n$, e seja v_o^k os k primeiros vetores de v_o^n. Seja O_{n-k} o subgrupo de O_n que deixa v_o^n fixo. Então $O_{n-k} \supset O_{n-k-1}$. Assim obtemos uma cadeia de variedades de Stiefel e projeções

$$O_n = V_{n,n} \to V_{n,n-1} \to \ldots . \to V_{n,2} \to V_{n,1} = S^{n-1}.$$

Cada projeção, ou qualquer composição delas, é uma aplicação de fibrados. Por 2.18, a fibra de $V_{n,n-k+1} \to V_{n,n-k}$, ou seja, de $O_n / O_{k-1} \to O_n / O_k$, é o espaço quociente $O_k / O_{k-1} = S^{k-1}$ e o grupo do fibrado é O_k (0.10).

Um fibrado em que a fibra é uma k - esfera e o grupo é o grupo ortogonal é chamado <u>fibrado k - esférico</u>.

2.20. DEFINIÇÃO

Um fibrado $\beta = \{B,p,X\}$ com fibra Y e grupo G é chamado fibrado principal se Y = G e G age em si próprio por translações à esquerda (0.6).

Todo fibrado tem associado a ele um fibrado principal no qual só muda a fibra Y, que passa a ser o grupo G. A vantagem de passar ao fibrado principal é que, em geral, sua estrutura é mais simples que a do fibrado original.

2.21. DEFINIÇÃO

Seja $\beta = \{B,p,X\}$ um fibrado com fibra Y e o grupo G. O fibrado principal associado $\tilde{\beta}$ de β é o fibrado dado pela construção do teorema 2.10 usando o mesmo espaço base X, as mesmas vizinhaças V_j, as mesmas aplicações g_{ji} e o mesmo grupo G que β mas trocando Y por G e permitindo G operar em si mesmo por translações à esquerda.

2.22. TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA

Dois fibrados tendo os mesmos espaço base, fibra e grupo são equivalentes se e somente se seus fibrados principais associados são equivalentes.

PROVA:

Como um fibrado e seu fibrado principal associado tem as mesmas transformações coordenadas, esse resultado segue imediatamente de 2.7.

2.23. TEOREMA DA SEÇÃO DE UM FIBRADO

Um fibrado principal com grupo G é equivalente em G ao fibrado produto se e somente se admite uma seção f.

PROVA:

Seja β um fibrado equivalente ao fibrado produto. Por

2.16, existem aplicações $\lambda_j : V_j \to G$ tais que

$$g_{ji}(x) \cdot \lambda_i(x) = \lambda_j(x) \ , \text{ para } x \text{ em } V_i \cap V_j .$$

Definimos $f_i(x) = \phi_i\ (x, \lambda_i(x))$, para x em V_i. Então $f_i(x)$ é contínua. E

$$f_i(x) = \phi_i(x,\lambda_i(x)) = \phi_{i,x} \cdot \lambda_i(x) = \phi_{j,x}\, g_{ji}(x) \cdot \lambda_i(x) =$$

$$= \phi_{j,x} \cdot \lambda_j(x) = \phi_j(x, \lambda_j(x)) = f_j(x), \ x \text{ em } V_i \cap V_j .$$ Então, para x em V_i, $f(x) = f_i(x)$ define uma seção contínua.

2.24. COROLÁRIO

Um fibrado com grupo G é equivalente em G a um fibrado produto se e somente se o fibrado principal associado admite uma seção f.

Isto segue imediatamente de 2.22 e 2.23.

EXEMPLO 9:

Sejam a fita de Möbius, a garrafa de Klein e o toro retorcido, fibrados sobre o círculo que tem os mesmos grupos e transformações coordenadas, conforme já visto nos exemplos 2,3 e 4. Portanto têm o mesmo fibrado principal $\mathcal{B}$. Temos que $\mathcal{B}$ é um círculo e p: $\tilde{B} \to X$ é um recobrimento duplo. $\tilde{\mathcal{B}}$ não admite seção.

EXEMPLO 10:

Seja o espaço real 1 - dimensional dos quaternions $q = x_1 + ix_2 + jx_3 + lx_4$. A multiplicação usual satisfaz a condição de norma
$|q.q'| = |q| . |q'|$, onde $|q|^2 = \Sigma x_i^2$.

A 3 - esfera unitária S^3, ($|q| = 1$), é um subgrupo. Se q está em S^3, a transformação do 4 - espaço, dada por $q' \mapsto q.q'$, preserva a norma. Assim para cada q em S^3, associamos uma transformação ortogonal f(q) em O_4, $f: S^3 \to O_4$.

Seja e em S^3, o quartenion unitário e definimos p: $O_4 \to O_4/O_3 \simeq S^3$ por $p(o) = o\,(e)$. Como foi visto no ex. 7, a fibra e o grupo desse fibrado é O_3 e portanto é um fibrado principal. Obviamente, $p\,f\,(q) = q$, portanto f é uma seção. Logo, pelo teorema da seção de um fibrado, 2.23, O_4 é um fibrado produto sobre S^3.

2.25. <u>DEFINIÇÃO</u>

Seja $\mathcal{B} = \{B,p,X,Y,G\}$ um fibrado e $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{B},\tilde{p},X,G,G\}$ seu fibrado principal associado. Seja o fibrado produto

$\tilde{\mathcal{B}} \times Y = \{\tilde{B} \times Y, q, \tilde{B}, Y, G\}$, $q\,(\tilde{b},y) = \tilde{b}$, tratado como um fibrado com grupo G. <u>Definimos a aplicação principal</u>

$$p\colon \tilde{\mathcal{B}} \times Y \to \mathcal{B} \text{ por } P(\tilde{b},y) = \phi_i(x,\tilde{p}_i(\tilde{b})\,y),$$

$x = \tilde{p}(\tilde{b})$ em V_i, que define portanto um conjunto de funções $\{P_i\}$. Para x em $V_i \cap V_j$,

$$P_i(\tilde{b},y) = \phi_i(x,\tilde{p}_i(\tilde{b}).y = \phi_{i,x}(p_i(\tilde{b})\,.\,y) =$$

$$= \phi_{j,x}(g_{ji}(x).\,\tilde{p}_i(\tilde{b})\,.\,y) = \phi_{j,x}(\tilde{p}_j.(\tilde{b}).y) =$$

$$= \phi_j(x,\tilde{p}_j(\tilde{b}).\,y) = P_j(\tilde{b},y).$$

Assim $P_i = P_j$ em $\tilde{p}^{-1}\,(V_i \cap V_j) \times Y$ e P é única. Por definição, cada P_i é contínua, portanto P também o é.

Temos que:

$$pP\,(\tilde{b},y) = \phi_i(x,\tilde{p}_i(\tilde{b}).\,y) = x = \tilde{p}(\tilde{b}) = \tilde{p}\,q\,(\tilde{b},y),$$

e portanto o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B} \times Y & \xrightarrow{P} & B \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ \tilde{B} & \xrightarrow{\tilde{p}} & X \end{array}$$

é comutativo.

Isto significa que P leva fibras em fibras e induz a aplicação $\tilde{p}$ dos espaços base.

2.26. PROPOSIÇÃO

Se $\tilde{\mathcal{B}}$ é um fibrado principal associado de $\mathcal{B}$, então a aplicação $P : \tilde{\mathcal{B}} \times Y \to \mathcal{B}$ é uma aplicação de fibrados e P induz a projeção $\tilde{p} : \tilde{B} \to X$ dos espaços base.

PROVA

Seja $\tilde{\mathcal{B}} \times Y$ um fibrado com vizinhanças coordenadas $V'_j = \tilde{B}$ e funções coordenadas ϕ'_j = identidade.
Se $x = \tilde{p}(\tilde{b})$ em V_i, temos da definição de $\bar{g}_{ij}$ que

$$\bar{g}_{ij}(\tilde{b}) \cdot y = \phi^{-1}_{i,x} \; P_{\tilde{b}} \; \phi'_{j,\tilde{b}}(y) =$$

$$= \phi^{-1}_{i,x} \; P_{\tilde{b}} \; \phi'_j \; (\tilde{b}, y) = \phi^{-1}_{i,x} \; P \; (\tilde{b}, y) =$$

$$= \phi^{-1}_{i,x} \; \phi_i(x, \tilde{p}_i \; (\tilde{b}) \cdot y) = \phi^{-1}_{i,x} \; \phi_{i,x}(\tilde{p}_i(\tilde{b}) \cdot y) =$$

$$= \tilde{p}_i \; (\tilde{b}) \cdot y.$$

Mas $p_i(\tilde{b})$ está em G e é contínua em $\tilde{b}$. Portanto $\bar{g}_{ij} : p^{-1} (V_i) \to G$ é uma aplicação contínua e P é uma aplicação de fibrados.

2.27. DEFINIÇÃO

Uma aplicação $\xi : Y \to Y_x$ é chamada aplicação admissível se $p_i \circ \xi : Y \to Y$, (x em V_i) está em G.
Se x está em $V_i \cap V_j$, então

$$p_j \; \xi = \phi^{-1}_{j,x} \; \xi = g_{ji}(x) \; \phi^{-1}_{i,x} \; \xi = g_{ji} \; p_i \; \xi$$ está também em G. Assim, a admissibilidade independe da vizinhança coordenada.

O espaço $\tilde{B}$ do fibrado principal pode ser interpretado como o conjunto de todas as aplicações admissíveis da fibra Y no espaço fibrado B.

Para qualquer $\mathfrak{b}$ em $\tilde{B}$, onde $x = \tilde{p}(\mathfrak{b})$, definimos $\mathfrak{b}: Y \to Y$ por $\mathfrak{b}(y) = P(\mathfrak{b}, y)$.

Então, $p_i \mathfrak{b}(y) = p_i P(\mathfrak{b}, y) = p_i \phi_i(x, \tilde{p}_i(\mathfrak{b}).y) =$

$$= p_i \phi_{i,x}(\tilde{p}_i(\mathfrak{b}).y) =$$

$$= \phi_{i,x}^{-1} \phi_{i,x}(\tilde{p}_i(\mathfrak{b}).y) = \tilde{p}_i(\mathfrak{b}).y,$$

que está em G. Assim $\mathfrak{b}$ é uma aplicação admissível. Se $x = \tilde{p}(\mathfrak{b})$, então $\mathfrak{b} = \tilde{p}^{-1}(x)$. Seja $G_x = \tilde{p}^{-1}(x)$. Como $\tilde{p}_i$ aplica G_x homeomorficamente em G, segue que elementos distintos de G_x dão aplicações admissíveis distintas de Y em Y_x.

Seja $\xi: Y \to Y_x$ uma aplicação admissível.

Seja $\mathfrak{b} = \phi_i(x, p_i\xi)$, se x está em V_i. Então $\mathfrak{b}$ está em G_x e

$$\mathfrak{b}(y) = p(\mathfrak{b}, y) = \phi_i(x, p_i(\mathfrak{b}).y) = \phi_i(x, p_i\mathfrak{b}(y) =$$

$$= \phi_i(x, \phi_i(x, p_i\xi)\, y) = \phi_i(x, p_i\xi(y) = \xi(y).$$

Assim G_x é o conjunto de todas as aplicações admissíveis de Y em Y_x.

2.28. DEFINIÇÃO

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ fibrados, tendo a mesma fibra e grupo e seja h uma aplicação de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}'$. As transformações de mapeamento $\{\bar{g}_{hj}\}$ de h são como definidas em 2.3. Seja $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ os fibrados principais associados. Segue de 2.4 que existe uma única aplicação

$$\tilde{h}: \tilde{\mathcal{B}} \to \tilde{\mathcal{B}}' \text{ tendo as transformações de mapeamento}$$

$\{\bar{g}_{kj}\}$. Esta aplicação $\tilde{h}$ é chamada aplicação associada dos fibrados principais.

2.29. PROPOSIÇÃO

Se h é uma aplicação de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}'$ e $\tilde{h}$ é a aplicação associada de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}'$, então

$$P'(\tilde{h}(\mathfrak{b}), y) = h\, P(\mathfrak{b}, y),\ \mathfrak{b} \text{ em } \tilde{B} \text{ e } y \text{ em } Y, \text{ onde } P \text{ e } P'$$

são as aplicações principais.

O conteúdo intuitivo dessa proposição é baseado na interpretação de $\mathfrak{b}$ como uma aplicação admissível de Y em Y_x. Então $h_x \mathfrak{b}$, onde $h_x : Y_x \to Y_{x'}$, é uma aplicação de Y em $Y_{x'}$ e é portanto um elemento $\bar{h}(\mathfrak{b})$ em $G_{x'}$. Essa função definida de β em β' é a aplicação associada e é uma aplicação de fibrados.

2.30. PROPOSIÇÃO

Se B é um grupo topológico, G um subgrupo fechado que tem uma seção local, e H um subgrupo fechado de G, então o fibrado $B/H \to B/G$ tem como seu fibrado principal, o fibrado $B/H_o \to B/G$, onde H_o é o maior subgrupo de H invariante em G.

PROVA

Por 2.18, o segundo fibrado tem fibra e grupo G/H_o, portanto é principal.

Vamos aplicar esse resultado a espaços quociente de grupos ortogonais, mais especificamente, às variedades de Stiefel :

Se $j > k$, o fibrado $V_{n,j} \to V_{n,k}$ tem $O_n \to V_{n,k}$ como seu fibrado principal (ver 0.10).

2.31. DEFINIÇÃO

Dois fibrados que tem o mesmo espaço base X e o mesmo grupo G são associados se seus fibrados principais associados são equivalentes.

Um fibrado e seu fibrado principal associado são equivalentes.

Se dois fibrados são equivalentes, são também associados (segue de 2.22).

Se dois fibrados associados tem a mesma fibra, e a mesma ação do grupo na fibra, então são equivalentes.

A relação de ser associado é reflexiva, simétrica e transitiva.

Se $\beta = \{B, p, X, Y, G\}$ e G é também um grupo topológico de transformações de um espaço Y' então 2.10 fornece um novo fibrado do $\beta' = \{B', p', X, Y', G\}$ tendo as mesmas transformações coordenadas que β. Portanto β e β' têm o mesmo fibrado principal. Isto estabelece a existência de um fibrado tendo qualquer fibra (em que G opera).

Existe um grande número de fibrados associados com um fibrado β dado. Precisa-se somente escolher um espaço Y' e um isomorfismo contínuo de G em um grupo de homeomorfismos de Y'.

Utilizando fibras Y' da forma G/H, onde H é um subgrupo de G, e onde G opera efetivamente em G/H, obtemos um fibrado associado. As variedades de Stiefel $V_{n,k}$ são todas fibrados sobre S^{n-1} e têm o fibrado principal comum O_n sobre S^{n-1}.

2.32. DEFINIÇÃO

Seja $\beta = \{B, p, X, Y, G\}$ e seja A um subespaço fechado de X, e H um subgrupo fechado de G. Se para todo i,j em J e x em $V_i \cap V_j \cap A$, a transformação coordenada $g_{ji}(x)$ é um elemento de H, então a porção do fibrado sobre A pode ser vista como um fibrado com grupo H. Deve-se restringir as vizinhanças e funções coordenadas ao conjunto A. Neste caso dizemos que β é um (G,H) - fibrado relativo sobre o espaço base (X,A).

As noções de equivalência estrita, de mapeamento e de equivalência são definidas para fibrados relativos, da mesma forma que para fibrados absolutos, com a excessão que reduzindo para A, o grupo se restringe para H.

2.33. DEFINIÇÃO

Seja β um (G,H) - fibrado sobre (X,A), e seja β' o fibrado associado sobre X tendo fibra G/H e grupo G agindo como translações à esquerda. O grupo de β' é G/H_o onde H_o é o maior subgrupo de H invariante em G. Seja e_o a classe lateral H tratada como um elemento de G/H. Definimos uma seção sobre A do fibrado β' por $f_o(x) = \phi'_j(x, e_o)$, x em $V_j \cap A$. Se x está em $V_i \cap V_j \cap A$, então $\phi'_j(x, e_o) = \phi'_{j,x}(e_o) = \phi'_{i,x}\, g_{ij}(x) \cdot e_o = \phi'_i(x, g_{ij}(x) \cdot e_o) =$
$= \phi'_i(x, e_o)$, pois $g_{ij}(x)$ está em H. Assim f_o define uma única

função contínua sobre A, e é chamada <u>seção canônica</u> do (G,H)-fibrado.

2.34. <u>DEFINIÇÃO</u>

Seja β' um fibrado com espaço base X', fibra Y e grupo G, e seja η: X $\to$X' uma aplicação contínua. Definimos o <u>fibrado induzido</u> $\eta^{-1}\beta'$ com espaço base X, fibra Y e grupo G como segue. As vizinhanças coordenadas V_j são as imagens inversas das de β', ou seja, $V_j = \eta^{-1}V_j'$; as transformações coordenadas são dadas por

$$g_{ji}(x) = g'_{ji}(\eta(x)), \text{ para } x \text{ em } V_i \cap V_j .$$

A <u>aplicação induzida</u> h: $\eta^{-1}\beta \to \beta'$ é definida por

$$h(b) = \phi'_j(\eta\, p(b), p_j(b)), \text{ para } p(b) \text{ em } V_j.$$

Existe uma outra definição de fibrado induzido, que damos a seguir: Sejam β',X, η como acima. Sejam as projeções naturais do espaço produto X $\times$ B', p: X $\times$ B' $\to$ X e h: X $\times$ B' $\to$ B'. Seja $B = \{(x,b') \in X \times B' \,;\, \eta(x) = p'(b')\}$, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & B' \\ p\downarrow & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{\eta} & X' \end{array}$$ é comutativo.

Definimos $V_j = \eta^{-1}(V_j')$ e colocamos $\phi_j(x,y) = (x, \phi_j'(\eta(x), y))$. Então $p\,\phi_j(x,y) = p(x, \phi_j'(\eta(x), y)) = x$.
Colocamos $p_j(x,b') = p_j'(b')$ quando $\eta(x) = p'(b')$ está em V_j. Então

$$p_j\,\phi_j(x,y) = p_j(x, \phi_j'(\eta(x),y)) = p_j'\,\phi_j'(\eta(x), y) = y,$$

e ϕ_j aplica $V_j \times Y$ homeomorficamente em $p^{-1}(V_j) \cap B$. Ainda temos

$$g_{ji}(x)\cdot y = \phi_{j,x}^{-1}\,\phi_{i,x}(y) = p_j\,\phi_i(x,y) =$$

$$= p_j(x, \phi_i'(\eta(x),y)) = p_j'\,\phi_i'(\eta(x), y) =$$

$$= \phi'^{-1}_{j,\eta(x)}\,\phi'_{i,\eta(x)}(y) = g'_{ji}(\eta(x)).y).$$

Portanto, mostramos que ϕ_j definida acima, fornece uma estrutura de fibrado e que as transformações coordenadas desse fibrado coincidem com as do fibrado induzido, definido anteriormente.

2.35. TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA

Sejam β e β' dois fibrados tendo as mesmas fibras e grupo. Seja $h: \beta \to \beta'$ uma aplicação de fibrados e seja $\eta: X \to X'$ a aplicação induzida dos espaços base. Então o fibrado induzido $\hat{\beta} = \eta^{-1}\beta'$ é equivalente a β e existe uma equivalência $h_o: \beta \to \hat{\beta}$ tal que h é a composição de h_o e a aplicação $\hat{h}: \hat{\beta} \to \beta'$.

PROVA:

Usando a segunda definição do fibrado induzido $\hat{\beta}$, definimos

$$h_o: B \to X \times B' \quad \text{por } h_o(b) = (p(b), h(b)).$$

Segue que $(\hat{h}\, h_o)(b) = h(b)$.

$$B \xrightarrow{h_o} X \times B' \xrightarrow{\hat{h}} B'$$

Resta provar que h_o dá uma aplicação de fibrados de β em $\hat{\beta}$. Da definição de aplicação de fibrados η temos que:

$$\eta p(b) = p'\, h(b). \quad \text{Ainda,}$$

$p\, h_o(b) = p(p(b)\, , h(b)) = p(b)$, assim h aplica a fibra sobre x em B na fibra sobre x em $\hat{B}$. As funções $\bar{g}_{ji}$ para h_o são:

$$\bar{g}_{kj}(x) \cdot y = \hat{p}\, h_o \phi_j(x,y) = \hat{p}_k(p\phi_j(x,y)\, , h\phi_j(x,y)) =$$
$$= \hat{p}_k(x, h\, \phi_j(x,y)) = \hat{p}_k\, h\, \phi_j(x,y)).$$

Logo, as funções $\bar{g}_{kj}$ para h_o são as mesmas que para h. Portanto, h_o é uma aplicação de fibrados.

2.36. Damos a seguir algumas propriedades importantes de fibrados induzidos.

1. Se β'_1 e β'_2 são fibrados equivalentes sobre X', e η: X → X', então os fibrados induzidos são equivalentes.

2. Se β'_1 e β'_2 são fibrados associados sobre X', e η : X → X', então os fibrados induzidos são associados.

3. Se β' é um fibrado principal então qualquer fibrado induzido $\eta^{-1}\beta'$ também é principal.

4. Se β é um fibrado sobre X e η: X → X é a aplicação identidade, então a aplicação induzida de $\eta^{-1}\beta$ em β é uma equivalência.

5. Se β' é um fibrado sobre X' e η: X → X' é uma constante i. é, $\eta(X)$ é um ponto de X', então $\eta^{-1}\beta'$ é equivalente ao fibrado do produto.

6. Se η: X → X', η': X' → X", e β'' é um fibrado sobre X", $(\eta' \circ \eta)^{-1}\beta''$ é equivalente a $(\eta^{-1} \circ \eta'^{-1})\beta''$.

2.37. <u>TEOREMA DA EXISTÊNCIA</u>

Seja X um espaço normal com a propriedade que cada cobertura de X por conjuntos abertos é redutível a uma cobertura contável (i. é, X é compacto, ou tem uma base contável, ou é uma união contável de subconjuntos compactos). Seja β um fibrado sobre X com uma fibra que é sólida (0.11).
Seja f uma seção de β definida em um subconjunto fechado A de X. Então f pode ser extendida a uma seção sobre todo X. (Tomando A=0, segue que β tem uma seção).

<u>PROVA</u>:

Seja U_x uma vizinhança de x tal que $\bar{U}_x \subset V_j$ de β, sendo

V_j vizinhanças coordenadas. Escolhemos uma cobertura enumerável $U_1, U_2, \ldots$ de X. Seja $A_o = A$ e definimos A_n indutivamente por $A_n = \bar{U}_n \cup A_{n-1}$. Colocamos $f_o = f$. Suponhamos que existem f_i definidas em A_i tais que $f_i | A_{i-1} = f_{i-1}$, $i < n$. Escolhemos uma V_j que contém $\bar{U}_n$. Seja $C_n = \bar{U}_n \cap A_{n-1}$. Definimos $h: C_n \to Y$ por $h(x) = p_j\, f_{n-1}(x)$. Como $\bar{U}_n$ é fechado em X, é um espaço normal, e C_n é um subconjunto fechado de $\bar{U}_n$. Como Y é sólido, h se extende a uma aplicação $h': \bar{U}_n \to Y$. Colocamos $h''(x) = \phi_j(x, h'(x))$, para x em $\bar{U}_n$. Então h" é contínua, p h" (x) = x e $h'' | C_n = f_{n-1} | C_n$. Se definimos $f_n(x) = f_{n-1}(x)$, para x em A_{n-1} e $f_n(x) = h''(x)$, para x em $A_n - A_{n-1}$, segue que f_n é uma seção contínua sobre A_n extendendo f_{n-1}. Construimos assim uma sequência $\{f_n\}$, onde, para cada n, f_n é uma seção de $\beta | A_n$, e f_n extende f_{n-1}. Agora definimos f' por $f'(x) = f_n(x)$ para x em $A_n - A_{n-1}$. Como X é a união dos interiores de A_n, segue que f' é em toda parte contínua. Então f' é a seção pedida.

2.38. COROLÁRIO

Seja X o espaço definido em 2.37, e seja G um grupo que é sólido. Então qualquer fibrado sobre X com grupo G é eqüivalente ao fibrado produto.

PROVA:

Segue de 2.37 que o fibrado principal associado tem uma seção. Portanto, de 2.23, segue o resultado.

2.39. PROPOSIÇÃO

Seja X um espaço como em 2.37, e seja A um conjunto fechado em X. Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo tal que G/H é sólido. Então qualquer (G,H) - fibrado sobre (X,A) é (G,H) - equivalente a um (H,H) - fibrado ([9]).

Em especial, um caso importante é o que apresentamos a seguir.

2.40. COROLÁRIO

Se X, G e H são como na proposição anterior, então qualquer fibrado sobre X com grupo G é equivalente em G a um fibrado com grupo H.

2.41. PROPOSIÇÃO

Seja X um Cσ-espaço (0.15), seja G um grupo de Lie e seja H um grupo fechado tal que G/H é sólido. Então quaisquer dois H - fibrados sobre X que são G - equivalentes são também H - equivalentes.

PROVA:

Sejam β_0, β_1 dois H - fibrados sobre X que são G - equivalentes. Podemos supor que eles tem as mesmas vizinhanças coordenadas $\{V_j\}$. Representamos suas transformações coordenadas por ${}_0h_{ij}$ e ${}_1h_{ij}$, respectivamente. Sejam ${}_0V_j = V_j \times [0,1]$ e ${}_1V_j \times [0,1]$, conjuntos abertos que cobrem X × I. Como β_0, β_1 são G - equivalentes, por 2.8, existem aplicações $\lambda_j: V_j \to G$ tais que

$${}_0h_{ji} = \lambda_j^{-1}\ {}_1h_{ji}\lambda_i \quad . \text{ Definimos:}$$

$${}_0g_{ji}(x,t) = {}_0h_{ji}(x), \ (x,t) \text{ em } {}_0V_i \cap {}_0V_j,$$

$${}_1g_{ji}(x,t) = {}_1h_{ij}(x), \ (x,t) \text{ em } {}_1V_i \cap {}_1V_j,$$

$${}_{01}g_{ji}(x,t) = {}_0h_{ji}(x)\,\lambda_i^{-1}(x) =$$

$$= \lambda_j^{-1}(x)\ {}_1h_{ji}(x), \ (x,t) \text{ em } {}_0V_j \cap {}_1V_i.$$

Em particular,

$${}_{01}g_{jj}(x,t) = \lambda_j^{-1}(x)\ {}_1h_{jj}(x) = \lambda_j^{-1}(x).$$

Essas funções satisfazem a lei da transitividade para transformações coordenadas. Por 2.10, existe um fibrado sobre $X \times I$ com essas transformações coordenadas. A porção sobre $X \times 0$ (e $X \times 1$) é essencialmente o mesmo fibrado sobre β_0 (e β_1). Temos, portanto, um (G,H) - fibrado relativo sobre o par $(X \times I, X \times 0 \cup X \times 1)$ e por 2.39, este fibrado é (G,H) - equivalente a um (H,H) - fibrado. O H - fibrado resultante sobre $X \times I$ é H - equivalente a um fibrado da forma $\beta \times I$ (esse resultado será dado por 3.5). Então β_0 e β_1 são H - equivalentes a β.

Combinando os dois últimos resultados temos:

2.42. COROLÁRIO

Se X, G e H são como em 2.41, então as classes de equivalência dos fibrados sobre X com grupo G estão em uma correspondência natural 1-1 com as classes de equivalência dos fibrados sobre X com grupo H.

Esse resultado tem importantes consequências na simplificação de um fibrado e na redução do problema de classificação.

CAPÍTULO III

HOMOTOPIA DE FIBRADOS E O TEOREMA DA CLASSIFICAÇÃO

3.1. DEFINIÇÃO

Seja $\beta = \{B,p,X,Y,G,V_j, \phi_j\}$ um fibrado. O fibrado $\beta \times I$, $I = [0,1]$, é definido por $\beta \times I = \{B \times I , q, X \times I, Y, G, V_j \times I, \psi_j\}$, onde $q(b,t) = (p(b),t))$ e $\psi_t(x,t,y) = (\phi_j(x,y),t)$. Então as transformações coordenadas de $\beta \times I$ satisfazem $g_{ji}(x,t) = g_{ji}(x)$.

Se $\Pi: X \times I \to X$ é a projeção $\Pi(x,t) = x$ então uma definição equivalente de $\beta \times I$ é que é o fibrado induzido $\Pi^{-1}\beta$, onde

$$g_{ji}(x,t) = g_{ji}(\Pi(x,t)) = g_{ji}(x).$$

A projeção $\bar{\Pi}: B \times I \to B$, dada por $\bar{\Pi}(b,t) = b$ é uma aplicação de fibrados $\bar{\Pi}: \beta \times I \to \beta$. A aplicação $\mu_t: B \to B \times I$, para qualquer t em I, dada por $\mu_t(b) = (b,t)$ é também uma aplicação de fibrados $\mu_t: \beta \to \beta \times I$.

3.2. DEFINIÇÃO

Seham β , β' dois fibrados tendo a mesma fibra e grupo , e sejam h_0 e h_1 duas aplicações de fibrados de β em β'. As aplicações h_0 e h_1 são <u>homotópicas</u> (como aplicações de fibrados), denotando-se por $h_0 \simeq h_1$, se existe uma aplicação de fibrados $h: \beta \times I \to \beta'$ tal que $h(b,0) = h_0(b)$ e $h(b,1) = h_1(b)$. A aplicação h é chamada uma <u>homotopia</u>. A aplicação induzida $\bar{h}: X \times I \to X'$ é uma homotopia unindo as aplicações induzidas $\bar{h}_0$ e $\bar{h}_1$.

A relação $h_0 \simeq h_1$ é reflexiva, simétrica e transitiva; assim as aplicações de fibrados de β em β' dividem-se em classes de homotopia.

3.3. DEFINIÇÃO

Uma homotopia h é <u>estacionária com a aplicação induzida</u> $\bar{h}$ se, para cada b em B e cada t - intervalo $[t_1,t_2]$ tais que $\bar{h}(p(b), t) =$ constante, para $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, então $h(b,t) =$ constante para $t_1 \leq t \leq t_2$, ou seja se a imagem de p(b) não se move durante parte da homotopia, então o mesmo acontece com a imagem de b.

3.4. 1º TEOREMA DA HOMOTOPIA DE RECOBRIMENTO

Sejam β, β' dois fibrados com a mesma fibra e grupo e seja X um $C\sigma$ - espaço (0.15). Seja h_0: $\beta \to \beta'$ uma aplicação de fibrados e seja $\bar{h}$: $X \times I \to X'$ uma homotopia da aplicação induzida h_0: $X \to X'$. Então existe uma homotopia h: $\beta \times I \to \beta$ de h_0 cuja homotopia induzida é $\bar{h}$, e h é estacionária com $\bar{h}$. Diz-se que a homotopia h cobre $\bar{h}$.

3.5. PROPOSIÇÃO

Se X é um espaço $C\sigma$, então qualquer fibrado β' sobre o espaço base $X \times I$ é equivalente a um fibrado da forma $\beta \times I$.

PROVA:

Definimos $\bar{h}_0(x) = (x,0)$, e fazemos $\beta = \bar{h}_0^{-1}\beta'$, e seja $h_0 : \beta \to \beta'$ a aplicação induzida. A função $\bar{h}(x,t) = (x,t)$ é uma homotopia de $\bar{h}_0$ pois $\bar{h}(x,0) = \bar{h}_0(x)$. Por 3.4., existe uma aplicação de fibrados h: $\beta \times I \to \beta$. Como $\bar{h}$ é a aplicação identidade de $X \times I$, segue de 2.6, que $\beta \times I$ e β' são equivalentes.

3.6. PROPOSIÇÃO

Sejam β' um fibrado sobre X', e $\bar{X}$ um espaço $C\sigma$, e sejam $\bar{h}_0$, $\bar{h}_1$ aplicações homotópicas de X em X'. Então os fibrados induzidos $\bar{h}_0^{-1}\beta$ e $\bar{h}_1^{-1}\beta'$ são equivalentes.

PROVA:

Como $\bar{h}_0 \simeq \bar{h}_1$, existe uma homotopia $\bar{h}$: $X \times I \to X$ tal que $\bar{h}(x,t) = h_t(x)$, para t = 0,1. Seja a aplicação $\bar{\mu}_t(x) = (x,t)$. Então $(\bar{h} \circ \bar{\mu}_t)(x) = \bar{h}(x,t) = \bar{h}_t(x)$, para t = 0,1. Temos portanto um fibrado $\bar{h}^{-1}\beta'$ sobre $X \times I$, e de 3.5, segue que

$\bar{h}^{-1}\beta'$ e $\beta \times I$ são equivalentes. Mas $\bar{h}_t^{-1}\beta' = (\bar{h} \circ \bar{\mu}_t)^{-1}\beta' =$

$= (\bar{\mu}_t^{-1} \circ \bar{h}^{-1})\beta' \sim \bar{\mu}_t^{-1}(\beta \times I)$, para $t = 0,1$. Como foi visto em 3.1, a aplicação $\mu_t(b) = (b,t)$ é uma aplicação de fibrados de β em $\beta \times I$, para cada t. Segue então, de 2.35, que $\beta \sim \mu_t^{-1}(\beta \times I)$ para cada t. Portanto $\beta \sim \mu_o^{-1}(\beta \times I) = \bar{h}_0^{-1}\beta'$ e $\beta \sim \mu_1^{-1}(\beta \times I) = \bar{h}_1^{-1}\beta'$. Logo $\bar{h}_0^{-1}\beta' \sim \bar{h}_1^{-1}\beta'$.

3.7. COROLÁRIO

Se X é um espaço $C\sigma$ e é contratível a um ponto, então qualquer fibrado sobre X é equivalente a um fibrado produto.

PROVA:

Como a aplicação identidade de X induz um fibrado equivalente a um fibrado dado, e a aplicação constante induz um fibrado produto, então o resultado segue de 3.6.

Portanto, espaços contratíveis X admitem somente fibrados triviais, e assim, fibrados sobre n - células (0.16) abertas ou fechadas são de pouco interesse. Os espaços base mais simples que fornecem fibrados não triviais são as esferas de várias dimensões.

3.8. 2º TEOREMA DA HOMOTOPIA DE RECOBRIMENTO

Seja β' um fibrado sobre X'. Seja X um espaço $C\sigma$, seja f_0: X → B' uma aplicação e seja $\bar{f}_0$: X × I → X' uma homotopia de $p' \circ f_0 = \bar{f}_0$. Então existe uma homotopia f: X × I → B' de f_0 cobrindo $\bar{f}$ (i. é, $p' \circ f$) e f é estacionária com $\bar{f}$.

PROVA:

Seja $\bar{f}_0 = p' \circ f$, onde f_0: X → B' e p' : B' → X', assim $\bar{f}_0$ X → X'.

Seja $\mathcal{B} = \bar{f}_0^{-1}\,\mathcal{B}'$, e seja $h_o : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ uma aplicação induzida. Seja $h : \mathcal{B} \times I \to \mathcal{B}'$ uma homotopia de recobrimento (3.4) de h_o que é estacionária com $\bar{f}$. Utilizando a segunda definição de fibrado induzido, definimos a seção ϕ de $\mathcal{B}$ por $\phi(x) = (x, f_o(x))$. Então $h_o \circ \phi = f_o$.

$$X \xrightarrow{\phi} X \times B' \xrightarrow{h_o} B'$$

Definimos $f(x,t) = h(\phi(x), t)$. Então temos $f_o : X \to B'$ e uma homotopia $\bar{f}: X \times I \to B'$ de $\bar{f}_0$. Portanto, por 3.4, a aplicação $f: X \times I \to B'$ definida acima é a homotopia de f_o que cobre $\bar{f}$ e é estacionária com $\bar{f}$.

$$\begin{tikzcd} & B' \arrow[d, "p'"] \\ X \times I \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "\bar{f}"] & X' \end{tikzcd}$$

3.9. <u>DEFINIÇÃO</u>

Consideremos agora curvas fechadas em x_o, ou seja, com ponto base x_o. Conforme visto em 1.1, suas classes de homotopia formam os elementos do grupo fundamental $\Pi_1(X,x_o)$ com a multiplicação $f_1 . f_2$ já definida.

Seja uma aplicação admissível $\xi: Y \to Y_o$. Como qualquer α em $\Pi_1(X,x_o)$ é uma aplicação admissível de Y_o em Y_o, então $\xi^{-1}\alpha\xi$ é uma aplicação admissível de Y em Y, isto é, é um elemento de G que representamos por $\chi(\alpha)$. Esta aplicação $\chi: \Pi_1(X, x_o) \to G$ é um homomorfismo, pois

$$\chi(\alpha\beta) = \xi^{-1}\alpha\beta = \xi^{-1}\alpha\,\xi\xi^{-1}\beta\xi = \chi(\alpha)\chi(\beta).$$

Podemos verificar ainda que χ é exatamente determinada a menos de suas classes de equivalência de automorfismos internos de G. Seja $\zeta : Y \to Y_o$ uma outra aplicação admissível. Então

$$\zeta^{-1}\alpha\,\zeta = (\zeta^{-1}\xi)\,\xi^{-1}\alpha\,\xi(\xi^{-1}\zeta) = g^{-1}\chi(\alpha)\,g, \text{ onde } g = \xi^{-1}\zeta.$$

Portanto uma escolha diferente de ξ altera χ por um automorfismo interno de G. Reciprocamente, se g e ξ são dados, definimos ζ como a composição de $g: Y \to Y$ seguida por ξ, ou seja, $\zeta = \xi o g$. Então,

$$\chi(\alpha) = (\xi o g)^{-1} \alpha (\xi o g) = g^{-1} \xi^{-1} \alpha \xi g = g^{-1} \chi(\alpha) g.$$

A classe de equivalência de χ sob automorfismos internos, é chamada <u>classe característica</u>.

3.10. <u>DEFINIÇÃO</u>

Seja X um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Uma aplicação $p: B \to X$ é chamada um <u>recobrimento</u> se:

(i) $p(B) = X$, e

(ii) para cada x em X, existe uma vizinhança V de x, conexa por caminhos, tal que cada componente de $p^{-1}(V)$ é um aberto em B e aplica homeomorficamente sobre V sob p.

O espaço B é chamado <u>espaço de recobrimento</u>.

3.11. <u>PROPOSIÇÃO</u>

Para qualquer ponto b em $Y_o = p^{-1}(x_o)$, a aplicação p induz a aplicação $p_*: \Pi_1(B,b) \to \Pi_1(X,x_o)$, que é um monomorfismo que atribui a cada curva f' com ponto base b, a curva imagem pof' com ponto base x_o.

<u>PROVA</u>:

Se pof' é contratível a x_o levando seus pontos finais fixos, uma homotopia de recobrimento faz o mesmo com f'.

3.12. <u>TEOREMA DA ESTRUTURA DE FIBRADO</u>

Seja H a interseção dos grupos imagem $p_*(\Pi_1(B,b)$ quando b varia sobre Y_o. Seja $G = \Pi_1(X,x_o)/H$ e $\chi: \Pi_1(X,x_o) \to G$ o homomorfismo natural. Então a aplicação de recobrimento $p: B \to X$ admite uma estrutura de fibrado com fibra Y_o, grupo G e classe característica χ.

3.13. TEOREMA FUNDAMENTAL

Sejam β um fibrado sobre $X, A \subset X, B_o = p^{-1}(A)$, y_o em B_o e $x_o = p(y_o)$. Então

$$p_*: \Pi_n(B,B_o,y_o) \approx \Pi_n(X,A,x_o), \quad n \geqslant 2.$$

PROVA:

Suponhamos que $p_*(\alpha) = 0$. Seja f em $F^n(B,B_o,y_o)$ representando α. Como $f: (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (B,B_o,y_o)$, segue que

$p \circ f: (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (X,A,x_o)$. Então existe uma homotopia h em $F^n(X,A,x_o)$ de $p \circ f$ na aplicação constante. Pelo 2º teorema da homotopia de recobrimento, 3.8, existe uma homotopia h' de f, que é estacionária em h.

$$\begin{tikzcd} & & (B,B_o,y_o) \arrow[d, "p"] \\ (I^n \times I, I^{n-1} \times I, J^{n-1} \times I) \arrow[urr, dashed, "h'"] \arrow[rr, "h"] & & (X,A,x_o) \end{tikzcd}$$

Como $h(J^{n-1} \times I) = x_o$, segue que $h'(J^{n-1} \times I) = y_o$ e como $h(I^{n-1} \times I)$ está em A, $h'(I^{n-1} \times I)$ está em B_o. Assim h' é uma homotopia em $F^n(B,B_o,y_o)$ de f na aplicação $f': (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \to (Y_o,Y_o,y_o)$, onde Y_o é a fibra sobre x_o. Definimos: $k(t_1,\ldots t_n,\tau) = (t_1,\ldots,t_{n-1},(1-\tau)\, t_n+\tau)$. Então

$k(t_1,\ldots,t_n,0) = (t_1,\ldots,t_n)$ e

$k(t_1,\ldots,t_n,1) = (t_1,\ldots,t_{n-1},1)$, e assim k é uma homotopia de I^n em si mesmo, na face $t = 1$ e J^{n-1} é deformado em si mesmo. Seja $k'(t,\tau) = f'(k(t,\tau))$. Então

$k'(t,0) = f'(k(t,0)) = f'(t)$ e

$k'(t,1) = f'(k(t,1)) = f'(t_1,\ldots,t_{n-1},1) = y_o$ e portanto k' é uma homotopia em $F^n(B,B_o,y_o)$ de f' na aplicação constante.

Segue que $\alpha=0$ e assim $\ker p_*=0$. Mostramos então que p_* é 1-1.

Vamos mostrar agora que p_* é sobre. Seja β em $\Pi_n(X,A,x_o)$ e f representando β. Fazemos $h(t,\tau) = f(k(t,\tau))$, onde k é a aplicação definida acima. Então $h(t,0) = f(k(t,0)) = f(t)$ e $h(t,1) = f(k(t,1)) = f(t_1,\dots,t_{n-1},1) = x_o$, assim h é uma homotopia de f na aplicação constante. Seja f' uma aplicação de I^n em y_o. Então $(p\circ f')(t) = h(t,1)$. E por 3.8, existe uma homotopia' h' cobrindo h que é estacionária com h; e como $p\circ h'=h$, temos que

$$h'(t,1) = p^{-1}\circ h)(t,1) = f'(t).$$

Seja $f''(t) = h'(t,0)$, então $p\circ f'' = f$. Mas como h leva J^{n-1} em x_o, segue que h' leva J^{n-1} em y_o. Portanto f'' está em $F^n(B,B_o,y_o)$ e representa um elemento α em $\Pi_n(B,B_o,y_o)$ tal que $p_*(\alpha) = \beta$.

Logo p_* é um isomorfismo.

3.14. COROLÁRIO

$p_* : \Pi_n(B,Y_o,y_o) \approx \Pi_n(X,x_o)$, $n \geq 2$. Esse resultado segue do teorema anterior fazendo $B_o=Y_o= p^{-1}(x_o)$.

3.15. DEFINIÇÃO

Seja $\beta = \{B,p,X,Y,G\}$ um fibrado, Y_o fibra sobre x_o em X, e y_o em Y_o. Sejam $i\colon Y_o\to B$ e $j\colon B\to(B,Y_o)$ aplicações inclusão. Então a sequência homotópica de (B,Yo,yo) é

$$\dots \to \Pi_n(Y_o) \xrightarrow{i*} \Pi_n(B) \xrightarrow{j*} \Pi_n(B,Y_o) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(Y_o) \to \dots .$$

Se $p_1\colon (B,Y_o,y_o) \to (X,x_o,x_o)$ então $p_1\circ j$ é a aplicação $p\colon(B,y_o) \to (X,x_o)$.

$$(B,y_o) \xrightarrow{j} (B,Y_o,y_o) \xrightarrow{p_1} (X,x_o,x_o) .$$

Pelo corolário 3.11 podemos definir

$$\Delta = \partial\circ(p_{1*})^{-1}\colon \Pi_n(X,x_o)\to \Pi_{n-1}(Y_o,y_o), \text{ i. é},$$

$$\Pi_n(X,x_o) \xrightarrow{p_{1*}^{-1}} \Pi_n(B,Y_o,y_o) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(Y,y_o).$$

A sequência de grupos e homeomorfismos

$$\cdots \to \Pi_n(Y_o) \xrightarrow{i_*} \Pi_n(B) \xrightarrow{p_*} \Pi_n(X) \xrightarrow{\Delta} \Pi_{n-1}(Y_o) \to \cdots$$
$$\cdots \to \Pi_2(X) \xrightarrow{\Delta} \Pi_1(Y_o) \xrightarrow{i_*} \Pi_1(B) \xrightarrow{p_*} \Pi_1(X)$$

é chamada <u>sequência homotópica do fibrado β com base em y_o.</u>

3.16. PROPOSIÇÃO

A sequência homotópica de um fibrado é exata.

PROVA:

Na sequência homotópica de β trocamos os termos $\Pi_n(B,y_o)$ da sequência homotópica de (B,Y_o,y_o) pelos grupos isomorfos $\Pi_n(X)$, e acrescentamos o termo $\Pi_1(X)$. Essa mudança não afeta a exatidão. Resta provar a exatidão em $\Pi_1(B)$. A composição $p_* o i_*$ é trivial pois p aplica uma curva em Y_o em um ponto x_o. Seja f uma curva em B com ponto base y_o e pof contratível a x_o levando seus pontos finais fixos. Uma homotopia de recobrimento contrairá f a uma curva em Y_o e seus pontos finais permanecerão fixos. Isto prova a exatidão em $\Pi_1(B)$.

3.17. DEFINIÇÃO

Sejam h uma aplicação de β em β' e $\bar{h}$: $X \to X'$ a aplicação induzida dos espaços bases. Seja x_o em X, $x_o' = \bar{h}(x_o)$, sejam Y_o, Y_o' fibras sobre x_o, x_o', respectivamente. Sejam y_o em Y_o e $y_o' = h(y_o)$, e ainda h_o: $Y_o \to Y_o'$ a aplicação $h| Y_o$. Obtemos então um <u>HOMOMORFISMO</u> da sequência homotópica de β em y_o na de β' em y_o':

$$\begin{array}{ccccccc}
\Pi_n(Y_o) & \xrightarrow{i_*} & \Pi_n(B) & \xrightarrow{p_*} & \Pi_n(X) & \xrightarrow{\Delta} & \Pi_{n-1}(Y_o) \\
\downarrow h_{o*} & & \downarrow h_* & & \downarrow \bar{h}_* & & \downarrow h_{o*} \\
\Pi_n(Y_o') & \xrightarrow{i_*'} & \Pi_n(B') & \xrightarrow{p_*'} & \Pi_n(X') & \xrightarrow{\Delta'} & \Pi_{n-1}(Y_o')
\end{array}$$

A comutatividade dos quadrados do meio e da esquerda seguem da comutatividade das aplicações $h \circ i = i' \circ h_o$ e $\bar{h} \circ p = p'_o h$. Expandindo o quadrado da direita de acordo com a definição de Δ, temos:

$$\begin{array}{ccccc}
\Pi_n(X) & \xrightarrow{p_{1*}} & \Pi_n(B,Y_o) & \xrightarrow{\partial} & \Pi_{n-1}(Y_o) \\
\downarrow \bar{h}_* & & \downarrow h_{1*} & & \downarrow h_{o*} \\
\Pi_n(X') & \xrightarrow{p'_{1*}} & \Pi_n(B',Y'_o) & \xrightarrow{\partial'} & \Pi_{n-1}(Y'_o)
\end{array}$$

A comutatividade do quadrado à esquerda segue de $\bar{h} \circ p_1 = p'_1 \circ h_1$, e do quadrado da direita segue de 1.3.5. Como p_{1*}, p'_{1*} são isomorfos, a comutatividade à direita no primeiro diagrama é verificada.

3.18. TEOREMA DO ESPAÇO DE RECOBRIMENTO

Se $p: B \to X$ é um recobrimento, b_o em B e $x_o = p(b_o)$, então $p_*: \Pi_n(B,b_o) \approx \Pi_n(X,x_o)$, $n \geq 2$, e para $n=1$, p_* é um monomorfismo.

PROVA:

$n > 1$: De acordo com 3.12, o recobrimento admite uma estrutura de fibrado com uma fibra discreta Y_o. Então $\Pi_n(Y_o) = 0$ para todo n. Assim na sequência homotópica de β cada terceiro termo é zero e portanto os termos adjacentes restantes são isomorfos (1.8).

$n=1$: Provado em 3.11.

3.19. DEFINIÇÃO

Sejam β um fibrado principal, G_o a fibra sobre x_o e $\xi: G \to G_o$ uma aplicação admissível (2.27). Seja $y_o = \xi(e)$, onde e = identidade. Seja Δ o operador bordo da sequência homotópica de β com base em y_o. Definimos o homomorfismo característico

$\chi: \Pi_n(X,x_o) \to \Pi_{n-1}(G,e)$, $n \geq 1$, como sendo a composição

$\chi = \xi_*^{-1} \circ \Delta$, ou seja,

$$\Pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\Delta} \Pi_{n-1}(G_0, y_0) \xrightarrow{\xi_*^{-1}} \Pi_{n-1}(G, e).$$

A sequência dos homomorfismos χ chamamos <u>homomorfismos característicos</u>.

Seja G_e o conjunto dos elementos de G que podem ser unidos a $\underline{e}$ por uma curva em G. G_e é um subgrupo de G e é invariante. Definimos $\Pi_0(G) = G/G_e$, e $\Pi_0(G)$ opera em $\Pi_{n-1}(G,e)$ através de automorfismos internos de G.

A classe de equivalência da sequência de homomorfismos χ sob as operações de $\Pi_0(G)$ é chamada <u>classe característica</u> e é representada por $\chi(\beta)$.

3.20. <u>PROPOSIÇÃO</u>

Se β e β' são fibrados principais equivalentes, então $\chi(\beta) = \chi(\beta')$.

<u>PROVA</u>:

Seja $h: \beta \to \beta'$ uma equivalência homotópica. Então h induz um isomorfismo da sequência homotópica de β em y_0 na sequência homotópica de β' em $y'_0 = h(y_0)$. Vimos em 3.17, que $h_{0*} \circ \Delta = \Delta' \circ \bar{h}_*$. Como β e β' são equivalentes, $\bar{h}$ é a identidade e então $h_{0*} \circ \Delta = \Delta'$. Portanto

$$\xi_*^{-1} \circ \Delta' = \xi_*'^{-1} (h_{0*} \circ \Delta) = \xi_*^{-1} \circ \Delta \quad . \text{ Logo}$$

$$\chi(\beta) = \chi(\beta').$$

Vamos considerar agora fibrados sobre a n-esfera S^n.

3.21. <u>DEFINIÇÃO</u>

Seja S^{n-1} uma (n-1) - esfera equatorial em S^n e sejam E_1 e E_2 os hemisférios de S^n determinados por S^{n-1}. Para i=1,2, seja V_i uma n-célula aberta em S^n contendo E_i e com o bordo sendo uma (n-1) - esfera paralela a S^{n-1}. Então V_1 e V_2 cobrem S^n, e $V_1 \cap V_2$ é uma faixa equatorial contendo S^{n-1}. Seja x_o um ponto de referência em S^{n-1}. Diz-se que um fibrado β sobre S^n está na forma normal se suas vizinhanças coordenadas são V_1 e V_2 e $g_{12}(x_o) = e$.

3.22. PROPOSIÇÃO

Qualquer fibrado β sobre S^n é estritamente equivalente a um fibrado na forma normal.

PROVA:

Como V_i é uma célula, qualquer fibrado sobre V_i é equivalente a um fibrado produto (3.7). Se considerarmos a porção β_i de β sobre V_i, isto é verdade. Portanto existem aplicações de fibrados

$\phi_i' = V_i \times Y \to \beta_i$, para i= 1,2. Então ϕ_1' e ϕ_2' são funções coordenadas de um fibrado β' estritamente equivalente a β (2.6). Se $g_{12}'(x_o) = a$, alteramos β' a um fibrado estritamente equivalente fazendo $\lambda_1(x) = e$, para x em V_1 e $\lambda_2(x) = a$ para x em V_2. Aplicando 2.8, ou seja, que $g_{12}'(x) = \lambda_1^{-1}(x)\ g_{12}(x) = \lambda_2(x)$, segue que $g_{12}(x_o) = e$. Assim o fibrado resultante está na forma normal.

3.23. DEFINIÇÃO

Seja β um fibrado na forma normal. À aplicação $T = g_{12}\,|S^{n-1}$, que aplica S^{n-1} em G, chamamos aplicação característica de β. Como $g_{12}(x_o) = e$, segue que $T(x_o) = e$ e

$$T: (S^{n-1}, x_o) \to (G, e).$$

3.24. PROPOSIÇÃO

Qualquer aplicação $T: (S^{n-1}, x_o) \to (G,e)$ é a aplicação característica de algum fibrado sobre S^n na forma normal.

PROVA:

Seja $r: V_1 \cap V_2 \to S^{n-1}$ uma retração (0.12) que aplica x na interseção de S^{n-1} com o meridiano através de x ortogonal a S^{n-1}. Definimos $g_{12}(x) = T(r(x))$. Fazendo

$g_{11} = g_{22} = e$ e $g_{21} = g_{12}^{-1}$, o fibrado desejado é dado por 2.10.

3.25. TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA

Sejam β e β' fibrados sobre S^n na forma normal e com as mesmas fibra e grupo. Sejam T e T' suas aplicações características. Então β e β' são equivalentes se e somente se existem um elemento a em G e uma homotopia $T' \simeq aTa^{-1}$. Se G é conexo por caminhos, então β e β' são equivalentes se e somente se $T' \simeq T$.

PROVA:

Se β e β' são equivalentes, segue de 2.8, que $g'_{12}(x) = \lambda_1(x)\, g_{12}(x)\, \lambda_2^{-1}(x)$. Seja $\mu_i = \lambda_i | S^{n-1}$. Então $T'(x) = \mu_1(x)\, T(x)\, \mu_2^{-1}(x)$. Como $T(x_o) = T'(x_o) = e$, temos $e = \mu_1(x_o)\, \mu_2^{-1}(x_o)$ e então $\mu_1(x_o) = \mu_2(x_o) = a$.

Agora, S^{n-1} é contratível sobre E_i em x_o, levando x_o fixo (i=1,2) A imagem dessa homotopia sob λ_i é uma homotopia de μ_i, na aplicação constante $S^{n-1} \to a$ levando x_o em a.
Seja $h_i = (S^{n-1} \times I, x_o \times I) \to (G,a)$ essa homotopia. Então

$h'(x,t) = h_1(x,t)\, T(x)\, h_2^{-1}(x,t)$ é uma homotopia de T' a $a T a^{-1}$, mantendo x_o em e.

Reciprocamente, suponhamos a em G e a homotopia $T' \simeq a\ T\ a^{-1}$. Se definimos $\lambda_i(x) = a$, para x em V_i, i = 1,2, e

se aplicamos 2.8, obtemos um fibrado equivalente a β cuja aplicação característica é a $T\ a^{-1}$. Podemos supor $a = e$, e $T \simeq T$. $T' \simeq T$, implica que $T'T^{-1}$ é homotópica a uma aplicação constante, e portanto $T'T^{-1}$ é extensível a uma aplicação.
Definimos a aplicação

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} g'_{12}(x)\ g_{12}^{-1}(x), & \text{para } x \text{ em } E_2 \cap V_1 \\ v(x) & \text{, para } x \text{ em } E_1, \end{cases}$$

que é contínua.
Seja $V'_2 = \operatorname{Int} E_2$. Se trocamos, em β, V_2 por V'_2 e ϕ_2 por $\phi_2 | V'_2 \times Y$, obtemos um fibrado estritamente equivalente β_1 (2.6). Igualmente β' é estritamente equivalente a β'_1, obtido por substituição análoga. Seja agora $\lambda_2(x) = e$, para x em V'_2. Então

$$g'_{12}(x) = \lambda_1(x)\ g_{12}(x)\ \lambda_2^{-1}(x), \text{ para todo } x \text{ em } V_1 \cap V'_2.$$

Por 2.8, $\beta_1 \sim \beta'_1$ e portanto $\beta \sim \beta'$.

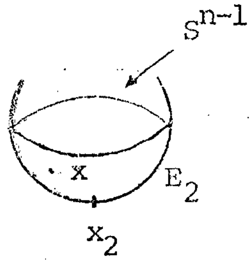
Se G é conexo por caminhos, unimos $\underline{a}$ a $\underline{e}$ por uma curva $f: I \to G$. Então $h(x,t) = f(t)\ T(x)\ f^{-1}(t)$ é uma homotopia $a\ T\ a^{-1} \simeq T$.

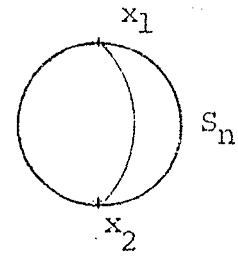
3.26. PROPOSIÇÃO

Seja β um fibrado principal sobre S^n na forma normal, e T sua aplicação característica. Sejam x_1 em E_2 o pólo de S^{n-1}, $G_1 = p^{-1}(x_1)$, $\xi = \phi_{1,x_1}$ e $Y_1 = \xi(e)$. Seja α o gerador de $\Pi_n(S^n, x_1)$ correspondente a uma orientação de S^n. Orientamos E_2 de acordo com S^n, e S^{n-1} tal que seja positivamente incidente em E_2. Então $\xi \circ T: (S^{n-1}, x_0) \to (G_1, y_1)$ representa o elemento $\Delta(\alpha)$ de $\Pi_{n-1}(G_1, y_1)$; e portanto T representa $\chi(\alpha) = (\xi_*^{-1} \circ \Delta)(\alpha)$.

PROVA:

Seja uma aplicação $h: (E_2, S^{n-1}) \to (S^n, x_1)$. Seja x_2 o antípoda de x_1. Para cada x em E_2, $h(x)$ está no maior arco de círculo $C(x) = x_2 \times x_1$, e seu comprimento de arco é duas vezes o de x. Ainda, h aplica $C(x) \cap E_2$ homeomorficamente sobre o semicírculo $C(x)$.





Portanto, h aplica $E_2 - S^{n-1}$ homeomórficamente sobre $S^{n-1} - x_1$. Logo h tem grau 1 (pois a aplicação induzida em homologia, $h_*: H_n(E_2, S^{n-1}) \to H_n(S^n, \{x_1\})$ é o homomorfismo identidade de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$).

Definimos agora uma aplicação

$$h'(x) = \begin{cases} \phi_1(h(x), T\,k(x)), & \text{para } h(x) \text{ em } E_1, \\ \phi_2(h(x), e) & \text{, para } h(x) \text{ em } E_2. \end{cases}$$

As duas partes da definição se interceptam quando $h(x)$ está em S^{n-1} pois $T(k(x)) = g_{12}(k(x)) = e$. Neste caso diremos que $h(x) = k(x) = x'$. Então

$$\phi_1(x', Tx') = \phi_1(x', g_{12}(x')) = \phi_2(x', e)$$

e as duas definições coincidem. Portanto h' é contínua sobre E_2. E ainda temos $p \circ h' = h$, $h'(S^{n-1}) \subset G_1$ e $h'(x_o) = y_1$. Quando x está em S^{n-1}, então $h(x) = x_1$ e $k(x)=x$ (por definição). Portanto

$$h'(x) = \phi_1(h(x), Tk(x)) = \phi_1(x_1, T(x)) = (\phi_{1,x_1} \circ T)(x) =$$
$$= (\xi \circ T)(x).$$

Como h tem grau 1, representa α em $\Pi_n(S^n, x_1)$, e como $p \circ h' = h$, $h' = p^{-1} \circ h$, então h representa $p_*^{-1}(\alpha)$. Logo $h' | S^{n-1} = \xi \circ T$ representa $(\partial \circ p_*^{-1})(\alpha) = \Delta(\alpha)$ e assim T representa $(\xi_*^{-1} \circ \Delta)(\alpha) = \chi(\alpha$

3.27. TEOREMA DA CLASSIFICAÇÃO

As classes de equivalência dos fibrados sobre S^n com grupo G estão em correspondência 1 - 1 com as classes de equivalência dos elementos de $\Pi_{n-1}(G)$ sob as operações de $\Pi_o(G)$. Tal correspondência é dada por $\beta \mapsto \chi(\alpha)$, onde α é um gerador de $\Pi_n(S^n)$ e $\chi: \Pi_n(S^n) \to \Pi_{n-1}(G)$ é o homomorfismo característico de β.

A proposição 3.25 pode ser enunciada da seguinte forma: $\beta \sim \beta'$ se e somente se os elementos de $\Pi_{n-1}(G)$ representados por T e T' são equivalentes sob as operações de $\Pi_o(G)$, definidos em 3.19. Combinando isto com 3.26, segue o resultado acima.

3.28. COROLÁRIO

Se G é conexo por caminhos, então o conjunto das classes de equivalência dos fibrados sobre S^n com grupo G estão em correspondência 1 - 1 com $\Pi_{n-1}(G)$.

Agora vamos nos restringir a fibrados em que o espaço base é um complexo finito de células (0.16).

3.29. DEFINIÇÃO

Seja β um fibrado principal sobre um espaço X com grupo G. Dizemos que β é n - universal se, para quaisquer n-complexo K (0.16), subcomplexo L de K, fibrado principal β' sobre K com grupo G, e qualquer aplicação h: $\beta'|L \to \beta$, existe uma extensão de h a uma aplicação de β' em β.

Podemos então dizer que qualquer aplicação parcial de um fibrado em β é extensível ao fibrado todo.

Se β é n - universal, β' é qualquer fibrado sobre o n - complexo K, e se L é vazio então existe uma aplicação de β' em β.

3.30. TEOREMA DA CLASSIFICAÇÃO

Seja β um fibrado $(n + 1)$ - universal com grupo G, seja X seu espaço base, e seja K um n - complexo. A operação que associa a cada aplicação $f: K \to X$ seu fibrado induzido estabelece uma correspondência 1 - 1 entre classes de homotopia de aplicações de K em X e classes de equivalência de fibradosprincipais sobre K com grupo G.

PROVA:

Por 3.6, duas aplicações homotópicas de K em X induzem fibrados equivalentes. Portanto, cada classe de homotopia está associada a uma única classe de equivalência de fibrados.

Como qualquer fibrado principal β' sobre K admite uma aplicação $h: \beta' \to \beta$, e se $f: K \to X$ é a aplicação induzida, então, por 2.35, β' é equivalente ao fibrado induzido por f e β.

Vamos mostrar agora que se as aplicações f_0, $f_1: K \to X$ induzem fibrados β_0, β_1 que são equivalentes, então $f_0 \simeq f_1$.

Sejam $h_i: \beta_i \to \beta$, $i = 0,1$, as aplicações induzidas , e seja

$h: \beta_0 \to \beta_1$, uma equivalência.

Definimos o fibrado $\beta' = \beta_0 \times I$ conforme 3.1, e seja $r: \beta_0 \times I \to \beta_0$ a aplicação natural $r(b,t) = b$. Sejam β'_0 e β'_1 as partes de β' sobre $K \times 0$ e $K \times 1$, respectivamente, e sejam $r_i = r|\beta'_i$, $i=0,1$. Definimos uma aplicação de fibrados

$$h': \beta'_0 \cup \beta'_1 \to \beta \text{ , por}$$
$$h'|\beta'_0 = h_0 \circ r_0,\ h'|\beta'_1 = h_1(h \circ r_1).$$

$K \times I$ é um $(n+1)$ - complexo e β é $(n+1)$ - universal. Portanto, h' é extensível a uma aplicação de $\beta' \to \beta$. A aplicação induzida $K \times I \to X$ é a homotopia pedida.

3.31. PROPOSIÇÃO

Um fibrado principal β é n - universal se e somente se B é conexo por caminhos e $\Pi_i(B) = 0$, para $1 \leq i < n$.

PROVA:

Suponhamos β um fibrado principal n - universal. Seja E uma (i+1) - célula e seja S o seu bordo, ou seja, a i - esfera. Seja $f: S \to B$ uma aplicação contínua, e definimos $f': S \times G \to \beta \times G$ por $f'(y,g) = (f(y),g)$. Seja $P: \beta \times G \to \beta$ uma aplicação principal (definida em 2.25). A composição $P \circ f'$ é uma aplicação de fibrados de $S \times G$ em β (por 2.26). Seja $i < n$. Como β é n - universal, $P \circ f'$ se extende a uma aplicação de fibrados $h: E \times G \to \beta$. Como $P(b,e) = b$, onde e = identidade de G, segue que $(P \circ f')(y,e) = P(f(y),e) = f(y)$. Logo $h(y,e)$ é uma extensão de f a uma aplicação de E em B. Assim qualquer aplicação de uma i - esfera em B ($i = 0,1,\ldots,n-1$) é contratível a um ponto. Portanto B é conexo por caminhos e $\Pi_i(B) = 0$, para $1 \leq i < n$.

Reciprocamente, suponhamos B conexo por caminhos e $\Pi_i(B) = 0$, para $1 \leq i < n$. Seja (E,S) uma (i + 1) - célula e seu bordo ($i < n$). Seja $h: S \times G \to \beta$ uma aplicação de fibrados. Seja $f(y) = h(y,e)$. Então, $f: S \to B$. Como $\Pi_i(B) = 0$, f é extensível a uma aplicação $f': E \to B$. Seja agora uma aplicação h' definida por

$$h'(y,g) = P(f'(y),g), \text{ para } y \text{ em } E.$$

Então h' é uma aplicação de fibrados de $E \times G \to \beta$, e h' é uma extensão de h, pois

$$h'(y,e) = f'(y) = f(y) = h(y,e) \text{ para } y \text{ em } S.$$

Sejam β' um fibrado sobre o n - complexo K e β'' a parte sobre um subcomplexo L, e suponhamos $h: \beta'' \to \beta$. Para qualquer 0 - célula v de L não em L, escolhemos duas aplicações admissíveis quaisquer (2.27) $\xi: G \to G_v$ e $\zeta: G \to G_x$ para algum x em X e extendemos h a $\zeta \circ \xi^{-1}$ em G_v. Isto extende h sobre $p'^{-1}(K^0 \cup L)$. Suponhamos, indutivamente, que h está definida em $p'^{-1}(K^i \cup L)$ e $i < n$. Seja E uma (i + 1) - célula de K não em L. Como é contratível, a porção de β' sobre E é equivalente ao fibrado produto $E \times G$. Portanto, a parte de β' sobre o bordo S de E é igualmente um produto $S \times G$. Mas h está definida sobre a última parte, e como vimos, pode ser extendida sobre a porção do fibrado sobre E. Essa extensão por etapas leva a uma extensão de h sobre $p'^{-1}(K^n \cup L)$. Segue então que β é um fibrado n - universal.

3.32. PROPOSIÇÃO

Se $1 \leq n \leq m$, então o espaço quociente O_m/O_n é conexo por caminhos e $\Pi_i(O_m/O_n) = 0$, para $1 \leq i < n$.

3.33. PROPOSIÇÃO

Se G é um grupo de Lie compacto, então, para cada inteiro n, existe um fibrado n - universal β com grupo G.

PROVA:

Seja G um grupo de Lie compacto, então G é isomorfo a um subgrupo do grupo ortogonal O'_k, para k suficientemente grande ([2]). Podemos supor que $G \subset O'_k$. Seja $m = n+k$ e seja O'_k o sub-grupo de O_m que opera trivialmente nas n primeiras coordenadas. Então os subgrupos O_n e O'_k de O_m comutam e podemos identificar seu produto direto $O_n \times O'_k$ com um subgrupo de O_m. Como $G \subset O'_k$ então $O_n \times G \subset O_n \times O'_k$. Sejam $B = O_m/O_n$ e $X = O_m/O_n \times G$, e seja p: $B \to X$ a projeção natural. Por 2.18, $\beta = \{b,p,X\}$ admite uma estrutura de fibrado com fibra $(O_n \times G)/O_n \approx G$. Como o maior subgrupo de O_n invariante em $O_n \times G$ é O_n, segue que o grupo do fibrado é também $(O_n \times G)/O_n \simeq G$. Assim β é um fibrado principal com grupo G. Como O_m/O_n é conexo por caminhos e $\Pi_i(O_m/O_n) = 0$, $1 \leq i < n$ (3.32), segue de 3.31, que β é n - universal.

Podemos ver, como exemplo, que a variedade de Stiefel $V_{n+k,k} = O_{n+k}/O_n$ definida no ex. 8, é conexa por caminhos e $\Pi_i(V_{n+k,k}) = 0$ para $1 \leq i < n$ (3.32). Portanto por 3.31 é um fibrado n - universal, para qualquer subgrupo fechado G de O'_k, onde O'_k é o subgrupo de O_{n+k} que opera trivialmente nas n primeiras coordenadas. O espaço base do fibrado n - universal é um espaço quociente de O_{n+k} (2.18). Vamos definir um espaço nessas condições.

Seja $M_{n,k}$ o conjunto dos subespaços lineares k - dimensionais (k - planos através da origem) de $\mathbb{R}^n$. O grupo O_n é transitivo (0.7) em $M_{n,k}$ pois qualquer elemento de O_n leva um k-plano em um k - plano. Se $\mathbb{R}^k$ é um k - plano fixo e $\mathbb{R}^{n-k}$ é seu complemento ortogonal, o subgrupo de O_n aplicando $\mathbb{R}^k$ em si mesmo decompõem-se no produto $O_k \times O'_{n-k}$ de dois subgrupos ortogonais sendo que o primeiro deles deixa $\mathbb{R}^{n-k}$ ponto a ponto fixo, e o segundo deixa $\mathbb{R}^k$ ponto a ponto fixo. Podemos então identificar

$$M_{n,k} \approx O_n/O_k \times O'_{n-k}$$

e $M_{n,k}$ é chamado <u>variedade de Grassmann</u> dos k - planos no n - espaço.

Agora, se identificamos a variedade de Stiefel $V_{n+k,k}$ com O_{n+k}/O_n, segue que $V_{n+k,k}$ é o fibrado sobre a variedade de Grassmann $M_{n+k,k}$ identificada com $O_{n+k}/(O_n \times O'_k)$ e esse fibrado tem fibra e grupo O'_k.

APÊNDICE

Daremos agora uma versão recente de alguns resultados do nosso trabalho.

Para tanto, achamos necessário colocar a noção de espaço fibrado da seguinte forma (comparar com 2.1).

Seja K um grupo topológico e seja F um K - espaço efetivo à direita (0.1,0.2). Sejam X e B espaços topológicos. Um <u>fibrado</u> é uma aplicação p: $X \to B$ junto com uma coleção Φ de homeomorfismos ϕ: $F \times U \to p^{-1}(U)$, para $U \subset B$, aberto que satisfazem as seguintes condições:

(1) Para qualquer ϕ em Φ, temos que p. $\phi(x,y) = y$, para todo x em F e y em U.

(2) Todo ponto b em B possui uma vizinhança V tal que existe ϕ: $F \times V \to p^{-1}(V)$ com ϕ em Φ.

(3) Se ϕ: $F \times U \to p^{-1}(U)$ está em Φ e $V \subset U$ é aberto, então a restrição ϕ a $F \times V$ também está em Φ.

(4) Se ϕ, ψ : $F \times U \to p^{-1}(U)$ estão em Φ, existe uma aplicação θ: $U \to K$ tal que

$$\psi(f,u) = \phi(f\ \theta(u),\ u), \text{ para todo } f \text{ em } F \text{ e todo } u \text{ em } U.$$

(5) A coleção Φ é maximal entre todas as famílias que satisfazem as condições acima.

Chamaremos então X de espaço total, B de espaço base, F de fibra, K de grupo do fibrado, cada ϕ de carta sobre U (as funções coordenadas da def. 0.1.) e θ de função transição (as transformações coordenadas da def. 2.1).

A aplicação θ é unicamente determinado por $\phi^{-1} \circ \psi$, conforme visto em 2.1.(3).

Em seguida damos uma descrição de espaços fibrados em função de produto torcido, que vamos definir.

Seja G um grupo que opera sobre X, (0.1) e seja x em X. O conjunto $G(x) = \{g(x);\ g \text{ em } G\}$ é chamado <u>órbita de x sob G</u>. Seja X / G o conjunto cujos elementos são as órbitas $x^* = G(x)$ de G em X. Seja Π: $X \to X/G$ definido por $\Pi(x) = G(x)$. Atribuímos a X / G a topologia quociente, i.é, V é aberto em X/G se, e somente se, $\Pi^{-1}(V)$ é aberto em X. Assim, chamamos X / G de <u>espa-</u>

ço orbital de X, em relação a G, e Π é chamada aplicação orbital.

Sejam G um grupo topológico, X um G espaço à direita e Y um G - espaço à esquerda. Neste caso, G opera sobre X x Y, por

$$g(x,y) = (x\,g^{-1},\ gy).$$

O espaço orbital dessa ação é chamado produto torcido de X e Y, e é representado por $X \times_G Y$.

Segue imediatamente da definição, que o produto torcido $X \times_G Y$ é o espaço quociente de X x Y, pela relação de equivalência

$$(xg,y) \sim (x,gy), \text{ para todo } x \text{ em } X \text{ e } y \text{ em } Y.$$

A classe de equivalência de (x,y) é representada por {x,y} de tal modo que {x,y} = {x',y'} se e somente se existe g em G tal que $x' = x\,g^{-1}$ e $y' = gy$ ([11]). É fácil verificar que { xg,y} = {x, gy}.

Dados dois G - espaços à esquerda Y e Y' e uma aplicação equivariante f: Y →Y' (f é equivariante se f (gy) = gf(y), para todo g em G e todo x em X), então f induz a aplicação

$$X \times_G f\colon\ X \times_G Y \to X \times_G Y', \text{ definida por}$$

$$\{x,y\} \to \{f(x),\ y\}.$$

Lembremos que um G - fibrado principal é um fibrado com fibra e grupo G, em que G opera em si próprio por translação à direita.

PROPOSIÇÃO:

Seja p: X → B um G - fibrado principal e seja F um G - espaço à direita. Então

$$\Pi\colon F \times_G X \to B \text{ definida por}$$

Π {f,x} = p(x) é um fibrado com fibra F e grupo G, e é chamado F - fibrado associado com seu G - fibrado principal ([7]).

Esta proposição apresenta uma forma moderna de determinarmos o fibrado principal associado, definido anteriormente em 2.21, o que sugere que a teoria que temos desenvolvido admite uma notação conveniente em função de produto torcido. Entretanto, a apresentação de N.E. Steenrod em "The Topology of Fible bundles", que desenvolvemos neste trabalho é ainda mais completa, embora esta nova tendência notacional seja de grande aplicação em ações de grupos (ver [1]).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1]. BREDON, Glen E. Introduction to compact trasnformation groups New York, Academic Press, 1972.

[2]. CHEVALLEY, C. Theory of Lie groups. Princeton , Princeton University Press, 1946.

[3]. DUGUNDJI, James. Topology. Boston, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[4]. EILENBERG, S. and STEENROD, N.E. Foundation of algebraic topology. Princeton , Princeton University Press, 1952.

[5]. GREENBERG, Marvin J. Lectures on algebraic topology. Massachusetts, W.A. Benjamin, Inc., 1967.

[6]. HU, S.T. Homotopy theory. New York, Academic Press, 1957.

[7]. OLTRAMARI, M.H.M. Classificação local e orbital de G - espaços e G - aplicações: existência de tubos. Tese de Mestrado. Florianópolis, S.C., Universidade Federal de Santa Catarina, 1979.

[8]. SPANIER, E.H. Algebraic topology. New York, Mc Graw-Hill, 1966.

[9]. STEENROD, N.E. The topology of fibre bundles. Princeton , Princeton University Press, 1951.

[10]. VICK, James W. Homology theory. New York, Academic, Press, 1972.

[11]. WHITE HEAD, G. W. Homotopy theory. Cambridge, Massachu - sets , The M. I.T. Press, 1966.