CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by Repositório Institucional da UFSC

Thuysa Schlichting de Souza

Um Estudo da Extensão do seno, cosseno e tangente no Triângulo Retângulo para Funções de Domínio Real

Florianópolis

2013

Thuysa Schlichting de Souza

Um Estudo da Extensão do seno, cosseno e tangente no Triângulo Retângulo para Funções de Domínio Real

Trabalho de conclusão de curso apresentado na Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção título de licenciado em Matemática

Orientador:
Carmem Suzane Comitre Gimenez

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis

2013

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria no 20CC 210.

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Orientador

Prof. José Luiz Rosas Pinho

Prof. Neri Terezinha Both Carvalho

Sumário

Introdução

Durante as aulas da disciplina de Projetos II, tomamos conhecimento que para iniciar uma pesquisa era necessário uma problemática, uma pergunta inquietadora, que nos fizesse buscar respostas e nos permitisse refletir. Nesse momento, a professora Neri T. Both expôs ao grupo uma questão que a incomodava quanto pesquisadora: o ensino da Trigonometria na escola. Era de seu interesse entender como acontecia a transição da Trigonometria no triângulo retângulo para a Trigonometria na circunferência e mesmo as funções trigonométricas reais.

Nesse momento, comecei a refletir sobre esse assunto, tentei lembrar como se deu esse processo na minha época de escola e não consegui recordar como meus professores introduziram as principais ideias da Trigonometria. Pesquisando em alguns livros, encontrei a função de Euler como ponto de partida para definir as funções trigonométricas com domínio real. Como não conhecia essa abordagem, compreendi que muitas vezes os professores saem da Universidade sem o devido preparo para ensinar alguns assuntos que geram grandes dificuldades para os alunos.

Entendendo que, para o entendimento das funções trigonométricas, sutilezas do conhecimento sobre o conjunto dos reais são resgatados e manipulados, e se eu não me lembro como foi abordado este tema, e como também não tenho clareza de como fazer quando no exercício da profissão de professor, responsável por uma turma, considero importante me aprofundar, entender, discutir a abordagem das funções seno, cosseno e tangente.

Dessa forma, objetivou-se nesse trabalho fazer um estudo do seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo e como funções trigonométricas com domínio real, bem como analisar a transição da Trigonometria no triângulo para as funções trigonométricas num livro didático de ensino médio, enfocando principalmente os exercícios. Como a Trigonometria é resultado de um processo histórico, sofrendo várias transformações ao longo dos séculos até apresentar-se no formato atual, também buscou-se fazer seu estudo histórico.

A teoria que embasa o estudo dos exercícios no livro analisado é a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard, mais precisamente quando esse autor trata da organização matemática. No entanto, a teoria da transposição didática está intrínseca em todos os capítulos desse trabalho.

Considera-se a transposição didática como o instrumento através do qual o conhecimento científico transforma-se em conhecimento escolar e, assim, possa ser ensinado pelos professores e aprendido pelos alunos. É o trabalho de fabricar um objeto de ensino, ou seja, fazer um objeto de saber produzido pelo "sábio" ser objeto do saber escolar.

É exatamente essa transformação que é apresentada nesse estudo. Através da comparação entre o saber sábio e o saber a ensinar da Trigonometria será possível perceber como é realizada a transição da Trigonometria do triângulo retângulo para as funções trigonométricas reais e se essa modificação (observada no livro didático) implica numa grande perda de saber científico.

1 História da Trigonometria

A trigonometria é um ramo da Matemática que surgiu há milhares de anos e esteve presente em várias civilizações antigas. Desse modo, não é possível determinar uma única pessoa ou um povo responsável pela sua criação. Segundo Boyer (2010, p.108), teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes já eram conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônicos.

O problema 56 do Papiro de Rhind, um papiro egípcio de aproximadamente $1650a.C.$, apresenta algumas noções de trigonometria e estabelece um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo. Os antigos astrônomos babilônicos que viveram no século $Va.C.$ realizaram um desenvolvimento considerável em trigonometria prática e foram responsáveis pelas primeiras tentativas de medir a duração de um ano através das observações do comprimento das sombras dos relógios solares, os gnômons.

Os estudos relacionados a trigonometria se concentravam principalmente na trigonometria esférica, que baseia-se em triângulos sobre a superfície de uma esfera. Os triângulos esféricos, por exemplo, já eram estudados pelos gregos desde os pitagóricos. Contudo, ainda era imprescindível o desenvolvimento da trigonometria plana para subsidiar os trabalhos mais avançados.

1.1 A Trigonometria Grega

Aristarco de Samos, que viveu em $300a.C.$, propôs um sistema heliocêntrico cerca de um milênio antes de Copérnico $(1473 - 1543)$. No entanto, seus escritos se perderam e as únicas evidências desse fato são citações realizadas por Arquimedes e Plutarco. Aristarco dedicou-se ainda a pesquisar as distâncias entre a Terra e a Lua, registrando seus resultados no livro *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua.*

As principais informações deduzidas por Aristarco em seu livro são:

1. A distância da Terra ao Sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da Terra à Lua. Na demonstração deste fato vemos pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo pequeno.

2. Os diâmetros do Sol e da Lua têm a mesma razão que suas distâncias da Terra.

3. A razão do diâmetro do sol pelo diâmetro da Terra é maior do que $\frac{19}{3}$ e menor do que $\frac{43}{6}$.

Aristarco cometeu alguns erros em suas medidas prejudicando, assim, suas conclusões. Isso deveu-se principalmente aos instrumentos imprecisos e rudimentares utilizados por ele, já que seus raciocínios estavam corretos.

Foi o célebre Eratóstenes de Cirene $(276-194a.C.)$ quem chegou a uma avaliação mais precisa do tamanho da Terra. Pesquisando em um dos milhares de livros da biblioteca de Alexandria, soube que ao meio dia, no solstício de verão, a luz do sol refletia no fundo de um poço na cidade de Siena. Instigado com a história, Eratóstenes decidiu verificar se o mesmo acontecia em Alexandria.

Alguns fatos foram imprescindíveis para os cálculos utilizados por Eratóstenes. De acordo com Ávila (2007, p.21), deveria haver um tráfego regular de caravanas entre as duas cidades e, por causa disso, conhecia-se a distância entre elas. O autor afirma também que já se sabia que Alexandria e Siena estavam praticamente no mesmo meridiano. Provavelmente, tal verificação, decorreu de viagens realizadas de uma cidade a outra quando, para ir de Alexandria a Siena, viajava-se diretamente na direção norte.

Sendo assim, constatou que ao meio dia do solstício de verão em Alexandria, uma estaca fincada no chão projetava uma sombra com um ângulo de $7,2^\circ$ em relação a estaca. Sabendo que a distância entre as duas cidades era igual a 5000 estádios e que $7,2^\circ$ corresponde a um cinquenta avos de uma circunferência, concluiu que o perímetro da circunferência da Terra era igual a 250000 estádios.

Considerando o comprimento do estádio de 160 metros, a circunferência da Terra mediria aproximadamente 40000 quilometros. Não sabemos se esse realmente foi o valor adotado por Eratóstenes, pois existiam diversos estádios utilizados nessa região. Porém, mesmo que o valor utilizado fosse o de um estádio olímpico, aproximadamente 185 metros, ele obteria como comprimento 46250 quilometros que é muito próximo do valor mais correto de 40000 quilometros.

Nesse momento, ainda não existia uma trigonometria sistemática. Os astrônomos baseavam suas obras principalmente em métodos geométricos e recursos numéricos. Nessas condições, Hiparco de Nicéia ($180-125a.C$) compilou a primeira tabela trigonométria, ou tabela de cordas, e assim recebeu o título de pai da trigonometria. O cálculo dessa tabela contribuiu para suas descobertas na astronomia como, por exemplo, a determinação do nascer e o poente de várias estrelas.

Segundo Ávila (2007, p.113), uma tabela de cordas é uma lista dos comprimentos das cordas correspondentes a vários valores dos ângulos centrais de uma circunferência de raio conhecido. Ou seja, considerando uma circunferência de centro O e raio R com alguns ângulos centrais, como $\widehat{AOB}$ e $\widehat{COD}$, podemos caracterizá-los pelas cordas que os subtendem, nesse caso AB e CD respectivamente.

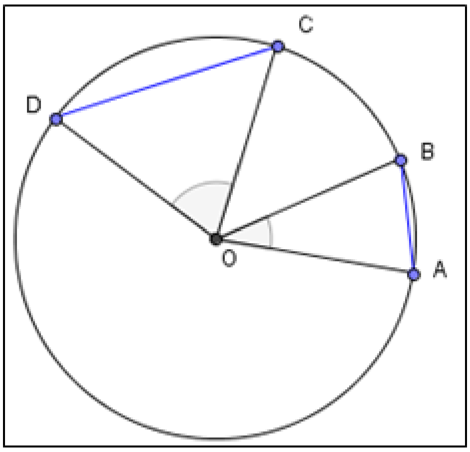


Figura 1: Cordas na circunferência

Além das realizações no desenvolvimento da trigonometria, Hiparco fez grandes contribuições na astronomia, principalmente, a elaboração de um catálogo estelar contendo aproximadamente 850 estrelas, a descoberta e uma estimativa da precessão dos equinócios no ano e a organização dos dados empíricos babilônicos. Além disso, atribui-se a ele a divisão do círculo em 360 graus através da sua tabela de cordas, uma divisão possivelmente inspirada na astronomia babilônica.

Para Eves (2004, p.202), como quase nenhum dos escritos de Hiparco chegou até nós, tudo que se sabe sobre suas realizações científicas provém de fontes indiretas. Referências a suas obras foram encontradas em escritos de outros estudiosos, como Têon de Alexandria ($sec.IV$) que atribuiu a Hiparco um tratado de doze livros e Cláudio Ptolomeu ($150d.C.$) que cita os trabalhos do astrônomo no livro O Almagesto. Existem, também, alguns indícios que Hiparco já sabia dos processos que equivalem a várias fórmulas empregadas hoje na resolução de triângulos esféricos retos.

Outro matemático grego, depois de Hiparco, que apresentou uma Trigonometria bem desenvolvida com resultados novos, foi Menelau de Alexandria (aproximadamente $100d.C$). Acredita-se que ele tenha escrito um tratado de cordas num círculo em seis livros que foram citados por vários comentadores gregos e árabes. Esse tratado e outras diversas obras de Menalau se perderam, porém uma delas se preservou em versão árabe: Sphaerica. Esse trabalho é formado por três livros e constitui " um foco de luz intensa sobre o desenvolvimento da Trigonometria " (EVES, 2004, p.203). Trata-se principalmente de triângulos esféricos e suas aplicações à astronomia.

No Livro I, Menelau descreveu pela primeira vez a definição de um triângulo esférico e estabeleceu, para esses triângulos, proposições análogas às que Euclides determinou para os triâgulos planos. No entanto, mostrou-se contrário ao método de prova por redução ao absurdo que Euclides costumava utilizar em suas demonstrações. Assim, evitou usar esse procedimento e, como consequência, muitas das provas de Euclides que poderiam ser facilmente adaptadas para o caso de triângulos esféricos foram substituidas por métodos bastante diferentes.

O segundo livro apresenta aplicações da geometria esférica na astronomia trazendo poucas contribuições significativas para a Matemática. Já no terceiro livro, Menelau propõe um teorema, posteriormente denominado teorema de Menelau, como parte do que é essencialmente trigonometria esférica na forma grega típica, uma trigonometria de cordas num círculo. Tal teorema é proposto em termos de intersecção de círculos sobre uma esfera.

Provavelmente o teorema de Menelau para a Geometria plana já era conhecido por Euclides. O teorema no plano afirma que se o triângulo ΔABC é cortado por uma secante que intersecta os lados AB, BC e CA nos pontos L, M e N, respectivamente, então

$$MA.NB.LC = MC.NA.LB$$

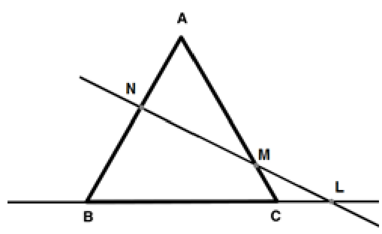


Figura 2: Teorema de Menelau

De acordo com Boyer (2010, p.112), Menelau considerou esse teorema bem conhecido por seus contemporâneos, mas ele o estendeu a triângulos esféricos numa fórmula equivalente a $\text{sen}(MA).\text{sen}(NB).\text{sen}(LC) = \text{sen}(MC).\text{sen}(NA).\text{sen}(LB)$. Lembrando que se são considerados segmentos com orientação, os dois produtos são iguais em módulo mas diferem de sinais.

Todos os matemáticos gregos aqui citados realizaram grandes contribuições para a Trigonometria Esférica e para a Astronomia, entretanto o trabalho grego mais influente nessas áreas foi desenvolvido por Cláudio Ptolomeu em torno de $150d.C.$ A sua obra, constituida por treze livros, tinha por nome grego original Síntese Matemática, mas o superlativo magiste (*maior*) passou a ser utilizado para designá-la e, assim, discriminá-la de obras menores. Com os árabes o trabalho de Ptolomeu passou a se chamar Almagesto, ou seja, O Maior.

As informações encontradas sobre a vida de Ptolomeu provêm principalmente do Almagesto, pois nele há referências de observações de eventos astronômicos feitos por Ptolomeu cujas datas de ocorrência são conhecidas por meio de outros documentos. Além disso, no Almagesto também são mencionados alguns trabalhos de seus antecessores, como Hiparco e Menelau.

Nessa obra temos uma teoria matemática consistente sobre o funcionamento do sistema solar que esclarece o movimeto dos planetas, da Lua e do Sol através do geocentrismo. O primeiro livro apresenta uma tábua de cordas que dispõe dos comprimentos das cordas dos ângulos centrais de uma circunferência de $0,5°$ a $180°$ e uma breve explicação de como ela foi produzida. Dessa forma, é proposto um teorema conhecido como teorema de Ptolomeu.

De acordo com Boyer (2010, p.112),Ptolomeu sustenta em seu teorema a seguinte afirmação: se ABCD é um quadrilátero (convexo) inscrito num círculo, então

$$AB.CD + BC.DA = AC.BD,$$

isto é, a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais. Através do caso especial em que um lado é diâmetro do círculo, Ptolomeu deduziu o resultado $\text{sen}(a \pm b)$ e, por um raciocínio semelhante, também chegou à dedução da expressão $\cos(a \pm b)$.

Vale ressaltar que os matemáticos gregos não utilizavam as razões trigonométricas em seus trabalhos, eles usavam as cordas num círculo. Por exemplo, o seno de um ângulo era representado pela corda de arco duplo. Provavelmente por influência babilônica, os gregos atribuiam o comprimento 60 para o raio de uma circunferência e, devido a astronomia, surgiu a divisão da circunferência em 360 graus.

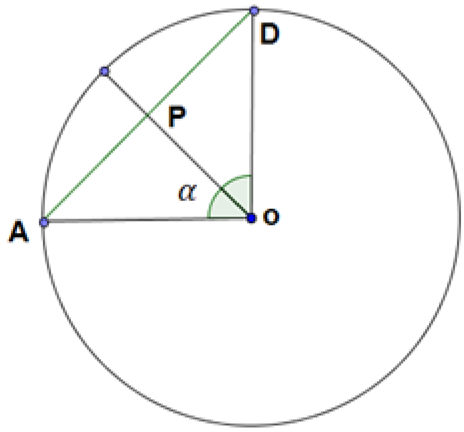


Figura 3: Corda de arco duplo na circunferência

O seno de um ângulo α traduzido para a linguagem de cordas de Ptolomeu é da forma

$$\text{sen}\alpha = \frac{cd2\alpha}{120},$$

onde $cd2\alpha$ representa a corda AD (figura 3). Podemos facilmente chegar nessa relação observando, através da figura 3, que

$$\text{sen}\alpha = \frac{AP}{OA} = \frac{\frac{AD}{2}}{OA} = \frac{\frac{cd2\alpha}{2}}{60} = \frac{cd2\alpha}{120}.$$

Ainda no Almagesto, Ptolomeu encontra uma aproximação de π com quatro casas decimais através da tábua de cordas e apresenta um catálogo com mais de mil estrelas. Assim, o Almagesto foi uma obra monumental que durou mais de mil anos sendo utilizada pelos gregos, bizantinos e árabes, para depois chegar à Europa. Para Eves (2004, p.204), o trabalho de Ptolomeu manteve-se como um modelo sobre astronomia até os tempos de Copérnico $(1473-1543)$ e Kepler $(1571-1630)$.

1.2 Contribuições dos Indianos e Árabes

Depois dos gregos, os matemáticos indianos mostraram ao mundo uma Trigonometria original e criativa. Eles trabalhavam com a Matemática proveniente das suas próprias tradições que, provavelmente, não foram herdadas dos egípcios e babilônicos. Todavia, assim como os gregos, os indianos desenvolveram a Trigonometria para utilizá-la como uma ferramento para sua astronomia.

Um conjunto de textos denominados Siddhantas, cujo significado é sistemas (de Astronomia), marcou o renascimento da cultura indiana, privilégio da primeira das quatro castas do país, e contribuiu para o avanço da Trigonometria. O Surya Siddhanta ou Sistema do Sol de aproximadamente $400d.C.$ foi a única versão preservada por completo. O autor desta obra é desconhecido, mas para os hindus trata-se de um texto passado diretamente pelo deus do sol em $2163101a.C.$

O Surya possibilitou um novo panorama para a Trigonometria da época, pois não relacionava as cordas de um círculo com seus ângulos centrais correspondentes como propôs Ptolomeu. A relação utilizada era entre metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo central correspondente. Desse modo, surgiu pela primeira vez na história da Matemática uma forma equivalente da função seno.

Na primeira metade do século VI, o matemático hindu Aryabhata, no texto Aryabhatya, também trabalhava com semi cordas nas suas tabelas de senos. Na época, não foi utilizado o termo seno, a palavra adotada pelos indianos foi jiva. Brahmagupta, em 628, também publicou um trabalho reproduzindo a mesma tabela de senos, mas foi Bhaskara quem dispôs de um método detalhado para construções dessas tabelas.

Não faltam méritos para a Trigonometria indiana, eles já empregavam os equivalentes de senos, cossenos e senos reversos $(1-\cos\alpha)$. Entretanto, de acordo com Eves, escreviam em versos e muitas vezes revestiam seus trabalhos de uma linguagem obscura e mística. Além disso, raramente apresentam demonstrações ou deduções das suas descobertas, oferecendo, muitas vezes, trabalhos parecidos com coleções de regras.

Assim como os indianos, os árabes deram grandes contribuições para a Trigonometria motivados, também, por suas aplicações à astronomia. Os trabalhos de seus antecessores serviram de grande influência para os árabes, tanto a geometria grega das cordas encontrada no Almagesto de Ptolomeu como as tabelas hindus de seno. Porém, a função seno herdada da Índia foi o principal instrumento que serviu de base para a Trigonometria árabe.

Várias obras gregas de Matemática e astronomia foram traduzidas para o árabe e, dessa forma, se preservaram até que estudiosos europeus tiveram a oportunidade de retraduzí-las para as demais línguas. Para isso, governadores de Bagdá, denominados califas, subsidiaram intelectuais proporcionando-lhes acomodações junto às suas cortes. Durante o reinado do califa al-Manun, que governou de 809 a 833, o Almagesto foi trasladado para o árabe e a tradução dos Elementos de Euclides foi concluida.

Apesar do papel importante como preservadores dos trabalhos de seus antecessores, alguns estudiosos árabes realizaram consideráveis descobertas. Entre os de maior destaque temos al-Battani (850−929), Abu'l-Wefa (940−998) e Nasir Eddin al-Tusi (cerca de 1250). O primeiro desses foi o principal responsável por transmitir a Trigonometria do seno até o continente europeu.

Al-Battani, ou Albategnius como conhecido na Europa, introduziu a circunferência de raio unitário para demonstrar que a razão jiva é verdadeira para qualquer triângulo retângulo e não tem relação com o valor da medida da hipotenusa. Através do seu livro *Sobre o Movimento das Estrelas*, apresenta algumas fórmulas tais como

$$a = \frac{b.\text{sen}(90^\circ - B)}{\text{sen}B}$$

onde a e b são catetos de um triângulo retângulo e B é o ângulo oposto ao lado b.

O matemático Abu'l Wefa propôs uma Trigonometria mais sistemática nos moldes do Almagesto, embora a corda grega tenha sido ofuscada pela função seno hindu. Atribui-se a ele a introdução da função tangente na Trigonometria e a elaboração de uma tábua de senos e tangentes com incrementos de 15 minutos. Para Boyer (2010, p.162), Wefa usou todas as seis funções trigonométricas comuns, bem como relações entre elas, mas seu uso das novas funções não parece ter tido muitos seguidores no período medieval.

Por algum tempo, os matemáticos árabes continuaram a aprimorar sua Trigonometria exclusivamente para auxiliar seus estudos astronômicos. Mais tarde, Nasir Eddin al-Tusi realizou o primeiro trabalho de Trigonometria plana e esférica considerado independente da astronomia em seu Tratado Sobre o Quadrilátero.

Vale lembrar que a palavra seno não era utilizada na época, Aryabhata empregava, em seu lugar, a palavra hindu jiva que significava corda. Jiva foi traduzida para o árabe como jiba, palavra de mesma fonética. Posteriormente, jiba tornou-se jaib nos escritos árabes, tal equívoco ocorreu pois era costume escrever apenas as consoantes das palavras, cabendo ao leitor a colocação das vogais. Sendo assim, mais tarde, ao se fazer a tradução de jaib para o latim, empregou-se o equivalente sinus de onde vem a palavra atual seno.

1.3 A Trigonometria no Renascimento

Georg Peuerbach (1423−1469), um dos precursores do humanismo na Europa Central, retomou a obra de Ptolomeu e computou uma nova tábua de senos que foi muito difundida entre os estudiosos europeus, principalmente, devido ao uso da numeração árabe que proporcionou cálculos mais simples e eficientes do que os obtidos com números romanos. De acordo com Boyer (2010, p.187), os humanistas procuravam a elegância e a pureza em suas línguas clássicas e, por isso, necessitavam de uma edição latina do Almagesto melhor do que a versão medieval derivada do árabe.

Peuerbach foi o mestre de Regiomontanus (1436 – 1476), um dos matemáticos mais influentes do século XV, cujo trabalho teve grande importância por estabelecer a Trigonometria como área independente da Astronomia. Provavelmente Regiomontanus teve conhecimento da obra de Nasir Eddin e isso pode tê-lo influenciado no desejo de organizar a Trigonometria dessa forma.

Podemos destacar *De triangulis omnimodis* como sua obra mais importante, pois trata-se da "exposição sistemática dos métodos para resolver triângulos que marcou o renascimento da trigonometria" (BOYER, 2010, p.187). Outra grande obra de Regiomontanus foi *De triangulis* composta por cinco livros dedicados à trigometria plana e à trigonometria esférica.

Segundo Eves (2004, p. 297), em *De triangulis* o autor revela particular interesse na determinação de um triângulo, satisfeitas três condições dadas, por exemplo, determinar um triângulo sabendo a diferença entre dois lados, a altura relativa ao terceiro e a diferença entre os segmentos em que a altura divide o terceiro lado. Além disso, as únicas funções trigonométricas empregadas são o seno e o cosseno. Mais tarde, porém, Regiomontanus calculou uma tábua de tangentes.

Copérnico (1473 – 1543) também contribuiu para a Trigonometria, embora tenha ficado famoso pela sua teoria heliocêntrica do sistema solar. Completou, em 1520, alguns trabalhos de Regiomontanus, que incluiu em um capítulo de seu *De Lateribus et Angulis Triangulorum*, publicado separadamente por seu discípulo Rhaeticus (1514 – 1576) em 1542.

"Percebemos o completo conhecimento de trigonometria de Copérnico não só pelos teoremas incluídos em *De revolutionibus*, mas também por uma proposição originalmente incluída pelo autor numa versão manuscrita anterior do livro, não na obra impressa. A proporsição eliminada é uma generalização do teorema de Nasir Eddin (que aparece no livro) sobre o movimento retilínio resultante da composição de dois movimentos circulares." (BOYER, 2010, p.200)

O discípulo de Copérnico ainda recalculou as tábuas de Regiomontanus com maior exatidão nos cálculos. Aumentou a precisão para onze casas decimais e os senos, os cossenos, as tangentes e as secantes foram calculados de minuto em minuto para os arcos do primeiro quadrante.

1.4 A Trigonometria na Europa a partir do século XVI

No século XVI, o mundo pode presenciar as importantes contribuições em Aritmética, Trigonometria, Geometria e, principalmente, em Álgebra do maior matemático francês dessa época. François Viète $(1540-1603)$ revolucionou a Álgebra ao trazer uma notação consistente a ela que permitiu o desenvolvimento de um novo método de trabalhar com formas gerais de equações.

Para Boyer (2010, p.211), a Trigonometria de Viète era caracterizada por uma ênfase maior sobre generalidade e largueza de visão e por uma abordagem analítica. Ele considerava a Trigonometria um ramo independente da Matemática e trabalhava sem referência direta a meias cordas num círculo. Na sua obra "*Canon mathematicus*" preparou extensas tabelas de todas as seis funções de ângulos aproximados até minutos e decompôs triângulos oblíquos em triângulos retângulos como método para determinar todas as medidas dos seus lados e ângulos. Além disso, em "*Variorum de rebus mathematicis* determinou um equivalente à nossa lei das tangentes:

$$\frac{\frac{(a+b)}{2}}{\frac{(a-b)}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

onde a é o lado oposto ao ângulo A e b é o lado oposto ao ângulo B num triângulo com ângulo reto C.

Viète ainda inovou ao adotar letras para representar quantidades e ao mostrar como mudar a forma das equações adicionando ou multiplicando cada lado pelo mesmo valor. Outra grande contribuição sua foi usar fórmulas trigonométricas para a resolução de equações cúbicas.

Depois de Viète, podemos destacar Bartholomeus Pitiscus $(1561-1613)$ que, em 1595, publicou um tratado que trazia as tábuas de Rhaeticus corrigidas e aprimoradas, contribuindo para a modernização do tratamento desse assunto. O nome Trigonometria foi registrado pela primeira vez como título de uma exposição de Pitiscus.

Através das séries infinitas, Isaac Newton $(1642-1727)$ também contibuiu para a Trigonometria. Ele expandiu o arco seno em séries e, por reversão, deduziu a série para seno de x. Já Thomas-Fanten de Lagny $(1660 - 1734)$ foi o primeiro matemático a evidenciar a periodicidade das funções trigonométricas.

A Trigonometria passou a ser desenvolvida por muitos matemáticos a partir de Viète e, com o cálculo infinitesimal, tomou novo impulso. Podemos dizer que Euler $(1707 - 1783)$, quando determina a unidade como raio de um círculo e define funções associando números e não ângulos, foi um dos protagonistas principais para a configuração da Trigonometria nos dias atuais.

2 A Trigonometria no Triângulo Retângulo

Este capítulo apresentará uma breve abordagem da Trigonometria no triângulo retângulo, destacando algumas relações importantes e introduzindo alguns conceitos básicos. Delinearemos ainda a história dos ângulos, suas definições e relações com o triângulo retângulo.

O objetivo dessa pesquisa não é discutir as definições de ângulos que, embora pareça um conceito elementar, gerou muitos debates no meio acadêmico. Entretanto, tornou-se necessário delinear sua evolução na história e explicitar algumas definições, já que trata-se de um assunto estritamente relacionado à Trigonometria.

2.1 Ângulos

Afirmações sobre a origem da Matemática, segundo Boyer (2010), são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Em geral, os estudos da história da Geometria iniciam com a civilização egípcia, mas é evidente que seus conhecimentos possuiam raízes mais antigas. O homem neolítico, por exemplo, manifestou um conhecimento simples em Geometria ao decorar objetos com padrões repetidos e simetrias.

Dessa forma, como muitos conceitos em Geometria, não se sabe quem e quando teve origem o conceito de ângulo. Acredita-se que a noção de ângulo surgiu das necessidades encontradas no cotidiano dos povos antigos e se desenvolveu, primeiramente, de forma intuitiva. Uma das primeiras definições de ângulo pode ter sido apresentada por Euclides (por volta de 300 a.C.) no seu livro Os Elementos.

Segundo Shereves, Euclides afirma que um ângulo plano é a inclinação recíproca de duas retas que num plano têm um extremo comum e não estão em prolongamento. Pode-se considerar essa definição uma variante da antiga ideia grega de que um ângulo era uma deflexão ou uma quebra numa linha reta. Euclides precisou definir também que um ângulo retilíneo apresenta os lados na mesma linha reta para incluir um ângulo raso. O autor sugere ainda que Aristóteles, um grande erudito do período Helênico, propôs três categorias para enquadrar os conceitos de ângulos: quantidade, qualidade e relação.

Mais recentemente, no ano de 1893, o alemão H. Schotten classificou as definições de ângulos existentes em três categorias que, segundo Costa (1997), são:

1. A diferença de direções entre duas linhas retas.
2. A rotação necessária para trazer um de seus lados desde sua posição inicial, até o outro lado, permanecendo no mesmo plano.
3. A porção do plano entre duas semi-retas com origem em um ponto.

Uma definição, não contemplada por Schotten, muito usual atualmente considera o ângulo um conjunto de pontos. Entretanto, adotaremos nesse trabalho a definição abordada por Euclides, já que estaremos constantemente utilizando os axiomas e teoremas de Geometria Plana elaborados em seu livro Os Elementos.

2.1.1 Medida Angular

As unidades de medidas usuais para se medir um ângulo são o grau e o radiano. O grau é obtido dividindo-se uma circunferência em 360 partes e o ângulo correspondente a uma dessas partes é denominado ângulo de grau 1. Dessa forma, um arco AB que subtende um ângulo de α graus tem medida angular α.

A utilização de 360^o numa revolução completa se deve principalmente aos babilônicos. A ideia de 360 partes em um círculo poderia ter resultado de uma estimativa ligeiramente errônea de 360 dias num ano. Todavia, parece provável que o sistema sexagesimal babilônico tenha precedido a divisão do círculo em 360 partes. Ainda esta razão existe como uma parte da história, mas não como uma parte da lógica ou do pensamento.

Ao contrário do grau, o radiano é o resultado de estudos, principalmente, do matemático Thomas Muir e do físico James T. Thomson que consideraram essencial a criação de uma nova unidade de medida para ângulos. Provavelmente, sua criação está ligada a simplificação de certas fórmulas matemáticas e físicas.

Vamos considerar um ângulo central α em uma circunferência de raio R que subtende o arco AB de comprimento C. A medida em radianos do ângulo α é a razão entre o comprimento C do arco AB e o raio R da circunferência. Da mesma forma, a medida do arco AB em radianos é a medida em radianos do ângulo α.

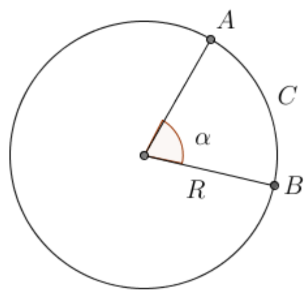


Figura 4: Circunferência com arco AB

Algumas consequências dessa definição são:

1. Um arco de 1 radiano consiste no arco cujo **comprimento** é igual à medida do raio da circunferência que o contém.

2. Considerando a circunferência como uma arco que subtende um ângulo de 360° com comprimento $C = 2\pi R$, temos que

$$\tfrac{2\pi R}{R}\ rad \text{ corresponde a } 360°$$

$$2\pi\ rad \text{ corresponde a } 360°$$

3. Temos a relação

$$\alpha = \frac{C}{R}$$

ou seja,

$$C = \alpha R$$

Observe que, quando $R = 1$, a medida do ângulo em radiano coincide com a medida do comprimento do arco.

2.2 Ângulos e Triângulos

Teorema 2.2.1 (Soma dos Ângulos internos de um triângulo)**.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo é* 180°.

Demonstração. Vamos mostrar primeiro para o caso de um triângulo retângulo, depois iremos generalizar para um triângulo qualquer. Suponhamos, então, ΔABC um triângulo retângulo com ângulos internos α, β e δ (reto).

Tracemos uma reta r paralela ao lado AB passando pelo vértice C do triângulo e uma reta t paralela ao lado AC. Observe que esta reta interceptará o vértice B e também a reta r num ponto A'.

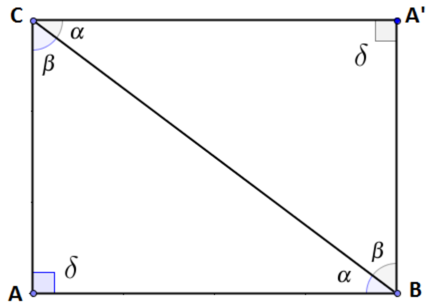


Figura 5: Triângulo retângulo ΔABC e o novo triângulo $\Delta A'CB$

Então, pela propriedade dos ângulos alternos internos, o ângulo $\widehat{A'CB}$ mede α e o ângulo $\widehat{CBA'}$ mede β. Segue disso que os triângulos ΔABC e $\Delta A'CB$ são semelhantes (caso ALA) e, consequentemente, $\widehat{BA'C} = \delta$.

Como AC é perpendicular a AB, segue-se que AC e $A'C$ são perpendiculares. Analogamente, AB e $A'B$ também são. Logo, $\alpha+\beta = \delta$ e, daí, $\alpha+\beta+\delta = 2\delta \Leftrightarrow \alpha+\beta+\delta = 180°$.

O caso geral reduz-se a este, baixando-se a altura sobre o maior lado. Isto decompõe o triângulo arbitrário em dois triângulos retângulos. Usando o caso particular já provado, e observando que $\beta = \beta' + \beta''$, temos

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta' + \beta'') + \gamma = (\alpha + \beta') + (\beta'' + \gamma) = 90° + 90° = 180°.$$

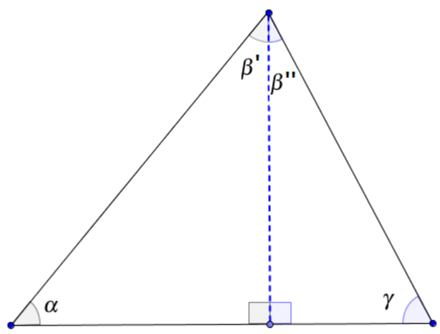


Figura 6: Triângulo qualquer decomposto em dois triângulos retângulos

$\square$

Para a demonstração utilizamos o fato de que a altura relativa ao maior lado do triângulo sempre cairá no seu interior. Vejamos alguns exemplos:

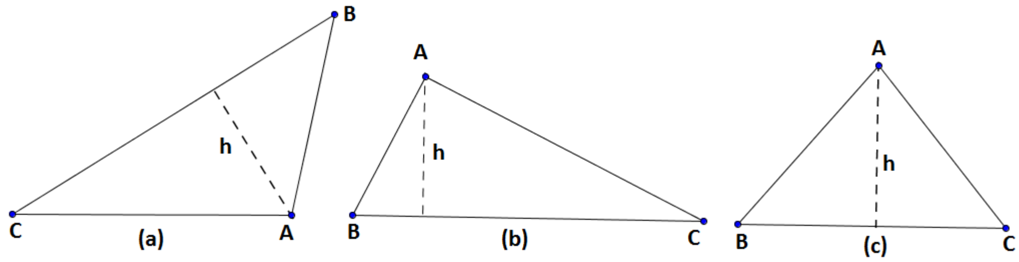


Figura 7: Exemplos de triângulos quaisquer e as suas respectivas alturas

2.2.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Considere o triângulo ΔABC reto em A com o pé da altura relativa ao lado AB denominado D. Denotaremos a a hipotenusa, b o cateto AC, c o cateto AB e h a altura AD. A projeção BD será representada pela letra minúscula m e a projeção CD pela letra n.

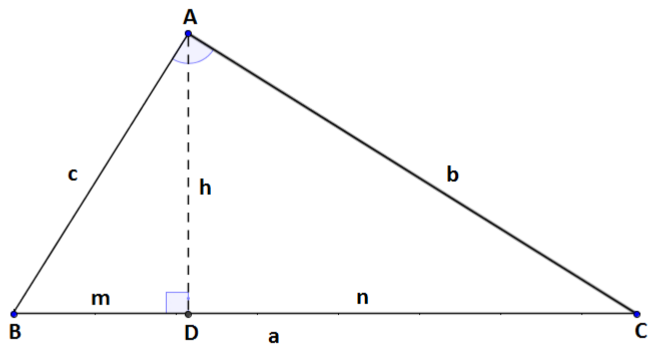


Figura 8: Triângulo retângulo

Os triângulos ΔABC e ΔDAB são semelhantes pelo caso Ângulo-Ângulo (AA). De fato $\widehat{CAB} = \widehat{BDA} = 90°$ e $\widehat{CBA} = \widehat{DBA}$. Dessa forma, podemos determinar as seguintes razões

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$$

daí temos as relações

$$bc = ah,\ c^2 = am,\ bm = ch$$

De modo análogo, ΔDAB é semelhante ao triângulo ΔDCA e, assim, temos as relações

$$b^2 = an,\ cn = bh \text{ e } h^2 = mn.$$

Relações métricas também podem ser determinadas para um triângulo qualquer. Nesse caso, algumas relações para triângulos acutângulos são distintas das relações dos triângulos obtusângulos.

Uma relação métrica muito conhecida que relaciona os três lados de um triângulo retângulo é o Teorema de Pitágoras. Este teorema é considerado uma das principais descobertas matemáticas, pois possibilitou principalmente o desenvolvimento dos números irracionais.

Neste trabalho, apresentaremos a demonstração de James Abrahan Garfield ($1831-1881$), vigésimo presidente dos Estados Unidos, que em 1876, enquanto estava na Câmara de Representantes, rabiscou num papel uma interessante demonstração, publicada posteriormente pelo O New England Journal of Education.

Teorema 2.2.2 (Pitágoras)**.** *Num triângulo retângulo ΔABC cuja hipotenusa mede a e os catetos medem b e c, vale a identidade* $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

Demonstração. Seja um triângulo ΔABC retângulo de catetos b e c e hipotenusa a. Tracemos um segmento partindo do vértice B de tamanho b, cuja extreminade será denotada de A'. Também, tracemos por A' um segmento de tamanho c perpendicular à BA'. Nesse caso, teremos um novo segmento que será chamado de $A'B'$.

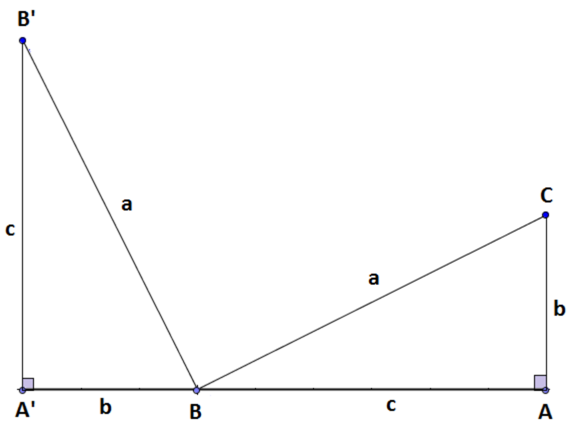


Figura 9: Triângulo ΔACB e triângulo $\Delta A'BB'$

Note que, se ligarmos os pontos B e B', obtemos um triângulo $\Delta A'BB'$ retângulo em A'. De acordo com o critério lado-ângulo-lado (LAL) de congruência de triângulos, temos que os triângulos ΔACB e $\Delta A'BB'$ são congruentes e, consequentemente, a hipotenusa BB' mede a.

Agora, tracemos um segmento de reta de B' a C. Obtemos, então, um trapézio retângulo constituído pelos dois triângulos retângulos iniciais (congruentes) e pelo triângulo $\Delta BCB'$ que, como vamos mostrar a seguir, é também um triângulo retângulo.

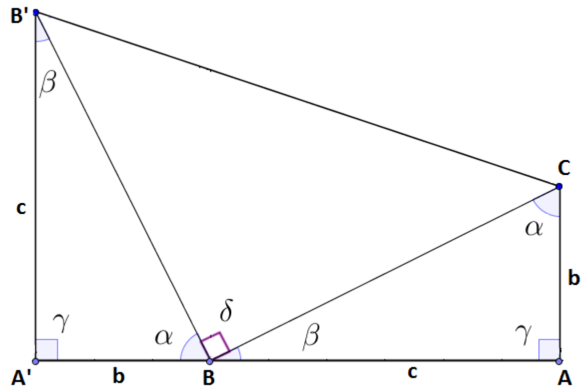


Figura 10: Trapézio retângulo e seus ângulos internos

Mostraremos então que o ângulo δ tem medida de $90°$. Denotando os ângulos $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BAC}$ como α, β e γ respectivamente, temos:

$$\gamma + \alpha + \beta = 180°$$

Como $\gamma = 90°$, segue:

$$90° + \alpha + \beta = 180°$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

Consideremos agora o triângulo $\Delta A'BB'$ que, como já visto, é congruente ao triângulo ΔACB. Logo, o ângulo $\widehat{A'BB'}$ também é α.

Dessa forma, examinando os três ângulos formados em torno do ponto B ($\widehat{CBA}$, $\widehat{B'BC}$ e $\widehat{A'BB'}$), teremos que:

$$\delta + \alpha + \beta = 180°$$

$$\delta + 90° = 180$$

$$\delta = 90°$$

Portanto, o triângulo $\Delta BCB'$ é também retângulo.

Observe que os três triângulos unidos geraram um trapézio retângulo, cujas bases são b e c e a altura é $b + c$.

Podemos calcular a área desse trapézio de duas formas, a primeira utilizando diretamente a fórmula da área do trapézio e a segunda somando as áreas dos três triângulos retângulos.

Através da primeira temos

$$\frac{(b+c).(b+c)}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2}$$

Agora, somando as áreas dos triângulos

$$2.\frac{b.c}{2} + \frac{a.a}{2} = bc + \frac{a^2}{2}$$

Igualando as duas expressões obtidas, teremos

$$bc + \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{2}$$
$$2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2$$

ou ainda,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$\square$

Vale ressaltar que a recíproca do Teorema de Pitágoras é verdadeira, ou seja, se a área do quadrado sobre um dos lados do triângulo for igual à soma das áreas dos quadrados sobre os outros dois lados, então esse triângulo é retângulo e o seu lado correspondente ao quadrado maior é a sua hipotenusa.

2.3 Funções Trigonométricas do Ângulo Agudo

Consideremos três pontos não colineares A, B e O, o ângulo $\widehat{AOB} = \theta$ $(0° < \theta < 90°)$ e as semi-retas r e s definidas pelos segmentos OA e OB respectivamente.

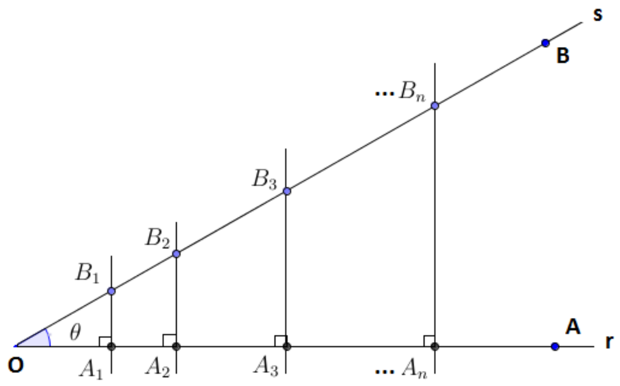


Figura 11: Ângulo $\widehat{AOB}$ intersectado por retas perpendiculares

Tracemos retas $k_1, k_2, k_3 ... k_n$ perpendiculares a r. Observe que k_i, $1 \leq i \leq n$, intersecta as retas r e s em um único ponto que denotaremos, respectivamente, de A_i e B_i, $1 \leq i \leq n$. Dessa forma, temos os triângulos retângulos ΔOA_1B_1, ΔOA_2B_2,..., ΔOA_nB_n que são semelhantes (caso AAA). Podemos portanto escrever a relação:

$$\frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_iB_i}{OB_i}, 1 \leq i \leq n$$

Esta relação significa que a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo θ e a hipotenusa do triângulo é constante e depende apenas desse ângulo. Portanto podemos definir esta função de θ assim construída como

$$\text{sen}(\theta) = \frac{A_1B_1}{OB_1}$$

Ao considerarmos as demais relações no triângulo, teremos as razões:

$$\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_i}{OB_i}, 1 \leq i \leq n$$

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_iB_i}{OA_i}, 1 \leq i \leq n$$

Analogamente, definiremos as funções para $0° < \theta < 90°$,

$$\cos(\theta) = \frac{OA_1}{OB_1}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{A_1B_1}{OA_1}$$

Estas são as *funções trigonométricas* do ângulo agudo. Veremos que tais funções não são independentes, algumas relações importantes decorrem naturalmente delas.

2.3.1 Relações trigonométricas

1. **Identidade Fundamental da Trigonometria**

   Seja θ um ângulo agudo, então vale a relação

   $$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

   De fato, consideremos um ângulo θ de vértice O e um triângulo ΔAOB, reto em B como indica a figura 12.

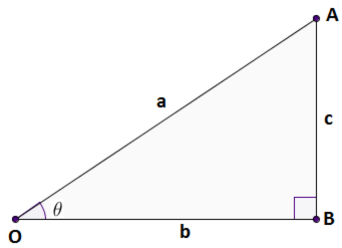
   

   Figura 12: Triângulo retângulo ΔAOB

   Fazendo $OA = a$, $OB = b$ e $AB = c$ e utilizando o teorema de Pitágoras, temos

   $$b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

2. **Relação Tangente**

   Podemos relacionar a tangente de um ângulo agudo com o seno e o cosseno desse mesmo ângulo, da seguinte forma

   $$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$$

   É fácil ver, pela figura 12, que

   $$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$$

3. **Relação dos Ângulos Complementares**

Se dois ângulos α e β são complementares, ou seja $\alpha + \beta = 90°$, então

$$\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta), \cos(\alpha) = \text{sen}(\beta), \text{tg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\beta)}$$

A demonstração dessas relaçãoes segue da hipótese que $\alpha + \beta = 90°$. Seja ΔABC um triângulo retângulo conforme figura 13.

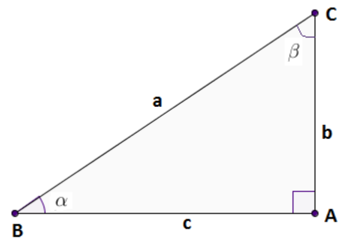


Figura 13: Triângulo ΔABC reto em A e com ângulos α e β

O seno e o cosseno de α são

$$\text{sen}(\alpha) = \tfrac{b}{a}, \;\; \cos(\alpha) = \tfrac{c}{a}$$

Da mesma forma, seno e cosseno de β são

$$\text{sen}(\beta) = \tfrac{c}{a}, \;\; \cos(\beta) = \tfrac{b}{a}$$

Portanto, $\text{sen}(\alpha) = \cos(\beta)$ e $\cos(\alpha) = \text{sen}(\beta)$.

Além disso,

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\text{tg}(\beta)}.$$

Um fato importante decorrente da relação dos ângulos complementares é que calculando as funções trigonométricas de ângulos no intervalo $[0°, 45°]$, determinamos automaticamente as funções trigonométricas dos ângulos no intervalo $[45°, 90°]$.

2.3.2 Funções trigonométricas dos Ângulos Notáveis

Calcularemos os valores do cosseno e do seno para os ângulos notáveis, ou seja, $30°, 45°$ e $60°$.

1. $\theta = 30°$

   Consideremos um triângulo equilátero (figura 14) ΔABC de lado l e M o pé da altura relativa ao lado BC. Lembremos que num triângulo equilátero a altura, a mediana e a bissetriz coincidem. Assim, o triângulo ΔAMB é retângulo em M com $\widehat{ABM} = 60°$ e $\widehat{MAB} = 30°$. Temos ainda que $AB = l$, $BM = \frac{l}{2}$ e, pelo teorema de Pitágoras, $AM = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Dessa forma,

$$\cos(30°) = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}(30°) = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

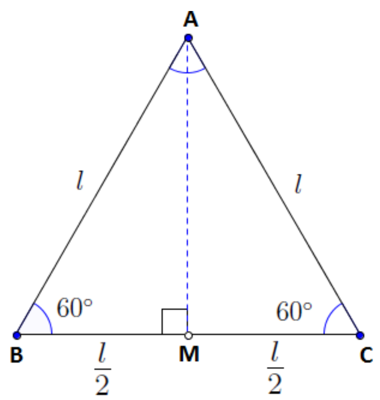


Figura 14: Triângulo equilátero

2. $\theta = 45°$

   Seja ΔABC um triângulo retângulo em B com $\widehat{CAB} = \widehat{BCA} = 45°$ (figura 15).

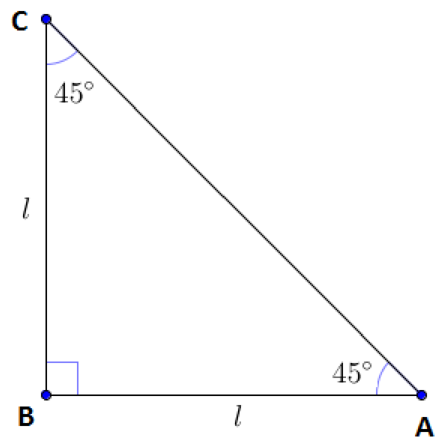


Figura 15: Triângulo retângulo isósceles

Note que, então, o triângulo ΔABC é também isósceles e $AB = BC = l$. Pelo teorema de Pitágoras, $AC = l\sqrt{2}$. Sendo assim,

$$\cos(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. $\theta = 60^\circ$

Observe que $60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$, assim esses dois ângulos são complementares. Então, pela relação dos ângulos complementares,

$$\cos(60^\circ) = \text{sen}(30^\circ) \Rightarrow \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$
$$\text{sen}(60^\circ) = \cos(30^\circ) \Rightarrow \text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3 As Funções Trigonométricas com Domínio Real

No capítulo anterior, definimos os conceitos de seno, cosseno e tangente utilizando triângulos retângulos, ou seja, as definições ficaram restritas para ângulos entre 0° e 90°. Agora, ampliaremos esses conceitos para qualquer número real.

Podemos observar que a relação fundamental

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

é semelhante à equação da circunferência de raio 1 centrada na origem; isso nos sugere que o seno e o cosseno de qualquer ângulo α representam os números das coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro $(0,0)$. Assim, definiremos as funções trigonométricas por meio da função de Euler, que associa um número real a um ponto dessa circunferência.

3.1 O círculo orientado

Definição 1. *Denotaremos de circunferência unitária ou círculo unitário a circunferência C de centro na origem de $\mathbb{R}^2$ e raio 1.*

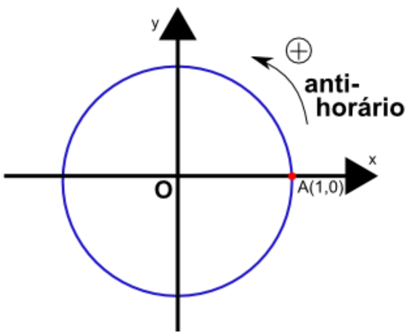


Figura 16: Círculo unitário

Observações:

1. O círculo unitário pode ser descrito da forma $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

2. Para todo ponto $(x, y) \in C$, tem-se que:

$$-1 \leq x \leq 1 \;\text{ e }\; -1 \leq y \leq 1$$

3. Convencionou-se o sentido anti-horário, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C como o sentido positivo do círculo unitário. Sendo assim, dizemos que o círculo unitário é orientado.

Definição 2. *Definimos "origem dos arcos" o ponto $A = (1, 0)$ do círculo unitário.*

3.2 A função de Euler

Já vimos no primeiro capítulo que Euler deu grandes contribuições para a Trigonometria apresentar a sua forma atual. Uma grande ideia sua foi criar a função E, que chamaremos função de Euler. Esta função associa a cada número um ponto da circunferência unitária. O domínio dessa função é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o seu contra-domínio é a circunferência unitária C.

Para ilustrar o que a função faz, podemos pensar na reta real como um fio que será enrolado sobre a circunferência C (pensado como um carretel) iniciando do ponto 0 da reta real e do ponto $(1, 0)$ da circunferência unitária.

Definição 3. *A função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$ faz corresponder a cada número $t \in \mathbb{R}$ o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária de modo que:*

- $E(0) = (1, 0)$.

- *se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência, a partir da origem dos arcos, um caminho de comprimento t no sentido positivo. O ponto final do caminho será demoninado $E(t)$.*

- *se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte da origem dos arcos e percorre C no sentido negativo.*

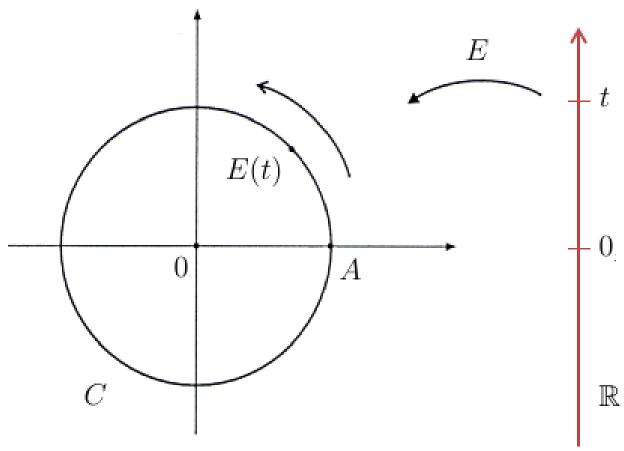


Figura 17: Ilustração da função de Euler

Observe que, como o comprimento da circunferência unitária C é igual a 2π, se $t > 2\pi$ ou $t < -2\pi$, o arco de comprimento $|t|$ descrito a partir da origem dos arcos terá mais de uma volta ao longo de C. Dessa forma, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, tem-se $E(t + 2k\pi) = E(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, dado um ponto P da circunferência C, ele é a imagem pela função de Euler de uma infinidade de números reais, todos da forma $t + 2k\pi$. Em particular, se $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, então $E(2k\pi) = A$.

Costuma-se exprimir este fato dizendo que $t + 2k\pi$ são as *"várias determinações"* do ângulo $\widehat{AP}$ e que t e $t + 2k\pi$ são *côngruos*. Por exemplo, quando $t = \frac{\pi}{6}$ temos um arco chamado de primeira determinação positiva dos arcos na forma $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pois, sendo o único representante desses arcos que se encontra na primeira volta, retrata o menor valor positivo que $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ assume.

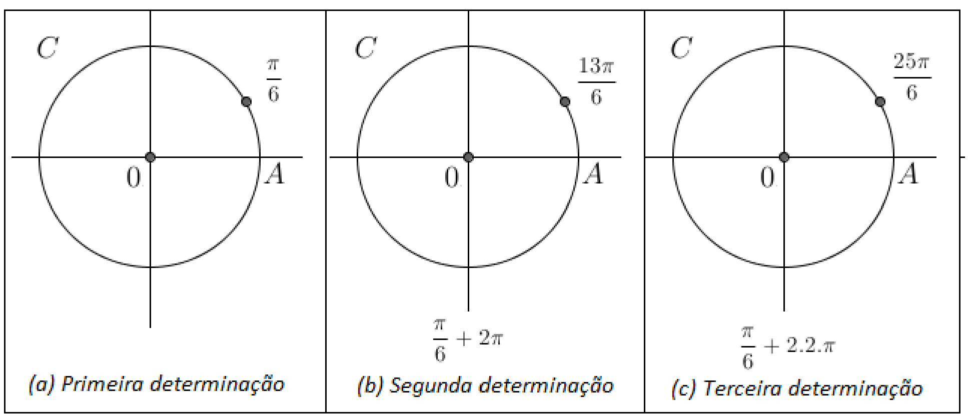


Figura 18: As três primeiras determinações do arco $\frac{\pi}{6}$

No capítulo 2, subseção 2.1.1, vimos que, na circunferência unitária, a medida do comprimento do arco coincide com a medida do ângulo em radiano. Desse modo, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $P = E(t)$, tem-se que o ângulo $\widehat{AOP}$ mede t radianos.

Decorre disso que a medida do ângulo $\widehat{AOP}$ é determinada apenas a menos de um múltiplo inteiro de 2π, pois $P = E(t)$ implica $P = (t+2k\pi)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, por exemplo, o ângulo de 3 radianos é também o ângulo de $3-2\pi$ radianos. Generalizando esse exemplo, se $P = E(t)$ então $P = E(t-2\pi)$, pois os arcos de comprimento $|t|$ e $|t-2\pi|$ vão da origem dos arcos até o ponto P da circunferência.

3.2.1 Simetrias

Na circunferência unitária, interessam-nos diretamente três tipos de simetria, a saber: em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro. Para o estudo de cada uma delas, sem perda de generalidade, tomemos um ângulo de medida t radianos, $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

1. *Simetria em relação ao eixo vertical*

   Seja $P = E(t)$ a extremidade do arco de medida t. O simétrico de P em relação ao eixo vertical é o ponto $P' = E(\pi - t)$, visto que os ângulos centrais assinalados na figura 19 são congruentes.

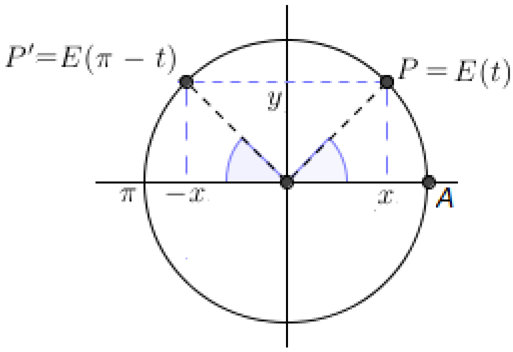
   

   Figura 19: Pontos P e P' simétricos em relação ao eixo vertical

   Os arcos que apresentam extremidade P são representados por $t + 2k\pi$, como visto anteriormente, e os arcos de extremidade P' por $(\pi - t) + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

   A figura 19 deixa claro que se, pela função de Euler, $E(t) = (x, y)$ então $E(\pi - t) = (-x, y)$.

2. *Simetria em relação ao eixo horizontal*

   Levando em conta a congruência entre os ângulos centrais assinalados na figura 20, se $P = E(t)$ então o seu simétrico em relação ao eixo horizontal será $P' = E(-t)$.

Para designar o conjunto de arcos côngruos ao arco de medida t e $-t$, utilizamos a notação $\pm t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

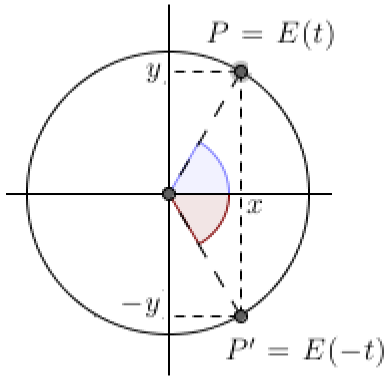


Figura 20: Pontos P e P' simétricos em relação ao eixo horizontal

Podemos observar também pela figura 20 que, nesse tipo de simetria, os pontos P e P' apresentam a mesma abscissa, já as suas ordenadas são iguais a menos do sinal. Dessa forma, se $E(t) = (x, y)$ então $E(-t) = (x, -y)$.

3. *Simetria em relação ao centro da circunferência*

As medidas dos arcos que se formam quando temos dois pontos opostos em relação ao centro são t e $t \pm \pi$, pois quando dois pontos são extremidades opostas de um diâmetro, como na figura 21, a diferença entre dois valores consecutivos cujas imagens são os pontos citados vale π. De modo geral, para arcos formados por pontos diametralmente opostos temos a expressão $t + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

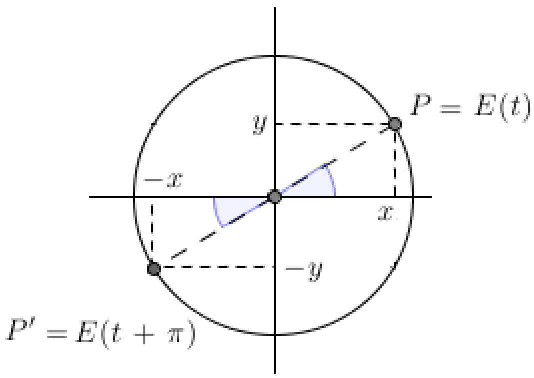


Figura 21: Pontos P e P' simétricos em relação ao centro da circunferência

Além disso, temos ainda a propriedade que se $E(t) = (x, y)$ então $E(t + \pi) = (-x, -y)$.

As simetrias da função de Euler apresentadas anteriormente se traduzirão em propriedades das funções seno e cosseno que serão tratadas na próxima seção.

3.3 Funções Trigonométricas

3.3.1 Funções seno e cosseno

Com o auxílio da função $E : \mathbb{R} \to C$, podemos definir o seno e o cosseno de um número $t \in \mathbb{R}$.

Definição 4. *As funções* sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, denominadas função seno e função cosseno respectivamente, são definidas para cada* $t \in \mathbb{R}$ *da forma:*

$$E(t) = (\cos t, \text{sen} t).$$

Isto quer dizer que na circunferência unitária o cosseno é a abscissa do ponto $P = E(t)$ e o seno é a ordenada desse mesmo ponto.

A relação fundamental $\text{sen} t^2 + \cos t^2 = 1$ continua valendo para todo $t \in \mathbb{R}$, já que todo ponto $P = E(t) = (\text{sen} t, \cos t)$ de C está a uma distância de 1 unidade da origem. Também esta definição coincide com a apresentada no capítulo anterior quando $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Vejamos, na figura 22, pela definição para ângulos agudos temos que

$$\text{sen} t = \frac{PC}{OP} = \frac{PC}{1} = BO \quad \text{e} \quad \cos t = \frac{OC}{OP} = \frac{OC}{1} = OC$$

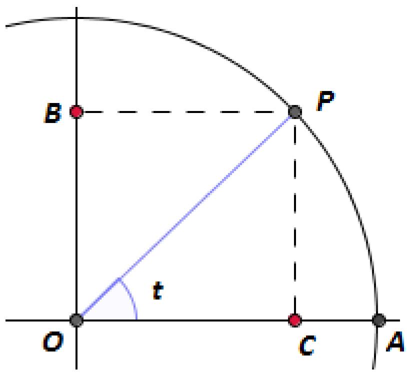


Figura 22: Ângulo de t radianos,$0 < t < \frac{\pi}{2}$, na circunferência unitária

Além disso, a definição 4 permite escrever $\cos 0 = 1$ e $\text{sen} 0 = 0$ quando $P = E(0) = (1, 0)$ e $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\text{sen} \frac{\pi}{2} = 1$ quando $P = E(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$. Dessa forma, a nova definição estende a primeira e mantém as relações básicas.

Definição 5. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t+kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ chama-se período da função f.*

Já foi visto que $E(t + 2k\pi) = E(t) = P$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, portanto, para todo t real, $\text{sen}(t + 2k\pi) = \text{sen}t$ e $\cos(t + 2k\pi) = \cos t$. Dessa forma, pela definção 5, as funções seno e cosseno são periódicas com período 2π. Esse fato facilita o estudo dessas funções, pois conhecendo seu comportamento no intervalo $[0, 2\pi]$ passamos a conhecer imediatamente seu comportamento em todos os intervalos de comprimento 2π. Em termos de gráfico, a função $y = \text{sen}x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é o mesmo em qualquer intervalo $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$.

Definição 6. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada par quando, para todo $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = f(t)$. Se $f(-t) = -f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então a função f chama-se ímpar.*

Para determinar a paridade das funções seno e cosseno, utiliza-se a simetria da função de Euler em relação ao eixo horizontal. Decorre da definição 4 que $E(-t) = (\cos(-t), \text{sen}(-t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos ainda pela simetria da função de Euler que $E(-t) = (x, -y)$ quando $E(t) = (x, y)$. Isto siginifica que

$$\text{sen}(-t) = -\text{sen}t \quad \text{e} \quad \cos(-t) = \cos t.$$

Portanto, seno é uma função ímpar e cosseno é uma função par.

Os valores absolutos das funções trigonométricas estão determinados pelos valores dessas funções no primeiro quadrante. Já os sinais dessas funções dependem do quadrante em que se encontram.

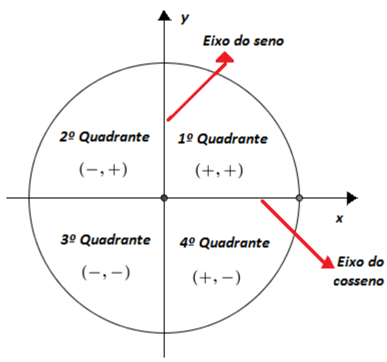


Figura 23: Sinais das funções seno e cosseno em cada quadrante

Assim, é possível determinar os valores das funções seno e cosseno em qualquer quadrante sendo conhecidos seus valores no primeiro quadrante e as simetrias da função de Euler estabelecidas no final da seção anterior. Esse processo é chamado de "redução ao primeiro quadrante".

Analisaremos separadamente os casos em que o ponto P' está no segundo, terceiro e quarto quadrante.

1. *Ponto P' no segundo quadrante, ou, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$:*

   Para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $E(t) = (\cos t, \text{sen}t)$ e $P' = E(\pi - t) = (\cos(\pi - t), \text{sen}(\pi - t))$. Mas, pela simetria da função de Euler em relação ao eixo vertical da circunferência, $E(\pi - t) = (-x, y)$ quando $E(t) = (x, y)$. Isto implica que

   $$\text{sen}(\pi - t) = \text{sen}t \;\text{ e }\; \cos(\pi - t) = -\cos t.$$

2. *Ponto P' no terceiro quadrante, ou, $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$:*

   De modo análogo, considerando a simetria em relação ao centro da circunferência, temos $P' = E(t + \pi)$ e

   $$E(t + \pi) = (\cos(t + \pi), \text{sen}(t + \pi)) = (-\cos t, -\text{sen}t)$$

   ou seja

   $$\text{sen}(t + \pi) = -\text{sen}t \;\text{ e }\; \cos(t + \pi) = -\cos t$$

3. *Ponto P' no quarto quadrante, ou, $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$:*

   Nesse caso considera-se a simetria em relação ao eixo horizontal da circunferência unitária. Como já analisado anteriormente quando determinamos a paridade das funções seno e cosseno, temos que $P' = E(-t)$ e

   $$\text{sen}(-t) = -\text{sen}t \;\text{ e }\; \cos(-t) = \cos t.$$

3.3.2 Função tangente

Definição 7. *Seja $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. A função $\text{tg} : D \to \mathbb{R}$, chamada função tangente, é definida para cada $t \in \mathbb{R}$ como:*

$$\text{tg } t = \frac{\text{sen } t}{\cos\ t}.$$

A função tangente foi definida como um quociente, por isso tem seu domínio restrito aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero. Como $\cos t = 0$ se, e somente se, $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k inteiro), a tangente não é definida nesses pontos.

Embora não esteja definida para todo número real, a função tangente pode ser considerada como uma função periódica de período π, pois, pela definição 5,

$$\text{tg}(t + k\pi) = \frac{\text{sen}(t + k\pi)}{\cos(t + k\pi)} = \frac{-\text{sen}t}{-\cos t} = \frac{\text{sen}t}{\cos t} = \text{tg }t.$$

Além disso, temos que a função tangente é ímpar. Pela definição 6, temos

$$\text{tg}(-t) = \frac{\text{sen}(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-sent}{cost} = -\frac{\text{sen}t}{\cos t} = -\text{tg }t.$$

A tangente também apresenta um significado geométrico na circunferência trigonométrica. Para a definição da tangente como um arco t, é necessário acoplar um terceiro eixo à circunferência. Consideremos uma reta orientada tangente no ponto A de origem dos arcos à C, conforme figura 24, e um arco AB de medida t. Unindo-se o centro O ao ponto B e prolongando-se esse raio, obtemos uma reta r que determina B' em C e T no novo eixo.

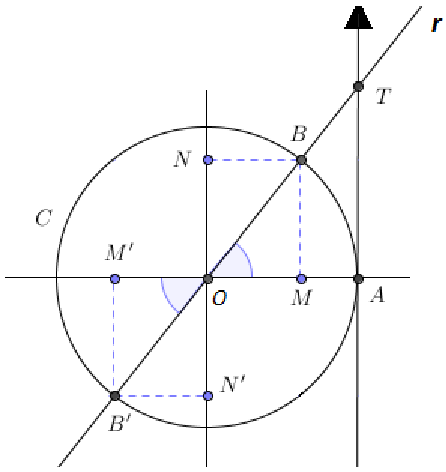


Figura 24: Significado algébrico da tangente (1º e 3º quadrantes)

Para mostrar que a tangente é a medida algébrica do segmento AT, considera-se primeiramente o ponto B no primeiro ou terceiro quadrante e, depois, o ponto B no segundo ou quarto quadrante.

- *Primeiro ou terceiro quadrante*

Observe na figura 24 que os triângulos ΔOMB e $\Delta OM'B'$ são congruos e semelhantes ao triângulo ΔOAT pelo caso (AAA). Portanto,

$$\text{tg } t = \frac{\text{sen} t}{\cos t} = \frac{ON}{OM} = \frac{MB}{OM} = \frac{AT}{OA} = AT$$

e

$$\text{tg}(t+\pi) = \frac{\text{sen}(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \frac{-ON'}{-OM'} = \frac{M'B'}{OM'} = \frac{AT}{OA} = AT$$

Podemos verficar, além disso, que à medida que t aumenta do primeiro quadrante, o ponto T afasta-se gradativamente do ponto A no sentido positivo do eixo. Assim, o valor da tangente vai crescendo indefinidamente e assumindo todos os valores reais positivos, até que a tangente deixa de existir quando $t = \frac{\pi}{2}$. O mesmo acontece no terceiro quadrante, o ponto T está na parte positiva do eixo das tangentes assumindo valores positivos até que deixa novamente de existir quando $t = \frac{3\pi}{2}$.

- *Segundo ou quarto quadrante*

As relações de semelhança entre os triângulos da figura 25 são análogas. Obteremos, então,

$$\text{tg } t = \text{tg}(t+\pi) = -AT$$

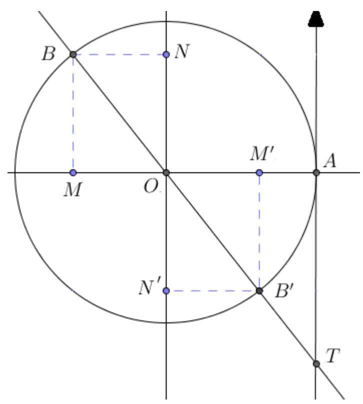


Figura 25: Significado algébrico da tangente (2º e 4º quadrantes)

Nesse caso, verifica-se que no segundo quadrante o ponto T se encontra na parte negativa do eixo das tangentes e, à medida que t aumenta dentro do quadrante, o ponto T se aproxima da origem dos arcos, embora ainda na parte negativa do eixo. O ponto T volta a coincidir com A quando t assume o valor π: $\text{tg } \pi = 0$.

Como ocorre no segundo quadrante, no quarto quadrante o ponto T reaparece na parte negativa do eixo das tangentes e, à medida que t aumenta, o valor da tangente também aumenta até anular-se novamente ao final do quadrante ($tg\ 2\pi = 0$), quando T volta a coincidir com A.

3.3.3 Gráficos das funções trigonométricas

O comportamento de uma função trigonométrica é estudado principalmente através de seu gráfico. O gráfico da função seno é o conjunto dos pontos no plano de coordenadas $(x, \text{sen}x)$ e reúne todas as informações que obtivemos sobre a função seno. Da mesma forma, o gráfico do cosseno é o conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(x, \cos x)$.

Em geral, utiliza-se as ferramentas de cálculo para determinar os intervalos onde uma função muda de sinal, bem como seu crescimento e sua concavidade. Contudo, seria necessário o conhecimento de conceitos não contemplados no programa curricular do ensino médio (limites e derivadas) para a utilização de tais ferramentas.

Dessa forma, podemos apenas realizar um esboço dos gráficos das funções trigonométricas com os instrumentos disponíveis nesse nível. Note que o conjunto de pontos de que já dispomos permite traçar uma figura bastante aproximada dos gráficos das funções seno e cosseno, não sendo necessário conhecer todos os pontos $(x, \text{sen}x)$ e $(x, \cos x)$.

A tabela a seguir lista o seno e o cosseno de alguns ângulos já mostrados neste capítulo.

Ângulo	Seno	Cosseno
0 rad	0	1
$\frac{\pi}{2}$ rad	1	0
π rad	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$ rad	-1	0
2π rad	0	1

Como a definição das funções trigonométricas com domínio real é uma extensão da primeira definição e mantém suas relações básicas, temos também o seno e o cosseno para os ângulos notáveis, apresentados no capítulo 2. Assim, dispomos ainda das seguintes informações para os esboço dos gráficos:

$$\text{sen}(\tfrac{\pi}{6}) = \cos(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{1}{2},$$

$$\text{sen}(\tfrac{\pi}{3}) = \cos(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ e}$$

$$\text{sen}(\tfrac{\pi}{4}) = \cos(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

Além disso, já sabemos que o seno e o cosseno variam entre -1 e 1, isto é, a imagem de cada gráfico estará no intervalo $[-1, 1]$. Devido a propriedade de periodicidade, a curvatura do gráfico de cada função será a mesma sempre que completar-se um período 2π.

Vale ressaltar ainda que o gráfico da função cosseno pode ser obtido utilizando o gráfico da função seno, pois, para qualquer valor real t,

$$\cos\ t = \text{sen}(t + \tfrac{\pi}{2}) \text{ (figura 26)}$$

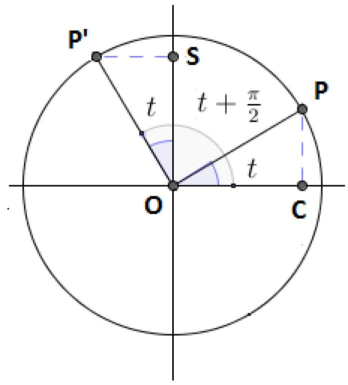


Figura 26: Relação entre o seno e o cosseno

De fato, vamos considerar os triângulos ΔCPO e $\Delta SP'O$. Por construção, $\widehat{COP'}$ vale $(t + \frac{\pi}{2})$ radianos e $\widehat{COS}$ vale $\frac{\pi}{2}$ radianos. Mas

$$\widehat{COP'} = \widehat{COS} + \widehat{P'OS}$$

$$\widehat{P'OS} = \widehat{COP'} - \widehat{COS}$$

$$\widehat{P'OS} = (t + \tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{\pi}{2}$$

$$\widehat{P'OS} = t$$

Temos ainda que $OP = OP' = 1$ e $\widehat{OSP'} = \widehat{OCP} = \frac{\pi}{2}$. Portanto, pela teorema 2.2.1, os ângulos $\widehat{SP'O}$ e $\widehat{CPO}$ são iguais. Assim, os triângulos ΔCPO e $\Delta SP'O$ são congruentes pelo caso ALA, já que

$$\widehat{P'OS} = \widehat{POC}$$

$$OP = OP'$$

$$\widehat{SP'O} = \widehat{CPO}$$

Logo, $OC = OS$, ou seja, cos $t = \text{sen}(t + \frac{\pi}{2})$.

Sendo assim, podemos focar na análise do gráfico da função seno, pois o gráfico da função cosseno é apenas o resultado de uma translação de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda no gráfico do seno. A curvatura é a mesma em ambos os casos e chama-se *senóide*.

Para a construção do gráfico da função seno, é necessário entender como a função varia em cada um dos quatro quadrantes. Através da circunferência, observa-se que a função é crescente em $[0, \frac{\pi}{2}]$ e em $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ e decrescente em $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Pode-se deduzir intuitivamente que, no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, sen t decresce cada vez mais lentamente conforme se aproxima de $\frac{\pi}{2}$.

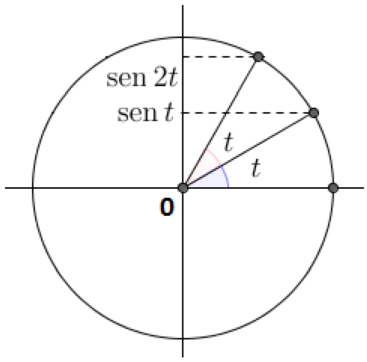


Figura 27: Variação do seno na circunferência unitária

Isso significa que esse crescimento do seno em $[0, \frac{\pi}{2}]$ não é linear, ou seja, que a taxa de variação não é constante. Dessa forma, quando se percorre arcos do mesmo comprimento, a variação do seno não é a mesma (figura 27).

Acima temos um argumento bastante convincente para se explicar com ferramentas acessíveis o por quê do gráfico ser "curvo" e não linear em todo intervalo da função seno. Outra explicação pode ser dada utilizando o fato de que quaisquer três pontos no gráfico da função seno não são alinhados; basta usar três pontos distintos cujo seno é conhecido, associados aos ângulos notáveis por exemplo, e verificar que o determinante correspondente a eles é diferente de zero.

As informações adquiridas até agora já nos permitem fazer um esboço do gráfico da função seno e, consequentemente, da função cosseno. Vejamos:

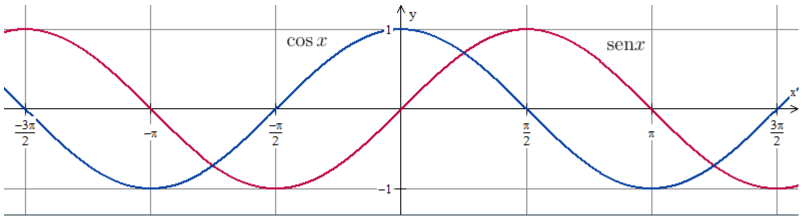
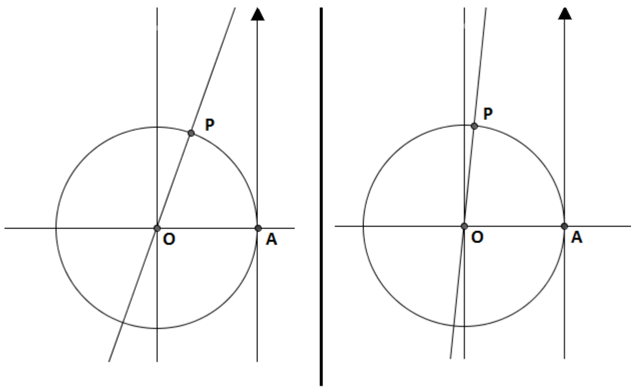


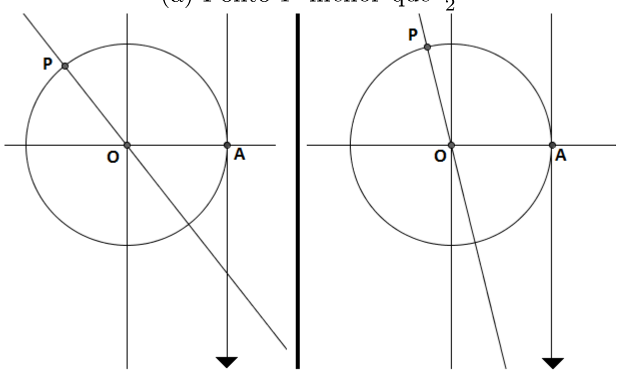
Figura 28: Gráfico da função seno e da função cosseno

Para o gráfico da função tangente, a análise torna-se mais complexa. Sabemos que essa função é periódica com período π e que, para valores múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, a tangente não está bem definida.

Conforme figura 29, tem-se que para valores próximos e menores que $\frac{\pi}{2}$ a tangente torna-se maior que qualquer número positivo dado, e para valores próximos e maiores que $\frac{\pi}{2}$ a tangente torna-se menor que qualquer número negativo dado. Além disso, a função é crescente em todos os intervalos $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ com $k \in \mathbb{Z}$.



(a) Ponto P menor que $\frac{\pi}{2}$



(b) Ponto P maior que $\frac{\pi}{2}$

Figura 29: Comportamento da tangente para diferentes valores de P

Para mostrar como é o comportamento da curva do gráfico com as ferramentas disponíveis, pode-se plotar pontos $(x, \text{tg } x)$ no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, já que nos demais intervalos a curva será da mesma forma.

Portanto, o gráfico da tangente é

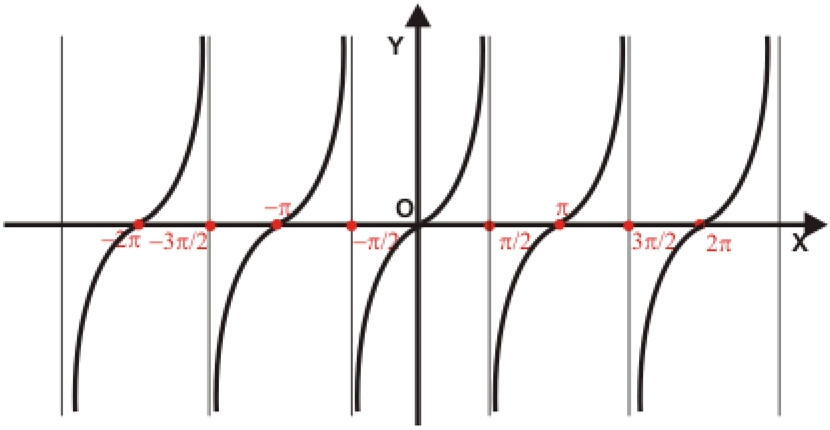


Figura 30: Gráfico da função tangente

Observação

Ficou claro que a construção dos gráficos das funções seno, cosseno e tangente é bastante trabalhosa e necessita de alguns "artifícios" para mostrar determinadas propriedades. Mesmo assim, alguns detalhes não foram possíveis de explicar rigorosamente utilizando os saberes disponíveis.

Na tentativa de amenizar este quadro, sugere-se a utilização de softwares dinâmicos de matemática. Vários programas livres na internet apresentam recursos com os quais os alunos podem construir gráficos de qualquer função apenas com sua sentença.

Além disso, permitem o desenvolvimento de atividades de livre exploração com bastante rapidez, diferente da mídia usual "lápis e papel". Pode-se destacar como sua maior vantagem a possibilidade de movimentação dos objetos e, a partir desses movimentos, a investigação de propriedades e levantamentos de hipóteses.

4 A Trigonometria no Livro Didático

Neste capítulo, apresentaremos uma análise do livro *Matemática - Contexto e Aplicações (Volume Único)* de Luiz Roberto Dante, utilizando a Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard. O objetivo central é enfocar apenas a extensão das funções trigonométricas do triângulo retângulo para as funções trigonométricas com domínio real através dos problemas propostos.

Sabemos que o livro didático é um instrumento fundamental de referência sobre o saber a ser ensinado, pois orienta o conteúdo que será ministrado, sua sequência e as atividades de aprendizagem. Portanto, o livro é um agente determinante na organização dos conceitos de Trigonometria pelos docentes.

Dessa forma, considerou-se que o livro analisado deveria ser recomendado pelo Ministério da Educação (MEC) e ser utilizado em muitas escolas no Brasil. A opção pelo volume único permite uma análise mais completa do assunto, já que o conteúdo de Trigonometria é apresentado em sequência.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio de 2002, o conteúdo de Trigonometria no ensino médio deve ser distribuido de modo que o estudo da Trigonometria do triângulo retângulo seja feito no primeiro ano e a Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta no segundo. Entretanto, essa distribuição pode variar em função do número de aulas ou do projeto da escola para aprofundamento de temas ou inclusão de outros e, assim, muitos professores optam pelo volume único que oferece "maior flexibilidade na escolha da sequência e no aprofundamento ou não de determinados assuntos." (DANTE, 2011, p.03)

O livro é dividido em oito unidades, sendo a terceira de nosso interesse. Essa unidade, cujo título é Trigonometria, apresenta seis capítulos que abordam a Trigonometria desde o triângulo retângulo até as funções trigonométricas.

A maioria desses capítulos inicia-se com uma pequena introdução, que expõe e justifica o que será estudado, e termina com questões de vestibular referentes ao assunto do capítulo. A teoria é abordada de forma sucinta e, em geral, seguida de exemplos de aplicação (exercícios resolvidos).

4.1 Abordagem do livro: Capítulo 16

Realizaremos uma síntese do capítulo 16 que introduz os conceitos básicos para o estudo mais abrangente das funções trigonométricas. É aqui que a Trigonometria passa a ser extendida para os números reais.

Vale ressaltar que nos dois capítulos anteriores, o autor apresentou a Trigonometria no triângulo retângulo, estabelecendo as definições de seno, cosseno e tangente para os ângulos agudos. Algumas relações entre essas razões foram apresentadas, como a identidade fundamental, a relação tangente e a relação entre ângulos complementares. O autor também falou do seno e do cosseno de ângulos obtusos, enfocando apenas como lidar com eles na prática e deixando a parte teórica para o capítulo 16.

Este capítulo inicia-se com uma pequena introdução, onde o autor justifica o estudo mais abrangente de seno, cosseno e tangente através das necessidades da Matemática mais recente, como podemos observar no trecho:

> "Nesse novo contexto, o triângulo retângulo é insuficiente para as definições necessárias e precisamos estabelecer um novo "ambiente" para a Trigonometria: a *circunferência unitária* ou o *círculo unitário* (também chamado de circunferência trigonométrica)." (DANTE, 2011, p.278)

Em seguida, relembra conceitos conhecidos da Geometria Plana, a saber: arco geométrico, ângulo central, comprimento da circunferência de raio r, comprimento e medida de arco e a relação entre o comprimento e a medida (em graus) do arco.

O autor apresenta o grau e o radiano como as unidades para medir os arcos de circunferência (ou ângulos). O arco de um grau é definido como uma das partes da circunferência quando dividida em 360 partes congruentes. O arco de um radiano é determinado como o arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

Para concluir que o comprimeto do arco é igual à medida do arco em radianos multiplicada pelo raio, é usado indução da seguinte maneira:

> "(...)se temos um ângulo central de medida 1 radiano, então ele subtende um arco de medida 1 radiano (lembre que a medida do arco é igual à medida do ângulo) e comprimento de 1 raio. Se temos um ângulo central de medida 2 radianos, então ele subtende um arco de medida 2 radianos e comprimento de 2 raios. Se temos um ângulo central de medida x radianos, então ele subtende um arco de medida x radianos e comprimento de x raios. Assim, $l = xr$ se a medida x do arco for dada em radianos." (DANTE, 2011, p.279)

Com essa relação, é possível relacionar as unidades para medir arcos. Assim, o autor afirma que o arco correspondente à circunferência tem medida 2π *rad*, ou seja, que o arco de 360° mede 2π *rad*. Uma observação interessante apresentada nesse momento é que podemos fazer a conversão das unidades usando uma regra de três simples, mas recomenda-se fazer a conversão mentalmente, utilizando divisões e equivalências, por exemplo:

$$180° \text{ é } \tfrac{1}{2} \text{ de } 360°; \text{ logo, é } \tfrac{1}{2} \text{ de } 2\pi\ rad.$$

$$\text{Portanto, } 180° \text{ corresponde a } \pi\ rad \text{ e } 90° \text{ corresponde a } \tfrac{\pi}{2}\ rad.$$

Depois, é definida a circunferência unitária. É associado um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais à circunferência e o ponto A de coordenadas $(1, 0)$ como origem dos arcos. Em seguida, o autor define arcos congruentes, ressaltando que eles diferem entre si de um múltiplo de 2π. Alguns exemplos de arcos côngruos são apresentados. O autor fala também da primeira determinação de um arco para, assim, mostrar como determinar o quadrante que ele se encontra.

Até esse momento, os conceitos e definições foram expostos de forma resumida; percebemos que o autor procurou ser bastante objetivo.

A ideia de seno, cosseno e tangente de um número real é exibida no sétimo tópico do capítulo. Para as definições, considera-se um ponto $P(x, y)$ da circunferência trigonométrica, ponto final do arco de medida α *rad*, definido a partir do número real α. O autor denomina seno de α a ordenada de P, cosseno de α a abscissa de P e tangente de α a razão entre o seno e o cosseno de α, com cosseno diferente de zero.

Depois, observa que as relações fundamentais são mantidas quando estendemos os conceitos do triângulo retângulo para os valores reais. Enfatiza ainda que, com a extensão, se pode pensar em seno e cosseno de ângulos negativos.

Para o significado geométrico da tangente, considera na circunferência trigonométrica a reta t, tangente à circunferência no ponto A, com a mesma orientação do eixo y. Em seguida, apresenta quatro figuras com o ponto P em cada um dos quadrantes. Assim, por semelhança de triângulos, chega a conclusão que a tangente é a medida algébrica do segmento AT, sendo T o ponto de interseção da reta que passa pelo centro da circunferência e por P com a reta t. A semelhança de triângulos apenas é indicada e não demonstrada.

Em seguida, fez-se algumas considerações como os pontos em que a tangente não existe e o sinal da tangente em função dos quadrantes em que o ponto se encontra.

Os valores notáveis do seno, do cosseno e da tangente são apenas expostos. Com o auxílio de figuras com a circunferência trigonométrica, o autor expõe o seno para cada um dos ângulos, depois faz o mesmo com o cosseno e a tangente. Também são feitas tabelas com esses valores com aproximação de três casas decimais; não há explicação sobre os valores obtidos.

Antes de falar em redução ao primeiro quadrante, são expressos os sinais do seno e do cosseno em função do quadrante em que se encontram. O livro traz um diagrama que mostra como são seus sinais em cada quadrante e também faz um resumo. Apesar de, ao lado do diagrama, ser lembrado que o seno é a ordenada de um ponto e o cosseno a sua abscissa, parece que é necessário memorizar os sinais de seno e cosseno em cada quadrante.

A redução ao primeiro quadrante é abordada em seguida, dividindo-se em três casos: quando o ângulo está no segundo quadrante, no terceiro quadrante e no quarto quadrante. Em todos os casos são mostrados como se determina o seno, o cosseno e a tangente. A explicação é feita apenas por meio de figuras que nos fornecem as seguintes relações:

- Segundo quadrante: $\text{sen}\alpha = \text{sen}(\pi - \alpha)$, $\cos\ \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$ e $\text{tg}\ \alpha = -\text{tg}(\pi - \alpha)$.
- Terceiro quadrante: $\text{sen}\alpha = -\text{sen}(\alpha - \pi)$, $\cos\ \alpha = -\cos(\alpha - \pi)$ e $\text{tg}\ \alpha = \text{tg}(\alpha - \pi)$.
- Quarto quadrante: $\text{sen}\alpha = -\text{sen}(2\pi - \alpha)$, $\cos\ \alpha = \cos(2\pi - \alpha)$ e $\text{tg}\ \alpha = -\text{tg}(2\pi - \alpha)$.

No último tópico do livro "Trabalhando com arcos côngruos", tem-se apenas um parágrafo de texto explicativo.

> "Conhecidos os valores do $\text{sen}x$ e de $\cos x$ da 1ª volta positiva e usando arcos côngruos, podemos calcular $\text{sen}x$ e $\cos x$ para qualquer x." (DANTE, 2011, p.292)

Em seguida, são feitos alguns exemplos de aplicação que mostram como calcular o seno e o cosseno da forma expressa no trecho.

O estudo das funções trigonométricas é feito apenas no último capítulo. A função seno, por exemplo, é definida como a função real que associa a cada número real x o valor real sen$x$. Destacamos que o autor relembra que o processo que permite associar um número real x à medida x de um ângulo, para posterior obtenção do valor sen$x$, foi estudado no capítulo 16. A periodicidade, a paridade, a variação das funções e seus gráficos são todos trabalhados nesse capítulo.

Como foi possível perceber, o livro não utiliza explicitamente a função de Euler para introduzir as funções trigonométricas com domínio real. A abordagem foi feita utilizando a circunferência unitária para definir geometricamente seno, cosseno e tangente de arcos determinados a partir de um número real e, assim, tornar esses conceitos mais abrangentes. Dessa forma, quando se definiu as funções, os conceitos já estavam expandidos.

4.2 Quadro Teórico

A análise dos exercícios do livro didático utilizará conceitos da Teoria Antropológica do Didático de Chevallard.

Segundo Chevallard (1991, apud BERNAL, 2004, p.17; 18), um objeto matemático pode ser visto como um *ser* que está relacionado à *instituições* (habitats) e desempenha uma *função* (nicho). Ao considerar diferentes instituições, tem-se que o saber em questão ocupa funções bem distintas; também será variável o tratamento deste saber pelos sujeitos da instituição.

Salientamos que o significado de *instituições*, nesse caso, é mais abrangente, não se restringindo apenas às instituições de ensino. Alguns exemplos de instituições são um ciclo de Ensino Fundamental, um livro didático, um artigo de revista ou mesmo uma classe de uma escola. Neste capítulo, o objeto matemático é a ideia de seno, cosseno e tangente de um número real e a instituição é o livro didático.

A organização matemática nos oferece subsídios para o estudo de nossas questões. Uma organização matemática de um determinado objeto matemático pode ser descrito, para Chevallard (2001,apud BERNAL), em termos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria.

A tarefa evoca uma ação, é a pergunta de um problema. Nos problemas, precisamos por exemplo calcular, construir, determinar, mostrar, estas são atividades humanas, tarefas que devem ser realizadas.

O que distingue a atividade matemática das outras atividades humanas é que, diante de uma tarefa, é preciso saber como resolvê-la. O que é feito para resolver uma tarefa é a técnica. São exemplos de técnicas a fatoração, a experimentação, o reconhecimento de padrões.

De acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (1997, apud SABO, 2007, p.13) a existência de uma técnica supõe também a existência subjacente de um discurso interpretativo e justificativo da técnica e de âmbito de aplicabilidade e validade. Esse discurso sobre a técnica é uma tecnologia.

Por sua vez, toda tecnologia necessita de uma justificativa que se denomina teoria. Pode-se considerar então a teoria como a tecnologia de sua tecnologia. Alguns exemplos de teoria são Álgebra, Geometria, Probabilidade.

4.3 Resolução e análise das questões

Faremos uma análise dos exercícios do capítulo 16 utilizando a teoria de Chevallard, conforme os termos tarefa, técnica, tecnologia e teoria apresentados na seção anterior.

O autor propõe quarenta exercícios nesse capítulo. Contudo nossa análise será realizada a partir do exercício 16, pois as questões anteriores são referentes à tópicos de revisão e definição de conceitos necessários para introduzir a ideia de seno, cosseno e tangente na circunferência, como mostrado na subseção 4.1.

Os exercícios serão classificados de acordo com as suas tarefas. Não serão apresentadas as resoluções de todas as questões propostas no livro, visto que há muitos exercícios com tarefas e técnicas iguais. Lembramos que cada item representa uma questão diferente, ou seja, a quantidade de questões será superior à quarenta.

Todos os exercícios são referentes à mesma teoria: Álgebra.

Identificamos nos exercícios as seguintes tarefas:

1. Determinar o quadrante em que se encontra o arco (ângulo).

   (a) Sabendo simultaneamente os sinais de seno, cosseno e tangente.

   Exemplo:

   Exercício 16: (a) sen$\alpha < 0$ e $\cos\alpha < 0$

   Sabemos que seno de um arco (ângulo) é a ordenada de um ponto, ou seja, está representado no eixo y na circunferência trigonométrica. Dessa forma, é negativo no terceiro e quarto quadrantes.

O cosseno de um arco (ângulo) é a abscissa de um ponto e está respresentado no eixo x. Logo, é negativo no segundo e terceiro quadrantes.

Então, o seno e o cosseno são simultaneamente negativos (menores que zero) no terceiro quadrante.

(b) Sabendo o valor de seno, cosseno e tangente.

Exemplo:

Exercício 17: (b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

O cosseno é negativo no segundo e terceiro quadrante, logo α pode pertencer à um desses quadrantes.

2. Calcular o valor de seno, cosseno e tangente.

(a) Com utilização de tabela.

Exemplos:

Exercício 19: (c) sen$310°$

Temos que $310°$ está no $4°$ quadrante, assim

$$\text{sen}310° = -\text{sen}(360° - 310°) = -\text{sen}(50°).$$

De acordo com a tabela, $\text{sen}(50°) \simeq 0,766$. Logo, $\text{sen}(310°) \simeq -0,766$.

Exercício 26: (d) $\text{sen}\frac{24\pi}{5}$

Temos que $\frac{\pi}{2} < \frac{24\pi}{5} < \pi$, ou seja, $\frac{24\pi}{5}$ pertence ao segundo quadrante. Assim, $\text{sen}\frac{4\pi}{5} = \text{sen}(\pi - \frac{4\pi}{5}) = \text{sen}\frac{\pi}{5}$.

Transformando $\frac{\pi}{5}$ rad em graus:

$$\frac{\pi}{5} \text{ corresponde } \frac{180°}{5}.$$

$$\text{Portanto, } \frac{\pi}{5} \text{ corresponde a } 36°$$

Pela tabela, $\text{sen}36° \simeq 0,588$.

Portanto, $\text{sen}\frac{24\pi}{5} \simeq 0,588$.

Exercício 32: $\text{tg}(-\frac{7\pi}{18})$

Observe que $-\frac{7\pi}{18} = \frac{29\pi}{18} - \frac{36\pi}{18}$ $(\frac{36\pi}{18} = 2\pi)$.

Então, $\text{tg}(\frac{-7\pi}{18}) = \text{tg}(\frac{29\pi}{18})$. Como $\frac{29\pi}{18}$ está no quarto quadrante $(\frac{3\pi}{2} < \frac{29\pi}{18} < 2\pi)$,

$$\text{tg}\left(\frac{29\pi}{18}\right) = -\text{tg}\left(2\pi - \frac{29\pi}{18}\right) = -\text{tg}\left(\frac{7\pi}{18}\right).$$

Transformando $\frac{7\pi}{18}$ rad em graus:

$$\tfrac{7\pi}{18}\ rad \text{ corresponde } \tfrac{7.(180°)}{18}.$$
$$\text{Portanto, } \tfrac{7\pi}{18} \text{ corresponde a } 70°.$$

Logo, $\text{tg}(\frac{29\pi}{18}) = -\text{tg}(70°)$. Pela tabela, $\text{tg}(70°) \simeq 2,747$ e, então, $\text{tg}(\frac{29\pi}{18}) \simeq -2,747$.

(b) Utilizando valores notáveis.

Exemplos:

Exercício 18: (b) $\text{sen}\frac{4\pi}{3}$

Temos que $\pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$, ou seja, $\frac{4\pi}{3}$ está no terceiro quadrante. Sendo assim,

$$\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -\text{sen}\frac{\pi}{3}.$$

Mas, sabemos que $\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Portanto,

$$\text{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercício 31: (e) $\text{tg}\frac{17\pi}{3}$

Notemos que $\frac{17\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}$. Isto é, $\frac{17\pi}{3}$ é côngruo à $\frac{5\pi}{3}$. Temos também que $\frac{5\pi}{3}$ pertence ao quarto quadrante, pois $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$. Dessa forma,

$$\text{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\text{tg}\left(2\pi - \frac{5\pi}{3}\right) = -\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Sabemos que, utilizando os valores notáveis,

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Logo, $\text{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

3. Determinar o valor de x (ou α).

(a) Dando condições para x e sabendo seno, cosseno ou tangente.

Exemplos:

Exercício 20: (b) $0 \leq x \leq 2\pi$ e sen$x = \frac{1}{2}$

O seno é positivo nos dois primeiros quadrantes.

Sabemos que sen$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Também,

$$\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{6}$$

Portanto, sen$\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

Exercício 35: $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ e $\cos\alpha = 2$

Não existe α tal que $\cos\alpha = 2$, pois, por definição, o cosseno é a abscissa de um ponto na circunferência de raio 1. Isto significa que o maior valor que o cosseno pode assumir é 1.

(b) Sem restrição de x.

Exemplo:

Exercício 27: (a) sen$x = -1$

O seno tem valor -1 para todos os arcos côngruos de $\frac{3\pi}{2}$. Assim, $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

4. Calcular o valor da expressão.

(a) Quando a expressão é uma soma.

Exemplo:

Exercício 24: $A = \cos 12° + \cos 25° + ... + \cos 142° + \cos 155° + \cos 168°$

Observe que os ângulos formam uma $P.A.$ de razão 13. Vamos determinar quantos termos aparecem nessa progressão,

$$a_n = a_1 + r(n-1)$$

$$168 = 12 + 13(n-1)$$

$$168 = 12 + 13n - 13$$

$$169 = 13n$$

$$n = 13$$

Observando os ângulos, temos que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é nula, pois os ângulos são suplementares e, $\cos\alpha = -\cos(180 - \alpha)$.

Assim ao somarmos, os termos vão se anular, sobrando apenas o termo do meio (a_7).

Mas, $a_7 = a_1 + 6r$. Logo, $a_7 = 12 + 6.13$ e $a_7 = 90$.

Portanto, $A = \cos 90°$, ou seja, $A = 0$.

(b) Por simplificação.

Exemplo

Exercício 37:
$$M = \frac{\text{sen}2460°.\cos 1110°}{\text{tg}2205°}$$

Temos que

$2460° = 6.360° + 300°$

$1110° = 3.360° + 30°$

$2205° = 6.360° + 45°$

Portanto,

$$M = \frac{\text{sen}300°.\cos 30°}{\text{tg}45°}$$

Observe ainda que $\text{sen}300° = -\text{sen}60°$. Logo,

$$M = \frac{-\text{sen}60°.\cos 30°}{\text{tg}45°} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}$$

5. Determinar a expressão equivalente.

Exemplo:

Exercício 38: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).\text{sen}(3\pi - x)$

Temos a relação $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\text{sen}x$.

Além disso, $3\pi = 2\pi + \pi$, isto é, 3π é côngruo à π. Assim, $\text{sen}(3\pi - x) = \text{sen}(\pi - x)$. Mas $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}x$.

Dessa forma,

$\cos(\frac{\pi}{2} + x).\text{sen}(3\pi - x) = -\text{sen}x.\text{sen}x = -\text{sen}^2 x$.

6. Determinar $\text{sen}x$ e $\cos x$ através de condições dadas.

Exemplo:

Exercício 21: $\cos x$ sabendo que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{sen}x = \frac{3}{5}$

Aplicando a relação fundamental:

$\text{sen}^2 + \cos^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 = 1 \rightarrow \cos^2 = 1 - \frac{9}{25} \rightarrow \cos^2 = \frac{16}{25}$

Assim,

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ (segundo quadrante), então, $\cos x = -\frac{4}{5}$.

7. Determinar o maior cosseno.

   Exemplo:

   Exercício 33: $\cos 2$ ou $\cos 2°$

   Temos que 1 rad tem aproximadamente $57,3°$, pois

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{1} \rightarrow x = \frac{180}{\pi} \simeq \frac{180}{3,14} \simeq 57,3°$$

   Então, $\cos 2 = \cos(2 \ . \ 57,3) \simeq \cos 114,6°$.

   Note que $114,6°$ está no segundo quadrante e $2°$ no primeiro. Como o cosseno é positivo no primeiro quadrante e negativo no segundo, temos que $\cos 2° > \cos 2$.

8. Determinar o sinal do seno.

   Exemplo:

   Exercício 34: sen3

   Como vimos no exercício 33, temos que 1 rad corresponde a aproximadamente $57,3°$.

   Dessa forma, $\text{sen}3 = \text{sen}(3 \ . \ 57,3) \simeq \text{sen}172°$.

   Como $90° < 172° < 180°$, sen172° é positivo.

A tabela a seguir relaciona as tarefas apresentadas com as técnicas e tecnologias utilizadas nas resoluções dos exercícios. Assim, será possível identificar a reincidência de conteúdos, bem como de técnicas usadas para obter as resoluções anteriormente registradas.

TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA	QUANTIDADE
Determinar o quadrante, sabendo simultaneamente os sinais de seno, cosseno e tangente.	- Análise do seno na circunferência trigonométrica; - Análise do cosseno na circunferência trigonométrica; - Comparação dos sinais no quadrante.	- Definição de seno; - Definição de cosseno;	05
Determinar o quadrante, sabendo o valor de seno, cosseno e tangente.	- Observar o sinal do ângulo; - Análise do seno, cosseno e tangente na circunferência.	- Definição de seno; - Definição de cosseno; - Definição de tangente.	06
Calcular o valor de seno, cosseno e tangente com utilização de tabela.	- Determinar o quadrante a que pertence o ângulo; - Reduzir o ângulo ao primeiro quadrante; - Conversão de unidades (quando o ângulo estiver em radiano); - Pesquisar o valor do seno/ cosseno/ tangente do ângulo correspondente na tabela.	- Definição de arcos côngruos; - Simetrias dos arcos em relação aos eixos da circunferência trigonométrica; - Definição de seno; - Definição de cosseno; - Definição tangente; *Quando houver conversão:* - Definição de radiano; - Regra de três simples.	20

TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA	QUANTIDADE
Calcular o valor de seno, cosseno e tangente utilizando valores notáveis	- Determinar o quadrante a que pertence o ângulo; - Reduzir o ângulo ao primeiro quadrante; - Utilizar os valores notáveis do seno, cosseno ou tangente.	- Definição de arcos côngruos; - Simetrias dos arcos em relação aos eixos da circunferência trigonométrica; - Definição de seno; - Definição de cosseno; - Definição tangente;	32
Determinar o valor de x, dando condições para x e sabendo seno, cosseno ou tangete.	- Determinar os quadrantes correspondentes ao sinal do seno, cosseno e tangente e com as limitações dadas; - Utilizar os valores notáveis do seno, cosseno ou tangente.	- Definição de arcos côngruos; - Simetrias dos arcos em relação aos eixos da circunferência trigonométrica; - Definição de seno; - Definição de cosseno; - Definição tangente;	11
Determinar o valor de x, sem restrições.	- Determinar os quadrantes correspondentes ao sinal do seno, cosseno e tangente. - Utilizar os valores notáveis do seno, cosseno ou tangente.	- Definição de arcos côngruos; - Simetrias dos arcos em relação aos eixos da circunferência trigonométrica; - Definição de seno; - Definição de cosseno; - Definição tangente;	04

TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA	QUANTIDADE
Calcular o valor da expressão quando a expressão é uma soma.	- Experimentação; - Reconhecimento de uma PA; - Determinar o número de termos da PA; - Reconhecimento de padrões quando realizada a soma entre termos; - Utilização da relação do seno ou cosseno de ângulos suplementares; - Uso da fórmula dos termos da $P.A.$	- Definição de Progressão Aritmética; - Propriedade comutativa da soma; - Simetrias dos arcos em relação aos eixos da circunferência trigonométrica; - Definição de seno; - Definição de cosseno;	02
Calcular o valor da expressão por simplificação	- Redução ao primeiro quadrante; - Utilizar os valores notáveis do seno, cosseno ou tangente.	- Definição de arcos côngruos; - Definição de seno; - Definição de cosseno; - Simetrias dos arcos em relação aos eixos da circunferência trigonométrica;	03
Determinar a expressão equivalente.	- Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares; - Congruência de ângulos;	- Definição de seno; - Definição de cosseno; - Simetrias dos arcos em relação aos eixos da circunferência trigonométrica; - Definição de arcos côngruos.	01

TAREFA	**TÉCNICA**	**TECNOLOGIA**	**QUANTIDADE**
Determinar $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ através de condições dadas.	- Substituição do valor do cosseno (ou seno) na relação fundamental; - Identificar o sinal do seno (ou cosseno) em função do quadrante; - Definição de tangente.	- Definição de seno; - Definição de cosseno; - Definição de tangente. - Simetrias dos arcos em relação aos eixos da circunferência trigonométrica.	02
Determinar o maior cosseno.	- Definição de radiano; - Regra de três simples; - Análise do sinal do cosseno em função do quadrante.	- Definição de radiano; - Proporção; - Definição de cosseno.	01
Determinar o sinal do seno.	- Definição de radiano; - Regra de três simples; - Análise do sinal do seno em função do quadrante.	- Definição de radiano; - Proporção; - Definição de seno.	01

Observamos que o livro apresenta exercícios repetidos, por exemplo, 52 questões (das 88 totais) estão relacionadas à tarefa de calcular seno, cosseno e tangente. Isso representa quase 60% do total de questões.

Além disso, há poucos tipos de tarefas que mobilizam técnicas mais elaboradas. Em geral, redução ao primeiro quadrante, utilização de valores notáveis ou tabelas e as definições de seno, cosseno e tangente são suficientes para a resolução das questões.

Destacamos aqui os exercícios cujas tarefas envolviam o cálculo de expressões, pois exigem experimentação e descobertas através da sua manipulação. Outros conteúdos também são envolvidos no exercício, mostrando assim que os conteúdos podem estar associados e não aparecem apenas em seus “blocos”.

Os exercícios não apresentam contextualização, são bastante algébricos e teóricos.

Vale lembrar que o autor propõe no final desse capítulo uma lista de 29 problemas de vestibular, questões mais elaboradas e contextualizadas.

Conclusão

Chegamos ao fim desse trabalho com os objetivos iniciais cumpridos. Elaboramos uma abordagem das funções seno, cosseno e tangente desde o triângulo retângulo até o conjunto dos números reais. Tentamos organizar um estudo detalhado e completo das funções seno, cosseno e tangente sem o emprego de ferramentas mais complexas do cálculo.

Mostramos no primeiro capítulo a evolução da Trigonometria durante o tempo e as contribuições de vários estudiosos para o desenvolvimento dessa área. Grandes civilizações apropriaram-se dos conhecimentos de seus antepassados para desenvolver novos trabalhos sobre Trigonometria e, dessa forma, tornou-se mais do que uma ferramenta para estudos de astronomia. É claro que fizemos apenas uma pequena exposição histórica, pois há tantos estudos nessa área que poderia ser realizado um TCC apenas sobre a história da Trigonometria.

No capítulo 2 estudamos as funções seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo, ou seja, restringimos o domínio dessas funções para os ângulos de zero à noventa graus. Também fizemos um pequeno estudo sobre ângulos e suas relações com o triângulo. Nesse capítulo, relações trigonométricas importantes foram desenvolvidas para serem extendidas no capítulo seguinte, assim como o cálculo dos valores notáveis dessas funções.

O capítulo 3 exibiu uma abordagem minuciosa das funções seno, cosseno e tangente com domínio real, destacando a função de Euler como ferramenta principal para extender essas funções do triângulo retângulo para funções de domínio real. Através dessa abordagem, foi possível identificar que as propriedades das funções trigonométricas estudadas decorrem das propriedades da função de Euler. Sendo assim, o tratamento da extensão das funções trigonométricas tornou-se mais natural.

No último capítulo analisamos nosso objeto de estudo num livro didático. Expomos como o autor traz o tratamento do assunto no capítulo averiguado e estudamos os exercícios desse capítulo utilizando a teoria de Chevallard. Observamos que o autor não utiliza explicitamente a função de Euler para realizar a "passagem" das funções trigonométricas no triângulo para as funções reais, contudo desenvolveu uma abordagem parecida usando a definição geométrica do seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica.

Constatamos ainda que os exercícios analisados são repetitivos e enfocam principalmente redução ao primeiro quadrante e o significado do seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica. Dessa forma, tornam-se bastante teóricos e algébricos, sendo poucos os exercícios que mobilizam técnicas elaboradas que exigem experimentação e investigação por parte do aluno.

Vale destacar que focamos as funções seno, cosseno e tangente nesse trabalho e nos limitamos ao estudo inicial dessas funções até seus gráficos. As fórmulas de adição e as leis do seno e do cosseno não foram contempladas em nosso estudo.

Esperamos que este trabalho auxilie os estudantes do curso de licenciatura em matemática, futuros professores, a compreender melhor as funções trigonométricas como funções reais e a entender que a transição das funções trigonométricas no triângulo retângulo para as funções trigonométricas com domínio real é um processo bastante natural quando se utiliza as ferramentas certas.

Referências

1 ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Várias faces da Matemática**: Tópicos para Licenciatura e Leitura Geral. São Paulo: Blucher, 2007.

2 BERNAL, Márcia Maria. **Estudo do Objeto Proporção:** Elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado. 2004. 169 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

3 BOYER, Carl B.. **História da Matemática.** 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010. Tradução: Elza F. Gomide.

4 CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria Números Complexos.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Coleção do Professor de Matemática.

5 COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. **Funções Seno e Cosseno:** Uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental"e do computador. 1997. 173 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

6 DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto e Aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2011. Volume Único.

7 EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas: Unicamp, 2004. Tradução: Higyno H. Domingues.

8 LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio:** Volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: Imos, 2006. 237 p. Coleção do Professor de Matemática SBM.

9 ROONEY, Anne. **A História da Matemática:** Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda., 2012. Tradução Mario Fecchio.

10 SABO, Ricardo Dezso. **Análise de Livros Didáticos do Ensino Médio:** Um estudo dos conteúdos referentes à combinatória. 2007. 54 f. Monografia (Especialização) - Curso de Educação Matemática, Centro Universitário Fundação Santo André, Santo André, 2007.

11 SILVA, Sílvio Alves da. **Trigonometria no triângulo retângulo:** Construindo uma aprendizagem significativa. 2005. 178 f. Dissertação (Mestrado) PUC/SP, São Paulo, 2005.