

Michel Valmor dos Santos

Números Complexos, Quatérnions e Rotações

Florianópolis

2012

Michel Valmor dos Santos

Números Complexos, Quatérnions e Rotações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Matemática da
Universidade Federal de Santa Catarina para
a obtenção do título de Licenciado em Mate-
mática

Orientador:
Eliezer Batista

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2012

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática — Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 27/CCM/12.

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Eliezer Batista
Orientador

Professor Nereu Estanislau Burin

Professor Lício Hernanes Bezerra

A Deus criador e aos meus pais por me darem a vida.
A minha esposa e meu amor.
Ao meu orientador Eliezer por sua paciência e dedicação.

Agradecimentos

Após esta caminhada concluída, acredito que é meu dever lembrar e agradecer a pessoas que contribuíram para realização de um sonho que aos poucos foi se tornando realidade. O sonho de galgar mais um degrau na infindável escada do saber.

Na fase pré-vestibular e durante o curso de graduação contei como sempre com o apoio e compreensão de meus pais, Valmor e Anélia, nas inúmeras horas dedicadas aos estudos. Dedicção que muitas vezes levaram-me ainda que presente fisicamente, ausentar-me do convívio diário em nosso lar. Também tive o incentivo e a orientação de meu primo Milton, que posteriormente ao meu ingresso no curso, veio a fazer parte do ótimo corpo docente do departamento de matemática da UFSC.

Na primeira fase do curso conheci um grande amigo, José, que com o passar do tempo de parceiro em trabalhos de aula e de diárias conversas tornou-se como um irmão para mim. Uma pessoa com grande determinação, qualidade esta que tenho buscado aprender. Obrigado amigo! Um pouco mais adiante em meu curso retornou à matemática mais uma estudante que passou a fazer parte de nossa turma, Rhiane, a qual já lecionava matemática e sempre admirei como estudante e profissional. Já no final do curso vim a conhecer Hemerson, que embora fosse jovem, sempre me impressionou com a sua maturidade. Assim como José, eles conquistaram minha amizade e consideração.

Passaram por essa caminhada muitos professores nas diversas disciplinas, como o Prof. Eliezer, meu orientador que muito me ajudou desde o começo do curso redigindo muitas folhas com suas esplanasões. Guardarei algumas como recordação! Prof. Nereu sempre lutando para que as coisas aconteçam seja em suas funções gerenciais ou seja em sala de aula com seu quadro impecável. Se eu for buscar as boas lembranças de sala ou dos corredores do CFM lembraria de vários professores Rubens, Carmem, Andrzej, Nery, Jauber, João Haroldo, Paulo Bosing, Silvia, Lício,... os servidores Sílvia, Yara, Airton, ... que Deus os abençoe!

Finalmente, também durante o curso, vim a conhecer minha esposa Angelita. Ela foi a pessoa que escolhi para dividir minha vida. Obrigado, Senhor!

Resumo

O presente trabalho visa discutir os conjuntos dos números complexos, dos quatérnions, e sua relação com rotações no plano e no espaço. Nos capítulos acerca destes conjuntos discorreremos sobre noções básicas, as quais serão fundamentais para que possamos embasar a teoria sobre o uso dos complexos para realizarmos rotações no plano e dos quatérnions para rotações no espaço. Também faremos a dedução de matrizes de rotação tendo como ponto de partida as base canônicas. Visitaremos noções da teoria de anéis, grupos e mais especificamente grupos lineares com a finalidade de apresentarmos as rotações sob esta ótica. Finalizaremos deduzindo matrizes de rotação no espaço, a partir dos números quatérnions.

Sumário

1	Introdução	p. 7
2	Números Complexos e Rotações no Plano	p. 9
2.1	Números complexos	p. 9
2.2	Noções sobre teoria de anéis e grupos	p. 12
2.3	Rotações no plano	p. 15
2.3.1	Matriz de rotação no plano	p. 15
2.3.2	Intepretação gráfica da matriz de rotação	p. 18
2.4	Grupos de transformações lineares e seus subgrupos	p. 19
3	Rotações no espaço	p. 28
3.1	Interpretação gráfica da matriz de rotação	p. 28
3.2	Interpretação gráfica do vetor eixo de rotação	p. 31
3.3	Grupo $SO(3)$ e rotação em \mathbb{R}^3	p. 32
4	Quatérnions	p. 40
4.1	Noções básicas	p. 40
4.2	Rotações no espaço com números quatérnions	p. 43
4.3	Quatérnions, rotações e as relações com matrizes	p. 51
5	Considerações finais	p. 56
	Referências	p. 57

1 *Introdução*

A motivação para a escolha destes temas foi a leitura de um artigo da revista *Scientific American Brasil* de junho de 2011 sobre os números octônions. Este artigo menciona a importância dos mesmos na teoria das cordas. Surgiu-me então a idéia de estudar este conjunto. Entretanto meu orientador propôs os quatérnions e mais adiante decidimos abordar também os números complexos. Os complexos são bem conhecidos inclusive pela maioria das pessoas que cursaram o ensino médio. Por sua vez os números quatérnions são desconhecidos até mesmo por uma grande parcela dos acadêmicos da graduação em matemática.

Quando os números complexos apareceram, seu propósito era resolução de certas equações. Anteriormente os algebristas afirmavam que elas não tinham solução. Porém quando se começou a resolver equações cúbicas não foi mais possível ignorar os números imaginários, o que levou muitos matemáticos a estudarem este tema. Em 1833, Sr Willian Rowan Hamilton, um matemático irlandês, motivado pelo problema de encontrar um método algébrico conveniente para o cálculo com rotações, apresentou um artigo à Academia Irlandesa, em que apresentou os números complexos como pares ordenados de números reais e uma álgebra formal destes números que é utilizada até os dias de hoje. Introduziu uma importante regra de multiplicação

$$(a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$$

interpretada por Hamilton como uma operação envolvendo rotação no plano. Surgiu naquele momento o conceito definitivo do número complexo como par ordenado de números reais.

Hamilton notou, posteriormente, que poderia estender sua idéia inicialmente pensada no plano para o espaço. Passou do complexo $a + bi$ para tríplas ordenadas $a + bi + cj$. Entretanto inicialmente não teve êxito, até que certo dia enquanto caminhava ao longo do Royal Canal, teve uma inspiração: usar quádruplas $a + bi + cj + dk$ em vez de tríplas e abandonar a lei da comutatividade para a multiplicação. Subitamente nasceu a álgebra

dos quatérnions, uma álgebra não-comutativa.

Assim como Lobachevsky criara uma nova geometria consistente em si mesma, abandonando o postulado das paralelas, Hamilton criou uma nova álgebra, também consistente em si, abandonando o postulado da comutatividade para a multiplicação. ... A descoberta chave fora súbita, mas o descobridor vinha trabalhando para ela havia uns quinze anos. Hamilton, muito naturalmente, sempre considerou a descoberta dos quatérnions como seu maior sucesso; em retrospecto é claro que não era tanto esse particular tipo de álgebra que era significativo, mas antes a descoberta da tremenda liberdade que tem a matemática de construir álgebras que não precisam satisfazer às restrições impostas pelas ditas leis fundamentais (BOYER, 1974, p. 422).

Vamos enumerar algumas aplicações para os complexos e os quatérnions. Os complexos são usados na engenharia, eletromagnetismo, física quântica, análise matemática e álgebra linear. Por sua vez os quatérnions são usados na análise matemática, física de partículas, na robótica, na engenharia aeroespacial e na animação por computador em 3 dimensões.

2 *Números Complexos e Rotações no Plano*

2.1 Números complexos

Definição 2.1. *Definimos o conjunto dos números complexos, denotado por \mathbb{C} , como*

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

Um número complexo $z = a + bi$ pode ser visto como um par ordenado $z = (a, b)$ e visualizado no plano. Este plano é gerado pela base canônica $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$. O eixo $0x$ é chamado eixo real. O eixo $0y$ é denotado eixo imaginário. Este plano, no qual são representados geometricamente os números complexos, recebe o nome de Plano de Argand-Gauss ou Plano Complexo.

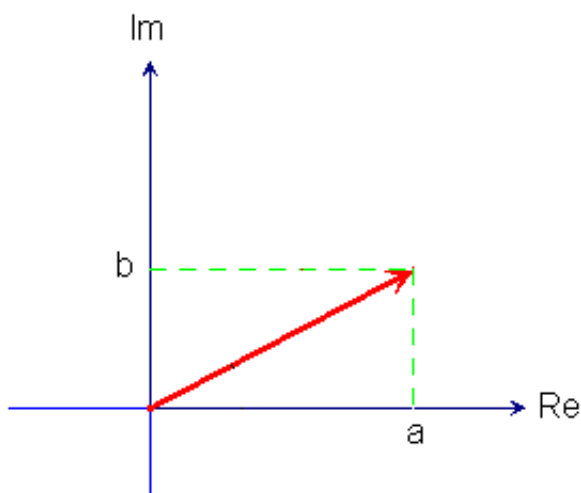


Figura 1: Representação geométrica de um número complexo.

Definição 2.2. *Dado um número complexo $z = a + bi$ o seu conjugado é $\bar{z} = a - bi$*

Definição 2.3. *Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, definimos a*

operação de adição nos complexos por:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Definição 2.4. Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, definimos a operação de multiplicação nos complexos por:

$$z.w = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Definição 2.5. Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos módulo de z , denotado como $\|z\|$ ou r , e argumento de z , denotado como θ , por:

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta \text{ é tal, que } 0 \leq \theta < 2\pi, \quad \sin \theta = \frac{b}{\|z\|} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{a}{\|z\|}$$

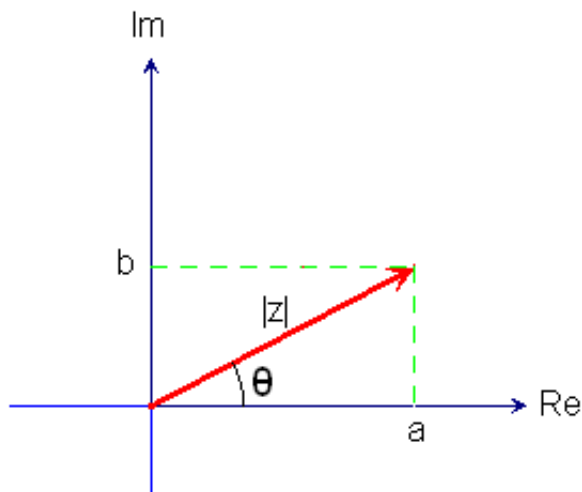


Figura 2: Representação geométrica de um número complexo em coordenadas polares

Proposição 2.1. Dado $z \in \mathbb{C}$ temos que $\|z\|^2 = z.\bar{z}$.

Demonstração.

Seja $z = a + bi$, então $\bar{z} = a - bi$.

$$z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = \|z\|^2$$

□

Proposição 2.2. *Todo número complexo pode ser escrito na forma*

$$z = r.(\cos \theta + i \sin \theta)$$

denominada forma trigonométrica.

Demonstração.

Seja um número complexo $z = a + bi$.

Temos que

$$\sin \theta = \frac{b}{r} \quad e \quad \cos \theta = \frac{a}{r}.$$

Então

$$b = r \sin \theta \quad e \quad a = r \cos \theta.$$

Segue que

$$z = r \cos \theta + i r \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

□

Proposição 2.3. *Sejam dois números complexos $z = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $w = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$. Temos que $z.w = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} z.w &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1).r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] \\ z.w &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

□

Definição 2.6. *Seja $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$. Definimos o inverso multiplicativo de z , denotado z^{-1} , por*

$$z^{-1} = \frac{1}{z}, \quad \text{ou seja, } z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$$

Proposição 2.4. *Seja $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$. Então o inverso multiplicativo de z é*

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$$

Demonstração.

Temos que $z\bar{z} = \|z\|^2$.

Então

$$\begin{aligned} z \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} &= 1 \\ \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} &= \frac{1}{z} \\ z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} \end{aligned}$$

□

Proposição 2.5. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um corpo.

Demonstração. Os resultados anteriores que foram demonstrados verificam esta proposição e a definição de corpo consta no início da seção seguinte. □

2.2 Noções sobre teoria de anéis e grupos

Nesta seção, vamos inicialmente discorrer sobre o embasamento teórico de teoria de anéis e de grupos necessário para a compreensão dos assuntos abordados nos tópicos que se seguirão.

Definição 2.7. Um anel ou anel comutativo $(A, +, \cdot)$ é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por $+$, chamada adição, e de uma operação denotada por \cdot , chamada multiplicação, que satisfazem as condições seguintes:

- Para adição: associatividade, possuir elemento neutro, possuir elemento inverso e comutatividade.
- Para multiplicação: associatividade, possuir elemento neutro e comutatividade.
- Para adição e multiplicação: a adição é distributiva em relação à multiplicação.

Definição 2.8. Um anel comutativo $(D, +, \cdot)$ é chamado domínio ou domínio de integridade se ele não tem divisor de zero.

Definição 2.9. Um anel $(K, +, \cdot)$ é chamado corpo se todo elemento de K diferente de zero possuir um inverso com respeito a multiplicação.

Pode-se verificar diretamente que todo corpo é um domínio de integridade.

Definição 2.10. Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \odot) dois anéis. Uma aplicação $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo se ela é compatível com as estruturas de anéis, isto é, se

1. $f(x + y) = f(x) \oplus f(y), \forall x, y \in A.$

$$2. f(x.y) = f(x) \odot f(y), \forall x, y \in A.$$

$$3. f(1_A) = 1_B.$$

Se f é bijetiva diremos que f é um isomorfismo.

Definição 2.11. Um grupo é um par (G, \cdot) em que G é um conjunto não vazio e

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G$$

$$(a, b) \longmapsto a.b$$

é uma função, denominada operação do grupo, satisfazendo

$$1. \text{ Associatividade: } (a.b).c = a.(b.c), \forall a, b, c \in G$$

$$2. \text{ Elemento neutro: } \exists e \in G \mid \forall a \in G, a.e = e.a = a$$

$$3. \text{ Elemento inverso: } \forall a \in G, \exists a^{-1} \in G \mid a.a^{-1} = a^{-1}.a = e.$$

Definição 2.12. Um grupo (A, \cdot) é abeliano ou comutativo se $\forall a, b \in A, a.b = b.a$

Definição 2.13. Um subconjunto não vazio H de um grupo G é dito ser um subgrupo de G se

$$1. e \in H;$$

$$2. \forall a, b \in H \text{ tem-se } a.b \in H;$$

$$3. \forall a \in H \text{ tem-se } a^{-1} \in H.$$

Proposição 2.6. Um subconjunto não vazio H de um grupo (G, \cdot) é dito ser um subgrupo de G se, e somente se, para quaisquer $a, b \in H$, tivermos $a.b^{-1} \in H$. Denotaremos $H \leq G$.

Demonstração.

(\Rightarrow)

Vamos supor que existam e_G e e_H elementos neutros de G e H .

Como $e_H \in G$ temos, pela propriedade do elemento neutro de um grupo, que

$e_H \cdot e_G = e_H$. Segue que

$$\begin{aligned} e_H \cdot e_H &= e_H = e_H \cdot e_G \\ e_H \cdot e_H &= e_H \cdot e_G \\ (e_H)^{-1} \cdot e_H \cdot e_H &= (e_H)^{-1} \cdot e_H \cdot e_G \\ e_H &= e_G \end{aligned}$$

Seja $b \in H$. Sabemos que $H \subset G$, então $b \in G$.

Sejam $(b_G)^{-1}$ e $(b_H)^{-1}$ os seus simétricos em G e H respectivamente.

Contudo

$$\begin{aligned} (b_H)^{-1} \cdot b &= e_H = e_G = (b_G)^{-1} \cdot b \\ (b_H)^{-1} \cdot b &= (b_G)^{-1} \cdot b \\ (b_H)^{-1} \cdot b \cdot (b_G)^{-1} &= (b_G)^{-1} \cdot b \cdot (b_G)^{-1} \\ (b_H)^{-1} &= (b_G)^{-1} \end{aligned}$$

Dado um $a \in H$.

Podemos concluir que $a \cdot b^{-1} \in H$.

(\Leftarrow)

Seja $c \in H$ para $H \neq 0$. Então, por hipótese, $c \cdot c^{-1} = e \in H$, ou seja, H possui elemento neutro.

Consideremos agora um elemento $d \in H$.

Então $e \cdot d^{-1} = d^{-1} \in H$, ou seja, os elementos de H possuem elemento inverso.

Ainda temos que $c \cdot (d^{-1})^{-1} = c \cdot d \in H$, ou seja, H é fechado para a operação (\cdot) .

Logo H é um subgrupo de G. □

Lema 2.1. *Seja G um grupo. Consideremos também H e K subgrupos de G. Então $H \cap K$ é subgrupo de G.*

Demonstração.

Sejam $a, b \in H \cap K$.

Disto temos que

$$a \in H, \quad a \in K, \quad b \in H \quad \text{e} \quad b \in K \Rightarrow \begin{cases} ab^{-1} \in H \\ ab^{-1} \in K \end{cases}$$

Portanto $ab^{-1} \in H \cap K$.

Logo $H \cap K$ é subgrupo de G. □

Definição 2.14. *Dados dois grupos G e H , uma função $\varphi : G \rightarrow H$ é dita ser um homomorfismo de grupos se $\varphi(a.b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, para todos os elementos $a, b \in G$. Se o homomorfismo é bijetivo, dizemos que ele é um isomorfismo.*

Denotaremos $G \cong H$ quando os grupos G e H forem isomorfos.

Definição 2.15. *Uma ação de um grupo G em um conjunto X é um homomorfismo de G no grupo das bijeções em X , que será denotado por $B_{ij}(X)$.*

Vamos denotar uma ação de grupo por

$$\begin{aligned} \alpha & : G \rightarrow B_{ij}(X) \\ g & \mapsto \alpha_g \end{aligned}$$

e portanto α_g é uma bijeção no conjunto X , que associa a cada elemento $x \in X$ outro elemento $\alpha_g(x)$. Podemos salientar que os elementos de G indexam um subconjunto das bijeções de X .

2.3 Rotações no plano

2.3.1 Matriz de rotação no plano

Definição 2.16. *Seja A um anel. Denotamos por $M_n(A)$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n cujos termos são elementos de A .*

O conjunto das transformações \mathbb{C} -lineares de \mathbb{C} em \mathbb{C} coincidem com o próprio conjunto dos complexos. De fato, fixando um $z \in \mathbb{C}$ podemos definir uma transformação linear

$$\begin{aligned} T & : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto zw \end{aligned}$$

Seja $z = a + ib$ e $w = x + iy$. Então

$$Tw = (a + ib)w = (a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$$

Em virtude de \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 formarem espaços vetoriais isomorfos, podemos interpretar geometricamente \mathbb{C} como o plano \mathbb{R}^2 , ou seja, $x + iy$ equivale a (x, y) . Portanto, podemos corresponder a cada transformação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ outra transformação $T_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada

por

$$T_r(x, y) = (ax - by, bx + ay),$$

cuja matriz na base canônica é

$$[T_r] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Vamos enunciar a seguir uma aplicação que será o nosso ponto de partida para chegarmos a matriz de rotação no plano.

Proposição 2.7. *Seja a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ a + bi &\longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

então ϕ é um homomorfismo injetivo de anéis.

Demonstração.

Vamos provar que ϕ é um homomorfismo de anéis.

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$. Então

$$\begin{aligned} \phi(z + w) &= \phi[(a + bi)(c + di)] \\ &= \phi[(a + c) + (b + d)i] \\ &= \begin{pmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \phi(z) + \phi(w) \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \phi(z.w) &= \phi[(a + bi)(c + di)] \\ &= \phi[(ac - bd) + (ad + bc)i] \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = (*) \end{aligned}$$

E também temos que

$$\begin{aligned}\phi(z).\phi(w) &= \phi(a + bi).\phi(c + di) \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} = (**)\end{aligned}$$

Portanto igualando (*) e (**) segue que

$$\phi(z.w) = \phi(z).\phi(w)$$

Temos também que

$$\phi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo ϕ é um homomorfismo de anel.

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \phi(w) \\ \phi(a + bi) &= \phi(c + di) \\ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pela igualdade de matrizes temos que $a = c$ e $b = d$.

Portanto $a + bi = c + di$, ou seja, $z = w$.

Logo ϕ é injetiva. □

Vamos descrever a aplicação ϕ na notação trigonométrica.

$$\begin{aligned}\phi &: \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ a + bi &\longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Seja $z \in \mathbb{C}$. Temos que

$$\begin{aligned}z &= a + bi \\ &= r.(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (r. \cos \theta) + i(r. \sin \theta)\end{aligned}$$

Aplicando z em ϕ obtemos

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos \theta & -(r \cdot \sin \theta) \\ r \cdot \sin \theta & r \cdot \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= r \cdot R_\theta\end{aligned}$$

Definiremos então $\mathcal{R} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ como o conjunto das rotações no plano. Cada R_θ é uma matriz rotação no plano. Consequentemente concluímos através do morfismo ϕ que multiplicar um número complexo w por z é rotacionar w em θ radianos em relação à origem e aumentar ou diminuir o módulo de w em $\|z\|$ unidades, ou seja, realizar uma homotetia de razão $\|z\|$ em relação à origem.

2.3.2 Intepretação gráfica da matriz de rotação

Seja a base canônica $\{e_1, e_2\}$ do plano. Iremos rotacionar estes vetores em θ radianos em torno da origem.

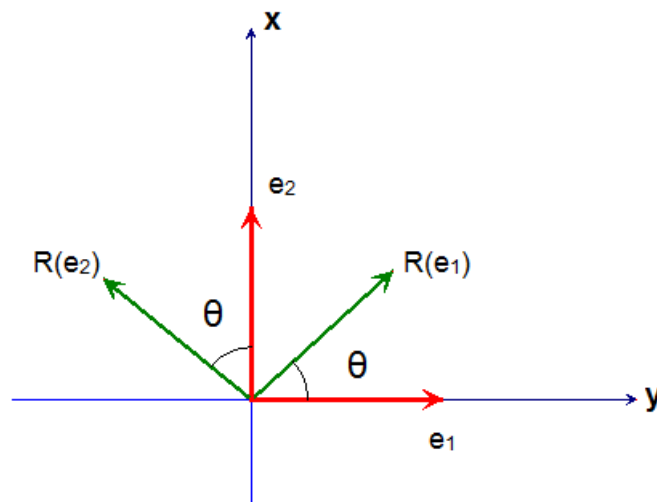


Figura 3: Rotação da base canônica no plano por um ângulo θ .

Temos, então que

$$\begin{aligned} R_\theta(e_1) &= (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2 = (\cos \theta, \sin \theta) \\ R_\theta(e_2) &= (\sin \theta)(-e_1) + (\cos \theta)e_2 = (-\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

o que nos permite escrever a matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

que representa a rotação do plano por um ângulo θ .

2.4 Grupos de transformações lineares e seus subgrupos

Nesta seção veremos noções básicas de grupos lineares e a sua conexão com a matriz de rotação no plano e os números complexos.

Definição 2.17. O conjunto $GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists A^{-1}\}$ é denominado grupo linear de dimensão n .

Teorema 2.1. Uma matriz quadrada A admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$.¹

Então, frente ao resultado acima, temos que $GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$.

Proposição 2.8. Dadas A e B , duas matrizes quadradas de mesma ordem ambas inversíveis, ou seja, existem A^{-1} e B^{-1} . Então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração.

Sejam $A, B \in GL(n)$.

Então

$$\begin{aligned} AB(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})AB &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \end{aligned}$$

Logo AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

¹A demonstração deste teorema pode ser vista em (LAGES, 2009)

Proposição 2.9. $GL(n)$ é um grupo.

Demonstração.

Da proposição anterior temos que se $A, B \in GL(n)$ então $GL(n)$ é associativo, pela propriedade associativa da multiplicação de matrizes.

Também como $I = I^{-1}$, temos que $I \in GL(n)$.

Ainda um vez que $(A^{-1})^{-1} = A \in GL(n)$, segue que $A^{-1} \in GL(n)$.

Logo $GL(n)$ é um grupo. □

Definição 2.18. O conjunto $SL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ é denominado subgrupo linear especial de dimensão n .

Proposição 2.10. $SL(n)$ é um subgrupo de $GL(n)$.

Demonstração.

Temos que $SL(n) \subset GL(n)$.

Sejam $A, B \in SL(n)$.

Como $B \in SL(n)$ temos que $\det B = 1$

Ainda

$$\det B^{-1} = \frac{1}{\det B}$$

Segue que $\det B^{-1} = 1$

Portanto $B^{-1} \in SL(n)$.

Disto podemos afirmar

$$\det(AB^{-1}) = \det A \cdot \det B^{-1} = 1,$$

ou seja, $AB^{-1} \in SL(n)$.

Logo $SL(n) \leq GL(n)$. □

Teorema 2.2. Seja um espaço vetorial sobre \mathbb{R} com produto interno \langle, \rangle . Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. São equivalentes:

1. $\forall v, w \in V, \langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, ou seja, T preserva o produto interno.
2. T preserva a norma, isto é, $\|T(v)\| = \|v\|$ e se v e w têm ângulo θ , $\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}$, então o ângulo entre $T(v)$ e $T(w)$ também é θ .
3. T transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se $F = \{f_1, \dots, f_n\} \subset V$ é base ortonormal relativa ao produto interno \langle, \rangle então $\{T(f_1), \dots, T(f_n)\} \subset V$ é base ortonormal.

4. $[T]_F = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ é ortogonal, isto é, $[T]_F^T = [T]_F^{-1}$, para toda base ortonormal F .

Demonstração.

1 \Rightarrow 2

Seja $v \in V$. Então

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

Logo $\|T(v)\| = \|v\|$.

Sejam $w \in V$ e θ o ângulo entre v e w . Então

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{\langle T(v), T(w) \rangle}{\|T(v)\| \|T(w)\|}$$

Logo θ é também o ângulo entre $T(v)$ e $T(w)$.

2 \Rightarrow 3

Seja $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ uma base ortonormal de V .

Por hipótese, temos que $\|T(f_k)\| = \|f_k\| = 1$ e que o ângulo entre

$T(f_i)$ e $T(f_j)$ é igual ao ângulo entre f_i e f_j para $i, j = \{1, \dots, n\}$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2}$, se $i \neq j$.

Logo T leva base ortonormal em base ortonormal.

3 \Rightarrow 4

Podemos escrever a matriz da transformação T na base $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ como

$$(T(f_1) \dots T(f_n)).$$

Deste modo vamos calcular $[T]_F^T [T]_F$. Temos que

$$\begin{aligned} [T]_F^T [T]_F &= \begin{pmatrix} T^T(f_1) \\ T^T(f_2) \\ \vdots \\ T^T(f_n) \end{pmatrix} (T(f_1) \quad T(f_2) \quad \dots \quad T(f_n)) \\ &= (\langle T(f_i), T(f_j) \rangle)_{ij} = (\delta_{ij})_{ij} = I \end{aligned}$$

Podemos escrever os termos da matriz T como

$$T_{ij} = \langle f_i, T(f_j) \rangle$$

e a i -ésima linha de T é o vetor

$$L_i = (T_{i1}, \dots, T_{in})$$

Então

$$\begin{aligned}
 [T]_F [T]_F^T &= \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^T & \dots & L_n^T \end{pmatrix} \\
 &= (\langle L_i, L_j \rangle)_{ij} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n T_{ik} T_{jk} \right)_{ij} \\
 &= \left(\sum_{k=1}^n \langle f_i, T(f_k) \rangle \langle f_j, T(f_k) \rangle \right)_{ij} \\
 &= (\langle f_i, f_j \rangle)_{ij} \\
 &= (\delta_{ij})_{ij} = I.
 \end{aligned}$$

Logo $[T]_F$ é uma matriz ortogonal.

4 \Rightarrow 1

Temos que

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1, \dots, n} \alpha_i \beta_i,$$

Ainda podemos representar matricialmente os vetores de V na base F como vetores coluna

$$[u]_F = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad [v]_F = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \text{e o produto interno como } \langle u, v \rangle = [u]_F^T [v]_F.$$

Então

$$\begin{aligned}
 \langle T(u), T(v) \rangle &= [Tu]_F^T [Tv]_F \\
 &= [u]_F^T [T]_F^T [T]_F [v]_F \\
 &= [u]_F^T [v]_F = \langle u, v \rangle
 \end{aligned}$$

□

Definição 2.19. O conjunto $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = A^T A = I\}$ é denominado conjunto das matrizes ortogonais de dimensão n .

Proposição 2.11. $O(n)$ é subgrupo de $GL(n)$.

Demonstração.

Por definição, sabemos que $O(n) \subset GL(n)$. Tomemos $A, B \in O(n)$.

Então $A^T = A^{-1}$.

Como $A^T \cdot (A^T)^T = (A^T A)^T = I^T = I$

e conseqüentemente $A^T = A^{-1} \in O(n)$.

Temos que

$$\begin{aligned} BA^{-1}(B \cdot A^{-1})^T &= BA^{-1}(A^{-1})^T B^T \\ &= BA^{-1}(A^{-1})^{-1} B^{-1} \\ &= BA^{-1} A B^{-1} \\ &= B I B^{-1} = B B^{-1} = I, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} (BA^{-1})^T BA^{-1} &= (A^{-1})^T B^T BA^{-1} \\ &= (A^{-1})^{-1} B^{-1} BA^{-1} \\ &= A I A^{-1} = A A^{-1} = I. \end{aligned}$$

Portanto $BA^{-1} \in O(n)$.

Logo $O(n) \leq GL(n)$.

□

Proposição 2.12. $O(n) \cap SL(n)$ é um subgrupo de $GL(n)$.

Demonstração.

Temos que $O(n)$ e $SL(n)$ são subgrupos de $GL(n)$.

Logo, pelo lema 2.1, $O(n) \cap SL(n)$ é um subgrupo de $GL(n)$.

□

Definição 2.20. O conjunto das matrizes ortogonais com determinante 1 é denotado $SO(n) = O(n) \cap SL(n)$ e denominado grupo especial ortogonal de dimensão n .

Proposição 2.13. $SO(2)$ é o conjunto das matrizes de rotação no plano, ou seja, $SO(2) = \mathcal{R} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Demonstração.

Vamos provar que $\mathcal{R} \subset SO(2)$.

Seja $\theta \in \mathbb{R}$.

Temos que $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Então $\det R_\theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Temos que

$$\begin{aligned} R_\theta R_\theta^T &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} R_\theta^T R_\theta &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto $R_\theta \in SO(2)$.

Logo $\mathcal{R} \subset SO(2)$.

Vamos provar que $SO(2) \subset \mathcal{R}$.

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$.

Por definição temos que $A^T = A^{-1}$.

Então $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Segue que $a = d$ e $b = -c$.

Então $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$.

Como $A \in SO(2)$, temos que $\det A = a^2 + c^2 = 1$.

Então $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tal, que $a = \cos \theta$ e $c = \sin \theta$.

Logo $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_\theta$, ou seja, $SO(2) \subset \mathcal{R}$. □

Proposição 2.14. $SO(2)$ é um grupo abeliano.

Demonstração.

Sabemos que $\mathcal{R} = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ e que $SO(2) = \mathcal{R}$ é grupo. Então

$$\begin{aligned}
 R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -(\sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\
 &= R_{\theta_1 + \theta_2} = R_{\theta_2 + \theta_1} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_1) & -(\sin(\theta_2 + \theta_1)) \\ \sin(\theta_2 + \theta_1) & \cos(\theta_2 + \theta_1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_2 \sin \theta_1 & -(\cos \theta_2 \sin \theta_1 + \sin \theta_2 \cos \theta_1) \\ \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \sin \theta_1 & -\sin \theta_2 \sin \theta_1 + \cos \theta_2 \cos \theta_1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \\
 &= R_{\theta_2} \circ R_{\theta_1}
 \end{aligned}$$

Portanto \mathcal{R} satisfaz a propriedade comutativa.

Logo $SO(2)$ é um grupo abeliano. □

Temos que as matrizes de rotação $R_\theta \in \mathcal{R}$ são operadores ortogonais em que há a preservação da norma e dos ângulos entre os vetores. Pode-se observar ainda que não importa a ordem na composição de rotações, obteremos sempre a mesma rotação resultante.

Definição 2.21. Seja $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ denominado de conjunto dos números complexos unitários.

Definição 2.22. A unidade padrão esfera \mathbb{S}^n é o conjunto de pontos em \mathbb{R}^{n+1} que satisfazem a equação

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

O conjunto $U(1)$ pode ser descrito geometricamente como uma circunferência unitária no plano complexo. Denominaremos esta circunferência de esfera \mathbb{S}^1 .

Proposição 2.15. Seja a aplicação

$$\begin{aligned} \phi & : U(1) \rightarrow SO(2) \\ \cos \theta + i \sin \theta & \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

então ϕ é um isomorfismo de grupo.

Demonstração.

Sejam $z, w \in U(1)$.

Temos que

$$z = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1 \quad \text{e} \quad w = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2.$$

Então

$$\begin{aligned} \phi(z.w) & = \phi[(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] \\ & = \phi[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ & = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ (\sin \theta_1 \cos \theta_2) + \cos \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \\ & = \phi(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \phi(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ & = \phi(z) \cdot \phi(w) \end{aligned}$$

Portanto ϕ é um homomorfismo de grupo.

$$\begin{aligned}\phi(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) &= \phi(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Então $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ e $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$, pela igualdade de matrizes.

Portanto

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 + i \sin \theta_1 &= \cos \theta_2 + i \sin \theta_2 \\ z &= w\end{aligned}$$

Logo ϕ é injetiva.

Seja $R_\theta \in SO(2)$.

Então

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \phi(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Logo $Im(\phi) = SO(2)$, ou seja, ϕ é sobrejetiva.

Podemos então concluir que ϕ é um isomorfismo de grupo. □

Analisando a última aplicação, podemos concluir que multiplicando um número complexo unitário \hat{z} por outro número complexo w , estaremos rotacionando w conforme o argumento de \hat{z} tendo como eixo a origem do plano. Ainda, pela proposição 2.3, a composição de rotações correspondem à multiplicação dos números complexos unitários que geram cada rotação, ou seja,

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

3 *Rotações no espaço*

A rotação de um vetor no espaço pode ser calculada através da multiplicação de uma matriz de rotação pelo respectivo vetor. Vamos convencionar que a rotação se dará no sentido anti-horário para ângulos positivos e no sentido horário para ângulos negativos.

3.1 Interpretação gráfica da matriz de rotação

Seja a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do espaço euclidiano. Consideremos a rotação destes vetores inicialmente em torno do eixo $0x$.

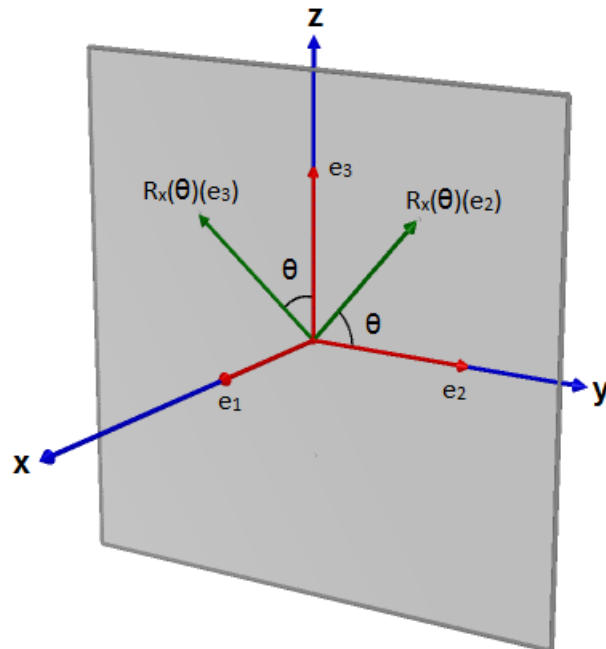


Figura 4: Rotação ao redor do eixo $0x$

Vamos deduzir a matriz de rotação.

$$R_x(\theta)(e_1) = e_1 + 0e_2 + 0e_3 = (1, 0, 0)$$

$$R_x(\theta)(e_2) = 0e_1 + (\cos \theta)e_2 + (\sin \theta)e_3 = (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

$$R_x(\theta)(e_3) = 0e_1 + (\sin \theta)(-e_2) + (\cos \theta)e_3 = (0, -\sin \theta, \cos \theta)$$

Podemos então, com os vetores coluna $R_x(e_1)$, $R_x(e_2)$ e $R_x(e_3)$, montar a matriz de rotação em torno do eixo $0x$.

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Consideremos agora a rotação em torno do eixo $0y$.

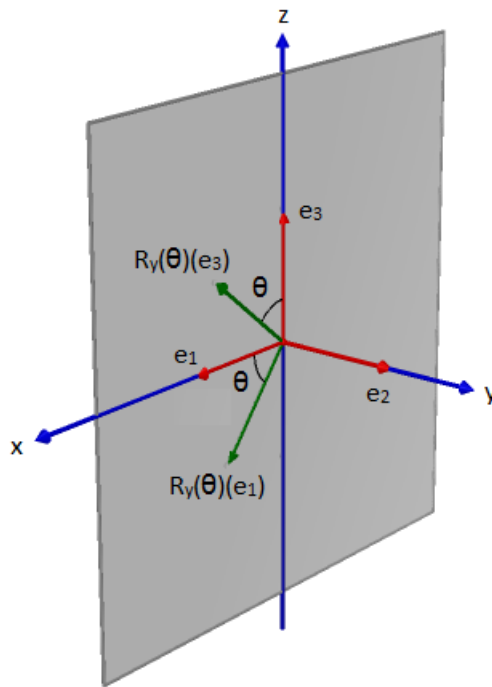


Figura 5: Rotação ao redor do eixo $0y$

$$R_y(\theta)(e_1) = (\cos \theta)e_1 + 0e_2 + (\sin \theta)(-e_3) = (\cos \theta, 0, -\sin \theta)$$

$$R_y(\theta)(e_2) = 0e_1 + e_2 + 0e_3 = (0, 1, 0)$$

$$R_y(\theta)(e_3) = (\sin \theta)e_1 + 0e_2 + (\cos \theta)e_3 = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

Segue a matriz de rotação em torno do eixo $0y$.

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Finalmente consideremos a rotação no eixo $0z$.

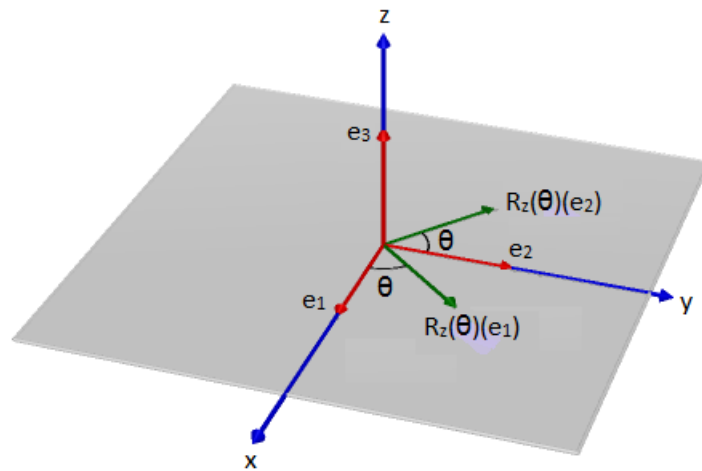


Figura 6: Rotação ao redor do eixo $0z$

$$R_z(\theta)(e_1) = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2 + 0e_3 = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

$$R_z(\theta)(e_2) = (\sin \theta)(-e_1) + (\cos \theta)e_2 + 0e_3 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$R_z(\theta)(e_3) = 0e_1 + 0e_2 + e_3 = (0, 0, 1)$$

Segue a matriz de rotação em torno do eixo $0z$.

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim as matrizes que deduzimos chamaremos de matrizes elementares de rotação no

espaço e podemos definir \mathcal{S} como o grupo gerado pelas matrizes

$$\{R_x(\theta), R_y(\theta), R_z(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}.$$

3.2 Interpretação gráfica do vetor eixo de rotação

Seja \vec{n} um vetor unitário. Fazemos a dedução de \vec{n} , de forma a considerá-lo como um eixo de rotação e vamos representá-lo em coordenadas esféricas.

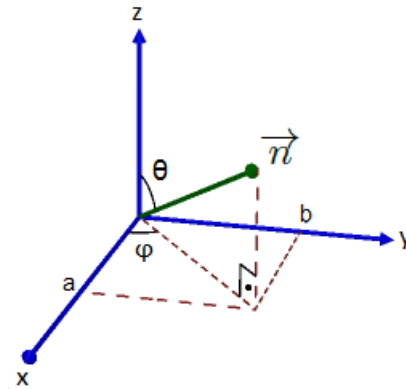


Figura 7: Eixo de rotação em \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{a}{\sin \theta} \\ a &= \sin \theta \cos \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{b}{\sin \theta} \\ b &= \sin \theta \sin \varphi\end{aligned}$$

ou seja,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Proposição 3.1. $\vec{n} = R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)(e_3)$

Demonstração.

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \vec{n}$$

□

É importante frisarmos que qualquer rotação no \mathbb{R}^3 pode ser descrita como a composição das matrizes elementares de rotação do conjunto \mathcal{S} . Ela será denotada por $R_{\vec{n},\psi}$, onde \vec{n} é o eixo e ψ o ângulo de rotação. Vamos elucidar este fato através de três passos:

1. Façamos o eixo \vec{n} coincidir com o vetor e_3 , desfazendo as rotações que determinam \vec{n} .
2. Rotacionemos ao redor do eixo $0z$ pelo ângulo ψ .
3. Devolvamos o eixo de rotação \vec{n} através das rotações que o determinam,

ou seja,

$$R_{\vec{n},\psi} = R_z(\varphi)R_y(\theta)R_z(\psi)R_y(-\theta)R_z(-\varphi)$$

3.3 Grupo $SO(3)$ e rotação em \mathbb{R}^3

Nesta seção provaremos que as matrizes de rotação no espaço são ortogonais, com determinante igual a 1 e dimensão 3, e que as matrizes do $SO(3)$ podem ser geradas pelas matrizes elementares de rotação no espaço, ou seja, que $\mathcal{S} = SO(3)$.

Proposição 3.2. $\mathcal{S} \subset SO(3)$.

Demonstração.

Vamos provar que $\mathcal{S} \subset SO(3)$.

Inicialmente sabemos, por definição, que

$$SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det A = 1 \text{ e } A^T A = AA^T = I\}.$$

Então fazemos a verificação se as matrizes elementares de rotação satisfazem as condições

acima.

Temos que

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Então $\det[R_x(\theta)] = \cos^2 \theta - (-\sin^2 \theta) = 1$.

Temos outras duas condições a serem verificadas.

$$\begin{aligned} [R_x(\theta)]^T R_x(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_x(\theta)[R_x(\theta)]^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

Logo $R_x(\theta) \in SO(3)$.

Temos que

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Então $\det[R_y(\theta)] = \cos^2 \theta - (-\sin^2 \theta) = 1$.

Temos outras duas condições a serem verificadas.

$$\begin{aligned} [R_y(\theta)]^T R_y(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_y(\theta)[R_y(\theta)]^T &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I
\end{aligned}$$

Logo $R_y(\theta) \in SO(3)$.

Temos que

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então $\det[R_z(\theta)] = \cos^2 \theta - (-\sin^2 \theta) = 1$.

Temos outras duas condições a serem verificadas.

$$\begin{aligned}
[R_z(\theta)]^T R_z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_z(\theta)[R_z(\theta)]^T &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I
\end{aligned}$$

Logo $R_z(\theta) \in SO(3)$.

Podemos concluir que $\mathcal{S} \subset SO(3)$. □

Falta-nos provar que as matrizes de $SO(3) \subset \mathcal{S}$. Contudo antes vamos provar algumas proposições necessárias a esta demonstração.

Lema 3.1. *Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ um polinômio sobre \mathbb{R} . Se o número complexo z é raiz de f , então \bar{z} também é raiz desse polinômio.*

Demonstração.

Por hipótese, temos que $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = 0$.

Então

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= a_0 + a_1\bar{z} + a_2(\bar{z})^2 + \dots + a_n(\bar{z})^n \\ &= \overline{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n} \\ &= \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Se $A \in SO(3)$ então A possui 1 ou 3 auto-valores reais.*

Demonstração.

Temos que $\delta(\det(A - \lambda I)) = 3$.

Então como o $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio com coeficientes reais temos que o polinômio característico, possui pelo menos uma raiz real. Entretanto sabemos que um polinômio de grau 3 possui três raízes. Logo, pelo lema 3.1, teremos ou três raízes reais ou uma real e duas complexas. □

Lema 3.3. *Se v é um auto-vetor real de $A \in SO(3)$ então o auto-valor associado é $+1$ ou -1 .*

Demonstração.

$$Av = \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle, \text{ pois } A \in O(n)(*)$$

Entretanto temos que

$$\langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle (**)$$

Igualando (*) e (**) teremos

$$\lambda^2 = 1$$

$$\text{Logo } \lambda = \pm 1.$$

□

Teorema 3.1. *Se $A \in SO(3)$ então A sempre possui um auto-vetor associado ao auto-valor 1.*

Demonstração.

Temos que $A \in M_3(\mathbb{R}) \subseteq M_3(\mathbb{C})$. Então, pelo teorema fundamental da álgebra,

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda)$$

$$P_A(0) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$$

$$P_A(0) = \det(A - 0I) = \det(A)$$

Como A tem ordem 3 temos que $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

Ainda sabemos que $A \in SO(3)$, portanto $\det(A) = 1$.

Logo

$$1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Vamos dividir em dois casos a análise da sentença acima.

Caso 1

Sejam $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$1 = \det A = \lambda_1 |\lambda_2|^2, \text{ com } \lambda_1 = \pm 1 \text{ e } |\lambda_2|^2 \geq 0$$

$$\text{Logo } \lambda_1 = 1.$$

Caso 2

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

λ_1, λ_2 e λ_3 são iguais a ± 1 .

Como $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, não é possível que os três valores sejam -1. Conseqüentemente teríamos $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$.

Portanto pelo menos um auto-valor deverá ser igual a 1. □

Teorema 3.2. *Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Então o determinante do operador linear $A : E \rightarrow E$ é igual ao determinante de uma matriz de A em qualquer base de V .*

Demonstração.

Sejam B e C bases de V . Temos que existe uma matriz inversível M tal, que

$$[A]_C = M^{-1}[A]_B M.$$

Logo

$$\begin{aligned} \det([A]_C) &= \det(M^{-1}[A]_B M) = \det(M^{-1})\det([A]_B)\det(M) \\ &= \det(M^{-1})\det(M)\det([A]_B) = \det(M^{-1}M)\det([A]_B) \\ \det([A]_C) &= \det([A]_B) \end{aligned}$$

□

Proposição 3.3. *As matrizes de $SO(3) \subset \mathcal{S}$.*

Demonstração.

Seja $A \in SO(3)$.

Seja $v \in \mathbb{R}^3$ um auto-vetor unitário de auto-valor 1 de A, pela proposição 3.1, $v = R_z(\varphi)R_y(\theta)(e_3)$ para alguns φ e θ .

Vamos definir a base $F = \{f_1, f_2, f_3 = v\}$ do \mathbb{R}^3 , tais que

$$\begin{aligned} f_1 &= R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)e_1 \\ f_2 &= R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)e_2 \\ f_3 &= v = R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)e_3 \end{aligned}$$

Segue que

$$[A]_F = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ [A(f_1)]_F & [A(f_2)]_F & [A(f_3)]_F \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Como f_3 é um auto-vetor com auto-valor 1, então $A(f_3) = f_3$.

Como $A \in SO(3)$, ou seja, A é ortogonal. Então $\langle A(f_i), A(f_j) \rangle = \langle f_i, f_j \rangle$.

Disto segue que

$$\begin{aligned} A(f_1) &= \langle A(f_1), f_1 \rangle f_1 + \langle A(f_1), f_2 \rangle f_2 + \langle A(f_1), f_3 \rangle f_3 \\ &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \langle A(f_1), A(f_3) \rangle f_3 \\ &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \langle f_1, f_3 \rangle f_3 \\ &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + 0f_3 \quad , \text{ pois a base F é ortonormal} \end{aligned}$$

$$[A(f_1)]_F = (a_{11}, a_{21}, 0)$$

Analogamente temos que

$$[A(f_2)]_F = (a_{21}, a_{22}, 0)$$

Lembre-se que

$$A(f_3) = 0f_1 + 0f_2 + 1f_3$$

Portanto

$$[A(f_3)]_F = (0, 0, 1)$$

Então

$$[A]_F = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Temos que $\tilde{A} \in M_2(\mathbb{R})$.

Vamos provar que $\tilde{A} \in SO(2)$.

É fácil ver que

$$[A]^T = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}^T & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ainda, pelo teorema 2.2, temos que $[A]_F^T [A]_F = I_3$, pois $[A]^T = [A]^{-1}$.

Então

$$\left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}^T & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}^T \tilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Logo $\tilde{A}^T \tilde{A} = I_2$.

Analogamente, como $[A]_F [A]_F^T = I_3$, temos que $\tilde{A} \tilde{A}^T = I_2$.

Logo $\tilde{A} \in O(2)$.

Ainda temos que $\det[A]_F = \det A = 1$, pelo teorema 3.2.

$$\text{Mas } \det[A]_F = \det \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \det(\tilde{A}).$$

Portanto $\det(\tilde{A})=1$, ou seja, $\tilde{A} \in SL(2)$.

Assim, $\tilde{A} \in SO(2)$.

Segue que $\exists \psi \in \mathbb{R}$ tal, que

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

Logo

$$[A]_F = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\psi)$$

Deste modo provamos que as matrizes $[A]_F$ estão contidas no conjunto das matrizes de rotação no espaço.

Seja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica do \mathbb{R}^3 .

Então vamos relacionar $[A]_E$ e $[A]_F$ através de R , uma matriz mudança de base.

Conseguiremos isto provando que $[A]_E = R[A]_F R^{-1}$ em que $R = R_z(\varphi)R_y(\theta)$

com $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$.

Sejam as matrizes $[A]_F = (b_{ij})$ e $[A]_E = (a_{ij})$.

Podemos escrever os termos $b_{ij} = \langle e_i, A(f_j) \rangle$, $a_{ij} = \langle e_i, A(e_j) \rangle$ e o vetor coluna

$$e_i = \sum_{k=1}^3 s_{ki} f_k.$$

Sejam $R = (r_{ij})$ e $R^{-1} = (s_{ij})$.

Podemos escrever

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle e_i, A(e_j) \rangle = \langle \sum_{k=1}^n s_{ki} f_k, A(\sum_{l=1}^n s_{lj} f_l) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n s_{ki} s_{lj} \langle f_k, A(f_l) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n s_{ki} b_{kl} s_{lj} \text{ tal, que } b_{kl} = \langle f_k, A(f_l) \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n r_{ik} b_{kl} s_{lj} \text{ , pois } R^{-1} = (s_{ij}) = (s_{ji}) = R^T \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} [A]_E &= R[A]_F R^{-1} \\ &= R_z(\varphi)R_y(\theta)R_z(\psi)R_y(-\theta)R_z(-\varphi) \\ &= R_{v,\psi} \end{aligned}$$

Logo $SO(3) \subset \mathcal{S}$. □

Como $SO(3) \subset \mathcal{S}$ e $\mathcal{S} \subset SO(3)$ temos que $SO(3) = \mathcal{S}$.

4 Quatérnions

4.1 Noções básicas

Definição 4.1. O conjunto dos números quatérnions, denotado por \mathbb{H} , é definido como

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

Temos que os quatérnions é um espaço vetorial real cuja base é $\{1, i, j, k\}$, ou seja, formada pela unidade e pelas unidades imaginárias. Quando a for zero chamaremos este número de quatérnion puro. A multiplicação dos quatérnions é a multiplicação algébrica usual considerando-se as seguintes regras quanto as unidades imaginárias,

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Os números reais comutam com as unidades imaginárias, mas i, j e k não comutam entre si como pudemos ver nas regras acima. Abaixo segue um resumo destas regras.

\cdot	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Os números complexos formam um subespaço vetorial no espaço vetorial dos quatérnions $\mathbb{C} = \mathbb{R}.1 + \mathbb{R}i \subset \mathbb{H}$ e os quatérnions também podem ser definidos da seguinte maneira $\mathbb{H} = \mathbb{C}.1 + \mathbb{C}.j$.

Proposição 4.1. \mathbb{H} e \mathbb{R}^4 formam espaços vetoriais isomorfos.

Definição 4.2. O conjugado do quatérnion r , denotado por \bar{r} , é definido por

$$\bar{r} = a - bi - cj - dk$$

Proposição 4.2. *Sejam $r, s \in \mathbb{H}$. Temos que:*

$$1. \bar{r}s = \bar{s}\bar{r}$$

$$2. r\bar{r} = \bar{r}r = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Demonstração.

(item 1)

$$\begin{aligned} rs &= (a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i + (ag + df - bh + ce)j + (ah + bg - cf + de)k \\ \bar{r}\bar{s} &= (ae - bf - cg - dh) - (af + be + ch - dg)i - (ag + df - bh + ce)j - (ah + bg - cf + de)k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{s}\bar{r} &= (e - fi - gj - hk)(a - bi - cj - dk) \\ &= (ae - bf - cg - dh) + (-af - be - ch + dg)i + (-ag - df + bh - ce)j + \\ &\quad + (-ah - bg + cf - de)k \\ &= (ae - bf - cg - dh) - (af + be + ch - dg)i - (ag + df - bh + ce)j - (ah + bg - cf + de)k \end{aligned}$$

(item 2)

$$\begin{aligned} r\bar{r} &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\ &= a^2 - abi - acj - adk + abi + b^2 - bck + bdj + acj + bck + c^2 - cdi + adk - bdj + \\ &\quad + cdi + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}r &= (a - bi - cj - dk)(a + bi + cj + dk) \\ &= a^2 + abi + acj + adk - abi - b^2 - bck + bdj - acj + bck + c^2 - cdi - adk - bdj + \\ &\quad + cdi + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

□

Definição 4.3. *Seja $r \in \mathbb{H}$. A norma ou módulo de um quatérnion r pode ser definida como*

$$\|r\| = \sqrt{r\bar{r}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

A norma de um quatérnion r é igual ao seu comprimento como um vetor do \mathbb{R}^4 . Um quatérnion é dito unitário quando a sua norma é igual a 1.

Proposição 4.3. *Sejam r e s dois quatérnions unitários. Então $\|rs\| = \|s\|\|r\|$.*

Demonstração.

$$\|rs\| = \sqrt{rs\bar{s}} = \sqrt{rs\bar{s}} \bar{r} = \|s\|\sqrt{r\bar{r}} = \|s\|\|r\|$$

□

Devido a esta propriedade multiplicando-se dois quatérnions unitários produz-se outro quatérnion de comprimento unitário. O conjunto dos quatérnions unitários pode ser visto como um conjunto de pontos do \mathbb{R}^4 , conjunto este denominado esfera \mathbb{S}^3 .

Existe a divisão por qualquer quatérnion não-nulo à direita ou à esquerda, ou seja, há soluções únicas para as equações, $xr = s$ e $ry = s$ que são respectivamente,

$$x = \frac{s\bar{r}}{\|r\|^2} \quad e \quad y = \frac{\bar{r}s}{\|r\|^2}$$

Proposição 4.4. *Todo quatérnion diferente de zero possui um inverso multiplicativo, denotado por r^{-1} , é definido como*

$$r^{-1} = \frac{\bar{r}}{\|r\|^2}.$$

Demonstração.

Consideremos r^{-1} o inverso à direita.

$$rr^{-1} = \frac{r\bar{r}}{\|r\|^2} = \frac{\|r\|^2}{\|r\|^2} = 1$$

Ainda, pela proposição 4.2, o inverso à direita é igual ao inverso à esquerda. □

Proposição 4.5. *O conjunto dos quatérnions é um anel de divisão ou um corpo não comutativo.*

Demonstração. Segue dos resultados expostos anteriormente. □

Corolário 4.1. *Seja \hat{r} um quatérnion unitário. Então $\hat{r}^{-1} = \bar{\hat{r}}$.*

É muito importante observarmos que operações e propriedades do espaço podem ser codificadas nos quatérnions, por exemplo, a operação de multiplicação. Vejamos a proposição abaixo.

Proposição 4.6. *Sejam p e q dois quatérnions puros. Então*

$$pq = - \langle p, q \rangle + (p \times q)$$

Demonstração.

Sejam $p = xi + yj + zk$ e $q = bi + cj + dk$. Temos que

$$\begin{aligned} pq &= (xi + yj + zk)(bi + cj + dk) \\ &= -xb + xck - xdj - ybk - yc + ydi + zbj - zci - zd \\ &= -(xb + yc + zd) + (yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k \quad (*) \end{aligned}$$

Como $\langle p, q \rangle = xb + yc + zd$ (**) e

$$v \times w = \begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ b & c & d \end{pmatrix} = (yd - zc)i + (-xd + zb)j + (xc - yb)k \quad (***)$$

substituindo (**) e (***) em (*) podemos concluir que

$$pq = - \langle p, q \rangle + p \times q$$

□

4.2 Rotações no espaço com números quatérnions

É importante colocarmos que uma rotação no espaço fica perfeitamente especificada por um eixo de rotação e por um ângulo de rotação. O eixo consiste num vetor e o ângulo será descrito em torno deste vetor. Como já mencionamos, Hamilton buscou trabalhar rotações no \mathbb{R}^3 através do produto de números quatérnions. Nesta seção, discorreremos gradualmente a teoria envolvida.

Primeiramente, observemos que um quatérnio q pode determinar uma transformação linear $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. De que forma? Associamos um ponto do espaço tridimensional (x, y, z) a um quatérnio puro $w = xi + yj + zk$. Deste modo podemos definir uma transformação $R_q(x, y, z) = qwq^{-1} = (x', y', z')$, onde q é um quatérnio unitário.

Proposição 4.7. *Seja w um quatérnio puro e q um quatérnio unitário. Então o produto qwq^{-1} é um quatérnio puro.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
qwq^{-1} = qw\bar{q} &= (a + bi + cj + dk)(xi + yj + zk)(a - bi - cj - dk) \\
&= (-(bx + cy + dz) + (ax + cz - dy)i + (ay - bz + dx)j + \\
&\quad +(az + by - cx)k)(a - bi - cj - dk) \\
&= (a^2x + b^2x - c^2x - d^2x + 2acz - 2ady + 2bcy)i + \\
&\quad +(a^2y - b^2y + c^2y - d^2y - 2abz + 2adx + 2bcx + 2cdz)j + \\
&\quad +(a^2z - b^2z - c^2z + d^2z + 2aby - 2acx + 2bdx + 2cdy)k
\end{aligned}$$

□

A propriedade acima nos provou que conseguimos levar um ponto do \mathbb{R}^3 em outro ponto do \mathbb{R}^3 através da transformação R_q . Mais a frente provaremos que este novo ponto do \mathbb{R}^3 é o ponto original rotacionado de acordo com o quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ num eixo e num ângulo de rotação elegantemente codificados nas quatro coordenadas (a, b, c, d) .

Antes de desenvolvermos estas provas, vamos analisar a transformação R_q que passaremos a denotar como Ad_q . Um quatérnio puro w aplicado à Ad_q nos dá um produto de três quatérnios qwq^{-1} . Como q^{-1} é o inverso de q , obrigatoriamente q deve ser diferente de zero. Logo podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4.8. *Sejam $q \in \mathbb{H}^*$ e a aplicação*

$$\begin{aligned}
Ad_q &: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \\
w &\mapsto qwq^{-1}
\end{aligned}$$

Esta aplicação é um isomorfismo de anel e em particular é \mathbb{R} -linear.

Demonstração.

Vamos provar que Ad_q é um homomorfismo de anel.

Sejam $v, w \in \mathbb{H}$. Temos que

$$\begin{aligned} Ad_q(v+w) &= q(v+w)q^{-1} \\ &= (qv+qw)q^{-1} \\ &= qvq^{-1} + qwq^{-1} \\ &= Ad_q(v) + Ad_q(w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ad_q(vw) &= q(vw)q^{-1} \\ &= qvq^{-1}qwq^{-1} \\ &= Ad_q(v).Ad_q(w) \end{aligned}$$

Seja $a \in \mathbb{R}$. Logo Ad_q é um homomorfismo de anel.

Vamos provar que Ad_q é \mathbb{R} -linear.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$Ad_q(\lambda v) = q(\lambda v)q^{-1} = \lambda(qvq^{-1}) = \lambda Ad_q(v)$$

Logo Ad_q é \mathbb{R} -linear.

Vamos provar que Ad_q é bijetiva, ou seja, que existe $(Ad_q)^{-1}$.

Temos que

$$\begin{aligned} Ad_{q^{-1}} \circ Ad_q(v) &= Ad_{q^{-1}}(qvq^{-1}) \\ &= q^{-1}(qvq^{-1})q \\ &= (q^{-1}q)v(q^{-1}q) \end{aligned}$$

$$Ad_{q^{-1}} \circ Ad_q(v) = v$$

e também

$$\begin{aligned} Ad_q \circ Ad_{q^{-1}}(v) &= Ad_q(q^{-1}vq) \\ &= q(q^{-1}vq)q^{-1} \\ &= (qq^{-1})v(qq^{-1}) \end{aligned}$$

$$Ad_q \circ Ad_{q^{-1}}(v) = v$$

Portanto $(Ad_q)^{-1} = Ad_{q^{-1}}$, ou seja, existe a inversa de Ad_q .

Logo Ad_q é bijetiva, ou seja, é um isomorfismo. □

Proposição 4.9. *Consideremos a aplicação*

$$\begin{aligned} Ad & : \mathbb{H}^* \rightarrow GL(\mathbb{H}) \\ q & \mapsto Ad_q \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos.

Demonstração.

Sejam $p, q \in \mathbb{H}^*$ e $v \in \mathbb{H}$. Então

$$\begin{aligned} Ad_p \circ Ad_q(v) & = p(qvq^{-1})p^{-1} \\ & = (pq)v(q^{-1}p^{-1}) \\ & = (pq)v(pq)^{-1} = Ad_{pq}(v) \end{aligned}$$

□

Definição 4.4. *O homomorfismo Ad descrito acima é uma ação de grupo denominada ação adjunta de \mathbb{H}^* em \mathbb{H} .*

Teorema 4.1. *Consideremos a aplicação*

$$\begin{aligned} Ad & : \mathbb{S}^3 \rightarrow GL(3, \mathbb{R}) \\ q & \mapsto Ad_q \end{aligned}$$

Então Ad é um homomorfismo de grupos cujo conjunto imagem está contido no subgrupo $SO(3)$, das rotações espaciais.

Demonstração.

Podemos verificar facilmente que \mathbb{S}^3 é um subgrupo de \mathbb{H}^* . Portanto a aplicação é um homomorfismo de grupos.

A seguir vamos mostrar que $Im(Ad) \subset SO(3)$.

Sejam $v = x_1i + y_1j + z_1k$ e $w = x_2i + y_2j + z_2k$, dois quatérnions puros e $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{S}^3$, isto é, satisfazendo $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Pela proposição 4.6 temos que

$$Ad_q(v) \cdot Ad_q(w) = -\langle Ad_q(v), Ad_q(w) \rangle + (Ad_q(v) \times Ad_q(w)). \quad (1)$$

Queremos provar que a parte real de $Ad_q(v).Ad_q(w)$ é igual a parte real de vw .

$$\begin{aligned}
Ad_q(v).Ad_q(w) &= qwq^{-1}qvq^{-1} \\
&= (a + bi + cj + dk)(-\langle v, w \rangle + v \times w)(a - bi - cj - dk) = \\
&= ((-a\langle v, w \rangle - b(y_1z_2 - z_1y_2) - c(z_1x_2 - x_1z_2) - d(x_1y_2 - y_1x_2)) + \\
&\quad + (-b\langle v, w \rangle + a(y_1z_2 - z_1y_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2) - d(z_1x_2 - x_1z_2))i + \\
&\quad + (-c\langle v, w \rangle + a(z_1x_2 - x_1z_2) + d(y_1z_2 - z_1y_2) - b(x_1y_2 - y_1x_2))j + \\
&\quad + (-d\langle v, w \rangle + a(x_1y_2 - y_1x_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) - c(y_1z_2 - z_1y_2))k) \cdot \\
&\quad \cdot (a - bi - cj - dk) = \\
&= (-a^2\langle v, w \rangle - ba(y_1z_2 - z_1y_2) - ca(z_1x_2 - x_1z_2) - da(x_1y_2 - y_1x_2) + \\
&\quad -b^2\langle v, w \rangle + ab(y_1z_2 - z_1y_2) + cb(x_1y_2 - y_1x_2) - db(z_1x_2 - x_1z_2) + \\
&\quad -c^2\langle v, w \rangle + ac(z_1x_2 - x_1z_2) + dc(y_1z_2 - z_1y_2) - bc(x_1y_2 - y_1x_2) + \\
&\quad -d^2\langle v, w \rangle + ad(x_1y_2 - y_1x_2) + bd(z_1x_2 - x_1z_2) - cd(y_1z_2 - z_1y_2)) + \\
&\quad + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k = \\
&= -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\langle v, w \rangle + \\
&\quad + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k = \\
&= -\langle v, w \rangle + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k \\
Ad_q(v).Ad_q(w) &= -\langle v, w \rangle + (Ad_q(v) \times Ad_q(w)). \quad (2)
\end{aligned}$$

Subtraindo (1) de (2) temos que $\langle Ad_q(v), Ad_q(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, isto é, $Ad_q \in O(3)$. (*)

Finalmente vamos verificar o determinante, através da matriz transformação de Ad na base canônica.

$$[Ad_q] = \begin{pmatrix} Ad_q(i) & Ad_q(j) & Ad_q(k) \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
Ad_q(i) &= (a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk) = \\
&= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + (2bc + 2ad)j + (2bd - 2ac)k = \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \\ 2bc + 2ad \\ 2bd - 2ac \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ad_q(j) &= (a + bi + cj + dk)j(a - bi - cj - dk) = \\
&= (2bc - 2ad)i + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)j + (2ab + 2cd)k = \\
&= \begin{pmatrix} 2bc - 2ad \\ a^2 + c^2 - b^2 - d^2 \\ 2ab + 2cd \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Ad_q(k) &= (a + bi + cj + dk)k(a - bi - cj - dk) = \\
&= (2ac + 2bd)i + (2cd - 2ab)j + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)k = \\
&= \begin{pmatrix} 2ac + 2bd \\ 2cd - 2ab \\ a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Utilizando o fato de que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ podemos calcular o determinante da matriz $[Ad_q]$ e concluirmos que é igual a 1, ou seja, $Ad_q \in SL(3)$. (**)

Logo, por (*) e (**) temos que $Ad_q \in SO(3)$, ou seja, $Im(Ad) \subset SO(3)$. \square

Como já mencionamos anteriormente, o ângulo e o vetor de rotação ficam codificados no quatérnio $q = a + bi + cj + dk$, ou seja, nas coordenadas (a, b, c, d) . Nas proposições a seguir isto será demonstrado.

Proposição 4.10. *Seja o quatérnio unitário $q = a + bi + cj + dk$. O vetor eixo de rotação da transformação Ad_q é*

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(b, c, d).$$

Demonstração.

Seja o quatérnio puro unitário

$$N = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(bi + cj + dk).$$

Temos também, por definição, que $|q| = 1$, ou seja, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
Ad_q(N) &= qNq^{-1} = qN\bar{q} \\
&= (a + bi + cj + dk) \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} (bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} (abi + acj + adk - b^2 + bck - bdj - bck - c^2 + cdi + bdj - cdi - d^2) \\
&\quad \cdot (a - bi - cj - dk) \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} (-b^2 - c^2 - d^2 + abi + acj + adk)(a - bi - cj - dk) \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \{b(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)i + c(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)j + d(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)k\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} (bi + cj + dk) \\
Ad_q(N) &= N
\end{aligned}$$

□

Proposição 4.11. *Sejam $q = a + bi + cj + dk$ unitário. Então o ângulo de rotação da transformação Ad_q é $2 \arccos a$.*

Demonstração.

Seja um vetor unitário, v , perpendicular ao eixo de rotação (b, c, d) .

Deste modo, v e $Ad_q(v)$ estarão no mesmo plano, também perpendicular à (b, c, d) , e o ângulo entre eles será o ângulo de rotação.

Seja

$$v = \frac{-ci + bj}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Então

$$\begin{aligned}
Ad_q(v) &= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} (a + bi + cj + dk)(-ci + bj)(a - bi - cj - dk) \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} (-aci + bc + c^2k - cdj + abj + b^2k - bc - bdi)(a - bi - cj - dk) \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} (a^2ci + ac^2k - acdj + a^2bj + ab^2k - abdi - abc - bc^2j - bcdk + ab^2k - \\
&\quad - b^3j - b^2d + ac^2k + c^3i - c^2d + abc + b^2ci + bcdk - acdj + c^2d + cd^2i - abdi + \\
&\quad + b^2d - bd^2j) \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} \{(-2abd - a^2c + b^2c + c^3 + cd^2)i + (-2acd + a^2b - b^3 - bc^2 - bd^2)j + \\
&\quad + (2ac^2 + 2ab^2)k\}
\end{aligned}$$

Temos que

$$\frac{\langle Ad_q(v), v \rangle}{|Ad_q(v)||v|} = \cos \theta$$

$$\text{e } |Ad_q(v)| = |v| = 1.$$

$$\text{Então } \langle Ad_q(v), v \rangle = \cos \theta.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle Ad_q(v), v \rangle &= \frac{1}{b^2 + c^2} \{2abcd + a^2c^2 - b^2c^2 - c^4 - c^2d^2 - 2abcd + a^2b^2 - b^4 - b^2c^2 - b^2d^2\} \\ &= \frac{1}{b^2 + c^2} \{a^2(b^2 + c^2) - c^2(b^2 + c^2) - d^2(b^2 + c^2) - b^2(b^2 + c^2)\} \\ &= \frac{1}{b^2 + c^2} \{(b^2 + c^2)(a^2 - b^2 - c^2 - d^2)\} \\ \langle Ad_q(v), v \rangle &= a^2 - (b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + a^2 - 1 \\ \langle Ad_q(v), v \rangle &= 2a^2 - 1 \\ \cos \theta &= 2a^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta + 1}{2} &= a^2 \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} &= a^2 \\ \cos \frac{\theta}{2} &= a \\ \frac{\theta}{2} &= \arccos a \\ \theta &= 2 \arccos a \end{aligned}$$

□

Sabemos, pelo teorema 4.1, que o contra-domínio de Ad pode ser restrito a $SO(3)$. Podemos então redefinir homomorfismo Ad.

Teorema 4.2. *Consideremos a aplicação*

$$\begin{aligned} Ad &: \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3) \\ q &\mapsto Ad_q \end{aligned}$$

Então Ad é um homomorfismo de grupos sobrejetivo, ou seja, $Im(Ad) = SO(3)$

Demonstração.

Sabemos, pela proposição 3.3, que se $A \in SO(3)$ então $A = R_{\vec{n}, \psi}$. Também, pelo

resultado anterior, temos que $\cos \frac{\psi}{2} = a$ e

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(bi + cj + dk).$$

Então

$$\begin{aligned} \|q\|^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \\ &= \cos^2 \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \end{aligned}$$

Portanto $\sin \frac{\psi}{2} = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$.

Disto segue que

$$\sin \frac{\psi}{2}(\vec{n}) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin \frac{\psi}{2} i + \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin \frac{\psi}{2} j + \frac{d}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin \frac{\psi}{2} k$$

$$\sin \frac{\psi}{2}(\vec{n}) = bi + cj + dk$$

Logo

$$q = \cos \frac{\psi}{2} + \vec{n} \sin \frac{\psi}{2},$$

ou seja, Ad é sobrejetivo.

□

Como Ad é um homomorfismo de grupos, conforme provamos na proposição 4.9, temos que a composição de rotações consiste no produto dos dois quatérnions unitários que definem as transformações, ou seja, dados $p, q \in \mathbb{S}^3$ temos que $Ad_p \circ Ad_q = Ad_{pq}$. Pelo teorema anterior, temos que $Im(Ad|_{\mathbb{S}^3}) = SO(3)$. Disto implica que as rotações com quatérnions preservam o produto interno, seguindo na preservação de comprimentos e ângulos entre os vetores rotacionados.

4.3 Quatérnions, rotações e as relações com matrizes

Finalizando a análise do método de produto de quatérnions para efetuar rotações, a partir da transformação Ad_q , vamos deduzir as matrizes elementares de rotação no espaço. De acordo com a proposição 4.11 o ângulo de rotação é

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \arccos a \\ \cos \frac{\theta}{2} &= a \end{aligned}$$

Por sua vez, quanto ao vetor eixo de rotação, inicialmente consideremos a rotação em torno do eixo x . Então $q_x = a + bi$. Temos que q_x é um quatérnio unitário, então $a^2 + b^2 = 1$. Disto segue que $b = \sin \frac{\theta}{2}$. Para encontramos as matrizes de rotação vamos aplicar cada um dos vetores da base $\{i, j, k\}$.

$$\begin{aligned} Ad_{q_x}(i) &= (a + bi)i(a - bi) \\ &= (ai - b)(a - bi) \\ &= a^2i + ab - ab + b^2i \\ &= (a^2 + b^2)i \\ Ad_{q_x}(i) &= i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ad_{q_x}(j) &= (a + bi)j(a - bi) \\ &= (aj + bk)(a - bi) \\ &= (a^2 - b^2)j + 2abk \end{aligned}$$

Usando as relações trigonométricas

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \text{Substituindo } \alpha \text{ por } \frac{\theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{2} &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \text{Substituindo } \alpha \text{ por } \frac{\theta}{2} \\ \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Logo $Ad_{q_x}(j) = \cos \theta j + \sin \theta k$.

$$\begin{aligned}
Adq_x(k) &= (a + bi)k(a - bi) \\
&= (ak - bj)(a - bi) \\
&= -2abj + (a^2 - b^2)k \\
Adq_x(k) &= -\sin \theta j + \cos \theta k
\end{aligned}$$

A partir dos quatérnios, encontramos triplas ordenadas:

$$\begin{aligned}
Adq_x(i) &= i + 0j + 0k = (1, 0, 0) \\
Adq_x(j) &= 0i + \cos \theta j + \sin \theta k = (0, \cos \theta, \sin \theta) \\
Adq_x(k) &= 0i - \sin \theta j + \cos \theta k = (0, -\sin \theta, \cos \theta)
\end{aligned}$$

Notemos que estas triplas são os vetores coluna da matriz rotação.

Logo a matriz rotação no eixo x é

$$Adq_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_x(\theta)$$

Consideremos agora a rotação em torno do eixo y.

$$\begin{aligned}
Adq_y(i) &= (a + cj)i(a - cj) \\
&= (ai - ck)(a - cj) \\
&= a^2i - ack - ack - c^2i \\
&= (a^2 - c^2)i - 2ack
\end{aligned}$$

$$Adq_y(i) = \cos \theta i - \sin \theta k$$

$$\begin{aligned}
Adq_y(j) &= (a + cj)j(a - cj) \\
&= (aj - c)(a - cj) \\
&= a^2j + ac - ac + c^2j \\
&= (a^2 + c^2)j
\end{aligned}$$

$$Adq_y(j) = j$$

$$\begin{aligned}
Adq_y(k) &= (a + cj)k(a - cj) \\
&= (ak + ci)(a - cj) \\
&= a^2k + aci + aci - c^2k \\
&= (a^2 - c^2)k + 2aci \\
Adq_y(k) &= \sin \theta i + \cos \theta k
\end{aligned}$$

Deste modo obtemos os vetores coluna de Adq_y , vamos listá-los.

$$\begin{aligned}
Adq_y(i) &= \cos \theta i + 0j - \sin \theta k = (\cos \theta, 0, -\sin \theta) \\
Adq_y(j) &= 0i + e_2 + 0e_3 = (0, 1, 0) \\
Adq_y(k) &= \sin \theta i + 0j + \cos \theta k = (\sin \theta, 0, \cos \theta)
\end{aligned}$$

Logo a matriz rotação no eixo y é

$$Adq_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = R_y(\theta)$$

Finalmente consideremos a rotação em torno do eixo z.

$$\begin{aligned}
Adq_z(i) &= (a + dk)i(a - dk) \\
&= (ai + dj)(a - dk) \\
&= a^2i + adj + adj - d^2i \\
&= (a^2 - d^2)i + 2adj
\end{aligned}$$

$$Adq_z(i) = \cos \theta i + \sin \theta j$$

$$\begin{aligned}
Adq_z(j) &= (a + dk)j(a - dk) \\
&= (aj - di)(a - dk) \\
&= a^2j - adi - adi - d^2j \\
&= (a^2 - d^2)j - 2adi
\end{aligned}$$

$$Adq_z(j) = -\sin \theta i + \cos \theta j$$

$$\begin{aligned}
Ad_{q_z}(k) &= (a + dk)k(a - dk) \\
&= (ak - d)(a - dk) \\
&= a^2k + ad - ad + d^2k \\
&= (a^2 + d^2)k \\
Ad_{q_z}(k) &= k
\end{aligned}$$

Vamos listar os vetores coluna.

$$\begin{aligned}
Ad_{q_z}(i) &= \cos \theta i + \sin \theta j + 0k = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\
Ad_{q_z}(j) &= -\sin \theta i + \cos \theta j + 0k = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\
Ad_{q_z}(k) &= 0i + 0j + k = (0, 0, 1)
\end{aligned}$$

Logo a matriz rotação no eixo z é

$$Ad_{q_z} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\theta)$$

Verificamos nesta seção que o método de rotação com números quatérnions é equivalente ao método matricial, o qual faz uso das matrizes de rotação elementares.

5 *Considerações finais*

A partir da busca de Hamilton por métodos algébricos para o cálculo de rotações, desenvolveram-se dois métodos, um com números complexos e outro com números quatérnions. No espaço, o método com uso de números quatérnions trouxe uma alternativa ao método matricial, evidentemente apresentando vantagens e desvantagens a serem consideradas conforme a aplicação. Vale salientar que o método de quaténions pode ser bem mais aprofundado, analisado e até mesmo relacionado com outras teorias. Abriram-se, a partir de Hamilton, novas fronteiras ao estudo de métodos algébricos de rotações e principalmente para construção de novas álgebras.

Referências

- [1] E. Batista. Geometria e topologia do grupo de rotações. *III Bienal da SBM*, 2006.
- [2] E. Batista. Ações e representações de grupos e teoria de números. *V Bienal da SBM*, 2008.
- [3] C. B. Boyer. *História da matemática*. Edgard Blücher, São Paulo, 1974.
- [4] C. A. Callioli; H. H. Domingues e R. C. F. Costa. *Álgebra Linear e aplicações*. Atual, São Paulo, 1987.
- [5] A. Marénitch; A. Ananim e Y. Bozhkov. A 3-esfera e seus familiares. o fibrado de hopf. *Matemática Universitária*, (24/25):10–22, junho/dezembro 1998.
- [6] Howard Eves. *Introdução à história da matemática*. Unicamp, Campinas, 2004.
- [7] A. Gonçalves. *Introdução à álgebra*. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [8] H. H. Domingues; G. Iezzi. *Álgebra Moderna*. Atual, São Paulo, 2003.
- [9] B. Kolman. *Álgebra Linear com aplicações*. LTC, Rio de Janeiro, 2012.
- [10] E. Lages. *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [11] A. Garcia; Yves Lequain. *Elementos de álgebra*. IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [12] E. L. Lima. *Álgebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [13] D. W. Lyons. An elementary introduction to the hopf fibration. *Mathematics Magazine*, 76(2):87–91, abril 2003.
- [14] J. L. Boldrini; S. I. R. Costa; V. L. Figueiredo; H. G. Wetzler. *Álgebra Linear*. Harbra, São Paulo, 1984.