Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Álgebras de Hopf trançadas

Sara Regina da Rosa Pinter
Orientadora: Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis
Fevereiro de 2013

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Álgebras de Hopf trançadas

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Sara Regina da Rosa Pinter
Florianópolis
Fevereiro de 2013

Álgebras de Hopf trançadas

por

Sara Regina da Rosa Pinter[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues
(Orientadora - UFSC)

Prof. Dr. Alveri Alves Sant'Ana
(Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS)

Prof. Dr. Dirceu Bagio
(Universidade Federal de Santa Maria - UFSM)

Prof. Dr. Luiz Augusto Saeger
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2013.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus que me deu o dom da vida e a graça de realizar esse trabalho. Citando São Paulo, "ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria".

À minha família, principalmente minha mãe e meus padrinhos que estiveram presentes em um momento tão importante, que foi a defesa desse trabalho.

À minha orientadora e, com todo respeito e carinho, amiga Professora Virgínia. Muito obrigada por todos os seminários que assistiu pacientemente, e pelos que apresentou também. Por todas as aulas, foram quatro cursos maravilhosos. Pelo cuidado na leitura e correção desse trabalho. Pela motivação, entusiasmo e amizade. Quando eu crescer, quero ser como você.

Aos meus amigos. Os antigos e os novos, que de alguma maneira sempre se fazem presentes. Os também matemáticos e os de outras áreas, os primeiros sabem como é angustiante e interessante a vida de matemático, e os outros mesmo me achando maluca por ter escolhido essa carreira, permanecem ao meu lado.

Aos professores Alveri Alves Sant'Ana, Dirceu Bagio e Luiz Augusto Saeger por terem aceitado participar da banca. Muito obrigada pelos comentários e sugestões.

À CAPES, pela bolsa de mestrado, que foi fundamental na realização dessa dissertação.

Resumo

Álgebras de Nichols são ferramentas importantes para a classificação de álgebras de Hopf pontuadas (veja [3]). Uma álgebra de Nichols é, em suma, uma álgebra de Hopf trançada e graduada. Ao considerarmos a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora, cria-se o ambiente para definir álgebras de Hopf trançadas nessa categoria (o que pode ser feito em uma categoria trançada qualquer). Esse trabalho desenvolve esse problema, isto é, dada uma álgebra de Hopf H com antípoda bijetora sobre um corpo k, nossos principais objetivos são estudar álgebras de Hopf trançadas na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre H e mostrar a existência e a unicidade da álgebra de Nichols de um módulo de Yetter-Drinfeld sobre H.

Abstract

Nichols algebras play an important role to classify pointed Hopf algebras. If we consider the category of modules of Yetter-Drinfeld over a Hopf algebra H with bijective antipode, we get a braided category and so it is possible to define a braided Hopf algebra there. In this work, we consider this kind of problem, i. e., given a Hopf algebra H with bijective antipode (over a field k), we consider the category of modules of Yetter-Drinfeld over it. We study braided Hopf algebras in this category and also we prove the existence and uniqueness of the Nichols algebra of a Yetter-Drinfeld module.

Sumário

Introdução

A classificação e o estudo de álgebras de Hopf têm sido objetos de investigação importantes. Um dos poucos resultados gerais de classificação de álgebras de Hopf é devido a Milnor, Moore, Cartier e Kostant (1963) e diz que qualquer álgebra de Hopf cocomutativa sobre o corpo dos números complexos é um produto semidireto da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie e de uma álgebra de grupo.

Segundo a terminologia de Sweedler (veja [16]), álgebras de Hopf cocomutativas sobre um corpo algebricamente fechado são exemplos de álgebras de Hopf pontuadas, isto é, todas as suas subcoálgebras simples são unidimensionais. Exatamente para esse caso, existe uma consolidada e promissora linha de pesquisa que possui muitos problemas importantes sobre classificação em aberto.

Nessa dissertação, o objetivo inicial era estudar o artigo *Pointed Hopf Algebras* (veja [3]). O referido trabalho trata exatamente de progressos na classificação de álgebras de Hopf pontuadas, onde é proposto o *método de levantamento* para essa classificação. Andruskiewitsch-Schneider descrevem os passos para se obter tal classificação, assim como resultados cruciais relacionados. Esse método tem como um dos objetivos achar, para todo grupo finito G, todas as álgebras de Hopf pontuadas H de dimensão finita tal que o grupo dos elementos *group like*, $G(H)$, seja isomorfo a G. São exemplos de álgebras de Hopf pontuadas, as álgebras de grupo e as álgebras envolventes universais de álgebras de Lie.

No caso em que H é uma álgebra de Hopf pontuada, a filtração coradical é uma filtração álgebra de Hopf, tendo uma correspondente álgebra de Hopf graduada associada $gr(H)$. Além disso, o coradical $H_0 = kG$ com $G = G(H)$. Uma breve descrição dos passos para se fazer essa classificação é dada abaixo.

Em primeiro lugar, é considerado um módulo de Yetter-Drinfeld V sobre kG para o qual se determina a álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ (que é uma álgebra de Hopf trançada graduada na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre kG) associada a tal V (se dimensão de $\mathcal{B}(V)$ é finita). Nesse passo, efetivamente o que se faz é estudar as álgebras de Hopf trançadas $\mathcal{B}(V)$ para cada V dado.

Num segundo passo, é determinado todas as "deformações"(levantamentos) de $gr(H) = \mathcal{B}(V)\#kG$ (bosonização de $\mathcal{B}(V)$ por kG). Aqui é passada a informação para a álgebra de Hopf graduada, uma vez que no passo anterior, foi estudada a Hopf trançada $\mathcal{B}(V)$.

Finalmente, se H é uma álgebra de Hopf pontuada, de dimensão finita tal que $G(H) \cong G$, é preciso decidir se a mesma é gerada por $G(H)$ e por elementos quase primitivos.

Para o caso em que G é abeliano, já se conhece muitos resultados e os problemas que restaram, segundo Andruskiewitsch, são problemas muito difíceis. Já o caso em que G não é abeliano, existem duas linhas de pesquisa tratando do assunto.

O artigo é bastante interessante, porém muito extenso e oferece um grau de dificuldade considerável. Dessa forma, decidimos estudar minuciosamente alguns fatos (iniciais) envolvendo categorias, imprescindíveis para darmos andamento aos estudos e, como os mesmos não nos eram muito familiares, gastamos um tempo aprendendo a respeito. Devido a prazos, acabamos nos atendo ao estudo de álgebras de Hopf trançadas para que fosse possível apresentar a construção da álgebra de Nichols de um módulo de Yetter-Drinfeld. O trabalho está dividido em cinco capítulos, cujos assuntos abordados são descritos abaixo. São considerados como pré-requisitos as teorias de anéis, grupos e módulos.

No Capítulo 1, apresentamos alguns pré-requisitos que são utilizados ao longo do trabalho. Entre eles, estão os conceitos e algumas propriedades de coálgebras, comódulos, álgebras de Hopf e temas relacionados como ações e coações. Ainda nesse capítulo, estudamos espaços graduados, produto *wedge* e filtração coradical, assuntos essenciais para o desenvolvimento do Capítulo 5.

No Capítulo 2, fazemos um estudo acerca de categorias. Primeiramente falamos de categorias num contexto geral, mas depois focamos as definições e exemplos para o que realmente gostaríamos de explorar: categorias tensoriais e trançadas. Uma categoria tensorial é, em suma, uma categoria munida de um funtor chamado produto tensorial que associa um par de objetos U, V a um novo objeto na categoria, denotado por $U \otimes V$, juntamente com os axiomas que garantem a boa definição do produto tensorial de um número finito qualquer de objetos. Uma categoria trançada é uma categoria tensorial em que cada par de objetos U, V admite um isomorfismo $c_{U,V} : U \otimes V \to V \otimes U$ satisfazendo alguns axiomas, tal isomorfismo é chamado trança. Uma categoria simétrica é uma categoria trançada em que, para quaisquer objetos U, V, tem-se $c_{U,V} \circ c_{V,U} = I_{V \otimes U}$.

No Capítulo 3, estudamos uma categoria particular, a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H (sobre um corpo k), denotada por ${}^H_H\mathcal{YD}$. Mostramos, entre outros resultados, que a categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria tensorial e que, no caso da antípoda de H ser bijetora, ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria trançada. Além disso, mostramos que ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria simétrica unicamente no caso em que H é a álgebra de Hopf trivial, sendo esse, um resultado de Pareigis (veja [12]). Apresentamos ainda, a definição e alguns exemplos de espaços vetoriais trançados.

No Capítulo 4, definimos e apresentamos exemplos de álgebras de Hopf trançadas na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$. Aqui, H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e então, ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria trançada. Com a existência e as propriedades da trança conseguimos dar uma estrutura de álgebra para o produto tensorial de duas álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Assim, definimos uma biálgebra R em ${}^H_H\mathcal{YD}$ como uma álgebra e uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\Delta : R \to R \otimes R$ e $\varepsilon : R \to k$ sejam morfismos de álgebras, considerando em $R \otimes R$ a estrutura de álgebra construída através da trança. Além disso, apresentamos a construção da bosonização ou biproduto $R \# H$, em que R é uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$, instrumento fundamental para a classificação de álgebras de Hopf pontuadas (veja [3]).

No Capítulo 5, finalmente com todas as ferramentas em mãos, apresentamos a existência e a unicidade da álgebra de Nichols de um módulo de Yetter-Drinfeld.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Desenvolvemos esse capítulo usando [5], [11] e [13]. Por ser um capítulo de pré-requisitos não provamos todos os resultados, mas procuramos sempre referenciá-los para que o leitor possa olhar suas respectivas provas, se necessário, e para que o texto fique o mais auto-contido possível. Em todo o capítulo k é um corpo.

1.1 Coálgebras

As primeiras definições e resultados sobre coálgebras que desenvolvemos aqui são de extrema importância pois álgebras de Hopf, nossa principal ferramenta, possuem estrutura de coálgebras. Os exemplos apresentados são propositalmente escolhidos de maneira a serem usados em outros capítulos do trabalho.

Definição 1.1 *Uma k-álgebra é uma tripla (A, m, μ), em que A é um k-espaço vetorial, $m : A \otimes A \to A$ e $u : k \to A$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo comutam*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes I_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[d, "m"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "\mu \otimes I_A"] & A \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"'] & A \otimes k. \arrow[ul, "I_A \otimes \mu"']
\end{tikzcd}$$

Essa definição é equivalente à clássica, em que uma k-álgebra A é um anel que possui uma estrutura de k-espaço vetorial tal que $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$, para quaisquer $\alpha \in k, a, b \in A$.

Mediante a definição de uma álgebra via diagramas, é possível obtermos a definição dual da mesma invertendo o sentido das flechas dos diagramas acima, isto é, dualizando tais diagramas.

Definição 1.2 *Uma k-coálgebra é uma tripla (C, Δ, ε), em que C é um k-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to k$ são morfismos de k-espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo são comutativos*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "I_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes I_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes C \arrow[r, "\cong"] & C & C \otimes k \arrow[l, "\cong"'] \\ & C \otimes C. \arrow[ul, "\varepsilon \otimes I_C"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "I_C \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

As aplicações Δ e ε são chamadas comultiplicação e counidade da coálgebra C, respectivamente.

Ao longo desse trabalho, desde que o corpo k esteja fixado, vamos omití-lo e escrever apenas álgebras e coálgebras para k-álgebras e k-coálgebras. Além disso, vamos omitir os isomorfismos existentes entre $V \otimes k$, k e $k \otimes V$, para todo k-espaço vetorial V.

Exemplo 1.1 Sejam X um conjunto não-vazio e kX o k-espaço vetorial com base X. Então kX é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε dadas por $\Delta(x) = x \otimes x$ e $\varepsilon(x) = 1$, para qualquer $x \in X$ e estendidas por linearidade.

Exemplo 1.2 O anel de polinômios $k[X]$ é uma coálgebra com comultiplicação e counidade dadas por

$$\Delta(X^n) = (X \otimes 1 + 1 \otimes X)^n, \quad \varepsilon(X^n) = 0 \ \text{ para } \ n \geq 1$$
$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon(1) = 1.$$

Agora, apresentamos a notação de Sweedler (veja [5], pp. 4-8), a qual é muito eficaz para cálculo de longas composições envolvendo a comultiplicação Δ.

A definição recursiva da sequência de aplicações $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ é definida como $\Delta_1 = \Delta$ e, para $n \geq 2$, $\Delta_n : C \to C \otimes \cdots \otimes C$ ($n+1$ vezes) temos que $\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1})\Delta_{n-1}$.

A notação de Sweedler para Δ se escreve como $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$ (omitimos o somatório), para qualquer $c \in C$, evitando assim a escrita $\Delta(c) = \sum\limits_{i,j} c_i \otimes c_j$. Indutivamente, $\Delta_n(c) = c_1 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}$, $\forall n \geq 2$.

Para $n = 2$, temos que

$$\Delta_2(c) = c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \quad \text{e}$$

$$c = \varepsilon(c_1)c_2 = c_1\varepsilon(c_2).$$

As igualdades acima são exatamente as comutatividades do primeiro e segundo diagramas da definição de uma coálgebra.

Definição 1.3 *Uma álgebra (A, m, μ) é dita comutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

é comutativo, em que $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$ é função twist dada por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$.

Definição 1.4 *Uma coálgebra (C, Δ, ε) é dita cocomutativa se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\ C \otimes C \arrow[rr, "\tau"'] & & C \otimes C \end{tikzcd}$$

é comutativo. Isto significa que, para todo $c \in C$, $c_1 \otimes c_2 = c_2 \otimes c_1$.

Exemplo 1.3 (Coálgebra co-oposta) Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Definimos C^{cop} , como sendo exatamente o conjunto C, mas com comultiplicação definida por $\tau \circ \Delta : C \to C \otimes C$, em que τ é a função *twist* já comentada. Denotamos a tripla como $(C, \Delta^{cop}, \varepsilon)$. Seja $c \in C$. Então

$$(\Delta^{cop} \otimes I_C)\Delta^{cop}(c) = (\Delta^{cop} \otimes I_C)(c_2 \otimes c_1) = c_{2_2} \otimes c_{2_1} \otimes c_1 = c_3 \otimes c_2 \otimes c_1.$$

$$(I_C \otimes \Delta^{cop})\Delta^{cop}(c) = (I_C \otimes \Delta^{cop})(c_2 \otimes c_1) = c_2 \otimes c_{1_2} \otimes c_{1_1} = c_3 \otimes c_2 \otimes c_1.$$

A comutatividade do segundo diagrama não é difícil de ser verificada. Portanto, C^{cop} é de fato uma coálgebra.

Definição 1.5 *Sejam (A, m_A, μ_A) e (B, m_B, μ_B) álgebras. Uma função k-linear $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras se os diagramas abaixo são comutativos*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & k. \arrow[ul, "\mu_A"] \arrow[ur, "\mu_B"'] & \end{tikzcd}$$

Definição 1.6 *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras. Uma função k-linear $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras se os diagramas*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

são comutativos.

A comutatividade do primeiro diagrama nos diz que

$$f(c)_1 \otimes f(c)_2 = f(c_1) \otimes f(c_2), \forall c \in C.$$

Definição 1.7 *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Um k-subespaço vetorial D de C é dito uma subcoálgebra de C se $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.*

Claramente, $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ é uma coálgebra, com $\Delta_D = \Delta|_D$ e $\varepsilon_D = \varepsilon|_D$.

Definição 1.8 *Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e I um k-subespaço vetorial de C. Então I é dito*

(i) *um coideal à esquerda (à direita) se $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ ($\Delta(I) \subseteq I \otimes C$).*

(ii) *um coideal se $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$.*

Proposição 1.1 *Seja $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras. Então*

(i) *$Im(f)$ é uma subcoálgebra de D.*

(ii) *$ker(f)$ é um coideal de C.*

Teorema 1.1 *Sejam C uma coálgebra, I um coideal e $\pi : C \to \dfrac{C}{I}$ a projeção canônica. Então*

(i) *Existe uma única estrutura de coálgebra em $\dfrac{C}{I}$ tal que π é um morfismo de coálgebras, dada por $\Delta(\overline{c}) = \overline{c_1} \otimes \overline{c_2}$ e $\varepsilon(\overline{c}) = \varepsilon(c)$, $\forall c \in C$.*

(ii) *Se $f : C \to D$ é um morfismo de coálgebras com $I \subseteq ker(f)$ então existe um único morfismo de coálgebras $\bar{f} : \dfrac{C}{I} \to D$ tal que $f = \bar{f} \circ \pi$.*

Teorema 1.2 (Teorema do isomorfismo para coálgebras) *Seja* $f : C \to D$ *um morfismo de coálgebras. Então* $\bar{f} : \dfrac{C}{kerf} \to Imf$ *é um isomorfismo de coálgebras.*

Proposição 1.2 *Sejam* $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ *e* $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ *coálgebras. Então* $(C \otimes D, \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra com as estruturas dadas por* $\Delta(c \otimes d) = c_1 \otimes d_1 \otimes c_2 \otimes d_2$ *e* $\varepsilon(c \otimes d) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_D(d)$.

Proposição 1.3 *Seja* (C, Δ, ε) *uma coálgebra. Então* $C^* = Hom(C, k)$ *é uma álgebra com a multiplicação e a unidade dadas por* $(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2)$ *para quaisquer* $f, g \in C^*, c \in C$ *e* $1_{C^*} = \varepsilon$. *Reciprocamente, se* A *é uma álgebra de dimensão finita, então* A^* *é uma coálgebra com comultiplicação* $\Delta(f) = f_1 \otimes f_2$ *tal que* $f(ab) = f_1(a)f_2(b)$, *para quaisquer* $a, b \in A, f \in A^*$ *e counidade* $\varepsilon(f) = f(1)$, *para todo* $f \in A^*$.

A multiplicação acima é chamada *produto de convolução*. A próxima definição e os próximos resultados são usados principalmente na Seção 1.6, que é de grande importância para o desenvolvimento do Capítulo 5.

Definição 1.9 *Seja* V *um* k*-espaço vetorial. Se* S *é um subconjunto de* $V^* = Hom(V, k)$ *definimos*

$$S^{\perp} = \{v \in V : f(v) = 0, \forall f \in S\}.$$

Se S *é um subconjunto de* V *definimos*

$$S^{\perp} = \{f \in V^* : f(S) = 0\}.$$

Proposição 1.4 *Seja* V *um* k*-espaço vetorial. Se* $S \subseteq V$ *então* $(S^{\perp})^{\perp} = S$. *Se* V *possui dimensão finita e* $S \subseteq V^*$ *então* $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

Proposição 1.5 *Seja* C *uma coálgebra. Se* D *é uma subcoálgebra de* C *então* $D^{\perp}$ *é um ideal de* C^*. *Reciprocamente, se* I *é um ideal de* C^* *então* $I^{\perp}$ *é uma subcoálgebra de* C.

Teorema 1.3 (Teorema fundamental das coálgebras) *Todo elemento de uma coálgebra* C *está contido em uma subcoálgebra de dimensão finita de* C.

Lembramos que uma coálgebra C é *simples* se $C \neq 0$ e as únicas subcoálgebras de C são 0 e C.

Corolário 1.1 *Toda subcoálgebra simples de uma coálgebra C possui dimensão finita.*

Demonstração: Seja S uma subcoálgebra simples de C. Então, por definição, $S \neq \{0\}$. Seja $s \in S$, $s \neq 0$. Pelo teorema acima existe uma subcoálgebra de dimensão finita de S, digamos D, tal que $s \in D$. Assim, $D \subseteq S$ e $D \neq 0$. Como S é simples segue que $D = S$. Portanto, S possui dimensão finita. ■

As definições abaixo são de extrema importância para o desenvolvimento do Capítulo 5.

Definição 1.10 *Seja C uma coálgebra. Um elemento $c \in C$ é dito grouplike se c é não-nulo e $\Delta(c) = c \otimes c$.*

O conjunto dos elementos grouplike da coálgebra C é denotado por $G(C)$. Segue da propriedade da counidade que $\varepsilon(c) = 1$, para todo $c \in G(C)$.

Definição 1.11 *Sejam C uma coálgebra e $g, h \in G(C)$. Um elemento $x \in C$ tal que $\Delta(x) = x \otimes g + h \otimes x$ é chamado (g, h)-primitivo.*

O conjunto de todos os elementos (g, h)-primitivos de C é denotado por $P_{g,h}(C)$.

Definição 1.12 *Seja C uma coálgebra.*

(i) *O coradical C_0 de C é a soma de todas as subcoálgebras simples de C.*

(ii) *Dizemos que C é pontuada se toda subcoálgebra simples de C possui dimensão 1.*

(iii) *Dizemos que C é conexa se C_0 possui dimensão 1.*

Observação 1.1 Se uma coálgebra C é conexa então $C_0 = k1$, em que 1 é apenas uma notação para um elemento de $G(C)$. De fato, como a dimensão de C_0 é igual a 1, qualquer elemento não-nulo $c \in C_0$ é uma base para C_0 como k-espaço vetorial e portanto, $\{c \otimes c\}$ é uma base de $C_0 \otimes C_0$. Além disso, sendo C_0 uma subcoálgebra de C, existe $\alpha \in k$ tal que $\Delta(c) = \alpha(c \otimes c) = \alpha c \otimes c$. Consideremos $1 = \alpha c$ e daí, $\Delta(1) = \alpha\Delta(c) = \alpha c \otimes \alpha c = 1 \otimes 1$.

Nesse caso, denotamos $P_{1,1}(C)$ por $P(C)$.

1.2 Comódulos

Um importante capítulo desse trabalho estuda módulos de Yetter-Drinfeld. Um módulo de Yetter-Drinfeld possui uma estrutura comódulo. Faz-se necessária uma seção sobre comódulos.

Da mesma forma que definimos álgebras via diagramas para obtermos a noção dual de coálgebra, é possível darmos uma definição via diagramas de um A-módulo para obtermos a noção dual de um C-comódulo, em que (A, m, μ) é uma álgebra e (C, Δ, ε) é uma coálgebra.

Definição 1.13 *Seja (A, m, μ) uma álgebra. Um A-módulo à esquerda é um par (M, λ), em que M é um k-espaço vetorial e $\lambda : A \otimes M \to M$ é um morfismo de k-espaços vetorias tais que os diagramas abaixo comutam*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "I_A \otimes \lambda"] \arrow[d, "m \otimes I_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\lambda"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\lambda"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \otimes M \arrow[rr, "\mu \otimes I_M"] & & A \otimes M \arrow[dl, "\lambda"] \\ & M. \arrow[ul, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Definição 1.14 *Um C-comódulo à esquerda é um par (M, ρ), em que M é um k-espaço vetorial e $\rho : M \to C \otimes M$ é um morfismo k-linear tais que os diagramas abaixo comutam*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes M \arrow[d, "\Delta \otimes I_M"] \\ C \otimes M \arrow[r, "I_C \otimes \rho"'] & C \otimes C \otimes M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes M \arrow[rr, "\varepsilon \otimes I_M"] & & k \otimes M \arrow[dl, "\cong"] \\ & M. \arrow[ul, "\rho"] & \end{tikzcd}$$

De maneira similar, podemos definir um C-comódulo à direita. Ao longo desse trabalho, para qualquer comódulo usamos a mesma notação ρ para designar sua estrutura.

A notação de Sweedler é usada também para comódulos. Seja M um C-comódulo à esquerda com a estrutura dada por $\rho : M \to C \otimes M$. Então, para qualquer $m \in M$, denotamos

$$\rho(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$$

em que os elementos $m'_{(0)}s \in M$ e os $m'_{(-1)}s \in C$.

A comutatividade dos diagramas da definição de um comódulo à esquerda pode ser escrita, em notação de Sweedler, como

$$m_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(0)} = (m_{(-1)})_1 \otimes (m_{(-1)})_2 \otimes m_{(0)}$$

$$= m_{(-2)} \otimes m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \quad \text{e} \quad \varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)} = m.$$

Exemplo 1.4 Toda coálgebra C é um C-comódulo à direita e à esquerda. A função que lhe dá a estrutura de C-comódulo (à direita e à esquerda) é a comultiplicação $\Delta : C \to C \otimes C$.

Definição 1.15 (i) *Sejam A uma álgebra e (X, λ_X),(Y, λ_Y) dois A-módulos à esquerda. Uma função k-linear $f : X \to Y$ é dita um morfismo de A-módulos se o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} A \otimes X \arrow[r, "I_A \otimes f"] \arrow[d, "\lambda_X"'] & A \otimes Y \arrow[d, "\lambda_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

(ii) Sejam C uma coálgebra e (M, ρ), (N, λ) dois C-comódulos à esquerda. Uma função k-linear $g : M \to N$ é dita um morfismo de C-comódulos se o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\rho"'] & N \arrow[d, "\lambda"] \\ C \otimes M \arrow[r, "I_C \otimes g"'] & C \otimes M. \end{tikzcd}$$

A comutatividade desse último diagrama nos diz que

$$g(m)_{(-1)} \otimes g(m)_{(0)} = m_{(-1)} \otimes g(m_{(0)}).$$

Definição 1.16 *Seja M um C-comódulo à esquerda. Um k-subespaço vetorial N de M é chamado um C-subcomódulo à esquerda se $\rho(N) \subseteq C \otimes N$.*

Claramente, sendo N um C-subcomódulo à esquerda de M, N é um C-comódulo à esquerda, cuja estrutura é a restrição de ρ a N.

A observação abaixo é necessária para a prova do teorema mais importante do Capítulo 5.

Observação 1.2 *Notemos que se $f : M \to N$ é um morfismo de C-comódulos e N' é um subcomódulo de N então $f^{-1}(N')$ é um subcomódulo de M.*

Usamos a próxima definição na Seção 1.6.

Definição 1.17 *Sejam M um C-comódulo à esquerda e N um C-subcomódulo à esquerda de M. Dizemos que N é essencial em M se para todo C-subcomódulo não-nulo X de M tem-se que $X \cap N \neq 0$.*

Teorema 1.4 *Sejam M um C-comódulo à esquerda e N um C-subcomódulo de M. Então existe uma única estrutura de C-comódulo à esquerda em $\dfrac{M}{N}$ tal que $\pi : M \to \dfrac{M}{N}$ é um morfismo de comódulos. Tal estrutura é dada por $\rho(\overline{m}) = m_{(-1)} \otimes \overline{m_{(0)}}$, para todo $m \in M$.*

Proposição 1.6 *Sejam M e N dois C-comódulos à esquerda e $f : M \to N$ um morfismo de comódulos. Então $Im(f)$ é um C-subcomódulo de N e $ker(f)$ é um C-subcomódulo de M.*

Teorema 1.5 (Teorema do isomorfismo para comódulos) *Sejam $f : M \to N$ um morfismo de C-comódulos à esquerda. Então $\dfrac{M}{ker(f)} \cong Im(f)$ como C-comódulos à esquerda.*

1.3 Álgebras de Hopf

Embora a seção esteja resumida, a mesma é essencial para cálculos futuros, principalmente nos Capítulos 3 e 4.

Definição 1.18 *Um k-espaço vetorial H que possua estruturas de álgebra (H, m, μ) e de coálgebra (H, Δ, ε) tais que Δ e ε sejam morfismos de álgebras é dito uma biálgebra.*

Observação 1.3 Dizemos que uma biálgebra H possui uma propriedade P, se sua estrutura de álgebra ou de coálgebra tiver a propriedade P. Assim, por exemplo, podemos falar de biálgebras comutativas (se sua estrutura de álgebra for comutativa) ou cocomutativas (se sua estrutura de coálgebra for cocomutativa).

Exemplo 1.5 Sejam G um grupo e kG a álgebra de grupo. Então kG possui uma estrutura de coálgebra dada por

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & kG & \to & kG \otimes kG \\ & g & \mapsto & g \otimes g \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \varepsilon : & kG & \to & k \\ & g & \mapsto & 1. \end{array}$$

Verifiquemos que Δ e ε são morfismos de álgebras. Sejam $g, h \in kG$ elementos da base. Então $\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h)$ e $\varepsilon(gh) = 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$. Portanto, kG é uma biálgebra.

Exemplo 1.6 Seja H uma biálgebra. Então H^{op}, H^{cop} e $H^{op,cop}$ são biálgebras, em que H^{op} possui a estrutura de álgebra oposta e mantém a estrutura de coálgebra de H, H^{cop} possui a estrutura de coálgebra co-oposta e mantém a estrutura de álgebra de H e $H^{op,cop}$ possui a estrutura de coálgebra co-oposta e álgebra oposta de H.

Proposição 1.7 *Seja H uma biálgebra de dimensão finita. Então H^* com a estrutura de álgebra dual da coálgebra H e com a estrutura de coálgebra dual da álgebra H é uma biálgebra, chamada biálgebra dual de H.*

Exemplo 1.7 Seja G um grupo de ordem finita com elemento neutro 1. Então kG é uma biálgebra de dimensão finita. Assim, pela proposição acima, $(kG)^*$ possui uma estrutura de biálgebra. Tal estrutura é dada por

$$\Delta(p_g) = \sum_{h \in G} p_{gh^{-1}} \otimes p_h \quad \text{e} \quad \varepsilon(p_g) = \delta_{1,g},$$

em que $\{p_g : g \in G\}$ é a base dual para $(kG)^*$.

Definição 1.19 *Sejam H e L duas biálgebras. Uma função k-linear $f : H \to L$ é dita um morfismo de biálgebras se f é um morfismo de álgebras e um morfismo de coálgebras com respeito às estruturas de álgebra e de coálgebra de H e L, respectivamente.*

Na Definição 1.11 quando $C = H$ é uma biálgebra e $g = h = 1$, então denotamos $P(H) = P_{1,1}(H) = \{x \in H : \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$ e agora 1 é a unidade de H. Os elementos de $P(H)$ são chamados primitivos.

Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, m, μ) uma álgebra. Então $Hom(C, A)$ possui uma estrutura de álgebra dada por

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2),$$

para quaisquer $f, g \in Hom(C, A)$, $c \in C$. A unidade dessa álgebra é $\mu \circ \varepsilon$.

Consideremos um caso particular da álgebra acima. Seja H uma biálgebra, denotamos H^c a estrutura de coálgebra de H e H^a a estrutura de álgebra de H. Nessas condições, temos uma estrutura de álgebra em $Hom(H^c, H^a)$. Notemos que a função identidade $I : H \to H$ pertence à álgebra $Hom(H^c, H^a)$.

Definição 1.20 *Seja H uma biálgebra. Uma função k-linear $S : H \to H$ é chamada antípoda de H se S for a inversa da função identidade $I_H : H \to H$ com respeito ao produto de convolução da álgebra $Hom(H^c, H^a)$.*

Observação 1.4 O fato de S ser antípoda de H implica que $S(h_1)h_2 = h_1S(h_2) = \varepsilon(h)1_H$, para todo $h \in H$.

Definição 1.21 *Uma biálgebra H é dita uma álgebra de Hopf se H possui uma antípoda.*

Exemplo 1.8 O anel de polinômios $k[X]$, com estrutura de coálgebra já vista, é uma álgebra de Hopf com antípoda dada por $S(X) = -X$.

Exemplo 1.9 Seja G um grupo. Então a álgebra de grupo kG é uma álgebra de Hopf com antípoda dada por $S(g) = g^{-1}, \forall g \in G$.

Exemplo 1.10 Seja G um grupo de ordem finita. Então $(kG)^*$ é uma álgebra de Hopf com antípoda dada por $S(p_g) = p_{g^{-1}}, \forall g \in G$.

Definição 1.22 *Sejam H e T duas álgebras de Hopf. Uma função $f : H \to T$ é dita um morfismo de álgebras de Hopf se for um morfismo de biálgebras.*

Proposição 1.8 *Sejam H e T duas álgebras de Hopf com antípodas S_H e S_T. Se $f : H \to T$ é um morfismo de biálgebras, então $S_T \circ f = f \circ S_H$.*

Proposição 1.9 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então são verdadeiras as afirmações.*

(i) $S(hg) = S(g)S(h)$, *para quaisquer* $g, h \in H$.

(ii) $S(1_H) = 1_H$.

(iii) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$, *para qualquer* $h \in H$.

(v) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$, *para todo* $h \in H$.

As propriedades (i) e (ii) significam que S é um antimorfismo de álgebras e (iii) e (iv) significam que S é um antimorfismo de coálgebras.

Observação 1.5 Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então a biálgebra $H^{op,cop}$ é uma álgebra de Hopf com antípoda S. Além disso, se S é bijetora, então as biálgebras H^{op} e H^{cop} são álgebras de Hopf com antípoda S^{-1}.

Esse último fato acima é bastante usado em cálculos nos Capítulos 3 e 4.

Definição 1.23 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Um k-subespaço vetorial W de H é chamado uma subálgebra de Hopf de H se W é uma subálgebra e uma subcoálgebra de H e se $S(W) \subseteq W$.*

Observamos que se W é uma subálgebra de Hopf então W é uma álgebra de Hopf com a estrutura induzida de H.

1.4 Ações e coações de biálgebras

Essa seção é fundamental, principalmente, para alguns exemplos do Capítulo 2 e também para cálculos no Capítulo 4. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar [5], [13] e [14]. Para o desenvolvimento dessa seção, pedimos que H seja uma biálgebra. Em capítulos posteriores, porém, há interesse em que H seja uma álgebra de Hopf.

Definição 1.24 *Seja A uma álgebra.*

(i) *Dizemos que A é um H-módulo álgebra à esquerda se A é um H-módulo à esquerda tal que*

$$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \quad e \quad h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A,$$

para quaisquer $h \in H$, $a, b \in A$.

(ii) *Dizemos que A é um H-comódulo álgebra à esquerda se A é um H-comódulo à esquerda tal que*

$$(ab)_{(-1)} \otimes (ab)_{(0)} = a_{(-1)}b_{(-1)} \otimes a_{(0)}b_{(0)} \quad e \quad \rho(1_A) = 1_H \otimes 1_A,$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Definição 1.25 *Seja C uma coálgebra.*

(i) *Dizemos que C é um H-módulo coálgebra à esquerda se C é um H-módulo à esquerda tal que*

$$(h \cdot c)_1 \otimes (h \cdot c)_2 = h_1 \cdot c_1 \otimes h_2 \cdot c_2 \quad e \quad \varepsilon(h \cdot c) = \varepsilon(h)\varepsilon(c),$$

para quaisquer $h \in H$, $c \in C$.

(ii) *Dizemos que C é um H-comódulo coálgebra à esquerda se C é um H-comódulo à esquerda tal que*

$$(c_1)_{(-1)}(c_2)_{(-1)} \otimes (c_1)_{(0)} \otimes (c_2)_{(0)} = c_{(-1)} \otimes (c_{(0)})_1 \otimes (c_{(0)})_2$$

$$e \quad c_{(-1)}\varepsilon(c_{(0)}) = \varepsilon(c)1_H,$$

para todo $c \in C$.

As definições acima podem ser feitas à direita. Nesse trabalho, consideramos tais estruturas sempre à esquerda.

Seja A um H-módulo álgebra. Definimos $A\#H := A \otimes H$ como k-espaço vetorial e a seguinte multiplicação

$$(a\#h)(b\#l) = a(h_1 \cdot b)\#h_2 l, \quad \forall h, l \in H, \forall a, b \in A.$$

Proposição 1.10 ([5], Proposition 6.1.7) *$A\#H$ é uma álgebra com a multiplicação definida acima e com unidade $1_A\#1_H$, chamada produto smash de A e H.*

Agora, seja C um H-comódulo coálgebra. Definimos $C\#H := C \otimes H$ como k-espaço vetorial e

$$\Delta(c\#h) = c_1\#(c_2)_{(-1)}h_1 \otimes (c_2)_{(0)}\#h_2 \quad \text{e} \quad \varepsilon(c\#h) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_H(h),$$

para quaisquer $c \in C$, $h \in H$.

Proposição 1.11 *$C\#H$ é uma coálgebra com a comultiplicação e a counidade definidas acima, chamada coproduto smash.*

Demonstração: Mostremos que Δ é coassociativa. Sejam $c \in C$ e $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
&(I \otimes \Delta)\Delta(c\#h) = (I \otimes \Delta)(c_1\#(c_2)_{(-1)}h_1 \otimes (c_2)_{(0)}\#h_2)\\
&= c_1\#(c_2)_{(-1)}h_1 \otimes \Delta((c_2)_{(0)}\#h_2)\\
&= c_1\#(c_2)_{(-1)}h_1 \otimes ((c_2)_{(0)})_1\#(((c_2)_{(0)})_2)_{(-1)}h_{2_1} \otimes (((c_2)_{(0)})_2)_{(0)}h_{2_2}\\
&= c_1\#(c_{2_1})_{(-1)}(c_{2_2})_{(-1)}h_1 \otimes (c_{2_1})_{(0)}\#((c_{2_2})_{(0)})_{(-1)}h_2 \otimes ((c_{2_2})_{(0)})_{(0)}h_3\\
&= c_1\#(c_2)_{(-1)}(c_3)_{(-1)}h_1 \otimes (c_2)_{(0)}\#((c_3)_{(0)})_{(-1)}h_2 \otimes ((c_3)_{(0)})_{(0)}h_3\\
&= c_1\#(c_2)_{(-1)}((c_3)_{(-1)}h_1)_1 \otimes (c_2)_{(0)}\#((c_3)_{(-1)}h_1)_2 \otimes (c_3)_{(0)}h_2\\
&= \Delta(c_1\#(c_2)_{(-1)}h_1) \otimes (c_2)_{(0)}h_2 = (\Delta \otimes I)\Delta(c\#h).
\end{aligned}$$

Mostremos que ε é counidade. Sejam $c \in C$ e $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes I)\Delta(c\#h) = &\quad (\varepsilon \otimes I)(c_1\#(c_2)_{(-1)}h_1 \otimes (c_2)_{(0)}\#h_2)\\
= &\quad \varepsilon_C(c_1)\varepsilon_H((c_2)_{(-1)}h_1)(c_2)_{(0)}\#h_2\\
= &\quad \varepsilon_C(c_1)\varepsilon_H((c_2)_{(-1)})(c_2)_{(0)}\#\varepsilon_H(h_1)h_2\\
= &\quad \varepsilon_C(c_1)c_2\#h = c\#h
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(I\otimes\varepsilon)\Delta(c\#h) &= (I\otimes\varepsilon)(c_1\#(c_2)_{(-1)}h_1\otimes(c_2)_{(0)}\#h_2)\\
&= c_1\#(c_2)_{(-1)}h_1\varepsilon_C((c_2)_{(0)})\varepsilon_H(h_2)\\
&= c_1\#(c_2)_{(-1)}\varepsilon_C((c_2)_{(0)})h_1\varepsilon_H(h_2)\\
&= c_1\#\varepsilon_C(c_2)1_H h = c\#h.
\end{aligned}
$$

■

1.5 Espaços graduados

Essa seção é de grande utilidade para o desenvolvimento do Capítulo 5, já que a álgebra de Nichols é uma álgebra graduada. Para o desenvolvimento da seção, nos baseamos principalmente em [13].

Definição 1.26 *Seja G um conjunto não vazio. Dizemos que um k-espaço vetorial V é G-graduado se $V=\oplus_{g\in G}V(g)$, em que $V(g)$ é um k-subespaço vetorial de V, para cada $g\in G$. Dizemos que um k-subespaço vetorial $W\subseteq V$ é um k-subespaço G-graduado de V se $W=\oplus_{g\in G}(W\cap V(g))$.*

Quando $G=\mathbb{N}$, omitimos o G e dizemos apenas que V é um k-espaço vetorial graduado. Pensamos que é o que vai ocorrer na maioria das vezes.

Proposição 1.12 *Sejam $V=\oplus_{n\geq 0}V(n)$ um k-espaço vetorial graduado e $\{W_i\}_{i\in I}$ uma família de k-subespaços vetoriais graduados de V. Então $W=\sum_{i\in I}W_i$ é um k-subespaço vetorial graduado de V.*

Demonstração: É claro que W é um k-subespaço vetorial de V. Mostremos que $W=\oplus_{n\geq 0}(W\cap V(n))$. Para isso, mostremos primeiramente que, fixado $m\geq 0$,

$$W\cap V(m)=\sum_{i\in I}(W_i\cap V(m)).$$

Seja $x\in\sum_{i\in I}(W_i\cap V(m))$. Então $x=x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}$, com $x_{i_j}\in W_{i_j}\cap V(m)$ e $i_j\in I$, para todo $j\in\{1,\cdots,k\}$. Como $V(m)$ é k-subespaço vetorial, segue que $x\in V(m)$. Logo, $x\in W\cap V(m)$.

Seja $x\in W\cap V(m)$. Então $x=x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}$, com $x_{i_j}\in W_{i_j}$, $i_j\in I$, para todo $j\in\{1,\cdots,k\}$, e $x\in V(m)$. Como cada W_{i_j} é um k-subespaço graduado de V, segue que $W_{i_j}=\oplus_{n\geq 0}(W_{i_j}\cap V(n))$. Assim, podemos escrever $x_{i_j}=\sum_{n\geq 0}y_n^j$, com $y_n^j\in W_{i_j}\cap V(n)$. Daí,

$$x=\sum_{n\geq 0}y_n^1+\cdots+\sum_{n\geq 0}y_n^k=\sum_{n\geq 0}(y_n^1+\cdots+y_n^k).$$

Como $x \in V(m)$, segue que $x = y_m^1 + \cdots + y_m^k \in \sum_{i \in I}(W_i \cap V(m))$. Logo,

$$W = \sum_{i \in I} W_i = \sum_{i \in I}(\oplus_{n \geq 0}(W_i \cap V(n))) =$$

$$\oplus_{n \geq 0}\left(\sum_{i \in I}(W_i \cap V(n))\right) = \oplus_{n \geq 0}(W \cap V(n)).$$

Portanto, W é um k-subespaço vetorial graduado de V. ■

Definição 1.27 *Sejam $V = \oplus_{g \in G} V(g)$ e $W = \oplus_{g \in G} W(g)$ k-subespaços vetoriais G-graduados. Dizemos que um morfismo k-linear $f : V \to W$ é um morfismo G-graduado se $f(V(g)) \subseteq W(g)$ para todo $g \in G$.*

Definição 1.28 *Seja A uma álgebra. Dizemos que A é uma álgebra graduada se $A = \oplus_{n \geq 0} A(n)$ é um k-espaço vetorial graduado, $A(n)A(m) \subseteq A(n+m)$ para quaisquer $n, m \geq 0$ e $1 \in A(0)$.*

Definição 1.29 *Seja C uma coálgebra. Dizemos que C é uma coálgebra graduada se $C = \oplus_{n \geq 0} C(n)$ é um k-espaço vetorial graduado, $\Delta(C(n)) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C(n-i) \otimes C(i)$, para todo $n \geq 0$, e $\varepsilon(C(n)) = 0$, para todo $n \neq 0$.*

Um *morfismo de álgebras graduadas* (respectivamente *coálgebras graduadas*) é um morfismo de álgebras (respectivamente coálgebras) que é também um morfismo graduado.

Além disso, ideais à esquerda (respectivamente ideais à direita, ideais) graduados de uma álgebra graduada são k-subespaços vetoriais graduados com suas respectivas estruturas.

Também, coideais à esquerda (respectivamente coideais à direita, coideais, subcoálgebras) graduados de uma coálgebra graduada são k-subespaços vetoriais graduados com suas respectivas estruturas.

Uma *biálgebra* (respectivamente *álgebra de Hopf*) *graduada* é um k-espaço vetorial graduado cuja graduação o torna uma álgebra graduada e uma coálgebra graduada.

Proposição 1.13 *Sejam $A = \oplus_{n \geq 0} A(n)$ uma álgebra graduada e V um k-subespaço vetorial graduado de A. Então $I = < V >$, o ideal gerado por V, é um ideal graduado de A.*

Demonstração: Mostremos que $I = \oplus_{n \geq 0}(I \cap A(n))$. É claro que $\oplus_{n \geq 0}(I \cap A(n)) \subseteq I$. Seja $x \in I$. Então $x = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i b_i$ para algum

$m \geq 0$, em que $a_i, b_i \in A$ e $v_i \in V$ para todo $i \in \{0, \cdots, m\}$. Como A e V são graduados, podemos escrever para cada i

$$a_i = \sum_{n \geq 0} a_i^n, \quad b_i = \sum_{n \geq 0} b_i^n \text{ e } v_i = \sum_{n \geq 0} v_i^n,$$

com $a_i^n, b_i^n \in A(n)$ e $v_i^n \in V \cap A(n)$. Assim,

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i b_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n \geq 0} a_i^n \sum_{n \geq 0} v_i^n \sum_{n \geq 0} b_i^n \in \oplus_{n \geq 0}(I \cap A(n)).$$

■

Proposição 1.14 *Sejam* $V = \oplus_{n \geq 0} V(n)$ *um* k*-espaço vetorial graduado e* I *um* k*-subespaço vetorial graduado de* V*. Então* $\dfrac{V}{I}$ *é um* k*-espaço vetorial graduado, em que* $\dfrac{V}{I}(n) = V(n) + I$ *é isomorfo a* $\dfrac{V(n)}{V(n) \cap I}$ *como* k*-espaço vetorial, para todo* $n \geq 0$*, e a projeção canônica* $\pi : V \to \dfrac{V}{I}$ *é um morfismo graduado. Além disso, se* V *é uma álgebra (respectivamente uma coálgebra) graduada e* I *é um ideal (respectivamente um coideal) graduado, então* $\dfrac{V}{I}$ *é uma álgebra (respectivamente uma coálgebra) graduada.*

Demonstração: Definimos $f' : V \to \oplus_{n \geq 0} \left(\dfrac{V(n)}{V(n) \cap I} \right)$ por

$$f'\left(\sum_{n \geq 0} v_n \right) = \sum_{n \geq 0} \overline{v_n} = \sum_{n \geq 0} (v_n + V(n) \cap I),$$

que é claramente k-linear e sobrejetora. Mostremos que $ker(f') = I$. Temos que

$$\sum_{n \geq 0} v_n \in ker(f') \Leftrightarrow f'\left(\sum_{n \geq 0} v_n \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} (v_n + V(n) \cap I) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(v_n + V(n) \cap I) = 0, \forall n \geq 0 \Leftrightarrow v_n \in V(n) \cap I, \forall n \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} v_n \in I.$$

Portanto, $f : \dfrac{V}{I} \to \oplus_{n\geq 0}\left(\dfrac{V(n)}{V(n)\cap I}\right)$, dada por

$$f\left(\sum_{n\geq 0} v_n + I\right) = \sum_{n\geq 0}(v_n + V(n)\cap I)$$

é um isomorfismo k-linear. Assim,

$$\frac{V}{I} = f^{-1}\left(\oplus_{n\geq 0}\left(\frac{V(n)}{V(n)\cap I}\right)\right) = \oplus_{n\geq 0} f^{-1}\left(\frac{V(n)}{V(n)\cap I}\right).$$

Logo, $\dfrac{V}{I}$ é graduado.

Agora, para cada $m \geq 0$, vejamos que

$$f^{-1}\left(\frac{V(m)}{V(m)\cap I}\right) = V(m) + I,$$

em que $V(m) + I = \{v_m + I : v_m \in V(m)\}$ é um subconjunto de $\dfrac{V}{I}$.

Seja $x \in f^{-1}\left(\dfrac{V(m)}{V(m)\cap I}\right)$. Então $f(x) \in \dfrac{V(m)}{V(m)\cap I}$. Escrevemos $x = \sum_{n\geq 0} x_n + I$. Assim,

$$\sum_{n\geq 0} x_n + V(n)\cap I = f\left(\sum_{n\geq 0} x_n + I\right) = f(x) \in \frac{V(m)}{V(m)\cap I}.$$

Logo, $f(x) = x_m + I \cap V(m) = f(x_m + I)$, donde $x = x_m + I \in V(m) + I$.

Por outro lado, se $x = x_m + I \in V(m) + I$ então $f(x) = x_m + V(m)\cap I \in \dfrac{V(m)}{V(m)\cap I}$. Logo, $x \in f^{-1}\left(\dfrac{V(m)}{V(m)\cap I}\right)$.

Dado $v_n \in V(n)$, é claro que $\pi(v_n) = v_n + I \in \dfrac{V}{I}(n)$. Portanto π é um morfismo graduado.

Suponhamos que V seja uma álgebra graduada. Sejam $v \in \dfrac{V}{I}(n)$ e $w \in \dfrac{V}{I}(m)$. Então $v = v_n + I$ e $w = w_m + I$, com $v_n \in V(n)$ e $w_m \in V(m)$. Por ser V uma álgebra graduada, $v_n w_m \in V(n+m)$. Assim,

$$vw = (v_n + I)(w_m + I) = v_n w_m + I \in V(n+m) + I = \frac{V}{I}(n+m).$$

Também, $1_{\frac{V}{I}} = 1_V + I \in V(0) + I = \frac{V}{I}(0)$. Portanto, $\frac{V}{I}$ é álgebra graduada.

Suponhamos agora que V seja uma coálgebra graduada. Seja $v \in \frac{V}{I}(n)$. Então $v = v_n + I$, com $v_n \in V(n)$. Assim,

$$\Delta(v) = \Delta(v_n + I) \in \sum_{i=1}^{n}(V(n-i)+I)\otimes(V(i)+I) = \sum_{i=1}^{n}\frac{V}{I}(n-i)\otimes\frac{V}{I}(i),$$

pois $\Delta(v_n) \in \sum_{i=1}^{n} V(n-i) \otimes V(i)$. Também, $\varepsilon(v) = \varepsilon(v_n) = 0$, se $n \neq 0$. Portanto, $\frac{V}{I}$ é uma coálgebra graduada. ■

Proposição 1.15 *Sejam $V = \oplus_{n\geq 0}V(n)$, $W = \oplus_{n\geq 0}W(n)$ k-espaços vetoriais graduados e $f : V \to W$ um morfismo graduado. Então $ker(f)$ é um k-subespaço vetorial graduado de V e $Im(f)$ é um k-subespaço vetorial graduado de W. Além disso, $\frac{V}{ker(f)} \cong Im(f)$ como k-espaços vetoriais graduados.*

Demonstração: Mostremos que $ker(f) = \oplus_{n\geq 0}(ker(f) \cap V(n))$. Seja $v \in ker(f)$. Então $f(v) = 0$. Podemos escrever $v = v_0 + v_1 + \cdots + v_k$, com $v_i \in V(i)$, para todo $i \in \{0, \cdots, k\}$.

Assim, $0 = f(v) = f(v_0) + \cdots + f(v_k)$ e isso implica em $f(v_i) = 0$, para todo $i \in \{0, \cdots, k\}$, pois $f(v_i) \in W(i)$ e W é graduado. Logo, $x \in \oplus_{n\geq 0}(ker(f) \cap V(n))$.

É claro que $Im(f) = \oplus_{n\geq 0}(Im(f) \cap W(n))$, pois dado $f(v) \in Im(f)$, podemos escrever $v = v_0 + v_1 + \cdots + v_k$ com $v_i \in V(i)$, para todo $i \in \{0, \cdots, k\}$. Como f é morfismo graduado, $f(v_i) \in W_i$ e portanto, $f(v) = f(v_0) + \cdots + f(v_k) \in \oplus_{n\geq 0}(Im(f) \cap W(n))$. A outra inclusão é óbvia.

Consideremos o isomorfismo k-linear $\overline{f} : \frac{V}{ker(f)} \to Im(f)$ e mostremos que $\overline{f}$ é um morfismo graduado. Seja $v \in \frac{V}{ker(f)}(n)$. Então $v = v_n + ker(f)$ com $v_n \in V(n)$. Daí, $\overline{f}(v_n + ker(f)) = f(v_n) \in Im(f)(n)$, pois f é um morfismo graduado. ■

Proposição 1.16 *Seja $R = \oplus_{n\geq 0}R(n)$ uma biálgebra graduada com $R(0) = k1$. Então $R(1) \subseteq P(R)$.*

Demonstração: Seja $r \in R(1)$. Então $\Delta(r) \in R(1) \otimes R(0) + R(0) \otimes R(1)$. Assim, podemos escrever $\Delta(r) = \sum_{j=1}^{m} d_j \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes c_i$ com

$c_i, d_j \in R(1)$, para quaisquer $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $j \in \{1, \cdots, m\}$. Daí,

$$r = (I \otimes \varepsilon)\Delta(r) = \sum_{j=1}^{m} d_j \varepsilon(1) + \sum_{i=1}^{n} 1\varepsilon(c_i) = \sum_{j=1}^{m} d_j$$

e

$$r = (\varepsilon \otimes I)\Delta(r) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon(d_j)1 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(1)c_i = \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Logo, $r \otimes 1 + 1 \otimes r = \sum_{j=1}^{m} d_j \otimes 1 + 1 \otimes \sum_{i=1}^{n} c_i = \Delta(r)$. Portanto, $r \in P(R)$. ■

1.6 Produto *wedge* e filtração coradical

Essa seção é feita basicamente para provarmos os Teoremas 1.6 e 1.7, que são fundamentais para o desenvolvimento do Capítulo 5. Para fazê-la nos baseamos principalmente em [4], [5], [11] e [13].

Definição 1.30 *Seja C uma coálgebra. Sejam U e V k-subespaços vetoriais de C. Definimos o produto wedge de U por V como*

$$U \wedge V = \Delta^{-1}(U \otimes C + C \otimes V).$$

Sendo U e V k-subespaços vetoriais de C existem $\pi_U : C \to \dfrac{C}{U}$ e $\pi_V : C \to \dfrac{C}{V}$ as projeções canônicas cujos núcleos são U e V, respectivamente. Consideremos $\pi_{U,V}$ a composição abaixo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[rr, bend left, "\pi_{U,V}"] & C \otimes C \arrow[r, "\pi_U \otimes \pi_V"'] & \dfrac{C}{U} \otimes \dfrac{C}{V}. \end{tikzcd}$$

Para provarmos algumas propriedades do produto *wedge* precisamos dos dois resultados abaixo, que enunciamos como lemas, os mesmos podem ser encontrados em ([5], pp. 24 e 25).

Lema 1.1 *Sejam V e W espaços vetoriais, $X \subseteq V$ e $Y \subseteq W$ k-subespaços vetoriais. Então $(X \otimes Y) = (V \otimes Y) \cap (X \otimes W)$.*

Lema 1.2 *Sejam $f : V_1 \to V_2$ e $g : W_1 \to W_2$ funções k-lineares. Então $ker(f \otimes g) = ker(f) \otimes W_1 + V_1 \otimes ker(g)$.*

Proposição 1.17 *Sejam C uma coálgebra, U, V e W k-subespaços vetoriais de C. São verdadeiras as afirmações abaixo.*

(i) *$U \wedge V = ker(\pi_{U,V})$, em que $\pi_{U,V}$ é a composição acima.*

(ii) *$(U \wedge V) \wedge W = U \wedge (V \wedge W)$.*

(iii) *$U \wedge V = (U^{\perp}V^{\perp})^{\perp}$.*

(iv) *Se U é uma subcoálgebra de C então $U \subseteq U \wedge V$ e $U \subseteq V \wedge U$.*

(v) *Se U e V são subcoálgebras de C então $U \wedge V$ é uma subcoálgebra de C que contém U e V.*

Demonstração: (i) Seja $c \in U \wedge V$. Então podemos escrever $\Delta(c) = \sum_i u_i \otimes c_i + \sum_j d_j \otimes v_j$ com $u_i \in U$ e $v_j \in V$. Daí, $\pi_{U,V}(c) = \sum_i \pi_U(u_i) \otimes \pi_V(c_i) + \sum_j \pi_U(d_j) \otimes \pi_V(v_j) = 0$. Logo $c \in ker(\pi_{U,V})$. Portanto, $U \wedge V \subseteq ker(\pi_{U,V})$.

Agora seja $c \in ker(\pi_{U,V})$. Então $0 = \pi_{U,V}(c) = (\pi_U \otimes \pi_V)\Delta(c)$. Assim, $\Delta(c) \in ker(\pi_U \otimes \pi_V)$. Mas, pelo Lema 1.2, $ker(\pi_U \otimes \pi_V) = ker(\pi_U) \otimes C + C \otimes ker(\pi_V)$. Como $ker(\pi_U) = U$ e $ker(\pi_V) = V$, segue que $\Delta(c) \in U \otimes C + C \otimes V$. Logo, $c \in U \wedge V$. Portanto $ker(\pi_{U,V}) \subseteq U \wedge V$.

(ii) Como $U \wedge V = ker(\pi_{U,V})$, a função k-linear $\phi_{U,V} : \dfrac{C}{U \wedge V} \to \dfrac{C}{U} \otimes \dfrac{C}{V}$ dada por $\phi_{U,V}(c + U \wedge V) = \pi_{U,V}(c)$ está bem definida e é injetora. Sendo $\phi_{U,V}$ injetora, segue que $ker(\pi_{U \wedge V,W}) = ker((\phi_{U,V} \otimes I_{\frac{C}{W}})\pi_{U \wedge V,W})$. Além disso, $(\phi_{U,V} \otimes I_{\frac{C}{W}})\pi_{U \wedge V,W} = (\pi_U \otimes \pi_V \otimes \pi_W)\Delta_2$. De fato, seja $c \in C$. Então

$$\begin{aligned}
(\phi_{U,V} \otimes I_{\frac{C}{W}})\pi_{U \wedge V,W}(c) = &\quad (\phi_{U,V} \otimes I_{\frac{C}{W}})((c_1 + U \wedge V) \otimes (c_2 + W)) \\
= &\quad \pi_{U,V}(c_1) \otimes (c_2 + W) \\
= &\quad (c_1 + U) \otimes (c_2 + V) \otimes (c_3 + W) \\
= &\quad (\pi_U \otimes \pi_V \otimes \pi_W)\Delta_2(c).
\end{aligned}$$

Assim, $(U \wedge V) \wedge W = ker(\pi_{U \wedge V,W}) = ker((\pi_U \otimes \pi_V \otimes \pi_W)\Delta_2)$. Similarmente mostra-se que $U \wedge (V \wedge W) = ker((\pi_U \otimes \pi_V \otimes \pi_W)\Delta_2)$. Portanto, $(U \wedge V) \wedge W = U \wedge (V \wedge W)$.

(iii) Seja $c \in U \wedge V$. Então podemos escrever $\Delta(c) = \sum_i u_i \otimes c_i + \sum_j d_j \otimes v_j$ com $u_i \in U$ e $v_j \in V$. Mostremos que $c \in (U^{\perp}V^{\perp})^{\perp}$. Sejam $f \in U^{\perp}$ e $g \in V^{\perp}$. Então $(f * g)(c) = \sum_i f(u_i)g(c_i) + \sum_j f(d_j)g(v_j) = 0$. Portanto $U \wedge V \subseteq (U^{\perp}V^{\perp})^{\perp}$.

Agora seja $c \in (U^\perp V^\perp)^\perp$. Podemos escrever $\Delta(c) = \sum_i u_i \otimes c_i + \sum_j d_j \otimes y_j$, em que $\{u_i\} \cup \{d_j\}$ é um conjunto linearmente independente, $u_i \in U$ e d_j pertence ao complemento de U como k-subespaço vetorial de C.

Fixemos j_0. Mostremos que $y_{j_0} \in V$. Consideremos $f \in C^*$ tal que $f(U) = 0$, $f(d_{j_0}) = 1$ e $f(d_j) = 0$ para $j \neq j_0$. Seja $g \in V^\perp$. Como $f \in U^\perp$, $(f * g)(c) = 0$.

Por outro lado, $(f*g)(c) = \sum_i f(u_i)g(c_i) + \sum_j f(d_j)g(y_j) = g(y_{j_0})$. Assim, $g(y_{j_0}) = 0$, donde $y_{j_0} \in (V^\perp)^\perp = V$. Logo, $\Delta(c) \in U \otimes C + C \otimes V$. Portanto, $(U^\perp V^\perp)^\perp \subseteq U \wedge V$.

(iv) Pelo Lema 1.1, sabemos que $U \otimes U = (C \otimes U) \cap (U \otimes C)$. Assim, se $c \in U$ então $\Delta(c) \in U \otimes U = (C \otimes U) \cap (U \otimes C) \subseteq U \otimes C \subseteq U \otimes C + C \otimes V$. Logo, $c \in U \wedge V$. Portanto $U \subseteq U \wedge V$. Analogamente, mostra-se que $U \subseteq V \wedge U$.

(v) Sendo U e V subcoálgebras de C, segue que $U^\perp$ e $V^\perp$ são ideais de C^*. Assim, $U^\perp V^\perp$ é ideal de C^*, donde $(U^\perp V^\perp)^\perp$ é uma subcoálgebra de C. Mas, por (iii), $U \wedge V = (U^\perp V^\perp)^\perp$. Logo, $U \wedge V$ é subcoálgebra de C. Além disso, pelo item anterior, $U \subseteq U \wedge V$ e $V \subseteq U \wedge V$. ■

Da proposição acima concluímos que o produto *wedge* é associativo. Assim, podemos definir para quaisquer $n > 1$ e $U_1, \cdots, U_n$ k-subespaços de uma coálgebra C

$$U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_n := (U_1 \wedge U_2 \wedge \cdots \wedge U_{n-1}) \wedge U_n.$$

Além disso, fixado um k-subespaço U, podemos definir também $\wedge^0 U = \{0\}$, $\wedge^1 U = U$ e $\wedge^n U = (\wedge^{n-1} U) \wedge U$, para $n > 1$.

Se D é uma subcoálgebra de C e $U, V \subseteq D$ são k-subespaços vetoriais, denotamos $U \wedge_D V = \Delta^{-1}(U \otimes D + D \otimes V)$.

Lema 1.3 ([13], Exercise 2.4.1) *Sejam W, W' k-espaços vetoriais, U, V k-subespaços de W e U', V' k-subespaços de W'. Então*

$$(U \otimes W' + W \otimes U') \cap (V \otimes V') = (U \cap V) \otimes V' + V \otimes (U' \cap V').$$

Proposição 1.18 *Sejam C uma coálgebra, U e V k-subespaços vetoriais de C. São verdadeiras as afirmações abaixo.*

(i) *$(U \wedge V) \cap D = (U \cap D) \wedge_D (V \cap D)$, para toda subcoálgebra D de C.*

(ii) *Se U e V são subcoálgebras de C e S é uma subcoálgebra simples de C tal que $S \subseteq U \wedge V$, então $S \subseteq U$ ou $S \subseteq V$.*

Demonstração: (i) Seja D uma subcoálgebra de C. Então $D = \Delta^{-1}(D \otimes D)$. De fato, se $c \in C$ é tal que $\Delta(c) \in D \otimes D$, então $c = \varepsilon(c_1)c_2 \in D$.

Daí, usando o Lema 1.3, temos que

$$\begin{aligned}(U \wedge V) \cap D = & \ \Delta^{-1}(U \otimes C + C \otimes V) \cap \Delta^{-1}(D \otimes D) \\ = & \ \Delta^{-1}((U \otimes C + C \otimes V) \cap (D \otimes D)) \\ = & \ \Delta^{-1}((U \cap D) \otimes D + D \otimes (V \cap D)) \\ = & \ (U \cap D) \wedge_D (V \cap D).\end{aligned}$$

(ii) Como $S \subseteq U \wedge V$, então $S = S \cap (U \wedge V)$. Por (i), $S \cap (U \wedge V) = (S \cap U) \wedge (S \cap V)$. Assim, $(S \cap U) \wedge (S \cap V) = S \neq 0$. Daí, $S \cap U \neq 0$ ou $S \cap V \neq 0$, pois se ambos fossem zero teríamos $0 \wedge 0 = S$, o que é um absurdo pois $S \neq 0$ e $0 \wedge 0 = \Delta^{-1}(0 \otimes C + C \otimes 0) = \Delta^{-1}(0) = 0$ (Δ é injetora).

Se $S \cap U \neq 0$, como $S \cap U \subseteq S$ e S é simples, segue que $S \cap U = S$, donde $S \subseteq U$. Analogamente, se $S \cap V \neq 0$ então $S \subseteq V$. ■

Definição 1.31 *Seja C uma coálgebra. Uma família de k-subespaços vetoriais $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ de C que satisfaz $C = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$, $V_n \subseteq V_{n+1}$ e $\Delta(V_n) \subseteq \sum_{l=0}^{n} V_{n-l} \otimes V_l$, para todo $n \geq 0$, é dita uma filtração de C.*

Observamos que cada termo V_n de uma filtração $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ de C é uma subcoálgebra de C, pois

$$\Delta(V_n) \subseteq \sum_{l=0}^{n} V_{n-l} \otimes V_l \subseteq V_n \otimes V_n.$$

Lema 1.4 *Sejam C uma coálgebra e $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma filtração de C. Então, para todo $n \geq 1$, $V_n \subseteq V_{n-1} \wedge V_0$.*

Demonstração: Seja $v \in V_n$. Então

$$\Delta(v) \subseteq \sum_{l=0}^{n} V_{n-l} \otimes V_l = \sum_{l=1}^{n} V_{n-l} \otimes V_l + V_n \otimes V_0 \subseteq V_{n-1} \otimes C + C \otimes V_0.$$

Logo, $v \in V_{n-1} \wedge V_0$. Portanto, $V_n \subseteq V_{n-1} \wedge V_0$. ■

Proposição 1.19 *Sejam C uma coálgebra e $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ uma filtração de C. Então toda subcoálgebra simples de C está contida em V_0 (e portanto, $C_0 \subseteq V_0$).*

Demonstração: Seja S uma subcoálgebra simples de C. Então, pelo Corolário 1.1, S possui dimensão finita. Assim, existe $n \geq 0$ tal que $S \subseteq V_n$. Mostremos que $n = 0$.

Suponhamos que $n \geq 1$. Então, pelo lema acima, $V_n \subseteq V_{n-1} \wedge V_0$. Como $S \subseteq V_n$, segue que $S \subseteq V_{n-1} \wedge V_0$. Daí, pelo item (ii) da Proposição 1.18, $S \subseteq V_{n-1}$ ou $S \subseteq V_0$. Mas supomos que $n \geq 1$, assim $S \subseteq V_{n-1}$. Repetindo esse processo n vezes, concluímos que $S \subseteq V_0$. ∎

Corolário 1.2 *Seja $C = \oplus_{n \geq 0} C(n)$ uma coálgebra graduada. Então toda subcoálgebra simples de C está contida em $C(0)$ (e portanto, $C_0 \subseteq C(0)$).*

Demonstração: Para cada $n \geq 0$, seja $V_n = C(0) \oplus \cdots \oplus C(n)$. Mostremos que $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma filtração de C. De fato, não é difícil ver que $V_n \subseteq V_{n+1}$ para todo $n \geq 0$ e que $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = C$.

Mostremos por indução sobre n que $\Delta(V_n) \subseteq \sum_{l=0}^{n} V_{n-l} \otimes V_l$. Temos que $\Delta(V_0) \subseteq V_0 \otimes V_0$, pois $V_0 = C(0)$ e C é uma coálgebra graduada. Suponhamos que vale para n e provemos que vale para $n+1$. Temos

$$\begin{aligned}
\Delta(V_{n+1}) = \; & \Delta(V_n \oplus C(n+1)) \subseteq \Delta(V_n) + \Delta(C(n+1)) \\
\subseteq \; & \sum_{l=0}^{n} V_{n-l} \otimes V_l + \sum_{j=0}^{n} C(n+1-j) \otimes C(j) \\
\subseteq \; & \sum_{l=0}^{n} V_{n-l+1} \otimes V_l + \sum_{j=0}^{n} V_{n+1-j} \otimes V_j \\
\subseteq \; & \sum_{l=0}^{n} V_{n+1-l} \otimes V_l.
\end{aligned}$$

Assim, se S é uma subcoálgebra simples de C então $S \subseteq V_0 = C(0)$, pela proposição acima. ∎

Vimos no Lema 1.4 que se $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ é uma filtração de uma coálgebra C então $V_n \subseteq V_{n-1} \wedge V_0$, para todo $n \geq 1$. Isso nos sugere a seguinte construção.

Sejam C uma coálgebra e D uma subcoálgebra de C. Definimos $D^{(0)} = D$, $D^{(n)} = D^{(n-1)} \wedge D$ para $n \geq 1$ e $D^{(\infty)} = \bigcup_{n=0}^{\infty} D^{(n)}$. Na proposição abaixo vemos, entre outras coisas, que $D^{(\infty)}$ é uma subcoálgebra de C. Para isso precisamos do lema abaixo (veja [13], Exercise 4.1.1).

Lema 1.5 *Sejam V um espaço vetorial e $V_0, \cdots, V_n$, $n \geq 1$, k-subespaços vetoriais de V que satisfazem $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$. Então $\bigcap_{l=0}^{n-1}(V_{n-1-l} \otimes V + V \otimes V_l) = \sum_{l=0}^{n} V_{n-l} \otimes V_l$.*

Proposição 1.20 *Nas condições acima, $\{D^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ é uma filtração para a coálgebra $D^{(\infty)}$.*

Demonstração: Primeiramente mostremos por indução sobre n que $D^{(n)} \subseteq D^{(n+1)}$, para todo $n \geq 0$. Para $n = 0$, segue do item (iv) Proposição 1.17, pois $D^{(0)} = D \subseteq D \wedge D = D^{(0)} \wedge D = D^{(1)}$, já que D é uma subcoálgebra. Suponhamos que $D^{(n-1)} \subseteq D^{(n)}$ e mostremos que $D^{(n)} \subseteq D^{(n+1)}$. De fato, $D^{(n)} = D^{(n-1)} \wedge D \subseteq D^{(n)} \wedge D = D^{(n+1)}$.

Logo, $D^{(\infty)}$ é um k-subespaço vetorial de D. Não é difícil ver que cada $D^{(n)}$ é uma subcoálgebra usando a Proposição 1.17 (v).

Vejamos que $D^{(\infty)}$ é uma subcoálgebra de C. Seja $c \in D^{(\infty)}$. Então $c \in D^{(i)}$ para algum $i \geq 0$ e como $D^{(i)}$ é uma subcoálgebra, $\Delta(c) \in D^{(i)} \otimes D^{(i)} \subseteq D^{(\infty)} \otimes D^{(\infty)}$. Logo, $D^{(\infty)}$ é uma subcoálgebra de C.

Finalmente, mostremos que $\Delta(D^{(n)}) \subseteq \sum_{l=0}^{n} D^{(n-l)} \otimes D^{(l)}$, para todo $n \geq 0$. Fixemos $n \geq 0$. Notemos que podemos escrever $D^{(n)} = D^{(n-l-1)} \wedge D^{(l)}$, para cada $l \in \{0, \cdots, n-1\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta(D^{(n)}) = & \ \Delta(D^{(n-l-1)} \wedge D^{(l)}) = \Delta(\Delta^{-1}(D^{(n-l-1)} \otimes C + C \otimes D^{(l)})) \\ \subseteq & \ D^{(n-l-1)} \otimes C + C \otimes D^{(l)}. \end{aligned}$$

Como isso ocorre para todo $l \in \{0, \cdots, n-1\}$, temos que $\Delta(D^{(n)}) \subseteq \bigcap_{l=0}^{n-1} D^{(n-l-1)} \otimes C + C \otimes D^{(l)}$. Além disso, como $D^{(n)}$ é uma subcoálgebra, temos

$$\begin{aligned} \Delta(D^{(n)}) \subseteq & \ \left(\bigcap_{l=0}^{n-1} D^{(n-l-1)} \otimes C + C \otimes D^{(l)}\right) \cap (D^{(n)} \otimes D^{(n)}) \\ = & \ \bigcap_{l=0}^{n-1}(D^{(n-l-1)} \otimes C + C \otimes D^{(l)}) \cap (D^{(n)} \otimes D^{(n)}). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.3, segue que

$$\begin{aligned} \Delta(D^{(n)}) \subseteq & \ \bigcap_{l=0}^{n-1}((D^{(n-l-1)} \cap D^{(n)}) \otimes D^{(n)} + D^{(n)} \otimes (D^{(l)} \cap D^{(n)})) \\ = & \ \bigcap_{l=0}^{n-1}(D^{(n-l-1)} \otimes D^{(n)} + D^{(n)} \otimes D^{(l)}). \end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 1.5, concluímos que

$$\Delta(D^{(n)}) \subseteq \sum_{l=0}^{n} D^{(n-l)} \otimes D^{(l)}.$$

Portanto $\{D^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ é uma filtração de $D^{(\infty)}$. ∎

Nosso objetivo agora é considerar na construção da filtração acima a subcoálgebra $D = C_0$ da coálgebra C. Mostramos que, nesse caso, $D^{(\infty)} = C$. Daí, a filtração $\{D^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ será uma filtração da coálgebra C. Para isso, precisamos da próxima proposição.

Lembremos que dado um anel R com unidade 1, o radical de Jacobson de R, que denotamos por $J(R)$, é a interseção dos anuladores de todos os R-módulos à esquerda simples. Também, um elemento y em R pertence a $J(R)$ se, e somente se, $1 - xy$ é invertível à esquerda, para todo x em R. Além disso, se R é um anel artiniano, então $J(R)$ é nilpotente. Mais detalhes sobre o radical de Jacobson de um anel, bem como a demonstração desses resultados, podem ser encontrados em [9].

Lembremos também que, fixada uma coálgebra C e um C-comódulo à esquerda M, podemos definir o conjunto $Cend_C(M)$ de todos os morfismos de C-comódulos $f : M \to M$. Tal conjunto possui uma estrutura de álgebra com a composição.

Proposição 1.21 *Sejam C uma coálgebra e $A = Cend_C(C)$. As afirmações abaixo são verdadeiras.*

(i) *A função $\phi : A \to C^*$ dada por $\phi(f) = \varepsilon \circ f$ é um isomorfismo de álgebras.*

(ii) $J(C^*) = C_0^{\perp}$.

Demonstração: (i) Seja $g \in A$. Como g é morfismo de C-comódulos à esquerda temos, para todo $c \in C$, que $g(c)_1 \otimes g(c)_2 = c_1 \otimes g(c_2)$. Aplicando $(I \otimes \varepsilon)$ à igualdade anterior, temos que

$$g(c) = g(c)_1 \otimes \varepsilon(g(c)_2) = c_1 \varepsilon(g(c_2)) = c_1(\varepsilon \circ g)(c_2). \qquad (\star)$$

Sejam $f, g \in A$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned}(\phi(f)\phi(g))(c) = {} & \phi(f)(c_1)\phi(g)(c_2) = (\varepsilon \circ f)(c_1)(\varepsilon \circ g)(c_2) \\ = {} & (\varepsilon \circ f)(c_1(\varepsilon \circ g)(c_2)) \overset{(\star)}{=} (\varepsilon \circ f)(g(c)) \\ = {} & (\varepsilon \circ (f \circ g))(c) = \phi(f \circ g)(c).\end{aligned}$$

Além disso, é fácil ver que $\phi(I_A) = \varepsilon = 1_{C^*}$. Portanto, ϕ é um morfismo de álgebras.

Definimos $\psi : C^* \to A$ por $\psi(u)(c) = u \rightharpoonup c = u(c_2)c_1$, para quaisquer $u \in C^*, c \in C$. Mostremos que ψ está bem definida, ou seja, que dado $u \in C^*$, $\psi(u) \in A$.

Para mostrarmos que $\psi(u)$ é um morfismo de C-comódulos à esquerda é suficiente mostrar que $\psi(u)$ é morfismo de C^*-módulos à direita com ação $c \leftharpoonup c^* = c^*(c_1)c_2$ (veja [5], p. 79). Seja $c \in C^*$. Então

$$\psi(u)(c \leftharpoonup c^*) = u \rightharpoonup (c \leftharpoonup c^*) \overset{(*)}{=} (u \rightharpoonup c) \leftharpoonup c^* = \psi(u)(c) \leftharpoonup c^*,$$

a igualdade $(*)$ segue do fato de que C com essas ações à esquerda e à direita é um (C^*, C^*)-bimódulo.

Agora mostremos que ψ é inversa de ϕ. Sejam $u \in C^*$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned} ((\phi \circ \psi)(u))(c) = & \ \phi(\psi(u))(c) = (\varepsilon \circ \psi(u))(c) = \varepsilon(\psi(u)(c)) \\ = & \ \varepsilon(u \rightharpoonup c) = \varepsilon(u(c_2)c_1) = u(c_2\varepsilon(c_1)) = u(c). \end{aligned}$$

Logo, $(\phi \circ \psi)(u) = u$, para todo $u \in C^*$ e portanto, $\phi \circ \psi = I_{C^*}$. Sejam $f \in A$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(f)(c) = & \ \psi(\phi(f))(c) = \phi(f) \rightharpoonup c = \phi(f)(c_2)c_1 \\ = & \ (\varepsilon \circ f)(c_2)c_1 = c_1(\varepsilon \circ f)(c_2) \overset{(\star)}{=} f(c). \end{aligned}$$

Logo, $(\psi \circ \phi)(f) = f$, para todo $f \in A$. Então $\psi \circ \phi = I_A$. Portanto, ϕ é isomorfismo de álgebras.

(ii) Como C_0 é uma subcoálgebra, segue que C_0 é um coideal à esquerda de C e daí, $(C_0)^{\perp} = Ann_{C^*}(C_0)$ com respeito à ação $c^* \rightharpoonup c = c^*(c_2)c_1$, para quaisquer $c^* \in C^*$ e $c \in C$ (veja [5], Proposition 2.5.3).

Temos que $J(C^*)$ é a interseção dos anuladores de todos os C^*-módulos à esquerda simples e $C_0 = Soc(C^C)$ (veja [5], Proposition 3.1.4), ou seja, C_0 é a soma de todos os C-subcomódulos à direita simples de C que equivale a dizermos que é a soma de todos os C^*-submódulos à esquerda simples de C.

Assim, se $f \in J(C^*)$ então $f \cdot M = 0$, para todo C^*-módulo à esquerda simples M. Dado $c \in C_0$, podemos escrever $c = \sum_i c_i$, com $c_i \in S_i$, onde cada S_i é um C^*-submódulo à esquerda simples de C. Daí, $f \rightharpoonup c = \sum_i f \rightharpoonup c_i = 0$. Logo, $f \in Ann_{C^*}(C_0) = {C^0}^{\perp}$. Portanto, $J(C^*) \subseteq {C_0}^{\perp}$.

Seja $u \in {C_0}^{\perp}$. Denotamos $f = \phi^{-1}(u) \in A$. Assim, $u = \phi(f) = \varepsilon \circ f$ e então $\varepsilon(f(C_0)) = u(C_0) = 0$, pois $u \in {C_0}^{\perp}$. Seja $c \in C_0$. Então $f(c) \overset{(\star)}{=} c_1\varepsilon(f(c_2)) = c_1u(c_2) = 0$, pois $c_2 \in C_0$, ou seja, $f(c) = 0$, para todo $c \in C_0$.

Mostremos que $f \in J(A)$. Seja $h \in A$. Chamemos $g = I_C - hf$ e provemos que g é invertível à esquerda em A, ou seja, que g é injetora.

Seja $c \in ker(g) \cap C_0$. Então $0 = g(c) = (I_C - hf)(c) = c - h(f(c)) = c - h(0) = c$, pois $f(C_0) = 0$. Logo, $ker(g) \cap C_0 = 0$ e como C_0 é essencial em C (veja [5], Corollary 2.4.12), segue que $ker(g) = 0$. Portanto, g é injetora. Assim, $I_C - hf$ é invertível à esquerda para todo $h \in A$ e então $f \in J(A)$.

Como $\phi : A \to C^*$ é um isomorfismo de álgebras segue que $u = \phi(f) \in J(C^*)$. Portanto, ${C_0}^{\perp} \subseteq J(C^*)$. ■

Proposição 1.22 *Sejam C uma coálgebra e $C_n = C_{n-1} \wedge C_0$, para todo $n \geq 1$. Então $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma filtração de C. Tal filtração é chamada filtração coradical de C.*

Demonstração: Pela Proposição 1.20, resta verificarmos que $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Pelo Teorema fundamental das coálgebras, temos que C é a soma de suas subcoálgebras de dimensão finita. Seja D uma subcoálgebra de C de dimensão finita. É suficiente mostrarmos que $D \subseteq C_m$, para algum $m \geq 0$.

Pela proposição acima, temos que $J(D^*) = {D_0}^{\perp}$. Sendo D de dimensão finita, D^* também o é. Portanto, D^* é artiniano. Logo, $J(D^*)$ é nilpotente e assim, existe $m \geq 1$ tal que $J(D^*)^m = 0$, ou seja, $({D_0}^{\perp})^m = 0$.

Mostremos por indução que $\wedge_D^n D_0 = (({D_0}^{\perp})^n)^{\perp}, \forall n \geq 1$. Para $n = 1$ é claro, pois $\wedge_D^1 D_0 = D_0 = (D_0^{\perp})^{\perp} = (({D_0}^{\perp})^1)^{\perp}$. Suponhamos que vale para n e mostremos que vale para $n+1$. Temos $\wedge_D^{n+1} D_0 = \wedge_D^n D_0 \wedge_D D_0 = ((\wedge_D^n D_0)^{\perp} D_0^{\perp})^{\perp} = ((((({D_0}^{\perp})^n)^{\perp})^{\perp} D_0^{\perp})^{\perp} \stackrel{(*)}{=} (({D_0}^{\perp})^n D_0^{\perp})^{\perp} = (({D_0}^{\perp})^{n+1})^{\perp}$, a igualdade $(*)$ é devida ao fato de que D_0 possui dimensão finita.

Em particular, $\wedge_D^m D_0 = (({D_0}^{\perp})^m)^{\perp} = 0^{\perp} = D$. Além disso, como $D \subseteq C$ e $D_0 \subseteq C_0$, segue que $D = \wedge_D^m D_0 \subseteq \wedge^m C_0 = C_{m-1}$. ■

Teorema 1.6 *Sejam C uma coálgebra e A uma álgebra. Então $f \in Hom(C, A)$ é invertível segundo o produto de convolução se, e somente se, $f|_{C_0}$ é invertível em $Hom(C_0, A)$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ De fato, se $(f * g)(c) = \mu\varepsilon(c) = (g * f)(c), \forall c \in C$ então $(f * g)(c) = \mu\varepsilon(c) = (g * f)(c), \forall c \in C_0$.

$(\Leftarrow)$ Seja $g \in Hom(C_0, A)$ o inverso de $f|_{C_0}$. Como C_0 é um k-subespaço vetorial de C, existe um k-subespaço vetorial $D \subseteq C$ tal que $C = C_0 \oplus D$. Seja $g' \in Hom(C, A)$ tal que $g'|_{C_0} = g$ e $g'|_D = 0$. Consideremos $\gamma = \mu\varepsilon - g' * f$. Então, se $c \in C_0$, temos

$$\gamma(c) = \mu\varepsilon(c) - (g' * f)(c) = \mu\varepsilon(c) - (g * f)(c) = 0.$$

Assim, $\gamma|_{C_0} = 0$. Mostremos por indução que $\gamma^{n+1}|_{C_n} = 0$. Suponhamos que $\gamma^n|_{C_{n-1}} = 0$ e provemos que $\gamma^{n+1}|_{C_n} = 0$. Seja $c \in C_n = C_{n-1} \wedge C_0$. Então $\Delta(c) \in C_{n-1} \otimes C + C \otimes C_0$. Assim, podemos escrever $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes c_i + \sum_i c_i' \otimes b_i$, com $c_i, c_i' \in C$, $a_i \in C_{n-1}$ e $b_i \in C_0$. Daí,

$$\gamma^{n+1}(c) = (\gamma^n * \gamma)(c) = \sum_i \gamma^n(a_i)\gamma(c_i) + \sum_i \gamma^n(c_i')\gamma(b_i) = 0,$$

pois $\gamma|_{C_0} = 0 = \gamma^n|_{C_{n-1}}$.

Com isso, podemos definir $\varphi = \sum_{n\geq 0} \gamma^n \in Hom(C, A)$. De fato, dado $c \in C$, como $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$, existe $m \geq 0$ tal que $c \in C_m$. Daí, $\gamma^{m+k}(c) = 0$, para todo $k \geq 1$, pois $\gamma^{m+1}|_{C_m} = 0$. Assim, para cada $c \in C$ existe $m \geq 0$ (que depende de c) tal que $\varphi(c) = \sum_{n=0}^{m} \gamma^n(c)$.

Mostremos que $\varphi * g'$ é um inverso à esquerda de f com respeito ao produto de convolução em $Hom(C, A)$. Seja $c \in C$. Então $c \in C_m = C_{m-1} \wedge C_0$ para algum $m \geq 0$. Assim, podemos escrever $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes c_i + \sum_i c_i' \otimes b_i$, com $c_i, c_i' \in C$, $a_i \in C_{m-1}$ e $b_i \in C_0$. Daí,

$$\begin{aligned}
((\varphi * g') * f)(c) &= (\varphi * (g' * f))(c) = (\varphi * (\mu\varepsilon - \gamma))(c) \\
&= (\varphi * \mu\varepsilon - \varphi * \gamma)(c) = \varphi(c) - (\varphi * \gamma)(c) \\
&= \sum_{n=0}^{m} \gamma^n(c) - \sum_i \varphi(a_i)\gamma(c_i) - \sum_i \varphi(c_i')\gamma(b_i) \\
&= \sum_{n=0}^{m} \gamma^n(c) - \sum_i \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k(a_i)\gamma(c_i) \\
&= \sum_{n=0}^{m} \gamma^n(c) - \sum_{k=0}^{m-1} \sum_i \gamma^k(a_i)\gamma(c_i) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{m} \gamma^n(c) - \sum_{k=0}^{m-1} \gamma^{k+1}(c) = \gamma^0(c) = \mu\varepsilon(c).
\end{aligned}$$

Para a igualdade $(*)$ notemos que, para cada $k \in \{0, \cdots, m-1\}$, temos

$$\gamma^{k+1}(c) = (\gamma^k * \gamma)(c) = \sum_i \gamma^k(a_i)\gamma(c_i) + \sum_i \gamma^k(c_i')\gamma(b_i) = \sum_i \gamma^k(a_i)\gamma(c_i).$$

Analogamente, usando que $\beta = \mu\varepsilon - f * g'$, a função $\psi = \sum_{n\geq 0} \beta^n \in Hom(C, A)$ está bem definida . Assim, mostra-se que $g' * \psi$ é um inverso à direita de f. Portanto, f é invertível em $Hom(C, A)$. ■

Lema 1.6 *Seja C uma coálgebra conexa com $G(C) = \{1\}$. Então, para cada $n \geq 1$ e cada $c \in C_n$, temos que $\Delta(c) = c \otimes 1 + 1 \otimes c + y$, com $y \in C_{n-1} \otimes C_{n-1}$. Além disso, $C_1 = k1 \oplus P(C)$.*

Demonstração: Sejam $n \geq 1$ e $c \in C_n$. Então

$$\Delta(c) \in \sum_{i=0}^{n} C_{n-i} \otimes C_i \subseteq C_0 \otimes C_n + C_n \otimes C_0 + C_{n-1} \otimes C_{n-1}.$$

Assim, como $C_0 = k1$, existem $a, b \in C_n$ tais que $\Delta(c) = a \otimes 1 + 1 \otimes b + z$, com $z \in C_{n-1} \otimes C_{n-1}$. Logo,

$$c = (I \otimes \varepsilon)\Delta(c) = a\varepsilon(1) + 1\varepsilon(b) + (I \otimes \varepsilon)(z) \in a + C_{n-1},$$

ou seja, existe $c' \in C_{n-1}$ tal que $c' = a - c$.

Analogamente, usando $(\varepsilon \otimes I)$, existe $c'' \in C_{n-1}$ tal que $c'' = b - c$. Consideremos $y = c' \otimes 1 + 1 \otimes c'' + z$. Claramente, $y \in C_{n-1} \otimes C_{n-1}$ e $c \otimes 1 + 1 \otimes c + y = a \otimes 1 + 1 \otimes b + z = \Delta(c)$.

Mostremos que $C_1 \subseteq k1 \oplus P(C)$. Seja $c \in C_1$. Então, $c = \varepsilon(c)1 + c - \varepsilon(c)1$. É claro que $\varepsilon(c)1 \in k1$, falta mostrarmos que $c - \varepsilon(c)1 \in P(C)$. Pelo feito acima, como $c \in C_1$, então $\Delta(c) = c \otimes 1 + 1 \otimes c + \alpha(1 \otimes 1)$, com $\alpha \in k$. Daí, $c = (\varepsilon \otimes I)\Delta(c) = \varepsilon(c)1 + c + \alpha 1$, donde $\alpha = -\varepsilon(c)$. Logo,

$$\begin{aligned} \Delta(c - \varepsilon(c)1) = &\quad c \otimes 1 + 1 \otimes c - \varepsilon(c)1 \otimes 1 - \varepsilon(c)1 \otimes 1 \\ = &\quad (c - \varepsilon(c)1) \otimes 1 + 1 \otimes (c - \varepsilon(c)1). \end{aligned}$$

Portanto, $c \in k1 + P(C)$. Mostremos que $k1 + P(C) \subseteq C_1$. Seja $x \in k1 + P(C)$. Então $x = \lambda 1 + v$ com $\lambda \in k$ e $v \in P(C)$. Assim,

$$\Delta(x) = \lambda(1 \otimes 1) + v \otimes 1 + 1 \otimes v \in C_0 \otimes C + C \otimes C_0.$$

Logo, $x \in C_0 \wedge C_0 = C_1$. Portanto, $C_1 = k1 + P(C)$.

Vejamos agora que tal soma é direta. Seja $x \in k1 \cap P(C)$. Então $x = \beta 1$, para algum $\beta \in k$ e $\beta(1 \otimes 1) = \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x = \beta(1 \otimes 1) + \beta(1 \otimes 1)$, donde $\beta = 0$, ou seja $x = 0$. ■

Teorema 1.7 *Sejam C e D coálgebras, C conexa com $G(C) = \{1\}$ e $f : C \to D$ um morfismo de coálgebras tal que $f|_{P(C)}$ é injetora. Então f é injetora.*

Demonstração: Como $1 \in G(C)$ e f é um morfismo de coálgebras, segue que $\varepsilon_D(f(1)) = \varepsilon_C(1) = 1$. Logo, $f(1) \neq 0$. Também, $\varepsilon_D(f(P(C))) = \varepsilon_C(P(C))$. Mas, $\varepsilon_C(P(C)) = 0$, pois dado $x \in P(C)$ temos que $x = (\varepsilon \otimes I)\Delta(x) = \varepsilon(x)1 + x$ e isso nos diz que $\varepsilon(x) = 0, \forall x \in P(C)$. Assim, $\varepsilon_D(f(P(C))) = 0$.

Além disso, $f(k1) \cap f(P(C)) = 0$, pois se $x \in f(k1) \cap f(P(C)) = 0$ então $x = f(\beta 1)$, para algum $\beta \in k$. Assim, $\varepsilon_D(x) = 0$, pois $x \in$

$f(P(C))$. Por outro lado, $\varepsilon(x) = \varepsilon(f(\beta 1)) = \beta\varepsilon(f(1)) = \beta 1 = \beta$, donde $\beta = 0$.

Mostremos que f é injetora em C_1. Seja $c \in C_1$. Pelo lema acima, $c = \alpha 1 + v$ com $\alpha \in k$ e $v \in P(C)$. Suponhamos que $f(c) = 0$, então $0 = f(c) = f(\alpha 1) + f(v)$. Daí, $f(\alpha 1) = -f(v) \in f(1k) \cap f(P(C)) = 0$, donde $\alpha f(1) = 0$. Logo, $\alpha = 0$ ($f(1) \neq 0$) e então $c = v \in P(C)$. Por hipótese, $f|_{P(C)}$ é injetora e portanto, como $c \in P(C)$ e $f(c) = 0$, segue que $c = 0$. Logo, $f|_{C_1}$ é injetora.

Agora provemos por indução que $f|_{C_n}$ é injetora. Assumimos que $f|_{C_n}$ é injetora, para um n fixo. Seja $x \in C_{n+1}$ tal que $f(x) = 0$. Pelo lema anterior, $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + y$, para algum $y \in C_n \otimes C_n$. Daí,

$$0 = \Delta(f(x)) = (f \otimes f)\Delta(x) = (f \otimes f)(y).$$

Assim, como $f|_{C_n}$ é injetora, $f|_{C_n} \otimes f|_{C_n}$ também o é, e então $y = 0$. Logo, $x \in P(C)$ e como $f|_{P(C)}$ é injetora isto implica que $x = 0$. Portanto, $f|_{C_{n+1}}$ é injetora.

Como $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$, segue que f é injetora em C. ■

Capítulo 2

Categorias

Nesse capítulo apresentamos os conceitos de categoria tensorial, categoria trançada, categoria rígida e categoria simétrica, juntamente com exemplos e alguns resultados principais para o desenvolvimento desse trabalho. A princípio, para nossos objetivos não seria necessário o desenvolvimento de todos os resultados que aparecem aqui. Porém, os mesmos surgiram como respostas às perguntas que nos fizemos ao longo do caminho e achamos por bem incluí-los no trabalho.

Esse capítulo foi desenvolvido com base em [6], [7], [8] e [15].

2.1 Definições e exemplos

Definição 2.1 *Uma categoria $\mathcal{C}$ é definida como uma classe de objetos e uma classe de conjuntos de morfismos que satisfazem os seguintes axiomas:*

(i) *Para todo par (U, V) de objetos em $\mathcal{C}$ existe um conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(U, V)$ de morfismos de U para V tais que $Hom_{\mathcal{C}}(U, V) \cap Hom_{\mathcal{C}}(W, X) = \emptyset$, se $(U, V) \neq (W, X)$, para (W, X) par de objetos em $\mathcal{C}$. Um morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(U, V)$ é denotado por $f : U \to V$ ou $U \xrightarrow{f} V$;*

(ii) *Para quaisquer U, V e X objetos em $\mathcal{C}$ existe uma função*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(U, V) \times Hom_{\mathcal{C}}(V, X) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(U, X) \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

chamada composição de morfismos, que é associativa;

(iii) *Para cada objeto U em $\mathcal{C}$ existe um morfismo $I_U \in Hom_{\mathcal{C}}(U,U)$ tal que $f \circ I_U = f$ e $I_U \circ g = g$, para quaisquer $f \in Hom_{\mathcal{C}}(U,V)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(V,U)$, sendo V um objeto qualquer em $\mathcal{C}$. Tal morfismo é chamado morfismo identidade de U.*

Exemplo 2.1 A classe dos conjuntos juntamente com a classe das funções é uma categoria, *categoria dos conjuntos.*

Exemplo 2.2 A classe dos anéis juntamente com a classe dos morfismos de anéis é uma categoria, *categoria dos anéis.*

Exemplo 2.3 Seja R um anel. A classe dos R-módulos à esquerda juntamente com a classe dos R-morfismos à esquerda é uma categoria, denotada por ${}_R\mathcal{M}$, chamada *categoria dos R-módulos à esquerda.*

Exemplo 2.4 Seja C uma coálgebra. A classe dos C-comódulos à esquerda juntamente com a classe dos morfismos de C-comódulos à esquerda é uma categoria, denotada por ${}^C\mathcal{M}$, dita *categoria dos C-comódulos à esquerda.*

Exemplo 2.5 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. O produto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, cujos objetos são todos os pares (U,V) tais que U e V são objetos em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente, e os morfismos são da forma $(f,g) : (U,V) \to (W,X)$, com $f \in Hom_{\mathcal{C}}(U,W)$ e $g \in Hom_{\mathcal{D}}(V,X)$, é uma nova categoria, chamada *categoria produto.* A composição (quando possível) e a identidade são dadas por $(f',g') \circ (f,g) = (f' \circ f, g' \circ g)$ e $I_{(U,V)} = (I_U, I_V)$.

Definição 2.2 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor covariante (ou simplesmente um funtor) F de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{D}$, denotado por $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, é um par de funções (ambas denotadas por F), uma função objeto que associa cada objeto U em $\mathcal{C}$ a um objeto $F(U)$ em $\mathcal{D}$ e uma função morfismo que associa cada morfismo $f : U \to V$ em $\mathcal{C}$ a um morfismo $F(f) : F(U) \to F(V)$ em $\mathcal{D}$ tal que*

(i) *$F(I_U) = I_{F(U)}$, para todo morfismo identidade I_U em $\mathcal{C}$;*

(ii) *$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, para quaisquer dois morfismos f e g em $\mathcal{C}$ cuja composição $g \circ f$ está definida.*

Lembramos que a palavra função que aparece na definição acima relacionando duas categorias significa apenas uma regra e não uma função no sentido usual da teoria dos conjuntos.

Exemplo 2.6 O funtor identidade $Id : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que associa cada objeto e cada morfismo em $\mathcal{C}$ a si mesmos.

Exemplo 2.7 Sejam k um anel comutativo com unidade, ${}_k\mathcal{M}$ a categoria dos k-módulos e $\otimes := \otimes_k$. Definimos $Id \otimes k : {}_k\mathcal{M} \to {}_k\mathcal{M}$ que associa cada k-módulo M ao k-módulo $M \otimes k$ e cada morfismo $f : M \to N$ em ${}_k\mathcal{M}$ ao morfismo $f \otimes I_k : M \otimes k \to N \otimes k$. Mostremos que $Id \otimes k$ é um funtor. De fato,

$$(Id \otimes k)(I_M) = I_M \otimes I_k = I_{M \otimes k} = I_{(Id \otimes k)(M)}$$

e

$$\begin{aligned} (Id \otimes k)(f \circ g) &= (f \circ g) \otimes I_k = (f \circ g) \otimes (I_k \circ I_k) \\ &= (f \otimes I_k) \circ (g \otimes I_k) = (Id \otimes k)(f) \circ (Id \otimes k)(g). \end{aligned}$$

Exemplo 2.8 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Então $\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D} \times \mathcal{C}$ que associa cada objeto (U, V) em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ao objeto (V, U) em $\mathcal{D} \times \mathcal{C}$ e cada morfismo (f, g) em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ ao morfismo (g, f) em $\mathcal{D} \times \mathcal{C}$ é um funtor. De fato,

$$\tau(I_{(U,V)}) = \tau(I_U, I_V) = (I_V, I_U) = I_{(V,U)} = I_{\tau(U,V)}$$

e

$$\begin{aligned} \tau((f', g') \circ (f, g)) &= \tau(f' \circ f, g' \circ g) = (g' \circ g, f' \circ f) \\ &= (g', f') \circ (g, f) = \tau(f', g') \circ \tau(f, g). \end{aligned}$$

Definição 2.3 *Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorias e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Uma transformação natural entre F e G é uma função $\alpha : F \to G$ que associa cada objeto U em $\mathcal{C}$ a um morfismo $\alpha_U : F(U) \to G(U)$ em $\mathcal{D}$ tal que, para cada morfismo $f : U \to V$ em $\mathcal{C}$, o diagrama abaixo comuta*

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(U) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(V) \arrow[r, "\alpha_V"'] & G(V). \end{tikzcd}$$

Observação 2.1 (i) Sejam U e V objetos em uma categoria $\mathcal{C}$. Um morfismo $f : U \to V$ em $\mathcal{C}$ é dito um isomorfismo se existe um morfismo $f^{-1} : V \to U$ em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ f^{-1} = I_V$ e $f^{-1} \circ f = I_U$. Tal morfismo é chamado *morfismo inverso de f*.

(ii) Se, para cada objeto U em $\mathcal{C}$, o morfismo α_U da definição acima for um isomorfismo em $\mathcal{D}$, então α é dito um isomorfismo natural. Além disso, $\alpha^{-1} : G \to F$ que associa cada objeto U em $\mathcal{C}$ ao morfismo $\alpha_U^{-1} : G(U) \to F(U)$ em $\mathcal{D}$ é também uma transformação natural.

Exemplo 2.9 Seja k um anel comutativo com unidade. Consideremos o funtor $Id \otimes k$ do Exemplo 2.7 e $Id : {}_k\mathcal{M} \to {}_k\mathcal{M}$. Definimos $\alpha : Id \otimes k \to Id$ de maneira que, para cada M em ${}_k\mathcal{M}$,

$$\begin{array}{rccc} \alpha_M : & M \otimes k & \to & M \\ & m \otimes x & \mapsto & mx. \end{array}$$

É claro que α_M é morfismo em ${}_k\mathcal{M}$. Mostremos que α é uma transformação natural. Seja $f : M \to N$ um morfismo em ${}_k\mathcal{M}$. Provemos que $Id(f) \circ \alpha_M = \alpha_N \circ (Id \otimes k)(f)$, ou seja, $f \circ \alpha_M = \alpha_N \circ (f \otimes I_k)$. Sejam $m \in M$ e $x \in k$. Então

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha_M)(m \otimes x) \quad &= f(\alpha_M(m \otimes x)) = f(mx) = f(m)x \\ &= \alpha_N(f(m) \otimes x) = \alpha_N((f \otimes I_k)(m \otimes x)) \\ &= (\alpha_N \circ (f \otimes I_k))(m \otimes x). \end{aligned}$$

Além disso, como α_M é isomorfismo em ${}_k\mathcal{M}$, segue que α é um isomorfismo natural.

2.2 Categorias tensoriais

Agora que estamos familiarizados com os conceitos de categoria, categoria produto, funtor e transformação natural, temos todas as ferramentas necessárias para definir categoria tensorial. Tal conceito é de muita importância, pois mais à frente, definimos uma categoria trançada (que é uma categoria tensorial), um dos principais temas desse trabalho.

Definição 2.4 *Uma categoria tensorial é uma coleção* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r)$, *em que* $\mathcal{C}$ *é uma categoria,* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é um funtor, chamado produto tensorial e* $\mathbb{I}$ *é um objeto em* $\mathcal{C}$, *chamado objeto unidade.*

Além disso, a *é um isomorfismo natural entre os funtores* $(- \otimes (- \otimes -))$ *e* $((- \otimes -) \otimes -)$ *de* $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ *para* $\mathcal{C}$, l *é um isomorfismo natural entre os funtores* Id *e* $Id \otimes \mathbb{I}$ *de* $\mathcal{C}$ *para* $\mathcal{C}$ *e* r *é um isomorfismo natural entre os funtores* Id *e* $\mathbb{I} \otimes Id$ *de* $\mathcal{C}$ *para* $\mathcal{C}$ *tais que, para quaisquer objetos*

U, V, W, X em $\mathcal{C}$, os seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) \arrow[dr, "a_{U\otimes V,W,X}"] & \\
U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) \arrow[ur, "a_{U,V,W\otimes X}"] \arrow[d, "I_U\otimes a_{V,W,X}"'] & & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \\
U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) \arrow[rr, "a_{U,V\otimes W,X}"'] & & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X \arrow[u, "a_{U,V,W}\otimes I_X"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U \otimes (\mathbb{I} \otimes V) \arrow[rr, "a_{U,\mathbb{I},V}"] & & (U \otimes \mathbb{I}) \otimes V \\
& U \otimes V \arrow[ul, "I_U\otimes r_V"] \arrow[ur, "l_U\otimes I_V"'] &
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Na definição acima, o fato de que o primeiro diagrama comuta é chamado *axioma do pentágono* e o fato do segundo diagrama comutar é chamado *axioma do triângulo*. Esses axiomas expressam, essencialmente, que o produto tensorial de um número finito de objetos está bem definido, independentemente da posição dos parênteses e que $\mathbb{I}$ é uma unidade para o produto tensorial.

Com o objetivo de evitarmos qualquer dúvida, esclarecemos que o funtor $\otimes$ associa cada objeto (U, V) em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ao objeto $U \otimes V$ em $\mathcal{C}$. Assim como, associa cada morfismo (f, g) em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ao morfismo $f \otimes g$ em $\mathcal{C}$. Também, o funtor $\mathbb{I} \otimes Id$ associa cada objeto U em $\mathcal{C}$ ao objeto $\mathbb{I} \otimes U$ em $\mathcal{C}$ e cada morfismo f em $\mathcal{C}$ ao morfismo $I_{\mathbb{I}} \otimes f$. Valem as mesmas considerações para o funtor $Id \otimes \mathbb{I}$.

De agora em diante, omitimos o símbolo $\circ$ da composição de morfismos, denotando $f \circ g$ por fg.

Exemplo 2.10 Consideremos $\mathcal{C}$ a categoria dos conjuntos, $\otimes := \times$, o produto cartesiano de conjuntos, e $\mathbb{I} = \{y\}$, um conjunto unitário qualquer. Para quaisquer U, V, W conjuntos em $\mathcal{C}$, definimos

$$\begin{array}{rccc} a_{U,V,W}: & U \times (V \times W) & \rightarrow & (U \times V) \times W \\ & (u, (v, w)) & \mapsto & ((u, v), w) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} r_U: & U & \rightarrow & \{y\} \times U \\ & u & \mapsto & (y, u) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} l_U: & U & \rightarrow & U \times \{y\} \\ & u & \mapsto & (u, y). \end{array}$$

Mostremos que $(\mathcal{C}, \times, \{y\}, a, l, r)$ é uma categoria tensorial. Fixados objetos U, V, W em $\mathcal{C}$, é claro que $a_{U,V,W}, r_U$ e l_U são isomorfismos em $\mathcal{C}$ (bijeções). Logo, basta verificarmos a condição da definição de transformação natural. Sejam U, V, W, U', V', W' conjuntos em $\mathcal{C}$, $f : U \to U'$, $g : V \to V'$ e $h : W \to W'$ funções em $\mathcal{C}$. Verifiquemos que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{tikzcd}
U \times (V \times W) \arrow[r, "a_{U,V,W}"] \arrow[d, "f\times(g\times h)"'] & (U \times V) \times W \arrow[d, "(f\times g)\times h"] \\
U' \times (V' \times W') \arrow[r, "a_{U',V',W'}"'] & (U' \times V') \times W'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "l_U"] \arrow[d, "f"'] & U \times \{y\} \arrow[d, "f\times I_{\{y\}}"] \\
U' \arrow[r, "l_{U'}"'] & U' \times \{y\}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "r_U"] \arrow[d, "f"'] & \{y\} \times U \arrow[d, "I_{\{y\}}\times f"] \\
U' \arrow[r, "r_{U'}"'] & \{y\} \times U'.
\end{tikzcd}$$

Sejam $u \in U, v \in V$ e $w \in W$. Então

$$\begin{aligned}
((f \times g) \times h)a_{U,V,W}(u,(v,w)) &= ((f \times g) \times h)((u,v),w) \\
&= ((f \times g)(u,v), h(w)) \\
&= ((f(u), g(v)), h(w)) \\
&= a_{U',V',W'}(f(u),(g(v),h(w))) \\
&= a_{U',V',W'}(f \times (g \times h))(u,(v,w)),
\end{aligned}$$

$$((f \times I_{\{y\}})l_U)(u) = (f \times I_{\{y\}})(u,y) = (f(u),y) = l_{U'}(f(u)) = (l_{U'}f)(u)$$

e

$$((I_{\{y\}} \times f)r_U)(u) = (I_{\{y\}} \times f)(y,u) = (y, f(u)) = r_{U'}(f(u)) = (r_{U'}f)(u).$$

Logo, a, l e r são isomorfismos naturais. Mostremos agora que valem os axiomas do pentágono e do triângulo. Sejam U, V, W, X conjuntos em $\mathcal{C}$, $u \in U, v \in V, w \in W$ e $x \in X$. Temos

$$\begin{aligned}
a_{U\times V,W,X}a_{U,V,W\times X}(u,(v,(w,x))) &= a_{U\times V,W,X}((u,v),(w,x)) \\
&= (((u,v),w),x) \\
&= (a_{U,V,W} \times I_X)((u,(v,w)),x) \\
&= (a_{U,V,W} \times I_X)(a_{U,V\times W,X}(u,((v,w),x))) \\
&= (a_{U,V,W} \times I_X)a_{U,V\times W,X}(I_U \times a_{V,W,X})(u,(v,(w,x)))
\end{aligned}$$

e

$$a_{U,\mathbb{I},V}(I_U \times r_V)(u,v) = a_{U,\mathbb{I},V}(u,(y,v)) = ((u,y),v) = (l_U \times I_V)(u,v).$$

Portanto, $(\mathcal{C}, \times, \{y\}, a, l, r)$ é uma categoria tensorial.

Exemplo 2.11 Seja R um anel comutativo com unidade. Consideremos ${}_R\mathcal{M}$ a categoria dos R-módulos, $\otimes := \otimes_R$, o produto tensorial usual sobre R e $\mathbb{I} = R$. Lembremos que, se U e V são R-módulos, então $U \otimes V$ também o é, cuja ação é dada por

$$r \cdot (u \otimes v) = r \cdot u \otimes v, \forall r \in R, \forall u \in U, \forall v \in V.$$

Além disso, se $f : U \to U'$ e $g : V \to V'$ são morfismos em ${}_R\mathcal{M}$, então $f \otimes g$ também o é, basta definirmos

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v), \forall u \in U, \forall v \in V.$$

De fato, sejam $u \in U, v \in V$ e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(r \cdot (u \otimes v)) = &\ (f \otimes g)(r \cdot u \otimes v) = f(r \cdot u) \otimes g(v) \\ = &\ r \cdot f(u) \otimes g(v) = r \cdot ((f \otimes g)(u \otimes v)). \end{aligned}$$

Assim, o funtor $\otimes$ está bem definido. Para quaisquer U, V e W R-módulos, definimos

$$\begin{array}{rccc} a_{U,V,W} : & U \otimes (V \otimes W) & \to & (U \otimes V) \otimes W \\ & u \otimes (v \otimes w) & \mapsto & (u \otimes v) \otimes w \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} r_U : & U & \to & R \otimes U \\ & u & \mapsto & 1 \otimes u \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} l_U : & U & \to & U \otimes R \\ & u & \mapsto & u \otimes 1. \end{array}$$

Mostremos que $({}_R\mathcal{M}, \otimes, R, a, l, r)$ é uma categoria tensorial. Sabemos que $a_{U,V,W}, l_U$ e r_U são R-isomorfismos. Sejam U, V, W, U', V', W' R-módulos, $f : U \to U'$, $g : V \to V'$ e $h : W \to W'$ R-morfismos. Notemos que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{tikzcd} U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "a_{U,V,W}"] \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"'] & (U \otimes V) \otimes W \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"] \\ U' \otimes (V' \otimes W') \arrow[r, "a_{U',V',W'}"'] & (U' \otimes V') \otimes W' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "l_U"] \arrow[d, "f"'] & U \otimes R \arrow[d, "f\otimes I_R"] \\ U' \arrow[r, "l_{U'}"'] & U' \otimes R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "r_U"] \arrow[d, "f"'] & R \otimes U \arrow[d, "I_R\otimes f"] \\ U' \arrow[r, "r_{U'}"'] & R \otimes U'. \end{tikzcd}$$

A comutatividade do primeiro diagrama é análoga à do exemplo anterior. Façamos a comutatividade do segundo. Seja $u \in U$. Então

$$(f \otimes I_R)l_U(u) = (f \otimes I_R)(u \otimes 1) = f(u) \otimes 1 = l_{U'}(f(u)) = (l_{U'} f)(u).$$

Analogamente, mostra-se a comutatividade do terceiro diagrama. Assim, a, l e r são isomorfismos naturais.

A verificação do axioma do pentágono é análoga à do exemplo anterior. Verifiquemos o axioma do triângulo. Sejam U, V R-módulos, $u \in U$ e $v \in V$. Então

$$\begin{aligned} a_{U,R,V}(I_U \otimes r_V)(u \otimes v) &= a_{U,R,V}(u \otimes (1 \otimes v)) = ((u \otimes 1) \otimes v) \\ &= (l_U \otimes I_V)(u \otimes v). \end{aligned}$$

Portanto, $({}_R\mathcal{M}, \otimes, R, a, l, r)$ é uma categoria tensorial. Ainda nesse exemplo, notemos que se $R = k$ é um corpo, $\otimes = \otimes_k, a, l$ e r definidas da mesma maneira, a categoria dos k-espaços vetoriais é uma categoria tensorial.

Antes de apresentarmos os dois próximos exemplos de categoria tensorial, gostaríamos de lembrar ao leitor que, ao considerarmos um módulo sobre uma álgebra A (um comódulo sobre uma coálgebra C), os mesmos são, por definição, k-espaços vetoriais (veja Definições 1.13 e 1.14) aos quais está agregada a estrutura de A-módulo (de C-comódulo). O mesmo ocorrendo para os morfismos de A-módulos (de C-comódulos), o leitor pode consultar a Definição 1.15 (i) e (ii).

Seja H uma biálgebra sobre um corpo k. Ao considerarmos a categoria ${}_H\mathcal{M}$ dos H-módulos à esquerda cujos objetos são os H-módulos à esquerda e os morfismos são, exatamente, de H-módulos à esquerda, devemos sempre ter em mente o que acabamos de mencionar acima.

Também, ao considerarmos a categoria ${}^H\mathcal{M}$ dos H-comódulos à esquerda, cujos objetos são os H-comódulos à esquerda e os morfismos são de H-comódulos à esquerda, também devemos lembrar do que foi dito acima.

Deixamos claro que, ao longo do trabalho, a expressão "à esquerda" pode ser omitida por estar claro no contexto.

Exemplo 2.12 Sejam k um corpo e $(H, \Delta, \varepsilon, m, \mu)$ uma biálgebra sobre k. Consideremos a categoria ${}_H\mathcal{M}$, $\otimes := \otimes_k$, o produto tensorial usual sobre k, $\mathbb{I} = k, a, l$ e r definidas como no exemplo acima. Mostremos que $({}_H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r)$ é uma categoria tensorial.

Primeiramente notemos que se M e N são H-módulos à esquerda, então $M \otimes N$ também o é, com ação dada por

$$h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n, \forall h \in H, \forall m \in M, \forall n \in N.$$

Da mesma forma, se $f : M \to M'$ e $g : N \to N'$ são morfismos em ${}_H\mathcal{M}$, então $f \otimes g$ também o é, basta definirmos $f \otimes g$ como no Exemplo 2.11. De fato, sejam $h \in H$, $m \in M$ e $n \in N$. Então

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(h \cdot (m \otimes n)) = {} & f(h_1 \cdot m) \otimes g(h_2 \cdot n) = h_1 \cdot f(m) \otimes h_2 \cdot g(n) \\ = {} & h \cdot (f(m) \otimes g(n)) = h \cdot ((f \otimes g)(m \otimes n)).\end{aligned}$$

Assim, o funtor $\otimes$ está bem definido. Além disso, k é um H-módulo com a ação

$$h \cdot \alpha = \varepsilon(h)\alpha, \forall h \in H, \forall \alpha \in k.$$

Sejam M, N, P H-módulos à esquerda, $m \in M, n \in N$ e $p \in P$. Então

$$\begin{aligned}a_{M,N,P}(h \cdot (m \otimes (n \otimes p))) &= a_{M,N,P}(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot (n \otimes p)) \\ &= a_{M,N,P}(h_1 \cdot m \otimes (h_{2_1} \cdot n \otimes h_{2_2} \cdot p)) \\ &= a_{M,N,P}(h_1 \cdot m \otimes (h_2 \cdot n \otimes h_3 \cdot p)) \\ &= (h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \otimes h_3 \cdot p \\ &= h_1 \cdot (m \otimes n) \otimes h_2 \cdot p \\ &= h \cdot ((m \otimes n) \otimes p) \\ &= h \cdot (a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_M(h \cdot m) &= (h \cdot m) \otimes 1 = (h_1\varepsilon(h_2) \cdot m) \otimes 1 = h_1 \cdot m \otimes \varepsilon(h_2)1 \\ &= h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot 1 = h \cdot (m \otimes 1) = h \cdot (l_M(m))\end{aligned}$$

e analogamente, mostra-se que $r_M(h \cdot m) = h \cdot r_M(m)$. Portanto, $a_{M,N,P}$, l_M e r_M são H-morfismos e claramente são bijetores. Assim, os mesmos são H-isomorfismos. A verificação de que a, l e r são isomorfismos naturais, assim como a validade dos axiomas do pentágono e do triângulo são feitas de maneira análoga aos dois exemplos imediatamente anteriores. Portanto, $({}_H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r)$ é uma categoria tensorial.

Aqui, alertamos o leitor para o fato de que usamos sempre a mesma notação para a função identidade, a saber I, omitindo o conjunto para o qual a mesma é a identidade. Aproveitando a ocasião, informamos que as unidades das álgebras envolvidas são denotadas por 1. Ambas notações são usadas em todo o trabalho, salvo nos casos em que possa ocorrer alguma confusão.

Exemplo 2.13 Sejam k um corpo e $(H, \Delta, \varepsilon, m, \mu)$ uma biálgebra sobre k. Consideremos a categoria ${}^H\mathcal{M}$, $\otimes := \otimes_k$, o produto tensorial usual sobre k, $\mathbb{I} = k, a, l$ e r definidas como no Exemplo 2.11. Mostremos que $({}^H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r)$ é uma categoria tensorial.

Primeiramente notemos que se M e N são H-comódulos à esquerda, então $M \otimes N$ é também um H-comódulo à esquerda via $\rho : M \otimes N \to H \otimes M \otimes N$ dada por

$$\rho(m \otimes n) = m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}.$$

Igualmente, se $f : M \to M'$ e $g : N \to N'$ são morfismos em ${}^H\mathcal{M}$ então $f \otimes g$ é também um morfismo de H-comódulos, definindo $f \otimes g$ como no Exemplo 2.11. Façamos a prova desse fato. Sejam $m \in M$ e $n \in N$. Então

$$\begin{aligned}
(\rho(f \otimes g))(m \otimes n) = &\ \rho(f(m) \otimes g(n)) \\
= &\ f(m)_{(-1)}g(n)_{(-1)} \otimes f(m)_{(0)} \otimes g(n)_{(0)} \\
\overset{(*)}{=} &\ m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes f(m_{(0)}) \otimes g(n_{(0)}) \\
= &\ (I \otimes (f \otimes g))(m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
= &\ (I \otimes (f \otimes g))\rho(m \otimes n),
\end{aligned}$$

a igualdade $(*)$ segue do fato de que f e g são morfismos de H-comódulos. Assim, o funtor $\otimes$ está bem definido. Além disso, k é também um H-comódulo à esquerda via $\rho : k \to H \otimes k$ definida por

$$\rho(1) = 1 \otimes 1.$$

Sejam M, N e P H-comódulos à esquerda. Mostremos que $a_{M,N,P}$ é morfismo de H-comódulos. Sejam $m \in M, n \in N$ e $p \in P$. Então

$$\begin{aligned}
\rho a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)) &= \rho((m \otimes n) \otimes p) \\
&= (m \otimes n)_{(-1)}p_{(-1)} \otimes (m \otimes n)_{(0)} \otimes p_{(0)} \\
&= (m_{(-1)}n_{(-1)})p_{(-1)} \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \otimes p_{(0)} \\
&= m_{(-1)}(n_{(-1)}p_{(-1)}) \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \otimes p_{(0)} \\
&= (I \otimes a_{M,N,P})(m_{(-1)}(n_{(-1)}p_{(-1)}) \otimes m_{(0)} \otimes (n_{(0)} \otimes p_{(0)})) \\
&= (I \otimes a_{M,N,P})(m_{(-1)}(n \otimes p)_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes (n \otimes p)_{(0)}) \\
&= (I \otimes a_{M,N,P})\rho(m \otimes (n \otimes p)).
\end{aligned}$$

Também

$$\begin{aligned}
\rho l_M(m) &= \rho(m \otimes 1) = m_{(-1)}1_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes 1_{(0)} \\
&\overset{(*)}{=} m_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes 1 = (I \otimes l_M)(m_{(-1)} \otimes m_{(0)}) = (I \otimes l_M)\rho(m),
\end{aligned}$$

a igualdade $(*)$ segue de que $\rho(1) = 1 \otimes 1$.

Logo, l_M é morfismo e analogamente, mostra-se que r_M também o é. Sendo tais funções bijetoras e morfismos em ${}^H\mathcal{M}$, segue que são isomorfismos em ${}^H\mathcal{M}$.

As naturalidades de a, l e r, assim como os axiomas do pentágono e do triângulo seguem analogamente dos Exemplos 2.10 e 2.11. Portanto, $({}^H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r)$ é uma categoria tensorial.

O próximo resultado fornece uma propriedade que será útil na prova da Proposição 2.2, mais adiante.

Proposição 2.1 *Sejam V e W objetos de uma categoria tensorial $\mathcal{C}$ com objeto unidade $\mathbb{I}$. Então os seguintes diagramas*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \otimes (V \otimes W) \arrow[rr, "a_{\mathbb{I},V,W}"] & & (\mathbb{I} \otimes V) \otimes W \\
& V \otimes W \arrow[ul, "r_{V \otimes W}"] \arrow[ur, "r_V \otimes I"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes (W \otimes \mathbb{I}) \arrow[rr, "a_{V,W,\mathbb{I}}"] & & (V \otimes W) \otimes \mathbb{I} \\
& V \otimes W \arrow[ul, "I \otimes l_W"] \arrow[ur, "l_{V \otimes W}"'] &
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Demonstração: Seja U um objeto qualquer na categoria. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& U \otimes (\mathbb{I} \otimes (V \otimes W)) \arrow[dl, "a_{U,\mathbb{I},V \otimes W}"'] \arrow[dr, "I \otimes a_{\mathbb{I},V,W}"] & \\
(U \otimes \mathbb{I}) \otimes (V \otimes W) \arrow[d, "a_{U \otimes \mathbb{I},V,W}"'] & U \otimes (V \otimes W) \arrow[l, "l_U \otimes I"] \arrow[u, "I \otimes r_{V \otimes W}"'] \arrow[r, "I \otimes (r_V \otimes I)"'] \arrow[d, "a_{U,V,W}"'] & U \otimes ((\mathbb{I} \otimes V) \otimes W) \arrow[d, "a_{U,\mathbb{I} \otimes V,W}"] \\
((U \otimes \mathbb{I}) \otimes V) \otimes W & (U \otimes V) \otimes W \arrow[l, "(l_U \otimes I) \otimes I"] \arrow[r, "(I \otimes r_V) \otimes I"'] & (U \otimes (\mathbb{I} \otimes V)) \otimes W \\
& (U \otimes (\mathbb{I} \otimes V)) \otimes W. \arrow[ul, "a_{U,\mathbb{I},V} \otimes I"] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

Provemos que o triângulo superior direito comuta, ou seja,

$$(I \otimes a_{\mathbb{I},V,W})(I \otimes r_{V \otimes W}) = I \otimes (r_V \otimes I). \qquad (\star)$$

Temos que o hexágono (parte externa do diagrama) comuta pelo axioma do pentágono. Assim,

$$I \otimes a_{\mathbb{I},V,W} = a^{-1}_{U,\mathbb{I} \otimes V,W}(a^{-1}_{U,\mathbb{I},V} \otimes I) a_{U \otimes \mathbb{I},V,W} a_{U,\mathbb{I},V \otimes W}.$$

Lembrando que $I = I_{V\otimes W} = I_V \otimes I_W$ (Exemplo 2.5 e Definição 2.2 (i)), os quadrados comutam pela naturalidade de a. Logo,

$$a_{U\otimes\mathbb{I},V,W}(l_U \otimes I) = ((l_U \otimes I) \otimes I)a_{U,V,W}$$

e

$$I \otimes (r_V \otimes I) = a^{-1}_{U,\mathbb{I}\otimes V,W}((I \otimes r_V) \otimes I)a_{U,V,W}.$$

Observemos que pelo axioma do triângulo vale

$$a_{U,\mathbb{I},V}(I \otimes r_V) = l_U \otimes I.$$

No entanto, novamente pelo Exemplo 2.5, para morfismos em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ temos

$$(a_{U,\mathbb{I},V}, I) \circ (I \otimes r_V, I) = (a_{U,\mathbb{I},V}(I \otimes r_V), I) = (l_U \otimes I, I),$$

ou seja, em $\mathcal{C}$ temos exatamente $(a_{U,\mathbb{I},V} \otimes I)((I \otimes r_V) \otimes I) = (l_U \otimes I) \otimes I$ e isso é equivalente a dizermos que o triângulo inferior comuta. A comutatividade do triângulo superior esquerdo segue claramente do axioma do triângulo. Daí,

$$I \otimes r_{V\otimes W} = a^{-1}_{U,\mathbb{I},V\otimes W}(l_U \otimes I) \;\text{ e }\; (l_U \otimes I) \otimes I = (a_{U,\mathbb{I},V} \otimes I)((I \otimes r_V) \otimes I).$$

Usando as igualdades acima, temos

$$\begin{aligned}
&(I \otimes a_{\mathbb{I},V,W})(I \otimes r_{V\otimes W}) = \\
&\quad = a^{-1}_{U,\mathbb{I}\otimes V,W}(a^{-1}_{U,\mathbb{I},V} \otimes I)a_{U\otimes\mathbb{I},V,W}a_{U,\mathbb{I},V\otimes W}a^{-1}_{U,\mathbb{I},V\otimes W}(l_U \otimes I) \\
&\quad = a^{-1}_{U,\mathbb{I}\otimes V,W}(a^{-1}_{U,\mathbb{I},V} \otimes I)a_{U\otimes\mathbb{I},V,W}(l_U \otimes I) \\
&\quad = a^{-1}_{U,\mathbb{I}\otimes V,W}(a^{-1}_{U,\mathbb{I},V} \otimes I)((l_U \otimes I) \otimes I)a_{U,V,W} \\
&\quad = a^{-1}_{U,\mathbb{I}\otimes V,W}(a^{-1}_{U,\mathbb{I},V} \otimes I)(a_{U,\mathbb{I},V} \otimes I)((I \otimes r_V) \otimes I)a_{U,V,W} \\
&\quad = a^{-1}_{U,\mathbb{I}\otimes V,W}((I \otimes r_V) \otimes I)a_{U,V,W} = I \otimes (r_V \otimes I).
\end{aligned}$$

Fica provada a igualdade ($\star$). Além disso, como r é transformação natural, vale a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[r, "r_{V\otimes W}"] \arrow[d, "a_{\mathbb{I},V,W}r_{V\otimes W}"'] & \mathbb{I} \otimes (V \otimes W) \arrow[d, "I\otimes a_{\mathbb{I},V,W}r_{V\otimes W}"] \\
(\mathbb{I} \otimes V) \otimes W \arrow[r, "r_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W}"'] & \mathbb{I} \otimes ((\mathbb{I} \otimes V) \otimes W)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[r, "r_{V\otimes W}"] \arrow[d, "r_V\otimes I"'] & \mathbb{I} \otimes (V \otimes W) \arrow[d, "I\otimes(r_V\otimes I)"] \\
(\mathbb{I} \otimes V) \otimes W \arrow[r, "r_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W}"'] & \mathbb{I} \otimes ((\mathbb{I} \otimes V) \otimes W).
\end{tikzcd}$$

Logo,

$$(I \otimes (a_{\mathbb{I},V,W} r_{V\otimes W})) r_{V\otimes W} = r_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W} a_{\mathbb{I},V,W} r_{V\otimes W}$$

e

$$(I \otimes (r_V \otimes I)) r_{V\otimes W} = r_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W} (r_V \otimes I).$$

Usando essas igualdades e a igualdade $(\star)$ para $U = \mathbb{I}$, temos

$$\begin{array}{rcl}
a_{\mathbb{I},V,W} r_{V\otimes W} & = & r^{-1}_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W} r_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W} a_{\mathbb{I},V,W} r_{V\otimes W} \\
& = & r^{-1}_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W} (I \otimes (a_{\mathbb{I},V,W} r_{V\otimes W})) r_{V\otimes W} \\
& = & r^{-1}_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W} (I \otimes a_{\mathbb{I},V,W})(I \otimes r_{V\otimes W}) r_{V\otimes W} \\
& = & r^{-1}_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W} (I \otimes (r_V \otimes I)) r_{V\otimes W} \quad \text{por} \quad (\star) \\
& = & r^{-1}_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W} r_{(\mathbb{I}\otimes V)\otimes W} (r_V \otimes I) = r_V \otimes I.
\end{array}$$

Portanto, comuta o primeiro triângulo do enunciado. Para mostrar a comutatividade do segundo triângulo, usamos o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
& & ((V\otimes W)\otimes \mathbb{I})\otimes U & & \\
(V\otimes W)\otimes(\mathbb{I}\otimes U) \arrow[urr, "a_{V\otimes W,\mathbb{I},U}"] & & (V\otimes W)\otimes U \arrow[ll, "I\otimes r_U"'] \arrow[u, "l_{V\otimes W}\otimes I"] \arrow[rr, "(I\otimes l_W)\otimes I"'] & & (V\otimes(W\otimes\mathbb{I}))\otimes U \arrow[ull, "a_{V,W,\mathbb{I}}\otimes I"'] \\
V\otimes(W\otimes(\mathbb{I}\otimes U)) \arrow[u, "a_{V,W,\mathbb{I}\otimes U}"] \arrow[drr, "I\otimes a_{W,\mathbb{I},U}"'] & & V\otimes(W\otimes U) \arrow[ll, "I\otimes(I\otimes r_U)"'] \arrow[u, "a_{V,W,U}"'] \arrow[rr, "I\otimes(l_W\otimes I)"] & & V\otimes((W\otimes\mathbb{I})\otimes U) \arrow[u, "a_{V,W\otimes\mathbb{I},U}"'] \arrow[dll, equal] \\
& & V\otimes((W\otimes\mathbb{I})\otimes U) & &
\end{tikzcd}$$

para o qual aplicamos argumentos semelhantes ao caso anterior. ∎

2.3 Álgebras e coálgebras em categorias tensoriais

Definimos agora uma generalização dos conceitos de álgebra e de coálgebra em uma categoria tensorial qualquer. Tais conceitos têm fundamental importância nos próximos capítulos.

Os exemplos são propositalmente colocados aqui, uma vez que os mesmos terão utilidade em capítulos posteriores, onde há interesse em que H seja uma álgebra de Hopf.

Definição 2.5 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria tensorial. Dizemos que (A, m, μ) é uma álgebra em $\mathcal{C}$ se A é um objeto em $\mathcal{C}$, $m : A \otimes A \to A$ e $\mu : \mathbb{I} \to A$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "I\otimes m"'] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "m\otimes I"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"'] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A & \\
\mathbb{I} \otimes A \arrow[ur, "\mu\otimes I"] & A \arrow[l, "r_A"] \arrow[r, "l_A"'] \arrow[u, "m"] & A \otimes \mathbb{I} \arrow[ul, "I\otimes\mu"']
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Dualmente, temos a próxima definição.

Definição 2.6 *Dada uma categoria tensorial $\mathcal{C}$, dizemos que (C, Δ, ε) é uma coálgebra em $\mathcal{C}$ se C é um objeto em $\mathcal{C}$, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{I}$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que os diagramas abaixo*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes I"] \\
C \otimes C \arrow[r, "I\otimes\Delta"'] & C \otimes (C \otimes C) \arrow[r, "a_{C,C,C}"'] & (C \otimes C) \otimes C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "r_C"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "l_C"] & \\
\mathbb{I} \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes I"] \arrow[r, "I\otimes\varepsilon"'] & C \otimes \mathbb{I}
\end{tikzcd}$$

comutam.

Exemplo 2.14 Uma álgebra (respectivamente coálgebra) sobre um corpo k é uma álgebra (respectivamente coálgebra) na categoria dos k-espaços vetoriais.

Para os quatro exemplos seguintes, H é uma biálgebra. Nossa principal referência para maiores detalhes é [14].

Exemplo 2.15 A é uma álgebra em ${}_H\mathcal{M}$ se, e somente se, A é um H-módulo álgebra.

De fato, para quaisquer $a, b \in A$ e $h \in H$, podemos escrever as igualdades que seguem

$$m(h \cdot (a \otimes b)) = m(h_1 \cdot a \otimes h_2 \cdot b) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b),$$

$$h \cdot (m(a \otimes b)) = h \cdot (ab),$$

$$\mu(h \cdot 1) = \mu(\varepsilon(h)1) = \varepsilon(h)\mu(1) = \varepsilon(h)1$$

e

$$h \cdot \mu(1) = h \cdot 1.$$

Dessas igualdades, temos a equivalência acima.

Exemplo 2.16 A é uma álgebra em ${}^H\mathcal{M}$ se, e somente se, A é um H-comódulo álgebra.

Temos, para quaisquer $a, b \in A$, que

$$\rho(m(a \otimes b)) = \rho(ab) = (ab)_{(-1)} \otimes (ab)_{(0)},$$

$$(I \otimes m)\rho(a \otimes b) = (I \otimes m)(a_{(-1)}b_{(-1)} \otimes a_{(0)} \otimes b_{(0)}) = a_{(-1)}b_{(-1)} \otimes a_{(0)}b_{(0)},$$

$$\rho(\mu(1)) = \rho(1_A) \quad \text{e} \quad (I \otimes \mu)\rho(1) = (I \otimes \mu)(1_H \otimes 1) = 1_H \otimes 1_A.$$

A equivalência segue claramente das igualdades acima.

Exemplo 2.17 C é uma coálgebra em ${}_H\mathcal{M}$ se, e somente se, C é um H-módulo coálgebra.

De fato, sejam $h \in H$ e $c \in C$. Então

$$\Delta(h \cdot c) = (h \cdot c)_1 \otimes (h \cdot c)_2,$$

$$h \cdot \Delta(c) = h \cdot (c_1 \otimes c_2) = h_1 \cdot c_1 \otimes h_2 \cdot c_2$$

e

$$\varepsilon(h \cdot c) = h \cdot \varepsilon(c) = \varepsilon(h)\varepsilon(c).$$

Novamente, dessas igualdades segue a equivalência.

Exemplo 2.18 C é uma coálgebra em ${}^H\mathcal{M}$ se, e somente se, C é um H-comódulo coálgebra.

De fato, seja $c \in C$. Então

$$\rho(\Delta(c)) = \rho(c_1 \otimes c_2) = (c_1)_{(-1)}(c_2)_{(-1)} \otimes (c_1)_{(0)} \otimes (c_2)_{(0)},$$

$$(I \otimes \Delta)\rho(c) = (I \otimes \Delta)(c_{(-1)} \otimes c_{(0)}) = c_{(-1)} \otimes {c_{(0)}}_1 \otimes {c_{(0)}}_2,$$

$$\rho(\varepsilon(c)) = 1 \otimes \varepsilon(c) = \varepsilon(c)1 \otimes 1$$

e

$$(I \otimes \varepsilon)\rho(c) = (I \otimes \varepsilon)(c_{(-1)} \otimes c_{(0)}) = c_{(-1)} \otimes \varepsilon(c_{(0)}) = c_{(-1)}\varepsilon(c_{(0)}) \otimes 1.$$

Donde segue o resultado.

2.4 Categorias trançadas

Uma categoria trançada é um tipo especial de categoria tensorial, em que há mais um isomorfismo natural, chamado *trança*. Com a existência e as propriedades da trança conseguimos dar uma estrutura de álgebra para o produto tensorial de duas álgebras na tal categoria. Isso nos permite definir álgebras de Hopf trançadas, um dos principais temas desse trabalho.

Definição 2.7 *Uma categoria (tensorial) trançada é uma coleção* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r, c)$*, em que* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r)$ *é uma categoria tensorial e* c *é um isomorfismo natural entre os funtores* $\otimes$ *e* $\otimes\tau$ *tais que, para quaisquer* U, V, W *objetos em* $\mathcal{C}$*, os diagramas abaixo*

$$\begin{tikzcd}
 & (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "c_{U \otimes V, W}"'] & W \otimes (U \otimes V) \arrow[dr, "a_{W,U,V}"] & \\
U \otimes (V \otimes W) \arrow[ur, "a_{U,V,W}"] \arrow[dr, "I \otimes c_{V,W}"'] & & & (W \otimes U) \otimes V \\
 & U \otimes (W \otimes V) \arrow[r, "a_{U,W,V}"'] & (U \otimes W) \otimes V \arrow[ur, "c_{U,W} \otimes I"'] &
\end{tikzcd}$$

H1

$$\begin{tikzcd}
 & U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "c_{U, V \otimes W}"'] & (V \otimes W) \otimes U \arrow[dr, "a^{-1}_{V,W,U}"] & \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[ur, "a^{-1}_{U,V,W}"] \arrow[dr, "c_{U,V} \otimes I"'] & & & V \otimes (W \otimes U) \\
 & (V \otimes U) \otimes W \arrow[r, "a^{-1}_{V,U,W}"'] & V \otimes (U \otimes W) \arrow[ur, "I \otimes c_{U,W}"'] &
\end{tikzcd}$$

H2

comutam.

Na definição acima, o funtor $\otimes\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ associa cada objeto (U, V) em $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ao objeto $V \otimes U$ em $\mathcal{C}$. Assim como, cada morfismo (f, g) em $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ ao morfismo $g \otimes f$ em $\mathcal{C}$. Além disso, o fato dos diagramas comutarem é chamado *axiomas do hexágono*.

Se c é um isomorfismo natural que satisfaz os axiomas do hexágono, dizemos que c é uma *trança*. Observemos que o segundo hexágono pode ser obtido do primeiro hexágono substituindo o isomorfismo c por c^{-1}.

Exemplo 2.19 Seja $\mathcal{C}$ a categoria dos conjuntos. Já vimos no Exemplo 2.10 que $(\mathcal{C}, \times, \{y\}, a, l, r)$ é uma categoria tensorial. Para quaisquer conjuntos U, V em $\mathcal{C}$, definimos

$$\begin{array}{rccc} c_{U,V}: & U \times V & \to & V \times U \\ & (u, v) & \mapsto & (v, u). \end{array}$$

É claro que $c_{U,V}$ é isomorfismo em $\mathcal{C}$ (bijeção). Além disso, dados U, U', V, V' conjuntos em $\mathcal{C}$, $f : U \to U'$ e $g : V \to V'$ funções, é fácil ver que o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "c_{U,V}"] \arrow[d, "f \times g"'] & V \times U \arrow[d, "g \times f"] \\ U' \times V' \arrow[r, "c_{U',V'}"'] & V' \times U' \end{tikzcd}$$

comuta. Portanto, c é um isomorfismo natural. Mostremos que c satisfaz os axiomas do hexágono. Sejam U, V e W conjuntos, $u \in U, v \in V$ e $w \in W$. Então

$$\begin{aligned} a_{W,U,V} c_{U\times V,W} a_{U,V,W}(u, (v, w)) &= a_{W,U,V}(c_{U\times V,W}((u, v), w)) \\ &= a_{W,U,V}(w, (u, v)) \\ &= ((w, u), v) \\ &= (c_{U,W} \times I)((u, w), v) \\ &= (c_{U,W} \times I)(a_{U,W,V}(u, (w, v))) \\ &= (c_{U,W} \times I)a_{U,W,V}(I \times c_{V,W})(u, (v, w)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a^{-1}_{V,W,U} c_{U,V\times W} a^{-1}_{U,V,W}((u, v), w) &= a^{-1}_{V,W,U}(c_{U,V\times W}(u, (v, w))) \\ &= a^{-1}_{V,W,U}((v, w), u) \\ &= (v, (w, u)) \\ &= (I \times c_{U,W})(v, (u, w)) \\ &= (I \times c_{U,W})(a^{-1}_{V,U,W}((v, u), w)) \\ &= (I \times c_{U,W})a^{-1}_{V,U,W}(c_{U,V} \times I)((u, v), w). \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{C}, \times, \{y\}, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada.

Exemplo 2.20 Seja R um anel comutativo com unidade. Já vimos no Exemplo 2.11 que $({}_R\mathcal{M}, \otimes, R, a, l, r)$ é uma categoria tensorial. Para quaisquer U, V R-módulos, definimos

$$\begin{array}{rccc} c_{U,V}: & U \otimes V & \to & V \otimes U \\ & u \otimes v & \mapsto & v \otimes u. \end{array}$$

É claro que $c_{U,V}$ é isomorfismo em ${}_R\mathcal{M}$. A comutatividade do diagrama da definição de transformação natural e os axiomas do hexágono são verificados exatamente como no exemplo anterior, a menos de notação. Portanto, $({}_R\mathcal{M}, \otimes, R, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada. Nesse exemplo, em particular, se $R = k$ é um corpo e $\otimes = \otimes_k$, concluímos que a categoria dos k-espaços vetoriais é trançada.

Exemplo 2.21 Sejam k um corpo e H uma biálgebra cocomutativa. Vimos no Exemplo 2.12 que $({}_H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r)$ é uma categoria tensorial. Consideremos c definida como no exemplo anterior.

Sejam M, N H-módulos. É claro que $c_{M,N}$ é um isomorfismo de k-espaços vetoriais. Mostremos que $c_{M,N}$ é um H-morfismo, ou seja, $c_{M,N}(h \cdot (m \otimes n)) = h \cdot c_{M,N}(m \otimes n), \forall h \in H, \forall m \in m$ e $\forall n \in N$. Temos, lembrando que H é cocomutativa, que

$$\begin{aligned} c_{M,N}(h \cdot (m \otimes n)) &= c_{M,N}(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) = h_2 \cdot n \otimes h_1 \cdot m \\ &= h_1 \cdot n \otimes h_2 \cdot m = h \cdot (n \otimes m) \\ &= h \cdot (c_{M,N}(m \otimes n)). \end{aligned}$$

A comutatividade do diagrama da definição de transformação natural e os axiomas do hexágono são obtidos como feito no exemplo anterior. Portanto, $({}_H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada.

Exemplo 2.22 Sejam k um corpo e H uma biálgebra comutativa. Então $({}^H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r)$ é uma categoria tensorial, pelo Exemplo 2.13. Mostremos que $({}^H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada, em que c é definida como no Exemplo 2.20.

Sejam M, N H-comódulos. Como anteriormente, $c_{M,N}$ é um isomorfismo de k-espaços vetoriais. Mostremos que $c_{M,N}$ é um morfismo de H-comódulos, ou seja, $\rho c_{M,N}(m \otimes n) = (I \otimes c_{M,N})\rho(m \otimes n), \forall m \in M$ e $\forall n \in N$. De fato,

$$\begin{aligned} \rho c_{M,N}(m \otimes n) = {} & \rho(n \otimes m) = n_{(-1)} m_{(-1)} \otimes n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\ = {} & m_{(-1)} n_{(-1)} \otimes c_{M,N}(m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \quad (H \text{ é comutativa}) \\ = {} & (I \otimes c_{M,N})\rho(m \otimes n). \end{aligned}$$

Com respeito à comutatividade do diagrama da definição de transformação natural e os axiomas do hexágono, consideramos o que foi dito no Exemplo 2.20.

Por falta de ferramentas nesse ponto do trabalho, apresentamos um exemplo de categoria trançada cuja trança não é a trivial no Capítulo 3. Agora um exemplo de uma categoria tensorial que não é trançada.

Exemplo 2.23 Seja G um grupo não abeliano de ordem finita. Como $(kG)^*$ é uma biálgebra segue, pelo Exemplo 2.12, que a categoria dos $(kG)^*$-módulos à esquerda é uma categoria tensorial.

Mostremos que tal categoria não é trançada. Para isso, construímos V e W dois $(kG)^*$-módulos tais que $V \otimes W$ e $W \otimes V$ não são isomorfos como $(kG)^*$-módulos.

Como G não é abeliano, existem $g, h \in G$ tais que $gh \neq hg$. Consideremos $V = kp_g$ e $W = kp_h$, em que p_g e p_h são elementos da base dual para $(kG)^*$ tais que $p_g * p_h = p_g \delta_{g,h}$. Temos que

$$p_{gh} \cdot (V \otimes W) \neq 0, \text{ pois}$$

$$p_{gh} \cdot (p_g \otimes p_h) = \sum_{x \in G} (p_{(gh)x^{-1}} * p_g) \otimes (p_x * p_h) = p_g \otimes p_h$$

e

$$p_{gh} \cdot (W \otimes V) = 0, \text{ pois}$$

$$p_{gh} \cdot (p_h \otimes p_g) = \sum_{x \in G} (p_{(gh)x^{-1}} * p_h) \otimes (p_x * p_g) \overset{(*)}{=} 0.$$

Esclarecendo a igualdade $(*)$. Se supusermos que $p_{gh} \cdot (p_h \otimes p_g) \neq 0$ teríamos que ter, necessariamente, $x = g$. Mas isso nos daria então que $ghg^{-1} = h$, ou seja, $gh = hg$, o que é um absurdo, pois g e h não comutam. Assim, para tais V e W em ${}_{(kG)^*}\mathcal{M}$, não é possível definirmos um isomorfismo $c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$. Logo, ${}_{(kG)^*}\mathcal{M}$ não é uma categoria trançada.

Uma consequência importante dos axiomas de categoria trançada dada no teorema abaixo, é que, para quaisquer U, V e W objetos na categoria, omitindo o isomorfismo natural a, vale a igualdade

$$(c_{V,W} \otimes I)(I \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes I) = (I \otimes c_{U,V})(c_{U,W} \otimes I)(I \otimes c_{V,W}).$$

Teorema 2.1 ([8], Theorem 4.7) *Sejam U, V e W objetos em uma categoria trançada. Então o seguinte diagrama comuta e é chamado dodecágono*

$$\begin{tikzcd}
& U\otimes(V\otimes W) \arrow[dl, "a_{U,V,W}"'] \arrow[dr, "I\otimes c_{V,W}"] & \\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[d, "c_{U,V}\otimes I"'] & & U\otimes(W\otimes V) \arrow[d, "a_{U,W,V}"] \\
(V\otimes U)\otimes W \arrow[d, "a^{-1}_{V,U,W}"'] & & (U\otimes W)\otimes V \arrow[d, "c_{U,W}\otimes I"] \\
V\otimes(U\otimes W) \arrow[d, "I\otimes c_{U,W}"'] & & (W\otimes U)\otimes V \arrow[d, "a^{-1}_{W,U,V}"] \\
V\otimes(W\otimes U) \arrow[d, "a_{V,W,U}"'] & & W\otimes(U\otimes V) \arrow[d, "I\otimes c_{U,V}"] \\
(V\otimes W)\otimes U \arrow[dr, "c_{V,W}\otimes I"'] & & W\otimes(V\otimes U) \arrow[dl, "a_{W,V,U}"] \\
& (W\otimes V)\otimes U. &
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Para demonstrarmos tal comutatividade, "cortamos" o dodecágono em dois hexágonos e um quadrado, como na figura a seguir.

$$\begin{tikzcd}
& U\otimes(V\otimes W) \arrow[dl, "a_{U,V,W}"'] \arrow[dr, "I\otimes c_{V,W}"] \arrow[dddddl, dotted, "c_{U,V\otimes W}"] & \\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[d, "c_{U,V}\otimes I"'] & & U\otimes(W\otimes V) \arrow[d, "a_{U,W,V}"] \arrow[dddddl, dotted, "c_{U,W\otimes V}"'] \\
(V\otimes U)\otimes W \arrow[d, "a^{-1}_{V,U,W}"'] & & (U\otimes W)\otimes V \arrow[d, "c_{U,W}\otimes I"] \\
V\otimes(U\otimes W) \arrow[d, "I\otimes c_{U,W}"'] & & (W\otimes U)\otimes V \arrow[d, "a^{-1}_{W,U,V}"] \\
V\otimes(W\otimes U) \arrow[d, "a_{V,W,U}"'] & & W\otimes(U\otimes V) \arrow[d, "I\otimes c_{U,V}"] \\
(V\otimes W)\otimes U \arrow[dr, "c_{V,W}\otimes I"'] & & W\otimes(V\otimes U) \arrow[dl, "a_{W,V,U}"] \\
& (W\otimes V)\otimes U &
\end{tikzcd}$$

Temos que a parte do diagrama acima do quadrado é exatamente um hexágono do tipo $H2$ e como a categoria em questão é trançada, segue que

$$c_{U,V\otimes W} = a_{V,W,U}(I\otimes c_{U,W})a^{-1}_{V,U,W}(c_{U,V}\otimes I)a_{U,V,W}.$$

Da mesma forma, a parte do diagrama abaixo do quadrado é também um hexágono do tipo $H2$, donde concluímos que

$$c_{U,W\otimes V} = a_{W,V,U}(I\otimes c_{U,V})a^{-1}_{W,U,V}(c_{U,W}\otimes I)a_{U,W,V}.$$

Além disso, como c é uma transformação natural entre os funtores $\otimes$ e $\otimes\tau$, o quadrado comuta, ou seja,

$$c_{U,W\otimes V}(I\otimes c_{V,W}) = (c_{V,W}\otimes I)c_{U,V\otimes W}.$$

Usando as igualdades acima, temos que

$$\begin{aligned}
&(c_{V,W}\otimes I)a_{V,W,U}(I\otimes c_{U,W})a^{-1}_{V,U,W}(c_{U,V}\otimes I)a_{U,V,W} = \\
&\quad = (c_{V,W}\otimes I)c_{U,V\otimes W}\\
&\quad = c_{U,W\otimes V}(I\otimes c_{V,W})\\
&\quad = a_{W,V,U}(I\otimes c_{U,V})a^{-1}_{W,U,V}(c_{U,W}\otimes I)a_{U,W,V}(I\otimes c_{V,W}).
\end{aligned}$$

Portanto, o dodecágono comuta. ■

Essa parte do trabalho está sendo desenvolvida para mostrarmos que numa categoria trançada se um objeto possui dual à esquerda, então o mesmo possui dual à direita, e isso é o que diz o Teorema 2.2. Esse fato nos permite entender por que para uma categoria trançada ser rígida é pedido apenas que todo objeto possua dual à esquerda (veja [8], Ch.XIX, Definição 2.1).

Proposição 2.2 *Para qualquer objeto W em uma categoria trançada com unidade $\mathbb{I}$, os diagramas abaixo*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}\otimes W \arrow[rr, "c_{\mathbb{I},W}"] & & W\otimes\mathbb{I} \\
& W \arrow[ul, "r_W"] \arrow[ur, "l_W"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W\otimes\mathbb{I} \arrow[rr, "c_{W,\mathbb{I}}"] & & \mathbb{I}\otimes W \\
& W \arrow[ul, "l_W"] \arrow[ur, "r_W"'] &
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Demonstração: Sejam V e W objetos quaisquer na categoria. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V\otimes(\mathbb{I}\otimes W) \arrow[r, "a_{V,\mathbb{I},W}"] \arrow[dd, "I\otimes c_{\mathbb{I},W}"'] & (V\otimes\mathbb{I})\otimes W \arrow[r, "c_{V\otimes\mathbb{I},W}"] & W\otimes(V\otimes\mathbb{I}) \arrow[dr, "a_{W,V,\mathbb{I}}"] & \\
 & V\otimes W \arrow[ul, "I\otimes r_W"'] \arrow[u, "l_V\otimes I"'] \arrow[dl, "I\otimes l_W"'] \arrow[d, "l_{V\otimes W}"] \arrow[r, "c_{V,W}"] & W\otimes V \arrow[u, "I\otimes l_V"'] \arrow[d, "l_{W\otimes V}"] & (W\otimes V)\otimes\mathbb{I}. \arrow[dl, equal] \\
V\otimes(W\otimes\mathbb{I}) \arrow[r, "a_{V,W,\mathbb{I}}"'] & (V\otimes W)\otimes\mathbb{I} \arrow[r, "c_{V,W}\otimes I"'] & (W\otimes V)\otimes\mathbb{I} &
\end{tikzcd}$$

Mostremos que o triângulo maior à esquerda comuta, ou seja,

$$I\otimes l_W = (I\otimes c_{\mathbb{I},W})(I\otimes r_W). \qquad (\star)$$

Temos que o hexágono (parte externa do diagrama) é do tipo $H1$ e assim,

$$I\otimes c_{\mathbb{I},W} = a^{-1}_{V,W,\mathbb{I}}(c^{-1}_{V,W}\otimes I)a_{W,V,\mathbb{I}}c_{V\otimes\mathbb{I},W}a_{V,\mathbb{I},W}.$$

Os quadrados acima e abaixo (no diagrama) comutam pela naturalidade de c e l, respectivamente. Donde,

$$c_{V\otimes\mathbb{I},W}(l_V\otimes I) = (I\otimes l_V)c_{V,W} \quad \text{e} \quad l_{W\otimes V}c_{V,W} = (c_{V,W}\otimes I)l_{V\otimes W}.$$

O triângulo menor acima (no diagrama) comuta pelo axioma do triângulo. Daí,

$$l_V\otimes I = a_{V,\mathbb{I},W}(I\otimes r_W).$$

O triângulo menor abaixo (no diagrama) e o triângulo maior à direita comutam pela Proposição 2.1, ou seja,

$$I\otimes l_W = a^{-1}_{V,W,\mathbb{I}}l_{V\otimes W} \quad e \quad a_{W,V,\mathbb{I}}(I\otimes l_V) = l_{W\otimes V}.$$

Usando as igualdades acima, temos

$$\begin{aligned}
(I\otimes c_{\mathbb{I},W})(I\otimes r_W) &= a^{-1}_{V,W,\mathbb{I}}(c^{-1}_{V,W}\otimes I)a_{W,V,\mathbb{I}}c_{V\otimes\mathbb{I},W}a_{V,\mathbb{I},W}(I\otimes r_W)\\
&= a^{-1}_{V,W,\mathbb{I}}(c^{-1}_{V,W}\otimes I)a_{W,V,\mathbb{I}}c_{V\otimes\mathbb{I},W}(l_V\otimes I)\\
&= a^{-1}_{V,W,\mathbb{I}}(c^{-1}_{V,W}\otimes I)a_{W,V,\mathbb{I}}(I\otimes l_V)c_{V,W}\\
&= a^{-1}_{V,W,\mathbb{I}}(c^{-1}_{V,W}\otimes I)l_{W\otimes V}c_{V,W}\\
&= a^{-1}_{V,W,\mathbb{I}}(c^{-1}_{V,W}\otimes I)(c_{V,W}\otimes I)l_{V\otimes W}\\
&= a^{-1}_{V,W,\mathbb{I}}l_{V\otimes W}\\
&= I\otimes l_W.
\end{aligned}$$

Daí, fica provada a igualdade $(\star)$. Além disso, pela naturalidade de r os seguintes diagramas comutam

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "r_W"] \arrow[d, "l_W"'] & \mathbb{I} \otimes W \arrow[d, "I \otimes l_W"] \\
W \otimes \mathbb{I} \arrow[r, "r_{W \otimes \mathbb{I}}"'] & \mathbb{I} \otimes (W \otimes \mathbb{I})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "r_W"] \arrow[d, "c_{\mathbb{I},W} r_W"'] & \mathbb{I} \otimes W \arrow[d, "I \otimes c_{\mathbb{I},W} r_W"] \\
W \otimes \mathbb{I} \arrow[r, "r_{W \otimes \mathbb{I}}"'] & \mathbb{I} \otimes (W \otimes \mathbb{I}).
\end{tikzcd}
$$

Logo, $r^{-1}_{W \otimes \mathbb{I}}(I \otimes l_W) r_W = l_W$ e $(I \otimes c_{\mathbb{I},W} r_W) r_W = r_{W \otimes \mathbb{I}} c_{\mathbb{I},W} r_W$. Usando essas igualdades e a igualdade $(\star)$ para $V = \mathbb{I}$, temos

$$
\begin{aligned}
l_W &= r^{-1}_{W \otimes \mathbb{I}}(I \otimes l_W) r_W = r^{-1}_{W \otimes \mathbb{I}}(I \otimes c_{\mathbb{I},W})(I \otimes r_W) r_W \\
&= r^{-1}_{W \otimes \mathbb{I}}(I \otimes c_{\mathbb{I},W} r_W) r_W = r^{-1}_{W \otimes \mathbb{I}} r_{W \otimes \mathbb{I}} c_{\mathbb{I},W} r_W = c_{\mathbb{I},W} r_W.
\end{aligned}
$$

Portanto, o primeiro triângulo do enunciado comuta. Para mostrar que o segundo triângulo comuta, usamos argumentos semelhantes aplicados ao diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(V \otimes \mathbb{I}) \otimes W \arrow[r, "a^{-1}_{V,\mathbb{I},W}"] \arrow[dd, "c_{V,\mathbb{I}} \otimes I"'] & V \otimes (\mathbb{I} \otimes W) \arrow[r, "c_{V,\mathbb{I} \otimes W}"] & (\mathbb{I} \otimes W) \otimes V \arrow[dr, "a^{-1}_{\mathbb{I},W,V}"] & \\
& V \otimes W \arrow[ul, "l_V \otimes I"'] \arrow[u, "I \otimes r_W"'] \arrow[r, "c_{V,W}"] \arrow[d, "r_{V \otimes W}"] \arrow[dl, "r_V \otimes I"] & W \otimes V \arrow[u, "r_W \otimes I"'] \arrow[d, "r_{W \otimes V}"] & \mathbb{I} \otimes (W \otimes V). \arrow[dl, equal] \\
(\mathbb{I} \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a^{-1}_{\mathbb{I},V,W}"'] & \mathbb{I} \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "I \otimes c_{V,W}"'] & \mathbb{I} \otimes (W \otimes V) &
\end{tikzcd}
$$

■

Definição 2.8 *Seja V um objeto em uma categoria tensorial $\mathcal{C}$. Um dual à esquerda de V é uma tripla (V^*, e_V, b_V) em que V^* é um objeto em $\mathcal{C}$, $e_V : V^* \otimes V \to \mathbb{I}$ e $b_V : \mathbb{I} \to V \otimes V^*$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que as composições abaixo*

$$
V \xrightarrow{r_V} \mathbb{I} \otimes V \xrightarrow{b_V \otimes I} (V \otimes V^*) \otimes V \xrightarrow{a^{-1}_{V,V^*,V}} V \otimes (V^* \otimes V) \xrightarrow{I \otimes e_V} V \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{l^{-1}_V} V
$$

$$
V^* \xrightarrow{l_{V^*}} V^* \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{I \otimes b_V} V^* \otimes (V \otimes V^*) \xrightarrow{a_{V^*,V,V^*}} (V^* \otimes V) \otimes V^* \xrightarrow{e_V \otimes I} \mathbb{I} \otimes V^* \xrightarrow{r^{-1}_{V^*}} V^*
$$

são I_V e I_{V^*}, respectivamente.

Um dual à direita de V é uma tripla $({}^*V, e'_V, b'_V)$, em que ${}^*V$ é um objeto em $\mathcal{C}$, $e'_V : V \otimes {}^*V \to \mathbb{I}$ e $b'_V : \mathbb{I} \to {}^*V \otimes V$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que as composições abaixo

$$V \xrightarrow{l_V} V \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{I \otimes b'_V} V \otimes ({}^*V \otimes V) \xrightarrow{a_{V,{}^*V,V}} (V \otimes {}^*V) \otimes V \xrightarrow{e'_V \otimes I} \mathbb{I} \otimes V \xrightarrow{r_V^{-1}} V$$

$${}^*V \xrightarrow{r_{{}^*V}} \mathbb{I} \otimes {}^*V \xrightarrow{b'_V \otimes I} ({}^*V \otimes V) \otimes {}^*V \xrightarrow{a^{-1}_{{}^*V,V,{}^*V}} {}^*V \otimes (V \otimes {}^*V) \xrightarrow{I \otimes e'_V} {}^*V \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{l^{-1}_{{}^*V}} {}^*V$$

são I_V e $I_{{}^*V}$, respectivamente.

Exemplo 2.24 Sejam k um corpo e V um k-espaço vetorial de dimensão finita. Então V admite dual à esquerda na categoria dos k-espaços vetoriais de dimensão finita, ${}_k\mathcal{V}$.

De fato, definimos $V^* = Hom_{{}_k\mathcal{V}}(V, k)$ que é um k-espaço vetorial de dimensão finita. Sejam $\{v^{(1)}, \cdots, v^{(n)}\}$ uma base de V e $\{f^{(1)}, \cdots, f^{(n)}\}$ a base dual para V^*. Lembramos que são válidas, para quaisquer $v \in V$ e $f \in V^*$, as igualdades

$$v = \sum_{i=1}^{n} f^{(i)}(v)v^{(i)} \quad \text{e} \quad f = \sum_{i=1}^{n} f(v^{(i)})f^{(i)}.$$

Vamos usar essas igualdades, por exemplo, na prova do Teorema 3.5. Consideremos $e_V : V^* \otimes V \to k$ e $b_V : k \to V \otimes V^*$ definidos por $e_V(f \otimes v) = f(v)$ e $b_V(1) = \sum_{k=1}^{n} v^{(k)} \otimes f^{(k)}$. É claro que e_V e b_V são funções k-lineares.

Assim, para mostrarmos que (V^*, e_V, b_V) é um dual à esquerda de V basta verificarmos as composições. Sejam $v \in V$ e $f \in V^*$. Então

$$\begin{aligned}
&l_V^{-1}(I \otimes e_V)a^{-1}_{V,V^*,V}(b_V \otimes I)r_V(v) = \\
&\qquad = l_V^{-1}(I \otimes e_V)a^{-1}_{V,V^*,V}(b_V \otimes I)(1 \otimes v) \\
&\qquad = l_V^{-1}(I \otimes e_V)a^{-1}_{V,V^*,V}((\sum_{k=1}^{n} v^{(k)} \otimes f^{(k)}) \otimes v) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} l_V^{-1}(I \otimes e_V)(v^{(k)} \otimes (f^{(k)} \otimes v)) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} l_V^{-1}(v^{(k)} \otimes f^{(k)}(v)) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} v^{(k)} f^{(k)}(v) = v.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&r_{V^*}^{-1}(e_V \otimes I)a_{V^*,V,V^*}(I \otimes b_V)l_{V^*}(f) = \\
&\qquad = r_{V^*}^{-1}(e_V \otimes I)a_{V^*,V,V^*}(I \otimes b_V)(f \otimes 1) \\
&\qquad = r_{V^*}^{-1}(e_V \otimes I)a_{V^*,V,V^*}(f \otimes (\sum_{k=1}^{n} v^{(k)} \otimes f^{(k)})) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} r_{V^*}^{-1}(e_V \otimes I)((f \otimes v^{(k)}) \otimes f^{(k)}) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} r_{V^*}^{-1}(f(v^{(k)}) \otimes f^{(k)}) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} f(v^{(k)})f^{(k)} = f.
\end{aligned}
$$

Definição 2.9 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria tensorial. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma categoria rígida se todo objeto em $\mathcal{C}$ admite dual à esquerda e dual à direita.*

O próximo teorema nos diz que para uma categoria trançada ser rígida basta que todo objeto na categoria admita dual à esquerda.

Teorema 2.2 ([15], Proposition 2.105) *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria trançada e V um objeto em $\mathcal{C}$. Se V admite dual à esquerda, então V admite dual à direita.*

Demonstração: Seja (V^*, e_V, b_V) um dual à esquerda de V. Consideremos ${}^*V := V^*$. Como $\mathcal{C}$ é trançada, existem os isomorfismos $c_{V,V^*} : V \otimes V^* \to V^* \otimes V$ e $c_{V^*,V}^{-1} : V \otimes V^* \to V^* \otimes V$. Definimos e'_V e b'_V como as composições

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes V^* \arrow[r, "c_{V,V^*}"'] \arrow[rr, bend left, "e'_V"] & V^* \otimes V \arrow[r, "e_V"'] & \mathbb{I}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{I} \arrow[r, "b_V"'] \arrow[rr, bend left, "b'_V"] & V \otimes V^* \arrow[r, "c_{V^*,V}^{-1}"'] & V^* \otimes V .
\end{tikzcd}
$$

Assim, $e'_V = e_V c_{V,V^*}$ e $b'_V = c_{V^*,V}^{-1} b_V$ são morfismos em $\mathcal{C}$. Vamos mostrar que (V^*, e'_V, b'_V) é um dual à direita de V.

Primeiramente, como vale a comutatividade do dodecágono (Teorema 2.1) para quaisquer objetos de $\mathcal{C}$, em particular, vale para os objetos V, V^* e V. Logo,

$$
\begin{aligned}
&a_{V^*,V,V}^{-1}(c_{V,V^*} \otimes I)a_{V,V^*,V}(I \otimes c_{V^*,V}^{-1}) = \\
&(I \otimes c_{V,V}^{-1})a_{V^*,V,V}^{-1}(c_{V^*,V}^{-1} \otimes I)a_{V,V^*,V}(I \otimes c_{V,V^*})a_{V,V,V^*}^{-1}(c_{V,V} \otimes I)a_{V,V,V^*}.
\end{aligned}
$$

Além disso, por $H1$, usando os objetos V^*, V e V e por $H2$, usando os objetos V, V e V^*, seguem as respectivas igualdades

$$a_{V^*,V,V}(I \otimes c_{V,V}^{-1})a_{V^*,V,V}^{-1}(c_{V^*,V}^{-1} \otimes I)a_{V,V^*,V} = c_{V^* \otimes V,V}^{-1}$$

e

$$a_{V,V^*,V}(I \otimes c_{V,V^*})a_{V,V,V^*}^{-1}(c_{V,V} \otimes I)a_{V,V,V^*} = c_{V,V \otimes V^*}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&(c_{V,V^*} \otimes I)a_{V,V^*,V}(I \otimes c_{V^*,V}^{-1}) = \\
&= c_{V^* \otimes V,V}^{-1}(I \otimes c_{V,V^*})a_{V,V,V^*}^{-1}(c_{V,V} \otimes I)a_{V,V,V^*} \\
&= c_{V^* \otimes V,V}^{-1}a_{V,V^*,V}^{-1}a_{V,V^*,V}(I \otimes c_{V,V^*})a_{V,V,V^*}^{-1}(c_{V,V} \otimes I)a_{V,V,V^*} \\
&= c_{V^* \otimes V,V}^{-1}a_{V,V^*,V}^{-1}c_{V,V \otimes V^*}.
\end{aligned}$$

Chamemos a igualdade

$$(c_{V,V^*} \otimes I)a_{V,V^*,V}(I \otimes c_{V^*,V}^{-1}) = c_{V^* \otimes V,V}^{-1}a_{V,V^*,V}^{-1}c_{V,V \otimes V^*} \quad \text{de} \quad (\star).$$

Pela naturalidade de c e de c^{-1}, respectivamente, os diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
V \otimes \mathbb{I} \arrow[r, "c_{V,\mathbb{I}}"] \arrow[d, "I \otimes b_V"'] & \mathbb{I} \otimes V \arrow[d, "b_V \otimes I"] \\
V \otimes (V \otimes V^*) \arrow[r, "c_{V,V \otimes V^*}"'] & (V \otimes V^*) \otimes V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \otimes (V^* \otimes V) \arrow[r, "c_{V^* \otimes V,V}^{-1}"] \arrow[d, "I \otimes e_V"'] & (V^* \otimes V) \otimes V \arrow[d, "e_V \otimes I"] \\
V \otimes \mathbb{I} \arrow[r, "c_{\mathbb{I},V}^{-1}"'] & \mathbb{I} \otimes V.
\end{tikzcd}$$

Logo,

$$c_{V,V \otimes V^*}(I \otimes b_V) \overset{(1)}{=} (b_V \otimes I)c_{V,\mathbb{I}} \quad \text{e} \quad (e_V \otimes I)c_{V^* \otimes V,V}^{-1} \overset{(2)}{=} c_{\mathbb{I},V}^{-1}(I \otimes e_V).$$

Usando as definições de e'_V e de b'_V, a igualdade $(\star)$, as igualdades (1) e (2) acima, a Proposição 2.2 e o fato de (V^*, e_V, b_V) ser dual à esquerda, temos que

$$\begin{aligned}
&r_V^{-1}(e'_V \otimes I)a_{V,V^*,V}(I \otimes b'_V)l_V = \\
&\qquad = r_V^{-1}(e_V c_{V,V^*} \otimes I)a_{V,V^*,V}(I \otimes c_{V^*,V}^{-1}b_V)l_V \\
&\qquad = r_V^{-1}(e_V \otimes I)(c_{V,V^*} \otimes I)a_{V,V^*,V}(I \otimes c_{V^*,V}^{-1})(I \otimes b_V)l_V \\
&\qquad = r_V^{-1}(e_V \otimes I)c_{V^* \otimes V,V}^{-1}a_{V,V^*,V}^{-1}c_{V,V \otimes V^*}(I \otimes b_V)l_V \\
&\qquad = r_V^{-1}c_{\mathbb{I},V}^{-1}(I \otimes e_V)a_{V,V^*,V}^{-1}(b_V \otimes I)c_{V,\mathbb{I}}l_V \\
&\qquad = l_V^{-1}(I \otimes e_V)a_{V,V^*,V}^{-1}(b_V \otimes I)r_V = I_V.
\end{aligned}$$

Com isso, fica provado que a primeira composição da definição de dual à direita é igual a I_V. Com argumentos análogos mostra-se que a segunda composição é igual a I_{V^*}. ■

Exemplo 2.25 Seja k um corpo. A categoria dos k-espaços vetoriais de dimensão finita é uma categoria rígida. De fato, já vimos que todo objeto V nesta categoria admite dual à esquerda. Daí, sendo a categoria dos k-espaços vetoriais de dimensão finita trançada, segue que V admite dual à esquerda e à direita. Portanto, tal categoria é rígida.

Definição 2.10 *Uma categoria simétrica é uma categoria trançada* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r, c)$*, em que* $c_{U,V}c_{V,U} = I_{V\otimes U}$*, para quaisquer objetos* U *e* V *em* $\mathcal{C}$.

Exemplo 2.26 Seja $\mathcal{C}$ a categoria dos conjuntos. Vimos no Exemplo 2.19 que $(\mathcal{C}, \times, \{y\}, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada, com a trança dada por

$$\begin{array}{rccc} c_{U,V}: & U \times V & \to & V \times U \\ & (u,v) & \mapsto & (v,u) \end{array}$$

para quaisquer conjuntos U e V em $\mathcal{C}$. Sejam $u \in U$ e $v \in V$. Então

$$(c_{U,V}c_{V,U})(v,u) = c_{U,V}(u,v) = (v,u).$$

Logo, $c_{U,V}c_{V,U} = I_{V\times U}$, ou seja, $\mathcal{C}$ é uma categoria simétrica.

Exemplo 2.27 Sejam R um anel comutativo com unidade e ${}_R\mathcal{M}$ a categoria dos R-módulos. Vimos no Exemplo 2.20 que $({}_R\mathcal{M}, \otimes, R, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada, com trança a dada por

$$\begin{array}{rccc} c_{U,V}: & U \otimes V & \to & V \otimes U \\ & u \otimes v & \mapsto & v \otimes u. \end{array}$$

É fácil ver que tal categoria é simétrica.

Exemplo 2.28 Dada uma biálgebra cocomutativa H, vimos no Exemplo 2.21 que $({}_H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r, c)$ é trançada. Tal categoria é também simétrica.

Exemplo 2.29 Seja H uma biálgebra comutativa. Do Exemplo 2.22, segue que $({}^H\mathcal{M}, \otimes, k, a, l, r, c)$ é trançada e também simétrica.

No próximo capítulo estudamos a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld, que é um exemplo de categoria trançada que não é simétrica.

Capítulo 3

Módulos de Yetter-Drinfeld

Nesse capítulo, apresentamos e estudamos a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H, que é uma categoria trançada quando a antípoda de H for bijetora.

Nosso principal interesse em estudá-la é exatamente pelo fato de querermos definir álgebras de Hopf trançadas, o que é feito no Capítulo 4. Assim, considerando H com antípoda bijetora, faz sentido a definição de uma álgebra de Hopf trançada na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre H.

Baseamos nosso estudo aqui principalmente em [4], [12] e [13].

3.1 Definição e exemplos

Definição 3.1 *Seja H uma álgebra de Hopf sobre um corpo k. Um k-espaço vetorial M é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H se M é simultaneamente um H-módulo à esquerda e um H-comódulo à esquerda tal que a seguinte relação de compatibilidade é satisfeita*

$$(h \cdot m)_{(-1)} \otimes (h \cdot m)_{(0)} = \rho(h \cdot m) = h_1 m_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot m_{(0)},$$

para quaisquer $h \in H$ e $m \in M$.

Exemplo 3.1 Todo k-espaço vetorial é um módulo de Yetter-Drinfeld.

De fato, se V é um k-espaço vetorial, não é difícil ver que V é um H-módulo e um H-comódulo à esquerda via

$$h \cdot v = \varepsilon(h) v \quad \text{e} \quad \rho(v) = 1 \otimes v, \forall h \in H, \forall v \in V.$$

Mostremos que vale a relação de compatibilidade. Sejam $h \in H$ e $v \in V$. Então

$$\begin{aligned} h_1 v_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot v_{(0)} = & \quad h_1 1 S(h_3) \otimes h_2 \cdot v = h_1 S(h_3) \otimes \varepsilon(h_2) v \\ = & \quad h_1 S(h_3 \varepsilon(h_2)) \otimes v = h_1 S(h_2) \otimes v \\ = & \quad 1\varepsilon(h) \otimes v = 1 \otimes \varepsilon(h) v \\ = & \quad 1 \otimes h \cdot v = \rho(h \cdot v). \end{aligned}$$

Os próximos dois exemplos são usados na demonstração de um importante teorema desse capítulo, onde mostramos que a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld só é simétrica no caso em que H é a álgebra de Hopf trivial (isto é, $H = k$), esse é um resultado devido à Bodo Pareigis (veja [12]).

Exemplo 3.2 Seja H uma álgebra de Hopf. Consideremos H com as estruturas de H-módulo e de H-comódulo dadas, respectivamente, por

$$h \cdot x = h_1 x S(h_2) \quad \text{e} \quad \rho(x) = x_1 \otimes x_2, \quad \text{para quaisquer} \quad h, x \in H.$$

Mostremos que H com tais estruturas é um módulo de Yetter-Drinfeld. De fato, $\cdot$ definido dessa forma dá a H uma estrutura de H-módulo. Sejam $h, g, x \in H$. Então

$$\begin{aligned} h \cdot (g \cdot x) = & \quad h \cdot (g_1 x S(g_2)) = h_1 g_1 x S(g_2) S(h_2) \\ = & \quad h_1 g_1 x S(h_2 g_2) = (hg)_1 x S((hg)_2) = (hg) \cdot x \end{aligned}$$

e

$$1 \cdot x = 1x1 = x, \quad \text{pois} \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1.$$

Claramente H é um H-comódulo, pois $\rho = \Delta$, que é a estrutura de coálgebra de H.

Verifiquemos a relação de compatibilidade. Sejam $h, x \in H$. Então

$$\begin{aligned} \rho(h \cdot x) = & \quad \rho(h_1 x S(h_2)) = (h_1 x S(h_2))_1 \otimes (h_1 x S(h_2))_2 \\ = & \quad h_{1_1} x_1 S(h_2)_1 \otimes h_{1_2} x_2 S(h_2)_2 = h_{1_1} x_1 S(h_{2_2}) \otimes h_{1_2} x_2 S(h_{2_1}) \\ = & \quad h_1 x_1 S(h_4) \otimes h_2 x_2 S(h_3) = h_1 x_1 S(h_3) \otimes h_{2_1} x_2 S(h_{2_2}) \\ = & \quad h_1 x_1 S(h_3) \otimes h_2 \cdot x_2 = h_1 x_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot x_{(0)}. \end{aligned}$$

A ação acima é conhecida como *ação adjunta à esquerda* de H sobre si mesma.

Exemplo 3.3 Seja H uma álgebra de Hopf. Consideremos em H a ação trivial que é dada por $h \cdot x = hx$ e a estrutura de H-comódulo dada por $\rho(x) = x_1 S(x_3) \otimes x_2$, para quaisquer $h, x \in H$. Mostremos que H com tais estruturas é um módulo de Yetter-Drinfeld.

Verifiquemos que ρ dá a H uma estrutura de H-comódulo à esquerda. Seja $x \in H$. Então

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)\rho(x) = &\ (\Delta \otimes I)(x_1 S(x_3) \otimes x_2)\\
= &\ (x_1 S(x_3))_1 \otimes (x_1 S(x_3))_2 \otimes x_2\\
= &\ x_{1_1} S(x_3)_1 \otimes x_{1_2} S(x_3)_2 \otimes x_2\\
= &\ x_{1_1} S(x_{3_2}) \otimes x_{1_2} S(x_{3_1}) \otimes x_2\\
= &\ x_1 S(x_5) \otimes x_2 S(x_4) \otimes x_3\\
= &\ x_1 S(x_3) \otimes x_{2_1} S(x_{2_3}) \otimes x_{2_2}\\
= &\ x_1 S(x_3) \otimes \rho(x_2) = (I \otimes \rho)(x_1 S(x_3) \otimes x_2)\\
= &\ (I \otimes \rho)\rho(x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes I)\rho(x) = &\ (\varepsilon \otimes I)(x_1 S(x_3) \otimes x_2) = \varepsilon(x_1 S(x_3))x_2\\
= &\ \varepsilon(x_1)\varepsilon(S(x_3))x_2 = \varepsilon(x_1)\varepsilon(x_3)x_2 = \varepsilon(x_1)\varepsilon(x_3)x_2 = x.
\end{aligned}$$

Verifiquemos a relação de compatibilidade. Sejam $h, x \in H$. Então

$$\begin{aligned}
\rho(h \cdot x) = &\ \rho(hx) = (hx)_1 S((hx)_3) \otimes (hx)_2 = h_1 x_1 S(h_3 x_3) \otimes h_2 x_2\\
= &\ h_1 x_1 S(x_3) S(h_3) \otimes h_2 x_2 = h_1 x_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot x_{(0)}.
\end{aligned}$$

A coação acima é conhecida como *coação coadjunta à esquerda* de H em si mesma.

3.2 A categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$

Denotamos por ${}_H^H\mathcal{YD}$ a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H, em que os objetos são módulos de Yetter-Drinfeld e os morfismos são aqueles que, simultaneamente, são morfismos de H-módulos e de H-comódulos.

Teorema 3.1 *Seja H uma álgebra de Hopf. Então ${}_H^H\mathcal{YD}$ é uma categoria tensorial.*

Demonstração: Consideremos $\otimes = \otimes_k$ o produto tensorial usual sobre k. Para que o funtor $\otimes : {}_H^H\mathcal{YD} \times {}_H^H\mathcal{YD} \to {}_H^H\mathcal{YD}$ esteja bem definido, precisamos mostrar que o produto tensorial de dois objetos e de dois morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$ também são objeto e morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$, respectivamente.

Sejam M e N em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Mostremos que $M \otimes N$ é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H. Sabemos que $M \otimes N$ é um H-módulo à esquerda com a ação

$$h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n, \forall h \in H, \forall m \in M \quad \text{e} \quad \forall n \in N.$$

Também, $M \otimes N$ é um H-comódulo à esquerda via $\rho : M \otimes N \to H \otimes M \otimes N$ dada por

$$\rho(m \otimes n) = m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}.$$

Verifiquemos a relação de compatibilidade, isto é,

$$\rho(h \cdot (m \otimes n)) = h_1(m \otimes n)_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m \otimes n)_{(0)}.$$

Como M e N são módulos de Yetter-Drinfeld, temos que

$$\rho(h_1 \cdot m) = h_{1_1}m_{(-1)}S(h_{1_3}) \otimes h_{1_2} \cdot m_{(0)}$$

e

$$\rho(h_2 \cdot n) = h_{2_1}n_{(-1)}S(h_{2_3}) \otimes h_{2_2} \cdot n_{(0)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\rho(h \cdot (m \otimes n)) = \quad & \rho(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \\
= \quad & (h_1 \cdot m)_{(-1)}(h_2 \cdot n)_{(-1)} \otimes (h_1 \cdot m)_{(0)} \otimes (h_2 \cdot n)_{(0)} \\
= \quad & h_{1_1}m_{(-1)}S(h_{1_3})h_{2_1}n_{(-1)}S(h_{2_3}) \otimes h_{1_2} \cdot m_{(0)} \otimes h_{2_2} \cdot n_{(0)} \\
= \quad & h_1m_{(-1)}S(h_3)h_4n_{(-1)}S(h_6) \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \otimes h_5 \cdot n_{(0)} \\
= \quad & h_1m_{(-1)}\varepsilon(h_3)1n_{(-1)}S(h_5) \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \otimes h_4 \cdot n_{(0)} \\
= \quad & h_1m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_5) \otimes \varepsilon(h_3)h_2 \cdot m_{(0)} \otimes h_4 \cdot n_{(0)} \\
= \quad & h_1m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_4) \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \otimes h_3 \cdot n_{(0)} \\
= \quad & h_1m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_3) \otimes h_{2_1} \cdot m_{(0)} \otimes h_{2_2} \cdot n_{(0)} \\
= \quad & h_1m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
= \quad & h_1(m \otimes n)_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m \otimes n)_{(0)}.
\end{aligned}$$

Logo, $M \otimes N$ é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H.

Agora, dados f e g morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$ sabemos dos Exemplos 2.12 e 2.13 que $f \otimes g$ é morfismo de H-módulos e de H-comódulos. Portanto, $f \otimes g$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Como o corpo k é um k-espaço vetorial segue, do Exemplo 3.1, que k é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Definimos $\mathbb{I} := k$.

Para quaisquer M, N, P em ${}_H^H\mathcal{YD}$, consideremos

$$a_{M,N,P} : M \otimes (N \otimes P) \to (M \otimes N) \otimes P,$$

$$l_M : M \to M \otimes k \quad \text{e} \quad r_M : M \to k \otimes M,$$

dadas, respectivamente, por $a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)) = (m \otimes n) \otimes p$, $l_M(m) = m \otimes 1$ e $r_M(m) = 1 \otimes m$. Novamente, pelos Exemplos 2.12 e 2.13, segue que $a_{M,N,P}, l_M$ e r_M são morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, assim como satisfazem os axiomas do pentágono e do triângulo.

Lembramos que, se f é um morfismo de módulos (respectivamente de comódulos) e f é bijetor, então f^{-1} é também morfismo de módulos (respectivamente de comódulos). Como $a_{M,N,P}$, l_M e r_M são bijetoras (pois são isomorfismos de k-módulos) segue que tais morfismos são isomorfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

As naturalidades de a, l e r também foram provadas no Capítulo 2, isto é, para quaisquer M, N, P, M', N', P' em ${}_H^H\mathcal{YD}$, $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ e $h : P \to P'$ morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, os diagramas abaixo

$$\begin{tikzcd}
M \otimes (N \otimes P) \arrow[r, "a_{M,N,P}"] \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"'] & (M \otimes N) \otimes P \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"] \\
M' \otimes (N' \otimes P') \arrow[r, "a_{M',N',P'}"'] & (M' \otimes N') \otimes P'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "l_M"] \arrow[d, "f"'] & M \otimes k \arrow[d, "f\otimes I"] \\
M' \arrow[r, "l_{M'}"'] & M' \otimes k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "r_M"] \arrow[d, "f"'] & k \otimes M \arrow[d, "I\otimes f"] \\
M' \arrow[r, "r_{M'}"'] & k \otimes M'
\end{tikzcd}$$

comutam. Portanto, $({}_H^H\mathcal{YD}, \otimes, k, a, l, r)$ é uma categoria tensorial. $\blacksquare$

O corolário e a proposição abaixo são fundamentais na construção da álgebra de Nichols de um módulo de Yetter-Drinfeld, feita no último capítulo desse trabalho. O corolário nos dá uma ação e uma coação para que o produto tensorial de uma quantidade finita de módulos de Yetter-Drinfeld seja um módulo de Yetter-Drinfeld. A proposição nos diz que a soma direta qualquer de módulos de Yetter-Drinfeld é também um módulo de Yetter-Drinfeld.

Corolário 3.1 *Sejam $M_1, \cdots, M_r$ objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Então $M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$ é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$ com ação e coação dadas por*

$$h \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) = h_1 \cdot m_1 \otimes \cdots \otimes h_r \cdot m_r \quad e$$
$$\rho(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) = (m_1)_{(-1)} \cdots (m_r)_{(-1)} \otimes (m_1)_{(0)} \otimes \cdots \otimes (m_r)_{(0)},$$

para quaisquer $h \in H, m_i \in M_i, i \in \{1, \cdots, r\}$.

Demonstração: Pelo teorema acima, sabemos que o resultado é válido para $r = 2$. Suponhamos que vale para um r fixado ($r \geq 2$) e mostremos que vale para $r+1$. Por hipótese de indução $M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$ é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$ e como M_{r+1} também o é, novamente pelo teorema acima, temos que $(M_1 \otimes \cdots \otimes M_r) \otimes M_{r+1}$ é um módulo de Yetter-Drinfeld via

$h \cdot ((m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) \otimes m_{r+1}) = (h_1 \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)) \otimes (h_2 \cdot m_{r+1})$
$= (h_1 \cdot m_1) \otimes \cdots \otimes (h_r \cdot m_r) \otimes (h_{r+1} \cdot m_{r+1})$
e
$\rho((m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) \otimes m_{r+1}) =$
$= (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)_{(-1)}(m_{r+1})_{(-1)} \otimes (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)_{(0)} \otimes (m_{r+1})_{(0)}$
$= (m_1)_{(-1)} \cdots (m_r)_{(-1)}(m_{r+1})_{(-1)} \otimes (m_1)_{(0)} \otimes \cdots \otimes (m_r)_{(0)} \otimes (m_{r+1})_{(0)}$.

Verifiquemos agora a relação de compatibilidade. Seja $h \in H$. Então

$\rho(h \cdot ((m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) \otimes m_{r+1})) = \rho((h_1 \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)) \otimes (h_2 \cdot m_{r+1}))$
$= (h_1 \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r))_{(-1)}(h_2 \cdot m_{r+1})_{(-1)} \otimes (h_1 \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r))_{(0)} \otimes$
$(h_2 \cdot m_{r+1})_{(0)}$
$= h_1(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)_{(-1)}S(h_3)h_4(m_{r+1})_{(-1)}S(h_6) \otimes h_2 \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes$
$m_r)_{(0)} \otimes h_5 \cdot (m_{r+1})_{(0)}$
$= h_1(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)_{(-1)}\varepsilon(h_3)1(m_{r+1})_{(-1)}S(h_5) \otimes h_2 \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)_{(0)} \otimes$
$h_4 \cdot (m_{r+1})_{(0)}$
$= h_1(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)_{(-1)}(m_{r+1})_{(-1)}S(h_4) \otimes h_2 \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)_{(0)} \otimes$
$h_3 \cdot (m_{r+1})_{(0)}$
$= h_1(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)_{(-1)}(m_{r+1})_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot ((m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)_{(0)} \otimes$
$(m_{r+1})_{(0)})$
$= h_1(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r \otimes m_{r+1})_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_r \otimes m_{r+1})_{(0)}$.

Portanto, $M_1 \otimes \cdots \otimes M_{r+1}$ é um módulo de Yetter-Drinfeld. ■

Proposição 3.1 *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Então $M = \oplus_{i \in I} M_i$ é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Como $\{M_i\}_{i \in I}$ é uma família de objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, em particular, $\{M_i\}_{i \in I}$ é uma família de H-módulos à esquerda e uma família de H-comódulos à esquerda.

Assim, M possui uma estrutura de H-módulo à esquerda dada por $h \cdot \left(\sum_{i \in I} m_i\right) = \sum_{i \in I} h \cdot m_i$, para quaisquer $h \in H$ e $\sum_{i \in I} m_i \in M$ (aqui, por abuso, estamos escrevendo um elemento qualquer da soma direta como sendo $\sum_{i \in I} m_i$, com $m_i \in M_i$, mas é óbvio que a soma é finita, pela definição de soma direta).

Além disso, M possui uma estrutura de H-comódulo à esquerda $\rho : M \to H \otimes M$ tal que $\rho\iota_j = (I \otimes \iota_j)\rho_j$ para todo $j \in I$, em que $\iota_j : M_j \to M$ é a inclusão canônica e $\rho_j : M_j \to H \otimes M_j$ é a estrutura de H-comódulo à esquerda de M_j (veja [5], Proposition 2.1.18).

Mostremos que vale a relação de compatibilidade. Fixemos $j \in I$ e sejam $m_j \in M_j$ e $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
\rho(h \cdot m_j) = &\ \rho(h \cdot \iota_j(m_j)) = \rho(\iota_j(h \cdot m_j)) = (I \otimes \iota_j)\rho_j(h \cdot m_j) \\
= &\ (I \otimes \iota_j)(h_1(m_j)_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m_j)_{(0)}) \\
= &\ h_1(m_j)_{(-1)}S(h_3) \otimes \iota_j(h_2 \cdot (m_j)_{(0)}) \\
= &\ h_1(m_j)_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot \iota_j((m_j)_{(0)}) \\
= &\ h_1(m_j)_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot (m_j)_{(0)}.
\end{aligned}$$

Portanto, M é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$. ■

Definição 3.2 *Seja M um módulo de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H. Dizemos que $N \subseteq M$ é um submódulo de Yetter-Drinfeld de M se N é um H-submódulo e um H-subcomódulo de M.*

A próxima definição é usada somente no Capítulo 5. Decidimos apresentá-la desde já por termos os pré-requisitos para entendê-la e por ser esse o capítulo sobre módulos de Yetter-Drinfeld.

Definição 3.3 *Seja V um módulo de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H. Dizemos que V é um módulo de Yetter-Drinfeld graduado se $V = \oplus_{n\geq 0}V(n)$ é um espaço vetorial graduado e $V(n)$ é submódulo de Yetter-Drinfeld de V, para todo $n \geq 0$.*

Proposição 3.2 *Sejam M um módulo de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H e N um submódulo de Yetter-Drinfeld de M. Então, $\dfrac{M}{N}$ é um módulo de Yetter-Drinfeld e a projeção canônica $\pi : M \to \dfrac{M}{N}$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Como N é um H-submódulo e um H-subcomódulo de M, sabemos que $\dfrac{M}{N}$ possui estruturas de H-módulo e de H-comódulo dadas, respectivamente, por $h \cdot \overline{m} = \overline{h \cdot m}$ e $\rho(\overline{m}) = m_{(-1)} \otimes \overline{m_{(0)}}$, para quaisquer $h \in H$ e $m \in M$. A projeção canônica π é um morfismo de H-módulos e de H-comódulos e portanto, um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Basta mostrarmos a relação de compatibilidade. Sejam $h \in H$ e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned}
\rho(h \cdot \overline{m}) = &\ \rho(\overline{h \cdot m}) = (h \cdot m)_{(-1)} \otimes \overline{(h \cdot m)_{(0)}} \\
= &\ h_1 m_{(-1)}S(h_3) \otimes \overline{h_2 \cdot m_{(0)}} \\
= &\ h_1 m_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot \overline{m_{(0)}} \\
= &\ h_1 \overline{m}_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2 \cdot \overline{m}_{(0)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{M}{N}$ é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$. ■

O próximo teorema segue diretamente dos teoremas do isomorfismo para módulos e para comódulos.

Teorema 3.2 *Sejam M, N objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$ e $f : M \to N$ um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Então $ker(f)$ e $f(M)$ são submódulos de Yetter-Drinfeld de M e N, respectivamente. Além disso, $\dfrac{M}{ker(f)} \cong f(M)$, isto é, são isomorfos como módulos de Yetter-Drinfeld.*

O Teorema 3.1 nos diz que a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf qualquer H é uma categoria tensorial. Ao colocarmos hipóteses sobre a álgebra de Hopf, são obtidas propriedades para a categoria. O teorema abaixo retrata o que acabamos de dizer. Ao exigirmos que a antípoda de H seja bijetora, a categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$ torna-se trançada.

Teorema 3.3 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Então $({}_H^H\mathcal{YD}, \otimes, k, a, l, r)$ é uma categoria tensorial trançada.*

Demonstração: Definimos, para quaisquer M e N em ${}_H^H\mathcal{YD}$, a função $c_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M$ por $c_{M,N}(m \otimes n) = m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}$. Sejam $h \in H$, $m \in M$ e $n \in N$. Então

$$\begin{aligned}
c_{M,N}(h \cdot (m \otimes n)) &= c_{M,N}(h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n) \\
&= (h_1 \cdot m)_{(-1)} \cdot (h_2 \cdot n) \otimes (h_1 \cdot m)_{(0)} \\
&= (h_{1_1} m_{(-1)} S(h_{1_3})) \cdot (h_2 \cdot n) \otimes h_{1_2} \cdot m_{(0)} \\
&= (h_1 m_{(-1)} S(h_3) h_4) \cdot n \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \\
&= (h_1 m_{(-1)} \varepsilon(h_3) 1) \cdot n \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \\
&= (h_1 m_{(-1)}) \cdot n \otimes (\varepsilon(h_3) h_2) \cdot m_{(0)} \\
&= h_1 \cdot (m_{(-1)} \cdot n) \otimes h_2 \cdot m_{(0)} \\
&= h \cdot (m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}) \\
&= h \cdot c_{M,N}(m \otimes n).
\end{aligned}$$

Logo, $c_{M,N}$ é um morfismo de H-módulos. Além disso,

$$\begin{aligned}
&\rho c_{M,N}(m \otimes n) = \rho(m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}) \\
&= (m_{(-1)} \cdot n)_{(-1)} (m_{(0)})_{(-1)} \otimes (m_{(-1)} \cdot n)_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(0)} \\
&= (m_{(-1)})_1 n_{(-1)} S((m_{(-1)})_3)(m_{(0)})_{(-1)} \otimes (m_{(-1)})_2 \cdot n_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(0)} \\
&= m_{(-4)} n_{(-1)} S(m_{(-2)}) m_{(-1)} \otimes m_{(-3)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= m_{(-3)} n_{(-1)} S((m_{(-1)})_1)(m_{(-1)})_2 \otimes m_{(-2)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= m_{(-3)} n_{(-1)} \varepsilon(m_{(-1)}) 1 \otimes m_{(-2)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m_{(-3)}n_{(-1)} \otimes \varepsilon(m_{(-1)})m_{(-2)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}\\
&= m_{(-2)}n_{(-1)} \otimes m_{(-1)} \cdot n_{(0)} \otimes m_{(0)}\\
&\overset{(*)}{=} m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(-1)} \cdot n_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(0)}\\
&= (I \otimes c_{M,N})(m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)})\\
&= (I \otimes c_{M,N})\rho(m \otimes n),
\end{aligned}
$$

na igualdade $(*)$, usamos que M é um H-comódulo.

Logo, $c_{M,N}$ é um morfismo de H-comódulos e portanto, $c_{M,N}$ é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Agora verifiquemos que c é uma transformação natural entre os funtores $\otimes$ e $\otimes\tau$. Sejam M, N, M', N' em ${}^H_H\mathcal{YD}$, $f : M \to M'$ e $g : N \to N'$ morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então o diagrama abaixo

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes N \arrow[r, "c_{M,N}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & N \otimes M \arrow[d, "g\otimes f"] \\
M' \otimes N' \arrow[r, "c_{M',N'}"'] & N' \otimes M'
\end{tikzcd}
$$

comuta. Sejam $m \in M$ e $n \in N$. Então

$$
\begin{aligned}
c_{M',N'}(f \otimes g)(m \otimes n) &= c_{M',N'}(f(m) \otimes g(n))\\
&= f(m)_{(-1)} \cdot g(n) \otimes f(m)_{(0)}\\
&\overset{(\dagger)}{=} m_{(-1)} \cdot g(n) \otimes f(m_{(0)})\\
&= g(m_{(-1)} \cdot n) \otimes f(m_{(0)})\\
&= (g \otimes f)(m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)})\\
&= (g \otimes f)c_{M,N}(m \otimes n),
\end{aligned}
$$

na igualdade $(\dagger)$ usamos que f é morfismo de H-comódulos.

Mostremos que c é um isomorfismo natural. Para quaisquer M, N em ${}^H_H\mathcal{YD}$, definimos $c^{-1}_{M,N} : N \otimes M \to M \otimes N$ por

$$c^{-1}_{M,N}(n \otimes m) = m_{(0)} \otimes S^{-1}(m_{(-1)}) \cdot n.$$

Temos que $c^{-1}_{M,N}c_{M,N} = I_{M\otimes N}$ e $c_{M,N}c^{-1}_{M,N} = I_{N\otimes M}$. De fato, sejam $m \in M$ e $n \in N$. Então

$$
\begin{aligned}
c^{-1}_{M,N}c_{M,N}(m \otimes n) &= c^{-1}_{M,N}(m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)})\\
&= (m_{(0)})_{(0)} \otimes S^{-1}((m_{(0)})_{(-1)}) \cdot (m_{(-1)} \cdot n)\\
&= m_{(0)} \otimes (S^{-1}(m_{(-1)})m_{(-2)}) \cdot n\\
&= m_{(0)} \otimes (S^{-1}((m_{(-1)})_2)(m_{(-1)})_1) \cdot n\\
&\overset{(\star)}{=} m_{(0)} \otimes \varepsilon(m_{(-1)})1 \cdot n\\
&= m_{(0)}\varepsilon(m_{(-1)}) \otimes n = m \otimes n,
\end{aligned}
$$

a igualdade $(\star)$ usa o fato de que S^{-1} é antípoda para H^{cop}, e

$$\begin{aligned}
c_{M,N}c_{M,N}^{-1}(n \otimes m) = & \quad c_{M,N}(m_{(0)} \otimes S^{-1}(m_{(-1)}) \cdot n) \\
= & \quad (m_{(0)})_{(-1)} \cdot (S^{-1}(m_{(-1)}) \cdot n) \otimes (m_{(0)})_{(0)} \\
= & \quad (m_{(-1)}S^{-1}(m_{(-2)})) \cdot n \otimes m_{(0)} \\
= & \quad \varepsilon(m_{(-1)})1 \cdot n \otimes m_{(0)} \\
= & \quad n \otimes \varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)} = n \otimes m.
\end{aligned}$$

Assim, $c_{M,N}^{-1}$ é a inversa de $c_{M,N}$ e como essa é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$, segue que $c_{M,N}^{-1}$ também o é. Portanto c é um isomorfismo natural.

Agora basta mostrarmos que c satisfaz os axiomas do hexágono. Sejam M, N, P objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$. Então

$$\begin{aligned}
&(c_{M,P} \otimes I)a_{M,P,N}(I \otimes c_{N,P})(m \otimes (n \otimes p)) = \\
&\quad = (c_{M,P} \otimes I)a_{M,P,N}(m \otimes (n_{(-1)} \cdot p \otimes n_{(0)})) \\
&\quad = (c_{M,P} \otimes I)((m \otimes n_{(-1)} \cdot p) \otimes n_{(0)}) \\
&\quad = (m_{(-1)} \cdot (n_{(-1)} \cdot p) \otimes m_{(0)}) \otimes n_{(0)} \\
&\quad = ((m_{(-1)}n_{(-1)}) \cdot p \otimes m_{(0)}) \otimes n_{(0)} \\
&\quad = a_{P,M,N}((m_{(-1)}n_{(-1)}) \cdot p \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)})) \\
&\quad = a_{P,M,N}((m \otimes n)_{(-1)} \cdot p \otimes (m \otimes n)_{(0)}) \\
&\quad = a_{P,M,N}(c_{M \otimes N,P}((m \otimes n) \otimes p)) \\
&\quad = a_{P,M,N}c_{M \otimes N,P}a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&(I \otimes c_{M,P})a_{N,M,P}^{-1}(c_{M,N} \otimes I)((m \otimes n) \otimes p) = \\
&\quad = (I \otimes c_{M,P})a_{N,M,P}^{-1}((m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)}) \otimes p) \\
&\quad = (I \otimes c_{M,P})(m_{(-1)} \cdot n \otimes (m_{(0)} \otimes p)) \\
&\quad = m_{(-1)} \cdot n \otimes ((m_{(0)})_{(-1)} \cdot p \otimes (m_{(0)})_{(0)}) \\
&\quad = m_{(-2)} \cdot n \otimes (m_{(-1)} \cdot p \otimes m_{(0)}) \\
&\quad = a_{N,P,M}^{-1}((m_{(-2)} \cdot n \otimes m_{(-1)} \cdot p) \otimes m_{(0)}) \\
&\quad = a_{N,P,M}^{-1}(((m_{(-1)})_1 \cdot n \otimes (m_{(-1)})_2 \cdot p) \otimes m_{(0)}) \\
&\quad = a_{N,P,M}^{-1}(m_{(-1)} \cdot (n \otimes p) \otimes m_{(0)}) \\
&\quad = a_{N,P,M}^{-1}(c_{M,N \otimes P}(m \otimes (n \otimes p))) \\
&\quad = a_{N,P,M}^{-1}c_{M,N \otimes P}a_{M,N,P}^{-1}((m \otimes n) \otimes p).
\end{aligned}$$

Portanto, $({}_H^H\mathcal{YD}, \otimes, k, a, l, r, c)$ é uma categoria trançada. ∎

O próximo teorema nos diz que se a álgebra de Hopf não for trivial, então a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld não é simétrica.

Assim, produzimos exemplos de categorias que são trançadas, mas não são simétricas.

Teorema 3.4 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora tal que ${}_H^H\mathcal{YD}$ seja uma categoria simétrica. Então $H \cong k$.*

Demonstração: Sejam $M := H$ com $h \cdot x = h_1 x S(h_2)$ e $\rho(x) = x_1 \otimes x_2$ e $N := H$ com $h \cdot x = hx$ e $\rho(x) = x_1 S(x_3) \otimes x_2$, para quaisquer $h, x \in H$. Vimos nos Exemplos 3.2 e 3.3 que M e N são objetos em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Seja $x \in H$. Consideremos $1 \otimes x \in N \otimes M$. Como ${}_H^H\mathcal{YD}$ é simétrica, temos que $(c_{M,N} c_{N,M})(1 \otimes x) = 1 \otimes x$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} c_{M,N} c_{N,M}(1 \otimes x) &= c_{M,N}(1_{(-1)} \cdot x \otimes 1_{(0)}) = c_{M,N}(1S(1) \cdot x \otimes 1) \\ &= c_{M,N}(1 \cdot x \otimes 1) = c_{M,N}(x \otimes 1) = x_{(-1)} \cdot 1 \otimes x_{(0)} \\ &= x_1 \cdot 1 \otimes x_2 = x_1 1 \otimes x_2 = x_1 \otimes x_2. \end{aligned}$$

Assim, $1 \otimes x = x_1 \otimes x_2$. Aplicando $I \otimes \varepsilon$ a essa igualdade, segue que

$$1 \otimes \varepsilon(x) = x_1 \otimes \varepsilon(x_2) = x_1 \varepsilon(x_2) \otimes 1 = x \otimes 1$$

e isso implica que $x = x1 = 1\varepsilon(x) \in 1k$. Portanto, $H = 1k \cong k$. ∎

Teorema 3.5 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Então, a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld de dimensão finita é uma categoria rígida.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.3, sabemos que tal categoria é trançada. Logo, para que seja rígida basta mostrarmos que cada objeto admite dual à esquerda.

Seja M um módulo de Yetter-Drinfeld com dimensão finita n. Definimos $M^* := Hom_{{}_k\mathcal{V}}(M, k)$. Consideremos $\{m^{(1)}, m^{(2)}, \cdots, m^{(n)}\}$ uma base de M e $\{f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(n)}\}$ a base dual para M^* tal que $f^{(i)}(m^{(j)}) = \delta_{i,j}$. Temos que M^* é um H-módulo à esquerda via

$$(h \cdot f)(m) = f(S(h) \cdot m), \forall m \in M, \forall f \in M^*, \forall h \in H.$$

De fato, dados $h, g \in H$, $f \in M^*$ e $m \in M$, temos

$$\begin{aligned} ((hg) \cdot f)(m) &= f(S(hg) \cdot m) = f(S(g) \cdot (S(h) \cdot m)) \\ &= (g \cdot f)(S(h) \cdot m) = (h \cdot (g \cdot f))(m) \end{aligned}$$

e

$$(1 \cdot f)(m) = f(S(1) \cdot m) = f(1 \cdot m) = f(m).$$

Logo, $(hg)\cdot f = h\cdot(g\cdot f)$ e $1\cdot f = f$. Além disso, consideremos

$$\rho(f) = f_{(-1)}\otimes f_{(0)} = \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)})\otimes f(m^{(i)}_{(0)})f^{(i)}, \forall f\in M^*.$$

Primeiramente, notemos que ρ definida acima é unicamente determinada pela condição

$$f_{(-1)}f_{(0)}(m) = S^{-1}(m_{(-1)})f(m_{(0)}), \forall m\in M. \quad (\star)$$

De fato, seja $m\in M$. Então podemos escrever $m=\sum_{j=1}^{n} a_j m^{(j)}$ com $a_j\in k$ e claramente $\rho(m)=\sum_{j=1}^{n} a_j m^{(j)}_{(-1)}\otimes m^{(j)}_{(0)}$. De acordo com a definição de ρ, temos que

$$\begin{aligned} f_{(-1)}f_{(0)}(m) &= \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)})f(m^{(i)}_{(0)})f^{(i)}(m)\\ &= \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)})f(m^{(i)}_{(0)})f^{(i)}(\sum_{j=1}^{n} a_j m^{(j)})\\ &= \sum_{i,j=1}^{n} S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)})f(m^{(i)}_{(0)})a_j f^{(i)}(m^{(j)})\\ &= \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(a_i m^{(i)}_{(-1)})f(m^{(i)}_{(0)})\\ &= S^{-1}(m_{(-1)})f(m_{(0)}). \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\sum_{k=1}^{n} x_{(k)}\otimes y_{(k)}$ é um elemento de $H\otimes M^*$ que satisfaz $\sum_{k=1}^{n} x_{(k)}y_{(k)}(m) = S^{-1}(m_{(-1)})f(m_{(0)})$ para todo $m\in M$, então $\sum_{k=1}^{n} x_{(k)}\otimes y_{(k)} = f_{(-1)}\otimes f_{(0)}$. De fato,

$$\begin{aligned} f_{(-1)}\otimes f_{(0)} &= \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)})\otimes f(m^{(i)}_{(0)})f^{(i)}\\ &= \sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)})f(m^{(i)}_{(0)})\otimes f^{(i)}\\ &= \sum_{i,k=1}^{n} x_{(k)}y_{(k)}(m^{(i)})\otimes f^{(i)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} x_{(k)}\otimes(\sum_{i=1}^{n} y_{(k)}(m^{(i)})f^{(i)})\\ &= \sum_{k=1}^{n} x_{(k)}\otimes y_{(k)}. \end{aligned}$$

Mostremos que M^* possui uma estrutura de H-comódulo à esquerda via ρ. Sejam $f \in M^*$ e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes I)\rho(f) &= (\Delta \otimes I)(\sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)}) \otimes f(m^{(i)}_{(0)})f^{(i)}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(m^{(i)}_{(0)})\Delta(S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)})) \otimes f^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(m^{(i)}_{(0)})S^{-1}((m^{(i)}_{(-1)})_2) \otimes S^{-1}((m^{(i)}_{(-1)})_1) \otimes f^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f((m^{(i)}_{(0)})_{(0)})S^{-1}((m^{(i)}_{(0)})_{(-1)}) \otimes S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)}) \otimes f^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_{(-1)}f_{(0)}(m^{(i)}_{(0)}) \otimes S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)}) \otimes f^{(i)} \\
&= f_{(-1)} \otimes (\sum_{i=1}^{n} S^{-1}(m^{(i)}_{(-1)}) \otimes f_{(0)}(m^{(i)}_{(0)})f^{(i)}) \\
&= f_{(-1)} \otimes \rho(f_{(0)}) \\
&= (I \otimes \rho)\rho(f)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon(f_{(-1)})f_{(0)}(m) = \ & \varepsilon(f_{(-1)}f_{(0)}(m)) = \varepsilon(S^{-1}(m_{(-1)})f(m_{(0)})) \\
& = f(m_{(0)})\varepsilon(S^{-1}(m_{(-1)})) = f(m_{(0)})\varepsilon(m_{(-1)}) \\
& = f(m_{(0)}\varepsilon(m_{(-1)})) = f(m).
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que M^* com ação e coação acima definidas satisfaz a relação de compatibilidade. Para isso, como ρ é unicamente determinada pela condição ($\star$), basta mostrarmos que

$$h_1 f_{(-1)}S(h_3)(h_2 \cdot f_{(0)})(m) = S^{-1}(m_{(-1)})(h \cdot f)(m_{(0)}).$$

Sejam $h \in H, f \in M^*$ e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned}
h_1 f_{(-1)}S(h_3)(h_2 \cdot f_{(0)})(m) &= h_1 f_{(-1)}S(h_3)f_{(0)}(S(h_2) \cdot m) \\
&= h_1 f_{(-1)}f_{(0)}(S(h_2) \cdot m)S(h_3) \\
&= h_1 S^{-1}((S(h_2) \cdot m)_{(-1)})f((S(h_2) \cdot m)_{(0)})S(h_3) \\
&= h_1 S^{-1}(S(h_2)_1 m_{(-1)}S(S(h_2)_3))f(S(h_2)_2 \cdot m_{(0)})S(h_3) \\
&= h_1 S^{-1}(S(h_{2_3})m_{(-1)}S(S(h_{2_1})))f(S(h_{2_2}) \cdot m_{(0)})S(h_3) \\
&= h_1 S^{-1}(S(h_4)m_{(-1)}S(S(h_2)))f(S(h_3) \cdot m_{(0)})S(h_5) \\
&= h_1 S(h_2)S^{-1}(m_{(-1)})h_4 S(h_5)f(S(h_3) \cdot m_{(0)}) \\
&= 1\varepsilon(h_1)S^{-1}(m_{(-1)})1\varepsilon(h_3)f(S(h_2) \cdot m_{(0)}) \\
&= S^{-1}(m_{(-1)})f(S(h) \cdot m_{(0)}) \\
&= S^{-1}(m_{(-1)})(h \cdot f)(m_{(0)}).
\end{aligned}$$

Com isso, temos que M^* é um objeto na categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$. Consideremos e_M e b_M definidas como no Exemplo 2.24, ou seja,

$$e_M(f \otimes m) = f(m), \forall f \in M^*, \forall m \in M \quad \text{e} \quad b_M(1) = \sum_{k=1}^{n} m^{(k)} \otimes f^{(k)}.$$

No exemplo citado, vimos que tais funções satisfazem as composições da definição de dual à esquerda. Assim, para mostrarmos que (M^*, e_M, b_M) é um dual à esquerda de M, basta mostrarmos que e_M e b_M são morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Sejam $h \in H, m \in M$ e $f \in M^*$. Então

$$\begin{aligned}
e_M(h \cdot (f \otimes m)) = &\quad e_M(h_1 \cdot f \otimes h_2 \cdot m) = (h_1 \cdot f)(h_2 \cdot m) \\
= &\quad f(S(h_1) \cdot (h_2 \cdot m)) = f((S(h_1)h_2) \cdot m)) \\
= &\quad f(\varepsilon(h)1 \cdot m) = \varepsilon(h)f(m) = h \cdot f(m) \\
= &\quad h \cdot e_M(f \otimes m)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(I \otimes e_M)\rho(f \otimes m) = &\quad (I \otimes e_M)(f_{(-1)}m_{(-1)} \otimes f_{(0)} \otimes m_{(0)}) \\
= &\quad f_{(-1)}m_{(-1)} \otimes f_{(0)}(m_{(0)}) \\
= &\quad f_{(-1)}f_{(0)}(m_{(0)})m_{(-1)} \otimes 1 \\
= &\quad S^{-1}((m_{(0)})_{(-1)})f((m_{(0)})_{(0)})m_{(-1)} \otimes 1 \\
= &\quad S^{-1}(m_{(-1)})m_{(-2)} \otimes f(m_{(0)}) \\
= &\quad 1\varepsilon(m_{(-1)}) \otimes f(m_{(0)}) = 1 \otimes f(\varepsilon(m_{(-1)})m_{(0)}) \\
= &\quad 1 \otimes f(m) = \rho(f(m)) = \rho(e_M(f \otimes m)).
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
h \cdot (b_M(1)) = &\quad h \cdot (\sum_{k=1}^{n} m^{(k)} \otimes f^{(k)}) = \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot m^{(k)} \otimes h_2 \cdot f^{(k)} \\
= &\quad \sum_{k=1}^{n} h_1 \cdot m^{(k)} \otimes (\sum_{j=1}^{n} (h_2 \cdot f^{(k)})(m^{(j)})f^{(j)}) \\
= &\quad \sum_{k,j=1}^{n} h_1 \cdot m^{(k)} \otimes f^{(k)}(S(h_2) \cdot m^{(j)})f^{(j)} \\
= &\quad \sum_{k,j=1}^{n} h_1 \cdot (f^{(k)}(S(h_2) \cdot m^{(j)})m^{(k)}) \otimes f^{(j)} \\
= &\quad \sum_{j=1}^{n} h_1 \cdot (\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(S(h_2) \cdot m^{(j)})m^{(k)}) \otimes f^{(j)} \\
= &\quad \sum_{j=1}^{n} h_1 \cdot (S(h_2) \cdot m^{(j)}) \otimes f^{(j)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n}(h_1S(h_2))\cdot m^{(j)}\otimes f^{(j)}\\
&= \varepsilon(h)\sum_{j=1}^{n}1m^{(j)}\otimes f^{(j)} = \varepsilon(h)b_M(1)\\
&= b_M(\varepsilon(h)1) = b_M(h\cdot 1)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\rho(b_M(1)) &= \rho(\sum_{k=1}^{n} m^{(k)}\otimes f^{(k)}) = \sum_{k=1}^{n} m^{(k)}_{(-1)}f^{(k)}_{(-1)}\otimes m^{(k)}_{(0)}\otimes f^{(k)}_{(0)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} m^{(k)}_{(-1)}f^{(k)}_{(-1)}\otimes m^{(k)}_{(0)}\otimes (\sum_{j=1}^{n} f^{(k)}_{(0)}(m^{(j)})f^{(j)})\\
&= \sum_{j,k=1}^{n} m^{(k)}_{(-1)}f^{(k)}_{(-1)}f^{(k)}_{(0)}(m^{(j)})\otimes m^{(k)}_{(0)}\otimes f^{(j)}\\
&= \sum_{j,k=1}^{n} m^{(k)}_{(-1)}S^{-1}(m^{(j)}_{(-1)})f^{(k)}(m^{(j)}_{(0)})\otimes m^{(k)}_{(0)}\otimes f^{(j)}\\
&= \sum_{j,k=1}^{n} f^{(k)}(m^{(j)}_{(0)})m^{(k)}_{(-1)}S^{-1}(m^{(j)}_{(-1)})\otimes m^{(k)}_{(0)}\otimes f^{(j)} = \circledast.
\end{aligned}
$$

Notemos que, para cada $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, podemos escrever $m^{(j)}_{(0)} = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(m^{(j)}_{(0)})m^{(k)}$ e lembrando que M é um H-comódulo, temos que

$$
\begin{aligned}
m^{(j)}_{(-2)}\otimes m^{(j)}_{(-1)}\otimes m^{(j)}_{(0)} &= (I\otimes\rho)\rho(m^{(j)}) = (I\otimes\rho)(m^{(j)}_{(-1)}\otimes m^{(j)}_{(0)})\\
&= (I\otimes\rho)(m^{(j)}_{(-1)}\otimes\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(m^{(j)}_{(0)})m^{(k)})\\
&= m^{(j)}_{(-1)}\otimes\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(m^{(j)}_{(0)})\rho(m^{(k)})\\
&= m^{(j)}_{(-1)}\otimes\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(m^{(j)}_{(0)})(m^{(k)}_{(-1)}\otimes m^{(k)}_{(0)})\\
&= m^{(j)}_{(-1)}\otimes\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(m^{(j)}_{(0)})m^{(k)}_{(-1)}\otimes m^{(k)}_{(0)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} m^{(j)}_{(-1)}\otimes f^{(k)}(m^{(j)}_{(0)})m^{(k)}_{(-1)}\otimes m^{(k)}_{(0)},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^{n} m_{(-1)}^{(j)} \otimes f^{(k)}(m_{(0)}^{(j)}) m_{(-1)}^{(k)} \otimes m_{(0)}^{(k)} = m_{(-2)}^{(j)} \otimes m_{(-1)}^{(j)} \otimes m_{(0)}^{(j)}.$$

Agora, voltemos em $\circledast$

$$\begin{aligned}
\circledast &= \sum_{j=1}^{n} m_{(-1)}^{(j)} S^{-1}(m_{(-2)}^{(j)}) \otimes m_{(0)}^{(j)} \otimes f^{(j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(m_{(-1)}^{(j)}) 1 \otimes m_{(0)}^{(j)} \otimes f^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} 1 \otimes \varepsilon(m_{(-1)}^{(j)}) m_{(0)}^{(j)} \otimes f^{(j)} \\
&= 1 \otimes (\sum_{j=1}^{n} m^{(j)} \otimes f^{(j)}) = (I \otimes b_M)(1 \otimes 1) = (I \otimes b_M)\rho(1).
\end{aligned}$$

Portanto, (M^*, e_M, b_M) é um dual à esquerda para M. Como a categoria é trançada, segue que M admite também dual à direita. Logo, a categoria é rígida. ■

Proposição 3.3 *Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora, M e N módulos de Yetter-Drinfeld de dimensão finita e $f : M \to N$ um morfismo entre os mesmos. Então $f^* : N^* \to M^*$ dada por $f^*(g) = gf$ é também um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Sejam $h \in H, n^* \in N^*$ e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned}
(f^*(h \cdot n^*))(m) &= ((h \cdot n^*)f)(m) = (h \cdot n^*)(f(m)) \\
&= n^*(S(h) \cdot f(m)) = n^*(f(S(h) \cdot m)) \\
&= (n^* f)(S(h) \cdot m) = f^*(n^*)(S(h) \cdot m) \\
&= (h \cdot (f^*(n^*)))(m).
\end{aligned}$$

Logo, $f^*(h \cdot n^*) = h \cdot (f^*(n^*))$. Também,

$$\begin{aligned}
(I \otimes f^*)\rho(n^*) = & \ (I \otimes f^*)(n_{(-1)}^* \otimes n_{(0)}^*) = n_{(-1)}^* \otimes f^*(n_{(0)}^*) \\
= & \ n_{(-1)}^* \otimes (n_{(0)}^* f).
\end{aligned}$$

Para mostrarmos que $n_{(-1)}^* \otimes (n_{(0)}^* f) = \rho(f^*(n^*))$, precisamos verificar a condição $(\star)$ dada no teorema anterior. Para isso, seja $m \in M$. Então

$$\begin{aligned}
n_{(-1)}^*(n_{(0)}^* f)(m) &= n_{(-1)}^* n_{(0)}^*(f(m)) \\
&\overset{(\triangle)}{=} S^{-1}(f(m)_{(-1)}) n^*(f(m)_{(0)}) \\
&= S^{-1}(m_{(-1)}) n^*(f(m_{(0)})) \\
&= S^{-1}(m_{(-1)}) f^*(n^*)(m_{(0)}),
\end{aligned}$$

a igualdade ($\triangle$) se deve ao fato de que M^* é um H-comódulo e portanto, a condição ($\star$) é satisfeita.

Portanto, f^* é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. ■

3.3 Espaços vetoriais trançados

Nessa seção falamos sobre espaços vetorias trançados. Tais objetos não são usados nos próximos capítulos, mas decidimos apresentar o conceito no trabalho. Um fato interessante é que, pela comutatividade do dodecágono, todo módulo de Yetter-Drinfeld é um espaço vetorial trançado. Além disso, todo espaço vetorial trançado é um módulo de Yetter-Drinfeld sobre alguma álgebra de Hopf, salvo condições técnicas na trança (veja [17]). Um caso particular pode ser visto no item (iii) da Proposição 3.4.

Essa seção foi baseada principalmente em [4].

Definição 3.4 *Sejam V um espaço vetorial e $c : V \otimes V \to V \otimes V$ um isomorfismo linear. Dizemos que (V, c) é um espaço vetorial trançado se c é uma solução da equação da trança, ou seja, se*

$$(c \otimes I)(I \otimes c)(c \otimes I) = (I \otimes c)(c \otimes I)(I \otimes c).$$

Exemplo 3.4 Sejam V um k-espaço vetorial com base $\{x_i\}_{i\in I}$ e $\{q_{i,j}\}_{i,j\in I}$ uma família de escalares não-nulos. Definimos $c : V \otimes V \to V \otimes V$ por $c(x_i \otimes x_j) = q_{i,j}x_j \otimes x_i$. Então (V, c) é um espaço vetorial trançado. De fato,

$$\begin{aligned}
(c \otimes I)(I \otimes c)(c \otimes I)(x_i \otimes x_j \otimes x_k) = \\
&= (c \otimes I)(I \otimes c)(q_{i,j}x_j \otimes x_i \otimes x_k)\\
&= q_{i,j}(c \otimes I)(x_j \otimes q_{i,k}x_k \otimes x_i)\\
&= q_{i,j}q_{i,k}q_{j,k}x_k \otimes x_j \otimes x_i\\
&= q_{i,k}q_{j,k}x_k \otimes q_{i,j}x_j \otimes x_i\\
&= q_{i,k}q_{j,k}(I \otimes c)(x_k \otimes x_i \otimes x_j)\\
&= q_{j,k}(I \otimes c)(q_{i,k}x_k \otimes x_i \otimes x_j)\\
&= (I \otimes c)(c \otimes I)(x_i \otimes q_{j,k}x_k \otimes x_j)\\
&= (I \otimes c)(c \otimes I)(I \otimes c)(x_i \otimes x_j \otimes x_k).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.5 Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Então todo módulo de Yetter-Drinfeld sobre H é um espaço vetorial trançado.

De fato, seja M um módulo de Yetter-Drinfeld. Como a categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$ é trançada, existe o isomofismo $c_{M,M} : M \otimes M \to M \otimes M$ e, pela comutatividade do dodecágono, temos que

$$(c_{M,M} \otimes I)(I \otimes c_{M,M})(c_{M,M} \otimes I) = (I \otimes c_{M,M})(c_{M,M} \otimes I)(I \otimes c_{M,M}).$$

Lema 3.1 *Sejam G um grupo e $H = kG$. Então V é um H-comódulo se, e somente se, V é um espaço vetorial G-graduado.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que V seja um H-comódulo à esquerda com estrutura dada por $\rho : V \to H \otimes V$.

Definimos, para cada $g \in G$, o conjunto $V_g := \{v \in V : \rho(v) = g \otimes v\}$. Notemos que cada V_g é não-vazio, pois $0 \in V_g$ e é fácil ver que cada V_g é um k-subespaço vetorial de V. Mostremos que $V = \oplus_{g \in G} V_g$. Seja $v \in V$. Escrevemos $\rho(v) = \sum_{g \in G} g \otimes v_g$. Para facilitar a escrita, denotamos $\sum_{g \in G}$ por $\sum$.

Como V é comódulo, temos que

$$v = \varepsilon(v_{(-1)})v_{(0)} = \sum \varepsilon(g)v_g = \sum v_g.$$

Também,

$$(I \otimes \rho)\rho(v) = (I \otimes \rho)(\sum g \otimes v_g) = \sum g \otimes h \otimes (v_g)_h$$

e

$$(\Delta \otimes I)\rho(v) = (\Delta \otimes I)(\sum g \otimes v_g) = \sum g \otimes g \otimes v_g.$$

Logo, $\sum g \otimes h \otimes (v_g)_h = \sum g \otimes g \otimes v_g$. Fixados $g_0, h_0 \in G$, consideremos $f_{g_0}, f_{h_0} \in (kG)^*$ tais que $f_{g_0}(g) = \delta_{g_0,g}$ e $f_{h_0}(g) = \delta_{h_0,g}$, $\forall g \in G$. Omitindo o isomorfismo k-linear existente entre $k \otimes k \otimes V$ e V e usando a igualdade acima, segue que

$$(f_{g_0} \otimes f_{h_0} \otimes I)(\sum g \otimes h \otimes (v_g)_h) = (f_{g_0} \otimes f_{h_0} \otimes I)(\sum g \otimes g \otimes v_g),$$

ou seja,

$$\sum f_{g_0}(g) \otimes f_{h_0}(h) \otimes (v_g)_h = (v_{g_0})_{h_0}$$

e

$$\sum f_{g_0}(g) \otimes f_{h_0}(g) \otimes v_g = v_{g_0}\delta_{g_0,h_0}.$$

Logo, para qualquer $g \in G$, vale que $(v_g)_h = v_g\delta_{g,h}$. Com isso, $\rho(v_g) = \sum h \otimes (v_g)_h = g \otimes v_g$, isto é, $v_g \in V_g$. Assim, $v = \sum v_g \in \sum V_g$.

Agora mostremos que a soma é direta. Seja $x \in V_g \cap \sum_{g \neq h} V_h$. Então podemos escrever $x = v_g$ e $x = \sum_{g \neq h} v_h$ com $v_g \in V_g$ e $v_h \in V_h$.

Consideremos $f_g \in (kG)^*$ tal que $f_g(l) = \delta_{g,l}$. Assim,

$$(f_g \otimes I)\rho(v_g) = (f_g \otimes I)(g \otimes v_g) = v_g$$

e

$$(f_g \otimes I)\rho(\sum_{g \neq h} v_h) = (f_g \otimes I)(\sum_{g \neq h} h \otimes v_h) = 0.$$

Logo, $x = v_g = 0$. Portanto, $V = \oplus_{g \in G} V_g$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $V = \oplus_{g \in G} V_g$. Definimos $\rho : V \to H \otimes V$ por $\rho(v_g) = g \otimes v_g$. É fácil ver que ρ é k-linear. Seja $v_g \in V_g$. Então

$$(\Delta \otimes I)\rho(v_g) = (\Delta \otimes I)(g \otimes v_g) = g \otimes g \otimes v_g = (I \otimes \rho)(g \otimes v_g) = (I \otimes \rho)\rho(v_g)$$

e

$$\varepsilon((v_g)_{(-1)})(v_g)_{(0)} = \varepsilon(g)v_g = v_g.$$

Portanto, V é um H-comódulo à esquerda. ∎

Proposição 3.4 *Sejam G um grupo e V um kG-módulo à esquerda e um kG-comódulo à esquerda com graduação $V = \oplus_{g \in G} V_g$. Definimos o isomorfismo linear $c : V \otimes V \to V \otimes V$ por $c(x \otimes y) = g \cdot y \otimes x, \forall x \in V_g, \forall y \in V$. Então são verdadeiras as afirmações.*

(i) *V é um objeto em ${}_{kG}^{kG}\mathcal{YD}$ se, e somente se, $g \cdot V_h \subseteq V_{ghg^{-1}}, \forall g, h \in G$.*

(ii) *Se V é um objeto em ${}_{kG}^{kG}\mathcal{YD}$ então (V, c) é um espaço vetorial trançado.*

(iii) *Reciprocamente, se V é um kG-módulo fiel e (V, c) é um espaço vetorial trançado, então V é um objeto em ${}_{kG}^{kG}\mathcal{YD}$.*

Demonstração: (i) ($\Rightarrow$) Suponhamos que V é um objeto em ${}_{kG}^{kG}\mathcal{YD}$. Sejam $g, h \in G$ e $v_h \in V_h$. Então

$$\rho(g \cdot v_h) = g_1(v_h)_{(-1)}S(g_3) \otimes g_2 \cdot (v_h)_{(0)} = ghg^{-1} \otimes g \cdot v_h.$$

Logo, pela definição de V_g dada na demonstração do lema anterior, segue que $g \cdot v_h \in V_{ghg^{-1}}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $g \cdot V_h \subseteq V_{ghg^{-1}}, \forall g, h \in G$. Por hipótese, V é um kG-módulo à esquerda e um kG-comódulo à esquerda. Assim, para mostrarmos que V é um módulo de Yetter-Drinfeld, basta verificarmos a relação de compatibilidade. Seja $v \in V$. Escrevemos $v = \sum v_h$. Daí,

$$\begin{aligned} \rho(g \cdot v) &= \rho(g \cdot \sum v_h) = \rho(\sum (g \cdot v_h)) = \sum \rho(g \cdot v_h) \\ &= \sum ghg^{-1} \otimes g \cdot v_h = g_1 v_{(-1)} S(g_3) \otimes g_2 \cdot v_{(0)}, \end{aligned}$$

pois $\rho(v) = \sum h \otimes v_h$.

(ii) Sejam $g, h \in G, x \in V_g, y \in V_h$ e $z \in V$. Então

$$\begin{aligned}
(c \otimes I)(I \otimes c)(c \otimes I)(x \otimes y \otimes z) &= (c \otimes I)(I \otimes c)(g \cdot y \otimes x \otimes z) \\
&= (c \otimes I)(g \cdot y \otimes g \cdot z \otimes x) \\
&= c(g \cdot y \otimes g \cdot z) \otimes x \\
&\overset{(\star)}{=} (ghg^{-1}) \cdot (g \cdot z) \otimes g \cdot y \otimes x \\
&= (gh) \cdot z \otimes g \cdot y \otimes x \\
&= (I \otimes c)(g \cdot (h \cdot z) \otimes x \otimes y) \\
&= (I \otimes c)(c \otimes I)(x \otimes h \cdot z \otimes y) \\
&= (I \otimes c)(c \otimes I)(I \otimes c)(x \otimes y \otimes z).
\end{aligned}$$

Por hipótese, V é um módulo de Yetter-Drinfeld e assim, por (i), $g \cdot V_h \subseteq V_{ghg^{-1}}$ e como $y \in V_h$, segue a igualdade $(\star)$. Portanto, (V, c) é um espaço vetorial trançado.

(iii) Sejam $g, h \in G$. Mostremos que $g \cdot V_h \subseteq V_{ghg^{-1}}$ e por (i), segue que V é um módulo de Yetter-Drinfeld.

Sejam $x \in V_g, y \in V_h$ e $z \in V$. Como (V, c) é um espaço vetorial trançado, com os mesmos cálculos feitos em (ii), segue que $c(g \cdot y \otimes g \cdot z) \otimes x = (gh) \cdot z \otimes g \cdot y \otimes x$. Sendo k um corpo, tal igualdade implica em $c(g \cdot y \otimes g \cdot z) = (gh) \cdot z \otimes g \cdot y$. Como $g \cdot y \in V$, podemos escrever $g \cdot y = \sum y_a$, em que $y_a \in V_a$ e $a \in G$. Daí,

$$\begin{aligned}
\sum (ag) \cdot z \otimes y_a &= \sum a \cdot (g \cdot z) \otimes y_a = \sum c(y_a \otimes g \cdot z) \\
&= c(\sum (y_a \otimes g \cdot z)) = c(\sum y_a \otimes g \cdot z) \\
&= c(g \cdot y \otimes g \cdot z) = (gh) \cdot z \otimes g \cdot y \\
&= (gh) \cdot z \otimes (\sum y_a) = \sum (gh) \cdot z \otimes y_a.
\end{aligned}$$

Para cada $b \in G$ tal que $y_b \neq 0$, podemos considerar $f_b \in V^*$ de modo que $f_b(y_a) = \delta_{a,b}, \forall a \in G$. Assim, pela igualdade acima, temos

$$(I \otimes f_b)(\sum (gh) \cdot z \otimes y_a) = (I \otimes f_b)(\sum (ag) \cdot z \otimes y_a),$$

donde $(gh) \cdot z = (bg) \cdot z$. Logo, $z = (h^{-1}g^{-1}bg) \cdot z$ e, sendo V um kG-módulo fiel, segue que $b = ghg^{-1}$.

Daí, $g \cdot y = \sum y_a = y_{ghg^{-1}} \in V_{ghg^{-1}}$ e portanto, $g \cdot V_h \subseteq V_{ghg^{-1}}$. ■

Capítulo 4

Álgebras de Hopf trançadas e bosonização

Esse capítulo foi a motivação inicial para o desenvolvimento dessa dissertação. Nosso "sonho de consumo" era entender o porquê de classificar álgebras de Hopf pontuadas ser um ramo de investigação tão promissor e cobiçado. Para isso, nos apoiamos principalmente no trabalho de Andruskiewitsch-Schneider (veja [3]) e já na página 2 do mesmo nos deparamos com as "álgebras de Nichols", que são álgebras de Hopf trançadas na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld. Sendo assim, nosso primeiro passo é entender o que é uma álgebra de Nichols (assunto desenvolvido no próximo capítulo).

Em busca desse objetivo, embora seja possível definir álgebras de Hopf trançadas em qualquer categoria trançada, fazemos tal definição na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H com antípoda bijetora, o que torna a categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$ trançada.

4.1 Álgebras de Hopf trançadas em ${}_H^H\mathcal{YD}$

Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora. Sejam (R, m_R, μ_R) e (S, m_S, μ_S) álgebras em ${}_H^H\mathcal{YD}$. A trança $c_{S,R}$ fornece ao módulo de Yetter-Drinfeld $R \otimes S$ uma estrutura de álgebra via

$$m_{R\otimes S} := (m_R \otimes m_S)(I \otimes c_{S,R} \otimes I) \quad \text{e} \quad \mu_{R\otimes S} := (\mu_R \otimes \mu_S)l_k$$

$$\begin{tikzcd} R\otimes S\otimes R\otimes S \arrow[r, "m_{R\otimes S}"] \arrow[d, "I\otimes c_{S,R}\otimes I"'] & R\otimes S \arrow[d, equal] \\ R\otimes R\otimes S\otimes S \arrow[r, "m_R\otimes m_S"'] & R\otimes S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[r, "\mu_{R\otimes S}"] \arrow[d, "l_k"'] & R\otimes S \arrow[d, equal] \\ k\otimes k \arrow[r, "\mu_R\otimes \mu_S"'] & R\otimes S. \end{tikzcd}$$

Chamando $m_R(r\otimes r') = rr', \forall r, r' \in R$, $\mu_R(1) = 1_R$, $m_S(s\otimes s') = ss', \forall s, s' \in S$ e $\mu_S(1) = 1_S$, temos que

$$\begin{aligned} m_{R\otimes S}(r\otimes s\otimes r'\otimes s') &= (m_R\otimes m_S)(I\otimes c_{S,R}\otimes I)(r\otimes s\otimes r'\otimes s') \\ &= (m_R\otimes m_S)(r\otimes s_{(-1)}\cdot r'\otimes s_{(0)}\otimes s') \\ &= r(s_{(-1)}\cdot r')\otimes s_{(0)}s' \end{aligned}$$

e

$$\mu_{R\otimes S}(1) = (\mu_R\otimes\mu_S)l_k(1) = (\mu_R\otimes\mu_S)(1\otimes 1) = 1_R\otimes 1_S.$$

Lembramos que o fato de R e S serem álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$ nos diz que R e S são objetos em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e que m_R, μ_R, m_S e μ_S são morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Podemos notar que R e S são simultaneamente H-módulo álgebra e H-comódulo álgebra. Para os cálculos desse capítulo, seria interessante ter em mente os quatro últimos exemplos da Seção 2.3.

Proposição 4.1 *Com a notação acima, $(R\otimes S, m_{R\otimes S}, \mu_{R\otimes S})$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Por construção, $m_{R\otimes S}$ e $\mu_{R\otimes S}$ são morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$, pois são composições de morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Basta verificarmos a comutatividade dos diagramas. Sejam $r, r', r'' \in R$ e $s, s', s'' \in S$. Então

$$\begin{aligned} & m_{R\otimes S}(m_{R\otimes S}\otimes I)(r\otimes s\otimes r'\otimes s'\otimes r''\otimes s'') = \\ &\qquad = m_{R\otimes S}(r(s_{(-1)}\cdot r')\otimes s_{(0)}s'\otimes r''\otimes s'') \\ &\qquad = r(s_{(-1)}\cdot r')((s_{(0)}s')_{(-1)}\cdot r'')\otimes (s_{(0)}s')_{(0)}s'' \\ &\qquad = r(s_{(-1)}\cdot r')(((s_{(0)})_{(-1)}s'_{(-1)})\cdot r'')\otimes ((s_{(0)})_{(0)}s'_{(0)})s'' \\ &\qquad = r(s_{(-2)}\cdot r')((s_{(-1)}s'_{(-1)})\cdot r'')\otimes (s_{(0)}s'_{(0)})s'' \\ &\qquad = r(s_{(-1)_1}\cdot r')(s_{(-1)_2}\cdot (s'_{(-1)}\cdot r''))\otimes (s_{(0)}s'_{(0)})s'' \\ &\qquad = r(s_{(-1)}\cdot (r'(s'_{(-1)}\cdot r'')))\otimes s_{(0)}(s'_{(0)}s'') \\ &\qquad = m_{R\otimes S}(r\otimes s\otimes r'(s'_{(-1)}\cdot r'')\otimes s'_{(0)}s'') \\ &\qquad = m_{R\otimes S}(I\otimes m_{R\otimes S})(r\otimes s\otimes r'\otimes s'\otimes r''\otimes s''), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{R\otimes S}(\mu_{R\otimes S}\otimes I)r_{R\otimes S}(r\otimes s) &= m_{R\otimes S}(\mu_{R\otimes S}\otimes I)(1\otimes r\otimes s) \\ &= m_{R\otimes S}(1_R\otimes 1_S\otimes r\otimes s) \\ &= 1_R((1_S)_{(-1)}\cdot r)\otimes (1_S)_{(0)}s \\ &= 1_R(1_H\cdot r)\otimes 1_S s \\ &= r\otimes s \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
m_{R\otimes S}(I\otimes \mu_{R\otimes S})l_{R\otimes S}(r\otimes s) &= m_{R\otimes S}(I\otimes \mu_{R\otimes S})(r\otimes s\otimes 1)\\
&= m_{R\otimes S}(r\otimes s\otimes 1_R\otimes 1_S)\\
&= r(s_{(-1)}\cdot 1_R)\otimes s_{(0)}1_S\\
&= r(s_{(-1)}\cdot \mu_R(1))\otimes s_{(0)}\\
&= r\mu_R(s_{(-1)}\cdot 1)\otimes s_{(0)}\\
&= r\mu_R(\varepsilon(s_{(-1)})1)\otimes s_{(0)}\\
&= r1_R\otimes \varepsilon(s_{(-1)})s_{(0)}\\
&= r\otimes s.
\end{aligned}
$$

Portanto, $(R\otimes S, m_{R\otimes S}, \mu_{R\otimes S})$ é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$. ■

A álgebra acima é denotada por $R\underline{\otimes}S$ e $1_{R\underline{\otimes}S} = 1_R\otimes 1_S$.

Definição 4.1 *Uma biálgebra trançada em* ${}_H^H\mathcal{YD}$ *é uma coleção* $(R, m, \mu, \Delta, \varepsilon)$ *em que* (R, m, μ) *é uma álgebra em* ${}_H^H\mathcal{YD}$*,* (R, Δ, ε) *é uma coálgebra em* ${}_H^H\mathcal{YD}$*,* $\Delta : R \to R\underline{\otimes}R$ *e* $\varepsilon : R \to k$ *são morfismos de álgebras.*

A título de notação, se (R, m, μ) é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$ e $r, r' \in R$, denotamos $m(r\otimes r')$ por rr' e $\mu(1)$ por 1_R. Se (R, Δ, ε) é uma coálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$ denotamos $\Delta(r)$ por $r_1\otimes r_2$, para qualquer $r\in R$.

O fato de $\Delta : R \to R\underline{\otimes}R$ ser morfismo de álgebras nos diz que, para quaisquer $r, r' \in R$,

$$(rr')_1\otimes (rr')_2 = r_1((r_2)_{(-1)}\cdot r'_1)\otimes (r_2)_{(0)}r'_2.$$

Notemos que uma biálgebra trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$ é, simultaneamente, um H-módulo álgebra, um H-comódulo álgebra, um H-módulo coálgebra e um H-comódulo coálgebra.

Definição 4.2 *Seja R uma biálgebra trançada em* ${}_H^H\mathcal{YD}$*. Dizemos que R é uma álgebra de Hopf trançada em* ${}_H^H\mathcal{YD}$ *se existe um morfismo k-linear $S : R \to R$ que é o inverso do morfismo identidade, segundo o produto de convolução, na álgebra $Hom(R, R)$. Tal morfismo S é chamado antípoda.*

O fato de S ser antípoda de R nos diz que $S(r_1)r_2 = r_1S(r_2) = \varepsilon(r)1_R$, para todo $r\in R$.

Exemplo 4.1 Se $H = k$, a categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$ é a categoria dos k-espaços vetoriais. Uma álgebra de Hopf nessa categoria é uma álgebra de Hopf sobre k.

Proposição 4.2 *Seja R uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Então a antípoda S é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que S é morfismo de H-módulos. Para isso, definimos $g, f, p : H \otimes R \to R$ por $g(h \otimes r) = h \cdot S(r)$, $f(h \otimes r) = h \cdot r$ e $p(h \otimes r) = S(h \cdot r)$, para quaisquer $h \in H$ e $r \in R$.

Mostremos que g é um inverso à esquerda para f e que p é um inverso à direita para f, ambos, com respeito ao produto de convolução da álgebra $Hom(H \otimes R, R)$. De fato, dados $h \in H$ e $r \in R$, temos que

$$\begin{aligned}(g * f)(h \otimes r) = &\ g(h_1 \otimes r_1)f(h_2 \otimes r_2) = (h_1 \cdot S(r_1))(h_2 \cdot r_2)\\ = &\ h \cdot (S(r_1)r_2) = h \cdot (\varepsilon_R(r)1_R) = \varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h)1_R\\ = &\ \mu_R \varepsilon_{H\otimes R}(h \otimes r)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(f * p)(h \otimes r) = &\ f(h_1 \otimes r_1)p(h_2 \otimes r_2) = (h_1 \cdot r_1)S(h_1 \cdot r_2)\\ = &\ ((h \cdot r)_1)S((h \cdot r)_2) = \varepsilon_R(h \cdot r)1_R = h \cdot \varepsilon_R(r)\\ = &\ \varepsilon_H(h)\varepsilon_R(r)1_R = \mu_R \varepsilon_{H\otimes R}(h \otimes r).\end{aligned}$$

Portanto, $p = g$, ou seja, $h \cdot S(r) = S(h \cdot r)$, para quaisquer $h \in H$ e $r \in R$.

Agora, mostremos que S é morfismo de H-comódulos. Definimos $L, F : R \to H \otimes R$ por $L(r) = r_{(-1)} \otimes S(r_{(0)})$ e $F(r) = S(r)_{(-1)} \otimes S(r)_{(0)}$, para todo $r \in R$. Mostremos que L é um inverso à esquerda para ρ e que F é um inverso à direita para ρ, ambos, com respeito ao produto de convolução da álgebra $Hom(R, H \otimes R)$. Seja $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}(L * \rho)(r) = &\ L(r_1)\rho(r_2) = ((r_1)_{(-1)} \otimes S((r_1)_{(0)}))((r_2)_{(-1)} \otimes (r_2)_{(0)})\\ = &\ (r_1)_{(-1)}(r_2)_{(-1)} \otimes S((r_1)_{(0)})(r_2)_{(0)}\\ = &\ r_{(-1)} \otimes S((r_{(0)})_1)(r_{(0)})_2 = r_{(-1)} \otimes \varepsilon_R(r_{(0)})1_R\\ = &\ \varepsilon_R(r)(1_H \otimes 1_R) = \mu_{H\otimes R}\varepsilon_R(r)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\rho * F)(r) = &\ \rho(r_1)F(r_2) = ((r_1)_{(-1)} \otimes (r_1)_{(0)})(S(r_2)_{(-1)} \otimes S(r_2)_{(0)})\\ = &\ (r_1)_{(-1)}S(r_2)_{(-1)} \otimes (r_1)_{(0)}S(r_2)_{(0)}\\ = &\ (r_1S(r_2))_{(-1)} \otimes (r_1S(r_2))_{(0)}\\ = &\ (\varepsilon_R(r)1_R)_{(-1)} \otimes (\varepsilon_R(r)1_R)_{(0)}\\ = &\ \varepsilon_R(r)1_H \otimes 1_R = \mu_{H\otimes R}\varepsilon_R(r).\end{aligned}$$

Logo, $L * \rho = \mu_{H\otimes R}\varepsilon_R = \rho * F$, ou seja, $L = F$. Portanto, S é morfismo de H-comódulos. ■

A proposição abaixo é usada no Capítulo 5. Optamos por colocá-la aqui por já termos as ferramentas necessárias para tal.

Proposição 4.3 *Seja R uma biálgebra trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Então $P(R)$ é um submódulo de Yetter-Drinfeld de R.*

Demonstração: É claro que $P(R)$ é um k-subespaço vetorial de R. Mostremos que é um H-submódulo e um H-subcomódulo de R. Sejam $h \in H$ e $r \in P(R)$. Então

$$\begin{aligned} \Delta(h \cdot r) = & \ h \cdot (\Delta(r)) = h \cdot (r \otimes 1 + 1 \otimes r) \\ = & \ (h_1 \cdot r) \otimes (h_2 \cdot 1) + (h_1 \cdot 1) \otimes (h_2 \cdot r) \\ = & \ (h_1 \cdot r) \otimes \varepsilon(h_2)1 + \varepsilon(h_1)1 \otimes (h_2 \cdot r) \\ = & \ (h \cdot r) \otimes 1 + 1 \otimes (h \cdot r). \end{aligned}$$

Logo, $h \cdot r \in P(R)$. Também,

$$\begin{aligned} r_{(-1)} \otimes \Delta(r_{(0)}) = & \ (I \otimes \Delta)\rho(r) = \rho(\Delta(r)) = \rho(r \otimes 1 + 1 \otimes r) \\ = & \ r_{(-1)}1_{(-1)} \otimes r_{(0)} \otimes 1_{(0)} + 1_{(-1)}r_{(-1)} \otimes 1_{(0)} \otimes r_{(0)} \\ = & \ r_{(-1)} \otimes r_{(0)} \otimes 1 + r_{(-1)} \otimes 1 \otimes r_{(0)} \\ = & \ r_{(-1)} \otimes (r_{(0)} \otimes 1 + 1 \otimes r_{(0)}). \end{aligned}$$

Logo, $\rho(r) \in H \otimes P(C)$. ■

Nosso próximo passo é mostrarmos que se R é uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$ de dimensão finita, então R^* também o é. Para isso, desenvolvemos os dois lemas seguintes.

Lema 4.1 *Sejam V, W módulos de Yetter-Drinfeld de dimensão finita. Então $W^* \otimes V^*$ é isomorfo a $(V \otimes W)^*$ como módulos de Yetter-Drinfeld.*

Demonstração: Definimos

$$\begin{array}{rccccl} \Phi: & W^* \otimes V^* & \to & (V \otimes W)^* & & \\ & \varphi \otimes \psi & \mapsto & \Phi(\varphi \otimes \psi): & V \otimes W & \to \ k \\ & & & & v \otimes w & \mapsto \ \psi(v)\varphi(w). \end{array}$$

Temos que Φ é um isomorfismo de k-espaços vetoriais (veja [5], Lemma 1.3.2). Assim, basta mostrarmos que Φ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Sejam $h \in H, \varphi \in W^*, \psi \in V^*, v \in V$ e $w \in W$. Então

$$\begin{aligned} (h \cdot \Phi(\varphi \otimes \psi))(v \otimes w) &= \Phi(\varphi \otimes \psi)(S(h) \cdot (v \otimes w)) \\ &= \Phi(\varphi \otimes \psi)(S(h_2) \cdot v \otimes S(h_1) \cdot w) \\ &= \psi(S(h_2) \cdot v)\varphi(S(h_1) \cdot w) \\ &= (h_2 \cdot \psi)(v)(h_1 \cdot \varphi)(w) \\ &= \Phi(h_1 \cdot \varphi \otimes h_2 \cdot \psi)(v \otimes w) \\ &= \Phi(h \cdot (\varphi \otimes \psi))(v \otimes w). \end{aligned}$$

Logo, $h \cdot \Phi(\varphi \otimes \psi) = \Phi(h \cdot (\varphi \otimes \psi))$ e portanto, Φ é um morfismo de H-módulos.

Para mostrarmos que Φ é um morfismo de H-comódulos, consideremos $\{v^{(i)} : i \in \{1, \cdots, n\}\}$ uma base de V e $\{w^{(j)} : j \in \{1, \cdots, m\}\}$ uma base de W. Assim, $\{v^{(i)} \otimes w^{(j)} : i \in \{1, \cdots, n\}, j \in \{1, \cdots, m\}\}$ é uma base de $V \otimes W$ e seja $\{f^{(i,j)} : i \in \{1, \cdots, n\}, j \in \{1, \cdots, m\}\}$ a base dual para $(V \otimes W)^*$. Sejam $\varphi \in W^*$ e $\psi \in V^*$. Então

$$\begin{aligned}
(I \otimes \Phi)\rho(\varphi \otimes \psi) &= (I \otimes \Phi)(\varphi_{(-1)}\psi_{(-1)} \otimes \varphi_{(0)} \otimes \psi_{(0)}) \\
&= \varphi_{(-1)}\psi_{(-1)} \otimes \Phi(\varphi_{(0)} \otimes \psi_{(0)}) \\
&= \varphi_{(-1)}\psi_{(-1)} \otimes (\sum_{i,j} \Phi(\varphi_{(0)} \otimes \psi_{(0)})(v^{(i)} \otimes w^{(j)}) f^{(i,j)}) \\
&= \sum_{i,j} \varphi_{(-1)}\psi_{(-1)} \otimes \psi_{(0)}(v^{(i)})\varphi_{(0)}(w^{(j)}) f^{(i,j)} \\
&= \sum_{i,j} \varphi_{(-1)}\varphi_{(0)}(w^{(j)})\psi_{(-1)}\psi_{(0)}(v^{(i)}) \otimes f^{(i,j)} \\
&= \sum_{i,j} S^{-1}(w^{(j)}_{(-1)})\varphi(w^{(j)}_{(0)}) S^{-1}(v^{(i)}_{(-1)})\psi(v^{(i)}_{(0)}) \otimes f^{(i,j)} \\
&= \sum_{i,j} S^{-1}(v^{(i)}_{(-1)} w^{(j)}_{(-1)}) \otimes \psi(v^{(i)}_{(0)})\varphi(w^{(j)}_{(0)}) f^{(i,j)} \\
&= \sum_{i,j} S^{-1}(v^{(i)}_{(-1)} w^{(j)}_{(-1)}) \otimes \Phi(\varphi \otimes \psi)(v^{(i)}_{(0)} \otimes w^{(j)}_{(0)}) f^{(i,j)} \\
&= \sum_{i,j} S^{-1}((v^{(i)} \otimes w^{(j)})_{(-1)}) \otimes \Phi(\varphi \otimes \psi)((v^{(i)} \otimes w^{(j)})_{(0)}) f^{(i,j)} \\
&= \rho(\Phi(\varphi \otimes \psi)).
\end{aligned}$$

Portanto, Φ é um morfismo de H-comódulos. ■

Lema 4.2 *As funções $\xi : k \to k^*$ e $\eta : k^* \to k$ dadas por $\xi(\alpha)(x) = \alpha x, \forall \alpha, x \in k$ e $\eta(f) = f(1), \forall f \in k^*$ são isomorfismos de módulos de Yetter-Drinfeld.*

Demonstração: Não é difícil ver que tais funções são isomorfismos de k-espaços vetoriais. Mostremos que ambas são morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Sejam $\alpha, x \in k$ e $h \in H$. Então

$$\begin{aligned}
(h \cdot \xi(\alpha))(x) &= \xi(\alpha)(S(h) \cdot x) = \xi(\alpha)(\varepsilon(S(h))x) = \xi(\alpha)(\varepsilon(h)x) \\
&= \alpha\varepsilon(h)x = (h \cdot \alpha)x = (\xi(h \cdot \alpha))(x).
\end{aligned}$$

Logo, $h \cdot \xi(\alpha) = \xi(h \cdot \alpha)$. Além disso, temos que

$$(I \otimes \xi)\rho(\alpha) = (I \otimes \xi)(1 \otimes \alpha) = 1 \otimes \xi(\alpha).$$

Para mostrarmos que $1\otimes\xi(\alpha)=\rho(\xi(\alpha))$, precisamos ver que $1\otimes\xi(\alpha)$ satisfaz a condição $(\star)$ do Teorema 3.5 para a estrutura de comódulo de k^*. Para todo $x\in k$,

$$1\xi(\alpha)(x)=S^{-1}(1)\xi(\alpha)(x)=S^{-1}(x_{(-1)})\xi(\alpha)(x_{(0)}).$$

Portanto, ξ é um morfismo de H-comódulos. Sejam $h\in H$ e $f\in k^*$. Então

$$\begin{aligned}\eta(h\cdot f) &= (h\cdot f)(1)=f(S(h)\cdot 1)=f(\varepsilon(S(h))1)\\ &= f(\varepsilon(h))=\varepsilon(h)f(1)=h\cdot\eta(f)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(I\otimes\eta)\rho(f) &= (I\otimes\eta)(f_{(-1)}\otimes f_{(0)})=f_{(-1)}\otimes\eta(f_{(0)})\\ &= f_{(-1)}\otimes f_{(0)}(1)=f_{(-1)}f_{(0)}(1)\otimes 1\\ &\overset{(*)}{=} S^{-1}(1)f(1)\otimes 1=1\otimes f(1)\\ &= \rho(f(1))=\rho(\eta(f)).\end{aligned}$$

A igualdade $(*)$ segue da condição $(\star)$ do Teorema 3.5 para a estrutura de comódulo de k^*. ■

Teorema 4.1 *Seja R uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$ de dimensão finita. Então R^* é uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Sabemos, pelo Teorema 3.5, que R^* é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Seja Δ_R a comultiplicação de R. Definimos a multiplicação de R^* como a composição

$$\begin{tikzcd} R^*\otimes R^* \arrow[r, "\Phi"] \arrow[rr, bend right, "m_{R^*}"'] & (R\otimes R)^* \arrow[r, "\Delta_R^*"] & R^*. \end{tikzcd}$$

Pelo Lema 4.1, Φ é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e, pela Proposição 3.3, Δ_R^* também o é. Logo, $m_{R^*}=\Delta_R^*\Phi$ é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Para quaisquer $f,g\in R^*$ e $r\in R$, temos que

$$\begin{aligned}(fg)(r) &= (m_{R^*}(f\otimes g))(r)=((\Delta_R^*\Phi)(f\otimes g))(r)\\ &= (\Delta_R^*(\Phi(f\otimes g)))(r)=(\Phi(f\otimes g)\Delta_R)(r)\\ &= \Phi(f\otimes g)(r_1\otimes r_2)=g(r_1)f(r_2).\end{aligned}$$

Mostremos que m_{R^*} é associativa. Sejam $f,g,l\in R^*$ e $r\in R$. Então

$$\begin{aligned}((fg)l)(r) &= l(r_1)(fg)(r_2)=l(r_1)g(r_2)f(r_3)\\ &= (gl)(r_1)f(r_2)=(f(gl))(r).\end{aligned}$$

Seja ε_R a counidade de R. Definimos o morfismo unidade de R^* como sendo a composição abaixo

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\xi"] \arrow[rr, bend right, "\mu_{R^*}"'] & k^* \arrow[r, "\varepsilon_R^*"] & R^*, \end{tikzcd}$$

em que ξ é o morfismo do Lema 4.2. É claro que $\mu_{R^*} = \varepsilon_R^*\xi$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$, pois é uma composição de morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Mostremos que $\mu_{R^*}(1) = \varepsilon_R$. Seja $r \in R$. Então

$$\begin{aligned} \mu_{R^*}(1)(r) &= (\varepsilon_R^*\xi)(1)(r) = \varepsilon_R^*(\xi(1))(r) = (\xi(1)\varepsilon_R)(r) \\ &= \xi(1)(\varepsilon_R(r)) = \varepsilon_R(r). \end{aligned}$$

Agora mostremos que ε_R é a unidade para R^*. Sejam $f \in R^*$ e $r \in R$. Então

$$(\varepsilon_R f)(r) = f(r_1)\varepsilon_R(r_2) = f(r_1\varepsilon_R(r_2)) = f(r).$$

Logo, $\varepsilon_R f = f$. Analogamente, mostra-se que $f\varepsilon_R = f$. Logo, $1_{R^*} = \varepsilon_R$. Portanto, $(R^*, m_{R^*}, \mu_{R^*})$ é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Seja m_R a multiplicação de R. Definimos a comultiplicação de R^* como sendo a composição abaixo

$$\begin{tikzcd} R^* \arrow[r, "m_R^*"] \arrow[rr, bend right, "\Delta_{R^*}"'] & (R \otimes R)^* \arrow[r, "\Phi^{-1}"] & R^* \otimes R^*, \end{tikzcd}$$

em que Φ é o isomorfismo do Lema 4.1. É claro que $\Delta_{R^*} = \Phi^{-1}m_R^*$ é morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Além disso, para quaisquer $r, s \in R$, temos

$$\begin{aligned} f_1(r)f_2(s) &= \Phi(f_1 \otimes f_2)(s \otimes r) = (\Phi\Delta_{R^*}(f))(s \otimes r) \\ &= m_R^*(f)(s \otimes r) = (f m_R)(s \otimes r) = f(sr). \end{aligned}$$

Mostremos que Δ_{R^*} é coassociativa. Para isso, notemos que a função abaixo é injetora (veja [5], Corollary 1.3.5)

$$\begin{array}{rcclcl} \theta: & R^* \otimes R^* \otimes R^* & \to & (R \otimes R \otimes R)^* & & \\ & f \otimes g \otimes l & \mapsto & \theta(f \otimes g \otimes l): & R \otimes R \otimes R & \to & k \\ & & & & r \otimes s \otimes t & \mapsto & f(r)g(s)l(t). \end{array}$$

Assim, dada $f \in R^*$, para mostrarmos que $(\Delta_{R^*} \otimes I)\Delta_{R^*}(f) = (I \otimes \Delta_{R^*})\Delta_{R^*}(f)$, basta que $\theta((\Delta_{R^*} \otimes I)\Delta_{R^*}(f)) = \theta((I \otimes \Delta_{R^*})\Delta_{R^*}(f))$.

Sejam $r, s, t \in R$. Então

$$\begin{aligned}
\theta((\Delta_{R^*} \otimes I)\Delta_{R^*}(f))(r \otimes s \otimes t) = & \ \theta((\Delta_{R^*} \otimes I)(f_1 \otimes f_2))(r \otimes s \otimes t) \\
= & \ \theta(f_{1_1} \otimes f_{1_2} \otimes f_2)(r \otimes s \otimes t) \\
= & \ f_{1_1}(r) f_{1_2}(s) f_2(t) = f_1(sr) f_2(t) \\
= & \ f(t(sr)) = f((ts)r) = f_1(r) f_2(ts) \\
= & \ f_1(r) f_{2_1}(s) f_{2_2}(t) \\
= & \ \theta(f_1 \otimes f_{2_1} \otimes f_{2_2})(r \otimes s \otimes t) \\
= & \ \theta((I \otimes \Delta_{R^*})\Delta_{R^*}(f))(r \otimes s \otimes t).
\end{aligned}$$

Portanto, $(\Delta_{R^*} \otimes I)\Delta_{R^*} = (I \otimes \Delta_{R^*})\Delta_{R^*}$. Seja μ_R o morfismo unidade de R. Definimos a counidade de R^* como sendo a composição abaixo

$$\begin{tikzcd} R^* \arrow[r, "\mu_R^*"] \arrow[rr, bend right, "\varepsilon_{R^*}"'] & k^* \arrow[r, "\eta"] & k, \end{tikzcd}$$

em que η é o morfismo do Lema 4.2. É claro que $\varepsilon_{R^*} = \eta\mu_R^*$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Para cada $f \in R^*$, temos que

$$\varepsilon_{R^*}(f) = \eta\mu_R^*(f) = \eta(f\mu_R) = (f\mu_R)(1) = f(1_R).$$

Assim, dado $r \in R$, $(\varepsilon_{R^*}(f_1)f_2)(r) = f_1(1_R)f_2(r) = f(r1_R) = f(r)$. Logo, $\varepsilon_{R^*}(f_1)f_2 = f$. Analogamente, mostra-se que $f_1\varepsilon_{R^*}(f_2) = f$. Portanto, $(R^*, \Delta_{R^*}, \varepsilon_{R^*})$ é uma coálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Agora, mostremos que $\Delta_{R^*} : R^* \to R^* \underline{\otimes} R^*$ é um morfismo de álgebras. Sejam $f, g \in R^*$. Basta mostrarmos que $\Phi(\Delta_{R^*}(fg)) = \Phi(\Delta_{R^*}(f)\Delta_{R^*}(g))$, pois Φ é injetora. Sejam $r, s \in R$. Então

$$\begin{aligned}
\Phi(\Delta_{R^*}(f)\Delta_{R^*}(g))(r \otimes s) = & \ \Phi((f_1 \otimes f_2)(g_1 \otimes g_2))(r \otimes s) \\
= & \ \Phi(f_1((f_2)_{(-1)} \cdot g_1) \otimes (f_2)_{(0)} g_2)(r \otimes s) \\
= & \ (f_1((f_2)_{(-1)} \cdot g_1))(s)((f_2)_{(0)} g_2)(r) \\
= & \ f_1(s_2)((f_2)_{(-1)} \cdot g_1)(s_1)(f_2)_{(0)}(r_2) g_2(r_1) \\
= & \ f_1(s_2)(((f_2)_{(-1)}(f_2)_{(0)}(r_2)) \cdot g_1)(s_1) g_2(r_1) \\
= & \ f_1(s_2)((S^{-1}((r_2)_{(-1)}) f_2((r_2)_{(0)})) \cdot g_1)(s_1) g_2(r_1) \\
= & \ f_1(s_2) f_2((r_2)_{(0)})(S^{-1}((r_2)_{(-1)}) \cdot g_1)(s_1) g_2(r_1) \\
= & \ f_1(s_2) f_2((r_2)_{(0)}) g_1(S(S^{-1}((r_2)_{(-1)})) \cdot s_1) g_2(r_1) \\
= & \ f_1(s_2) f_2((r_2)_{(0)}) g_1((r_2)_{(-1)} \cdot s_1) g_2(r_1) \\
= & \ f((r_2)_{(0)} s_2) g(r_1((r_2)_{(-1)} \cdot s_1)) \\
\overset{(\star)}{=} & \ f((rs)_2) g((rs)_1) \\
= & \ (fg)(rs) \\
= & \ ((fg)m_R)(r \otimes s) \\
= & \ \Phi(\Phi^{-1} m_R^*(fg))(r \otimes s) \\
= & \ \Phi(\Delta_{R^*}(fg))(r \otimes s).
\end{aligned}$$

A igualdade ($\star$) segue do fato de que R é uma biálgebra trançada, o que implica $(rs)_1 \otimes (rs)_2 = r_1((r_2)_{(-1)} \cdot s_1) \otimes (r_2)_{(0)} s_2$.

Logo, $\Delta_{R^*}(fg) = \Delta_{R^*}(f)\Delta_{R^*}(g)$. Lembramos que $1_{R^*} = \varepsilon_R$. Sejam $r, s \in R$. Então

$$\begin{aligned}
\Phi(\Delta_{R^*}(\varepsilon_R))(r \otimes s) &= m_R^*(\varepsilon_R)(r \otimes s) = (\varepsilon_R m_R)(r \otimes s) \\
&= \varepsilon_R(rs) = \varepsilon_R(r)\varepsilon_R(s) \\
&= \Phi(\varepsilon_R \otimes \varepsilon_R)(r \otimes s).
\end{aligned}$$

Logo, $\Delta_{R^*}(\varepsilon_R) = \varepsilon_R \otimes \varepsilon_R = 1_{R^* \underline{\otimes} R^*}$. Agora, mostremos que ε_{R^*} é morfismo de álgebras. Sejam $f, g \in R^*$. Então

$$\varepsilon_{R^*}(fg) = (fg)(1_R) = f((1_R)_2)g((1_R)_1) \overset{(*)}{=} f(1_R)g(1_R) = \varepsilon_{R^*}(f)\varepsilon_{R^*}(g)$$

e

$$\varepsilon_{R^*}(\varepsilon_R) = \varepsilon_R(1_R) \overset{(**)}{=} 1,$$

as igualdades $(*)$ e $(**)$ seguem do fato de que R é uma biálgebra trançada (Δ_R e ε_R são morfismos de álgebras).

Portanto, $(R^*, m_{R^*}, \mu_{R^*}, \Delta_{R^*}, \varepsilon_{R^*})$ é uma biálgebra trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Seja $S : R \to R$ a antípoda de R. Definimos a antípoda de R^* como sendo $S^* : R^* \to R^*$. Pela Proposição 3.3, S^* é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Sejam $f \in R^*$ e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}
(S^*(f_1)f_2)(r) &= S^*(f_1)(r_2)f_2(r_1) = (f_1 S)(r_2)f_2(r_1) \\
&= f_1(S(r_2))f_2(r_1) = f(r_1 S(r_2)) = f(\varepsilon_R(r)1_R) \\
&= \varepsilon_R(r)f(1_R) = \varepsilon_{R^*}(f)\varepsilon_R(r).
\end{aligned}$$

Logo, $S^*(f_1)f_2 = \varepsilon_{R^*}(f)\varepsilon_R$ e de maneira análoga, mostra-se que $f_1 S^*(f_2) = \varepsilon_{R^*}(f)\varepsilon_R$. Portanto, R^* é uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$. ■

4.2 Bosonização ou biproduto

Nessa seção, mostramos que uma álgebra de Hopf trançada R em ${}_H^H\mathcal{YD}$ determina uma álgebra de Hopf $R\#H$ sobre k, chamada *bosonização ou biproduto* de R por H, cujas estruturas de álgebra e de coálgebra são o produto *smash* e o coproduto *smash*, respectivamente, ambos definidos na Seção 1.4. Para isso, precisamos de início que ${}_H^H\mathcal{YD}$ seja uma categoria trançada, assim pedimos que H seja uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora.

Mostramos também que se uma álgebra de Hopf A admite morfismos de álgebras de Hopf $\iota : H \to A$ e $\pi : A \to H$ satisfazendo $\pi\iota = I_H$ então A é isomorfa a uma bosonização $R\#H$, em que R é uma subálgebra de A.

Sejam A e H álgebras de Hopf, $\pi : A \to H$ e $\iota : H \to A$ morfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi\iota = I_H$. Consideremos

$$R := A^{co\pi} = \{a \in A : (I \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1_H\}.$$

Vamos usar a mesma notação para as estruturas de álgebra e de coálgebra de A e de H, salvo nos casos em que possa ocorrer alguma confusão.

Teorema 4.2 *R é uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que R é um módulo de Yetter-Drinfeld. Claramente R é um k-espaço vetorial. Definimos a ação de H em R por

$$h \cdot r = \iota(h_1)r\iota(S(h_2)), \forall h \in H, \forall r \in R.$$

Sejam $h \in H$ e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}
(I \otimes \pi)\Delta(h \cdot r) = &\quad (I \otimes \pi)\Delta(\iota(h_1)r\iota(S(h_2))) \\
= &\quad (I \otimes \pi)(\iota(h_1)_1 r_1 \iota(S(h_2))_1 \otimes \iota(h_1)_2 r_2 \iota(S(h_2))_2) \\
= &\quad (I \otimes \pi)(\iota(h_1) r_1 \iota(S(h_4)) \otimes \iota(h_2) r_2 \iota(S(h_3))) \\
= &\quad \iota(h_1) r_1 \iota(S(h_4)) \otimes \pi(\iota(h_2) r_2 \iota(S(h_3))) \\
= &\quad \iota(h_1) r_1 \iota(S(h_4)) \otimes h_2 \pi(r_2) S(h_3) \\
\overset{(\star)}{=} &\quad \iota(h_1) r \iota(S(h_4)) \otimes h_2 1_H S(h_3) \\
= &\quad \iota(h_1) r \iota(S(h_3)) \otimes \varepsilon(h_2) 1_H \\
= &\quad \iota(h_1) r \iota(S(h_2)) \otimes 1_H \\
= &\quad h \cdot r \otimes 1_H.
\end{aligned}$$

Como $r \in R$, temos que $r_1 \otimes \pi(r_2) = r \otimes 1_H$, o que implica a igualdade $(\star)$. Logo, $h \cdot r \in R$.

Além disso, para quaisquer $r \in R$ e $g, h \in H$, temos

$$1_H \cdot r = \iota(1_H)r\iota(S(1_H)) = r$$

e

$$\begin{aligned}
(gh) \cdot r = &\quad \iota((gh)_1)r\iota(S((gh)_2)) = \iota(g_1)\iota(h_1)r\iota(S(h_2))\iota(S(g_2)) \\
= &\quad \iota(g_1)(h \cdot r)\iota(S(g_2)) = g \cdot (h \cdot r).
\end{aligned}$$

Portanto, R é um H-módulo à esquerda.

Definimos $\rho : R \to H \otimes R$ por $\rho = (\pi \otimes I)\Delta$. Assim, para cada $r \in R$, temos $\rho(r) = \pi(r_1) \otimes r_2$. Mostremos que ρ está bem definida, isto é, que $\rho(r) \in H \otimes R$. É claro que $\rho(r) \in H \otimes A$. Além disso,

$$\begin{aligned}(I_H \otimes (I \otimes \pi)\Delta)\rho(r) = &\ (I_H \otimes (I \otimes \pi)\Delta)(\pi(r_1) \otimes r_2)\\ = &\ \pi(r_1) \otimes ((I \otimes \pi)(r_2 \otimes r_3))\\ = &\ \pi(r_1) \otimes r_2 \otimes \pi(r_3) \overset{(\star)}{=} \pi(r_1) \otimes r_2 \otimes 1.\end{aligned}$$

Como $r \in R$, $r_1 \otimes \pi(r_2) = r \otimes 1_H$ e aplicando $(\pi \otimes I_A \otimes I_H)(\Delta \otimes I_H)$ a essa igualdade, temos $\pi(r_1) \otimes r_2 \otimes \pi(r_3) = \pi(r_1) \otimes r_2 \otimes 1_H$ e segue a validade de $(\star)$. Portanto, $\rho(r) = \pi(r_1) \otimes r_2 \in H \otimes R$.

Mostremos que R possui uma estrutura de H-comódulo à esquerda via ρ. Seja $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes I)\rho(r) = &\ (\Delta \otimes I)(\pi(r_1) \otimes r_2) = \pi(r_1) \otimes \pi(r_2) \otimes r_3\\ = &\ (I \otimes \rho)(\pi(r_1) \otimes r_2) = (I \otimes \rho)\rho(r)\end{aligned}$$

e

$$(\varepsilon_H \otimes I)\rho(r) = (\varepsilon_H \otimes I)(\pi(r_1) \otimes r_2) = \varepsilon_H(\pi(r_1))r_2 \overset{(*)}{=} \varepsilon_A(r_1)r_2 = r.$$

Na igualdade $(*)$ usamos que π é um morfismo de coálgebras, isto é, $\varepsilon_H \pi = \varepsilon_A$.

Finalmente, mostremos a relação de compatibilidade. Sejam $h \in H$ e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}\rho(h \cdot r) = &\ \rho(\iota(h_1) r \iota(S(h_2)))\\ = &\ \pi((\iota(h_1) r \iota(S(h_2)))_1) \otimes (\iota(h_1) r \iota(S(h_2)))_2\\ = &\ \pi(\iota(h_1) r_1 \iota(S(h_4))) \otimes \iota(h_2) r_2 \iota(S(h_3))\\ = &\ h_1 \pi(r_1) S(h_4) \otimes \iota(h_2) r_2 \iota(S(h_3))\\ = &\ h_1 \pi(r_1) S(h_3) \otimes h_2 \cdot r_2 = h_1 r_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot r_{(0)}.\end{aligned}$$

Portanto, R é um módulo de Yetter-Drinfeld. Notemos que R é uma subálgebra de A. De fato, $\mu(1) = 1_A \in R$ e assim $\mu(\alpha) \in R, \forall \alpha \in k$. Para quaisquer $r, s \in R$

$$\begin{aligned}(I \otimes \pi)(\Delta(rs)) = &\ (I \otimes \pi)(\Delta(r)\Delta(s)) = (I \otimes \pi)(r_1 s_1 \otimes r_2 s_2)\\ = &\ r_1 s_1 \otimes \pi(r_2)\pi(s_2) = (r_1 \otimes \pi(r_2))(s_1 \otimes \pi(s_2))\\ = &\ (r \otimes 1_H)(s \otimes 1_H) = rs \otimes 1_H,\end{aligned}$$

donde $rs \in R$. Portanto, consideremos m a multiplicação de A, restrita à R e a unidade de R como sendo $\mu(1) = 1_A = 1_R$. Mostremos que tais funções são mosfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Sejam $h \in H$ e $r, s \in R$. Então

$$\begin{aligned} m(h\cdot(r\otimes s)) = & \; m(h_1\cdot r\otimes h_2\cdot s) = \iota(h_1)r\iota(S(h_2))\iota(h_3)s\iota(S(h_4)) \\ = & \; \iota(h_1)r\iota(1_H\varepsilon(h_2))s\iota(S(h_3)) = \iota(h_1)rs\iota(S(\varepsilon(h_2)h_3)) \\ = & \; \iota(h_1)rs\iota(S(h_2)) = h\cdot(rs) = h\cdot m(r\otimes s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I\otimes m)\rho(r\otimes s) = & \; (I\otimes m)(r_{(-1)}s_{(-1)}\otimes r_{(0)}\otimes s_{(0)}) \\ = & \; (I\otimes m)(\pi(r_1)\pi(s_1)\otimes r_2\otimes s_2) \\ = & \; \pi(r_1s_1)\otimes r_2s_2 = \pi((rs)_1)\otimes(rs)_2 \\ = & \; \rho(rs) = \rho(m(r\otimes s)), \end{aligned}$$

$$h\cdot(\mu(1)) = h\cdot 1_R = \iota(h_1)1_R\iota(S(h_2)) = \varepsilon(h)1_R = \mu(\varepsilon(h)1) = \mu(h\cdot 1)$$

e

$$(I\otimes\mu)\rho(1) = (I\otimes\mu)(1_H\otimes 1) = 1_H\otimes 1_R = \pi(1_R)\otimes 1_R = \rho(1_R) = \rho(\mu(1)).$$

Assim, R é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Definimos $\Delta_R : R \to R\underline{\otimes}R$ por $\Delta_R(r) = r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes r_3$. Primeiramente notemos que $\Delta_R(r) \in R\underline{\otimes}R$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} (I\otimes\pi)\Delta(r_1\iota\pi(S(r_2))) = & \; (I\otimes\pi)(r_{1_1}(\iota\pi(S(r_2)))_1\otimes r_{1_2}(\iota\pi(S(r_2)))_2) \\ = & \; (I\otimes\pi)(r_1\iota\pi(S(r_4))\otimes r_2\iota\pi(S(r_3))) \\ = & \; r_1\iota\pi(S(r_4))\otimes\pi(r_2S(r_3)) \\ = & \; r_1\iota\pi(S(r_3))\otimes\pi(\varepsilon(r_2)1_R) \\ = & \; r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes 1_H. \end{aligned}$$

Logo, $r_1\iota\pi(S(r_2)) \in R$. Além disso,

$$\begin{aligned} (I\otimes(I\otimes\pi)\Delta)(r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes r_3) = & \; r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes((I\otimes\pi)(r_{3_1}\otimes r_{3_2})) \\ = & \; r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes((I\otimes\pi)(r_3\otimes r_4)) \\ = & \; r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes r_3\otimes\pi(r_4) \\ \overset{(\maltese)}{=} & \; r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes r_3\otimes 1_H, \end{aligned}$$

Como $r \in R$, temos que $r_1\otimes\pi(r_2) = r\otimes 1_H$. Daí, aplicando $(\Delta\otimes I_A\otimes I_H)(\Delta\otimes I_H)$ nessa igualdade, segue que $r_1\otimes r_2\otimes r_3\otimes\pi(r_4) = r_1\otimes r_2\otimes r_3\otimes 1_H$ e portanto, a igualdade $(\maltese)$. Logo, $\Delta_R(r) = r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes r_3 \in R\underline{\otimes}R$.

Mostremos que Δ_R é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Sejam $h \in H$ e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned} & \Delta_R(h\cdot r) = \Delta_R(\iota(h_1)r\iota(S(h_2))) \\ & = (\iota(h_1)r\iota(S(h_2)))_1\iota\pi(S((\iota(h_1)r\iota(S(h_2)))_2)\otimes(\iota(h_1)r\iota(S(h_2)))_3 \\ & = \iota(h_1)r_1\iota(S(h_6))\iota\pi(S(\iota(h_2)r_2\iota(S(h_5))))\otimes\iota(h_3)r_3\iota(S(h_4)) \end{aligned}$$

$= \iota(h_1)r_1\iota(S(h_6)\pi(S(\iota(h_2)r_2\iota(S(h_5))))) \otimes \iota(h_3)r_3\iota(S(h_4))$
$\overset{(*)}{=} \iota(h_1)r_1\iota(S(h_6)S(\pi(\iota(h_2)r_2\iota(S(h_5))))) \otimes \iota(h_3)r_3\iota(S(h_4))$
$= \iota(h_1)r_1\iota(S(h_6)S(h_2\pi(r_2)S(h_5))) \otimes \iota(h_3)r_3\iota(S(h_4))$
$= \iota(h_1)r_1\iota(S(h_2\pi(r_2)S(h_5)h_6)) \otimes \iota(h_3)r_3\iota(S(h_4))$
$= \iota(h_1)r_1\iota(S(h_2\pi(r_2)\varepsilon(h_5)1_H)) \otimes \iota(h_3)r_3\iota(S(h_4))$
$= \iota(h_1)r_1\iota(S(h_2\pi(r_2))) \otimes \iota(h_3)r_3\iota(S(h_4\varepsilon(h_5)))$
$= \iota(h_1)r_1\iota(S(h_2\pi(r_2))) \otimes \iota(h_3)r_3\iota(S(h_4))$
$= \iota(h_1)r_1\iota(S(\pi(r_2)))\iota(S(h_2)) \otimes \iota(h_3)r_3\iota(S(h_4))$
$\overset{(**)}{=} h_1 \cdot (r_1\iota\pi(S(r_2))) \otimes h_2 \cdot r_3 = h \cdot \Delta_R(r)$
e

$$\begin{aligned}
\rho(\Delta_R(r)) = &\ \rho(r_1\iota\pi(S(r_2)) \otimes r_3) \\
= &\ (r_1\iota\pi(S(r_2)))_{(-1)}(r_3)_{(-1)} \otimes (r_1\iota\pi(S(r_2)))_{(0)} \otimes (r_3)_{(0)} \\
= &\ \pi((r_1\iota\pi(S(r_2)))_1)\pi(r_{3_1}) \otimes (r_1\iota\pi(S(r_2)))_2 \otimes r_{3_2} \\
= &\ \pi(r_1\iota\pi(S(r_4)))\pi(r_5) \otimes r_2\iota\pi(S(r_3)) \otimes r_6 \\
= &\ \pi(r_1S(r_4)r_5) \otimes r_2\iota\pi(S(r_3)) \otimes r_6 \\
= &\ \pi(r_1\varepsilon(r_4)1_R) \otimes r_2\iota\pi(S(r_3)) \otimes r_5 \\
= &\ \pi(r_1) \otimes r_2\iota\pi(S(r_3)) \otimes r_4 \\
= &\ (I \otimes \Delta_R)(\pi(r_1) \otimes r_2) = (I \otimes \Delta_R)\rho(r).
\end{aligned}$$

As igualdades $(*)$ e $(**)$ acima são devidas à Proposição 1.8 do Capítulo 1. Com certeza tal proposição é usada mais vezes no texto, porém não vamos mencioná-la mais. Pedimos cautela, pois estamos usando S para denotar ambas as antípodas de A e de H. Acreditamos que, olhando a Proposição 1.8, fiquem claros os passos dados.

Agora, mostremos que Δ_R é coassociativa. Seja $r \in R$. Então

$(\Delta_R \otimes I)\Delta_R(r) = (\Delta_R \otimes I)(r_1\iota\pi(S(r_2)) \otimes r_3) = \Delta_R(r_1\iota\pi(S(r_2))) \otimes r_3 =$
$= (r_1\iota\pi(S(r_2)))_1\iota\pi(S((r_1\iota\pi(S(r_2)))_2)) \otimes (r_1\iota\pi(S(r_2)))_3 \otimes r_3$
$= r_1\iota\pi(S(r_6))\iota\pi(S(r_2\iota\pi(S(r_5)))) \otimes r_3\iota\pi(S(r_4)) \otimes r_7$
$= r_1\iota\pi(S(r_6))\iota\pi(S(\iota\pi(S(r_5)))S(r_2)) \otimes r_3\iota\pi(S(r_4)) \otimes r_7$
$= r_1\iota\pi(S(r_6)S(S(r_5))S(r_2)) \otimes r_3\iota\pi(S(r_4)) \otimes r_7$
$= r_1\iota\pi(S(\varepsilon(r_5)1_R)S(r_2)) \otimes r_3\iota\pi(S(r_4)) \otimes r_6$
$= r_1\iota\pi(S(r_2)) \otimes r_3\iota\pi(S(r_4)) \otimes r_5$
$= r_1\iota\pi(S(r_2)) \otimes \Delta_R(r_3) = (I \otimes \Delta_R)\Delta_R(r).$

Definimos agora $\varepsilon_R : R \to k$ como sendo a restrição de ε a R. Assim, $\varepsilon_R(r) = \varepsilon(r)$, para todo $r \in R$. Mostremos que ε_R é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Sejam $h \in H$ e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}
\varepsilon_R(h \cdot r) &= \varepsilon(\iota(h_1)r\iota(S(h_2))) = \varepsilon(\iota(h_1))\varepsilon(r)\varepsilon(\iota(S(h_2))) \\
&= \varepsilon_H(h_1)\varepsilon(r)\varepsilon_H(h_2) = \varepsilon_H(h)\varepsilon(r) = h \cdot \varepsilon(r) = h \cdot \varepsilon_R(r)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\rho\varepsilon_R)(r) &= 1\otimes\varepsilon(r) = (I\otimes\varepsilon)(1\otimes r) \overset{(*)}{=} (I\otimes\varepsilon)(\pi(r_2)\otimes r_1)\\ &= \pi(r_2)\otimes\varepsilon(r_1) = \pi(r_2\varepsilon(r_1))\otimes 1 = \pi(r_1\varepsilon(r_2))\otimes 1\\ &= (I\otimes\varepsilon)(\pi(r_1)\otimes r_2) = (I\otimes\varepsilon_R)\rho(r).\end{aligned}$$

A igualdade $(*)$ segue do fato de que $r\in R$, ou seja, $r_1\otimes\pi(r_2) = r\otimes 1_H$.

Verifiquemos que ε_R é counidade. Seja $r\in R$. Então

$$\begin{aligned}(I\otimes\varepsilon_R)\Delta_R(r) &= (I\otimes\varepsilon_R)(r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes r_3) = r_1\iota\pi(S(r_2))\varepsilon(r_3)\\ &= r_1\iota\pi(S(r_2)) = r_1\iota(S(\pi(r_2))) = r\iota(S(1)) = r\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\varepsilon_R\otimes I)\Delta_R(r) &= (\varepsilon_R\otimes I)(r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes r_3) = \varepsilon(r_1\iota\pi(S(r_2)))r_3\\ &= \varepsilon(r_1)\varepsilon(\iota\pi(S(r_2)))r_3 = \varepsilon(r_1)\varepsilon(S(r_2))r_3\\ &= \varepsilon(r_1)\varepsilon(r_2)r_3 = r,\end{aligned}$$

na antepenúltima igualdade, usamos que $\iota\pi : A\to A$ é um morfismo de coálgebras. Com isso, R é uma coálgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Vamos mostrar que $\Delta_R : R\to R\underline{\otimes}R$ é um morfismo de álgebras. Sejam $r,s\in R$. Então

$$\begin{aligned}\Delta_R(r)\Delta_R(s) &= (r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes r_3)(s_1\iota\pi(S(s_2))\otimes s_3)\\ &= r_1\iota\pi(S(r_2))((r_3)_{(-1)}\cdot(s_1\iota\pi(S(s_2))))\otimes(r_3)_{(0)}s_3\\ &= r_1\iota\pi(S(r_2))(\pi(r_3)\cdot(s_1\iota\pi(S(s_2))))\otimes r_4s_3\\ &= r_1\iota\pi(S(r_2))\iota(\pi(r_3))s_1\iota\pi(S(s_2))\iota(S(\pi(r_4)))\otimes r_5s_3\\ &= r_1\iota\pi(S(r_2)r_3)s_1\iota\pi(S(s_2)S(r_4))\otimes r_5s_3\\ &= r_1\iota\pi(\varepsilon(r_2)1_R)s_1\iota\pi(S(r_3s_2))\otimes r_4s_3\\ &= r_1s_1\iota\pi(S(r_2s_2))\otimes r_3s_3 = \Delta_R(rs)\end{aligned}$$

e

$$\Delta_R(1) = 1\iota\pi(S(1))\otimes 1 = 1\otimes 1 = 1_{R\underline{\otimes}R}.$$

Além disso, ε_R é morfismo de álgebras, pois ε o é. Portanto, R é uma biálgebra trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Definimos $S_R : R\to R$ por $S_R(r) = \iota\pi(r_1)S(r_2)$, para todo $r\in R$. Mostremos que S_R está bem definida, ou seja, que $S_R(R)\subseteq R$. De fato, seja $r\in R$. Então

$$\begin{aligned}(I\otimes\pi)\Delta(S_R(r)) &= (I\otimes\pi)\Delta(\iota\pi(r_1)S(r_2))\\ &= (I\otimes\pi)(\iota\pi(r_1)S(r_4)\otimes\iota\pi(r_2)S(r_3))\\ &= \iota\pi(r_1)S(r_4)\otimes\pi(\iota\pi(r_2)S(r_3))\\ &= \iota\pi(r_1)S(r_4)\otimes\pi(r_2S(r_3))\\ &= \iota\pi(r_1)S(r_3)\otimes\pi(\varepsilon(r_2)1_R)\\ &= \iota\pi(r_1)S(r_3\varepsilon(r_2))\otimes\pi(1_R)\\ &= \iota\pi(r_1)S(r_2)\otimes 1_H = S_R(r)\otimes 1_H.\end{aligned}$$

Vejamos que S_R é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Sejam $h \in H$ e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}
S_R(h \cdot r) &= S_R(\iota(h_1)r\iota(S(h_2))) \\
&= \iota\pi((\iota(h_1)r\iota(S(h_2)))_1)S((\iota(h_1)r\iota(S(h_2)))_2) \\
&= \iota\pi(\iota(h_1)r_1\iota(S(h_4)))S(\iota(h_2)r_2\iota(S(h_3))) \\
&= \iota(h_1)\iota\pi(r_1)\iota(S(h_4))S(\iota(S(h_3)))S(r_2)S(\iota(h_2)) \\
&= \iota(h_1)\iota\pi(r_1)\iota(S(S(h_3)h_4))S(r_2)S(\iota(h_2)) \\
&= \iota(h_1)\iota\pi(r_1)\iota(S(\varepsilon(h_3)1))S(r_2)S(\iota(h_2)) \\
&= \iota(h_1)\iota\pi(r_1)S(r_2)S(\iota(h_2)) \\
&= \iota(h_1)\iota\pi(r_1)S(r_2)\iota(S(h_2)) = h \cdot S_R(r)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho S_R(r) &= \rho(\iota\pi(r_1)S(r_2)) = \pi((\iota\pi(r_1)S(r_2))_1) \otimes (\iota\pi(r_1)S(r_2))_2 \\
&= \pi(r_1)\pi(S(r_4)) \otimes \iota\pi(r_2)S(r_3) \\
&= \pi(r_1)S(\pi(r_4)) \otimes \iota\pi(r_2)S(r_3) \overset{(\star)}{=} \pi(r_1)S(1_H) \otimes \iota\pi(r_2)S(r_3) \\
&= (I \otimes S_R)(\pi(r_1) \otimes r_2) = (I \otimes S_R)\rho(r).
\end{aligned}$$

A justificativa para a igualdade $(\star)$ é a mesma usada para a igualdade (✠).

Finalmente, mostremos que S_R é a antípoda. Seja $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}
m(I \otimes S_R)\Delta_R(r) &= m(I \otimes S_R)(r_1\iota\pi(S(r_2)) \otimes r_3) \\
&= r_1\iota\pi(S(r_2))S_R(r_3) = r_1\iota\pi(S(r_2))\iota\pi(r_3)S(r_4) \\
&= r_1\iota\pi(S(r_2)r_3)S(r_4) = r_1\iota\pi(\varepsilon(r_2)1_R)S(r_3) \\
&= r_1S(r_2) = \varepsilon(r)1_R = \varepsilon_R(r)1_R
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
m(S_R \otimes I)\Delta_R(r) &= m(S_R \otimes I)(r_1\iota\pi(S(r_2)) \otimes r_3) \\
&= S_R(r_1\iota\pi(S(r_2)))r_3 \\
&= \iota\pi((r_1\iota\pi(S(r_2)))_1)S((r_1\iota\pi(S(r_2)))_2)r_3 \\
&= \iota\pi(r_1\iota\pi(S(r_4)))S(r_2\iota\pi(S(r_3)))r_5 \\
&= \iota\pi(r_1S(r_4))S(\iota\pi(S(r_3)))S(r_2)r_5 \\
&= \iota\pi(r_1S(r_4)S(S(r_3)))S(r_2)r_5 \\
&= \iota\pi(r_1S(S(r_3)r_4))S(r_2)r_5 \\
&= \iota\pi(r_1S(\varepsilon_R(r_3)1_R))S(r_2)r_4 = \iota\pi(r_1)S(r_2)r_3 \\
&= \iota\pi(r_1)\varepsilon_R(r_2)1_R = \iota(r_{(-1)})\varepsilon_R(r_{(0)}) \\
&= \iota(r_{(-1)}\varepsilon_R(r_{(0)})) \overset{(*)}{=} \iota(1_H\varepsilon_R(r)) = \varepsilon_R(r)1_R.
\end{aligned}$$

A igualdade $(*)$ segue do fato de que R é um H-comódulo coálgebra. Portanto, R é uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$. ■

Para os resultados que seguem, consideremos H uma álgebra de Hopf e R uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Em particular, R é uma álgebra na categoria dos H-módulos e uma coálgebra na categoria dos H-comódulos, ou seja, R é um H-módulo álgebra e um H-comódulo coálgebra. Assim, pelas Proposições 1.10 e 1.11, $R\#H$ possui estruturas de álgebra e de coálgebra dadas por

$$(r\#h)(s\#l) = r(h_1 \cdot s)\#h_2 l, \quad 1_{R\#H} = 1_R\#1_H,$$

$$\Delta(r\#h) = r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1 \otimes (r_2)_{(0)}\#h_2 \ \text{ e } \varepsilon(r\#h) = \varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h).$$

Não esqueçamos que R é também um H-comódulo álgebra e um H-módulo coálgebra.

Teorema 4.3 *Com a notação acima, $R\#H$ é uma álgebra de Hopf sobre k.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que Δ e ε são morfismos de álgebras. Sejam $r, s \in R$ e $h, l \in H$. Então

$$\begin{aligned}
&\Delta((r\#h)(s\#l)) = \Delta(r(h_1 \cdot s)\#h_2 l) = \\
&= (r(h_1 \cdot s))_1\#((r(h_1 \cdot s))_2)_{(-1)}(h_2 l)_1 \otimes ((r(h_1 \cdot s))_2)_{(0)}\#(h_2 l)_2 \\
&\overset{(\star)}{=} r_1((r_2)_{(-1)}\cdot(h_1\cdot s_1))\#((r_2)_{(0)}(h_2\cdot s_2))_{(-1)}h_3 l_1\otimes((r_2)_{(0)}(h_2\cdot s_2))_{(0)}\#h_4 l_2 \\
&= r_1(((r_2)_{(-1)}h_1) \cdot s_1)\#((r_2)_{(0)})_{(-1)}(h_2 \cdot s_2)_{(-1)}h_3 l_1 \otimes ((r_2)_{(0)})_{(0)}(h_2 \cdot \\
&s_2)_{(0)}\#h_4 l_2 \\
&\overset{(\star\star)}{=} r_1(((r_2)_{(-2)}h_1)\cdot s_1)\#(r_2)_{(-1)}h_2(s_2)_{(-1)}S(h_4)h_5 l_1\otimes(r_2)_{(0)}(h_3\cdot(s_2)_{(0)})\#h_6 l_2 \\
&= r_1(((r_2)_{(-2)}h_1)\cdot s_1)\#(r_2)_{(-1)}h_2(s_2)_{(-1)}\varepsilon(h_4)1_H l_1\otimes(r_2)_{(0)}(h_3\cdot(s_2)_{(0)})\#h_5 l_2 \\
&= r_1(((r_2)_{(-1)_1}h_1)\cdot s_1)\#(r_2)_{(-1)_2}h_2(s_2)_{(-1)}l_1\otimes(r_2)_{(0)}(h_3\cdot(s_2)_{(0)})\#h_4 l_2 \\
&= r_1(((r_2)_{(-1)}h_1)_1\cdot s_1)\#((r_2)_{(-1)}h_1)_2(s_2)_{(-1)}l_1\otimes(r_2)_{(0)}(h_2\cdot(s_2)_{(0)})\#h_3 l_2 \\
&= ((r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1)(s_1\#(s_2)_{(-1)}l_1)) \otimes (((r_2)_{(0)}\#h_2)((s_2)_{(0)}\#l_2)) \\
&\overset{(\star\star\star)}{=} (r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1 \otimes (r_2)_{(0)}\#h_2)(s_1\#(s_2)_{(-1)}l_1 \otimes (s_2)_{(0)}\#l_2) \\
&= \Delta(r\#h)\Delta(s\#l).
\end{aligned}$$

A igualdade $(\star)$ é válida, pois R é uma biálgebra trançada e Δ_R é um morfismo de H-módulos. De fato, temos

$$\begin{aligned}
(r(h_1 \cdot s))_1 \otimes (r(h_1 \cdot s))_2 \quad &= \Delta_R(r(h_1 \cdot s)) = \Delta_R(r)\Delta_R(h_1 \cdot s) \\
&= (r_1 \otimes r_2)(h_1 \cdot \Delta_R(s)) \\
&= (r_1 \otimes r_2)(h_1 \cdot s_1 \otimes h_2 \cdot s_2) \\
&= r_1((r_2)_{(-1)} \cdot (h_1 \cdot s_1)) \otimes (r_2)_{(0)}(h_2 \cdot s_2).
\end{aligned}$$

A igualdade $(\star\star)$ é a compatibilidade, pois R é um módulo de Yetter-Drinfeld. A igualdade $(\star\star\star)$ é a multiplicação componente a componente da álgebra $(R\#H) \otimes (R\#H)$.

Também,

$$\Delta(1_R\#1_H) = 1_R\#1_{(-1)}1_H \otimes 1_{(0)}\#1_H = 1_R\#1_H \otimes 1_R\#1_H,$$

pois a unidade de R é um morfismo de H-comódulos. Além disso,

$$\begin{aligned}
\varepsilon((r\#h)(s\#l)) = &\ \varepsilon(r(h_1\cdot s)\#h_2l) = \varepsilon_R(r(h_1\cdot s))\varepsilon_H(h_2l)\\
= &\ \varepsilon_R(r)(h_1\cdot\varepsilon_R(s))\varepsilon_H(h_2)\varepsilon_H(l)\\
= &\ \varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h_1)\varepsilon_R(s)\varepsilon_H(h_2)\varepsilon_H(l)\\
= &\ \varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h)\varepsilon_R(s)\varepsilon_H(l)\\
= &\ \varepsilon(r\#h)\varepsilon(s\#l)
\end{aligned}$$

e

$$\varepsilon(1_R\#1_H) = \varepsilon_R(1_R)\varepsilon_H(1_H) = 1.$$

Portanto, $R\#H$ é uma biálgebra. Finalmente, definimos

$$S : R\#H \to R\#H \ \text{ por } \ (r\#h) = (1_R\#S_H(r_{(-1)}h))(S_R(r_{(0)})\#1_H).$$

Mostremos que S é a antípoda. Sejam $r\in R$ e $h\in H$. Então

$$\begin{aligned}
&m(S\otimes I)\Delta(r\#h) \quad = m(S\otimes I)(r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1\otimes(r_2)_{(0)}\#h_2)\\
&= S(r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1)((r_2)_{(0)}\#h_2)\\
&= (1_R\#S_H((r_1)_{(-1)}(r_2)_{(-1)}h_1))(S_R((r_1)_{(0)})\#1_H)((r_2)_{(0)}\#h_2)\\
&= (1_R\#S_H((r_1)_{(-1)}(r_2)_{(-1)}h_1))(S_R((r_1)_{(0)})(r_2)_{(0)}\#h_2)\\
&= (1_R\#S_H(r_{(-1)}h_1))(S_R({r_{(0)}}_1){r_{(0)}}_2\#h_2)\\
&= (1_R\#S_H(r_{(-1)}h_1))(\varepsilon_R(r_{(0)})1_R\#h_2)\\
&= \varepsilon_R(r_{(0)})((S_H(r_{(-1)}h_1))_1\cdot 1_R\#(S_H(r_{(-1)}h_1))_2h_2)\\
&= \varepsilon_R(r_{(0)})(\varepsilon((S_H(r_{(-1)}h_1))_1)1_R\#(S_H(r_{(-1)}h_1))_2h_2)\\
&= \varepsilon_R(r_{(0)})(1_R\#S_H(r_{(-1)}h_1)h_2) = 1_R\#S_H(h_1)S_H(r_{(-1)}\varepsilon_R(r_{(0)}))h_2\\
&= 1_R\#S_H(h_1)S_H(\varepsilon_R(r)1_H)h_2 = \varepsilon_R(r)(1_R\#S_H(h_1)h_2)\\
&= \varepsilon_R(r)(1_R\#\varepsilon_H(h)1_H) = \varepsilon(r\#h)1_{R\#H}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&m(I\otimes S)\Delta(r\#h) = m(I\otimes S)(r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1\otimes(r_2)_{(0)}\#h_2)\\
&= (r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1)S((r_2)_{(0)}\#h_2)\\
&= (r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1)(1_R\#S_H(((r_2)_{(0)})_{(-1)}h_2))(S_R(((r_2)_{(0)})_{(0)})\#1_H)\\
&= (r_1(((r_2)_{(-1)}h_1)_1\cdot 1_R)\#((r_2)_{(-1)}h_1)_2S_H(((r_2)_{(0)})_{(-1)}h_2))\\
&(S_R(((r_2)_{(0)})_{(0)})\#1_H)\\
&= (r_1\varepsilon_H(((r_2)_{(-1)}h_1)_1)1_R\#((r_2)_{(-1)}h_1)_2S_H(((r_2)_{(0)})_{(-1)}h_2))\\
&(S_R(((r_2)_{(0)})_{(0)})\#1_H)\\
&= (r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1S_H(((r_2)_{(0)})_{(-1)}h_2))(S_R(((r_2)_{(0)})_{(0)})\#1_H)\\
&= (r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1S_H(h_2)S_H(((r_2)_{(0)})_{(-1)}))(S_R(((r_2)_{(0)})_{(0)})\#1_H)
\end{aligned}$$

$= (r_1\#(r_2)_{(-1)}\varepsilon_H(h)1_H S_H(((r_2)_{(0)})_{(-1)}))(S_R(((r_2)_{(0)})_{(0)})\#1_H)$
$= \varepsilon_H(h)(r_1\#{(r_2)_{(-1)}}_1 S_H({(r_2)_{(-1)}}_2))(S_R((r_2)_{(0)})\#1_H)$
$= \varepsilon_H(h)(r_1\#\varepsilon_H((r_2)_{(-1)})1_H)(S_R((r_2)_{(0)})\#1_H)$
$= \varepsilon_H(h)(r_1\#1_H)(S_R(\varepsilon_H((r_2)_{(-1)})(r_2)_{(0)})\#1_H)$
$= \varepsilon_H(h)(r_1\#1_H)(S_R(r_2)\#1_R) = \varepsilon_H(h)(r_1 S_R(r_2)\#1_H)$
$= \varepsilon_H(h)\varepsilon_R(r)(1_R\#1_H) = \varepsilon(r\#h)1_{R\#H}.$

Portanto, $R\#H$ é uma álgebra de Hopf. ■

Definição 4.3 *Sejam H uma álgebra de Hopf e R uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. A bosonização ou biproduto de R por H é a álgebra de Hopf $R\#H$ construída acima.*

Proposição 4.4 *As aplicações $\pi : R\#H \to H$ e $\iota : H \to R\#H$ dadas por $\pi(r\#h) = \varepsilon_R(r)h$ e $\iota(h) = 1_R\#h$ são morfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi\iota = I_H$. Além disso, $R\#1_H = (R\#H)^{co\pi}$.*

Demonstração: Primeiramente mostremos que π é um morfismo de álgebras de Hopf. Sejam $r, s \in R$ e $h, l \in H$. Então

$$\begin{aligned}\pi((r\#h)(s\#l)) &= \pi(r(h_1 \cdot s)\#h_2 l) = \varepsilon_R(r(h_1 \cdot s))h_2 l\\ &= \varepsilon_R(r)(h_1 \cdot \varepsilon_R(s))h_2 l = \varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h_1)\varepsilon_R(s)h_2 l\\ &= \varepsilon_R(r)h\varepsilon_R(s)l = \pi(r\#h)\pi(s\#l),\end{aligned}$$

$$\pi(1_R\#1_H) = \varepsilon_R(1_R)1_H = 1_H,$$

$$\begin{aligned}(\pi \otimes \pi)\Delta(r\#h) &= (\pi \otimes \pi)(r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1 \otimes (r_2)_{(0)}\#h_2)\\ &= \varepsilon_R(r_1)(r_2)_{(-1)}h_1 \otimes \varepsilon_R((r_2)_{(0)})h_2\\ &= \varepsilon_R(r_1)\varepsilon_R(r_2)h_1 \otimes h_2 = \varepsilon_R(r)\Delta(h)\\ &= \Delta(\varepsilon_R(r)h) = \Delta(\pi(r\#h))\end{aligned}$$

e

$$\varepsilon_H(\pi(r\#h)) = \varepsilon_H(\varepsilon_R(r)h) = \varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h) = \varepsilon(r\#h).$$

Agora, mostremos que ι é um morfismo de álgebras de Hopf. Sejam $h, l \in H$. Então

$$\begin{aligned}\iota(h)\iota(l) = &\quad (1_R\#h)(1_R\#l) = (h_1 \cdot 1_R)\#h_2 l\\ = &\quad \varepsilon_H(h_1)1_R\#h_2 l = 1_R\#hl = \iota(hl),\end{aligned}$$

$$\iota(1_R) = 1_R\#1_H = 1_{R\#H},$$

$$\Delta(\iota(h)) = \Delta(1_R\#h) = 1_R\#h_1 \otimes 1_R\#h_2 = \iota(h_1) \otimes \iota(h_2) = (\iota \otimes \iota)\Delta(h)$$

e

$$\varepsilon(\iota(h)) = \varepsilon(1_R\#h) = \varepsilon_R(1_R)\varepsilon_H(h) = \varepsilon_H(h).$$

Além disso, para todo $h \in H$, temos que

$$\pi\iota(h) = \pi(1_R \# h) = \varepsilon_R(1_R)h = h.$$

Logo, $\pi\iota = I_H$. Para mostrarmos que

$$R\#1_H = (R\#H)^{co\pi} = \{y \in R\#H : (I \otimes \pi)\Delta(y) = y \otimes 1_H\},$$

primeiramente notemos que, para quaisquer $r \in R$ e $h \in H$,

$$\begin{aligned}
(I \otimes \pi)\Delta(r\#h) &= (I \otimes \pi)(r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1 \otimes (r_2)_{(0)}\#h_2) \\
&= r_1\#(r_2)_{(-1)}h_1 \otimes \varepsilon_R((r_2)_{(0)})h_2 \\
&= r_1\#\varepsilon_R(r_2)h_1 \otimes h_2 \\
&= r\#h_1 \otimes h_2.
\end{aligned}$$

É claro que $R\#1_H \subseteq (R\#H)^{co\pi}$, pois $(I \otimes \pi)\Delta(r\#1_H) = r\#1_H \otimes 1_H$. Reciprocamente, se $r\#h \in (R\#H)^{co\pi}$ então $r\#h_1 \otimes h_2 = r\#h \otimes 1_H$, donde $h_1 \otimes h_2 = h \otimes 1_H$. Daí, aplicando $\varepsilon_H \otimes I$, temos que $h = \varepsilon_H(h_1)h_2 = \varepsilon_H(h)1_H$. Logo, $r\#h = r\#\varepsilon_H(h)1_H = r\varepsilon_H(h)\#1_H \in R\#1_H$. Portanto, $R\#1_H = (R\#H)^{co\pi}$. ■

Teorema 4.4 *Sejam A e H álgebras de Hopf, $\pi : A \to H$ e $\iota : H \to A$ morfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi\iota = I_H$ e $R = A^{co\pi}$. Então $A \cong R\#H$, isto é, são álgebras de Hopf isomorfas.*

Demonstração: Definimos $\phi : R\#H \to A$ e $\psi : A \to R\#H$ por $\phi(r\#h) = r\iota(h)$ e $\psi(a) = a_1\iota\pi(S(a_2))\#\pi(a_3)$.

Notemos que $\psi(a) \in R\#H$, pois $(I\otimes\pi)\Delta(a_1\iota\pi(S(a_2))) = a_1\iota\pi(S(a_2))\otimes 1_H$, como visto na demonstração do Teorema 4.2. Provemos que ϕ é um morfismo de álgebras de Hopf e que ψ é a inversa de ϕ, isto é suficiente para mostrar que $A \cong R\#H$. Sejam $r, s \in R$ e $h, l \in H$. Então

$$\begin{aligned}
\phi((r\#h)(s\#l)) &= \phi(r(h_1 \cdot s)\#h_2 l) = r(h_1 \cdot s)\iota(h_2 l) \\
&= r\iota(h_1)s\iota(S(h_2))\iota(h_3 l) = r\iota(h_1)s\iota(S(h_2)h_3 l) \\
&= r\iota(h_1)s\iota(\varepsilon_H(h_2)1_H l) = r\iota(h)s\iota(l) = \phi(r\#h)\phi(s\#l)
\end{aligned}$$

e

$$\phi(1_R\#1_H) = 1_R\iota(1_H) = 1_R.$$

Para o que segue, lembremos que a comultiplicação da álgebra de Hopf $R\#H$ depende da comultiplicação de R, que é dada por $\Delta_R(r) =$

$r_1\iota\pi(S(r_2))\otimes r_3$. Assim,

$$\begin{aligned}(\phi\otimes\phi)\Delta(r\#h) &= (\phi\otimes\phi)(r_1\iota\pi(S(r_2))\#(r_3)_{(-1)}h_1\otimes(r_3)_{(0)}\#h_2)\\ &= (\phi\otimes\phi)(r_1\iota\pi(S(r_2))\#\pi(r_3)h_1\otimes r_4\#h_2)\\ &= r_1\iota\pi(S(r_2))\iota(\pi(r_3)h_1)\otimes r_4\iota(h_2)\\ &= r_1\iota\pi(S(r_2)r_3)\iota(h_1)\otimes r_4\iota(h_2)\\ &= r_1\iota\pi(\varepsilon_R(r_2)1_R)\iota(h_1)\otimes r_3\iota(h_2)\\ &= r_1\iota(h_1)\otimes r_2\iota(h_2)=(r\iota(h))_1\otimes(r\iota(h))_2\\ &= \Delta(r\iota(h))=\Delta\phi(r\#h)\end{aligned}$$

e

$$\varepsilon_A(\phi(r\#h))=\varepsilon_A(r\iota(h))=\varepsilon_A(r)\varepsilon_A(\iota(h))=\varepsilon_R(r)\varepsilon_H(h)=\varepsilon(r\#h).$$

Logo, ϕ é um morfismo de álgebras de Hopf. Agora, sejam $r\in R$ e $h\in H$. Então

$$\begin{aligned}\psi(\phi(r\#h)) &= \psi(r\iota(h))=(r\iota(h))_1\iota\pi(S((r\iota(h))_2))\#\pi((r\iota(h))_3)\\ &= r_1\iota(h_1)\iota\pi(S(r_2\iota(h_2)))\#\pi(r_3\iota(h_3))\\ &= r_1\iota(h_1)\iota\pi(S(\iota(h_2)))\iota\pi(S(r_2))\#\pi(r_3)h_3\\ &= r_1\iota(h_1)\iota\pi(\iota(S(h_2)))\iota\pi(S(r_2))\#\pi(r_3)h_3\\ &= r_1\iota(h_1S(h_2))\iota\pi(S(r_2))\#\pi(r_3)h_3\\ &= r_1\iota(\varepsilon_H(h_1)1_H)\iota(S(\pi(r_2)))\#\pi(r_3)h_2\\ &= r_1\iota(S(\pi(r_2)))\#\pi(r_3)h\overset{(\star)}{=}r_1\iota(S(\pi(r_2)))\#1_Hh\\ &= r\iota(S(1_H))\#h=r\#h.\end{aligned}$$

Como $r\in R$, temos que $r_1\otimes r_2\otimes\pi(r_3)=r_1\otimes r_2\otimes 1_H$ e isso implica a igualdade $(\star)$. Assim, $\psi\phi=I_{R\#H}$. Seja $a\in A$. Então

$$\begin{aligned}\phi(\psi(a)) &= \phi(a_1\iota\pi(S(a_2))\#\pi(a_3))=a_1\iota\pi(S(a_2))\iota(\pi(a_3))\\ &= a_1\iota\pi(S(a_2)a_3)=a_1\iota\pi(\varepsilon(a_2)1)=a.\end{aligned}$$

Logo, $\phi\psi=I_A$. Portanto, $R\#H\cong A$ como álgebras de Hopf. ∎

Apresentamos agora um exemplo de álgebra de Hopf trançada através de uma aplicação do Teorema 4.2.

Exemplo 4.2 ([3], Example 1.4.1) Sejam k um corpo, N um número natural, ξ uma raiz N-ésima primitiva da unidade de k. Consideremos $A=\mathrm{T}_{\xi,N}$ a álgebra de Taft, isto é, A é gerada como k-espaço vetorial por elementos $\{g^ix^j\}_{i,j=0}^{N-1}$ satisfazendo as relações $g^N=1$, $x^N=0$ e $xg=\xi gx$.

A comultiplicação, a counidade e a antípoda são dadas por

$$\Delta(g)=g\otimes g,\quad \Delta(x)=g\otimes x+x\otimes 1,$$

$$\varepsilon(g)=1,\quad \varepsilon(x)=0,\quad S(g)=g^{-1}\ \text{ e }\ S(x)=-g^{-1}x.$$

Observamos que como $g^N=1$ então $g^{-1}=g^{N-1}$. Consideremos G o grupo cíclico de ordem N ($o(G)=N$) e denotamos por y, o gerador de G. Seja $H=kG$. Lembramos que a comultiplicação, a counidade e a antípoda de H são dadas por

$$\Delta(l)=l\otimes l,\quad \varepsilon(l)=1\ \text{ e }\ S(l)=l^{-1}, \forall l\in G.$$

Definimos $\pi: A\to H$ por $\pi(g^ix^j)=y^i\delta_{0,j}$ e $\iota: H\to A$ por $\iota(y^i)=g^i$. Mostremos que π e ι são morfismos de álgebras de Hopf tais que $\pi\iota=I_H$.

Sejam $g^ix^j, g^lx^m\in A$ com $i,j,l,m\in\{1,\cdots,N-1\}$. Então, como $xg=\xi gx$, existe $\alpha\in\mathbb{N}$ tal que $g^ix^jg^lx^m=\xi^\alpha g^{i+l}x^{j+m}$. Logo,

$$\pi(g^ix^jg^lx^m)=\pi(\xi^\alpha g^{i+l}x^{j+m})=\xi^\alpha y^{i+l}\delta_{0,j+m}.$$

Além disso, $\pi(g^ix^j)\pi(g^lx^m)=y^i\delta_{0,j}y^l\delta_{0,m}$. Assim, se $j+m\neq 0$ então $j\neq 0$ ou $m\neq 0$. Daí, $\pi(g^ix^jg^lx^m)=0=\pi(g^ix^j)\pi(g^lx^m)$.

Se $j+m=0$ então $j=m=0$. Daí, $\pi(g^ix^0g^lx^0)=\pi(g^{i+l})=y^{i+l}=y^iy^l=\pi(g^ix^0)\pi(g^lx^0)$. Além disso, $\pi(1)=\pi(g^0x^0)=y^0\delta_{0,0}=1$. Logo, π é um morfismo de álgebras.

Para vermos que π é um morfismo de coálgebras, notemos que

$$\begin{aligned}
\Delta(g^ix^j)= &\quad (\Delta(g))^i(\Delta(x))^j=(g\otimes g)^i(g\otimes x+x\otimes 1)^j\\
= &\quad (g^i\otimes g^i)\left(\sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix} j\\ k\end{pmatrix}(g\otimes x)^{j-k}(x\otimes 1)^k\right)\\
= &\quad \sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix} j\\ k\end{pmatrix}(g^i\otimes g^i)(g^{j-k}\otimes x^{j-k})(x^k\otimes 1)\\
= &\quad \sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix} j\\ k\end{pmatrix}g^{i+j-k}x^k\otimes g^ix^{j-k}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(\pi\otimes\pi)\Delta(g^ix^j)= &\quad (\pi\otimes\pi)\left(\sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix} j\\ k\end{pmatrix}g^{i+j-k}x^k\otimes g^ix^{j-k}\right)\\
= &\quad \sum_{k=0}^{j}\begin{pmatrix} j\\ k\end{pmatrix}y^{i+j-k}\delta_{0,k}\otimes y^i\delta_{0,j-k}\\
= &\quad y^i\otimes y^i\delta_{0,j}=\Delta(y^i\delta_{0,j})=\Delta(\pi(g^ix^j)).
\end{aligned}$$

Também,

$$\varepsilon(\pi(g^ix^j))=\varepsilon(y^i\delta_{0,j})=\delta_{0,j}=1^i0^j=\varepsilon(g)^i\varepsilon(x)^j=\varepsilon(g^ix^j).$$

Portanto, π é um morfismo de álgebras de Hopf. Sejam $y^i, y^j \in H$. Então

$$\iota(y^i y^j) = \iota(y^{i+j}) = g^{i+j} = g^i g^j = \iota(y^i)\iota(y^j), \quad \iota(1) = \iota(y^0) = g^0 = 1$$

$$\Delta(\iota(y^i)) = \Delta(g^i) = g^i \otimes g^i = (\iota \otimes \iota)(y^i \otimes y^i) = (\iota \otimes \iota)\Delta(y^i) \text{ e}$$
$$\varepsilon(\iota(y^i)) = \varepsilon(g^i) = 1 = \varepsilon(y^i).$$

Portanto, ι é um morfismo de álgebras de Hopf. Além disso, $\pi\iota(y^i) = \pi(g^i) = y^i\delta_{0,0} = y^i$, para todo y^i em H. Logo, $\pi\iota = I_H$.

Assim, pelo Teorema 4.2, $R = A^{co\pi}$ é uma álgebra de Hopf trançada em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Mostremos que R e $\dfrac{k[X]}{< X^N >}$ são isomorfas como álgebras. Para isso, definimos $f : k[X] \to R$ por $f(X) = x$. Note que f está bem definida, pois $(I\otimes\pi)\Delta(x) = (I\otimes\pi)(g\otimes x + x\otimes 1) = g\otimes 1\delta_{0,1} + x\otimes 1\delta_{0,0} = x \otimes 1$. Logo, $x \in R$. Além disso, f é definida de forma a ser morfismo de álgebras.

Para provarmos que f é sobrejetora, primeiramente calculemos $(I \otimes \pi)\Delta(g^i x^j)$ em $g^i x^j \in A$

$$\begin{aligned}
(I \otimes \pi)\Delta(g^i x^j) = &\quad (I \otimes \pi)\left(\sum_{k=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} g^{i+j-k}x^k \otimes g^i x^{j-k}\right) \\
= &\quad \sum_{k=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} g^{i+j-k}x^k \otimes y^i\delta_{0,j-k} \\
= &\quad g^i x^j \otimes y^i.
\end{aligned}$$

Agora seja $r = g^i x^j \in R$. Então $g^i x^j \otimes y^i = g^i x^j \otimes 1$. Daí, $y^i = 1$ e portanto, $i = 0$, pois $o(G) = N \mid i$ e $i \in \{0, \cdots, N-1\}$. Assim, $r = x^j$. Consideremos $X^j \in k[X]$, então $f(X^j) = f(X)^j = x^j = r$. Portanto, f é sobrejetora.

Vejamos que $ker(f) = \ < X^N >$. Seja $p(X) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j X^j \in ker(f)$. Como $x^j = 0$ para $j \geq N$, temos

$$0 = f\left(\sum_{j=0}^{m} \alpha_j X^j\right) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j f(X)^j = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j x^j.$$

Daí, $\alpha_j = 0$ para todo $j \in \{0, \cdots, N-1\}$. Assim,

$$p(X) = \sum_{j=N}^{m} \alpha_j X^j = X^N \left(\sum_{j=N}^{m} \alpha_j X^{j-N}\right) \in \ < X^N > .$$

Seja $p(x) \in \ < X^N >$, então $p(X) = X^N q(X)$, para algum $q(X) \in k[X]$. Daí, $f(p(X)) = f(X^N q(X)) = f(X)^N f(q(X)) = x^N f(q(X)) = 0$. Logo, $p(X) \in ker(f)$.

Portanto, pelo teorema do isomorfismo para álgebras segue que $R \cong \dfrac{k[X]}{< X^N >}$.

Capítulo 5

A álgebra de Nichols de um módulo de Yetter-Drinfeld

Nesse capítulo apresentamos a definição, a existência e a unicidade da álgebra de Nichols de um módulo de Yetter-Drinfeld.

Esse capítulo é desenvolvido tendo em mente os pré-requisitos desenvolvidos nas Seções 1.5 e 1.6 desse trabalho já que uma álgebra de Nichols é uma álgebra graduada. Além disso, para o que segue H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora.

As principais referências para esse capítulo são [3] e [4].

Definição 5.1 *Seja V um módulo de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H. Uma álgebra de Hopf trançada graduada $R = \oplus_{n\geq 0} R(n)$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é dita uma álgebra de Nichols de V se $k \cong R(0)$ e $V \cong R(1)$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$, $P(R) = R(1)$ e R é gerada como álgebra por $R(1)$.*

Precisamos recordar alguns fatos para prosseguirmos. Seja V um k-espaço vetorial. Uma álgebra tensorial de V é um par $(\mathcal{A}, \iota)$, em que $\mathcal{A}$ é uma álgebra e ι é um morfismo de k-espaços vetoriais, que satisfaz a propriedade universal: para qualquer álgebra A e qualquer morfismo k-linear $f : V \to A$, existe um único morfismo de álgebras $F : \mathcal{A} \to A$ tal que $F\iota = f$.

Lembramos que a algebra tensorial de V existe e é única. Uma breve construção é dada. Denotando $T^0(V) = k$, $T^1(V) = V$ e $T^n(V) = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ (n vezes), $n \geq 2$, consideremos $T(V) = \oplus_{n\geq 0} T^n(V)$ e

$\iota : V \to T(V)$ a inclusão canônica. Então $(T(V), \iota)$ é uma álgebra com as estruturas $m : T(V) \otimes T(V) \to T(V)$ e $\mu : k \to T(V)$ definidas como segue. Sejam $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in T^n(V)$ e $y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^m(V)$. Então

$$xy = m(x \otimes y) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^{n+m}(V)$$

e

$$\mu(1) = 1 \in T^0(V) = k.$$

A multiplicação de dois elementos quaisquer de $T(V)$ é obtida estendendo a fórmula acima por linearidade.

A próxima proposição estende a propriedade universal da álgebra tensorial para o contexto de módulos de Yetter-Drinfeld. Para isso, ainda fazemos algumas considerações. Sejam H uma álgebra de Hopf e V um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Pelo Corolário 3.1, para cada $n \geq 2$, $T^n(V)$ é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Também, já vimos que $T^0(V) = k$ é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Daí, pela Proposição 3.1, a álgebra tensorial $T(V) = \oplus_{n\geq 0} T^n(V)$ é também um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $T(V)$ é uma álgebra de Hopf trançada graduada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Para isso são necessários alguns resultados.

Teorema 5.1 *Sejam H uma álgebra de Hopf e V um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Então o par $(T(V), \iota)$ satisfaz as propriedades abaixo.*

(i) *$T(V)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e $\iota : V \to T(V)$ é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

(ii) *Se A é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e $f : V \to A$ é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então existe um único morfismo de álgebras $F : T(V) \to A$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $F\iota = f$.*

Demonstração: (i) Vejamos que m e μ citadas acima são morfismos em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Sejam $h \in H$, $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in T^n(V)$ e $y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^m(V)$. Então

$$\begin{aligned}
h \cdot m(x \otimes y) &= h \cdot (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m) \\
&= h_1 \cdot x_1 \otimes \cdots \otimes h_n \cdot x_n \otimes h_{n+1} \cdot y_1 \otimes \cdots \otimes h_{n+m} \cdot y_m \\
&= m((h_1 \cdot x_1 \otimes \cdots \otimes h_n \cdot x_n) \otimes (h_{n+1} \cdot y_1 \otimes \cdots \otimes h_{n+m} \cdot y_m)) \\
&= m(h_1 \cdot (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes h_2 \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m)) \\
&= m(h \cdot (x \otimes y)),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(I\otimes m)\rho(x\otimes y) = &\ (I\otimes m)((x_1)_{(-1)}\cdots(x_n)_{(-1)}(y_1)_{(-1)}\cdots(y_m)_{(-1)}\otimes\\
&((x_1)_{(0)}\otimes\cdots\otimes(x_n)_{(0)})\otimes((y_1)_{(0)}\otimes\cdots\otimes(y_m)_{(0)}))\\
= &\ (x_1)_{(-1)}\cdots(x_n)_{(-1)}(y_1)_{(-1)}\cdots(y_m)_{(-1)}\otimes(x_1)_{(0)}\otimes\\
&\cdots\otimes(x_n)_{(0)}\otimes(y_1)_{(0)}\otimes\cdots\otimes(y_m)_{(0)}\\
= &\ \rho(x_1\otimes\cdots\otimes x_n\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_m)\\
= &\ \rho(m(x\otimes y)),
\end{aligned}
$$

$$\mu(h\cdot 1)=\mu(\varepsilon(h)1)=\varepsilon(h)\mu(1)=h\cdot\mu(1)$$

e

$$(I\otimes\mu)\rho(1)=(I\otimes\mu)(1\otimes 1)=1\otimes\mu(1)=\rho(\mu(1)).$$

Portanto, $T(V)$ é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$. É claro que ι é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

(ii) Pela propriedade universal da álgebra tensorial, existe um único morfismo de álgebras $F:T(V)\to A$ tal que $F\iota=f$. Mostremos que F é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Sejam $h\in H$ e $x=x_1\otimes\cdots\otimes x_n\in T^n(V)$. Então

$$
\begin{aligned}
F(h\cdot x) = &\ F(h_1\cdot x_1\otimes\cdots\otimes h_n\cdot x_n)=F((h_1\cdot x_1)\cdots(h_n\cdot x_n))\\
\overset{(*)}{=} &\ F(h_1\cdot x_1)\cdots F(h_n\cdot x_n)=F(\iota(h_1\cdot x_1))\cdots F(\iota(h_n\cdot x_n))\\
= &\ f(h_1\cdot x_1)\cdots f(h_n\cdot x_n)\overset{(**)}{=}(h_1\cdot f(x_1))\cdots(h_n\cdot f(x_n))\\
\overset{(***)}{=} &\ h\cdot(f(x_1)\cdots f(x_n))=h\cdot(F\iota(x_1)\cdots F\iota(x_n))\\
= &\ h\cdot F(x_1\cdots x_n)=h\cdot F(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=h\cdot F(x)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(I\otimes F)\rho(x) = &\ (x_1)_{(-1)}\cdots(x_n)_{(-1)}\otimes F((x_1)_{(0)}\otimes\cdots\otimes(x_n)_{(0)})\\
= &\ (x_1)_{(-1)}\cdots(x_n)_{(-1)}\otimes F((x_1)_{(0)}\cdots(x_n)_{(0)})\\
\overset{(*)}{=} &\ (x_1)_{(-1)}\cdots(x_n)_{(-1)}\otimes F((x_1)_{(0)})\cdots F((x_n)_{(0)})\\
= &\ (x_1)_{(-1)}\cdots(x_n)_{(-1)}\otimes F\iota((x_1)_{(0)})\cdots F\iota((x_n)_{(0)})\\
= &\ (x_1)_{(-1)}\cdots(x_n)_{(-1)}\otimes f((x_1)_{(0)})\cdots f((x_n)_{(0)})\\
\overset{(**)}{=} &\ (f(x_1))_{(-1)}\cdots(f(x_n))_{(-1)}\otimes(f(x_1))_{(0)}\cdots(f(x_n))_{(0)}\\
\overset{(***)}{=} &\ (f(x_1)\cdots f(x_n))_{(-1)}\otimes(f(x_1)\cdots f(x_n))_{(0)}\\
= &\ (F(x_1\cdots x_n))_{(-1)}\otimes(F(x_1\cdots x_n))_{(0)}\\
= &\ (F(x_1\otimes\cdots\otimes x_n))_{(-1)}\otimes(F(x_1\otimes\cdots\otimes x_n))_{(0)}\\
= &\ (\rho F)(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=(\rho F)(x),
\end{aligned}
$$

em ambas as igualdades $(*)$ usamos que F é um morfismo de álgebras, em $(**)$ usamos que f é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$ e em $(***)$ que A é uma álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$ (veja Exemplos 2.15 e 2.16). Portanto, F é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$. ∎

Corolário 5.1 *Com a notação do teorema, $T(V)$ é uma biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Consideremos $f : V \to T(V)\underline{\otimes}T(V)$ definida por $f(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$. Sabemos, pela Proposição 4.1, que $T(V)\underline{\otimes}T(V)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Além disso, f é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$, pois dados $h \in H$ e $v \in V$, temos

$$\begin{aligned} h \cdot f(v) = & \quad h \cdot (v \otimes 1 + 1 \otimes v) = h_1 \cdot v \otimes h_2 \cdot 1 + h_1 \cdot 1 \otimes h_2 \cdot v \\ = & \quad h_1 \cdot v \otimes \varepsilon(h_2)1 + \varepsilon(h_1)1 \otimes h_2 \cdot v = h \cdot v \otimes 1 + 1 \otimes h \cdot v \\ = & \quad f(h \cdot v) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \rho(f(v)) = & \quad \rho(v \otimes 1 + 1 \otimes v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)} \otimes 1 + v_{(-1)} \otimes 1 \otimes v_{(0)} \\ = & \quad v_{(-1)} \otimes (v_{(0)} \otimes 1 + 1 \otimes v_{(0)}) = v_{(-1)} \otimes f(v_{(0)}) \\ = & \quad (I \otimes f)(v_{(-1)} \otimes v_{(0)}) = (I \otimes f)\rho(v). \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema acima, existe um morfismo de álgebras $\Delta : T(V) \to T(V)\underline{\otimes}T(V)$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\Delta\iota = f$. Agora, consideremos $0 : V \to k$ a função nula, que é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Novamente, pelo teorema acima, existe um morfismo de álgebras $\varepsilon : T(V) \to k$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\varepsilon\iota = 0$.

Para concluirmos que $(T(V), \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, observamos que $T(V)$ é gerada como álgebra por V, ou seja, cada elemento de $T(V)$ pode ser escrito como uma soma de produtos de elementos de V. Logo, é suficiente verificarmos a coassociatividade e a counidade em V. Seja $v \in V$. Então

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I)\Delta(v) = & \quad (\Delta \otimes I)(v \otimes 1 + 1 \otimes v) \\ = & \quad (v \otimes 1 + 1 \otimes v) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes v \\ = & \quad v \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes v \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes v \\ = & \quad v \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes (v \otimes 1 + 1 \otimes v) \\ = & \quad (I \otimes \Delta)(v \otimes 1 + 1 \otimes v) = (I \otimes \Delta)\Delta(v) \end{aligned}$$

e

$$(\varepsilon \otimes I)\Delta(v) = \varepsilon(v)1 + \varepsilon(1)v = v = v\varepsilon(1) + 1\varepsilon(v) = (I \otimes \varepsilon)\Delta(v).$$

Portanto, $T(V)$ é uma biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. ∎

Agora, vejamos que $T(V)$ é uma biálgebra graduada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Corolário 5.2 *$T(V)$ é uma biálgebra trançada graduada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Pelo corolário acima, $T(V)$ é uma biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Sabemos que $T(V) = \oplus_{n \geq 0} T^n(V)$ e que $T^n(V)$ é submódulo de Yetter-Drinfeld, para todo $n \geq 0$.

Pelas definições da multiplicação e da unidade de $T(V)$ fica claro que $T(V)$ é uma álgebra graduada. Falta mostrarmos que $T(V)$ é uma coálgebra graduada. Pela definição de ε, fica claro que $\varepsilon(T^n(V)) = 0$, para todo $n \geq 1$, pois V gera $T(V)$ como álgebra. Mostremos, por indução sobre n, que $\Delta(T^n(V)) \subseteq \sum_{l=0}^{n} T^{n-l}(V) \otimes T^l(V)$.

Como $T^0(V) = k$ e Δ é um morfismo de álgebras, segue que $\Delta(T^0(V)) \subseteq T^0(V) \otimes T^0(V)$. Assim, é válido para $n = 0$.

Suponhamos que valha para $n \geq 0$, por hipótese de indução. Mostremos que vale para $n+1$. Seja $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes x_{n+1} \in T^{n+1}(V)$. Então

$$\begin{aligned}
\Delta(x) = \; & \Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes x_{n+1}) = \Delta(x_1 \cdots x_n)\Delta(x_{n+1}) \\
\subseteq \; & (\sum_{l=0}^{n} T^{n-l}(V) \otimes T^l(V))(V \otimes k + k \otimes V) \\
\subseteq \; & \sum_{l=0}^{n} (T^{n-l}(V)V \otimes T^l(V)k + T^{n-l}(V)k \otimes T^l(V)V) \\
\subseteq \; & \sum_{l=0}^{n} (T^{n-l+1}(V) \otimes T^l(V) + T^{n-l}(V) \otimes T^{l+1}(V)) \\
\subseteq \; & \sum_{l=0}^{n+1} T^{n+1-l}(V) \otimes T^l(V).
\end{aligned}$$

Na primeira inclusão, usamos a hipótese de indução e o fato de que $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, para todo $v \in V$. Portanto, $T(V)$ é uma biálgebra graduada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. ∎

Corolário 5.3 *$T(V)$ é uma álgebra de Hopf trançada graduada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Sendo $T(V)$ uma coálgebra graduada temos, pelo Corolário 1.2, que $T(V)_0 \subseteq T^0(V) = k$. Logo, $T(V)_0 = k$. Consideremos $I : T(V) \to T(V) \in Hom(T(V), T(V))$. Notemos que $g : k \to T(V)$ dada por $g(1) = 1$ é a inversa de $I|_k$ segundo o produto de convolução em $Hom(k, T(V))$. De fato,

$$(I|_k * g)(1) = I|_k(1)g(1) = 1 = \mu\varepsilon(1).$$

Assim, pelo Teorema 1.6, I é invertível em $Hom(T(V), T(V))$. Logo, existe $S : T(V) \to T(V)$, a antípoda de $T(V)$. Portanto, $T(V)$ é uma álgebra de Hopf trançada graduada em ${}_H^H\mathcal{YD}$. $\blacksquare$

Consideremos $\mathfrak{S}$ o conjunto de todos os ideais $I \subseteq T(V)$ tais que

(i) I é um ideal graduado e $I \cap V = 0$.

(ii) I é um coideal, isto é, $\Delta(I) \subseteq I \otimes T(V) + T(V) \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$.

Seja $\tilde{\mathfrak{S}}$ o conjunto dos $I \in \mathfrak{S}$ que são submódulos de Yetter-Drinfeld de $T(V)$.

Os ideais $I(V) = \sum_{I \in \mathfrak{S}} I$ e $\tilde{I}(V) = \sum_{J \in \tilde{\mathfrak{S}}} J$ são os elementos máximos em $\mathfrak{S}$ e em $\tilde{\mathfrak{S}}$, respectivamente. De fato, sabemos que a soma de ideais é um ideal, a soma de coideais é um coideal e a soma de k-subespaços graduados é ainda graduado. Relembrando a prova da Proposição 1.12, temos que $I(V) \cap V = \displaystyle\sum_{I \in \mathfrak{S}} (I \cap V) = 0$. Analogamente para $\tilde{I}(V)$.

Pela Proposição 1.14, para cada $I \in \mathfrak{S}$, $R = \dfrac{T(V)}{I}$ é uma álgebra graduada e uma coálgebra graduada. Além disso, $R(0) \cong k$ e $V \cong R(1)$, pois $k \cap I$ e $V \cap I = 0$, respectivamente.

Se $I \in \tilde{\mathfrak{S}}$ então $I \in \mathfrak{S}$ e, pelo acima, $R = \oplus_{n \geq 0} R(n)$ é uma álgebra graduada e uma coálgebra graduada. Além disso, I é um submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$ e daí, pela Proposição 3.2, R é um módulo de Yetter-Drinfeld e a projeção canônica $\pi : T(V) \to R$ é um morfismo em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

As aplicações estruturais de álgebra e de coálgebra quocientes são morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$, pois são composições das aplicações estruturais de álgebra e de coálgebra de $T(V)$ com a projeção canônica π.

Além disso, as aplicações estruturais de coálgebra de $T(V)$ assim como π são morfismos de álgebras e isso implica que $\Delta_R : R \to R \underline{\otimes} R$ e $\varepsilon_R : R \to k$ sejam também morfismos de álgebras.

A construção da antípoda de R é análoga à de $T(V)$, uma vez que $R_0 = R(0) \cong k$.

Por tudo que dissemos acima, R torna-se uma álgebra de Hopf trançada graduada em ${}_H^H\mathcal{YD}$.

O teorema abaixo nos garante a existência e a unicidade da álgebra de Nichols de um módulo de Yetter-Drinfeld.

Teorema 5.2 *Sejam* $\mathcal{B}(V) := \dfrac{T(V)}{\tilde{I}(V)}$ *e* $\pi_V : T(V) \to \mathcal{B}(V)$ *a projeção canônica. Então*

(i) $V = P(\mathcal{B}(V))$ *e portanto,* $\mathcal{B}(V)$ *é uma álgebra de Nichols de* V*.*

(ii) $I(V) = \tilde{I}(V)$*.*

(iii) *Seja* $R = \oplus_{n\geq 0} R(n)$ *uma álgebra de Hopf graduada em* ${}^H_H\mathcal{YD}$ *tal que* $R(0) = k1$ *e* R *é gerada como álgebra por* $V := R(1)$*. Então existe um morfismo sobrejetor de álgebras de Hopf graduadas* $f : R \to \mathcal{B}(V)$ *tal que* $f|_{R(1)}$ *é isomorfismo de módulos de Yetter-Drinfeld.*

(iv) *Seja* $R = \oplus_{n\geq 0} R(n)$ *uma álgebra de Nichols de* V*. Então* $R \cong \mathcal{B}(V)$ *como álgebras de Hopf trançadas em* ${}^H_H\mathcal{YD}$*.*

(v) *Seja* $R = \oplus_{n\geq 0} R(n)$ *uma álgebra de Hopf trançada graduada em* ${}^H_H\mathcal{YD}$ *com* $R(0) = k1$ *e* $V \cong R(1) = P(R)$*. Então* $\mathcal{B}(V)$ *é isomorfo à uma subálgebra de* R *gerada por* V*.*

Demonstração: (i) Escrevemos $\mathcal{B}(V) = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{B}(V)(n)$ e essa é uma álgebra de Hopf trançada graduada em ${}^H_H\mathcal{YD}$ com $\mathcal{B}(V)(0) \cong k$ e $\mathcal{B}(V)(1) \cong V$. Por definição, $V \subseteq P(\mathcal{B}(V))$. Mostremos que $P(\mathcal{B}(V)) \subseteq V$. Temos que $P(\mathcal{B}(V)) = \oplus_{n\geq 0}(P(\mathcal{B}(V)) \cap \mathcal{B}(V)(n))$ (veja [13], Exercise 4.4.11).

Fixemos $n \geq 2$ e mostremos que $P(\mathcal{B}(V)) \cap \mathcal{B}(V)(n) = 0$. Seja $X = \pi_V^{-1}(P(\mathcal{B}(V)) \cap \mathcal{B}(V)(n))$. Então X é um k-subespaço graduado de $T(V)$, pois $X = \pi_V^{-1}(P(\mathcal{B}(V))) \cap T^n(V)$ e

$$\oplus_{m\geq 0}((\pi_V^{-1}(P(\mathcal{B}(V))) \cap T^n(V)) \cap T^m(V)) = \pi_V^{-1}(P(\mathcal{B}(V))) \cap T^n(V).$$

Além disso, como $P(\mathcal{B}(V))$ é submódulo de Yetter-Drinfeld de $\mathcal{B}(V)$ (Proposição 4.3) e π_V é morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$, segue que $\pi_V^{-1}(P(\mathcal{B}(V)))$ é um submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$. Logo, X é um submódulo de Yetter-Drinfeld graduado de $T(V)$.

Seja $x \in X$. Então $\pi_V(x) \in P(\mathcal{B}(V))$. Daí,

$$\Delta(\pi_V(x)) = \pi_V(x) \otimes 1 + 1 \otimes \pi_V(x) = (\pi_V \otimes \pi_V)(x \otimes 1 + 1 \otimes x).$$

Como π_V é um morfismo de coálgebras,

$$\Delta(\pi_V(x)) = (\pi_V \otimes \pi_V)\Delta(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta(x) - (x \otimes 1 + 1 \otimes x) \in &\quad ker(\pi_V \otimes \pi_V) \\ = &\quad \tilde{I}(V) \otimes T(V) + T(V) \otimes \tilde{I}(V), \end{aligned}$$

pelo Lema 1.2. Logo, $\Delta(x) \in x\otimes 1+1\otimes x+\tilde{I}(V)\otimes T(V)+T(V)\otimes\tilde{I}(V)$, ou seja, $\Delta(X) \subseteq X\otimes T(V)+T(V)\otimes X+\tilde{I}(V)\otimes T(V)+T(V)\otimes\tilde{I}(V)$.

Consideremos $I =< X > +\tilde{I}(V) \subseteq T(V)$, em que $< X >$ é o ideal gerado por X. Notemos que $I \subseteq \oplus_{n\geq 2}T^n(V)$ e assim, $I\cap V = 0$. Além disso, pela Proposição 1.13, $< X >$ é um ideal graduado de $T(V)$ e $\tilde{I}(V)$ também o é. Logo, I é um ideal graduado de $T(V)$, pela Proposição 1.12.

Mostremos que I é um coideal de $T(V)$. É claro que $\varepsilon(I) = 0$, pois $I \subseteq \oplus_{n\geq 2}T^n(V)$. Seja $y = \sum axb + z \in I$, em que $a, b \in T(V), x \in X$ e $z \in \tilde{I}(V)$. Então

$$\begin{aligned}
\Delta(y) = \ & \sum \Delta(axb) + \Delta(z) = \sum \Delta(a)\Delta(x)\Delta(b) + \Delta(z) \\
\subseteq \ & \sum (T(V)\otimes T(V))(X\otimes T(V) + T(V)\otimes X + \tilde{I}(V)\otimes T(V) + \\
& T(V)\otimes \tilde{I}(V))(T(V)\otimes T(V)) + \tilde{I}(V)\otimes T(V) + T(V)\otimes \tilde{I}(V) \\
\subseteq \ & (< X > +\tilde{I}(V))\otimes T(V) + T(V)\otimes(< X > +\tilde{I}(V)) \\
= \ & I\otimes T(V) + T(V)\otimes I.
\end{aligned}$$

Como X é um submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$, segue que $< X >$ também o é, assim como $\tilde{I}(V)$. Logo, I é um submódulo de Yetter-Drinfeld de $T(V)$. Assim, $I \in \mathfrak{S}$ e, pela maximalidade de $\tilde{I}(V)$, segue que $I \subseteq \tilde{I}(V)$.

Logo, $\pi_V(X) \subseteq \pi_V(I) = 0$. Daí, $P(\mathcal{B}(V))\cap\mathcal{B}(V)(n) = \pi_V(X) = 0$. Assim, $P(\mathcal{B}(V)) = P(\mathcal{B}(V))\cap k\oplus P(\mathcal{B}(V))\cap V = P(\mathcal{B}(V))\cap V$, donde $P(\mathcal{B}(V)) \subseteq V$.

É claro que $\mathcal{B}(V)$ é gerada como álgebra por V, pois $T(V)$ o é. Portanto, $\mathcal{B}(V)$ é uma álgebra de Nichols de V.

(ii) Como $\tilde{I}(V) \subseteq I(V)$, podemos definir $\pi : \mathcal{B}(V) \to \dfrac{T(V)}{I(V)}$ por $\pi(x+\tilde{I}(V)) = x + I(V)$, para todo $x \in T(V)$. Não é difícil ver que π que é um morfismo sobrejetor de coálgebras.

Além disso, $\pi|_V$ é injetora, pois dado $x \in V$ tal que $\pi(x+\tilde{I}(V)) = 0$, temos que $x+I(V) = 0$. Assim, $x \in I(V)\cap V = 0$. Pelo item (i), temos que $V = P(\mathcal{B}(V))$. Usando o Teorema 1.7 ($\mathcal{B}(V)$ é conexa), concluímos que π é injetora.

Logo, dado $x \in I(V)$, $0 = x + I(V) = \pi(x + \tilde{I}(V))$ e como π é injetora, isso implica que $x + \tilde{I}(V) = 0$, ou seja, $x \in \tilde{I}(V)$. Portanto, $I(V) = \tilde{I}(V)$.

(iii) Definimos $\alpha : T(V) \to R$ por $\alpha(v) = v$, para todo $v \in V$, que estendende-se de forma a ser um morfismo de álgebras. Como R é gerado como álgebra por V, segue que α é sobrejetora.

Além disso, α é um morfismo de coálgebras pois, pela Proposição

1.16, $V = R(1) \subseteq P(R)$ e assim, dado $v \in V$,

$$(\alpha \otimes \alpha)\Delta(v) = (\alpha \otimes \alpha)(v \otimes 1 + 1 \otimes v) = \alpha(v) \otimes 1 + 1 \otimes \alpha(v) = \Delta(\alpha(v)).$$

Também, se $v = v_1 \cdots v_n \in T^n(V)$, em que $v_i \in V$ para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, então $\alpha(v) = \alpha(v_1) \cdots \alpha(v_n) \in R(n)$, pois $\alpha(v_i) \in V = R(1)$ e R é uma álgebra graduada. Isso nos diz que α é um morfismo graduado. Portanto, α é um morfismo de álgebras de Hopf graduadas, e então, $\dfrac{T(V)}{ker(\alpha)} \cong R$.

Notemos que $ker(\alpha) \in \mathfrak{S}$, pois é um ideal graduado (Proposição 1.15), um coideal e $ker(\alpha) \cap V = 0$. Logo, $ker(\alpha) \subseteq I(V) = \tilde{I}(V)$. Assim, está bem definida $f : R \cong \dfrac{T(V)}{ker(\alpha)} \to \mathcal{B}(V)$, que é um morfismo sobrejetor de álgebras de Hopf graduadas. Além disso, $f|_{R(1)}$ é isomorfismo de módulos de Yetter-Drinfeld, pois $R(1) = V$ e $f(V) = V + \tilde{I}(V) = \mathcal{B}(V)(1) \cong V$.

(iv) Do item (iii) temos $f : R \to \mathcal{B}(V)$ um morfismo sobrejetor de álgebras de Hopf graduadas. Como R é gerado como álgebra por V, a multiplicação de R é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$, $f|_V$ é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$ e com contas análogas às feitas na prova do item (ii) do Teorema 5.1, concluímos que f é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Portanto, $f : R \to \mathcal{B}(V)$ é um morfismo sobrejetor de álgebras de Hopf graduadas em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Por hipótese, $P(R) = R(1)$ e vimos que $f|_{R(1)}$ é injetora. Logo, pelo Teorema 1.7 (R é conexa), segue que f é injetora. Portanto, $R \cong \mathcal{B}(V)$.

(v) Temos que $k < V >$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Mostremos que $\Delta(k < V >) \subseteq k < V > \otimes \ k < V >$. Seja $\sum v_1 \cdots v_n \in \ < V >$. Então, como $V = P(R)$,

$$\begin{aligned} \Delta(\textstyle\sum v_1 \cdots v_n) = & \ \textstyle\sum \Delta(v_1) \cdots \Delta(v_n) \\ = & \ \textstyle\sum (v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_1) \cdots (v_n \otimes 1 + 1 \otimes v_n) \\ \in & \ k < V > \otimes \ k < V > . \end{aligned}$$

Logo, $k < V >$ é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Mais ainda, $k < V >$ é uma biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$, pois as aplicações estruturais de coálgebra de $k < V >$ são restrições das aplicações estruturais de coálgebra de R, que são morfismos de álgebras.

Para cada $v \in V$, como $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, temos que $0 = \varepsilon(v)1 = S(v)1 + S(1)v$, ou seja, $S(v) = -v$. Assim, $S(k < V >) \subseteq k < V >$. Portanto, $k < V >$ é uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Não é dificil ver que

$$k < V >= \oplus_{n \geq 0}(k < V >) \cap R(n).$$

Assim, $k < V >$ é uma álgebra de Hopf trançada graduada em ${}_H^H\mathcal{YD}$, com graduação dada acima. Além disso,

$$k < V > (0) = k < V > \cap R(0) = k1,$$

$$k < V > (1) = k < V > \cap R(1) = V$$

e

$$P(k < V >) = V.$$

Logo, $k < V >$ é uma álgebra de Nichols de V e, pelo item anterior, $k < V > \cong \mathcal{B}(V)$. ■

Com esse teorema, finalmente começamos a entender o que é uma álgebra Nichols. Assim, podemos realizar o primeiro passo no método de classificação de álgebras de Hopf pontuadas proposto em [3]. Tal passo consiste em estudar as álgebras de Nichols de um módulo de Yetter-Drinfeld sobre kG, em que G é o grupo dos elementos *grouplike* da álgebra de Hopf pontuada.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRUSKIEWITSCH, N. e GRAÑA, M.. Braided Hopf algebras over non-abelian groups. **Bol. Acad. Nacional de Ciencias (Córdoba)**, v. 63, p. 45-78, 1999.

[2] ANDRUSKIEWITSCH, N. e SCHNEIDER, H.-J.. On the classification of finite-dimensional Pointed Hopf Algebras. **Annals of Mathemathics**, v. 171, n. 1, p. 375-417, 2010.

[3] ANDRUSKIEWITSCH, N. e SCHNEIDER, H.-J.. **Pointed Hopf Algebras in "New Directions in Hopf Algebras"**. MSRI Publications, v. 43, p. 1-68, 2002.

[4] ANGIONO, I. E.. **Álgebras de Nichols sobre grupos abelianos**. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de La Plata, Córdoba, 2007.

[5] DĂSCĂLESCU, S.; NĂSTĂSESCU, C.; RAIANU, S.. **Hopf Algebras: An Introduction**, New York: Marcel Dekker, 2001. 401p..

[6] ETINGOF, P.; GELAKI, S.; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V.. **Tensor Categories**, lecture notes for the course 18.769 "Tensor categorie", MIT, 2009.

[7] HUNGERFORD, T. W.. **Algebra**, New York: Springer- Verlag, 2000. 502p..

[8] KASSEL, C.. **Quantum Groups**, New York: Springer-Verlag, 1995. 531p..

[9] LAM, T. Y.. **A First Course in Noncommutative Rings**, New York: Springer-Verlag, 1991. 397p..

[10] MILINSKI, A. e SCHNEIDER, H.-J.. Pointed indecomposable Hopf algebras over Coxeter groups. **Contemporary Mathematics**, n. 267, 2000.

[11] MONTGOMERY, S.. **Hopf Algebras and Their Actions on Rings**, Chigago: CBMS, 1992. 238p..

[12] PAREIGIS, B.. Symmetric Yetter-Drinfeld categories are trivial. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 155, p. 91, 2001.

[13] RADFORD, D. E.. **Hopf Algebras**, Singapore: World Scientific, 2012. 545p..

[14] RADFORD, D. E.. The Structure of Hopf Algebras with a Projection. **Journal of Algebra**, v. 92, p. 322-347, 1985.

[15] STIRLING, S. D. e WU, Y.-S.. **Braided Categorical Quantum Mechanics I**, preprint, 2009.

[16] SWEEDLER, M. E.. **Hopf Algebras**, New York: W.A. Benjamin, Inc., 1969. 336p..

[17] TAKEUCHI, M.. Survey on Braided Hopf Algebras. **Contemporary Mathematics**, n. 267, 2000.