Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

IVANETE ZUCHI

A ABORDAGEM DO CONCEITO DE LIMITE VIA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional

Tese de Doutorado

Florianópolis
2005

IVANETE ZUCHI

A ABORDAGEM DO CONCEITO DE LIMITE VIA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do grau de doutora em Engenharia de Produção.

Orientadora: Mirian Buss Gonçalves, Dr[a.]

Co-Orientadora: Neri Terezinha Both Carvalho, Dr[a.]

Florianópolis
2005

IVANETE ZUCHI

A ABORDAGEM DO CONCEITO DE LIMITE VIA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de **DOUTORA EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Edson Pacheco Paladini, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof^{a} Mirian Buss Gonçalves, Dr^{a}
Orientadora

Prof. Rogério de Aguiar, Dr.
Membro

Prof^{a} Neri Terezinha Both Carvalho, Dr^{a}
Co-orientadora

Prof^{a} Marilena Bittar, Dr^{a}
Examinadora Externa

Prof^{a} Karin Cristina Siqueira Ramos, Dr^{a}
Examinadora Externa

Prof. Edson Tadeu Bez, Dr.
Moderador

Aos meus Pais, Anselma e Zeferino, pessoas humildes e simples, que apesar de todas as dificuldades conseguiram dar o que há de mais precioso para um filho: os princípios familiares. Minha retribuição é lhes oferecer esse fruto, o qual vocês ajudaram a plantar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha orientadora Mirian, a luz que iluminou meu caminho pela longa estrada do conhecimento. Obrigada pela confiança e dedicação.

Agradeço muito a Professora Neri pelas preciosas contribuições dadas na área de Educação Matemática.

A minha família, minha base de amor, meu acalanto.

Ao meu namorado Adriano, por seu amor, respeito e, principalmente, por suportar a ausência e mesmo na distância se fazer presente.

À professora e amiga Maria Bernadete, pelo desafio de aplicar a seqüência didática em sua turma. Obrigada pela confiança. Sua contribuição e incentivo foi fundamental nesse trabalho.

Às professoras e amigas Katiani e Renata que acompanharam o trabalho desde a observação em classe e possibilitaram a experimentação do protótipo em suas classes. Obrigada pelo incentivo e pelas contribuições importantes.

Aos professores Péricles, Werner e Dario, os quais possibilitaram a realização da aplicação desse trabalho em suas classes.

Ao meu grande amigo de todas as horas, Rogério. Obrigada pelas correções, pelo acompanhamento nas experimentações, pelas dicas, por ouvir meus lamentos e ter sempre uma palavra de incentivo.

A todos alunos que participaram desse trabalho o meu muito obrigada. Vocês foram os atores principais dessa cena.

A nossa turma do almoço, Rogério, Maria, Marnei, Gracieli,Eliane, Simões, Luiz e Carla, pelos momentos de descontração e pela alegria de suas companhias. Em especial, ao Rogério pela sugestão do nome do Sistema.

Por fim, mas não menos importante, agradeço aos meus amigos, os quais fazem parte da minha família: Mari, Marcelo, Di, Sergio, Sandra e Ro, por sempre estarem presentes, independente de qualquer situação.

Oração do Professor

Dai-me, Senhor, o dom de ensinar,

Dai-me esta graça que vem do amor.

Mas, antes do ensinar, Senhor,

Dai-me o dom de aprender.

Aprender a ensinar

Aprender o amor de ensinar.

Que o meu ensinar seja simples, humano e alegre, como o amor.

De aprender sempre.

Que eu persevere mais no aprender do que no ensinar.

Que minha sabedoria ilumine e não apenas brilhe

Que o meu saber não domine ninguém, mas leve à verdade.

Que meus conhecimentos não produzam orgulho,

Mas cresçam e se abasteçam da humildade.

Que minhas palavras não firam e nem sejam dissimuladas,

Mas animem as faces de quem procura a luz.

Que a minha voz nunca assuste,

Mas seja a pregação da esperança.

Que eu aprenda que quem não me entende

Precisa ainda mais de mim,

E que nunca lhe destine a presunção de ser melhor.

Dai-me, Senhor, também a sabedoria do desaprender,

Para que eu possa trazer o novo, a esperança,

E não ser um perpetuador das desilusões.

Dai-me, Senhor, a sabedoria do aprender

Deixai-me ensinar para distribuir a sabedoria do amor.

Antonio Pedro Schlindwein

RESUMO

ZUCHI, Ivanete. **A ABORDAGEM DO CONCEITO DE LIMITE VIA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional.** 2005. 254 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis.

As dificuldades relativas ao ensino e aprendizagem do cálculo são, freqüentemente, objetos de pesquisa em nível nacional e internacional. Estas pesquisas abordam o problema sob diversas perspectivas e em vários contextos, oferecendo elementos que permitam a análise das dificuldades detectadas. Este trabalho parte das premissas que há um obstáculo no processo de ensino-aprendizagem do conceito de limite e o desenvolvimento de uma nova metodologia pode contribuir de maneira significativa no conteúdo em questão.

Com esse entendimento, o presente trabalho visa realizar um estudo sobre as dificuldades de ensino-aprendizagem do conceito de limite e propor alternativas para minimizá-las. Estas alternativas envolvem a integração de duas áreas: a Didática da Matemática e a Inteligência Artificial (IA).

A Teoria das Situações, proposta por Brousseau, foi o referencial teórico da concepção e aplicação de uma seqüência didática do conceito de limite. Essa seqüência foi desenvolvida, inicialmente, no ambiente lápis e papel e após num ambiente informatizado utilizando-se os recursos da Inteligência Artificial.

O uso dos recursos da IA na educação possibilitou o desenvolvimento de pesquisas dedicadas aos Sistemas Tutoriais Inteligentes. Um dos objetivos desses tutoriais é criar condições favoráveis à construção, pelo aluno, de conhecimentos aceitáveis referentes a um objeto de ensino, assegurando-lhe *feedback* permanente. Desenvolver uma seqüência didática em um sistema tutorial inteligente constitui uma ferramenta, em potencial, para o ensino-aprendizagem do conceito de limite.

O diferencial introduzido na metodologia aqui proposta é a conexão do conceito de limite sob a ótica da aproximação e cinemática que pode ser realizada através dos recursos do sistema tutorial inteligente e ou até mesmo numa seqüência didática no ambiente lápis e papel. As seqüências didáticas foram aplicadas em turmas do Centro Tecnológico da Universidade Estadual de Santa Catarina. Com os resultados obtidos nas experimentações realizadas foi possível identificar as contribuições desse trabalho no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite.

Palavras Chaves

Ensino-Aprendizagem do Conceito de Limite. Sistemas Tutoriais Inteligentes. Seqüência Didática.

ABSTRACT

The BOARDING Of the CONCEPT OF LIMIT saw DIDACTICS SEQUENCE: of the surrounding pencil paper to the computational environment. 2005. Thesis (Doctorate in Engineering of Production) Program of Post Graduation in Engineering of Production, UFSC, Florianópolis.

The relative difficulties to education and learning of the calculation are, frequently, objects of research in national and international level. These research approaches the problem under diverse perspectives and in some contexts, offering elements that allow the analysis of the detected difficulties. This work has left of the premises that an obstacle in the process of teach-learning of the limit concept has and the development of a new methodology can contribute in significant way in the content in question.

With this agreement, the present work aims at to carry through a study on the difficulties of teach-learning of the limit concept and to consider alternatives to minimize them. These alternatives involve the integration of two areas: the Didactics of the Mathematics and Artificial Intelligence (AI).

The theory of Situation, proposal for Brousseau, was the theoretical referential of the conception and application of a didactic sequence of the limit concept. This sequence was developed, initially, in the surrounding pencil and paper and after in a informatics environment using the resources of Artificial Intelligence.

The use of the resources of Artificial Intelligence in the education made possible the development of dedicated research to the Intelligent Tutorial Systems. One of the objectives of these tutorial ones is to create conditions favorable to the construction, for the pupil, of referring acceptable knowledge to an education object, assuring to it feedback permanent. To develop a didactic sequence in an intelligent tutorial system can constitutes a tool, in potential, for the teach-learning of the limit concept

The differential introduced in the methodology proposal is the connection of the concept of limit under the optics of the approach and kinematics that can be carried through the resources of the intelligent tutorial system and or ties exactly in a didactic sequence in the surrounding pencil and paper here. The didactics sequences they had been applied in classrooms, of the Technological Center of the State University of Santa Catarina. With the results gotten in the carried through experimentations it is possible to identify to the contributions of this work in the education process and learning of the limit concept.

Key words:

Teach-learning of the Limit Concept. Intelligent Tutorial Systems. Didactics Sequence.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS E TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

1. INTRODUÇÃO E PROBLEMÁTICA

1.1 JUSTIFICATIVA

As dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem do conceito de limite são há muito conhecidas. Estas dificuldades são encontradas ao longo da história da Matemática, que data de mais de 2500 anos, envolvendo os processos de conceitualização e instrumentalização do limite.

Há várias pesquisas, em nível nacional e internacional, que tratam das dificuldades do ensino-aprendizagem do cálculo. Estas pesquisas abordam o problema sob diversas perspectivas e em vários contextos, oferecendo elementos que permitem a análise das dificuldades detectadas. Algumas pesquisas problematizam a apresentação formal dos enunciados matemáticos, de modo linearizado numa cadeia de resultados, que parecem não admitir discussões. Encontramos, por exemplo, no trabalho de Tall (1991 *apud* SAD 1999) que, abordagens correntes para o ensino superior tendem a proporcionar aos alunos o produto do pensamento matemático, enquanto o processo do pensar matemático é relegado. Não se costuma focalizar, de um modo geral, a trajetória completa do pensamento matemático avançado desde o ato criativo de considerar o contexto do problema que leva à formulação de conjecturas, à constituição das afirmações e justificativas, ao estágio final de refinamentos, resultados e provas.

Na prática escolar da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e nas investigações sobre os obstáculos do conceito de limite foi possível constatar que os alunos apresentam dificuldades para entender o conceito de limite. Pesquisas realizadas em Educação Matemática apontam e analisam essas dificuldades.

> A grande dificuldade do ensino e aprendizagem do conceito de limite, que se radica não somente em sua riqueza e complexidade, mas também no fato de que os aspectos cognitivos implicados não podem ser gerados simplesmente

> a partir da definição matemática, que pode ser memorizada. A primeira noção que se tem de limite é uma noção dinâmica de aproximação e a maneira que se utiliza o conceito para resolver problemas está relacionada não somente com a definição, mas com propriedades de um aspecto intuitivo do conceito. Isso explica por que muitos alunos acreditam compreender o conceito de limite sem haver adquirido as implicações do conceito formal. (CORNU,1991 e SIERPINSKA, 1985, *apud* D'AVOGLIO, 2002, p. 12).

O ensino do conteúdo de limite é abordado geralmente no primeiro ano dos cursos de Matemática, Engenharias e áreas afins. Esse objeto de estudo é abordado com maior ou menor profundidade, de acordo com o objetivo de cada curso. A importância do ensino do conceito de limite é inquestionável, pois ele é a fundamentação das aplicações do cálculo, que surgem no contexto da derivada e integral. O grande avanço do cálculo, historicamente, foi possível no momento da formalização do limite e após isso, várias aplicações surgiram. Atualmente, com o avanço da tecnologia, várias áreas se desenvolveram graças ao cálculo, tal como compactação de impressões digitais, previsão de tempo, representação de dados, entre outras. Segundo Anton (2000) o limite é o alicerce sobre o qual todos os outros conceitos do cálculo estão baseados.

Apesar de sua grande importância, o conceito de limite muitas vezes constitui-se o grande gargalo do ensino de cálculo. Muitos alunos saem de um curso de cálculo sem entendê-lo e nem sequer relacionar com derivada e integral, que são, geralmente, os conceitos adjacentes, apresentados nos livros didáticos e na grade curricular. Podemos perceber que há uma grande dificuldade na aprendizagem do conceito de limite quando se introduz esse, intuitivamente, pela cinemática e, após se apresenta a definição, formalmente, utilizando o ponto de vista de aproximação (ε, δ). De acordo com Brolezzi (2004), alguns educadores defendem a idéia de adiar as abstrações mais fortes, como, por exemplo, dar a definição de limite pelo ponto de vista de aproximação. "O que parece é que adiar, para os alunos dos cursos superiores, conceitos importantes pode apenas atrasar um desenvolvimento e dificultar que avancem. Ocorre que as idéias do Cálculo não são apenas conseqüências, mas causas de idéias importantes" (BROLEZZI, 2004, p. 3).

As considerações já mencionadas permitem-nos destacar uma primeira hipótese de pesquisa:

[H_1] – Há um obstáculo de ensino- aprendizagem no conceito de limite

Pesquisas no ensino de cálculo têm sido desenvolvidas na tentativa de diagnosticar tais problemas e novas práticas metodológicas têm sido testadas e analisadas, sob diversas perspectivas e dentro de diversos contextos, como por exemplo, o uso de computadores.

De acordo com D´Ambrósio (2002), a tecnologia, entendida como a convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a matemática são intrínsecas à busca solidária de sobreviver e transcender. A geração do conhecimento matemático não pode ser dissociada da tecnologia disponível.

Há bem pouco tempo atrás, a pergunta era: é possível utilizar o computador no ensino? Haja vista a crescente utilização dessa ferramenta pela sociedade atual, com sua presença cada vez mais marcante nos diversos serviços oferecidos à população, a questão central hoje passa a ser: como potencializar as atividades de ensino inseridas em um ambiente informatizado?

Ao mesmo tempo em que as novas tecnologias têm favorecido surpreendentes representações do conhecimento, a análise e a adaptação às novas necessidades educativas requerem um suporte teórico capaz de proporcionar meios e condições para estimular o constante avanço e adequar as novas tecnologias ao desenvolvimento dos indivíduos. Um dos grandes desafios é saber como usar estes recursos de maneira adequada. Isto exigirá dos educadores novas metodologias de ensino que favoreçam o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o educando possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

A Didática da Matemática tem um papel relevante na busca de novas alternativas de ensino. Segundo Artigue (1988) ela é o estudo dos processos de transmissão e da aquisição de conhecimentos em Matemática, em situações escolar ou universitária. Ela descreve e analisa as dificuldades encontradas e propõe meios para ajudar os professores e alunos a superá-las.

A Inteligência Artificial (IA), é um campo de estudo que tenta explicar e simular o comportamento inteligente em termos de processos computacionais (SCHALKOFF, 1990 *apud* RUSSEL & NORVING, 1995). A IA surge como uma das técnicas eficientes na construção de ambientes computacionais de aprendizagem, pois possui vários mecanismos a serem aplicados no ambiente, entre os quais podemos destacar a modelagem do estudante e a possibilidade de promover o diagnóstico do usuário.

Os Sistemas Tutorias Inteligentes (ITS- *Intelligent Tutorial Systems)* são programas de computador com propósitos educacionais e que incorporam técnicas de IA, geralmente, utilizando-se da tecnologia educacional. Um dos objetivos principais é comunicar o conhecimento e/ou as estratégias para o estudante resolver problemas dentro de um determinado domínio.

A escolha em se trabalhar com recursos da Inteligência Artificial aplicados à Educação é conseqüência do fato que desde 1995 a autora do presente trabalho é integrante do GEIAAM (Grupo de Estudos de Informática Aplicada à Matemática) do departamento da Matemática-UFSC, cujo objetivo principal é utilizar as potencialidades da IA na construção de pequenos sistemas especialistas em conteúdos específicos de Matemática, visando minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos desta disciplina. Desde então a autora se interessou por essa linha de pesquisa e desenvolveu ferramentas, baseadas em técnicas de Inteligência Artificial, que auxiliassem nesta questão.

Nossa escolha, ao trabalhar com os recursos da IA, repousa sobre uma segunda hipótese de pesquisa:

[H_2]-Com a utilização de um sistema tutorial inteligente é possível desenvolver um ambiente de aprendizagem onde os estudantes consigam superar as dificuldades relativas ao conceito de limite.

1.2 OBJETIVOS

1. 2.1 Objetivo geral

Pretende o presente trabalho realizar um estudo sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem do conceito de limite e propor alternativas que possam minimizar tais dificuldades.

1. 2.2 Objetivos específicos

- Realizar um estudo sobre os obstáculos presentes na história do surgimento do conceito de limite;
- Analisar, nos livros didáticos, como o conceito de limite é apresentado;
- Observar, em classe, as principais dificuldades na construção do conceito de limite;
- Desenvolver uma seqüência didática do conceito de limite e aplicar em uma classe;
- Desenvolver e aplicar uma seqüência didática do conceito de limite em um ambiente informatizado.

1.3 METODOLOGIA

Para atingir os objetivos propostos trabalharemos com a integração de duas áreas: a Didática da Matemática e a Inteligência Artificial.

Assim, em um primeiro momento, a Teoria das Situações, proposta por Brousseau (1986), nos fornecerá fundamentos para propor uma seqüência didática do conceito de limite, em sala de aula. Posteriormente, integrar essa fundamentação com a aplicação das técnicas de Inteligência Artificial para desenvolver uma seqüência didática em um sistema tutorial inteligente, o qual poderá ser uma ferramenta em potencial para o ensino e aprendizagem do conceito de limite.

A metodologia adotada é a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), que envolve as seguintes fases:

1. *Análise preliminar*: Caracteriza-se pelo levantamento das concepções envolvidas, que buscam referências teóricas que fundamentem a pesquisa. Nesta etapa faremos uma explanação do referencial teórico da Didática da Matemática, História do

Cálculo, Inteligência Artificial e Sistemas Especialistas. Também realizamos a análise de alguns livros didáticos e observação em classe das dificuldades apresentadas por estudantes no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite.

2. *Concepção e Análise a priori*: Essa etapa tem como objetivo elaborar seqüências pertinentes de aprendizagem, tendo como meta, ao mesmo tempo, os alunos e o problema didático proposto. Aqui se encontra a concepção e análise de uma seqüência didática no ambiente lápis e papel e também fará parte a concepção e análise de uma seqüência no ambiente computacional.
3. E*xperimentação:* fase em que se aplica a seqüência didática a uma determinada população de estudantes.
4. *Análise a posteriori*: corresponde à análise do conjunto dos dados obtidos na fase da experimentação e às observações realizadas durante a aplicação da seqüência. O confronto das análises a priori e a posteriori fundamenta a validação das hipóteses formuladas.

No sentido de contribuir, inicialmente, para um aprofundamento dos objetivos propostos, e levando em consideração as hipóteses apresentadas, abordaremos a seguir as questões de pesquisa.

1.4 DELIMITAÇÃO DE NOSSO ESTUDO

As questões relativas a hipótese de pesquisa [H_1] são:

[Q1a]- Quais são as dificuldades de aprendizagem do conceito de limite?

[Q1b] - Quais foram os obstáculos e problemas envolvidos no surgimento de limite?

[Q1c] - Como, nos livros didáticos, é introduzido o conceito de limite?

[Q1d]- A aplicação de uma seqüência didática adequada pode contribuir para a aprendizagem da definição de limite sob o ponto de vista de aproximação?

Levando em consideração que as respostas das questões apresentadas, anteriormente, constituem-se uma referência para estudar a segunda hipótese de pesquisa [H2], apresentamos como questões norteadoras relacionadas a essa, as seguintes:

[Q2a] - A utilização de um ambiente computacional poderá fornecer mecanismos com o intuito de minimizar as dificuldades de aprendizagem do conceito de limite do ponto de vista de aproximação e cinemática?

[Q2b] - Que contribuições podem advir da utilização de recursos da Inteligência Artificial no processo de ensino-aprendizagem da definição de limite?

Uma questão integradora das hipóteses [H_1] e [H_2] é a seguinte:

[Q3] - Que situações didáticas podem ser criadas no sentido de favorecer o processo de ensino-aprendizagem do conceito de limite?

Estruturamos este trabalho de maneira a ser possível explorar as questões de pesquisa, com as devidas fundamentações teóricas e metodológicas utilizadas, adotando a seguinte seqüência para o corpo do trabalho.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

Nesse capítulo, de caráter introdutório, foram apresentados a introdução, a problemática, os objetivos, a metodologia e a estrutura do presente trabalho.

O segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica, baseada na teoria de Situações, desenvolvida por Brousseau (1986) e a descrição detalhada da metodologia de Engenharia Didática.

No terceiro capítulo apresenta-se o contexto histórico do surgimento do conceito do limite com o intuito de investigar os problemas e os obstáculos presentes no desenvolvimento do cálculo.

No quarto capítulo apresenta-se uma análise de alguns livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral com o intuito de investigar como o conceito de limite é abordado.

No quinto capítulo apresenta-se a primeira seqüência didática concebida com o intuito de minimizar as dificuldades e obstáculos levantados, bem como a sua análise a priori e a posteriori.

No sexto capítulo apresenta-se a fundamentação teórica para o desenvolvimento de uma seqüência didática em um ambiente informatizado.

No sétimo capítulo explana-se o desenvolvimento da seqüência didática implementada em ambiente informatizado resultando no protótipo denominado Horos.

No oitavo capítulo explana-se os experimentos realizados do protótipo Horos bem como os resultados oriundos dessa experimentação.

As conclusões oriundas da integração das áreas da Didática da Matemática e da Inteligência Artificial para o ensino e aprendizagem do conceito de limite encontram-se relatadas no nono capítulo.

Na seqüência são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas na presente pesquisa, bem como os anexos e apêndices que fazem parte da mesma.

2. QUADRO TEÓRICO

2.1 TEORIA DAS SITUAÇÕES

A teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau (1986) representa uma referência para o processo de aprendizagem Matemática em sala de aula envolvendo professor, aluno e conhecimento matemático. Não é de nosso interesse esgotar essa teoria, mas descrever alguns pontos que nortearão nossa pesquisa.

O significado do saber matemático escolar para o estudante está diretamente relacionado com a forma com que o conteúdo lhe é apresentado. O envolvimento do aluno dependerá da estruturação das diferentes atividades de aprendizagem por meio de uma situação didática.

Por meio da noção de situações didáticas é possível desenvolver uma série de atividades previstas para o ensino da matemática, cada qual voltada para o desenvolvimento de uma competência ou habilidade associada a essa disciplina. A criação de uma situação didática pode ser iniciada pela escolha de um problema colocado para despertar a motivação do aluno.

Segundo Brousseau (1998), uma situação a-didática deve levar o aluno a agir, falar, refletir, e evoluir por si próprio. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para levar a adquirir um conhecimento novo, mas sabe igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que ele pode construí-lo sem fazer apelo a razões didáticas. O conhecimento é considerado adquirido pelo aluno quando esse for capaz de aplicá-lo por si próprio a situações com que se depara fora do contexto do ensino e na ausência de qualquer indicação intencional..

> O professor procura transmitir ao aluno uma situação a-didática que provoque nele a interação mais independente e mais fecunda possível. Para

> isso, comunica ou abstém-se de comunicar, conforme os casos, informações, questões, métodos de aprendizagem, heurísticas, etc. O professor está envolvido num jogo com o sistema de interações do aluno com os problemas que ele lhe coloca. Este jogo ou situação mais vasta é a situação didática. (BROUSSEAU, 1996, p.50)

De acordo com esta teoria o papel do professor não se limita a simples comunicação de um conhecimento, mas a devolução de um bom problema.

> A devolução aqui tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu, e não somente porque o professor quer. Se o aluno toma para si a convicção de sua necessidade de resolução do problema, ou seja, se ele aceita participar desse desafio intelectual e se ele consegue sucesso nesse seu empreendimento, então inicia-se o processo da aprendizagem. (PAIS, 2001, p.12)

Diversas etapas estão envolvidas no processo que permeia o caminho da devolução do problema e a efetiva aprendizagem. É importante a análise de certos tipos particulares de situações didáticas, que estão presentes nesse processo.

De acordo com Brousseau (1986) uma boa situação a-didática permite ao aluno construir os conhecimentos, dando-lhe ao mesmo instante, um significado. Nessa situação evidencia-se um processo envolvendo quatro fases: situação de ação, situação de formulação, situação da validação e a situação da institucionalização.

Uma situação de ação é aquela em que o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional. Uma boa situação de ação deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-la, sem a intervenção do professor. Durante o processo dessa situação deve instaurar-se um verdadeiro diálogo entre o aluno e a situação proposta.

Na Situação de formulação o aluno já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar esse uso da teoria.

A validação empírica obtida nas situações anteriores não é suficiente. O aluno deve mostrar que o modelo que ele criou, anteriormente, é válido. As situações de validação são aquelas em que o aluno já utiliza alguns mecanismos de prova e onde o saber é usado com essa finalidade.

Uma vez construído e validado, o novo conhecimento fará parte do saber matemático institucionalizado na classe. Nesta fase ocorre a chamada situação de institucionalização sob a responsabilidade do professor, que é aquela que visa estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento.

O funcionamento das situações didáticas ocorre sob o controle de regras e de condições que constituem a noção de contrato didático. Assim, uma situação de ensino pode ser observada através das relações que se movimentam entre três pólos inter-relacionados: professor, aluno e saber.

Segundo Brousseau (1998) a identificação e a caracterização de um obstáculo são essenciais à análise e à construção de uma situação didática. Por isso, na seqüência, estaremos explanando alguns tópicos desse assunto.

2.2 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Conhecer os obstáculos epistemológicos relacionados a um saber matemático é fundamental para a elaboração de uma engenharia didática (explanada em 2.3). A matemática vista como ciência apresenta uma regularidade, aparentemente, que parece não ter erros ou rupturas, demonstrando uma certa linearidade. Essa regularidade só existe na fase final da formulação do texto matemático.

Bachelard (1996) em sua obra *A Formação do Espírito Científico*, publicada em 1938, dizia que a evolução do conhecimento passa pela rejeição de conhecimentos anteriores e aparecimento de obstáculos. Esses obstáculos que aparecem na fase da criação não estão expostos na redação do saber. Aparecem na fase da aprendizagem e síntese do conhecimento e não na fase de seu registro histórico.Todos os avanços, retrocessos, dúvidas e erros cometidos na hora de fazer a conjectura, não aparecem no resultado final apresentado pelo texto científico.

> Por certo os obstáculos aparecem num momento bem mais íntimo do processo, não estão expostos na textualização do saber matemático, mas estão presentes nos diversos labirintos que o matemático mergulha para a síntese do conhecimento que elabora. No caso da matemática os conceitos epistemológicos aparecem com mais intensidade no fenômeno da aprendizagem escolar. Quando o aluno, na interface com o saber escolar, deixa aflorar com toda intensidade toda uma bagagem de conhecimento ainda fortemente impregnado pelo cotidiano. Assim, por exemplo, a noção de generalidade ainda está sendo usada no sentido do cotidiano, o rigor no mesmo sentido, a lógica ainda não tem a mesma precisão no contexto da matemática.(PAIS, 2004, p.41).

Segundo Bachelard (1971), na educação, a noção de obstáculo pedagógico é também desconhecida.

> Fico sempre chocado com o fato de que os professores de ciências, mais ainda que os demais, se isso é possível, não compreendam que não se compreenda. Pouco numerosos são aqueles que esquadrinharam a psicologia do erro, da ignorância e da irreflexão (...) os professores imaginam que o espírito científico começa com uma cultura desleixada ao duplicar uma aula, que se pode fazer compreender uma demonstração repetindo-a ponto a ponto. Não meditaram sobre o fato de que o adolescente chega à aula possuidor de conhecimentos empíricos já constituídos. Trata-se então, não de adquirir uma cultura experimental, mas de mudar de cultura experimental de inverter os obstáculos já antepostos pela vida quotidiana. (BACHELARD, 1971, p. 56).

Os obstáculos epistemológicos têm, por um lado, raízes históricas e culturais, e por outro estão relacionados à dimensão social da aprendizagem. Muitos deles são representações elaboradas pelo imaginário do sujeito cognitivo. É aí que surgem dificuldades decorrentes de conhecimentos anteriores, bloqueando a evolução da aprendizagem.

Andrade, Zylbersztajn e Ferrari (2002) destacam que os obstáculos epistemológicos são obstáculos pedagógicos, uma vez que podem obstruir a atividade racional do aluno. Esses referenciam Santos (1991) que destaca que o conhecimento geral é um conhecimento vago, que imobiliza o pensamento e fornece respostas vagas, fixas, seguras e gerais a qualquer questionamento. O problema pode ser mais grave quando a idéia do geral aparece imediatamente adaptada à idéia do comum. Na aritmética, por exemplo, um estudante aprende que o produto de dois números inteiros positivos, a e b ($a \neq 1$ e $b \neq 1$) é sempre maior do que cada fator. Isso pode ser uma dificuldade à aprendizagem das propriedades do produto de dois números racionais, para os quais a proposição nem sempre é verdadeira. Ainda na área de números racionais, a divisão de um número inteiro positivo por um número menor do que um cujo resultado é maior do que o dividendo. Nesse caso, o conhecimento anterior, no cotidiano não – refletido, traz a idéia intuitiva de que o resultado da divisão é sempre menor do que o dividendo.

Muitas vezes também o excesso de simbologia gera dificuldades para o aluno, chegando inclusive a impedir que ele compreenda a idéia representada pelo símbolo. Esta dificuldade, gerada freqüentemente por uma apresentação inadequada da linguagem matemática, é bastante lamentável, pois ela foi desenvolvida justamente com a intenção oposta. A linguagem matemática foi desenvolvida para facilitar a comunicação do conhecimento matemático entre as pessoas. Entretanto, quando abusamos do uso de símbolos e não nos preocupamos em trabalhar a compreensão dos mesmos, clareando o seu significado, conseguimos o efeito contrário: dificultamos o processo de aprendizagem da matemática.

> Não apenas os piores alunos da turma, mas até estudantes bem inteligentes, podem ter aversão à Álgebra. Há sempre alguma coisa de arbitrário e artificial numa notação e o aprendizado de uma nova notação constitui uma sobrecarga para a memória. O estudante inteligente recusará aceitar este ônus se ele não notar nisso nenhuma compensação. A sua aversão pela Álgebra se justificará se não lhe for dada ampla oportunidade para que ele se convença, por sua própria experiência, de que a linguagem dos símbolos matemáticos ajuda o raciocínio. Auxiliá-lo nessa experiência constitui uma das mais importantes tarefas do professor. (POLYA, 1995, p. 101).

No plano escolar, o risco de ocorrer uma generalização precipitada reside na tentativa de transformar o saber cotidiano em saber científico. Mas, se o ensino de uma proposição matemática foi iniciado pelo aspecto de sua generalidade, a chance para ocorrer um conhecimento vago é imensa. Quer dizer, a ordem da construção epistemológica da generalidade não se inicia pelo fato geral em si. Ela deve ser conjecturada a partir de casos particulares e por meio de um lento processo que envolve indagações, reflexões, avanços e retrocessos, culminando em uma demonstração como síntese de elaboração do saber.

A noção dos obstáculos epistemológicos pode ser estudada dentro do desenvolvimento histórico do pensamento cientifico e dentro da prática da educação.

Segundo Trouche (1996), isto introduz uma primeira distinção entre os obstáculos reconhecidos dentro do desenvolvimento histórico e aqueles reconhecidos dentro da prática da educação. Os obstáculos epistemológicos dentro da prática educacional podem ser pesquisados a partir da noção da transposição didática, a partir de estudos de situações de classes ou de produções de estudantes.

Brousseau (1998) distingue três tipos de obstáculos:

- Os obstáculos epistemológicos: relativos à resistência de um saber mal adaptado;
- Os obstáculos didáticos: relativos às escolhas do sistema de ensino;
- Os obstáculos de origem ontogênica: relativos à capacidade cognitiva dos estudantes.

Cornu (1992, *apud* Trouche, 1996) cita outros, tais como:

- Os obstáculos sociais - relativos a classe social, ao nível cultural e religião;
- Os obstáculos técnicos – De acordo com Cornu (1992), os obstáculos de origem técnica são os obstáculos que podem ser ultrapassados graças a uma contribuição material, tecnológica ou técnica. Por exemplo, as calculadoras de bolso ou os computadores ajudam a ultrapassar certos obstáculos técnicos e permitem fazer cálculos precisos e numerosos.

Em relação aos obstáculos relativos ao conceito de limite, objeto de nossa pesquisa, Sierpinska (1985, *apud* Artigue, 1990) em suas investigações, destaca os seguintes obstáculos:

- O horror ao infinito - refuta ou evita o infinito (em particular a transferência automática dos métodos de álgebra das grandezas finitas às grandezas infinitas, a associação da passagem do limite a um movimento físico, a uma reaproximação...);

- Os obstáculos relativos ao conceito de função - confusão de funções / seqüências de valores, reduções monótonas;
- Os obstáculos geométricos - o limite é somente um objeto geométrico, não pode ser visto como um quadro de aproximação numérica;
- Os obstáculos lógicos – relativos à presença de quantificadores de ordem;
- Os obstáculos do símbolo – relativo à resistência a introdução de um símbolo específico para o limite.

Cornu (1991, *apud* Trouche, 1996) também descreve cinco obstáculos:

- A transposição numérica – relativa à dificuldade de se abstrair do contexto geométrico e cinemático para trabalhar sobre os números;
- Aspectos metafísicos - vertigem ao infinito;
- A noção do infinitamente pequeno ou do infinitamente grande;
- A idéia que o limite não pode ser perturbado;
- Convergência monótona.

Trouche (1996) incorpora os obstáculos relativos ao conceito de limite, citados anteriormente, nos seguintes obstáculos:

- Os obstáculos atomistas – que abrange os obstáculos dos infinitamente pequenos de Cornu e os obstáculos da confusão de funções de Sierpinska;
- Os obstáculos geométricos – uma curva tende a se aproximar de sua assíntota;
- Os obstáculos cinemáticos – monótonos – a idéia do limite é associada a uma aproximação numérica;
- Os obstáculos algébricos – a transferência automática dos métodos de álgebra das grandezas finitas às grandezas infinitas;
- Os obstáculos lógicos – o controle da variável precede da função: é muito maior que a simples localização de eventuais quantificadores.

De acordo com Trouche (1996), os obstáculos geométricos, cinemático- monótono e lógico são relativos ao ponto de vista cinemático; os obstáculos algébricos são relativos ao ponto de vista numérico. O obstáculo atomista é mais difícil de associar a um ponto de vista ou outro. Ele pode ser compatível com o ponto de vista cinemático se uma função é estritamente crescente, podemos dizer que para todo acréscimo da variável haverá um acréscimo não nulo da função, mesmo sendo muito pequeno. Pode ser compatível com o ponto de vista de aproximação: o ε pode representar um real positivo, o menor possível. “Os diferentes obstáculos têm entre eles mesmos relações complexas. Os obstáculos cinemático-monótono e lógico apresentam uma grande coerência” (TROUCHE, 1996, p. 159).

Em nossa prática escolar na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e em nossas investigações sobre os obstáculos do conceito de limite foi possível constatar que os alunos apresentam dificuldades para entender o conceito de limite. Pesquisas realizadas em Educação Matemática apontam e analisam essas dificuldades.

Pesquisas têm mostrado que os estudantes possuem “concepções espontâneas pessoais”, oriundas de suas experiências pessoais. Assim, por exemplo, a expressão *tende a* pode ser interpretada de várias maneiras, como *aproximar mantendo distância*, *aproximar sem alcançar*, *aproximar alcançando*, enquanto a palavra *limite* tem o sentido de *não poder ser ultrapassado*, embora possa ser interpretado como *alcança mas não ultrapassa* ou *não se ultrapassa e nem se alcança* (CORNU, 1991, *apud* D’AVOGLIO, 2002).

Os efeitos didáticos de uma seqüência didática bem elaborada caracterizam-se como momentos decisivos para o sucesso e para a continuidade da aprendizagem de um determinado conteúdo. Para a elaboração das seqüências didáticas utilizaremos a metodologia da Engenharia Didática.

2.3 ENGENHARIA DIDÁTICA

A Didática da Matemática tem um papel relevante na busca de novas alternativas de ensino.

> A pesquisa em Didática da Matemática se propõe, como primeiro grande foco de interesse, a entender melhor os processos didáticos e os fenômenos que estes originam, tanto aqueles que acontecem na aula como fora dela. Parte-se do princípio de que unicamente a partir de uma melhor

> compreensão desses processos é que poderão ser propostas ações e meios concretos para melhorar o estudo da Matemática. Do mesmo modo que devemos entender melhor o funcionamento do corpo humano para avançar em medicina, também devemos entender melhor o que é um processo de estudo, para poder dar respostas sólidas às dificuldades didáticas com as quais se enfrentam, dia após dia, todos aqueles que estudam Matemática, ou que ajudam outros a estudá-la – sejam alunos, professores, pais ou profissionais de outras áreas. (CHEVALLARD, 2001, p.58).

Um dos trabalhos mais interessantes realizados pelo professor tem sido o de escolher ou organizar seqüências de atividades que explorem um domínio do conhecimento. Estas seqüências de ensino aparecem, também, como um dos principais objetos da Engenharia Didática.

Para Brousseau (1986, *apud* Douady, 1990) uma das finalidades das Escolas é organizar, em condições normais para os alunos e aceitáveis para os professores, a preparação de protocolos de experiências, a observação de fenômenos didáticos, a coleta e tratamento de numerosas informações, de toda sorte, sobre o comportamento dos alunos em situação escolar durante um período.

A Engenharia Didática vista como metodologia de pesquisa, caracteriza-se por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino - seqüências didáticas (ARTIGUE, 1988).

Para a mesma autora o procedimento experimental da engenharia didática é composto de quatro fases:

1. *Análise preliminar*: Caracteriza-se pelo levantamento das concepções envolvidas, que buscam referências teóricas que fundamentem a pesquisa.
2. *Concepção e Análise a priori*: ponto-chave da metodologia. Essa etapa tem como objetivo elaborar seqüências pertinentes de aprendizagem, tendo como meta, ao mesmo tempo, os alunos e o problema didático proposto. Apresenta vários componentes, tais como: estudo epistemológico, o significado matemático (objeto de estudo), levantamento de condutas dos alunos. Nesta etapa atua-se sobre um determinado número de variáveis pertinentes ao assunto a ser pesquisado tendo como objetivo determinar em que as escolhas das variáveis possibilitam controlar

o comportamento dos estudantes. Compreende um aspecto descritivo e previsões possíveis do comportamento dos alunos.

3. *Experimentação:* fase em que se aplica a seqüência didática a uma determinada população de estudantes. Nesta fase estão presentes as elaborações, realizações das seqüências didáticas construídas e a observação dos alunos, do que diz ou faz o professor, e quando. Quais são as regras que norteiam as interações entre os diferentes atores na turma. Acontece a institucionalização dos conceitos trabalhados nas atividades.
4. *Análise a* posteoriori : corresponde à análise do conjunto dos dados obtidos na fase da experimentação e às observações realizadas durante a aplicação da seqüência. O confronto das análises a priori e a posteriori fundamenta a validação das hipóteses formuladas.

> Na área da Didática, o termo Engenharia visa introduzir o campo de ação prática ao domínio teórico da mesma. A Engenharia Didática confere à Didática o estudo epistemológico de ciência de ação e não, unicamente, de ciência do conhecimento; atenta às ciências da comunicação, susceptíveis de ajudar o professor a se comunicar com seus alunos, atenta às tecnologias da educação auxiliares às atividades pedagógicas e às progressões e implementações de escolhas didáticas. (DEVELAY, 1992, *apud* ROSA, 1998, p.88).

A Engenharia Didática, ainda que nova, já ganhou inúmeros adeptos e vem sendo aplicada ao estudo de casos, especialmente no campo da Matemática. Rosa (1998) cita alguns destes, como Grenier (1988), Bautier (1988), Lemonidis (1991), Vergnaud (1987). Podemos ainda citar os trabalhos de Carvalho (2001), Coulange (2000), Neyret (1992) entre outros.

Nesse contexto procuramos, inicialmente, realizar a etapa preliminar que se caracterizou pela investigação de como o nosso objeto de estudo, o limite, foi formalizado ao longo da história, e como ele é apresentado nos livros didáticos.

De acordo com Barreto (1998) se as etapas da evolução do homem estivessem embutidas num livro, com certeza o método dos limites seria uma das páginas mais belas, onde a inteligência humana deixou marcas e contribuições significativas. Mas nem por isso deve ser entendido como privilégio de uma mente brilhante, e sim como o resultado de muitas incertezas, tentativas, discordâncias e contribuições convincentes de vários personagens ilustres, ao longo da história, como veremos a seguir.

3. HISTÓRIA DO CÁLCULO

3.1 INTRODUÇÃO

A origem das idéias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral encontra-se na história da Matemática grega. Os gregos possuíam, já na época em que Euclides escrevia "*Os Elementos*", quase todos os fundamentos para desenvolver o Cálculo, mas ficaram presos por algumas concepções restritivas. Foram os gregos os primeiros a procurar a compreensão dos fenômenos ligados ao infinito, ao contínuo, ao infinitesimal, em busca de uma explicação para o movimento e as transformações dos seres. Da idéia de movimento vieram os primeiros conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (BROLEZZI,1999).

Segundo Boyer (1974), o Cálculo teve sua origem nas dificuldades encontradas pelos antigos Matemáticos gregos na tentativa de expressar suas idéias intuitivas sobre as razões ou proporções de segmentos de retas, que vagamente reconheciam como contínuas, em termos de números, que consideravam discretos.

Os principais conceitos de cálculo: derivada, continuidade, integral, convergência, divergência, entre outros, são definidos em termos de limite. Limite é o conceito mais fundamental do cálculo. De fato, limite é o que distingue, no nível mais básico, o cálculo da álgebra, geometria e o resto da matemática. Portanto, em termos de desenvolvimento ordenado e lógico do Cálculo, limite deve vir primeiro. Entretanto, o registro histórico é justamente o oposto. Por vários séculos, as noções de limites eram confusas, com idéias vagas e algumas vezes filosóficas sobre o infinito e com intuição geométrica subjetiva e indefinida. O termo limite, que atualmente usamos é decorrente do iluminismo na Europa no final do século XVIII e início do século XIX.

A seguir, é apresentado um pouco da história do limite.

3.2 UMA HISTÓRIA DE MUITAS INCERTEZAS, TENTATIVAS, CONFLITOS E CONTRIBUIÇÕES

3.2.1 Os Primórdios

Os debates acerca do infinito são anteriores a Platão e Aristóteles e marcaram presença nas escolas gregas. Um dos precursores foi Zenão de Elea (século V a.C). Ele mostrou que se o conceito de contínuo e de infinita divisão fossem aplicados ao movimento de qualquer corpo, então o movimento não existe. Zenão expôs sua argumentação com base em situações, que ficaram conhecidas como os paradoxos de Zenão.

> O primeiro paradoxo, a *Dicotomia*, diz que antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas antes disso, deve percorrer o primeiro quarto; e antes disso, o primeiro oitavo e, assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões. O corredor que quer pôr-se em movimento precisa fazer infinitos contatos num tempo finito; mas é impossível exaurir uma coleção infinita, logo é impossível iniciar o movimento (BOYER, 1974, p.55)

O segundo paradoxo, *Aquiles e a Tartaruga*, é semelhante ao primeiro, apenas a subdivisão infinita é progressiva em vez de regressiva que pode ser formulado assim: suponha que Aquiles deve disputar uma corrida com a tartaruga. Sendo de longe a mais lenta dos dois, a tartaruga é autorizada a começar num ponto a certa distância à frente. Aquiles jamais conseguirá alcançar seu adversário, afirma Zenão. Para isso, ele precisa chegar ao ponto de partida. A esta altura, a tartaruga terá avançado até algum ponto adiante na pista de corridas. E quando Aquiles alcançar este ponto, a tartaruga terá avançado ainda mais. É óbvio, afirma Zenão, que a série é interminável. Haverá sempre alguma distância, por menor que seja, entre os dois competidores. (MORRIS, 1998).

Segundo Morris (1998, p.24) “saber algumas coisas sobre as razões por que Zenão criou seu paradoxo não nos ajuda a compreendê-lo. Para tal, é preciso estudar o paradoxo em si”. Portanto, descreveremos a seguir o problema:

> Vamos supor que Aquiles corre exatamente duas vezes mais depressa que a tartaruga (...). Além disso, vamos presumir que a vantagem dada à tartaruga é de 10 metros e que Aquiles precisa exatamente de um segundo para

> completar a primeira fase da corrida; isto é, para chegar ao ponto de partida da tartaruga. É fácil de ver que a dianteira da tartaruga terá sido reduzida a cinco metros nesse ponto. Se Aquiles é capaz de correr 10m por segundo, a tartaruga correrá com metade dessa velocidade. Como a dianteira da tartaruga foi reduzida pela metade, é óbvio que Aquiles precisará apenas de meio segundo para completar a segunda fase. A transposição da terceira exigirá um quarto de segundo, ao passo que a quarta vai demandar um oitavo de segundo, e assim por diante. (MORRIS, 1998, p.24)

A tabela 3.1 apresenta os dados do número de voltas por unidade de tempo:

Tabela 3.1: dados da corrida

volta	1	2	3	4	5	6	...
t(s)	1	½	¼	1/8	1/16	1/32	...

Se somarmos então o tempo total transcorrido em qualquer fase da corrida, verificamos que a soma é 3/2 segundo após duas voltas, 7/4 segundo após três, 15/8 após quatro e assim por diante.

A impressão que se tem é de que o tempo total se aproxima cada vez mais de dois segundos. Na realidade, Aquiles alcançaria a tartaruga exatamente nesse intervalo de tempo, nas condições descritas.

> Zenão não disse que Aquiles seria incapaz de alcançar a tartaruga num tempo finito. Sabia perfeitamente que era exatamente isso que aconteceria. O que Zenão disse realmente foi que era impossível para Aquiles efetuar um número infinito de atos. (MORRIS,1998, p.25)

Podemos encontrar também a idéia de limite envolvida, na antiguidade, com o conceito de áreas. Matemáticos sugeriram que se tentasse inscrever e circunscrever figuras retilíneas em uma figura curva, e ir multiplicando-se indefinidamente o número de lados; mas não sabiam como terminar o argumento, pois não conheciam o conceito de limite. Segundo Arquimedes foi Eudoxo quem forneceu o lema que serviu de base para o método da exaustão. Este lema diz que, dadas duas grandezas que têm uma razão (nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra. Do axioma de Eudoxo (ou Arquimedes) verificamos uma proposição que formava a base do método de exaustão dos gregos, da seguinte forma:

> Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza da mesma espécie (BOYER, 1974, p. 67).

Esta proposição que chamaremos de “propriedade de exaustão” equivale à formulação moderna seguinte:

> Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesma espécie e r uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo n>N. Isto é, a propriedade de exaustão equivale a dizer que $\lim_{n \to \infty} M(1-r)^n = 0$. Ainda mais, os gregos usaram essa propriedade para provar teoremas sobre áreas e volumes de figuras curvilíneas. (BOYER, 1974, p. 67).

Na *Quadratura da parábola*, Arquimedes calculou a área do segmento parabólico. Ele inscreveu sucessivos triângulos no segmento de parábola, calculou a área desses triângulos e obteve valores cada vez mais próximos do pretendido, somando as áreas dos sucessivos triângulos (ver figura 3.1). Assim demonstrou que a área do segmento de parábola é igual a 4/3 da área do triângulo com a mesma base e com a mesma altura do segmento. No entanto Arquimedes não prolongou as somas até ao infinito. Ele deduziu o seu valor demonstrando que não pode ser nem maior, nem menor que a proporção de 4/3 (SERRA, 2002).

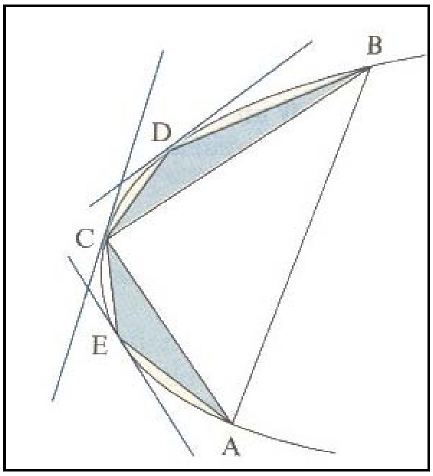


Figura 3.1 – quadratura do segmento parabólico
Fonte:site[1]

[1] http://www.copernico.bo.it/iperold/aree/Segmento%20parabolico.html

Para calcular a área do círculo, Arquimedes (287-212 a.C), considerou polígonos inscritos de número de lados 6, 12,...96. Fez o mesmo com polígonos circunscritos e conseguiu assim mostrar que a área do círculo está entre dois valores determinados, ou seja, é menor que a dos polígonos circunscritos e maior que a dos polígonos inscritos.

O método da exaustão é o fundamento de um dos processos essenciais do cálculo infinitesimal. No entanto, enquanto que no cálculo soma-se um número infinito de parcelas (no caso do círculo teríamos um polígono com um número infinito de lados), Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos. Para poder definir a soma de uma série infinita era necessário desenvolver o conceito de número real que os gregos não possuíam. A noção de limite pressupõe a consideração do infinito que esteve sempre excluído da matemática grega, mesmo em Arquimedes. No entanto, o seu trabalho foi, provavelmente, o mais forte incentivo para o desenvolvimento posterior das idéias de limite e de infinito.

3.2.2 Século XVII

No século XVII, os matemáticos estavam preocupados com uma grande variedade de problemas práticos relacionados com áreas da arte, mecânica, construção de canais, aproveitamento de energia hidráulica em moinhos de água, construção naval estimulada pelas grandes navegações, construção de relógios, etc. Essas necessidades estimulavam a atividade científica e matemática.

A matemática grega, nesta época, teve um grande enfoque devido a publicação de traduções em latim dos *Elementos* de Euclides e das *Cônicas* de Apolônio. Habilidades matemáticas foram desenvolvidas, permitindo estudos mais aprofundados da obra de Arquimedes.

Os astrônomos Johannes Kepler (1571-1630) e Galileo Galilei (1564-1642) foram os primeiros a abandonar a estrutura de demonstração introduzida por Arquimedes em troca do uso dos indivisíveis (ou quantidades infinitamente pequenas). Kepler aplicou suas idéias no cálculo de áreas e volumes, utilizando a noção de que eles eram compostos de uma quantidade

> "infinita" de retas ou planos, enquanto Galileu usou conceitos semelhantes no desenvolvimento dos princípios da cinemática – estudo dos movimentos. (BARON, 1985b, p.11).

Galileu após compreender a definição da velocidade média, tenta compreender qual a velocidade de um objeto em queda em cada instante, entre dois momentos aproximados por uma distância infinitamente pequena durante a queda. Essa que mais tarde seria definida como a velocidade instantânea (MONTEIRO, 2004).

Cavalieri (1598-1647) utilizou o conceito dos indivisíveis para comparar áreas e volumes. Para ele, um plano era constituído de um número infinito de retas paralelas eqüidistantes, e um sólido de um número infinito de planos paralelos. Uma reta (ou plano) chamada *regula* move-se paralelamente a si própria, gerando interseções (retas ou planos) em cada uma das figuras (plano ou sólido), até ela coincidir com suas bases. Estas interseções (segmentos de reta ou seções planas) constituem os elementos, ou indivisíveis, que compõem a totalidade das figuras.

Blaise Pascal (1623-1662) deu a sua contribuição aos indivisíveis de Cavalieri colocando a necessidade de distribuir os indivisíveis uniformemente. No caso de retas e planos, eles seriam distribuídos de tal modo que as distâncias entre eles fossem iguais.

> John Wallis (1616-1703) introduziu o símbolo ∞ para representar muitas linhas (ou paralelogramos) constituindo uma superfície plana: assim, se B é a base de um triângulo e A a sua altura, ∞ será o número de linhas na superfície. O comprimento total das retas é $\frac{\infty B}{2}$ e a altura de cada paralelogramo é $\frac{A}{\infty}$; segue-se que a área dos triângulos é $\left(\frac{\infty B}{2}\right)\left(\frac{A}{\infty}\right) = \frac{AB}{2}$. É claro que a concepção de Wallis sobre o ∞ era dualista, ora funcionando como um número infinitamente grande, ora sujeito às operações ordinárias da aritmética. (BARON, 1985b, p. 23).

O símbolo que atualmente usamos para representar o infinito (∞) é uma curva chamada, tecnicamente, de lemniscata. Esse símbolo foi usado nas obras de seções cônicas. Neste período, ele foi usado para simbolizar o infinito ou a eternidade em uma variedade de contextos. Por exemplo, nas cartas de tarô ele representava o ilusionista ou mago. O infinito inspirou sentimentos de temor, futilidade e medo e foi por muito tempo refutado pelos matemáticos (RUCKER, 1982).

Muitos dos problemas foram resolvidos através de métodos geométricos, como por exemplo, sólidos eram divididos em fatias, superfícies cilíndricas eram utilizadas para formar retângulos e áreas planas giradas em torno de eixos (no mesmo plano) para formar uma variedade de sólidos novos. Todos esses métodos foram necessários e interessantes para resolver certos tipos de problemas, entretanto com o advento da notação algébrica tornaram-se logo obsoletos.

Baron (1985), referindo-se a esses métodos, comenta: "um dos defeitos de métodos como este repousa no fato de que as soluções dependem de propriedades especiais da curva considerada, e desta forma cria bastante dificuldade para serem generalizadas" (BARON, 1985b, p.30),

Nesse século, Descartes (1596–1650) e Fermat (1601-1665) introduziram as coordenadas cartesianas. Foi possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente funções. A Matemática recebe assim um grande impulso, nomeadamente na sua aplicabilidade a outras ciências - os cientistas passam, a partir de observações ou experiências realizadas, a procurar determinar a fórmula ou função que relaciona as variáveis em estudo.

Uma das importantes contribuições de Fermat foi um método de encontrar máximos e mínimos. Para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ ele notou um modo muito engenhoso para encontrar pontos em que a função assume um máximo ou um mínimo. Ele comparou o valor de $f(x)$ num ponto com o valor $f(x+E)$ num ponto vizinho. Em geral esses valores serão bem distintos, mas num alto ou num baixo de uma curva suave a variação será quase imperceptível. Portanto para achar os pontos de máximos e mínimos Fermat igualava $f(x)$ e $f(x+E)$, percebendo que os valores, embora não exatamente iguais, são quase todos iguais. Quanto menor o intervalo E entre os dois pontos mais perto chega a pseudo-equação de ser uma verdadeira equação; por isso, Fermat, depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$. Os resultados lhe davam as abscissas dos pontos de máximo e mínimo do polinômio. Aqui em essência tem-se o processo hoje chamado de diferenciação pois o método de Fermat equivale a achar $g(x) = \lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$ e após fazer $g(x) = 0$.

> Evidentemente, Fermat não tinha o conceito de limite, mas por outro lado seu método para máximos e mínimos se assemelha ao usado no Cálculo hoje, só que agora se usa, em geral, o símbolo h ou Δx em lugar do E do Fermat. O processo de Fermat de mudar ligeiramente a variável e considerar valores vizinhos é a essência da análise infinitesimal (BOYER, 1986, p. 255).

O estudo da curvatura começou, pode-se dizer, com as investigações de Huygens (1596-1687), sobre o relógio pendular. Nesta época não existia uma fórmula geral para o raio da curvatura. A fórmula geral foi publicada em 1694 por Jacob Bernoulli. Ele descobriu que precisava de uma medida de curvatura em seus estudos sobre a força adquirida por uma barra elástica sob ação de forças externas (...) É importante notar que Bernoulli considera o centro da curvatura f como a posição limite de encontro de duas normais nos pontos a e b da curva. Na figura 3.2, supõe-se que o arco $\overset{\frown}{ab}$ seja infinitamente pequeno.

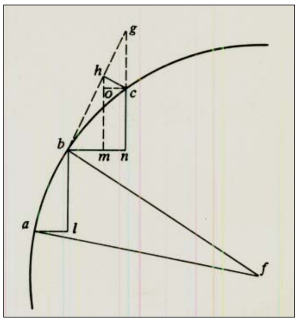


Figura 3.2: quadratura da parábola
Fonte (Baron, 1985e)

3.2.3 Século XVIII

O século XVII caracterizou-se pela construção de sistemas filosóficos baseados na idéia de que só se chegaria ao saber caso se chegasse a certeza de que novos conhecimentos pudessem ser dedutivamente derivados. Já no século XVIII renuncia-se a esse procedimento, com base em Newton (1642-1727), que propunha a análise em vez da dedução como procedimento para a obtenção do conhecimento (ANDERY et al, 1996).

Burtt (1983, *apud* ANDERY, 1996) aponta a importância das idéias de Newton tanto para o homem comum quanto para o estudioso.

> Ele verá no gênio inglês uma figura primordial na invenção de certos instrumentos científicos necessários a férteis evoluções posteriores, tais como o cálculo infinitesimal. Ele encontrará em Newton a primeira reformulação clara da união entre os métodos experimental e matemático, que se consubstanciou em todas as descobertas subseqüentes da ciência exata (BURTT, 1983, apud ANDERY et al, 1996, p. 238)

Newton, em seus estudos, percebeu que os planetas se movem de modo que em cada ponto a direção da velocidade é a mesma que a da reta tangente à trajetória naquele ponto. Assim, várias pequenas tangentes poderiam localmente descrever o movimento dos planetas. A descoberta seguinte seria conseqüência das tangentes e Newton a batizou de fluxões, conhecido hoje como o Cálculo Diferencial. Ele descobriu que a integração de uma função era simplesmente a operação inversa da diferenciação. Também desenvolveu métodos analíticos unindo técnicas matemáticas já conhecidas, o que tornou possível à resolução de problemas de diversos tipos, como o de encontrar áreas, tangentes e comprimentos de curvas assim como máximos e mínimos de funções.

Newton não divulgou suas descobertas sobre o cálculo diferencial e foi Leibniz (1646-1716) quem primeiro publicou. Isto gerou uma disputa muito grande entre os dois matemáticos, sobre quem teria realmente inventado o Cálculo.Com Newton, o cálculo estava fundamentado na idéia de velocidade. Leibniz parte de uma colocação metafísica introduzindo a noção de quantidades infinitamente pequenas.

De acordo com Baron (1985c), as três idéias importantes que fundamentaram a invenção do cálculo de Leibniz foram: o interesse de Leibniz pelo simbolismo e pela notação, vinculado à sua idéia de uma linguagem simbólica geral; o reconhecimento de que somar seqüências e tomar suas diferenças são operações inversas e que, semelhantemente, a determinação de áreas e de tangentes são operações inversas; e o triângulo característico e o seu uso para deduzir transformações gerais de áreas.

Newton, em quase todos os seus trabalhos, relacionado ao cálculo, não reconheceu o papel fundamental do limite. Para a série infinita, Newton raciocinou meramente por analogia. Ele calculou o que chamou de fluxos às curvas e o processo que usou para esses cálculos era muito similar ao de Fermat. Porém Newton, como Fermat, não utilizou o limite. Por outro lado, em seu *Principia Mathematica,* seu maior trabalho em Matemática e Ciência, ele foi o primeiro a reconhecer, a necessidade do limite. No começo do livro I do *Principia*, Newton tentou dar uma formulação precisa do conceito de limite.

Newton havia descoberto o papel preliminar que o limite teria no Cálculo, sendo essa a semente da definição moderna. Infelizmente, para a fundamentação rigorosa do Cálculo, durante muitas décadas, ninguém examinou as sugestões que Newton havia fornecido.

Durante o século XVIII, uma atenção muito pequena foi dada às fundamentações do Cálculo, especialmente ao limite e seus detalhes. Maclaurin defendeu o tratamento dos fluxos de Newton com argumentos similares ao de Fermat que somente Arquimedes ocasionalmente tinha usado.

D'Alembert (1717 - 1783) era o único cientista da época que reconheceu explicitamente a centralidade do limite no Cálculo. Em sua famosa *Encyclopédie* ele afirmou que a definição apropriada ao conceito de derivada requer a compreensão de limite primeiramente, e então ele explicou o conceito de limite da seguinte maneira:

> Limite substantivo (matemática). Diz que uma grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal qual quantidade e seu limite é absolutamente indeterminável. (BARON, 1985d, p.28).

Nesse conceito existia uma falta de clareza, a qual foi objeto de muitas críticas. A falta de uma consistência lógica nos fundamentos do cálculo oferecia um ambiente propício para críticas. Berkeley (1685-1753) formulou a sua crítica, em 1734, num tratado intitulado *The analyst*. O livro era dirigido contra a pretensão de matemáticos e cientistas de que suas ciências eram baseadas em fundamentos seguros e, portanto, atingiriam a verdade. Ele mostrou que os princípios utilizados no cálculo necessitavam de maior clareza e segurança.

Na discussão à crítica de Berkeley, o conceito de limite foi sugerido como solução para problemas levantados por ele. Robins (1707-1751) deu a seguinte explicação sobre o que entendia por limite: "[...] nós definimos uma grandeza última como sendo o limite do qual uma grandeza variável pode aproximar-se em qualquer grau de proximidade, embora ela nunca possa tornar-se absolutamente igual a ele" (BARON, 1985d, p. 27). Entretanto, esse conceito também não era consistente. Atualmente, não consideramos essa definição, senão como ficariam as funções contínuas?

Em 1784, a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para quem explicasse com sucesso uma teoria do infinitamente pequeno e do infinitamente grande na matemática e que pudesse ser usado no Cálculo como um fundamento lógico e consistente. Embora esse prêmio tenha sido ganho por Simon L'Huilier (1750 - 1840) pelo seu trabalho "longo e tedioso", este não foi considerado uma solução aos problemas propostos. Carnot (1753 - 1823) propôs uma tentativa popular de explicar o papel do limite no Cálculo como "a compensação dos erros", mas não explicou como estes erros se balançariam sempre perfeitamente.

3.2.4 Século XIX e XX

Uma revisão rigorosa dos fundamentos do cálculo só seria possível com uma constituição logicamente rigorosa da noção de número real. Isto só vai ocorrer na segunda metade do século XIX com as contribuições de Gauss (1777-1855), Cantor (1845-1918), Cauchy (1789-1857), Dedekind (1831-1916) e Weirstrass (1815-1897).

A história moderna do infinito matemático começa com Bolzano (1781-1841). Ele apoiou-se na idéia de que esses paradoxos, que desde Zenão atravessaram os séculos, não resistem a uma análise conseqüente. Para ele não era necessário enumerar todos os elementos de um conjunto para conceber a sua existência. Bastava caracterizar o conjunto pelas suas propriedades. Do ponto de vista de cálculo, bastava considerar que o infinito era maior do que qualquer grandeza dada, para que se tornasse operativo. Bolzano não refutava o axioma de Arquimedes nem o pressuposto de que o todo é maior que as partes, apenas considerava que as regras eram diferentes para os conjuntos infinitos. No entanto, Bolzano não foi capaz de definir uma aritmética do infinito como fez Cantor, mais tarde.

> Sabemos que o primeiro contato que as crianças têm com o infinito é quando lhes é apresentada a seqüência de números naturais e o infinito surge a partir de um operação elementar, que é a de poder sempre

> acrescentar uma unidade. Isso os perturba bastante, pois sempre querem saber qual é o maior número que existe, chegando mesmo imaginar que conjuntos infinitos são, por exemplo, os grãos de areia do oceano, os peixinhos do mar, as estrelas do céu, entre outros, por causa da dificuldade que teriam caso precisassem contar seus elementos (FREITAS e ARNALDI, 1998, p.177)

Segundo Freitas e Arnaldi (1998) o problema de listar, contar, ou de enumerar elementos de um conjunto qualquer era exatamente onde estava o eixo central das indagações de Cantor.

Embora a idéia intuitiva de conjunto esteja fortemente associada à de número, o que a torna muito antiga, seu tratamento teórico sistematizado ocorre no final do século XIX, pelo matemático Cantor (1845-1918). Como diz Russel (1988, *apud* SERRA, 2002) “embora muita gente, desde os Gregos, tenha falado do infinito à vontade, nunca ninguém pensou em perguntar, o que é o infinito?”. Dedekind e Cantor formularam esta questão e deram a resposta. Eles encontraram, por assim dizer, uma definição precisa de um número infinito ou de uma coleção infinita de objetos.

Os primeiros estudos sistemáticos de conjuntos infinitos são devidos a Dedekind e a Cantor. Dedekind estabelece uma bijeção entre dois conjuntos infinitos, uma noção capital para a teoria dos conjuntos. Essa bijeção equivale a dizer que determinados conjuntos infinitos têm o mesmo número de elementos. Por exemplo, existem tantos números pares como inteiros positivos.

Para caracterizar o “tamanho” de um conjunto infinito, Cantor introduz a noção de eqüipotência entre conjuntos infinitos. Dois conjuntos infinitos têm o mesmo tamanho, se são eqüipotentes ou têm o mesmo Cardinal. Sabemos que os subconjuntos infinitos dos naturais têm o mesmo cardinal, pois existe uma bijeção entre esses conjuntos.

Os trabalhos de Cantor reacenderam a polêmica sobre o infinito no seio da comunidade matemática. Um dos promotores do debate foi Kronecker, que tentou impedir a publicação dos primeiros artigos de Cantor, onde ele demonstrava que o conjunto dos reais não é numerável e que o conjunto dos pontos de um quadrado é equivalente ao conjunto de pontos do seu lado. Mas Cantor foi apoiado por Dedekind e, mais tarde, por Hilbert.

Gauss, em 1912, compôs o primeiro tratamento rigoroso de convergência de seqüências e séries, embora não utilizou a terminologia de limites. Fourier também mostrou a convergência de séries sem usar limites.

Entre 1840 e 1850, Weierstrass verificou que para corrigir os erros cometidos por Cauchy era necessário iniciar pela definição de limite de Cauchy em termos aritméticos estritos, usando-se somente valores absolutos e desigualdades.

O problema do conceito de limite só poderia ser resolvido com um novo enfoque da análise complementar. Um enfoque que mostrasse a consistência da necessidade de rigor por toda a análise, não somente ao serem definidos os conceitos básicos, mas também nas provas apresentadas (BARON, 1985d).

Cauchy (1789-1857) foi um dos grandes precursores desta inovação. Ele forneceu uma fundamentação completa dos conceitos de cálculo e incluiu vários exemplos com novos raciocínios, envolvendo problemas de convergência de seqüências e séries.

As variáveis e seus limites são apresentados por Cauchy da seguinte maneira:

> Chamamos quantidade variável àquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade constante aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, este último valor é chamado o limite de todos os outros. [...] Indicaremos o limite para qual converge determinada variável pela abreviação "lim" escrita antes da variável em questão. (CAUCHY, 1821, a*pud* BARON,1985d, p. 46-47).

A definição de limite de Cauchy é a mesma de D´Alambert e Robins, embora Cauchy não exclua a possibilidade da variável alcançar seu limite.

A matemática apoderou-se do conceito de infinito dando-lhe um sentido não só operativo, mas também filosófico. Arquimedes é talvez o primeiro a dar ao infinito o sentido que ele tem para os físicos. Tentando combater o pensamento de Aristóteles e a sua negação do infinito atual, Arquimedes considera que é possível escrever um número maior que o número de grãos de areia necessários para encher o Universo. Ele estima o valor desse número em 1051 como um número infinito. Aquilo que Arquimedes fez, e que é falso do ponto de vista matemático, é o que os físicos fazem todos os dias na sua atividade diária. De fato, os físicos consideram que certos valores são infinitos, quando comparados com outros. Assim, a velocidade da luz é tida como infinita em certos cálculos, assim como a massa da terra ou a do sol (SERRA, 2002).

Segundo Serra (2002) uma questão que pode ter alguma pertinência, no que diz respeito à relação entre o infinito matemático e o infinito físico é levantada por Hans Hahn, ao tratar o problema do espaço. "O espaço do nosso mundo físico tem extensão finita ou infinita?", ou seja, qual dos modelos de espaço é mais adequado para descrever a realidade, já que na matemática se podem considerar os dois - o modelo do espaço infinito da geometria euclidiana ou o espaço finito da geometria Riemaniana?

> A idéia de infinito em outras áreas do pensamento surge, tal como na física, associado ao muito grande, ao muito longo, ou ao muito intenso. Quando se trata de descrever sentimentos, razões ou saberes "infinitos" é adequado usar exatamente os mesmos termos que na física. Quando dizemos que dois sentimentos de dor ou prazer são incomparáveis, estamos a falar de diferentes ordens de grandeza, o que significa que um deles pode ser tomado como infinito em relação ao outro. As idéias e a linguagem da física são mais adequadas do que a da matemática para descrever os infinitos acessíveis ao senso comum. De fato, a compreensão do infinito matemático obriga a conhecimentos técnicos, apesar de ter como ponto de partida idéias simples [...]. Estudar o infinito matemático implica adquirir conhecimentos extensos e profundos sobre variadíssimos temas que por vezes parecem estar bem longe do aliciante tema inicial - o infinito. (SERRA, 2002, s/p).

3.3 UMA SÍNTESE HISTÓRICA DA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITE

Dos paradoxos de Zenão à formalização de Weierstrass transcorreram mais de 2500 anos de história que permearam a construção do conceito de limite. Para compreender essa história tão rica, dispomos de vários pontos de vista, baseados na ótica do trabalho de Trouche (1996), os quais destacaremos a seguir, descritos em ordem cronológica.

a) Primeira etapa: refutamento do infinito

Com Pitágoras, a generalização da geometria fez surgir um obstáculo a noção de número irracional. A descoberta dos irracionais destruiu a correspondência entre números e distância.

b) Segunda etapa: o surgimento do infinito

O surgimento do infinito pelas grandezas incomensuráveis proporcionou uma crise que se traduziu por um debate entre duas concepções: a concepção continuista tomava o número, o espaço e a matéria, como divisível ao infinito; e a concepção atomista admitia a existência de elementos primeiros indivisíveis. A ilustração dessa crise está relacionada aos paradoxos de Zenão.

c) Terceira etapa: a negação do infinito

A teoria das proporções de Eudoxo paira sobre o método de exaustão que permite a Arquimedes tratar dos problemas de distância, área e volumes. As dificuldades teóricas são contornadas de duas maneiras:

- Separar número e grandezas: a crise dos irracionais coloca em evidência as grandezas incomensuráveis. Estas grandezas não correspondem a números. Medir estas grandezas significa comparar entre elas mesmas.
- Evitar o infinito: na aplicação de seu método, Arquimedes evita utilizar uma noção obscura de um polígono de infinitos lados que coincide com o limite do segmento parabólico. Arquimedes nunca considerou que as somas tivessem uma infinidade de termos.

d) Quarta etapa: O levantamento de qualquer tabu

De um duplo movimento de debate filosófico (sobre os incomensuráveis, os indivisíveis, os infinitos) e da apropriação da herança grega através dos matemáticos árabes ressuscitaram as noções de velocidade, aceleração, instantaniedade (...) Esse período é marcado pelas produções teóricas audaciosas. "Kepler assimila o círculo a um polígono regular de um número infinito de lados e calcula sua área (somando as áreas de infinitos retângulos que tem como base os lados do polígono)" (DAHAN –DALMÉDICO e PEIFFER, 1982, *apud* TROUCHE, 1996, p.76)

Da mesma forma Cavalieri introduz os indivisíveis como elementos infinitesimais que compõem linhas, superfícies e volumes.

e) Quinta Etapa: a inclusão dos métodos infinitesimais

Os estudos dos movimentos e as investigações em óptica permitiram o desenvolvimento de pesquisas sobre a velocidade instantânea, as tangentes, os extremos e as distâncias das curvas.

Pode-se observar uma aproximação entre a álgebra e a geometria com Descartes e Fermat. Leibniz desenvolveu uma álgebra dos infinitamente pequenos.

> O cálculo das diferenças é uma operação fundamental do cálculo de Leibniz. A somatória é a operação inversa [..] que faz a força do formalismo de Leibniz, uma simplicidade de algoritmo, uma notação elegante, um formalismo operatório que permite efetuar quase automaticamente todos os cálculos [...] (DAHAN –DALMÉDICO e PEIFFER, 1982, *apud* TROUCHE, 1996, p.76).

Nesse mesmo período, Newton funda seu método sobre o movimento. "Newton, introduz o método de fluxões e de séries infinitas (...) ele se inspira no modelo da mecânica teórica e introduz o tempo como variável universal a toda correspondência funcional*"* (DAHAN –DALMÉDICO e PEIFFER, 1982, *apud* TROUCHE, 1996, p.77).

f) Sexta Etapa: a transparência das regras do cálculo

Os matemáticos do século XVIII (Euler, Lagrange) tentaram tornar claro o cálculo diferencial e integral. Euler descreve a natureza dos objetos sobre aqueles que eles operam e Lagrange tenta a redução do cálculo infinitesimal à álgebra.

g) Sétima Etapa: a pesquisa dos fundamentos

D´Alembert tenta fundamentar o cálculo diferencial com o cálculo de limite. Este é um avanço importante, porque a derivada não é mais relação de duas quantidades infinitesimais, mas o limite de uma relação de quantidade não nula. Entretanto, ele não conseguiu dar uma forma logicamente coerente.

Bolzano propôs a noção da base do cálculo infinitesimal. Cauchy tornou clara a noção do infinitamente pequeno, mas foi Weierstrass que deu à análise a sua forma atual. Ele destacou a noção do tempo, do movimento e introduziu um formalismo aritmético preciso.

No entanto, este novo rigor exige um fundamento à noção de número: é nesta construção que repousam os trabalhos dos matemáticos, no final do século XIX (Weiestrass, Cantor, Dedekind). Assim, a construção da noção de limite partiu de uma situação onde tudo se reconduz à geometria e onde tudo se remete aos números.

Ovaert e Verley (1983, *apud* TROUCHE, 1996) atribuem as dificuldades de formação de conceito de convergência e divergência de funções e cálculo infinitesimal às confusões existentes entre as diferentes formas de análise dentro dos quadros geométricos, algébricos e numéricos.

Dentro do quadro geométrico e mecânico, esses autores referenciam cinco grandes tipos de problemas: o problema da mecânica (conhecimento do movimento de um ponto, determinar sua velocidade e sua aceleração num dado instante); problema da geometria (determinação da tangente a uma determinada curva); problemas dos extremos (determinação de extremos de grandezas geométricas ou mecânicas); problemas de medidas de grandezas (cálculo de áreas, volumes) e o problema da álgebra e combinatória (resolução de problemas de somatório ou de interpolação pelo cálculo de diferenças finitas).

> A elaboração de métodos gerais para tratar desses cinco problemas necessitava de uma aplicação que colocasse em evidência a ligação entre esses problemas, onde se situa a principal dificuldade destacada por Newton e Leibniz (OVAERT e VERLEY, 1983, *apud* TROUCHE, 1996, p.79).

Assim, a resolução de um problema particular necessita da relação com outros problemas que nem sempre são próximos. Newton combinou os métodos algébricos e numéricos trabalhados por Wallis e Gregory e os métodos cinemáticos desenvolvidos por Barrow com uma nova idéia: o desenvolvimento em séries inteiras. Da mesma forma, Leibniz combina os métodos algébricos trabalhados por Pascal e os métodos geométricos trabalhados por Torricelli e Barrow.

O quadro algébrico contempla os trabalhos de Newton sobre as séries e de Leibniz sobre os algoritmos e linguagem formal. Nesse ponto de vista, o cálculo das expressões formais coloca em jogo uma infinidade de termos, por exemplo, as séries e as fórmulas são universalmente válidas (principio da generalização da álgebra).

O quadro numérico evidencia o não funcionamento do ponto de vista formal dentro do domínio das séries inteiras e das séries trigonométricas que provocaram no início do século XIX o desenvolvimento de um ponto de vista puramente numérico.

Bkrouche (1996) citado no trabalho de Trouche (1996) distingue dois pontos de vista: um ponto de vista cinemático e um ponto de vista de aproximação.

1) *Ponto de vista cinemático*

> Como o nome indica, está ligado ao movimento. Se uma grandeza variável x tende a um valor <u>a</u> , então uma grandeza y que depende da grandeza x tende a um valor b, a medida que a grandeza x se aproxima do valor a, a grandeza y se aproxima de b (...) dentro dessa concepção cinemática se conduz a noção do infinitamente pequeno (...) dizer que a grandeza y, função da grandeza variável x, tende a b quando x tende a <u>a</u> significa que y-b é infinitamente pequeno quando x-a é infinitamente pequeno (BKROUCHE,1996 *apud* TROUCHE, 1996, p.80, tradução livre).

2) *Ponto de vista de aproximação*

Ilustra a aproximação decimal de um número por uma seqüência de decimais (a_n)

A definição de (ε, δ) não é outra senão uma sistematização dessa noção de aproximação.

Bkrouche (1996), coloca em evidência a oposição desses dois pontos de vista: “Se dentro da noção cinemática é a variável que comanda a função, na noção de aproximação é o grau de aproximação que determina a aproximação da variável” (BKROUCHE,1996 *apud* TROUCHE, 1996, p.80, tradução livre).

Ao mesmo tempo, ele exprime a complementação entre esses dois pontos de vista.

> Se é verdade que há um predomínio do ponto de vista de aproximação, pelo seu valor operatório e sua eficácia dentro das demonstração de análise, é perigoso rejeitar o ponto de vista cinemático na medida em o resto do quadro intuitivo está inserido neste contexto, do que se pensa da noção do limite. (BKROUCHE,1996 *apud* TROUCHE, 1996, p.81).

3.4 APLICAÇÕES DO CÁLCULO

As aplicações do cálculo são muitas e em diversas áreas. Podemos observar, pelo relato histórico descrito, que o cálculo surgiu da necessidade de resolver problemas, que desde a antiguidade foram sendo pesquisados e solucionados.

Podemos destacar, por exemplo, os problemas relacionados à navegação. Estes problemas estimularam estudos analíticos em astronomia para fornecer tábuas de navegação, instigando estudos sobre métodos para se determinar o curso mais vantajoso para um navio com relação ao vento e à corrente. Estudos hidrodinâmicos foram inspirados pelos problemas do movimento da água em rios e canais. A construção naval sugeriu questões de estabilidade de corpos flutuantes e sobre a forma de navio que encontraria menor resistência ao mover-se nas águas. Na óptica, os efeitos da refração e reflexão em lentes e espelhos curvos puderam ser estudados por meio do cálculo. Com o uso do limite é possível resolver problemas relativos à velocidade, aceleração, área, volume, comprimento de curvas, trabalho, maximização de lucros e minimização de custos (ligados à economia) entre uma série de outras aplicações que poderiam ser destacadas.

Também podemos observar que o progresso do cálculo sempre esteve intimamente ligado com a necessidade de resolver problemas do homem num dado momento histórico e social. Na perspectiva da importância da história da matemática, podemos estar certos que a matemática não deveria ser ensinada de forma isolada do contexto histórico, apenas enfatizando capítulos de livros, mas sim orientarmos-nos pela prática de ensino aliada à evolução histórica ao longo dos tempos.

Devemos lembrar que

> A arte de fazer e ensinar matemática não é (nunca foi) criação livre e isolada da mente humana, totalmente descompromissada com a realidade do homem no seu momento histórico. Pelo contrário, criar e lecionar esta disciplina é antes de mais nada uma busca contagiante do nosso passado epistemológico (VITTI, 1999, p.13).

Em virtude do relato histórico apresentado podemos perceber que o cálculo teve sua história marcada por muitas incertezas, conflitos de idéias e contribuições de diversos autores que participaram desse enredo. Com a formalização do limite vários problemas puderam ser resolvidos e conseqüentemente desencadearam várias aplicações.

Após esta longa viagem no tempo, torna-se importante investigar como, na atualidade, é apresentado o conceito de limite em sala de aula. Será que o limite é apresentado como uma definição pronta e acabada? Existe a preocupação de inserí-lo num contexto histórico? Os problemas motivadores são presentes em sua contextualização? Uma das grandes referências do professor de matemática é o livro didático. A escolha de um livro didático revela a priori uma compatibilidade entre a proposta do autor e do professor que ministra as aulas. “O livro didático mostra um caminho proposto por seu autor, de suas crenças em relação a como deverá ocorrer a construção do conhecimento por parte de seus alunos, no decorrer do curso”.(BARUFFI, 1999, p.57).

Para isso, no próximo capítulo, apresenta-se uma análise de alguns livros didáticos de cálculo.

4. O ENSINO DO CONCEITO DE LIMITE NA ÓTICA DOS LIVROS DIDÁTICOS

4.1. INTRODUÇÃO

O livro didático é um suporte para o curso, seja para uma indicação de leitura prévia ou de uma pesquisa mais avançada por parte dos estudantes, ou como um apoio, às vezes, na íntegra, para as aulas ministradas em classe. O livro constitui-se num referencial sempre presente na pesquisa do professor e aluno. As diferenças entre os livros são notáveis e tornam-se significativas na escolha realizada pelo professor. Alguns livros são mais teóricos, outros são mais contextualizados, o que fica claro no prefácio de alguns livros onde os autores explicitam o público alvo a que se destinam.

A análise de alguns livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral será direcionada no sentido de responder algumas indagações: Como, nos livros didáticos, é introduzido o conceito de limite? Levam-se em consideração os conhecimentos anteriores adquiridos pelos alunos? Há uma preocupação em apresentar a origem das idéias fundamentais presente na história? A linguagem utilizada é mais natural ou matemática? É apresentado um problema motivador para o estudo do conteúdo?

Um alicerce teórico, que nos ajudará nesta análise, encontra-se no trabalho realizado por Barufi (1999). A autora, em sua pesquisa sobre livros didáticos de cálculo, definiu critérios de análise.

Destacaremos aqui alguns dos critérios que contribuirão para a nossa pesquisa.

4.2. OS CRITÉRIOS PARA A ANÁLISE DOS LIVROS

1) *Primeiro critério: idéias*

a) As idéias fundamentais, que historicamente propiciaram o desenvolvimento do cálculo, ou que são importantes atualmente, estão expressas no texto.
b) As idéias fundamentais do cálculo não estão presentes, mas há uma grande quantidade de aplicações, após o desenvolvimento dos conceitos.
c) Não há dados históricos, a ênfase está nos conceitos já formalizados, não nas idéias.

2) *Segundo critério: problematização*

a) O texto parte de importantes problemas motivadores para chegar à construção do conceito.
b) O texto parte de alguns exemplos simples para depois introduzir o conceito.
c) O texto inicia diretamente com o conceito para depois colocar exemplos, exercícios ou problemas.

3) *Terceiro critério: linguagem*

a) Além do texto usual em linguagem matemática, há a presença da linguagem natural, com a qual o autor busca o convencimento do leitor, discute dificuldades, mostra possíveis caminhos.
b) Além do texto usual em matemática, há texto informativo sem a intenção de convencimento.
c) O uso da linguagem natural é mínimo, utiliza primordialmente a linguagem matemática.

4) *Quarto critério: visualização*

a) O texto é rico em recurso em figuras, gráficos, utilizando, às vezes, argumentos geométricos para fazer cálculos algébricos.

b) O texto apresenta figuras e gráficos, mas os argumentos são algébricos.

c) O texto quase ou não tem recursos gráficos.

Nesse trabalho, para viabilizar a pesquisa, realizamos uma seleção de livros baseada na bibliografia de nossa instituição (UDESC), e de outras instituições, como por exemplo, da Universidade Federal de Santa Catarina. Muitos destes livros têm sido adotados nas instituições, alguns desde a década de 70 e outros mais recentemente.

4.3. A ANÁLISE DE ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

Não será apresentada a análise minuciosa de todos os livros selecionados. Será descrita a análise de alguns livros para exemplificar e após isso são ilustrados outros de maneira mais sucinta através de uma tabela.

a) <u>Cálculo</u> (THOMAS, 2002)

> Desde sua primeira edição, o livro de Cálculo de George B. Thomas tem servido de base para inúmeros cursos e métodos de ensino, dos mais tradicionais aos completamente experimentais. Esta décima edição é uma revisão profunda executada por Finney, Weir e Giordano que mantém os pontos fortes tradicionais do texto: rigor matemático, aplicações relevantes para as ciências e a engenharia e excelentes exercícios. Este texto flexível e moderno contém todos os elementos necessários para se encaixar nos mais diversos cursos existentes. (THOMAS, 2002, p.ix).

No capítulo de Limite o autor não faz referência histórica, mas no início ele descreve para o estudante, o que é cálculo e como aprendê-lo.

O autor introduz o conceito de limite, intuitivamente, com problemas motivadores, que estiveram presentes ao longo da história do surgimento de limite, como por exemplo, problemas envolvendo velocidade média e instantânea.

O autor, antes de definir o limite, apresenta alguns exemplos resolvidos, utilizando recursos gráficos aliados aos argumentos algébricos. O uso da intuição também é bastante explorado. Todo texto é trabalhado no sentido de inicialmente apresentar exemplos resolvidos minuciosamente, antes da introdução do conceito.

Apresenta, primeiramente, uma definição informal de limite:

> Seja f(x) definida em um intervalo aberto em torno de x_o, exceto talvez em x_o. Se f(x) fica arbitrariamente próximo de L, para todos os valores de x suficientemente próximos de x_o dizemos que f tem **limite** L quando x tende a x_o e escrevemos $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$. (THOMAS, 2002, p. 89)

Após isso, apresenta uma definição precisa de limite.

> Seja f(x) definida em um intervalo aberto em torno de x_o, exceto talvez em x_o. Dizemos que f(x) tem limite L quando x tende a x_o e escrevemos $\lim_{x \to x_o} f(x) = L$ se para cada número ε>0 existir um número correspondente δ>0 tal que, para todos os valores de x, $0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
> (THOMAS, 2002, p. 90).

Além do texto usual em linguagem matemática, há a presença da linguagem natural. Não há uma preocupação do autor quanto às demonstrações, a maioria das propriedades são apenas enunciadas.

Há uma preocupação do autor em inserir problemas que envolvam a resolução através de um ambiente informatizado.

A seqüência abordada pelo autor é apresentada na figura 4.1.

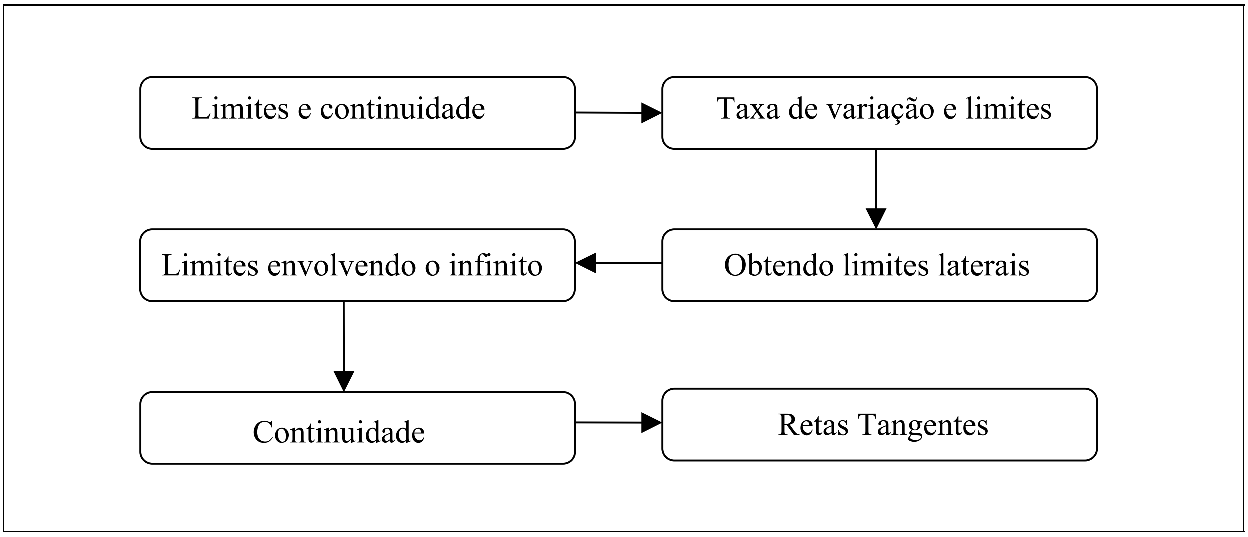


Figura 4.1: Seqüência de conteúdo apresentada por Thomas

b) *CÁLCULO A* (*FLEMMING* e GONÇALVES, 1992)

> Este livro foi escrito para servir de texto básico para os alunos de Cálculo da 1ª fase dos cursos das áreas tecnológicas e ciências exatas. Também poderá ser útil como texto suplementar para os alunos da área sócio-econômica (...) cada capítulo apresenta enunciados claros das definições, propriedades e teoremas relativos ao assunto abordado. Sempre que possível, são apresentadas as correspondentes idéias intuitivas e geométricas, bem como exemplos de aplicações práticas. (FLEMMING e GONÇALVES, 1992, p. v).

As autoras apresentam uma abordagem que não contemplam aspectos ligados às idéias da gênese do desenvolvimento do limite. Inicialmente, trabalham com exemplos minuciosamente resolvidos, algebricamente, e apresentados com recursos gráficos, antes de exporem as definições propriamente ditas.

A noção do limite é feita, primeiramente, através da noção intuitiva e após de uma maneira convencional. A noção intuitiva do limite é construída considerando os conceitos anteriores adquiridos pelos estudantes.

Com uso de tabelas numéricas, exploram o comportamento de determinadas funções e após isso, representam geometricamente. De posse do quadro numérico e geométrico fazem a análise da função em estudo. Podemos observar que juntamente com a noção intuitiva vão sendo apresentadas as noções matemáticas do limite. São explorados também nesse quadro, os conceitos de limite laterais e funções onde o valor do limite tende ao infinito.

Na seqüência as autoras dão a definição formal do conceito de limite pelo ponto de vista de aproximação.

> Seja f(x) definida num intervalo aberto I, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de f(x) quando x aproxima-se de a é L, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se para todo ε>0, existe um δ>0, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$ (FLEMMING e GONÇALVES, 1992, p. 78).

A formalização e generalização são feitas a partir daquilo que é mais próximo da compreensão do estudante, utilizando-se para isso uma linguagem simples e clara. Nem todas as propriedades são demonstradas, algumas são apenas enunciadas.

A seqüência de conteúdo é apresentada na figura 4.2.

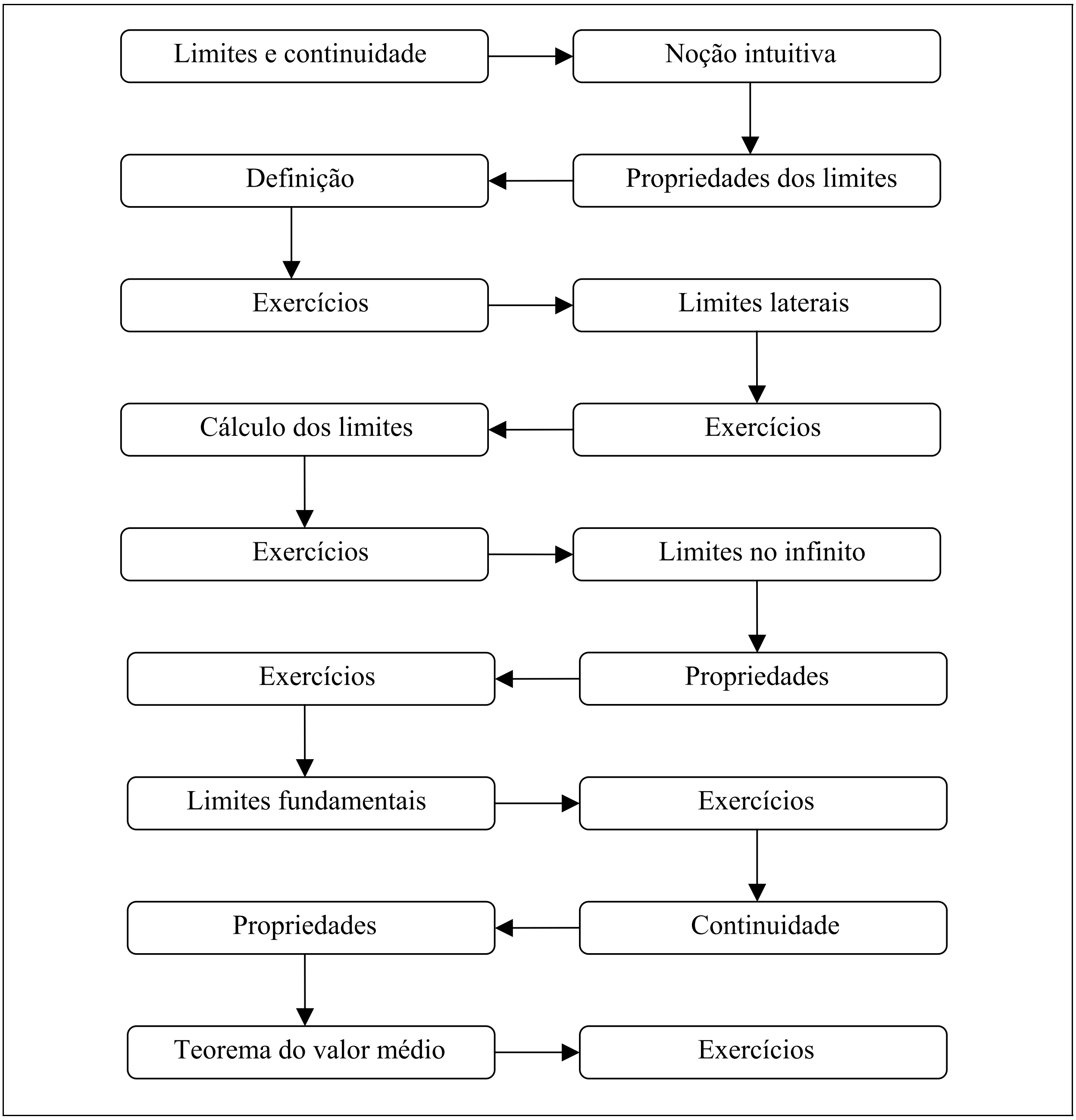


Figura 4.2: Seqüência do conteúdo apresentada por Flemming e Gonçalves

c) *Cálculo com* Geometria *Analítica* (LEITHOLD, 1994)

De acordo com o autor,

> O Cálculo com Geometria Analítica foi planejado para futuros matemáticos e para estudantes cujo interesse primário seja Engenharia, Ciencias Exatas e Humanas, ou áreas não técnicas. As explanações passo-a-passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos relevantes nesta edição. Uma vez que um livro-texto deve ser escrito para o estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação ou explicações. (LEITHOLD, 1994, p.ix).

Em todo o texto, há bastante riqueza de detalhes, com muitos exemplos resolvidos. Entretanto, as idéias fundamentais do cálculo não são exploradas em profundidade, através de problemas importantes. Também não são apresentados os elementos históricos, pertinentes ao desenvolvimento do conceito de limite.

O texto apresenta ao leitor sobre a razão dos cálculos, fazendo conexão entre os conteúdos já abordados. Há um grande número de visualização gráfica, complementando as resoluções algébricas.

Há a apresentação de muitas figuras e exemplos resolvidos. Também há uma grande preocupação com o formalismo nas demonstrações.

> Espero que o leitor tome consciência de que as demonstrações dos teoremas são necessárias; procurei torná-las bastante motivadoras e explicá-las cuidadosamente, de forma que sejam compreensíveis para o estudante que adquiriu um nível razoável de conhecimento das seções que as procedem. Se um teorema está enunciado sem demonstração, a sua discussão foi ampliada com figuras e exemplos e, em tais casos, sempre ressaltei que se trata de uma ilustração do conteúdo do teorema, e não de uma demonstração. (LEITHOLD, 1994, p. ix).

O autor introduz a idéia de limite, como ele mesmo escreve:

> Através de uma exposição passo-a-passo, motivadora, que inclui desde a discussão do cálculo do valor de uma função na proximidade de um número através de um tratamento intuitivo do processo de limite, até uma definição rigorosa envolvendo epsilons e deltas. (LEITHOLD, 1994, p. 55).

Apresenta a noção intuitiva, através de gráficos e tabelas e após apresenta a definição de limite de uma função em geral.

> Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O limite de f(x) quando x tende a *a* será *L*, escrito como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado um ε>0 qualquer, existe um δ>0, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. (LEITHOLD, 1994, p. 58).

Na seqüência, apresentam exemplos resolvidos e vários teoremas demonstrados, algebricamente.

A seqüência do conteúdo é apresentada conforme ilustra a figura 4.3.

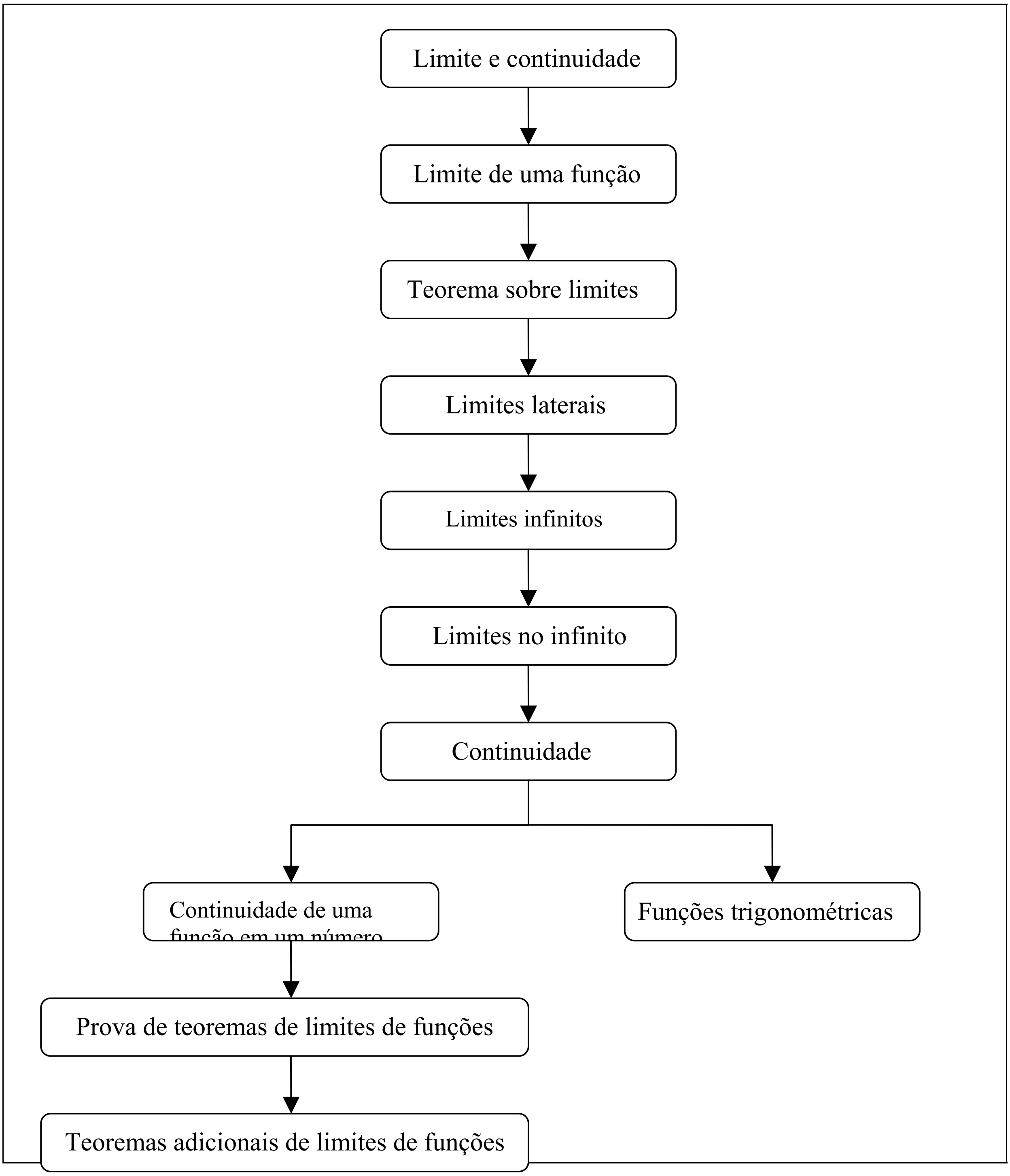


Figura 4.3: Seqüência de conteúdo apresentada por Leithold

d) *Cálculo Diferencial e Integral* (COURANT, 1970)

Após uma parte introdutória na qual são recuperados alguns conceitos desenvolvidos no ensino médio o autor explora o limite de uma seqüência numérica através de vários exemplos, nos quais examina a convergência ou não dessa, de maneira intuitiva. Após isso, coloca a definição formal do conceito de limite por meio de uma seqüência de números reais. Finalmente, coloca o conceito de limite quando a variável é contínua.

As idéias fundamentais do cálculo são colocadas a partir daquilo que é mais próximo do estudante, como por exemplo, o cálculo de áreas. Há referências aos matemáticos, não com muito detalhe.

Ao longo do texto há a utilização de uma linguagem natural, para esclarecer aquilo que foi feito formalmente.

> [...] a apresentação da análise como um sistema fechado de verdades, sem referências à sua origem e fim, tem, efetivamente, encanto estético e satisfaz profunda necessidade filosófica. Mas, a atitude daqueles que consideram a análise unicamente como ciência lógica e abstrata de intervenção não é , apenas, altamente inadequada para os participantes, mas perigosa para o desenvolvimento da matéria; investigar a análise matemática e ao mesmo tempo voltar as costas às suas aplicações e à intuição é condená-la a uma atrofia irremediável. (COURANT, 1970, p xiii).

O autor introduz o conceito de limite por seqüência de números, discutindo as seqüências geométricas, a noção de convergência e de seqüências monótonas. Discute as operações com limites e então apresenta o conceito de limite quando a variável é contínua. Quanto aos fatos históricos, estes são apresentados em apêndice. Apresenta poucos exemplos resolvidos e a presença de recursos gráficos é mínima.

A seqüência do conteúdo é ilustrada na figura 4.4.

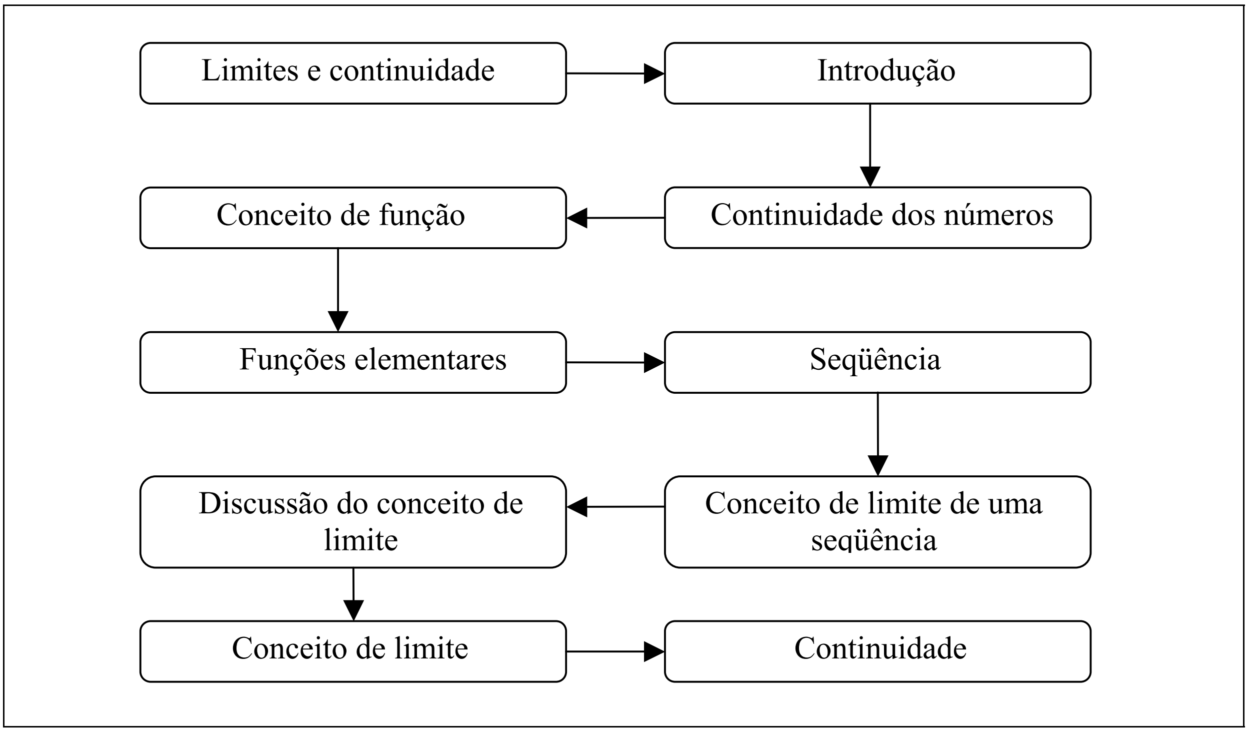


Figura 4.4: Seqüência de conteúdo apresentada por Courant

e) *Cálculo* (SWOKOWSKY, 1994)

O autor apresenta uma breve introdução histórica e na seqüência apresenta uma noção intuitiva do conceito de limite, utilizando-se de tabelas e gráficos. Apresenta vários exemplos resolvidos, empregando uma linguagem natural. Há a presença de problema motivador para introduzir o conceito de limite.

O texto é trabalhado no sentido de inicialmente apresentar exemplos resolvidos minuciosamente, antes da introdução do conceito. O texto apresenta figuras e gráficos, mas os argumentos são algébricos.

O autor se utiliza da linguagem natural para definir o conceito de limite e após apresenta a seguinte definição:

> Seja uma função f definida em um intervalo aberto que contém o ponto *a*, exceto possivelmente no próprio ponto *a*, e seja *L* um número real. A afirmação $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que, para todo ε>o existe um δ>0 tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. (SWOKOWSKY, 1994, p. 66)

A seqüência temática do conteúdo apresentada pelo autor está representada na figura 4.5.

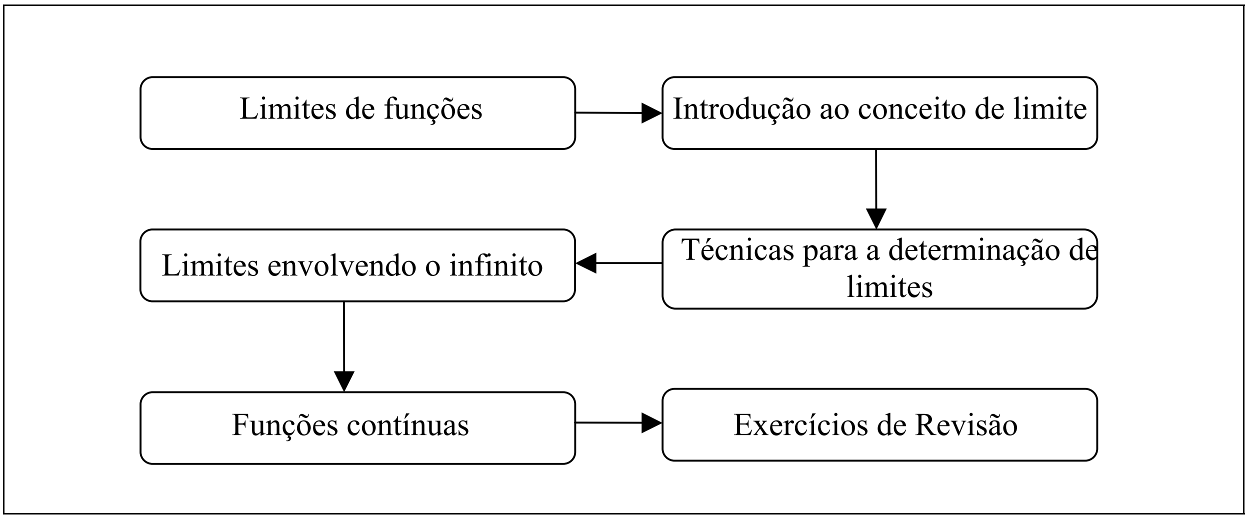


Figura 4.5 Seqüência de conteúdo apresentada por Swokowsky

Na seqüência, apresentamos, de maneira sucinta, na tabela 4.1, a análise de outros autores:

Tabela 4.1: Análise de alguns livros segundo os critérios destacados[2]

Autores/Critérios	idéias	problematização	linguagem	visualização
Piskounov	c	c	c	b
Boulos	b	b	b	b
Kaplan e Lewis	b	a	a	b
Simmons	b	b	a	a
Spivak	c	c	c	b
Edwards e Penney	b	a	b	a
Munem e Foulis	b	b	a	a
Anton	b	a	b	c
Guidorizzi	c	b	b	b

Observa-se que há uma preocupação dos autores mais recentes em colocar, no prefácio, o público alvo ao qual a sua obra se destina. Também as edições mais recentes

[2] a, b e c são os critérios das páginas 58 e 59.

apresentam uma preocupação bastante significativa na parte da visualização gráfica, principalmente, em utilizar o computador como uma ferramenta aliada ao processo. Há presença de problemas mais aplicados e problemas motivadores.

De acordo com a hipótese de pesquisa [H_1] há um obstáculo no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite. O conceito de limite pode ser formalizado a partir de dois pontos de vista:

1. O ponto de vista cinemático: a *medida que x se aproxima de a, f(x) se aproxima de L* e

2. O ponto de vista de aproximação: *Podemos tornar f(x) tão próximo de L quanto desejarmos, desde que tomamos x suficientemente próximo de a.*

Observa-se que a grande maioria dos livros apresenta a definição de limite, inicialmente, utilizando-se do ponto de vista cinemático, trabalhando com a idéia intuitiva do limite e após coloca a definição formal do limite, utilizando-se do ponto de vista de aproximação.

Um dos motivos do obstáculo do processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite se dá porque o professor usa o ponto de vista cinemático para introduzir o conceito de limite e a seguir formaliza o conceito usando o ponto de vista de aproximação (ε, δ). Isso pode gerar dificuldades no processo de ensino aprendizagem desse conceito, pois os alunos não conseguem visualizar a relação entre ambos e não entendem o porquê de encontrar a relação entre ε e δ.

Dos livros analisados, apenas dois apresentaram a definição de limite por seqüências que é a idéia mais compatível com o ponto de vista cinemático.

Há, atualmente, um número considerável de livros, e fazendo uma seleção das idéias mais importantes que cada um apresenta é possível encontrar um alicerce teórico de acordo com o objetivo de uma dada aula. A escolha de um determinado livro revela a compatibilidade de idéias, ou uma identificação com o trabalho desenvolvido. Esta identificação é relativa no sentido que o professor pode complementar e/ou modificar a atividade. Sendo assim, o curso não se desenvolve de modo idêntico à lógica dos livros, mas geralmente, a organização do cálculo, a linguagem utilizada e apresentada nos texto, revela as intenções e crenças do professor a respeito de como deverá ocorrer a construção do conhecimento por parte de seus alunos.

Com base nas dificuldades observadas em sala de aula (explanada no capítulo 5), na maneira como o objeto de estudo é apresentado nos livros analisados e com a fundamentação teórica descrita no segundo capítulo, propomos e aplicamos uma seqüência didática do conceito de limite em uma turma piloto, considerando a metodologia da engenharia didática. Esta aplicação, bem como os resultados, será descrita no próximo capítulo.

5. PRIMEIRA EXPERIMENTAÇÃO – AMBIENTE LÁPIS E PAPEL

5.1 INTRODUÇÃO

O dispositivo experimental utilizado nesta primeira experimentação é composto de duas partes:

1. Observação em classe;
2. Concepção e aplicação de uma micro engenharia didática.

Inicialmente, realizamos a observação em classe com o objetivo de detectar as principais dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite. A concepção da engenharia didática se apoiou nos resultados dessa observação. Portanto, faz-se necessário descrever os principais resultados obtidos durante a observação realizada em classe, pois certas escolhas efetuadas para a concepção da seqüência didática estão diretamente relacionadas a esta observação.

De acordo com Artigue (1988), o professor ao trabalhar ou escolher uma seqüência didática, deve levar em conta de forma integrada o domínio do conhecimento, o conhecimento prévio do aluno, o papel do professor e de seus alunos.

A concepção da seqüência didática aplicada se apoiou, essencialmente, sobre os elementos a seguir:

- Embasamento teórico na Teoria de Situações, apresentado no capitulo 2.;
- Estudos preliminares – Elementos Históricos e o Ensino do Conceito de Limite na Ótica dos Livros Didáticos apresentados respectivamente, nos capítulos 3 e 4 desse trabalho;
- Resultados obtidos através da observação realizada em sala de aula.

Nós nos situamos no quadro da Teoria de Situações Didáticas conforme Brousseau (1986). Foram utilizados, principalmente, os conceitos de situações didáticas, devolução, institucionalização e situações a-didáticas.

A seqüência elaborada e aplicada teve como objetivo introduzir o conceito de limite, em uma classe, pelo ponto de vista de aproximação.

A seguir, são descritas as escolhas e etapas envolvidas nesse experimento.

5.2 JUSTIFICATIVAS DAS ESCOLHAS REALIZADAS

5.2.1 A escolha da universidade

A observação realizada em classe bem como a aplicação da seqüência didática foram realizadas no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina-UDESC-CCT, onde a autora é professora do departamento de Matemática. Nesse centro encontram-se os cursos tecnológicos, nos quais, em sua grande maioria, está presente a disciplina de cálculo I que aborda o nosso objeto de estudo: limite.

5.2.2. A escolha das turmas

a) da observação em classe

Foram escolhidas para a observação sistemática, durante o primeiro semestre de 2003, três turmas (Engenharia Mecânica, Licenciatura em Física e Engenharia Elétrica), sendo que nas turmas de Mecânica e Física a observadora[3] participou de todas as aulas[4] envolvendo o contexto de limite, enquanto que na turma de Elétrica participou apenas da introdução do conceito de limite. Na observação em classe foram escolhidas as três turmas levando em consideração os horários distintos e a disponibilidade da observadora, bem como o aceite dos professores das respectivas turmas que permitiram fazer a realização da observação em suas classes.

[3] A observadora foi a autora do presente trabalho.
[4] O número de créditos da disciplina de Cálculo I é de seis horas semanais.

b) da aplicação da seqüência didática

Em virtude da professora desta turma ter participado da primeira etapa do dispositivo experimental (observação em classe) e aceitar o desafio de desenvolver a seqüência elaborada por nós (ver apêndice A), a seqüência foi aplicada na turma de Engenharia Mecânica, no segundo semestre de 2004.

5.2.3. Modo de realização

a) da observação em classe

A observadora assistiu as aulas de introdução do conceito de limite nas turmas escolhidas sem interferir nas aulas ministradas pelos professores das respectivas turmas. A observadora utilizou como recursos notas de aula, gravador e um questionário (ver apêndice B) que foi aplicado após as turmas terem trabalhado com o conceito de limite.

b) da aplicação da seqüência didática

A professora da turma desenvolveu em sala a seqüência didática elaborada pela autora (ver apêndice A), num período de 4 (quatro) aulas, em dois dias distintos no segundo semestre de 2004 com o objetivo de introduzir o conceito de limite pelo ponto de vista de aproximação.

Na seqüência, apresentaremos, detalhadamente, os procedimentos utilizados.

5.3 A METODOLOGIA UTILIZADA

5.3.1 A organização do trabalho dos alunos e as regras de ensino

a) da observação em classe

Para a realização da observação utilizou-se o processo metodológico de observador, de modo a interferir o mínimo possível no contexto da sala de aula, especialmente na conduta de professores e alunos ao apresentarem as idéias e soluções de problemas durante as atividades das aulas de Cálculo, mais precisamente, aulas onde o limite era objeto de estudo.

Foi acordado com os professores que a observadora participaria das aulas ministradas pelos mesmos, na qualidade de observador participante e utilizaria recursos como: gravador, notas e questionários.

b) da aplicação da seqüência didática

Na concepção da seqüência didática foram elaborados os problemas, bem como a articulação dos exercícios presentes em cada sessão da seqüência. Foi acordado com a professora da turma que essa aplicaria a seqüência e que haveria professores dentro de sala de aula, na qualidade de observadores da classe.

Algumas condições foram criadas para a realização desta seqüência:

i. Organização da classe:

- Foi solicitado aos estudantes que trabalhassem em duplas no ambiente lápis e papel;
- Inicialmente, a cada sessão, era deixado um tempo livre para a realização de cada tarefa;
- Foi organizada e distribuída aos alunos uma ficha de registro relativa a cada sessão.

ii. Institucionalização do objeto de estudo:

- Inicialmente os alunos desenvolviam, em duplas, a tarefa;
- Após, ocorria a discussão da atividade, conjuntamente com o professor da turma.

5.3.2 Estrutura de controle das atividades realizadas pelos estudantes

a) da observação em classe

Na observação realizada em classe aplicamos um questionário (ver apêndice B).

b) da aplicação da seqüência didática

Na aplicação da seqüência didática utilizou-se o seguinte procedimento:

- Ao final de cada sessão proposta, as fichas de trabalho dos alunos, bem como todos os rascunhos utilizados foram recolhidos. Por isso, ao distribuir as atividades foi fornecida folha de rascunho padronizada. Estes protocolos foram muito importantes para a análise a posteriori;
- Havia quatro observadoras[5] dentro da sala de aula, cada uma observando uma dupla específica. As observadoras foram informadas sobre o papel que deveriam exercer (ver apêndice C) e dentre esses, um era de anotar todos as considerações importantes da dupla, tais como estratégias de resolução, erros, discussão pertinente, comportamento (angústia, felicidade...) em seus relatórios;
- As sessões foram registradas em áudio.

A seguir são detalhados os pontos mais relevantes da observação e da concepção e aplicação da seqüência didática realizadas em classe.

5.4 RESULTADOS DA OBSERVAÇÃO EM CLASSE

A observação se justificou pela necessidade de:

[5] Prof. Katiani , Prof. Renata , Prof. Carla e Prof. Ivanete

- Identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de limite;
- Obter registro e documentação das experiências para, posteriormente, buscar sustentação teórica na Didática da Matemática para o encaminhamento das possíveis questões levantadas durante a investigação.

5.4.1 Principais dificuldades registradas

Observou-se que as dificuldades dos estudantes começaram a aparecer desde o conceito intuitivo de limite, pois se trabalhou com números infinitesimais, com os quais o estudante não estava acostumado. Também dependendo da situação utilizada, como a noção do infinito, por exemplo, ao aproximar a área de uma figura por n retângulos, as primeiras barreiras já surgiram nesse contexto. Ao formalizar o conceito de limite, os obstáculos aumentavam, pois neste momento, o aluno se deparava com a formalização da linguagem matemática, a qual muitas vezes ele não entendia. A falta de uma base em matemática elementar tornou-se evidente, ao lidar com conceitos de funções modulares.

As principais dificuldades encontradas na compreensão do conceito de limite, destacadas pelos alunos, foram provenientes dos seguintes fatores: compreensão da relação entre δ e ε, a noção de infinito, abstração, matemática básica e a aplicação prática de limites.

Nas dificuldades relativas à compreensão da relação entre δ e ε, registramos os seguintes depoimentos:

> “Minha maior dificuldade na compreensão do conceito de limite é entender o que significa ε e δ e o porque de encontrar sua relação” (um estudante da Mecânica).

> “A idéia de associação das vizinhanças δ e ε”(um estudante da Elétrica).

> “Estabelecer a famosa vizinhança entre δ e ε, nunca entendia como isso funcionava”(um estudante da Física).

> “Semestre passado não tivemos um bom aproveitamento (...) Não entendia nada sobre limite. δ e ε, grandezas infinitesimais. Compreensão de funções, etc(...)” (um estudante da Física).

Outro obstáculo, também registrado, foi a noção do infinito, como se observou no depoimento desse estudante ao ser questionado sobre qual foi a maior dificuldade na compreensão do conceito de limite, *"*Acho muito complicado pensar em infinito.“ o infinito é a prova da ignorância do ser humano”(Voltaire)” (um estudante da Mecânica). Esta dificuldade, também foi registrada nos estudantes da física: “quando eles tendem a $\pm\infty$, para escolher ε e δ é um pouco complicado”.(um estudante da Física).

No que se refere à abstração, de acordo com um estudante da elétrica, “é um assunto abstrato, você não sabe, no início, o que está estudando”, também na ótica de um estudante de mecânica “a maior dificuldade é por ser um assunto abstrato e que abandona muitas regras que até agora eram levadas como verdade absoluta”.

Um estudante da mecânica comentou sobre o ensino baseado em “decoreba”, na falta de raciocínio lógico na aprendizagem de um determinado conteúdo. De acordo com o mesmo, a principal dificuldade é: “Entender o raciocínio utilizado para se chegar ao resultado desejado uma vez que, eu assim como a maioria dos colegas vem do ensino médio e pré-vestibular onde a utilização de macetes e regrinhas acabava substituindo o raciocínio por uma questão de praticidade e ganho de tempo”.

Outro ponto, dado com bastante ênfase pelos estudantes das turmas em geral, foi a falta da matemática básica. Eles acabam errando nas contas, muitas vezes, por falta de base, principalmente nas funções modulares. Simplificar expressões, também acaba representando um obstáculo no desenvolvimento do cálculo de limite. Os depoimentos a seguir confirmam esta constatação. De acordo com um estudante da mecânica “a maior dificuldade é desenvolver a equação para achar o limite e sair de uma indeterminação” e na visão de um estudante de física “o problema está na base (funções e inequações)” e um estudante da elétrica complementa “a dificuldade está em lembrar algumas operações básicas do 1º e 2º graus”.

Uma das grandes agitações dentro da sala de aula logo após a explanação do conceito intuitivo de limite, foi o questionamento por partes dos alunos no que se refere à aplicação do limite: “professor aonde a gente vai utilizar isto?”, “dê exemplos práticos, professor”. Os professores explicitaram alguns exemplos práticos da aplicação de limites. Um professor utilizou como exemplo a produção de uma empresa, falando que sabendo qual era o lucro pretendido a alcançar, o quanto ele poderia mexer nas variáveis, de modo a obter um lucro tão próximo quanto o desejado. Um outro professor utilizou como exemplo, o preparo de uma massa instantânea (popular “miojo”). Sabendo que o tempo de cozimento da massa é de 3 (três) minutos, se utilizar um tempo muito superior a 3 (três) minutos ($3+\delta$, com δ grande) o resultado da massa será “papa”, caso um tempo muito inferior a 3 (três) minutos, conseqüentemente, massa crua e, complementando que quanto mais próximo de 3 (três) minutos terão como resultado, “uma massa gostosa”. Mas observamos que a curiosidade de nossos alunos, em saber onde aplicar um determinado conteúdo diz respeito a sua respectiva área. De acordo com alguns estudantes, a maior dificuldade se encontra em “entender na prática a aplicação de limite” (um estudante da elétrica), “onde vou utilizar?” (um estudante da mecânica).

Alguns estudantes, através de seus depoimentos, deixaram claro que os obstáculos na aprendizagem do conceito de limite podem estar relacionados, não somente a um dos aspectos destacados acima, mas destacam outros.

> “Tive todas as dificuldades, ou seja, não compreendi o que é limite”.(um estudante da mecânica).
>
> “Acho que nem compreendi o conceito...” (um estudante da mecânica).
>
> “Nunca haverá ninguém capaz de me explicar o conceito básico, em linguagem cotidiana”.(um estudante da física).
>
> “A base de limite é muito complicada pra mim, não tem um sentido lógico, é uma função muito complexa” (um estudante da física).
>
> “Eu acho muita loucura pensar em um número extremamente próximo do outro em que não existe um resultado indeterminado, aliás, retirar a indeterminação do resultado é algo de que se tem de pensar muito” (um estudante da elétrica).

5.4.2 Questionamento

Além desses depoimentos, respostas dadas à questão: “Explique o que significa para você a expressão: *o limite de uma função $f(x)$ quando $x \to a$ é um número b*”, a qual foi realizada em classe pelos professores, em suas respectivas turmas, após terem apresentado o conteúdo de limite, evidenciam as dificuldades dos alunos.

"Quer dizer que quando $x \rightarrow a$, a imagem da função tende a b, sem nunca alcançar a b.".

"Quando o x se aproxima do termo a, a função f se aproxima de y".

"Que o limite desta função, ou seja, seu resultado, estará entre um intervalo muito próximo de b, quando a incógnita nesta função for x perto de a".

"Quando você coloca um número x próximo, mais muito próximo de a o valor de f(x) ou y obterá como resultado um valor muito próximo de b".

"Que o máximo valor que a função f pode atingir quando x está tendendo para a é um b."

"É que o limite é como se fosse uma barreira, é um número que não pode ser tocado para não quebrar o limite. Ex. se a velocidade máxima permissível em uma estrada é de 100 Km/h, existe uma rotação no motor de que não pode ser ultrapassado, pois senão vai ultrapassar a velocidade máxima da pista".

"Limite de uma função é analisar o mínimo e o máximo campo de atuação do domínio".

"x é uma margem de erro para mais ou para menos"

"Eu entendo por limite o que eu posso cercar um acontecimento p/ que outra possa ser possível ou que aconteça".

"Só sei que é um valor máximo".

"Dependendo do "a", se for pequeno ou grande, o quanto, pode variar sem interferir na função. É quanto pode variar a tolerância de um número sem interferir no resultado final".

"Entendo por limite que é o limite máximo de um número até outro número".

"b é um número tão próximo quanto eu queira de "a" que x pode assumir antes de ser "a"."

"Quando x se aproxima ao número "a" a f(x) se aproxima, tanto pela esquerda quanto pela direita de "b"."

"Quando um número qualquer (x) tende para um "a" conhecido, sua imagem, ou seja, f(x) tende para um número também conhecido "b". lembrando que não interessa o que acontece em "a" e sim em sua proximidade".

Não foram listadas aqui, todas as respostas, apenas algumas que evidenciam as dificuldades ao se trabalhar com o conceito de limite.

Os dados descritos acima nos levaram a questionar e procurar fundamentos teóricos que nos auxiliassem a compreender as dificuldades que permeiam o estudo de limite e ao mesmo tempo fornecesse mecanismos que pudessem vir a contribuir para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite. Com a fundamentação teórica da teoria de Situações (Brousseau, 1986), conforme descrita no capítulo 2, foi concebida uma seqüência didática desse conteúdo com o objetivo de minimizar tais deficiências.

5.5 CONCEPÇÃO E APLICAÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

5.5.1 Apresentação da seqüência

Esta seqüência colocou em cena a construção do conceito de limite pelo ponto de vista de aproximação. A seqüência elaborada e aplicada visava a introdução do conceito de limite por meio de uma situação-problema. As questões propostas foram resolvidas em uma dada sessão e, no final de cada uma dessas, o professor da turma realizava a institucionalização dos conteúdos trabalhados na sessão.

A organização desta seqüência foi composta por três sessões, conforme ilustra a figura 5.1:

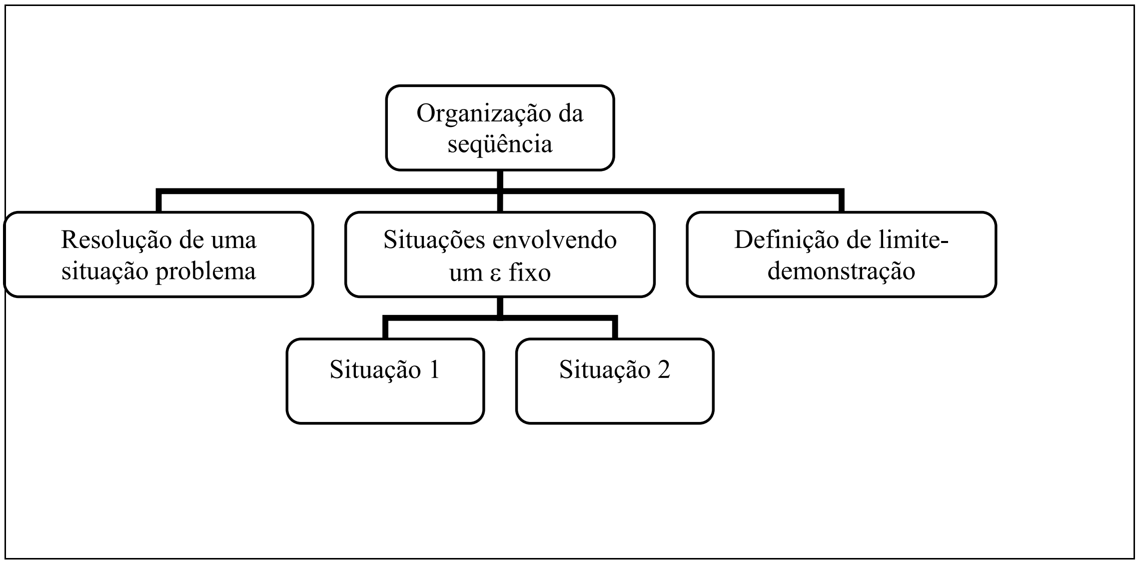


Figura 5.1. Organização da seqüência didática.

5.5.2 Primeira sessão [6]: resolução de uma situação problema – "Preparando o caminho para o conceito de limite".

O objetivo dessa sessão foi, por meio de uma situação problema contextualizada, possibilitar ao estudante:

[6] Sessão realizada num período de duas horas -aula.

- Reprisar as variáveis relativas ao objeto matemático de estudo: compreensão do enunciado, identificação e manuseio das ferramentas a usar: função linear (equação, gráfico, domínio, imagem) e inequações (resolução-domínio);
- Mostrar a importância desses conceitos na construção da relação entre o ε e o δ;

5.5.2.1 Atividade proposta

> 1. Uma companhia de telefone celular oferece aos seus clientes um plano que obedece a seguinte forma: uma taxa fixa mensal de R$ 35,00 e um custo adicional de R$ 0,50 por minuto utilizado
>
> a) Um cliente que gasta R$ 50,00 mensais fala quanto tempo ao telefone?
> b) Supor que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 45,00 à R$ 55,00. Qual a variação de tempo, em torno de 30 min, que o cliente poderá falar no telefone, respeitando seu planejamento financeiro?
> c) Refaça a questão (b) supondo que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 48,00 à R$ 52,00.
> d) Represente graficamente as situações dos itens (a, b,c) e responda: O que acontece com a variação do tempo quando a fatura telefônica está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 50,00?
> e) Vamos supor que o cliente deseje ter sua conta, mensalmente, em torno de R$ 50,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno do tempo t=30 ? Você pode denotar a variação do tempo por δ.

Quadro 5.1: Primeira sessão

5.5.3 Segunda sessão [7]- situações envolvendo um ε fixo.

O objetivo dessa sessão é trabalhar com o conceito de limite, a partir de um ε fixo.

O estudante tem que encontrar uma relação numérica entre ε e δ, dado um ε fixo, na situação proposta. Ou seja para um ε numérico fornecido pelo problema o estudante encontrará um δ que depende do ε dado. A identificação da função $f(x)$, do limite L e do ε, presentes nos dados é de suma importância para a resolução do problema.

5.5.3.1 Atividade proposta

A segunda sessão foi composta por duas situações problemas:

[7] A sessão 2 foi realizada conjuntamente com a sessão 3 num período de duas horas-aula.

Situação 1: Antes de fabricar cilindros para uma área da seção transversal de 58,1cm^2 para um certo motor você precisa saber qual o desvio que se pode aceitar em relação ao raio do cilindro ideal, que é $x_o = 4{,}3cm$. Além disso, a área transversal pode diferir de no máximo 0,1cm^2 dos 58,1 cm^2 necessários. Para que isto aconteça qual o intervalo de variação do raio ? (Dados: a área da seção transversal de um cilindro é dado por $A = \pi$ r^2).

Situação 2:

Quão próximo de $x_o = 4$ devemos manter x para termos certeza de que $y = 2x - 1$ fique a uma distância menor do que 0,5 unidades de $y_o = 7$? Qual a relação entre ε e δ?

Quadro 5.2: Segunda sessão

5.5.4 Terceira sessão: definição de limite – demonstração

O objetivo dessa sessão é encontrar a relação entre ε e δ de maneira genérica, ou seja, através da definição formal do conceito de limite. As variáveis didáticas presentes nesse exercício são o tipo de função (linear) e o quadrante utilizado para representar o ponto (que no caso é o primeiro quadrante, P(1,4)).

5.5.4.1 Atividade Proposta

$$\boxed{\text{Prove que } \lim_{x \to 1}(5x - 1) = 4}$$

Quadro 5.3: Terceira sessão

A seguir, apresenta-se cada sessão com sua análise a priori correspondente.

5.6 ANÁLISE A PRIORI

5.6.1 Análise a priori da primeira sessão: *preparando o caminho para o conceito de limite*

A análise a priori desse problema será feita considerando cada item (ver quadro 5.1).

a) Função em cena

Tarefa: encontrar o tempo correspondente a uma fatura de R$ 50,00.

Estratégia de resolução:

i. Lei de formação da função linear:

Os alunos podem representar, matematicamente, a situação dada no problema por: $f(t) = 35 + 0{,}5t$. Os estudantes que expressarem essa função podem optar pela variável x no lugar do t, pois eles estão "acostumados" com $f(x)$ ou $y = 35 + 0{,}5x$, onde x representa o tempo, em minutos e y ou $f(x)$ o valor da fatura em reais.

Alguns alunos podem esboçar o gráfico desta função linear.

ii. Raciocínio lógico:

Outra possibilidade é fazer $50 - 35 = 15$. Como cada minuto custa R$ 0,50 e o cliente tem R$ 15,00 a sua disposição, ele poderá falar 30 minutos.

b) A inequação em cena

Tarefa: encontrar a variação do tempo, em torno de 30 minutos, respeitando o planejamento em cada item.

Estratégias de Resolução:

i. Através de inequações*:*

Resolvendo as inequações $45 < f(t) < 55$ e $48 < f(t) < 52$

Caso ele não tenha encontrado a lei da formação da função, agora ele deve fazê-lo.

ii. Através dos extremos:

Resolvendo as equações $f(t) = 45$ e $f(t) = 55$ para o item (b) e $f(t) = 48$ e $f(t) = 52$ para o item (c) serão obtidas as respostas t=20 e t=40 para o caso (b) e t=26 e t=34 para o caso (c). A partir de então poderão dar a resposta utilizando o raciocínio de intervalo.

Pode ocorrer o caso de algumas duplas apresentarem a resposta como $20 \le t \le 40$, $26 \le t \le 34$, esquecendo de dizer de quanto o tempo se aproximou de 30. A resposta esperada seria: o tempo pode variar num raio de 10 minutos e 4 minutos, respectivamente, em torno de 30.

c) Representação geométrica

Tarefa: desenhar e interpretar o gráfico dos itens (a,b,c).

Estratégias de Resolução:

i. Representação da função linear

Após esboçar o gráfico da função linear $f(t) = 35 + 0{,}5t$ e concluir, gráfica e algebricamente, que os valores estão cada vez mais próximos de t=30 minutos ou que o raio de variação de t está cada vez menor (ou próximo de zero).

ii. Representação dos pontos

Representar apenas os pontos $P_1(30,50)$, $P_2(20,45)$, $P_3(40,55)$, $P_4(26,48)$, $P_5(34,52)$ observando o que ocorre nos eixos das ordenadas e das abscissas.

d) A relação entre δ e ε

Tarefa: Encontrar a relação entre o ε e δ

Estratégias de Resolução:

i. Raciocínio lógico

Em virtude do raciocínio utilizado para responder os itens anteriores, os alunos poderão argumentar que quanto menor o erro mais próximo de 30 minutos estará o tempo. Nesse caso, os alunos utilizarão uma linguagem natural sem uma preocupação com a formalização matemática da questão.

ii. Inequações:

Através do conhecimento de inequações modulares pode-se estabelecer o seguinte procedimento:

$$50-\varepsilon \leq f(t) \leq 50+\varepsilon$$
$$50-\varepsilon < 0{,}5t+35 < 50+\varepsilon \qquad\qquad 30-\delta \leq t \leq 30+\delta \ \text{[2]}$$
$$15-\varepsilon < 0{,}5t < 15+\varepsilon$$
$$30-2\varepsilon < t < 30+2\varepsilon \quad \text{[1]}$$

Comparando o desenvolvimento em [1] e [2] pode-se concluir que $\delta = 2\varepsilon$.

iii. Representação gráfica

Esboçar a função $f(t) = 35 - 0{,}5t$, representando o ponto P(30-δ, 50-ε) e P_2(30+δ, 50+ε), concluindo a questão, geometricamente.

5.6.2 Análise a priori da segunda sessão: situações envolvendo um ε fixo

Essa sessão foi composta por duas situações, conforme apresentada no quadro 5.2.

5.6.2.1 Análise a priori – primeira situação

Tarefa: Encontrar o intervalo da variação do raio.

Estratégia de Resolução:

i. Inequações

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$|\pi r^2 - 58{,}1| < 0{,}1$$

Nesse caso, na resolução da inequação modular encontra-se o intervalo da variação do raio.

ii. Definição de limite

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } |x - a| < \delta$$

$$|\pi r^2 - 58{,}1| < 0{,}1 \text{ sempre que } |r - 4{,}3| < \delta$$

Nesse caso, encontra-se a relação genérica entre epsilon e delta, observando que a função envolvida é uma função quadrática.

iii. Imagem inversa de um ponto pela função f

$$f(r) = \pi r^2$$

Encontra-se o raio correspondente a $f(r) = 58$ e a $f(r) = 58{,}2$

5.6.2.2 Análise a priori – segunda situação

Tarefa: Encontrar a relação entre δ e ε.

Estratégias de Resolução:

i. Definição de limite

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } |x - a| < \delta$$

$$|2x - 1 - 7| < 0{,}5 \quad \text{sempre que } |x - 4| < \delta$$

ii. Raciocínio lógico

Como a função em questão é linear, podem verificar que a relação é sempre constante (como feito na primeira atividade) e verificar o que ocorre com a função em algum ponto, observando o que ocorre com ε e δ.

5.6.3 Análise a priori da terceira sessão: Demonstração

Tarefa: encontrar a relação genérica entre ε e δ (ver quadro 5.3, p.83)

Estratégia de Resolução:

i. Inequações

Através do conhecimento de inequações modulares pode-se estabelecer o seguinte procedimento:

$$-\varepsilon < 5x - 1 - 4 < \varepsilon \quad [1] \qquad\qquad -\delta < x - 1 < \delta \quad [2]$$

Determina-se o conjunto solução das inequações [1] e [2] e compara-se ambas, obtendo como resultado $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$

ii. Definição de limite

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } |x - a| < \delta$$

$$|5x - 1 - 4| < \varepsilon \quad \text{sempre que } |x - 1| < \delta$$

$$\left.\begin{array}{l} |5(x-1)| < \varepsilon \\ |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{5} \end{array}\right. \quad \text{sempre que } |x - 1| < \delta$$

logo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$

Aplica-se a propriedade do módulo do produto na inequação [1] e após isso, compara-se com a inequação [2], donde se obtém $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$

5.6.4 O Conteúdo em jogo

Os conteúdos envolvidos na primeira sessão foram a lei de formação linear, inequações e intervalos. Esses conteúdos foram explorados em uma situação problema. Inicialmente o aluno encontrava a lei da formação de uma função linear e após isso trabalhava com inequações e intervalo de variação do raio. Na segunda sessão trabalhou-se com funções linear e quadrática. A função quadrática tinha como objetivo encontrar a variação do raio dado um epsilon fixo e a função linear encontrar o valor do delta dado um epsilon específico. Após isso, foi proposto na terceira sessão trabalhar com a relação genérica entre epsilon e delta, culminando com a definição de limite.

5.6.5 Conclusão da análise a priori da seqüência didática proposta

A seqüência didática proposta coloca em evidência a introdução do conceito de limite, através de situações problema, onde é proporcionado aos estudantes trabalhar com conceitos de funções, inequações e intervalos, os quais serão ferramentas úteis na compreensão da definição de limite, conforme destacado na atividade da primeira sessão. Nessa sessão também são inseridos os símbolos ε e δ, com o intuito de dar-lhes um significado. Procura-se fazer com que o aluno construa as primeiras noções envolvidas na definição do limite.

Na segunda sessão, ao se trabalhar com um ε fixo, tem-se como objetivo verificar que esse não é único. Que para cada valor dado a ε encontrar-se-á uma dada relação com δ. Procurou-se, primeiro, trabalhar com casos particulares, para após, na terceira sessão, fazer a generalização.

De acordo com nossa hipótese [H1], existe um obstáculo na aprendizagem do conceito de limite. Portanto, ao expor essa atividade procuramos fazer uma quebra no contrato tradicional, onde, geralmente, a definição é dada como pronta e acabada. Geralmente a definição de limite é exposta após uma introdução do conceito de limite pelo ponto de vista cinemático, e após vários exemplos resolvidos, é dada essa definição utilizando o ponto de vista de aproximação sem um amadurecimento da correlação entre ambas.

A seguir, apresenta-se a análise a posteriori de cada sessão.

5.7 ANÁLISE A POSTERIORI

5.7.1 Introdução

A análise realizada está apoiada sobre:

- As resoluções apresentadas às questões propostas em cada sessão;
- Protocolos[8] elaborados pelos registros (gravação em áudio) e notas das observadoras.

Participaram da aplicação da seqüência 17 (dezessete) duplas, sendo que destas, 4 (quatro), designadas de dupla A, dupla B, dupla C e dupla D, foram observadas diretamente. Não foi possível observar todas as duplas, por questões técnicas (como gravadores) e pela quantidade de observadores em sala de aula. Como nosso interesse era conseguir registrar os comportamentos de uma amostra dessa população, tais como tentativa de resolução, estratégia utilizada, abandono de estratégia e angústias, foram escolhidas, aleatoriamente, quatro duplas, para que os observadores pudessem ter contato direto com as mesmas. Na seqüência centramos nossas análises ao estudo de caso. Para as outras duplas que participaram desse processo serão analisadas as resoluções realizadas registradas em papel.

[8] A transcrição, na íntegra, dos protocolos encontra-se em anexo.

5.7.2 Análise a posteriori da primeira sessão

Apresenta-se a análise, conforme explanada a análise a priori, item por item.

a) a função em cena

1) Uma companhia de telefone celular oferece aos seus clientes um plano que obedece a seguinte forma: uma taxa fixa mensal de R$ 35,00 e um custo adicional de R$ 0,50 por minuto utilizado. a) Um cliente que gasta R$ 50,00 mensais fala quanto tempo ao telefone?

Quadro 5.4: A função em cena

Analisadas as resoluções apresentadas pelas duplas participantes, pode-se destacar os seguintes pontos:

- Das 17 (dezessete) duplas existentes, 13 (treze) resolveram a questão, encontrando a função linear.
- 3 (três) duplas resolveram a questão utilizando o raciocínio lógico;
- 1 (uma) dupla resolveu a questão pelos dois métodos descritos (pela função linear, raciocínio lógico);
- Apenas 2 (duas) duplas utilizaram o "*t*" para representar a variável tempo, as demais usaram "*x*" e a maioria concluiu a questão colocando $x=30$ min.;
- Todas as duplas conseguiram responder a questão corretamente;
- Apenas uma dupla representou a função graficamente.

A seguir centra-se a análise nos pontos mais relevantes[9] destacados pelas duplas participantes dessa experimentação.

i) Utilização das duas estratégias

Algumas duplas utilizaram as duas estratégias na resolução do problema. A dupla B[10] observada, na discussão do problema, identificou que no tempo zero o valor da conta já era trinta e cinco reais. Com os dados fornecidos pelo problema sabia que cada minuto custava cinqüenta centavos, utilizando o raciocínio lógico, trinta minutos teve um custo de quinze

[9] Foram extraídos dos protocolos os trechos pertinentes. Para ver na íntegra, consulte os anexos.
[10] Protocolo na íntegra (Anexo II)

reais. Trinta e cinco reais de taxa mais os quinze reais equivale a cinqüenta reais. E apresentou a resolução do problema utilizando a estratégia da função linear (usando a letra m e utilizando frações), conforme ilustra o quadro 5.5.

51. **Y**: Já começa em 35. No tempo zero é 35.
52. **B**: daí a cada minuto custa 50 centavos. Aí põe 30 minutos vai dar com o.. 15 reais
53. **Y**: 30 minutos 15 reais .
54. **B**: tá, daí coloca..
55. **Y**: 15 reais a mais, né?
56. **B**: tá, daí vai dar 50.
57. **Y**: é
58. **B**: 30 minutos com 50 de gasto.
59. **Y**: isto.

Resolveram, algebricamente, o exercício como ilustra o quadro 5.5.

$$50 = 35 + \frac{m}{2}$$
$$m = 30\,\text{min}$$

Quadro 5.5: Resolução da função apresentada pela dupla B

ii) Maneiras distintas de representação

Para a construção da função linear apareceram letras distintas para representar a variável tempo. A grande maioria das duplas utilizou a letra *x*. Outra diferença foi na representação dos cinqüenta centavos. Algumas duplas utilizaram a notação de números fracionários e a grande maioria de números decimais. A dupla D, por exemplo, utilizou a variável *x* para representar a incógnita tempo e fez usou da notação de números decimais, conforme ilustra o quadro 5.6. Doze duplas utilizaram essa notação.

$$50 = 35 + x.0{,}5$$
$$15 = x.0{,}5$$
$$x = 30$$

Quadro 5.6: Resolução da função apresentada pela dupla D

iii) A não identificação da função linear

Das 17 (dezessete) duplas apenas 3 (três) não identificaram a função linear. A dupla C[11], por exemplo, usou a estratégia do raciocínio lógico, sem especificar a função linear. Na resolução a dupla retirou todos os dados fornecidos pelo problema e então esboçou a resposta, conforme ilustra a resolução dada no quadro 5.7.

164.C: [...] custa 50 centavos por minuto, 50 reais sobra quanto tempo? Tem a taxa fixa , então ele vai gastar 15 reais, então fala 30 minutos.
[...]
168.K: Aí 50 [centavos] por minuto. Aí 15 dividido por 50 [centavos]
169.C: por 0.5 é 30
170.K: aí foi a primeira

Custo do cliente: 50,00 Taxa: 35,00 Sobra: R$ 15,00 15,00 ÷ 0,5= 30 min R: fala 30 min

Quadro 5.7: Resolução da função apresentada pela dupla C

Foi verificado que das quatro duplas observadas, apenas uma não identificou a função linear presente na resolução.

b) As inequações em cena – análise a posteriori

A análise dos itens b e c foi feita conjuntamente, devido à mesma estratégia utilizada pelas duplas.

b) Supor que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 45,00 à R$ 55,00. Qual a variação de tempo, em torno de 30 min, que o cliente poderá falar no telefone, respeitando seu planejamento financeiro? c) Refaça a questão (b) supondo que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 48,00 a R$ 52,00.

Quadro 5.8: A inequação em cena

- A maioria das duplas utilizou a estratégia dos extremos;
- 2 (duas) duplas resolveram a questão utilizando a estratégia de inequações;
- 11 (onze) duplas concluíram que a variação do tempo em torno dos trinta minutos era de dez minutos e 4 minutos relativos a resposta do item (b) e (c), respectivamente.

[11] Protocolo na íntegra (anexo III)

- Uma dupla representou, graficamente, a situação;
- Apenas uma dupla não chegou ao resultado esperado.

Na seqüência são explanados, detalhadamente, outros aspectos pertinentes dessa observação.

i) O abandono da função linear como estratégia de resolução

A dupla A encontrou a resposta do item (a) através da construção da função linear. Ao discutir e formular a resposta dos itens (b) e (c) não utilizou, algebricamente, esta estratégia. A partir desse momento, ela usou a estratégia do raciocínio lógico. A seguir, apresenta-se o discurso[12], bem como a resolução apresentada pela dupla no quadro 5.9.

3. G: aqui são cinco reais para cima de cinqüenta e cinco reais abaixo de cinqüenta reais, né?
4. G: Então cinco reais equivale a ...são cinqüenta centavos por minuto
5. J: no total, né?
6. G: é, esse aqui tem que dar 5 reais, isso?

[...]

10. G: dez minutos.
11. G: se ele quer manter este intervalo de quarenta e cinco a cinqüenta e cinco qual a variação do tempo em torno de 30 minutos que o cliente poderá falar ao telefone?
12. G: então ele vai variar dez minutos em torno de trinta.
13. J: de vinte a quarenta minutos
14. G: a variação é essa aí.
15. G: variação de dez minutos.
16. J: tá certo.
17. G: refaça a questão b para uma fatura no intervalo de quarenta e oito a cinqüenta e dois
18. G: vamos fazer o mesmo do item a
19. J: hã rã [concordando]
20. G: vamos ver quanto vale dois reais.
21. J: quatro minutos.
22. G: isso, quatro minutos.

$0{,}5x = 5$ $x = 10$	$0{,}5x = 2$ $x = 4$

Quadro 5.9: Resolução da inequação apresentada pela dupla A

ii) As diferentes notações para a variação do tempo.

A grande maioria das duplas concluiu que a variação do tempo em torno dos trinta minutos era de dez e quatro minutos, no item b e c, respectivamente. A representação para

[12] Protocolo na íntegra (anexo I)

esta variação apareceu em notação matemática, distinta. A dupla D[13], por exemplo, utilizou a estratégia dos extremos para encontrar o intervalo de variação, ou seja, encontrou o *f(x)=45* e *f(x)=55* e após encontrou o intervalo de variação. Para responder a questão da variação em torno de *30* minutos eles determinaram a distância entre os extremos do intervalo e após isso dividiram por dois, denominando esse raio como Δx, conforme ilustra o quadro 5.10.

A dupla pensou em calcular o tempo exato em 45 e 55. "Quando sugeri o gráfico eles tiveram uma idéia rápida de intervalo" (Katiani[14], 2004) . O quadro 5.10 ilustra a resolução dada pela dupla.

12. D: pega o 45 igual a 35 mais 0,5x
13. L: diminui o 45 de 35...
14. D: x é igual a 20

[...]

16. obs: vou dar uma dica aqui para vocês ele não quer no tempo 45 e nem no 55, ele quer uma variação de tempo, tá?

[...]

20. obs: deixa eu fazer uma perguntinha para vocês: o que significa este 10?
21. D: 10 é a..
22. L: é a variação..
23. D: varia mais ou menos 10.

$45 = 35 + x.0,5 \Rightarrow x = 20$	$48 = 35 + x.0,5 \Rightarrow x = 26$
$55 = 35 + 0,5x \Rightarrow x = 40$	$52 = 35 + 0,5x \Rightarrow x = 34$
$\Delta x = \dfrac{40-20}{2} = 10$	$\Delta x = \dfrac{34-26}{2} = 4$

Quadro 5.10: Resolução da inequação apresentada pela dupla D

A dupla B[15] utilizou estratégia dos extremos para encontrar o intervalo, só que apresentou a resposta da variação do tempo, em torno de 30 minutos, como ± 10 e ± 4 para os itens (b) e (c), respectivamente.

35. B: 5 vai dar 40 e 20
36. Y: de 20 a 40 minutos ele pode falar. Quantos pra mais?
37. B: menos e mais 10 minutos
38. Y: mais ou menos 10 minutos
39. B: que é em torno de 30
40. Y: ali é 34. Ai põe uma variação de 8 minutos, sendo, não sei, é né ?
41. B: não, põe uma de mais ou menos quatro minutos, acho melhor.
42. Y: isso.
43. B: sendo de 26 minutos a 34, o valor ali. Igual lá em cima.

c) Representação geométrica

[13] Protocolo na íntegra (anexo IV)

[14] observadora da dupla

[15] Protocolo na íntegra (anexo II)

d) Represente graficamente as situações dos itens (a, b,c) e responda: O que acontece com a variação do tempo quando a fatura telefônica está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 50,00?

Quadro 5.11: Representação gráfica

- 9 (nove) duplas representaram a situação em apenas um gráfico. Sendo que destas, 7 (sete) apresentaram interpretação de que quando a faixa estava mais estreita em torno dos R$ 50,00 o tempo se aproximava de 30 minutos.;
- 5 (cinco) duplas esboçaram 3 (três) gráficos distintos (um para cada situação), sendo que destas 2 (duas) não apresentaram nenhuma interpretação;
- 1 (uma) dupla não realizou a tarefa;
- 1 (uma) dupla apresentou o gráfico errado (não era linear).

Na seqüência são explanados, detalhadamente, outros aspectos pertinentes dessa observação.

i) Representação em três gráficos -a falta de espaço

Esse item gerou discussão na classe, pois muitas duplas tiveram a preocupação em saber se a representação era em apenas um único gráfico ou em gráficos distintos. Outra observação pertinente é que a grande maioria das duplas não teve a preocupação de esboçar o gráfico e sim apenas fazer uma representação pontual de cada situação. A dupla D, por exemplo, inicialmente se preocupou com a falta de espaço. Após a intervenção da observadora esboçou um gráfico para cada situação, apresentando uma interpretação para a mesma. Não fez a representação da reta, apenas os pontos, conforme ilustra a figura 5.2.

31. Obs: o que tá acontecendo? Qual o problema?
32. L: é o espaço
33. obs: faz atrás. Se o problema é o espaço faz atrás da folha. Faz aqui oh!. tão simples e vocês se confundindo tanto...

[...]

35. D: o que acontece com a variação do tempo em torno de 30?
36. L: torna-se cada vez menor, né?
37. D: diz aqui, oh [pede para escrever a resposta na folha].

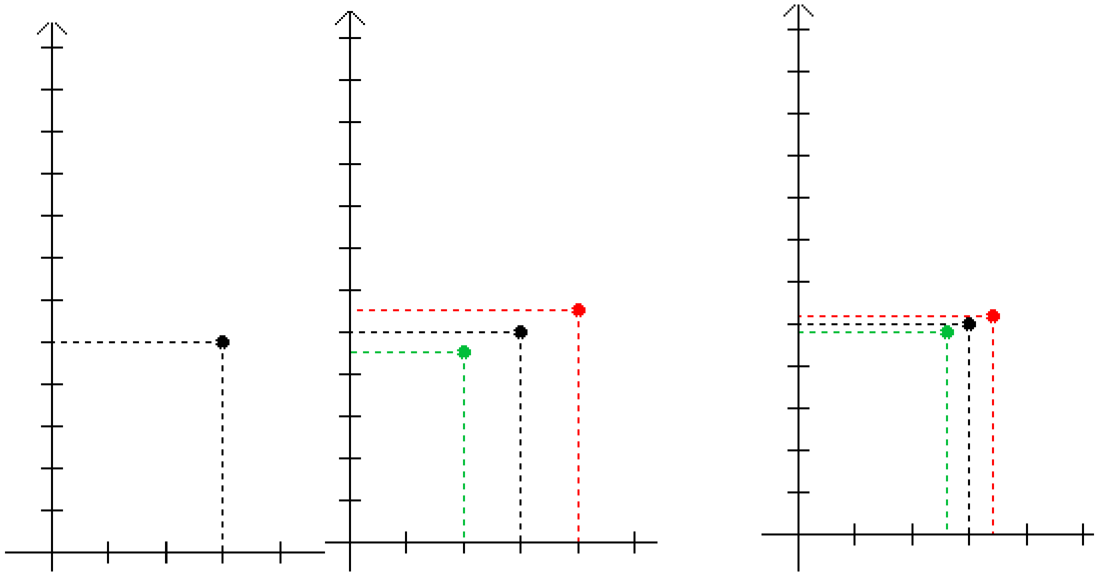


Figura 5.2: Representação gráfica da dupla D

ii) A representação em um único gráfico

A maioria das duplas utilizou apenas um gráfico. Nesse momento, surge a preocupação com instrumentos, como a régua, por exemplo, e a questão da escala a ser utilizada, como observado no discurso da dupla A[16].

30. J: tem uma régua?
31. G: nessas folhas eu posso por qualquer coisa, né?
32. obs: pode, pode rascunhar à vontade.
33. G: vamos por os dados do a, b e c .
34. J: se gasta 50 reais igual a 30 minutos
35. G: a equação que a gente achou ypslon é igual a meio de xis mais trinta e cinco.
36. J: na b?
37. G: a gente achou uma variação de 10 minutos.

[...]

40. J: no c deu quatro minutos para uma variação de dois reais

[...]

73. G: uma variação de quatro minutos equivale uma variação de dois reais no eixo y.
74. J: isso!
75. G: beleza!
76. J: tá mais perto de trinta

iii) Representação gráfica – função linear

[16] Protocolo na íntegra (anexo I)

Algumas duplas observaram que a relação era constante, pois, a função era linear. A dupla B, por exemplo, apresentou o esboço gráfico e verificou que a variação obedecia a uma função linear. Então a dupla representou os pontos e esboçou a reta que passava por estes pontos, conforme ilustra a figura 5.3.

66. *Y*: só que ele já começa de 35
67. B: sim,
68. Y: de 26 é 48
69. B: de 26 é quarenta e oito reais de 34...
70. Y: não de 30, né:
71. B: 30 minutos, ah é 30.
72. Y: de 30 dá ...
73. B: 50 reais

[...]

78. Y: vai continuar aumentando né, de 34 vai dar
79. B: 52. Isso. Só né,
80. Y: agora é só traçar
81. B: tem 55 né? será que só isso? o que acontece com a variação do tempo quando está em torno de 50?
82. Y: cada vez mais estreita

[...]

85. Y: permanece constante, né, não ...
86. B: a variação né?

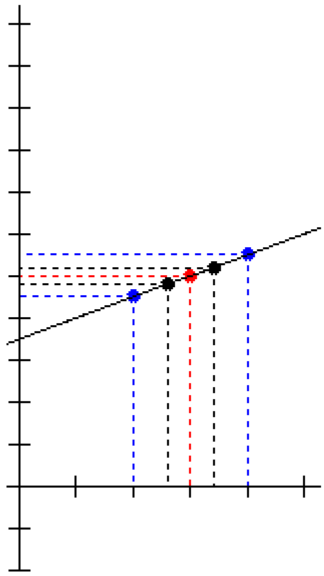


Figura 5.3: Representação gráfica da dupla B

iv) Surge a idéia de limite

A dupla A representou o gráfico acima, apenas pontualmente, não esboçou a reta que passa por esses pontos. Ao discutir o que está acontecendo geometricamente, e lendo a apostila texto usada na disciplina surgiu a idéia de limite.

82. J: de 48 à 52 reais, aqui.
83. G: qual a pergunta que ele faz?
84. G: o que acontece com a variação do tempo quando a fatura está numa faixa cada vez mais estreita em torno de cinqüenta?
85. J: cada vez mais próximo de trinta, é obvio!
[...]
88. G: a primeira variação era cinco pra cá, cinco pra cá. Se diminuiu ..a variação aqui em y diminuiu, quer dizer se diminuiu o tempo também diminuiu a variação em torno de cinqüenta.
89. J: isso.
90. G: então pode colocar ali ela fica cada vez mais ...a variação do tempo fica cada vez próxima de trinta minutos.
[...]
96. G: essa é a idéia, né? Limite...

d) A relação entre δ e ε - Análise a posteriori

e) Vamos supor que o cliente deseje ter sua conta, mensalmente, em torno de R$ 50,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno do tempo t=30 ? Você pode denotar a variação do tempo por δ.

Quadro 5.12: Relação entre epsilon e delta

Pela análise das resoluções recolhidas das duplas, e pela observação das discussões em sala de aula, pode-se observar que esse item gerou muita discussão e algumas duplas não conseguiram resolver a questão. Em uma análise geral, pode-se destacar:

- 5 (cinco) duplas deixaram a questão em branco;
- 5 (cinco) duplas encontram a relação genérica entre δ e ε;
- 7 (sete) duplas tentaram de alguma maneira encontrar a relação, através de gráfico, resolução de equações, mas não chegaram ao resultado;

A seguir centra-se a análise por outros pontos relevantes destacados pelas duplas na resolução desse item.

i) A relação tem que ser escrita matematicamente?

As duplas, nesse item, apresentaram bastante dificuldade para expressarem a relação que estava ocorrendo entre δ e ε. A grande maioria conseguia visualizar o que estava acontecendo, mas não formalizar matematicamente. A dupla D[17], por exemplo, não conseguiu estabelecer uma relação algébrica entre δ e ε . Ela conseguiu visualizar graficamente o que

[17] Protocolo na íntegra (anexo IV)

estava acontecendo, então houve uma preocupação da dupla em saber se poderia colocar a resposta usando as próprias palavras para descrever o que estava ocorrendo. Também fizeram uma representação gráfica da situação, conforme ilustra a figura 5.4..

58. L: tem que ser uma relação matemática?
59. obs: não, pode escrever qual a relação que vocês estão encontrando
60. L: ah, tá [risos]
61. obs: escrevem com as palavras de vocês o que está acontecendo aí. O que vocês entendem com esse erro e com essa relação que existe entre o valor da conta e o tempo utilizado
[...]
66. L: quanto menor a variação do tempo menor será a variação no valor da tarifa.

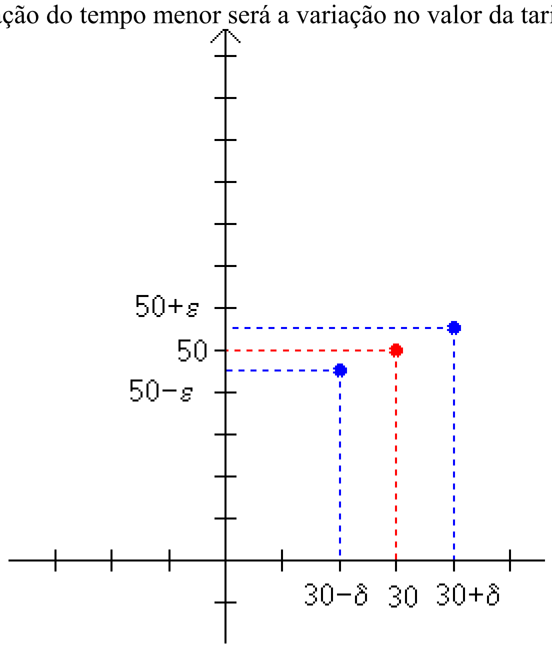


Figura 5.4: Representação gráfica apresentada pela dupla D

Algumas duplas concluíram a questão da variação através do ponto de vista cinemático, ou seja, observaram a variação do tempo em torno de trinta segundos para relacionar com a variação do custo, em torno de cinqüenta reais, evidenciando a dificuldade de relacionar a variação da imagem para o domínio, através do ponto de vista de aproximação. Observem o discurso da dupla anterior, "quanto menor a variação do tempo menor será a variação no valor da tarifa".

ii) Relação é linear

Uma das grandes dificuldades apresentadas pelos pares foi a formalização da relação matemática entre δ e ε. Podemos perceber que as duplas, ao interpretarem o gráfico presente na resolução do item (d) identificavam que a relação entre δ e ε era sempre linear. Apresentamos, a seguir, o discurso da dupla A que evidencia esse fato.

98. G: ele quer a relação dessa variação com esta daqui, oh.
99. G: variação linear...Este vai depender desse.
100. J: podemos colocar que cada vez que varia 4 aqui, varia 2 ali, ou não é ?
101. G: a gente pode saber. A principio parece isso, né?
[...]
133. G: Fale Jonas?
134. J: Eu ainda não consegui visualizar...[inaudível] esta função é linear .
135. G: Quanto epsilon ou delta vai depender mais da inclinação. Se tiver mais inclinado a variação vai ser quase proporcional ...quer dizer, ela é proporcional. Se aumentar um, aumenta um no outro? Ou se aumenta um, aumenta dois no outro?
136. J: a nossa reta ta aqui, oh. Tá cortando em trinta e cinco. To chutando aqui..
137. obs: chutando o quê?
138. G: Chutando o gráfico, o gráfico não está bem..linearizado, bem certinho.
139. obs: ah, tá..
140. J: podemos dizer assim: que o tempo sempre vai o dobro do ...ε
141. G: tá se mostrando assim.... tipo o delta é igual a dois epsilon
142. J: Acho que ao contrário. Acho que eu estou fazendo conta ao contrário
143. G: oh, de 50 temos 30. De 55 tem o 40. Aqui tem uma variação de cinco, aqui tem uma variação de dez. De cinqüenta e dois variação de quatro...tá sempre o dobro.

[...]G: a função é linear.

iii) A familiarização com os símbolos

O item (e) apresentou a inserção de dois símbolos, os quais não eram familiares para a maioria das duplas. Houve uma preocupação de grande parte dos estudantes em saber a leitura correta dessas letras gregas. Teve duplas que apresentaram uma equivalência dessas letras com uma nova notação (variação). A dupla B interpretou o significado do erro. Eles fizeram o uso da representação gráfica para concluir a relação algebricamente.

87. Y: e o tempo representa por e, e não , epsilon . Ali em baixo, aquela letra ali é ...
88. obs: delta
89. Y: delta?
90. obs: é.
91. Y: a variação do tempo por delta. Então o epsilon é o erro né? o erro é em reais. A cada um epsilon, é epsilon este daqui?
92. Obs: é
93. Y: a cada epsilon a variação do tempo é de 2.., é o dobro, né ? (...)
94. B: é , a cada um, vamos dizer reais, que fosse ali , que é epsilon vai ser dois minutos.

[..]

97. Y: sim o dobro. De 45 deu 20

[...]

99. Y: de 48 foi para 26

[...]

95. Y: o tempo é duas vezes...o tempo é duas vezes o ε. É tá certo né?

A dupla D verificou que o símbolo (ε, δ) utilizado era equivalente a uma variação em y e x, respectivamente. Eles denominaram a equivalência como ε=Δy e δ=Δx

39. L: o erro pequeno vai ser o delta x.
40. D: e agora?
41. L: ah, tá! na verdade este é a variação do delta x, aquele é o delta y então ele quer a relação entre delta y e delta x
[...]
48. D: a relação entre delta e epsilon que tá pedindo.

Essa dupla concluiu a relação utilizando o raciocínio do ponto de vista cinemático, ou seja, que quanto mais próximo do tempo t igual a 30 min mais próximo do limite L igual a R$ 50,00, apresentando a seguinte conclusão: "quanto menor a variação do tempo menor será a variação no valor da tarifa" (Dupla B).

5.7.3 Institucionalização da primeira *s*essão

Decorridos quarenta e cinco minutos foi recolhida a atividade da 1ª sessão, descrita acima. A professora começou a discussão da situação problema proposta com a turma. Utilizou como recursos quadro e giz. Resolveu no quadro item por item, utilizando sempre a representação gráfica para a explanação de cada item. No item (a) ninguém apresentou dúvidas quanto à lei da função linear, mesmo aqueles que resolveram sem encontrá-la. A professora colocou no quadro a seguinte função: $f(t) = 35 + 0.5t$, enfatizando que quem colocou outra variável para representar o tempo também estava correto, ela estava denominando de t a variável tempo.

Na explanação do item (b) a professora questionou[18]:

Prof: Como vocês resolveram esse item?
Como a grande maioria tinha utilizado a técnica dos extremos um aluno respondeu:
Aluno: encontra f(t)=45 e f(t)=55
A professora colocou no quadro $55 < f(t) < 45$ e questionou:
Prof: posso dizer que f(t) está nesse intervalo?
Alunos: sim
Prof: quem é f(t)?
Um aluno: é a função encontrada no item (a).
Um Aluno: o intervalo é aberto ou fechado?

[18] notas da observadora

Prof: aberto

Ninguém estranhou a inequação apresentada pela professora, mesmo a maioria não a tendo utilizado na sua resolução. Similarmente, a professora explanou o item (c). A professora nesses itens introduziu o ε e o δ. A professora perguntou:

Prof: qual a relação entre ambos?
Alunos: $\delta=2\varepsilon$.

A professora questionou o que acontece no item (d).

Prof: O que podemos concluir nesse item?
Um aluno: "t tende a 30".

No item (e) a professora esboçou a situação graficamente, e colocou a inequação $50-\varepsilon < f(t) < 50+\varepsilon$ questionando se podia escrever esta inequação assim: $-\varepsilon < f(t)-50 < \varepsilon$ os alunos concordaram pois a professora somente diminuiu 50 em ambos os lados. Então a professora questionou:

Prof:com base no que vocês aprenderam anteriormente, como podemos representar esta inequação?
Um aluno : através de função modular $|f(t)-50| < \varepsilon$.

Com esta situação, a professora começou a introduzir o conceito de limite, comentando a relação entre ε e o δ e o que representam essas variáveis. A professora salientou que, para o estudo de limite, essas variáveis são raios infinitamente pequenos e encerrou a aula dando uma noção do conceito de limite de um ponto de vista informal. Falou que na aula seguinte ela trabalharia mais com a definição e que eles fariam mais exercícios para entender o conceito.

5.7.4 Análise a posteriori da segunda sessão

Esta sessão foi composta por duas situações problema. A seguir, faremos a análise, em particular, de cada situação.

5.7.4.1 Análise a posteriori: primeira situação

Situação 1: Antes de fabricar cilindros para uma área da seção transversal de 58,1cm² para um certo motor você precisa saber qual o desvio que se pode aceitar em relação ao raio do cilindro ideal, que é $x_o = 4{,}3cm$. Além disso, a área transversal pode diferir de no máximo 0,1cm² dos 58,1 cm² necessários. Para que isto aconteça qual o intervalo de variação do raio ? (Dados: a área da seção transversal de um cilindro é dado por $A = \pi$ r²).

Quadro 5.13: Segunda sessão - situação 1

Na seqüência apresentaremos uma análise das considerações mais relevantes que foram observadas e registradas.

- Todas as duplas identificaram a variação do raio;
- Um resultado bem interessante é que 16 duplas encontraram o intervalo de variação do raio, resolvendo a inequação modular $|\pi r^2 - 58{,}1| < \varepsilon$ e tiveram a preocupação de comparar com inequação modular $|r - 4{,}3| < \delta$ para encontrar a relação entre ε e δ;
- Sete duplas colocaram explicitamente os dados fornecidos pelo problema e identificaram as variáveis.
- Outra análise bem pertinente é o fato de que a grande maioria utilizou a variável *r* para representar a função $f(r) = \pi r^2$, quebrando o contrato da variável "*x*" sempre presente nas funções. Apenas uma dupla utilizou a variável "*x*". Acreditamos que, nesse momento, os alunos atribuíram um significado à variável e por isso não tiveram dificuldades de trabalhar com ela;
- Quanto aos recursos gráficos presentes nas resoluções das 17 (dezessete) duplas, 9(nove) apresentaram algum tipo de esboço gráfico, identificando principalmente o $r = 4{,}3$ cuja imagem era 58,1 cm², o ε e o intervalo de variação do raio. Apenas duas destas duplas que esboçaram o gráfico, traçaram o gráfico como uma função linear. As demais não fizeram o traçado do gráfico, apenas identificaram o intervalo de variação nos eixos.

Outras considerações pertinentes são destacadas na seqüência.

i) A identificação das variáveis:

Inicialmente, as duplas tiveram a preocupação de identificar as variáveis presentes no problema. Surgiram dificuldades nesse momento, em algumas duplas, na identificação das variáveis. Algumas duplas evidenciaram dificuldades de identificar o valor de epsilon, como a dupla A[19], por exemplo, conforme ilustra o quadro 5.14. Outras tiveram dificuldades de identificar quem era a função, como por exemplo, a dupla B[20]. Algumas duplas não identificaram quem era a variável "*a*" e na hora da resolução tiveram que fazer a releitura do problema, como a dupla C[21], por exemplo.

1. **G**: a função é aquela ali, da área.
2. **J**: a área ideal seria essa aqui mesmo, né?
3. G: é, a área ideal é 58,1.
4. J: a gente vai colocar como limite, né?
5. G: como o limite.
6. J: isso, aqui seria o epsilon?
7. G: isso!
8. J: Então o epsilon é igual a 0,1.
9. G: aí ele quer saber o delta.

$$f(r) = \pi r^2$$

L= 58,1 cm^2

ε=0,1 cm^2

δ ?

Quadro 5.14: identificação das variáveis apresentada pela dupla A

A dupla B teve dificuldade de identificar a função presente no problema, a qual era a área de uma seção transversal de um cilindro. Inicialmente a dupla imaginou que a função era a área do círculo vezes a altura e então perceberam que essa função era o volume de um cilindro. A discussão da dupla evidencia que a dupla teve dificuldade de perceber a seção transversal do cilindro era um círculo.

16. Y: vamos calcular aqui, né, a área do...círculo. A área do círculo vezes a altura né?
17. B: mais esta área daqui, não é?
18. Y: ah? Porque o diâmetro aqui vai dá, tá vendo o diâmetro aqui dá 8,6 né? então 8,6 dividido por 58,1 que vai dar a altura. A área disso aqui é a área do circulo vezes a altura – a área do cilindro
19. B: daí não é o volume?
20. Y: ah, tá certo!
21. B: a área vezes a altura dá o volume!

[19] Protocolo na íntegra (anexo V)

[20] Protocolo na íntegra (anexo VI)

[21] Protocolo na íntegra (anexo VII)

22. Y: tá certo, tá certo!
23. Y: O que será que ele quer então? Você entendeu?
24. B: a área vezes...
25. Y: é, vai dar o volume.
26. B: mas aí o que tem a ver a área?
27. Y: ai é só o raio então
28. B: só o raio, né? tá complicado!

A dupla C teve dificuldade de identificar raio limite ($r = 4,3$), conforme depoimento apresentado.

17. K: é f(r) vai ser igual πr^2. Aí vamos ter nosso limite como sendo 58,1. Então temos f(r) menos 58,1 é menor que o ε sempre que, então x menos o **a**, que no caso, vai ser a variação da área né?
18. C: da área?
19. K: não, da variação do raio
20. C: isso é o raio?
21. K: não, o x ali, no caso vai ser...
22. C: tem uma função ali.
23. K: isso no caso é o y (área) , e este é o x (raio), né?
24. K: o raio, no caso. Sempre que o raio menos o delta, não o **a**. O **a** a gente não sabe é o que queremos achar, né?
25. C: não sei..
26. K: agora temos que identificar o que é o x e o que é o **a**!
27. C: tá certo
28. K: o **a** vai ser 4,3 e o x vai ser o raio, não é?
29. C: o raio
30. K: sempre que r menos 4,3 for menor do que delta

ii) A estratégia de resolução

A maioria das duplas utilizou a estratégia do conceito de limite para resolver a questão. A dupla A, por exemplo, resolveu, algebricamente, a primeira parte, sem utilizar calculadora, deixando o r em função de raiz, conforme ilustra o quadro 5.15.

25. G: 58,1 menos epsilon menor que pi vezes raio ao quadrado menor que 58,1 mais epsilon
26. G: vamos dividir tudo por pi
27. J: e tirar a raiz
28. G: 58,1 mais epsilon dividido por pi é menor que r ao quadrado que é menor que 58,1 mais epsilon dividido por pi.
29. J: tirar a raiz
30. G: desse lado também
31. G: fica 4,3 menos delta menor que raio que é menor que delta mais 4,3

$-\varepsilon < \lvert f(r) - 58{,}1 \rvert < \varepsilon$ $-\varepsilon < \pi r^2 - 58{,}1 < \varepsilon$ $58{,}1 - \varepsilon < \pi r^2 < \varepsilon + 58{,}1$ $\sqrt{\frac{58{,}1 - \varepsilon}{\pi}} < r < \sqrt{\frac{58{,}1 + \varepsilon}{\pi}}$	Sempre que $-\delta < \lvert r - 4{,}3 \rvert < \delta$ $4{,}3 - \delta < r < 4{,}3 + \delta$
1	2

Quadro 5.15: Resolução da primeira situação apresentada pela dupla C

iii) Aversão aos números irracionais

Como essa questão exigia que os pares trabalhassem com números não inteiros e números não pertencentes ao conjunto dos racionais, houve reclamação por partes de muitas duplas que expressaram aversão por terem que trabalhar com essa situação. Esse comportamento foi registrado, como podemos ver no discurso da dupla D[22], a seguir.

15. D: 58,1 é igual a pi vezes r ao quadrado
16. L: ah , vamos ter que dividir por pi. Não gosto de dividir por pi [risos]
17. D: vamos deixar assim
18. D: será que fica isso?

iv) O abandono da estratégia

A dupla B não conseguiu resolver usando a definição de limite. Então eles abandonaram essa estratégia e retomaram o problema.

53. B: pera aí ...Mas aí é a área do....’
54. Y: o que diz ali oh, é a área da seção transversal é πr^2
55. B: tá, mas o raio é quanto?
56. Y: o raio é 4,3. $(4{,}3)^2$ é...
57. B: mas o que ela quer é a variação do raio, né?
58. Y: através da variação da área que vamos descobrir a variação do raio

A dupla fez a identificação das variáveis, conforme explanado no quadro 5.16 e utilizou a calculadora para fazer os cálculos.

---
[22] Protocolo na íntegra (anexo VIII)

$A = \pi R^2$ $R = 4{,}3$ $A_1 = 58{,}2$ $A_2 = 58$	$R_1 = \sqrt{\dfrac{58}{\pi}} = 4{,}2967$ $R_2 = \sqrt{\dfrac{58{,}2}{\pi}} = 4{,}3041$

Quadro 5.16: Resolução da primeira situação apresentada pela dupla B

v) O questionamento do valor do delta

As duplas que usaram a estratégia do conceito de limite tentaram comparar as inequações para encontrar o valor de delta, conforme tinham feito na primeira sessão. Nessa atividade envolvia uma função linear e no caso a função não era linear. Isso gerou muita discussão nas duplas. Quando as duplas resolviam as inequações e faziam a comparação encontravam dois valores distintos para delta, conforme ilustra o quadro 5.17.

87. G: acho que pode igualar porque esse implica neste. Então vai dar o delta relativo ao epsilon igual a 0,1. Já existe uma relação..
88. G: pode igualar?
89. Obs: qual?
90. G: fazer delta menos 4,3 igual à raiz de 58 dividido por pi.
91. J: porque temos t em ambos.
92. G: Agora podemos fazer a outra igualdade para ver o que dá.
93. J: vai dar diferente. E agora?
94. G: deixa ver: 58 dividido por pi , tira a raiz , daí menos 4,3?
95. J: isso.
96. G: $4{,}14x10^{-3}$ e se fosse desse outro lado?
97. *J*: dá diferente.
98. G: 58 dividido por pi, raiz ... aí 4,3 menos delta igual a 4,29 [bá, ba...]
99. G: é 4,3 menos isso.
100. G: não tá igual!

$\lvert f(r) - 58{,}1 \rvert < \varepsilon$ $-\varepsilon < f(r) - 58{,}1 < \varepsilon$ $-\varepsilon < \pi r^2 - 58{,}1 < \varepsilon$ $58{,}1 - \varepsilon < \pi r^2 < \varepsilon + 58{,}1$ $\sqrt{\dfrac{58{,}1-\varepsilon}{\pi}} < r < \sqrt{\dfrac{58{,}1+\varepsilon}{\pi}}$	$\lvert r - 4{,}3 \rvert < \delta$ $-\delta < r - 4{,}3 < \delta$

Quadro 5.17: Resolução primeira situação apresentada pela dupla A

A questão exigia apenas a variação do raio. A relação genérica entre epsilon e delta não poderia ser efetuada usando a mesma estratégia utilizada nas funções lineares pois se tratava de uma função quadrática. Para isso era necessário estabelecer um valor para delta e após tomar um epsilon mínimo.

vi) A relação com a primeira sessão

Na primeira sessão, a função utilizada no problema foi linear. Na primeira situação da segunda sessão a função não é mais linear. A dupla A conseguiu identificar a diferença de função utilizada na primeira sessão e a função utilizada nessa.

143.obs: qual a diferença que tem entre essa questão e a anterior?
144.G: essa é de segundo grau, quadrática.
145.obs: e a outra?
146.J: era linear

5.7.4.2 Análise a posteriori – segunda situação

Situação 2: Quão próximo de $x_o = 4$ devemos manter x para termos certeza de que $y = 2x - 1$ fique a uma distância menor do que 0,5 unidades de $y_o = 7$? Qual a relação entre ε e δ ?

Quadro 5.18: Segunda sessão - situação 2

- Nessa questão 13 (treze) duplas apresentaram a resolução e 4 (quatro) duplas entregaram em branco. Das duplas que apresentaram a resolução por inequações, apenas três não o fizeram corretamente;
- Ao resolver a situação problema houve uma preocupação muito significativa em associar $|f(x) - L| < \varepsilon$ com $|x - a| < \delta$ seja com linguagem natural ou matemática.
- A identificação das variáveis explicitamente, na resolução apareceu somente nas folhas de quatro duplas. As demais colocaram diretamente a resolução, evidenciando que a maioria dos alunos não tem o hábito de identificar as variáveis presentes no problema;
- O esboço de gráfico foi explanado por 7 (sete) duplas, sendo que três destas esboçaram a função como linear;

- Um ponto importante dessa questão foi que a maioria que resolveu a questão encontrando a resposta de um δ = 0,25 para um ε= 0,5 apresentou a relação genérica $\varepsilon = 2\delta$. Dez duplas apresentaram esta generalização.

Na seqüência são discutidos, detalhadamente, alguns pontos observados.

i) Identificação das variáveis

Dentre as duplas que identificaram as variáveis podemos perceber que estas já utilizavam os símbolos presentes na definição de limite, evidenciando os dados fornecidos pelo problema. Ao identificá-los algumas duplas perceberam que o erro (ε) não era o mesmo utilizado na primeira situação, como ilustra o discurso, da dupla A[23].

1. G: quão próximo de x igual a 4 devemos manter x para termos certeza de y=2x+1 fique a uma distância menor que 0,5 unidades de y=7. Qual a relação entre ε e δ?
2. J: aqui já é outro epsilon.
3. G: isso. Epsilon é igual a 0,5. O limite?
4. J: o limite é 7.
5. G: isso,7.
6. J: o a é 4?
7. G: isso, o a é 4. e a função é y=2x+1
8. J:é igual fizemos, anteriormente..

ii) A estratégia do limite

A maioria das duplas utilizou a estratégia da definição do limite. Algumas duplas apresentaram a relação entre ε e δ de maneira genérica, como mostra o quadro 5.19.

9. G: vamos lá: menos epsilon menor que f(x) menos l menor que epsilon sempre que x menos a menor que o delta.
10. G: aqui vamos abrir o f(x): 2x+1 -7 menor que epsilon. Aqui o x que é 4...não o a é 4.
11. G: x menos 4, pode tirar esse módulo já. - δ<x-4<δ.
12. G:- δ+8<2x<δ+ 8 . Aí divide tudo por 2 vai ficar $4 - \frac{\delta}{2} < x < 4 + \frac{\delta}{2}$
13. G: agora é só igualar as duas inequações
14. J: $4 - \delta < x < 4 + \delta$

[23] Protocolo na íntegra (anexo IX)

$4-\frac{\varepsilon}{2}<x<4+\frac{\varepsilon}{2}$	$4-\delta<x<\delta+4$
$\frac{\varepsilon}{2}+4=\delta+4$ $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ $\varepsilon=2\delta$ $\varepsilon=0{,}5 \therefore \delta=0{,}25$	

Quadro 5.19: Resolução da segunda situação apresentada pela dupla A

iii) O abandono e a retomada da estratégia de resolução

Das duplas observadas, verificou-se que a dupla B[24] desistiu de usar a definição e começou a resolver a questão, logicamente, como mostra o quadro 5.20. “O aluno se questionou se 0,5 é a variação, fez contas e achou que deu muito grande então ele apagou e começou a resolver novamente. Utilizaram a apostila, resolveram representar a situação graficamente para ver se conseguiam entender, e entenderam a variação de *x* e *y*” (notas da observadora, Katiani, 2004)

3. B: daí ele pergunta ali quão próximo 4 devemos manter x para termos certeza de que.....tem que ser 0,25, né?
4. Y: é né. [inaudível]. Como chegou a isto?
5. B: se pegar ...é multiplicado por 2 mais um ...0,5 vezes 2, você multiplicou por 2
6. B: se pegar o y igual a 6,5, né , substituir ali 7,5 dividido por 2 dá 3,75
7. Y: ah, é.
8. B: acho que dá pra fazer assim
9. Y: Qual é a relação?
10. B: aí é mais complicado

$6{,}5=2x-1$ $\frac{7{,}5}{2}=x \Rightarrow x=3{,}75$ $\frac{7{,}5+1}{2}=x \Rightarrow x=4{,}25$
$\Delta x=\pm 0{,}25$ $\Delta y=\pm 0{,}5$

Quadro 5.20: Resolução da segunda situação apresentada pela dupla B

[24] Protocolo na íntegra (anexo X)

A dupla expressou graficamente a função, retomou a definição de inequação para resolver a conta, algebricamente. A dupla colocou que x varia de *3,75* a *4,25* , $\Delta x = \pm 0{,}25$ (δ) e y de 6,5 a 7,5 →Δy=± 0,5 (ε) e para estabelecer a relação genérica entre epsilon e delta utilizou a estratégia de inequações, como ilustra os quadro 5.20 e quadro 5.21, respectivamente.

$-\varepsilon < 2x - 1 - 7 < \varepsilon$ $8 - \varepsilon < 2x < \varepsilon + 8$ $\frac{8-\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon + 8}{2}$	$4 - \delta < x < \delta + 4$
$\frac{\varepsilon}{2} + 4 = \delta + 4$ $\varepsilon = 2\delta$	

Quadro 5.21: Resolução da segunda situação apresentada pela dupla B

5.7.5 Institucionalização da segunda sessão

Decorridos 30 minutos, os alunos entregaram a resolução das atividades propostas nessa sessão e iniciou-se a discussão da atividade com a professora, utilizando o quadro como recurso para corrigir as duas situações apresentadas. Na primeira situação os alunos ajudaram a professora a encontrar o valor do intervalo do raio, já que a professora não dispunha de calculadora.

Posteriormente, a professora resolveu a segunda situação no quadro proporcionando a seguinte discussão, conforme ilustra o quadro 5.22:

Prof: Quem é a nossa função? Alunos: y=2x-1 Prof: quem é o nosso a? Alunos: 4 Prof: qual o nosso valor limite? Alunos: 7 Prof: qual o valor de ε? Alunos: 0.5. Prof. O que queremos encontrar? Alunos: o delta.

Quadro 5.22: Questionamento realizado pela professora
Fonte: Nota da observadora

O quadro 5.23 ilustra a explanação no quadro realizada pela professora:

$\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ $\lvert 2x-1-7\rvert<0.5$ $\lvert 2(x-4\rvert<0.5$ $\lvert x-4\rvert<0.25$	$\lvert x-a\rvert<\delta$ $\lvert x-4\rvert<\delta$ $[ii]$
[i]	[ii]
De [i] e [ii] podemos concluir que δ=0.25. Logo podemos afirmar que para um ε=0.5 temos um δ=0.25	

Quadro 5.23: Resolução apresentada pela professora
Fonte: nota da observadora

Após isso, a professora chamou atenção, dizendo que se mudasse o valor do ε ter-se-ia outro valor para δ. Um aluno questionou se poderia usar o ε de maneira genérica e substituir somente no final. Outros alunos questionaram se poderiam abrir o módulo para trabalhar com a inequação. A professora salientou que essa era uma maneira de resolver e que outras estratégias também poderiam ser usadas.

Então a professora da classe aproveitou os resultados para definir formalmente, o conceito de limite. Começou salientando que na situação proposta a função era linear, mas que poderia ser qualquer outra, também destacou que o valor do ε=0.5 poderia ser outro e então questionou como poderia colocar de maneira genérica esta situação. Alguns alunos sugeriram:

$\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ quando $\lvert x-a\rvert<\delta$

Então a professora questionou se os valores de ε e δ poderiam ser negativos. Após a discussão em classe, concluíram que esses valores eram positivos, pois se tratavam de raios.

E então a professora explanou no quadro:

Para todo ε>0 existe um δ>0 tal que $\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ sempre que $\lvert x-a\rvert<\delta$. E questionou se estava correta essa colocação. A classe concordou e então a professora proferiu: essa é a famosa definição de limite.

Explicou que esta definição encontrava-se na apostila (que eles tinham em mãos) e que o conteúdo começou, na apostila, com a definição, e acrescentou, ainda, que os exemplos foram trabalhados com eles com o intuito de compreenderem essa definição, resgatando os conteúdos de inequações e funções modulares, já estudados anteriormente. Falou que uma das coisas bastante trabalhadas com o limite é a demonstração, então ela fez um exemplo simples, de uma função linear, procurando estabelecer a relação entre ε e δ. A função trabalhada foi demonstrar que $\lim_{x \to 2} 2x + 1 = 5$

A turma não apresentou neste momento, nenhuma resistência, apenas um aluno questionou se o valor do δ sempre iria ser 2ε, então a professora argumentou que dependia da função em questão e mostrou os exemplos trabalhados anteriormente onde apareceram relações distintas.

E então, finalmente, foi proposto à turma um exercício envolvendo a definição de limite.

5.7.6 Análise a posteriori da terceira sessão

Prove que $\lim_{x \to 1}(5x - 1) = 4$

Quadro 5.3: Terceira sessão

Na análise dessa questão, a qual envolvia diretamente a definição de limite em uma demonstração, podemos destacar os seguintes pontos:

- Todas as duplas resolveram a questão e encontram a relação $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$;
- Apenas uma dupla, ao resolver a inequação modular trocou, o sentido da inequação $|x - 1| < \delta$ por $|x - 1| > \delta$
- Na resolução desta questão, 13 (treze) duplas utilizaram a propriedade dos módulos (o produto dos módulos é o módulos dos produtos) para comparar as inequações modulares e estabelecer a relação entre ε e δ. As demais não

utilizaram essas propriedades, resolveram através de inequações, e compararam as duas inequações para estabelecer a relação ente ε e δ;

- Também houve uma grande preocupação das duplas de expressarem formalmente o conceito de limite antes da resolução algébrica.
- Dez duplas, após encontrar a relação entre ε e δ, tiveram a preocupação de escrever a conclusão dessa, utilizando linguagem corrente ou até mesmo linguagem matemática.

i) A correspondência das notações

Como a classe estava com a apostila de Cálculo I, utilizada como referência texto nas aulas, alguns alunos observaram que a notação utilizada para representar o limite, nessa apostila, era o b, enquanto a professora estava utilizando o L. “A dupla B verificou essa diferença e a correspondência entre as notações b e L” (notas da observadora, Ivanete 2004).

ii) Resolução – o formalismo

Foi possível constatar que as duplas resolveram a questão num tempo bastante pequeno. Em apenas cinco minutos todas as duplas já haviam concluído a questão. Em geral, foram bastante rigorosos no formalismo, anunciando sempre as condições da definição do limite. Podemos destacar como exemplo, a resolução apresentada pela dupla C no quadro 5.24.

Dado ε>0 existe δ>o tal que $\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$ sempre que $\lvert x-a\rvert<\delta$	
$\lvert 5x-1-4\rvert<\varepsilon$ $\lvert 5x-5\rvert<\varepsilon$ 1) $-\varepsilon<5x-5<\varepsilon$ $5-\varepsilon<5x<\varepsilon+5$ $1-\frac{\varepsilon}{5}<x<\frac{\varepsilon}{5}+1$	2) $\lvert x-1\rvert<\delta$ $-\delta<x-1<\delta$ $1-\delta<x<\delta+1$
De 1 e 2 $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ $\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=4$	

Quadro 5.24: Resolução da terceira sessão apresentada pela dupla C

5.7.7 Institucionalização da terceira sessão

Após a entrega dessa tarefa não houve mais discussão com a turma, pois a aula estava sendo encerrada e a institucionalização do objeto de estudo já havia ocorrido na segunda sessão. A professora questionou à classe se havia ficado alguma dúvida a respeito da relação entre δ e ε. Ninguém apresentou, naquele momento, nenhuma indagação. A professora encerrou a aula dizendo que na aula seguinte eles trabalhariam bastante com esse conceito e que era de fundamental importância que eles o compreendessem bem.

5.8 SÍNTESE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

A análise dos resultados da aplicação da seqüência didática mostrou uma evolução positiva no entendimento do conceito de limite, através das resoluções das situações problema propostas nessa classe. Os alunos mostraram-se interessados na aplicação desse método e assumiram com responsabilidade as regras pertinentes ao contrato estabelecido. Resolveram as questões propostas, questionaram e sanaram suas dúvidas na institucionalização do conteúdo.

Ao ser construído, por meio das situações problemas, o conceito formal do conceito de limite, os alunos não demonstraram nenhum tipo de "aversão" ao formalismo matemático em questão. A seqüência proposta explorou bastante a relação entre ε e δ, atribuindo-lhe um significado. Também resgatou o conteúdo de funções modulares, conceitos previamente estudado por eles.

Na 3ª sessão proposta, uma situação de demonstração, onde freqüentemente os alunos apresentam dificuldades de resolução, percebemos a rapidez da aplicação do conceito de limite na resolução dessa questão. Todos os alunos apresentaram a relação entre ε e δ corretamente.

É importante observar que, mesmo numa situação contextualizada, o aluno sente a dificuldade de trabalhar com quantidades infinitamente pequenas e que a construção do conceito ocorreu paralelamente com a mediação da professora da turma. Portanto, a atuação do professor neste processo é de fundamental importância, pois o professor age como um mediador. O professor não anuncia um conceito final, como pronto e acabado, mas instiga, questiona, provoca o aluno, para que através dos conhecimentos adquiridos anteriormente ele consiga construir um novo conhecimento.

Esta seqüência não teve como intenção resolver todas as mazelas do processo de ensino e aprendizagem de limite. Sabemos que isso é utópico, apenas nos preocupamos em tentar sanar algumas dificuldades mais evidentes oriundas da ruptura do conceito de limite do ponto de vista de aproximação e cinemático. Como nos livros didáticos são mais abordadas as contextualizações cinemáticas, nos preocupamos com a definição pela aproximação. Nosso objetivo principal era que os alunos entendessem a relação entre δ e ε. Acreditamos, que ao final desta seqüência, este objetivo foi atingido, nos embasando nos resultados dos protocolos dos alunos, nos relatórios das observadoras e nas palavras da professora da turma "Sempre foi presente, anteriormente, à aplicação deste método, os seguintes questionamentos":

> 1. Quem é o δ e ε, qual o seu significado.
> 2. Por que definir δ em relação a ε.
> 3. Por que achar $x+\delta$ e $x-\delta$, sendo que em funções atribuímos valores a x e definimos y.
>
> Após a aplicação deste método esse tipo de pergunta não foi feita nesta turma, ficou bem claro para eles a relação entre funções modulares, inequações e intervalos em limite por definição (....) verifiquei que este método foi de grande valia e que os alunos só saíram ganhando em conhecimento" (SILVA[25], 2004)

Em virtude do exposto, torna-se interessante promover e aplicar seqüências didáticas que facilitem o processo de ensino aprendizagem do conceito de limite. Um dos grandes desafios é potencializar e disponibilizar essa atividade através de seqüências que envolvam o conceito de limite sob os dois pontos de vista: o cinemático e de aproximação.

Segundo Santos e Bianchinni (2004) muito se tem falado das inúmeras possibilidades potenciais que se abrem no processo ensino e aprendizagem, a partir da introdução do

[25] Depoimento de Maria Bernadete da Silva, professora da turma.

computador como um poderoso recurso didático. Desde sua popularização, o grande desafio que enfrentamos, é descobrir a maneira adequada de canalizar este potencial de modo a obtermos um salto qualitativo na aprendizagem de matemática, de um modo geral, e do cálculo, em particular.

O progresso da Inteligência Artificial (IA) abriu o caminho para uma nova corrente de investigações dedicadas ao desenvolvimento de ambientes informáticos para a aprendizagem humana. O papel da IA no campo da didática não é o de se comportar como um professor, mas o de criar condições favoráveis à construção, pelo aluno, de conhecimentos aceitáveis referentes a um objeto de ensino, assegurando-lhe feedbacks permanentes (BALACHEFF, 1994).

Nossa escolha, ao trabalhar com os recursos da IA, repousa sobre uma segunda hipótese de pesquisa:

[H2]- Com a utilização de um sistema tutorial inteligente é possível desenvolver um ambiente de aprendizagem onde os estudantes consigam superar as dificuldades relativas ao conceito de limite.

Essa hipótese nos leva as seguintes indagações já mencionadas no primeiro capítulo.

[Q2a] - A utilização de um ambiente computacional poderá fornecer mecanismos com o intuito de minimizar os obstáculos do conceito de limite do ponto de vista de aproximação e cinemática?

[Q2b] - Que contribuições podem advir da utilização de recursos da Inteligência Artificial no processo de ensino e aprendizagem da definição de limite?

Inicialmente, vamos buscar uma fundamentação teórica nos pressupostos teóricos de Inteligência Artificial e Sistemas Especialistas para então, desenvolver uma seqüência didática do conceito de limite, num ambiente informatizado.

6. INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL E SISTEMAS ESPECIALISTAS

6.1 INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

Segundo Russel & Norvig (1995), a Inteligência Artificial (IA), busca entender e construir entidades inteligentes, sendo que uma das razões de seu estudo é aprender mais sobre nós mesmos. Outra, é que a construção de entidades inteligentes é interessante e útil. Schalkoff (1990, apud RUSSEL & NORVIG, 1995) define a IA como um campo de estudo que tenta explicar e simular o comportamento inteligente em termos de processos computacionais.

Atualmente, a IA engloba uma grande variedade de sub campos, desde áreas de propósitos gerais, tais como percepções e raciocínio lógico, até campos específicos de tarefas tais como: jogar xadrez, provar teoremas matemáticos, escrever poesias e diagnosticar doenças. Freqüentemente, cientistas de várias áreas movem-se gradualmente na Inteligência Artificial, onde encontram as ferramentas e o vocabulário para sistematizar e automatizar as tarefas intelectuais em que se têm ocupado durante boa parte de suas vidas. Similarmente, os cientistas da IA podem escolher e aplicar seus métodos em algumas áreas que tenham a ver com o esforço do intelecto humano (RUSSEL & NORVIG, 1995).

Nós estamos interessados na aplicação dos recursos da Inteligência Artificial na Educação. Integrar os recursos tecnológicos aos procedimentos pedagógicos pode constituir-se um recurso em potencial para minimizar deficiências encontradas no processo de ensino-aprendizagem do nosso objeto de estudo.

De acordo com Woolf (2002), o objetivo das pesquisas de IA em educação é :

- Aprendizagem adaptada, individualmente, ao estudante;
- Aumento de *feedback* interativo;
- Identificação de componentes cognitivos da aprendizagem;
- Identificação de estilos de ensino efetivos;
- Aumento de reflexão, síntese e seleção.

De acordo com Balachef (1994), o progresso da IA abriu o caminho para uma nova área de investigações dedicadas ao desenvolvimento de ambientes informáticos para a aprendizagem humana. Esta corrente foi designada pela comunidade francesa como "ambientes interativos de aprendizagem com o computador". O papel da IA no campo da didática será o computador atuando como um "tutor", nas mãos do professor, capaz de criar condições favoráveis para a construção do conhecimento, pelo aluno, com referência a um objeto de ensino, dando-lhe freqüentes feedback.

Para definirmos em que campos a IA pode ser usada no ensino, devemos considerar quais são os agentes envolvidos no processo. Segundo Barreto (1997), os agentes são:

- Que ensinar? A matéria.
- Quem deve aprender? O aluno.
- Quem rege o processo de ensino? O professor.

A cada um destes agentes corresponde um nível de uso da IA. Assim, estes níveis são: o módulo da matéria, o módulo do aluno e o das estratégias de ensino. Cada um destes níveis de possibilidade do uso da IA corresponde a técnicas particulares e necessidades freqüentes diferentes, interagindo com diversos campos de conhecimento. Uma das aplicações mais significativas da Inteligência Artificial no ensino é o desenvolvimento de Sistemas Especialistas.

6.2 SISTEMAS ESPECIALISTAS

6.2.1. Introdução

Uma das aplicações que se destacam no campo da Inteligência Artificial é a construção dos Sistemas Especialistas (SE). Estes são programas de computador planejados para adquirir e disponibilizar o conhecimento operacional de um especialista humano.

Os SE surgiram na década de setenta, sendo que o objetivo dos cientistas da Inteligência Artificial era desenvolver programas de computador que pudessem em algum sentido "pensar", isto é, resolver problemas de uma maneira que seriam considerados inteligentes se fossem feitos pelo homem. Os SE são frutos de mais de vinte anos de pesquisa, e seu uso tem se difundido por vários países e contemplando diversas áreas, entre as quais podemos citar interpretação de dados, simulação, diagnóstico, projeto, planejamento, monitoramento, reparo, instrução e controle.

Segundo Fasuga e Sarmanova (2005) os sistemas especialistas são conhecidos como programas ou aplicações que contêm informações e procedimentos definidos por um especialista. Esses sistemas podem ser divididos como sistemas de diagnóstico e sistemas de planejamento. Os sistemas de diagnósticos usam conhecimentos antecedentes para diagnosticar possíveis saídas. Os de planejamento têm uma entrada precisamente definida e resultado baseado em contribuições atuais. Para a área educacional é interessante a combinação híbrida desses sistemas. O diagnóstico simula o comportamento do professor ao analisar o conhecimento do estudante. O sistema de planejamento representa um ótimo caminho de explanação, pois sabe o atual conhecimento do estudante e lista os termos necessários para o domínio corrente.

6.2.2. Características de um Sistema Especialista

Uma das características importantes nos Sistemas Especialistas é a separação do conhecimento dos métodos gerais que são usados para manipular este conhecimento. Essa característica é relevante se a aplicação é voltada ao ensino, uma vez que cada domínio (área de aplicação) tem sua própria terminologia, relações e procedimentos. Se os aspectos relacionados ao domínio podem ser formulados independentemente, então o desenvolvimento completo de um sistema de ensino pode ser bastante simplificado (KEMP, 1992).

A característica mais vantajosa de um SE é o alto nível de experiência utilizado na solução de problemas. Esta experiência foi resgatada do especialista e armazenada na base de conhecimento. Para representar o desempenho de especialistas humanos, o SE deve possuir não somente um conjunto de informações, mas, também, a habilidade de utilizá-las na resolução de problemas de forma criativa e eficiente. Esta habilidade representa uma série de idéias e regras intuitivas que o especialista utiliza para resolver os problemas, e sua aplicação possibilita, de uma maneira mais econômica, a chegada a soluções aceitáveis, embora nem sempre sejam ótimas.

A flexibilidade do sistema também é importante. O SE pode explicar em detalhes como um novo fato conduz a mudanças e explicar o porquê de determinada conclusão, permitindo ao usuário entender o relacionamento destes com a solução, avaliar os efeitos de novas estratégias ou procedimentos aplicados à solução.

A habilidade de prover treinamento é mais uma característica dos SE. Eles podem ser projetados para fornecer este treinamento desde que contenham conhecimento necessário e capacidade para explicar os processos de raciocínio.

Os SE representam conhecimento de maneira simbólica. Podem-se usar símbolos para representar uma variedade de tipos de conhecimentos, como fatos, concepções e regras. Esta área é estudada formalmente como Representação do Conhecimento.

O conjunto destas características forma um mecanismo muito atraente na implementação de sistemas especialistas voltados à educação, pois possibilitam ao usuário encontrar explanação sobre suas dúvidas, saber onde encontra-se o erro ao navegar pelo sistema, além de possibilitar uma fixação do conteúdo. Assim sendo, temos mais uma ferramenta que pode contribuir na aprendizagem do aluno.

6.2.3. Estrutura de um Sistema Especialista

Antes de analisarmos a estrutura de um sistema especialista, veremos como um especialista resolve um problema. Segundo Durkin (1994), um especialista é a pessoa que tem um conhecimento especializado ou perícia *(expertise)* numa certa área. No campo de SE este conhecimento é chamado de domínio do conhecimento. A palavra domínio é usada para enfatizar que o conhecimento pertence a um problema específico. Um especialista armazena o domínio de conhecimento em sua memória de longo prazo (MLP).

Quando o especialista fornece conselho a alguém, primeiramente obtemos fatos sobre o problema e armazenamos na memória de curto prazo (MCP). Então raciocinamos sobre esse combinando os fatos da MCP com o conhecimento da MLP. Usando esse processo, inferimos a informação nova do problema e chegamos, eventualmente, a conclusão sobre o mesmo. A figura 6.1 ilustra este processo.

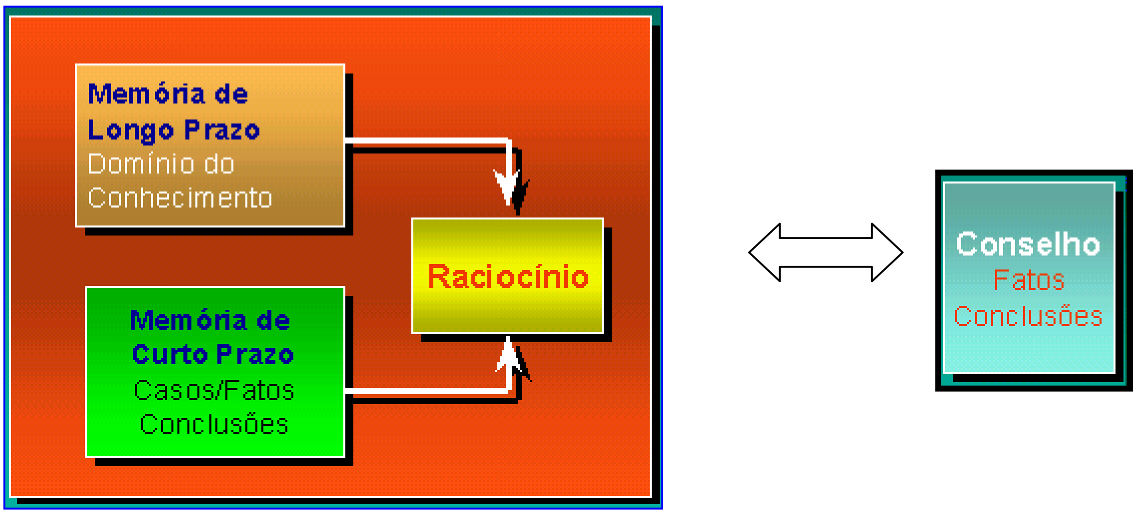


Figura 6.1: Resolução de problemas por especialista humano
Fonte: Durkin (1994)

Para exemplificarmos esse processo, consideramos o problema do diagnóstico de um automóvel. Assumiremos que o seu carro está com problema. Então você procura um mecânico de autos (especialista). Com anos de experiências de seu trabalho este armazenou na MLP os diagnósticos de uma variedade de problemas com carros. Suponhamos que você informou ao mecânico “o carro não dá partida”. O mecânico armazena esta informação em sua MCP e começa a raciocinar com ela. Usando a informação fornecida a ele, junto com seu conhecimento do domínio, este infere que o “problema pode estar na parte elétrica”. E então adiciona esta opinião a sua MCP e continua a raciocinar sobre o problema. Se o teste de bateria for comprovado, o mecânico tem que explanar sua conclusão.

Os SE resolvem os problemas usando um processo que é muito similar aos métodos usados por um especialista humano, e esta estrutura pode ser visualizada na figura 6.2.

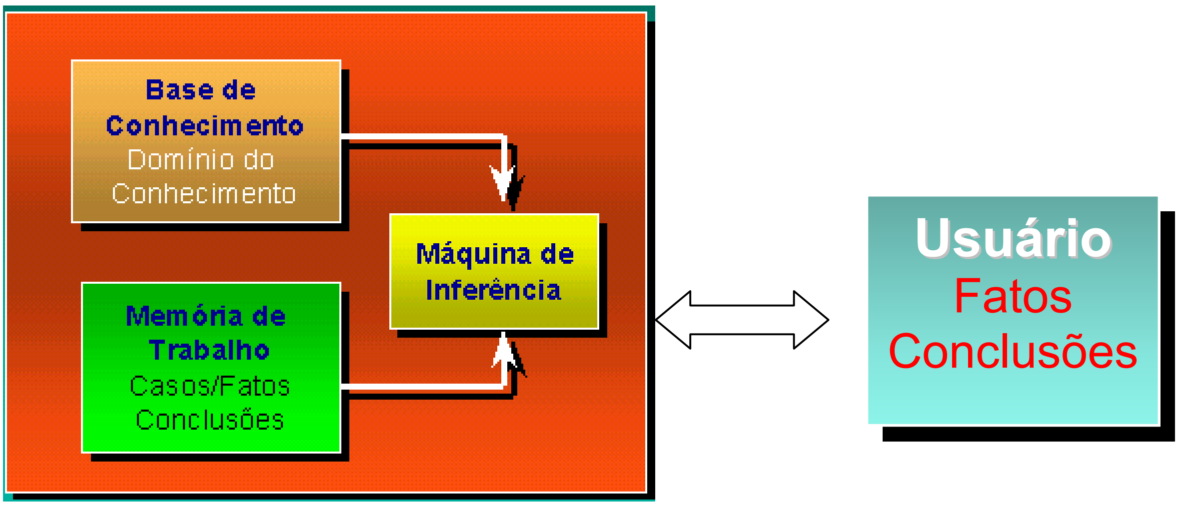


Figura 6.2: Resolução de problemas por Sistemas Especialistas
Fonte: Durkin (1994)

Um SE armazena o domínio de conhecimento de um especialista no módulo conhecido como *Base de Conhecimento*. Essa contém geralmente fatos, que são conhecimento estático do sistema, e regras, que são os conhecimentos dinâmicos do sistema.

A base de conhecimento é a parte de um SE que contém o domínio do conhecimento. Portanto, esse conhecimento precisa ser organizado de uma maneira adequada para que a máquina de inferência consiga tratá-lo convenientemente. O conhecimento é armazenado na forma de fatos e regras. As regras possuem uma estrutura lógica do tipo Se (if) Então (Then).

Um dos problemas mais sérios, e ao mesmo tempo muito comum, encontrado na implementação de Sistemas Especialistas, é que usualmente parece impossível fornecer um conhecimento completo sobre o qual o sistema vai operar. Pode-se dizer que o nível de desempenho de um sistema especialista está relacionado ao tamanho e à qualidade de sua base de conhecimento.

Já a memória de trabalho é a parte do sistema que contém os fatos sobre o problema que é inferido durante a sessão de consulta (DURKIN, 1994).

Durante a consulta com o SE o usuário entra com informação de um problema atual na memória de trabalho. Este sistema relaciona esta informação com o conhecimento contido na base de conhecimento para inferir novos fatos. Estes novos fatos são jogados na memória de trabalho num processo contínuo. Eventualmente, o sistema alcança algumas conclusões que também entram na memória de trabalho.

A máquina de inferência está relacionada com o raciocínio humano.

Nos sistemas especialistas, a máquina de inferência é o processador do sistema que faz o casamento dos fatos, contidos na memória de trabalho, com o domínio do conhecimento contido na base de conhecimento, para inferir uma conclusão (DURKIN, 1994).

A máquina de inferência, de certo modo, tenta imitar os tipos de pensamento que o especialista humano emprega quando resolve um problema, ou seja, ele pode começar com uma conclusão e procurar uma evidência que a comprove que consiste no encadeamento para trás (*backward chaining*), ou pode iniciar com uma evidência para chegar a uma conclusão, denominado encadeamento para frente (*forward chaining*).

O mecanismo de explanação é o que permite responder ao usuário perguntas do tipo por que e como. Este é um aspecto muito importante dos SE, pois permite justificativas que apresentem ao usuário a solução do problema ou conclusões a que se chegou de modo claro e explicativo.

A interface com o usuário visa facilitar a comunicação entre o sistema especialista e o usuário. Permite a interação com o sistema através da entrada de fatos e dados e através da saída em forma de perguntas, conclusões e explicações.

Muitos princípios baseados nas teorias cognitivas têm sido propostos para projetos de interface, como resultado de pesquisas na área de interação homem-máquina. Uma das considerações principais no projeto de qualquer interface homem-máquina deve ser a facilidade de uso, reduzindo ao máximo a carga cognitiva sobre o usuário.

6.2.4. Pessoas envolvidas na construção de um Sistema Especialista

Os principais componentes envolvidos na construção de um Sistema Especialista são: o Especialista, o Engenheiro do Conhecimento, a ferramenta para construção do SE e o usuário.

O Especialista é uma pessoa capaz de produzir boas soluções para problemas em um campo específico. O especialista utiliza estratégias para tornar a pesquisa de uma solução mais eficiente e o SE modela estas estratégias. Podemos destacar algumas qualificações necessárias ao especialista: domínio do conhecimento, comunicação do conhecimento e tempo disponível. Embora o SE geralmente modele um ou mais especialistas, ele pode também conter conhecimento especialista de outras fontes, como livros, artigos etc.

O Engenheiro do Conhecimento é uma pessoa, geralmente, com algum conhecimento em computação e IA, capaz de construir um SE, mas também pode ser um psicólogo, um diplomata, um pesquisador entre outros. O Engenheiro do Conhecimento entrevista o especialista, organiza o conhecimento, decide como ele deve ser representado e pode ajudar programadores na construção do sistema.

A ferramenta é uma linguagem de programação usada pelo Engenheiro de Conhecimento ou programador para construção do SE. Esta ferramenta difere das linguagens de programação convencionais por prover maneiras mais adequadas para representar conceitos complexos e de alto nível. No modelo desenvolvido neste trabalho foi utilizada a ferramenta computacional Kappa. A descrição da mesma se encontra em anexo (ver em Anexo XII).

O usuário é o humano que utiliza o SE.

6.2.5. Representação do conhecimento

A Representação do conhecimento consiste de métodos usados para modelar os conhecimentos de especialistas em algum campo, e colocá-los de maneira acessível na base do conhecimento de um SE para serem acessados pelo usuário, ou seja, é uma combinação de estruturas de dados e procedimentos interpretativos que, se usados corretamente em um programa, terão uma conduta inteligente.

Psicólogos e cognitivistas têm elaborado várias teorias para explicar como os humanos resolvem problemas. Estes trabalhos descrevem como o conhecimento humano é comumente usado, como é mentalmente organizado e como é utilizado de maneira eficiente para resolver problemas. Pesquisadores da IA têm usado os resultados destes trabalhos para estudar e desenvolver técnicas para melhor representar os diferentes tipos de conhecimento no computador (DURKIN,1994).

Não há uma única teoria para explicar a organização do conhecimento humano ou a melhor técnica para estruturar os dados em um computador convencional. Uma das maiores responsabilidades do Engenheiro do Conhecimento é escolher a melhor técnica de representação que se adapte à aplicação.

A maioria dos pesquisadores de IA assume que *o que* precisa ser representado é conhecido a priori. O trabalho desses pesquisadores é justamente imaginar *como* codificar a informação em uma estrutura de dados e procedimentos do sistema. Para chegar a uma solução o pesquisador deve, de antemão, saber qual a espécie de conhecimento envolvido no problema. Isso é necessário para que a representação de conhecimento seja completa, concisa, transparente e computacionalmente eficiente para ser tratada.

Conforme Durkin (1994), as formas de representação de conhecimento mais comumente usadas em IA são as seguintes: Objeto-Atributo-Valor (O-A-V), Regras, Redes Semânticas, Frames e Lógica. O desenvolvimento de um SE com formas de representação do conhecimento híbridas pode ser visto como uma solução adequada, pois podem combinar as vantagens dos formalismos por ele utilizados. Para desenvolvimento do modelo computacional em questão, utilizou-se a representação de conhecimento de Regras e Frames, já que este foi desenvolvido numa ferramenta computacional que apresenta a integração dessas duas representações.

As características dos sistemas especialistas descritas servem perfeitamente para ser adaptada para a construção de sistemas tutoriais inteligentes. Em pesquisas recentes os sistemas especialistas que abrangem a área educacional têm sido denominados como Sistemas Tutorias Inteligentes.

6.3 SISTEMAS ESPECIALISTAS DO PONTO DE VISTA EDUCACIONAL

A idéia de utilizar máquinas como ferramentas educacionais é anterior ao próprio aparecimento dos computadores. Essa idéia ganhou força quando o acesso a essas máquinas se tornou viável. O desenvolvimento dos primeiros sistemas surgiu na década de 50 e foram denominados de CAI (*Computer Aided Instruction*/Instrução Assistida por Computador). Esses sistemas apenas apresentavam o conteúdo, não motivavam nem instigavam os alunos. Portanto, ficou em evidência que era necessário inserir "inteligência" nos softwares educacionais e então pesquisas e ferramentas utilizando técnicas de Inteligência Artificial começaram a surgir nesse contexto.

Os CAI evoluíram para o ICAI – inteligentes CAI. De acordo com Girafa (1999, *apud* JESUS 2003) agregar um I a sigla CAI não significa apenas agregar técnicas de IA para construção de sistemas tutores, mas inclui trabalhar de forma interdisciplinar com as conquistas que outras áreas de pesquisas obtiveram em relação ao conhecimento da comunicação inteligente, tais como os avanços da psicologia e da pedagogia.

> Atualmente, esta interdisciplinaridade vem sendo aplicada nos chamados Sistemas Tutoriais Inteligentes (STI). Esses sistemas pertencem a categoria de softwares educacionais que se baseiam na aprendizagem interativa. Nesse contexto, o aluno passa ser o centro do processo ensino-aprendizagem, deixando de ser passivo e tornando-se um ser ativo no processo, além de tornar relevante o seu conhecimento atual e as suas características de aprendizado (JESUS, 2003, p.2)

Os Sistemas Tutorias Inteligentes possibilitam ao estudante a capacidade de aprender com um tutor, que serve como guia no processo. Ele deve se adaptar ao aprendiz, e não ao contrário. Com isso, é necessária uma modelagem do aprendiz, para que o STI possa saber o que ensinar, a quem ensinar e como ensinar. De acordo com Marieto (2000, *apud* GUELPELI et al, 2003), o STI deve ser capaz de mudar o nível de entendimento para responder às entradas do aprendiz, em vários níveis e mudar as estratégias pedagógicas de forma individualizada (de acordo com o ritmo e as características de cada aprendiz).

> Os sistemas tutoriais inteligentes agem como um monitor, oferecendo ajuda e sugerindo dicas quando os estudantes encontram dificuldades na resolução de um determinado problema. A aplicação desses sistemas demonstra um impacto positivo no desempenho dos estudantes. Em estudos pilotos, os estudantes que usam tutorias para resolver determinados problemas têm um desempenho maior daqueles que resolvem no ambiente lápis papel (KENNEDY, 2002, p.1, tradução livre).

A estrutura do sistema especialista serve perfeitamente para ser adaptada a construção de sistemas tutoriais, proporcionando um grande potencial para a criação de novos ambientes educacionais. Podemos modelar na base do conhecimento a experiência do especialista (professor) e através da interação possibilitar ao usuário entrar em contato com esta base, oferecer mecanismos de explanação do conteúdo além de armazenar as dificuldades encontradas pelos usuários para uma posterior revisão. Um dos objetivos principais é captar o conhecimento necessário que permita aos especialistas compor uma interação educacional, de modo que este conhecimento seja utilizado. Portanto, é de suma importância que esses sistemas apresentem interações dinâmicas.

Apesar de não existir uma concordância geral da estrutura básica dos STIs, a maior parte dos pesquisadores distingue quatro módulos :

- *Módulo especialista*: possui o domínio do conhecimento do tópico a ser ensinado. É o objeto da comunicação.
- *Módulo Estudante*: usado para avaliar e ou registrar o conhecimento do estudante, levantar hipóteses sobre seus conceitos e estratégias de raciocínio.

- *Módulo Pedagógico*: representa os métodos e técnicas didáticas utilizadas no processo da comunicação de conhecimento. Este módulo também é chamado tutorial, pois decide qual estratégia instrucional deve ser aplicada em um determinado momento.
- *Módulo* Interface: é a maneira como a comunicação será realizada entre o sistema e o usuário.

Segundo Park (1988) o desenvolvimento de um STI requer uma abordagem sistemática para integrar os vários tipos de especialidades dentro de um único sistema. O sistema monitora a performance do estudante e tenta apurar o conhecimento que este detém. Este processo denominado de diagnóstico é realizado pela comparação do estado do conhecimento atual do usuário com o conhecimento contemplado no módulo especialista. Os resultados desta comparação são enviados para o módulo pedagógico, onde as decisões são tomadas sobre como e de que forma a informação será transmitida através da interface para o usuário.

Cada um desses módulos será mais detalhado a seguir.

a) Módulo Especialista

O módulo especialista é fundamentalmente a base de conhecimento, onde estão contidos os conhecimentos sobre o conteúdo específico. Essa base de conhecimento contém os elementos para que o estudante aprenda o conhecimento do domínio e os procedimentos necessários para que ele possa acessá-los na resolução dos problemas. A base de conhecimento deve ser organizada numa arquitetura que permita um trabalho flexível para o processo ensino–aprendizagem (NIEVOLA, 1995).

Várias abordagens para modelar o especialista a representar seu conhecimento têm sido estudadas. A aquisição do conhecimento necessário requer muitas horas de colaboração entre o projetista e o professor. Um modelo mais real do especialista poderá facilitar a comunicação do conhecimento. Um dos grandes desafios dos STI é fornecer uma boa representação do seu domínio, suficientes para o nível desejado de compreensão e, portanto, proporcionar flexibilidade no ensino.

b) Módulo Estudante

Este módulo deve contemplar o sistema armazenando informações sobre o usuário, ou seja, contemplar os aspectos do conhecimento e do comportamento do usuário que tragam conseqüências para o seu desempenho e aprendizagem. Essa é a base para a avaliação das suas respostas e para a seleção de um novo tópico a tratar.

Segundo Jonassen e Wang (1993), a chave para um ensino personalizado e inteligente em um sistema tutorial é, sem dúvida, o conhecimento que o sistema deve ter de seu próprio usuário. A dimensão mais significativa de um STI é sua capacidade para modelar o conhecimento do estudante.

A modelagem do estudante é uma das áreas mais difíceis nas pesquisas de STI, pois este módulo deveria incluir uma representação explícita de todos os aspectos do comportamento e conhecimentos do estudante que se relacionam ao aprendizado. A construção de um módulo como este é bastante complexa. Os meios de comunicação em um computador, quando comparados com a capacidade das pessoas em armazenar e combinar informações, se tornam bastante restritos quando se trata de armazenar informações envolvendo fatores emocionais.

c) Módulo Pedagógico

O objetivo principal do módulo é coordenar as informações sobre o domínio, módulo estudante e o módulo interface a fim de decidir sobre o gerenciamento instrucional. A adaptação da instrução implica em uma escolha didática, que pode ser em nível global ou local (WENGER,1987). Isto inclui orientação no desempenho de suas atividades, explicações dos fenômenos e processos e decisões sobre quais informações serão oferecidas com intuito de suprir a deficiência do estudante. Muitas vezes não é necessário retomar todo o assunto, mas sim é suficiente uma ajuda local, seja esta realizada através de ajuda, dicas e ou outras estratégias.

Existem diversas abordagens pedagógicas em vigência, mas a maioria dos sistemas tende a implementar somente uma. Por isto, estes sistemas não oferecem um rico repertório de maneiras de expor um determinado assunto. Por exemplo, um professor não tem somente uma técnica de explicar um determinado assunto, ele expõe de várias maneiras para atrair o seu público e tornar a aula interessante. Esta deficiência nos sistemas, em parte, deve-se ao fato de que as pesquisas se concentram mais nos problemas de representação de conhecimento e diagnósticos, ao invés dos processos pedagógicos envolvidos no ato de ensinar.

d) Módulo Interface

Este módulo é responsável pela comunicação entre o sistema e o usuário. Na Engenharia de *software,* a interface do usuário tem sido uma preocupação importante dos projetistas quando estão discutindo a criação de um sistema, pois, conforme Hix & Hartson (1993) "para os usuários, a *interface* é o próprio sistema".

Muitos princípios baseados nas teorias cognitivas têm sido propostos para projetos de *interfaces*. Devemos salientar que a interface não é somente importante para a entrada de dados e saída de informações. Ela também complementa dados importantes sobre o processo da aprendizagem. Neste processo o estudante não aprenderá somente o conteúdo, mas também deverá aprender como utilizar o sistema.

Descrevendo os módulos podemos perceber que construir protótipos de modelos informáticos com uma arquitetura similar aos STI não é uma tarefa simples. No entanto, esta não é uma visão pessimista, pois a arte de ensinar é uma tarefa difícil e o fato de projetar um STI requer uma grande compreensão das várias dimensões envolvidas no processo. Mas se analisarmos a história da tecnologia inserida no âmbito educacional, percebemos que no decorrer do tempo a preocupação dos pesquisadores é a aprendizagem dos alunos. Infelizmente o processo nem sempre é rápido e barato, muitas vezes envolve anos de pesquisas que nem sempre surtem o efeito esperado. Existem ainda vários problemas relacionados ao desenvolvimento dos STI. Podemos citar como exemplos, a falta de um paradigma estabelecido para descrever o processo de aquisição de conhecimento, a incapacidade de um sistema gerar um raciocínio pedagógico inteiramente autônomo, os altos custos entre outros.

Atualmente existe uma quantidade significativa de programas de ensino com o computador, alguns usando em maior ou menor grau, técnicas de IA. Não é nosso objetivo fazer aqui um balanço completo e exaustivo, mas apresentar os trabalhos que alimentam nossa reflexão.

6.3.1. Exemplos de programas de ensino que utilizam os recursos da Inteligência Artificial

Podemos destacar alguns sistemas que são citados na literatura, tais como: o *EXCHECK* (1967)- área de Lógica e Teoria de Conjuntos; *QUADRATIC (1978)*- área de subtração aritmética; *APLUSIX* (1988)- área de manipulação algébrica; *WEST* (1979) – jogo educacional na área de matemática; I*NTEGRATION* (1973) – na área de cálculo;

Os programas LOGO e *Cabri* apresentam uma linguagem de programação que favorece o aprendizado por exploração e descoberta.

De acordo com Pozzebon (2003), o MATHTUTOR, desenvolvido pelo grupo do MathNet, da Universidade Federal de Santa Catarina, pretende apresentar os conceitos de abstração de dados e de procedimentos aos alunos de fundamentos da Estrutura de Informação, aplicada no curso de Engenharia de Controle e Automação. O sistema utiliza tecnologia de agentes cognitivos, aumentando a qualidade sob o ponto de vista pedagógico.

Em nível superior, tem sido muito difundido o uso de software de computação algébrica como *Maple, Derive, Matlab* e ***Mathematica*.** Esses softwares não contemplam uma abordagem pedagógica, mas o professor, através de uma metodologia coerente, tem usado como uma ferramenta auxiliar nas disciplinas de cálculo e álgebra. A maioria desses softwares contempla uma visualização gráfica muito eficiente. Diversos professores já vêm usando estes recursos computacionais na Universidade Federal de Santa Catarina, podemos citar como exemplo, Eger (1998), Gonçalves e Paladini (1998), Paladini et al (1998), Moreira (1999), Taneja (1997) entre outros. Na Universidade Estadual de Santa Catarina a ferramenta *Maple* é bastante utilizada na disciplina de cálculo. Existe um número de trabalho bem expressivo nessa área de várias instituições de ensino, inclusive com apostilas e exemplos disponíveis *online*.

Pelo fato de trabalhar no grupo GEIAAM (Grupo de Estudos de Informática Aplicada a Matemática) da Universidade Federal de Santa Catarina, gostaria de mencionar o desenvolvimento de alguns protótipos de modelos computacionais em nível fundamental, médio e superior, tais como *Paraworld, ApliDer, Séries 98, Ieder 98, Cálmax , Geovetor, Tales 1.0, Poly 1.0,Mr. Math 2000* (GEIAAM, 2005).

Na área específica de Cálculo, podemos destacar algumas referências encontradas na literatura: Shoenfeld (1985) propôs uma estratégia para ajudar a selecionar as técnicas apropriadas para resolver problemas do cálculo de primitiva; Beeson (1989) desenvolveu um sistema especialista que se propunha a ajudar os alunos a resolver problemas de simplificações de expressões, equações trigonométricas, limites, derivadas e integral. Nicaud (1990) construiu um tutorial em cálculo algébrico baseado em resoluções pedagógicas. Delozanne (1992) desenvolveu um sistema baseado em técnicas de IA que possibilitava aos estudantes uma aprendizagem de como saber fazer o cálculo de primitiva, por resolução de problemas e explicações.

Atualmente, ao desenvolver um sistema tutorial inteligente embasado em uma fundamentação teórica e didática, deve-se levar em consideração estratégias que promovam a integração dessas áreas.

Zorita et all (1994, *apud* COSTA e WERNECK, 2004) identificam um conjunto de estratégias envolvidas no processo de tutoria que foram diferenciadas como operativas (guiar o aluno) e didáticas (alcançar os objetivos).

As estratégias operativas são responsáveis por:

- Contextualizar o aluno - manter o aluno informado sobre o ciclo de atividades que está sendo seguido;
- Motivar e manter a atenção dos alunos - lançar estímulos e propostas que ajudem a manter o interesse do aluno durante a navegação;
- Guiar a atuação dos alunos - conduzir a resolução de exercícios fornecendo dicas e ajudas de modo a evitar erros constantes que podem desestimular o usuário.

Nessa linha de pesquisas, experiências da aplicação de softwares têm sido desenvolvidas, principalmente, no que diz respeito a motivar e prender a atenção do usuário durante a navegação. Faz-se necessário que o aluno trabalhe no ambiente lápis–papel e interaja com o software, caso contrário o aluno navega rapidamente pelo sistema, linearmente e sem uma preocupação com a real aprendizagem do conteúdo em questão. Por isso, questões-chave, as quais despertam o interesse e façam com que ele trabalhe no ambiente são de suma importância no processo de aprendizagem(ZUCHI & CONCEIÇÃO, 2003; GOULART, 2002)

As estratégias didáticas têm o papel de:

- Apresentar o conhecimento do domínio – proporcionar uma formação tanto a nível teórico como prático, explicando conceitos, mostrando operações e propondo exercícios.

- Avaliar o conhecimento adquirido – comprovar o conhecimento adquirido através de testes e exercícios práticos.
- Tratar erros – complementar o conhecimento considerado deficiente.

Tchétagni *et al* (2004), apresentam um tratamento para os erros através de um STI baseado em técnicas de reforços. Os sistemas que apresentam reforços podem ajudar o estudante a entender e resolver um determinado exercício, corretamente, após ele ter falhado na resolução. Eles definem dois tipos de reforços: revisão e articulação.

> O modelo do estudante, freqüentemente, revela informações importantes para o processo de diagnóstico. Por exemplo, como interpretar o fato que o estudante não é capaz de resolver um exercício? Falta de atenção ou suposição são, algumas vezes, responsáveis por isso. Entretanto, melhor que empregar um reforço profundo, o sistema pode proceder com uma simples revisão. Enquanto a revisão pode ser vista como um reforço trivial, o aspecto repetitivo força o estudante a relembrar ou revisar um processo de aprendizagem já vivenciada. Quando o problema diagnosticado é um conceito, o sistema pode mostrar os atributos e a importância destes no contexto do problema atual, assegurando a transferência da teoria para a prática (..). A condução da revisão depende das estratégias utilizadas. Aqui nós explanamos duas. A primeira, o tutor revisa as habilidades diagnosticadas e, após o tutor estimula o estudante a responder a mesma questão. Estas estratégias estão integradas no modelo pedagógico do sistema (TCHÉTAGNI et al, 2004, p.960, tradução livre).

O reforço baseado em articulação permite acompanhar o estudante na resolução passo-a passo de um exercício, favorecendo, desta maneira, a construção do conhecimento. A articulação é uma maneira significativa de trabalhar com o erro do estudante. De fato, usando um diálogo, é possível explorar questões com o intuito de realizar um diagnóstico, no contexto do exercício correspondente. Por exemplo, se a identificação ou reconhecimento de um conceito é falho, o sistema pode solicitar ao estudante para enumerar os atributos desse conceito. Se alguns atributos são ausentes ou com valores inválidos, o sistema também pode questionar aos estudantes sobre esses atributos (TCHÉTAGNI et al, 2004, tradução livre).

Esse processo de revisão faz com que o aluno se aproprie do conhecimento específico de cada etapa, antes de passar para a próxima. O fato do aluno apresentar falhas em um tópico específico, pode ser contornado, se o STI conseguir diagnosticar essa falha. Assim, o STI poderá lançar estratégias que permitem ao estudante recordar ou se apropriar desses conhecimentos.

Estas características tornam-se importantes na concepção de um artefato tecnológico para o ensino do conceito de limite. Conseguir diagnosticar as falhas do aluno referentes ao conteúdo em questão e propor alternativas para superar tais dificuldades representam fatores motivadores para o desenvolvimento de uma seqüência de ensino em um ambiente informatizado.

O fato de possibilitar ao estudante uma seqüência do conteúdo de limite, sob os dois pontos de vista, o de aproximação e o cinemático, num tutorial inteligente, pode propiciar ao aluno uma ferramenta em potencial no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo. É importante, que o aluno compreenda o conceito nas duas óticas e consiga estabelecer a relação entre eles. Uma seqüência concebida em um ambiente informatizado poderá contar com recursos, os quais não dispomos numa aula realizada no ambiente lápis-papel, como por exemplo, os recursos de animações que podem ser implementados em um sistema, uma navegação de acordo com o ritmo de cada estudante e *feedbacks* interativos e individualizados. Além disso, o aluno poderá acessar esta ferramenta a qualquer momento, ou seja, independente do espaço limitado de sala de aula.

Na seqüência apresenta-se o desenvolvimento de uma seqüência didática desenvolvida num ambiente computacional utilizando-se as características de um sistema tutorial inteligente descritas anteriormente.

7. DESENVOLVIMENTO DA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA NUM AMBIENTE COMPUTACIONAL

7.1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da seqüência didática no ambiente computacional viabilizou a interseção de duas áreas de pesquisa: teoria das Situações e os recursos da Inteligência Artificial. A teoria das Situações, proposta por Brousseau (1986), proporcionou a fundamentação teórica do desenvolvimento da seqüência didática utilizada na primeira experimentação e após isso, implementada em um ambiente computacional, utilizando os recursos oriundos da Inteligência Artificial.

A aplicação dos recursos da IA no desenvolvimento do protótipo está inserida na área de sistemas especialistas, os quais têm características relevantes para o desenvolvimento de ferramentas educacionais. Através dessas características é possível monitorar a navegação do usuário, oferecer opções de ajuda e direcionar o usuário no sentido de minimizar as dúvidas relativas ao desenvolvimento de um determinado problema.

A seqüência didática implementada contempla três módulos:

a) Um pouco de história do cálculo;
b) Limite do ponto de vista cinemático;
c) Limite do ponto de vista de aproximação.

A implementação foi gerada em duas ferramentas computacionais: o *Kappa*, uma ferramenta específica para o desenvolvimento de sistemas especialistas e o *Flash*, a ferramenta utilizada para o desenvolvimento de animações.

O protótipo foi implementado no sentido de permitir uma navegação aleatória, ou seja, não linear. O usuário pode navegar apenas pelo ponto de vista cinemático, ou de aproximação ou em ambos. Também, se optar, pode realizar uma navegação no sentido linear.

O protótipo, o qual foi nomeado de HOROS, que em grego significa limite, sugere ao professor roteiros de aplicação do software dependendo do objetivo proposto de cada aplicação, bem como a resolução das atividades propostas no sistema. No módulo do professor é necessário uma senha para ativar os recursos disponíveis.

Na seqüência, estaremos descrevendo o Horos mais detalhadamente.

7.2 ESTRUTURA DO HOROS

A figura 7.1 ilustra a estrutura do protótipo Horos.

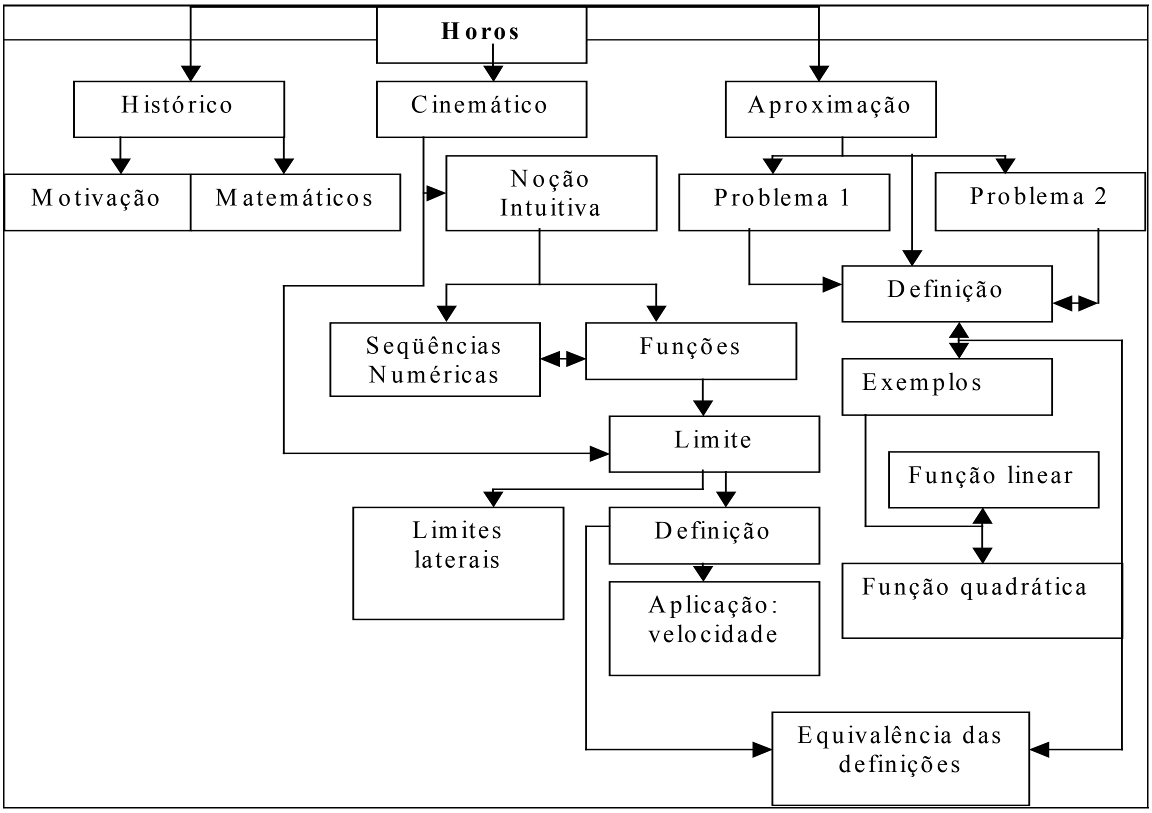


Figura 7.1: Estrutura do Horos

7.2.1. Módulo do histórico

Esse módulo contempla alguns problemas motivadores que envolvem a idéia intuitiva do conceito de limite bem como um pouco da história do desenvolvimento do cálculo. Os problemas têm como intuito motivar o estudo do conteúdo em questão. Podemos citar, como exemplo, a velocidade instantânea de um automóvel e a velocidade de um objeto em queda. No final do módulo do ponto de vista cinemático é proposto ao usuário a resolução desses problemas.

Na parte dos autores envolvidos no desenvolvimento do cálculo contempla-se uma pequena referência dos nomes que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo, tais como: Zenão, Arquimedes, Newton, Leibniz, entre outros, conforme ilustra a figura 7.2.

Figura 7.2: Tela do Histórico

É interessante, ao introduzir o conteúdo de limite, trabalhar com a parte histórica para dar a idéia de elementos infinitesimais e limites no infinito. Essas idéias ficam bem exploradas utilizando o paradoxo de Zenão (problema do Aquiles e a tartaruga) e o problema de cálculo de área e volume utilizado por Cavalieri. Por exemplo, Arquimedes (287-212 a.C) utilizava a idéia de "um número muito grande" para determinar a área de um círculo. Para isso, ele inscrevia um polígono de n lados no círculo para obter a área do mesmo. Arquimedes determinou a área com um polígono de 96 lados, já que os gregos não trabalhavam com o infinito. Após a formalização do cálculo, fez-se o número de lados do polígono tender ao infinito para obter a área do círculo. A mesma idéia está presente no cálculo de volume. Cavalieri (1598-1647) dividia um sólido em seções paralelas para obter o volume, conforme ilustra a figura 7.3. Se utilizar a idéia de n seções, com n tendendo ao infinito, trabalha-se com a idéia de grandezas no infinito e grandezas infinitesimais, já que quando n tende ao infinito a espessura das seções tende a zero.

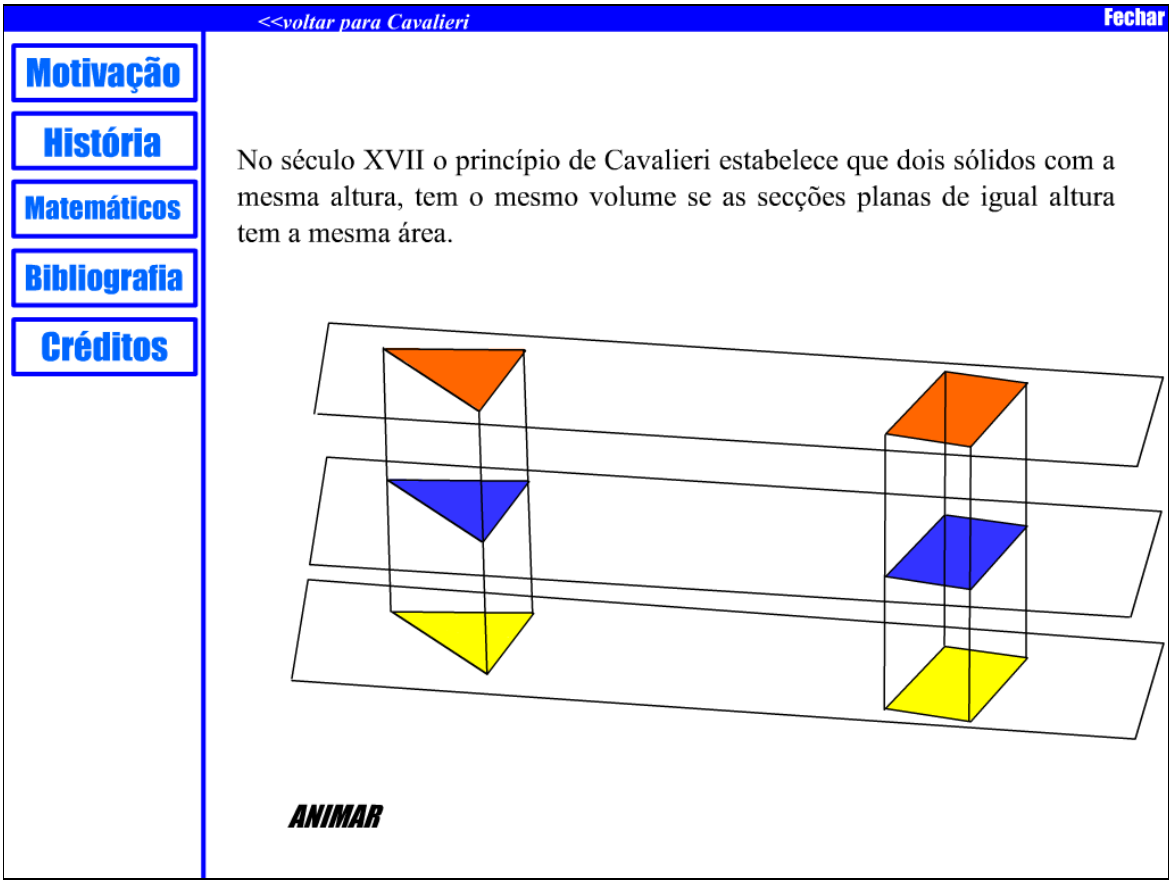


Figura 7.3: Princípio de Cavalieri

Em virtude dos fatos mencionados acima, espera-se que essa sessão tenha um caráter introdutório para o conteúdo de limite e possa despertar no estudante a motivação do conteúdo em questão e, para os que gostam de história, que isso represente apenas um marco inicial para futuros aprofundamentos.

7.2.2. Módulo do ponto de vista cinemático

Esse módulo contempla o limite do ponto de vista cinemático apresentando a idéia intuitiva de seqüência numérica e, após isso, trabalha com limite de funções de maneira intuitiva através de animações em recursos gráficos. Dada uma função toma-se uma seqüência se aproximando, pela direita e pela esquerda, de um ponto x_o e mostra-se o que acontece com a $f(x_n)$, discutindo se a mesma tende ou não a um valor L.

Isto também é feito para limites no infinito e limites infinitos. Por exemplo, dada a função $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ toma-se uma seqüência tendendo a menos infinito e uma seqüência tendendo a mais infinito. São dados valores para x em uma tabela e, automaticamente, vai-se determinando a imagem desse ponto, ou seja, $f(x)$. Esse recurso é apresentado graficamente através da animação dos pontos. Então o usuário pode constatar que se tomar uma seqüência tendendo a mais infinito ($x \to +\infty$) ou a menos infinito ($x \to -\infty$), a imagem se aproxima de 1, ou seja $f(x) \to 1$. A figura 7.4 ilustra esse exemplo.

É apresentada a definição de limite por seqüência após ser explanada a idéia intuitiva.

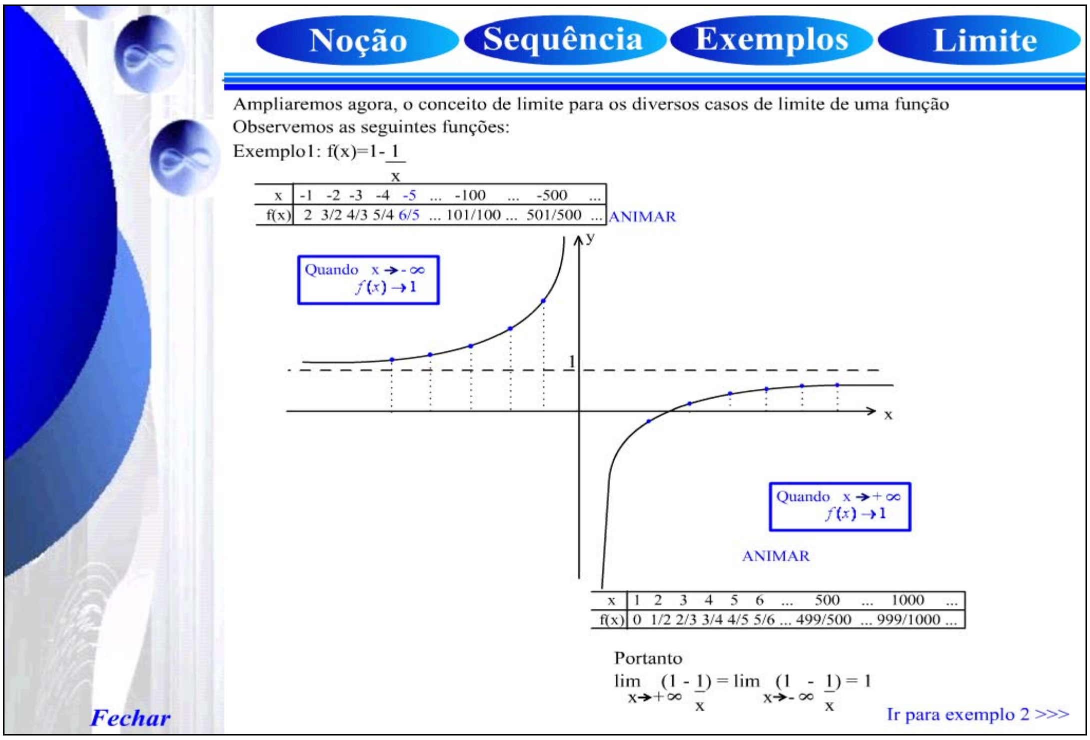


Figura 7.4: Ponto de vista cinemático

Um problema vinculado a essa sessão é o problema da velocidade instantânea.

Na figura 7.5, o gráfico nos fornece para cada tempo t, em segundos, o espaço s, em metros, percorrido por um carro de Fórmula I, na reta dos boxes, a partir da largada.

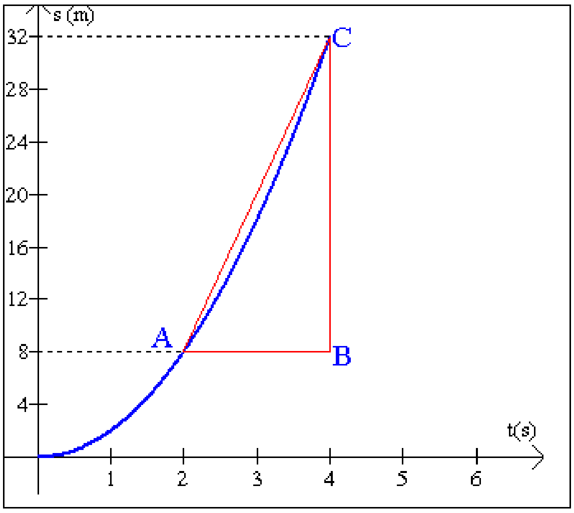


Figura 7.5: Velocidade média no primeiro intervalo

O sistema solicita que o usuário determine a velocidade média no intervalo de 2 a 4 segundos. Se o usuário não souber responder o sistema relembra que a velocidade média é dada pela variação do espaço dividida pela variação do tempo, ou seja, $V_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Em caso de resposta correta o protótipo solicita que o usuário determine a velocidade média no intervalo de 2 a $2+\Delta t$ segundos, conforme ilustra a figura 7.6.

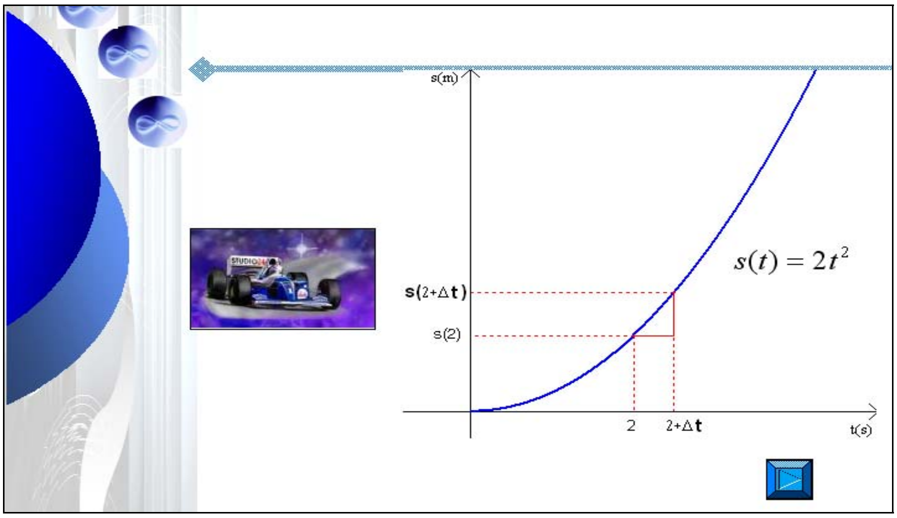


Figura 7.6: Velocidade média no segundo intervalo

A idéia é começar a trabalhar com uma variação muito pequena. Então nesse exemplo, o usuário deverá determinar a imagem de 2 e 2+Δt, ou seja, determinar $s(2)$ e $s(2+\Delta t)$ e após isso, dividir pela variação do tempo que é Δt. Portanto, a velocidade média nesse intervalo será dada por:

$$V_m = \frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{2+\Delta t-2} = \frac{2(2+\Delta t)^2 - 2.2^2}{\Delta t} = \frac{2(4+4\Delta t+\Delta t^2-4)}{\Delta t} = \frac{2\Delta t}{\Delta t}(4+\Delta t) = 8+2\Delta t$$

O sistema vai questionar se a velocidade média encontrada pelo usuário, nesse intervalo, foi $8+2\Delta t$. No caso de a resposta ser negativa o sistema monitora o usuário dizendo os passos que esse deve tomar:

- Deve lembrar que a velocidade média é dada por $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$;
- Para obter a variação do espaço o usuário necessita encontrar $s(2+\Delta t)$ e $s(2)$;
- Deve observar que a função espaço é dada por $s(t) = 2t^2$;
- Depois de encontrar a variação do espaço esta deve ser dividida pela variação do tempo.
- Lembra ao usuário que ele deve efetuar as devidas simplificações.

Se a resposta for positiva, o sistema propõe encontrar a velocidade instantânea no tempo t=2s, observando que para ter a velocidade instantânea no tempo t=2s, a variação do tempo, em torno de dois, deve ser muito pequena, ou seja, Δt deve tender a zero ($\Delta t \to 0$). Para resolver esse tipo de problema é necessário o conceito de limite, ou seja, se obtém a velocidade instantânea em t=2s quando aplicar o $\lim_{\Delta t \to 0}(8+\Delta t)$.

7.2.3. Módulo do ponto de vista de aproximação

O protótipo Horos apresenta uma navegação que pode ser efetuada de maneira linear quanto de maneira aleatória, dependo do objetivo do usuário. Os problemas inseridos nesse módulo estão apresentados no apêndice D.

A seqüência linear apresenta a seguinte proposta:

- Inicialmente o usuário navega pelo problema da conta telefônica (ver sessão 1, apêndice D);
- Num segundo momento navega pelo problema da construção da estrada (ver sessão 2, apêndice D);
- Depois de exploradas essas duas situações problemas apresenta-se a definição de limite pelo ponto de vista de aproximação (relacionando os epsilons e deltas com as situações anteriores).
- Na seqüência trabalha-se com um exemplo de função linear envolvendo um epsilon fixo (ver sessão 3, apêndice D)
- E após isso é explorada uma situação envolvendo a relação genérica entre epsilon e delta de uma função linear e de uma função quadrática (ver sessão 4, apêndice D).

A seguir, explanam-se alguns passos da navegação oriundos das atividades realizadas por um determinado usuário.

A figura 7.7 mostra uma tela interativa da atividade da conta telefônica a qual, pela navegação linear, é a primeira atividade proposta.

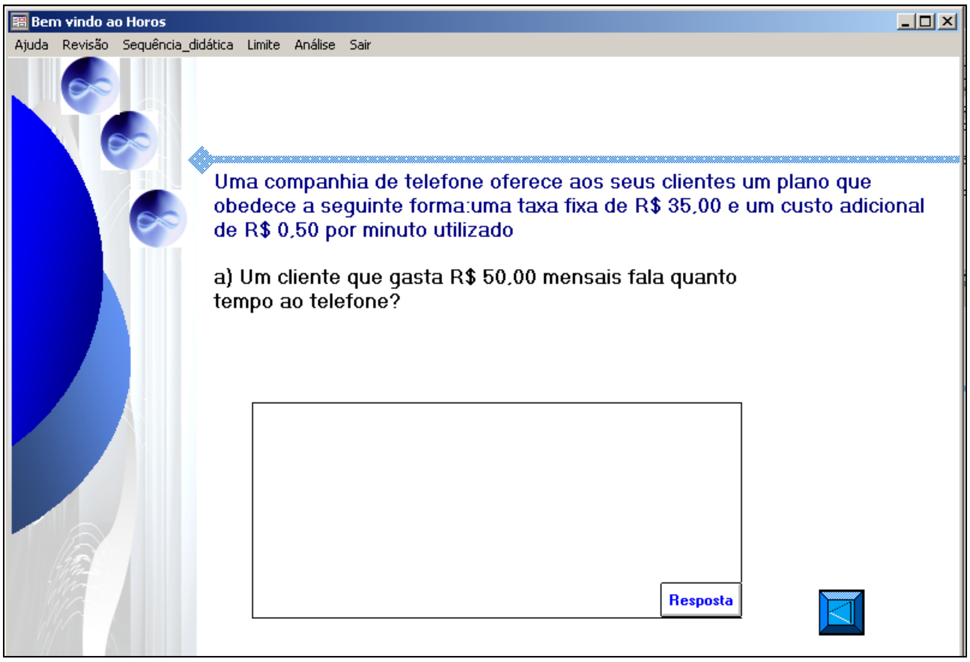


Figura 7.7: Tela 1

O aluno pode realizar o cálculo na tela, no quadro de resolução, e inserir a resposta encontrada. Se a resposta for positiva o protótipo encaminha o usuário a resolver os demais itens (b, c, d, e). Em caso de resposta errada o sistema monitora a navegação lançando dicas de resolução e/ou encaminhando a navegar por outros problemas resolvidos para sanar as dúvidas pertinentes à resolução. Por exemplo, na resolução do item (a) disposto na figura 7.8, caso a resposta não seja t=30 s o sistema questiona ao usuário se ele identificou a função linear.

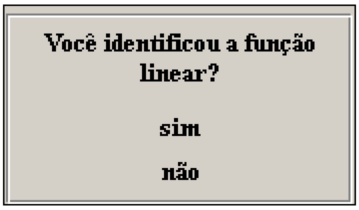


Figura 7.8: Tela 2

Em caso positivo, o sistema solicita ao usuário que digite o valor dos coeficientes angular e linear da função e após isso requer que o usuário determine o valor de t tal que $f(t) = 50$.

A figura 7.9 ilustra o procedimento utilizado pelo protótipo:

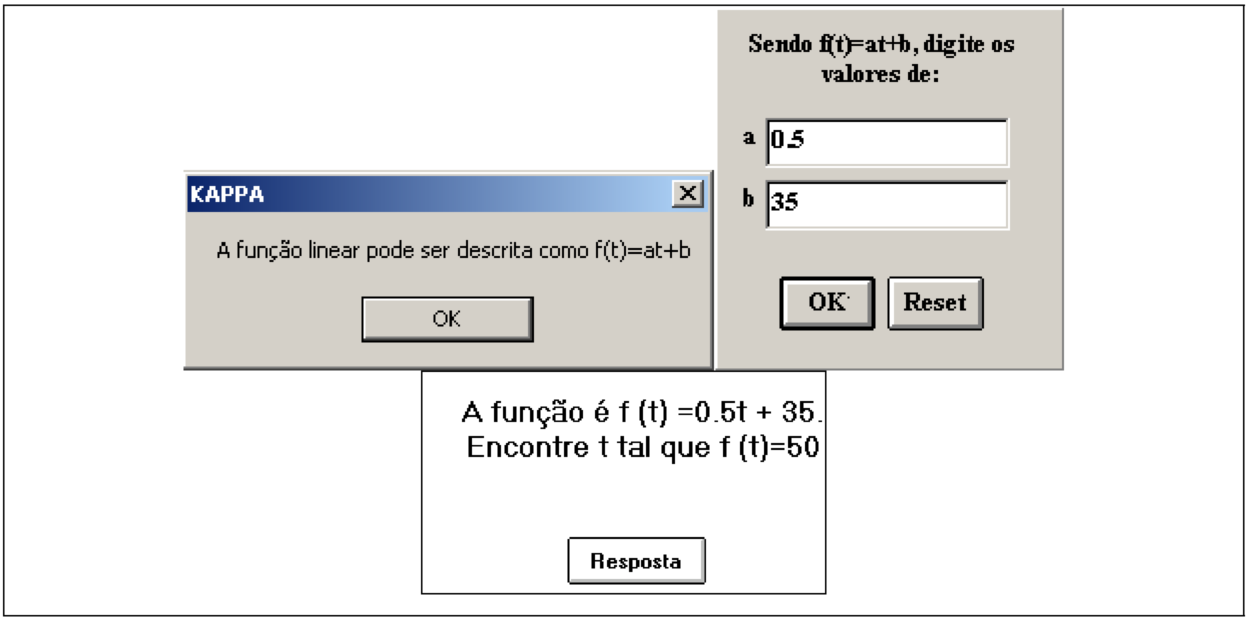


Figura 7.9: Tela 3

E assim, o sistema monitora a navegação do usuário, algumas vezes solicitando que o usuário navegue por outros exemplos com o objetivo de entender o conteúdo em questão e após isso retome à atividade.

No segundo exemplo proposto, a construção de uma determinada estrada (sessão 2- apêndice D), apresenta-se na figura 7.10 uma seqüência de navegação realizada por um determinado usuário que apresenta dificuldade de resolução do item (b), por exemplo.

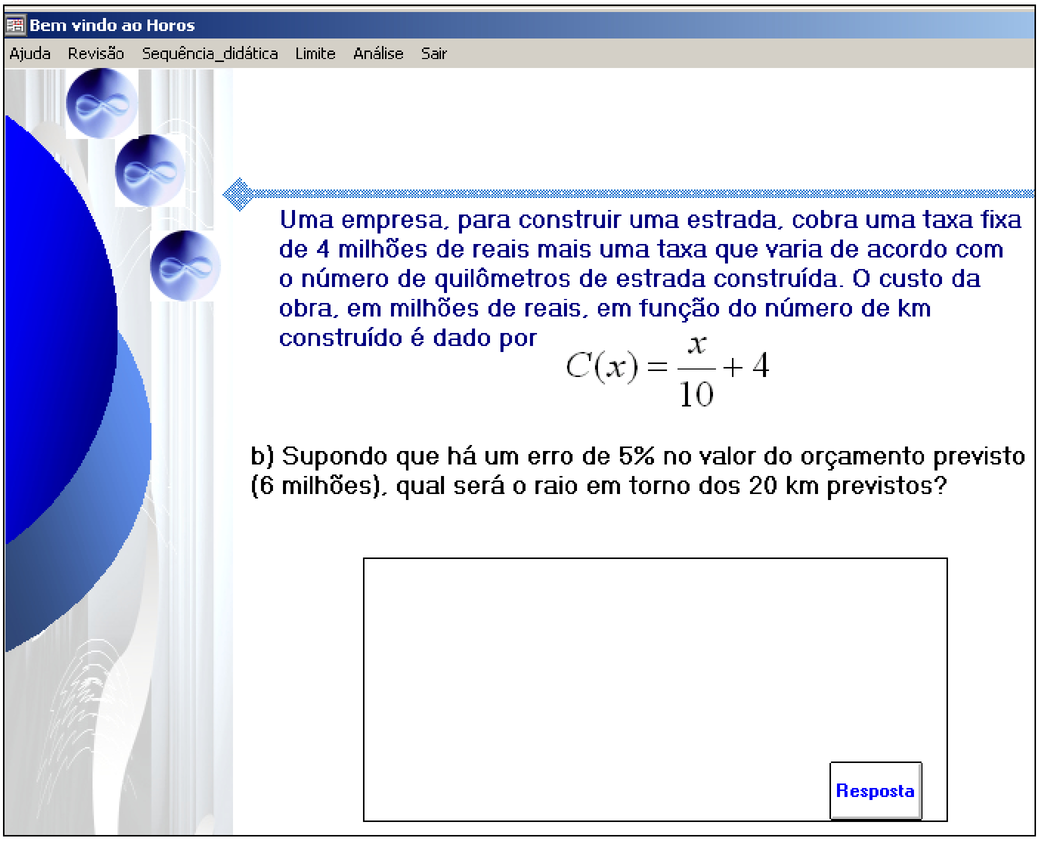


Figura 7.10: Tela 4

Com essa situação pretende-se que o aluno trabalhe com a idéia de um epsilon fixo. Como o limite da função é seis milhões, dado um erro, epsilon, igual a 5% de seis milhões, qual será o raio que ele vai encontrar em torno dos 20 km previstos. Caso a resposta esteja errada o sistema propõe os seguintes passos:

1. Identificar o valor numérico de um erro de 5% no orçamento, conforme figura 7.11;

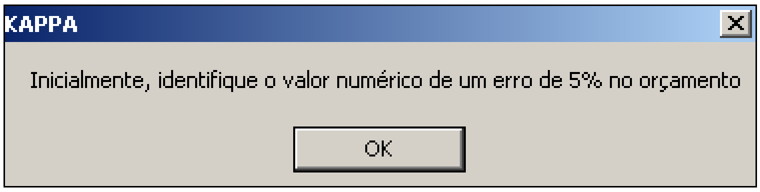


Figura 7.11: Tela 5

2. A figura 7.12 ilustra que após o usuário encontrar o valor numérico de 5% do orçamento o sistema relembra-o que esse erro pode ser positivo ou negativo, ou seja:

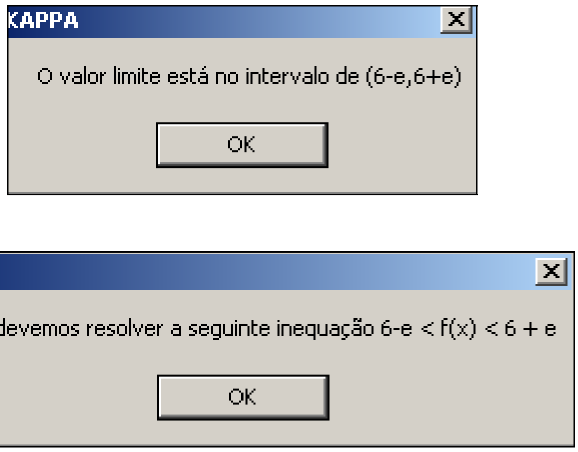


Figura 7.12: Tela 6

3. Solicita ao usuário para substituir os dados na inequação $6-\varepsilon < f(x) < 6+\varepsilon$, relembrando-o da função envolvida e o valor do erro, conforme ilustrado pela figura 7.13.

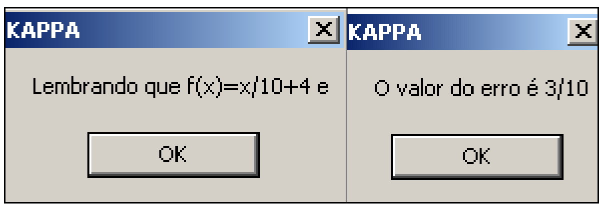


Figura 7.13: Tela 7

4. O protótipo solicita ao usuário obter o conjunto solução da inequação $6-\varepsilon < f(x) < 6+\varepsilon$, dando a dica que ele pode reescrever essa inequação utilizando a definição de uma função modular, ou seja, determinar o conjunto solução da inequação $6-\frac{3}{10} < \frac{x}{10}+4 < 6+\frac{3}{10}$ é equivalente a determinar o conjunto solução da

inequação $\left|\frac{x}{10}+4-6\right|<\frac{3}{10}$. Caso o usuário não consiga determinar o conjunto solução dessa inequação o sistema transporta o usuário para o módulo de revisão de funções e inequações modulares.

Depois de vencida essa etapa o problema trabalha com um erro cada vez menor. No item (d) é suposto um erro muito pequeno denominado epsilon e solicitado ao usuário que encontre a relação genérica entre a variação do erro (ε) e a variação da quilometragem, denominada delta (δ).

Depois de apresentadas essas duas situações problemas é dada a definição de limite, via epsilon e delta (limite do ponto de vista de aproximação).

Na seqüência é trabalhado com a definição do limite. Inicialmente é apresentada uma situação envolvendo um epsilon fixo e após isso se trabalha com a relação genérica entre epsilon e delta, conforme é ilustrado na figura 7.14.

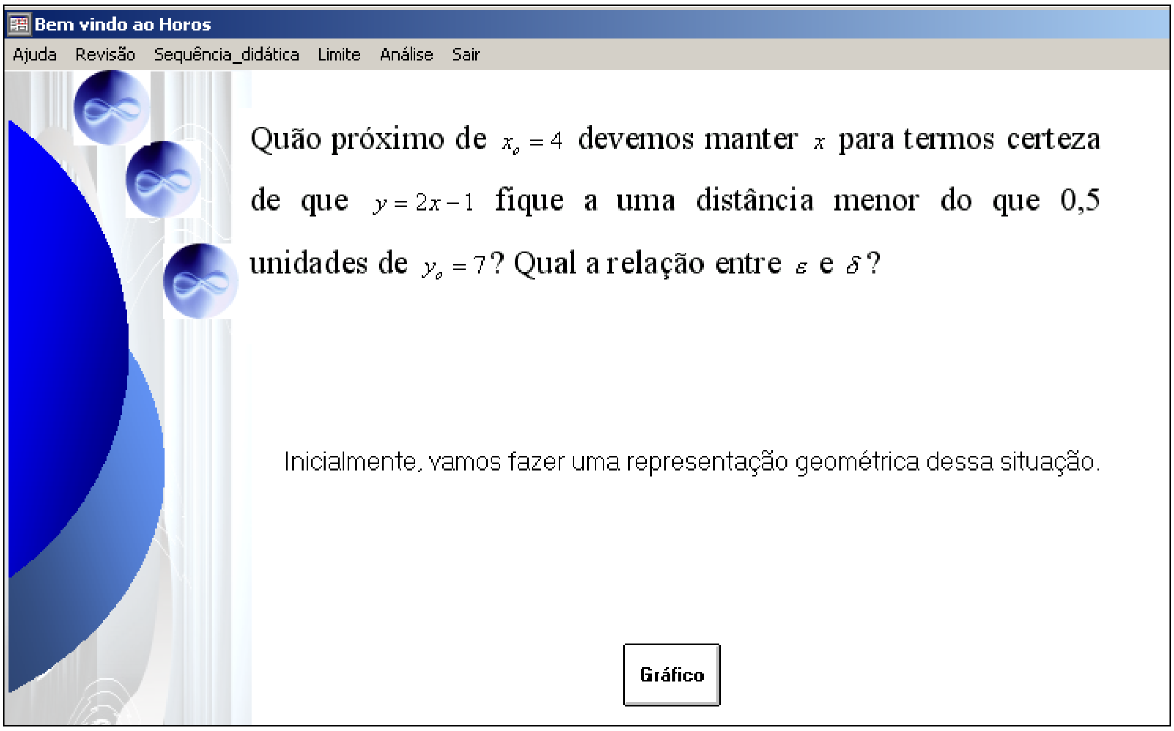


Figura 7.14: Tela 8

A resolução desse problema utiliza os seguintes procedimentos:

1. É solicitada ao usuário a identificação dos dados, conforme ilustra a figura 7.15.

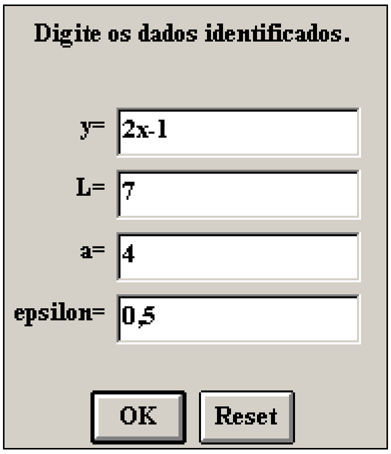


Figura 7.15: Tela 9

2. Após isso é solicitado ao usuário para substituir os dados acima na definição de limite e dar a resposta do valor do delta para um epsilon igual a 0,5.
3. Na seqüência solicita-se que o usuário encontre a relação genérica entre epsilon e delta.

Se a resposta não for correta o primeiro passo do sistema é oferecer dicas de resolução. Se mesmo com a dica o usuário não for capaz de identificar a resolução o protótipo insere o usuário no módulo de revisão de uma inequacão modular. Nesse módulo o usuário encontra a ajuda de definição de função modular bem como exemplos resolvidos que envolvem a resolução de inequações. Após isso, o usuário retoma para resolver o problema em questão.

A próxima situação problema é uma situação muito comum encontrada nos livros de cálculo, ou seja, a demonstração do limite de uma função. Geralmente, nos livros de cálculo é dada a definição e logo após já se encontram exemplos de demonstração. A figura 7.16 ilustra o limite de uma função linear.

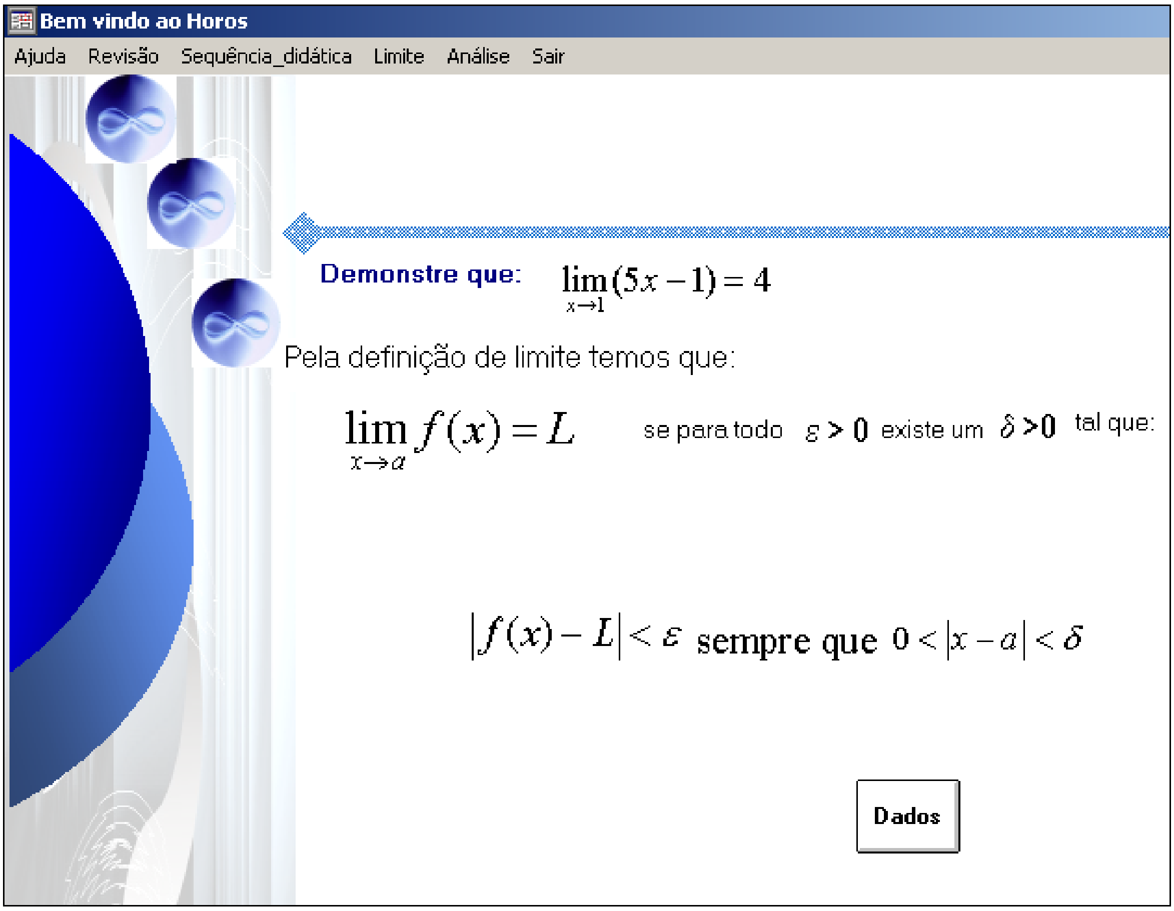


Figura 7.16: Tela 10

O procedimento utilizado é o mesmo descrito anteriormente, o usuário inicialmente identifica os dados e após isso substitui na definição de limite e encontra a relação entre epsilon e delta.

A outra situação de demonstração envolve uma função quadrática, conforme é ilustrado na figura 7.17. Nessa situação, o sistema monitora a resolução passo a passo, já que a relação entre epsilon e delta só pode ser encontrada tomando um delta mínimo.

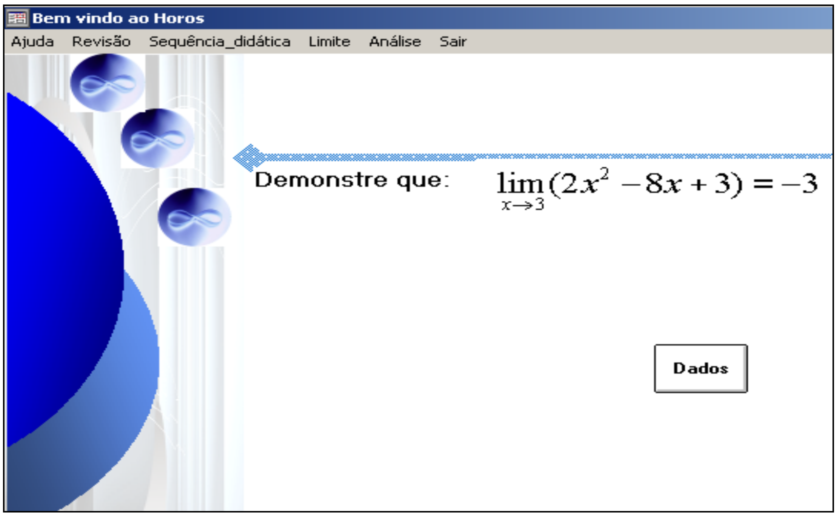


Figura 7.17: Tela 11

Após isso é explorado, intuitivamente, o conceito de limites laterais, utilizando recursos de animações no gráfico da função proposta. A figura 7.18 ilustra um exemplo de limites laterais de uma determinada função.

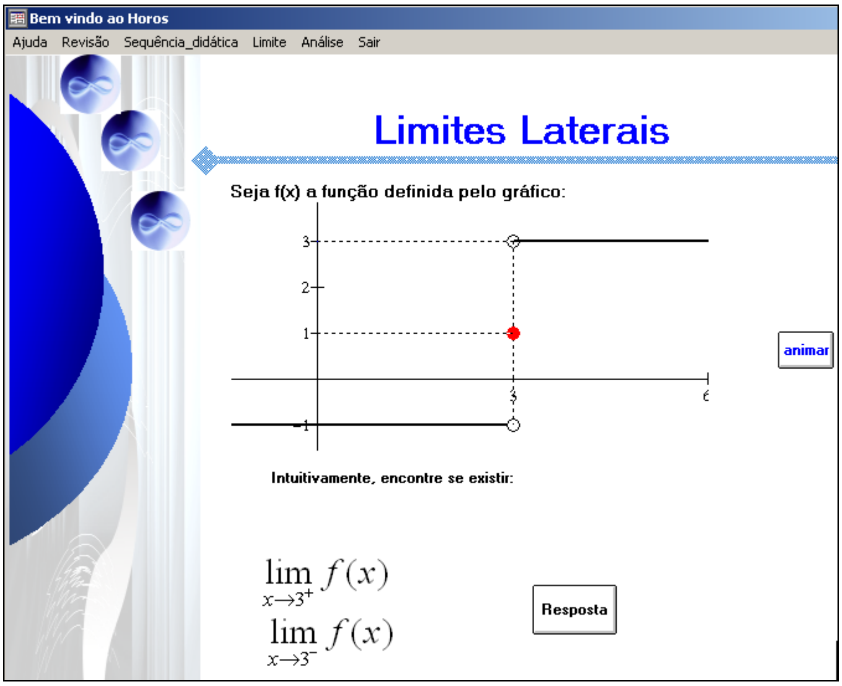


Figura 7.18: Tela 12

Na seqüência, apresenta-se uma outra situação onde os limites laterais são iguais e então se define limite à direita e limite à esquerda.

Essa é a explanação que ocorre de maneira linear, mas não, necessariamente, precisa-se seguir essa seqüência. A navegação pode ser efetuada de acordo com o perfil do usuário.

Ele pode navegar apenas pelo problema da conta telefônica e após ir direto para a definição, ou navegar apenas pelos problemas que envolvem a definição de limite. Isso é permitido fazer através da navegação através dos *menus* inseridos no protótipo, conforme figura 7.19:

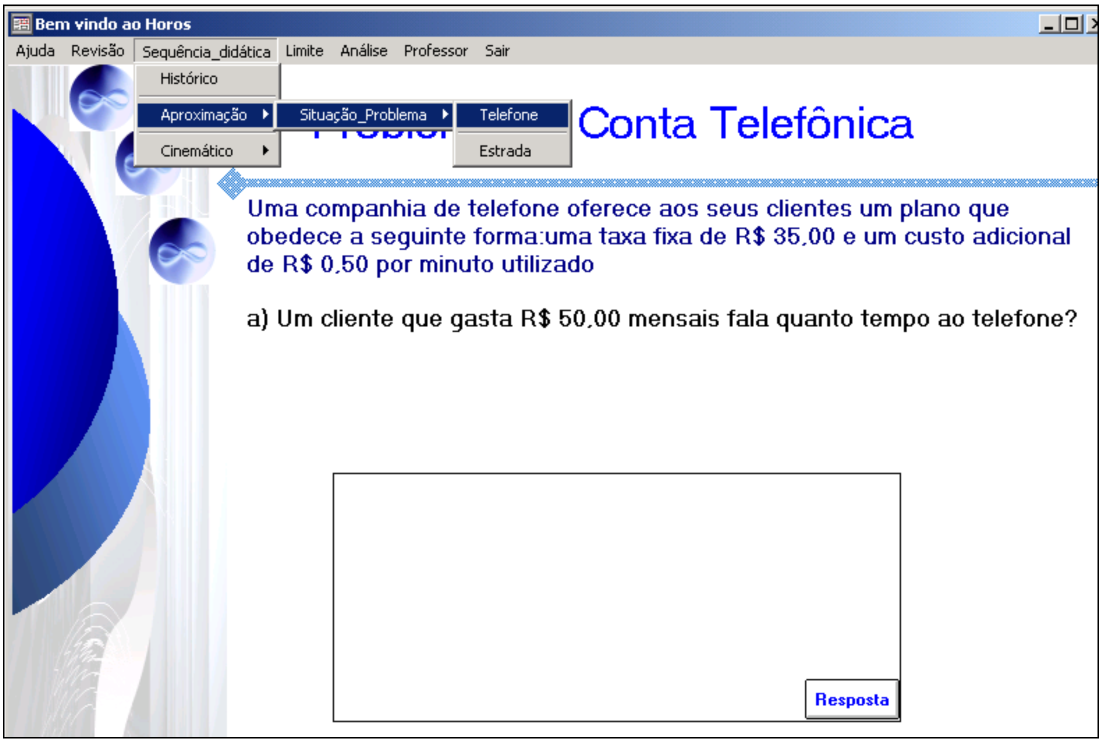


Figura 7.19: Tela 13

A seguir explanam-se as possíveis navegações via *menus.*

7.3 NAVEGAÇÃO LIVRE

Conforme comentado, a navegação pode ser efetuada através dos *menus* ativados no protótipo Horos.

Os principais *menus* disponíveis no programa são:

- Ajuda;
- Revisão;

- Seqüência didática;
- Limite;
- Análise;
- Sair.

O *menu* “Ajuda” é responsável por oferecer ajuda ao usuário relativa à navegação, monitorar no sentido desse ter alguma dúvida relativa à entrada de dados, ao material necessário para a navegação e ao programa Winplot. O Winplot é um programa livre, desenvolvido por Rick Parris (1996) destinado a criação de gráficos 2D e 3D.

O *menu* “Revisão” possibilita ao usuário revisar alguns conteúdos como função e inequacões. Nesse módulo estão dispostos, gráfico, domínio e imagem de funções e também propriedades, conforme ilustra a figura 7.20. O aluno é convidado a navegar por esse módulo quando ele apresenta dificuldades na resolução de um determinado problema que envolve tais conteúdos.

Figura 7.20: Tela 14

O *menu* “Seqüência didática” apresenta a possibilidade de, em qualquer tela, o usuário ir para o módulo do histórico, ou o módulo do ponto de vista de aproximação e/ou do módulo cinemático. A figura 7.21 mostra que quando está ativado o ponto de vista de aproximação ele pode navegar pelo Problema 1 (conta telefônica) ou pelo Problema 2 (construção de uma estrada).

Figura 7.21: Tela 15

Na figura 7.22, o *menu* “limite” apresenta tópicos relativos às propriedades de limites, definição de limite pelo ponto de vista cinemático e de aproximação bem como a relação entre ambas, exemplos propostos, exemplos resolvidos e limites laterais.

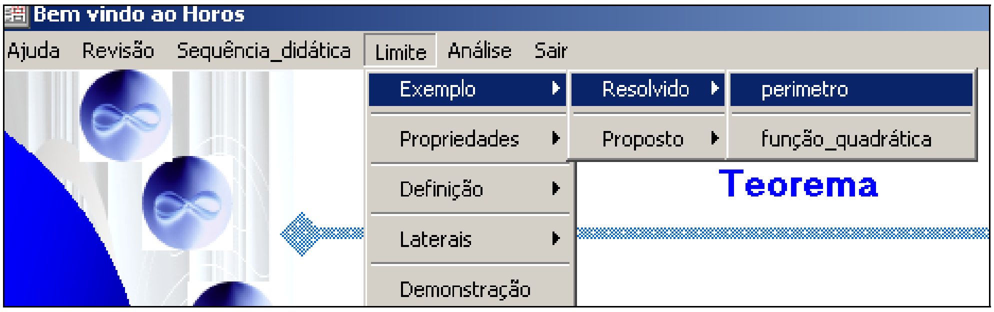


Figura 7.22: Tela 16

O *menu* “Análise” é relativo ao diagnóstico que o sistema faz da navegação do usuário pelos problemas propostos no módulo do ponto de vista de aproximação. Portanto, quando o usuário iniciar a navegação esse menu não estará ativo e conforme ele for resolvendo os problemas o diagnóstico será ativado. Esse menu contempla o diagnóstico de quatro sessões: problema da conta telefônica, problema da construção da estrada, a relação entre epsilon e delta, dado um epsilon fixo e por último o problema que envolve a demonstração do limite. Na figura 7.23, apresenta-se um exemplo onde se mostra que a sessão 3 e 4 estão ativadas e a sessão 1 e 2 estão desativadas. Isso significa que o usuário resolveu os dois problemas relativos à definição de limite, um com um epsilon fixo e o outro da demonstração.

Figura 7.23: Tela 17

No sistema ficam registrados todos os passos realizados pelo usuário. Quando o usuário entra no sistema é solicitado que ele se identifique e que responda se é a primeira vez que ele está cursando a disciplina de cálculo diferencial e integral. Todos os passos dados pelo estudante são armazenados no sistema. Fica armazenado se ele conseguiu responder diretamente os problemas sem solicitar a ajuda do sistema; se ele apresentou dificuldade de resolução e com a dica do sistema conseguiu resolver um determinado item; se mesmo com a dica do sistema ele não conseguiu resolver um determinado problema e foi direcionado para o módulo de revisão. O usuário também tem a opção de deixar a resolução no próprio sistema. Caso ele opte em trabalhar no ambiente computacional, as resoluções dadas por ele são armazenadas pelo protótipo e são apresentadas no diagnóstico. Esta é uma característica importante dos sistemas especialistas, pois através desse armazenamento é possível recuperar os passos efetuados pelo aluno e por meio disso, o professor pode dar um *feedback* ao aluno e sanar, em sala de aula, as principais dificuldades identificadas. Para um diagnóstico mais conciso seria bastante interessante que o aluno deixasse a resolução no próprio sistema, assim o professor pode confrontar as estratégias de resoluções utilizadas pelo usuário e as causas dos erros. Caso contrário, também é possível fazer isso, só que o professor terá que recolher as atividades desenvolvidas no ambiente lápis e papel, já que no diagnóstico não estarão expressas as resoluções apresentadas pelo usuário e sim o modo de navegação e as respostas dadas a cada atividade.

O *menu* “Sair” fecha o programa depois da confirmação do usuário.

Esses *menus* ficam sempre ativos em todas as telas do protótipo, exceto no módulo de revisão, onde o usuário deve navegar para retornar. Com isso, ao entrar no ambiente do Horos, se o usuário tiver um interesse específico por um determinado conteúdo não precisa navegar por outros módulos até chegar nesse. Por exemplo, se ele estiver apenas interessado em ver os problemas que envolvem diretamente a definição de limite, basta ativar o *menu* - limite-exemplo proposto-exemplo 2.

Outra facilidade é o fato de estar navegando pela sessão do ponto de vista de aproximação e querer rever algum gráfico do ponto de vista cinemático. Por meio do *menu* é possível fazer isso e após retornar ao problema que estava navegando. Se por exemplo ele está vendo o teorema dos limites laterais e quiser acessar uma animação, basta que o usuário escolha a opção “seqüência didática – cinemático- gráfico – função 1”.

7.4 A CONTRIBUIÇÃO DOS RECURSOS DA IA NO DESENVOLVIMENTO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E AS LIMITAÇÕES DO PROTÓTIPO

Uma das características relevantes dos sistemas tutoriais inteligentes é a separação do módulo do conhecimento, módulo do estudante, módulo pedagógico e o módulo de interface.

O módulo do conhecimento é onde está armazenado o conteúdo relativo à explanação desse protótipo, que é a introdução ao conceito de limite.

O módulo do estudante é o módulo onde são armazenadas todas as ações decorrentes da navegação pelo sistema. De acordo com essas ações o módulo pedagógico é acionado e, através de dicas, de estratégias de recursos gráficos, de revisões tenta oferecer opções ao aluno de maneira que esse consiga ultrapassar as dúvidas existentes naquele ponto específico do conteúdo. O módulo interface é o meio usado para chegar até ao usuário, é o produto final.

Todos esses módulos estão intimamente ligados. E através dessa ligação é possível armazenar e resgatar as informações de uma determinada navegação e a partir dessas inferir novas informações. Na verdade, o protótipo se comporta de uma maneira muito similar ao que, normalmente, nós professores fizemos em sala de aula ao sermos questionados por algum estudante. Geralmente, não damos a resposta pronta e acabada, freqüentemente, respondemos com outra indagação de maneira a fazer com que o aluno resgate o conteúdo necessário para resolver tal situação. Ao conceber um sistema tutorial inteligente o engenheiro do conhecimento transfere para o sistema o conhecimento e a experiência de um especialista da área, que no caso em questão é o professor que atua em sala de aula. Esse conhecimento pode ser resgatado também de outras fontes como os livros, por exemplo.

A possibilidade de gerar um diagnóstico é muito interessante tanto para o aluno quanto para o professor. Para o aluno o diagnóstico indica os conteúdos que devem ser melhorados e que necessitam de uma maior atenção por parte dele e isso é feito até mesmo durante a navegação, pois caso o aluno não consiga resolver um determinado exercício o protótipo vai direcionando-o a navegar pelas revisões. Então, automaticamente ele acaba efetuando uma revisão dos conteúdos. Para o professor oferece a oportunidade de observar as dificuldades mais relevantes de uma determinada classe e com isso realizar uma revisão em sala e ou utilizar o próprio protótipo como uma alternativa de avaliação.

A definição de limite representa um grande gargalo do ensino de cálculo. Conforme a análise realizada nos livros didáticos, geralmente, essa definição é colocada de maneira direta e na seqüência já se trabalha com a demonstração do limite, o que leva muitos alunos a concluir um curso sem entender a relação entre epsilon e delta. Disponibilizar uma ferramenta que possa auxiliar o aluno nesse contexto representa um avanço na metodologia do processo ensino aprendizagem desse conteúdo. Essa ferramenta pode ser utilizada tanto em sala de aula pelo professor, o qual pode explorar cada sessão juntamente com a turma, bem como individualmente pelo aluno em horário extra classe, seja para resolver as atividades propostas ou para revisar um determinado conteúdo.

A ferramenta por si só não irá ser capaz de resolver todas as mazelas do ensino de limite, mas poderá contribuir muito na compreensão do conteúdo em questão, podendo resultar numa compreensão melhor de conteúdos que são estudados na seqüência, como, por exemplo, derivada. Quando o professor for dar a definição de derivada pela interpretação física (velocidade instantânea) o aluno vai relacionar com o problema resolvido no protótipo, e vai entender que derivada é apenas uma aplicação do conceito de limite, pois ele já resolveu esse exemplo, apenas tendo o conhecimento de limite. Sabe-se que muitos alunos não conseguem relacionar derivada e limites, para eles são duas coisas distintas e muitas vezes terminam um curso sem estabelecer a relação. Ao estudar o cálculo de área por integral definida também poderão fazer a analogia com a parte histórica e com o uso de limites.

A ferramenta também possui limitações. A primeira é que ela não foi concebida para calcular algebricamente operações com limites, não foi esse o objetivo do protótipo proposto. Para isso, existem vários pacotes computacionais que desempenham com muita eficácia esse método, como por exemplo, o M*aple*, *Derive* e o *matlab*. A ferramenta utilizada na programação é uma linguagem de programação específica para construção de sistemas especialistas e não contempla uma biblioteca para funções complexas de matemática, há apenas o pacote básico. Por esse motivo, em termos de linguagem matemática e recursos gráficos ela é limitada. Por exemplo, via teclado não é possível digitar os símbolos epsilon (ε) e delta (δ) e nem tem uma função dentro do programa que faça isso. No protótipo foi utilizado E e D para epsilon e delta, respectivamente. As animações dos gráficos foram produzidas em outra ferramenta e acessada via *Kappa*. Um ponto positivo é que ela consegue interagir com outras ferramentas.

Uma contribuição importante é que uma ferramenta pode ser usada independente do espaço físico da sala de aula e poderá também ser utilizada pelos cursos que são oferecidos à distância. Isso porque a ferramenta apresenta uma proposta de metodologia de utilização. É importante lembrar que a aplicação de uma determinada ferramenta deve sempre estar vinculada a uma proposta de utilização.

Na seqüência, são apresentadas algumas propostas de utilização do Horos.

7.5 PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO HOROS

Inicialmente, essa seqüência deve atender o objetivo da aula proposta. Sugere-se que as sessões contempladas pelo protótipo sejam explanadas em dias distintos, pois deve-se levar em consideração o tempo necessário para navegar nas diversas sessões.

Explana-se na seqüência algumas propostas de utilização da seqüência didática implementada em um ambiente computacional.

7.5.1 Ponto de vista de aproximação

a) Objetivo: Introduzir o conceito de limite pelo ponto de vista de aproximação.
b) Tempo necessário: 2 horas aula de 50 minutos.
c) Configurações e Recursos:

- PC com *Windows*/ resolução de tela 800x600;
- Número de computadores compatível com a turma (ideal é que os alunos trabalhem em duplas);
- *Data show* para o professor; não é obrigatório, mas pode tornar a navegação mais interessante, no caso do professor monitorar a navegação e também para realizar a institucionalização do conteúdo;
- Lápis e papel para o aluno trabalhar em paralelo nesse ambiente.

d) Organização da classe

- Solicitar que os alunos trabalhem em duplas, pois assim cria-se um ambiente propício à discussão da atividade proposta;
- Solicitar que os alunos trabalhem em paralelo no ambiente lápis e papel.

e) Metodologia

Descreve-se na seqüência uma sugestão para alcançar o objetivo proposto.

1. É interessante que o professor faça, inicialmente, uma introdução da aula, expondo o objetivo da aula. O professor pode usar, inclusive, tópicos da sessão do histórico para fazer essa introdução, falando de como surgiu o cálculo, das pessoas envolvidas nesse contexto e lançar questões indagadoras que necessitam do conhecimento de limite para serem resolvidas, como por exemplo, o da velocidade instantânea.
2. Após isso, solicitar que os alunos naveguem pelo exemplo da conta telefônica, ou pelo problema da construção da estrada e ou até mesmo pelos dois, deixando que o protótipo monitore essa navegação (geralmente, nesse tempo é possível navegar por apenas um problema);
3. Independente do usuário navegar por um ou pelos dois problemas, solicitar que ele leia a definição e faça a relação com o(s) problema(s) escolhido(s).
4. Depois de efetuada essa navegação fazer a institucionalização da definição de limite com a turma;
5. Na seqüência, solicitar que os alunos trabalhem com os exemplos que envolvem a definição de limite, os quais estão após a definição ou que podem ser acessados via *menu* –limite- exemplo1 e exemplo 2.
6. Em caso de término de aula, deixar como tarefa;
7. Caso, a turma não tenha navegado pelos dois problemas propostos, pode-se solicitar que os alunos naveguem pela outra situação problema, em horário extra classe.

Essa mesma seqüência pode ser usada para reforçar a definição de limite dada em sala de aula. Após os alunos terem tido a definição de limite, solicitar que os alunos naveguem pelas duas situações problemas: conta telefônica e da construção da estrada e identifiquem a função, o limite, o epsilon e o delta em cada atividade bem como a relação genérica entre delta e epsilon.

7.5.2 Ponto de vista cinemático

a) Objetivo: Introduzir o conceito de limite pelo ponto de vista cinemático.
b) Tempo necessário: 2 horas aula de 50 minutos.
c) Recursos: idem seqüência anterior
d) Organização da classe idem seqüência anterior
e) Metodologia

Descreve-se na seqüência uma sugestão para alcançar o objetivo proposto.

1. O professor pode, através do recurso de *data show* monitorar a navegação. Isso é um recurso que nessa proposta pode trazer bons resultados;
2. Iniciar pelo histórico dando ênfase a Zenão, pois são encontradas situações que contemplam a idéia de seqüência, como por exemplo, o problema de Aquiles e a tartaruga e a distância de uma pessoa até a parede;
3. Depois disso pode-se monitorar a navegação pelo ponto de vista cinemático discutindo com a turma a idéia de seqüência e convergência de seqüência ou solicitar que os alunos naveguem livremente pelo sistema;
4. Caso opte em deixar o usuário navegar livremente pelo sistema é interessante deixar uma tarefa vinculada à idéia gráfica de limite como, por exemplo, dar um gráfico e solicitar que eles tomem uma seqüência convergindo para um determinado ponto e digam o que acontece com a imagem dos pontos dessa seqüência. No módulo do ponto de vista cinemático há exemplos com animações. A tarefa pode estar vinculada a esse tipo de exemplo;
5. Explorar a idéia intuitiva de limites laterais. Aqui, pode-se inclusive usar os recursos do *Winplot* para plotar os gráficos.
6. Após a navegação por todos os exemplos, discutir com a turma a definição de limite pelo ponto de vista cinemático;

7. Solicitar que os alunos resolvam o problema da velocidade proposto pelo sistema (menu- seqüência didática- cinemático- velocidade);
8. Discutir com a turma a idéia de velocidade instantânea;
9. Propor que os alunos resolvam outra atividade relacionada com a velocidade instantânea. Pode ser, por exemplo, o problema inserido na parte da motivação sobre a queda de um objeto da torre ou algum outro problema relacionado com tangentes.

O importante é realizar a ligação entre o limite do ponto de vista cinemático e de aproximação. Fazer com que o aluno compreenda as relações existentes é um dos objetivos das propostas de utilização. Caso o professor opte em aplicar apenas um dos módulos, sugere-se fazer o paralelo, em sala de aula, com o outro módulo não explorado. Ou deixar como tarefa a navegação pelo módulo que não foi explorado e após isso, fazer a institucionalização em classe. O importante é que o aluno tenha acesso ao conhecimento do limite pelo ponto de vista de aproximação e cinemático.

Quanto a uma navegação detalhada pelo módulo do histórico, fica a critério do interesse do aluno por esse tópico ou até mesmo do professor da turma.

O interessante em qualquer proposta de utilização do protótipo é que se tenha sempre uma atividade vinculada a esse processo que leve o aluno a parar e refletir, pois caso contrário, o aluno tem a ansiedade de navegar rapidamente com o intuito de terminar a tarefa sem a preocupação de realizar uma reflexão da atividade proposta.

8. SEGUNDA EXPERIMENTAÇÃO – AMBIENTE COMPUTACIONAL

8.1. INTRODUÇÃO

A segunda experimentação foi a aplicação do protótipo Horos. Este experimento foi realizado em quatro turmas de primeira fase, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no Centro Tecnológico da Universidade Estadual de Santa Catarina, em Joinville-Santa Catarina. Em uma destas turmas o protótipo foi aplicado sem o prévio conhecimento sobre o conteúdo de limite e nas outras após os professores terem explanado, em sala de aula, a definição de limite pelo ponto de vista de aproximação.

A aplicação do protótipo teve como intuito a verificação de aspectos ligados à interface (uso de cores, uso de quadros e janelas, disposição de textos e botões, tamanho e cor de fonte, simplicidade e clareza de linguagem), a avaliação do produto (opções de ajuda adequadas, flexibilidade, entrada de dados, erros de entrada de dados, de resposta e de ações) e a avaliação do contexto (recursos e estratégias dinâmicas, motivação, auxilio de aprendizagem e diagnóstico).

A seguir, descreveremos as escolhas e etapas envolvidas nesse experimento.

8.2. JUSTIFICATIVAS DAS ESCOLHAS REALIZADAS

8.2.1. A escolha das turmas

Foram escolhidas para a aplicação do protótipo, no segundo semestre de 2005, quatro turmas (Engenharia Mecânica, Engenharia Civil, Engenharia de Produção e Sistema e Licenciatura em Física). A escolha deu-se de maneira aleatória, levando em consideração os horários distintos dessas, a disponibilidade da observadora bem como o aceite dos professores das respectivas turmas que permitiram a aplicação do protótipo em suas aulas.

8.2.2. Modo de realização

O modo de navegação pelo protótipo aconteceu de maneira distinta nas turmas devido ao número de aulas disponibilizadas para a navegação e pelo prévio ou não conhecimento do conceito de limite.

Em duas turmas ocorreu a navegação pelo histórico, ponto de vista cinemático e de aproximação. Essa navegação ocorreu num total de seis horas aulas para uma classe e quatro horas - aula para a outra.

Nas outras duas turmas, houve uma navegação rápida pelo histórico e após isso para uma houve a navegação pelo módulo do ponto de vista cinemático e para outra pelo ponto de vista de aproximação. Essa opção foi devido ao tempo de aplicação que foi apenas de duas horas - aula.

Por isso, na seqüência descreve-se os métodos utilizados nas 4 (quatro) turmas, as quais serão denominadas de turma A, B, C e D.

Turma A

Participaram da aplicação do protótipo Horos 32 (trinta e dois) alunos num laboratório computacional com 11 (onze) computadores. Esses alunos não tinham nenhuma noção do conteúdo de limite. O protótipo foi utilizado com o propósito de introduzir o conceito.

A experimentação, nessa turma aconteceu num total de 6 (seis) horas aulas em dois dias distintos. Nas 3 (três) primeiras aulas os alunos navegaram livremente pelo histórico e pelo módulo do ponto de vista cinemático, tendo como tarefa vinculada a essa navegação a resolução de dois exercícios. A navegação pelo módulo do ponto de vista de aproximação aconteceu nas três aulas subseqüentes de maneira monitorada com o auxílio de um *data show*, já que na aula anterior ficaram evidenciados dois aspectos importantes: o número de computadores era pequeno para o tamanho da turma e a navegação livre pelo protótipo fazia com que muitos alunos passassem rapidamente pelo conteúdo sem dar a atenção necessária.

Na navegação pelo ponto de vista de aproximação foi bem explorado o exemplo da conta telefônica (ver Apêndice-D), o qual foi utilizado para introduzir o conceito de limite. Alguns alunos navegaram pelo problema da construção da estrada (ver Apêndice-D). Poucos alunos, num total de seis aulas, conseguiram navegar por todos os problemas inseridos no protótipo.

Turma B

A turma B, composta de 37 (trinta e sete) alunos já tinha visto, anteriormente, com a professora da turma o conceito de limite. A professora tinha utilizado o problema da conta telefônica, em sala de aula, para introduzir o conceito de limite. Por isso, nessa turma, optou-se inicialmente, pela navegação monitorada pelo módulo do histórico e pelo módulo do ponto de vista cinemático em duas horas aulas. Nas duas aulas seguintes foi realizada a navegação pelo módulo do ponto de vista de aproximação, trabalhando-se com o exemplo da construção da estrada, já que o exemplo da conta telefônica os alunos tinham visto em sala. Essa navegação foi monitorada pelo próprio sistema. Os alunos discutiam o problema em duplas ou trios e com os professores que estavam em sala. Algumas duplas navegaram por toda a módulo de aproximação, mas a grande maioria chegou apenas até a definição de limite.

Turma C

A turma C composta de 34 (trinta e quatro) alunos realizou o experimento num total de duas horas - aula, trabalhando em duplas. Como a turma já tinha visto, anteriormente, o limite pelo ponto de vista de aproximação, optou-se por navegar pelo módulo do ponto de vista cinemático.

A navegação ocorreu de maneira monitorada com atividades propostas durante a navegação. Inicialmente, navegaram pelo histórico e após pelo ponto de vista cinemático, onde resolveram uma atividade monitorada pelo sistema e outra desenvolvida no ambiente lápis e papel.

Turma D

Participaram desse experimento, num total de duas horas aulas, 31 (trinta e um) alunos. O professor da turma também já tinha dado uma noção sobre limite em uma aula anterior. Devido ao tempo, optou-se em dar uma noção rápida do histórico e do ponto de vista cinemático e após isso deixar os alunos navegarem pelo módulo do ponto de vista de aproximação, já que na turma anterior tínhamos feito o experimento pelo módulo do ponto de vista cinemático. No módulo do ponto de vista cinemático, os alunos resolveram a tarefa da velocidade do carro (ver gráfico 8.1), monitorada pelo sistema. Na navegação pelo módulo do ponto de vista de aproximação foi utilizado o exemplo da conta telefônica para os estudantes entenderem a relação entre epsilon e delta. Alguns alunos navegaram por outros exemplos, sendo que a grande maioria chegou até na definição de limite.

Na seqüência, apresentam-se, detalhadamente, os procedimentos utilizados.

8.3. A METODOLOGIA UTILIZADA

8.3.1 A organização do trabalho dos alunos e as regras de ensino

A navegação pelo protótipo não aconteceu de maneira livre, pois experiências anteriores (com uso de softwares em outros conteúdos) demonstraram que a navegação livre, geralmente, não produz bons resultados. É interessante sempre vincular, de alguma maneira, a atenção do aluno para que esse não se disperse. Para isso, propor algumas questões chaves para serem respondidas pode ser uma boa alternativa para a solução desse problema.

Algumas condições foram criadas para a aplicação da seqüência:

i) *Organização da turma:*

- Foi solicitado aos estudantes que navegassem pelo protótipo em duplas ou trios e trabalhassem em paralelo no ambiente lápis e papel;

- A experimentação aconteceu em dois laboratórios computacionais. A turma A foi alocada num laboratório com 11 (onze) computadores e as demais turmas realizaram o experimento num laboratório com 18 (dezoito) computadores;
- Na navegação pela parte histórica houve o monitoramento da autora do trabalho, a qual fez uso de um *data show.*
- Inicialmente, na navegação pelo ponto de vista de aproximação, a autora também monitorou a navegação.
- Após a explanação, foi deixado um tempo livre para as turmas resolverem dois problemas relacionados à velocidade instantânea. Um dos problemas era monitorado pelo protótipo e outro era uma atividade desenvolvida no ambiente lápis e papel.
- Na navegação realizada pelo módulo do ponto de vista de aproximação, os alunos trabalharam de maneira livre pelo protótipo, uma vez que o sistema monitorava suas atividades.

ii) Institucionalização do objeto de estudo

- Inicialmente os alunos desenvolviam, em duplas ou trios, a tarefa;
- A discussão da atividade ocorria simultaneamente entre a navegação pelo protótipo, o qual monitorava a navegação, e a discussão com os professores presentes na classe[26].

8.3.2 Estrutura de controle das atividades realizadas pelos estudantes

Na aplicação da seqüência didática foi utilizado o seguinte procedimento:

- Após a navegação pelo módulo do ponto de vista cinemático, foi distribuída aos alunos uma atividade no ambiente lápis e papel (ver apêndice E). Essa atividade está presente no módulo histórico como um problema motivador. Depois do aluno encontrar a velocidade instantânea do carro, a qual é monitorada pelo protótipo é

[26] 3 professores estavam presentes na aplicação do sistema.

solicitado que ele aplique o conhecimento de velocidade instantânea nessa atividade. A atividade, bem como os rascunhos, foram recolhidos.

- Na navegação pelo módulo do ponto de vista de aproximação o controle foi realizado pelo próprio sistema, já que ele registra todos os passos realizados pelo estudante e após essa navegação o professor tem acesso a esses dados. Alem disso, foram coletados os rascunhos de quem trabalhou no ambiente lápis e papel.
- Foi aplicado um questionário às turmas com o intuito de avaliar o sistema do ponto de vista ergonômico, avaliação do produto e avaliação do contexto (ver apêndice F).

8.4. APRESENTAÇÃO DA SEQÜÊNCIA EM UM AMBIENTE COMPUTACIONAL

A seqüência desenvolvida no ambiente computacional colocou em cena a construção do conceito de limite pelo ponto de vista de aproximação e cinemático. Também foram contemplados aspectos históricos relacionados ao conceito de limite.

A organização desta seqüência foi composta por três módulos:

a) Um pouco da história do Cálculo;
b) Limite do ponto de vista cinemático;
c) Limite do ponto de vista de aproximação.

8.4.1. Primeiro módulo: um pouco da história do Cálculo

O objetivo desse módulo foi apresentar ao estudante o contexto histórico da construção do conceito de limite, os problemas motivadores, bem como as pessoas envolvidas nesse processo. Foram apresentados problemas práticos, tais como cálculo de áreas, volumes e velocidade instantânea como elementos motivadores para o estudo do conceito de limite.

8.4.2. Segundo módulo: limite do ponto de vista cinemático

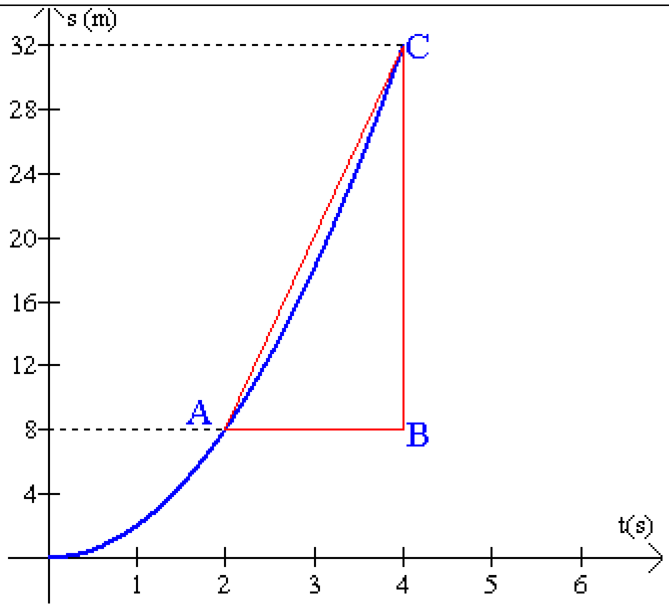
Esse módulo teve como objetivo introduzir o conceito de limite pelo ponto de vista cinemático. Esse ponto de vista está diretamente relacionado ao movimento. Muitos problemas relacionados à física são inseridos nesse contexto. Trabalha-se muito com a idéia intuitiva de convergência de seqüências, por isso, foram apresentados rapidamente a definição de seqüência e alguns exemplos. Foi explorada a visualização gráfica de limite de uma função, usando recursos de animação. Foi apresentada, intuitivamente, a idéia de limite lateral bem como a definição de limite pelo ponto de vista cinemático.

8.4.2.1 Atividade proposta

Após a navegação pelo módulo do ponto de vista cinemático o usuário deve realizar as seguintes tarefas:

a) Primeira situação: monitorada pelo protótipo

O gráfico 8.1 nos fornece para cada tempo t, em segundos, o espaço s, em metros, percorrido por um carro de Fórmula I, na reta dos boxes, a partir da largada.



i. Determinar a velocidade média no intervalo de tempo de 2 a 4 segundos;
ii. Determinar a velocidade média no intervalo de tempo de 2 a $2 + \Delta t$ segundos;
iii. Determinar a velocidade instantânea no tempo t=2 segundos.

Gráfico 8.1: velocidade média do intervalo AB

b) Segunda situação: Resolver, no ambiente lápis e papel, o seguinte problema:

Um objeto é largado do topo de uma torre de 100m de altura. A distância que o objeto está do solo, após t segundos é $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$. Qual a velocidade do objeto após 2 segundos de queda?

Quadro 8.1: problema da queda de um objeto

8.4.3. Terceiro módulo: limite do ponto de vista de aproximação

O objetivo desse módulo foi introduzir o conceito de limite pelo ponto de vista de aproximação. Esse ponto de vista está mais relacionado à análise matemática. Nesse módulo são apresentados dois problemas contextualizados que tem como intuito fazer com que o aluno compreenda a definição do limite (a relação entre epsilon e delta). Ainda nesse módulo são contemplados exemplos que envolvem problemas que trabalham com um epsilon fixo e exemplos que trabalham com a relação entre epsilon e delta de maneira genérica.

Na seqüência, listamos as atividades propostas no protótipo que foram utilizadas na experimentação pela maioria das duplas.

8.4.3.1 <u>Atividade Proposta</u>

c) Problema da Conta Telefônica:

1) Uma companhia de telefone celular oferece aos seus clientes um plano que obedece a seguinte forma: uma taxa fixa mensal de R$ 35,00 e um custo adicional de R$ 0,50 por minuto utilizado. a) Um cliente que gasta R$ 50,00 mensais fala quanto tempo ao telefone? b) Supor que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 45,00 à R$ 55,00. Qual a variação de tempo, em torno de 30 min, que o cliente poderá falar no telefone, respeitando seu planejamento financeiro? c)Refaça a questão (b) supondo que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 48,00 à R$ 52. d) Represente graficamente as situações dos itens (a, b,c) e responda: O que acontece com a variação do tempo quando a fatura telefônica está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 50,00? e) Vamos supor que o cliente deseje ter sua conta, mensalmente, em torno de R$ 50,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno do tempo t=30s? Você pode denotar a variação do tempo por δ.

Quadro 8.2: problema da conta telefônica

d) Problema da Construção da Estrada

2) Uma empresa, para construir uma estrada, cobra uma taxa fixa de 4 milhões de reais mais uma taxa que varia de acordo com o número de quilômetros de estrada construídos. O custo da obra, em milhões de reais, em função do número de km construído é dado por $C(x) = \frac{x}{10} + 4$

a) Uma empresa que possui, em seu orçamento, um valor de 6 milhões, consegue construir quantos quilômetros de estrada?

b) Supondo que há um erro de 5% no valor do orçamento previsto (6 milhões), qual será o raio em torno dos 20 km previstos?

c) Refaça o item (b) supondo um erro de 1% no orçamento

d) Vamos supor que a empresa deseja ter seu orçamento em torno de 6 milhões, com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno dos 20 quilômetros? A variação da quilometragem você pode denotar por δ.

Quadro 8.3 problema da construção da estrada

8.5. ANÁLISE A PRIORI

8.5.1 Análise a priori do primeiro módulo

Nesse módulo não há uma tarefa específica a ser realizada pelo estudante. Espera-se que os problemas contextualizados despertem o interesse do estudante em conhecer um pouco mais da história do surgimento do conceito de limite.

8.5.2 Análise a priori do segundo módulo

8.5.2.1 Primeira situação: monitorada pelo sistema

A primeira situação monitorada pelo sistema foi o problema da velocidade do carro de Fórmula I (ver figura 8.1).

Tarefa: Encontrar a velocidade média no item (a) e (b) e a velocidade instantânea no item (c).

Estratégia de Resolução:

Para os itens (a) e (b) têm-se a estratégia de resolução pela velocidade média: $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

A resolução dos itens (a) e (b) envolve o conceito de velocidade média. No item (a) pode-se dizer que é uma aplicação imediata da fórmula, já que o problema fornece a variação do tempo e do espaço através de um gráfico. O item (b) exige que o aluno primeiro encontre a variação do espaço para após aplicar o conceito de velocidade média. Nesse item podem aparecer dificuldades de encontrar essa variação de espaço, pois os alunos terão que encontrar a imagem do tempo inicial e final, isto é, $s(2)$ e $s(2+\Delta t)$. Nesse contexto, pode surgir a dificuldade de trabalhar com a imagem do ponto $t = 2 + \Delta t$, já que a função fornecida pelo problema é uma função quadrática, ou seja, $s(t) = 2t^2$.

No item (c) – velocidade instantânea, têm-se as seguintes estratégias:

i) Aplicação de limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{\Delta t}$$

ii) Velocidade média:

$$V_m = \frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{\Delta t}$$

Nesse item pode ocorrer a resolução através do conceito de velocidade média, já que a maioria dos alunos ainda não conhece a operacionalização de limites.

8.5.2.2 <u>Segunda situação – ambiente lápis e papel</u>

Um objeto é largado do topo de uma torre de 100m de altura. A distância que o objeto está do solo, após t segundos é $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$. Qual a velocidade do objeto após 2 segundos de queda?

Quadro 8.1: problema da queda de um objeto

Tarefa: Encontrar a velocidade instantânea do objeto no tempo t=2 segundos.

Estratégia de Resolução:

i) *Aplicação de limite*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ii) *Velocidade média*

O que também se pode prever é o cálculo da velocidade média no intervalo de 0 a 2 s, utilizando o conceito de velocidade média e não de velocidade instantânea, o que não é uma resolução correta do problema.

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{100 - 4{,}9(2)^2 - (100 - 4{,}9(0)^2)}{2 - 0} = -9{,}8m/s$$

8.5.3 Análise a priori do terceiro módulo

8.5.3.1 <u>Primeira situação: problema da conta telefônica</u>

A análise do problema da conta telefônica é a mesma utilizada no primeiro experimento (ver capitulo 5, p. 84-87).

8.5.3.2 <u>Segunda situação: problema da construção da estrada</u>

Na análise do problema da construção da estrada (ver quadro 8.3), pode-se destacar os seguintes itens:

e) A quilometragem

Tarefa: Encontrar o número de quilômetros que podem ser construídos com 6 (seis) milhões de reais.

Estratégias de Resolução:

Imagem inversa de um ponto pela função f: $C(x) = 6$

f) A inequação em cena

Tarefa: Encontrar o raio em torno de 20 km supondo que há um erro de 5% (cinco por cento) e 1% (um por cento) no orçamento, respectivamente.

Estratégias de Resolução

i) Inequações:

$$L - \varepsilon < C(x) < L + \varepsilon$$

ii) Imagem inversa de um ponto pela função f:

$$C(x) = L + \varepsilon \text{ e } C(x) = L - \varepsilon$$

iii) Definição de limite:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \text{ tal que } |C(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } |x - a| < \delta$$

g) A relação entre epsilon e delta:

Tarefa: Encontrar a relação genérica entre epsilon e delta.

Estratégia de Resolução:

i) Inequações:

$$6 - \varepsilon < C(x) < 6 + \varepsilon$$

ii) Definição de limite:

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \text{ tal que } |C(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } |x - a| < \delta$$

8.6. ANÁLISE A POSTERIORI

8.6.1 Introdução

A análise se apoiou sobre:

- As resoluções apresentadas às questões propostas em cada módulo;
- Protocolos dos observadores;
- Diagnóstico realizado pelo protótipo;
- Questionário de satisfação.

8.6.2 Análise a posteriori do primeiro módulo

Essa análise se apoiou no questionário de satisfação, já que nesse módulo não havia nenhuma tarefa específica.

Na pergunta "*a parte histórica bem como as situações problemas inseridas no protótipo representam um fator motivante para o ensino do conceito de limite?*" foram obtidos os seguintes percentuais de aprovação: 92 % (noventa e dois por cento) para a turma A; 85 % (oitenta e cinco por cento) para a turma B; 97 % (noventa e sete por cento) para a turma C e 94% (noventa e quatro por cento) para a turma D.

No gráfico 8.2 apresenta-se o grau de satisfação das turmas, em termos de percentuais.

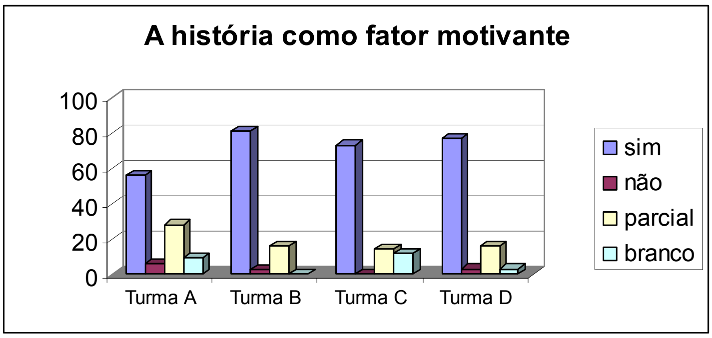


Gráfico 8.2 - percentual de aprovação do histórico

Na pergunta "*o protótipo apresenta recursos e estratégias dinâmicas que possam contribuir para a aprendizagem do aluno?*", foram obtidos os resultados:

- Na opinião de 89% (oitenta e nove por cento) dos alunos da turma A, o protótipo de maneira direta ou parcial apresenta recursos e estratégias dinâmicas que podem contribuir para a aprendizagem do aluno;
- Na visão de 82 % (oitenta e dois por cento) dos alunos da turma B o protótipo possui recursos dinâmicos. Desses, 28 % (vinte e oito por cento) ressaltaram que essas estratégias contribuem de maneira parcial;
- Na apreciação de todos os alunos da turma C o protótipo, de maneira total ou parcial, apresenta recursos e estratégias dinâmicas, sendo que desses, 86% (oitenta e seis por cento) concordam totalmente com a questão;
- A turma D revelou um índice de aprovação de 97 % (noventa e sete por cento). Sendo que desses, 23% (vinte e três por cento) dos alunos responderam que contribuem de maneira parcial.

No gráfico 8.3 esses resultados podem ser visualizados graficamente.

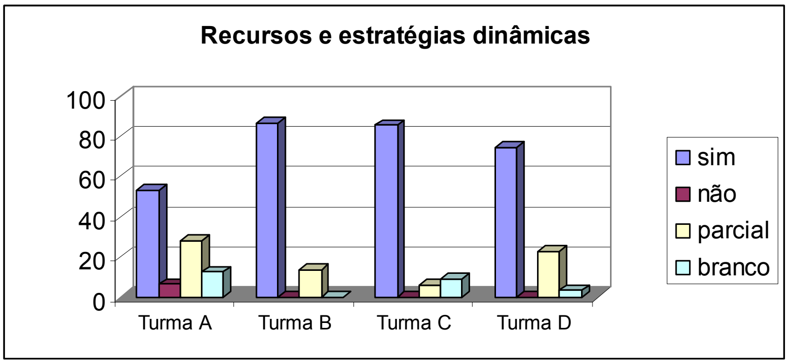


Gráfico 8.3: percentual da aprovação das estratégias dinâmicas

8.6.3 Análise a posteriori do segundo módulo

8.6.3.1 <u>Primeira situação: monitorada pelo protótipo</u>

No exemplo do carro de fórmula I (ver gráfico 8.1) determinar: a) a velocidade média no intervalo de tempo de 2 a 4 segundos. b) a velocidade média no intervalo de tempo de 2 a $2+\Delta t$ segundos. c) a velocidade instantânea no tempo t=2 segundos.

Quadro 8.4: exemplo do carro de fórmula I

Na primeira situação, monitorada pelo protótipo, constatou-se que para determinar a velocidade média do carro de fórmula I os alunos de todas as turmas não apresentaram nenhuma dificuldade quando a situação estava bem definida no intervalo de tempo de 2 a 4 segundos e a variação do espaço de 8 a 32 metros. Os alunos encontraram a solução: $V_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{32-8}{4-2} = 12 m/s$.

O problema surgiu quando foi solicitada a velocidade média no intervalo de 2 a 2+Δt e dada a função do espaço $s(t) = 2t^2$. Nesse momento, foi solicitada pelas duplas a ajuda oferecida pelo protótipo e também a ajuda dos professores presentes na sala. Eles não entendiam a variação do espaço, não observaram que deviam determinar a imagem desses pontos, ou seja, $s(2+\Delta t) - s(2)$. Um dos problemas foi a simbologia do espaço utilizada na função, já que a grande maioria dos nossos estudantes está habituada com a função expressa como $f(x)$. Depois da ajuda do sistema, constataram que deveriam encontrar a imagem do tempo inicial e final, substituindo na fórmula do espaço, fornecida pelo problema e então encontrar a velocidade média como: $V_m = 8 + 2\Delta t$.

Na seqüência foi solicitado para determinar a velocidade instantânea no ponto t=2 e então o protótipo dirigia o aluno a aplicar o $\lim\limits_{\Delta t \to 0}(8 + 2\Delta t)$ Nesse ponto, alguns alunos demonstraram dificuldade de entender porque o limite dava oito, já que os mesmos ainda não conheciam as propriedades de limites.

8.6.3.2 Segunda situação: ambiente lápis e papel

Um objeto é largado do topo de uma torre de 100m de altura. A distância que o objeto está do solo t segundos é $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$. *Qual a velocidade do objeto após 2 segundos de queda?*

Quadro 8.1: problema da queda de um objeto

Analisadas as resoluções apresentadas pelos alunos no ambiente lápis e papel, pode-se observar que:

Turma A

- 91 % (noventa e um por cento) utilizaram a estratégia do limite para resolver o problema;
- 9% (nove por cento) encontraram a velocidade média no intervalo de 0 a 2 segundos;
- Em algumas resoluções apresentadas pelas duplas não ocorria a aplicação do limite na expressão pelo fato dessa turma ainda não ter visto limite e não sabia como operacionalizar essa conta: $\lim_{\Delta x \to 0}(4{,}9\Delta t - 19{,}6)$.

Turma B

- 37,5% (trinta e sete e meio por cento) utilizaram a estratégia do limite para resolver o problema;
- 25% (vinte e cinco por cento) encontraram a velocidade média no intervalo de 0 a 2 segundos;
- 6% (seis por cento) utilizaram a estratégia do cálculo pela fórmula da física $v = v_o + at$, a qual não estava prevista na análise a priori;
- 12% (doze por cento) apenas iniciaram o problema, determinando o espaço no tempo t=2s, mas não determinaram a velocidade;
- 19 %(dezenove por cento) não realizaram a tarefa.

Turma C

- 23,5 % (vinte e três e meio por cento) utilizaram a estratégia do limite para resolver o problema;
- 23,5 % (vinte e três e meio por cento) encontraram a velocidade média no intervalo de 0 a 2 segundos;
- 12% (doze por cento) encontraram a velocidade utilizando a fórmula da física, $v = v_o + at$;
- 6% (seis por cento) tentaram utilizar o limite, mas não conseguiram determinar a velocidade instantânea no ponto t=2s;
- 35% (trinta e cinco por cento) entregaram a questão em branco.

Turma D

- 37,5% (trinta e sete e meio por cento) utilizaram a estratégia do limite para resolver o problema;
- 25% (vinte e cinco por cento) encontraram a velocidade média no intervalo de 0 a 2 segundos;
- 19,5% (dezenove e meio por cento) utilizaram a estratégia do cálculo pela fórmula da física $v = v_o + at$;
- 17,5%(dezessete e meio por cento) tentaram encontrar a solução utilizando outros métodos não chegando à solução correta.

Na seqüência apresenta-se uma análise de outros pontos relevantes que foram observados.

i) Propriedade do limite

No cálculo da velocidade instantânea ficou evidente a necessidade das propriedades dos limites. Os alunos determinavam a velocidade média no intervalo de 2 a $2+\Delta t$ segundos e na seqüência, para determinar a velocidade instantânea no ponto t igual a 2 s, utilizavam o limite de Δt tendendo a zero. Nesse momento, surgia a dúvida de como aplicar esse limite. No quadro 8.5, isso fica em evidência na resolução apresentada por uma das duplas, a qual não identificou o limite de uma constante.

$$\boxed{\begin{array}{l} v_m = -4,9\Delta t - 19,6 \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0}(-4,9\Delta t - 19,6) \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0}(-4,9.0 - 19,6) \\ \lim\limits_{\Delta t \to 0}(-19,6) \end{array}}$$

Quadro 8.5: Resolução apresentada por uma dupla da turma B

ii) Erro de cálculo

Alguns erros surgiram no contexto de determinar a imagem do tempo $t = 2+\Delta t$, ou seja, $h(2+\Delta t)$. Uma das duplas errou o produto notável, já que a função era $h(t) = 100 - 4,9(t)^2$, outra errou no sinal. Uma dupla também cometeu o seguinte erro:

determinou o $h(2) = 80,4m$ e ao substituir na fórmula da velocidade, efetuou a resolução conforme ilustra o quadro 8.6.

$$v_m = \frac{100 - 4,9(\Delta t + 2)^2 - (100 - 4,9(80,4)^2}{\Delta t}$$

Quadro 8.6: Resolução apresentada por uma dupla da turma B

Pode se observar que em vez de utilizar a imagem do tempo t=2s ela determinou o h do espaço encontrado. Esse foi o erro mais grave observado, já que não se trata de um erro de matemática básica, mas sim de conhecimento de funções.

iii) O uso do conhecimento da velocidade média

Um ponto bem pertinente é que todas as duplas da turma D que encontraram a velocidade instantânea no tempo t=2s resolveram a questão, inicialmente, encontrando a velocidade média no intervalo de tempo 2 a $2 + \Delta t$ segundos. E após isso aplicaram o limite de $\lim_{\Delta t \to 0} v_m$, conforme ilustra o quadro 8.7.

$$v_m = \frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{2 + \Delta t - 2}$$

$$v_m = \frac{(100 - 4,9(2+\Delta t)^2) - (100 - 4,9(2)^2)}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{(100 - 4,9(4 + 4\Delta t + \Delta t^2)) - (100 - 4,9.4)}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{\cancel{100} - \cancel{19,6} - 19,6\Delta t - 4,9\Delta t^2 - \cancel{100} + \cancel{19,6}}{\Delta t}$$

$$v_m = \frac{\cancel{\Delta t}(-19,6 - 4,9\Delta t)}{\cancel{\Delta t}} = -19,6 - 4,9\Delta t$$

$$v_i = \lim_{\Delta t \to 0}(-19,6 - 4,9\Delta t) = -19,6m/s$$

Quadro 8.7: Resolução apresentada por uma dupla da turma D

iv) Uso de conhecimentos da física

Algumas duplas utilizaram a fórmula $v = v_o + at$, conforme ilustrado pelo quadro 8.8.

$$\boxed{\begin{aligned} v &= 0 + (-9,8)2 \\ v &= -19,6m/s \end{aligned}}$$

Quadro 8.8: Resolução dada por uma dupla turma D

v) Uso da derivada

Uma das duplas da turma D que utilizou a fórmula física citada acima, utilizou o conhecimento de derivada para verificar se a velocidade encontrada estava correta. Essa dupla apresentou o desenvolvimento ilustrado no quadro 8.9:

$$\boxed{\begin{aligned} &h(t) = 100 - 4,9t^2 \\ &\frac{dh}{dt} = v(t) = -9,8t \\ &v(2) = -19,6m/s \end{aligned}}$$

Quadro 8.9: Resolução de uma dupla da turma D

O que se pode observar é que essa dupla já havia cursado a disciplina de cálculo diferencial e integral I, por isso já conhecia o conceito de derivada.

vi) Falta de tempo

Constatou-se que na turma C o tempo hábil para a realização da tarefa não foi suficiente. Muitos alunos navegaram pelo ponto histórico contemplado pelo programa e após pelo ponto de vista cinemático. Devido a uma navegação mais detalhada desses tópicos vários alunos resolveram apenas a primeira situação apresentada no ambiente computacional, não tendo tempo hábil de resolver a segunda situação apresentada no ambiente lápis e papel.

8.6.4 Análise a posteriori do terceiro módulo

Inicialmente, vamos explanar a análise a posteriori das turmas A e D, as quais navegaram pelo problema da conta telefônica.

8.6.4.1 Primeira situação – problema da conta telefônica

a) A função em cena

Analisadas as resoluções apresentadas pelos alunos das turmas A e D, podem-se destacar os seguintes pontos:

- A estratégia de resolução pela função linear foi realizada por 70% (setenta por cento) dos alunos da turma A e por 82% (oitenta e dois por cento) dos alunos da turma D;
- Os demais alunos resolveram a questão utilizando o raciocínio lógico.

b) A inequação em cena

- A estratégia da i*magem inversa de um ponto pela função f,* ou seja, encontrando $f(x)=45$ e $f(x)=55$ no item (b) e $f(x)=48$ e $f(x)=52$ no item (c), foi utilizada por 42% (quarenta e dois por cento) dos alunos da turma A e 55% (cinqüenta e cinco por cento) da turma D;
- 29% (vinte e nove por cento) dos alunos da turma A e apenas 9% (nove por cento) da turma D, usaram a estratégia de inequações, ou seja, determinaram $45 < f(t) < 55$ e $48 < f(t) < 52$ para o item (b) e (c), respectivamente;
- A estratégia do raciocínio lógico foi utilizada por 29% (vinte e nove por cento) dos alunos da turma A e por 27% (vinte e sete por cento) dos alunos da turma D, deduzindo que para uma variação de 5 (cinco) e 2(dois) reais, acarretava uma variação no tempo de 10 (dez) e 4 (quatro) minutos, respectivamente.

c) O gráfico em cena

Todos os alunos concluíram diretamente no sistema, e alguns no ambiente lápis e papel que o tempo se aproximava de t igual a 30 minutos. Na turma A, verificou-se que 79% (setenta e nove por cento) utilizaram o ambiente lápis e papel para construir o gráfico das situações anteriores.

d) A relação entre δ e ε

Pela análise das resoluções recolhidas das duplas e pela observação das discussões em sala de aula, constatou-se que esse item gerou muita discussão e algumas duplas não conseguiram resolver a questão. Nesse momento, a navegação pela ajuda oferecida pelo sistema foi bastante acessada. Em uma análise geral, pode-se destacar:

Na turma A

- 50% (cinqüenta por cento) dos alunos da turma A encontraram a relação utilizando a estratégia de inequacões;
- 8 % (oito por cento) dos alunos fizeram uso de funções modulares;
- 29 % (vinte e nove por cento) estabeleceram a relação entre epsilon e delta, utilizando um raciocínio não previsto na análise a priori. Resolveram a questão conforme ilustra o quadro 8.10.

$$\begin{array}{lcl}
f(30+d)=50+e & & f(30-d)=50-e \\
35+\frac{1}{2}(30+d)=50+e & & 35+\frac{1}{2}(30-d)=50-e \\
 & \text{e} & \\
35+15+\frac{1}{2}d=50+e & & 35+15-\frac{1}{2}d=50-e \\
d=2e & & d=2e
\end{array}$$

Quadro 8.10: Resolução dada por uma dupla da turma A

- 13% (treze por cento) dos alunos não conseguiram estabelecer a relação correta entre epsilon e delta.

Na turma D

- 55% (cinqüenta e cinco por cento) utilizaram a definição de limite para resolver esse item, encontrando corretamente a relação entre epsilon e delta;
- 19% (dezenove por cento) utilizaram uma estratégia que não tinha sido prevista na análise a priori. Os alunos utilizaram o raciocínio ilustrado no quadro 8.11.

$$\boxed{\begin{array}{l} C(x) = 35 + 0,5x \\ 50 + E = 35 + 0,5(30 + D) \\ 50 + E = 35 + 15 + 0,5D \\ E = 0,5D \\ D = 2E \end{array}}$$

Quadro 8.11: Resolução de uma dupla da turma D

- 19% (dezenove por cento) deixaram a questão em branco.

O que ficou em evidência nessa aplicação é que a turma A conseguiu estabelecer a relação entre epsilon e delta sem ter nenhum conhecimento sobre a definição de limite pelo ponto de vista de aproximação. A turma utilizou o conhecimento de inequacões e funções modulares, sem aplicar a definição de limite, já que não tinha esse conhecimento. A turma D, a qual já conhecia a definição de limite, utilizou, na grande maioria, a definição de limite para resolver o problema.

A seguir, apresentam-se outros pontos pertinentes da observação.

i) Intervalo ou raio?

Uma das dificuldades que ficou em evidência foi a digitação da resposta desse item. Os alunos encontravam o intervalo da variação do tempo, por exemplo , $20 < t < 40$, no item (b). Como a questão perguntava qual era o raio de variação em torno do tempo t igual a 30 minutos, muitos dos alunos queriam digitar o intervalo e não o raio de variação, que para o exemplo citado acima era igual a 10.

ii) O diagnóstico da turma A

O diagnóstico, armazenado no protótipo, revela que as duplas que navegaram pelo protótipo não tiveram dificuldades em resolver esse problema. Algumas duplas necessitaram da ajuda do sistema para encontrar a relação genérica entre epsilon e delta, mas a grande maioria conseguiu estabelecer corretamente essa relação. Algumas duplas deixaram sua resolução no computador, outras entregaram no papel. As figuras 8.1 e 8.2 ilustram o diagnóstico realizado pelo sistema, identificando as resoluções, as quais exemplificam estratégias distintas, apresentadas pelas duplas.

HOROS - D I A G N Ó S T I C O
Nome: Ramon
Curso: Engenharia de Produção
Está cursando CDI-I pela primeira vez?: sim
PROBLEMA DA CONTA TELEFÔNICA
item a)

f(x)=ax+b
50=0,5x+35
x=30min

Diagnóstico
Não apresentou dificuldade de resolver esse item
item b)
Resolução:

45<ax+b<55
45<0,5x+35<55
10<0,5x<20
20<x<40
Resposta: 10

Diagnóstico
não apresentou dificuldades para resolver esse item
item c)
Resolução:

48<ax+b<52
48<0,5x + 35<52
13<0,5x<17
26<x<34
x=4

Diagnóstico
não apresentou dificuldades para resolver esse item
item d)
O tempo está mais próximo de t=30

item e)
Resolução:

50-E<f(t)<50+E
50-E<0,5x+35<50+E
50-50-E<0,5x+35-50<50-50+E
-E<0,5-15<E
I 0,5x-15 I<E
I x-30 I<E
I x-30 I<2E
30-D<t<30+D
30-30-D<t<30-30+D
I t-30 I<D
Então D=2E

Diagnóstico
Estabeleceu corretamente a relação entre epsilon e delta

Figura 8.1: A estratégia de inequações apresentada por uma dupla da turma A

HOROS – D I A G N Ó S T I C O
Nome: Anônimo
Curso: Engenharia de Produção
Está cursando CDI-I pela primeira vez?: sim
PROBLEMA DA CONTA TELEFÔNICA
item a)

$$f(t)=35+0,5t$$
$$50=35+0,5t$$
$$t=30 \text{ minutos}$$

Diagnóstico
Não apresentou dificuldade de resolver esse item

item b)
Resolução:

$$f(t)=35+0,5t$$
$$45=35+0,5t$$
$$t=20 \text{ minutos}$$
$$f(t)=35+0,5t$$
$$55=35+0,5t$$
$$t=40 \text{ minutos}$$

Diagnóstico
não apresentou dificuldades para resolver esse item

item c)
Resolução:

$$f(t)=35+0,5t$$
$$48=35+0,5t$$
$$t=26$$
$$f(t)=35+0,5t$$
$$52=35+0,5t$$
$$t=34$$
$$t=4 \text{ minutos}$$

Diagnóstico
não apresentou dificuldades para resolver esse item

item d)

O tempo está mais próximo de t=30

item e)
Resolução:

No papel

Diagnóstico
Foi necessária a ajuda do sistema para estabelecer a relação entre epsilon e delta

Figura 8.2: A estratégia dos extremos apresentada por uma dupla da turma A

Vale ressaltar que algumas duplas conseguiram navegar por outros problemas do ponto de vista de aproximação, já que realizaram de maneira mais rápida o problema da conta telefônica. Quatro duplas navegaram pelo problema da construção da estrada, apresentando de maneira correta a solução do problema. A figura 8.3 evidencia o procedimento utilizado.

HOROS - D I A G N Ó S T I C O

Nome: Ramon
Curso: Engenharia de Produção

PROBLEMA DA CONSTRUÇÃO DA ESTRADA

item a)
Resolução:

$6=x/10 +4$
$60=x+40$
$x=20$ Km

Diagnóstico
não apresentou dificuldades para resolver esse item
item b)
Resolução:

6 milhões--------100%
x ----------5%
x=0,3 milhões
$6-0,3<x/10 + 4<6+0,3$
$5,7<x/10 +4<6,3$
$57<x+40<63$
$17<x<23$
$23-17=6$
Então o raio é 3

Diagnóstico: não apresentou dificuldade para resolver esse item
item c)
Resolução:

milhões____100%
x _____1%
x= 0,06 milhões
$60-0,06<x/10 + 4<60+0,06$
$59,4<x+10<60,6$
$19,4<x<20,6$
$20,6-19,4=1,2$
Então o raio é 0,6

Diagnóstico
não apresentou dificuldade para resolver esse item

item d)
Resolução:

$6-E<x/10+4<6+E$
$6-E<x+40/10<6+E$
$60-10E<x+40<60+10E$
$-60+60-10E<x+40-60<60-60+10E$
$-10E<x-20<10E$
$|x-20|<10E$
$x-20<10E$
$20-D<x<20+D$
$X-20<D$
$D=10E$

Diagnóstico: Estabeleceu corretamente a relação entre epsilon e delta.

Figura 8.3: Resolução da segunda situação realizada por uma dupla da turma A

A turma D trabalhou bastante em paralelo no ambiente lápis e papel. As resoluções foram entregues em papel. No protótipo ficou registrada a seqüência realizada pelos estudantes bem como as respostas dadas ao problema, evidenciando que a grande maioria dos alunos solicitaram ajuda do sistema para encontrar a relação entre epsilon e delta no item e).

8.6.4.2. Segunda situação- problema da construção da estrada

A turma B não realizou a tarefa da conta telefônica porque a professora já tinha trabalhado em sala de aula. Então foi solicitado que os alunos navegassem pelo problema da construção da estrada.

a) Função em cena

Analisadas as resoluções apresentadas pelas duplas participantes, observou-se que 100% (cem por cento) das duplas resolveram a questão corretamente, utilizando a estratégia da *Imagem inversa de um ponto pela função f,* ou seja, determinando $C(x)=6$.

b) A inequação em cena

- 100% (cem por cento) das duplas apresentaram a resolução para o item (b) e (c);
- 40% (quarenta por cento) das duplas resolveram a questão utilizando a estratégia de inequações;
- 40% (quarenta por cento) das duplas resolveram a questão utilizando a estratégia da *Imagem inversa de um ponto pela função f,* ou seja, determinando $C(x)=6,3$ e $C(x)=6,01$ para os itens (b) e (c), respectivamente.
- 20% (vinte por cento) das duplas utilizaram o conceito de limite, ou seja, identificaram o ε=0,3 e ε=0,1 para o item (b) e (c), respectivamente, e encontraram o delta em função do epsilon específico.

c) A relação entre ε e δ.

- 67% (sessenta e sete por cento) das duplas conseguiram estabelecer corretamente a relação genérica entre epsilon e delta;

- 26% (vinte e seis por cento) esboçaram tentativas de resoluções, mas não conseguiram estabelecer a relação genérica entre epsilon e delta;
- 7% (sete por cento) não realizaram a tarefa;
- A grande maioria que estabeleceu a relação genérica entre epsilon e delta resolveu através do conceito de limite.

A figura 8.4 apresenta a atividade desenvolvida por uma dupla no ambiente computacional.

HOROS - D I A G N Ó S T I C O

Nome: fabiano/toni
Curso: Física
PROBLEMA DA CONSTRUÇÃO DA ESTRADA

item a
Resolução:

$$c(x)=x/10 + 4$$
$$6=x/10+4$$
$$x=20\text{km.}$$

Diagnóstico
não apresentou dificuldades para resolver esse item.

item b
Resolução:

$$E= 5/100*6$$
$$E=+\text{ou-}\ 3/10.$$
$$\text{p/ } 6+3/10 \qquad \text{p/ } 6-3/10$$
$$6+3/10=x/10+4 \qquad 6-3/10=x/10+4$$
$$x=23. \qquad x=17.$$

Diagnóstico
Foi necessária a ajuda do sistema para resolver esse item.

item c
Resolução:

$$E= 1/100*6$$

$$E=+\text{ou-}\ 3/50.$$
$$\text{p/ } 6+3/50 \qquad \text{p/ } 6-3/50$$
$$6+3/50=x/10+4 \qquad 6-3/50=x/10+4$$
$$x=20.6. \qquad x=19.4.$$

Diagnóstico
Não apresentou dificuldade para resolver esse item

item d)
Resolução:

$$\text{p } E > 0 \text{ , e } D > 0 \text{ /:} \qquad / f(x)-L / < E \text{ sempre que } / x-a/ < D$$
$$6-E< C(x) < 6+E \quad \text{sempre que} \quad 20-D< x <20+D$$
$$-E< x/10+4-6 < E \qquad -D< x-20 <D$$
$$-E< x/10-2 <E$$
$$-10E<x-20<10E$$
$$D=10E$$

Diagnóstico: estabeleceu corretamente a relação entre epsilon e delta.

Figura 8.4: Resolução apresentada por uma dupla da turma B

Na seqüência são explanados outros pontos pertinentes que foram observados.

i) Comparação com a questão da conta telefônica

Uma dupla observada, ao resolver os itens (b) e (c) não conseguiu identificar o raio correto. Então a dupla comparou a questão com o problema da conta telefônica, com o intuito de resolver a questão, apresentando a resolução conforme quadro 8.12.

<table>
<tr><td colspan="2">∀ε>0 ∃ δ>0 / $|f(x)-L|<L$ sempre que $|x-a|<\delta$.</td></tr>
<tr><td>$6-erro<\frac{x}{10}+4<6+erro$
$-e<\frac{x}{10}-2<e$
$\left|\frac{x}{10}-2\right|<e$
[1]</td><td>$|x-20|<d$
$\left|\frac{x}{10}-20\right|<\frac{d}{10}$
[2]</td></tr>
<tr><td colspan="2">De [1] e [2] conclui-se que d=10e.</td></tr>
</table>

Quadro 8.12: Resolução das inequações por uma dupla da turma B

Constatou-se que com essa resolução a dupla evitou trabalhar com as propriedades de módulos (módulo da soma, módulo do quociente). Os símbolos “ e ” e “ d ” foram bastante utilizados devido a digitação no programa (o teclado não aceita letras gregas).

Constatou-se em termos de navegação que a disponibilização da ajuda foi bastante utilizada nas resoluções dos itens (b) e (d).

ii) Falta de tempo

Na turma B, aconteceu um fato bem relevante que foi o grande empenho que os alunos demonstraram na navegação pelos problemas inseridos no protótipo. Ao término da aula, os alunos não se retiraram do laboratório, ficaram navegando pelo sistema. Assim mesmo, muitos deles não chegaram a realizar todas as tarefas contempladas pelo protótipo. Na seqüência, explanamos situações que evidenciam a preocupação das duplas com o tempo e com a curiosidade de navegar por todos os exercícios propostos pelo protótipo. “ *Ao resolver a questão da construção da estrada ficaram muito contentes com o resultado, mas estão agoniadas porque estão atrasadas em relação aos demais (...)”* (notas da observadora). Na seqüência, resolveram a questão proposta pelo protótipo que é uma questão de demonstração de limite. "*Gostaram da resolução dessa questão. Iniciaram a resolução com mais facilidade. Ficaram indignadas por não finalizarem todas as atividades propostas pelo protótipo*" (notas da observadora) .

iii) A preocupação com a disponibilização do protótipo

Muitos alunos questionaram sobre a disponibilização do protótipo. A autora do presente trabalho respondeu que assim que as sugestões de melhoria fossem realizadas a disponibilização seria gratuita. Enquanto isso eles poderiam utilizar o laboratório para navegar pelo sistema.

> "Por favor disponibilizem o CD para uso em casa do aluno" (um aluno da turma B).
>
> "Distribuir o programa e a ele atribuir novos assuntos, quem sabe álgebra"(um aluno da turma B).

iv) A resolução de outras atividades

Após terem navegado pelo problema analisado, algumas duplas navegaram por outros problemas propostos pelo protótipo. Verificou-se que 60% (sessenta por cento) dos alunos navegaram pelos outros dois exercícios que contemplavam o conceito de limite, efetuando a tarefa corretamente.

A figura 8.5 ilustra um diagnóstico realizado pelo próprio protótipo.

Problema: demonstre que $\lim_{x \to 1}(5x - 1) = 4$

HOROS - D I A G N Ó S T I C O
Nome: thaise, cátia
Curso: Física
DEMONSTRAÇÃO
Resolução:
-e<5x-1-4<e ,se -d<x-1<d
5-e<5x<5+e
1-e/5<x<1+e/5
-e/5<x-1<e/5
Então para cada d teremos e/5
d=e/5
Diagnóstico

Não apresentou dificuldade para encontrar a relação entre epsilon e delta.

Figura 8.5: Resolução da atividade de limite por uma dupla da turma B

8.7. INSTITUCIONALIZAÇÃO

O conceito de limite, na turma A, foi formalizado após os alunos terem navegado pelo ponto de vista cinemático e após todos terem desenvolvido a resolução do problema da conta telefônica. A explanação do conceito aconteceu fazendo-se um paralelo com o problema em questão. Como as turmas B e D já tinham visto a definição de limite em sala, a aplicação do protótipo serviu para reforçar e ajudar na compreensão do limite pelo ponto de vista de aproximação. A turma D teve uma explanação rápida pelo ponto de vista cinemático em virtude do tempo disponível. Na turma D foi possível fazer uma explanação mais detalhada tanto no ponto de vista de aproximação quanto no cinemático em virtude do maior número de aulas utilizadas na experimentação. Na turma C somente foi feita a apresentação formal do limite pelo ponto de vista cinemático devido ao tempo de aplicação e levando em consideração que essa turma já tinha visto a definição de limite pelo ponto de vista de aproximação, em sala.

8.8. ANÁLISE A POSTERIORI DO PROTÓTIPO

8.8.1. A interface

Quanto à interface do protótipo foram avaliados os seguintes itens:

a) Uso de cores;
b) Uso de quadros e janelas;
c) Disposição de texto;
d) Disposição de botão;
e) Tamanho e cor da fonte;
f) Simplicidade e clareza da linguagem utilizada.

Quanto ao uso de cores o protótipo teve uma aprovação na escala de bom a ótimo de 84% (oitenta e quatro por cento) nas turmas A e D, 94% (noventa e quatro por cento) na turma B, 88% (oitenta e oito por cento) na turma C.

O "uso de quadros e janelas" obteve uma aprovação de bom a ótimo de 62% (sessenta e dois por cento) na turma A, 73% (setenta e três por cento) na turma B, 94% (noventa e quatro por cento) na turma C e 84% (oitenta e quatro por cento) na turma D.

A "disposição de texto" obteve uma aprovação de 84% (oitenta e quatro por cento) na turma A, 76% (setenta e seis por cento) na turma B, 94% (noventa e quatro por cento) na turma C e 32% (trinta e dois por cento) na turma D. Na turma D, 58% (cinquenta e oito por cento) disseram que estava regular a disposição de textos.

O item "disposição de botão" obteve uma aprovação de 66% (sessenta e seis por cento) da turma A, 76% (setenta e seis por cento) da turma B, 91% (noventa e um por cento) da turma C e 80% (oitenta por cento) da turma D.

Quanto ao "tamanho e cor da fonte" a aprovação foi de 81% (oitenta e um por cento) na turma A, 89% (oitenta e nove por cento) na turma B, 97% (noventa e sete por cento) na turma C e 100% (cem por cento) na turma D.

No quesito "simplicidade e clareza da linguagem coloquial utilizada" obteve-se a aprovação de 72% (setenta e dois por cento) na turma A, 89% (oitenta e nove por cento) na turma B, 97% (noventa e sete por cento) na turma C e 93% (noventa e três por cento) na turma D.

Constata-se que segundo o questionário de satisfação aplicado, no critério interface o protótipo conseguiu uma boa aprovação das turmas. Os usuários sugeriram algumas mudanças no sentido de melhorar a interface do programa, tais como as citadas abaixo:

> "Botões melhor posicionados" (um aluno da turma C)
>
> "Utilizar quadros e botões mais arrojados. Colocar mais botões de "voltar" nos exemplos para facilitar a identificação dos possíveis erros e ou acertos passados" (um aluno da turma D).

“Seria interessante estabelecer alguma forma de que navegando na questão (alternativa a,b, c, etc) pudéssemos ir e voltar nas resoluções*”* (um aluno turma B).

Os gráficos 8.4, 8.5, 8.6 e 8.7 apresentam a avaliação da interface nas turmas A, B, C e D, respectivamente.

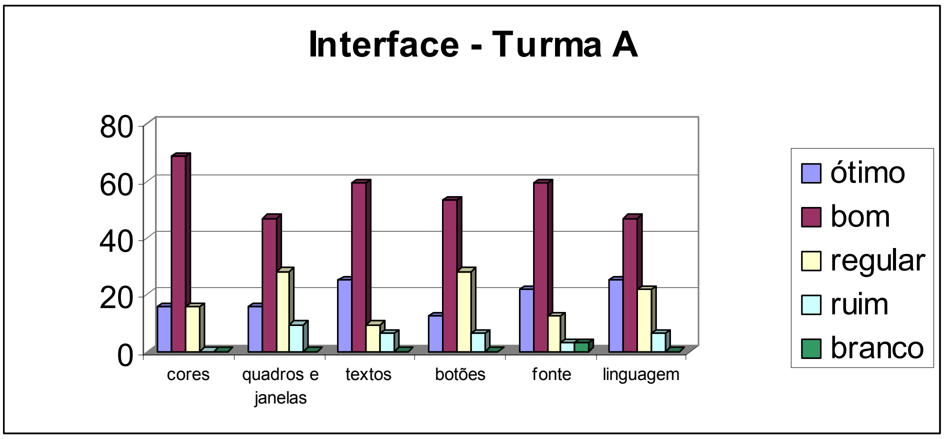


Gráfico 8.4: Interface turma A

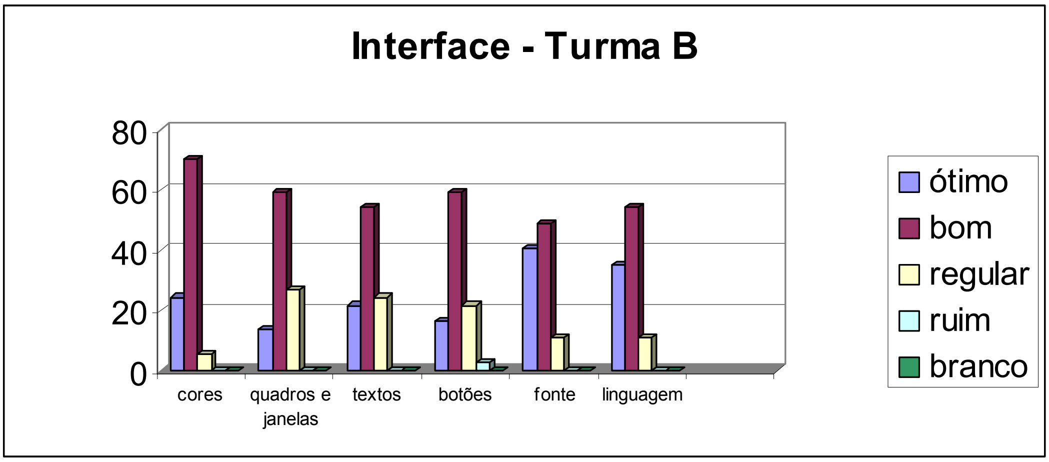


Gráfico 8.5: Interface turma B

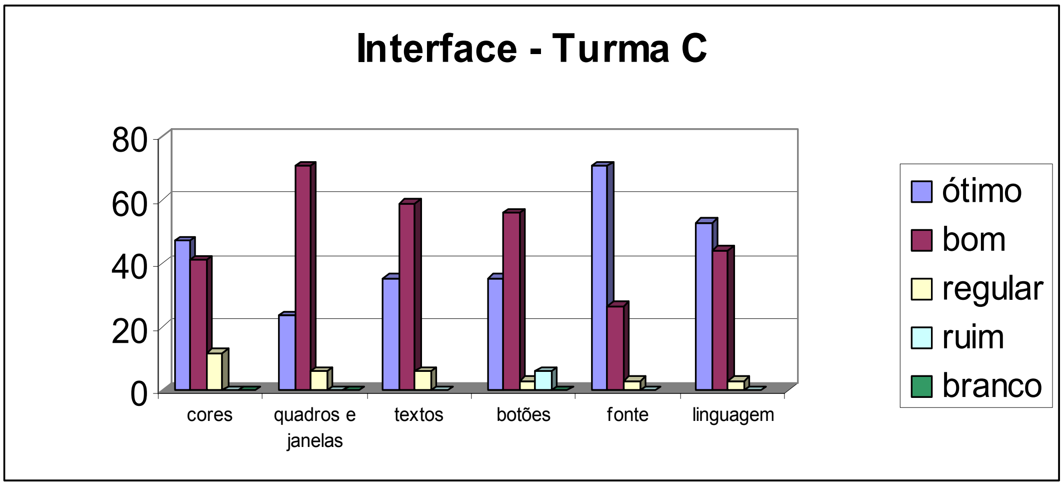


Gráfico 8.6: Interface turma C

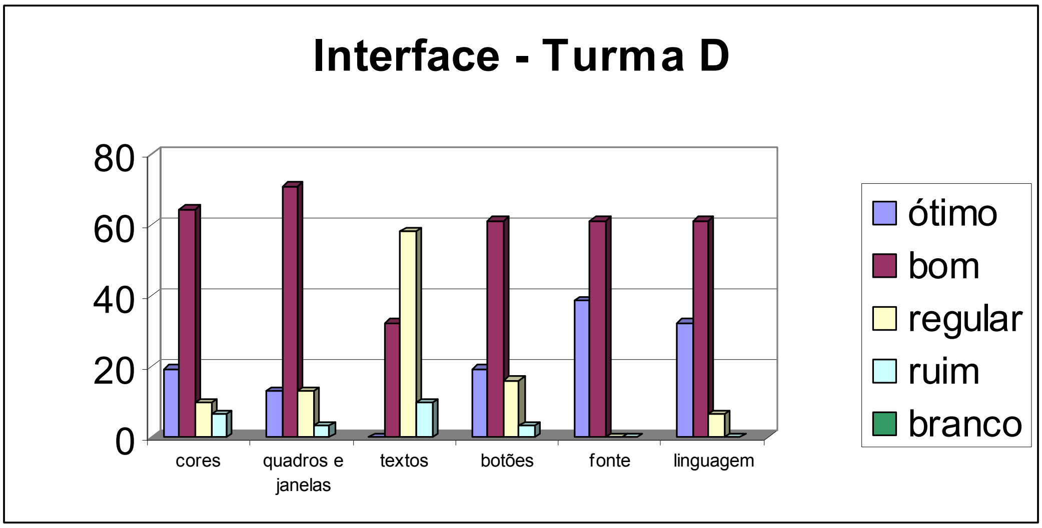


Gráfico 8.7: Interface turma D

8.8.2. A avaliação do produto

Quanto à avaliação do produto foram questionados os seguintes quesitos:

1. O software disponibiliza ao usuário opção de ajuda?
2. As opções de dicas ajudaram você a resolver o problema?
3. O banco de ajuda disponível nesse protótipo está adequado?
4. O protótipo apresenta flexibilidade quanto à navegação?
5. O protótipo contempla entrada de dados?
6. Você encontrou algum erro proveniente de entrada de dados?
7. Você encontrou algum erro nas respostas dos problemas propostos?

8. Você identificou algum erro na armazenagem das ações realizadas (pontuação, identificação de ajuda, etc) no decorrer de sua navegação?

Na turma A, foram obtidos os seguintes resultados:

- De maneira total ou parcial mais de 80% dos usuários da turma A aprovaram as opções de ajuda contempladas pelo protótipo. O índice de satisfação, na grande maioria dessa turma, foi de maneira parcial;
- 18% (dezoito por cento) dos usuários revelaram que o software não apresenta flexibilidade de navegação;
- 37% (trinta e sete por cento) dos alunos encontraram algum erro proveniente da entrada de dados; 31% (trinta e um por cento) dos estudantes encontraram algum erro nas respostas dos problemas e 9% (nove por cento) encontraram algum erro de armazenagem.

Na seqüência, esses resultados são ilustrados no gráfico 8.8.

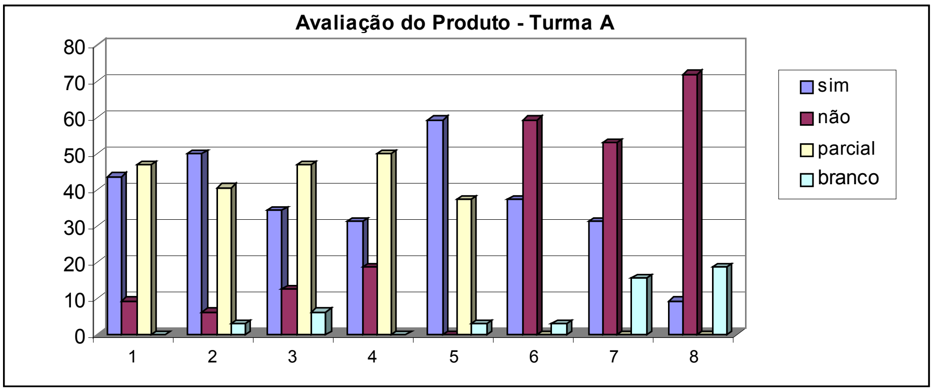


Gráfico 8.8: Avaliação do produto – turma A

1. Opções de ajuda
2. 2.Auxílio das dicas
3. Ajuda adequada
4. flexibilidade
5. Entrada de dados
6. Erro de dados
7. Erro de resposta
8. Erro de armazenagem

Legenda da avaliação do produto[27]

[27] Essas questões estão explanadas nas páginas 195-196

Na turma B, foram obtidos os seguintes índices:

- Com índice superior a 89% (oitenta e nove por cento) os alunos aprovaram de maneira integral ou parcial os quesitos a respeito da ajuda contemplada pelo protótipo.
- A flexibilidade de navegação foi aprovada, na íntegra, por um percentual de 78% (setenta e oito por cento);
- 35 % (trinta e cinco por cento) encontraram algum erro proveniente de entrada de dados; 8% (oito por cento) encontraram algum erro na resposta de problemas e 10% (dez por cento) algum erro de armazenagem.

Na seqüência, os dados são expressos no gráfico 8.9.

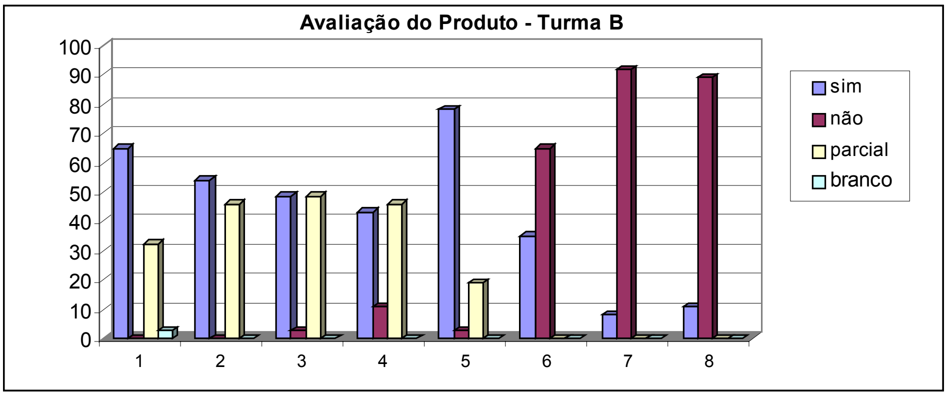


Gráfico 8.9: Avaliação do produto – turma B

1- Opções de ajuda
2- Auxílio das dicas
3- Ajuda adequada
4- flexibilidade
5- Entrada de dados
6- Erro de dados
7- Erro de resposta
8- Erro de armazenagem

Legenda da avaliação do produto[28]

Na turma C, foram obtidos os seguintes resultados:

[28] Essas questões estão explanadas nas páginas 195-196

- O banco de ajuda foi aprovado por 97% (noventa e sete por cento) dos usuários. A maioria desses deu a aprovação na integra.
- 78% (setenta e oito por cento) acharam o protótipo flexível.
- Poucos encontraram algum erro de dados, sendo que o maior índice ficou para erro de entrada de dados correspondente a 17% (dezessete por cento).

O gráfico 8.10 ilustra a avaliação do produto na turma C.

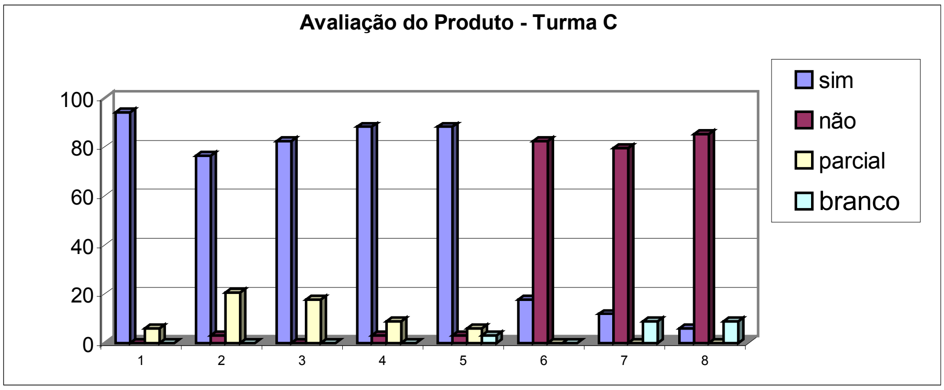


Gráfico 8.10: Avaliação do produto – turma C

1- Opções de ajuda
2- Auxílio das dicas
3- Ajuda adequada
4- Flexibilidade
5- Entrada de dados
6- Erro de dados
7- Erro de resposta
8- Erro de armazenagem

Legenda da avaliação do produto[29]

Na turma D, obtiveram-se os seguintes resultados:

- Quanto à ajuda do sistema uma aprovação superior a 90% (noventa por cento) de maneira integral ou parcial;
- 51 % (cinqüenta e um por cento) acharam o programa inteiramente flexível e 38% (trinta e oito por cento) de maneira parcial;

[29] Essas questões estão explanadas nas páginas 195-196

- 16% (dezesseis por cento) encontraram algum erro proveniente de entrada de dados e apenas 3% (três por cento) algum erro de armazenagem.

O gráfico 8.11 ilustra a avaliação do produto nessa turma.

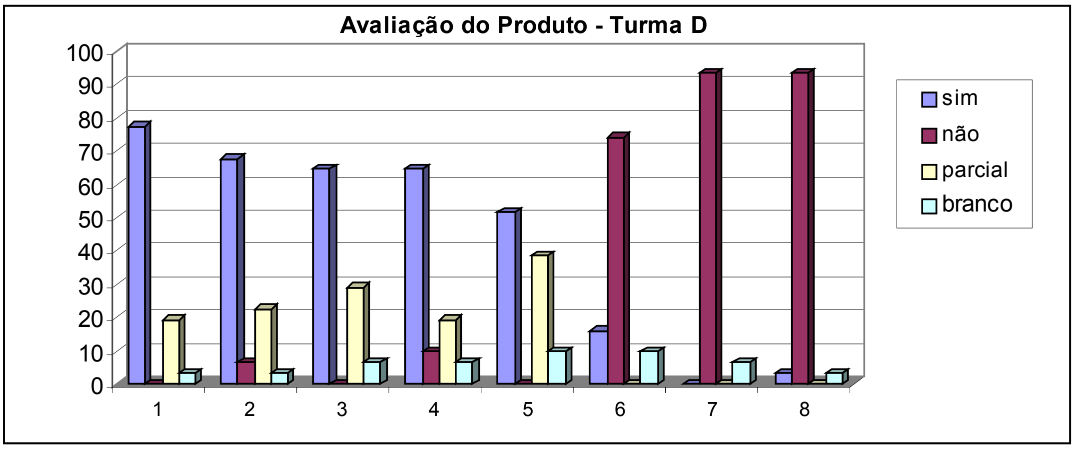


Gráfico 8.11: Avaliação do produto – turma D

1- Opções de ajuda
2- Auxílio das dicas
3- Ajuda adequada
4- Flexibilidade
5- Entrada de dados
6- Erro de dados
7- Erro de resposta
8- Erro de armazenagem

Legenda da avaliação do produto[30]

8.8.3. Avaliação do contexto

Na avaliação do contexto, foram observados os seguintes quesitos:

1. O protótipo apresenta recursos e estratégias dinâmicas que possam contribuir para a aprendizagem do aluno?
2. A parte histórica bem como as situações problemas inseridas no protótipo representam um fator motivante para o ensino do conceito de limite?
3. O diagnóstico que o Horos fez a respeito de sua navegação está coerente com suas dificuldades?

[30] Essas questões estão explanadas nas páginas 195-196

4. A dificuldade apresentada na resolução do problema foi devido a:
5. Você como aluno, acha que o uso do protótipo ajuda na aprendizagem do conceito de limite?

Os quesitos (1) e (2) foram explorados na análise a posteriori do primeiro módulo.

Quanto ao diagnóstico apresentado pelo protótipo, vamos analisar as respostas dadas pelas turmas A, B e D, já que a turma C, não navegou pelo módulo do ponto de vista de aproximação.

- Na turma A, 37 % (trinta e sete por cento) responderam que o diagnóstico estava coerente com as dificuldades. Nessa turma, teve um índice bastante grande de respostas em branco, pois várias duplas trabalharam no ambiente lápis e papel, devido à falta de computadores.

- Na turma B, 56% (cinqüenta e seis por cento) responderam que o diagnóstico estava coerente de maneira parcial e 36% (trinta e seis por cento) de maneira total.
- Na turma D, 93% (noventa e três por cento) responderam que de maneira parcial ou total o diagnóstico estava coerente com as dificuldades apresentadas.

O gráfico 8.12 ilustra esses resultados em termos de percentuais.

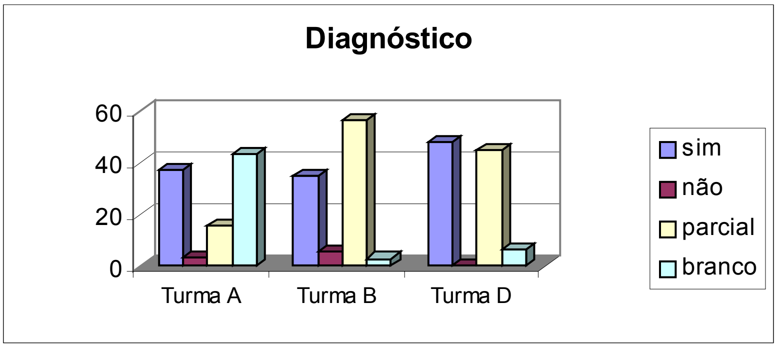


Gráfico 8.12: Coerência do diagnóstico

A dificuldade apresentada na resolução dos problemas foi proveniente dos seguintes fatores:

- Na turma A, 69% (sessenta e nove por cento) dos alunos responderam que foi devido ao conteúdo desconhecido;
- Na turma B, 54% (cinqüenta e quatro por cento) também respondeu que foi devido ao conteúdo desconhecido.
- Nas turmas C e D aparece um índice de falha na matemática básica de aproximadamente 20% (vinte por cento). Mas também aparecem, em ambas as turmas, um índice superior a 30% (trinta por cento) relativo ao conteúdo desconhecido.

O gráfico 8.13 apresenta os fatores de dificuldades apresentadas na resolução das atividades propostas.

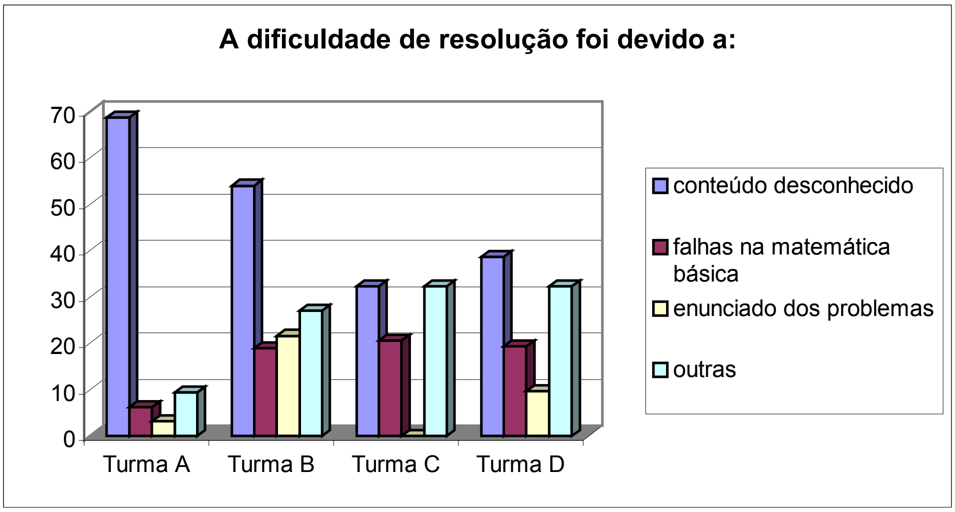


Gráfico 8.13: fatores das dificuldades

Quanto ao auxilio do protótipo no processo de ensino aprendizagem do conceito de limite, obteve-se o seguinte resultado:

- Na turma A, houve uma aprovação de 69% (sessenta e nove por cento) dos usuários.
- 97% (noventa e sete por cento) de aprovação na turma B;
- 88% (oitenta e oito por cento) e 93 % (noventa e três por cento) de aprovação para as turmas C e D, respectivamente.

O gráfico 8.14 ilustra a aprovação do protótipo no quesito de auxilio de aprendizagem.

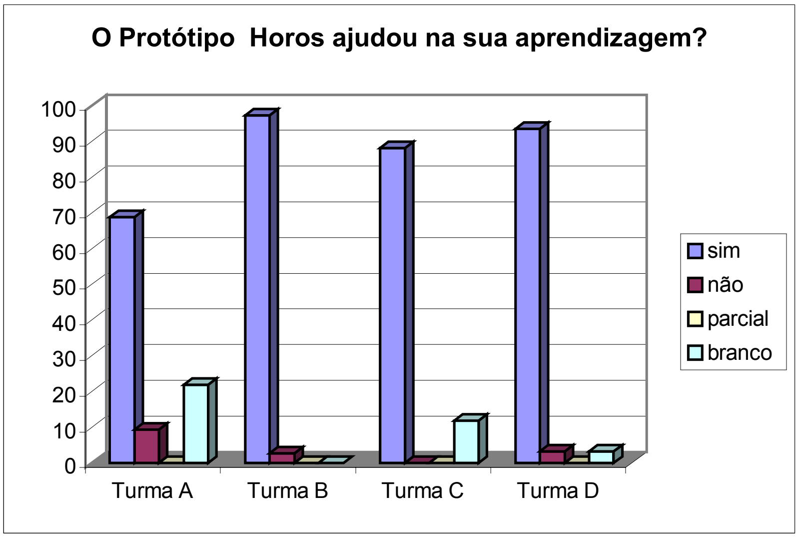


Gráfico 8.14: Auxílio na aprendizagem com a inserção do protótipo

Numa pergunta de múltipla escolha pode-se observar de que maneira o protótipo contribuiu para a compreensão do conceito de limite;

- Observa-se que a contextualização é um quesito marcante em todas as turmas;

- Outro ponto forte do sistema foi o uso de recursos gráficos.

Esses dois pontos estão relacionados ao limite de ponto de vista de aproximação e cinemático, respectivamente.

O gráfico 8.15 ilustra as principais contribuições do uso da ferramenta Horos no processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite.

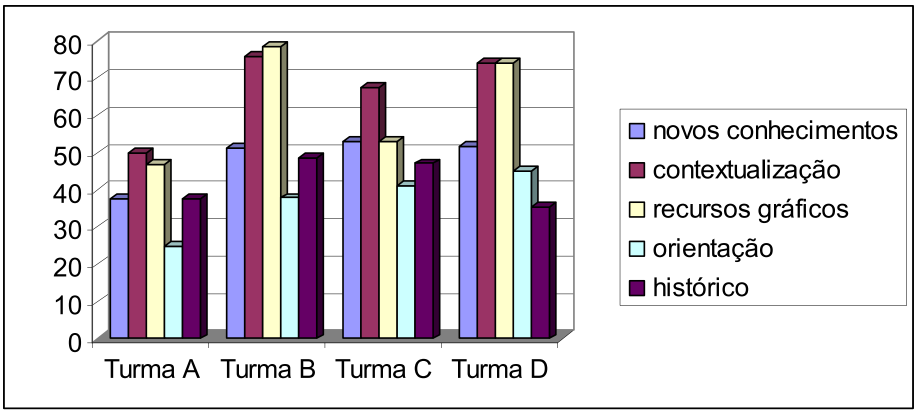


Gráfico 8.15: Contribuições do protótipo Horos

Nos comentários gerais alguns alunos deixaram o seu depoimento. Na seqüência, ilustramos alguns destes:

"Primeiro deve-se ser passado (lecionado) em sala, o protótipo serve de tira dúvidas. Acredito que depois do assunto explicado, a navegação no horos é interessante. Antes é difícil compreender o assunto"(aluna da turma A).

"Gostei da aula, pois aprendi o assunto de uma maneira simples. Dá uma compreensão mais acessível devido aos exemplos, animações..." (um aluno da turma B).

"O protótipo foi muito válido para o ensino do conteúdo, pois foi mais fácil compreender o conceito de limite" (um aluno da turma C).

"Ao observar a aplicação de limite é possível entender melhor" (um aluno da turma D).

"Acho que o programa ajuda, pois indica os caminhos para a resolução de cada exercício" (um aluno da turma D).

"O programa atende seu propósito, me ajudou a melhor entender limite", porém o programa se apresenta de forma muito simples, não sendo capaz de prender a atenção do usuário por muito tempo. As animações de seu programa são interessantes e podem aparecer de alguma forma nos exercícios, assim tornaria mais agradável a resolução"(um aluno da turma D).

8.9. CONSIDERAÇÕES SOBRE A EXPERIMENTAÇÃO

Na experimentação realizada alguns pontos ficaram em evidência, os quais podem nortear futuras aplicações do protótipo Horos.

O primeiro a ser levado em consideração é que toda aplicação de uma ferramenta computacional deve ser aliada a uma metodologia proposta; a ferramenta por si só, não garante a eficácia no processo de ensino aprendizagem. O aluno tem que se sentir comprometido com a atividade em questão, caso contrário o aluno navega de maneira rápida e sem se ater ao conteúdo em questão. Animações, recursos gráficos, problemas resolvidos conseguem prender a atenção do usuário por um determinado período, mas caso isso não esteja vinculado a uma atividade proposta, o aluno, geralmente, se dispersa. Por isso, questões chave podem representar uma boa alternativa para minimizar tal problema. No caso do protótipo específico pode ser recolhido o próprio diagnóstico do protótipo para uma posterior revisão.

Outro fator importante é o suporte técnico. É importante que se tenha um laboratório com um número de computadores coerente com o número de alunos. O ideal é que os alunos naveguem em duplas, pois assim discutem o problema, organizam os dados, procuram estratégias de resoluções e ambos conseguem interagir com o protótipo.

O protótipo Horos pode ser aplicado tanto para introduzir o conceito de limite, do ponto de vista cinemático e/ou de aproximação, bem como para reforçar tais definições. Os experimentos realizados comprovaram essas hipóteses. O que ficou em evidência é que as turmas que já tinham visto limite demonstraram um interesse maior em relação as que ainda desconhecia o conteúdo. Num relato de uma usuária, essa evidenciou que seria mais interessante a aplicação do protótipo após um conhecimento prévio de limite, pois a princípio ela ficou perdida devido ao conteúdo desconhecido. Na turma dessa aluna, na primeira aula a navegação foi realizada de maneira livre num laboratório com poucos computadores. Na segunda aula houve a preocupação de monitorar a navegação. Então essa turma realizou a atividade proposta com êxito. Pode-se constatar que a turma que não conhecia o conteúdo resolveu o problema da conta telefônica usando os conhecimentos de inequações modulares e após relacionaram com a definição de limite, cuja institucionalização foi feita a posteriori. Nas outras turmas, como conheciam a definição, grande parte utilizou a definição de limite para resolver os problemas propostos, discutindo em situações reais o significado do epsilon e do delta. Um ponto bastante destacado pelos estudantes também foi a parte de visualização gráfica. Através dos recursos gráficos, a idéia intuitiva de limite pelo ponto de vista cinemático ficou mais clara para os usuários.

O interessante é utilizar o protótipo em duas sessões distintas: uma para o ponto de vista cinemático e outra para o ponto de vista de aproximação e após isso comparar e fazer a conexão entre as duas. Essa metodologia exige pelo menos quatro aulas. O histórico é uma boa opção para fazer a introdução do estudo de limite, pois o professor pode explorar os conceitos de áreas, volumes e grandezas infinitesimais. Mesmo com quatro aulas não é possível navegar por todas as atividades propostas pelo sistema, por isso, é importante que o protótipo seja disponibilizado aos estudantes em horário extra classe, principalmente para o usuário que possui algum tipo de dificuldade, já que o sistema dispõe de um banco de ajuda sobre tópicos de funções e inequações.

A seqüência didática num ambiente computacional obteve um bom índice de aprovação das turmas em todos os aspectos considerados relevantes para uma ferramenta computacional. As turmas, de maneira geral, gostaram da interação com o ambiente, mostraram motivação e interesse na resolução das atividades propostas. Isso ficou em evidência nas observações realizadas e nos relatos dos usuários.

As contribuições desse experimento também foram boas no sentido de melhoria do protótipo. É na experimentação que se constatam os erros de entrada de dados, aspectos ligados à interface que influenciam na navegação, os quais, numa programação a priori, não tinham sido previstos. Por isso, a observação dos professores e as sugestões dos alunos foram muito importantes.

Uma seqüência em uma ambiente computacional sempre necessita estar em realimentação, em termos de programação. Essa realimentação já aconteceu simultaneamente da primeira aplicação na turma A para as demais experimentações, pois se identificaram melhorias as quais foram implementadas. O objetivo é deixar a ferramenta a mais flexível possível com o intuito de poder promover uma navegação eficiente pelo protótipo.

Por fim, aliar uma metodologia de ensino que contempla o conceito de limite na ótica histórica, cinemática e de aproximação e inserida em uma ferramenta computacional usando os recursos da IA, representa um recurso em potencial no processo de compreensão desse conteúdo.

9. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Nesse capítulo apresenta-se uma síntese das contribuições oriundas do presente trabalho alicerçado na integração de duas áreas de pesquisa: a Educação Matemática e a Inteligência Artificial. Especialmente, salientam-se as contribuições da metodologia proposta para a área de ensino de Cálculo. No final do capítulo são sugeridos tópicos que poderão ser delineados em pesquisas futuras.

9.1. CONTRIBUIÇÕES GERAIS

A hipótese de pesquisa propulsora desse trabalho foi a de que havia um obstáculo de ensino-aprendizagem no conceito de limite. A investigação do contexto histórico, a observação em classe e a análise dos livros validaram essa hipótese. Os pontos relativos ao obstáculo do conceito de limite ao longo do desenvolvimento histórico evidenciaram que, desde os paradoxos de Zenão à formalização de Weierstrass, foram necessários mais de 2500 anos de história para formalizar o conceito de limite tal como é atualmente, conhecido e aceito pela comunidade científica. Esses obstáculos se fizeram presentes nas etapas do refutamento do infinito, na crise dos incomensuráveis, na inclusão dos infinitesimais e no desenvolvimento da transparência das regras e dos fundamentos teóricos.

Na observação realizada em classe identificaram-se várias dificuldades no processo de ensino aprendizagem do conceito de limite. Alguns desses obstáculos já tinham sido observados no contexto histórico, tal como a dificuldade de se trabalhar com grandezas infinitesimais e com a noção do infinito. Uma dificuldade bastante acentuada foi a relação entre epsilon e delta na definição de limite pelo ponto de vista de aproximação. Constatou-se que essa dificuldade de aprendizagem era gerada por vários fatores, dentre os quais pode-se destacar: o obstáculo da linguagem matemática, a falha em conteúdos básicos como funções e inequações e principalmente, o obstáculo presente na passagem da noção intuitiva, a qual utiliza-se do ponto de vista cinemático, diretamente para a definição de limite pelo ponto de vista de aproximação de uma maneira direta e formalizada. O professor, geralmente, usa o ponto de vista cinemático para introduzir o conceito de limite. A seguir formaliza o conceito usando o ponto de vista de aproximação (ε, δ). Isso gera dificuldades no processo de ensino aprendizagem desse conceito, pois muitos alunos não conseguem visualizar a relação entre ambos e não entendem o porquê de encontrar a relação entre ε e δ.

A maneira como o limite é apresentado em sala se apóia na realidade encontrada nos livros didáticos. O professor geralmente utiliza o livro como referência básica na preparação de suas aulas. Na análise dos livros didáticos constatou-se que a grande maioria dos livros apresenta a definição de limite, inicialmente, utilizando-se do ponto de vista cinemático, trabalhando com a idéia intuitiva do limite e após explana a definição formal do limite, utilizando o ponto de vista de aproximação. Entretanto, a definição de limite por seqüência, que é a idéia mais compatível com o ponto de vista cinemático, é muito pouco explorado nos livros didáticos.

Com o objetivo de minimizar tais obstáculos desenvolveu-se uma nova metodologia de ensino e aprendizagem do conceito de limite. Essa metodologia envolveu a integração de duas áreas: A Didática da Matemática e a Inteligência Artificial.

Num primeiro momento, a Teoria da Situação proposta por Brousseau (1986), forneceu os fundamentos na elaboração e aplicação de uma seqüência didática do conceito de limite, no ambiente lápis e papel. Posteriormente, foi desenvolvida e aplicada uma seqüência didática em um ambiente computacional, a qual se apoiava na segunda hipótese de pesquisa de que com a utilização de um sistema tutorial inteligente é possível desenvolver um ambiente de aprendizagem onde os estudantes consigam superar as dificuldades relativas ao conceito de limite. A seguir explanam-se as contribuições oriundas do desenvolvimento e aplicação dessas seqüências didáticas.

9.2. CONTRIBUIÇÕES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO AMBIENTE LÁPIS E PAPEL

Conforme descrito no Capítulo 5, essa seqüência didática tem como objetivo introduzir o conceito de limite pelo ponto de vista de aproximação. O diferencial mais importante presente nessa metodologia proposta é a idéia de explorar os conteúdos como funções e inequações modulares, em situações problemas, os quais serão importantes na formalização da definição de limite. Com essa metodologia o aluno vai compreendendo, passo a passo, as etapas necessárias para a construção da definição de limite. A definição não é colocada de maneira imediata sem uma discussão e amadurecimento do tema. Trabalha-se inicialmente com a idéia de intervalos, distância cada vez menores e com a relação entre epsilon e delta em uma situação específica. A relação genérica entre epsilon e delta, numa situação de demonstração, só é apresentada depois de explorado o significado dessa relação em situações concretas.

A análise dos resultados da aplicação da seqüência didática mostrou uma evolução positiva no entendimento do conceito de limite. Os alunos assumiram com responsabilidade as regras pertinentes ao contrato estabelecido. A metodologia proposta propiciou um ambiente bastante rico de discussão entre as duplas e até mesmo entre a classe no momento da institucionalização do conteúdo em questão.

Ao ser construído, por meio das situações problema, o conceito formal de limite, os alunos não demonstraram nenhum tipo de "aversão" ao formalismo matemático em questão. Numa situação de demonstração, onde freqüentemente os alunos apresentam dificuldades de resolução, percebemos a rapidez da aplicação do conceito de limite na resolução dessa questão. Todos os alunos apresentaram a relação entre ε e δ corretamente.

A atuação do professor neste processo é de fundamental importância, pois o professor age como um mediador. O professor não anuncia um conceito final como pronto e acabado, mas instiga, questiona, provoca o aluno, para que através dos conhecimentos adquiridos anteriormente ele consiga construir um novo conhecimento.

Um fator importante é o tempo envolvido na aplicação dessa metodologia. No método tradicional, o conteúdo de limite é abordado na primeira aula. A seqüência proposta levou quatro aulas (de 50 minutos). O diferencial é que o conceito não foi meramente exposto, ele foi construído pelos alunos. O tempo envolvido na aplicação de uma seqüência didática como essa é compensado pelo conhecimento adquirido pelos estudantes, que se tornam mais ágeis conforme constataram as professoras das classes na quais foram aplicadas tal seqüência didática.

É importante ressaltar que essa seqüência didática pode representar um recurso importante para os professores que trabalham com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. O professor pode aplicá-la em qualquer curso, pois a seqüência envolve situações cotidianas onde qualquer estudante consegue trabalhar. Outro ponto importante é que ele pode adaptar essa seqüência e ou até mesmo inserir novas situações problema mais particulares ao contexto social do ambiente de sua classe. Como a seqüência proposta contempla uma metodologia de realização, dicas de organização da turma, regras de ensino e análise a priori, ela representa para o professor um recurso em potencial a ser utilizado no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de limite.

9.3. CONTRIBUIÇÕES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO AMBIENTE COMPUTACIONAL

Conforme apresentado no Capítulo 7, a seqüência didática desenvolvida no ambiente computacional viabilizou a interseção de duas áreas de pesquisa: teoria das Situações e os recursos da Inteligência Artificial. A teoria das Situações, proposta por Brousseau (1986), proporcionou a fundamentação teórica do desenvolvimento da seqüência didática utilizada na primeira experimentação e após isso, implementada em um ambiente computacional utilizando os recursos oriundos da Inteligência Artificial.

Essa integração representou um ponto bastante forte na presente pesquisa, pois ocorreu, inicialmente, uma preocupação com a fundamentação teórica que permeou a construção da seqüência didática. Depois de aplicada e validada no ambiente lápis e papel, na qual foram inseridos novos problemas foi então realizada uma transposição para o ambiente informatizado utilizando-se os recursos da Inteligência Artificial.

Na primeira seqüência didática desenvolvida no ambiente lápis e papel contemplou-se o limite do ponto de vista de aproximação. De acordo com a segunda hipótese de pesquisa, com a utilização de um sistema tutorial inteligente era possível desenvolver um ambiente de aprendizagem onde os estudantes consigam superar as dificuldades relativas ao conceito de limite. Para isso, desenvolveu-se uma seqüência didática que contemplou os seguintes módulos: ponto de vista de aproximação, ponto de vista cinemático e um pouco do histórico do cálculo.

No módulo cinemático o protótipo contempla uma idéia intuitiva de seqüências numérica e limite por seqüência, por isso, nesse módulo, utilizaram-se recursos gráficos e animações para explorar tal contexto. O módulo do ponto de vista de aproximação contempla específicamente o modelo de um tutorial inteligente. Uma das características relevantes dos sistemas tutoriais inteligentes é a separação dos módulos do conhecimento, do estudante, do pedagógico e de interface. Todos esses módulos estão intimamente ligados e através dessa ligação é possível armazenar e resgatar as informações de uma determinada navegação e a partir dessas inferir novas informações.

O diferencial dessa seqüência é que ela possibilita ao usuário ter acesso à definição de limite sob as duas óticas de maneira que, no decorrer da navegação, ele esteja sendo monitorado. Os passos realizados pelo usuário vão sendo armazenados e conforme as dúvidas são identificadas, são ativados os módulos de revisão com o intuito de saná-las. Isso representa uma das contribuições importantes dos recursos da IA no processo de ensino e aprendizagem.

A possibilidade de gerar um diagnóstico é muito interessante tanto para o aluno quanto para o professor. Para o aluno o diagnóstico indica os pontos que devem ser melhorados e que necessitam de uma maior atenção por parte dele, para o professor, oferece a oportunidade de observar as dificuldades mais relevantes de uma determinada classe e com isso realizar uma revisão em classe e ou utilizar o próprio protótipo como uma alternativa de avaliação.

Constatou-se através das experimentações realizadas que o uso de modelos computacionais que possam auxiliar o ensino de limite constitui-se em uma ferramenta motivadora no processo de aprendizagem. Os alunos, de uma maneira geral, se mostraram bastante motivados e assumiram com responsabilidade a tarefa proposta.

As experimentações realizadas com essa ferramenta verificaram os aspectos ligados à interface, a avaliação do produto e a avaliação do contexto. Esses quesitos foram aprovados por todas as turmas participantes com índices, em geral, bastante significativos. Os índices de 69% , 97% 88% e 93 % nas turmas A, B, C e D, respectivamente, evidenciam a contribuição do protótipo, segundo os alunos, como um auxílio na aprendizagem do conceito de limite.

Contatou-se também que a contextualização e o uso de recursos gráficos receberam índices marcantes em todas as turmas. Esses dois pontos estão relacionados ao limite de ponto de vista de aproximação e cinemático, respectivamente. A seqüência didática num ambiente computacional obteve um bom índice de aprovação das turmas em todos os aspectos considerados relevantes para uma ferramenta computacional. As turmas, de maneira geral, gostaram da interação com o ambiente e mostraram motivação e interesse na resolução das atividades propostas.

Essa ferramenta representa um recurso em potencial para o professor. Ele pode explorá-la em suas aulas, em diversas situações. O professor pode utilizá-la para introduzir o conceito de limite através do módulo histórico. Pode abordar o conceito de limite utilizando o módulo cinemático ou de aproximação. E ainda simultaneamente, ou seja, explorar todos os módulos estabelecendo a relação entre o ponto de vista de aproximação e cinemático. Em qualquer proposta de utilização é de suma importância que sempre se tenha uma atividade vinculada à navegação, caso contrário, o usuário navega rapidamente sem depurar as informações contidas no ambiente.

Além do mais essa ferramenta pode ser utilizada para introduzir o conceito de limite ou para reforçar esse conceito. As experimentações realizadas validaram essas propostas de utilização. Se a navegação for livre é mais interessante o aluno já possuir algum conhecimento do conteúdo. Uma contribuição importante é que uma ferramenta pode ser usada independente do espaço físico da sala de aula e poderá também ser utilizada pelos cursos que são oferecidos à distância. Qualquer aplicação da ferramenta deve estar vinculada a uma proposta de utilização, preocupação esta que está contemplada no protótipo, pois esse apresenta algumas propostas que podem enriquecer a utilização dessa metodologia inserida em um contexto computacional.

O protótipo Horos é uma ferramenta em potencial que estará disponível para toda a comunidade acadêmica e, certamente, contribuirá de maneira significativa no processo de ensino aprendizagem do conceito de limite.

Ressaltamos que a experiência adquirida com o desenvolvimento de ferramentas que possam contribuir para o ensino de Matemática, em particular o desenvolvimento de pequenos sistemas especialistas, gera grande expectativa e motivação para a continuidade do presente trabalho.

Dentre as recomendações para trabalhos futuros, destacamos:

- A elaboração de uma brochura contendo a seqüência didática desenvolvida e aplicada em classe;
- A ampliação do protótipo com a incorporação de conteúdos relativos a limite.
- Avaliar o uso da Internet como meio de comunicação para expansão do protótipo.
- A submissão do protótipo a novas experimentações, tanto em classe de alunos como em classe de professores.
- O aprofundamento na fundamentação teórica na área de Educação Matemática, visando o desenvolvimento de novas pesquisas relacionadas com o desenvolvimento de ferramentas computacionais no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos de matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, B. L . de . As Analogias no Ensino de Ciências à Luz da Epistemologia de Gaston Bachelard. **Ensaio – Pesquisa em Educação em Ciências**, volume 2, número 2, dezembro de 2002.

ANDERY, M. A. et all. **Para Compreender a Ciência: uma perspectiva histórica.** Rio de Janeiro:espaço e tempo, São Paulo, 7ª edição, 1996.

ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte**. Trad. Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. 6ª edição, Porto Alegre, Bookman, 2000.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique de Mathématiques.** França, vol 9, nº 3, p. 281-308, 1988.

______________. Une recherche d'ingéniere didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. In: **Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble**, pp.183-209, Ed. IMAG, Grenoble. 1989.

______________. Epistémologie et Didactique.**Recherches en Didactique de Mathématiques.** França, vol 10, nº 23, p. 241-286, 1990.

BACHELARD, G. **Epistemologia.** Lisboa: Edições 70, 1971.

______________. **A formação do espírito cientifico:** uma contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro, Contraponto, 1996.

BALACHEFF, N. Didactique et Intelligence Artificielle, in **Recherce en Didactique des Mathematiques**, 1994.

BARON, M.E . **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Matemática Grega. Trad. de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Unidade 1, Brasília, editora Universidade de Brasília, 1985a.

______________. **Curso de História da Matemática:origens e desenvolvimento do cálculo**. Indivisíveis e Infinitésimos. Trad. de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Unidade 2, Brasília, editora Universidade de Brasília, 1985b.

______________. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Newton e Leibniz. Trad. de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Unidade 3, Brasília, editora Universidade de Brasília, 1985c.

______________. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. Fundamentos. Trad. de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Unidade 4, Brasília, editora Universidade de Brasília, 1985d.

______________. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo**. O cálculo no século XVIII: técnicas e aplicações. Trad. de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Unidade 5, Brasília, editora Universidade de Brasília, 1985e.

BARRETO FILHO, B. **A matemática aula por aula.** Vol 3, ensino médio, São Paulo, FTD, 1998.

BARRETO, J. M. **Inteligência Artificial no Limiar do Século XX.** Florianópolis: ppp Edições, 1997.

BARUFI, M.C.B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** 1999. Tese (doutorado em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo.

BOULOS, P. **Introdução ao Cálculo**. Volume 1, São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974, 488 p

BROLEZZI, A.C. Raízes do Cálculo na Grécia Antiga. In: **Revista da Pesquisa & Pós-Graduação** da UFOP. Ano 1, volume, número 1, janeiro/junho de 1999.

______________. Mudanças na matemática da escola básica para o ensino superior: reflexo no uso da história da matemática. **Anais do VII SBEM/Paulista.** São Paulo, 2004.

BROUSSEAU, G. Fondements et methods de la didactique des mathématiques. **Recherches em didactique des mathématiques,** vol 7, nº2, p. 22-115, 1986.

______________.Os diferentes papéis do professor, In: **Didática da Matemática – Reflexões psicopedagógicas**. Organizadoras: Cecília Parra e Irma Saiz, Editora Artes Médicas – Porto Alegre – RS. 1996.

______________. **Théorie des Situations Didactiques**. Textes rasemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland e Virginia Warfield. La Pensée Souvage, éditons, Grenoble, 1998.

CARVALHO, N.T.B. **Le sort des problèmes de constructions dans le contexte français de l'enseignement des transformations géométriques au lycée dans les années 1990**. 2001. Tese (Doutorado) - Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

CHEVALLLARD, Y. **Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Porto Alegre, Artmed Editora, 2001.

COSTA, R. M & WERNECK, V, M. Sistemas Tutoriais: Aplicação das Tecnologias de Hipermídia e de Inteligência Artificial na Educação. COPE, UFRJ. [online] http://www.geocities.com/Athens/3106/artigos.html. Arquivo capturado em abril de 2004.

COULANGE, L. **Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique.** Cas de l´enseignement des systémes d´équations et de la mise em équations en classe de troisiéme. 2000. Tese (Doutorado em Matemática- ciência e tecnologia da informação), Université Joseph Fourier, Grenoble I, França.

COURANT, R. **Cálculo Diferencial e Integral.** Volume 1, primeira edição, editora Geobo, Porto Alegre, 1970.

D´AVOGLIO. A. R. **Derivada de uma função num ponto**. 2002.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC/SP, 2002.

D´AMBRÓSIO, U. A influência da tecnologia no fazer matemático ao longo da história. **VII Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia**, São Paulo, 2002.

DELOZANNE, E. **Explication en EIAO: Études à partir D´Elise: um logiciel pour s´entraîner à une méthode de calcul de primitives.** 1992. Tese (Doutorado em Informática), Université Du Maine, França.

DUADY, R. A Universidade e a Didática da Matemática: os IREM na França. In: **Caderno da RPM**. Volume 1, nº 1, 1990.

DUARTE, M.G & EGER, R. C.S. **Cálculo e Álgebra Linear com Derive**. Editora da UFSC. Florianópolis, 1995.

DURKIN, J. **Expert Systems -**Design And Developement - Printece Hall ,1994.

EDWARDS, C, H; PENNEY, D. E. **Cálculo com Geometria Analítica**. 4ª edição, Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil LTDA, vol 1, 1997.

EGER, R.C.S (1998)- Informatização das Disciplinas de Cálculo e Álgebra nas Engenharias: A importância do Desenvolvimento de Seqüências Didáticas no Planejamento destas Aulas. **XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.** [Anais] Volume I, nº 378, Brasil, 1998.

FASUGA, R; SARMANOVA, J. Usage of Artificial Intelligence in education process. **Exploring Innovation in Educational and Research.** Tainan, Tawan, 2005.

FLEMMING, D; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. 5ª edição, São Paulo, Makron, 1992.

FREITAS, J.L.M e ARNALDI, I, C. Cantor e a Teoria dos Conjuntos. **Ensaios e ci.** Campo Grande-MS, v.2, n.3, p.175-188, dezembro, 1998.

FREITAS, J. L. M. Situações Didáticas. In: MACHADO, S,D,A et al. **Educação Matemática** –uma introdução. São Paulo, EDUC, 1999.

GEIAAM-**Grupo de Estudos de Informática Aplicada a Matemática.** [Online] www.mtm.ufsc.br/geiaam. Acessado em 2005.

GONÇALVES, M.B. e PALADINI ,C.R.L. Informatização das disciplinas de cálculo e geometria analítica vias engenharias: a importância do desenvolvimento de seqüências didáticas no planejamento das aulas**. XXVI Congresso Brasileiro de ensino de Engenharia.** [Anais em CD Rom].Volume VI, 2647-2662, Brasil, 1998.

GOULART, J. L. **A Geometria a partir de Euclides direcionada para o Cálculo Diferencial e Integral**. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção)-Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis.

GUELPELI, M.V.C; RIBEIRO, C.H.C; OMAR, N. Utilização de aprendizagem por reforço para modelagem autônoma do aprendiz em um tutor inteligente. **Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE)**, NCE-IM/UFRJ, 2003.

GUIDORRIZI, H. L. **Um curso de Cálculo.** 4ª edição, Rio de Janeiro, LTC, vol 1, 2000.

JESUS, A. Sistemas Tutores Inteligentes**. Revista Eletrônica de Sistemas de Informação – Resi.** ISSN 1677-3071, dezembro de 2003.

JONASSEN, D.H. & WANG, S.M. **The Physics Tutor: Integrating Hypertext and Expert Systems**, Journal of Educational Technology Systems, Vol. 22(1), 1993.

KAPLAN, W; LEWIS, D. J. **Cálculo com Álgebra Linear**. Rio de Janeiro, LTC, 1973.

KEMP, R. Intelligent Computer Assisted Instruction: **a knowledge based perspective. The Australian Computer Journal**, vol 24, nº 3, 1992.

KENNEDY, K. Artificial Intelligence. **Technology&Learning.** Novembro de 2002.

LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica.** 3 edição, editora Harbra ltda, 2002.

MELO, J. M. R. N. **Conceito de Integral: uma proposta computacional para seu ensino e Aprendizagem**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC-SP.

MENEZES, L. Concepções e Práticas Discursivas do Professor de Matemática. **Revista Milennium,** Instituto Politécnico de Viseu, número 17, janeiro de 2000(a). [online], http://www.ipv.pt/millenium/17_ect6.htm

MINSKY, M. **The Society of Mind**. Simon & Schuster, Inc, New York, 1986.

MONTEIRO, L.C.S. O conceito de infinito e a percepção de Movimento. **Cd rom VIII Encontro Nacional de Educação Matemática.** Recife, julho de 2004.

MORRIS, R. **Uma Breve História do Infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico.** Tradução de Maria Luiza X de A. Borges. Rio de Janeiro, Editora Jorge Zahar, 1998.

MUNEM, M.A; FOULIS, D. J. **Cálculo**. Rio de janeiro, Guanabara, vol 1, 1995.

NEYRET, R. **Contraintes et determinations des processus de formation des enseignants:** nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts universitaires de formations des maitres. 1995. Tese [doutorado em didática da matemática]. Université Joseph Fourier, Grenoble, França.

NIEVOLLA, J. **Um ICAI para Emergências em Traumologia.** Florianópolis, 1995. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção).Universidade Federal de Santa Catarina.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** Editora autêntica, segunda edição, 2001.

PARK, O. **Functional Characteristics of Intelligent Computer-Assisted Instruction: Intelligent Features.** Educational Technology, June 1988.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. Trad. José Teixeira Coelho Neto. Série Estudos, editora Perspectiva, São Paulo, 1977.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2. reimpr. Rio de Janeiro, interciência, 1995.

ROSA, S. B. **A Integração do Instrumento ao Campo da Engenharia Didática: o caso do perspectógrafo.** 1998. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina.

RUCKER, R. **Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite**. Birkhäuser, Boston, Basel, Stutgart, 1982.

RUSSEL, S.J & NORVING, P. **Artificial Intelligence:** a modern approach. Prentice-Hall, Inc. 1995.

SAD, L. A. **Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos**. 1998. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Universidade Estadual Paulista-UNESP, Rio Claro.

SERRA, I.**Transmutações do Infinito**. Discurso e Práticas Alquímicas. Colóquio Internacional IIII, Lisboa, 2002.

SHOKOWSKY, E. W**. Cálculo com Geometria Analítica.** São Paulo, Makron books, vol 1, 1994.

SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica.** São Paulo, McGraw-Hill, vol 1, 1987.

SPIVAK, M. **Cálculo.** 3ª edição, editora Houston, Publish or Perish, 1994.

STEWART, J. **Cálculo.** Volume 1, 4 edição, São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

TANEJA, I. J. **MAPLE V: Uma Abordagem Computacional no Ensino de Cálculo.** Editora da UFSC. Florianópolis, 1997. 330p.

TCHÉTAGNI, J; NKAMBOU, R; KABANZA, F. Epistemological Remediation in Intelligente Tutoring System. **Proceeding of IEA/AIE**. Springer-Verlang Berlin Heidelberg, pp 955-966, 2004.

THOMAS, G, B. **Cálculo**. São Paulo, Addison Wesley, vol 1, 2002.

TROUCHE, L. **A Propos de l'Apprentissage des limites de functions dans um environnement calculatrice. Etudes des rapports entre processus d'Instrumentation.** 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática), Université Montpellier II. Sciencies et Techniques du Languedoc.

VITTI, C. M. **Matemática com Prazer: a partir da história e da geometria.** 2ª edição, Piracicaba, editora UNIMEP, 1999.

ZUCHI, I. e CONCEIÇÃO, K. Uma contribuição para o estudo de funções de várias variáveis. **Anais do Cobenge**, Brasília, 2004.

WENGER, E. **Artificial Intelligence and Tutoring Systems**, Morgan Kaufmann Publishers, Inc.1987.

WOOLF, B. P. Reasoning about teaching and learning. **Sixth International Conference on Intelligent Tutoring Systems**, New Orleans, 2002.

APÊNDICES

APÊNDICE - A
SEQUÊNCIA DIDÁTICA – AMBIENTE LÁPIS E PAPEL

Sessão 1: Resolução de uma situação-problema

"Preparando o caminho para o conceito de limite"

2) Uma companhia de telefone celular oferece aos seus clientes um plano que obedece a seguinte forma: uma taxa fixa mensal de R$ 35,00 e um custo adicional de R$ 0,50 por minuto utilizado.

   a. Um cliente que gasta R$ 50,00 mensais fala quanto tempo ao telefone?

   b. Supor que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 45,00 à R$ 55,00. Qual a variação de tempo, em torno de 30 min, que o cliente poderá falar no telefone, respeitando seu planejamento financeiro?

   c. Refaça a questão (b) supondo que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 48,00 à R$ 52.

   d. Represente graficamente as situações dos itens (a, b,c) e responda: O que acontece com a variação do tempo quando a fatura telefônica está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 50,00?

      e. Vamos supor que o cliente deseje ter sua conta, mensalmente, em torno de R$ 50,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno do tempo t=30 ? Você pode denotar a variação do tempo por δ.

Sessão 2:

Situações envolvendo um ε fixo.

Situação 1

1. Antes de fabricar cilindros para uma área da seção transversal de 58,1 cm^2 de um certo motor, você precisa saber qual o desvio que se pode aceitar em relação ao raio do cilindro ideal, que é $r_o = 4,3cm$. Além disso, a área transversal pode diferir de no máximo 0,1 cm^2 dos 58,1 cm^2 necessários. Para que isto aconteça qual o intervalo de variação do raio? (Dados: a área da seção transversal de um cilindro é dado por $A = \pi$ r^2).

Situação 2

2. Quão próximo de $x_o = 4$ devemos manter x para termos certeza de que $y = 2x - 1$ fique a uma distância menor do que 0,5 unidades de $y_o = 7$? Qual a relação entre ε e δ?

Sessão 3: Aplicação do conceito de limite

Demonstração

1. Prove que $\lim_{x \to 1}(5x - 1) = 4$

APÊNDICE - B
Questionário

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Este questionário faz parte de um projeto de pesquisa intitulado os "*Obstáculos da Aprendizagem do Conceito de Limite*". Esperamos contar com sua contribuição, a qual será muito importante.

1. Qual é o seu curso?-----------------------------
2. Qual a sua idade? -----------------------------
3. Já cursou esta disciplina (CDI-I)?
   ( ) não ( ) sim ___________vezes
4. Atualmente você está trabalhando?
   ( ) não ( ) sim, tempo integral ( ) sim, tempo parcial
5. Quantas horas semanais de estudo você dedica a esta disciplina?-----------
6. Possui acesso a computador?
   ( ) não ( ) sim, em ________(casa, escola, trabalho)
7. Quando você não compreende o conteúdo você procura sanar suas dúvidas com:
   ( ) professor ( ) monitor ( ) colegas ( ) outros ________________
8. 8. Você teve dificuldade para compreender o conceito intuitivo de limite?
   ( ) não ( ) sim ( ) parcialmente
9. Quais foram as principais dificuldades de compreensão do conceito de limite?

____
____
____
____
____

10. Diga em poucas palavras o que você entende por limite, ou seja, explique o que significa para si a expressão o limite de uma função $f(x)$ quando x → a é um número b".

____
____
____
____
____
____
____

11. Comentários

____
____
____
____

APÊNDICE - C
FICHA DO OBSERVADOR

Sua participação e atuação são muito importantes para a realização dessa experimentação.

A seqüência é composta por quatro atividades, sendo que a primeira atividade (leitura) não precisa recolher. As demais recolher todas, inclusive os rascunhos utilizados pelos alunos.

Solicitamos que sejam observados os seguintes itens:

1. Pedir que os alunos preencham o cabeçalho da ficha (nome, curso, fase e data)
2. Controlar a gravação, **rodar, virar, ou trocar a fita** quando necessária.
3. Identificar na FICHA DO OBSERVADOR, seu nome, os nomes dos alunos e fazer uma legenda.
4. Anotar na FICHA DO OBSERVADOR, sempre que possível, todas as tentativas de resolução dos alunos, situação de indecisão, de formulação da solução etc.
5. Registrar na FICHA DO OBSERVADOR desenhos utilizados pela dupla na resolução do problema.
6. Marcar na FICHA DO OBSERVADOR, **de tempo em tempo, a hora** para informar ao pesquisador o tempo usado pela dupla na realização da tarefa (total ou parcial).
7. Fazer uma **pergunta à dupla** quando perceber que um fato importante ocorreu e não houve registro que esclareça ao pesquisador (gravado ou registrado por escrito).
8. Fornecer **folhas de rascunho** caso a dupla solicitar.
9. **Recolher todos os rascunhos**, no término de cada atividade.

Observador____Dupla:______________

Aluno(a)____legenda:_____________

Aluno(a)____legenda:_____________

Hora	**Legenda do aluno/Fala/Observações gerais**

APÊNDICE – D

SEQUÊNCIA DIDÁTICA - AMBIENTE COMPUTACIONAL

Sessão 1: Problema da conta telefônica

Uma companhia de telefone celular oferece aos seus clientes um plano que obedece a seguinte forma: uma taxa fixa mensal de R$ 35,00 e um custo adicional de R$ 0,50 por minuto utilizado

a) Um cliente que gasta R$ 50,00 mensais fala quanto tempo ao telefone?
b) Supor que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 45,00 à R$ 55,00. Qual a variação de tempo, em torno de 30 min, que o cliente poderá falar no telefone, respeitando seu planejamento financeiro?
c) Refaça a questão (b) supondo que este cliente se planeja para ter, no mês seguinte, uma fatura no intervalo de R$ 48,00 à R$ 52,00.
d) Represente graficamente as situações dos itens (a, b,c) e responda: O que acontece com a variação do tempo quando a fatura telefônica está numa faixa cada vez mais estreita em torno de R$ 50,00?

Sessão 2: Problema da construção da estrada

Uma empresa, para construir uma estrada, cobra uma taxa fixa de 4 milhões de reais mais uma taxa que varia de acordo com o número de quilômetros de estrada construída. O custo da obra, em milhões de reais, em função do número de km construído é dado por: $C(x) = \frac{x}{10} + 4$

a) uma empresa que possui, em seu orçamento, um valor de 6 milhões, consegue construir quantos quilômetros de estrada?
b) Supondo que há um erro de 5% no valor do orçamento previsto (6 milhões), qual será o raio em torno dos 20 km previstos?
c) Refaça o item (b) supondo um erro de 1% no orçamento.
d) Vamos supor que a empresa deseja ter seu orçamento em torno dos 6 milhões com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno do Km=20? A variação dos Kms pode denotar por δ.

Sessão 3: Situação envolvendo um epsilon fixo

Quão próximo de $x_o = 4$ devemos manter x para termos certeza de que $y = 2x - 1$ fique a uma distância menor do que 0,5 unidades de $y_o = 7$? Qual a relação entre ε e δ?

Sessão 4: Situação de demonstração

Demonstre que $\lim_{x\to 1} 5x - 1 = 4$

APÊNDICE - E

ROTEIRO DO PROTÓTIPO HOROS

UDESC - Joinville

Nome..

Curso:..Data: ....../......./........

I Atividade

Você deve navegar pelo histórico (ver motivação e Histórico)

1. Navegue pelo ponto de vista cinemático
2. Escolha no menu (Seqüência _Didática – cinemático –aplicação-velocidade)
   a) Resolva o problema do carro de fórmula 1, proposto pelo Horos.

Após a navegação, resolva o seguinte problema:

b) Um objeto é largado do topo de uma torre de 100m de altura. A distância que o objeto está do solo após t segundos é $h(t) = 100 - 4{,}9t^2$. Qual a velocidade do objeto após 2 segundos de queda?

APÊNDICE – F
QUESTIONÁRIO DE SATISFAÇÃO

HOROS - Um Sistema em Fase de Experimentação

Bloco I - Identificação

Instituição:........................ Curso............................... fase..........................

Bloco II - Interface do protótipo

1) Uso de cores:
( ) Ötimo
( ) Bom
( ) Regular
( )Ruim

2) Uso de quadros e janelas:
( ) Ötimo
( ) Bom
( ) Regular
( )Ruim

3) Disposição dos textos:
( ) Ötimo
( ) Bom
( ) Regular
( )Ruim
Disposições de botões:
( ) Ötimo
( ) Bom
( ) Regular
( )Ruim

5) Tamanho e cor da fonte:
( ) Ötimo
( ) Bom
( ) Regular
( )Ruim

6) Simplicidade e clareza da linguagem coloquial utilizada:
( ) Ötimo
( ) Bom
( ) Regular
( )Ruim

Bloco III – Avaliação do Produto

1) O software disponibiliza ao usuário opções de ajuda?
( ) Sim
( ) Não
( ) Parcialmente

2)As opções de "dicas" ajudaram você a resolver os problemas:
( ) Sim
( ) Não
( ) Parcialmente

3) O banco de *ajuda* e *dicas* disponível neste protótipo estão adequadas?
( ) Sim
( ) Não
( ) Parcialmente
4) O protótipo apresenta flexibilidade quanto a navegação?
( ) Sim
( ) Não
( ) Parcialmente

5) Você encontrou algum erro proveniente de entrada de dado?
( ) Sim
( ) Não
Onde?_______________________________

6)Você encontrou algum erro nas respostas dos problemas propostos durante a aventura?
( ) Sim
( ) Não
Onde ?

7) Você identificou algum erro na armazenagem das ações realizadas (pontuação, identificação de ajuda, etc) no decorrer de sua navegação?
( ) Sim (cite o erro).....................................
( ) Não

Bloco IV - Avaliação do Contexto

1) Assinale os pontos navegados no sistema:
( ) histórico
( ) Limite do ponto de vista cinemático
( ) Limite do ponto de vista de aproximação

2) O protótipo apresenta recursos e estratégias dinâmicas que possam contribuir para a aprendizagem do aluno?
( ) Sim
( ) Não
( ) Parcialmente

3) A parte histórica bem como as situações inseridas no protótipo representam um fator motivante para o ensino do conceito de limite?
( ) Sim
( ) Não
( )Parcialmente

justificativa..

4) O diagnóstico que o protótipo Horos fez a respeito de sua navegação está coerente com suas dificuldades?
( ) Sim
( ) Não
( ) Parcialmente

5) A dificuldade apresentada na resolução dos problemas foi devido a:
( ) Conteúdo desconhecido
( ) Resolução dos problemas
( ) Enunciado dos problemas
( ) Outras ....

6) O uso do protótipo ajuda na compreensão do conceito de limite?
( ) Sim
( ) Não

Se sim, assinale de que forma (pode ser de múltipla escolha)
( )Trouxe novos conhecimentos sobre tópicos do conceito de limite
( ) Através de problemas concretos foi possível entender o conceito de limite do ponto de vista de aproximação.
( )Constituiu uma orientação que lhe ajudou a resolver mais eficazmente os problemas inseridos no protótipo facilitando a compreensão do conceito de limite.
( ) Possibilitou conhecer um pouco do contexto histórico do conceito de limite, o qual era desconhecido.
( ) Outros

Espaço Aberto para sugestões gerais

Este questionário deve ser enviado para:
iva@joinville.udesc.br
Ou Para:
Prof Ivanete Zuchi

Departamento de Matemática

Centro de Ciências Tecnológicas

Universidade Estadual de Santa Catarina

Joinville - Santa Catarina

CEP 89223-100

ANEXOS

ANEXO – 1
SESSÃO 1

Dupla: A
Gleison (G) e Jonas (J)
Observadora: Prof. Ivanete

1. J: em torno de 30 minutos o cliente poderá falar ao telefone respeitando seu planejamento financeiro?
2. J: temos que tirar a variação
3. G: aqui são cinco reais para cima de cinqüenta e cinco reais abaixo de cinqüenta reais, né?
4. G: Então cinco reais equivale a...são cinqüenta centavos por minuto
5. J: no total, né?
6. G: é, esse aqui tem que dar 5 reais, isso?
7. [inaudível]
8. G: a gente já encontrou o valor de 50 reais. E aí cinco reais a menos equivale a quantos minutos?
9. J: ah,...10 minutos.
10. G: dez minutos.
11. G: se ele quer manter este intervalo de quarenta cinco à cinqüenta e cinco qual a variação do tempo em torno de 30 minutos que o cliente poderá falar ao telefone?
12. G: então ele vai variar dez minutos em torno de trinta.
13. J: de vinte a quarenta minutos
14. G: a variação é essa aí.
15. G: variação de dez minutos.
16. J: tá certo.
17. G: refaça a questão b para uma fatura no intervalo de quarenta e oito a cinqüenta e dois.
18. G: vamos fazer o mesmo do item a
19. J: hum. hum.
20. G: vamos ver quanto vale dois reais.
21. J: quatro minutos
22. G: isso, quatro minutos.
23. J: represente geometricamente a, b, c.
24. G: o que acontece com a variação do tempo quando a fatura fica mais estreita em torno de cinqüenta minutos?
25. G: vamos fazer um gráfico dos três.
26. obs: como é seu nome?
27. J: Jonas
28. Obs: e você?
29. G: Gleison
30. J: tem uma régua?
31. G: nessas folhas eu posso por qualquer coisa, né?
32. Obs: pode, pode rascunhar à vontade.
33. G: vamos por os dados do a, b e c.
34. J: se gasta 50 reais igual a 30 minutos.
35. G: a equação que a gente achou ípsilon é igual a meio de xis mais trinta e cinco.
36. J: na b?
37. G: a gente achou uma variação de 10 minutos.
38. J: então ele vai ter uma variação de 10 minutos
39. G: É, para 5 reais para cima e 5 reais para baixo.
40. J: no c deu quatro minutos para uma variação de dois reais
41. G: faz aí.
42. [inaudível]
43. G: a gente quer a variação do tempo em relação a...
44. J: a esse aqui.
45. G: isso. Beleza!
46. G: quando for 50[reais] equivale a tinta minutos
47. J: desenhei, beleza.
48. [inaudível]
49. G: dez minutos a mais são cinco reais a mais.
50. J: vou usar meio centímetro aqui.
51. G: um centímetro
52. J: meio centímetro para cima
53. G: não é 10 centímetros
54. [inaudível]
55. G: a gente vai ter que colocar o de vinte minutos também, com cinco reais a menos.
56. G: não, aqui é 45 com 20 e 55 com 40.
57. G: Aqui é quanto?
58. [inaudível]
59. G: não, era meio centímetro mesmo. Era 5 minutos, foi mal..
60. J: não...[inaudível]
61. Obs: fale um pouco mais alto Jonas
62. J: ah não, eu detesto o gravador
63. obs: [risos]. Não sinta-se encomodado

64. G: meio centímetro para baixo a gente vai colocar dez minutos a menos.
65. J: ele corta em trinta e cinco
66. G: nem o Excel faz um gráfico deste!
67. J: Meu Deus do Céu...
68. G: tá agora põe...
69. J: o que falta?
70. G: agora falta os dados da letra c.
71. Obs: vocês estão representando em um gráfico ou em três?
72. G: em um.
73. G: uma variação de quatro minutos equivale uma variação de dois reais no eixo y.
74. J: isso!
75. G: beleza!
76. J: tá mais perto de trinta.
77. [inaudível]
78. J: varia dois ?
79. G: 48 a 52 reais, tá certo!
80. J: aqui em cima é dois e aqui em baixo é quatro.
81. G: isso!
82. J: de 48 à 52 reais, aqui.
83. G: qual a pergunta que ele faz?
84. G: o que acontece com a variação do tempo quando a fatura está numa faixa cada vez mais estreita em torno de cinqüenta?
85. J: cada vez mais próximo de trinta, é obvio!
86. [inaudível]
87. J: acho que sim, né?
88. G: a primeira variação era cinco pra cá, cinco pra cá. Se diminuiu ..a variação aqui em y diminuiu, quer dizer se diminuiu o tempo também diminuiu a variação em torno de cinqüenta.
89. J: isso.
90. G: então pode colocar ali ela fica cada vez mais ...a variação do tempo fica cada vez próxima de tinta minutos.
91. J: não a...
92. G: os valores ficam perto de trinta minutos.
93. J: é isso aqui, né? em geral ...
94. G: a variação do tempo quando se aproxima de cinqüenta fica mais próximo de trinta minutos.
95. J: não sei se é bem isso...
96. G: essa é a idéia, né? Limite...
97. G: vamos supor que um cliente deseja ter sua conta, mensalmente, em torno de cinqüenta reais com um erro muito pequeno que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação do tempo t igual a 30? Você pode denotar a variação do tempo por δ. [hum....]
98. G: ele quer a relação dessa variação com esta daqui, oh.
99. G: variação linear...Este vai depender desse
100. J: podemos colocar que cada vez que varia 4 aqui varia 2 ali ou não é ?
101. G: a gente pode saber. A principio parece isso, né?
102. J: parece..
103. G: oh, o erro para cinqüenta é ε.
104. obs: o que significa esse erro? Vocês entendem o que significa este erro?
105. J: sei lá.. o que ele pode ir telefonando e o tempo em torno de trinta...é isso ou não ?
106. Obs: o erro da conta de cinqüenta reais, o que significa este erro?
107. G: é uma variação.
108. Obs: uma variação para onde?
109. G: em torno de cinqüenta.
110. Obs: em torno de cinqüenta.
111. J: pra mais ou para menos.
112. Obs: então, observe o que vocês tinham::era cinqüenta poderia ser quarenta e cinco ou cinqüenta e cinco. O que vocês observam de erro aqui? De quanto?
113. G: de cinco
114. Obs: depois fizeram uma faixa mais estreita, de quanto foi esta faixa? Foi de 48 a..
115. J: cinqüenta e dois
116. Obs: então o erro é quanto?
117. J: dois
118. Obs: de dois. E agora se a gente colocar este erro de forma genérica. Como vocês vão representar esse erro graficamente?
119. G: o negócio é cinqüenta mais ou menos o ε
120. Obs: isso!
121. Obs: então represente isso, graficamente.
122. G: isso é o valor de y
123. J: valor em y, né?
124. Obs: sim
125. G: e isso equivale a trinta ...isso implica em trinta mais ou menos o δ.
126. G: se tenho cinqüenta mais um ε então o trinta vai depender do ε.
127. J: não , o ε...ah, é.
128. G: tá perguntando: o delta equivale a quantos epsilons ou epsilon equivale a quantos deltas?
129. Obs: isso. E vocês tentarem representar, graficamente, o que vocês escreveram aí.
130. J: em gráfico?
131. Obs: é
132. G: vai ficar o valor de cinqüenta aqui em y , o valor de trinta aqui. Vai ser trinta mais delta

para cá e trinta menos delta para lá. Aqui em cima vai ficar cinqüenta mais epsilon e cinqüenta menos epsilon, né?
133.G: Fale Jonas?
134.J: Eu ainda não consegui visualizar...[inaudível] esta função é linear
135.G: Quanto epsilon ou delta vai depender mais da inclinação. Se tiver mais inclinado a variação vai ser quase proporcional ...Quer dizer, ela é proporcional. Se aumentar um, aumenta um no outro? Ou se aumenta um, aumenta dois no outro?
136.J: a nossa reta ta aqui, oh. Tá cortando em trinta e cinco. To chutando aqui..
137.obs: chutando o quê?
138.G: Chutando o gráfico, o gráfico não está bem..linearizado, bem certinho.
139.Obs: ah, tá..
140.J: podemos dizer assim: que o tempo sempre vai o dobro do ...ε
141.G: tá se mostrando assim.... Tipo o delta é igual a dois epsilon
142.J: Acho que ao contrário. Acho que eu estou fazendo conta ao contrário
143.G: oh, de 50 temos 30.De 55 tem o 40. Aqui tem uma variação de cinco, aqui tem uma variação de dez. De cinqüenta e dois variação de quatro...tá sempre o dobro.
144.J: tá certo.
145.G: esta é a variação de epsilon e delta.
146.obs: vocês concluíram aqui que delta é igual a dois epsilon, certo?
147.G: isso
148.Obs: então vai valer para qualquer valor?
149.G: ah, ah
150.Obs: como vocês podem concluir que vai valer para qualquer valor?
151.G: é pela função.
152.Obs: porque?
153.G: a função é linear
154.Obs: daí isso sempre vai acontecer?
155.J: a gente não tem minuto negativo.
156.Obs: então vocês podem deixam de maneira genérica assim? Ou é necessária alguma restrição?
157.J: isso é positivo
158.Obs: então, seria bom vocês colocarem isso na variável, essa conclusão de vocês?
159.J: ah, ah
160.G: esse minuto negativo é o valor da função, né?
161.Obs: mas pode ser negativo?
162.G: em termos matemático, na função pode. Mas em termos físico e reais minutos negativos não é muito....
163.Obs: existe um tempo negativo?
164.G: não é muito conveniente.
165.G: se ele não falar nada, zero minuto, ele vai bater em trinta e cinco reais. Vai gastar trinta e cinco reais mesmo se não falar nada.
166.Obs: certo. Então o gráfico começa a onde?
167.G: começa de zero para frente
168.Obs: então essas variáveis têm alguma restrição?
169.J: de zero até....
170.Obs: então coloquem isto no papel. Podem escrever considerando as variáveis, ou pode usar sua notação aí. ...
171.J: Coloca letra..
172.G: considerando t maior ou igual a zero, então qual a restrição para delta e epsilon?
173.J: pode variar para mais ou para menos...
174.G: mas a relação continua valendo. Se eu tiver o valor de trinta e seis reais aqui, aí ele vai ser obrigado a tolerar só o real para baixo ou para cima . O real a menos ou o real a mais. Vai implicar que o delta vai ficar de 2 minutos a menos ou dois minutos a mais...é difícil colocar esta restrição?
175.Obs: como é?
176.G: é difícil colocar esta...?
177.Obs: restrição?
178.G: restrição no delta e no epsilon.
179.Obs: você acha que é difícil colocar?
180.G: porque o delta é igual a dois epsilon.
181.Obs: tá, onde que está o delta?
182.G: o delta é no eixo x
183.Obs: e o epsilon?
184.G: no eixo y.
185.Obs: esse delta aqui, qual é a idéia: ele é um número grande ou um número pequeno?
186.G: é uma variação, um número pequeno.
187.Obs: ele pode ser negativo?
188.G: não existe distância negativa
189.Obs: então a restrição dele, qual é?
190.J: delta é maior que zero.
191.Obs: isso!
192.Obs: e esse epsilon também não é distância?
193.G: sim, epsilon também é maior que zero.
194.Obs: então...
195. G: nem é necessário falar, pois se delta é igual a dois epsilon e delta é maior que zero, logo epsilon também é maior que zero.
196. Obs: ok, conseguiram visualizar direitinho isso aí?
197. G: ah, ah..
198.Obs: então respondem o outro.

ANEXO – II
SESSÃO 1 – DUPLA B

Dupla: B
Bruno (B) e Yuri (Y)
Observadora: Prof. Carla

1. Y: 55, né?
2. B: 55 reais.
3. Y: 55 reais aí menos [inaudível]
4. B: 55 aí mais um m minúsculo
5. Y: um m sobre dois
6. B: é são 55 menos 38, 50, que é 10% de 35 reais.
7. Y: é 50 centavos..
8. B: acho que não entendi!
9. Y: eh! (hi..)
10. B: acho que não. Faz aí
11. Y: por no papel eu não sei, 55 [inaudível] é né?
12. B: ta:
13. Y: vai dar 16, 50 daí dividido por 50 centavos dá..trinta e ..
14. B: trinta e três.
15. Y: trinta e três minutos.
16. B: vai ganhar 3 minutos.
17. Y: sendo 10% aí precisa do 5% do erro da prestadora lá daí vai ser um minuto e meio a mais.
18. B: é isso ai mesmo.
19. Y: por aqui, aqui eu não sei
20. B: por aqui ou aqui?
21. Y: eu não sei se a mesma
22. Obs: é a mesma?
23. B: eu não sei...
24. Y: a primeira deu. Pior que não diz a porcentagem ali, né.
25. B: ah, esse daqui não tem os 10%
26. Y: éh.
27. B: pode crer
28. obs: é diferente
29. Y: quer saber quanto tempo fala ao telefone, aqui ele fala 15 minutos, né?
30. B: no normal.
31. Y: Não tem erro. 15 minutos.
32. B: pode colocar ali já.
33. B: [inaudível] 5 a mais e 5 a menos
34. Y: vai dar 40
35. B: 5 vai dar 40 e 20
36. Y: de 20 a 40 minutos ele pode falar. Quantos pra mais?
37. B: menos e mais 10 minutos.
38. Y: mais ou menos 10 minutos.
39. B: que em torno de 30.
40. Y: ali é 34. Ai põe uma variação de 8 minutos, sendo, não sei, é né ?
41. B: não, põe uma de mais ou menos quatro minutos, acho melhor.
42. Y: isso.
43. B: sendo de 26 minutos a 34, o valor ali. é igual lá em cima.
44. B: fazer o a, b e c.
45. Obs: é
46. B: faz três gráficos?
47. Y: um só, né?
48. B: não..
49. Obs: deixa-me ver
50. B: então
51. Y: começa em 35 já. No tempo zero é 35.
52. B: daí a cada minuto, 50 centavos. Aí põe 30 minutos vai dar com o.. 15 reais
53. Y: 30 minutos, 15 reais.
54. B: tá, daí coloca..
55. Y: 15 reais a mais, né?
56. B: tá, vai dar 50
57. Y: é
58. B: 30 minutos com 50 de gasto
59. Y: isto!
60. B: é . Agora tem aquela variação da letra b de 45 a 55
61. Y: e a letra c é de 48 a 52. Só que forçar ali, pois tá no mesmo [escala]
62. Prof: depois vou mandar resolver no quadro...
63. B: hi hi [corte]
64. Y: 15 minutos, tá
65. B: 20 minutos
66. Y: só que ele [gráfioo] já começa de 35
67. B: sim.
68. Y: de 26 é 48
69. B: de 26 é quarenta e oito reais, de 34...
70. Y: não de 30, né:
71. B: 30 minutos, ah é 30.
72. Y: de 30 dá ...
73. B: 50 reais
74. Y: tem coisa errada aqui..
75. B: muda a primeira ali, senão tem que apagar tudo. Depois troca de escala.
76. Y: tem que passar a limpo.
77. B tá, aí 52..
78. Y: vai continuar aumentando né, de 34 vai dar ...
79. B: 52. Isso. Só né.
80. Y: agora é só traçar .
81. B: tem 55 né? será que só isso? o que acontece com a variação do tempo quando [inaudível] está em torno de 50?

82. Y: cada vez mais estreita.
83. B: 50 é o último, ali...Não, este é o 50!
84. Y: é, este aqui.
85. Y: permanece constante, né, não? ...
86. B: a variação né? [tempo/ inaudível]
87. Y: o tempo representa por e, e não , epsilon . Ali em baixo, aquela letra ali é ...
88. Obs: delta
89. Y: delta?
90. Obs: é.
91. Y: a variação do tempo por delta. Então o epsilon é o erro né? o erro é em reais. A cada um epsilon, é epsilon este daqui?
92. Obs: é
93. Y: a cada episilon a variação do tempo é de 2.., é o dobro, né ? Que é 50 centavos ...a cada um episolon é 2 delta. É porque é a variação do tempo.
94. B: é , a cada um, vamos dizer reais, que fosse ali , né, que é episilon vai ser dois minutos.
95. Y: ah..
96. B: aí da pra por
97. Y: sim o dobro. De 45 deu 20
98. B: deu 20
99. Y: de 48 foi para 26
100. B: então coloque ali. Não sei se vai tar certo né,mas...
101. Y= ε é igual a dois...
102. B: não, ao contrário né?
103. Y: ao contrário?
104. B: é o contrário, ou não?
105. Y: o tempo é duas vezes...O tempo é duas vezes o ε. É tá certo né?
106. B: Um minuto..
107. Y: um minuto dá cinqüenta centavos.
108. B: vezes dois , então tá certo. Acho que é só
109. Y: é o gráfico?
110. B: coloca o gráfico, ali, então.
111. Y: tem régua?
112. B: não
113. [inaudivel]
114. B: aí coloca os valores
115. B: Fez certo? trace um de cada vez .
116. Y: é né
117. Y: a variação permanece constante de 50 centavos por minuto né?
118. Inaudível.
119. Prof: vocês conseguiram resolver?
120. Obs: já
121. B: não, tá certo né, é 36
122. Y: é
123. B: tá certo, só se varia isto daqui?
124. Y: acho que não.
125. [inaudível]
126. Y: Será que vai ter que passar a limpo isto daqui?
127. B: não, só coloque a resposta.

ANEXO – III
SESSÃO 1 – DUPLA C

Dupla: C
Roger (C) e Rafael (K)
Observadora: Prof. Renata

1. [inaudível] K: o erro de 10% na conta
2. C: em torno de 10 centavos, né?
3. K: Pô, né, 10 % deve ser R$ 1,50 a mais, então acho que ele vai poder falar 3 minutos a mais do que o normal, certo?
4. C: ele pode gastar 15 reais
5. K: é com 15 reais ele pode falar 30 minutos, como o erro é de 10 % , então 10% a mais (...) ele pode falar 3 minutos a mais
6. K: eu acho que é isso!
7. C : se fosse a menos, aí pode ser a mais ou a menos. Se pegar 10% a menos de erro ...
8. K: aí vai dar ?
9. C: ai vai dar 17
10. K: precisa fazer conta ? [inaudível]
11. Obs: pode começar a resolver?
12. prof: pode!
13. prof: pessoal ! podem começar a resolver, tá .
14. K: agora faz a variação de 10%.
15. C: o erro de 10%
16. K: Pode ter 10% a mais ou 10% a menos
17. K: Eu vou fazer aqui, tipo, vou fazer assim oh 10% a menos vai ficar 3,50 e 10% a mais vai ficar 7,50
18. k: 10% a mais ele vai poder falar mais 3 minutos
19. C: a gente não pode pegar isto daqui e dizer que ..é 3 minutos! a gente tem que fazer assim
20. C: 3 minutos a menos vai dar 13,50 [inaudível] ele vai poder falar do mínimo ao máximo.
21. K: é do mínimo de tanto até [inaudível] é o que diz aí do 13 ao 17,50 ou do 13 ao 30?
22. C: do 13 até o 17,50.
23. K: ah, ta
24. C: vai ter o mínimo aqui...
25. K: e o máximo
26. C: e aqui é o que ele ...
27. K: só que vem cá, porque aqui este limite aqui vai tar sendo de 20% , de 10 aqui é de 10 aqui , a gente vai pegar 5 pra cá e 5 pra lá e vamos ter uma faixa .
28. C: Humm
29. K: Entendeu?
30. C: é a variação mudou de 10%
31. K: 10% foi gerado. Se pegar 10 pra baixo e 10 pra cima então você pega 5 pra baixo e 5 pra cima e vai ter o erro total que é 10%. ?
32. K: Ai caramba! e agora?
33. C: vamos pegar 5
34. K: vamos pegar de 5 em 5. 5% aqui vai dar 5% de ...vai dar 1,50 , 75 centavos
35. C: 14,25 e 15,75 (...)
36. K: aqui o valor mínimo
37. C: agora o valor máximo aí bota 15,75 , daí né ?
38. K: isso.
39. C: vamos responder a primeira pergunta aqui, depois ..
40. K: a primeira pode responder de 28,21 a 31,30 segundos
41. C: isso.
42. K: eu acho (risos) eu espero, esperanças
43. (....)
44. K: Professora?
45. K: fessora!!!
46. K:professora
47. K: Ai meu Deus!
48. K: ta, fechou, vamos para a segunda depois a gente vê isso aí
49. K: Caracas ! (....)
50. K: Professora!
51. Prof: oi
52. K: aqui nessa primeira só, o custo dele é 50
53. Prof: certo.
54. K: a taxa fixa que ele paga é 35, então 0 que ele pode variar é 5 reais.
55. prof: isso mesmo
56. K: então esse desvio aqui de 10% vai ser 5% pra mais ou 5 % pra menos?
57. prof: uu !
58. K: e o 5 também, então você pega 2,5 pra mais e 2,5 para menos
59. prof: isso aí.
60. K: Oh, beleza, então.
61. prof: é essa a idéia. Essa é uma maneira de resolver, existem outras maneiras também, ta! de repente vocês vão tar pensando em outra maneira de resolver o item b e c .
62. K: ta
63. prof: mas é isso aí
64. K: pô, legal.
65. questão 2:
66. C: ta, então, vamos pegar 0,01
67. K: 0,01 ao quadrado
68. C: vai variar aqui então, no raio ideal
69. K: não , não, ele vai virar 0,01 se você elevar ao quadrado vai dar 0,11
70. C: vai dar 0,001

71. K: ah! então quer vê ...para um raio de 4,3...
72. C: eu acho assim oh, que tem que achar esse aqui, em cm, ele vai variar nesse raio aqui , esse aqui é o ideal , raio. Vai variar para menos ou para mais.
73. K: sim , sim
74. C: Daí a gente faz o cálculo da área e ele vai ter que variar aqui, oh
75. K: é verdade
76. C: Vamos achar a área normal dela. Se você pegar o raio vezes ...
77. K: a área é πr^2
78. K: πr^2 vai dar 68,1 ?
79. C: deixa eu ver aqui..
80. K: eh, vamos ver ..
81. K: 58,05. Essa com π igual a 3,14.
82. C: pegou o π=3,14?
83. K: é ne, porque é 4,3 ao quadrado vezes o π que vai dar 58,05
84. C: então ta.
85. C: a gente tem que colocar aqui o raio ideal?
86. K: a gente pega o raio ao quadrado e tem que achar esta variação aqui, oh, só que não é em porcentagem é em valor.
87. K: o quanto você pode variar o 4,3 e ao elevar ao quadrado dê esta diferença. então você quer ver , se eu pegar 4,1 vou ter uma diferença 0,31
88. C: aqui não é o raio que varia 0,1
89. k: é a área
90. K: pensa comigo, se a área a gente calcula πr^2 ,se π vai ser constante então você vai tar variando
91. C: o raio
92. K: então o valor do raio. Então como 0,1 vai tar aqui nesta área, então 0,1 vai tar variando em função do raio ao quadrado, então meu raio pode variar em quanto?
93. C: a gente pode faze assim: pega 58,1 +0,1
94. K: 58,1+0,1 e tira
95. C: depois menos 0,1 em função de π a gente acha o raio
96. K: pode crer. Vai dar 58,1 + ...faz aí faz, sabe fazer mesmo
97. C: vamos fazer primeiro tirando 0,1
98. K: daí da 58
99. C: $58 = \pi r^2$
100. C: Pega o 58 e divide por π e depois tira a raiz
101. K: isso
102. K: 58/π, tira a raiz dá 4,29.
103. C: pequeno, oh, raio mínimo, então.
104. K: seria o raio mínimo
105. C: que a gente tirou da área
106. K: 4,29.
107. K: Agora vai ser então 58,1 +0,1=58,2
108. C: divide o 58,2 por π e tira a raiz
109. K: 4,30
110. C: 4,30?
111. k: 4,3030401
112. K: coloca três casas aí ..
113. C: vamos refazer o anterior, com mais casas decimais
114. K: 4,296
115. C: que é as variações oh, do mínimo e do máximo
116. K: que é de 0,04. Para mais ou para menos 0,04
117. K: Entendeu?
118. C:é
119. K: coloca aí então que a variação vai ser de mais ou menos 0,04.
120. C: 0,04 cm
121. K: isso.
122. obs: igual ao primeiro exercício, só que com mais itens, ta.
123. C: Nos estávamos resolvendo aqui.
124. Obs: esta folha que você vai ter que entregar juntamente com todo o rascunho, ta.
125. K: certo, certo.
126. Obs: tem que resolver todos aqueles itens ali
127. K: tá ok!
128. Obs2:Eles fizeram no rascunho
129. Obs: todos?
130. Obs2: todos. todos no rascunho
131. Obs: esse, esse, esse, tudo?
132. K: é esses aqui, né
133. Obs2: todos
134. Obs: ah ta, é para resolver o primeiro!
135. K: ah é?
136. Obs: mas sem problema. Eles já fizeram todo o primeiro do 1?
137. C: do um...
138. Obs: então beleza
139. K: ah sim
140. Obs: depois vocês vão fazer o dois o 3 e o 4 vocês não vão discutir mas depois vocês vão ver que o outro exercício vai ser diferente do dois do três do quatro, ta?
141. K: ah, ta.
142. Obs: mas agora nesse primeiro momento é entregar aquela atividade lá.
143. K: ta
144. Obs. esses outros vocês guardam pra depois entregar, ta.
145. C: é esta daqui oh.
146. Obs2. O iva?
147. K: este daqui não precisa fazer agora?
148. Obs: oh, preste atenção oh,
149. K: ah
150. Obs: aqui oh, esta é a segunda atividade é só isto que vocês vão entregar agora nesse momento
151. K: ah, ta, tem que responder essa agora

152.Obs: e só esta aqui, ta. essa atividade que vocês fizeram é o mesmo que este item aqui,oh, só que agora com itens específicos. O segundo o terceiro e o quarto vai vir depois
153.k: ah, ta
154.Obs: é uma atividade por vez
155.K: ah, ta
156.Obs2: mas ainda vai ser feito?
157.Obs: vai ser feito. Só que não são todos iguais. Esse é o escolhido,vocês já podem guardar esse aqui.
158.K: certo
159.Obs: ta
160.K: será que vai dar [inaudível]
161.C: hi! hi!
162.Obs2: vai
163.K: ah ta
164.C: [inaudível] 35 custa 50 centavos por minuto, 50 reais sobra quanto tempo? tem a taxa fixa , então ele vai gastar 15 reais, então fala 30 minutos.
165.K: é o mesmo cálculo!
166.C: é a mesma coisa.
167.C: 30 minutos!
168.k: Aí 50 por minuto. Aí 15 dividido por 50 [centavos]
169.C: por 0.5 é 30
170.K: aí foi a primeira
171.C: pois é
172.C: nem vou por a resposta certinha.
173.K: não , não, tem que ficar escrevendo e tal
174.C: na b, se planeja para ter uma fatura de 45 a 55
175.K: então vai variar de 10 a mais à vinte reais, né? dos pulsos, que eu digo. Em torno dos 30 minutos [inaudível]
176.C: então ele vai falar... se ele falava 30 minutos
177.K: agora com..
178.C: ele vai poder 30 ou 40
179.K: não, vamos dizer ele pagava 50 e falava 30 minutos agora ele vai pagar vinte e vai falar então é....
180.C: 5 minutos a mais?
181.K: não , com 5 reais a mais, quanto minutos a mais?
182.C: 10 minutos a mais!
183.K: não com 5 reais ele vai falar dois minutos e meio, não...é 10 minutos
184.C: 10!
185.K: 10 minutos. A cada 5 reais são 10 minutos que são 15 então são 5 reais a mais ele vai falar...
186.C: pra 45..
187.K: ele vai falar 20 minutos
188.C: só que tem que descontar a fatura aqui, né.
189.K:sim
190.C: tem que descontar a taxa.
191.K: sim, por isso que eu digo , por isso que eu digo só variou 5 % . Se pegar 50 aí paga 15 né, agora 45 vai dar 10, então variou 15, 5 do que ele pode falar .
192.C: hum...
193.C: ele vai poder falar 20 minutos aqui
194.K: 20 minutos
195.C: 55 dá 20
196.K: aí vai dar 30, 40 minutos
197.C: a variação em torno de 30? 10!
198.K: 10.
199.C: [inaudível] no intervalo de 48 a 52? é a mesma coisa!
200.K: é só variar 3 reais, 2 dividido por 0.5 vai dar 4 minutos!
201.C: aqui dá 13
202.K: dá 26, 4 minutos de diferença. Faz 4 para mais e 4 para menos.
203.C: 52 menos 35 dá...
204.K: 32!
205.C: 32?
206.K: 32 não, dá 16.
207.C: dezes...
208.K: dezessete!
209.C: dezessete.
210.K: aí vai dar 54. .. não 54, 34 minutos.
211.C: é...
212.K: 34 minutos raspando
213.K: o que acontece com o item a, b, e c .....tem uma régua aí?
214.C: essa daqui até que é fácil !
215.K: facinha! é só ligar os valores ...
216.C: é ligar os valores
217.K: eu tinha uma régua aqui!
218.C: eu tenho.
219.K: faz aí então, faz.
220.C: só vai dar positivo
221.K: é um gráfico com as curvas a, b e c. Aí coloca o valor x 35 e aí todos vão partir do 35 .
222.K: vamos deixar isso aí...
223.K: coloca o tempo, entendeu?
224.C: aqui coloca a variação, né?
225.K: Oi?
226.C: tem que colocar a variação.
227.Obs: tem que entregar os rascunhos
228.K: temos que colocar o nome
229.Obs: pessoal, por favor, não esqueçam de colocar o nome!
230.K: varia 5 reais, 35 fixo para uma faixa de 50, 52...
231.Obs2: você pode me entregar essa folha também?
232.K: não, não. Esta daqui, entregar esta daqui?
233.Obs2: é interessante para ela, pro trabalho dela, para analisar as várias variáveis
234.K: nossa.

235.C: esta daqui não precisa, né?
236.Obs2: precisa.
237.C: oh, louco! ta então ...
238.K: hi, hi, hi
239.[Inaudível]
240.colega: tranqüilo?
241.K: sim, só que a gente fez tudo.
242.colega: por que?
243.k: porque não sabia como fazer
244.C: ela falou para fazer
245.Obs2: eu também entendi isto.
246.C: primeiro fazer este, depois da outra folha
247.K: não...é acho que era, fazer o um desse aqui e depois.. mas ta valendo!
248.C: mais trabalho
249.K: a dois eu achei que deu mais trabalho
250.C: a de cima foi tranqüila
251.K: ta valendo..
252.C: essa aqui tinha que se ligar nos 10%
253.K: ah, sim! eu pensei 10% , ma s pô deu 20% de variação tal [inaudível]
254. K: beleza .

ANEXO – IV
SESSÃO 1

Dupla: D
Luis (L) e Daniel (D)
Observadora: Prof. Katiani

1. [Inaudível]
2. L: Aqui, oh! 50 reais ..
3. D: ele vai falar ...Desses 50 reais quanto ele paga mensalmente?
4. L: 15? não 35. Sobra 15.
5. D: 30 minutos. É isso mesmo?
6. L: tem que fazer os cálculos?
7. [inaudível]
8. Obs: uma idéia para vocês nesta letra b: uma representação gráfica aqui de repente vocês não conseguiram visualizar com mais facilidade o que está acontecendo?
9. D: vamos fazer por intervalo.
10. Obs: por intervalo? não tudo bem, pode ser, sou dei uma idéia
11. Obs: pode deixar rabiscado, não tem problema.
12. D: pega o 45 igual a 35 mais 0,5x
13. L: diminui o 45 de 35...
14. D: x é igual a 20
15. [inaudível]
16. Obs: vou dar uma dica aqui para vocês ele não quer no tempo 45 e nem no 55, ele quer uma variação de tempo, tá?
17. Obs: tá certo o que vocês estão fazendo aqui oh, só que depois vocês têm que prestar atenção que ele deu uma variação de tempo, ele não quer tempo exato do 45 e 55, como estava pedindo antes do 50.
18. Obs: aqui na verdade vocês têm um tempo já que é de 50 minutos, este 50 minutos está tendo que correspondência?
19. [inaudível]
20. Obs: deixa-me fazer uma perguntinha para vocês: o que significa este 10?
21. D: 10 é a..
22. L: é a variação ..
23. D: varia mais ou menos 10.
24. L: não é?
25. Obs: não... Só para vocês falaram um pouquinho, vocês estão muito quietinhos, tá (risos) por isso que estou perguntando.
26. Obs: é isso mesmo
27. D: é?
28. Obs: hum..hum
29. L: que bom (risos)
30. [inaudível]
31. Obs: o que tá acontecendo? Qual o problema?
32. L: é o espaço
33. Obs: faz atrás. Se o problema é o espaço faz atrás da folha. Faz aqui oh!. Tão simples e vocês se confundindo tanto...
34. [inaudível]
35. D: o que acontece com a variação do tempo em toro de 30?
36. L: torna-se cada vez menor, né?
37. D: diz aqui oh
38. [inaudível]
39. L: o erro pequeno vai ser o delta x
40. D: e agora?
41. L: ah, tá na verdade este é a variação do delta x, aquele é o delta y então ele quer a relação entre delta y e delta x
42. D: beleza
43. L: coloca delta aí
44. [inaudível]
45. L: não é besteira (risos)
46. Obs: o que vocês estão pretendendo escrever aí?
47. L: [risos] estamos querendo achar a relação aqui, oh
48. D: a relação entre delta e epsilon que tá pedindo
49. [inaudível]
50. D: o epsilon é igual r trinta mais delta menos r trinta menos delta
51. L: essa é a relação
52. D: vamos ver..
53. Obs: pegue um valor de epsilon. Você pode denotar por epsilon um erro muito pequeno. Então um erro muito pequeno. O que significa este erro muito pequeno? Qual seria o valor epsilon nesse caso? Vocês podem dar valor! um erro muito pequeno, o que acontece? se vocês pegassem epsilon igula a 0,01 o que tá acontecendo?
54. Obs: para quanto vai a conta telefônica?
55. D: complicado..
56. L: o tempo vai ficar trinta
57. Obs: é isso que tá pedindo qual a relação entre epsilon e..
58. L: tem que ser uma relação matemática?
59. Obs: não, pode escrever qual qual a relação que vocês estão encontrando
60. L: ah, tá [risos]
61. Obs: escrevem com as palavras de vocês o que está acontecendo aí. O que vocês entendem com esse erro e com essa relação que existe entre o valor da conta e o tempo utilizado
62. [inaudível]
63. L: quanto o menor o delta ..

64. D: temos que ver qual é a nossa variável x
65. [inaudível]
66. L: quanto menor a variação do tempo menor
será ....[inaudível]

ANEXO - V
SESSÃO 2: SITUAÇÃO 1

Dupla: A
Gleison (G) e Jonas (J)
Observadora : Ivanete

1. G: a função é aquela ali, da área.
2. J: a área ideal seria essa aqui mesmo, né?
3. G: é, a área ideal é 58,1.
4. J: a gente vai colocar como limite, né?
5. G: como o limite.
6. J: isso, aqui seria o epsilon?
7. G: isso!
8. J: Então o epsilon é igual a 0,1.
9. G: aí ele quer saber o delta.
10. J: não entendi, como temos que colocar...
11. G: é o jeito mais fácil, mas por ali como se deve fazer...
12. [inaudível]
13. G: dá para fazer daquele jeito.
14. G: pera aí! A função é esta daqui. Essa é nossa f
15. J: f de r.
16. G: então f de r menos o limite, em módulo, vai ser menor que o epsilon, sempre que o nosso r menos....o a...
17. J: menos 4,3 né?
18. J: porque esse é o raio limite.
19. G: ah, sim! for menor que um delta.
20. J: vamos trabalhar com isso daqui.
21. G: abre esse f de r. Ali é pi vezes r ao quadrado.
22. J: tem um problema...
23. G: temos que isolar isto daqui.
24. J: ah, ah
25. G: 58,1 menos epsilon menor que pi vezes raio ao quadrado menor que 58,1 mais epsilon
26. G: vamos dividir tudo por pi
27. J: e tirar a raiz
28. G: 58,1 mais epsilon dividido por pi é menor que r ao quadrado que é menor que 58,1 mais epsilon dividido por pi.
29. J: tirar a raiz
30. G: desse lado também.
31. G: fica 4,3 menos delta menor que raio que é menor que delta mais 4,3
32. G: sacanagem esse aqui..
33. J: é não tem como...
34. G: acho mais fácil deixar assim: 58,1menos epsilon sobre pi é menor que o raio ao quadrado que é menor que 58,1 mais epsilon sobre pi.
35. G: e aqui elevar ao quadrado
36. J: iche...Isso vai dar uma conta do caramba!
37. G: o que você vai fazer? Elevar este ao quadrado?
38. G: isso vai continuar valendo.
39. J: não, né cara.
40. G: bom, o raio é positivo.
41. J: se elevar ao quadrado aqui, aí complica...
42. G: r não quer dizer que é positivo, delta é positivo.
43. Obs: vocês querem ajuda para calcular o resultado da raiz?
44. G: a gente tem calculadora. A gente está vendo se está certo elevar ambos os lados da inequação ao quadrado. Esse negócio está meio esquisito de fazer.
45. Obs: como?
46. G: a gente tá tentando fazer desse jeito...pegamos o a como 4,3
47. Obs: certo. Está correto!
48. G: mas chega uma hora que em uma temos r ao quadrado e na outra só temos r.
49. Obs: isso.
50. G: aí a gente não sabe se tira a raiz daqui o eleva lá ao quadrado.
51. Obs: qual é o mais simples?
52. G: elevar ao quadrado lá.
53. Obs: elevar ao quadrado lá?
54. G: parece...Só que daí vai aparecer um monte de termos em delta.
55. Obs: como se tira o quadrado daqui?
56. J: tirando a raiz.
57. Obs: tirando a raiz
58. G: ainda vai valer esta desigualdade? Se tirar a raiz?
59. Obs: Quando vale esta desigualdade aqui? Desse lado tem algum problema?
60. G: não.
61. Obs: não, porque é um número...
62. G: sempre positivo
63. Obs: e esse aqui, o que acontece?
64. G: aí vai depender do epsilon.
65. Obs: quem o epsilon?
66. G: o epsilon é 0,1.
67. Obs: então, vocês não têm quem é o epsilon?
68. G: ah, tá
69. Obs: então nesse caso 58,1 menos o epsilon é?
70. G: 58 que é um número positivo.
71. Obs: Positivo. Então pode tirar a raiz?
72. J: ah, beleza!

73. Obs: então o que está acontecendo nesse problema: ele deu exatamente o valor fixo de quem?
74. G: do epsilon.
75. Obs: ele deu o erro para vocês. Então vocês podem tirar a raiz de ambos os lados porque têm a garantia que esses números...
76. G: são positivos.
77. Obs: Então, qual o modo mais fácil?
78. G: substituir o valor de epsilon, que é 0,1.
79. G: temos raiz de 58 dividido por pi menor que o raio que é menor que a raiz de 58,2 dividido por pi.
80. [inaudível]
81. G: agora eu não acho que pode simplesmente pegar esse aqui e igualar ao outro.
82. G: a vontade é de fazer isso.
83. J: podemos dizer que o módulo de r vai ser menor que isso daqui?
84. Obs: não, módulo de r menos esse daqui..
85. G: módulo de r menos 4,3.
86. Obs: isso.
87. G: acho que pode igualar porque esse implica neste. Então vai dar o delta relativo ao epsilon igual a 0,1. Já existe uma relação..
88. G: pode igualar?
89. Obs: qual?
90. G: fazer delta menos 4,3 igual a raiz de 58 dividido por pi.
91. J: porque temos t em ambos.
92. G: Agora podemos fazer a outra igualdade para ver o que dá.
93. J: vai dar diferente. E agora?
94. G: deixa ver: 58 dividido por pi , tira a raiz , daí menos 4,3?
95. J: isso.
96. G: $4{,}14x10^{-3}$ e se fosse desse outro lado?
97. J: dá diferente.
98. G: 58 dividido por pi, raiz... aí 4,3 menos delta igual a 4,29 bá, ba...
99. G: é 4,3 menos isso.
100. G: não tá igual!
101. [inaudível]
102. Obs: quanto deu esta resposta aqui?
103. G: 4,2967
104. Obs: é porque você colocou 4,14 aqui?
105. G: não, não. Isso é desse lado, aqui. A análise da primeira parte.
106. G: a gente igualou o primeiro com o primeiro e o segundo com o segundo
107. Obs: certo. Agora diminui este de 4,3 que é o que você quer...não deu o mesmo resultado?
108. G: não $3{,}26x10^{-3}$
109. J: aqui é 52,2...
110. G: 58,2 dividido por pi, tira a raiz menos 4,3 deu $4{,}14.10^{-3}$
111. Obs: o que nos podemos dizer desse raio de 4,3
112. G: ele não dá o l, que é 58,1.
113. J: tem que o usar o pi com o valor inteiro?
114. G: quando a gente fez as continhas para 58,1 não dava 4,3 o raio.
115. J: dava 4,301
116. Obs: tenta ver quanto dá?
117. G: ah, com 4,3 a gente conseguiu 58,08 cm^2
118. Obs: então o que houve aí nesta conta? não foi um erro de arredondamento?
119. G: Se a gente usar a fórmula πr^2 e calcular com r=4,3 vai dar 58,080, dá menor...
120. G: Agora se eu usar 58,1 e ver qual o raio correspondente então a gente tem que fazer ele dividido por pi e tirar a raiz. Esse que o valor correto do raio .
121. Obs: exatamente. tem um erro de casas decimais. O raio foi truncado. Esse 4,3001 ele encarou com 4,3. O que o problema está perguntando?
122. G: Qual a variação do raio
123. Obs: a variação do raio vocês encontraram aqui. Aqui vocês já usaram a definição, certo? Estão querendo comparar com este lado. O que está acontecendo? esta 4,3 não está bem centralizado devido ao erro das casas decimais.
124. J: isso.
125. Obs: tenta colocar em valores quanto deu esse raio aqui.
126. J: o menor raio?
127. Obs: é.
128. G: 4,29 alguma coisa. 4,2967
129. Obs: então coloque esse valor para nos vermos o que está acontecendo
130. J: r maior que ..
131. G: ah, tá. 4,304. Quer mais casas decimais?
132. Obs: não precisa, olha só: o que você fez aqui, um truncamento.
133. J: também truncou
134. Obs: de quantas casas decimais? Compare com 3 casas decimais. Quem seria o centro?
135. J: r igual a 4,3
136. Obs: Então o que vocês podem concluir? Quanto era o erro que vocês tinham na área?
137. G: ah, o epsilon? o epsilon era de 0,1
138. Obs: com um erro de 0,1, qual o erro em torno do raio
139. G: em média de 3 , quer dizer 0,00034
140. Obs: é um erro ...
141. J: muito pequeno
142. G: bem pequeno em relação ao epsilon.
143. Obs: qual a diferença que tem entre essa questão e a anterior?
144. G: essa é de segundo grau, quadrática.
145. Obs: e a outra?
146. J: era linear

147. Obs: o que está acontecendo com a relação do delta e do epsilon? Com um erro muito pequeno do epsilon
148. G: tem um delta menor ainda
149. G: porque a função cresce mais rapidamente. Quanto mais aumenta o valor maior é a área.
150. Obs: mas vocês entenderam o porque que deu aquele erro ali? foi em função do que?
151. G: do arredondamento de casas decimais
152. Obs: isso. Se tivessem usado direto três casas decimais teria chegado ao resultado imediato. mas como foi usado todas as casas, deu o erro em função do arredondamento do raio.
153. Obs: o que eu gostaria de perguntar para vocês é se ficou bem claro o epsilon?
154. G: ficou
155. Obs: ficou
156. J: sim
157. Obs: vocês tiveram alguma dificuldade de identificar a função aqui?
158. J: não
159. Obs: vocês conseguiram ler o problema e identificar todas as variáveis?
160. G: sim
161. Obs: sem problema?
162. J: sim.
163. Obs: então podem continuar a fazer o próximo.
164. G: Qual o intervalo de variação do raio? 4,296
165. menor que o raio que é menor que 4,304.

ANEXO – VI
SESSÃO 2: SITUAÇÃO 1

Dupla: B
Bruno (B) e Yuri (Y)
Observadora: Prof. Carla

1. B: é a área do cilindro, né?
2. Y: é
3. B: daí é só fazer a área do cilindro e aí ele pergunta o raio?
4. Y: você precisa saber qual o desvio que se pode aceitar em relação ao raio do cilindro ideal que é de ...o raio é de 4,3
5. B: tá
6. Y: e, além disso, a área transversal pode diferir de [inaudível]
7. B: a área transversal é aqui, né?
8. Y: é
9. B: pode variar de...
10. Y: pode, pode de 58 virgula...até 58,9
11. B: a mais ou a menos
12. Y: pode ser de 58,8 a 58,9?
13. Y: neste contexto, qual o intervalo da variação do raio?
14. Y: ah, tá! daí qual é a variação do raio para conseguir isto daqui!
15. B: ah..tá.
16. Y: vamos calcular aqui, né, a área do...Círculo. A área do círculo vezes a altura né? Não
17. B: mais esta área daqui, não é?
18. Y: ah? Porque o diâmetro aqui vai dá, tá vendo o diâmetro aqui dá 8,6 né? Então 8,6 dividido por 58,1 que vai dar a altura. A área disso aqui é a área do circulo vezes a altura – a área do cilindro
19. B: daí não é o volume?
20. Y: ah, tá certo!
21. B: a área vezes a altura dá o volume!
22. Y: tá certo, tá certo!
23. Y: O que será que ele quer então? Você entendeu?
24. B: a área vezes...
25. Y: é, vai dar o volume.
26. B: mas aí o que tem a ver a área?
27. Y: ai é só o raio então
28. B: só o raio, né? tá complicado!
29. Y: não, que vê, esta distância aqui oh, é o diâmetro, é o comprimento da circunferência , não é?
30. B: será?
31. Y: não é assim?
32. B: ah! Então tá , então calcular $2\pi r$, né?
33. Y: é.
34. B: vai dar o comprimento dá...
35. Y: $2\pi r$ é igual a 8,6 π
36. B: isso!
37. Y: A hora que fechar isso daqui vai dar o raio de 4,3...
38. B: sim
39. Y: ele pergunta a variação...
40. B: a variação do raio.
41. Y: do raio! Vai daqui..
42. B: Acabou? Deixe assim.
43. Y: esse daqui é fácil oh
44. B: esse aqui é só multiplicar dividir o 120 por 4,9 depois por 5,1 daí dá a variação do raio
45. Y: a variação, né?
46. B: a variação do raio
47. Y:acho que é só isso.
48. Y: deixe assim...
49. [inaudível]
50. Y: Faz 58 dividido por π
51. B: dá 18,46
52. Y: aí tira a raiz.
53. B: pera aí ...Mas aí é a área do....'
54. Y: o que diz ali oh, é a área da seção transversal é πr^2
55. B: tá, mas o raio é quanto?
56. Y: o raio é 4,3. $(4,3)^2$ é...
57. B: mas o que ela quer é a variação do raio, né?
58. Y: através da variação da área que vamos descobrir a variação do raio
59. B: deixa-me tentar...
60. [inaudível]
61. B: 18,52
62. Y: pera ai ..
63. B: 4,3, é?
64. Y: é
65. B: fica próximo de 4,3
66. Y: esta é conclusão.
67. [inaudível]

ANEXO - VII
SESSÃO 2- SITUAÇÃO 1

Dupla: C
Roger (C) e Rafael (k)
Observadora : Prof . Renata

1. K: diferir no máximo de 0,1 dos 58,1m ^{2} necessários. Isso é o raio. O que mais ele fala aí?
2. C: quer a variação?
3. K: a variável i. O 58,1 vai ser então o que...o limite?
4. C: é, isso aqui vai ser o ε (0,1)
5. K: ε e daí a gente que calcular, no caso, o δ.
6. K: vamos ver então qual é a função.
7. C: o raio é igual a 4,3
8. K: deixa eu pegar uma calculadora
9. K: o raio pode diferir no máximo de 0,1 cm.
10. C: para mais ou para menos
11. K: vamos ter que admitir, admitir....Eu não sei agora...
12. C: podemos considerar meio pra cá
13. K: meio pra cá, dá 0,05, daí o erro total vai ser 0,1, vamos ver
14. C: mas é daqui oh, [inaudível]
15. K: a nossa área seria f(x), no caso
16. C: f(r) né?
17. K: é f(r) vai ser igual πr^2 . Aí vamos ter nosso limite como sendo 58,1. Então temos f(r) mnenos 58,1 é menor que o ε sempre que, então x menos o a, que no caso, vai ser a variação da área né?
18. C: da área?
19. K: não, da variação do raio
20. C: isso é o raio?
21. K: não, o x ali, no caso vai ser...
22. C: tem uma função ali.
23. K: isso no caso é o y (área), e este é o x (raio), né?
24. K: o raio, no caso. Sempre que o raio menos o delta, não o a. O **a** a gente não sabe, é o que queremos achar, né?
25. C: não sei..
26. K: agora temos que identificar o que é o x e o que é o a!
27. C: tá certo
28. K: o a vai ser 4,3 e o x vai ser o raio, não é?
29. C: o raio
30. K: sempre que r menos 4,3 for menor do que delta
31. [inaudível]
32. C: módulo...
33. K: aí módulo, vamos desenvolver o módulo, agora né?
34. C: vai fazendo essa, que eu já vou fazendo esta aqui..
35. k: você já tirou o módulo, então aqui não tem módulo.
36. K: 4,3 menos delta menor que o r... maior que delta mais 4,3
37. C: isto daqui eu separo? Vai ficar raiz aqui, né?
38. K: ai meu Deus! Aí tem que isolar o r, como está aqui.
39. K: ou será que não é mais fácil a gente elevar aqui
40. C: não dá no mesmo
41. K: se a gente elevar ao quadrado aqui
42. C: dá no mesmo.
43. K: dá né? Acho que é mais fácil, aqui os valores são mais..
44. C: é mais fácil
45. C: aqui tem que tirar a raiz, tem π.
46. K: 4,3 ao quadrado, x ao quadrado ....
47. K: só que este termo vai ter o ..
48. C: vai ter o delta ali...
49. K: vai sair com o delta ao quadrado ali
50. K: agora vai ter que igualar as duas
51. C: quanto é que deu?
52. K: deu 18,49 menos 8,6delta mais delta ao quadrado menor que raio ao quadrado menor de que 18,49 ....
53. C: isso?
54. K: mais delta ao quadrado.
55. C: esse é igual a esse, e este tem que ser igual a este.
56. [inaudível]
57. C: passe este daqui multiplicando ...o ruim é trabalhar com vírgula.
58. K: 18,49 vezes pi dá 58,08
59. C: seis vezes pi ..
60. K: 27,1
61. C: 27?
62. K: 27,1, não 27,01
63. C: e agora?
64. K: agora vamos diminuir isto aqui, né.
65. C: mas não pode
66. K: aí
67. C: menos dá..0,1 ,humm 0,02
68. K: isolar 0,02
69. C: isolando esta daqui o que a gente vai ter?
70. K: falta ao quadrado aqui!
71. C: ah...
72. K: deu a mesma coisa

73. C: isto é igual a isto
74. K: mudando o sinal
75. C: mudou o sinal aqui
76. K: se simplificar por menos um
77. C: aí vai mudar a equação...xi! Caracas!
78. K: ele quer saber a variação do raio. A variação máxima do raio, ou seja o a.
79. C: o r
80. K: para aí
81. Prof: Já chegaram a conclusão?
82. K: mais ou menos
83. C: hi..hi..[risos]
84. C: aqui oh, professora a gente chegou praticamente na mesma coisa só que sinal trocado nesse e nesse daqui
85. K: a gente partiu daqui oh
86. Prof: O que vocês conhecem?
87. K: esse epsilon vai ser o máximo desse aqui né
88. Prof: de 0,1 né? Esse é o teu epsilon
89. C: eu posso jogar ele aqui?
90. Prof: pode!
91. K: e aí..
92. Prof: ele é conhecido!
93. C: eu não conheço o delta!
94. Prof: é o que você tá procurando.
95. K: recomeça
96. C: 0,1....vai dar uma quebradeira aqui...
97. K: nossa, cara!
98. C: tá, 3,14 vezes delta ao quadrado menos 27 delta, esse passa para cá, menos dá 0,1 ...hum dá -0,002
99. K: a gente deu mole, se a gente tivesse substituído ele aqui oh, ...vamos embora, vamos ver o que vai dar
100. C: [inaudível]
101. C: faz aí, a gente só coloca as raízes.
102. K: 4 vezes 3,14, 12 vezes 0,008 menos 1 , vamos arredondar para 2 casas. A raiz disso aqui dá ....
103. [inaudível]
104. K: tenta substitui o epsilon aqui
105. C: dá 58, 2. E aqui vai dar o quê?
106. K: aqui a gente não sabe.
107. C: desse lado dá 58
108. K: então 58 dividido por pi dá 18,46
109. C: menor que r ao quadrado
110. K: menor que r ao quadrado
111. C: menor, daí tem que fazer.
112. K: 58, 2 dividido por pi que é 18,52. Raiz dos dois né?
113. C: é né
114. K: 4,30 menor que r e aqui é 18,46
115. C: 4,29
116. K: Agora este valor a gente iguala ali
117. C: aqui né? 4,29 é igual a 4,3 menos delta. E o outro quanto é?
118. K: 4,3
119. C: 4,3 é igual a 4,3 mais delta. Dá zero!
120. K: dá zero
121. K: deixa só eu ver uma coisa aqui, se não tinha vírgula aqui, né.
122. C: 4,3034
123. K: aí vai dar 0,003 de novo. Aí fechou com aquela resposta.
124. K: 0,01 e 0,003
125. C: achamos dois valores
126. K: é um pra mais e outro pra menos. É o intervalo.
127. Obs: este aqui está certo?
128. K: se a gente pegar 0,0...
129. Obs: dá onde isto aqui?
130. K: daui oh, 58, 2 dividido por ...?
131. Obs: 58,2? é 58,1!
132. C: mas tem mais o epsilon
133. Obs: ah
134. K: temos 58 e 58,2 e dividimos pelo pi e aí tira a raiz.
135. Obs: 58,1 dividido pelo pi
136. K: deu isso aqui 18,5236 aí tira a raiz dá 4,3041
137. Obs: dá 0,04, tem diferença !
138. K: ah, tem eu considerar todas as vírgulas, então
139. Obs: sim. 0,04
140. K: ah...
141. C: esse igual ao ...
142. [inaudível] [fazendo as contas]
143. C: 0,004
144. C: como a gente coloca este resultado aqui, ele pode no mínimo ... qual a variação do delta?
145. C: professora?
146. C: Achamos estes dois valores, mas para dar a resposta...
147. Prof: é só uma, é raio né? o raio deve ser igual em ambos os lados
148. C: qual não convém para a gente?
149. Prof: como vocês chegaram a este resultado? Vocês não estão trabalhando a definição de módulo?
150. K: a gente pegou menos 0,1 de 58
151. Prof: tiraram a raiz quadrada..
152. K: tiramos a raiz quadrada
153. prof: e acharam o valor desse?
154. K: sim, deu 58,2
155. Prof: use 4 casas decimais após a vírgula
156. [inaudível]
157. C: vamos refazer este daqui
158. K: raiz de 58 dividido por pi ..
159. C: 58? ah é !
160. K: dá 4,296
161. C: 4,2967
162. K: 4,2967, vou deixar aqui oh.
163. C: 58,2 dividido por pi, tira a raiz dá 4,3041
164. K: Agora vamos igualar.

165.C: aqui apagar também..
166.K: isso!
167.C: Que viagem desenvolver a parada aqui (risos)
168.K: nossa cara, viagem!
169.C: isso é igual a isso
170.K: isso
171.C: 4,3 menos ...ah vamos colocar direto
172.K: 4,2967 menos?
173.C: 4,3!
174.K:0,0033
175.K: 0,0033
176.C: o outro...
177.C: 4,3041 igual a 4,3 mais delta
178.C: 4,3041 menos 4,3
179.K: 0,0041. Ele quer saber a variação mínima ou máxima?
180.C: o intervalo..
181.K: Porque ele pede o intervalo né? Então o raio vai poder variar do menor valor até o maior.
182.C: o raio não né?
183.K: o delta.
184.C: então de 4,3033 até 4,3041
185.K: isso!
186.K: não, no caso é 4,3 menos isso daqui e 4,3 mais isso aqui.
187.C: ah é.
188.K:4,3 menos 0,003
189.C: mas não tem que ser um? Não vai dar o mesmo raio? Não tinha que ser igual?
190.K: Pois é, cara. Não estou entendendo o que tá errado. Deu uma diferença muito pequena, não é? Qual que é média dos dois?
191.K: 0,0037
192.C: 0,003
193.K: ai..ai . Era para ter dado igual!
194.Prof: acabaram?
195.C: mais ou menos
196.K: mais ou menos
197.Obs: encontraram dois valores
198.K: a gente viu que dava 58, 1 menos 0,1, sobre pi , aí o r e aqui 58,1 mais 0,1 sobre pi.
199.K: aí aqui dá 58 sobre pi e aqui vai dar 58,2 sobre pi. E aí disso aqui é que deu a diferença no final .
200.K: deu 4,2967 e 4,...
201.Obs: e 4,3 menos isto dá quanto?
202.K: aí dá 0,0033 e outro dá 0,0041
203.Obs: ah ..
204.C: e tem que ser uma resposta só, porque ela falou que o raio.
205.K: vou tirar uma média
206.Obs: aqui dá 0,004 e outro dá 0,003
207.Obs2: é o seguinte
208.Obs: por quê dá esta diferença?
209.Obs2: Por que dá esta diferença? Porque houve um erro de casas decimais no raio. Quando você pega ali, oh.. Pega ali o raio original, dá 4,300 mais alguma coisa mais eles truncaram! Colocaram 4,3 então o que acontece? se você utilizar três casas decimais dá certo! se você utilizar mais de três casas decimais vai dar um erro.
210.K: ah, tá
211.Obs: tá certo!
212.Obs2: e esse erro é proveniente de onde? do arredondamento de casas decimais!
213.C: isso que a gente estava vendo, que o delta deveria dar igual
214.Obs2: tá certo.
215.Obs2: o que é a variação do raio aqui?
216.K: é daqui...
217.Obs2: é dessa até essa. O que está acontecendo, em relação a este raio aqui, o 4,3, ele não está centralizado .
218.K: é...
219.Obs: é 4,3 e alguma coisa...
220.Obs2: porque o raio, geralmente, a gente interpreta como tanto para cá quanto para lá . Eu sei que a variação tá nesse intervalo aqui, mas o raio ideal para ele fez um arredondamento para 4,3. Se eu quiser que ele seja o centro disso aqui o que eu teria que fazer?
221.K: somar os dois e dividir por 2
222.Obs2: então houve um erro de arredondamento no raio ideal. Faz a conta aí ...ele deu 58,2 faz igual a pi vezes o raio ao quadrado. Tenta achar o raio. Não é 58,2 é 28,1 né?
223.C: mais daí tem que somar o epsilon.
224.Obs2: não, não. O normal porque a função é pi vezes o raio ao quadrado
225.C: ah, sim
226.Obs2: pega 58,1 dividi por pi
227.K: dividi por pi
228.C: pi
229.Obs2: tira a raiz
230.K: aí..
231.Obs: olhem ali, oh..
232.C: 4,3004
233.Obs2: olhem o raio 4,3004, ele desconsiderou na terceira casa decimal . Tanto é que se vocês desconsiderarem na terceira casa decimal dá o mesmo valor.
234.K: beleza
235.C: agora sim
236.Obs: eu nem tinha percebido. São detalhes que eles têm que analisar.
237.K: é real
238.C: é que o raio ideal foi arredondado
239.K: na prova pode acontecer isso (risos)
240.Obs: é..
241.K: quando vamos tirar esta raiz não vamos considerar mais ou menos? Desse r aqui?

242.C: não porque menos não interessa, né?
243.Obs: ah, é porque é o raio
244.K: é medida, né?
245.[inaudível]

ANEXO – VIII
SESSÃO 2- SITUAÇÃO 1

Dupla: D
Luis(L) e Daniel (D)
Observadora: Prof. Katiani

1. L: temos que ver qual é a função e qual é o raio
2. D: o raio vai ser...
3. L: a gente deixa o raio nas abscissas
4. L: f (r) é igual a área que é pi vezes o raio ao quadrado.
5. L: a seção é transversal.
6. L: epsilon vai ser..
7. D: 0,1.
8. L: é.
9. L: o intervalo que ele quer saber é a...
10. D: a?
11. L: não, não, a não. Quer o intervalo, quer o delta
12. D: delta, interrogação.
13. L: [risos]
14. L: vamos ver, coloca o r no f de r.
15. D: 58,1 é igual a pi vezes r ao quadrado
16. L: ah, vamos ter que dividir por pi. Não gosto de dividir por pi [risos]
17. D: vamos deixar assim
18. D: será que fica isso?
19. L: [risos]
20. D: não me lembro o que ele quer?
21. L: ah, tá,
22. D: isso aqui é o a [chamaram o a de raio]
23. L: ah, tá, aqui é o delta
24. L: vamos fazer L mais epsilon daí colocar no lugar de f(r) aí vai ver, vai sar um número. Daí a gente subtrai o a menos o resultado ai a gente vai ter um número. Daí o módulo do resultado vai ser o delta, imagino.
25. D: é ..
26. L: Deu diferente
27. D: não pode ser, a gente fez alguma coisa errada aqui.
28. [os dois riem]
29. D: vamos ver da forma que a gente aprendeu lá.
30. L: acho que a gente nem vai precisar usar isto
31. [inaudível]
32. L: menos epsilon menor que f(r) menos o ...
33. D: limite
34. L: menor que epsilon
35. [inaudível]
36. D: era o que a gente tava fazendo antes, e eu apaguei.
37. L: [risos]
38. D: tá.
39. L: o r vai estar entre.. [inaudível]
40. D: ele só queria o delta?
41. L: espero que esteja certo
42. D: acho que tá.

ANEXO IX

SESSÃO 2 – SITUAÇÃO 2

Dupla: A
Gleison (G) e Jonas (J)
Observadora: Ivanete

1. G: quão próximo de x igual a 4 devemos manter x para termos certeza de y=2x+1 fique a uma distância menor que 0,5 unidades de y=7. Qual a relação entre ε e δ?
2. J: aqui já é outro epsilon.
3. G: isso. Epsilon é igual a 0,5. O limite?
4. J: o limite é 7.
5. G: isso, 7.
6. J: o a é 4?
7. G: isso, o a é 4. e a função é y=2x+1
8. J:é igual fizemos, anteriormente..
9. G: vamos lá: - epsilon menor que f(x) menos l menor que epsilon sempre que x menos a menor que o delta.
10. G: aqui vamos abrir o f(x): 2x+1 -7 menor que epsilon. Aqui o x que é 4...não o a é 4.
11. G: x menos 4, pode tirar esse módulo já. - δ<x-4<δ.
12. G:- δ+8<2x<δ+ 8 . Aí divide tudo por 2 vai ficar $4-\frac{\delta}{2}<x<4+\frac{\delta}{2}$
13. G: agora é só igualar as duas inequações
14. J: $4-\delta<x<4+\delta$

ANEXO – X
SESSÃO 2: SITUAÇÃO 2

Dupla: B
Bruno (B) e Yuri (Y)
Observadora: Prof. Carla

1. Y. a número 2
2. B: se você pega 3,75 vezes 2 dá 7,5. 7,5 menos 1 dá 6,5, 0,5 unidades menor que 7.
3. B: daí ele pergunta ali quão próximo 4 devemos manter x para termos certeza de que.....Tem que ser 0,25, né?
4. Y: é né. [inaudível]. Como chegou a isto?
5. B: se pegar...é multiplicado por 2 mais um ...0,5 vezes 2, você multiplicou por 2
6. B: se pegar o Y igual a 6,5, né , substituir ali 7,5 dividido por 2 dá 3,75
7. Y: ah, é.
8. B: acho que dá pra fazer assim
9. Y: Qual é a relação?
10. B: aí é mais complicado
11. [inaudível]
12. B: 8,5?
13. Y: é menor ou igual a 7,5?
14. Obs: menor.
15. Y: só menor
16. Obs: isso

ANEXO – XI
SESSÃO 2- SITUAÇÃO 2

Dupla: D
Luis(L) e Daniel (D)
Observadora: Prof. Katiani

1. D: Qual a relação entre epsilon e delta?
2. D: não é delta x?
3. D: o que é o 7?
4. L: o 7 é o que...substituindo 4 a imagem da 7.
5. D: ele quer saber...
6. L: o delta. Ele quer saber o delta
7. D: e o epsilon é 0,5, né?
8. L: é.
9. D: o epsilon é no eixo y, né?
10. L: é.
11. Prof. a primeira saiu?
12. L: saiu meia estranha...
13. Prof.: tem que resolver isto daqui, literalmente, calculadora!
14. L: calculadora?
15. Prof: é. Tem que resolver e usar quatro casas após a vírgula.
16. D: precisa desta calculadora?
17. L: Vou tentar dividir isto daqui.
18. D: vai ter que por na raiz
19. L: ah, é
20. D: em módulo só.
21. L: usar 4 casas....
22. [inaudível]
23. L: 4,296..
24. D: dois 9?
25. L: 4,2967
26. D: menos?
27. L: 4,3041
28. D: sob dois
29. [inaudível]
30. D: meu Deus! tem alguma coisa errada.
31. L: me dê essa calculadora
32. D: tem alguma coisa errada. Será que a gente fez as contas certas?
33. L: [risos]
34. [inaudível]
35. L: ué, não tou conseguindo subtrair um número.
36. [inaudível]
37. D: -0,5 menor que f(x) menos..
38. L: 7
39. [silêncio]
40. L: o epsilon tem, né
41. D: então x menos a , coloca menos em tudo aqui,oh . Menos 4.
42. L: vai ficar – delta menor que x menos 4 menor que delta
43. D: acho que tá errado. Vamos fazer de outra forma.
44. L: vamos fazer passo a passo
45. L: substitui o epsilon
46. D: mas a gente não quer uma relação entre a é epsilon?

ANEXO - XII
SESSÃO 3

Dupla: A
Gleison (G) e Jonas (J)
Observadora: Prof. Ivanete

1. G: beleza?
2. J: como se faz esse delta?
3. G: é um b...só que pega a perninha dele e vai deitando...
4. G: agora, só mexe nesse aqui.
5. J: ah, não precisa..
6. G: faz assim deixa o -4 aqui
7. J: pode?
8. G: claro que pode. pera aí..
9. [inaudível]
10. G: abrir o módulo fica fácil
11. [inaudivel]
12. G: aquele lá ficou tão bonitinho...
13. Obs: que número vocês colocaram?
14. J: -4.
15. Obs: é menos 4?
16. G: é menos 1 cara, opa..
17. J: assim não dá. Não ia sair nem que o cachorro miasse ..
18. [inaudível]
19. Obs: encontraram a relação? qual?
20. j: $\varepsilon = 5\delta$
21. Obs: vocês colocaram alguma restrição para o delta e o epsilon?
22. J: não
23. Obs: tem que tomar um certo cuidado, pois eu posso pegar qualquer valor para delta e epsilon. O que tem que acontecer com esses números?
24. G: tem que ser maior que zero.
25. Obs: por isso que na demonstração sempre se começa enunciando dado $\varepsilon > o$ existe um $\delta > 0$
26. J: sempre vai ser maior de zero?
27. Obs: sim. Porque ele é um raio e raio não é negativo.