

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

Thiago Lima Silva

**FORMULAÇÕES INTEIRAS MISTAS PARA MODELOS  
LINEARES POR PARTES MULTIDIMENSIONAIS:  
APLICAÇÕES NA OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE  
PETRÓLEO SOB RESTRIÇÕES DE PRESSÃO**

Florianópolis

2012



Thiago Lima Silva

**FORMULAÇÕES INTEIRAS MISTAS PARA MODELOS  
LINEARES POR PARTES MULTIDIMENSIONAIS:  
APLICAÇÕES NA OTIMIZAÇÃO DA PRODUÇÃO DE  
PETRÓLEO SOB RESTRIÇÕES DE PRESSÃO**

Dissertação submetida ao Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia de  
Automação e Sistemas para a obten-  
ção do Grau de mestre.  
Orientador: Prof. Eduardo Campono-  
gara, Ph.D.

Florianópolis

2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Silva, Thiago Lima

Formulações inteiras mistas para modelos lineares por partes multidimensionais [dissertação] : aplicações na otimização da produção de petróleo sob restrições de pressão / Thiago Lima Silva ; orientador, Eduardo Camponogara - Florianópolis, SC, 2012.

142 p. ; 21cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Linearização por partes. 3. Funções multidimensionais. 4. Programação inteira-mista. 5. Restrições de pressão. I. Camponogara, Eduardo. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III. Título.

Thiago Lima Silva

**FORMULAÇÕES INTEIRAS MISTAS PARA MODELOS LINEARES  
POR PARTES MULTIDIMENSIONAIS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “mestre”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 18 de Junho 2012.

---

Prof. Jomi Fred Hübner, Dr.  
Coordenador do Curso

---

Prof. Eduardo Camponogara, Ph.D.  
Orientador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Eduardo Camponogara, Ph.D.  
Presidente

---

Prof. Agostinho Plucenio, Dr.



---

Alex Furtado Teixeira, Eng.

---

Prof. Cid Carvalho de Souza, Dr.

---

Prof. Katia Campos de Almeida, Ph.D.





Dedico essa dissertação aos meus pais por serem os meus grandes amigos e companheiros em todos os momentos da minha vida.



## AGRADECIMENTOS

Ao professor, orientador e amigo Eduardo Camponogara pela motivação e apoio incondicional no desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço a meus pais pelos conselhos e pela compreensão durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq), inicialmente, e à Petrobras pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Agradeço a meus irmãos e minha família pelo preocupação e apoio ao longo desses anos.

Agradeço a Ítala pelo amor, compreensão e cumplicidade ao longo desses anos.

Agradeço a meus amigos e companheiros pela amizade e por tornar os dias de trabalho mais divertidos.



*“Tenho apenas duas mãos e o sentimento  
do mundo”*

Carlos Drummond de Andrade



## RESUMO

O problema de alocação de gás de injeção com restrições de alinhamento poço-*manifold* e restrições de pressão no sistema de produção é um problema não linear inteiro-misto de dificuldade considerável. A complexidade deste problema reside na natureza das decisões discretas do alinhamento e nas não linearidades presentes nas curvas de produção dos poços e de queda de pressão nas tubulações.

A abordagem de solução utilizada neste trabalho é a reformulação deste problema em programas lineares inteiros-mistos com o uso de ferramentas de linearização por partes para funções multidimensionais. Foram desenvolvidas sete reformulações lineares inteiras-mistas, considerando aproximações por hipercubos e por simplexes. Enquanto a aproximação por hipercubos é mais simples e possui menos variáveis, a aproximação por simplexes possui mais variáveis, mas é mais detalhada.

Foi apresentada uma análise computacional destas formulações para um cenário modelado a partir de um sistema de produção sintético construído com uma ferramenta de escoamento multifásico. Para avaliar o desempenho das formulações desenvolvidas, foram considerados cenários com diferentes disponibilidades de gás no compressor e diferentes qualidades de aproximação. Os resultados da análise computacional mostraram que, para as aproximações por hipercubos, o modelo SOS2 teve melhor desempenho na maioria dos cenários. Para as aproximações por simplexes, o modelo Log teve o melhor desempenho dentre os modelos. Considerando ambas aproximações, para um cenário com qualidade de aproximação fina e com uma restrição mais apertada na disponibilidade de gás de injeção, apenas o modelo Log conseguiu obter a solução ótima para o problema.

**Palavras-chave:** Linearização Por Partes, Funções Multidimensionais, Programação Inteira-Mista, Alocação de Gás de Injeção, Restrições de Pressão.





## ABSTRACT

The problem of allocating lift-gas to oil wells subject to well-manifold routing, and pressure constraints in the production system is a mixed-integer non-linear problem of considerable difficulty. The complexity of this problem rests on the nature of discrete decisions of the routing and the non linearities of the well production curves and pressure drops in the pipelines.

The solution approach used in this work is the reformulation of this problem into mixed-integer linear programs with piecewise-linearization tools for multidimensional functions. Seven mixed-integer linear reformulations were developed with hypercube and simplex approximations. While the hypercube approximation is simpler and more compact, the simplex approximation has more variables, but is more accurate.

A computational analysis of the application of these formulations to a synthetic production system represented in a multi-flow simulator is presented. In order to evaluate the performance of these formulations, instances with different availability of lift-gas in the compressor and different qualities of approximation were considered. The results of the computational analysis showed that the SOS2 model solved the problem faster in most instances of the hypercube approximation. With simplex approximations, the Log model was faster in all scenarios. Considering both approximations, when the quality of approximation is accurate and the lift-gas availability is low, only the Log model obtained the optimal solution.

**Keywords:** Piecewise-linearization, Multidimensional Functions, Mixed-Integer Programming, Lift-gas Allocation, Pressure Constraints.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Sistema Simplificado de Produção com Alinhamento e Injeção de Gás.....	36
Figura 2	Injeção Contínua de Gás.....	37
Figura 3	Curva de Desempenho do Poço.....	38
Figura 4	Curva de Produção do Poço.....	43
Figura 5	Curva de Queda de Pressão.....	44
Figura 6	Formulação da Rede de Produção.....	50
Figura 7	Função Linear por Partes Não-convexa com Domínio Unidimensional.....	55
Figura 8	Função Linear por Partes com Domínio Bidimensional.....	56
Figura 9	Triangulação J1 no domínio de $f(x,y)$ .....	57
Figura 10	Uma Ramificação para o Modelo Log.....	67
Figura 11	Domínio Bidimensional da Função Ilustrativa Particionado em uma Grade.....	81
Figura 12	Rede de Produção com Injeção de Gás.....	108
Figura 13	Hipercubos - Capacidade de compressão Alta.....	114
Figura 14	Hipercubos - Capacidade de Compressão Média.....	115
Figura 15	Hipercubos - Capacidade de Compressão Baixa.....	116
Figura 16	Simplexes - Capacidade de Compressão Alta.....	121
Figura 17	Simplexes - Capacidade de Compressão Média.....	122
Figura 18	Simplexes - Capacidade de Compressão Baixa.....	123
Figura 19	J1 ordenada em $[0, 2]^2$ .....	138



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Número de Variáveis .....	83
Tabela 2	Número de Restrições .....	83
Tabela 3	Parâmetros dos Poços .....	108
Tabela 4	Aproximação com Hipercubos com Qualidade Baixa ...	112
Tabela 5	Aproximação com Hipercubos com Qualidade Média...	112
Tabela 6	Aproximação com Hipercubos com Qualidade Fina ....	113
Tabela 7	Simplexes - Qualidade Baixa .....	118
Tabela 8	Simplexes - Qualidade Média.....	119
Tabela 9	Simplexes - Qualidade Alta.....	119
Tabela 10	Tamanho da Formulação (Qualidade Baixa, Simplexes)	140
Tabela 11	Tamanho da Formulação (Qualidade Média, Simplexes)	140
Tabela 12	Tamanho da Formulação (Qualidade Fina, Simplexes) .	140
Tabela 13	Tamanho da Formulação (Qualidade baixa, Hipercubos)	141
Tabela 14	Tamanho da Formulação (Qualidade média, Hipercubos)	141
Tabela 15	Tamanho da Formulação (Qualidade fina, Hipercubos) .	141
Tabela 16	Custos/Ganhos Econômicos .....	142
Tabela 17	Solução com Simplexes .....	142
Tabela 18	Solução com Hipercubos.....	143
Tabela 19	Injeção de Gás (Hipercubos).....	143
Tabela 20	Injeção de Gás (Simplexes).....	144



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

WPC	<i>Well Performance Curve</i> .....	38
PQS	Programação Quadrática Sucessiva.....	39
BSW	<i>Basic Sediments and Water</i> .....	43
PLS	Programação Linear Sucessiva.....	45
DI	Diâmetro interno.....	107
R	Rugosidade.....	107
RGO	Razão gás-óleo.....	107





## LISTA DE SÍMBOLOS

$q_1^n$	Variável contínua que representa a taxa de gás injetado no poço $n$ . . . . .	48
$y_n$	Variável binária que indica se um poço $n$ está produzindo . .	48
$z_{n,m}$	Variável binária de alinhamento que indica se a produção do poço $n$ é direcionada ao <i>manifold</i> $m$ . . . . .	48
$q_h^{n,m}$	Vazão da fase $h \in \mathcal{H}$ enviada do poço $n$ para o <i>manifold</i> $m$	48
$\mathbf{q}^{n,m}$	Vetor com as vazões de todas as fases enviados do poço $n$ para o <i>manifold</i> $m$ . . . . .	48
$\mathbf{q}^m$	Variável que representa a vazão total recebida dos poços conectados ao <i>manifold</i> $m$ para todas as fases . . . . .	48
$p^m$	Variável que representa a pressão do <i>manifold</i> $m$ . . . . .	48
P	Problema de Alocação de Gás sob restrições de Alinhamento e Pressão . . . . .	48
$N$	Número total de poços de petróleo . . . . .	48
$\mathcal{N}$	Conjunto de poços considerados no problema . . . . .	48
$\mathcal{N}_m$	Subconjunto de poços cuja produção pode ser enviada ao <i>manifold</i> $m$ . . . . .	48
$M$	Número total de <i>manifolds</i> de produção . . . . .	49
$\mathcal{M}$	Conjunto de <i>manifolds</i> do sistema . . . . .	49
$\mathcal{M}_n$	Subconjunto dos <i>manifolds</i> que podem receber produção do poço $n$ . . . . .	49
$\mathcal{H}$	Conjunto com as vazões multifásicas: óleo (o), gás (g) e água (w) . . . . .	49
$q_1^{\max}$	Capacidade de compressão dos compressores . . . . .	49
$l_n$	Limite inferior de injeção de gás do poço $n$ . . . . .	49
$u_n$	Limite superior de injeção de gás do poço $n$ . . . . .	49
$p^{m,S}$	Pressão operacional do separador que recebe a produção do <i>manifold</i> $m$ . . . . .	49
$\mathbf{q}^{n,L}$	Limite inferior de vazão do poço $n$ . . . . .	49
$\mathbf{q}^{n,U}$	Limite superior de vazão do poço $n$ . . . . .	49
$\mathbf{q}^{m,S}$	Capacidade de processamento do separador conectado ao <i>manifold</i> $m$ . . . . .	49
$p^{m,\min}$	Pressão operacional mínima do <i>manifold</i> $m$ . . . . .	49

$p^{m,\max}$	Pressão operacional máxima do <i>manifold</i> $m$ . . . . .	49
$f$	Função que indica o benefício econômico do sistema de produção . . . . .	49
$g$	Função que indica o ganho com a produção de um <i>manifold</i> . . . . .	49
$c$	Função que indica o custo com a injeção de gás nos poços . . . . .	49
$\Delta p^m$	Variável que representa a queda de pressão na tubulação que conecta o <i>manifold</i> $m$ ao separador que recebe sua produção . . . . .	49
$\mathcal{P}$	Conjunto de politopos . . . . .	54
$V(P)$	Conjunto dos vértices do Politopo $P$ . . . . .	54
$y_P$	Variável binária que indica se um politopo $P$ está ativo . . . . .	57
$\lambda_{P,v}$	Variável de peso contínua associada ao vértice $v$ do politopo $P$ . . . . .	57
$\mathcal{P}^j(B,l)$	Conjunto de politopos cujos códigos binários tem o valor $j \in \{0, 1\}$ na posição $l$ . . . . .	60
$L(\mathcal{P})$	Conjunto de índices para o código binário do politopo $P$ . . . . .	60
$\lambda_v$	Variável de peso contínua associada a um vértice $v$ . . . . .	64
$B$	Função injetora que associa a cada politopo $P \in \mathcal{P}$ um vetor binário . . . . .	66
$L_t$	Subconjunto do conjunto de vértices que representa o ramo da esquerda de uma ramificação no nível $t$ . . . . .	67
$R_t$	Subconjunto do conjunto de vértices que representa o ramo da direita de uma ramificação no nível $t$ . . . . .	67
$\mathcal{E}^d$	Conjunto de eixos do domínio com dimensão $d$ . . . . .	68
$S_e$	Conjunto de <i>breakpoints</i> do eixo $e$ . . . . .	68
$\mathcal{I}_e$	Conjunto dos intervalos contidos no eixo $e$ . . . . .	68
$\mathcal{I}_e(s)$	Conjunto de intervalos do eixo $e$ que contém o <i>breakpoint</i> $s$ . . . . .	68
$J_{e,B,l}^+$	Subconjunto do conjunto de vértices contido cujos intervalos que os contêm têm 1 na posição $l$ do seu código binário . . . . .	68
$J_{e,B,l}^0$	Subconjunto do conjunto de vértices contido cujos intervalos que os contêm têm 0 na posição $l$ do seu código binário . . . . .	68
$\mathcal{L}_{r,s}$	Conjunto dos vértices que têm valor par na posição $r$ e ímpar na posição $s$ do vértice $\mathbf{v}$ . . . . .	69
$\mathcal{R}_{r,s}$	Conjunto dos vértices que têm valor ímpar na posição $r$ e par na posição $s$ do vértice $\mathbf{v}$ . . . . .	69
$\mathbf{x}_P$	Variável contínua que representa um ponto do domínio no politopo $P$ . . . . .	73

$\delta_k$	Variável contínua associada ao intervalo $[d_{k-1}, d_k]$ . . . . .	76
$\lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P}$	Variável de peso associada a um par de <i>breakpoints</i> em $\mathcal{K}^{n,m} \times \mathcal{R}^{n,m}$ no politopo $P$ . . . . .	87
$\mathcal{P}^{n,m}$	Conjunto de politopos no domínio da função de vazão do poço $n$ para o <i>manifold</i> $m$ . . . . .	88
$\mathcal{P}^m$	Conjunto de politopos no domínio da função de queda de pressão na tubulação do <i>manifold</i> $m$ para o seu separador . . . . .	88
$y_P^{n,m}$	Variável binária associada a cada politopo $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ . . . . .	88
$y_P^m$	Variável binária associada a cada politopo $P \in \mathcal{P}^m$ . . . . .	88
$\Omega_{k^o, k^s, k^w}^{m,P}$	Variável de peso associada ao vértice $(k^o, k^s, k^w) \in V(P)$ , com $P \in \mathcal{P}^m$ ; . . . . .	88
$y^m$	Variável binária que indica se o <i>manifold</i> $m$ recebe produção . . . . .	88
$\mathcal{K}^{n,m}$	Conjunto de <i>breakpoints</i> referentes à vazão de gás de injeção . . . . .	89
$\mathcal{R}^{n,m}$	Conjunto de <i>breakpoints</i> referentes à variação da pressão do <i>manifold</i> . . . . .	89
$y_l$	Variável binária para a entrada $l$ do código binário de cada politopo que constrói uma ramificação . . . . .	90
$\mathcal{P}^{j,n,m}(B, l)$	Conjunto que agrupa os politopos pertencentes a $\mathcal{P}^{n,m}$ associados à função $B$ que de acordo com o valor $j$ no índice $l$ da sua representação binária . . . . .	90
$\mathcal{L}(\mathcal{P}^{n,m})$	Conjunto de índice para os vetores binários que representam cada politopo $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ . . . . .	90
$\mathcal{P}^{n,m}(q_i, p_r)$	Conjunto dos politopos $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ que contêm o vértice $(q_i, p_r)$ . . . . .	92
$\mathcal{P}^m(k^o, k^s, k^w)$	Conjunto dos politopos $P \in \mathcal{P}^m$ que contêm o vértice $(k^o, k^s, k^w)$ . . . . .	93
$x_l^{n,m}$	Variável binária que induz a primeira fase da ramificação do Log para cada índice em $l \in \Phi(\mathcal{K}^{n,m})$ . . . . .	95
$\tilde{x}_l^{n,m}$	Variável binária que induz a primeira fase da ramificação do Log para cada índice em $l \in \Phi(\mathcal{R}^{n,m})$ . . . . .	95
$y_{r,s}^{n,m}$	Variável binária que induz a segunda fase da ramificação do Log com $(r, s) \in \Gamma^{n,m}$ . . . . .	95
$\Phi(\mathcal{K}^{n,m})$	Conjunto de índices para os códigos binários que representam os intervalos contidos em $\mathcal{K}^{n,m}$ . . . . .	95
$\Phi(\mathcal{R}^{n,m})$	Conjunto de índices para os códigos binários que representam os intervalos contidos em $\mathcal{R}^{n,m}$ . . . . .	95
$\Gamma^{n,m}$	Conjunto de pares com índices usados para construir a triangulação J1 . . . . .	95
$\mathcal{L}_{r,s}^{n,m}$	Conjunto dos vértices $v \in V(P)$ , com $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ , cujo valor $\mathbf{v}_r$ . . . . .	

	é par e $\mathbf{v}_s$ é ímpar .....	95
$\mathcal{P}_{r,s}^{n,m}$	Conjunto dos vértices $v \in V(P)$ , com $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ , cujo valor $\mathbf{v}_r$ é ímpar e $\mathbf{v}_s$ é par .....	95
$axis(\mathcal{Q})$	Eixo que contém o conjunto de <i>breakpoints</i> $\mathcal{Q}$ .....	95
$x_l^{m,\Upsilon}$	Variável binária que define a primeira fase da ramificação do Log para a fase com $\Upsilon \in \{O, G, W\}$ e para o índice $l \in \Phi(\Upsilon^m)$ de $B$ .....	96
$y_{r,s}^m$	Variável binária que constrói a segunda fase da ramificação do Log para cada par $(r, s) \in \Gamma^m$ .....	97
$\mathcal{L}_{r,s}^{n,m}$	Conjunto dos vértices $v \in V(P)$ , com $P \in \mathcal{P}^m$ , cujo valor $\mathbf{v}_r$ é par e $\mathbf{v}_s$ é ímpar .....	97
$\mathcal{P}_{r,s}^{n,m}$	Conjunto dos vértices $v \in V(P)$ , com $P \in \mathcal{P}^m$ , cujo valor $\mathbf{v}_r$ é ímpar e $\mathbf{v}_s$ é par .....	97
$q_i^{n,m,P}$	Variável contínua que representa a injeção de gás em um poço $n$ para o politopo $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ .....	98
$p_i^{n,m,P}$	Variável contínua que representa a pressão do <i>manifold</i> $m$ no politopo $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ .....	98
$\mathbf{m}_P^{n,m}$	Vetor com os coeficientes para o hiperplano que aproxima a função $\mathbf{q}^{n,m}$ no politopo $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ .....	98
$c_P^{n,m}$	Coefficiente linear do hiperplano que aproxima a função $\mathbf{q}^{n,m}$ no politopo $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ .....	98
$\mathbf{A}_P^{n,m}$	Matriz com coeficientes das inequações lineares que definem o politopo $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ .....	98
$\mathbf{b}_P^{n,m}$	Vetor com coeficientes das inequações lineares que restringem o politopo $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ .....	98
$\mathbf{q}_P^m$	Vetor que contém as variáveis contínuas que representam as vazões de gás, óleo e água, respectivamente, na tubulação que conecta o <i>manifold</i> $m$ ao seu separador, dentro de um politopo $P \in \mathcal{P}^m$ .....	99
$\mathbf{m}_P^m$	Coefficientes do vetor normal do hiperplano que aproxima a função $\Delta p^m(\mathbf{q}_P^m)$ no politopo $P \in \mathcal{P}^m$ .....	99
$c_P^m$	Coefficiente linear do hiperplano que aproxima a função $\Delta p^m(\mathbf{q}_P^m)$ no politopo $P \in \mathcal{P}^m$ .....	99
$\mathbf{A}_P^m$	Matriz com coeficientes das inequações lineares que definem o politopo $P \in \mathcal{P}^m$ .....	100
$\mathbf{b}_P^m$	Vetor com coeficientes das inequações lineares que definem o politopo $P \in \mathcal{P}^m$ .....	100
$\delta_{n,m}^{j,k}$	Variável contínua de peso que, incrementalmente, condiciona	

	o domínio a apenas um simplex $T \in \mathcal{T}^{n,m}$ .....	101
$w_{n,m}^j$	Variável binária que indica quais variáveis de peso $\delta_{n,m}^{j,k}$ dos simplexes $T_j \in \mathcal{T}^{n,m}$ são ativadas .....	101
$q_{1,n,m}^{j,k}$	<i>Breakpoint</i> de injeção de gás correspondente ao vértice $k$ do simplex $j \in \mathcal{T}^{n,m}$ .....	101
$p_{r,n,m}^{j,k}$	<i>Breakpoint</i> de pressão do <i>manifold</i> $m$ correspondente ao vértice $k$ do simplex $j \in \mathcal{T}^{n,m}$ .....	101
$\mathcal{T}^{n,m}$	Conjunto de simplexes que compõem a família de polítopos do domínio da função de vazão do poço $n$ para o <i>manifold</i> $m$ $\mathbf{q}^{n,m}$ .....	101
$V(T)$	conjunto de vértices do simplex $T \in \mathcal{T}^{n,m}$ .....	101
$\delta_m^{j,k}$	Variável contínua de peso que, incrementalmente, condiciona o domínio a apenas um simplex $T_j \in \mathcal{T}^m$ .....	102
$w_m^j$	Variável binária que indica quais variáveis de peso $\delta_m^{j,k}$ dos simplexes $T_j \in \mathcal{T}^m$ estão ativos .....	102
$\mathbf{q}_m^{j,k}$	Vetor que contém as variáveis contínuas que representam as vazões de gás, óleo e água em um vértice $k$ de um simplex $T_j \in \mathcal{T}^m$ ; .....	102
$\mathcal{T}^m$	Conjunto de simplexes que compõem a família de polítopos do domínio da função de queda de pressão $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ na tubulação que conectam o <i>manifold</i> $m$ ao seu separador .....	102
$\xi_{q_i}^{n,m}$	Variável contínua auxiliar que representa a soma das variáveis de peso $\lambda_{q_i, p_r}$ para uma determinada taxa de injeção de gás .....	103
$\eta_{p_r}^{n,m}$	Variável contínua auxiliar que representa a soma das variáveis de peso $\lambda_{q_i, p_r}$ para uma determinada pressão no <i>manifold</i> .	104
$\xi_o^m$	Variável contínua auxiliar que representa a soma das variáveis de peso $\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m$ tal que $k^o = o$ para $o \in \mathcal{O}^m$ .....	105
$\eta_g^m$	Variável contínua auxiliar que representa a soma das variáveis de peso $\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m$ tal que $k^g = g$ para $g \in \mathcal{G}^m$ .....	105
$\psi_w^m$	Variável contínua auxiliar que representa a soma das variáveis de peso $\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m$ tal que $k^w = w$ para $w \in \mathcal{W}^m$ .....	105



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	31
1.1 CONTRIBUIÇÃO .....	32
1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	33
<b>2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	35
2.1 ELEVAÇÃO ARTIFICIAL POR INJEÇÃO CONTÍNUA DE GÁS .....	36
2.2 TRABALHOS RELACIONADOS: DISTRIBUIÇÃO DE GÁS DE INJEÇÃO SUJEITO A RESTRIÇÕES DE PRESSÃO ..	39
<b>2.2.1 Alocação de Gás de Injeção</b> .....	39
<b>2.2.2 Restrições de Pressão</b> .....	42
2.3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	47
2.4 SUMÁRIO .....	51
<b>3 MODELOS INTEIROS-MISTOS PARA FUNÇÕES LINEARES POR PARTES MULTIDIMENSIONAIS</b> .	53
3.1 NOTAÇÃO .....	54
<b>3.1.1 Exemplo com Domínio Unidimensional</b> .....	54
<b>3.1.2 Exemplo com Domínio Bidimensional</b> .....	54
3.2 MODELOS DE COMBINAÇÃO CONVEXA DESAGREGADA .....	55
<b>3.2.1 Modelo Básico</b> .....	56
3.2.1.1 Caso Unidimensional .....	58
3.2.1.2 Caso Bidimensional .....	58
<b>3.2.2 Modelo Logarítmico</b> .....	59
3.2.2.1 Caso Unidimensional .....	60
3.2.2.2 Caso Bidimensional .....	61
3.3 MODELOS DE COMBINAÇÃO CONVEXA (AGREGADA)	63
<b>3.3.1 Modelo Básico</b> .....	64
3.3.1.1 Caso Unidimensional .....	64
3.3.1.2 Caso Bidimensional .....	65
<b>3.3.2 Modelo Logarítmico</b> .....	66
3.3.2.1 Caso Unidimensional .....	69
3.3.2.2 Caso Bidimensional .....	70
3.4 MODELO MÚLTIPLA ESCOLHA .....	73
<b>3.4.1 Caso Unidimensional</b> .....	74
<b>3.4.2 Caso Bidimensional</b> .....	75
3.5 MODELO INCREMENTAL .....	76
<b>3.5.1 Caso Unidimensional</b> .....	76

<b>3.5.2 Caso Multidimensional (Bidimensional)</b> .....	77
3.6 MODELO SOS2 .....	79
<b>3.6.1 Caso Unidimensional</b> .....	80
<b>3.6.2 Caso Multidimensional</b> .....	80
3.7 TAMANHO DAS FORMULAÇÕES .....	82
3.8 SUMÁRIO .....	84
<b>4 REFORMULAÇÕES LINEARES POR PARTES</b> .....	85
4.1 REFORMULAÇÃO COM O MODELO DCC .....	85
4.2 REFORMULAÇÃO COM O MODELO DLOG .....	89
4.3 REFORMULAÇÃO COM O MODELO CC .....	91
4.4 REFORMULAÇÃO COM O MODELO LOG .....	93
4.5 REFORMULAÇÃO COM O MODELO MC .....	97
4.6 REFORMULAÇÃO COM O MODELO INC .....	100
4.7 REFORMULAÇÃO COM O MODELO SOS2 .....	103
4.8 SUMÁRIO .....	105
<b>5 ANÁLISE COMPUTACIONAL</b> .....	107
5.1 SISTEMA DE PRODUÇÃO .....	107
5.2 ANÁLISE DE DESEMPENHO .....	109
<b>5.2.1 Aproximação por Hipercubos</b> .....	111
5.2.1.1 Variação da Capacidade de Compressão de Gás .....	111
5.2.1.2 Variação da Qualidade de Aproximação .....	114
<b>5.2.2 Aproximação por Simplexes</b> .....	117
5.2.2.1 Variação da Capacidade de Compressão de Gás .....	117
5.2.2.2 Variação da Qualidade da Aproximação .....	120
<b>5.2.3 Análise Geral</b> .....	122
5.3 SUMÁRIO .....	124
<b>6 SUMÁRIO</b> .....	127
Referências Bibliográficas .....	129
APÊNDICE A – Apêndice .....	137



## 1 INTRODUÇÃO

Embora os recentes avanços tecnológicos tenham ampliado a diversidade de alternativas energéticas disponíveis na sociedade, o petróleo ainda é a principal fonte de energia do mundo moderno. Além de combustível, esse óleo de origem fóssil também está presente em diversos produtos incorporados no nosso dia-a-dia, como fertilizantes, tintas, borrachas, além dos derivados do petróleo, os quais substituem uma grande quantidade de matérias-primas. Ainda há uma grande quantidade deste recurso disponível no planeta, entretanto, por ser uma fonte de energia não-renovável, ele se esgotará. Como consequência, à medida que estes hidrocarbonetos são extraídos, mais caro e difícil se torna seu processo de extração. Além disto, a demanda crescente por petróleo e a competitividade dos mercados levam as indústrias a inovarem em tecnologia com o objetivo de otimizar o processo de produção e reduzir os custos operacionais.

O rápido desenvolvimento das tecnologias de *hardware* e *software*, como as tecnologias para medição digital e para processamento de dados, tem possibilitado a aplicação de técnicas avançadas de automação no processo de produção dos poços. Com a integração destas tecnologias com os sistemas de informação digital, as operações tem se tornado mais flexíveis, resultando em custos operacionais reduzidos e em um aumento do fator de recuperação dos reservatórios (BOOTHROYD, 1994; YETEN et al., 2004; CAMPONOVARA et al., 2010; CAMPOS et al., 2010).

Essas inovações e as demandas pelo uso eficiente das novas tecnologias deram origem ao conceito de *Campos Inteligentes*, também conhecidos por *Smart Fields*, *Intelligent Fields*, e, na Petrobras, pelo nome de *Gerenciamento Integrado de Operações (GIOp)*, cuja ideia é integrar sistemas de informação digital com as mais modernas técnicas de perfuração, sísmicas e de reservatório para melhorar a gestão das operações nos campos de petróleo. Entretanto, os desafios científicos e tecnológicos para tornar a tecnologia de campos inteligentes em realidade são inúmeros. Para isto, modelos e algoritmos que utilizem a informação útil provida pelos sistemas de informação digitais e pelas ferramentas de simulação devem ser desenvolvidos com o intuito de trazer benefícios na otimização da produção.

Ao longo da operação diária nos sistemas de produção de petróleo, muitas decisões precisam ser tomadas com o objetivo de maximizar a produção. Dentre essas decisões estão a escolha da configuração das

válvulas, quais poços estarão ativos e para onde será direcionada a produção de cada poço, respeitando-se as restrições operacionais como a capacidade de processamento nas instalações da superfície, disponibilidade de gás para injeção, restrições de fluxo e pressão nas tubulações, dentre outras. Então, para se obter uma operação diária ótima, as interações entre reservatório, poços e instalações da superfície devem ser consideradas simultaneamente. Atualmente, a operação de campos de petróleo em alto-mar é geralmente baseada em análises de sensibilidade com o uso de ferramentas de simulação e heurísticas. Embora estes métodos otimizem a produção de óleo para casos particulares, eles não necessariamente determinam o modo de operação que maximiza a produção de petróleo diária (KOSMIDIS; PERKINS; PISTIKOPOULOS, 2005).

Há diversos trabalhos na literatura que utilizam a programação matemática para maximizar a produção de campos de petróleo, com atenção especial voltada para campos em alto-mar, onde a complexidade é geralmente maior (BUITRAGO; RODRÍGUEZ; ESPIN, 1996; ALARCÓN; TORRES; GÓMEZ, 2002; KOSMIDIS; PERKINS; PISTIKOPOULOS, 2005; CAMPONOVARA; CONTO, 2009; MISENER; GOUNARIS; FLOUDAS, 2009). Entretanto, um aspecto que ainda possui desafios científicos é a representação das restrições de pressão nas tubulações que conectam poços, *manifolds* e separadores. Sem o tratamento explícito destas restrições, os planos de produção podem não ser viáveis operacionalmente. Este trabalho propõe algoritmos e modelos com o objetivo de tornar a estratégia de produção diária dos campos de petróleo eficiente.

## 1.1 CONTRIBUIÇÃO

Quando se considera a influência da variação de pressão nos *manifolds* e da injeção de gás pressurizado nos poços, as curvas de produção dos poços podem ser caracterizadas como funções não-convexas com domínios bidimensionais. As curvas de queda de pressão nas tubulações são funções das vazões de gás, óleo e água nas tubulações, caracterizando curvas não-lineares com domínios tridimensionais. Investiga-se então a modelagem de funções não convexas que, em geral, levam a problemas NP-Difíceis, *i.e.*, muito difíceis de se resolver, em especial, quando tais funções são multivariadas.

Neste trabalho, apresentamos um modelo em programação não-linear inteira-mista para o problema de alocação de gás sob restrições

de alinhamento entre poços e *manifolds* e restrições de pressão. A complexidade deste problema reside nas decisões discretas do alinhamento entre poços e *manifolds* e nas não-linearidades presentes nas curvas de produção dos poços e de queda de pressão das tubulações. As não-linearidades deste problema surgem nas curvas de produção dos poços e nas curvas de queda de pressão das tubulações.

Aqui, são propostas diversas reformulações lineares inteiras-mistas para o problema de alocação de gás com base nos diversos modelos apresentados em (VIELMA; AHMED; NEMHAUSER, 2010) para representar funções lineares por partes multidimensionais. Em seguida, o desempenho computacional dos modelos desenvolvidos é comparado para aproximações com representações por triangulações e por hiper-cubos.

Podemos sumarizar as principais contribuições deste trabalho como segue:

- Formulação em Programação Não-Linear Inteira-Mista (MINLP) do problema de alocação de gás sob restrições de alinhamento entre poços e *manifolds* e restrições de pressão;
- Sete reformulações do problema com Programação Linear Inteira-Mista (MILP), obtidas com o uso das ferramentas de linearização por partes multidimensional e
- Análise de desempenho das formulações MILP desenvolvidas para duas aproximações diferentes.

## 1.2 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está dividida em seis capítulos e um apêndice. No Capítulo 2 apresentamos com mais detalhes o cenário do problema na ótica da engenharia de petróleo, revisando conceitos sobre elevação artificial por injeção contínua de gás e restrições de pressão, considerando o estado da arte dos trabalhos desenvolvidos nesta área. Ainda neste capítulo, é apresentada uma formulação matemática para o problema resolvido nesta dissertação em programação não-linear inteira-mista.

O Capítulo 3 apresenta os modelos lineares inteiros-mistos para representar funções lineares por partes multidimensionais, os quais servem como fundamentação teórica para o trabalho desenvolvido nesta dissertação.

O Capítulo 4 apresenta as reformulações lineares por partes do problema modelado como um programa não linear inteiro-misto exibido no Capítulo 2 com base nos modelos apresentados no Capítulo 3.

O Capítulo 5 apresenta o modelo do sistema de produção que foi utilizado como instância para o problema resolvido nesta dissertação e uma análise computacional dos formulações lineares inteiras-mistas desenvolvidas no Capítulo 4 para aproximações com hipercubos e com simplexes.

O Capítulo 6 apresenta o sumário da dissertação, sintetizando os resultados alcançados e as perspectivas de trabalhos futuros.

Por fim, o Apêndice A apresenta conceitos e ilustrações que podem auxiliar no entendimento dos conceitos apresentados neste trabalho.

## 2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Um sistema integrado típico de produção de gás e óleo consiste em: (i) o reservatório, que é definido como uma região da superfície que contém óleo, gás e água saturados no espaço poroso de uma rocha permeável; (ii) os poços produtores, que transferem os fluidos do reservatório para *manifolds*; (iii) o *manifold*, onde as vazões que vêm dos poços são misturadas; (iv) as tubulações que conectam os *manifolds* às instalações na superfície; (v) os separadores, os quais são os sistemas de tratamento primário da produção, onde os fluidos são separados em óleo, gás e água; e (vi) compressores para disponibilizar gás para poços com elevação artificial por injeção de gás. A Figura 1 ilustra um sistema de produção típico onde há o reservatório, cinco poços produtores escoando óleo, gás e água para os concentradores, chamados *manifolds*. Entre os poços e os *manifolds*, há válvulas de alinhamento que são responsáveis por direcionar a produção de um poço para um *manifold*. As válvulas de alinhamento direcionam a produção de um poço para um determinado *manifold*. Em seguida, a produção chega a um separador que separa as fases e direciona o gás para um sistema de tratamento e compressão de gás, o qual contém um ou mais compressores. Parte do gás pressurizado será exportado e parte será injetado nos poços com elevação artificial. A vazão de gás pressurizado que é injetado em cada poço é regulada pelas válvulas, denominadas *chokes* de injeção. A água é geralmente enviada para um estação de tratamento e o óleo enviado para exportação.

A produção de petróleo é geralmente limitada por condições físicas do reservatório, poços e pela capacidade de processamento e armazenamento de fluidos nas instalações da superfície tais como capacidade de compressão dos compressores, limites operacionais de vazão dos fluidos nos poços, restrições de pressão entre os poços, *manifolds* e separadores, dentre outros. Ao longo da operação diária, essas limitações devem ser consideradas no conjunto de decisões tomadas pelos operadores humanos a fim de maximizar a produção de óleo. Dentre essas decisões estão a escolha da configuração das válvulas que regulam as vazões, a escolha dos poços que produzirão em um determinado momento, o alinhamento entre poços, *manifolds* e separadores.

Atualmente, a operação diária de poços em alto-mar é geralmente baseada em análises de sensibilidade, usando ferramentas de simulação e heurísticas. Embora estes métodos otimizem a produção de óleo para casos particulares, eles não necessariamente levam à utilização de um

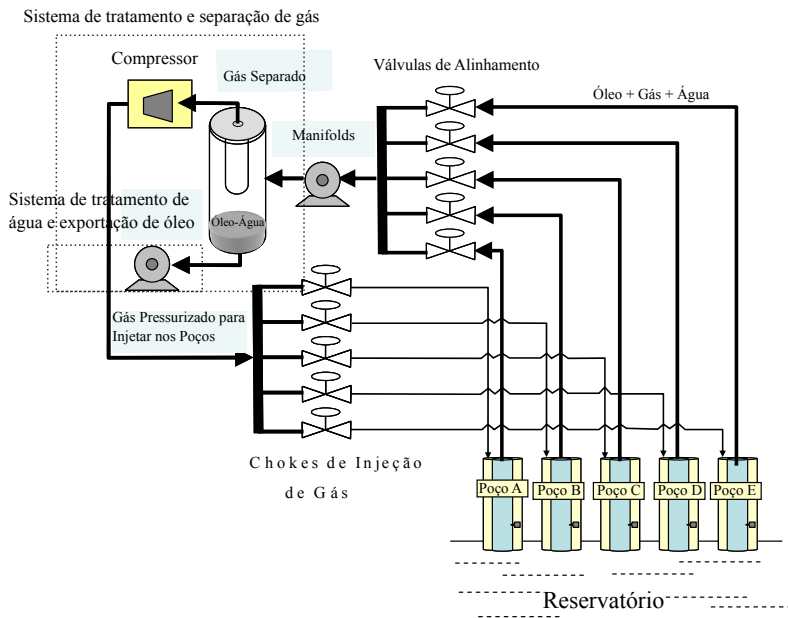


Figura 1: Sistema Simplificado de Produção com Alinhamento e Injeção de Gás.

modo de operação que maximiza a produção diária. Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma ferramenta com base na programação matemática de suporte à decisão para um campo de petróleo que é composto por um conjunto de poços produtores, *manifolds*, separadores e tubulações que transportam os fluidos neste sistema.

Neste capítulo, são revisados os conceitos da engenharia de petróleo necessários para o entendimento do problema. Apresenta-se em seguida os trabalhos disponíveis na literatura relacionados e é apresentada uma formulação matemática para o problema a ser tratado nesta dissertação.

## 2.1 ELEVAÇÃO ARTIFICIAL POR INJEÇÃO CONTÍNUA DE GÁS

A produção de um poço de petróleo em alto-mar é determinada pela diferença de pressão entre a válvula localizada na cabeça do poço e

o reservatório. Quando a pressão no reservatório é suficientemente elevada, os fluidos são capazes de alcançar a superfície naturalmente. Poços com esta característica são chamados de poços surgentes. Quando a pressão do reservatório é baixa para elevar os fluidos naturalmente ou quando a produção do poço está abaixo do ideal, há a necessidade da utilização de métodos de elevação artificial.

Um método de elevação artificial bastante usado nos campos de petróleo em alto-mar é a elevação por injeção contínua de gás (*gas-lift*), no qual injeta-se gás pressurizado no fundo da coluna de produção do poço de petróleo com o objetivo de aumentar a produção. A Figura 2 ilustra o método de elevação artificial por injeção contínua de gás.

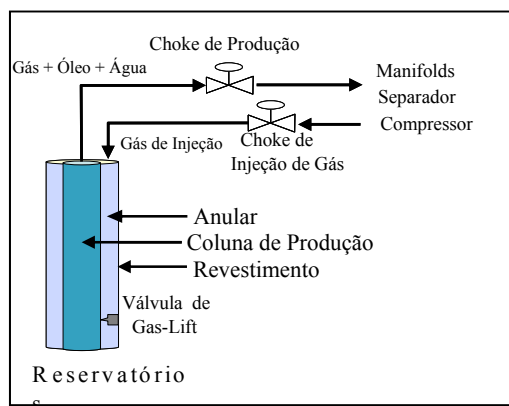


Figura 2: Injeção Contínua de Gás.

A produção dos fluidos da formação é realizada utilizando-se uma tubulação chamada de coluna de produção. O gás é injetado utilizando-se o espaço anular formado entre o revestimento e a coluna de produção. Há uma válvula na superfície, denominada *choke* de injeção de gás, que controla a injeção de gás pressurizado. O gás pressurizado proveniente do compressor chega pelo anular (*annulus*) do poço e é injetado através da válvula de *gas-lift*. A coluna de produção conduz o óleo, gás e água provenientes do reservatório até o *choke* de produção. A injeção do gás pressurizado na coluna de produção produz dois efeitos: redução da pressão hidrostática do poço, reduzindo a densidade média do fluido, e aumento do atrito devido ao aumento do volume ocupado pelo gás na tubulação. Quando o gás é misturado com o óleo, o peso da coluna de produção é reduzido, resultando na redução da pressão de fundo ( $P_{wf}$ ). A diferença entre a pressão do reservatório ( $P_R$ ) e a pressão

de fundo ( $P_{wf}$ ) induz a vazão de fluidos do reservatório para o poço. Como a pressão hidrostática de saída é reduzida na injeção do gás pressurizado, a diferença de pressão entre o reservatório e o fundo do poço é elevada, possibilitando que os fluidos do reservatório entrem no poço a uma vazão maior. O bom resultado que se obtém com a injeção de gás diminui à medida que a quantidade de gás injetada ultrapassa um ponto ótimo, uma vez que a injeção do gás também aumenta o atrito, elevando a pressão de saída e reduzindo a vazão.

Para determinar a taxa ótima de injeção de gás de injeção, uma prática usual é alocar o gás a um poço de acordo com a sua Curva de Desempenho do Poço, do inglês *Well Performance Curve* (WPC) (MAYHILL, 1974; NISHIKIORI et al., 1995). A WPC é uma curva

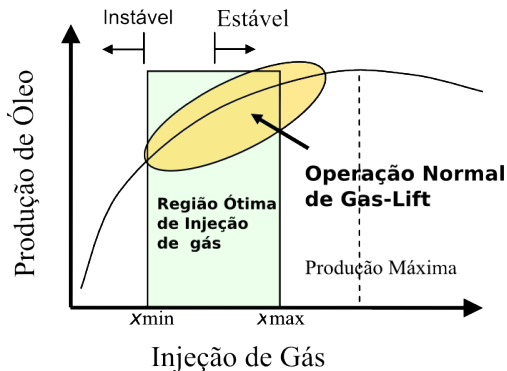


Figura 3: Curva de Desempenho do Poço.

que descreve a vazão de fluidos obtida em função da taxa de injeção de gás alocada a um poço. A Figura 3 ilustra uma WPC típica, onde há uma região de instabilidade, uma região de estabilidade e uma região de vazão de injeção ótima de gás pressurizado. Quando a capacidade de compressão de gás é ilimitada, a taxa de injeção de gás ótima para cada poço é o ponto máximo na curva de desempenho. Entretanto, a capacidade de compressão dos compressores em um campo de petróleo pode ser menor que a soma das taxas ótimas de injeção para todos os poços. O problema de otimização de alocação de gás de injeção consiste em encontrar as taxas de gás de injeção para cada poço que



maximizam o benefício com a produção do campo sujeito às restrições de capacidade de compressão de gás e às demais restrições operacionais.

## 2.2 TRABALHOS RELACIONADOS: DISTRIBUIÇÃO DE GÁS DE INJEÇÃO SUJEITO A RESTRIÇÕES DE PRESSÃO

Os métodos disponíveis na literatura para a otimização da produção em campos de petróleo podem ser divididos em três categorias: (i) análise de sensibilidade com o uso de ferramentas de simulação, (ii) métodos heurísticos e (iii) métodos de programação matemática. Há diversos trabalhos disponíveis na literatura que utilizam a programação matemática como ferramenta para otimizar a produção de campos de petróleo em alto-mar (BUITRAGO; RODRÍGUEZ; ESPIN, 1996; ALARCÓN; TORRES; GÓMEZ, 2002; BOGAERT et al., 2004; KOSMIDIS; PERKINS; PISTIKOPOULOS, 2004, 2005; CAMPONOGARA; CONTO, 2009; MISENER; GOUNARIS; FLOUDAS, 2009). Neste trabalho, o método para resolução do problema de otimização da produção será um método de programação matemática.

Nesta seção, será apresentada uma revisão da literatura para o problema de alocação de gás de injeção e, em seguida, para uma extensão deste problema em que se incorpora as restrições de pressão para o problema sob a ótica da programação matemática.

### 2.2.1 Alocação de Gás de Injeção

Redden, Sherman e Blann (1974) desenvolveram um procedimento analítico para encontrar a distribuição de gás com melhor benefício econômico. O procedimento utiliza informações do poço e realiza cálculos sobre o comportamento da vazão multifásica nas tubulações para avaliar a resposta na vazão do poço a uma alteração na taxa de injeção de gás. A distribuição ótima do gás disponível foi calculada com base na contribuição de cada poço para o benefício total do sistema. Esta solução foi utilizada em um campo de petróleo na Venezuela com 1500 poços com elevação artificial por injeção contínua de gás e no Texas em 150 poços.

Gómez (1974) propuseram um método para ajustar os pontos a fim de encontrar uma aproximação polinomial de segunda ordem para a curva de desempenho do poço. Em seguida, o problema de otimização foi resolvido com o uso de Programação Quadrática Sucessiva (PQS).

Um dos primeiros trabalhos disponíveis na literatura para o problema de alocação de gás em poços operados com elevação artificial com base na curva de desempenho do poço foi proposto por Kanu, Mach e Brown (1981). O método desenvolvido, denominado *equal-slope*, converge para uma solução em que a inclinação das curvas de desempenho dos poços deve ser igual, ou seja, um aumento infinitesimal na taxa de injeção de gás produziria o mesmo resultado para todos os poços.

Nishikiori et al. (1995) propuseram uma extensão do método *equal-slope* com base no algoritmo otimização não-linear quasi-newton. Este método possui a necessidade de uma estimativa inicial factível para que haja convergência do algoritmo. Em certos casos, ter uma boa estimativa inicial configura um problema considerável. Tanto o método *equal-slope* quanto o método quasi-newton usam informação do gradiente da função na escolha da direção de busca, podendo ficar presos a ótimos locais caso a função seja não-convexa. Estes métodos baseados na inclinação das WPC's não podem ser diretamente aplicados em poços que necessitam de uma vazão mínima de gás para produzir, pois as WPC's dos poços, neste caso, não são côncavas.

Buitrago, Rodríguez e Espin (1996) propuseram um método para resolver o problema de alocação de gás que utiliza um algoritmo genético e um procedimento estocástico para calcular a região de descenso no algoritmo de busca. A exploração do espaço de soluções factíveis pode ser intratável computacionalmente caso o problema possua muitas restrições, além de também não haver garantia de otimalidade global pela natureza probabilística do método. De acordo com os resultados apresentados neste trabalho, este método não tem bons resultados quando se trata de problemas com muitas restrições, produzindo melhores resultados em problemas irrestritos ou com poucas restrições.

Fang e Lo (1996) desenvolveram um método para encontrar as taxas ótimas de injeção para o problema de alocação de gás sob restrições nas instalações de superfície. As curvas de desempenho dos poços foram aproximadas por um conjunto finito de pontos através de uma função linear por partes e o problema foi solucionado com programação linear. Como o problema foi modelado como um programa linear, algumas variáveis discretas do problema foram consideradas contínuas, podendo resultar em soluções infactíveis. Esta limitação foi solucionada com o uso de programação inteira-mista em um trabalho apresentado posteriormente em (WANG, 2003).

Vazquez et al. (2001) abordaram o fato de algumas soluções propostas para o problema de a otimização da produção de óleo terem múltiplos ótimos locais. Os *solvers* podem ficar presos em um ótimo

local que é inferior ao ótimo global. Foi usado um *solver* híbrido que consiste de um algoritmo genético e uma busca heurística, levando a resultados próximos ao ótimo global.

Alarcón, Torres e Gómez (2002) desenvolveram uma extensão do método proposto em (GÓMEZ, 1974) com a inclusão de um termo logarítmico. Os resultados obtidos apontaram que o ajuste da curva com este termo é melhor do que o apresentado no trabalho anterior.

Camponogara e Nakashima (2006) solucionaram o problema de otimização da alocação de gás com o uso de programação dinâmica sob uma capacidade de compressão limitada do compressor. A ativação dos poços foi feita com a introdução de restrições de precedência. Uma vantagem da utilização da programação dinâmica é que, com os resultados intermediários computados, encontrou-se a solução para uma família de problemas em toda a faixa disponível de gás de injeção.

Camponogara e Conto (2009) resolveram o problema não linear inteiro-misto de distribuição de gás, considerando os limites de injeção para cada poço e as restrições de precedência. Eles propuseram uma formulação linear inteira-mista do problema com a linearização das funções não lineares, o que possibilitou o uso de algoritmos de programação inteira. O problema foi solucionado com o uso de um algoritmo *cut-and-branch* com cortes desenvolvidos com base em coberturas baseadas no problema da mochila (*knapsack*). Os autores afirmaram que os resultados numéricos mostraram que o número de nós explorados na árvore de busca foi reduzido depois da inserção dos cortes.

Misener, Gounaris e Floudas (2009) consideraram o problema de otimizar a distribuição de uma quantidade limitada de gás de injeção para poços em um campo de petróleo com o uso de técnicas de linearização por partes. Eles investigaram quatro diferentes abordagens de linearização e compararam os resultados quanto à eficiência computacional.

Camponogara et al. (2010) desenvolveram um método que estima a WPC por meio de medições da pressão de fundo do poço e com base na disponibilidade de vazão de gás fornecido pelas estações de compressão para o *manifold* de *gas-lift*. Eles desenvolveram um algoritmo de programação linear inteira-mista para solucionar o problema de alocação de gás com base nas WPC's e validaram os resultados em um simulador de escoamento multifásico denominado OLGA®.

Codas e Camponogara (2012) desenvolveram duas formulações lineares inteiras-mistas para o problema de alocação de gás não-linear inteiro-misto. A primeira (compacta) foi obtida com uma aproximação linear por partes das curvas não-lineares, com o uso de variáveis

binárias para representar a linearização e as decisões de alinhamento. A segunda formulação (integrada) combina decisões de linearização e alinhamento com o uso de uma única variável binária. A estrutura de ambas formulações foi explorada para desenvolver cortes de cobertura estendidos. Os resultados mostraram que a geração de planos de cortes com o uso da formulação integrada torna esta formulação mais eficiente que a compacta, embora possua mais variáveis.

### 2.2.2 Restrições de Pressão

Os trabalhos discutidos na seção anterior que são baseados nas WPC's dos poços assumem que estas são independentes para cada poço. Isto é válido grande parte dos sistemas de produção de petróleo em alto-mar, pois, nestes casos, o *manifold* de produção está localizado na plataforma de produção. Como a tubulação que conecta o *manifold* de produção e o separador de produção, nesta situação, é relativamente curta, a queda de pressão pode ser considerada desprezível e, portanto, a pressão no *manifold* é considerada constante. Entretanto, com a introdução de novas tecnologias de exploração submarinha nos sistemas de produção de petróleo modernos, os poços que estão distantes da plataforma de produção escoam sua produção à plataforma de produção através de uma tubulação comum.

Devido à longa distância das tubulações compartilhadas, a queda de pressão nessas tubulações pode ser grande, variando em função do volume dos fluidos em cada tubulação. Portanto, ajustar a produção de um poço mudando a taxa de injeção de gás pressurizado ou a abertura da válvula de produção afetará os outros poços que compartilham a mesma tubulação para enviar os fluidos para a plataforma. A Figura 4 ilustra a vazão de líquido de um poço que não produz água em função da injeção de gás e da variação da pressão no *manifold*. Neste caso, modelos que utilizam as WPC's dos poços não podem ser aplicados diretamente ao problema de alocação de gás de injeção devido à variação da pressão nos *manifolds* de produção. Para se obter resultados mais precisos, as funções de queda de pressão nas tubulações que conectam os poços, *manifolds* e separadores precisam ser incorporadas no modelo de otimização.

A presença de múltiplas fases na composição dos fluidos de uma tubulação torna complexo o cálculo da queda de pressão, pois as propriedades de cada fluido e as interações entre elas devem ser consideradas. Para contornar a complexidade, Beggs e Brill (1973) estudaram

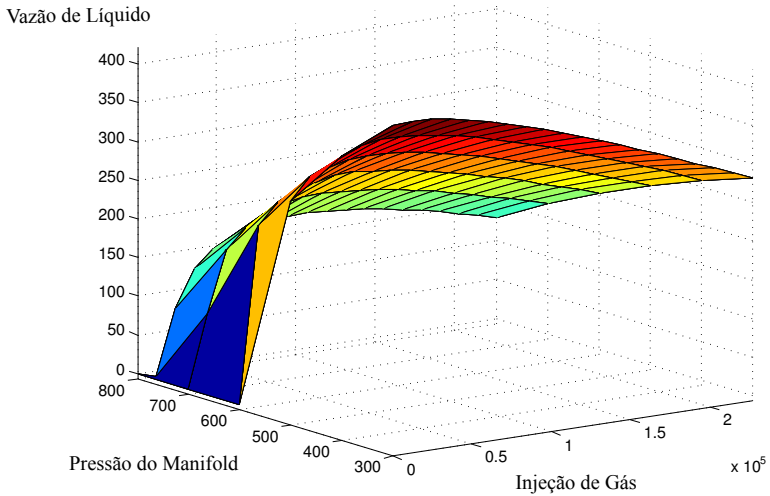


Figura 4: Curva de Produção do Poço.

as correlações entre a queda de pressão e a vazão dos fluidos em uma tubulação. Tais correlações foram usadas posteriormente para aproximar a queda de pressão em uma tubulação como função das vazões dos fluidos. A Figura 5 ilustra a queda de pressão em uma tubulação de 100 metros em função da vazão de gás e de líquido. Os poços que enviam os fluidos para esta tubulação possuem uma fração de água, do inglês *Basic Sediments and Water* (BSW) igual a 10.

Litvak e Darlow (1995) desenvolveram duas técnicas para representação das equações de pressão em um sistema de produção: modelos analíticos e tabelas com os *breakpoints* para a pressão. A primeira é bastante usada na engenharia de petróleo para a simulação da vazão nas tubulações dos poços, válvulas e instalações da superfície por ser precisa em relação ao fenômeno físico real. A segunda técnica modela a queda de pressão nas tubulações como função da pressão absoluta na saída e das vazões de óleo, gás e água. A função original da queda de pressão é aproximada com um função linear por partes representada em tabelas que mapeiam a queda de pressão associada com os *breakpoints* de pressão de saída e as vazões de cada fase. Embora esta técnica seja mais eficiente quanto ao tempo computacional, o uso de tabelas demanda uma quantidade de memória considerável e pode se tornar inviável em redes de produção muito extensas.

Proporção de Água (BSW) = 10

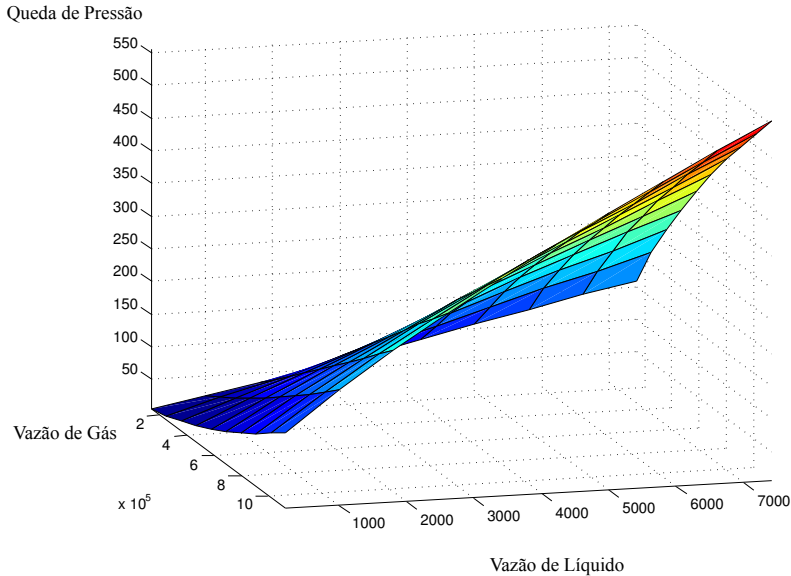


Figura 5: Curva de Queda de Pressão.

Dutta-Roy e Kattapuram (1997) propuseram uma nova abordagem para otimização do problema de alocação de gás de injeção usando equalização das pressões com base na vazão multifásica das tubulações, acoplado à técnica de PQS para lidar com as restrições não lineares do problema de otimização. A abordagem foi avaliada com até três poços idênticos compartilhando a mesma tubulação. Os resultados apontaram que as taxas de injeção ótimas para cada poço foram reduzidas à medida que o número de poços aumentou.

Todas as soluções discutidas até então garantem apenas que um ótimo local seja encontrado. Como os problemas formulados são geralmente não-convexos, os algoritmos podem não encontrar a solução ótima global. Stoitsits et al. (1999) desenvolveram um algoritmo genético para encontrar uma solução próxima ao ótimo global para um problema similar. Entretanto, não há garantias de se encontrar um ótimo local ou o ótimo global. Além disto, o algoritmo desenvolvido não é eficiente, pois a estrutura do problema não é explorada durante o método de solução.

Handley-Schachler, McKie e Quintero (2000) utilizaram Programação Linear Sucessiva (PLS) ao invés de PQS para resolver o problema de otimização com as restrições de pressão. As quedas de pressão nas tubulações foram modeladas usando-se equações não-lineares padronizadas. Em cada iteração do algoritmo PLS, a queda de pressão é linearizada para cada poço. A curva de desempenho de cada poço foi modelada como uma superfície linear por partes usando inequações lineares, similar ao que foi feito em (FANG; LO, 1996). De acordo com o autor, isto reduziu o número de iterações necessárias pelo algoritmo PLS.

Wang (2003) modelou o problema de alocação de gás considerando as interações de fluxo na linhas compartilhadas pelos poços. Diversas formulações foram investigadas, dentre elas, uma formulação foi sugerida pelo autor por ter suporte a fechamento e abertura dos poços e por ser computacionalmente eficiente. O problema foi solucionado em seguida com um algoritmo PQS.

Kosmidis, Perkins e Pistikopoulos (2004) propôs uma formulação inteira-mista para a operação diária de um poço e a alocação de gás para campos de petróleo em alto mar considerando o comportamento do reservatório, os fluidos multifásicos nas tubulações e as restrições de capacidade nas instalações da superfície. Com a inclusão da pressão no modelo do campo de petróleo, a vazão de um poço operado com elevação por injeção contínua de gás passa a depender da taxa de gás injetado e da pressão no *manifold* de produção que coleta a produção de vários poços que compartilham a tubulação que leva o fluido até o separador na superfície. Por isto, os modelos dos poços foram aproximados com funções lineares por partes e o problema foi reformulado em um programa não linear inteiro-misto eficiente. Mais tarde, Kosmidis, Perkins e Pistikopoulos (2005) modelaram o mesmo problema de alocação de gás como um programa não linear inteiro-misto envolvendo restrições lógicas, aproximações lineares por partes para o modelo de cada poço, restrições de pressão e alinhamento entre poços, *manifolds* e separadores. Eles ilustraram a aplicabilidade da abordagem de solução de proposta com um número de exemplos ilustrativos e os resultados mostraram um aumento na produção de óleo acima de 10 % quando comparados com os métodos tradicionais aplicados na maioria dos campos de petróleo na prática.

Gunnerud e Foss (2010) aproximaram as funções de queda de pressão nas tubulações que conectam os *manifolds* e os separadores com uma função linear por partes que depende apenas das vazões de óleo, gás e água, pois a pressão no separador, ou seja, na saída da tubulação,

foi considerada constante. Conjuntos Especialmente Ordenados Tipo 2 (SOS2) foram usados para representar a função linear por partes multidimensional. As demais curvas não lineares foram aproximadas por funções lineares por partes e o problema foi reduzido a um programa linear inteiro-misto. A solução foi aplicada ao campo de petróleo Troll Oeste, que é estruturado em um conjunto de *clusters* submarinhos. A estrutura do campo é adequada para aplicação de decomposições. Portanto, foi desenvolvida uma decomposição Dantzig Wolfe para o problema de otimização, que depois foi solucionado com um algoritmo de *branch-and-price*.

Com os resultados obtidos nesta dissertação, Silva, Codas e Camponogara (2012) desenvolveram um programa não linear inteiro misto para o problema de alocação de gás com restrições pressão e alinhamento entre poços e *manifolds*. Como este problema é consideravelmente difícil de resolver, eles propuseram duas reformulações lineares inteiras-mistas do problema com base nos modelos agregados de combinação convexa padrão (CC) e Logarítmico (Log). Os resultados apresentados pelos autores indicaram que o modelo logarítmico é mais eficiente que o modelo padrão por causa do número reduzido de variáveis e restrições.

Apesar de existirem diversos trabalhos abordando o problema de otimização da produção em poços de petróleo operados com elevação artificial por injeção contínua de gás, a representação das restrições de pressão nos sistemas de produção que utilizam as novas tecnologias submarinhas ainda é um desafio. Alguns trabalhos mais recentes têm utilizado funções lineares por partes para aproximar as funções de queda de pressão nas tubulações. Entretanto, não há disponível na literatura, uma análise computacional dos diversos modelos que podem ser usados para representar funções lineares por partes com aplicação na engenharia de petróleo. Neste trabalho, busca-se incorporar as restrições de pressão aos modelos de sistemas de produção operados por injeção contínua de gás. Procura-se avaliar o desempenho computacional dos modelos de programação linear inteira-mista para representar as funções lineares por partes que aproximam as funções de queda de pressão nas tubulações, com o objetivo de identificar ferramentas capazes de melhorar o desempenho das abordagens utilizadas nos campos de petróleo.



### 2.3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de otimização da produção diária de um campo de petróleo com poços operando com injeção contínua de gás tem como objetivo determinar: (i) a condição operacional de cada poço (aberto ou fechado); (ii) as conexões entre poços, *manifolds* e separadores que compõem o sistema; (iii) a vazão dos fluidos resultante de cada poço; (iv) a pressão que cada *manifold* deve ser operado; (v) a quantidade de gás de injeção alocada para cada poço tal que o benefício diário, ou seja, o ganho com a venda de óleo menos o custo do gás usado pelo compressor para elevar os fluidos em um dia, seja maximizado.

O modelo também deve considerar as leis físicas e as restrições operacionais tais como: (i) balanço de massa ao longo das tubulações na rede de produção; (ii) limites superior e inferior de produção para cada poço; (iii) limites de separação de gás, óleo e água nas instalações da superfície; (v) capacidade de tratamento de gás de injeção pelo compressor; (vi) relações de pressão entre os poços, *manifolds* e separadores.

O problema de alocação de gás de injeção a poços de petróleo, considerando o roteamento dos poços para os separadores e sujeito a restrições de gás e capacidade de processamento das unidades de separação foi discutido em (CODAS; CAMPONOGARA, 2012). Com o intuito de analisar modelos lineares por partes multidimensionais, este trabalho propõe uma extensão do trabalho prévio considerando também as restrições de pressão nas tubulações que conectam poços, *manifolds* e separadores. O problema é formulado como um programa não-linear

inteiro misto:

$$P : \max f = \sum_{m \in \mathcal{M}} g(\mathbf{q}^m) - \sum_{n \in \mathcal{N}} c(q_i^n) \quad (2.1a)$$

$$\text{s.a. : } \sum_{n \in \mathcal{N}} q_i^n \leq q_i^{\max} \quad (2.1b)$$

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$l_n y_n \leq q_i^n \leq u_n y_n \quad (2.1c)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_n} z_{n,m} = y_n \quad (2.1d)$$

$$\mathbf{q}^{n,m} = \mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n) z_{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (2.1e)$$

$$y_n \mathbf{q}^{n,L} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \mathbf{q}^{n,m} \leq y_n \mathbf{q}^{n,U} \quad (2.1f)$$

$$\mathbf{q}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \mathbf{q}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{m,S}, \forall m \in \mathcal{M} \quad (2.1g)$$

$$p^m = p^{m,S} + \Delta p^m(\mathbf{q}^m), \forall m \in \mathcal{M} \quad (2.1h)$$

$$p^{m,\min} \leq p^m \leq p^{m,\max} \quad (2.1i)$$

$$y_n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathcal{N} \quad (2.1j)$$

$$z_{n,m} \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (2.1k)$$

com as seguintes **variáveis**:

- $q_i^n$  é a taxa de gás de injeção alocada ao poço  $n$ ;
- $y_n$  é 1 quando o poço  $n$  está produzindo, e 0 caso contrário;
- $z_{n,m}$  assume valor 1 se a produção do poço  $n$  é direcionada ao *manifold*  $m$ , e 0 caso contrário;
- $q_h^{n,m}$  é a vazão da fase  $h \in \mathcal{H}$  enviada do poço  $n$  para o *manifold*  $m$ , e  $\mathbf{q}^{n,m} = (q_h^{n,m} : h \in \mathcal{H})$  é um vetor com as vazões de todas as fases. A vazão de gás recebido pelo *manifold*  $m$  de produção é a soma da taxa de gás de injetado no poço  $n$  (Inj) e do gás proveniente do reservatório (R):  $q_g^{n,m} = q_{g,R}^{n,m} + q_{g,\text{Inj}}^{n,m}$ ;
- $\mathbf{q}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \mathbf{q}^{n,m}$  é a vazão total recebida dos poços conectados ao *manifold*  $m$  para todas as fases;
- $p^m$  é a pressão do *manifold*  $m$ ;

**parâmetros:**

- $N$  é o número de poços de petróleo,  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  e  $\mathcal{N}_m \subseteq \mathcal{N}$  é o subconjunto de poços cuja produção pode ser enviada ao *manifold*  $m$ ;
- $M$  é o número de *manifolds*,  $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$  e  $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}$  é o subconjunto de *manifolds* que podem receber produção do poço  $n$ . A produção de cada *manifold* é direcionada para um único separador;
- $\mathcal{H} = \{o, g, w\}$  possui as vazões multifásicas: óleo (o), gás (g) e água (w);
- $q_i^{\max}$  é a capacidade de compressão dos compressores;
- $l_n$  e  $u_n$  são limites na injeção de gás para cada poço  $n$ ;
- $p^{m,S}$  é a pressão operacional do separador que recebe a produção do *manifold*  $m$ ;
- $\mathbf{q}^{n,L}$  e  $\mathbf{q}^{n,U}$  são os vetores com os limites inferiores e superiores para a vazão do poço  $n$  em todas as fases  $h \in \mathcal{H}$ ;
- $\mathbf{q}^{m,S}$  é a capacidade de processamento do separador conectado ao *manifold*  $m$ ;
- $p^{m,\min}$  é a pressão operacional mínima do *manifold*  $m$ ;
- $p^{m,\max}$  é a pressão operacional máxima do *manifold*  $m$ ;

e funções:

- $f$  é uma função composta pela função  $g$  que representa o benefício econômico proveniente da produção dos poços, que é concentrada nos *manifolds* e pela função  $c$ , a qual representa o custo de injeção de gás nos poços. A função  $g$  possui na sua representação os custos com a compressão de gás e tratamento da água e os ganhos obtidos com a produção de gás e óleo. Qualquer outra função contínua pode ser considerada, tal como a produção total de óleo;
- $q_h^{n,m}(p^m, q_i^n)$  é a vazão da fase  $h$  enviada do poço  $n$  ao *manifold*  $m$ , dado como uma função da pressão do *manifold* e da taxa de gás injetado no poço  $n$ , com  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n) = (q_h^{n,m}(p^m, q_i^n) : h \in \mathcal{H})$  sendo a função vetorial com as vazões de todas as fases;
- $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  é a função que representa a queda de pressão na tubulação que conecta o *manifold*  $m$  ao separador que recebe sua produção.

A capacidade de gás no compressor e os limites superior e inferior na taxa de injeção de gás para cada poço estão definidos nas restrições (2.1b) e (2.1c) respectivamente.

O alinhamento de poços para *manifolds* é determinado pelas restrições (2.1d)-(2.1e) e garantem que cada poço enviará sua produção para apenas um *manifold* quando estiver ativo, ou seja, quando  $y_n = 1$ . Quando o poço  $n$  não estiver alinhado com o *manifold*  $m$ , ou seja,  $z_{n,m} = 0$ , a produção do poço  $n$  enviada ao *manifold*  $m$  é nula e, caso contrário, a produção do poço  $n$  que é enviada ao *manifold*  $m$  é limitada pelas capacidades máximas e mínimas  $q^{n,U}$  e  $q^{n,L}$  respectivamente.

Os limites operacionais de produção dos poços, o balanço de massa e os limites de separação para cada fase nas instalações da superfície são definidos nas restrições (2.1f) e (2.1g), enquanto o balanço de pressão entre os *manifolds* e separadores são assegurados pelas restrições (2.1h) e (2.1i).

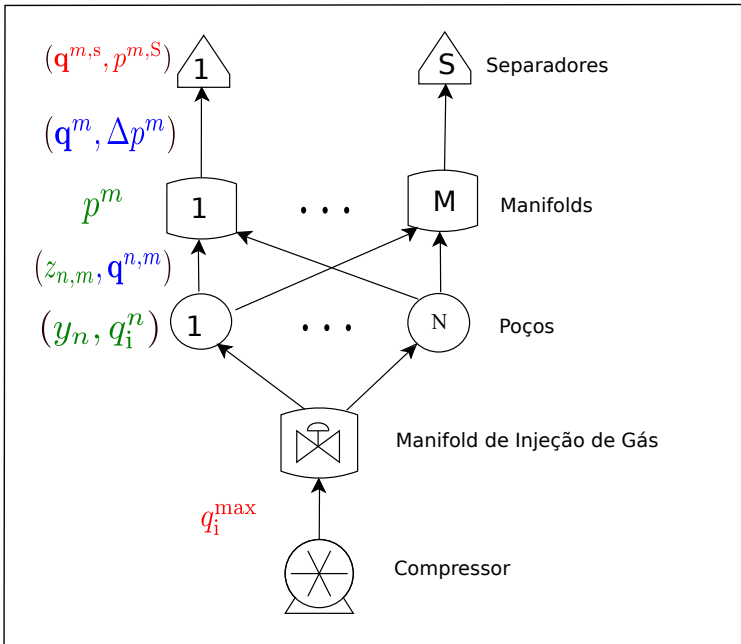


Figura 6: Formulação da Rede de Produção

A formulação do problema é ilustrada na Figura 6 para uma rede de produção. A principais variáveis de decisão do problema estão ilustrada na cor verde, enquanto as demais variáveis estão ilustradas em azul. Os parâmetros e limites operacionais do problema estão em vermelho.

O problema de alocação de gás de injeção com alinhamento poço-*manifold* é um problema de programação não-linear inteiro-misto de complexidade computacional considerável, devido às características não-lineares das funções de vazão dos poços  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^m)$ , de queda de pressão nas tubulações  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  e às variáveis discretas. Este problema pode ser considerado NP-difícil, pois é mais geral que o problema de alocação de gás tratado em (CAMPONOGARA; NAKASHIMA, 2006), ao qual o problema clássico da mochila é redutível em tempo e espaço polinomial.

## 2.4 SUMÁRIO

Neste capítulo foi apresentada a motivação e a definição do problema que é abordado e solucionado nesta dissertação. Inicialmente, foi feita uma breve apresentação de alguns conceitos básicos da engenharia de petróleo necessários ao entendimento do problema e uma revisão sucinta sobre a elevação artificial por injeção contínua de gás. Em seguida, foi feita uma revisão bibliográfica contendo diversos trabalhos disponíveis na literatura relacionados com o problema de alocação de gás sujeito a restrições de pressão. Por fim, o problema foi formulado matematicamente como um programa não linear inteiro-misto.



### 3 MODELOS INTEIROS-MISTOS PARA FUNÇÕES LINEARES POR PARTES MULTIDIMENSIONAIS

Problemas de minimização envolvendo funções convexas podem ser modelados como problemas de programação linear (LP) através de técnicas de linearização por partes e resolvidos de forma eficiente. Quando a modelagem de problemas complexos envolve funções não-convexas, é necessário introduzir não-linearidades no modelo, o que pode tornar o problema de otimização NP-Difícil mesmo quando todas as funções são uni-variadas. Estas não linearidades podem ser aproximadas com funções lineares por partes e com a introdução de variáveis binárias auxiliares e restrições adicionais, que relacionam as variáveis contínuas do modelo com as variáveis binárias auxiliares, ou ainda através da construção de ramificações especializadas nas variáveis contínuas (KEHA; FARIAS JR; NEMHAUSER, 2004).

Problemas de otimização envolvendo funções lineares por partes podem ser resolvidos com algoritmos especializados tais como o *branch-and-cut* desenvolvido por Keha, FARIAS JR e Nemhauser (2004) sem o uso de variáveis binárias, ou os algoritmos propostos em (TOMLIN, 1988) e (FARIAS; JOHNSON; NEMHAUSER, 2001), que estendem o conceito de conjuntos especialmente ordenados (SOS) para funções não-convexas multidimensionais e semi-contínuas, respectivamente, e utilizam tais conjuntos em um método de *branch-and-bound*. Estes problemas que envolvem funções lineares por partes também podem ser modelados como programas inteiros-mistos e resolvidos com *solvers* de propósito geral. A vantagem desta última abordagem está no emprego da tecnologia disponível no estado da arte dos *solvers* de Programação Linear Inteira-Mista (MILP).

Modelos para funções lineares por partes não-convexas têm sido amplamente estudados na literatura (SHERALI, 2001; JEROSLOW; LOWE, 1984; LEE; WILSON, 2001), mas tais estudos concentram-se nos casos em que as funções são uni-variadas ou separáveis. Em alguns problemas em áreas tais como economia, engenharia química e engenharia de petróleo, a modelagem de funções multidimensionais ou multivariadas é inevitável. Em alguns casos, há como se converter uma função multivariada em uma função separável através de alguma manipulação algébrica, mas tal conversão pode ser indesejável porque pode resultar em uma formulação mais fraca ou com erros numéricos elevados. Vielma, Ahmed e Nemhauser (2010) estudaram diversos modelos em MILP para representar funções lineares por partes não convexas,

com atenção especial às funções multidimensionais. Neste capítulo, apresentaremos os modelos em MILP existentes na literatura para representar funções lineares por partes não-convexas multidimensionais.

### 3.1 NOTAÇÃO

Seja  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida sobre um domínio compacto  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ , onde um conjunto compacto, em espaços com dimensão finita, é um conjunto fechado que é limitado. De acordo com Vielma, Ahmed e Nemhauser (2010),  $f$  é uma função linear por partes se, e somente se, existe uma família de politopos  $\mathcal{P}$ , tal que,  $\cup_{P \in \mathcal{P}} P = \mathcal{D}$ ,  $\{\mathbf{m}_P\}_{P \in \mathcal{P}} \subseteq \mathbb{R}^d$  e  $\{c_P\}_{P \in \mathcal{P}}$ , tal que:

$$f(\mathbf{x}) := \{\mathbf{m}'_P \mathbf{x} + c_P, \quad \mathbf{x} \in P, \forall P \in \mathcal{P}\} \quad (3.1)$$

Seja  $V(P)$  o conjunto de vértices do politopo  $P$  e  $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = \cup_{P \in \mathcal{P}} V(P)$  o conjunto de todos os vértices do domínio.

#### 3.1.1 Exemplo com Domínio Unidimensional

Nesta seção, apresentamos uma função linear por partes com domínio unidimensional, representada na Figura 7, com o objetivo de ilustrar o conceito destas funções apresentado na Equação (3.1) e para explicitar os modelos apresentados neste capítulo para o caso unidimensional.

Esta função possui domínio unidimensional  $\mathcal{D} = [0, 4]$ , dividido em uma família de politopos  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ , onde  $P_1 = [0, 1]$ ,  $P_2 = [1, 2]$ ,  $P_3 = [2, 3]$ ,  $P_4 = [3, 4]$ ,  $V(P_1) = \{0, 1\}$ ,  $V(P_2) = \{1, 2\}$ ,  $V(P_3) = \{2, 3\}$  e  $V(P_4) = \{3, 4\}$ , com os pontos do gráfico  $\mathcal{G} = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathcal{D}\}$  sendo  $\{(0, 8), (1, 28), (2, 14), (3, 25), (4, 21)\}$ .

#### 3.1.2 Exemplo com Domínio Bidimensional

As formulações MILP das funções lineares por partes deste capítulo serão explicitadas para o caso bidimensional com uma função linear por partes que aproxima a função  $f(x, y) = e^{-y} + e^{-x^2} - x^2 + xy - 2y$  ilustrada na Figura 8.

O domínio desta função  $\mathcal{D} = [-2, 2]^2$  é uma triangulação J1 (*Union Jack*), particionada em um conjunto de politopos  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2,$



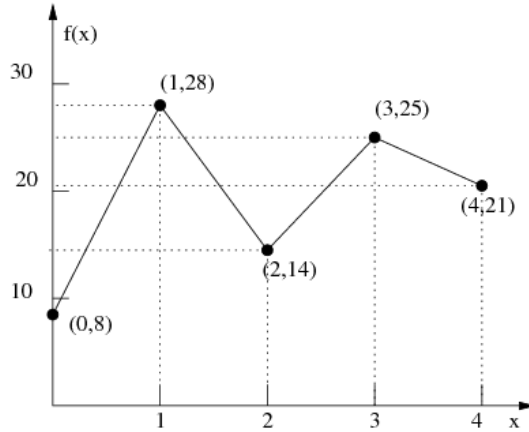


Figura 7: Função Linear por Partes Não-convexa com Domínio Unidimensional.

$\dots, P_{32}$ } e um conjunto de vértices para cada polítopo  $\mathcal{V}(P_1) = \{(-2, -2), (-2, -1), (-1, -1)\}$ ,  $\mathcal{V}(P_2) = \{(-2, -1), (-1, -1), (-2, 0)\}$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{V}(P_{32}) = \{(2, -1), (1, -1), (2, -2)\}$  conforme ilustrado na Figura 9. Nesta figura, os triângulos do domínio são definidos a partir de pontos centrais localizados nas coordenadas ímpares do domínio, ou seja, nos pontos  $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1)$  e  $(1, 1)$ . Em torno deste pontos centrais, são criados quatro quadrados que, mais tarde, são particionados em triângulos, os quais representam os polítopos do domínio da função. Nesta figura, os vértices foram dispostos de forma ordenada de acordo com o triângulo. Esta ordenação é usada mais tarde pelo modelo Incremental, o qual será apresentado neste capítulo. A triangulação J1 é definida formalmente no Apêndice A.1 e uma heurística de ordenação dos triângulos e vértices é apresentada no Apêndice A.2.

### 3.2 MODELOS DE COMBINAÇÃO CONVEXA DESAGREGADA

As formulações desta seção dividem o domínio da função em um conjunto de polítopos  $\mathcal{P}$ . Cada polítopo  $P \in \mathcal{P}$  possui um conjunto de vértices  $V(P)$  e, para cada vértice  $\mathbf{v} \in V(P)$  deste polítopo, há uma variável contínua  $\lambda_{P,\mathbf{v}}$  associada. A representação de um ponto do gráfico  $\mathcal{G}$  da função é descrita como a combinação convexa dos vértices de

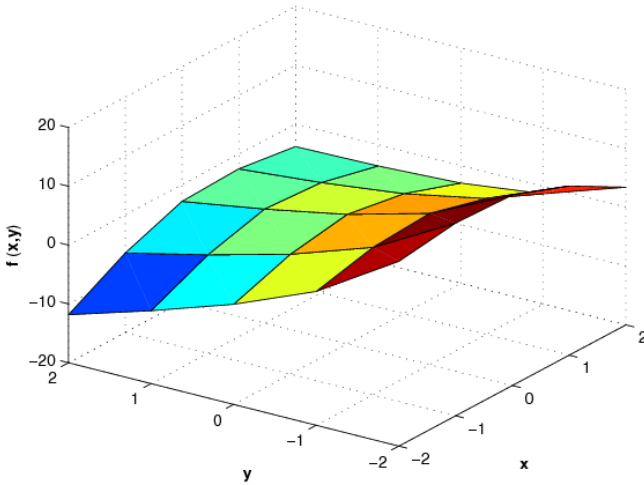


Figura 8: Função Linear por Partes com Domínio Bidimensional.

cada politopo com as seguintes relações:

$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \sum_{P \in \mathcal{D}} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}}(\mathbf{v}, f(\mathbf{v})) \quad (3.2a)$$

$$\{\lambda_{P,\mathbf{v}}\}_{P \in \mathcal{D}, \mathbf{v} \in V(P)} \subset \mathbb{R}_+ \quad (3.2b)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{D}} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} = 1. \quad (3.2c)$$

Note que, para a função ilustrativa unidimensional ilustrada na Figura 7,  $P_1 \cap P_2 = \{1\}$ , então o vértice  $v = 1$  terá duas variáveis contínuas associadas:  $\lambda_{P_1,1}$  e  $\lambda_{P_2,1}$ .

### 3.2.1 Modelo Básico

O modelo de Combinação Convexa Desagregada (DCC) não requer nenhuma propriedade especial na sua família de politopos, sendo

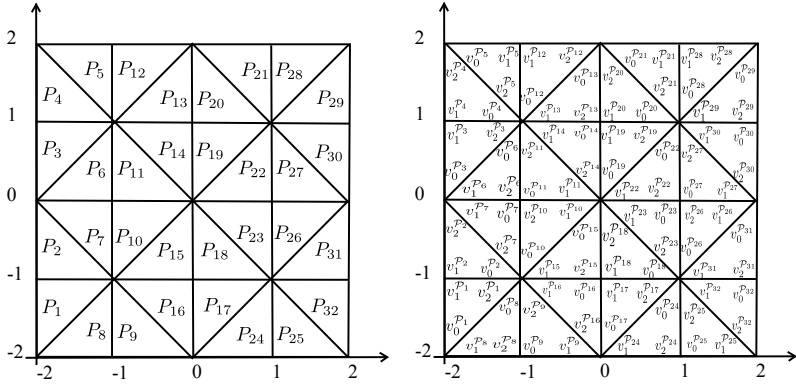


Figura 9: Triangulação J1 no domínio de  $f(x, y)$

dados pela formulação:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P, \mathbf{v}} \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (3.3a)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P, \mathbf{v}} f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) \quad (3.3b)$$

$$\lambda_{P, \mathbf{v}} \geq 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}, \forall \mathbf{v} \in V(P) \quad (3.3c)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P, \mathbf{v}} = y_P, \quad \forall P \in \mathcal{P} \quad (3.3d)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1, \quad y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \quad (3.3e)$$

As restrições (3.3a)-(3.3c) representam um ponto do gráfico  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  como combinação convexa de  $(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}))$  para  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$ . As equações (3.3d) e (3.3e) limitam a combinação convexa a exatamente um politopo  $P$ . Note que, pela restrição (3.3e), apenas uma variável  $y_P$  pode assumir valor 1, significando que apenas um politopo pode estar ativo. Quando  $y_P = 1$ , as variáveis de peso associadas àquele politopo  $\lambda_{P, \mathbf{v}}$  podem assumir um valor no intervalo  $[0, 1]$ , enquanto todas as outras variáveis associadas aos demais politopos assumem valor zero. Esta formulação foi estudada em (CROXTON; GENDRON; MAGNANTI, 2003), (JEROSLOW; LOWE, 1984), (MEYER, 1976) e (SHERALI, 2001).

### 3.2.1.1 Caso Unidimensional

Nesta seção, a formulação explícita do modelo DCC para função linear por partes unidimensional ilustrada na Figura 7 é apresentada, como segue:

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,v} v = x &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1,0} 0 + \lambda_{P_1,1} 1 + \lambda_{P_2,1} 1 + \lambda_{P_2,2} 2 + \\ \lambda_{P_3,2} 2 + \lambda_{P_3,3} 3 + \lambda_{P_4,3} 3 + \lambda_{P_4,4} 4 = x \end{cases} \\ \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,v} f(v) = f(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1,0} 8 + \lambda_{P_1,1} 28 + \lambda_{P_2,1} 28 + \lambda_{P_2,2} 14 + \\ \lambda_{P_3,2} 14 + \lambda_{P_3,3} 25 + \\ \lambda_{P_4,3} 25 + \lambda_{P_4,4} 21 = f(x) \end{cases} \\ \lambda_{P,v} \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}, \forall v \in V(P) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1,0} \geq 0, \lambda_{P_1,1} \geq 0, \lambda_{P_2,1} \geq 0, \lambda_{P_2,2} \geq 0, \\ \lambda_{P_3,2} \geq 0, \lambda_{P_3,3} \geq 0, \lambda_{P_4,3} \geq 0, \lambda_{P_4,4} \geq 0 \end{cases} \\ \sum_{v \in V(P)} \lambda_{P,v} = y_P, \forall P \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1,0} + \lambda_{P_1,1} = y_{P_1} \\ \lambda_{P_2,1} + \lambda_{P_2,2} = y_{P_2} \\ \lambda_{P_3,2} + \lambda_{P_3,3} = y_{P_3} \\ \lambda_{P_4,3} + \lambda_{P_4,4} = y_{P_4} \end{cases} \\ \sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1 &\Leftrightarrow y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3} + y_{P_4} = 1 \\ y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow y_{P_1} \in \{0, 1\}, y_{P_2} \in \{0, 1\}, y_{P_3} \in \{0, 1\}, y_{P_4} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

### 3.2.1.2 Caso Bidimensional

Nesta seção, a formulação explícita do modelo DCC para a função linear por partes bidimensional ilustrada na Figura 8 é apresentada, como segue:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{v \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,v} v = \mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1, v_1^{P_1}} (-2, -2) + \lambda_{P_1, v_2^{P_1}} (-2, -1) \\ + \lambda_{P_1, v_3^{P_1}} (-1, -1) + \lambda_{P_2, v_1^{P_2}} (-2, -1) \\ + \lambda_{P_2, v_2^{P_2}} (-1, -1) + \lambda_{P_2, v_3^{P_2}} (-2, 0) \\ + \dots + \lambda_{P_{32}, v_1^{P_{32}}} (2, -1) + \lambda_{P_{32}, v_2^{P_{32}}} (1, -1) \\ + \lambda_{P_{32}, v_3^{P_{32}}} (2, -2) = \mathbf{x} \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1, \mathbf{v}_1^{P_1}} (11.4074) + \lambda_{P_1, \mathbf{v}_2^{P_1}} (2.7366) \\ + \lambda_{P_1, \mathbf{v}_3^{P_1}} (5.0862) + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_1^{P_2}} (2.7366) \\ + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_2^{P_2}} (5.0862) + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_3^{P_2}} (-2.9817) \\ + \cdots + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_1^{P_{32}}} (-1.2634) + \\ \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_2^{P_{32}}} (3.0862) + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_3^{P_{32}}} (3.4074) \\ = f(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\lambda_{P,\mathbf{v}} \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}, \mathbf{v} \in V(P) \Leftrightarrow \lambda_{P_1, \mathbf{v}_1^{P_1}} \geq 0, \lambda_{P_1, \mathbf{v}_2^{P_1}} \geq 0, \dots, \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_3^{P_{32}}} \geq 0$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} = y_P, \forall P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1, \mathbf{v}_1^{P_1}} + \lambda_{P_1, \mathbf{v}_2^{P_1}} + \lambda_{P_1, \mathbf{v}_3^{P_1}} = y_{P_1} \\ \lambda_{P_2, \mathbf{v}_1^{P_2}} + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_2^{P_2}} + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_3^{P_2}} = y_{P_2} \\ \vdots \\ \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_1^{P_{32}}} + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_2^{P_{32}}} + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_3^{P_{32}}} = y_{P_{32}} \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1 \Leftrightarrow y_{P_1} + y_{P_2} + \cdots + y_{P_{32}} = 1$$

$$y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow y_{P_1} \in \{0, 1\}, y_{P_2} \in \{0, 1\}, \dots, y_{P_{32}} \in \{0, 1\}$$

### 3.2.2 Modelo Logarítmico

O Modelo de Combinação Convexa Desagregada Logarítmico (DLog) tem como objetivo reduzir o número de variáveis binárias e de restrições adicionais do modelo DCC. Com base nos resultados apresentados em (IBARAKI, 1976; VIELMA; KEHA; NEMHAUSER, 2008), Vielma e Nemhauser (2009) desenvolveram uma nova formulação onde cada politopo  $P \in \mathcal{P}$  é representado com um vetor binário definido por  $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^{|\log_2 |\mathcal{P}||}$ , usando uma função injetora  $B: \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}^{|\log_2 |\mathcal{P}||}$ . Algumas variáveis binárias são usadas para forçar que  $\sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} = 1$

quando  $\mathbf{y} = B(P)$ . O modelo resultante é dado por:

$$\text{Eqs. (3.3a)–(3.3c)} \quad (3.4a)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} = 1 \quad (3.4b)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^1(B,l)} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq \mathbf{y}_l, \forall l \in L(\mathcal{P}) \quad (3.4c)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^0(B,l)} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq (1 - \mathbf{y}_l), \forall l \in L(\mathcal{P}) \quad (3.4d)$$

$$\mathbf{y}_l \in \{0, 1\}, \forall l \in L(\mathcal{P}) \quad (3.4e)$$

onde  $B(P)_l$  é o valor do código binário associado ao politopo  $P$  na posição  $l$ , sendo a posição  $l$  crescente da esquerda para a direita,  $\mathcal{P}^j(B,l)$  é o conjunto de politopos cujos códigos binários tem o valor  $j \in \{0, 1\}$  na posição  $l$  e  $L(\mathcal{P})$  é o conjunto de índices para as entradas de um código binário  $B(P)$ , conforme definidos a seguir:

$$\mathcal{P}^j(B,l) := \{P \in \mathcal{P} : B(P)_l = j\}, j \in \{0, 1\}$$

$$L(\mathcal{P}) := \{1, \dots, \lceil \log_2 |\mathcal{P}| \rceil\}.$$

As Equações (3.4c)–(3.4e) garantem que  $\lambda_{P,\mathbf{v}}$  seja diferente de zero apenas quando  $\mathbf{y} = B(P)$ .

### 3.2.2.1 Caso Unidimensional

Para a função ilustrativa unidimensional,  $B$  é definida como uma função injetora tal que  $B(P_1) = (0,0)$ ,  $B(P_2) = (0,1)$ ,  $B(P_3) = (1,0)$  e  $B(P_4) = (1,1)$ . Assim,  $\mathcal{P}^1(B,1) = \{P_3, P_4\}$ ,  $\mathcal{P}^1(B,2) = \{P_2, P_4\}$ ,  $\mathcal{P}^0(B,1) = \{P_1, P_2\}$  e  $\mathcal{P}^0(B,2) = \{P_1, P_3\}$ . O conjunto  $L(\mathcal{P}) = \{1, 2\}$  é o conjunto de índices para o código binário dos politopos. As equações (3.4a) do modelo DLog são equivalentes às equações (3.3a)–(3.3c). Como a forma explícita de tais restrições já foram apresentadas na seção 3.2.1.1, a formulação a seguir apresenta apenas as demais restrições do modelo

Dlog:

$$\begin{aligned} \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1,0} + \lambda_{P_1,1} + \lambda_{P_2,1} + \lambda_{P_2,2} + \\ \lambda_{P_3,2} + \lambda_{P_3,3} + \lambda_{P_4,3} + \lambda_{P_4,4} = 1 \end{cases} \\ \sum_{P \in \mathcal{P}^1(B,I)} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq y_l, \forall l \in L(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_3,2} + \lambda_{P_3,3} + \lambda_{P_4,3} + \lambda_{P_4,4} \leq y_1 \\ \lambda_{P_2,1} + \lambda_{P_2,2} + \lambda_{P_4,3} + \lambda_{P_4,4} \leq y_2 \end{cases} \\ \sum_{P \in \mathcal{P}^0(B,I)} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq 1 - y_l, \forall l \in L(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1,0} + \lambda_{P_1,1} + \lambda_{P_2,1} \\ + \lambda_{P_2,2} \leq (1 - y_1) \\ \lambda_{P_1,0} + \lambda_{P_1,1} + \lambda_{P_3,2} \\ + \lambda_{P_3,3} \leq (1 - y_2) \end{cases} \\ y_l \in \{0, 1\}, \forall l \in L(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

### 3.2.2.2 Caso Bidimensional

Nesta seção, a formulação explícita do modelo DLog para a função linear por partes bidimensional ilustrada na Figura 8 é apresentada. Seja  $B$  uma função injetora definida como segue:

$$B : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}^{\lceil \log_2 |\mathcal{P}| \rceil} \Leftrightarrow \begin{cases} B(P_1) = (0, 0, 0, 0, 0), \\ B(P_2) = (0, 0, 0, 0, 1), \\ B(P_3) = (0, 0, 0, 1, 1), \\ B(P_4) = (0, 0, 0, 1, 0), \\ B(P_5) = (0, 0, 1, 1, 0), \\ B(P_6) = (0, 0, 1, 0, 0), \\ \vdots \\ B(P_{31}) = (1, 0, 1, 1, 1), \\ B(P_{32}) = (1, 1, 1, 1, 1) \end{cases}$$

A seguir, serão definidos os conjuntos necessários no desenvolvimento da formulação:

$$\begin{aligned}
L(\mathcal{P}) &= \{1, \dots, \lceil \log_2 |\mathcal{P}| \rceil\} \Leftrightarrow L(\mathcal{P}) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
\mathcal{P}^1(B, 1) &= \{\dots, P_{31}, P_{32}\}, \\
\mathcal{P}^0(B, 1) &= \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, \dots\}, \\
\mathcal{P}^1(B, 2) &= \{\dots, P_{32}\}, \\
\mathcal{P}^0(B, 2) &= \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_{31}\}, \\
&\vdots \\
\mathcal{P}^1(B, 5) &= \{P_2, P_3, \dots, P_{31}, P_{32}\}, \\
\mathcal{P}^0(B, 5) &= \{P_1, P_4, P_5, P_6, \dots\}
\end{aligned}$$

As equações (3.4a) do modelo DLog são equivalentes às equações (3.3a)–(3.3c). Como a forma explícita de tais restrições já foram apresentadas na seção 3.2.1.2, a formulação a seguir apresenta apenas as demais restrições do modelo Dlog:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_1, \mathbf{v}_1^{P_1}} + \lambda_{P_1, \mathbf{v}_2^{P_1}} + \lambda_{P_1, \mathbf{v}_3^{P_1}} \\ + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_1^{P_2}} + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_2^{P_2}} + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_3^{P_2}} \\ + \dots + \\ \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_1^{P_{32}}} + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_2^{P_{32}}} + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_3^{P_{32}}} = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^1(B, l)} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq y_l, \forall l \in L(\mathcal{P})$$

\(\Updownarrow\)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{P \in \mathcal{P}^1(B, 1)} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq y_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dots + \lambda_{P_{31}, \mathbf{v}_1^{P_{31}}} + \lambda_{P_{31}, \mathbf{v}_2^{P_{31}}} + \lambda_{P_{31}, \mathbf{v}_3^{P_{31}}} \\ + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_1^{P_{32}}} + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_2^{P_{32}}} + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_3^{P_{32}}} \leq y_1 \end{cases} \\ \sum_{P \in \mathcal{P}^1(B, 2)} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dots + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_2^{P_{32}}} + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_3^{P_{32}}} \leq y_2 \end{cases} \\ \vdots \\ \sum_{P \in \mathcal{P}^1(B, 5)} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq y_5 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{P_2, \mathbf{v}_1^{P_2}} + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_2^{P_2}} + \lambda_{P_2, \mathbf{v}_3^{P_2}} \\ + \lambda_{P_3, \mathbf{v}_1^{P_3}} + \lambda_{P_3, \mathbf{v}_2^{P_3}} + \lambda_{P_3, \mathbf{v}_3^{P_3}} + \dots \\ + \lambda_{P_{31}, \mathbf{v}_1^{P_{31}}} + \lambda_{P_{31}, \mathbf{v}_2^{P_{31}}} + \lambda_{P_{31}, \mathbf{v}_3^{P_{31}}} \\ + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_1^{P_{32}}} + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_2^{P_{32}}} + \lambda_{P_{32}, \mathbf{v}_3^{P_{32}}} \leq y_5 \end{cases} \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{P \in \mathcal{P}^0(B,l)} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq 1 - y_l, \forall l \in L(\mathcal{P}) \\
& \Updownarrow \\
& \left\{ \begin{array}{l}
\sum_{P \in \mathcal{P}^0(B,1)} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq 1 - y_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l}
\lambda_{P_1,v_1^{P_1}} + \lambda_{P_1,v_2^{P_1}} + \lambda_{P_1,v_3^{P_1}} \\
+ \lambda_{P_2,v_1^{P_2}} + \lambda_{P_2,v_2^{P_2}} + \lambda_{P_2,v_3^{P_2}} \\
+ \lambda_{P_3,v_1^{P_3}} + \lambda_{P_3,v_2^{P_3}} + \lambda_{P_3,v_3^{P_3}} \\
+ \lambda_{P_4,v_1^{P_4}} + \lambda_{P_4,v_2^{P_4}} + \lambda_{P_4,v_3^{P_4}} \\
+ \lambda_{P_5,v_1^{P_5}} + \lambda_{P_5,v_2^{P_5}} + \lambda_{P_5,v_3^{P_5}} \\
+ \lambda_{P_6,v_1^{P_6}} + \lambda_{P_6,v_2^{P_6}} + \dots \leq 1 - y_1
\end{array} \right. \\
\sum_{P \in \mathcal{P}^0(B,2)} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq 1 - y_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l}
\lambda_{P_1,v_1^{P_1}} + \lambda_{P_1,v_2^{P_1}} + \lambda_{P_1,v_3^{P_1}} \\
+ \lambda_{P_2,v_1^{P_2}} + \lambda_{P_2,v_2^{P_2}} + \lambda_{P_2,v_3^{P_2}} \\
+ \lambda_{P_3,v_1^{P_3}} + \lambda_{P_3,v_2^{P_3}} + \lambda_{P_3,v_3^{P_3}} \\
+ \lambda_{P_4,v_1^{P_4}} + \lambda_{P_4,v_2^{P_4}} + \lambda_{P_4,v_3^{P_4}} \\
+ \lambda_{P_5,v_1^{P_5}} + \lambda_{P_5,v_2^{P_5}} + \lambda_{P_5,v_3^{P_5}} + \dots \\
+ \lambda_{P_{31},v_1^{P_{31}}} + \lambda_{P_{31},v_2^{P_{31}}} + \lambda_{P_{31},v_3^{P_{31}}} \\
\leq 1 - y_2
\end{array} \right. \\
\vdots \\
\sum_{P \in \mathcal{P}^0(B,5)} \sum_{\mathbf{v} \in V(P)} \lambda_{P,\mathbf{v}} \leq 1 - y_5 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l}
\lambda_{P_1,v_1^{P_1}} + \lambda_{P_1,v_2^{P_1}} + \lambda_{P_1,v_3^{P_1}} \\
+ \lambda_{P_4,v_1^{P_4}} + \lambda_{P_4,v_2^{P_4}} + \lambda_{P_4,v_3^{P_4}} \\
+ \lambda_{P_5,v_1^{P_5}} + \lambda_{P_5,v_2^{P_5}} + \lambda_{P_5,v_3^{P_5}} \\
+ \lambda_{P_6,v_1^{P_6}} + \lambda_{P_6,v_2^{P_6}} + \lambda_{P_6,v_3^{P_6}} \\
+ \dots \leq 1 - y_5
\end{array} \right.
\end{array} \right. \\
& y_l \in \{0, 1\}, \forall l \in L(\mathcal{P}) \Leftrightarrow y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\}, y_3 \in \{0, 1\}, \dots, y_5 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

### 3.3 MODELOS DE COMBINAÇÃO CONVEXA (AGREGADA)

Os modelos desta seção associam a cada vértice  $v \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$  uma variável contínua  $\lambda_v$  e representam um ponto do gráfico  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  com

as seguintes equações:

$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, f(\mathbf{v})), \quad (3.5a)$$

$$\{\lambda_{\mathbf{v}}\}_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \subset \mathbb{R}_+ \quad (3.5b)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} = 1 \quad (3.5c)$$

Estes modelos foram desenvolvidos com o objetivo de reduzir o número de variáveis do modelo DCC, agregando as variáveis contínuas associadas a cada vértice  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$  que pertence a mais de um politopo  $P \in \mathcal{P}$ .

### 3.3.1 Modelo Básico

O modelo de combinação convexa agregada (CC) é dado por:

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{x} \quad (3.6a)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) \quad (3.6b)$$

$$\lambda_{\mathbf{v}} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \quad (3.6c)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} = 1 \quad (3.6d)$$

$$\lambda_{\mathbf{v}} \leq \sum_{P \in \mathcal{P}(\mathbf{v})} y_P, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \quad (3.6e)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1, y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \quad (3.6f)$$

onde  $\mathcal{P}(\mathbf{v}) := \{P \in \mathcal{P} : \mathbf{v} \in V(P)\}$  é o conjunto de politopos que contêm o vértice  $\mathbf{v}$ . Esta formulação foi estudada na literatura por Keha, FARIAS JR e Nemhauser (2004), Lee e Wilson (2001) e Padberg (2000).

#### 3.3.1.1 Caso Unidimensional

Nesta seção, a formulação explícita do modelo CC para a função linear por partes unidimensional ilustrada na Figura 7 é apresentada a

seguir:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{x} &\Leftrightarrow \lambda_0 0 + \lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \lambda_3 3 + \lambda_4 4 = x \\
\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow \lambda_0 8 + \lambda_1 28 + \lambda_2 14 + \lambda_3 25 + \lambda_4 21 = f(x) \\
\lambda_{\mathbf{v}} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0 \\
\lambda_{\mathbf{v}} \leq \sum_{P \in \mathcal{P}} y_P, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(P) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 \leq y_{P_1} \\ \lambda_1 \leq y_{P_1} + y_{P_2} \\ \lambda_2 \leq y_{P_2} + y_{P_3} \\ \lambda_3 \leq y_{P_3} + y_{P_4} \\ \lambda_4 \leq y_{P_4} \end{cases} \\
\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1 &\Leftrightarrow y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3} + y_{P_4} = 1 \\
y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} &
\end{aligned}$$

### 3.3.1.2 Caso Bidimensional

Para a função  $f(x, y)$  ilustrada nas Figuras 8 e 9, o modelo CC pode ser descrito de forma explícita pelo conjunto de equações abaixo:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{x} &\Leftrightarrow \lambda_{\mathbf{v}_1} (-2, -2) + \lambda_{\mathbf{v}_2} (-2, -1) + \dots + \lambda_{\mathbf{v}_{25}} (2, -2) = \mathbf{x} \\
\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow \lambda_{\mathbf{v}_1} 11.4074 + \lambda_{\mathbf{v}_2} 7.7569 + \dots \\
&\quad + \lambda_{\mathbf{v}_{25}} (-3.8463) = f(\mathbf{x}) \\
\lambda_{\mathbf{v}} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \lambda_{\mathbf{v}_1} \geq 0, \lambda_{\mathbf{v}_2} \geq 0, \dots, \lambda_{\mathbf{v}_{25}} \geq 0 \\
\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} = \lambda_{\mathbf{v}_1} + \lambda_{\mathbf{v}_2} + \lambda_{\mathbf{v}_3} + \dots + \lambda_{\mathbf{v}_{25}} &= 1
\end{aligned}$$

$$\lambda_{\mathbf{v}} \leq \sum_{P \in \mathcal{P}} y_P, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(P) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{\mathbf{v}_1} & \leq y_{P_1} + y_{P_8} \\ \lambda_{\mathbf{v}_2} & \leq y_{P_1} + y_{P_2} \\ \lambda_{\mathbf{v}_3} & \leq y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_7} \\ & \quad + y_{P_{10}} + y_{P_{15}} + y_{P_{16}} \\ & \quad + y_{P_9} + y_{P_8} \\ & \quad \vdots \\ \lambda_{\mathbf{v}_{25}} & \leq y_{P_{25}} + y_{P_{32}} \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3} + \dots + y_{P_{32}} = 1$$

$$y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow y_{P_1} \in \{0, 1\}, y_{P_2} \in \{0, 1\}, \dots, y_{P_{32}} \in \{0, 1\}$$

### 3.3.2 Modelo Logarítmico

O modelo de Combinação Convexa Agregada Logarítmico (Log) é baseado no modelo CC, mas utiliza um número logarítmico de variáveis binárias e restrições associadas em relação à cardinalidade do conjunto de politopos do domínio. O modelo Log associa a cada politopo  $P \in \mathcal{P}$  um vetor binário em  $\mathbf{y} \in \{0, 1\}^{\lceil \log_2 |\mathcal{P}| \rceil}$  através de uma função injetora  $B: \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}^{\lceil \log_2 |\mathcal{P}| \rceil}$  tal que  $B(P) = \mathbf{y}$ . Conforme discutido em (VIELMA; AHMED; NEMHAUSER, 2010), a função  $B$  precisa induzir uma ramificação binária em que, no último nível, as variáveis de peso  $\lambda$  associadas aos vértices de ao menos um politopo  $P \in \mathcal{P}$  sejam diferentes de zero:

$$\exists P \in \mathcal{P} \text{ tal que } \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) : \lambda_{\mathbf{v}} > 0\} \subseteq V(P) \quad (3.8)$$

Uma ramificação válida para a condição (3.8) consiste de uma seqüência de dicotomias  $\{L_t, R_t\}_{t \in \mathcal{T}}$  definidas por um conjunto finito  $\mathcal{T}$  de índices e subconjuntos correspondentes  $L_t, R_t \subset \mathcal{V}(\mathcal{P})$ , tal que, para cada  $P \in \mathcal{P}$ , é verdade que  $V(P) = \cap_{t \in \mathcal{T}} (\mathcal{V}(\mathcal{P}) \setminus T_t)$  onde  $T_t = L_t$  ou  $T_t = R_t$ , para cada  $t \in \mathcal{T}$ . Tais ramificações impõem a condição (3.8) na formulação atribuindo o valor zero a determinados  $\lambda$ 's de acordo com o ramo escolhido no nível da árvore, ou seja,  $\lambda_{\mathbf{v}_l} = 0, \forall \mathbf{v}_l \in L_t$  e  $\lambda_{\mathbf{v}_r} = 0, \forall \mathbf{v}_r \in R_t$ . A formulação que constrói um ramificação válida para o modelo Log é

dada por:

$$\text{Eqs. (3.6a)–(3.6d)} \quad (3.9a)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in L_t} \lambda_{\mathbf{v}} \leq y_t, \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.9b)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in R_t} \lambda_{\mathbf{v}} \leq (1 - y_t), \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.9c)$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \quad (3.9d)$$

Uma ramificação válida para a função ilustrativa com domínio unidimensional da Figura 7 é dada por  $L_1 = \{2\}$ ,  $R_1 = \{0, 4\}$ ,  $L_2 = \{3, 4\}$  e  $R_2 = \{0, 1\}$ , com  $\mathcal{T} = \{1, 2\}$ . O conjunto de equações que implementa as equações (3.9b)-(3.9d) da formulação acima para a ramificação apresentada é dada por:

$$\sum_{\mathbf{v} \in L_t} \lambda_{\mathbf{v}} \leq y_t, \quad \forall t \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 \leq y_1, \\ \lambda_3 + \lambda_4 \leq y_2 \end{cases}$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in R_t} \lambda_{\mathbf{v}} \leq (1 - y_t), \quad \forall t \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_4 \leq (1 - y_1), \\ \lambda_0 + \lambda_1 \leq (1 - y_2) \end{cases}$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \Leftrightarrow y_1 \in \{0, 1\}, \quad y_2 \in \{0, 1\}$$

A ramificação construída a partir da formulação apresentada acima é ilustrada na Figura 10. Para cada nível da árvore, há um ramo induzido

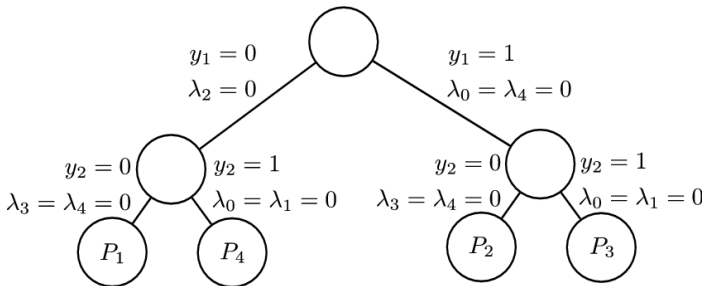


Figura 10: Uma Ramificação para o Modelo Log.

pelas variáveis binárias  $y_t$ ,  $t \in \mathcal{T}$  e, como resultado, um conjunto de variáveis de peso  $\lambda$  assumem valor zero. Por exemplo, no primeiro nível, quando  $y_1 = 0$ , é criado o ramo  $L_1 = \{2\}$  e a variável de peso  $\lambda_2$  recebe valor 0. Neste caso, apenas os poliedros  $P_1 = [0, 1]$  e  $P_4 = [3, 4]$

podem ser habilitados, pois os demais poliedros que contêm o vértice  $v_2 = 2$  possuem a variável de peso  $\lambda_2$  associada com valor nulo. No final da ramificação, cada folha da árvore possui apenas um poliedro habilitado, o qual possui as variáveis de peso  $\lambda$  que não foram zeradas. O domínio da função é composto pela união dos poliedros habilitados nas folhas da ramificação. Note que o modelo Log assegura que a ramificação seja independente, ou seja, que cada nível da árvore possua os ramos da esquerda e direita independentes dos níveis superiores. Mais especificamente, independente de quais variáveis são ramificadas primeiramente, os ramos das subárvores da esquerda e direita não serão alterados, conforme pode ser visto na Figura 10.

Vielma e Nemhauser (2009) desenvolveram uma formulação que constrói uma ramificação válida com um número logarítmico de variáveis binárias e dicotomias em relação à cardinalidade do conjunto de politopos. Tal ramificação é válida para uma família de politopos  $\mathcal{P}$  que seja topologicamente equivalente ou compatível com a triangulação J1. Esta ramificação é baseada em um procedimento de duas fases. A seguir, alguns conceitos são introduzidos com o objetivo de se modelar tal ramificação.

Seja  $\mathcal{E}^d$  o conjunto de eixos do domínio com dimensão  $d$  da função. Seja  $S_e = \{s_0, \dots, s_n\}$  o conjunto de *breakpoints*, ou seja, dos valores de cada coordenada, e  $\mathcal{I}_e := \{[s_0, s_1], \dots, [s_{n-1}, s_n]\}$  o conjunto de intervalos contidos no eixo  $e \in \mathcal{E}^d$ . O conjunto dos vértices do domínio é definido como  $\mathcal{V}(\mathcal{P}) = S_{e_1} \times \dots \times S_{e_d}$ , onde  $e_1, \dots, e_d$  são os eixos do domínio pertencentes ao conjunto  $\mathcal{E}^d$ . Seja  $\mathcal{I}_e(s) := \{\mathcal{I} \in \mathcal{I}_e : s \in \mathcal{I}\}$  o conjunto de intervalos que contêm o *breakpoint*  $s$ . Seja  $\Xi_e([s_i, s_{i+1}]) = i + 1$  o índice do intervalo  $\mathcal{I} = [s_i, s_{i+1}] \in \mathcal{I}_e$ . Seja  $B : \{1, \dots, |\mathcal{I}_e|\} \rightarrow \{0, 1\}^{\lceil \log_2(|\mathcal{I}_e|) \rceil}$  uma função compatível com SOS2, ou seja,  $B(i)$  e  $B(i+1)$  diferem em apenas um *bit*, tendo como resultado um código binário. Existem diversos conjuntos de vetores binários com esta propriedade e estes são geralmente denominados *Gray Codes* (WILF, 1989).

A primeira fase da ramificação consiste em usar uma disjunção de conjuntos para limitar a combinação convexa dos vértices do domínio a um hipercubo. A formulação correspondente à primeira fase usará os conjuntos

$$J_{e,B,l}^+ := \{s \in S_e : B(\Xi_e(\mathcal{I}))_l = 1, \forall \mathcal{I} \in \mathcal{I}_e(s)\}$$

$$J_{e,B,l}^0 := \{s \in S_e : B(\Xi_e(\mathcal{I}))_l = 0, \forall \mathcal{I} \in \mathcal{I}_e(s)\}$$

que constroem a primeira parte da ramificação do Log. O *breakpoint*  $s$  no eixo  $e$  pertence ao conjunto  $J_{e,B,l}^+$  se todos os intervalos que contêm

o *breakpoint*  $s$  têm na posição  $l$  do seu respectivo código binário o valor 1. O conjunto  $J_{e,B,l}^0$  é semelhante, porém os intervalos que contêm o *breakpoint* têm na posição  $l$  do seu código binário o valor 0.

Seja  $[0, w]^2 \subseteq \mathcal{R}^2$  o domínio da função para a dimensão  $d = 2$ . Neste caso, o conjunto de eixos  $\mathcal{E}^2 = \{x, y\}$ . As equações a seguir modelam a primeira fase da ramificação do Log:

$$\sum_{v_2=0}^w \sum_{v_1 \in J_{e,B,l}^+} \lambda_{v_1, v_2} \leq z_l^e, \forall e \in \mathcal{E}^d, \forall l \in \{1, \dots, \lceil \log_2(|w|) \rceil\} \quad (3.10a)$$

$$\sum_{v_2=0}^w \sum_{v_1 \in J_{e,B,l}^0} \lambda_{v_1, v_2} \leq 1 - z_l^e, \forall e \in \mathcal{E}^d, \forall l \in \{1, \dots, \lceil \log_2(|w|) \rceil\} \quad (3.10b)$$

$$z_l^e \in \{0, 1\}, \forall e \in \mathcal{E}^d, \forall l \in \{1, \dots, \lceil \log_2(|w|) \rceil\}, \quad (3.10c)$$

A segunda fase seleciona um simplex dentro do hipercubo inibindo alguns vértices ainda habilitados depois da primeira fase da ramificação. Para esta fase, alguns novos conceitos são introduzidos.

Seja  $\mathbf{v}_j$  o valor da posição  $j$  do vetor  $\mathbf{v}$ .  $\mathcal{L}_{r,s}$  é o conjunto dos vértices que têm valor par na posição  $r$  e ímpar na posição  $s$  do vetor  $\mathbf{v}$ , sendo definido como  $\mathcal{L}_{r,s} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) : \mathbf{v}_r \text{ é par e } \mathbf{v}_s \text{ é ímpar}\}$ .  $\mathcal{R}_{r,s}$  é o conjunto dos vértices que têm valor ímpar na posição  $r$  e par na posição  $s$  do vetor  $\mathbf{v}$ , sendo definido como  $\mathcal{R}_{r,s} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) : \mathbf{v}_r \text{ é ímpar e } \mathbf{v}_s \text{ é par}\}$ . As posições  $r$  e  $s$  pertencem ao conjunto  $\mathcal{D} = \{1, \dots, d\}$ , onde  $d$  é a dimensão do domínio da função. O conjunto de equações a seguir implementam a segunda fase da ramificação do modelo Log:

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}_{r,s}} \lambda_{\mathbf{v}} \leq y_{r,s}, \forall r, s \in \mathcal{D} : r < s \quad (3.11a)$$

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{R}_{r,s}} \lambda_{\mathbf{v}} \leq 1 - y_{r,s}, \forall r, s \in \mathcal{D} : r < s \quad (3.11b)$$

### 3.3.2.1 Caso Unidimensional

Nesta seção, a formulação explícita do modelo Log para a função linear por partes unidimensional ilustrada na Figura 7 é apresentada. Seja a função  $B$  definida de acordo com a propriedade *Gray Code* como segue  $B(P_1) = (0, 0)$ ,  $B(P_2) = (0, 1)$ ,  $B(P_3) = (1, 1)$  e  $B(P_4) = (1, 0)$ . Os conjuntos que criam uma ramificação nas variáveis de peso  $\lambda$  são defi-

tidos a seguir:

$$\begin{aligned} J_{(x,B,1)}^+ &= \{2\}, J_{(x,B,2)}^+ = \{3,4\} \\ J_{(x,B,1)}^0 &= \{0,4\}, J_{(x,B,2)}^0 = \{0,1\} \end{aligned}$$

As primeiras equações do modelo Log são equivalentes às equações (3.6a)-(3.6d) do modelo CC. Por isto, serão apresentadas abaixo apenas as demais equações do modelo:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in J_{x,B,l}^+} \lambda_v \leq z_l^x, \forall l \in L(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 \leq z_1^x \\ \lambda_3 + \lambda_4 \leq z_2^x \end{cases} \\ \sum_{v \in J_{x,B,l}^0} \lambda_v \leq (1 - z_l^x), \forall l \in L(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_4 \leq (1 - z_1^x) \\ \lambda_0 + \lambda_1 \leq (1 - z_2^x) \end{cases} \\ z_l^x \in \{0,1\}, \forall l \in L(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow z_1^x \in \{0,1\}, z_2^x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

### 3.3.2.2 Caso Bidimensional

Nesta seção, será apresentada uma formulação explícita para a função bidimensional ilustrada na Figura 8, cujo domínio está representado na Figura 9, usando o modelo Log. Para a dimensão do espaço  $d = 2$ , seja  $\mathcal{D} = \{1, \dots, d\}$  um conjunto de índices e  $J = [-2, \dots, 2]^2$  o conjunto de vértices que compõem a triangulação J1. Seja  $B: \mathcal{I} \rightarrow \{0,1\}^{\lceil \log_2 |\mathcal{I}| \rceil}$  uma função injetora seguindo a propriedade *Gray code*,  $B([-2, -1]) = (0,0)$ ,  $B([-1, 0]) = (0,1)$ ,  $B([0, 1]) = (1,1)$ ,  $B([1, 2]) = (1,0)$ , onde  $\mathcal{I} = \{[-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2]\}$  é o conjunto de intervalos. Note que os intervalos pertencentes  $\mathcal{I}$  são da forma  $[s_i, s_{i+1}]$  para  $s_i \in S \setminus \{s_n\}$ , onde  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  é o conjunto de *breakpoints*.

Seja  $J^+(a, B, l) \subseteq S_a$  o conjunto do *breakpoints* do eixo  $a$  ( $x$  ou  $y$ ) tal que, para cada  $s \in S_a$ , os intervalos  $I \in \mathcal{I}(s)$ , aos quais  $s$  pertence, possuem valor 1 na posição  $l$  dos seus códigos binários  $B(I)$ . A definição do conjunto  $J^0(a, B, l)$  é similar a  $J^+(e, B, l)$ , exceto para os códigos binários dos polítopos que contêm um determinado *breakpoint*  $s$  devem ter valor 0 na posição  $l$ , ao invés de 1. Como os conjuntos de *breakpoints* para os eixos  $x$  e  $y$  para a função bidimensional ilustrativa são idênticos, os conjuntos de vértices  $J^+$  e  $J^0$  são os mesmos para ambos os eixos. Para a função ilustrativa bidimensional, conjuntos  $J^+(e, B, l)$  e  $J^0(e, B, l)$



são definidos como segue:

$$\begin{aligned}
 J^+(x, B, 1) &= J^+(y, B, 1) = \{0\} \\
 J^0(x, B, 1) &= J^0(y, B, 1) = \{-2, 2\} \\
 J^+(x, B, 2) &= J^+(y, B, 2) = \{1, 2\} \\
 J^0(x, B, 2) &= J^0(y, B, 2) = \{-2, -1\}
 \end{aligned}$$

A primeira fase do Log consistirá em selecionar um quadrado dentro do domínio da função. Este esquema de ramificação usa duas variáveis binárias para cada eixo para codificar os intervalos:  $(z_2^x, z_1^x)$  codifica os quatro intervalos do eixo x, enquanto  $(z_2^y, z_1^y)$  codifica os do eixo y, onde  $z_l^a$  é a variável binária para uma posição  $l$  do código para o eixo  $a$ . A primeira fase do Log para a função ilustrativa com domínio bidimensional é formulada com as seguintes equações:

$$\sum_{s_1=-2}^2 \sum_{s_2 \in J^+(y, B, 2)} \lambda_{s_1, s_2} \leq z_2^y \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-2,1} + \lambda_{-1,1} + \lambda_{0,1} + \lambda_{1,1} \\ + \lambda_{2,1} + \lambda_{-2,2} + \lambda_{-1,2} + \lambda_{0,2} \\ + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,2} \leq z_2^y \end{cases}$$

$$\sum_{s_2=-2}^2 \sum_{s_1 \in J^+(x, B, 2)} \lambda_{s_1, s_2} \leq z_2^x \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{1,-2} + \lambda_{1,-1} + \lambda_{1,0} + \lambda_{1,1} \\ + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,-2} + \lambda_{2,-1} \\ + \lambda_{2,0} + \lambda_{2,1} + \lambda_{2,2} \leq z_2^x \end{cases}$$

$$\sum_{s_1=-2}^2 \sum_{s_2 \in J^+(y, B, 1)} \lambda_{s_1, s_2} \leq z_1^y \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-2,0} + \lambda_{-1,0} + \lambda_{0,0} \\ + \lambda_{1,0} + \lambda_{2,0} \leq z_1^y \end{cases}$$

$$\sum_{s_2=-2}^2 \sum_{s_1 \in J^+(x, B, 1)} \lambda_{s_1, s_2} \leq z_1^x \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{0,-2} + \lambda_{0,-1} + \lambda_{0,0} \\ + \lambda_{0,1} + \lambda_{0,2} \leq z_1^x \end{cases}$$

$$\sum_{s_2=-2}^2 \sum_{s_1 \in J^0(x,B,1)} \lambda_{s_1,s_2} \leq (1 - z_1^x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-2,-2} + \lambda_{-2,-1} + \lambda_{-2,0} \\ + \lambda_{-2,1} + \lambda_{-2,2} + \lambda_{2,-2} \\ + \lambda_{2,-1} + \lambda_{2,0} + \lambda_{2,1} \\ + \lambda_{2,2} \leq (1 - z_1^x) \end{cases}$$

$$\sum_{s_2=-2}^2 \sum_{s_1 \in J^0(x,B,2)} \lambda_{s_1,s_2} \leq (1 - z_2^x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-2,-2} + \lambda_{-2,-1} + \lambda_{-2,0} \\ + \lambda_{-2,1} + \lambda_{-2,2} + \lambda_{-1,-2} \\ + \lambda_{-1,-1} + \lambda_{-1,0} + \lambda_{-1,1} \\ + \lambda_{-1,2} \leq (1 - z_2^x) \end{cases}$$

$$\sum_{s_1=-2}^2 \sum_{s_2 \in J^0(y,B,1)} \lambda_{s_1,s_2} \leq (1 - z_1^y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-2,-2} + \lambda_{-1,-2} + \lambda_{0,-2} \\ + \lambda_{1,-2} + \lambda_{2,-2} + \lambda_{-2,2} \\ + \lambda_{-2,2} + \lambda_{-1,2} + \lambda_{0,2} \\ + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,2} \leq (1 - z_1^y) \end{cases}$$

$$\sum_{s_1=-2}^2 \sum_{s_2 \in J^0(y,B,2)} \lambda_{s_1,s_2} \leq (1 - z_2^y) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-2,-2} + \lambda_{-1,-2} + \lambda_{0,-2} \\ + \lambda_{1,-2} + \lambda_{2,-2} + \lambda_{-2,-1} \\ + \lambda_{-1,-1} + \lambda_{0,-1} + \lambda_{1,-1} \\ + \lambda_{2,-1} \leq (1 - z_2^y) \end{cases}$$

$$z_1^x \in \{0, 1\}, z_2^x \in \{0, 1\}, z_1^y \in \{0, 1\}, z_2^y \in \{0, 1\}$$

Para o exemplo ilustrativo, quando  $(z_2^x, z_1^x) = (0, 1)$  e  $(z_2^y, z_1^y) = (0, 1)$ , o polítopo quadrado  $[-1, 0] \times [-1, 0]$  é selecionado.

A segunda fase da ramificação seleciona um triângulo dentro do quadrado escolhido na primeira fase da ramificação. Os conjuntos de

equações definidos a seguir modelam a seleção do triângulo:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \{(s_1, s_2) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} : s_1 < s_2\} = \{(1, 2)\} \\ \mathcal{L}_{s_1, s_2} &= \{\mathbf{v} \in J : \mathbf{v}_{s_1} \text{ é par, } \mathbf{v}_{s_2} \text{ é ímpar}\}, \forall (s_1, s_2) \in \mathcal{J} \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}_{1,2} &= \{(-2, -1), (-2, 1), (0, -1), (0, 1), (2, -1), (2, 1)\} \\ \mathcal{R}_{s_1, s_2} &= \{\mathbf{v} \in J : \mathbf{v}_{s_1} \text{ é ímpar, } \mathbf{v}_{s_2} \text{ é par}\}, \forall (s_1, s_2) \in \mathcal{J} \Leftrightarrow \\ \mathcal{R}_{1,2} &= \{(-1, -2), (-1, 0), (-1, 2), (1, -2), (1, 0), (1, 2)\} \\ \sum_{(s_1, s_2) \in \mathcal{L}_{s_1, s_2}} \lambda_{s_1, s_2} \leq y_{s_1, s_2} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-2, -1} + \lambda_{-2, 1} + \lambda_{0, -1} \\ + \lambda_{0, 1} + \lambda_{2, -1} + \lambda_{2, 1} \leq y_{1,2} \end{cases} \\ \sum_{(s_1, s_2) \in \mathcal{R}_{s_1, s_2}} \lambda_{s_1, s_2} \leq 1 - y_{s_1, s_2} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-1, -2} + \lambda_{-1, 0} + \lambda_{-1, 2} \\ + \lambda_{1, -2} + \lambda_{1, 0} + \lambda_{1, 2} \leq (1 - y_{1,2}) \end{cases} \\ y_{1,2} &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

### 3.4 MODELO MÚLTIPLA ESCOLHA

O modelo Múltipla Escolha (MC) aproxima a função original com equações de hiperplanos. O domínio é dividido em um conjunto de politopos, que são limitados por um conjunto de inequações lineares. O modelo MC é dado por:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{x}_P = \mathbf{x} \quad (3.14a)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} (\mathbf{m}_P \mathbf{x}_P + c_P y_P) = f(\mathbf{x}) \quad (3.14b)$$

$$A_P \mathbf{x}_P \leq \mathbf{b}_P y_P, \forall P \in \mathcal{P} \quad (3.14c)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1, y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \quad (3.14d)$$

onde  $A_P \mathbf{x}_P \leq \mathbf{b}_P$  é o conjunto de inequações lineares que descrevem  $P$ . O modelo MC representa um ponto do domínio como um vetor, denotado por  $\mathbf{x}_P$ , para cada politopo da família. A equação (3.14a) representa um ponto do domínio, enquanto a Equação (3.14b) aproxima a função original para cada politopo  $P$  com a equação de um hiperplano  $\mathbf{m}_P \mathbf{x}_P + c_P$ . A Equação (3.14c) e as variáveis binárias  $y_P$  garantem que um ponto do domínio pertença a apenas um politopo. Esta formulação foi estudada em (BALAKRISHNAN; GRAVES, 1989), (CROXTON; GENDRON; MAGNANTI, 2003) e (JEROSLOW; LOWE, 1984).

### 3.4.1 Caso Unidimensional

Para a função unidimensional ilustrada na Figura 7, a formulação explícita MC é apresentada a seguir:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} x_P = x \Leftrightarrow x_{P_1} + x_{P_2} + x_{P_3} + x_{P_4} = x$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} (m_P x_P + c_P y_P) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} (20x_{P_1} + 8y_{P_1}) + (-14x_{P_2} + 42y_{P_2}) + \\ (11x_{P_3} - 8y_{P_3}) + (-4x_{P_4} + 37y_{P_4}) = f(x) \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_P x_P \leq \mathbf{b}_P y_P, \forall P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_{P_1} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_{P_1}, \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_{P_2} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} y_{P_2}, \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_{P_3} \leq \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} y_{P_3}, \\ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_{P_4} \leq \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} y_{P_4} \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1 \Leftrightarrow y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3} + y_{P_4} = 1$$

$$y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow y_{P_1} \in \{0, 1\}, y_{P_2} \in \{0, 1\}, y_{P_3} \in \{0, 1\}, y_{P_4} \in \{0, 1\}$$

### 3.4.2 Caso Bidimensional

Para a função bidimensional ilustrada na Figura 8, a formulação explícita MC é apresentada a seguir:

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} \mathbf{x}_P = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x}_{P_1} + \mathbf{x}_{P_2} + \cdots + \mathbf{x}_{P_{32}} = \mathbf{x}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} (\mathbf{m}_P \mathbf{x}_P + c_P y_P) = f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} [2.3496 & -8.6708] \mathbf{x}_{P_1} - 1.235 y_{P_1} \\ + [2.3496 & -5.7187] \mathbf{x}_{P_2} + 1.7175 y_{P_2} \\ + \cdots + \\ [-4.3496 & -4.6708] \mathbf{x}_{P_{32}} + 2.765 y_{P_{32}} \\ = f(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_P \mathbf{x}_P \leq \mathbf{b}_P y_P, \forall P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{P_1} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} y_{P_1}, \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{P_2} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} y_{P_2}, \\ \\ \vdots \\ \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{P_{32}} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} y_{P_{32}} \end{cases}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}} y_P = 1 \Leftrightarrow y_{P_1} + y_{P_2} + \cdots + y_{P_{32}} = 1$$

$$y_P \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow y_{P_1} \in \{0, 1\}, y_{P_2} \in \{0, 1\}, \dots, y_{P_{32}} \in \{0, 1\}$$

### 3.5 MODELO INCREMENTAL

O modelo Incremental (Inc) aproxima a função original incrementalmente a partir de um conjunto ordenado de vértices divididos em polítopos no domínio da função. Este modelo requer que o conjunto de polítopos  $\mathcal{P}$  seja uma triangulação com uma propriedade especial de ordenação.

#### 3.5.1 Caso Unidimensional

Para o caso unidimensional, a propriedade de ordenação é sempre satisfeita, pois há uma ordem natural entre os vértices no domínio da função. Por simplicidade, apresentaremos abaixo a formulação para uma função uni-variada  $f : [l, u] \rightarrow \mathbb{R}$  e para  $\mathcal{P} = \{[d_{k-1}, d_k]\}_{k=1}^K$ , onde  $l = d_0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_K = u$ . Nestas condições, o modelo incremental tem a forma:

$$d_0 + \sum_{k=1}^K \delta_k (d_k - d_{k-1}) = x \quad (3.15a)$$

$$f(d_0) + \sum_{k=1}^K \delta_k (f(d_k) - f(d_{k-1})) = f(x) \quad (3.15b)$$

$$\delta_1 \leq 1, \delta_K \geq 0 \quad (3.15c)$$

$$\delta_{k+1} \leq y_k \leq \delta_k, y_k \in \{0, 1\}, \forall k \in \{1, \dots, K-1\} \quad (3.15d)$$

A equação (3.15a) representa o deslocamento de um ponto  $x$  do domínio para um determinado polítopo  $P \in \mathcal{P}$  de acordo com a ordenação dos vértices. O mesmo acontece com a função, conforme representado na equação (3.15b). As restrições (3.15c)–(3.15d) garantem que um ponto do domínio pertença à apenas um polítopo. Quando  $x$  está no polítopo  $[d_{k-1}, d_k]$ , então  $\{\delta_j\}_{j=1}^{k-1}$  assumem valor 1,  $\delta_k$  assume um valor no intervalo  $[0, 1]$  e  $\{\delta_j\}_{j=k+1}^K$  assumem valor 0.

Para o exemplo ilustrativo unidimensional apresentado na Figura 7, temos que  $K = 4$  e  $d_0 = 0, d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3$  e  $d_4 = 4$ . Assim,  $\mathcal{P} = \{[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4]\}$ , com  $l = 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 = u$ . A formulação Inc explícita para a função ilustrativa com domínio unidimensional é

dada por:

$$\begin{aligned}
 d_0 + \sum_{k=1}^K \delta_k (d_k - d_{k-1}) = x &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 + \delta_1(1-0) + \delta_2(2-1) \\ + \delta_3(3-2) + \delta_4(4-3) = x \end{cases} \\
 f(d_0) + \sum_{k=1}^K \delta_k (f(d_k) - f(d_{k-1})) = f(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} 8 + \delta_1(28-8) + \delta_2(14-28) \\ + \delta_3(25-14) + \delta_4(21-25) \\ = f(x) \end{cases} \\
 \delta_1 \leq 1, \delta_K \geq 0 &\Leftrightarrow \delta_4 \geq 0 \\
 \delta_{k+1} \leq y_k \leq \delta_k, \forall k \in \{1, \dots, K-1\} &\Leftrightarrow \begin{cases} \delta_2 \leq y_1 \leq \delta_1 \\ \delta_3 \leq y_2 \leq \delta_2 \\ \delta_4 \leq y_3 \leq \delta_3 \end{cases} \\
 y_k \in \{0, 1\}, \forall k \in \{1, \dots, K-1\} &\Leftrightarrow y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\}, y_3 \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

### 3.5.2 Caso Multidimensional (Bidimensional)

A extensão do modelo incremental para funções multivariadas requer que a família de politopos  $\mathcal{P}$  seja uma triangulação  $\mathcal{T}$  que obedeça as seguintes propriedades de ordenação:

- O1** Os simplexes em  $\mathcal{T}$  devem estar ordenados segundo  $T_1, \dots, T_{|\mathcal{T}|}$  tal que  $T_i \cap T_{i+1} \neq \emptyset$  para  $i \in \{1, \dots, |\mathcal{T}| - 1\}$ .
- O2** Os vértices de cada simplex  $T_i$  devem possuir uma ordenação  $v_i^0, \dots, v_i^{|V(T_i)|-1}$  tal que  $v_i^{|V(T_i)|-1} = v_{i+1}^0$  para  $i \in \{1, \dots, |\mathcal{T}| - 1\}$ .

Para uma definição formal de um simplex consultar o Apêndice A.1. A propriedade O1 garante que haja uma ordenação entre os simplexes do domínio. A propriedade O2 significa que o último vértice de um simplex deve coincidir com o primeiro vértice do simplex seguinte. Isto garante uma ordenação total de todos os vértices do domínio.

Tais propriedades de ordenação são condições necessárias para representar um ponto do gráfico  $\mathcal{G} = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \text{dom}(f)\}$  de forma incremental como ocorre em (3.15a) para o caso uni-variado. Lee e Wilson (2001) mostraram que tais condições são satisfeitas por diversas triangulações, inclusive pela triangulação  $J_1$ . Para uma triangulação que obedeça as propriedades de ordenação O1–O2, a formulação Inc é

dada por:

$$\mathbf{v}_1^0 + \sum_{i=1}^{|\mathcal{T}||V(T_i)|-1} \sum_{j=1}^{|V(T_i)|-1} \delta_i^j (\mathbf{v}_i^j - \mathbf{v}_i^0) = \mathbf{x} \quad (3.16a)$$

$$f(\mathbf{v}_1^0) + \sum_{i=1}^{|\mathcal{T}||V(T_i)|-1} \sum_{j=1}^{|V(T_i)|-1} \delta_i^j (f(\mathbf{v}_i^j) - f(\mathbf{v}_i^0)) = f(\mathbf{x}) \quad (3.16b)$$

$$\sum_{j=1}^{|V(T_i)|-1} \delta_i^j \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{T}\} \quad (3.16c)$$

$$\delta_i^j \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{T}\}, \forall j \in \{1, \dots, |V(T_i)| - 1\} \quad (3.16d)$$

$$y_i \leq \delta_i^{|V(T_i)|-1}, \forall i \in \{1, \dots, |\mathcal{T}| - 1\} \quad (3.16e)$$

$$\sum_{j=1}^{|V(T_{i+1})|-1} \delta_{i+1}^j \leq y_i, \forall i \in \{1, \dots, |\mathcal{T}| - 1\} \quad (3.16f)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, |\mathcal{T}| - 1\} \quad (3.16g)$$

Este modelo foi estudado em (DANTZIG, 1960; JEROSLOW; LOWE, 1985; KEHA; FARIAS JR; NEMHAUSER, 2004; LEE; WILSON, 2001; PADBERG, 2000), referenciado por método delta. Mais recentemente, este passou a ser denominado modelo incremental em (VIELMA; AHMED; NEMHAUSER, 2010; CROXTON; GENDRON; MAGNANTI, 2003; KEHA; FARIAS JR; NEMHAUSER, 2004). A formulação explícita do modelo Inc para a função com domínio bidimensional ilustrado na Figura 9 é dada pelo conjunto de equações:

$$\mathbf{v}_1^0 + \sum_{i=1}^{|\mathcal{T}||V(T_i)|-1} \sum_{j=1}^{|V(T_i)|-1} \delta_i^j (\mathbf{v}_i^j - \mathbf{v}_i^0) = \mathbf{x} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -2 \end{array} \right] + \delta_1^1 \left( \left[ \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -2 \end{array} \right] \right) \\ + \delta_1^2 \left( \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -2 \end{array} \right] \right) \\ + \delta_2^1 \left( \left[ \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right] \right) \\ + \delta_2^2 \left( \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -0 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} -2 \\ -1 \end{array} \right] \right) + \dots \\ + \delta_{32}^1 \left( \left[ \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right] \right) \\ + \delta_{32}^2 \left( \left[ \begin{array}{c} 2 \\ -2 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right] \right) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right]$$



$$\begin{aligned}
& f(\mathbf{v}_1^0) + \sum_{i=1}^{|\mathcal{T}|-1} \sum_{j=1}^{|V(T_i)|-1} \delta_i^j \left( f(\mathbf{v}_i^j) - f(\mathbf{v}_i^0) \right) = f(\mathbf{x}) \\
& \quad \Updownarrow \\
& \left\{ \begin{array}{l} 11.4074 + \delta_1^1(5.0862 - 11.4074) + \delta_1^2(2.7366 - 11.4074) \\ + \delta_2^1(5.0862 - 2.7366) + \delta_2^2(-2.9817 - 2.7366) + \dots + \\ \delta_{32}^1(-1.2634 - 3.0862) + \delta_{32}^2(3.4074 - 3.0862) = f(\mathbf{x}) \end{array} \right. \\
& \sum_{j=1}^{V(T_i)-1} \delta_i^j \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{T}\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta_1^1 + \delta_1^2 \leq 1 \\ \delta_2^1 + \delta_2^2 \leq 1 \\ \vdots \\ \delta_{32}^1 + \delta_{32}^2 \leq 1 \end{array} \right. \\
& \delta_i^j \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, \mathcal{T}\}, \forall j \in \{1, \dots, |V(T_i)| - 1\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta_1^1 \geq 0, \delta_1^2 \geq 0 \\ \delta_2^1 \geq 0, \delta_2^2 \geq 0 \\ \vdots \\ \delta_{32}^1 \geq 0, \delta_{32}^2 \geq 0 \end{array} \right. \\
& y_i \leq \delta_i^{|V(T_i)|-1}, \forall i \in \{1, \dots, |\mathcal{T}| - 1\} \Leftrightarrow y_1 \leq \delta_1^2, y_2 \leq \delta_2^2, \dots, y_{31} \leq \delta_{31}^2 \\
& \sum_{j=1}^{|V(T_{i+1})|-1} \delta_{i+1}^j \leq y_i, \forall i \in \{1, \dots, |\mathcal{T}| - 1\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \delta_2^1 + \delta_2^2 \leq y_1, \\ \delta_3^1 + \delta_3^2 \leq y_2, \\ \vdots \\ \delta_{32}^1 + \delta_{32}^2 \leq y_{31} \end{array} \right. \\
& y_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, |\mathcal{T}| - 1\} \Leftrightarrow y_1 \in \{0, 1\}, y_2 \in \{0, 1\}, \dots, y_{31} \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

### 3.6 MODELO SOS2

Em um trabalho pioneiro, Beale e Tomlin (1970) propuseram uma representação de funções lineares por partes usando variáveis de peso  $\lambda$ 's associadas aos vértices no domínio da função para realizar a combinação convexa, restringindo tais variáveis tal que no máximo duas variáveis  $\lambda$  são diferentes de 0 e consecutivas em um procedimento *branch-and-bound*. Este tipo de restrição é denominada restrição com conjunto de variáveis especialmente ordenado do tipo II (SOS2), ou simplesmente restrições SOS2. Atualmente, alguns *solvers* de propósito geral, a exemplo do CPLEX, dão suporte a restrições SOS2.

Camponogara, Nazari e Meneses (2012) apresentaram um exemplo que ilustra como uma restrição SOS2 é tratada em uma ramificação em um procedimento *branch-and-bound*. Suponha que  $\{\lambda_j^0, \dots, \lambda_j^{k(j)}\}$

são SOS2 e seja  $\{\tilde{\lambda}_j^0, \tilde{\lambda}_j^1, \dots, \tilde{\lambda}_j^{k(j)}\}$  a solução da relaxação do problema, onde apenas  $\tilde{\lambda}^{k_1}, \tilde{\lambda}^{k_2} > 0$  para  $k_1, k_2 \in \{0, \dots, k(j)\}$ ,  $k_1 < k_2$  e  $k_2 - k_1 \geq 2$ . Esta violação de restrições SOS2 pode ser incorporada ao *branch-and-bound* introduzindo as restrições  $\lambda_j^0 = \dots = \lambda_j^{k_1} = 0$  em um lado da ramificação, e  $\lambda_j^{k_1+2} = \dots = \lambda_j^{k(j)} = 0$  do outro lado.

### 3.6.1 Caso Unidimensional

A formulação SOS2 para a função ilustrativa unidimensional é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_v v &= x \Leftrightarrow \lambda_0 0 + \lambda_1 1 + \lambda_2 2 + \lambda_3 3 + \lambda_4 4 = x \\ \sum_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_v f(v) &= f(x) \Leftrightarrow \lambda_0 8 + \lambda_1 28 + \lambda_2 14 + \lambda_3 25 + \lambda_4 21 = f(x) \\ \lambda_v &\geq 0, \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0 \\ \sum_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_v &= 1 \Leftrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ (\lambda_v)_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} &\text{ são SOS2} \Leftrightarrow (\lambda_v)_{v \in \{0,1,2,3,4\}} \text{ são SOS2} \end{aligned}$$

Para a função ilustrativa da Figura 7, cada vértice  $v \in \mathcal{V} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  do domínio possui uma variável de peso associada  $\lambda_v$  para realizar a combinação convexa. As variáveis  $\{\lambda_v\}_{v \in \mathcal{V}}$  compõem uma restrição SOS2. Neste caso, no máximo duas variáveis  $\lambda_v$ , com  $v \in \mathcal{V}$ , são diferentes de 0 e consecutivas ao longo da busca *branch-and-bound*. Por exemplo, quando o politopo  $P_1 = [0, 1]$  estiver habilitado, apenas  $\lambda_0$  e  $\lambda_1$  podem ser diferentes de 0.

### 3.6.2 Caso Multidimensional

Beale (1980) mostrou como estender restrições SOS2 para funções lineares por partes multidimensionais usando cadeias ligadas de restrições SOS2. Esta ideia será apresentada para a função com domínio bidimensional ilustrada na Figura 8.

Seja  $X = \{-2, -1, \dots, 2\}$  e  $Y = \{-2, -1, \dots, 2\}$  os conjuntos de *breakpoints* do eixo x e y, respectivamente. O domínio da função bidimensional é particionado em uma grade  $\mathcal{G} = X \times Y$  e, a cada vértice  $\mathbf{v}$  desta grade, é associada uma variável de peso  $\lambda_{\mathbf{v}}$ . A Figura 11 ilustra a grade

$\mathcal{G}$ , onde  $\lambda_{v_1, v_2}$  com  $(v_1, v_2) \in \mathcal{G}$  representa a variável de peso associada ao vértice  $(v_1, v_2)$  da grade.

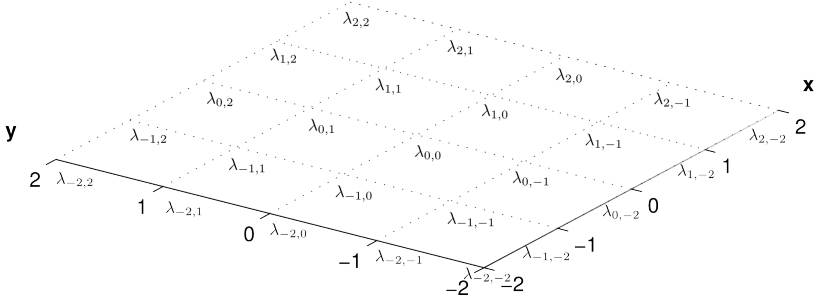


Figura 11: Domínio Bidimensional da Função Ilustrativa Particionado em uma Grade

A função original ilustrada na Figura 8 pode ser aproximada por meio do modelo SOS2, com o seguinte conjunto de equações:

$$\mathbf{x} = \sum_{(v_1, v_2) \in \mathcal{G}} \lambda_{v_1, v_2} (v_1, v_2) \quad (3.17a)$$

$$\tilde{f} = \sum_{(v_1, v_2) \in \mathcal{G}} \lambda_{v_1, v_2} f(v_1, v_2) \quad (3.17b)$$

$$\sum_{(v_1, v_2) \in \mathcal{G}} \lambda_{v_1, v_2} = 1 \quad (3.17c)$$

Além disto, é necessário impor as seguintes restrições nas variáveis  $\lambda$ :

$$\xi_{v_1} = \sum_{v_2 \in Y} \lambda_{v_1, v_2}, \forall v_1 \in X \quad (3.17d)$$

$$\eta_{v_2} = \sum_{v_1 \in X} \lambda_{v_1, v_2}, \forall v_2 \in Y \quad (3.17e)$$

$$(\xi_{v_1})_X \text{ são SOS2} \quad (3.17f)$$

$$(\eta_{v_2})_Y \text{ são SOS2} \quad (3.17g)$$

A restrição SOS2 nos  $\xi$ 's assegura que somente os  $\lambda$ 's correspondentes a vértices contidos em duas colunas vizinhas sejam diferentes de zero. De forma similar, a restrição SOS2 imposta nas variáveis  $\eta$  assegura que apenas os  $\lambda$ 's correspondentes dois vértices contidos em linhas vizinhas sejam diferentes de zero. O conjunto de equações a seguir aproxima a

função original com o modelo SOS2:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{x} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-2,-2}(-2,-2) + \lambda_{-2,-1}(-2,-1) + \dots \\ + \lambda_{2,-2}(2,-2) = \mathbf{x} \end{cases} \\
\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{-2,-2} 11.4074 + \lambda_{-2,-1} 7.7569 \\ + \dots + \lambda_{2,-2}(-3.8463) = f(\mathbf{x}) \end{cases} \\
\lambda_{\mathbf{v}} \geq 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \lambda_{-2,-2} \geq 0, \lambda_{-2,-1} \geq 0, \dots, \lambda_{2,-2} \geq 0 \\
\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P})} \lambda_{\mathbf{v}} = \lambda_{-2,-2} + \lambda_{-2,-1} + \dots + \lambda_{2,-2} &= 1 \\
\xi_x = \sum_{y \in Y} \lambda_{x,y}, \forall x \in X &\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_{-2} = \lambda_{-2,-2} + \lambda_{-2,-1} + \dots + \lambda_{-2,2} \\ \xi_{-1} = \lambda_{-1,-2} + \lambda_{-1,-1} + \dots + \lambda_{-1,2} \\ \vdots \\ \xi_2 = \lambda_{2,-2} + \lambda_{2,-1} + \dots + \lambda_{2,2} \end{cases} \\
\eta_y = \sum_{x \in X} \lambda_{x,y}, \forall y \in Y &\Leftrightarrow \begin{cases} \eta_{-2} = \lambda_{-2,-2} + \lambda_{-1,-2} + \dots + \lambda_{2,-2} \\ \eta_{-1} = \lambda_{-2,-1} + \lambda_{-1,-1} + \dots + \lambda_{2,-1} \\ \vdots \\ \eta_2 = \lambda_{-2,2} + \lambda_{-1,2} + \dots + \lambda_{2,2} \end{cases} \\
&(\xi_x)_X \text{ são SOS2} \\
&(\eta_y)_Y \text{ são SOS2}
\end{aligned}$$

Note que, para o exemplo ilustrativo com domínio bidimensional, o mínimo da função é encontrado quando  $\lambda_{-2,2} = 1$  e os demais  $\lambda$ 's assumem valor 0. Quando isto acontece,  $\xi_{-2} = 1$  e  $\eta_2 = 1$ , e as demais variáveis  $\xi, \eta$  têm valor 0.

### 3.7 TAMANHO DAS FORMULAÇÕES

Nesta seção, são apresentados os tamanhos das formulações estudadas neste capítulo. As Tabelas 1 e 2 contêm informações sobre o tamanho das formulações em relação ao número de variáveis contínuas e binárias e ao número de restrições adicionais para cada modelo, respectivamente.

Os tamanhos das formulações é definido em função da dimensão do domínio  $d$ , do número de politopos  $|\mathcal{P}|$  e do número de vértices  $|\mathcal{V}(\mathcal{P})|$  ou  $|V(P)|$ , para  $P \in \mathcal{P}$ , com exceção dos modelos Log, MC e SOS2.

O tamanho do modelo MC é uma função de  $d, |\mathcal{P}|$  e do número

Modelo	Variáveis Adicionais	Variáveis Binárias
DCC	$ \mathcal{P}  + \sum_{P \in \mathcal{P}}  V(P) $	$ \mathcal{P} $
DLog	$\lceil \log_2( \mathcal{P} ) \rceil + \sum_{P \in \mathcal{P}}  V(P) $	$\lceil \log_2( \mathcal{P} ) \rceil$
CC	$ \mathcal{V}(\mathcal{P})  +  \mathcal{P} $	$ \mathcal{P} $
Log	$ \mathcal{V}(\mathcal{P})  +  S $	$ S $
MC	$d +  \mathcal{P} $	$ \mathcal{P} $
Inc	$ \mathcal{P}  - 1 + \sum_{P \in \mathcal{P}} ( V(P)  - 1)$	$ \mathcal{P}  - 1$
SOS2	$ \mathcal{V}(\mathcal{P})  + d$	0

Tabela 1: Número de Variáveis

Modelo	Restrições Adicionais
DCC	$d + 2 \mathcal{P}  + \sum_{P \in \mathcal{P}}  V(P)  + 2$
DLog	$d + \sum_{P \in \mathcal{P}}  V(P)  + 3\lceil \log_2( \mathcal{P} ) \rceil + 2$
CC	$d + 2 \mathcal{V}(\mathcal{P})  +  \mathcal{P}  + 3$
Log	$d +  \mathcal{V}(\mathcal{P})  + 3 S  + 2$
MC	$d + \sum_{P \in \mathcal{P}} F(P) +  \mathcal{P}  + 2$
Inc	$d + 4 \mathcal{P}  + \sum_{P \in \mathcal{P}} ( V(P)  - 1) - 2$
SOS2	$2d + K(\mathcal{G}) + 2$

Tabela 2: Número de Restrições

de facetas dos politopos  $P$ , denotado por  $F(P)$  em  $\mathcal{P}$ . Em particular, quando  $\mathcal{P}$  é uma triangulação, temos que  $|F(P)| \leq d + 1$ ,  $\forall P \in \mathcal{P}$ , onde  $d$  é a dimensão do domínio.

Para o Log, o tamanho da formulação é uma função do número de vértices  $|\mathcal{V}(\mathcal{P})|$  e de  $|S|$ , onde  $S$  é uma ramificação para uma triangulação  $J_1$  definida em  $[0, K]^d$ . Para o caso bidimensional, por exemplo, temos que  $|\mathcal{P}| = K^d d!$  e  $|S| = d \lceil \log_2(K) \rceil + d(d - 1)/2$ . Para dimensões com  $d > 2$ , o valor de  $|S| \approx \log_2(|\mathcal{P}|)$ , ou seja,  $\lim_{K \rightarrow \infty} |S| / (\log_2(|\mathcal{P}|)) = 1$  (VIELMA; AHMED; NEMHAUSER, 2010).

No modelo SOS2, o número de variáveis adicionais varia também em função do número total de *breakpoints* de cada eixo da grade  $\mathcal{G}$ . Para o exemplo ilustrativo com domínio bidimensional, o número de variáveis adicionais é  $K(\mathcal{G}) = |X| + |Y| = 10$ , onde  $X$  e  $Y$  representam o número de *breakpoints* das coordenadas  $x$  e  $y$  da grade  $G$  do domínio.

### 3.8 SUMÁRIO

Neste capítulo, foi apresentada uma definição para funções lineares por partes. Em seguida, foram estudados modelos lineares inteiros-mistos para representar estas funções. Além disto, para cada modelo, foram apresentadas formulações explícitas para funções ilustrativas com domínios unidimensional e bidimensional. Por fim, foram apresentados os tamanhos das formulações com relação ao número de variáveis e restrições adicionais.

## 4 REFORMULAÇÕES LINEARES POR PARTES

As não-linearidades do problema de alocação de gás sob restrições de pressão e de alinhamento descrito no Capítulo 2 aparecem nas curvas de desempenho de poço (WPC) e nas funções de queda de pressão nas tubulações que conectam os *manifolds* de produção aos separadores nas instalações da superfície. A complexidade computacional deste problema reside na natureza não-convexa e multidimensional destas funções e no conjunto de decisões discretas relacionadas com a ativação de um poço ou com o roteamento entre poços, *manifolds* e separadores para escoar os fluidos.

Funções lineares por partes podem ser usadas para aproximar funções não-convexas. Problemas de otimização que envolvem tais funções podem ser modelados como programas lineares inteiros-mistos, que podem ser resolvidos com algoritmos especializados ou com *solvers* de propósito geral. Geralmente, a última abordagem tem vantagem sobre a primeira, pois utiliza a tecnologia no estado da arte disponível para solucionar problemas lineares inteiros-mistos.

Neste capítulo serão apresentadas aproximações lineares inteiras-mistas para o problema em questão com base nos modelos apresentados no Capítulo 3. A primeira seção apresenta a reformulação linear inteira mista completa para o problema, enquanto as demais seções apresentam apenas a reformulação das restrições que estão relacionadas com as funções não-convexas.

### 4.1 REFORMULAÇÃO COM O MODELO DCC

A vazão de líquido  $\mathbf{q}^{n,m}$  de um poço  $n$  depende da pressão do *manifold*  $m$  ao qual ele está conectado,  $p^m$ , e da taxa de gás injetado no poço,  $q_i^n$ . A função da queda de pressão  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  nas tubulações que conectam cada *manifold*  $m$  ao seu separador é uma função não-linear das vazões de gás, óleo e água.

As curvas de desempenho de poço e queda de pressão nas tubulações são aproximadas com funções lineares por partes e o problema  $P$  é reformulado em um programa linear inteiro-misto baseado no modelo DCC como segue:

$$\tilde{P}_{\text{DCC}} : \max \tilde{f} = \sum_{m \in \mathcal{M}} g(\tilde{\mathbf{q}}^m) - \sum_{n \in \mathcal{N}} c(q_i^n) \quad (4.1a)$$

$$\text{s.t. : } \sum_{n \in \mathcal{N}} q_i^n \leq q_i^{\max} \quad (4.1b)$$

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$l_n y_n \leq q_i^n \leq u_n y_n \quad (4.1c)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_n} z_{n,m} = y_n \quad (4.1d)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} q_i = q_i^n \quad (4.1e)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} p_r \leq p^m, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.1f)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} p_r + p^{m, \max} (1 - z_{n,m}) \geq p^m, \quad \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.1g)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} \mathbf{q}^{n,m}(q_i, p_r) = \tilde{\mathbf{q}}^{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.1h)$$

$$y_n \mathbf{q}^{n,L} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq y_n \mathbf{q}^{n,U} \quad (4.1i)$$

$$\lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} \geq 0, \forall m \in \mathcal{M}_n, P \in \mathcal{P}^{n,m}, (q_i, p_r) \in V(P) \quad (4.1j)$$

$$\sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} = y_P^{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n, P \in \mathcal{P}^{n,m} \quad (4.1k)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} y_P^{n,m} = z_{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.1l)$$

$$y_P^{n,m} \in \{0, 1\}, \forall m \in \mathcal{M}_n, P \in \mathcal{P}^{n,m} \quad (4.1m)$$

$$y_n \in \{0, 1\} \quad (4.1n)$$

$$z_{n,m} \in \{0, 1\}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.1o)$$



Para todo  $m \in \mathcal{M}$  :

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^m} \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in V(P)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} \mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m = \tilde{\mathbf{q}}^m \quad (4.1p)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{m,S} \quad (4.1q)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^m} \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in V(P)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} \Delta p^m(\mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m) = \widetilde{\Delta p}^m \quad (4.1r)$$

$$p^{m,S} + \widetilde{\Delta p}^m = p^m \quad (4.1s)$$

$$\Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}^m, (k^o, k^g, k^w) \in V(P) \quad (4.1t)$$

$$\sum_{(k^o, k^g, k^w) \in V(P)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} = y_P^m, \forall P \in \mathcal{P}^m \quad (4.1u)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^m} y_P^m = y^m \quad (4.1v)$$

$$y^m \leq \sum_{n \in \mathcal{N}_m} z_{n,m} \quad (4.1w)$$

$$y_P^m \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P}^m \quad (4.1x)$$

$$y^m \in \{0, 1\} \quad (4.1y)$$

com as seguintes **variáveis**:

- $q_1^n$  é a taxa de gás de injeção alocada ao poço  $n$ ;
- $y_n$  é 1 quando o poço  $n$  está produzindo, e 0 caso contrário;
- $z_{n,m}$  assume valor 1 se a produção do poço  $n$  é direcionada ao *manifold*  $m$ , e 0 caso contrário;
- $\tilde{q}_h^{n,m}$  é a função que aproxima a vazão da fase  $h \in \mathcal{H}$  enviada do poço  $n$  para o *manifold*  $m$ , e  $\tilde{\mathbf{q}}^{n,m} = (q_h^{n,m} : h \in \mathcal{H})$  é um vetor com as vazões de todas as fases. A vazão de gás recebido pelo *manifold* de produção é a soma da taxa de gás de injetado no poço  $n$  (Inj) e do gás proveniente do reservatório (R):  $q_g^{n,m} = q_{g,R}^{n,m} + q_{g,\text{Inj}}^{n,m}$ ;
- $\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m}$  é a vazão total recebida dos poços conectados ao *manifold*  $m$  para todas as fases;
- $p^m$  é a pressão do *manifold*  $m$ ;
- $\lambda_{q_i, p_i}^{n,m,P}$  é uma variável de peso associada a um par de *breakpoints* em  $\mathcal{H}^{n,m} \times \mathcal{R}^{n,m}$  no politopo  $P$ . Quando o *manifold*  $m$  recebe

produção do poço  $n$ ,  $z_{n,m}$  assume valor 1 e a sua combinação convexa respectiva se torna ativa;

- $y_P^{n,m}$  ( $y_P^m$ ) é uma variável binária associada a cada politopo  $P \in \mathcal{P}^{n,m}$  ( $\mathcal{P}^m$ ) que assume valor 1 quando a combinação convexa é limitada ao politopo  $P$ . De acordo com a Restrição (4.1k), quando isto acontece, apenas os vértices de  $P$  podem ser parte da combinação convexa que define a injeção de gás no poço  $n$  e a pressão do *manifold* relacionado  $m$ ;
- $\Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P}$  é a variável de peso associada ao vértice  $(k^o, k^g, k^w) \in V(P)$ , com  $P \in \mathcal{P}^m$ ;
- $y^m$  é uma variável binária que recebe valor 1 quando o *manifold*  $m$  recebe produção de algum poço.

#### parâmetros:

- $N$  é o número de poços de petróleo,  $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$  e  $\mathcal{N}_m \subseteq \mathcal{N}$  é o subconjunto de poços cuja produção pode ser enviada ao *manifold*  $m$ ;
- $M$  é o número de *manifolds*,  $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$  e  $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}$  é o subconjunto de *manifolds* que podem receber produção do poço  $n$ . A produção de cada *manifold* é direcionada para um único separador.
- $\mathcal{H} = \{o, g, w\}$  possui as vazões multifásicas: óleo (o), gás (g) e água (w);
- $q_i^{\max}$  é a taxa de gás de injeção disponível nos compressores;
- $l_n$  e  $u_n$  são os limites inferior e superior na injeção de gás para cada poço  $n$ ;
- $p^{m,S}$  é a pressão operacional do separador que recebe a produção do *manifold*  $m$ ;
- $\mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m$  é a vazão de fluido para as fases de óleo ( $k^o$ ), gás ( $k^g$ ) e água ( $k^w$ ) para o vértice  $(k^o, k^g, k^w)$  pertencente ao domínio da função de queda de pressão  $\Delta p^m$ .
- $\mathbf{q}^{n,L}$  e  $\mathbf{q}^{n,U}$  são os limites inferior e superior para a vazão do poço  $n$ ;

- $\mathbf{q}^{m,S}$  é a capacidade de armazenamento do separador conectado ao *manifold*  $m$  para cada fase de  $\mathcal{H}$ ;
- $\mathcal{P}^{n,m}$  é o conjunto de politopos com os vértices pertencentes a  $\mathcal{H}^{n,m} \times \mathcal{R}^{n,m}$ , onde  $\mathcal{H}^{n,m}$  e  $\mathcal{R}^{n,m}$  são os conjuntos de *breakpoints* referentes à vazão de gás de injeção e à variação da pressão do *manifold* quando o poço  $n$  envia produção para o *manifold*  $m$ , respectivamente;
- $p^{m,\max}$  é a pressão máxima do *manifold*  $m$ ;

e funções:

- $f$  é uma função com o benefício proveniente da produção dos poços, que é concentrada nos *manifolds* ( $g$ ), descontado o custo da injeção de gás ( $c$ );
- $q_h^{n,m}(p^m, q_i^n)$  é a vazão da fase  $h$  enviada do poço  $n$  ao *manifold*  $m$ , dado como uma função da pressão do *manifold* e da taxa de gás injetado no poço  $n$ , com  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n) = (q_h^{n,m}(p^m, q_i^n) : h \in \mathcal{H})$  sendo a função vetorial com as vazões de todas as fases.
- $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  é a função que representa a queda de pressão na tubulação que conecta o *manifold*  $m$  ao separador que recebe sua produção.

Note que as restrições (2.1e) e (2.1f) do problema original foram reformuladas no problema aproximado  $\tilde{P}_{\text{DCC}}$  com o conjunto de restrições (4.1e) – (4.1m). Estas restrições expressam a aproximação linear por partes da curva de desempenho do poço  $\mathbf{q}^{n,m}$  com o uso do modelo DCC. As equações (2.1g) e (2.1h) do problema original também foram reformuladas no problema aproximado  $\tilde{P}_{\text{DCC}}$  com o conjunto de restrições (4.1p) – (4.1x). Estas restrições expressam a aproximação linear por partes da curva de queda de pressão  $\Delta p(\mathbf{q}^m)$  nas tubulações com o modelo DCC.

Nas seções seguintes deste capítulo apenas as reformulações lineares por partes das restrições (2.1e) – (2.1h) do problema original  $P$  serão apresentadas.

## 4.2 REFORMULAÇÃO COM O MODELO DLOG

Nesta seção, será apresentada a reformulação linear por partes  $\tilde{P}_{\text{DLog}}$  do problema  $P$  com o uso do modelo DLog. A curva de desempenho do poço  $\mathbf{q}^{n,m}$  é aproximada por uma função linear por partes com

base no modelo DLog, como segue:

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} q_i = q_i^n \quad (4.2a)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} p_r \leq p^m, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.2b)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} p_r + p^{m, \max}(1 - z_{n,m}) \geq p^m, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.2c)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} \mathbf{q}^{n,m}(q_i, p_r) = \mathbf{q}^{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.2d)$$

$$y_n \mathbf{q}^{n,L} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq y_n \mathbf{q}^{n,U} \quad (4.2e)$$

$$\lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} \geq 0, \forall m \in \mathcal{M}_n, P \in \mathcal{P}^{n,m}, (q_i, p_r) \in V(P) \quad (4.2f)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} = z_{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.2g)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{1,n,m}(B,l)} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} \leq y_l, \forall m \in \mathcal{M}_n, l \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^{n,m}) \quad (4.2h)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{0,n,m}(B,l)} \sum_{(q_i, p_r) \in V(P)} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m,P} \leq (1 - y_l), \forall m \in \mathcal{M}_n, l \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^{n,m}) \quad (4.2i)$$

$$y_l \in \{0, 1\}, \forall m \in \mathcal{M}_n, l \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^{n,m}) \quad (4.2j)$$

tendo como **variável** adicional:

- $y_l$  é uma variável binária para a entrada  $l$  do código binário de cada politopo que constrói a ramificação das variáveis de peso  $\lambda$ .

e **parâmetros**:

- $\mathcal{P}^{1,n,m}(B,l)$  e  $\mathcal{P}^{0,n,m}(B,l)$  representam os conjuntos de politopos associados à função injetora  $B$  que mapeia politopos em vetores binários, agrupando os politopos de acordo com o índice  $l$  da sua representação binária  $B$ , onde  $\mathcal{P}^{j,n,m}(B,l) := \{P \in \mathcal{P}^{n,m} : B(P)_l = j\}$ ,  $j \in \{0, 1\}$ ;
- $\mathcal{L}(\mathcal{P}^{n,m}) := \{1, \dots, \lceil \log_2 |\mathcal{P}^{n,m}| \rceil\}$  é o conjunto de índices para os vetores binários que representam cada politopo  $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ .

Por simplicidade, os parâmetros, variáveis e funções já definidos previamente não foram apresentados novamente. O conjunto de restrições

(4.2a)-(4.2j) apresentadas acima reformulam as restrições (2.1e) e (2.1f) do problema original, aproximando a curva de desempenho do poço  $\mathbf{q}^{n,m}(q_i, p^m)$ .

Em seguida, a curva de queda de pressão nas tubulações  $\Delta p(\mathbf{q}^m)$  é aproximada com uma reformulação linear por partes baseada no modelo DLog:

Para todo  $m \in \mathcal{M}$  :

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^m} \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in V(P)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} \mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m = \tilde{\mathbf{q}}^m \quad (4.3a)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{m,S} \quad (4.3b)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^m} \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in V(P)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} \Delta p^m(\mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m) = \widetilde{\Delta p}^m \quad (4.3c)$$

$$p^{m,S} + \widetilde{\Delta p}^m = p^m \quad (4.3d)$$

$$\Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}^m, (k^o, k^g, k^w) \in V(P) \quad (4.3e)$$

$$\sum_{(k^o, k^g, k^w) \in V(P)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} = y^m, \forall P \in \mathcal{P}^m \quad (4.3f)$$

$$y^m \leq \sum_{n \in \mathcal{N}_m} z_{n,m} \quad (4.3g)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{1,m}(B,l)} \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in V(P)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} \leq y_l, \forall l \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^m) \quad (4.3h)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{0,m}(B,l)} \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in V(P)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^{m,P} \leq (1 - y_l), \forall l \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^m) \quad (4.3i)$$

$$y^m \in \{0, 1\} \quad (4.3j)$$

$$y_l \in \{0, 1\}, \forall l \in \mathcal{L}(\mathcal{P}^m) \quad (4.3k)$$

O conjunto de restrições apresentados reformulam as restrições (2.1g) e (2.1h) do problema original, aproximando a curva de queda de pressão nas tubulações  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ .

### 4.3 REFORMULAÇÃO COM O MODELO CC

Nesta seção, serão apresentadas as reformulações lineares das restrições não-lineares (2.1e) e (2.1f) do problema original com o uso do modelo CC. As equações que expressam a curva de desempenho do

poço  $\mathbf{q}^{n,m}(q_i, p_r)$  são reformuladas como segue:

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$q_i^n = \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{q_i \in \mathcal{H}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} q_i \quad (4.4a)$$

$$\sum_{q_i \in \mathcal{H}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} p_r \leq p^m, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.4b)$$

$$p^m \leq \sum_{q_i \in \mathcal{H}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} p_r + p^{m, \max} (1 - z_{n,m}), \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.4c)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^{n,m} = \sum_{q_i \in \mathcal{H}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \mathbf{q}^{n,m}(q_i, p_r), \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.4d)$$

$$y_n \mathbf{q}^{n,L} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq y_n \mathbf{q}^{n,U} \quad (4.4e)$$

$$\lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \geq 0, \forall m \in \mathcal{M}_n, q_i \in \mathcal{H}^{n,m}, p_r \in \mathcal{R}^{n,m} \quad (4.4f)$$

$$\sum_{q_i \in \mathcal{H}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} = z_{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n, \quad (4.4g)$$

$$\lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \leq \sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}(q_i, p_r)} y_P^{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n, q_i \in \mathcal{H}^{n,m}, p_r \in \mathcal{R}^{n,m} \quad (4.4h)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} y_P^{n,m} = z_{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.4i)$$

$$y_P^{n,m} \in \{0, 1\}, \forall m \in \mathcal{M}_n, \forall P \in \mathcal{P}^{n,m} \quad (4.4j)$$

com **parâmetro** adicional:

- $\mathcal{P}^{n,m}(q_i, p_r)$  é o conjunto dos polítopos  $P \in \mathcal{P}^{n,m}$  que contêm o vértice  $(q_i, p_r)$ .

Para o modelo CC, a reformulação das equações (2.1g) e (2.1h) referentes à curva de queda de pressão  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  é dada a seguir: Para

todo  $m \in \mathcal{M}$  :

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m \quad (4.5a)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{m,S} \quad (4.5b)$$

$$\widetilde{\Delta p}^m = \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \Delta p^m(\mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m) \quad (4.5c)$$

$$p^m = p^{m,S} + \widetilde{\Delta p}^m \quad (4.5d)$$

$$\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \geq 0, \forall (k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m) \quad (4.5e)$$

$$\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \leq \sum_{P \in \mathcal{P}^m(k^o, k^g, k^w)} y_P^m, \forall (k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m) \quad (4.5f)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^m} y_P^m = y^m \quad (4.5g)$$

$$\sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m = y^m \quad (4.5h)$$

$$y^m \leq \sum_{n \in \mathcal{N}_m} z_{n,m} \quad (4.5i)$$

$$y^m \in \{0, 1\} \quad (4.5j)$$

$$y_P^m \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P}^m \quad (4.5k)$$

tendo como **parâmetro** adicional:

- $\mathcal{P}^m(k^o, k^g, k^w)$  é o conjunto de polítopos  $P \in \mathcal{P}^m$  que contêm o vértice  $(k^o, k^g, k^w)$ .

Note que a reformulação das restrições (2.1g) e (2.1h) do problema original com o conjunto de restrições apresentado acima aproxima a curva de queda de pressão nas tubulações  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ .

#### 4.4 REFORMULAÇÃO COM O MODELO LOG

Nesta seção, a função não-convexa  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  é aproximada com uma função linear por parte com o uso do modelo Log apresentado na

Seção 3.3.2 como segue:

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$q_i^n = \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} q_i \quad (4.6a)$$

$$\sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} p_r \leq p^m, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.6b)$$

$$p^m \leq \sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} p_r + p^{m, \max} (1 - z_{n,m}), \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.6c)$$

$$\tilde{q}^{n,m} = \sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \mathbf{q}^{n,m}(q_i, p_r), \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.6d)$$

$$y_n \mathbf{q}^{n,L} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \tilde{q}^{n,m} \leq y_n \mathbf{q}^{n,U} \quad (4.6e)$$

$$\lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \geq 0, \forall m \in \mathcal{M}_n, q_i \in \mathcal{K}^{n,m}, \forall p_r \in \mathcal{R}^{n,m} \quad (4.6f)$$

$$\sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} = z_{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n, \quad (4.6g)$$

Para todo  $n \in \mathcal{N}$ ,  $m \in \mathcal{M}_n$ ,  $l \in \Phi(\mathcal{K}^{n,m})$  :

$$\sum_{q_i \in J_{\text{axis}(\mathcal{K}^{n,m}), B, l}^+} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \leq x_l^{n,m} \quad (4.6h)$$

$$\sum_{q_i \in J_{\text{axis}(\mathcal{K}^{n,m}), B, l}^0} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \leq (1 - x_l^{n,m}) \quad (4.6i)$$

Para todo  $n \in \mathcal{N}$ ,  $m \in \mathcal{M}_n$ ,  $l \in \Phi(\mathcal{R}^{n,m})$  :

$$\sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in J_{\text{axis}(\mathcal{R}^{n,m}), B, l}^+} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \leq \tilde{x}_l^{n,m} \quad (4.6j)$$

$$\sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in J_{\text{axis}(\mathcal{R}^{n,m}), B, l}^0} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \leq (1 - \tilde{x}_l^{n,m}) \quad (4.6k)$$



Para todo  $n \in \mathcal{N}$ ,  $m \in \mathcal{M}_n$ ,  $\forall (r, s) \in \Gamma^{n,m}$ :

$$\sum_{(q_i, p_r) \in \mathcal{L}_{r,s}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \leq y_{r,s}^{n,m} \quad (4.6l)$$

$$\sum_{(q_i, p_r) \in \mathcal{R}_{r,s}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \leq (1 - y_{r,s}^{n,m}) \quad (4.6m)$$

com as seguintes **variáveis** adicionais:

- $x_l^{n,m}$  ( $\tilde{x}_l^{n,m}$ ) é uma variável binária que induz a primeira fase da ramificação do Log para cada índice em  $l \in \Phi(\mathcal{K}^{n,m})$  ( $\Phi(\mathcal{R}^{n,m})$ ) de  $B$ ;
- $y_{r,s}^{n,m}$  é uma variável binária que induz a segunda fase da ramificação do Log para cada par  $(r, s) \in \Gamma^{n,m}$ .

**parâmetros:**

- $\Phi(\mathcal{K}^{n,m}) := \{1, \dots, \lceil \log_2(\mathcal{K}^{n,m}) \rceil\}$  e  $\Phi(\mathcal{R}^{n,m}) := \{1, \dots, \lceil \log_2(\mathcal{R}^{n,m}) \rceil\}$  são conjuntos de índices;
- $\Gamma^{n,m} := \{(r, s) \in D^2 : r < s\}$ , sendo  $D := \{1, \dots, d\}$ , onde  $d$  é a dimensão do domínio;
- $\mathcal{L}_{r,s}^{n,m} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^{n,m}) : \mathbf{v}_r \text{ é par e } \mathbf{v}_s \text{ é ímpar}\}$  e  $\mathcal{R}_{r,s}^{n,m} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^{n,m}) : \mathbf{v}_r \text{ é ímpar e } \mathbf{v}_s \text{ é par}\}$ ,  $\forall r, s \in D = \{1, \dots, d\}$ ,  $r < s$ , onde  $d$  é a dimensão do domínio.

e **função** adicional:

- $axis(\mathcal{Q})$  é o eixo que contém o conjunto de *breakpoints*  $\mathcal{Q}$ .

O conjunto de restrições acima lineariza as restrições (2.1e) e (2.1f) do problema original  $P$ . As restrições (4.6h)-(4.6k) realizam a primeira fase da ramificação do modelo Log, selecionando um quadrado no domínio da função  $\mathbf{q}^{n,m}$ .

As restrições (4.6l) e (4.6m) são responsáveis pela construção da segunda fase da ramificação do modelo Log, selecionando um triângulo dentro do quadrado escolhido na primeira fase da ramificação.

Agora, a função não-linear  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  é aproximada com uma função linear por partes e as restrições não lineares (2.1f) e (2.1g) do problema original são reescritas em um programa linear inteiro-misto, com base no modelo Log, conforme apresentado a seguir.

Para todo  $m \in \mathcal{M}$ :

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m \quad (4.7a)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{m,S} \quad (4.7b)$$

$$\widetilde{\Delta p}^m = \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \Delta p^m(\mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m) \quad (4.7c)$$

$$p^m = p^{m,S} + \widetilde{\Delta p}^m \quad (4.7d)$$

$$\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \geq 0, \forall (k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m) \quad (4.7e)$$

$$\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \leq \sum_{P \in \mathcal{P}^m(k^o, k^g, k^w)} y_P^m, \forall (k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m) \quad (4.7f)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^m} y_P^m = y^m \quad (4.7g)$$

$$\sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m = y^m \quad (4.7h)$$

$$y^m \leq \sum_{n \in \mathcal{N}_m} z_{n,m} \quad (4.7i)$$

$$y^m \in \{0, 1\} \quad (4.7j)$$

$$y_P^m \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P}^m \quad (4.7k)$$

Para todo  $m \in \mathcal{M}$ ,  $\Upsilon \in \{O, G, W\}$ ,  $l \in \Phi(\Upsilon^m)$ :

$$\sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m): k^\Upsilon \in J_{axis(\Upsilon^m), B, l}^+} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \leq x_l^{m, \Upsilon} \quad (4.7l)$$

$$\sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m): k^\Upsilon \in J_{axis(\Upsilon^m), B, l}^0} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \leq (1 - x_l^{m, \Upsilon}) \quad (4.7m)$$

Para todo  $m \in \mathcal{M}$ ,  $(r, s) \in \Gamma^m$ :

$$\sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{L}_{r,s}^m} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \leq y_{r,s}^m \quad (4.7n)$$

$$\sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{D}_{r,s}^m} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \leq (1 - y_{r,s}^m) \quad (4.7o)$$

tendo as seguintes **variáveis** adicionais:

- $x_l^{m, \Upsilon}$  é a variável binária que define a primeira fase da ramificação do Log para a fase com  $\Upsilon \in \{O, G, W\}$  e para o índice  $l \in \Phi(\Upsilon^m)$

de  $B$ ;

- $y_{r,s}^m$  é a variável binária que constrói a segunda fase da ramificação do Log para cada par  $(r,s) \in \Gamma^m$ .

**parâmetros adicionais:**

- $O^m$ ,  $G^m$  e  $W^m$  são os conjuntos de *breakpoints* referentes ao *manifold*  $m$  para as fases de óleo, gás e água, respectivamente. O conjunto de vértices do domínio da função de queda de pressão  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  é definido como  $\mathcal{V}(\mathcal{P}^m) = O^m \times G^m \times W^m$ ;
- $\mathcal{P}^m(k^o, k^g, k^w)$  é o conjunto de politopos  $P \in \mathcal{P}^m$  que contêm o vértice  $(k^o, k^g, k^w)$ ;
- $\mathcal{L}_{r,s}^m := \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m) : \mathbf{v}_r \text{ é par, } \mathbf{v}_s \text{ é ímpar}\}$ ,  $\forall r, s \in D = \{1, \dots, d\}$ , com  $r < s$ , onde  $d$  é a dimensão do domínio;
- $\mathcal{R}_{r,s}^m := \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m) : \mathbf{v}_r \text{ é ímpar, } \mathbf{v}_s \text{ é par}\}$ ,  $\forall r, s \in D = \{1, \dots, d\}$ , com  $r < s$ , onde  $d$  é a dimensão do domínio.

As restrições (4.7l) e (4.7m) induzem a primeira fase da ramificação do modelo Log, na qual o domínio é condicionado a um hipercubo. As restrições (4.7n) e (4.7o) implementam a segunda fase da ramificação, na qual um tetraedro é escolhido dentro do hipercubo selecionado na primeira fase. Este esquema de ramificação constrói uma família de politopos compatível com a Triangulação J1.

#### 4.5 REFORMULAÇÃO COM O MODELO MC

Nesta seção, a função não-convexa  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  será aproximada com uma função linear por partes com o uso do modelo MC apresentado na Seção 3.4. O conjunto de equações que aproximam a função  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  com o modelo MC é apresentado a seguir:

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$\sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} q_i^{n,m,P} = q_i^n \quad (4.8a)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} p_r^{n,m,P} \leq p^m, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.8b)$$

$$p^m \leq \sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} p_r^{n,m,P} + p^{m,\max}(1 - z_{n,m}), \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.8c)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} \left( \mathbf{m}_P^{n,m} \begin{bmatrix} q_i^{n,m,P} \\ p_r^{n,m,P} \end{bmatrix} + \mathbf{c}_P^{n,m}, y_P^{n,m} \right) = \tilde{\mathbf{q}}^{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.8d)$$

$$y_n \mathbf{q}^{n,L} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq y_n \mathbf{q}^{n,U} \quad (4.8e)$$

$$\mathbf{A}_P^{n,m} \begin{bmatrix} q_i^{n,m,P} \\ p_r^{n,m,P} \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}_P^{n,m} y_P^{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n, P \in \mathcal{P}^{n,m} \quad (4.8f)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^{n,m}} y_P^{n,m} = z_{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.8g)$$

$$q_i^{n,m,P} \geq 0, p_r^{n,m,P} \geq 0, \forall m \in \mathcal{M}_n, P \in \mathcal{P}^{n,m} \quad (4.8h)$$

$$y_P^{n,m} \in \{0, 1\}, \forall m \in \mathcal{M}_n, P \in \mathcal{P}^{n,m} \quad (4.8i)$$

com **variáveis** adicionais:

- $q_i^{n,m,P}$  é uma variável contínua que representa a injeção de gás em um poço  $n$  para o politopo  $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ ;
- $p_r^{n,m,P}$  é uma variável contínua que representa a pressão do *manifold*  $m$  no politopo  $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ ;
- $y_P^{n,m}$  é uma variável binária que recebe o valor 1 quando o politopo  $P \in \mathcal{P}^{n,m}$  está ativo e 0, caso contrário.

e **parâmetros** adicionais:

- $\mathbf{m}_P^{n,m}$  é o vetor com os coeficientes para o hiperplano que aproxima a função  $\mathbf{q}^{n,m}$  no politopo  $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ ;
- $\mathbf{c}_P^{n,m}$  é o coeficiente linear do hiperplano que aproxima a função  $\mathbf{q}^{n,m}$  no politopo  $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ ;
- $\mathbf{A}_P^{n,m}$  e  $\mathbf{b}_P^{n,m}$  são as matrizes e os vetores de coeficientes das inequações lineares que definem o politopo  $P \in \mathcal{P}^{n,m}$ , os quais podem ser de qualquer família de politopo, a exemplo de hipercubos ou simplexes;

A seguir, é apresentada uma aproximação baseada no modelo MC para a função da queda de pressão  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  nas tubulações que conectam os *manifolds* aos separadores:

Para todo  $m \in \mathcal{M}$  :

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^m} \mathbf{q}^{m,P} = \tilde{\mathbf{q}}^m \quad (4.9a)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{m \in \mathcal{N}_m} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{m,S} \quad (4.9b)$$

$$\tilde{\Delta p}^m = \sum_{P \in \mathcal{P}^m} \left( \mathbf{m}_P^m \begin{bmatrix} q_g^{m,P} \\ q_o^{m,P} \\ q_w^{m,P} \end{bmatrix} + c_P^m y_P^m \right) \quad (4.9c)$$

$$p^m = p^{m,S} + \tilde{\Delta p}^m \quad (4.9d)$$

$$\mathbf{A}_P^m \begin{bmatrix} q_g^{m,P} \\ q_o^{m,P} \\ q_w^{m,P} \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}_P^m y_P^m, \forall P \in \mathcal{P}^m \quad (4.9e)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}^m} y_P^m = y^m \quad (4.9f)$$

$$y^m \leq \sum_{n \in \mathcal{N}_m} z_{n,m} \quad (4.9g)$$

$$\mathbf{q}^{m,P} = (q_g^{m,P}, q_o^{m,P}, q_w^{m,P}) \geq \mathbf{0}, \forall P \in \mathcal{P}^m \quad (4.9h)$$

$$y_P^m \in \{0, 1\}, \forall P \in \mathcal{P}^m \quad (4.9i)$$

$$y^m \in \{0, 1\} \quad (4.9j)$$

com **variáveis** adicionais:

- $\mathbf{q}_P^m = (q_{P,g}^m, q_{P,o}^m, q_{P,w}^m)$  é um vetor que contém as variáveis contínuas que representam as vazões de gás, óleo e água, respectivamente, na tubulação que conecta o *manifold*  $m$  ao seu separador, dentro de um politopo  $P \in \mathcal{P}^m$ ;
- $y_P^m$  é uma variável binária que recebe o valor 1 quando o politopo  $P \in \mathcal{P}^m$  está ativo e 0, caso contrário.

e **parâmetros** adicionais:

- $\mathbf{m}_P^m$  contém os coeficientes do vetor normal do hiperplano que aproxima a função  $\Delta p^m(\mathbf{q}_P^m)$  no politopo  $P \in \mathcal{P}^m$ ;

- $c_p^m$  é o coeficiente linear do hiperplano que aproxima a função  $\Delta p^m(\mathbf{q}_p^m)$  no politopo  $P \in \mathcal{P}^m$ ;

- $\tilde{\mathbf{A}}_p^m$  e  $\tilde{\mathbf{b}}_p^m$  são os coeficientes das inequações lineares que definem o politopo  $P \in \mathcal{P}^m$ , os quais podem ser de qualquer família de politopo, a exemplo de hipercubos ou simplexes;

#### 4.6 REFORMULAÇÃO COM O MODELO INC

Nesta seção serão apresentadas as equações baseadas no modelo Inc que aproximam as funções não convexas  $\mathbf{q}^{n,m}$  e  $\mathbf{q}^m$ . O conjunto de equações a seguir aproxima a função  $\mathbf{q}^{n,m}$ :

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$q_i^n = q_{i,n,m}^{1,0} + \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{j=1}^{|\mathcal{T}^{n,m}|} \sum_{k=1}^{|V(T_j)|-1} \delta_{n,m}^{j,k} (q_{i,n,m}^{j,k} - q_{i,n,m}^{j,0}) \quad (4.10a)$$

$$p_{r,n,m}^{1,0} + \sum_{j=1}^{|\mathcal{T}^{n,m}|} \sum_{k=1}^{|V(T_j)|-1} \delta_{n,m}^{j,k} (p_{r,n,m}^{j,k} - p_{r,n,m}^{j,0}) \leq p^m, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.10b)$$

$$p^m \leq p_{r,n,m}^{1,0} + \sum_{j=1}^{|\mathcal{T}^{n,m}|} \sum_{k=1}^{|V(T_j)|-1} \delta_{n,m}^{j,k} (p_{r,n,m}^{j,k} - p_{r,n,m}^{j,0}) + p^{m,\max}(1 - z_{n,m}), \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.10c)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^{n,m} = \mathbf{q}^{n,m}(q_{i,n,m}^{1,0}, p_{r,n,m}^{1,0}) + \sum_{j=1}^{|\mathcal{T}^{n,m}|} \sum_{k=1}^{|V(T_j)|-1} \delta_{n,m}^{j,k} (\mathbf{q}^{n,m}(q_{i,n,m}^{j,k}, p_{r,n,m}^{j,k}) - \mathbf{q}^{n,m}(q_{i,n,m}^{j,0}, p_{r,n,m}^{j,0})), \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.10d)$$

$$y_n \mathbf{q}^{n,L} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq y_n \mathbf{q}^{n,U} \quad (4.10e)$$

$$\sum_{k=1}^{|V(T_1)|-1} \delta_{n,m}^{1,k} \leq z_{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.10f)$$

$$\delta_{n,m}^{j,k} \geq 0, \forall m \in \mathcal{M}_n, j \in \{1, \dots, |\mathcal{T}^{n,m}|\}, k \in \{1, \dots, |V(T_j)| - 1\} \quad (4.10g)$$

$$w_{n,m}^j \leq \delta_{n,m}^{j,|V(T_i)|-1}, \forall m \in \mathcal{M}_n, j \in \{1, \dots, |\mathcal{T}|-1\} \quad (4.10h)$$

$$\sum_{k=1}^{|V(T_j)|-1} \delta_{n,m}^{j+1,k} \leq w_{n,m}^j, \forall m \in \mathcal{M}_n, j \in \{1, \dots, |\mathcal{T}^{n,m}|-1\} \quad (4.10i)$$

$$w_{n,m}^j \in \{0, 1\}, \forall m \in \mathcal{M}_n, j \in \{1, \dots, |\mathcal{T}^{n,m}|-1\}. \quad (4.10j)$$

tendo como **variáveis**:

- $\delta_{n,m}^{j,k}$  é uma variável contínua de peso que, incrementalmente, condiciona o domínio a apenas um politopo;
- $w_{n,m}^j$  é uma variável binária que recebe valor 1 quando as variáveis de peso  $\delta_{n,m}^{j',k}$  dos simplexes  $T_{j'} \in \mathcal{T}^{n,m}$  com  $j' < j$  recebem valor 1. Neste caso, o simplex ativo é o  $T_{j+1}$ .

e **parâmetros** adicionais:

- $q_{i,n,m}^{j,k}$  é o *breakpoint* de injeção de gás correspondente ao vértice  $k$  do simplex  $j$ ;
- $p_{r,n,m}^{j,k}$  é o *breakpoint* de pressão do *manifold*  $m$  correspondente ao vértice  $k$  do simplex  $j$ ;
- $\mathcal{T}^{n,m}$  é o conjunto de simplexes que compõem a família de politopos do domínio da função de vazão do poço  $n$  para o *manifold*  $m$   $\mathbf{q}^{n,m}$ ;
- $V(T)$  é o conjunto de vértices do simplex  $T \in \mathcal{T}^{n,m}$ . A rigor, teria-se que utilizar a notação  $T^{n,m} \in \mathcal{T}^{n,m}$ , porém deixa-se  $T$  para não sobrecarregar a notação.

A seguir, a função  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  é aproximada, através da reformulação das equações (2.1g) e (2.1h) com o modelo Inc:

Para todo  $m \in \mathcal{M}$  :

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \mathbf{q}_m^{1,0} + \sum_{j=1}^{|\mathcal{T}^m|} \sum_{k=1}^{|V(T_j)|-1} \delta_m^{j,k} \left( \mathbf{q}_m^{j,k} - \mathbf{q}_m^{j,0} \right) \quad (4.11a)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{n \in \mathcal{A}'_m} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{m,S} \quad (4.11b)$$

$$\widetilde{\Delta p}^m = \Delta p^m(\mathbf{q}_m^{1,0}) + \sum_{j=1}^{|\mathcal{T}^m|} \sum_{k=1}^{|V(T_j)|-1} \delta_m^{j,k} \left( \Delta p^m(\mathbf{q}_m^{j,k}) - \Delta p^m(\mathbf{q}_m^{j,0}) \right) \quad (4.11c)$$

$$p^m = p^{m,S} + \widetilde{\Delta p}^m \quad (4.11d)$$

$$y^m \leq \sum_{n \in \mathcal{A}'_m} z_{n,m} \quad (4.11e)$$

$$\sum_{k=1}^{|V(T_1)|-1} \delta_m^{1,k} \leq y^m \quad (4.11f)$$

$$\delta_m^{j,k} \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, |\mathcal{T}^m|\}, \in \{1, \dots, |V(T_j)| - 1\} \quad (4.11g)$$

$$w_m^j \leq \delta_m^{j, |V(T_j)|-1}, \forall j \in \{1, \dots, |\mathcal{T}^m| - 1\} \quad (4.11h)$$

$$\sum_{k=1} \delta_m^{j+1,k} \leq w_m^j, \forall j \in \{1, \dots, |\mathcal{T}^m| - 1\} \quad (4.11i)$$

$$w_m^j \in \{0, 1\}, \forall j \in \{1, \dots, |\mathcal{T}^m| - 1\} \quad (4.11j)$$

tendo como **variáveis** adicionais:

- $\delta_m^{j,k}$  é uma variável contínua de peso que, incrementalmente, condiciona o domínio a apenas um politopo ou simplex  $T_j \in \mathcal{T}^m$ . A rigor, teria que ser  $T_j^m$ , mas vamos deixar  $T_j$  para não sobrecarregar a notação;
- $w_m^j$  é uma variável binária que recebe valor 1 quando as variáveis de peso  $\delta_m^{j',k}$  dos simplexes  $T_{j'} \in \mathcal{T}^m$  com  $j' < j$  recebem valor 1. Neste caso, o simplex ativo é o  $T_{j+1}$ .

e **parâmetros** adicionais:

- $\mathbf{q}_m^{j,k} = (q_{m,g}^{j,k}, q_{m,o}^{j,k}, q_{m,w}^{j,k})$  é um vetor que contém as variáveis contínuas que representam as vazões de gás, óleo e água, respectivamente em um vértice  $k$  de um simplex  $T_j \in \mathcal{T}^m$ ;



- $\mathcal{T}^m$  é o conjunto de simplexes que compõem a família de politopos do domínio da função de queda de pressão  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  na tubulação que conectam o *manifold*  $m$  ao seu separador;
- $V(T)$  é o conjunto de vértices do simplex  $T \in \mathcal{T}^m$ . A rigor, teria-se que usar  $T^m$ , mas vamos deixar  $T$  para não sobrecarregar a notação.

#### 4.7 REFORMULAÇÃO COM O MODELO SOS2

Nesta seção, serão apresentadas as reformulações lineares das restrições não-lineares do problema original com o uso do modelo SOS2. As equações que expressam a curva de desempenho do poço  $\mathbf{q}^{n,m}(q_i, p_r)$  são reformuladas como segue:

Para todo  $n \in \mathcal{N}$  :

$$q_i^n = \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} q_i \quad (4.12a)$$

$$\sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} p_r \leq p^m, \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.12b)$$

$$p^m \leq \sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} p_r + p^{m, \max} (1 - z_{n,m}), \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.12c)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^{n,m} = \sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \mathbf{q}^{n,m}(q_i, p_r), \forall m \in \mathcal{M}_n \quad (4.12d)$$

$$y_n \mathbf{q}^{n,L} \leq \sum_{m \in \mathcal{M}_n} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq y_n \mathbf{q}^{n,U} \quad (4.12e)$$

$$\lambda_{q_i, p_r}^{n,m} \geq 0, \forall q_i \in \mathcal{K}^{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n, p_r \in \mathcal{R}^{n,m} \quad (4.12f)$$

$$\sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}^{n,m} = z_{n,m}, \forall m \in \mathcal{M}_n, \quad (4.12g)$$

$$\xi_{q_i}^{n,m} = \sum_{p_r \in \mathcal{R}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}, \forall q_i \in \mathcal{K}^{n,m} \quad (4.12h)$$

$$\eta_{p_r}^{n,m} = \sum_{q_i \in \mathcal{K}^{n,m}} \lambda_{q_i, p_r}, \forall p_r \in \mathcal{R}^{n,m} \quad (4.12i)$$

$$(\xi_{q_i}^{n,m})_{\mathcal{K}^{n,m}} \text{ são SOS2} \quad (4.12j)$$

$$(\eta_{p_r}^{n,m})_{\mathcal{R}^{n,m}} \text{ são SOS2} \quad (4.12k)$$

tendo como **variáveis** adicionais:

- $\xi_{q_i}^{n,m}$  é uma variável contínua auxiliar que representa a soma das

variáveis de peso  $\lambda_{q'_i, p_r}$  tal que  $q'_i = q_i$ .

- $\eta_{p_r}^{n,m}$  é uma variável contínua auxiliar que representa a soma das variáveis de peso  $\lambda_{q_i, p'_r}$  tal que  $p'_r = p_r$ .

As variáveis auxiliares  $\xi_{q_i}^{n,m}$  e  $\eta_{p_r}^{n,m}$  compõem a cadeia ligada de conjuntos de variáveis especialmente ordenadas do tipo 2 e induzem a construção de uma grade, de forma semelhante à ilustração apresentada na Figura 11. As restrições SOS2 (4.12j) e (4.12k) garantem que a combinação convexa das variáveis de peso  $\lambda_{q_i, p_r}$  associadas a cada vértice  $(q_i, p_r)$  estarão limitadas a apenas um politopo, um quadrado neste caso, do domínio.

A reformulação das equações (2.1g) e (2.1h) referentes à curva de queda de pressão  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ , com o modelo SOS2, é apresentada a seguir:

Para todo  $m \in \mathcal{M}$  :

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m \quad (4.13a)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^m = \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \tilde{\mathbf{q}}^{n,m} \leq \mathbf{q}^{m,S} \quad (4.13b)$$

$$\widetilde{\Delta p}^m = \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m)} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \Delta p^m(\mathbf{q}_{k^o, k^g, k^w}^m) \quad (4.13c)$$

$$p^m = p^{m,S} + \widetilde{\Delta p}^m \quad (4.13d)$$

$$\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m \geq 0, \forall (k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m) \quad (4.13e)$$

$$\xi_o^m = \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m): o=k^o} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m, \forall o \in \mathcal{O}^m \quad (4.13f)$$

$$\eta_g^m = \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m): g=k^g} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m, \forall g \in \mathcal{G}^m \quad (4.13g)$$

$$\psi_w^m = \sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^m): w=k^w} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m, \forall w \in \mathcal{W}^m \quad (4.13h)$$

$$y^m \leq \sum_{n \in \mathcal{N}_m} z_{n,m} \quad (4.13i)$$

$$\sum_{(k^o, k^g, k^w) \in \mathcal{P}^m} \Omega_{k^o, k^g, k^w}^m = y^m \quad (4.13j)$$

$$y^m \in \{0, 1\} \quad (4.13k)$$

$$(\xi_o^m)_{O^m} \text{ são SOS2} \quad (4.13l)$$

$$(\eta_g^m)_{G^m} \text{ são SOS2} \quad (4.13m)$$

$$(\psi_w^m)_{W^m} \text{ são SOS2} \quad (4.13n)$$

tendo como **variáveis** adicionais:

- $\xi_o^m$  é uma variável contínua auxiliar que representa a soma das variáveis de peso  $\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m$  tal que  $k^o = o$  para  $o \in \mathcal{O}^m$ ;
- $\eta_g^m$  é uma variável contínua auxiliar que representa a soma das variáveis de peso  $\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m$  tal que  $k^g = g$  para  $g \in \mathcal{G}^m$ ;
- $\psi_w^m$  é uma variável contínua auxiliar que representa a soma das variáveis de peso  $\Omega_{k^o, k^g, k^w}^m$  tal que  $k^w = w$  para  $w \in \mathcal{W}^m$ .

e **parâmetros** adicionais:

- $O^m$ ,  $G^m$  e  $W^m$  são os *breakpoints* de óleo, gás e água, respectivamente, que compõem o domínio da função de queda de pressão  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  na tubulação que conecta o *manifold*  $m$  ao seu separador, sendo  $\mathcal{V}(\mathcal{P}^m) = O^m \times G^m \times W^m$ .

## 4.8 SUMÁRIO

Neste capítulo foram propostas aproximações lineares por partes para as funções não-lineares  $\mathbf{q}^{n,m}(q_i, p_r)$  e  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  do problema não-linear inteiro-misto de alocação de gás sob restrições de alinhamento e de pressão formulado na Seção 2.3. Para modelar estas funções lineares por partes, foram propostas reformulações lineares inteiras-mistas do Problema  $P$  com base nos modelos apresentados no Capítulo 3.

As formulações MILP propostas neste trabalho e contidas neste capítulo compõem uma contribuição na área de otimização da produção de petróleo para a solução do problema de alocação de gás de injeção sob restrições de alinhamento e de pressão.



## 5 ANÁLISE COMPUTACIONAL

Este capítulo apresenta uma análise computacional das formulações lineares inteiras-mistas desenvolvidas no Capítulo 4 no contexto do problema de alocação de gás sob restrições de alinhamento e de pressão apresentado no Capítulo 2. O cenário desenvolvido para analisar o desempenho computacional dos modelos é um sistema de produção de um campo de petróleo sintético modelado com o uso de um simulador de escoamento multifásico.

Este capítulo foi estruturado da seguinte forma: a primeira parte apresenta a modelagem do sistema de produção; em seguida, são apresentados os resultados de desempenho dos modelos para aproximações com hipercubos e simplexes. Por fim, é feita uma análise geral dos modelos com ambas as aproximações, discutindo-se a relação de custo-benefício entre a qualidade da aproximação e o desempenho computacional.

### 5.1 SISTEMA DE PRODUÇÃO

O sistema de produção possui  $N = 16$  poços e  $M = 2$  *manifolds*, onde todos os poços podem ser alinhados para os dois *manifolds* de produção, ou seja,  $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}$  para todo  $m \in \mathcal{M}$ . O campo possui dois separadores, um para cada *manifold*. Há um compressor que envia o gás para um *manifold* de injeção, o qual distribui o gás para os 16 poços. A rede de produção é ilustrada na Figura 12.

Os poços e os *manifolds* do sistema de produção estão topologicamente divididos em dois grupos: os poços 1-8 estão a 1 km de distância do *manifold* 1, e a 10 km de distância do *manifold* 2, enquanto os poços de 9-16 estão a 1 km do *manifold* 2 e a 10 km do *manifold* 1. As tubulações que conectam os poços aos *manifolds* possuem 4 polegadas de diâmetro interno (DI) e 0,001 polegadas de rugosidade (R). Com esta estrutura topológica, se o poço  $n$  está mais próximo do *manifold*  $m_1$  do que do *manifold*  $m_2$ , então  $\mathbf{q}^{n,m_1}(p, q_i) \geq \mathbf{q}^{n,m_2}(p, q_i)$  para uma pressão  $p$  no *manifold* e uma injeção de gás  $q_i$ .

Todos os poços possuem a razão gás-óleo (RGO) e a fração de água (BSW) constantes para as diferentes taxas de injeção de gás e variações na pressão do *manifold*. A vazão de líquido de cada poço é regida pela equação  $q_l = p_i(p_r - p_{wf})$ , onde  $q_l = q_o + q_w$ ,  $p_{wf}$  é a pressão no fundo do poço,  $p_i$  é o índice de produtividade do poço, e  $p_r$  é a

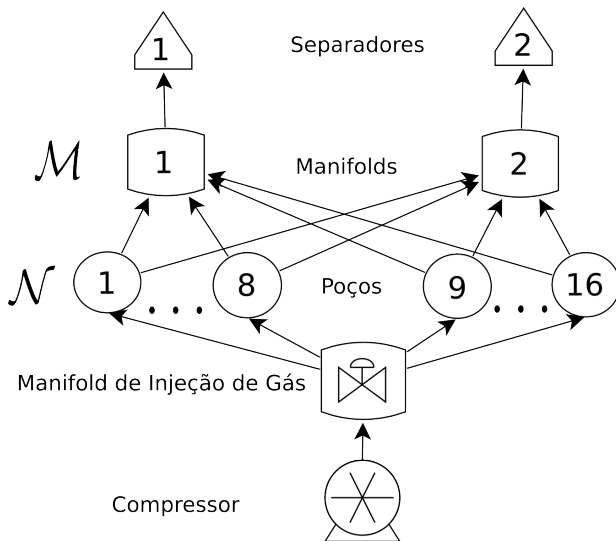


Figura 12: Rede de Produção com Injeção de Gás.

pressão estática do reservatório.

Estes parâmetros são apresentados na Tabela 3, onde as unidades para RGO, BSW,  $p_r$  e  $p_i$  são  $\text{sm}^3/\text{sm}^3$ , %, psi, and STB/d/psi, respectivamente.

Tabela 3: Parâmetros dos Poços

$n$	RGO	BSW	$p_r$	$p_i$	$n$	RGO	BSW	$p_r$	$p_i$
1	200	0	2100	15	9	200	10	1900	5
2	200	20	2300	2	10	200	40	2200	9
3	300	10	1950	12	11	300	0	1850	11
4	300	40	2050	15	12	300	20	2300	6
5	400	0	1750	4	13	400	10	1825	14
6	400	20	1700	9	14	400	40	2200	7
7	500	10	1700	11	15	500	0	1600	8
8	500	40	2100	10	16	500	20	1800	5

A tubulação que conecta o *manifold* 1 ao seu separador possui um comprimento de 100 m, enquanto a tubulação que conecta o *manifold* 2 ao seu separador mede 50 m. Ambos possuem elevação desprezível,  $ID = 4,5$  polegadas, e  $R = 0,001$  polegadas. A pressão absoluta dos

*manifolds* pode variar de 300 a 800 *psi* de acordo com as condições operacionais, enquanto a pressão nominal do separador é 300 *psi*.

Todos os poços possuem tubulações idênticas com as seguintes características: ID de 3 polegadas, profundidade de perfuração de 3,7 km, profundidade de 2,7 km, e ponto de injeção a 2,8 km. A maior taxa de vazão de gás permitida para cada poço é de 8000 Mscf/d.

As curvas usadas para representar este sistema de produção estão disponíveis em (SILVA A. CODAS, 2011) em formato AMPL. Esta instância foi obtida com o uso do *software* Schlumberger PIPESIM, inspirado em uma instância sintética apresentada em (KOSMIDIS; PERKINS; PISTIKOPOULOS, 2004).

## 5.2 ANÁLISE DE DESEMPENHO

Esta seção apresenta uma análise computacional das formulações lineares inteiras-mistas apresentadas no Capítulo 4 para o cenário apresentado na seção anterior. Essas formulações foram escritas na linguagem de programação matemática AMPL e resolvidas com o *solver* de programação inteira-mista CPLEX 11 em uma estação de trabalho com sistema operacional Linux, com processador Intel Core 2 Quad 3.0GHz e com 4GB de memória RAM. Todos os experimentos foram executados com um limite de tempo de 10.000 segundos ( $\approx 2,78$  horas).

Para fins de comparação do desempenho das formulações, foram analisados o impacto da variação da capacidade de compressão de gás e da quantidade de politopos usados para representar as funções lineares por partes multidimensionais. A primeira análise avalia como o desempenho dos modelos varia em função da limitação de gás de injeção no sistema, enquanto a segunda análise tem o intuito de analisar o tempo de execução dos modelos quando a qualidade da aproximação se torna mais fina e, conseqüentemente, o número de variáveis adicionais do problema aumenta. Para a primeira análise, foram considerados três níveis de capacidade de compressão de gás no compressor:

**Capacidade de Compressão Alta:** Não há limite para a vazão de gás de injeção;

**Capacidade de Compressão Média:** A vazão de gás de injeção disponível no compressor é a metade da vazão necessária para injetar o máximo possível em todos os poços;

**Capacidade de Compressão Baixa:** A capacidade de compressão de gás para todo o sistema é o equivalente ao máximo de gás que

se pode injetar em um único poço.

Para a segunda análise, os domínios das funções lineares por partes foram particionados em politopos caracterizados como hipercubos e simplexes. Foram considerados três níveis de qualidade de aproximação das funções lineares por partes que aproximam as funções  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  e  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ :

**Qualidade Baixa:** Uma aproximação com hipercubos foi considerada com qualidade baixa quando possui 18 politopos (6 *breakpoints* de injeção de gás e 3 *breakpoints* de pressão no *manifold*) no domínio da função  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  e 25 (5 *breakpoints* para cada fase do fluido) politopos no domínio da função  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ . Para representar o mesmo domínio, uma aproximação com simplexes considerada de qualidade baixa possui 36 politopos (o dobro do número de quadrados) no domínio da função  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  e 150 (6 vezes o número de cubos) politopos no domínio da função  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ ;

**Qualidade Média:** Para uma qualidade média, a aproximação com hipercubos representa o domínio da função  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  com 66 politopos (11 *breakpoints* de injeção de gás e 6 *breakpoints* de pressão no *manifold*) e o domínio da função  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  com 1000 politopos (10 *breakpoints* para cada fase do fluido). A representação do domínio por simplexes para a qualidade média possui 132 (o dobro do número de quadrados) politopos no domínio da função  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  e 6000 (6 vezes o número de cubos) politopos no domínio da função  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ ;

**Qualidade Fina:** Para uma qualidade fina, a aproximação com hipercubos representa o domínio da função  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  com 180 (15 *breakpoints* de injeção de gás e 12 *breakpoints* de pressão no *manifold*) politopos e o domínio da função  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  com 2197 politopos (13 *breakpoints* para cada fase do fluido). A representação do domínio por simplexes para a qualidade fina possui 360 (o dobro do número de quadrados) politopos no domínio da função  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  e 13182 (6 vezes o número de cubos) politopos no domínio da função  $\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$ .

Note que a representação do mesmo domínio para uma qualidade de aproximação similar possui um número diferente de politopos para a representação com hipercubos e simplexes. Para a aproximação da função  $\mathbf{q}^{n,m}(p^m, q_i^n)$  com domínio bidimensional, cada quadrado do domínio é particionado em dois triângulos. Para a aproximação da função



$\Delta p^m(\mathbf{q}^m)$  com domínio tridimensional, cada cubo é particionado em 6 tetraedros. Portanto, dentre as aproximações, a representação do domínio por simplexes é mais fina.

Inicialmente, é feita uma comparação dos modelos DCC, DLog, CC e SOS2 com a aproximação por hipercubos. Em seguida, os modelos DCC, DLog, CC, Log e MC são aproximados com uma família de polítopos que é compatível com a triangulação J1 e analisados quanto ao seu desempenho computacional. A parte final desta seção compara o desempenho de ambas as aproximações e discute a qualidade de aproximação de cada abordagem.

A Seção A.3 do Apêndice apresenta os tamanhos das formulações desenvolvidas, considerando o número de variáveis contínuas, binárias e de restrições do problema para as diferentes qualidades de aproximação. Os parâmetros usados no problema de otimização, bem como as soluções obtidas para as aproximações por simplexes e hipercubos, considerando as diferentes qualidades, são apresentados na Seção A.4 do Apêndice.

### 5.2.1 Aproximação por Hipercubos

Nesta seção, será feita uma análise computacional dos modelos DCC, DLog, CC e SOS2 com hipercubos para o problema de alocação de gás discutido no Capítulo 2. As formulações que falharem ao tentar encontrar uma solução ótima para o problema por excesso de memória serão apresentadas nas tabelas com um asterisco (\*).

A primeira parte desta seção tem como objetivo analisar o desempenho computacional dos modelos com a variação da capacidade de compressão de gás, enquanto a segunda faz uma análise do desempenho com relação à variação do número de polítopos, considerando a evolução do *GAP* dual no tempo.

#### 5.2.1.1 Variação da Capacidade de Compressão de Gás

Nesta seção, o desempenho computacional dos modelos é analisado com diferentes taxas disponíveis no compressor para injeção de gás. As Tabelas 4, 5 e 6 apresentam os tempos de execução (em segundos) de cada formulação para resolver o problema de otimização da produção para uma qualidade de aproximação baixa, média e alta, respectivamente, variando-se a capacidade de compressão de gás de in-

jeção. Nessas tabelas também é apresentado o *GAP* dual da solução encontrada dentro do tempo limite de 10.000 segundos ( $\approx 2,77$  horas).

Tabela 4: Aproximação com Hipercubos com Qualidade Baixa

		Alta	Média	Baixa
DCC	Tempo (s)	21,47	21,14	553,58
	<i>GAP</i> (%)	0	0	0
DLog	Tempo (s)	21,11	17,05	144,38
	<i>GAP</i> (%)	0	0	0
CC	Tempo (s)	17,66	12,98	893,37
	<i>GAP</i> (%)	0	0	0
SOS2	Tempo (s)	5,90	6,57	238,99
	<i>GAP</i> (%)	0	0	0

Analisando-se os dados da Tabela 4, os quais são referentes à aproximação com qualidade baixa, pode-se notar que todos os modelos conseguem encontrar a solução ótima para todas as capacidades de compressão de gás no compressor. Para as capacidades de compressão de gás alta e média, os modelos tiveram desempenho similar, sendo o SOS2 o modelo com o melhor desempenho. Com uma capacidade de compressão de gás baixa, o problema se torna mais restrito e os modelos levam mais tempo para encontrar a solução ótima. Neste caso, o modelo DLog teve um desempenho melhor.

Tabela 5: Aproximação com Hipercubos com Qualidade Média

		Alta	Média	Baixa
DCC	Tempo (s)	276,61	397,94	10.000
	<i>GAP</i> (%)	0	0	2,41
DLog	Tempo (s)	7.460,58	10.000	10.000
	<i>GAP</i> (%)	0	0,03	0,12
CC	Tempo (s)	105,22	53,17	10.000
	<i>GAP</i> (%)	0	0	9,91
SOS2	Tempo (s)	21,11	28,68	367,44
	<i>GAP</i> (%)	0	0	0

Analisando-se os dados da Tabela 5, a qual apresenta os resultados para uma qualidade de aproximação média, pode-se notar que todos os modelos convergem para a solução ótima com a capacidade de compressão de gás alta. Com capacidade de compressão de gás média,

apenas o modelo Dlog não encontra a solução ótima. Para uma capacidade de compressão de gás baixa, apenas o modelo SOS2 conseguiu encontrar a solução ótima. O modelo CC teve um desempenho melhor que o DCC para os cenários com capacidades de compressão de gás alta e média, e também conseguiu chegar mais próximo da solução ótima com uma capacidade de compressão baixa. Isto era esperado, pois o modelo CC reduz o número de variáveis do modelo DCC agregando as variáveis contínuas associadas aos vértices dos politopos. Entretanto, com uma capacidade de compressão de gás baixa, o modelo CC não chegou à solução ótima, ficando com um *GAP* dual de 9.91%, que é relativamente elevado. O modelo SOS2 teve o melhor desempenho para todas as capacidades de compressão de gás. Este resultado aponta que, no cenário com qualidade de aproximação média, o tratamento algorítmico das restrições SOS2 ao invés do uso de variáveis binárias deu ganhos significativos na resolução do problema de alocação de gás.

Tabela 6: Aproximação com Hipercubos com Qualidade Fina

		Alta	Média	Baixa
DCC	Tempo (s)	3.927,00	4.180,19	6.618,02*
	<i>GAP</i> (%)	0,00	0,00	169,36
DLog	Tempo (s)	10.000,00	10.000,00	10.000,00
	<i>GAP</i> (%)	0,11	50,29	22,72
CC	Tempo (s)	4.078,94	1.002,81	10.000,00
	<i>GAP</i> (%)	0,00	0,00	7,63
SOS2	Tempo (s)	380,97	417,99	10.000,00
	<i>GAP</i> (%)	0,00	0,00	5,95

Analisando-se os dados da Tabela 6, que apresentam os resultados para uma qualidade de aproximação alta, pode-se notar que, com exceção do modelo DLog, todos os demais modelos conseguiram encontrar a solução ótima com as capacidades de compressão de gás alta e média. Isto mostra que o ganho obtido com a redução logarítmica de variáveis binárias com relação ao número de politopos teve pouca influência no desempenho computacional do modelo DLog, pois era esperado que este modelo tivesse um bom desempenho com um número maior de politopos. Com uma capacidade de compressão de gás baixa, nenhum dos modelos conseguiu encontrar a solução ótima. O modelo SOS2 teve o melhor desempenho dentre os modelos, conseguindo chegar mais próximo da solução ótima com uma capacidade de compressão baixa, com um *GAP* dual de 5,95%.

## 5.2.1.2 Variação da Qualidade de Aproximação

Esta seção tem como objetivo analisar o desempenho dos modelos com a variação da qualidade da aproximação, considerando a evolução do *GAP* dual ao longo do tempo de execução. As Figuras 13, 14 e 15 apresentam os gráficos dos modelos para os cenários com capacidades de compressão de gás alta, média e baixa, respectivamente. Cada gráfico apresenta o desempenho dos modelos para as aproximações com as qualidades baixa, média e fina. Os gráficos estão em escala logarítmica em função da alta variação do tempo computacional e *GAP*. A aproximação com hipercubos para as qualidades baixa, média e alta são denotadas por 18-125, 66-1000 e 180-2197, respectivamente. Tais valores representam o número de polítopos para os domínios das funções de vazão dos poços e das curvas de queda de pressão nas tubulações.

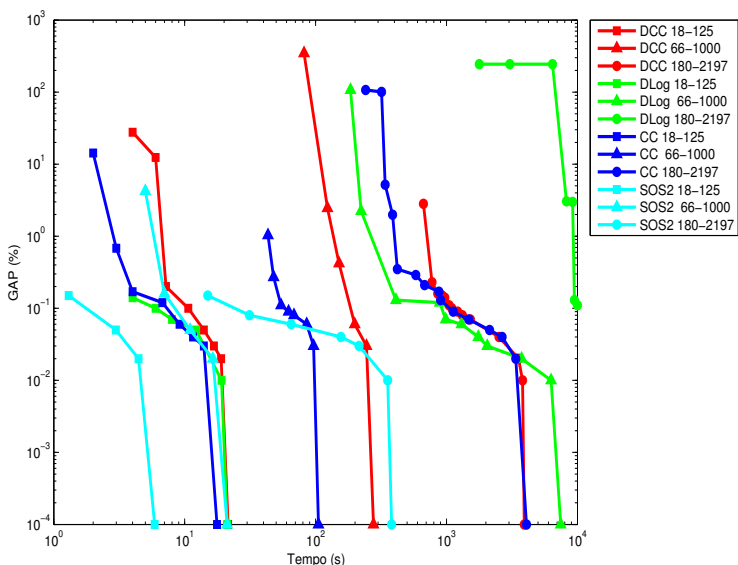


Figura 13: Hipercubos - Capacidade de compressão Alta

Analisando-se o gráfico ilustrado na Figura 13, cujo cenário é caracterizado pela capacidades de compressão alta de gás, pode-se no-

tar que todos os modelos convergiram para a solução ótima com as qualidades de aproximação baixa e média. Quando a qualidade é fina, apenas o modelo DLog não conseguiu encontrar a solução. Este resultado aponta que o crescimento logarítmico em relação ao número de politopos de variáveis binárias do modelo DLog não teve muita influência no desempenho deste modelo. Para a aproximação com qualidade baixa, os modelos tiveram um desempenho similar, encontrando a solução ótima em menos de 100 segundos. O modelo SOS2 teve melhor desempenho com todas as qualidades de aproximação.

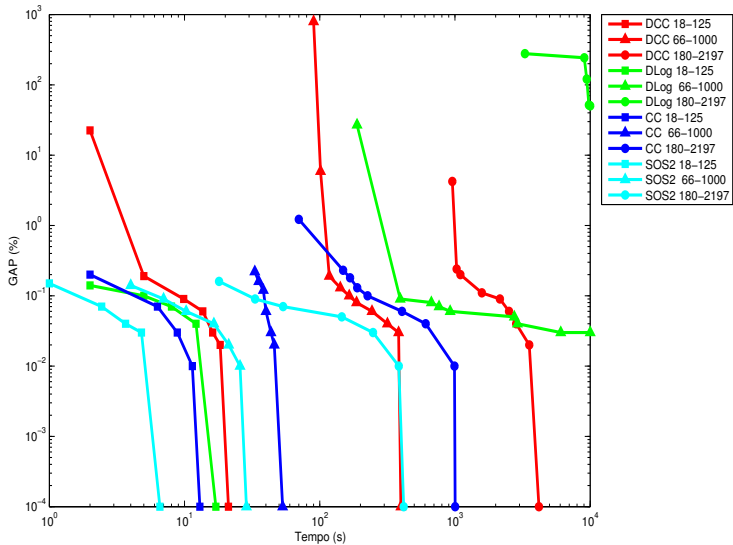


Figura 14: Hipercubos - Capacidade de Compressão Média

Analisando-se o gráfico da Figura 14, cujo cenário é caracterizado pela capacidade de compressão de gás média, pode-se notar que, com uma qualidade de aproximação baixa, todos os modelos conseguiram encontrar a solução ótima e fechar o *GAP* dual. Com esta qualidade de aproximação, o desempenho dos modelos foi similar, sendo o modelo SOS2 aquele com melhor desempenho. Para as qualidades de aproximação média e alta, todos os modelos, com exceção do DLog, conseguiram encontrar a solução ótima. Embora tenha conseguido fechar o *GAP*,

o modelo DCC encontrou a primeira solução factível mais distante da solução ótima para todas as qualidades de aproximação. Pode-se notar que, quando o número de politopos aumenta, o modelo DLog tem o pior desempenho dentre os modelos e não chegou à solução ótima para os cenários com capacidade de compressão de gás média e baixa. Este resultado pode indicar que o impacto do número logarítmico de variáveis binárias adicionais deste modelo teve pouca influência no desempenho do mesmo. O modelo SOS2 também teve o melhor desempenho para as qualidades de aproximação média e alta, indicando que o tratamento de restrições SOS2 pelo *solver* acelerou consideravelmente o desempenho deste modelo.

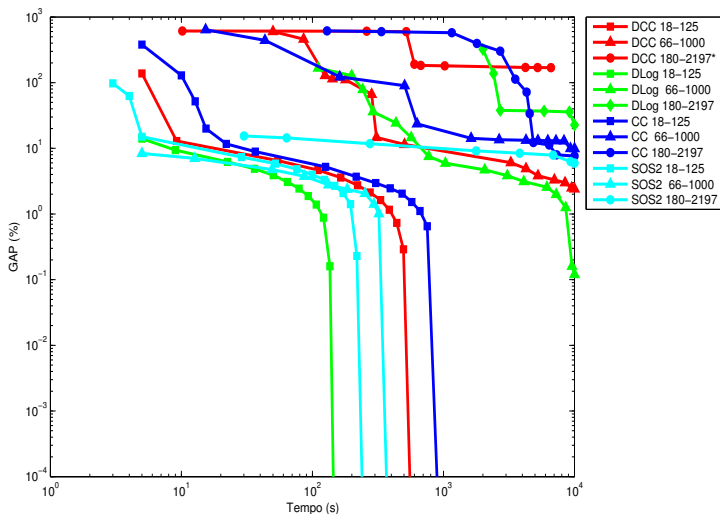


Figura 15: Hipercubos - Capacidade de Compressão Baixa

A Figura 15 apresenta um gráfico que relaciona o *GAP* pelo tempo de execução dos modelos com aproximação por hipercubos para o cenário com capacidade de compressão baixa. Para a qualidade de aproximação baixa, todos os modelos conseguiram encontrar a solução ótima. Neste cenário, embora o modelo SOS2 tenha encontrado uma solução factível primeiro, o modelo DLog teve o melhor desempenho.

Com uma qualidade de aproximação média, dentre todos os modelos, apenas o modelo SOS2 conseguiu encontrar a solução ótima. Quando a qualidade de aproximação se torna fina, nenhum dos modelos conseguiu encontrar a solução ótima para o problema, sendo o SOS2 o modelo que conseguiu encontrar uma solução mais próxima da solução ótima, com um *GAP* dual de 5,95%. Este resultado mostra que o problema de alocação de gás com capacidade de compressão baixa no compressor é um problema consideravelmente difícil de se resolver à medida que a qualidade da aproximação se torna mais fina.

### 5.2.2 Aproximação por Simplexes

Nesta seção, será feita uma análise computacional dos modelos DCC, DLog, CC, Log e MC para uma aproximação por simplexes para o problema de alocação de gás discutido no Capítulo 2. As formulações que falharem ao tentar encontrar uma solução ótima por falta de memória serão apresentadas nas tabelas com um asterisco (\*).

De forma similar ao que foi feito na seção que apresenta os resultados com a aproximação por hipercubos, a primeira parte desta seção tem como objetivo analisar o desempenho computacional dos modelos com a variação da capacidade de compressão de gás, enquanto a segunda faz uma análise do desempenho com relação à variação do número de polítopos, considerando a evolução do *GAP* dual no tempo.

#### 5.2.2.1 Variação da Capacidade de Compressão de Gás

Nesta seção, o desempenho computacional dos modelos é analisado com diferentes taxas disponíveis no compressor para injeção de gás. As Tabelas 7, 8 e 9 apresentam os tempos de execução (em segundos) gastos por cada formulação para resolver o problema de alocação de gás com as qualidades de aproximação baixa, média e alta, respectivamente, variando-se a capacidade de compressão de gás de injeção. Nessas tabelas também são apresentados os *GAP*'s duais das soluções encontradas dentro do tempo limite de 10.000 segundos.

Com base nos resultados apresentados na Tabela 7, pode-se notar que, para uma capacidade de compressão alta, todos os modelos, com exceção do CC conseguiram encontrar a solução ótima. Para as capacidades de compressão média e baixa, os modelos DCC e CC não conseguiram encontrar a solução ótima, embora estes modelos tenham

Tabela 7: Simplexes - Qualidade Baixa

		Alta	Média	Baixa
DCC	Tempo (s)	614,22	10.000,00	*7.000,00
	GAP (%)	0,00	0,04	8,63
DLog	Tempo (s)	220,61	570,31	3152,90
	GAP (%)	0,00	0,00	0,00
CC	Tempo (s)	10.000,00	10.000,00	10.000,00
	GAP (%)	0,02	0,05	8,61
Log	Tempo (s)	7,29	7,42	6,88
	GAP (%)	0,00	0,00	0,00
MC	Tempo (s)	791,46	775,62	365,35
	GAP (%)	0,00	0,00	0,00

chegado a uma solução com GAP relativamente pequeno para a capacidade de compressão média. O modelo DCC encontrou a solução ótima com uma capacidade de compressão alta, mas falhou ao tentar encontrar a solução para o problema com capacidade de compressão baixa. É relevante observar que, para as capacidades de compressão alta e média, os modelos logarítmicos DLog e Log tiveram o melhor desempenho, tendo melhor desempenho que os modelos DCC e CC para todas as capacidades de compressão de gás. Isto era esperado, pois a aproximação por simplexes possui mais politopos do que a aproximação por hiper-cubos para a mesma qualidade de aproximação. Assim, as propriedades de crescimento logarítmico das formulações DLog e Log tiveram um impacto relevante na aproximação por simplexes com capacidades de compressão de gás alta e média. Entretanto, quando a restrição de capacidade de compressão de gás se torna mais restrita, o modelo MC apresenta um desempenho melhor que o modelo DLog. Em todos os cenários, o modelo Log teve o melhor desempenho.

Analisando-se os dados da Tabela 8, pode-se notar que, para uma capacidade de compressão alta, todos os modelos, com exceção do MC, conseguiram encontrar a solução ótima. Com uma capacidade de compressão média, com exceção do DLog que não fechou o GAP no tempo disponível, os demais modelos conseguiram encontrar a solução ótima, sendo o modelo MC aquele que teve o pior desempenho. É válido observar que, com as capacidades de compressão de gás alta e média, o modelo DCC teve desempenho melhor que o modelo DLog. Este resultado não era esperado, pois o número maior de politopos da aproximação com qualidade média deveria evidenciar o crescimento lo-



Tabela 8: Simplexes - Qualidade Média

		Alta	Média	Baixa
DCC	Tempo (s)	3.342,49	3716,04	*5350,45
	GAP (%)	0,00	0,00	13,33
DLog	Tempo (s)	4.701,79	10.000,00	10.000,00
	GAP (%)	0,00	0,02	4,54
CC	Tempo (s)	2.423,16	1.713,72	*4.341,63
	GAP (%)	0,00	0,00	127,36
Log	Tempo (s)	27,97	13,92	60,04
	GAP (%)	0,00	0,00	0,00
MC	Tempo (s)	10.000,00	9.019,77	10.000,00
	GAP (%)	0,04	0,00	3,26

garítmico de variáveis binárias do modelo DLog em relação ao DCC. Isto pode se dar pelas características intrínsecas do poliedro formado pelas restrições do problema de alocação de gás. Outro fato a se destacar é que o modelo CC teve melhor desempenho que o modelo DCC com as capacidades de compressão alta e média. Isto era esperado, pois o modelo CC reduz o número de variáveis contínuas do modelo DCC agregando as variáveis associadas aos vértices de politopos vizinhos. Para a capacidade de compressão baixa, os modelos DCC e CC falharam ao tentar encontrar a solução ótima para o problema e apenas o modelo Log conseguiu encontrar a solução ótima para o problema. Para todas as capacidades de compressão de gás, o modelo Log teve desempenho consideravelmente superior aos demais modelos. Analisando-se

Tabela 9: Simplexes - Qualidade Alta

		Alta	Média	Baixa
DCC	Tempo (s)	*5.808,49	*6.975,51	*6.026,55
	GAP (%)	554,05	536,78	554,09
DLog	Tempo (s)	10.000,00	10.000,00	10.000,00
	GAP (%)	0,12	0,10	29,11
CC	Tempo (s)	*6.985,34	*5.818,30	*4.305,80
	GAP (%)	63,54	100,45	111,02
Log	Tempo (s)	106,61	96,55	698,11
	GAP (%)	0,00	0,00	0,00
MC	Tempo (s)	10.000,00	10.000,00	10.000,00
	GAP (%)	0,30	0,23	10,21

os dados da Tabela 9, pode-se notar que os modelos DCC e CC falharam ao tentar encontrar a solução ótima para todas as capacidades de compressão de gás. Os modelos DLog e MC não conseguiram encontrar a solução ótima dentro do tempo disponível. Apenas o modelo Log conseguiu encontrar a solução ótima em todos os cenários de capacidade de compressão de gás. Este resultado mostra que a propriedade de crescimento logarítmico do número de variáveis e restrições adicionais do modelo Log teve um impacto considerável na eficiência de solução do problema com uma qualidade alta.

### 5.2.2.2 Variação da Qualidade da Aproximação

Esta seção apresenta uma análise de desempenho dos modelos com variações na qualidade das aproximações por simpleses. As Figuras 16, 17 e 18 apresentam a evolução do *GAP* em função do tempo de execução dos modelos para os cenários com capacidades de compressão de injeção de gás alta, média e baixa, respectivamente. Os gráficos estão em escala logarítmica em função da alta variação do tempo computacional e *GAP*. Para fins de comparação, cada gráfico apresenta o desempenho dos modelos para as aproximações com qualidades fina, média e baixa em cada cenário de capacidade de compressão de gás.

Analisando-se o gráfico ilustrado na Figura 16, cujo cenário é caracterizado pela capacidade de compressão alta, pode-se notar que, para uma qualidade de aproximação baixa, todos os modelos, com exceção do CC, conseguem encontrar a solução ótima. Neste cenário, os modelos DCC e MC têm desempenho similar, enquanto o modelo DLog apresenta um desempenho melhor. Para uma aproximação com qualidade média, apenas os modelos Log, DLog e DCC conseguem encontrar a solução ótima. Neste cenário, os modelos logarítmicos apresentam um resultado melhor, o que era esperado, uma vez que o número de variáveis destes cresce de forma logarítmica em relação ao número de politopos. Com uma qualidade de aproximação fina, apenas o modelo Log consegue encontrar a solução ótima, sendo o modelo com melhor desempenho para todas as qualidades de aproximação no cenário com capacidade de compressão de gás alta.

O gráfico ilustrado na Figura 17 apresenta o desempenho dos modelos com um cenário caracterizado pela capacidade de compressão média de gás. Neste cenário, todos os modelos, com exceção do CC, convergem para a solução ótima para uma qualidade de aproximação baixa. Os modelos DLog e MC apresentaram desempenho similar, en-

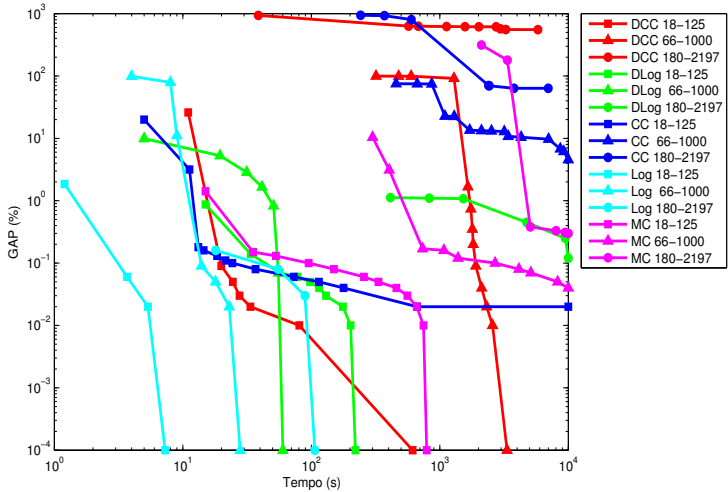


Figura 16: Simplexes - Capacidade de Compressão Alta

quanto os modelos DCC e Log tiveram desempenho melhor. Para a aproximação com qualidade média, apenas o modelo DLog não conseguiu encontrar a solução ótima. Ao contrário do esperado, o modelo DCC teve desempenho superior ao DLog com as qualidades de aproximação baixa e média, possivelmente porque o poliedro do problema é menor devido à restrição mais apertada da capacidade de compressão de gás, minimizando o ganho do modelo DLog com a redução do número de variáveis binárias. Com uma qualidade de aproximação fina, os modelos DCC e CC falharam ao tentar encontrar a solução ótima. Os modelos DLog e MC não encontraram a solução ótima, mas ficaram com um GAP dual relativamente pequeno. Apenas o modelo Log conseguiu encontrar a solução ótima para o problema, sendo o modelo com o melhor desempenho para todas as qualidades de aproximação no cenário com capacidade de compressão média.

O gráfico ilustrado na Figura 18 apresenta o desempenho dos modelos para um cenário caracterizado pela capacidade de compressão baixa de gás. Para uma qualidade de aproximação baixa, apenas os modelos Log, MC e DLog conseguiram encontrar a solução ótima. O

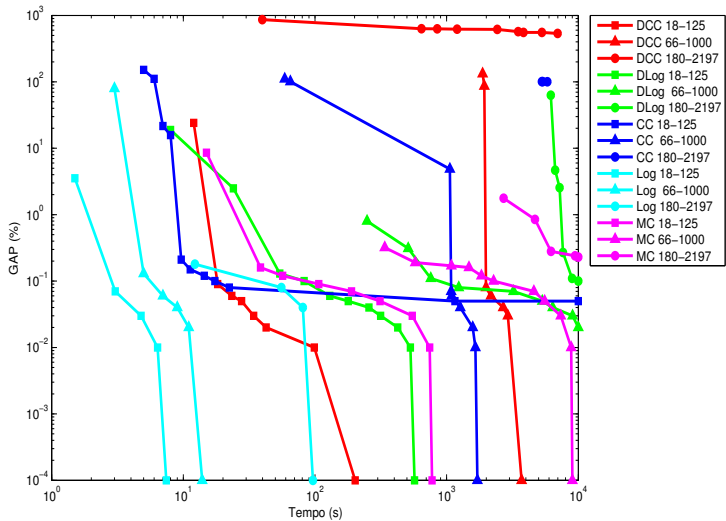


Figura 17: Simplexes - Capacidade de Compressão Média

modelo MC teve desempenho melhor que o modelo DLog, enquanto o Log teve o melhor desempenho. Para as qualidades de aproximação média e alta, apenas o modelo Log conseguiu encontrar a solução ótima, sendo o modelo com melhor desempenho para todas as qualidades de aproximação no cenário com capacidade de compressão baixa de gás.

### 5.2.3 Análise Geral

Esta seção analisa o desempenho computacional das formulações para as aproximações com simplexes e hipercubos, considerando o impacto da variação na qualidade de aproximação em cada abordagem. Para o cenário analisado, os resultados obtidos com a análise computacional dos modelos para ambas as aproximações suscitaram as seguintes conclusões:

**Desempenho Computacional** : De um modo geral, para o cenário analisado, os modelos SOS2 e Log apresentaram os melhores desempenhos para as aproximações por hipercubos e por simple-

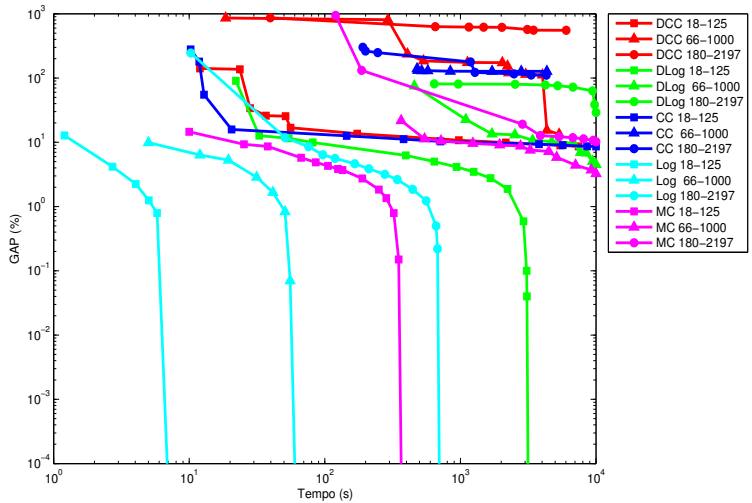


Figura 18: Simplexes - Capacidade de Compressão Baixa

xes, respectivamente. Com as qualidade de aproximação baixa, embora os resultados sejam próximos, o modelo SOS2 tem desempenho ligeiramente melhor quando a capacidade de compressão de gás é alta ou média. Quando a capacidade de compressão se torna restrita, o Log apresenta resultado consideravelmente mais eficiente. Para uma qualidade de aproximação média, o SOS2 é melhor apenas com capacidade de compressão alta. Nos casos com qualidades média e alta, o Log tem melhor desempenho. Com uma qualidade de aproximação alta, o Log é melhor que o SOS2 em todos os cenários. Na situação específica em que a qualidade de aproximação é baixa e a capacidade de compressão de gás é baixa, o modelo DLog teve melhor desempenho que o SOS2. Com os resultados apresentados neste capítulo, nota-se que, quando a capacidade de compressão de gás é baixa, o problema de alocação de gás se torna mais difícil. Neste cenário, à medida que a aproximação se torna mais fina, ou seja, o número de politopos aumenta, o modelo Log se destaca pelo seu desempenho em relação aos demais modelos. Para a qualidade de aproximação fina, dentre todos os modelos, apenas o modelo

Log conseguiu encontrar a solução ótima para o problema. Isto se explica pelo crescimento logarítmico de variáveis contínuas e binárias do modelo Log em relação ao número de politopos.

**Qualidade da Aproximação** : Para uma mesma qualidade, a aproximação por hipercubos resulta em formulações com menos variáveis contínuas, pois possui menos politopos que a aproximação por simplexes. Entretanto, como a representação do domínio de ambas aproximações é equivalente, a aproximação com simplexes é mais fina e produz um resultado com erros de aproximação menores.

Para uma qualidade baixa, os modelos DLog e SOS2 apresentaram desempenho melhor para a aproximação com hipercubos, enquanto o DLog, MC e Log tiveram melhor desempenho com simplexes. Para uma qualidade média, apenas os modelos DLog e MC enfrentaram dificuldades para resolver o problema, porém, quando a capacidade de compressão de gás é baixa, neste cenário, apenas os modelos SOS2 e Log conseguem encontrar a solução ótima. Para as aproximações por hipercubos, quando a qualidade da aproximação é fina, os modelos DCC, CC e o SOS2 conseguem resolver o problema com as capacidades de compressão de gás alta e média. Entretanto, quando a capacidade de compressão de gás se torna restrita (baixa) neste cenário, nenhum dos modelos com aproximação por hipercubos consegue resolver o problema. Para as aproximações com simplexes, apenas o Log conseguiu resolver o problema com a qualidade de aproximação fina para qualquer capacidade de compressão de gás.

### 5.3 SUMÁRIO

Neste capítulo, foi apresentada uma análise computacional das formulações lineares inteiras-mistas vistas no Capítulo 4 para o problema de alocação de gás sob restrições de alinhamento e de pressão apresentado no Capítulo 2. Inicialmente, foi apresentado um sistema de produção de um campo de petróleo que serviu como instância para a análise computacional. Em seguida, foi apresentada a análise de desempenho dos modelos DCC, DLog, CC e SOS2 para uma aproximação com hipercubos que considerou a variação de capacidade de compressão de gás e a variação da qualidade de aproximação. Foi apresentada também uma análise de desempenho dos modelos DCC, DLog, CC, Log e MC para uma aproximação com simplexes que também levou em

conta a variação da capacidade de compressão de gás e a variação da qualidade de aproximação. Por fim, foi feita uma análise geral do desempenho das aproximações com simplexes e hipercubos, considerando a qualidade de aproximação de cada abordagem.





## 6 SUMÁRIO

A alta competitividade dos mercados petrolíferos e os altos custos do processo de extração tornam qualquer lucro obtido na produção de hidrocarbonetos muito significativo. Neste contexto, a obtenção das taxas ótimas de injeção de gás para os poços com elevação artificial, da configuração das válvulas como resultado das pressões obtidas pelos modelos de otimização e do alinhamento entre poços e *manifolds* que permitam maximizar o benefício obtido com a produção tem papel importante nos campos de petróleo. Neste trabalho, foram apresentados modelos e uma abordagem de solução para se obter o modo de operação diário que maximiza a produção de campos de petróleo que utilizam a elevação artificial por injeção contínua de gás.

Uma formulação não linear inteira-mista foi desenvolvida para modelar o problema de alocação de gás de injeção em poços sujeitos a restrições de capacidade de gás disponível no compressor, limites operacionais de vazão dos poços e às restrições de pressão, o que configura um cenário bem próximo da realidade de campos de petróleo atuais. Uma vantagem da modelagem deste problema com programação inteira-mista é que outras restrições podem ser incorporadas ao modelo do problema, o qual pode ser estendido para outros cenários, servindo de base para diferentes métodos de solução.

A abordagem de solução utilizada neste trabalho foi a reformulação do problema não-linear inteiro-misto em um programa linear inteiro-misto com o uso de ferramentas de linearização por partes para funções multidimensionais. Foram desenvolvidas sete formulações em programação linear inteira-mista para solucionar o problema, considerando aproximações por hipercubos e por simplexes. A programação linear inteira-mista aliada à ferramenta de linearização por partes é uma ferramenta poderosa porque viabiliza o cômputo de soluções ótimas globais para problemas que envolvem funções não-convexas, o que geralmente configura problemas NP-Difíceis, *i.e.*, muito difíceis de se resolver, em especial, quando tais funções são multivariadas. O interessante desta ferramenta é que o erro da aproximação é reduzido à medida que a qualidade da aproximação se torna mais fina. Em contrapartida, à medida que a aproximação se torna mais fina, o problema se torna mais difícil de se resolver, pois passa a ter mais variáveis e restrições adicionais.

Foi apresentada uma análise computacional das formulações lineares inteiras-mistas desenvolvidas para um cenário modelado a partir

de um sistema de produção sintético construído com uma ferramenta de simulação de escoamento multifásico. A análise teve como objetivo analisar o desempenho computacional dos modelos com a variação da disponibilidade de gás no compressor e com diferentes qualidades de aproximação para hipercubos e simplexes. Os resultados encontrados podem servir para balizar a decisão dos operadores de campos de petróleo e para nortear o desenvolvimento de soluções mais específicas para cenários diferentes do abordado nesta dissertação. De um modo geral, para as instâncias usadas no trabalho, os modelos SOS2 e Log apresentaram os melhores desempenhos para as aproximações por hipercubos e por simplexes, respectivamente. Com a qualidade de aproximação baixa, embora os resultados sejam próximos, o modelo SOS2 tem desempenho ligeiramente melhor quando a capacidade de compressão de gás é alta ou média. Quando a capacidade de compressão se torna restrita, o Log apresenta resultado consideravelmente mais eficiente. Para uma qualidade de aproximação média, o SOS2 é melhor apenas com capacidade de compressão alta. Nos casos com qualidades média e alta, o Log tem melhor desempenho. Com uma qualidade de aproximação alta, o Log é melhor que o SOS2 em todos os cenários, sendo o único modelo a solucionar o problema com qualidade de aproximação alta e capacidade de compressão baixa.

Dentre as reformulações apresentadas neste trabalho, aquela que se baseia no modelo Inc não foi analisada quanto ao seu desempenho computacional porque não foi desenvolvido uma heurística de ordenação dos simplexes e vértices para o  $R^3$ . O desenvolvimento desta heurística é um trabalho futuro a ser desenvolvido.

Como sugestão para trabalhos futuros propomos uma abordagem híbrida através composição de uma aproximação convexa para a função de queda de pressão com a função linear por partes para a vazão dos poços. A aproximação convexa pode ser encontrada com um algoritmo de Programação Semi-definida. O resultado desta abordagem é uma formulação mais compacta e que pode trazer ganhos no desempenho devido à utilização da informação do gradiente da função convexa. Um outro tema de pesquisa futura é a extensão do problema para um cenário mais complexo, com a incorporação de alinhamento entre *manifolds* e separadores. Neste caso, a pressão de saída das tubulações, onde ocorrem as quedas de pressão, se torna uma variável do problema e a incorporação desta no problema de otimização requer a modelagem de uma função linear por partes de quatro dimensões. Espera-se que o modelo logarítmico (Log) tenha um bom desempenho neste cenário, uma vez que o crescimento do seu número de variáveis é logarítmico.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALARCÓN, G. A.; TORRES, C. F.; GÓMEZ, L. E. Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear constrained programming. *Journal of Energy Resources Technology*, v. 124, n. 4, p. 262–268, 2002.

BALAKRISHNAN, A.; GRAVES, S. C. A composite algorithm for a concave-cost network flow problem. *Networks*, v. 19, n. 2, p. 175–202, 1989.

BEALE, E. M. L. Branch and bound methods for numerical optimization of non-convex functions. *Computational Statistics*, v. 80, p. 11–20, 1980.

BEALE, E. M. L.; TOMLIN, J. A. Special facilities in a general mathematical programming system for non-convex problems using ordered sets of variables. In: *Proceedings of the Fifth International Conference on Operations Research*. [S.l.: s.n.], 1970. p. 447–454.

BEGGS, D.; BRILL, J. A study of two-phase flow in inclined pipes. *Journal of Petroleum technology*, Society of Petroleum Engineers, v. 25, n. 5, p. 607–617, 1973.

BOGAERT, P. M. et al. Improving oil production using Smart Fields technology in SF30 satellite oil development offshore Malaysia. In: *Proceedings of the Offshore Technology Conference*. Houston, TX: [s.n.], 2004.

BOOTHROYD, D. Unmanned platforms need multifunctional control. *Computing & Control Engineering Journal*, v. 5, n. 6, p. 274 –276, 1994.

BUITRAGO, S.; RODRÍGUEZ, E.; ESPIN, D. Global optimization techniques in gas allocation for continuous flow gas lift systems. In: *SPE Gas Technology Symposium*. Calgary, Alberta, Canada: [s.n.], 1996.

CAMPONOGARA, E.; CONTO, A. de. Lift-gas allocation under precedence constraints: MILP formulation and computational analysis. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, v. 6, n. 3, p. 544–551, July 2009.

CAMPONOGARA, E.; NAKASHIMA, P. H. R. Optimizing gas-lift production of oil wells: Piecewise linear formulation and computational analysis. *IIE Transactions*, v. 38, n. 2, p. 173–182, 2006.

CAMPONOGARA, E.; NAZARI, L. F.; MENESES, C. N. A revised model for compressor design and scheduling in gas-lifted oil fields. *IIE Transactions*, v. 44, n. 5, p. 342–351, 2012.

CAMPONOGARA, E. et al. An automation system for gas-lifted oil wells: Model identification, control, and optimization. *Journal of Petroleum Science & Engineering*, v. 70, n. 3-4, p. 157–167, 2010.

CAMPOS, S. R. V. et al. Urucu field integrated production modeling. In: *Proceedings of the SPE Intelligent Energy Conference and Exhibition*. Utrecht, The Netherlands: [s.n.], 2010.

CODAS, A.; CAMPONOGARA, E. Mixed-integer linear optimization for optimal lift-gas allocation with well-separator routing. *European Journal of Operational Research*, v. 212, p. 222–231, 2012.

CROXTON, K. L.; GENDRON, B.; MAGNANTI, T. L. A comparison of mixed-integer programming models for nonconvex piecewise linear cost minimization problems. *Management Science*, v. 49, p. 1268–1273, 2003.

DANTZIG, G. On the significance of solving linear programming problems with some integer variables. *Econometrica*, Journal of the Econometric Society, v. 28, n. 1, p. 30–44, 1960.

DUTTA-ROY, K.; KATTAPURAM, J. A new approach to gas-lift allocation optimization. In: *Proceedings of SPE Western Regional Meeting*. [S.l.: s.n.], 1997.

FANG, W. Y.; LO, K. K. A generalized well-management scheme for reservoir simulation. *SPE Reservoir Engineering*, v. 11, n. 2, p. 116–120, 1996.

FARIAS, I. R. D.; JOHNSON, E. L.; NEMHAUSER, G. L. Branch-and-cut for combinatorial optimization problems without auxiliary binary variables. *Knowledge Engineering Review*, v. 16, p. 25–39, 2001.

GÓMEZ, V. *Optimization of Continuous Flow Gas Lift Systems*. Dissertação (Mestrado) — University of Tulsa, Oklahoma, U.S.A, 1974.

- GUNNERUD, V.; FOSS, B. Oil production optimization—a piecewise linear model, solved with two decomposition strategies. *Computers & Chemical Engineering*, v. 34, n. 11, p. 1803–1812, 2010.
- HANDLEY-SCHACHLER, S.; MCKIE, C.; QUINTERO, N. New mathematical techniques for the optimisation of oil & gas production systems. In: *SPE European Petroleum Conference*. [S.l.: s.n.], 2000.
- IBARAKI, T. Integer programming formulation of combinatorial optimization problems. *Discrete Mathematics*, v. 16, p. 39–52, 1976.
- JEROSLOW, R.; LOWE, J. Experimental results on the new techniques for integer programming formulations. *Journal of the Operational Research Society*, v. 36, n. 5, p. 393–403, 1985.
- JEROSLOW, R. G.; LOWE, J. K. Modelling with integer variables. In: *Mathematical Programming at Oberwolfach II*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1984. v. 22, p. 167–184.
- KANU, E. P.; MACH, J. M.; BROWN, K. E. Economic approach to oil production and gas allocation in continuous gas lift. *Journal of Petroleum Technology*, v. 33, n. 10, p. 1887–1892, 1981.
- KEHA, A. B.; FARIAS JR, I. R. de; NEMHAUSER, G. L. Models for representing piecewise linear cost functions. *Operations Research Letters*, v. 32, p. 44–48, 2004.
- KOSMIDIS, V.; PERKINS, J.; PISTIKOPOULOS, E. Optimization of well oil rate allocations in petroleum fields. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, ACS Publications, v. 43, n. 14, p. 3513–3527, 2004.
- KOSMIDIS, V.; PERKINS, J.; PISTIKOPOULOS, E. A mixed integer optimization formulation for the well scheduling problem on petroleum fields. *Computers & Chemical Engineering*, Elsevier, v. 29, n. 7, p. 1523–1541, 2005.
- LEE, J.; WILSON, D. Polyhedral methods for piecewise-linear functions i: the lambda method. *Discrete Applied Mathematics*, v. 108, n. 3, p. 269–285, 2001.
- LITVAK, M.; DARLOW, B. Surface network and well tubinghead pressure constraints in compositional simulation. In: *Proceedings of the SPE Reservoir Simulation Symposium*. San Antonio, Texas: [s.n.], 1995.

MAYHILL, T. Simplified method for gas-lift well problem identification and diagnosis. In: *Proc. of Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME*. Houston, Texas: [s.n.], 1974.

MEYER, R. R. Mixed integer minimization models for piecewise-linear functions of a single variable. *Discrete Mathematics*, v. 16, n. 2, p. 163–171, 1976.

MISENER, R.; GOUNARIS, C. E.; FLOUDAS, C. A. Global optimization of gas lifting operations: A comparative study of piecewise linear formulations. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 48, n. 13, p. 6098–6104, 2009.

NISHIKIORI, N. et al. An improved method for gas lift allocation optimization. *ASME Journal of Energy Resources Technology*, v. 117, p. 87–92, 1995.

PADBERG, M. Approximating separable nonlinear functions via mixed zero-one programs. *Operations Research Letters*, v. 27, n. 1, p. 1–5, 2000.

REDDEN, D.; SHERMAN, T. A. G.; BLANN, J. R. Optimizing gas-lift systems. In: *49th Annual Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME*. [S.l.: s.n.], 1974.

SHERALI, H. D. On mixed-integer zero-one representations for separable lower-semicontinuous piecewise-linear functions. *Operations Research Letters*, v. 28, n. 4, p. 155–160, 2001.

SILVA A. CODAS, E. C. T. *Test instance of the lift-gas allocation problem with pressure constraints and well-separator routing in AMPL format*. 2011. <<http://www.das.ufsc.br/~camponog/IFAC-2012/>>.

SILVA, T. L.; CODAS, A.; CAMPONOGARA, E. A computational analysis of convex combination models for multidimensional piecewise-linear approximation in oil production optimization. In: *Proceedings of IFAC Workshop - Automatic Control in Offshore Oil and Gas Production*. Trondheim, Norway: [s.n.], 2012.

STOISITS, R. et al. Production optimization at the kuparuk river field utilizing neural networks and genetic algorithms. In: *Proceedings of the SPE Mid-Continent Operations Symposium*. [S.l.: s.n.], 1999.

TOMLIN, J. A. Special ordered sets and an application to gas supply operations planning. *Mathematical Programming*, v. 42, n. 1-3, p. 69–84, 1988.

VAZQUEZ, M. et al. Global optimization of oil production systems, a unified operational view. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. New Orleans, Louisiana: [s.n.], 2001.

VIELMA, J.; KEHA, A.; NEMHAUSER, G. Nonconvex, lower semicontinuous piecewise linear optimization. *Discrete Optimization*, v. 5, n. 2, p. 467–488, 2008.

VIELMA, J.; NEMHAUSER, G. Modeling disjunctive constraints with a logarithmic number of binary variables and constraints. *Mathematical Programming*, v. 128, n. 1-2, p. 49–72, 2009.

VIELMA, J. P.; AHMED, S.; NEMHAUSER, G. Mixed-integer models for nonseparable piecewise-linear optimization: Unifying framework and extensions. *Operations Research*, v. 58, n. 2, p. 303–315, 2010.

WANG, P. *Development and applications of production optimization techniques for petroleum fields*. Tese (Doutorado) — Stanford University, 2003.

WILF, H. *Combinatorial Algorithms: An Update, volume 55 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.

YETEN, B. et al. Decision analysis under uncertainty for Smart Well deployment. *Journal of Petroleum Science & Engineering*, v. 43, p. 183–199, 2004.





## APÊNDICE A – Apêndice



Esta Seção contém conceitos e ilustrações sobre a triangulação J1 que podem facilitar o entendimento desta dissertação. Além disto, apresenta informações sobre o número de variáveis e restrições dos problemas resolvidos nesta dissertação e as soluções correspondentes.

## A.1 TRIANGULAÇÃO J1 ("UNION JACK")

Em topologia, a generalização do conceito de triângulo a outras dimensões é um simplex, o qual é um invólucro convexo de  $n + 1$  pontos independentes em  $\mathcal{R}^n$ . Esta nomenclatura se deve ao fato de o simplex ser o polígono mais simples de sua dimensão, ou seja, um triângulo (2D) é o polígono que possui menos vértices e arestas, o tetraedro (3D) é o polígono que possui menos vértices, arestas e faces.

Uma triangulação J1 é composta por um conjunto de simplexes que particionam um domínio  $D = [0, K]^n$ , para  $K \in \mathbb{Z}$ , com  $K$  par. O conjunto de vértices da triangulação J1 é dado por  $\mathcal{V} = \{0, \dots, K\}^n$ . A construção desta triangulação é baseada no produto cartesiano de três conjuntos: conjunto dos vértices ímpares ( $\mathcal{V}^0$ ), conjunto de direções ( $S$ ) e conjunto de permutações ( $Sym(N)$ ). Seja  $N = \{1, \dots, n\}$ , sendo  $n$  a dimensão do domínio. Pode-se definir os conjuntos dos vértices ímpares, direções e permutações da triangulação J1 como segue:

- $\mathcal{V}^0 = \{v \in \mathcal{V} : v_i \text{ é ímpar}, \forall i \in N\}$
- $Sym(N) =$  Permutações simples do conjunto  $N$
- $S = \{-1, 1\}^n$

A triangulação J1 é então definida em torno dos vértices ímpares do conjunto  $\mathcal{V}^0$ . A Figura 19 ilustra uma triangulação J1 com domínio em  $[0, 2]^2$ , onde  $\mathcal{V}^0 = \{(1, 1)\}$ ,  $Sym(N) = \{(1, 2), (2, 1)\}$  e o conjunto  $S = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$ .

A partir do vértice ímpar  $v_0 = (1, 1)$  são definidos quatro quadrantes. O quadrante que contém os triângulos  $T_1$  e  $T_4$  corresponde à direção  $s_1 = (-1, -1)$ ; o quadrante que contém os triângulos  $T_2$  e  $T_3$  corresponde à direção  $s_2 = (-1, 1)$ ; o quadrante que contém os triângulos  $T_5$  e  $T_8$  é referente à direção  $s_3 = (1, -1)$ ; e o quadrante que contém os triângulos  $T_6$  e  $T_7$  é referente à direção  $s_4 = (1, 1)$ .

Cada quadrante é dividido em dois triângulos, que são definidos pelas permutações. Sendo assim, podemos afirmar que cada simplex em uma triangulação J1 pode ser identificado de forma única por uma tripla  $(v^0, \pi, s) \in \mathcal{V}^0 \times Sym(N) \times S^n$ . O triângulo  $T_1$  da Figura 19 é definido pela

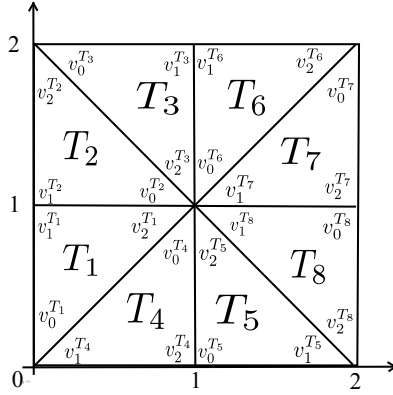


Figura 19: J1 ordenada em  $[0, 2]^2$

tripla  $[(1, 1), (1, 2), (-1, -1)]$ . Para a função ilustrada na Figura 8, com  $K = 4$ ,  $n = 2$  e  $\mathcal{V}^0 = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$  e  $Sym(n) = \{(1, 2), (2, 1)\}$ , o triângulo (politopo)  $P_3 = \{(1, 3), (0, 3), (0, 2)\}$  é definido a partir da tripla  $(v_0, \pi, s)$ , onde  $v_0 = (1, 3)$ ,  $\pi = (1, 2)$  e  $s = (-1, 1)$ .

Agora, vamos definir formalmente a triangulação J1. Seja  $e^i$  o  $i$ -ésimo vetor unitário de  $\mathcal{R}^n$ . Para cada  $(v^0, \pi, s) \in \mathcal{V}^0 \times Sym(N) \times S^n$ , há um simplex definido por  $j1(v_0, \pi, s)$ , cujos vértices  $\{v^i\}_{i=0}^n$  são definidos da seguinte forma:

$$\begin{cases} v^0 = v_0 \\ v^i = v^{i-1} + s_{\pi(i)} e^{\pi(i)}, \forall i \in N \end{cases}$$

Para ilustrar essa definição, apresentaremos a seguir a aplicação deste método para o triângulo  $T_1$  definido pela tripla  $[v_0, \pi, s]$ , onde  $v_0 = (1, 1)$ ,  $\pi = (1, 2)$  e  $s = (-1, -1)$ :

$$v^0 = (1, 1)$$

$$v^1 = v^0 + s_{\pi(1)} e^{\pi(1)}, \text{ onde } \pi(1) = 1, s_1 = -1, e^1 = (1, 0)$$

$$v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v^2 = v^1 + s_{\pi(2)} e^{\pi(2)}, \text{ onde } \pi(2) = 2, s_2 = -1, e^2 = (0, 1)$$

$$v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## A.2 ORDENAÇÃO NUMA TRIANGULAÇÃO J1

Neste seção, apresentamos uma heurística para ordenação dos simplexes da triangulação J1 no  $\mathbb{R}^2$ . A Figura 19 ilustra uma triangulação J1 em  $[0, 2]^2$  com os triângulos e vértices ordenados conforme as propriedades O1 e O2 apresentadas na Seção 3.5.2. A heurística de ordenação da triangulação J1 foi dividida em três partes.

A primeira parte cria uma ordenação para os vértices ímpares  $v_0 \in \mathcal{V}^0$  de acordo com as coordenadas em  $X$  e  $Y$ . Inicialmente, os vértice  $(x_i, y_i) \in \mathcal{V}^0$  são ordenados em relação a  $X$ . Em seguida, os vértices com a mesma coordenada  $x_i$  são ordenados em relação a  $Y$ . Esta ordenação garante que haja interseção entre os quadrantes.

A segunda parte ordena os triângulos de cada quadrante com base nos parâmetros que definem cada simplex da triangulação  $\mathcal{V}^0$ ,  $Sym(n)$  e  $S^n$  com o objetivo de garantir que a propriedade O1 seja satisfeita. Os triângulos são ordenados em direções de subida e descida, conforme ilustrado na Figura 19.

A subida do lado esquerdo do quadrante, correspondente às direções  $S_e = \{(-1, -1), (-1, 1)\}$ , seleciona os triângulos  $T_1\{v_0 = (1, 1), \pi = (1, 2), s = (-1, -1)\}$  e  $T_2\{v_0 = (1, 1), \pi = (1, 2), s = (-1, 1)\}$ , com a permutação  $(1, 2)$ . Em seguida, a descida é realizada com a escolha da permutação  $(2, 1)$ , definindo os triângulos  $T_3\{v_0 = (1, 1), \pi = (2, 1), s = (-1, 1)\}$  e  $T_4\{v_0 = (1, 1), \pi = (2, 1), s = (-1, -1)\}$ .

A subida do lado direito do quadrante, correspondente às direções  $S_d = \{(1, -1), (1, 1)\}$ , seleciona os triângulos  $T_5\{v_0 = (1, 1), \pi = (2, 1), s = (1, -1)\}$  e  $T_6\{v_0 = (1, 1), \pi = (2, 1), s = (1, 1)\}$ , com a permutação  $(2, 1)$ . Em seguida, a descida é realizada com a escolha da permutação  $(1, 2)$ , definindo os triângulos  $T_7\{v_0 = (1, 1), \pi = (1, 1), s = (1, 1)\}$  e  $T_8\{v_0 = (1, 1), \pi = (1, 2), s = (1, -1)\}$ .

Na segunda parte da heurística, os triângulos foram ordenados de tal forma que há pelo menos um vértice comum entre os triângulos subsequentes. A terceira parte da heurística define a ordenação dos vértices de cada triângulo com o objetivo de satisfazer a propriedade O2. Para isto, dados os triângulos subsequentes  $T_i$  e  $T_{i+1}$ , basta escolher um vértice em comum desses triângulos e garantir que este vértice será o último vértice de  $T_i$  e o primeiro vértice de  $T_{i+1}$ . O primeiro vértice do primeiro triângulo é escolhido do conjunto dos vértices deste triângulo que não são comuns ao triângulo subsequente. O último vértice do último triângulo é escolhido do conjunto de vértices deste triângulo que não são comuns ao triângulo anterior.

### A.3 TAMANHO DAS FORMULAÇÕES

Esta seção apresenta o tamanho das formulações desenvolvidas para as aproximações por simplexes e por hipercubos para as diferentes qualidades de aproximação após o *presolve* do CPLEX, etapa na qual se realizam reduções de redundâncias do problema original. As Tabelas 10, 11 e 12 apresentam o número de variáveis contínuas, binárias e de restrições das formulações com base nos modelos DCC, DLog, CC e MC para a aproximação por simplexes com qualidades de aproximação baixa, média e alta, respectivamente.

Tabela 10: Tamanho da Formulação (Qualidade Baixa, Simplexes)

Modelo	Variáveis contínuas	Variáveis Binárias	Restrições
DCC	5.170	1.522	1.753
DLog	5.170	228	637
CC	940	1.586	1.141
Log	228	940	599
MC	690	1.674	3.351

Tabela 11: Tamanho da Formulação (Qualidade Média, Simplexes)

Modelo	Variáveis contínuas	Variáveis Binárias	Restrições
DCC	45.026	12.318	12.549
DLog	45.026	300	781
CC	4.226	15.890	4427
Log	4.226	336	821
MC	8.574	3.250	15.637

Tabela 12: Tamanho da Formulação (Qualidade Fina, Simplexes)

Modelo	Variáveis contínuas	Variáveis Binárias	Restrições
DCC	65.122	19.102	19.333
DLog	65.122	364	909
CC	7.874	22.802	8.075
Log	7.874	368	917
MC	21.886	9.906	47.765

Em seguida, as Tabelas 13, 14 e 15 apresentam o número de variáveis contínuas, binárias e de restrições das formulações com base nos

modelos DCC, DLog, CC e SOS2 para a aproximação por hipercubos com qualidades de aproximação baixa, média e alta, respectivamente.

Tabela 13: Tamanho da Formulação (Qualidade baixa, Hipercubos)

Modelo	Variáveis contínuas	Variáveis Binárias	Restrições
DCC	2.418	498	729
DLog	2.418	190	561
CC	940	498	1.141
SOS2	1.258	50	599

Tabela 14: Tamanho da Formulação (Qualidade média, Hipercubos)

Modelo	Variáveis contínuas	Variáveis Binárias	Restrições
DCC	18.178	3.108	3.339
DLog	18.178	262	705
CC	4.226	3.108	4.427
SOS2	4.830	50	885

Tabela 15: Tamanho da Formulação (Qualidade fina, Hipercubos)

Modelo	Variáveis contínuas	Variáveis Binárias	Restrições
DCC	47.474	8.434	8.665
DLog	47.474	328	837
CC	10.268	8.434	10.469
SOS2	11.210	50	1.223

#### A.4 SOLUÇÃO DAS INSTÂNCIAS DO PROBLEMA

Os modelos de linearização por partes multidimensional apresentados nesta dissertação são equivalentes quando a aproximação é a mesma. Esta seção apresenta a solução do problema de otimização para as aproximações por simplexes e hipercubos com as diferentes qualidades de aproximação. A Tabela 16 apresenta os ganhos e custos considerados na função objetivo  $\max f = \sum_{m \in \mathcal{M}} (p_o q_o^m + p_g q_g^m - p_w q_w^m) - \sum_{n \in \mathcal{N}} p_i^n q_{inj}^n$ . As Tabelas 17 e 18 apresentam o valor da função objetivo, as vazões de óleo, gás e água e a pressão nominal dos *manifolds* resultantes da solução obtida para as aproximações por simplexes e por hipercubos para

as aproximações baixa, média e fina. As vazões estão apresentadas em metros cúbicos (sm<sup>3</sup>) e a pressão dos *manifolds* em psia.

Tabela 16: Custos/Ganhos Econômicos

<b>Ganho com venda de óleo (<math>p_o</math>)</b>	20
<b>Ganho com venda de gás (<math>p_g</math>)</b>	2
<b>Custo com tratamento de água (<math>p_w</math>)</b>	1
<b>Custo com compressão de gás (<math>p_i</math>)</b>	0

Tabela 17: Solução com Simplexes

<b>Qualidade</b>		Baixa	Média	Fina
<b>Função Objetivo</b>		5.016.386	5.015.744	5.015.925
Vazão de óleo ( $q_o^m$ )	$m_1$	1.328	1.139	1.299
	$m_2$	1.526	1.680	1.532
Vazão de gás ( $q_g^m$ )	$m_1$	1.240.000	1.240.000	1.240.000
	$m_2$	1.240.000	1.240.000	1.240.000
Vazão de água ( $q_w^m$ )	$m_2$	317	180	315
	$m_2$	400	483	402
Pressão absoluta ( $p^m$ )	$m_1$	535	528	550
	$m_2$	457	470	460

Em seguida, as vazões para injeção de gás nos poços são apresentadas nas Tabelas 19 e 20 para as aproximações por hiper-cubos e simplexes, respectivamente, considerando as qualidades de aproximação baixa, média e alta.



Tabela 18: Solução com Hipercubos

Qualidade		Baixa	Média	Fina
Função Objetivo		5.015.756	5.015.782	5.015.948
Vazão de óleo ( $q_o^m$ )	$m_1$	1.297	1.140	1.300
	$m_2$	1.526	1.681	1.533
Vazão de gás ( $q_g^m$ )	$m_1$	1.240.000	1.240.000	1.240.000
	$m_2$	1.240.000	1.240.000	1.240.000
Vazão de água ( $q_w^m$ )	$m_1$	315	184	315
	$m_2$	405	483	401
Pressão absoluta ( $p^m$ )	$m_1$	549	528	551
	$m_2$	459	470	460

Tabela 19: Injeção de Gás (Hipercubos)

Poço	Qualidade Baixa	Qualidade Média	Qualidade Fina
1	90.576	84.950	73.194
2	135.883	225.065	136.051
3	90.576	93.092	89.375
4	90.576	149.726	89.375
5	92.915	121.409	113.265
6	135.883	121.409	113.265
7	90.576	93.092	105.556
8	90.576	76.610	97.084
9	119.002	104.927	97.084
10	74.250	104.927	89.403
11	74.250	48.293	80.903
12	74.250	54.243	73.223
13	74.250	48.293	80.903
14	74.250	76.610	102.177
15	119.556	48.293	97.084
16	119.556	76.610	105.585

Tabela 20: Injeção de Gás (Simplexes)

<b>Poço</b>	Qualidade Baixa	Qualidade Média	Qualidade Fina
1	90.612	84.950	72.717
2	128.628	226.535	129.446
3	90.612	87.486	89.342
4	133.282	169.901	89.342
5	90.612	113.267	113.265
6	90.612	121.290	113.265
7	90.612	84.950	113.265
8	90.612	75.108	97.084
9	90.612	104.903	97.084
10	90.612	104.903	89.436
11	90.612	48.269	80.903
12	59.566	48.269	80.903
13	90.612	48.269	80.903
14	90.612	80.768	89.436
15	104.872	48.269	97.084
16	110.246	80.768	113.265