UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PRODUTOS INFINITOS

Patricia Hess

Orientador: Waldir Quandt

Florianópolis
2000

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Patricia Hess

PRODUTOS INFINITOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura,para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientador: Waldir Quandt

Florianópolis
2000

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 26/SCG/2000.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Waldir Quandt

Antonio Vladimir Martins

Prof. Antonio Vladimir Martins

Prof. William G. Whitley

Sumário

Introdução

Este trabalho foi feito para dar aos alunos da graduação uma oportunidade de conhecer um pouco sobre Produtos Infinitos, já que este assunto não é estudado nas disciplinas de cálculo.

Ao fazer uma pesquisa sobre P.I., vimos que existe uma grande dificuldade de encontrar livros de cálculo que tratam deste assunto. Alguns deles citam poucos exemplos, mas não trazem nenhuma explicação a mais. Um levantamento histórico também foi feito no início deste trabalho, mas nada foi achado.

Além do livro citado na bibliografia, do qual foi tirada toda a parte teórica, alguns artigos tirados da Internet ajudaram a complementar este trabalho.

Enfim, diante da dificuldade de achar material para este trabalho, tudo o que conseguimos é de grande importância.

Capítulo 1

Estudo Teórico

Como sabemos, uma série infinita é uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

em que (a_n) é uma seqüência infinita de números reais.

Agora, para entendermos o que é um produto infinito, as somas da série infinita serão substituídas por produtos. Desta forma, podemos escrever um produto infinito como

$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n \cdot \ldots$$

ou ainda

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Assim como em séries fala-se em somas parciais, para melhor compreensão do produto infinito, estabelece-se os produtos parciais do produto infinito $\prod u_n$. O produto parcial p_n do produto infinito é o produto de seus n primeiros termos

$$p_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n.$$

A cada produto infinito está associada uma seqüência infinita de produtos parciais

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$$

e o limite desta seqüência, se existir, é o produto de um produto infinito.

1.1 Produtos com termos positivos

Um produto infinito é dito convergente para um número U, se o limite da seqüência dos produtos parciais for igual a U. Podemos notar que, se um número u_m for igual a zero, para todo $n > m$, os produtos parciais a partir de m serão iguais a zero e portanto, o limite desta seqüência também o será.

Na definição a seguir, este caso de convergência é excluído e consideramos uma definição mais conveniente.

Definição 1.1 *O produto infinito*

$$\prod_{i=1}^{\infty} u_n \equiv u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots$$

é convergente se existe $m > 0$ tal que para todo $n > m$, nenhum fator se anular e o produto parcial a partir de m

$$p_n = u_{m+1} \cdot u_{m+2} \cdot \ldots \cdot u_n$$

tender, a medida que n cresce, para um limite, finito e diferente de zero. Se este limite for igual a U_m , então o número

$$U = u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_m \cdot U_m,$$

é considerado o valor do produto.

Seja (p_m) a seqüência dos produtos parciais e U_m o limite desta seqüência. Como $p_{n-1} \to U_m$ com $p_n \to U_m$ e como $U_m \neq 0$, temos que

$$u_n \cdot p_{n-1} = p_n \Longrightarrow u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \to 1,$$

o que demonstra o

Teorema 1.1 *A seqüência dos fatores de um produto infinito convergente sempre tende a 1.*

A partir disto, será mais conveniente denotar os fatores u_n por $(1 + a_n)$ e, então, o produto terá a forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Por isso, a condição $a_n \to 0$ (*) é necessária para a convergência do produto. Os números a_n são chamados de termos do produto. Se eles são todos maiores do que ou iguais a 0, então como no caso das séries infinitas, nós falamos de produtos com termos positivos.

Na demonstração do teorema a seguir, usaremos o seguinte fato:

- Para todo $x \neq 0$ temos que $e^x > 1 + x$.

Teorema 1.2 *Um produto $\prod(1 + a_n)$ com termos positivos a_n é convergente se, e somente se, a série $\sum a_n$ converge.*

Demonstração. A seqüência dos produtos parciais (p_n), para $a_n \geq 0$, é monótona crescente pois $1+a_n \geq 1$ e $p_n \cdot (1 + a_n) = p_{n+1} \Longrightarrow p_n \leq p_{n+1}$. Então basta mostrarmos que os produtos parciais p_n são limitados se, e somente se, as somas parciais s_n são limitadas. Usando o fato de que $e^{a_n} \geq 1 + a_n$, temos que

$$p_n \leq e^{s_n};$$

portanto, para cada n, p_n é limitado. Logo o produto $\prod(1 + a_n)$ converge. Por outro lado, temos que

$$p_n = (1 + a_1) \ldots (1 + a_n) = 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_1 a_2 + \ldots > s_n,$$

pois p_n tem todos os termos da soma além de outros termos, todos não negativos. Então, para cada n,

$$s_n < p_n;$$

portanto s_n é limitado. Como s_n também cresce monotonamente, então s_n converge.

□

Teorema 1.3 *Se, para todo n, $a_n \geq 0$, então o produto $\prod(1 - a_n)$ também é convergente se, e somente se, $\sum a_n$ converge.*

Demonstração. Se a_n não tende para 0, a série e o produto certamente divergem. Mas se $a_n \to 0$, então existe $m > 0$ tal que para todo $n > m$, nós temos $a_n < \frac{1}{2}$, ou $1 - a_n > \frac{1}{2}$. Nós consideraremos a série e o produto a partir desse ponto.

Agora, se o produto converge, então a seqüência monótona decrescente dos produtos parciais $p_n = (1 - a_{m+1}) \ldots (1 - a_n)$ tende para um número U_m positivo e para

*Ou seja, a_n tende a 0

todo $n > m$,

$$(1 - a_{m+1}) \dots (1 - a_n) \geq U_m > 0.$$

Para $0 < a_\vartheta < 1$, nós temos

$$(1 + a_\vartheta) \leq \frac{1}{(1 - a_\vartheta)};$$

isto implica que

$$(1 + a_{m+1})(1 + a_{m+2}) \dots (1 + a_n) \leq \frac{1}{U_m}.$$

Portanto, se o produto $\prod(1-a_n)$ converge então o produto $\prod(1+a_n)$ também converge e pelo teorema 1.2, a série $\sum a_n$ converge.

Se por outro lado, a série $\sum a_n$ converge, então $\sum 2a_n$ também converge e conseqüentemente o produto $\prod(1 + 2a_n)$ também converge. Portanto, o produto $(1 + 2a_{m+1}) \dots (1 + 2a_n)$ fica menor do que K com uma apropriada escolha de K. Se agora nós usarmos o fato que, para $0 \leq a_\vartheta \leq \frac{1}{2}$,

$$1 - a_\vartheta \geq \frac{1}{1 + a_\vartheta} \geq \frac{1}{1 + 2a_\vartheta}$$

nós chegamos a

$$(1 - a_{m+1}) \dots (1 - a_n) > \frac{1}{K} > 0,$$

e os produtos parciais do lado esquerdo, como formam uma seqüência monótona decrescente, tendem para um limite positivo, ou seja, o produto $\prod(1-a_n)$ é convergente.

□

1.2 Produtos com termos arbitrários Convergência Absoluta

Os teoremas 1.2 e 1.3 são satisfeitos quando os termos do produto são maiores do que ou iguais a 0. Agora vamos ver os casos de convergência quando esses termos têm sinais arbitrários.

Teorema 1.4 *O produto infinito $\prod(1 + a_n)$ converge se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, nós podemos determinar n_0 tal que para todo $n > n_0$ e todo $k \geq 1$,*

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \dots (1 + a_{n+k}) - 1| < \epsilon.$$

Demostração. Se o produto converge então existe $m > 0$ tal que para todo $n > m$, nós temos $a_n \neq -1$ e o produto parcial

$$p_n = (1 + a_{m+1}) \dots (1 + a_n), \qquad (n > m)$$

tende para um limite diferente de 0. Portanto, existe um número positivo ξ tal que, para todo $n > m$, $|p_n| \geq \xi > 0$. Sabemos que a condição necessária e suficiente para a convergência de uma seqüência (x_n) é que, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um número n_0 tal que para todo $n > n_0$ e todo $k \geq 1$ nós sempre temos $|x_{n+k} - x_n| < \epsilon$. Então, como a seqüência (p_n) converge nós temos que

$$|p_{n+k} - p_n| < \epsilon \cdot \xi.$$

Mas, então, para os mesmos n e k,

$$\frac{1}{|p_n|} \cdot |p_{n+k} - p_n| < \frac{1}{\xi} \cdot \epsilon \cdot \xi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{p_{n+k}}{p_n} - 1 \right| = |(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \dots (1 + a_{n+k}) - 1| < \epsilon,$$

que é o que nós afirmamos.

Por outro lado, primeiro escolhemos $\epsilon = \frac{1}{2}$ e determinamos m tal que para todo $n > m$,

$$|(1 + a_{m+1})(1 + a_{m+2}) \dots (1 + a_n) - 1| = |p_n - 1| < \frac{1}{2}.$$

Para esses $n's$ nós então temos

$$\frac{1}{2} \leq |p_n| \leq \frac{3}{2},$$

mostrando que, para todo $n > m$, nós obrigatoriamente temos que $1 + a_n \neq 0$, e mais, que se p_n tende para um limite, este certamente não pode ser zero. Mas nós podemos agora, dado $\epsilon > 0$, escolher o número n_0 tal que para todo $n > n_0$ e todo $k \geq 1$,

$$\left| \frac{p_{n+k}}{p_n} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

ou

$$|p_{n+k} - p_n| < |p_n| \cdot \frac{\epsilon}{2} < \frac{3}{2} \cdot \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

E isso mostra que (p_n) tem um único limite e portanto o produto converge.

□

Assim como no caso das séries infinitas, um produto infinito pode convergir absolutamente. Mas dizer que um produto $\prod u_n$ converge absolutamente se $\prod |u_n|$ converge, torna sem valor esta definição pois assim todo produto iria convergir absolutamente. Temos então a seguinte definição:

Definição 1.2 *O produto $\prod(1 + a_n)$ é dito absolutamente convergente se o produto $\prod(1 + |a_n|)$ converge.*

Esta definição apenas ganha significado através dos teoremas:

Teorema 1.5 *A convergência de $\prod(1 + |a_n|)$ acarreta a convergência de $\prod(1 + a_n)$.*

Demonstração. Nós temos que

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \dots (1 + a_{n+k}) - 1| \leq$$

$$\leq |(1+|a_{n+1}|)(1+|a_{n+2}|) \dots (1+|a_{n+k}|)-1| = (1+|a_{n+1}|)(1+|a_{n+2}|) \dots (1+|a_{n+k}|)-1,$$

Se a condição necessária e suficiente para a convergência no teorema 1.4 é satisfeita para $\prod(1 + |a_n|)$, é também satisfeita para $\prod(1 + a_n)$.

□

Em conseqüência do teorema 1.2, nós temos o seguinte teorema:

Teorema 1.6 *Um produto $\prod(1 + a_n)$ é absolutamente convergente se, e somente se, $\sum a_n$ converge absolutamente.*

Demostração. Se $\prod(1 + a_n)$ é absolutamente convergente, então $\prod(1 + |a_n|)$ convergente. Pelo teorema 1.2, a série $\sum |a_n|$ converge e portanto $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Por outro lado, se $\sum a_n$ converge absolutamente, então $\sum |a_n|$ converge. Pelo mesmo teorema 1.2, temos que o produto $\prod(1 + |a_n|)$ converge e então podemos dizer que o produto $\prod(1 + a_n)$ converge absolutamente.

□

A partir do próximo teorema, sempre que usarmos ln, este representará o logaritmo neperiano.

Teorema 1.7 *O produto $\prod(1 + a_n)$ converge se, e somente se, a série*

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} ln(1 + a_n)$$

começando com um índice adequado (†), *converge. E o produto converge absolutamente se, e somente se, a série também convergir absolutamente. Além disso, se L é a soma da série, então*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = (1+a_1)\dots(1+a_m)\cdot e^L.$$

Demonstração. Se $\prod(1+a_n)$ converge, então $a_n \to 0$ e portanto existe $m > 0$ tal que para todo $n > m$, nós temos $|a_n| < 1$. Uma vez que o produto parcial $p_n = (1+a_{m+1})\dots(1+a_n)$ tende a um limite positivo $U_m \neq 0$, nós temos que $ln(p_n) \to ln(U_m)$. Mas $ln(p_n)$ é a soma parcial, terminando com o termo de ordem n da série em questão. Essa, portanto, converge para a soma $L = ln(U_m)$.

Como $U_m = e^L$, assim nós temos

$$\prod(1+a_n) = (1+a_1)\dots(1+a_m)\cdot e^L.$$

Se, ao contrário, a série conhecida convergir, e ter a soma L, então nós temos $ln(p_n) \to L$, e conseqüentemente

$$p_n = e^{ln(p_n)} \to e^L.$$

Isto completa a prova da primeira parte do teorema.

Para deduzir, finalmente, que o produto converge absolutamente se, e somente se, a série também convergir absolutamente, nós usamos, além do teorema 1.6, as seguintes proposições:

* Se os fatores α_n satisfazem as desigualdades $0 < \alpha' \leq \alpha_n \leq \alpha''$, então as séries $\sum a_n$ e $\sum \alpha_n a_n$, com termos positivos, são ambas convergentes ou ambas divergentes.

* Se (x_n) é uma seqüência arbitrária que converge para 0, cujos termos são diferentes de 0 e maiores do que -1, então

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{n}} = e$$

ou

$$\left|\frac{ln(1+x_n)}{x_n}\right| \to 1.$$

†É suficiente escolher um m tal que para todo $n > m$ nós temos $|a_n| < 1$.

Então quando $a_n \to 0$,

$$\left|\frac{ln(1+a_n)}{a_n}\right| \to 1.$$

Reduzimos assim o problema da convergência absoluta dos produtos infinitos para o de séries infinitas, o que pode facilitar um pouco o nosso trabalho. Mas o resultado ainda pode não nos satisfazer por causa das dificuldades envolvidas na determinação da convergência das séries da forma $\sum ln(1+a_n)$.

$\square$

Teorema 1.8 *A série $\sum ln(1+a_n)$ e o seu produto $\prod(1+a_n)$ são convergentes se $\sum a_n$ converge e se $\sum {a_n}^2$ é absolutamente convergente([‡]).*

Demonstração. Nós escolhemos um m tal que para todo $n > m$, nós temos $|a_n| < \frac{1}{2}$ e consideraremos $\prod(1+a_n)$ e $\sum ln(1+a_n)$ a partir do termo de ordem $m+1$. Usando o fato de que para $0 < |x| < 1$, nós temos

$$ln(1+x) = x + x^2\left[-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + - \dots\right].$$

Podemos escrever

$$ln(1+a_n) = a_n + \vartheta_n \cdot {a_n}^2 \quad ou \quad \frac{ln(1+a_n) - a_n}{{a_n}^2} = \vartheta_n,$$

sendo $\vartheta_n = [-\frac{1}{2} + \frac{a_n}{3} - \frac{{a_n}^2}{4} + - \dots]$ uma seqüência limitada. Como $a_n \to 0$, então $\vartheta \to -\frac{1}{2}$. Se $\sum a_n$ e $\sum |a_n|^2$ convergem, $\sum ln(1+a_n)$ e também $\prod(1+a_n)$ são convergentes.

$\square$

O teorema 1.8 nos leva para o seguinte teorema:

Teorema 1.9 *Se $\sum {a_n}^2$ é absolutamente convergente e se existe $m > 0$ tal que para todo $n > m, |a_n| < 1$, então os produtos parciais*

$$p_n = \prod_{\nu=m+1}^{n} (1+a_\nu)$$

e as somas parciais

$$s_n = \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \qquad (n > m),$$

[‡]Notemos que se $\sum {a_n}^2$ converge, então também irá convergir absolutamente.

estão assim relacionados

$$p_n \sim e^{s_n}, (^{\S})$$

isto é, a razão entre os dois lados dessa relação tende para um limite definido, finito e diferente de 0.

Demostração. Se nós adotarmos a notação da prova anterior, então como $ln(1+a_n) = a_n + \vartheta_n \cdot {a_n}^2$, nós temos que existe $m > 0$ tal que para todo $n > m$

$$(1+a_{m+1})\dots(1+a_n) = \prod_{\nu=m+1}^{n} e^{a_\nu + \vartheta_\nu a_\nu^2} = e^{\sum a_\nu} \cdot e^{\sum \vartheta_\nu a_\nu^2},$$

se a soma nos últimos dois expoentes são levadas também de $\nu = m+1$ para $\nu = n$. Como os $\vartheta's$ são limitados, $\sum \vartheta a_\nu^2$ converge absolutamente quando $\sum {a_n}^2$ converge absolutamente. Então

$$\frac{p_n}{e^{\sum a_\nu}} = \frac{p_n}{e^{s_n}} = e^{\sum \vartheta a_\nu^2}$$

□

Segue deste teorema o teorema suplementar abaixo.

Teorema Suplementar 1.1 *Se* $\sum {a_n}^2$ *converge absolutamente, então* $\sum a_n$ *e* $\prod(1+a_n)$ *são ambos convergentes ou ambos divergentes.*

1.3 Ligação entre séries e produtos Convergência condicional e incondicional

Nós podemos observar que uma série infinita $\sum a_n$ é um outro símbolo para representar a seqüência (s_n) das somas parciais. Fora o fato de que nós temos que levar em conta o papel excepcional do valor 0 na multiplicação, a mesma observação vale para um produto infinito. Disto segue que, com essa restrição, toda série pode ser escrita como um produto e todo produto como uma série.

1. Se $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ é dado e $\prod_{\nu=1}^{n}(1+a_\nu) = p_n$, então esse produto representa a seqüência (p_n). Esta seqüência, por outro lado, é representada pela série

$$p_1 + (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \dots \equiv p_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(1+a_1)\dots(1+a_{n-1}) \cdot a_n.$$

§ p_n e e^{s_n} convergem assintoticamente

A série e o produto têm o mesmo significado – se o produto converge de acordo com a nossa definição.

2. Seja agora a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e a seqüência $s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ das somas parciais. Isso também pode ser representado pelo produto

$$s_1 \cdot \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{s_3}{s_2} \ldots \equiv s_1 \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \frac{s_n}{s_{n-1}} \equiv a_1 \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}\right).$$

É claro que há a exigência de que cada s_n seja diferente de 0. Em geral a convergência do produto implica na convergência da série e vice-versa. Neste caso, entretanto, quando $s_n \to 0$, embora nós chamamos a série de convergente com soma 0, nós dizemos que o produto diverge para 0.

A ligação entre séries e produtos é estabelecida pelo teorema 1.7 ou pelo teorema 1.6, se nós estamos interessados apenas com a questão de convergência absoluta. O teorema a seguir é semelhante aos teoremas referentes às séries infinitas sobre convergência condicional ou incondicional.

Teorema 1.10 *Um produto infinito $\prod(1 + a_n)$ é incondicionalmente convergente – isto é, permanece convergente, com valor inalterado, mesmo tendo seus fatores reordenados – se, e somente se, ele converge absolutamente.*

Demonstração. Suponhamos que o produto infinito $\prod(1 + a_n)$ seja convergente. Os termos a_n tal que $|a_n| \geq \frac{1}{2}$, que são em número finito, nós substituímos por 0. Assim, nós apenas fazemos um número finito de alterações e garantimos que $|a_n| < \frac{1}{2}$ para todo n. Agora, com os valores de a_n,

$$\prod(1 + a_n) \quad e \quad \sum ln(1 + a_n)$$

são convergentes. e seus valores U e L respeitam a relação $U = e^L$. Disto segue que uma reordenação dos fatores do produto deixa este convergente, com o mesmo valor U, se, e somente se, a correspondente reordenação dos termos da série também deixa esta convergente, com a mesma soma L. Mas para as séries, isto acontece se, e somente se, ela converge absolutamente. Pelo teorema 1.7, o mesmo acontece para o produto.

Agora, se antes da reordenação, nós tivéssemos feito um número finito de alterações e então depois da reordenação tivéssemos feito novamente no sentido contrário, isso não teria nenhuma influência na presente questão.

□

Capítulo 2

Aplicações

2.1 Algumas aplicações envolvendo Produtos Infinitos

1. $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=2$

   Como $\frac{1}{2^{2^n}} < \frac{1}{2^n}$ e $\sum \frac{1}{2^n}$ converge pois é uma série geométrica, então pelo teste da comparação, $\sum \frac{1}{2^{2^n}}$ converge. Pelo teorema 1.2, o produto acima também converge.

   (a) $p_0 = 1+\frac{1}{2}$, isto é, p_0 é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

   (b) Seja $p_k = \displaystyle\prod_{n=0}^{k}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)$ uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

   Afirmamos que p_{k+1} é também uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

   De fato,

$$p_k \cdot u_{k+1} = \prod_{n=0}^{k}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)\cdot\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}\right) =$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\right)\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}\right) =$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\right)\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k+1}}\right) =$$

$$\prod_{n=0}^{k+1}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = p_{k+1}$$

Logo p_{k+1} é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Então, p_n é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Como a série converge para a sua soma, temos que

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2;$$

como a série converge para 2, então o produto

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2.$$

2. $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{2n+1}{(n^2-1)(n+1)^2}\right) = \frac{4}{3}$

Primeiro vamos analisar a série $\sum \frac{2n+1}{(n^2-1)(n+1)^2}$. O termo geral é positivo para todo $n \geq 2$. Analisando a sua convergência, temos que pelo teste da comparação,

$$\frac{2n+1}{(n^2-1)(n+1)^2} < \frac{3}{n^2}$$

e a série $\sum \frac{3}{n^2}$ converge. Portanto, $\sum \frac{2n+1}{(n^2-1)(n+1)^2}$ converge. Logo o produto

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{2n+1}{(n^2-1)(n+1)^2}\right)$$

converge. Seja, agora, o produto parcial

$$p_{m+1} = \prod_{n=2}^{m+1}\frac{n^3(n+2)}{(n-1)(n+1)^3},$$

ou seja,

$$p_{m+1} = \frac{2^3(2+2)}{(2-1)(2+1)^3}\cdot\frac{3^3(3+2)}{(3-1)(3+1)^3}\cdot\frac{4^3(4+2)}{(4-1)(4+1)^3}\cdot\frac{5^3(5+2)}{(5-1)(5+1)^3}\cdots$$

$$\cdots\frac{m^3(m+2)}{(m-1)(m+1)^3}\cdot\frac{(m+1)^3((m+1)+2)}{((m+1)-1)((m+1)+1)^3}.$$

Simplificando o produto p_{m+1}, vemos que, além de simplificar os termos cúbicos, com exceção do 2^3, temos que o número da forma $(k+2)$ no numerador é igual ao $((k+3)-1)$ no denominador para todo $k \geq 2$. Assim, temos que p_{m+1} é da seguinte forma

$$p_{m+1} = \frac{2^3}{(2-1)} \cdot \frac{1}{(3-1)} \cdot \frac{1}{(4-1)} \cdot ((m-1)+2) \cdot (m+2) \cdot \frac{((m+1)+2)}{((m+1)+1)^3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p_{m+1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{(m^3+6m^2+11m+6)}{(m^3+6m^2+12m+8)}.$$

Como $\lim_{m\to\infty} \frac{(m^3+6m^2+11m+6)}{(m^3+6m^2+12m+8)} = 1$, então $p_{m+1} \to \frac{4}{3}$. Logo,

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{2n+1}{(n^2-1)(n+1)^2}\right) = \frac{4}{3}$$

3. $\prod cos(x_n)$ converge se $\sum |x_n|^2$ converge.

   Se $\prod cos^2(x_n)$ converge para L^2 então $\prod |cos(x_n)|$ converge para $|L|$. Mas se $\prod cos(x_n)$ converge absolutamente, então, com mais razão, $\prod cos(x_n)$ vai convergir. Para nos ajudar na demonstração, podemos escrever que

$$\prod cos^2(x_n) = \prod (1 - sen^2(x_n))$$

   Pelo teorema 1.3, sabemos que $\prod(1 - sen^2(x_n))$ converge se, e somente se, $\sum sen^2(x_n)$ converge. Além disso, temos que $|sen(x_n)| < |x_n|$. Então $|sen^2(x_n)| < |x_n|^2$. Como $\sum |x_n|^2$ converge, pelo teste da comparação, a série $\sum |sen^2(x_n)|$ converge. Mas se $\sum |sen^2(x_n)|$ converge então $\sum sen^2(x_n)$ converge.

   Desta forma, $\prod cos^2(x_n) = \prod(1 - sen^2(x_n))$ converge e conseqüentemente $\prod cos(x_n)$ converge.

4. Para $0 \leq x < y$ e $n \to \infty$, $\frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{y(y+1)(y+2)\dots(y+n)}$ converge.

   Como $0 \leq x < y$ então para todo $k > 0, 0 < x+k < y+k$. Disto, temos que $0 \leq \frac{x}{y} < 1$ e $0 < \frac{x+k}{y+k} < 1$.

Seja $p_n = \prod_{i=0}^{n} \frac{(x+i)}{(y+i)}$. Então

$$p_n = \frac{x}{y} \cdot \frac{(x+1)}{(y+1)} \cdot \frac{(x+2)}{(y+2)} \cdots \frac{(x+n)}{(y+n)} < 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1.$$

O produto parcial $p_{n+1} = \prod_{i=0}^{n+1} \frac{(x+i)}{(y+i)}$ será o produto de p_n pelo termo $\frac{(x+(n+1))}{(y+(n+1))}$ que já sabemos que é menor do que 1. Então

$$0 < p_n \cdot \frac{(x+(n+1))}{(y+(n+1))} < p_n \cdot 1 < 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 < p_{n+1} < p_n < 1.$$

Desta forma, a seqüência dos produtos parciais será uma seqüência monótona decrescente e limitada e portanto, convergente.

Seja $L(x,y) = \lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{y(y+1)(y+2)\ldots(y+n)}$. Vamos escrever $p_n(x,y)$ da seguinte forma

$$p_n(x,y) = \frac{(x+n)}{y} \cdot \frac{x(x+1)\ldots(x+(n-1))}{(y+1)((y+1)+1)\cdots((y+1)+(n-1))}$$

$$p_n(x,y) = \frac{(x+n)}{y} \cdot p_{n-1}(x,y+1).$$

Sabendo que que $p_{n-1}(x,y+1)$ converge, pela mesma demonstração feita anteriormente, suponhamos que $p_{n-1}(x,y+1) \to L(x,y+1)$. Temos ainda que $\frac{(x+n)}{y} \to +\infty$. Como $p_n(x,y)$ converge, $p_{n-1}(x,y+1)$ deverá convergir para 0. Sabemos então que, se tivermos $y+1 = a$, $L(x,a) = 0$, mas não podemos afirmar qual é o limite $L(x,a-1) = L(x,y)$.

5.

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Seja o produto parcial $p_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(2n-1)}{2n} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{(2k-1)}{2k} \right)$. Podemos, também, escrevê-lo como

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k}\right).$$

Analisando os termos $a_k = -\frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}$, observamos que $|a_k| < 1$ e que a série infinita $\sum \left(-\frac{1}{2k}\right)^2$ é absolutamente convergente. Portanto, pelo teorema 1.9

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{2k}\right) \sim e^{s_n} = e^{\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2k}\right)}$$

Se $e^{s_n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ então podemos concluir que $p_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Vamos escrever e^{s_n} da seguinte forma, com h_n igual a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$:

$$e^{s_n} = e^{\sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{2k}} = e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}} = \left(\frac{1}{e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{e^{h_n}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Agora,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{e^{h_n}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{h_n}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{e^{h_n}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$$

então

$$\left(\lim_{n\to\infty}(h_n - ln(n))\right)^{\frac{1}{2}} = (ln(c))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\gamma}\ ^{*} = \sqrt{0,577...}$$

Como o limite acima existe, então $e^{s_n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. Logo

$$p_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2.2 Outros exemplos

1. O produto $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ é convergente se, e somente se, $p > 1$. Para certos valores de p, nós temos interessantes valores:

   - $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{sinh(\pi)}{\pi}$
   - $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{cosh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{2}\right)}{\pi}$

* γ é chamada de constante de Euler ou de Mascheroni e seu valor numérico é $\gamma = 0.5772156649\ldots$

- $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^4}\right)=\frac{cosh(\sqrt{2}\cdot\pi)-cos(\sqrt{2}\cdot\pi)}{2\cdot\pi^2}$
- $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^5}\right)=\left|\Gamma\left(exp\left(\frac{2\cdot\pi\cdot i}{5}\right)\right)\cdot\Gamma\left(exp\left(\frac{6\cdot\pi\cdot i}{5}\right)\right)\right|^{-2}=$

  $= 2.0742250447\ldots$, em que Γ é a função gamma, i é a unidadde imaginária, a exponencial complexa $exp(\pi\cdot i/5)$ é dada por
  $exp\left(\frac{\pi\cdot i}{5}\right)=\frac{\phi}{2}+\frac{\sqrt{3-\phi}}{2}\cdot i$
  e $\phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.6180339887\ldots$ é a razão áurea.

2. Além dessas constantes, foi mostrado que
   $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{(-1)^{b(n)}}=2^{-\frac{1}{2}}$
   em que b(n) é a soma dos algarismos para de $n\geq 0$ quando escritos na base 2, isto é, o número de uns na expansão binária de n. E ainda
   $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{(-1)^{a(n)}}=2^{-\frac{1}{2}}$
   em que $a(n)$ é o número de zeros na expansão binária de n.

3. Melvin Knight apresentou a seguinte técnica para a construção de produtos infinitos. Suponha que
   $f(x)=x\cdot g(x)\cdot g(g(x))\cdot g(g(g(x)))\cdot\ldots;$
   uma vez que a convergência requer que os fatores se aproximem de 1, segue que $g(1)=1$ e então $f(1)=1$. Agora
   $\frac{f(x)}{x}=g(x)\cdot g(g(x))\cdot g(g(g(x)))\cdot\ldots=f(g(x))$
   daí, se f é invertível, g pode ser determinada. Por exemplo, se $f(x)=exp(x-1)$, então
   $$\frac{f(x)}{x}=f(g(x))=e^{(g(x)-1)}\Longrightarrow\frac{e^{(x-1)}}{x}=e^{(g(x)-1)}\Longrightarrow$$
   $$\Longrightarrow e^{(x-1)}=x\cdot e^{(g(x)-1)}\Longrightarrow x-1=ln(x)+g(x)-1\Longrightarrow$$
   $$\Longrightarrow g(x)=x-ln(x).$$

   Com $x=2$,
   $$e=2\cdot(2-ln(2))\cdot((2-ln(2))-ln(2-ln(2)))\cdot\ldots$$

4. No século XV, matemáticos europeus mostraram como expressar o π exatamente

como um produto infinito. Isso facilitou os cálculos, pois estes tiveram melhores aproximações. François Viète (1540-1603) determinou que

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots}$$

e John Wallis (1616-1703) mostrou que

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots}$$

5. A constante de Euler, além de ser escrita como uma série infinita,

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right)$$

pode ser dada por

$$e^{\gamma} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{ln(n)} \cdot \prod_{p \leq n} \frac{p+1}{p},$$

em que p são todos os primos não excedendo n.

6. Agora, temos um produto infinito que aparece de uma simples construção geométrica. Desenhe um círculo unitário e increva nele um triângulo equilátero. Increva no triângulo um outro círculo e inscreva neste segundo círculo um quadrado. Continue neste quadrado inscrevendo um círculo e depois inscrevendo um pentágono regular. Repita este processo indefinidamente, cada vez inscrevendo um polígono regular com um lado a mais. O raio do círculo limite é dado por

$$r = \prod_{n=3}^{\infty} cos \left(\frac{\pi}{n} \right) = 0.1149420448...$$

Capítulo 3

A Função Gamma como Produto Infinito

A função Gamma não é caracterizada pelas propriedades $\Gamma(n+1) = n!$ para números naturais n e $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para $x > 0$. Uma propriedade adicional suficiente para uma caracterização é a convexidade de $ln(\Gamma(x))$. Nós percebemos que uma propriedade originalmente considerada por Euler é menos complicada e muito mais fácil de usar.

A função Gamma apareceu pela primeira vez numa carta de Euler para Goldbach em 1729 quando um produto infinito foi anunciado. Mais tarde, Euler produziu várias representações e, finalmente, mostrou a sua idéia original. Para um número natural fixo n adequadamente grande e todos os números naturais finitos m, a expressão $(n+m)!$ comporta-se aproximadamente como uma seqüência geométrica. Em outras palavras, uma função L tal que $L(n+m) = ln[(n+m)!]$ pode ser aproximada por uma função linear de m :

$$\begin{aligned}
L(n+m) &= ln(n!) + \sum_{k=1}^{m} ln(n+k) \\
&= L(n) + m \cdot ln(n+1) - m \cdot ln(n+1) + \sum_{k=1}^{m} ln(n+k) \\
&= L(n) + m \cdot ln(n+1) + ln\frac{(n+1)}{(n+1)} + ln\frac{(n+2)}{(n+1)} + \ldots + ln\frac{(n+m)}{(n+1)} \\
&= L(n) + m \cdot ln(n+1) + \sum_{k=1}^{m} ln\left(1 + \frac{k-1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

A série $\sum_{k=1}^{m} ln\left(1 + \frac{k-1}{n+1}\right)$ é pequena se n é suficientemente grande em relação a

m. Por exemplo, seja $m = 100$ e $n = 10^6$. Então temos que

$$\sum_{k=1}^{100} ln\left(1 + \frac{k-1}{10^6+1}\right) =$$

$$ln(1) + ln\left(1 + \frac{1}{10^6+1}\right) + ln\left(1 + \frac{2}{10^6+1}\right) + \ldots + ln\left(1 + \frac{99}{10^6+1}\right) <$$

$$ln(1) + ln(1.000001) + ln(1.000002) + \ldots + ln(1.000099) =$$

$$ln(1 \cdot 1.000001 \cdot 1.000002 \cdot \ldots \cdot 1.00099 <$$

$$ln(1.004950) < 4.94 \cdot 10^{-3}$$

Portanto, quando n é suficientemente grande, temos

$$L(n+m) \approx L(n) + m \cdot ln(n+1)$$

A suposição de Euler é que esta propriedade de linearidade se extende para todo número real finito x no lugar de m. Uma prova envolve o uso de números pequenos e infinitamente grandes. Nós daremos um teorema e a sua prova em termos de limites.

Teorema 3.1 *Existe uma função* $\Gamma, \Gamma(x) > 0$ *para* $x \geq 1$, *tal que* $L(x) = ln[\Gamma(x+1)]$ *tem, para* $x \geq 0$, *as seguintes propriedades:*

i. $L(0) = 0$;

ii. $L(x+1) = ln(x+1) + L(x)$;

iii. $L(n+x) = L(n) + x \cdot ln(n+1) + r_n(x)$, *cujo*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \qquad (1)$$

Demostração. De *i.* e *ii.*, nós obtemos

$$L(n) = ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} ln(k). \qquad (2)$$

De fato, $L(0) = ln(0!) = ln(1) = 0$. Supondo que seja verdade que $L(n) = ln(n!) =$

$\sum_{k=1}^{n} ln(k)$, vamos verificar se $L(n+1) = ln[(n+1)!]$.

$$L(n+1) = ln(n+1)+L(n) = ln(n+1)+ln(n!) = ln[(n+1)\cdot n!] = ln[(n+1)!] = \sum_{k=1}^{n+1} ln(k)$$

Então, $L(n) = ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} ln(k)$.

E para um número n natural e $x \geq 0$ real,

$$L(x+n) = L(x) + \sum_{k=1}^{n} ln(x+k). \tag{3}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
L(x) + \sum_{k=1}^{n} ln(x+k) &= L(x) + ln(x+1) + \sum_{k=2}^{n} ln(x+k) \\
&= L(x+1) + ln(x+2) + \sum_{k=3}^{n} ln(x+k) \\
&= L(x+2) + ln(x+3) + \sum_{k=4}^{n} ln(x+k) \\
&= \ldots \\
&= L(x+n-1) + ln(x+n) \\
&= L(x+n)
\end{aligned}$$

Como uma conseqüência de *iii.*, (2) e (3),

$$\begin{aligned}
L(x) &= L(x+n) - \sum_{k=1}^{n} ln(n+k) \\
&= L(n) + x \cdot ln(n+1) + r_n(x) - \sum_{k=1}^{n} ln(x+k) \\
&= L(n) - \sum_{k=1}^{n} ln(x+k) + x \cdot ln(n+1) + r_n(x), \qquad (4) \\
&= \sum_{k=1}^{n} ln(k) - \sum_{k=1}^{n} ln(x+k) + x \cdot ln(n+1) + r_n(x)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [ln(k) - ln(x+k) + x \cdot (ln(k+1) - ln(k))] + r_n(x) \qquad (5)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (ln(k) - ln(x+k) + x \cdot ln(k+1) - x \cdot ln(k)) + r_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [(1-x)ln(k) + x \cdot ln(k+1) - ln(x+k)] + r_n(x) \qquad (6)$$

Como $ln(n+1) = -\gamma_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ e $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma = 0.577\ldots$, nós obtemos de (2) e (4)

$$L(x) = -\gamma_n x + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - ln(x+k) + ln(k)\right) + r_n(x), \qquad (7)$$

$$L(x) = -\gamma_n x + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right) + r_n(x). \qquad (8)$$

A série de (8) converge, desde que $k > x \geq 0$

$$0 \leq \frac{x}{k} - ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{k} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{x}{k}\right)^j \leq \frac{x^2}{2k^2}.$$

Segue que (8) converge e conseqüentemente (7), (6), (5) e (4) convergem, e que

$$L(x) = -\gamma x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k} - ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right)$$

é uma única função real determinada para $x \geq 0$, a qual pode ser representada por algumas dessas equações para $n \to \infty$.

Falta mostrar que $L(x)$ tem as propriedades *(i), (ii), (iii)*. De (8) segue *(i)*. De (5) e (1),

$$\begin{aligned} L(x+1) - L(x) &= \sum_{k=1}^{n} [ln(x+k) - ln(x+k+1) + ln(k+1) - ln(k)] \\ &\quad + r_n(x+1) - r_n(x) \\ &= ln(x+1) - ln(x+n+1) + ln(n+1) + r_n(x+1) - r_n(x) \end{aligned}$$

$$= ln(x+1) - ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) + r_n(x+1) - r_n(x).$$

Para $n \to \infty$ nós obtemos *(ii)*. Agora (3) é uma conseqüência de *(ii)*, e (4) é equivalente a (8). O postulado *(iii)* segue de (3) e (4).

$\square$

As conseqüências imediatas de (6) e (8) são os produtos infinitos para $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) = expL(x)$,

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} [(1-x)ln(k) + x \cdot ln(k+1) - ln(x+k)] + r_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [ln(k)^{1-x} + ln(k+1)^x - ln(x+k)] + r_n(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k}\right) + r_n(x)$$

$$e^{L(x)} = e^{\sum_{k=1}^{n} ln\frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k} + r_n(x)}$$

$$e^{L(x)} = x\Gamma(x) = e^{ln\prod_{k=1}^{n} \frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k} + r_n(x)}$$

$$x \cdot \Gamma(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k} \quad (Euler1729) \qquad (6')$$

e

$$L(x) = -\gamma_n x + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) + r_n(x)$$

$$e^{L(x)} = x\Gamma(x) = e^{-\gamma_n x + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) + r_n(x)}$$

$$= e^{-\gamma_n x} \cdot e^{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k}\right)} \cdot e^{-\sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{x}{k}\right)} \cdot e^{r_n(x)}$$

$$x \cdot \Gamma x = e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{x/k}}{1+\frac{x}{k}}. \qquad (8')$$

Bibliografia

1 KNOOP, Konrad. *Theory and Application of Infinite Series.* New York: Dover Publications, INC, 1990.

2 www.mathsoft.com/asolve/constant/infprd/infprd.html

3 www.mathsoft.com/asolve/constant/euler/srsprd.html

4 forum.swarthmore.edu/ isaac/problems/piz.html

5 LAUGWITZ, Detlef; RODEWALD, Bernd. A Simple Characterization of the Gamma Function. *The Americam Mathematical Monthly,* Washington, DC, v.94, n.6, p.534-536, jun./jul. 1987.