

NARJARA BOPPRÉ PHILIPPI

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES:
UM ESTUDO DIDÁTICO**

FLORIANÓPOLIS – SC

2003

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

NARJARA BOPPRÉ PHILIPPI

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: UM ESTUDO DIDÁTICO

Trabalho de conclusão de curso submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para obter a graduação em Matemática Licenciatura.

Orientação:

Dr^a Neri Terezinha Both Carvalho

Florianópolis, Dezembro de 2003.

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela portaria nº 45/SCG/03.

Prof^ª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Neri Terezinha Both Carvalho
Orientadora

Jane de Oliveira Crippa

Nereu Estanislau Burin

*“A Ciência é construída de fatos, como uma casa é de pedras.
Mas uma coleção de fatos não é mais uma ciência do que um
monte de pedras é uma casa.”*

(Henri Poincaré)

Agradecimentos

Aos meus pais, pelo amor e pelo apoio que sempre me deram.

À professora Neri pela paciência e pela valiosa orientação.

Aos professores da banca examinadora, Jane e Nereu, pelas sugestões e observações feitas ao lerem essa monografia.

Ao meu namorado Leonardo pelo incentivo e compreensão, nas horas difíceis.

A todos os meus amigos que me ajudaram nessa caminhada.

Sumário

Introdução.....	07
I. Sistemas de Equações Lineares como objeto oficial de ensino, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, a Proposta Curricular de Santa Catarina e o Planejamento das Escolas.....	08
I.1 Sistemas de Equações nos Parâmetros Curriculares Nacionais.....	08
I.2 Sistemas de Equações na Proposta Curricular de Santa Catarina.....	09
I.3 Sistemas de Equações nos Planejamentos Anuais de escolas de 7 ^a série.....	09
II. Problemática e Quadro Teórico.....	11
III. Sistemas Lineares através da História.....	13
III.1 Problemas Lineares:Aritmética e Álgebra.....	13
IV. Sistemas de Equações Lineares como Saber a Ensinar.....	19
IV.1 Estudo do livro Fundamentos de Matemática Elementar vol 04.....	19
V. Sistemas de Equações Lineares como Saber Ensinado.....	27
V.1 Estudo do livro didático: Matemática uma aventura do pensamento.....	27
V.2 Estudo do livro didático: Matemática hoje é feita assim.....	31
VI.Experimentação.....	36
VI.1 Análise a priori dos exercícios.....	36
VI.2 Análise a posteriori dos exercícios.....	42
VI.3 Como o professor de matemática trabalha em classe o tema Sistemas de Equações Lineares.....	46
Conclusão.....	48
Referência Bibliográfica.....	50
Anexos.....	51

Introdução

Um sistema de equação linear pode ser visto como uma modelagem matemática de um problema. Cada uma das equações do sistema é a expressão matemática de uma das condições do problema. Da interpretação do problema até a obtenção do sistema, um trabalho importante é feito.

Duas tarefas devem ser realizadas:

- Explicitar as condições do problema.
- Passar estas condições da linguagem natural (do enunciado do problema), para a linguagem simbólica (linguagem matemática).

Neste estudo buscamos identificar o que se faz no Ensino Fundamental, mais precisamente na 7ª série, sobre sistemas de equações lineares. Por meio de uma pequena experimentação mostramos as dificuldades dos alunos para resolver sistemas de equações lineares

Para isto:

- No primeiro capítulo estudamos o saber “sistemas de equações lineares” como objeto oficial de ensino, isto é, o saber proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, Proposta Curricular de Santa Catarina e Planejamentos de Escolas.
- No segundo capítulo apresentamos as questões de pesquisa e o quadro teórico.
- No terceiro capítulo fazemos um breve estudo histórico sobre sistemas de equações lineares.
- No quarto capítulo fazemos um estudo do livro, que consideramos um saber para o professor que ensina no Ensino Fundamental e Médio e para os escritores de livros didáticos. Usaremos este como referência para identificação do saber ensinado, no Ensino Fundamental, proposto nos livros didáticos, estudo este que apresentamos no quinto capítulo.
- No sexto capítulo, apresentamos a experimentação realizada com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e resultados de uma entrevista feita com um professor.

Temos assim, elementos da transposição didática do saber sábio ao saber a ensinar e do saber a ensinar ao saber ensinado.

I. Sistemas de Equações Lineares como objeto oficial de ensino

Para identificar o objeto sistemas de equações lineares como objeto oficial de ensino, estudamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) e planejamentos anuais de escolas da rede pública.

I.1 Estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Identificamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) uma proposição de estudo de sistemas de equações do 1º grau como ferramenta de resolução de problemas: *“Resolver situações-problema por meio de equações e sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.” (p.92)*

Mas é no conteúdo proposto para o ensino de matemática no “quarto ciclo” do Ensino Fundamental, na rubrica “Conceitos e Procedimentos”, no contexto “Números e Operações” que sistemas de equações do 1º grau aparece como objeto matemático de estudo:

“Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do 1º grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta”. (p.88).

A partir desse texto podemos considerar que no estudo de sistemas de equações do 1º grau devem ser evidenciadas as técnicas de resolução. E podemos observar também uma chamada explícita para o método de resolução através do plano cartesiano, ou seja, através de gráficos, juntamente com uma chamada para a discussão das raízes encontradas comparadas com a solução da situação-problema proposta.

Temos assim que, segundo os PCN, os sistemas de equações do 1º grau são conteúdos de ensino no Ensino Fundamental. E, em particular na 7ª série, é colocado em evidência sua finalidade na resolução de problemas.

I.2 Estudo da Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC)

A organização dos conteúdos da Proposta Curricular de Santa Catarina é feita por meio da teoria dos “Campos Conceituais”¹.

O conteúdo “sistemas de equações” é proposto sob a rubrica “campos algébricos”.

A passagem gradativa da cor branca para a cor preta, em cada conteúdo, corresponde a uma também gradativa passagem de um tratamento assistemático para sistemático.²

Podemos observar essa proposição no quadro abaixo:

		Ensino Fundamental								Ensino Médio		
Campos Algébricos	Pré	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª
Matrizes e Sistemas Lineares												

Temos então que a PCSC apresenta uma proposição de estudo de sistemas de equações lineares de forma assistemática na 5ª série do Ensino Fundamental e que vai até a 1ª série do ensino médio, e de forma sistemática somente na 2ª série do ensino médio.

Podemos nos perguntar:

Que forma assistemática seria a abordagem de 5ª série do Ensino Fundamental à 1ª série do Ensino Médio? Como é o ensino de sistemas de equações lineares na 7ª série do ensino fundamental, por exemplo? Como é o ensino de sistemas de equações lineares sistematizado na 2ª série do Ensino Médio? Essa proposição prevê o Ensino em Espiral?³

¹ Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria usada como referência teórica na didática da matemática. Segundo essa teoria, existe um conjunto de problemas ou de situações problemas onde o tratamento implica conceitos e procedimentos de vários tipos ou de estreitas conexões.(G. Vergnaud)

² Tratamento assistemático e sistemático - Tratar assistematicamente um conteúdo significa abordá-lo enquanto noção ou significação social, sem preocupação em defini-lo simbólica ou formalmente. Tratar sistematicamente um conteúdo matemático significa dizer que ele será trabalhado conceitualmente, utilizando-se na medida do possível, a linguagem matemática simbólica tal como foi historicamente convencionalizada e organizada. (Proposta Curricular de Santa Catarina, p. 107)

³Por Ensino em Espiral nós entendemos aquele em que o estudo de um conceito não se esgota em um momento de abordagem, mas aquele em que retomadas de um mesmo sujeito são feitas ao longo do ano e dos anos com aprofundamento de tratamento em cada retomada.

I.3 Análise do Planejamento Anual de Escolas

Faremos um breve estudo de dois planejamentos anuais de 7^a série da rede pública.

Vamos aqui chamá-los de plano A e plano B.

Plano A: Dentro do conteúdo programático, aparece de maneira bastante explícita o conteúdo sistemas de equações do primeiro grau, e ainda problemas envolvendo equações e sistemas de equações do primeiro grau.

Plano B: O conteúdo sistemas de equações do primeiro grau não é previsto como objeto de ensino.

Isso nos leva à seguinte questão:

Por que algumas escolas ensinam sistemas de equações lineares na 7^a série e outras não?

Como será que deve ser feita a passagem do assistemático para o sistemático de acordo com a PCSC?

E como fica essa passagem gradativa, nos colégios que ensinam sistemas de equações lineares na 7^a série? Será que o conteúdo é abordado formalmente?

II. Problemática e Quadro Teórico

Levando em conta que, tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais quanto na Proposta Curricular de Santa Catarina, a classe de 7ª série é a instituição onde é feita a primeira abordagem sobre “sistemas de equações do 1º grau” e que este também aparece nos planejamentos anuais de escolas de Ensino Fundamental, questionamos:

- Como este saber se apresenta como saber a ensinar?
- Que objeto matemático é este, “sistemas de equações do 1º grau”, na 7ª série do Ensino Fundamental?
- O aluno em fim de 7ª série tem dificuldades de usar uma representação em linguagem simbólica, numa situação problema? Ou seja, a técnica de modelar problemas por sistemas de equações é disponível aos alunos de 7ª série?
- Os alunos operam com equações do 1º grau de maneira natural?

Buscaremos respostas a estas questões estudando o livro da coleção Fundamentos de Matemática Elementar vol. 04, e dois livros didáticos da 7ª série do Ensino Fundamental. Faremos também uma breve experimentação, em classe de 8ª série, a qual será composta de dois exercícios, sobre sistemas de equações do 1º grau.

Nosso questionamento, bem como o estudo dos livros didáticos e do livro da coleção Fundamentos de Matemática Elementar, tem como referência a “Teoria Antropológica do Saber”⁴ de Yves Chevalhard.

A problemática ecológica é um meio de questionar a realidade do ensino. No contexto desta problemática buscamos conhecer onde e como um saber matemático vive: O que existe e por quê? O que não existe e por quê? O que nos assegura que nossas questões se inserem no referencial teórico da “Teoria Antropológica do Saber”.

Para entender como vive o saber “sistemas de equações do 1º grau” na 7ª série, é importante considerarmos o 1º postulado da Teoria Antropológica do Saber.

“[...] Toda prática institucional se deixa analisar, de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras em sistemas de tarefas relativamente bem circunscritas, que se desdobram de acordo com o desenvolvimento da prática”. (Chevalhard p.84)

⁴ Teoria Antropológica do Saber (Chevalhard 1992) faz uma analogia com a Biologia e trata o saber Matemático como um ser que tem um habitat (lugar) em um nicho (função).

Também, em nosso estudo, buscamos identificar elementos de transposição didática.

Segundo Chevalhard:

“Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar um lugar entre os objetos de ensino. O “trabalho” que de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado “transposição didática””.

(Chevalhard, 1991, p.39)

A transposição didática pode ser representada pelo esquema:

Objeto do saber → Objeto a ensinar → Objeto de ensino

A transposição que sofre um saber se passa em níveis diferentes:

- No nível científico (ou saber dos sábios): aquele produzido pelo matemático normalmente nas universidades ou institutos de pesquisa.
- Nível do saber a ensinar: o saber acadêmico e/ou aquele que é produzido na noosfera⁵.
- Nível do saber ensinado: aquele produzido nos livros didáticos e/ou de classes propriamente ditas.

Este será nosso referencial teórico. No nível científico estudamos um pouco de história dos sistemas de equações lineares. Para identificar elementos da transposição de saber a ensinar ao saber ensinado estudaremos o livro da coleção Fundamentos de Matemática Elementar volume 04 e livros didáticos, os quais consideramos como saber ensinado.

⁵ Chevalhard (1991) designa por noosfera o lugar onde se realizam as atividades de transposição seja sob forma de proposição de documentos escritos defendidos e discutidos, de produção e debates de idéias e sobre o que poderia ser mudado e sobre o que convém fazer. É nesta esfera onde se pensa segundo modalidades diferentes o funcionamento didático. É na noosfera que temos os representantes do sistema de ensino, os representantes da sociedade, os especialistas em disciplina, os emissários dos órgãos públicos, etc.

III. Sistemas Lineares Através da História

Este resumo histórico está baseado no estudo de Coulange (2000) e está organizado segundo os povos e ao longo dos séculos.

III.1 Problemas Lineares: Aritmética e Álgebra

Historicamente, a aritmética ancestral pode ser tratada como uma “pré-álgebra”.

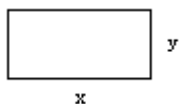
Antes do surgimento da álgebra como um domínio da matemática, segundo Dorier, (1990, citado por Coulange) alguns problemas foram resolvidos, por equações lineares, usando técnicas aritméticas, às vezes por sistemas de equações lineares em uma, ou até mais de uma variável.

Tendo em mente uma visão da aritmética como uma “pré-álgebra”, temos alguns problemas lineares e suas técnicas de resolução associadas às civilizações ancestrais responsáveis por esse desenvolvimento.

A formulação usada neste trabalho será mais moderna para facilitar a leitura e para colocar em evidência as técnicas aritméticas e algébricas. A formulação foi dada por Coulange (2000).

Os Babilônios

Os problemas apresentados nos tabletes babilônicos e suas respectivas soluções são expressas de forma retórica, ou seja, sem algum símbolo para representar os números e estavam normalmente associados a questões da vida cotidiana ou da geometria. Dessa forma encontramos problemas como, por exemplo, “calcular o comprimento de um retângulo conhecendo sua superfície”, entre outros. Encontramos assim problemas que se reduzem a sistemas de duas equações a duas incógnitas, mais freqüentemente sendo uma equação linear e uma quadrática. Vejamos:



$$\begin{cases} y = b \\ xy = A \end{cases} \quad x = ?$$

O método mais utilizado para resolução destes problemas seria o método por substituição. Também surge uma técnica aritmética do tipo “mudança de variáveis”.

Os Egípcios

Os egípcios, assim como os babilônios, também resolviam problemas da vida cotidiana, essencialmente de forma retórica.

Entre os problemas do “Papyrus Rhind” e de “Moscou”, há alguns enunciados modeláveis por sistemas simples de duas equações lineares a duas incógnitas.

Os Chineses

Uma das seções da “Aritmética” que é dividida em nove seções, datada de 1000 a.C. (R’iu-Ch’ang Suam-Shu), trata de problemas que se transformam em sistemas de equações lineares a duas incógnitas.

O método de resolução aparece como processo de eliminação ou de adição.

Mais tarde (\pm 1300 d.C.) certas técnicas chinesas para a resolução de problemas apresentam semelhanças com algoritmos “matriciais” de resolução de sistemas de equações lineares.

Os Indianos

Na Gamita-Sara-Sangraha, escrito por volta de 850 d.C., há numerosos problemas de sistemas de várias equações a várias variáveis. A resolução desses problemas se faz essencialmente de maneira retórica, porém podemos notar um primeiro uso simbólico pois as diferentes incógnitas são identificadas por diferentes nomes de cores, e os métodos de resolução são próximos das técnicas de eliminação atuais.

Os Gregos e a “álgebra geométrica”

Na Grécia, alguns dos problemas lineares ligados com o cálculo de áreas são tratados com uma abordagem geométrica.

Certos matemáticos demonstram interesse em problemas sem relação com a geometria, o que os transformam em sistemas lineares mais complicados.

A maioria dos problemas assim tratados pelas civilizações antigas admitem uma solução única.

Como babilônios, indianos e chineses, os gregos se preocupavam com problemas de natureza concreta; os problemas indeterminados ou impossíveis nunca estiveram no centro das preocupações desses matemáticos, sendo vistos como curiosidades ou até mesmo como enunciados mal colocados.

As Aritméticas de Diofante: A Álgebra uso de símbolos e o estudo de problemas indeterminados

A obra de Diofante, por volta do II século d.C. segundo a introdução do primeiro volume, era composta de treze livros no total. Ela difere profundamente da dos gregos no que diz respeito ao início de uma álgebra geométrica. Esta obra (dos quais seis livros são conhecidos desde o século XVI e quatro somente foram encontrados em 1972 no Irã), é uma coletânea de enunciados aritméticos.

Estes problemas se distinguem dos demais lembrados até aqui, pois eles têm uma 1ª formulação “abstrata”. Eles são numéricos, mas em geral os dados somente são explicitados após uma expressão geral do problema. Mais precisamente: encontramos primeiro o enunciado em termos de grandezas a determinar e das grandezas dadas, (dados do problema) depois vem o caso limite, a condição a qual devem satisfazer as grandezas dadas para que a solução seja racional. As grandezas dadas são então escolhidas. Mostramos logo mais abaixo.

Na obra de Diofante, constata-se um esforço de generalização que não vai mais além que dar a expressão geral de uma solução do problema sem dados numéricos particulares. Às vezes Diofante considerou as “condições de possibilidades” do problema.

Citaremos um problema, para ilustrar os problemas estudados por Diofante: “Achar dois números tais que sua soma e seu produto formem números dados. É preciso porém que o quadrado da metade da soma dos números a determinar exceda de um quadrado o produto destes números. Propomos que a soma dos números formem 20 unidades e que seu produto seja 96 unidades.” (Lalina, p.41).

Temos neste último problema o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases} \text{ como condições de "possibilidade".}$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \text{número quadrado.}$$

Segundo Lalina, vários enunciados de Diofante se transformam em sistemas de equações. Alguns deles em sistemas de equações lineares. O número de incógnitas das equações as quais se traduzem os enunciados pode ir até seis.

Também foi Diofante o primeiro que estudou os problemas indeterminados. Outra originalidade da obra de Diofante é que ele usou algumas notações simbólicas para subtração, potências e raízes das incógnitas. Mas ele não dispôs de um símbolo para todas as incógnitas. Apesar de seus esforços de simbolismo seu discurso continua retórico.

Os Árabes

O desenvolvimento matemático árabe se deu a partir do VII século, d.C.

A cidade de Bagdá é um importante centro científico com numerosas bibliotecas ricas em obras gregas, indianas, etc.

Podem-se considerar dois momentos do desenvolvimento:

Nos séculos VII e VIII (d.C.) os matemáticos árabes investiram na matemática grega e oriental, graças à tradução de numerosas obras da antigüidade.

A partir do século IX, se forma uma "cultura matemática árabe".

A obra de Al Kwarizmi, publicada no século IX, é consagrada a resolução de problemas antigos (herdados) bem como a de outros problemas da vida cotidiana da época. Ela se consagra na resolução de enunciados que se transformam em equações do 1º e do 2º grau com coeficientes positivos. Encontramos nela métodos de resolução de problemas ligados a sistemas de equações com várias incógnitas, entre as quais algumas são indeterminadas. O método corresponde à técnica de substituição.

É o estudo de equações e de sistemas aritméticos que evolui para a álgebra.

Os sistemas de equações lineares nos séculos XVIII e XIX

Segundo Lalina (2000), antes que as equações lineares se tornem objetos de estudo elas mesmas, podemos recuperar progressos de uma “abordagem descritiva ou qualitativa das equações.”

As fórmulas de Cramer

Em 1750, no seu tratado “Introdução à Análise de Curvas Algébricas”, Cramer deu um primeiro enunciado das regras de cálculo permitindo determinar a solução de um sistema quadrado.

No seu texto Cramer usa uma notação que permite escrever um sistema de equações com coeficientes indeterminados. Ele usa, por exemplo: Z^2 designa o coeficiente de incógnita z na segunda equação.

Vejamos:

“Sejam várias incógnitas $x, y, z, v,$ e $\&c$ onde $\&$ é o coeficiente de c e indica o número de equações.

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \&c$$

$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \&c$$

$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \&c$$

$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \&c” (Lalina, p.55).$$

:
:

a) Cramer busca determinar a solução geral de um sistema quadrado. Ele dá uma “regra geral” para achar a expressão das soluções de um sistema de n equações e n incógnitas formando n frações que tem o mesmo denominador.

b) No fim do século XIX e início do século XX, os principais pontos teóricos associados à resolução de sistemas de equações lineares numéricas estão colocados. O estudo de sistemas lineares se torna progressivamente ponto de apoio ao estudo de sistemas cada vez mais abstratos, que permitiram deduzir conceitos teóricos ligados a “linearidade”, noções importantes para a álgebra linear. Ao lado dos resultados teóricos, os métodos de cálculo efetivo da solução de sistemas de equações começaram a se desenvolver a partir do início do século XIX, na matemática mais aplicada.

Depois, no início do século XX, no quadro da análise numérica e em programação linear.

Métodos de cálculo efetivo para resolver os sistemas de equações nos séculos XIX e XX

Neste período já se dominavam as técnicas de substituição e de eliminação, bem como as fórmulas de Cramer. Porém, não estavam encerradas as questões de resolução efetiva de sistema de equações numéricas.

Alguns matemáticos do século XIX se dedicaram ao estudo teórico de equações no quadro da álgebra linear, outros se dedicaram ao estudo de técnicas eficazes de resolução de sistemas com um grande número de equações.

Diferentes métodos de resolução são objetos de estudo neste período.

- mínimos quadrados de Legendre (1805).
- “du pivot” de Gauss.
- “aproximado” de Jacobi.

Os dois últimos são ensinados no ensino médio desde 1970.

Temos assim, ao longo da história, oito métodos de resolução de sistemas.

- adição.
- eliminação
- substituição.
- Cramer.
- gráfico.
- mínimos quadrados de Legendre (1805).
- “du pivot” de Gauss.
- “aproximado” de Jacobi.

IV. Sistemas de Equações Lineares como saber a ensinar

Para conhecer o que se propõe a ensinar relativo a sistemas de equações lineares, estudaremos o livro volume 04 da coleção Fundamentos de Matemática Elementar.

Consideremos este livro uma produção noosferiana.⁶

O livro é composto de seis capítulos: capítulo I: Seqüências; capítulo II: Progressão aritmética; capítulo III: Progressão Geométrica; capítulo IV: Matrizes; capítulo V: Determinantes e capítulo VI: Sistemas Lineares.

Restringiremos nosso estudo ao capítulo VI: Sistemas Lineares (pp.127 – 165), pois é ele que desenvolve nosso tema de estudo – sistemas de equações lineares. Neste estudo não desenvolveremos todos os pontos tratados no capítulo; nosso objetivo é de identificar como este objeto “sistemas de equações lineares” é abordado, quais os saberes sobre sistemas de equações lineares são propostos como saber a ensinar e quais as tarefas propostas nos exercícios.

Estudo do Capítulo: Sistemas Lineares

Uma Abordagem Seqüencial

Sob a rubrica “Introdução” são apresentadas e ilustradas com exemplos e seguidas de exercícios as definições de: Equação Linear; Sistema Linear; Solução de um Sistema Linear; Sistema Possível; Sistema Impossível; Sistema Linear Homogêneo e Matrizes de um Sistema.

Vejamos a definição de:

◆ Sistema de Equações Lineares

Sistema Linear: *“É um conjunto de m ($m \geq 1$) equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Assim, o sistema*

⁶ Noosferiana: aqui no sentido de que o autor se coloca em posição de alguém que apresenta um conteúdo dirigido a professores. Ele organiza e faz uma proposição de diferentes saberes relativos a sistemas de equações lineares.

Solução de um sistema linear

“Dizemos que a seqüência ou n -upla ordenada de reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear S , se for solução de todas as equações de S , isto é:

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \text{ (sentença verdadeira)}$$

$$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + \dots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \text{ (sentença verdadeira)}$$

$$a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + \dots + a_{3n}\alpha_n = b_3 \text{ (sentença verdadeira)}$$

.....

$$a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + a_{m3}\alpha_3 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \text{ (sentença verdadeira)} \quad (\text{p.130}).$$

Sistema Possível. Sistema Impossível.

“Se um sistema linear S tiver pelo menos uma solução diremos que ele é possível ou compatível, caso não tenha nenhuma solução, diremos que S é impossível ou incompatível.” (p.130).

Ainda dois outros conceitos são tratados como independentes: “Sistema Linear Homogêneo” e “Matrizes de um Sistema”.

O sistema homogêneo é aquele que admite sempre a solução nula pois, por definição: “[...] sistema linear homogêneo é todo aquele em que o termo independente de todas as equações vale zero”. (p. 130).

Sob a sub-rubrica “Matrizes de um Sistema”, a definição de “matriz incompleta” e a definição de “matriz completa” de um sistema são apresentadas com a representação de cada uma delas, a partir da consideração de um sistema linear S de m equações e n incógnitas.

“Consideremos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

A é chamada matriz incompleta do sistema e B , matriz completa.

Notemos que B foi obtida a partir de A , acrescentando-se a esta a coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema” (p. 131).

Temos aqui dois tipos de matrizes que dependem do sistema. Existe assim uma relação entre esses dois objetos: sistemas de equações e matrizes.

Diferentes técnicas de resolução são objetos de estudo.

Técnicas de resolução de sistemas de equações lineares.

Entre as técnicas de resolução propostas, distinguimos duas:

Técnica – Regra de Cramer (teorema)

“Seja S um sistema linear com número de equações igual ao de incógnitas.

Se $D \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única

($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$), tal que $\alpha_i = \frac{D_i}{D} \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ em que D_i é o determinante da matriz obtida de A , substituindo-se a i -ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Demonstração:

Consideremos o sistema:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Consideremos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

O sistema S pode ser escrito na forma matricial $A \cdot X = C$. Provemos que tal equação matricial admite solução única.

Por hipótese, $\det A = D \neq 0$, logo $\exists A^{-1}$. Consideremos a matriz $X_0 = A^{-1} \cdot C$ e provemos que ela é solução da equação matricial $AX = C$.

De fato:

$$A(A^{-1} \cdot C) = (A \cdot A^{-1})C = I_n C = C, \text{ o que prova a existência da solução } X_0 = A^{-1} C.$$

Para provarmos que $X_0 = A^{-1} C$ é solução única, admitamos que $AX = C$ tenha outra solução X_1 , isto é, $AX_1 = C$.

$$\text{Então: } X_1 = I_n X_1 = (A^{-1} \cdot A)X_1 = A^{-1}(AX_1) = A^{-1}C = X_0$$

Concluimos, assim, que X_0 é efetivamente solução única de $AX = C$. Por outro lado, já vimos que A^{-1} pode ser calculada pela fórmula.

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot A = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Em que A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij} da matriz A .

Logo:

$$X_0 = A^{-1} \cdot C = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & A_{2i} & A_{3i} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_i \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{tendo em conta que: } X_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Concluimos que } \alpha_i = \frac{1}{D} (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + A_{3i}b_3 + \dots + A_{ni}b_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$D = \det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn} \neq 0$. Logo, pelo teorema de Cramer, S é possível e determinado. Os valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ da solução podem ser obtidos resolvendo o sistema por substituição. Partindo da última equação, obtemos x_n ; em seguida substituindo esse valor na equação anterior, obtemos x_{n-1} . Repetindo esse procedimento, vamos obtendo $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_3, x_2, x_1$ ". (pp. 140 – 141)

◆ 2º Tipo – Número de equações é menor que o número de incógnitas.

“Nesse caso o sistema S será do tipo:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{2j}x_j + \dots + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (j \geq 2) \text{ e } (r \geq j), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots a_{mr}x_r + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Com $m < n$.

Para resolvermos tal sistema, podemos tomar as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações (chamadas variáveis livres) e transpô-las para o segundo membro. O novo sistema assim obtido pode ser visto como sendo um sistema contendo apenas as incógnitas do primeiro membro das equações. Nesse caso, atribuindo valores a cada uma das incógnitas do 2º membro, teremos um sistema do 1º tipo, portanto, determinado; resolvendo-o obteremos uma solução do sistema. Se atribuirmos outros valores às incógnitas do 2º membro, teremos outro sistema, também determinado; resolvendo-o obteremos outra solução do sistema. Como este procedimento de atribuir valores às incógnitas do 2º membro pode se estender indefinidamente, segue-se que podemos extrair do sistema original um número infinito de soluções. Um tal sistema é dito

possível e indeterminado. Chama-se *grau de indeterminação* o número de variáveis livres do sistema, isto é, $n - m$ ". (p. 141 e 142).

Em conclusão: Os sistemas são estudados de maneira formal. As definições são colocadas em evidência, como as definições de: sistema linear, representação de matrizes, sistema possível ou compatível, impossível ou incompatível, sistema homogêneo e matrizes de um sistema.

IV.1 Estudo dos exercícios propostos pelo livro

Duas técnicas de resolução são trabalhadas:

1. Técnica – Regra de Cramer
2. Técnica – Escalonamento

Quanto ao tipo de exercícios, explicitamos 4 tipos que se distinguem segundo número de incógnitas e equações, e quanto a solução e tipo de solução.

Tipos de exercícios quanto ao número de incógnitas e de equações.

1. Número de equações é igual o número de incógnitas.
2. Número de equações é menor que o número de incógnitas.

Tipos de exercícios quanto à existência da solução e tipo de solução.

1. Possível - compatível : a) solução única; b) infinitas soluções
2. Impossível : não existe solução

Foram resolvidos ao todo 96 exercícios

Destes, 42 exercícios solicitaram o uso da regra de Cramer para resolução e em 54 a técnica “escalonamento” deveria ser empregada.

Dos tipos de exercícios quanto ao número de equações e de incógnitas:

1. Número de equações é igual ao número de incógnitas – 82 exercícios
2. Número de equações é menor que o número de incógnitas – 14 exercícios

Dos tipos de exercícios quanto à existência da solução e do tipo de solução:

1. Possível – 73 exercícios
2. Impossível – 23 exercícios

V. Sistemas de Equações Lineares como saber ensinado

Neste capítulo faremos o estudo de como o saber, sistemas de equações lineares, é ensinado, se considerarmos os livros didáticos e supormos que os professores em classe usam os mesmos para realizar o ensino na 7ª série do ensino fundamental.

V.1 Estudo do Livro Didático: Matemática uma aventura do pensamento

Oscar Guelli, 7ª série, Ática, 2001, 8ª edição, São Paulo.

Este livro é constituído de sete capítulos e sistemas de equações aparece no capítulo quatro, que tem por título: “Equações, Inequações e Sistemas de Equações” (p.91). Estudaremos então este capítulo deste livro.

V.1.1 Um pré requisito para abordagem: equações de duas variáveis.

Um primeiro estudo das soluções de uma equação de duas variáveis.

➤ Solução Gráfica

Neste estudo, o autor destaca que um par ordenado é solução da equação e dá um procedimento de como determinar pares ordenados (x, y) que sejam soluções da equação. O conjunto solução é apresentado graficamente pela reta que passa por um par (x,y) solução da equação.

Sobre papel quadriculado a representação gráfica é dada.

Em seguida, o estudo de uma segunda equação de duas variáveis é feito, cujo gráfico é plotado sobre o mesmo feito anteriormente.

V.1.2 Abordagem de sistema de equações.

Considerando as duas equações estudadas individualmente, e usando a representação $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ y = x + 2 \end{cases}$ é anunciado que elas constituem um “sistema de duas equações simultâneas” que impõem duas condições às variáveis.

Remarcamos que não é explorado o que significa “condições às variáveis”.

Usando o gráfico feito anteriormente, se identifica graficamente o ponto de intersecção cujas coordenadas são números inteiros e em particular um par (x,y) é solução determinada na tabela. Em seguida o autor explicita o conjunto solução: “O conjunto solução de um sistema de equações é o conjunto de todos os pares ordenados que satisfazem ambas as equações: $S=\{(2,4)\}$ ”.

V.1.3 Tipos de sistemas de equações

Dois casos particulares são objetos de estudo.

1º Caso: Duas equações representam duas retas paralelas.

“As duas retas são paralelas. Não existe nenhum par ordenado que seja solução das duas equações, simultaneamente. O conjunto solução é o conjunto vazio.” (p.133)

2º Caso: Duas equações representam duas retas coincidentes.

“Os gráficos das duas equações coincidem. Todo par ordenado que é solução de uma das equações é necessariamente solução da outra.” (p.134)

Duas técnicas de resolução são trabalhadas.

Cada técnica é detalhada através da resolução de um exemplo.

Técnica 1: **Método da Substituição:** exemplo “ $x + y = 5$ e $x - y = 4$ ”.

1) Escolhemos uma das equações e expressamos uma variável em termos da outra:

$$x + y = 5 \quad x = 5 - y$$

2) Substituímos essa expressão no lugar de x na outra equação e descobrimos o valor de y : $x - y = 4$

$$5 - y - y = 4$$

$$y = 1/2$$

3) Substituímos o valor de y em qualquer uma das equações para encontrar o valor de x :

$$x + y = 5$$

$$x + 1/2 = 5$$

$$x = 9/2$$

O conjunto solução é $S = \{(9/2, 1/2)\}$.(p.135)

Técnica 2: **Método da Adição:** o sistema é obtido pela modelagem de uma situação-problema.

Problema:

“A diferença entre o denominador e o numerador de uma fração é igual a 3. Somando duas unidades a cada um dos termos da fração, obtemos uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$. Qual é a fração original?”(p.139)

Resolução: descrição passo a passo.

“Representando por x o numerador e por y o denominador da fração original, x/y ,

montamos um sistema de equações com os dados do problema:
$$\begin{cases} y - x = 3 \\ \frac{x+2}{y+2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Preparamos a segunda equação: $\frac{x+2}{y+2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x - y = -2$

Por meio da propriedade da adição da igualdade, podemos somar números iguais a cada um dos membros da equação, obtendo outra equivalente a original. A fração original é $\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$.

Se tentarmos resolver o sistema de equações $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ apenas somando as equações

membro a membro, não eliminamos nenhuma variável. No entanto, podemos usar a propriedade de multiplicação da igualdade para obtermos duas equações equivalentes às iniciais e nas quais os coeficientes dos termos, por exemplo x , sejam opostos.

O conjunto solução $S = \{(-1,1)\}$.”(p.139).

Em conclusão: identificamos três técnicas de resolução: solução através do gráfico, método da substituição e da adição.

Identificamos um tipo de sistema estudado: duas equações e duas incógnitas. Também remarcamos a idéia de que a solução do sistema é dada a partir da solução gráfica do sistema.

Casos particulares de solução do sistema como sistema sem solução, são ilustrados graficamente por um sistema de duas equações cujas retas são paralelas. No caso de infinitas soluções, as retas são coincidentes. Mas sem dar tratamento de sistema impossível ou possível indeterminado.

V.1.4 Exercícios Resolvidos do Livro Didático

Foram resolvidos ao todo 80 exercícios, os quais podemos classificar quanto:

1) Ao tipo de papel:

- a) Quadriculado: 25 exercícios
- b) Branco: 55 exercícios

2) Técnica de Resolução:

- a) Solução gráfica: 16 exercícios
- b) Método da substituição: 32 exercícios
- c) Método da adição: 32 exercícios
- d) Regra de Cramer: 0 exercícios
- e) Escalonamento: 0 exercícios.

3) Enunciado:

- a) Sistemas de equações dados: 54
- b) Problema dado em linguagem natural e simbólica: 26

Notemos que predominam neste livro didático os exercícios do tipo equações dadas, 54 sobre 70.

V.2 Estudo do Livro Didático: Matemática hoje é feita assim

Antônio José Lopes Bigode, 7ª série, FTD, 2000, São Paulo

O livro é constituído de quatorze capítulos. Sistemas de Equações do 1º grau é estudado no capítulo treze, que tem por título: “Sistemas de Equação do 1º grau.” (p.72).

V.2.1 Abordagem de sistemas de equações.

A abordagem é feita em dois momentos.

a) Estudo de sistemas de equações de maneira espontânea

Neste estudo, o autor mostra como equacionar situações-problema, do tipo: “Descubra dois números cuja a soma é 20 e cuja a diferença é 5”, propondo primeiro que o aluno exercite, usando adivinhação de números. Em seguida é apresentada uma maneira mais rápida de resolver, no caso, equacionando os dados do problema e chegando assim num sistema de equações do tipo:

$$\begin{cases} a + b = 20 \\ a - b = 5 \end{cases} .$$

Através de uma tabela são atribuídos valores para a e b, até que sejam encontrados pares ordenados que satisfaçam às duas equações.

Se compararmos este livro com o anterior, temos duas abordagens diferentes. O primeiro simplesmente apresenta o sistema por meio da junção das duas equações. No segundo, as equações do sistema são a representação matemática das condições de um problema dado em linguagem natural.

b) Estudo dos métodos de resolução

Métodos de resolução:

São abordados pelo autor quatro métodos de resolução de sistemas de duas equações com duas variáveis que são os seguintes: método da substituição, da adição, da subtração e resolução gráfica.

Método da substituição: o sistema é obtido pela modelagem de uma situação problema.

Problema: “A soma das idades de dois irmãos é 24 anos. Quais são suas idades sabendo que o maior é 4 anos mais velho?”

A resolução é descrita passo a passo.

“Seja x a idade do irmão mais velho e y a idade do mais novo.

$$\begin{cases} x + y = 24(I) \\ x - y = 4(II) \end{cases}$$

Da equação (II) temos que:

$$x = 4 + y(III)$$

Substituindo (III) em I, ou seja, x por 4+y, temos:

$$(4 + y) + y = 24 \text{ eliminando parênteses e reduzindo os termos semelhantes}$$

$$4 + 2y = 24 \quad \text{isolando a variável } y$$

$$y = 10$$

O irmão mais novo tem 10 anos.

Substituindo y por 10 em (III):

$$x = 14$$

O irmão mais velho tem 14 anos.”(p.280)

Em seguida é apresentado o método da substituição para resolver sistemas de equações de maneira sistematizada, indicando passo a passo como devem ser resolvidos sistemas de equações de duas equações e duas incógnitas.

- *Isole uma das variáveis numa das equações.*
- *Substitua essa variável na outra equação pela expressão equivalente.*
- *Resolva a equação que tem apenas uma variável.*
- *Substitua o valor encontrado em uma equação que tenha as duas variáveis.*

Método da adição: o sistema de equação é dado seguido da explicitação do procedimento

de resolução. Exemplo” $\begin{cases} a + b = 18(I) \\ a - b = 6(II) \end{cases}$ adicionando a equação (I) com a equação (II),

$$\text{temos: } \begin{cases} a + b = 18 \\ a - b = 6 \end{cases} \quad b \text{ e } -b \text{ se anulam.}$$

$$\text{Logo, } a = \frac{24}{2} = 12$$

Substituindo a por 12 em uma das equações, obtém-se $b = 6$.”(p.282)

Método da subtração: O aluno é alertado de que subtrair equivale a adicionar com o oposto.

O que faz com que o método da subtração seja igual ao da adição.

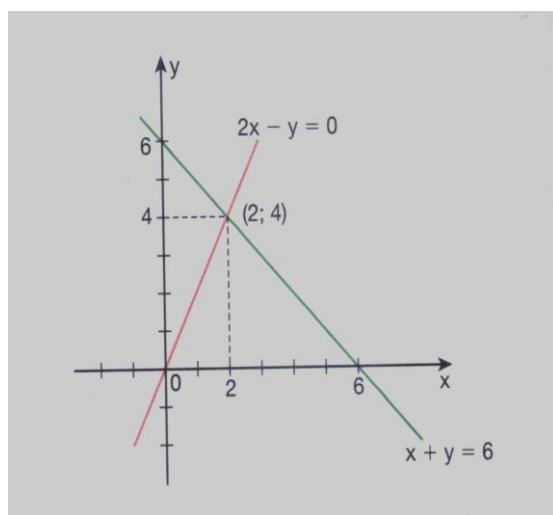
Depois de apresentados os métodos de resolução de sistemas, o autor destaca que nem todos os sistemas tem solução. Como por exemplo: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}$

Esses sistemas são chamados de sistemas impossíveis.

Resolução gráfica: Primeiro, o autor explora a noção de par ordenado e gráfico de uma equação, a partir de uma equação do sistema ($ax + by = c$).

A introdução do método gráfico de resolução de sistema é feita através da representação gráfica das duas equações do sistema: “*Para representar graficamente um sistema de duas equações com duas variáveis, sobrepomos no mesmo referencial cartesiano as retas correspondentes a cada equação do sistema.*”

Seja o sistema: $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$



Verifique que o ponto de intersecção corresponde ao par ordenado (2;4), que satisfaz as duas equações.

$$(2) + (4) = 6$$

$$2.(2) - (4) = 0$$

Isso sugere que, se um sistema de duas equações com duas variáveis tem uma única solução, então as retas correspondentes ao gráfico do sistema se interceptam em um ponto.” (p.292)

Notemos que o par (2;4) está destacado no gráfico. Além dele somente os pontos onde o gráfico corta o eixo x e y são numerados. Também 2 e 4 são inteiros.

Recuperamos aqui que a solução do sistema é o ponto de intersecção das retas.

Problema: Como determinar o par (2;4) se ele não está marcado no gráfico?

O autor não questiona esse aspecto, porém problematiza, os casos de indeterminação e de não existência da solução: “E se as retas não tiverem pontos de intersecção?”(p.292) “E se as retas tiverem os mesmos pontos, isto é, coincidirem?” (p.293).

Temos assim, quatro métodos de resolução de sistemas abordados pelo autor, que são os seguintes: método da adição, subtração, substituição e resolução gráfica. No estudo das resoluções através dos métodos citados acima, é destacado que os sistemas que não tem solução são chamados de “sistema impossível”.

Destacamos que no estudo de “resolução gráfica”, além do caso “sistema impossível”, onde as retas não têm ponto de intersecção, o caso “sistema indeterminado” também é estudado através do caso (retas coincidentes).

Quanto às técnicas, três são estudadas em ambos os livros. O segundo livro desmembra a técnica: método da adição em método da adição e método da subtração. O primeiro livro considera as duas como uma só.

V.2.2 Exercícios Resolvidos do Livro Didático

Foram resolvidos ao todo 30 exercícios, os quais podemos classificar quanto:

1) Ao tipo de papel:

- c) Quadriculado: 05 exercícios
- d) Branco: 25 exercícios

2) Técnica de Resolução:

- f) Solução gráfica: 05 exercícios
- g) Método da substituição: 13 exercícios
- h) Método da adição: 12 exercícios

- i) Regra de Cramer: 0 exercícios
- j) Escalonamento: 0 exercícios.

3) Enunciado:

- c) Sistemas de equações dados:14
- d) Problema dado em linguagem natural e simbólica:16

Notemos que neste livro didático, o número de exercícios do tipo problema e sistemas dados são praticamente iguais.

VI Experimentação em classe de 8ª série

Apresentação

A experimentação tem por objetivo verificar se os alunos de 8ª série sabem resolver sistemas e identificar dificuldades na resolução.

Esta experimentação visa dar elementos que nos permitam identificar se os alunos de 8ª série sabem usar alguma técnica de resolução de sistemas lineares do 1º grau (qual é a técnica disponível?) bem como nos dará alguns elementos para fazer conjecturas das dificuldades dos alunos na resolução de sistemas de equações lineares.

A experimentação compreende de uma aplicação de dois exercícios em classe de 8ª série do Ensino Fundamental e será realizada em classe, em duas etapas.

Na primeira etapa aplicaremos o exercício que trata de uma situação-problema.

Exercício: “porcos e galinhas”. “Num quintal há 36 animais entre porcos e galinhas. Sabe-se que há, ao todo, 112 pés. Quantos são os porcos e quantas são as galinhas?”

Na segunda etapa aplicaremos um exercício que envolve um sistema dado.

Exercício: “sistemas de duas equações e duas incógnitas”.

$$\text{“Resolva o seguinte sistema: } \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = \frac{7}{2} \end{cases} \text{.”}$$

Escolhemos realizar a experimentação em classe de 8ª série, pois sistemas de equações lineares é objeto de estudo na 7ª série, então podemos supor que os alunos de 8ª série saibam resolver problemas que envolvam sistemas de equações lineares.

Também faremos, uma entrevista com o professor da classe para conhecer como o mesmo trabalha o conteúdo em sala.

Análise *a priori* dos exercícios

Faremos a análise de cada um dos exercícios propostos.

Consideremos *a priori*, em função das técnicas estudadas nos livros didáticos da 7ª série, três técnicas de resolução possíveis de serem utilizadas para resolver os problemas: método da adição, método da substituição e resolução gráfica.

Análise *a priori* do exercício “porcos e galinhas”.

Retomamos aqui o problema: “Num quintal há 36 animais entre porcos e galinhas. Sabe-se que há, ao todo, 112 pés. Quantos são os porcos e quantas são as galinhas?”

Este problema é dado em linguagem natural e tem por tarefa determinar o número exato de porcos e galinhas que estão no quintal, ou seja, resolver o sistema. Mas antes o aluno precisa executar uma sub-tarefa: interpretar o enunciado, ou seja, traduzir as condições dadas pelo problema em linguagem natural para linguagem simbólica, equacionando o problema.

Vejamos as soluções possíveis:

- quanto à interpretação do enunciado

Designar cada um dos animais existentes por uma letra.

Por exemplo: p – porcos e g – galinhas. Então obtém-se $p + g = 36$.

Do fato que há ao todo 112 pés e de que as galinhas possuem dois pés e porcos quatro pés, então $4p + 2g = 112$, ou seja, o total de pés corresponde ao número total de porcos quatro vezes mais o número de galinhas vezes dois.

Considerar as duas condições expressas pelas equações:
$$\begin{cases} p + g = 36 \\ 4p + 2g = 112 \end{cases}$$

- quanto a resolução de sistema

Vamos considerar primeiro uma resolução que poderia ser feita, pelos alunos, sem usar alguma técnica de resolução de sistemas propostos nos livros didáticos.

1) Partição

Soma: número de porcos mais número de galinhas igual a 36. (Possibilidades conforme tabela abaixo).

Porcos	Galinhas	Porcos	Galinhas	Porcos	Galinhas
01	35	13	23	25	11
02	34	14	22	26	10
03	33	15	21	27	09
04	32	16	20	28	08
05	31	17	19	29	07
06	30	18	18	30	06
07	29	19	17	31	05
08	28	20	16	32	04
09	27	21	15	33	03
10	26	22	14	34	02
11	25	23	13	35	01
12	24	24	12		

Soma: número de pés de porcos mais número de pés de galinhas é igual a 112.

- Número de pés de porcos: múltiplo de 4.

Possíveis: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 100, 104, 108, 112.

- Número de pés de galinhas: múltiplo de 2.

Possíveis: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100, 102, 104, 106, 108, 110, 112.

Testar cada caso.

Por exemplo: Porcos = 1 Galinhas = 35

$1 + 35 = 36$ confere com o número total de animais.

Mas 1 porco corresponde a 4 pés e 35 galinhas correspondem a 70 pés, num total de 74 pés, que é diferente do número total de pés proposto pelo problema.

Tomando um outro exemplo: Porcos = 20 Galinhas = 16

$20 + 16 = 36$ confere com o número total de animais.

20 porcos correspondem a 80 pés e 16 galinhas correspondem a 32 pés num total de 112 pés, conferindo assim também a soma dos pés.

R.: Há no quintal 20 porcos e 16 galinhas.

2) Técnica: adição

$$\begin{cases} p + g = 36(I) \\ 4p + 2g = 112(II) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (-2) obtemos:

$$\begin{cases} -2p - 2g = -72 \\ 4p + 2g = 112 \end{cases}$$

Somando (I) com (II) temos:

$$2p = 40$$

$$p = \frac{40}{2}$$

$$p = 20$$

Correspondente ao número de porcos.

Substituindo p na equação (I) obtemos $g = 16$, que corresponde ao número de galinhas.

R.: Há no quintal 20 porcos e 16 galinhas.

3) Técnica: substituição

$$\begin{cases} p + g = 36(I) \\ 4p + 2g = 112(II) \end{cases}$$

Isolando p na equação (I) temos $p = 36 - g$ e substituindo p por $36 - g$ na equação (II)

obtemos:

$$4(36 - g) + 2g = 112$$

$$144 - 4g + 2g = 112$$

$$-2g = -32$$

$$g = 16$$

Correspondente ao número de galinhas.

Substituindo $g = 16$ na equação (I) obtemos $p = 20$, correspondente ao número de porcos.

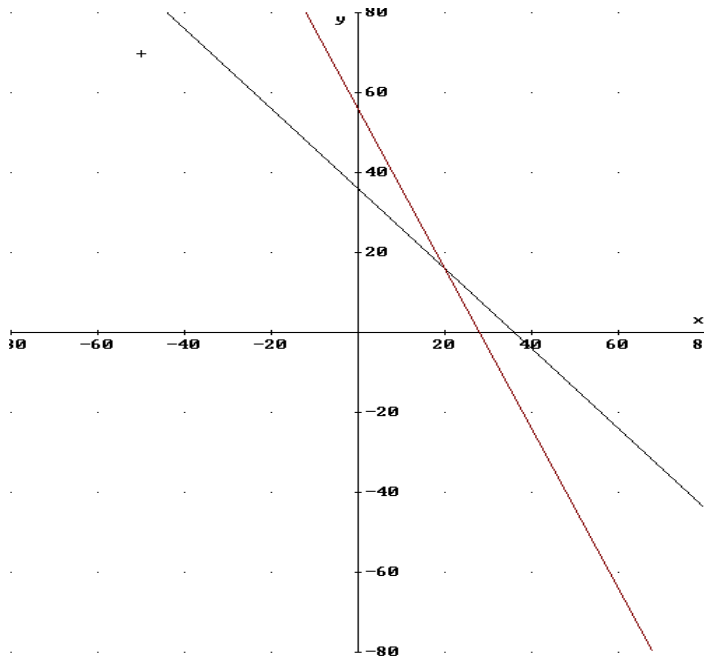
R.: Há no quintal 20 porcos e 16 galinhas.

4) Técnica: Resolução gráfica

Primeiro vamos construir uma tabela para encontrar os valores dos pares ordenados para colocá-los no gráfico.

p	p + g = 36	g
1	$1 + g = 36$	35
2	$2 + g = 36$	34
3	$3 + g = 36$	33
...
20	$20 + g = 36$	16

p	4p + 2g = 112	g
1	4 . (1) + 2g = 112	54
2	4 . (2) + 2g = 112	52
3	4 . (3) + 2g = 112	50
...
20	4 . (20) + 2g = 112	16



Análise a priori do Exercício: “sistemas de duas equações e duas incógnitas.”

Retomamos aqui o exercício:

“Resolva o seguinte sistema: $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = \frac{7}{2} \end{cases}$.”

Este exercício é dado em linguagem matemática e tem por tarefa determinar os valores de x e y, os quais satisfazem as duas equações.

Resoluções possíveis:

1) Técnica: adição

$$\begin{cases} 2x + y = 0(I) \\ 3x - 2y = \frac{7}{2}(II) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (I) por (+2) obtemos:
$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos:

$$7x = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Substituindo o valor de x na equação (I) obtemos:

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + y = 0$$

$$y = -1$$

R.: $S = \{1/2, -1\}$.

2) Técnica: substituição

$$\begin{cases} 2x + y = 0(I) \\ 3x - 2y = \frac{7}{2}(II) \end{cases}$$

Isolando y na equação (I) obtemos $y = -2x$. Substituindo y na equação (II) obtemos:

$$3x - (-2x) = \frac{7}{2}$$

$$7x = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Substituindo x por $\frac{1}{2}$ obtemos $y = -1$.

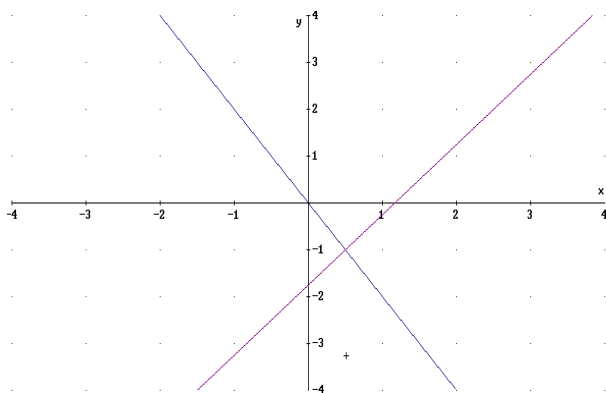
R.: $S = \{1/2, -1\}$.

3) Técnica: resolução gráfica

Primeiro vamos construir uma tabela para encontrar os valores dos pares ordenados para colocá-los no gráfico.

x	$2x + y = 0$	y
0	$2 \cdot (0) + y = 0$	0
1/2	$2 \cdot (1/2) + y = 0$	-1
1	$2 \cdot (1) + y = 0$	-2
3/2	$2 \cdot (3/2) + y = 0$	-3

x	$3x - 2y = 7/2$	y
0	$3 \cdot (0) - 2y = 7/2$	- 7/4
1/2	$3 \cdot (1/2) - 2y = 7/2$	-1
1	$3 \cdot (1) - 2y = 7/2$	-1/4
3/2	$3 \cdot (3/2) - 2y = 7/2$	1/2



Análise a posteriori

Os dois exercícios foram aplicados a uma classe de 8ª série de uma escola da rede municipal, localizada na grande Florianópolis, para 22 alunos. Cada um dos exercícios foi aplicado em separado. Primeiro aplicamos o problema “porcos e galinhas”.

O professor da classe acompanhou a resolução dos alunos, mas não interferiu nas resoluções ou atendeu dúvidas dos alunos.

Análise a posteriori do primeiro exercício “porcos e galinhas”

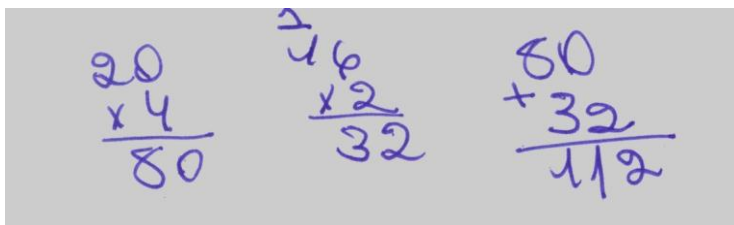
Dos 22 alunos que participaram, temos os seguintes resultados:

Nenhum aluno equacionou o problema.

7 dos 22 alunos acertaram o problema, os quais resolveram por tentativa, supuseram um certo número de porcos e de galinhas, testando até obter o total de pés ou o total de animais. (conforme anexo 01)

Por exemplo: A aluna P. S. P.

Resolveu da seguinte maneira:



The image shows three handwritten calculations in blue ink on a grey background. The first calculation is $20 \times 4 = 80$. The second calculation is $16 \times 2 = 32$. The third calculation is $80 + 32 = 112$.

E chegou no número total de patas concluindo que havia 20 porcos e 16 galinhas.

Dos 15 que erraram, não foi possível tirar conclusão sobre um procedimento de formulação de resolução.

Análise a posteriori do segundo exercício: “sistemas de duas equações e duas incógnitas”

Dos 22 alunos:

Nenhum aluno usou alguma técnica ou resolução lógica possível de recuperar no material recolhido. Somente 1 tentou fazer graficamente mas sem sucesso. (conforme anexo 02)

Em função dos resultados obtidos nessa classe, optamos por aplicar um outro exercício em uma classe de 8ª série de outra escola da grande Florianópolis. O exercício escolhido foi o seguinte.

“A soma de dois números é 2 e a diferença é 6. Quais são esses números?”

Dos 31 alunos da classe:

13 deixaram em branco

18 tentaram resolver

Desses:

- Somente 1 acertou o problema, resolvendo pelo método da adição. (conforme anexo 03)
- 10 erraram no equacionar, dos quais:
 - 2 por representar os dois números pela mesma letra, isto é, $x + x = 2$ e $x - x = 6$ e abandonaram em seguida. (conforme anexo 04)
 - 1 conseguiu equacionar somente a primeira expressão “A soma de dois números é dois”
 $“x + y = 2”$, e pensou em quadrado perfeito, abandonando. (conforme anexo 05)
 - 1 errou no equacionamento, fazendo confusão entre soma e diferença “ $x - y = 2$ e $x + y = 6$ ” e os outros 6 não dá para formular uma conjectura de resolução. (conforme anexo 06)
- 3 equacionaram corretamente e abandonaram. (conforme anexo 07)
- 4 equacionaram corretamente e desenvolveram uma solução por substituição, e o erro acontece na resolução de equação do 1º grau. (conforme anexo 08)

Para ilustrar apresentamos a resolução de dois alunos:

1) Resolva o seguinte problema:

“A soma de dois números é 2 e a diferença é 6. Quais são esses números?”

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

$$x = 2 - y$$

$$2 - y - y = 6$$

$$2 - 2y = 6$$

$$2y = 6 - 2$$

$$y = \frac{4}{2} \quad y = 2$$

$$S = (2, 0)$$

$$x = 2 - 2 = 0$$

1) Resolva o seguinte problema:

"A soma de dois números é 2 e a diferença é 6. Quais são esses números?"

$$x + y = 2$$

$$x - y = 6$$

$$x = 2 - y$$

$$2 - y - y = 6$$

$$2 - 2y = 6$$

$$-2y = 6 - 2$$

$$y = \frac{4}{-2} \quad y = -2$$

Esta experimentação nos mostra que a resolução de sistemas de equações lineares é problemática, no término do ensino fundamental (8ª série). Dificuldades de ler e equacionar um problema e de buscar um método sistematizado de resolução são muito acentuados.

Os quatro alunos que equacionaram o problema revelaram uma outra dificuldade, a de resolver equação do 1º grau.

Também destacamos que as resoluções dos exercícios da 2ª turma não podem ser comparadas com as resoluções dos exercícios da 1ª turma tendo em vista as diferenças dos enunciados.

O exercício proposto na 2ª turma tem por enunciado o tipo mais comum dos livros didáticos.

VI.3 Como o professor de matemática trabalha em classe o tema sistemas de equações lineares – um exemplo

Optamos por realizar uma entrevista com o professor, do tipo guiada, para identificar a abordagem realizada pelo professor para desenvolver o conteúdo sobre sistemas de equações do 1º grau em classe de 7ª série. Outro objetivo é o de resgatar dificuldades dos alunos, identificadas pelo professor em classe, que pudessem nos ajudar a compreender o fracasso da classe na resolução dos exercícios propostos.

A entrevista foi realizada com um professor da Escola Municipal Vitor Miguel de Souza, Itacorubi. (conforme anexo 09) O professor formou-se em matemática licenciatura em 1981 na Universidade Federal de Santa Catarina e hoje tem 24 anos de magistério.

A entrevista nos permite identificar:

Uma abordagem sequencial dos métodos de resolução de sistemas como método gráfico, da adição, da substituição, através de aula expositiva, como podemos confirmar: *“10. P- Trabalhei sistemas de equações, de equações com eles é... usando o gráfico, primeiro, né, gráfico, tá, traçando as retas gráficas, depois o método da adição, e método da substituição, aí expliquei os métodos para eles, né, mas sempre primeiro trabalhando com o gráfico.”*

Na 7ª série em que trabalhou com a turma, este ano na 8ª série, isto é, em 2002 usou o livro didático *Idéias e Desafios*. Mas usa também outros livros para exercícios.

*“14. P- No ano passado usei *Idéias e Desafios* Iracema e Dulce.”*

“20. P- A gente usa outros livros também para exercícios.”

Entre as dificuldades dos alunos identificadas pelo professor, duas são mais relevantes: interpretação e trabalhar com decimais no gráfico. *“30. P- Leitura né. Interpretação, a questão deles é interpretar ... e quando, quando você recai em situações de decimais no gráfico. Ohhh. Trabalhar decimais, né. Números com decimais, ou trabalhar graficamente números decimais eles tem muita dificuldade, aí é ... o problema deles.”*

Quanto aos exercícios propostos para os alunos o professor declara que propõe poucos exercícios, pois os alunos se assustam quando o número de exercícios é grande. Também não propõe listas. *“42. P- Não, lista não, passo pouco exercício, não ... que não*

dá para trabalhar com lista, com nossos alunos (risos), se você passa lista de exercícios eles já ficam assustados né.” “44. P- É, ... é número pequeno de exercícios né”. A escolha dos exercícios propostos o professor afirma que é aleatória. “53. P- Não eu ... , assim aleatórios, não, não vou escolher mais fácil, ímpar, par (risos).” Depois diz que seleciona os diferenciados. “55. P- E procuro pegar exercícios diferenciados, diversificar, né, os não repetitivos no caso né.” “57. P- Procuro os não repetitivos. (em voz baixa).”

Quanto ao tipo de exercícios: problemas ou sistemas dados o que predomina são os sistemas dados. “32. P- Os dois né, os dois, mais sistemas dados, problemas poucos.” Remarcamos que as dificuldades dos alunos, observadas pelo professor, confirmam as dificuldades observadas na experimentação feita nas duas classes. A dificuldade de interpretação (passagem da linguagem natural para a simbólica) é a mais evidente.

Destacamos que os exercícios propostos na experimentação não nos permitem um estudo se o fracasso dos alunos se justifica por dificuldades dos alunos de leitura e interpretação, até por falta de registro do ocorrido durante a resolução dos exercícios. Mas, conforme o professor, são poucos os exercícios tipo problema que são trabalhados em classe. Também nos livros didáticos, os exercícios cujo sistema é dado, isto é, a tarefa é resolver um sistema, é quase o dobro do que a tarefa de resolver um problema dado em linguagem natural e simbólica.

Fizemos uma hipótese: poucos exercícios propostos em sala e em geral exercícios do tipo sistema dado é um indicador da causa das dificuldades dos alunos de interpretar os problemas e de resolução dos sistemas.

Conclusão

O estudo realizado sobre sistemas de equações lineares como saber a ensinar, nos permite concluir que duas abordagens são possíveis de estar presente no ensino:

- como saber matemático definido simplesmente como conjunto de m ($m \geq 1$) equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ (Iezzi e Hazzan).
- como modelagem de uma situação problema, do tipo: “Descubra dois números cuja soma é 20 e cuja a diferença é 5”.(Bigode, 7ª série).

Identificamos, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, que sistemas de equações lineares é objeto de ensino no Ensino Fundamental, e em particular na 7ª série, cuja finalidade é a resolução de problemas. Já na Proposta Curricular de Santa Catarina, o objeto sistemas de equações lineares aparece de forma sistemática somente na 2ª série do Ensino Médio. Nos Planejamentos de escolas públicas, sistemas de equações lineares é explicitado na 7ª série do Ensino Fundamental.

No livro didático “Matemática uma aventura do pensamento” a abordagem de nosso objeto de estudo é feita primeiramente através do estudo de equações de duas variáveis, destacando a solução gráfica. No que diz respeito a tipos de sistemas de equações, dois casos particulares no gráfico são estudados. No 1º caso, duas equações representam duas retas paralelas, ou seja, não existe nenhum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente. O conjunto solução é o conjunto vazio. No 2º caso, duas equações representam duas retas coincidentes, ou seja, todo par ordenado que é solução de uma das equações é necessariamente solução da outra. Das técnicas de resolução trabalhadas temos método da substituição, da adição e gráfica.

Já no livro didático “Matemática hoje é feita assim”, a abordagem de nosso objeto de estudo é feita em dois momentos. De maneira espontânea, onde são equacionadas situações problema, fazendo com que o aluno tente adivinhar uma solução. E em seguida de forma mais sistemática, no caso equacionando os dados do problema e chegando assim num sistema de equações. Os métodos de resolução são os mesmos do livro anterior, com uma pequena diferença: aqui ele separa método da adição e método da subtração.

Em se tratando da experimentação, podemos concluir que muitos alunos não compreendem o conceito de sistemas de equações lineares.

Considerando agora a passagem da linguagem natural para a linguagem simbólica, nosso estudo mostrou uma grande dificuldade de representar simbolicamente situações problema.

Além da dificuldade de representar simbolicamente, notamos uma grande dificuldade de resolver equações do 1º grau.

Não temos elementos suficientes que nos permitam tirar conclusões, com apenas três exercícios que foram propostos, e para apenas 53 alunos, mas podemos nos perguntar: por que muitos dos alunos deixaram em branco os exercícios? Será que não tinham a mínima idéia do que é sistemas de equações lineares para interpretar o problema?

O estudo por nós realizado nos permitiu conhecer um pouco da transposição efetuada sobre “sistemas de equações lineares” de objeto a ensinar a objeto ensinado e de conhecer mais precisamente como este objeto é ensinado em 7ª série do Ensino Fundamental.

Referência Bibliográfica

BIGODE, A; **Matemática hoje é feita assim**. São Paulo: FTD, 2000. 7ª série do Ensino Fundamental.

CHEVALHARD, Y; **La transposition didactique du savoir savant ou savoir enseigné**, éditions La pensée sauvage, Grenoble; 1991.

COULANGE, L; **Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième** ; Tese; Université Joseph Fourier; 2000.

GUELLI, O; **Matemática uma aventura do pensamento**. São Paulo: Ática, 2001. 7ª série do Ensino Fundamental.

IEZZI, G; & HAZZAN, S; **Fundamentos de Matemática Elementar; vol.04**. São Paulo: Atual, 1999.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN) – 1998, Matemática – 5ª à 8ª série.

PROPOSTA CURRICULAR DE SANTA CATARINA – 1998, Educação Infantil Educação Fundamental e Médio.

Anexos