LÚCIA HELENA DA SILVA VIEIRA

Epistemologia dos números complexos

Monografia de conclusão de Curso
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina
Orientador: Prof. Méricles Thadeu Moretti

FLORIANÓPOLIS

1999

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 20/SCG/99.

Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca Examinadora

Orientador: Prof. Méricles Thadeu Moretti

Joana B.O. Quandt
Profª Joana B. de Oliveira Quandt

Profª Jane de Oliveira Crippa

À minha família, pelo incentivo, apoio e confiança e por estarem sempre presentes em minha vida.

SUMÁRIO

"O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, neste portento do mundo das idéias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa".

(Leibniz)

1. Introdução

A História da Matemática sempre me fascinou, principalmente pelo aspecto humano que contém fracassos e êxitos de muitas gerações.

Em geral a matemática é encarada como uma criação divina, onde o esforço e dedicação de inúmeras pessoas são esquecidos. A história dos números complexos mostra claramente a matemática como uma ciência viva, dinâmica e sendo construída pelos homens ao longo do tempo.

Normalmente o estudante se depara com os números complexos ainda no ensino fundamental, quando ao resolver equações polinomiais do segundo grau surgem discriminantes negativos. Isso criou ao longo dos anos a falsa impressão de que os números complexos surgiram quando da resolução de uma equação polinomial do segundo grau.

Veremos adiante que só as equações polinomiais de terceiro grau impuseram a necessidade do surgimento dos números complexos. Sendo assim vamos fazer um histórico sobre a resolução destas equações.

Além disso, mostraremos como inicialmente foram interpretados os números impossíveis ou imaginários, como também são conhecidos, e como excelentes matemáticos resistiram a admitir a existência desses números que só foram verdadeiramente reconhecidos devido a credibilidade de Gauss e a divulgação da interpretação geométrica.

2. Resolução da equação quadrática

As equações quadráticas apareceram na matemática aproximadamente 1700 anos antes de Cristo, nas tabuletas de argila da Suméria e, ocasionalmente, levaram a radicais de números negativos.

No entanto, a presença de situações práticas que envolviam este tipo de equação fez com que se desenvolvessem métodos cada vez mais rápidos para sua resolução. Um importante passo neste sentido foi dado por Al-Khowarizmi, grande matemático árabe do século IX que, para tanto, utilizou um método geométrico. Com base no método de Al-Khowarizmi, o hindu Bhaskara desenvolveu uma fórmula que imortalizou seu nome.

Seja a equação polinomial do 2° grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com $a \neq 0$, *b, c* constantes reais.

Os passos a seguir mostram uma maneira de obter-se a fórmula de Bhaskara.

Para $a \neq o$, $ax^2 + bx + c = o$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,ou$$
$$x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

E aqui está a fórmula de Bhaskara, que não foi deduzida por ele mas que imortalizou o seu nome.

Decorrem da Fórmula de Bhaskara duas constatações importantes:

a) as equações polinomiais com grau maior do que 1 poderiam ter mais do que uma solução;
b) em alguns casos, a aplicação da fórmula conduzia a uma coisa misteriosa, a raiz quadrada de um número negativo.

Aos algebrista antigos, gregos, hindus e árabes, não havia passado despercebido esse caso embaraçoso. Mas, sempre que ele se dava, via-se que o problema concreto que o havia dado origem não tinha solução, e portanto estava de acordo com a realidade: solução "vazia" para um problema sem solução prática.

Seja, por exemplo, o problema de dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40, ou seja:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x.y = 40 \end{cases}$$

Onde *x* e *y* são os números procurados.

Este sistema eqüivale a equação $x^2 - 10x + 40 = 0$, cujas soluções são:

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

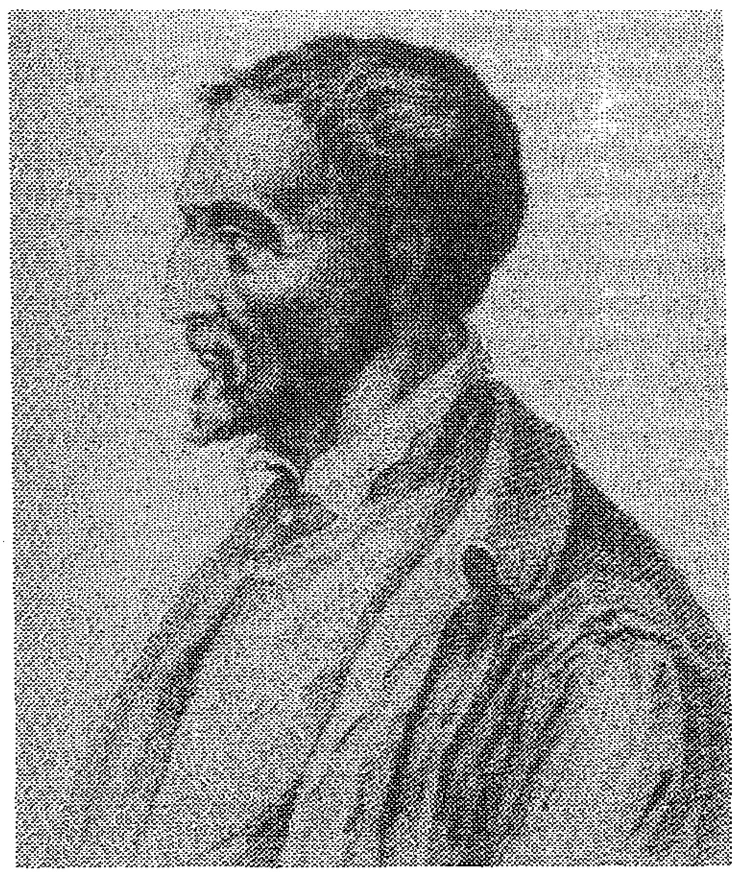
Como o problema que deu origem a esta equação não tem solução, o discriminante negativo era interpretado como um indicativo de que o problema não tinha solução. O embaraço logo era desfeito uma vez que a solução encontrada correspondia à realidade.

3. Resolução da equação cúbica

O primeiro registro do interesse do ser humano por equações cúbicas data da antiga civilização babilônica, por volta de 1800-1600 a.C.. No entanto, passaram-se muitos séculos depois da resolução da equação de 2° grau sem que se soubesse como resolver as de 3° grau.

Essa descoberta, em pleno renascimento italiano, está cercada de mistério.

O método de resolução de uma equação cúbica apareceu publicado em 1545, no *Ars Magna* de Girolamo Cardano de Milão, e ficou conhecida por "Fórmula de Cardano".



Cardano

Segundo o próprio Cardano o mérito da fórmula deve-se a Scipione del Ferro, um professor de matemática da Universidade de Bolonha, que em 1515 descobriu como resolver cúbicas do tipo $x^3 + ax = b$ mas morreu sem publicar sua descoberta. Quando ele morreu em 1526, as únicas pessoas que conheciam seu trabalho eram seu genro e um aluno seu, Antonio Maria Fior de Veneza.

Em 1535 Fior desafiou Tartaglia, um italiano de grande talento matemático, para um debate (prática comum entre os sábios da época), que aceitou prontamente, até porque não levava Fior em grande consideração. Mais tarde, sabendo que seu oponente estava bem preparado, Tartaglia mobilizou todos os seus esforços no sentido de superar seu adversário, o que conseguiu a 10 de fevereiro de 1535, quando além de resolver as equações do tipo $x^3 + ax = b$, também achou a fórmula geral para as do tipo $x^3 + bx^2 = c$, que Fior não conhecia. Como era de se esperar, Tartaglia saiu vitorioso do debate e Fior totalmente humilhado.

Tartaglia

Cardano, sabendo que Tartaglia achara a solução ficou ansioso para aprender seu método. Depois de quatro anos de tentativas frustradas e muitas promessas onde Tartaglia recusava-se a expor o seu método, Cardano conseguiu a revelação das cobiçadas fórmulas. Tartaglia mandou o segredo em um poema, de forma cifrada e misteriosa.

Cardano publicou sua versão do método no *Ars Magna* em 1545, e apesar de vários protestos, Tartaglia teve que se conformar que a fórmula que ele deduzira e que ensinara ao desleal inimigo, ao invés de receber seu nome seja até hoje conhecida como Fórmula de Cardano.

3.1 O método que Tartaglia ensinou a Cardano

A matemática da época de Cardano e Tartaglia não dispunha de uma boa notação, o que dificultava o tratamento das equações. Dessa forma, não podiam expressar seus métodos resumidamente através de fórmulas como é feito atualmente. Portanto não é de se estranhar que Tartaglia tenha comunicado sua descoberta na forma dos seguintes versos:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço
   Se igualam a qualquer número discreto
   Acha dois outros diferentes nisso

2. Depois terás isto por consenso
   Que seu produto seja sempre igual
   Ao cubo do terço da coisa certa

3. Depois, o resíduo geral
   Das raízes cúbicas subtraídas
   Será tua coisa principal

4. Na segunda destas operações
   Quando o cubo estiver sozinho
   Observarás estas outras reduções

5. Do número farás dois, de tal forma
   Que um e outro produzam exatamente
   O cubo da terça parte da coisa

6. Depois, por um preceito comum
   Toma o lado dos cubos juntos
   E tal soma será teu conceito

7. Depois, a terceira destas nossas contas
   Se resolve como a segunda, se observas bem
   Que suas naturezas são quase idênticas

8. Isto eu achei, e não com passo tardo
   No mil quinhentos e trinta e quatro
   Com fundamentos bem firmes e rigorosos
   Na cidade cingida pelo mar.

Tartaglia e Cardano não usavam coeficientes negativos em suas equações, por isso eles analisavam três casos possíveis. Chamavam cada um desses casos de operações.

Analisando os versos numa linguagem atual encontram-se os três casos nos seguintes trechos:

$x^3 + ax = b$ citado no primeiro verso "cubo e coisa igual a número"

$x^3 = ax + b$ citado no quarto verso "quando o cubo estiver sozinho"

$x^3 + b = ax$ citado no sétimo verso

Vamos analisar o primeiro dos casos:

O número a que se refere o primeiro verso é o termo independente que nós estamos chamando de ***b***. Quando Tartaglia diz "acha dois outros diferentes nisso", está sugerindo que se tome duas novas variáveis cuja diferença seja ***b***. Assim chamando de *U* e *V* essas novas variáveis teremos:

$$U - V = b$$

Depois a frase "que seu produto seja sempre igual ao cubo da terça parte da coisa certa" quer dizer que

$$U.V = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

E na frase "o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal" quer dizer que a solução será do tipo

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$$

3.2 Justificativa para a fórmula de Tartaglia

Seja a equação de terceiro grau $x^3 + ax = b$, e vamos lembrar a fórmula do cubo de um binômio:

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

Pondo em evidência o produto uv teremos:

$$(u - v)^3 = -3uv(u - v) + u^3 - v^3$$

ou seja,

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3$$

Se obtivermos u e v tais que

$$uv = a/3 \qquad \text{e} \qquad u^3 - v^3 = b$$

a expressão acima ficará:

$$(u - v)^3 + a(u - v) = b$$

Comparando-se com a expressão anterior $x^3 + ax = b$ podemos concluir que $x = u - v$ será uma solução desta equação. Portanto para resolvermos a equação proposta devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} uv = \dfrac{a}{3} \\ u^3 - v^3 = b \end{cases}$$

Pois, achando u e v, teremos x, uma vez que $x = u - v$.

Para resolver o sistema, elevamos na primeira equação os dois termos ao cubo e teremos:

$$\begin{cases} u^3v^3 = \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 \\ u^3 - v^3 = b \end{cases}$$

Fazendo $u^3 = U$ e $v^3 = V$ teremos:

$$\begin{cases} UV = \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 \\ U - V = b \end{cases}$$

Dessa forma U e $-V$ são as raízes da equação

$$X^2 - bX + (-a/3)^3 = 0$$

que são:

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\left(\dfrac{-a}{3}\right)^3}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

Uma dessas raízes é U e a outra é $-V$ e como

$$u = \sqrt[3]{U}, v = \sqrt[3]{V}$$
$$x = u - v$$

teremos a solução enunciada por Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$$

Finalmente, substituindo U e V pelos seus respectivos valores chegaremos à fórmula de Cardano ou de Tartaglia

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Esta fórmula resolve as equações do terceiro grau do tipo $x^3 + ax = b$. Para resolver equações gerais do terceiro grau $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ devemos transformá-la fazendo a seguinte substituição:

$$x = y - \frac{a_1}{3}$$

Vem:

$$\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1\left(y - \frac{a_1}{3}\right)^2 + a_2\left(y - \frac{a_1}{3}\right) + a_3 = 0$$

$$y^3 - 3y^2\frac{a_1}{3} + 3y\left(\frac{a_1}{3}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 + a_1y^2 - 2y\frac{a_1^{\,2}}{3} + \frac{a_1^{\,3}}{3^2} + a_2y - a_1\frac{a_2}{3} + a_3 = 0$$

$$y^3 + 3\left(\left(\frac{a_1}{3}\right)^2 - 2\frac{a_1^{\,2}}{3} + a_2\right)y = \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 - \frac{a_1^{\,3}}{3^2} - a_3$$

E esta equação é o mesmo que:

$$y^3 + ay = b$$

Portanto, quando encontrou a solução das equações do tipo $x^3 + ax = b$, Tartaglia deu uma resposta geral e não apenas particular ao problema, o que aumenta seu mérito.

Assim como as equações de segundo grau, parecia que as equações de terceiro grau estavam vencidas. Mas a ilusão durou pouco. Aos poucos foram surgindo dúvidas e problemas na aplicação da fórmula. A mais elementar dúvida que surge é que se a fórmula de Bhaskara exibe as duas raízes das equações do segundo grau, por que a de Cardano só apresenta uma? É muito facil achar exemplos de equações do terceiro grau com 3 soluções, mas como fica isto quando a fórmula só nos fornece uma solução? Onde estariam as outras duas? O que fazer com as raízes negativas?

Vejamos como funciona o método para um problema concreto.

Seja v o volume de um cubo de aresta x, e v' o volume de um paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual à aresta do cubo; determinar x de modo que $v = v' + 1$.

Como $v = x^3$ e $v' = 3x$, o problema leva a seguinte equação:

$$x^3 = 3x + 1$$

ou seja

$$x^3 - 3x = 1$$

Nesse caso a = -3 e b = 1

Usando a fórmula de Cardano ou Tartaglia, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}}$$

Como esta raiz não existe, poderíamos apenas dizer que o problema é impossível, no entanto este problema tem solução, vejamos:

Quando a aresta x do cubo é muito pequena, o volume $v = x^3$ é também pequeno e menor que a soma $3x + 1$, mas, a medida que x aumenta, v vai se aproximando de $v' + 1 = 3x + 1$, e chega mesmo a ultrapassá-lo. Por exemplo, para $x = 1$, tem-se:

$$v = 1$$

$$v' + 1 = 4$$

Mas para $x = 2$

$$v = 8$$

$$v' + 1 = 3.2 + 1 = 7$$

Portanto, pode-se concluir que em alguma altura os dois volumes se igualam.

Logo a equação $x^3 - 3x = 1$ deve ter uma raiz que corresponde a solução do problema.

Ao contrário do que aconteceu no exemplo da equação quadrática (Ver pg. 8), em que a raiz negativa era encarada como a inexistência da solução prática, na equação cúbica os algebristas se dão conta de que o instrumento de cálculo, ou seja, os números reais, não permitem que as soluções sejam encontradas. Essa necessidade imposta pelas equações cúbicas, como no exemplo do volume do cubo e do paralelepípedo, mostra bem que pressões exteriores obrigaram os matemáticos a procurar novos caminhos e levaria 200 anos para que tudo fosse definitivamente esclarecido.

4. Raiz quadrada de números negativos antes do surgimento dos números complexos

A raiz quadrada de números negativos desafiou os matemáticos por muitos anos. Apesar de só encararem de frente o problema após as necessidades impostas pelas equações de terceiro grau, antes disso muitos matemáticos se defrontaram com essa situação.

Encontramos o primeiro exemplo de raiz quadrada de um número negativo na *Estereometria* de Heron, matemático grego do período Alexandrino, publicada aproximadamente em 75 d.C. . Num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide, surge a necessidade de avaliar

$$\sqrt{81-144}$$

Mais à frente o mesmo cálculo aparece invertido e assim é calculado

$$\sqrt{144-81}$$

Aproximadamente 275 d.C., surge na Arithmética de Diophanto o primeiro exemplo de uma atitude frente a esse tipo de raiz, ele considera o seguinte problema:

> Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos lados.

Chamando de *x* e *y* o comprimento dos catetos desse triângulo, temos, na nossa notação atual:

$$(1/2)\, x.y = 7 \quad ; x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2$$

Isolando *y* na 1ª equação e substituindo esse valor na 2ª, teremos:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0,$$

cujas raízes são:

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$$

Nesse ponto, Diophanto observa que a equação só teria solução se

$$(172/2)^2 \geq 24 \,.\, 336 \quad (\Delta \geq 0)$$

Como isso não acontece, não há necessidade de se dar sentido para a expressão $\sqrt{-167}$.

Aproximadamente em 850 d.C., o matemático indiano Mahavira faz novas referências à raiz quadrada de um número negativo quando afirma:

> ...como na natureza das coisas um negativo não é um quadrado, ele não tem, portanto, raiz quadrada.

Já no século XII Bhaskara, escreve:

> O quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado.

Mais à frente, Cardano em seu livro *Ars Magna* resolve o problema de dividir 10 em duas partes cujo produto é 40 da seguinte forma:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 100 \\ 4xy = 160 \end{cases}$$

Subtraindo uma da outra

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60$$

$$(x-y)^2 = -60 \Rightarrow x - y = \pm\sqrt{-60} = \pm 2\sqrt{-15}$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = \pm 2\sqrt{-15} \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2x = 10 \pm 2\sqrt{-15}$$

Consequentemente

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$
$$y = 5 \mp \sqrt{-15}$$

Operando como se os números que aparecem fossem números reais constatamos que a soma é 10 e multiplicando, temos:

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right) = 25 - (-15) = 40$$

Embora Cardano chame essas expressões de raízes sofísticas da equação e acredite que são tão sutis quanto inúteis, deve-se a ele o fato de ter sido o primeiro matemático a fazer algumas operações com números complexos.

5. Surgimento dos números complexos

Já na segunda metade do século XVI os números complexos começam a surgir com Raphael Bombelli (1526-1573), discípulo de Cardano, que apesar de admirador do *Ars Magna* achava que seu estilo de exposição não era claro. Publicou então *l'Algebra* em 1572, em Veneza. No capítulo II dessa sua obra Raphael Bombelli aplica a fórmula de Cardano à equação

$$x^3-15x-4=0$$

e encontra a raiz:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Assim como Cardano, ele chama essa solução de sofística, mas percebe por simples verificação que $x = 4$ é uma solução da equação proposta.

O que acontece então é que apesar das raízes quadradas de números negativos, existe verdadeiramente uma solução para o problema e, portanto, a situação já não é tão cômoda como nas equações de segundo grau. Esse fato faz com que Bombelli comece a tentar compreender o que está acontecendo.

Ele admite a possibilidade de que exista uma expressão da forma

$$\left(a+\sqrt{-b}\right)^3=2+\sqrt{-121}$$

Para calcular essa raiz ,ele supõe que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b}$$

Como 4 é raiz da equação, necessariamente

$$a+\sqrt{-b}+a-\sqrt{-b}=4 \Rightarrow a=2$$

Voltando a equação inicial temos:

$$\left(2+\sqrt{-b}\right)^3=2+\sqrt{-121}$$

Bombelli aplica então a fórmula do binômio

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

e assim

$$8+12\sqrt{-b}-6b-b\sqrt{-b}=2+\sqrt{-121}$$

$$8+12\sqrt{b}\sqrt{-1}-6b-b\sqrt{b}\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1}$$

$$\begin{cases} 8-6b=2 \\ 12\sqrt{b}-b\sqrt{b}=11 \end{cases}$$

E daí, b = 1

obtendo então:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$$

E analogamente

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$$

E portanto

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

que é o resultado que se esperava obter.

Após essa descoberta Bombelli diz:

> Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número.
> ...A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova...
> Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.é. geometricamente] , assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos.

Ao realizar seus cálculos, Bombelli criou a expressão *più di meno* para se referir ao que nós denotaríamos como + i e *meno di meno* para – i. Ele então cria a regra do produto, enunciada abaixo seguida de sua tradução com a simbologia atual.

Più via più di meno fa più di meno	+(+ i)= + i
Meno via più di meno fa meno di meno	-(+ i)= - i
Più via meno di meno fa meno di meno	+(- i)= - i
Meno via meno de meno fa più di meno	-(- i)= + i
Più di meno via più di meno fa meno	(+ i).(+ i) = -
Meno di meno via più di meno fa più	(- i).(+ i) = +
Meno di meno via meno di meno fa meno	(- i).(- i) = -

Criou também a regra para a soma de dois números do tipo $m + n\sqrt{-1}$:

$$\left(a + b\sqrt{-1}\right) + \left(c + d\sqrt{-1}\right) = \left(a + c\right) + \left(b + d\right)\sqrt{-1}$$

Portanto, não havia mais como negar que se estava diante de um novo tipo de número, diferente de tudo que se conhecia.

Os matemáticos constataram que os números com que vinham trabalhando há séculos não eram mais suficientes para o estudo da Álgebra, pois quando a equação de terceiro grau possui três raízes reais, o chamado "caso irredutível", o emprego do método de Cardano acarreta obrigatoriamente o manejo de números complexos. Sendo assim, estava lançada a semente para a criação de um novo ramo da matemática: A Teoria dos números Complexos.

6. Desenvolvimento dos números complexos

Os matemáticos do século XVI, a partir do trabalho de Bombelli, começaram a utilizar os números complexos devido a sua óbvia utilidade para resolver equações de terceiro grau mas, ao mesmo tempo davam declarações veementes que eles " não existiam" e eram "inúteis".

A seguir descreveremos as contribuições de vários matemáticos, com destaque para Euler.

Albert Girard (1590-1633) enfocou os números imaginários com grande ousadia. Em seu livro *L' Invention Nouvelle en Algèbre*, de 1629, usa números negativos para resolver problemas geométricos e sugere que, aceitando-se também números imaginários como raízes, seria possível afirmar que uma equação admite tantas raízes quanto é seu grau.

Girard escreveu as raízes quadradas de números negativos na forma

Enunciou também as relações entre coeficientes de uma equação polinomial e sugeriu que as raízes imaginárias são úteis por tornar essas relações gerais.

Pode-se perceber uma mudança de atitude dos matemáticos em relação aos números complexos pelas palavras de Girard

> Pode-se perguntar: para que servem estas soluções impossíveis. Eu respondo: para três coisas- para a validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções.

René Descartes (1596-1650) nascido em La Haye, homem de excepcional cultura e inteligência, prestou grande contribuição para que as raízes negativas fossem aceitas como soluções de equações algébricas, o que, à época, ainda encontrava resistências. Descartes também descobriu um critério para se conhecer o número de raízes positivas e negativas de uma equação algébrica, mesmo sem saber seus valores, através da análise das variações dos sinais de seus coeficientes.

Descartes

Foi Descartes que batizou $\sqrt{-1}$ de número imaginário, o que lamentavelmente foi inadequado e nada matemático, afinal não há nada de "imaginário" na $\sqrt{-1}$ e nem são "complexos" os números que a contêm .

A primeira tentativa de legitimação, via uma interpretação geométrica, é devida a **John Wallis (1616-1703)** professor da Universidade de Oxford e contemporâneo de Newton.

Em 1673, publicou um tratado intitulado *Algebra,* em cujo capítulo LXVI discute a impossibilidade da existência de quantidade imaginárias e compara a existência de quantidades negativas:

Estas quantidades imaginárias (como são freqüentemente chamadas) surgem das supostas raízes de um quadrado negativo (quando aparecem) e se considera que implicam que o caso proposto é impossível.

E assim é, de fato, no sentido estrito do que foi proposto. Pois não é possível que qualquer número (negativo ou afirmativo), multiplicado por si mesmo, possa produzir (por exemplo) –4. Pois sinais iguais (tanto + quanto -) produzirão +; e portanto não –4.
Mas também é impossível que qualquer quantidade (embora não um suposto quadrado) possa ser negativa. Pois não é possível que qualquer magnitude possa ser menos que nada, ou qualquer número menor que nada.

Porém, não é esta suposição (das quantidades negativas) nem inútil nem absurda, quando corretamente compreendida. E, embora para a simples notação algébrica representa uma quantidade menor do que nada, quando se trata de uma aplicação física, denota uma quantidade tão real como se o sinal fosse +; mas interpreta no sentido contrário.

Depois de interpretar números negativos como segmentos sobre uma reta orientada, Wallis tenta uma interpretação para as quantidades imaginárias:

Suponhamos que num local ganhamos do mar 30 acres, mas perdemos em outro local 20 acres: se agora formos perguntados quantos acres ganhamos ao todo, a resposta é 10 acres , ou +10 (pois 30 - 20=10) ...Mas se num terceiro local perdermos mais 20 acres, a resposta deve ser –10 (pois 30- 20 – 20= -10) ....Mas agora , supondo que esta planície de –1600 squares perches [20 acres correspondem a 1600 squares perches, uma outra medida inglesa da época] tem a forma de um quadrado, não devemos supor que este quadrado tem um lado? E assim qual será esse lado?
Não podemos dizer que é 40 nem -40 ...Mas sim que é $\sqrt{-1600}$ (a suposta raiz de um quadrado negativo) ou $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$.

Essa interpretação não teve uma grande acolhida entre seus contemporâneos e nenhuma repercussão posterior.

Jean Le Rond D 'Alembert (1717-1783) foi criado por pais adotivos após ser encontrado abandonado na porta da igreja de St. Jean Le Rond. Seu pai, o General Destouches, lhe deixou após sua morte uma quantia suficiente para cuidar de sua educação. Em 1749, após estudar Direito e Medicina, decidiu dedicar sua vida à matemática.

D 'Alembert gastou muito tempo tentando provar o teorema conjeturado por Girard e conhecido hoje como teorema fundamental da álgebra. No entanto o que conseguiu foi mostrar a forma das raízes, se elas existirem.

Uma contribuição importante de D 'Alembert, foi esclarecer que tipos de números complexos podem ser obtidos ao se resolver equações algébricas.

Em 1747, publicou *Refléxions sur la cause générale des vents* em que afirmou que qualquer expressão algébrica de um número complexo $a+b\sqrt{-1}$ é também um número da forma $a+b\sqrt{-1}$. Divulgou amplamente os números complexos.

Roger Cotes (1682-1716) foi um jovem professor no Trinity College, em Cambridge. Em 1714 obteve um importante resultado, relacionado com a obtenção de raízes n-ésimas da unidade que poderíamos explicitar como:

$$\log_e(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi) = i\phi$$

Isso poderia ter levado à famosa "relação de Euler":

$$\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi = e^{i\phi}$$

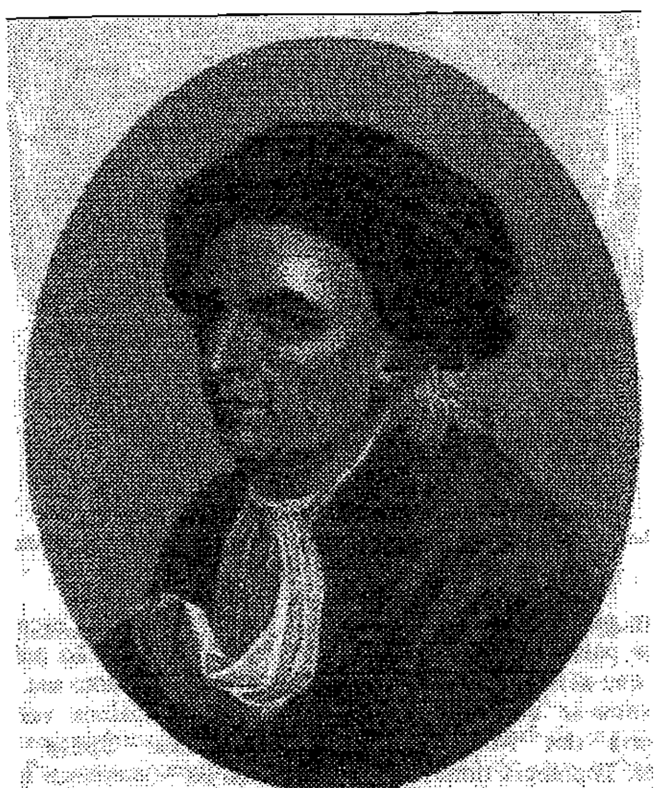
que implica a "fórmula de Moivre":

$$(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)^n = \cos(n\phi) + i\,\text{sen}(n\phi)$$

Porém, Cotes morreu prematuramente deixando uma obra significativa mas incompleta, o caminho então foi outro.

Abraham De Moivre (1667-1754) nasceu na França mas logo após a revogação do Edito de Nantes foi para a Inglaterra. Estudou matemática sozinho, após ler os *Principia* de Newton. Por não ser inglês de nascimento nunca conseguiu obter o posto de professor de matemática em uma universidade. Para se sustentar, dava então longas horas de aulas particulares, o que não o impediu de produzir uma quantidade de pesquisa considerável. Em 1722, obteve um resultado que implicou na fórmula que leva seu nome; essa fórmula limita-se a casos particulares e Moivre nunca chegou a enunciar ou demonstrar a fórmula no caso geral.

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu em Basiléia, Suíça. Dotado de uma memória prodigiosa, falava diversas línguas, sabia de cor tábuas logarítmicas e trigonométricas e realizou trabalhos notáveis em todos os ramos da matemática conhecidos à época. Apesar dos sérios problemas de visão desde a juventude, é indiscutivelmente o matemático que mais produziu e publicou em todos os tempos.



Euler

Euler foi consolidador da simbologia moderna inventando muito do que hoje se utiliza, e é considerado o matemático que dominou os números complexos.

Para Euler número complexo é aquele que pode ser escrito na forma

$Z = a + bi$, *sendo* a e b reais e $i = \sqrt{-1}$

Portanto, se $b = 0$ é fácil ver que os números reais são um caso particular dos complexos.

Logo se percebeu que Z poderia também ser escrito de outra maneira:

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

Como

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} e \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

são números situados entre –1 e +1 e a soma de seus quadrados é sempre 1, eles podem ser considerados o cosseno e o seno de um ângulo θ, batizado de *argumento*.

Fazendo:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \rho$$

Sendo ρ batizado de *módulo*, o número Z pode ser expresso pela fórmula

$$Z = \rho\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Imagine-se dois números complexos Z_1 e Z_2

$$Z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \,\mathrm{sen}\, \theta_1)$$
$$Z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \,\mathrm{sen}\, \theta_2)$$

Multiplicando-os, obtém-se

$$Z_1 . Z_2 = \rho_1 \rho_2 ([\cos \theta_1 \cos \theta_2 + (i)^2 \,\mathrm{sen}\, \theta_1 \,\mathrm{sen}\, \theta_2] + i[\mathrm{sen}\, \theta_1 \cos \theta_2 + \mathrm{sen}\, \theta_2 \cos \theta_1])$$

e como $i^2 = -1$

$$Z_1 . Z_2 = \rho_1 \rho_2([\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1 \,\mathrm{sen}\,\theta_2] + i[\mathrm{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_2 \cos\theta_1])$$

Ora, lembrando que

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \mathrm{sen}\, \theta_1 \,\mathrm{sen}\, \theta_2 = \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

e

$$\mathrm{sen}\, \theta_1 \cos \theta_2 + \mathrm{sen}\, \theta_2 \cos \theta_1 = \mathrm{sen}\, (\theta_1 + \theta_2)$$

tem-se:

$$Z_1 . Z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos [\theta_1 + \theta_2] + i \,\mathrm{sen}\, [\theta_1 + \theta_2])$$

Este é um resultado muito importante: quando se multiplicam dois números complexos, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos (ângulos).

Por indução, podemos chegar a:

$$Z^n = [\rho (\cos \theta + i \,\mathrm{sen}\, \theta)]^n = \rho^n [\cos (n\theta) + i \,\mathrm{sen}\, (n\theta)],$$

que é conhecida como fórmula de Moivre.

Até aqui estava resolvido o problema de elevar um número complexo à potência n.

Restava agora definir como seria a extração da raiz enésima de um número complexo, ou seja, a operação inversa.

Euler na tentativa de descobrir a solução para esse problema se deparou com algo fantástico: qualquer número complexo não nulo (os reais inclusive) tem exatamente n raízes enésimas (n inteiro), ou seja, qualquer número tem três raízes cúbicas, quatro raízes quartas, etc. Até aqui os matemáticos acreditavam somente que todo número positivo tem duas raízes quadradas diferentes.

Tomando alguns cuidados a prova é bastante simples.

Seja o número:

$$Z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Sua(s) raiz(es) enésima(s) será(ão) número(s) que, elevado(s) à enésima potência, for(em) igual(is) a Z.

Chamemos, genericamente, este(s) número(s) de

$$\sqrt[n]{Z} = \rho'(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

Elevando à potência n tem-se

$$\left(\sqrt[n]{Z}\right)^n = \rho'^{\,n}(\cos n\phi + i\,\mathrm{sen}\,n\phi)$$

Se

$$\rho'^{\,n} = \rho$$
$$\cos n\phi = \cos\theta$$
$$\mathrm{sen}\,n\phi = \mathrm{sen}\,\theta$$

Teremos

$$\rho' = \sqrt[n]{\rho}$$

e

$$n\phi = \theta + 2k\pi$$

Pois não significa que os ângulos são iguais, eles podem diferir entre si por um número inteiro de 2π radianos. Ou ainda

$$\phi = \frac{\theta}{n} + k\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Como se vê, fazendo variar k (inteiro) obteremos diferentes valores de ϕ, ou seja, diferentes raízes enésimas do número Z.
Mas, se k é qualquer inteiro, haverá então infinitas raízes?
Não, e facilmente podemos compreender fazendo k tomar sucessivamente os valores 0,1,2,3,...,n-1,n,n+1,n+2, etc.

Para k = 0

$$\phi_1 = \frac{\theta}{n}$$

Para k = 1

$$\phi_2 = \frac{\theta}{n} + \left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Para k = 2

$$\phi_3 = \frac{\theta}{n} + 2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Para k = 3

$$\phi_4 = \frac{\theta}{n} + 3\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

.

.

.

Para k = n-1

$$\phi_n = \frac{\theta}{n} + (n-1)\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Para k = n

$$\phi_{n+1} = \frac{\theta}{n} + n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

Para k = n+1

$$\phi_{n+2} = \frac{\theta}{n} + (n+1)\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\theta}{n} + \left(\frac{2\pi}{n}\right) + 2\pi$$

A partir de k = n os ângulos começam a diferir entre si por múltiplos inteiros de 2π, ou seja, as raízes enésimas ρ' *(cos* ϕ + *i sen* ϕ*)* passam a se repetir, de modo que somente n delas são distintas.

Na prática, as extrações das raízes cúbicas seriam da seguinte maneira: Consideremos por exemplo os números 8 e –8

8= a + bi = 8+ 0i

a=8

b=0

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{0}{\sqrt{8^2+0^2}} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{8}{\sqrt{8^2+0^2}} = 1$$

$$\therefore \theta = 0$$

$$\rho = \sqrt{8^2+0^2} = 8 \therefore \rho\,' = 2$$

Portanto, as 3 raízes cúbicas de 8 são:

$$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2\left(\cos\frac{0}{3} + i\operatorname{sen}\frac{0}{3}\right) = 2 \\ 2\left(\cos\left[\frac{0}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + i\operatorname{sen}\left[\frac{0}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right) = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-1+\sqrt{3}i\right) \\ 2\left(\cos\left[\frac{0}{3}+2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + i\operatorname{sen}\left[\frac{0}{3}+2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right) = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-1-\sqrt{3}i\right) \end{cases}$$

Fazendo o mesmo para o número –8 temos:

-8=a + bi = -8 +0i

a = -8

b = 0

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{0}{\sqrt{8^2+0^2}} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{-8}{\sqrt{8^2+0^2}} = -1$$

$$\therefore \theta \approx \pi$$

$$\rho = \sqrt{8^2+0^2} = 8 \therefore \rho' = 2$$

E as raízes cúbicas de –8 são:

$$\sqrt[3]{-8}\begin{cases} 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(1+\sqrt{3}i\right) \\ 2\left(\cos\left[\frac{\pi}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + i\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{3}+\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right) = 2(-1+0i) = -2 \\ 2\left(\cos\left[\frac{\pi}{3}+2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] + i\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{3}+2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\right) = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(1-\sqrt{3}i\right) \end{cases}$$

O mistério que havia intrigado Bombelli e tantos outros que haviam tentado aplicar a fórmula de Cardano nos casos em que $\Delta < 0$ estava finalmente desvendado. Depois de quase 200 anos conseguiram extrair raízes de números complexos.

Obviamente, Euler compreendia e utilizava muito bem os números complexos. No entanto a ambivalência dos matemáticos do século XVIII em relação a esses números fica evidente quando em sua obra *Vollstandige Anleitung zur Algebra*, publicada em 1770, Euler afirma:

> Uma vez que todos os números concebíveis são maiores do que 0, ou
> Menores do que 0 ou iguais a 0, é claro que a raiz quadrada de um
> Número negativo não pode ser incluída entre os números possíveis.
> Consequentemente, devemos dizer que estes são números impossíveis.
> E esta circunstância nos conduz a tais números, que por sua natureza
> São impossíveis, e que são chamados costumeiramente de imaginários
> Pois eles só existem na imaginação.

No final do século XVIII, os matemáticos já se aventuravam a efetuar operações bem ousadas com os números complexos. O que motivou Euler a produzir aquela que é considerada a mais bela equação de toda matemática.

A fórmula de Moivre diz que

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(n\theta)$$

Chamando $\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ de $f(\theta)$, podemos escrever a fórmula da seguinte maneira:

$$[f(\theta)]^n = f(n\theta)$$

Que é uma propriedade das funções exponenciais

$$(a^b)^n = a^{nb}$$

Euler então demonstrou que

$$\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta}$$

Fazendo $\theta = \pi$, obtém-se

$$\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = e^{i\pi}$$

$$-1 + 0 = e^{i\pi}$$

ou

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta equação une em uma só fórmula os 5 mais famosos números de toda matemática: zero, 1, e, π, e $\sqrt{-1}$.

7. Representação geométrica

O desenvolvimento do conceito de número não deu-se na ordem que nos parece natural, e que é exposta nos textos: números naturais, inteiros, racionais, reais e por fim complexos. Antes mesmo dos números negativos serem considerados como verdadeiros números, já eram conhecidas e praticadas quase todas as regras operatórias sobre números complexos. Sendo assim, fica mais fácil entender o motivo que levava os matemáticos, no fim do século XVIII, a encararem os números imaginários ainda com certo desconforto.

Todavia, os números complexos obtiveram aceitação mais ampla após se chegar a sua representação geométrica.

J. Wallis (1616-1703), propõe uma construção geométrica das raízes imaginárias de uma equação do segundo grau.

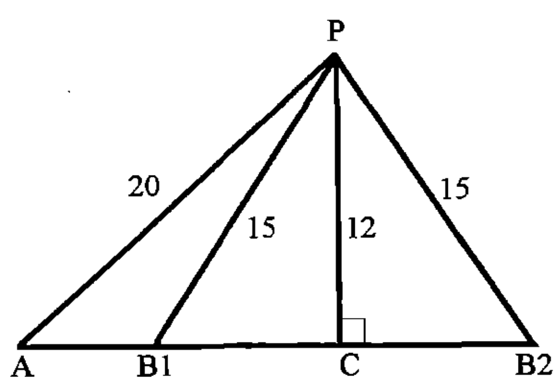
O problema consiste em determinar a base AB de um triângulo APB, conhecendo-se os comprimentos de AP e PB, e a altura PC.

Se por exemplo tem-se PA = 20, PB= 15 e PC=12, o tamanho AB é obtido como solução de uma equação do segundo grau.

Como existem duas soluções que correspondem às duas raízes reais, B terá duas posições, B1 e B2.

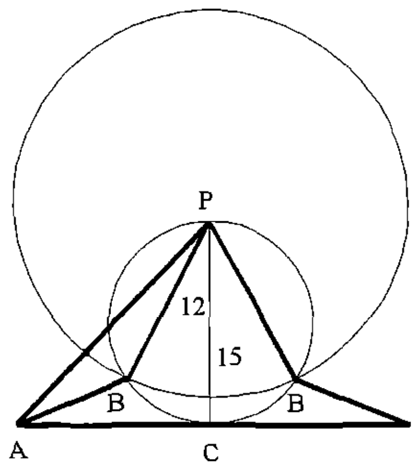
$BC^2 = PB^2 - PC^2$

$BC^2 = 225 - 144 = 81$, logo $BC = \pm 9$



Invertendo-se os valores de PB e PC, a equação não terá mais soluções reais, logo o ponto B não pode mais pertencer à reta AC.

Pode-se encontrar duas posições para B se considerarmos o ângulo reto neste ponto, conforme desenho abaixo.



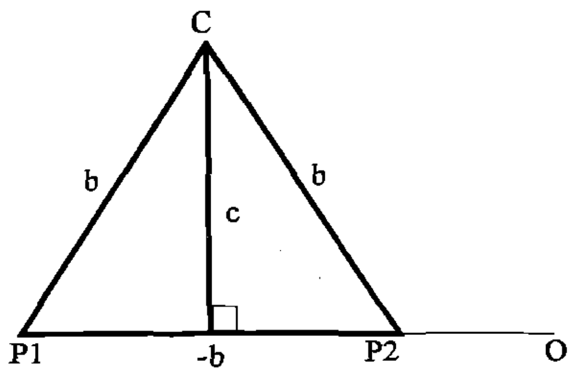
Generalizando. Seja a equação $x^2 + bx + c^2 = 0$ com $b \geq 0$ e $c \geq 0$,

cujas raízes são

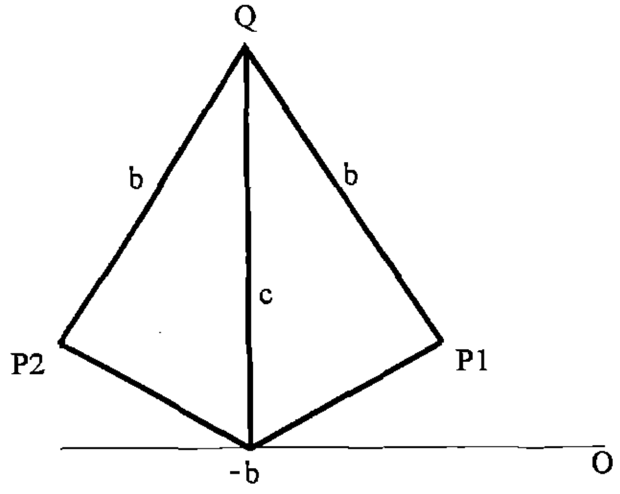
$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$$

que são reais quando $b^2 \geq c^2$.

Nesse caso as raízes podem ser representadas por pontos P1 e P2 na reta dos números reais, e são determinadas pela construção geométrica:

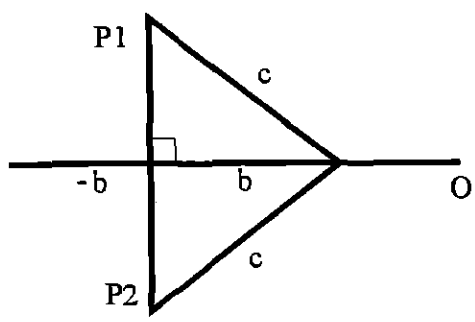


Quando $b<c$, os pontos P1 e P2 não estão na reta e Wallis representou-os da seguinte forma:



$$P1 = -b + i\sqrt{c^2 - b^2}$$
$$P2 = -b - i\sqrt{c^2 - b^2}$$

A representação atual do problema é a seguinte:



Em 1797, **Caspar Wessel (1745-1818),** um agrimensor norueguês, entregou à Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras uma memória, publicada em 1799, sobre a representação analítica da direção onde, foi apresentada uma representação geométrica dos números complexos. Ali, escreveu:

> Vamos designar por +1 a unidade retilínea positiva, por $+\varepsilon$ outra perpendicular à primeira, coma mesma origem; então o ângulo de direção de +1 será 0°, o de –1 será 180°, o de ε será 90° e o de $-\varepsilon$ será -90° ou 270° .

Pela regra de que o ângulo de direção do produto é igual à soma dos ângulos dos fatores, temos:

$$(+1).(+1)=(+1)$$
$$(+1).(-1)=(-1)$$
$$(-1).(-1)=(+1)$$
$$(+1).(+\varepsilon)= (+\varepsilon)$$
$$(+1).\ (-\varepsilon)=(-\varepsilon)$$
$$(+\varepsilon).(+\varepsilon)=(-1)$$
$$(-1).\ (-\varepsilon)=(+\varepsilon)$$
$$(+\varepsilon).(-\varepsilon)=(+1)$$
$$(-\varepsilon).(-\varepsilon)=(-1)$$

A partir disso vê-se que $\varepsilon = \sqrt{-1}$

A representação de Wessel consiste em tomar OXY, um sistema de eixos, orientado como o sistema cartesiano de referência; a+bi um complexo qualquer, e M o ponto do plano de coordenadas (a,b). Seja o complexo a+bi correspondente ao ponto M.

Seja agora, reciprocamente, M' um ponto qualquer do plano de coordenadas (a',b'), M' correspondente ao complexo a'+b'i. Estabelecendo assim uma correspondência biunívoca entre número complexo e ponto do plano.

Na representação de Wessel há qualquer coisa de novo e arrojado, pois é tomado expressamente um eixo para lugar de imaginários, isto é, todos os imaginários puros tem representação sobre o eixo OY. Apesar de todo esforços, seus trabalhos ficaram desconhecidos até 1897.

Uma representação semelhante foi dada por **Jean-Robert Argand (1768-1822),** um bibliotecário suíço que em 1806 publicou um pequeno livro intitulado *Ensaio sobre a maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas*.

Ele observa que estabelecendo:

$$(+1).i = i$$

$$(i).(i) = -1$$

i representa geometricamente uma rotação de 90º no sentido anti-horário.

Como Argand não era um matemático de grande reputação, seus trabalhos acabaram por não obter reconhecimento, e pouco efeito tiveram sobre os matemáticos da época.

Um dos maiores matemáticos de todos os tempos, senão o maior, foi **Carl Friedrich Gauss (1777-1855)**. Nasceu em Brunswick, na Alemanha, e além de seus excepcionais dons matemáticos era um prodígio lingüístico dominando vários idiomas.

Gauss

Ao longo de sua vida Gauss publicou inúmeros trabalhos sempre se preocupando com a precisão e o rigor. Em 1799, aos 21 anos, apresentou o que é considerado o mais importante dos alicerces da teoria das equações algébricas: O Teorema Fundamental de Álgebra.

Este teorema afirma que **toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz.**

Seja o polinômio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Pelo teorema anterior existe pelo menos um número complexo k_1 para o qual $P(x) = 0$.

Da álgebra elementar sabe-se que o resto da divisão de qualquer polinômio por $x - \alpha$ é exatamente $P(\alpha)$.

Portanto, se $P(k_1) = 0$, $P(x)$ é divisível por $x - k_1$ e o polinômio pode ser reescrito como o produto de $x - k_1$ por um polinômio de grau $n - 1$.

Por sua vez, a este polinômio de grau $n - 1$ aplica-se também o teorema Fundamental da Álgebra e ele é divisível por pelo menos um fator $x - k_2$.

Continuando o raciocínio conclui-se que $P(x)$ pode ser desdobrado no produto de n binômios do tipo $(x - k_j)$ $j = 1,2,\ldots n$.

Como existem n valores de x que anulam um a um os n binômios, o polinômio $P(x)$ de grau n tem exatamente n raízes, eventualmente repetidas pois nada obriga que os n k_j sejam todos diferentes entre si.

Portanto, ao demonstrar que as equações polinomiais têm pelo menos uma raiz no campo complexo, Gauss demonstrou que elas têm exatamente n raízes, sendo n o grau do respectivo polinômio.

Desde os tempos de Cardano suspeitava-se que, por exemplo, as equações de terceiro grau tinham três raízes, as de quarto grau tinham quatro raízes e assim por diante.

Quando Euler demonstrou que qualquer número tem n raízes enésimas (n natural), sentiu-se que uma descoberta sobre o número de raízes das equações polinomiais de grau n estava próxima. No entanto, apesar de vários matemáticos chegarem a enunciar este resultado, ainda não haviam conseguido demonstrá-lo.

Até o final da vida, Gauss deu a este teorema três outras demonstrações por caminhos distintos.

Tendo em vista o Teorema Fundamental da álgebra é provável que a idéia de representar geometricamente tenha ocorrido quando da sua demonstração, apesar de Gauss não a ter utilizado.

Em 1831, Gauss escreveu um artigo muito explícito sobre esta questão:

> O autor tem considerado há vários anos esta parte importante da matemática sob um ponto de vista diferente, que permite conferir às quantidades imaginárias, como as negativas, uma existência objetiva. O significado intuitivo dos números complexos fica completamente estabelecido e não se precisa mais para admitir estas quantidades no Domínio da aritmética.

Outra observação feita por Gauss é que se as unidades 1, -1, $\sqrt{-1}$ não fossem chamadas de positiva, negativa e imaginária, mas de direta, inversa e lateral, as pessoas não teriam a impressão de que havia algo de misterioso nesses números. Quando Gauss faz essa observação fica claro a visão da matemática na época, ou seja, o fato dos números complexos poderem ser representados geometricamente fez com que adquirissem a realidade que a aritmética não havia conseguido lhes dar.

Para Gauss, a denominação de "números complexos" significava algo formado por partes e não algo complicado, como hoje muitas vezes é assim interpretado.

Finalmente, a formalização completa dos números complexos foi dada por **William Rowan Hamilton** em 1837, e ainda **Augustin Cauchy** em 1847.

Atualmente, os números complexos se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc.

A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais.

8. Conclusão

Neste trabalho, procurou-se enfocar os dois séculos de muita pesquisa e estudo de vários matemáticos para o desenvolvimento dos números complexos, e a fundamental importância que os números imaginários adquiriram com o passar do tempo, o que permitiu a evolução de diversos ramos da matemática.

É importante ressaltar que os aspectos históricos da matemática deveriam ser melhor explorados didaticamente, não negligenciando a parte mais substancial ligada ao surgimento e desenvolvimento das idéias, de forma que os alunos enxergassem um outro lado desta ciência, isto é, a matemática como uma ciência viva em construção.

Finalmente, devemos enfatizar que o progresso da matemática nem sempre obedeceu um plano lógico de desenvolvimento interno, mas muitas vezes, por pressões exteriores, foi obrigada a procurar novos caminhos e ir mais além. Dessa forma desenvolveu-se inúmeras teorias como a noção de número complexo que, aliada a noção de infinito, são dois dos principais instrumentos da matemática moderna.

9. Referências Bibliográficas

BAUMGART, John K. *Álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher Ltda, 1974.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARMO, Manfredo Perdigão de; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria / Números Complexos*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1992.

DIEUDONNÉ, Jean Alexandre. *A formação da matemática contemporânea*. Lisboa, 1990.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora Unicamp, 1995.

GARBI, Gilberto Geraldo. *O Romance das equações algébricas- A História da Álgebra*. São Paulo: Makron Books, 1997.

LIMA, Elon Lages. *Sobre a evolução de algumas idéias matemáticas*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n°6, p. 1-8, 1985.

MILIES, César Polcino. *A emergência dos números complexos*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n°24, p. 5-15, 1993.

ROSA, Mário Servelli. *Números Complexos: uma abordagem histórica para aquisição do conceito*. Tese de de mestrado, PUC-SP, 1998.