UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FÓRMULAS MATEMÁTICAS PARA SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO COM CARÊNCIA

JOÃO FRANCISCO MARQUES NETO

FLORIANÓPOLIS
2003

200910

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS - CFM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FÓRMULAS MATEMÁTICAS PARA SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO COM CARÊNCIA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Matemática – Habilitação em Licenciatura, do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Ms. Fernando Guerra

JOÃO FRANCISCO MARQUES NETO

FLORIANÓPOLIS

2003

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 04/SGC/03.

Nereu E. Burin

Prof. Nereu Estanislau Burin

Professor da Disciplina

Banca Examinadora:

Guerra

Prof. Ms. Fernando Guerra

Orientador

Nereu E. Burin

Prof. Ms. Nereu Estanislau Burin

Prof. Dr. Altair Borget

Dedico este trabalho a todos que sempre acreditaram na minha pessoa, em especial a meus pais e a meus avós que, sem dúvidas, são os grandes responsáveis, além de mim próprio, pelo êxito em minha vida profissional.

AGRADECIMENTOS

- A Deus pelo dom da vida.
- Ao Professor Fernando Guerra pela paciência e pela inestimável orientação.
- A meus pais Iracema Maria Lüdtke Espíndola e José Eraldo Espíndola e a meus avós Inocência Shaden Lüdtke (in memorian) e Amantino Conrado Lüdtke pelo amor e carinho dedicados a minha pessoa, principalmente nestes anos de luta acadêmica.
- A minha irmã Priscilla Lüdtke Espíndola pela alegria e apoio em mim depositado.
- A minha namorada Daiane Cléia Kuhnen (Nane) pela compreensão, força, apoio e inigualável paciência em ter consigo alguém dividido entre estudos, família, namoro, trabalho e amigos.
- Aos colegas de curso Gerson Luis Uberti e Jaques Nunes pelo estímulo e amor de irmão que pude sentir consigo nestes anos de luta acadêmica.
- Aos professores encontrados ao longo desta jornada pela paciência para comigo e pela dedicação em seu trabalho a fim de tornar-me um bom profissional.
- A todos colegas que encontrei ao longo do curso, que propuseram a dividir comigo muitos momentos inesquecíveis.
- E a todas grandes pessoas que sempre acreditaram em meu potencial e sempre me estimularam.

SUMÁRIO

Introdução 9

Capítulo 1 – As idéias principais e os objetivos do trabalho 10

Capítulo 2 – Um pouco da História da Matemática Financeira 12

Capítulo 3 – Fundamentação teórica 20

3.1. Juro simples 20

3.1.1. Juro 20

3.1.2. Capital 20

3.1.3. Taxa de juro 20

3.1.4. Fluxo de caixa 22

3.1.5. Cálculo do juro 23

3.1.6. Montante 24

3.1.7. Taxa proporcional e taxa equivalente 26

3.1.8. Juro exato e juro comercial 27

3.1.9. Valor nominal e valor atual 29

3.1.10. Desconto comercial ou desconto "por fora" 30

3.2. Juro composto 33

3.2.1. Montante 33

3.2.2. Cálculo do juro 34

3.2.3. Valor atual e valor nominal 35

3.2.4. Taxas equivalentes 36

3.2.5. Taxa efetiva e taxa nominal 37

3.2.6. Desconto racional ou desconto "por dentro" 38

3.3. Equivalência de capitais 40

3.3.1. Data focal e equação valor 40

3.3.2. Capitais equivalentes........ 41

3.4. Rendas certas ou anuidades ou série de pagamentos........ 41

3.4.1. Classificação das anuidades........ 42

3.4.2. Valor atual do modelo básico........ 43

3.4.3. Montante do modelo básico........ 45

Capítulo 4 – Sistemas de Amortização........ 48

4.1. Introdução........ 48

4.1.1. Conceitos básicos........ 48

4.2. Classificação das modalidades de amortização........ 49

4.2.1. Sistema de amortização constante (SAC)........ 49

4.2.2. Sistema francês de amortização........ 53

4.2.3. Outros tipos de sistemas de amortização........ 57

4.2.3.1. Sistema de amortização misto (SAM)........ 57

4.2.3.2. Sistema americano (SA)........ 57

4.2.3.3. Sistema de amortizações variáveis (SAV)........ 58

4.2.3.4. Sistema de amortização crescente (SACRE)........ 58

Capítulo 5 – Fórmulas matemáticas para sistemas de amortização com carência.....59

5.1. Sistema de amortização constante com prazo de carência........ 59

5.1.1. SAC com prazo de carência sem juros capitalizados........ 59

5.1.1.1. Amortização........ 60

5.1.1.2. Saldo devedor........ 60

5.1.1.3. Juros........ 61

5.1.1.4. Prestação........ 63

5.1.2. SAC com prazo de carência com juros capitalizados........ 70

5.1.2.1. Saldo devedor........ 70

5.1.2.2. Amortização........ 71

5.1.2.3. Juros........ 72

5.1.2.4. Prestação........ 74

5.2. Sistema francês de amortização com prazo de carência........ 81

5.2.1. SF com prazo de carência sem juros capitalizados........ **81**

5.2.1.1. Prestação........ **81**

5.2.1.2. Juros........ **82**

5.2.1.3. Amortização........ **83**

5.2.1.4. Saldo devedor........ **85**

5.2.2. SF com prazo de carência com juros capitalizados........ **92**

5.2.2.1. Prestação........ **92**

5.2.2.2. Juros........ **93**

5.2.2.3. Amortização........ **94**

5.2.2.4. Saldo devedor........ **96**

Conclusão 104

Bibliografia 105

INTRODUÇÃO

O presente trabalho surgiu do fato de que, nos livros de Matemática Financeira, no mercado livreiro nacional, não abordarem fórmulas matemáticas nos capítulos onde tratam de sistemas de amortização envolvendo um período de carência, para o cálculo, por exemplo, do saldo devedor de um empréstimo em que será amortizado em 24 parcelas mensais, com 6 meses de carência. Para resolver situações desta natureza pretende-se elaborar fórmulas matemáticas para tais cálculos que, além da carência, pode-se considerar a capitalização dos juros nos empréstimos.

A expectativa é de que este trabalho traga uma contribuição para as pessoas envolvidas nas áreas financeiras e afins, de maneira clara e objetiva, quando na realização de cálculos financeiros.

CAPÍTULO 1

As idéias principais e os objetivos do trabalho

A idéia de escrever sobre esse tema partiu da insuficiência encontrada nos livros que tratam de Matemática Financeira sobre a questão dos sistemas de amortização "com carência", tendo em vista que é de costume encontrarmos apenas esse tópico, trabalhado "sem carência".

Eis, então, os objetivos do presente trabalho sobre Matemática Financeira:

1. Deduzir as fórmulas matemáticas que facilitem a obtenção do saldo devedor, da parcela de amortização, dos juros e da prestação num sistema de amortização que envolve um periodo de carência, num periodo qualquer (durante o prazo de carência ou durante a amortização da divida).

Tem-se que o objetivo almejado possui como idéias principais as fórmulas matemáticas dos sistemas de amortização "sem carência", encontrada em maior escala nos livros de Matemática Financeira, e tenta-se chegar a dedução das fórmulas matemáticas dos sistemas de amortização "com carência".

2. Encontrar as fórmulas matemáticas para obtenção das somas totais das parcelas de amortização, dos juros e das prestações, num sistema de amortização que envolva um prazo de carência.

3. Auxiliar as pessoas que trabalham na área de financiamento, apresentando as fórmulas matemáticas que facilitem os problemas encontrados pelas pessoas que trabalham nas áreas afins. Para as pessoas (fisicas/jurídicas) envolvidas com os sistemas de amortização "com

carência", a idéia é apresentar de uma forma clara e objetiva, as ferramentas matemáticas que auxiliarão a tais pessoas, a obtenção de dados e números para seus investimentos.

Veja como será o desenvolvimento desse trabalho:

Como entretenimento, apresenta-se no capítulo 2 (Um pouco da História da Matemática Financeira) um texto sobre o surgimento da Matemática Financeira, bem como as primeiras técnicas de manuseio das operações financeiras, surgimento dos bancos, etc.

Neste trabalho, como metodologia, partiremos da fundamentação teórica encontrada nos livros didáticos de Matemática Financeira, afim de que se possa entender o contexto dos conceitos dessa parte da Matemática. Todas definições importantes e necessárias para o entendimento da Matemática Financeira para este trabalho pode ser encontrada no capítulo 3 (Fundamentação Teórica) e no capítulo 4 (Sistemas de Amortização).

Como corpo principal do presente trabalho, o capítulo 5 (Fórmulas Matemáticas para Sistemas de Amortização com Carência) trata, embasado nos capítulos anteriores, da dedução e demonstração das fórmulas matemáticas utilizadas nos empréstimos que envolvem um prazo de carência, no SAC (Sistema de Amortização Constante) e no SF (Sistema Francês).

Apresenta-se, também, o SAC e o SF com as fórmulas para empréstimos com um período de carência, sendo ou não, o valor do empréstimo, capitalizado pela taxa de juros a ser cobrada na operação financeira.

Para que as fórmulas apresentadas demonstrem eficácia, para cada grupo de fórmulas obtidas (SAC e SF, com carência e sem/com juros capitalizados) será apresentado um exemplo ilustrativo para que possa-se ver a utilização das mesmas na prática.

CAPÍTULO 2

Um pouco da História da Matemática Financeira

É bastante antigo o conceito de juro, tendo sido amplamente divulgado e utilizado ao longo da História. Esse conceito surgiu naturalmente quando o homem percebeu existir uma estreita relação entre o dinheiro e o tempo. Processos de acumulação de capital e a desvalorização da moeda levariam normalmente a idéia de juros, pois se realizavam basicamente devido ao valor do dinheiro no tempo.

As tábuas mais antigas mostram um alto grau de habilidade computacional e deixam claro que o sistema sexagesimal posicional já estava de longa data estabelecida. Há muitos textos desses primeiros tempos que tratam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos baseados nessas transações. As tábuas mostram que os sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de vendas e endosso.

Há tábuas que são documentos de empresas comerciais e outras que lidam com sistemas de pesos e medidas. Muitos processos aritméticos eram efetuados com a ajuda de várias tábuas.Das 400 tábuas encontradas cerca de metade eram tábuas matemáticas. Estas últimas envolvem tábuas de multiplicação, tábuas de inversos multiplicativos, tábuas de quadrados e cubos e mesmo tábuas de exponenciais. Quanto a estas, provavelmente eram usadas, juntamente com a interpelação, em problemas de juros compostos. As tábuas de inversos eram usadas para reduzir a divisão à multiplicação. Os juros e os impostos existem desde a época dos primeiros registros de civilizações existentes na Terra. Um dos primeiros indícios apareceu na já na Babilônia no ano de 2000 a.C. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas; os juros eram pagos sob a forma de sementes ou de outros bens. Muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimo e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas.

A História também revela que a idéia se tinha tornado tão bem estabelecida que já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 a.C., com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional. O juro não é apenas uma das nossas mais antigas aplicações da Matemática Financeira e Economia, mas também seus usos sofreram poucas mudanças através dos tempos.

Como em todas as instruções que tem existido por milhares de anos, alguma das práticas relativa a juros tem sido modificada para satisfazerem às exigências atuais, mas alguns dos antigos costumes ainda persistem de tal modo que o seu uso nos dias atuais ainda envolve alguns procedimentos incômodos. Entretanto, devemos lembrar que todas as antigas práticas que ainda persistem foram inteiramente lógicas no tempo de sua origem. Por exemplo, quando as sementes eram emprestadas para a semeadura de uma certa área, era lógico esperar o pagamento na próxima colheita - no prazo de um ano. Assim, o cálculo de juros numa base anual era mais razoável; tão quanto o estabelecimento de juros compostos para o financiamento das antigas viagens comerciais, que não poderiam ser concluídas em um ano. Conforme a necessidade de cada época, foi se criando nova forma de se trabalhar a relação tempo-juros (juros semestral, bimestral, diário, etc). Há tábuas nas coleções de Berlirn, de Yale e do Louvre que contêm problemas sobre juros compostos e há algumas tábuas em Istambul que parecem ter sido originalmente tábuas de a^n para n de 1 a 10 e para a = 9, 16, 100 e 225. Com essas tábuas podem-se resolver equações exponenciais do tipo $a^n = b$. Em uma tábua do Louvre, de cerca de 1700 a.C., há o seguinte problema: Por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiros a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?

Na época em que os homens viviam em comunidades restritas, tirando da natureza todos os produtos de que tinham necessidade, sem dúvida devia existir muito pouca comunicação entre as diversas sociedades. Mas com o desenvolvimento do artesanato e da cultura e em razão da desigual repartição dos diversos produtos naturais, a troca comercial mostrou-se pouco a pouco necessária.

O primeiro tipo de troca comercial foi o escambo, fórmula segundo a qual se trocam diretamente (e, portanto sem a intervenção de uma "moeda" no sentido moderno da palavra) gêneros e mercadorias correspondentes a matérias primas ou a objetos de grande necessidade. Por vezes, quando se tratava de grupos que entretinham relações pouco amistosas, essas trocas eram feitas sob a forma de um escambo silencioso. Uma das duas partes depositava, num lugar previamente estabelecido, as diversas mercadorias com as quais desejava fazer a troca e, no dia seguinte, encontrava em seu lugar (ou ao lado delas) os produtos propostos pelo outro parceiro. Se a troca fosse considerada conveniente levavam-se os produtos, senão retornava-se no dia seguinte para encontrar uma quantidade maior. O mercado podia então durar vários dias ou mesmo terminar sem troca quando as duas partes não podiam encontrar terreno para entendimento.

Cenas como tais puderam ser observadas por exemplo entre os aranda da Austrália, os vedda do Ceilão, os bosquimanos e os pigmeus da África, os botocudos do Brasil, bem como na Sibéria e na Polinésia.

Com a intensificação das comunicações entre os diversos grupos e a importância cada vez maior das transações, a prática do escambo direto tornou-se bem rapidamente um estorvo. Não se podiam mais trocar mercadorias segundo o capricho de tal ou qual indivíduo ou em virtude de um uso consagrado ao preço de intermináveis discussões. Houve portanto a necessidade de um sistema relativamente estável de avaliações e de equivalências, fundado num princípio (vizinho daquele da base de um sistema de numeração) dando a definição de algumas unidades ou padrões fixos. Nesse sistema é sempre possivel estimar tal ou qual valor, não somente para as operações de caráter econômico mas também (e talvez sobretudo) para a regulamentação de problemas juridicos importantes e, todas as espécies de produtos, matérias ou objetos utilitários serviram nessa ocasião.

A primeira unidade de escambo admitida na Grécia pré-helênica foi o boi. Não é por acaso que a palavra latina pecúnia quer dizer "fortuna, moeda, dinheiro": provém, com efeito, de pecus, que significa "gado, rebanho"; além disso, o sentido próprio da palavra pecunia corresponde ao "ter em bois".

Mas nos tempos antigos a operação de escambo, longe de ser um ato simples, devia ser, ao contrário, envolta de formalidades complexas, muito provavelmente ligadas à mística e às práticas mágicas. É em todo caso o que revela a análise etnológica feita nas sociedades "primitivas" contemporâneas, que se viu confirmar por um certo número de descobertas arqueológicas. Pode-se, portanto, supor que nas culturas pastorais a idéia de boi-padrão (moeda de sangue) sucedeu à idéia de "boi de sacrifício", ela mesma ligada ao valor intrínseco estimado do animal.

Em contrapartida, nas ilhas do Pacífico as mercadorias foram estimadas em colares de pérolas ou de conchas. Após um certo período, começou-se por trocar faixas de tecido por animais ou objetos. O tecido era a moeda; a unidade era o palmo da fita de duas vezes oitenta fios de largura.

Tais métodos apresentavam, contudo, sérias dificuldades de aplicação. Assim, à medida que o comércio se desenvolvia, os metais desempenharam um papel cada vez maior nas transações comerciais, vindo a tornar-se no fim das contas a "moeda de troca" preferida dos vendedores e compradores. E as avaliações das diversas mercadorias passaram a ser feitas quantitativamente pelo peso, cada uma delas referindo a uma espécie de peso-padrão relativo a um ou a outro metal.

Igualmente no Egito faraônico, os gêneros e as mercadorias foram freqüentemente estimados e pagos em metal (cobre, bronze e, por vezes, ouro ou prata), que se dividia inicialmente em pepitas e palhetas. A avaliação era feita também sob a forma de lingotes ou de anéis, cujo valor se determinava em seguida pela pesagem.

Até o momento não somente tratamos de um simples escambo, mas também um verdadeiro sistema econômico. A partir de então, graças ao padrão de metal, as mercadorias passaram a não mais ser trocadas ao simples prazer dos contratantes ou segundo usos consagrados freqüentemente arbitrários, mas em função de seu "justo preço". Até então, tratava-se somente de introduzir nas transações e nos atos jurídicos uma espécie de peso-padrão, unidade de valor à qual o preço de cada uma das mercadorias ou ações consideradas era referido. Partindo desse princípio, tal metal ou tal outro podia então servir em toda ocasião como "salário", "multa" ou como "valor de troca", e no caso da "multa", algum tipo de cálculo de juros primário era utilizado para se obter um certo valor para a mesma.

Aprendendo a contar abstratamente e agrupar todas as espécies de elementos seguindo o principio da base, o homem aprendeu assim a estimar, avaliar e medir diversas grandezas (pesos, comprimentos, áreas, volumes, capacidades etc.). Aprende igualmente a atingir e conceber números cada vez maiores, antes mesmo de ser capaz de dominar a idéia do infinito.

Pôde elaborar também várias técnicas operatórias (mentais, concretas e, mais tarde, escritas) e erguer os primeiros rudimentos de urna aritmética inicialmente prática, antes de tornar-se abstrata e conduzir à álgebra - onde hoje temos a Matemática Financeira amplamente desenvolvida.

Foi-lhe também aberta à via para a elaboração de um calendário e de uma astronomia, bem como para o desenvolvimento de uma geometria estruturada inicialmente em medidas de comprimento, áreas e volumes, antes de ser especulativa e axiomática. Numa palavra, a aquisição desses dados fundamentais permitiu pouco a pouco à humanidade tentar medir o mundo, compreendê-lo um pouco melhor, colocar a seu serviço alguns de seus inúmeros segredos e organizar, para desenvolvê-la, sua economia.

O surgimento dos bancos está diretamente ligado ao cálculo de juros compostos e o uso da Matemática Comercial e Financeira de modo geral. Na época em que o comércio começava a chegar ao auge, uma das atividades do mercador foi também a do comércio de dinheiro: com o ouro e a prata. Nos diversos países eram cunhadas moedas de ouro e prata.

Durante a expansão do comércio, assim como durante as guerras de conquista, as moedas dos diferentes paises eram trocadas, mas o pagamento só podia ser efetuado com dinheiro do pais específico. Conseqüentemente, dentro das fronteiras de cada país, as moedas estrangeiras deviam ser cambiadas por dinheiro deste pais. Por outro lado, os comerciantes e outras pessoas possuidoras de muito dinheiro, que viajavam ao exterior, precisavam de dinheiro de outros paises, que compravam com moeda nacional. Com o passar do tempo, alguns comerciantes ficaram conhecendo muito bem as moedas estrangeiras e passaram a acumulá-las em grandes quantidades. Desta forma, dedicou-se exclusivamente ao câmbio de dinheiro, ou seja, ao comércio de dinheiro.

Aconteceu então a divisão de trabalho dentro do campo do comércio: paralelamente aos comerciantes que se ocupavam com a troca de artigos comuns, surgiram os cambistas, isto é, comerciantes dedicados ao intercâmbio de uma mercadoria específica: o dinheiro.

Num espaço de tempo relativamente curto, acumularam-se fantásticas somas de dinheiro nas mãos dos cambistas. Com o tempo, foram se ocupando de uma nova atividade: guardar e emprestar dinheiro. Naquela época, e devido à deficiente organização das instituições responsáveis pela segurança social do indivíduo, não era recomendável que tivesse em sua casa muitas moedas de ouro e prata. Estas pessoas entregavam seu dinheiro à custódia do cambista rico, que o guardava e devolvia ao dono quando ele pedisse. Imaginemos um cambista qualquer que tenha acumulado, desta forma, em seus cofres, imensa quantidade de dinheiro. Era natural que a seguinte idéia ocorresse: "Porque estas grandes somas de dinheiro haverão de permanecer em meu poder sem qualquer lucro para mim? - Ai então se percebe que a palavra "lucro" está diretamente interligada com o conceito de finanças - É pouco provável que todos os proprietários, ao mesmo tempo e num mesmo dia, exijam a devolução imediata de todo seu dinheiro. Emprestarei parte deste dinheiro a quem pedir, sob a condição de que seja devolvido num prazo determinado. E como meu devedor empregará o dinheiro como quiser durante este é natural que eu obtenha alguma vantagem. Por isso, além do dinheiro emprestado, deverá entregar-me, no vencimento do prazo estipulado, uma soma adicional". Vimos que neste pensamento do mercador, a idéia de lucro já aparece fortemente. Assim tiveram início as operações creditícias. Aqueles que, por alguma razão, se encontravam sem dinheiro - comerciantes, senhores feudais e não raras vezes o próprio rei ou o erário nacional -, recorriam ao cambista que lhes emprestava grandes somas de dinheiro a juros "razoáveis".

O juro era pago pelo usufruto do dinheiro recebido ou, mais -propriamente, era a "compensação pelo temor" de quem dava dinheiro emprestado e assim se expunha a um grande risco. Entretanto estes juros alcançaram, em alguns casos, quantias incríveis: na antiga Roma os usuários exigiam de 50 a 100 por cento e na Idade.Média, de 100 a 200 por cento, às vezes mais, em relação direta com a necessidade do solicitante ou do montante da soma. Estes juros foram chamados, com toda justiça, de usurário, o dinheiro recebido emprestado, de capital usurário e o credor, de usureiro. O cambista exercia sua profissão sentado num banco de madeira em algum lugar do mercado. Daí a origem da palavra "banqueiro" e "banco". Os primeiros bancos de verdade da História foram criados pelos sacerdotes.

No mundo antigo, entre os egípcios, babilônios e mais tarde entre os gregos e romanos, estava amplamente difundido o costume segundo o qual os cidadãos mais abastados deviam confiar a custódia de seu ouro aos sacerdotes. A Igreja cristã não só deu continuidade à tradição das operações creditícias dos antigos sacerdotes, que considerava pagãos, mas desenvolveu-as em grande escala. A Igreja Católica criou o "Banco do Espírito Santo". Seu verdadeiro propósito era tornar mais expedita a exação, aos fiéis, dos chamados "denários de São Pedro" destinados a satisfazer as frugalidades do Papa e para facilitar o pagamento de dízimos e indulgências, assim como para a realização de transações relacionadas com os empréstimos, em outras palavras, com a usura. Ao mesmo tempo lançou um anátema e condenou às masmorras da inquisição os cidadãos que emprestavam dinheiro a juros, mesmo que este juro fosse menor do que aquele que ela exigia por seu dinheiro. A Igreja proibia a seus fiéis que cobrassem juros por seu dinheiro, invocando como autoridade a Sagrada Escritura, onde se lê: "Amai pois vossos inimigos e fazei o bem, e emprestei, nada esperando disso" (São Lucas, 6,35). Na realidade, esta proibição era motivada por um interesse econômico muito "mundano": a Igreja ambicionava assegurar para si o monopólio absoluto na exação de juros. Apesar das maldições e ameaças com o fogo eterno, a Igreja não pôde conter a avidez por ganhos e lucros das pessoas, tanto mais que o próprio desenvolvimento do comércio exigia a criação de uma ampla rede bancária. As iniciadoras desta atividade foram às cidades-estado da Itália, que tinham um vasto comércio, se estendendo aos mais distantes confins do mundo conhecido.

O primeiro banco privado foi fundado pelo duque Vitali em 1157, em Veneza. Após este, nos séculos XIII, XIV e XV toda uma rede bancária foi criada. A Igreja não teve outra alternativa senão aceitar a realidade dos fatos. Assim os bancos foram um dos grandes propulsores práticos para o avanço da Matemática Comercial e Financeira e da Economia durante os séculos X até XV. Pois sem essa motivação para o aprimoramento dos cálculos, talvez, essa área de Matemática não estivesse tão avançada nos dias atuais. Como conseqüência do interesse pela educação e do crescimento enorme da atividade comercial no Renascimento, começaram a aparecer muitos textos populares de aritmética. Três centenas desses livros foram impressos na Europa antes do século XVII. Essas obras eram de dois tipos, basicamente aquelas escritas em latim por intelectuais de formação clássica, muitas vezes ligada a escolas da igreja, e outras escritas no vernáculo por professores práticos interessados em preparar jovens para carreiras comerciais.

A mais antiga aritmética impressa é a anônima e hoje extremamente rara Aritmética de Treviso, publicada em 1478 na cidade de Treviso. Trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém aplicações envolvendo sociedades e escambo. Como os "algoritmos" iniciais do século XIV, ela também inclui questões recreativas. Foi o primeiro livro de matemática a ser impresso no mundo ocidental. Bem mais influente na Itália que a Aritmética de Treviso foi à aritmética comercial escrita por Piero Borghi. Esse trabalho altamente útil foi publicado em Veneza em 1484 e alcançou pelo menos dezessete edições, a última de 1557. Em 1491 foi publicada em Florença uma aritmética menos importante, de autoria de Filippo Calandri, porém interessante para nós pelo fato de conter o primeiro exemplo impresso do moderno processo de divisão e também os primeiros problemas ilustrados a aparecerem na Itália.

CAPÍTULO 3

Fundamentação Teórica

3.1. JURO SIMPLES

Como já foi abordada no capítulo 2, a idéia de juro está ligada ao pagamento pelo uso de poder aquisitivo por um determinado período de tempo.

3.1.1. Juro (j)

Define-se como juro toda compensação em dinheiro pelo uso de um capital, por um determinado intervalo de tempo, a uma taxa combinada.

3.1.2. Capital (V_p)

Define-se como capital (também chamado de principal ou valor presente) toda importância que se põe a render juros.

3.1.3. Taxa de juros (i)

Define-se como taxa de juros a razão entre os juros recebidos (ou pagos) ao final de um período de tempo e o capital inicialmente empregado.

$$i = \frac{j}{V_p}$$

A taxa está sempre relacionada com uma unidade de tempo (dia, mês, trimestre, semestre, ano etc.).

Tem-se, então, que ao explicitar uma taxa de 29% ao ano significa dizer que, se empregarmos um capital a essa taxa, por um ano, obteremos 29% do capital.

As taxas de juros geralmente são apresentadas de dois modos:

1) Forma porcentual ou percentual, onde a taxa diz-se aplicada a centos do capital, ou seja, ao que se obtém após dividir-se o capital por 100. Exemplo: 5% ao ano.

2) Forma unitária, onde a taxa refere-se à unidade do capital, ou seja, calcula-se o que rende a aplicação de uma unidade de capital no intervalo de tempo referido pela taxa. Exemplo: 0,05 ao ano.

Nas fórmulas, os cálculos serão efetuados utilizando-se a taxa unitária, sendo que a taxa percentual será utilizada apenas em enunciados e respostas de exemplos.

Para efetuar a transformação da taxa porcentual em taxa unitária faz-se uma divisão da notação em percentagem, por 100 e, para a transformação da taxa unitária em taxa porcentual, basta multiplicar a notação em decimal por 100.

Exemplos:

Taxa Percentual	Taxa Unitária
5, 6% aa	0,056 aa
12,34% as	0,1234 as
0,0765% ad	0,000765 ad
0,87% am	0,0087 am

Exemplo: Determinar a taxa de juros cobrada num empréstimo de R$ 200,00, a ser resgatado por R$ 220,00 ao final de um ano?

Resolução:

Dados:

V_p = R$ 200,00;

j = R$ 220,00 – R$ 200,00 = R$ 20,00;

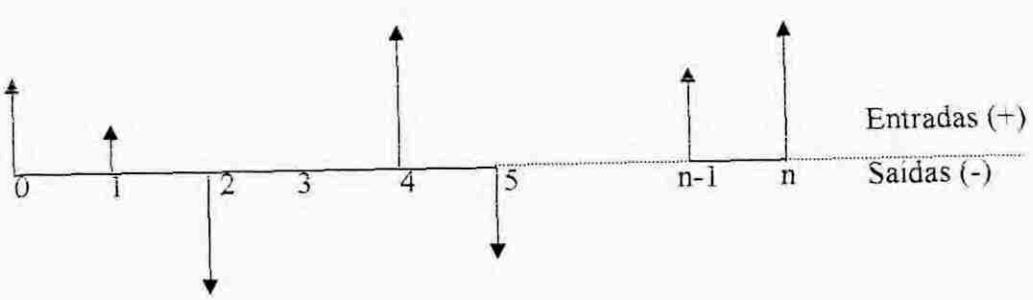
i = ?

$$i = \frac{j}{V_p} = \frac{20}{200} = 0,10$$

Logo, a taxa de juros cobrada no empréstimo foi de 10% aa.

3.1.4. Fluxo de caixa

Chamamos de **fluxo de caixa** o conjunto de entradas e saídas de dinheiro de uma empresa ou de uma pessoa física, ao longo de um certo período de tempo. Sua representação pode ser dada do seguinte modo:



Esta representação é muito útil para situações em que é necessário visualizar-se o que está ocorrendo quando temos entradas e saídas de capital no tempo.

As convenções empregadas são as seguintes:

- A reta horizontal é uma escala de tempo, com a progressão de tempo dando-se da esquerda para a direita. Os períodos de tempo aparecem representados em intervalos de tempo contínuos, de modo que cada número representa os períodos acumulados. Podemos também utilizar a reta sem a escala, mas indicando o número de períodos envolvidos.

- As flechas significam entradas ou saídas de dinheiro. Assim, uma flecha para baixo significa uma saída ou uma aplicação de dinheiro (ou um valor negativo) e uma flecha para cima significa uma entrada ou recebimento de dinheiro (ou um valor positivo). Para que a convenção ficasse completa, o tamanho da flecha deveria representar proporcionalmente o valor do capital que está entrando ou saindo. Como esta representação tem um caráter auxiliar, optou-se por escrever o valor do dinheiro que está entrando ou saindo sem maiores preocupações de escala na própria flecha.

3.1.5. Cálculo do juro

Quando o regime é de juros simples, a remuneração do capital aplicado é diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação, onde o fator de proporcionalidade é a taxa de juros. Tem-se:

$$j = V_p \cdot i \cdot n$$

onde

j = juro;

V_p = capital inicial;

i = taxa de juros;

n = prazo de aplicação (na mesma unidade que a taxa).

Exemplo: Francisco empresta R$ 150,00 a seu primo Fernando por 1 ano e 6 meses, a uma taxa de juro simples igual a 2% am. Determinar o valor de juros que Francisco irá receber ao final do empréstimo.

Resolução:

Dados:

V_p = R$ 150,00;

n = 1 ano e 6 meses = 18 meses;

i = 2% am = 0,02 am;

j = ?

Utilizando a fórmula para cálculo do juro simples, tem-se:

$$j = V_p \cdot i \cdot n = 150 \cdot 0{,}02 \cdot 18 = 54{,}00.$$

Logo, ao final do empréstimo, Francisco receberá R$ 54,00 referente ao juro.

Tem-se que, esta é a fórmula básica para o cálculo de juros no regime de capitalização simples, onde dados três valores da fórmula, podemos obter o quarto, por simples transformações algébricas.

Da fórmula principal do cálculo de juros simples, dada acima, tem-se as seguintes derivações:

$$V_p = \frac{j}{i \cdot n} \qquad i = \frac{j}{V_p \cdot n} \qquad n = \frac{j}{V_p \cdot i}$$

Para períodos não-inteiros, a solução pode ser obtida em duas etapas:

1ª etapa: calcula-se o juro correspondente à parte inteira de períodos.

2ª etapa: calcula-se a taxa proporcional à fração de período que resta e o juro correspondente.

3.1.6. Montante (V_f)

Define-se como montante (ou valor futuro) de um capital, aplicado à taxa i e pelo prazo de n períodos, como sendo a soma do juro mais o capital inicial.

$$V_f = V_p + j$$

Sendo V_p o principal, aplicado por n períodos e à taxa de juros i, tem-se:

$$\begin{aligned} &V_f = V_p + j \\ &\Rightarrow V_f = V_p + V_p \cdot i \cdot n \\ &\Rightarrow V_f = V_p \cdot (1 + i \cdot n). \end{aligned}$$

Exemplo: Uma empresa aplicou R$ 50.000,00 no mercado financeiro, a uma taxa de juros simples de 36% aa, pelo prazo de 7 meses. Quanto à empresa resgatou ao final desse período?

Resolução:

Dados:

V_p = R$ 50.000,00;

i = 36% aa = 3% am = 0,03 am;

n = 7 meses;

V_f = ?

FLUXO DE CAIXA DA EMPRESA

Utilizando a fórmula para o cálculo do valor futuro, tem-se:

$$V_f = V_p \cdot (1 + i \cdot n) = 50.000 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 7) = 50.000 \cdot 1{,}21 = 60.500{,}00.$$

Logo, a empresa resgatará R$ 60.500,00 ao final do período de aplicação.

Da fórmula principal do cálculo do montante de um capital, dada acima, tem-se as seguintes derivações:

$$V_p = \frac{V_f}{1 + i \cdot n} \qquad i = \frac{\frac{V_f}{V_p} - 1}{n} \qquad n = \frac{\frac{V_f}{V_p} - 1}{i}$$

3.1.7. Taxa proporcional e taxa equivalente

Considere duas taxas de juros arbitrárias i_1 e i_2 relacionadas, respectivamente, aos períodos n_1 e n_2, referidos à unidade comum de tempo das taxas.

Estas taxas se dizem proporcionais se houver a igualdade de quociente das taxas com o quociente dos respectivos períodos.

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Duas taxas se dizem equivalentes se, aplicado um mesmo capital às duas taxas e pelo mesmo intervalo de tempo, ambas produzem o mesmo montante.

Exemplo: Verificar se as taxas i_1 = 18% ao ano e i_2 = 3% ao bimestre são equivalentes. Admitir um principal de R$ 100,00 e pelo prazo de um ano.

Resolução:

Parte 1 – Dados:

V_p = R$ 100,00;

i = 18% aa = 0,18 aa;

n = 1 ano;

V_f = ?

Utilizando a fórmula para o cálculo do montante, tem-se:

$$V_f = V_p \cdot (1 + i \cdot n) = 100 \cdot (1 + 0{,}18 \cdot 1) = 100 \cdot 1{,}18 = 118{,}00.$$

Parte 2 – Dados:

V_p = R$ 100,00;

i = 3% ab = 0,03 ab;

n = 1 ano = 6 bimestres;

V_f = ?

Utilizando a fórmula para o cálculo do montante, tem-se:

$$V_f = V_p \cdot (1 + i \cdot n) = 100 \cdot (1 + 0{,}03 \cdot 6) = 100 \cdot 1{,}18 = 118{,}00.$$

Logo, como as taxas i_1 = 18% aa e i_2 = 3% ab produziram, no prazo de um ano, o mesmo montante de R$ 118,00, dizemos que são equivalentes.

3.1.8. Juro exato e juro comercial

Define-se como **juro exato** aquele que é obtido quando o período está expresso em dias e quando é adotada a convenção de ano civil (365 dias):

$$j_e = \frac{V_p \cdot i \cdot n}{365}$$

Define-se como **juro comercial** (ou ordinário) aquele que é obtido quando o período está expresso em dias e quando é adotada a convenção do ano comercial (360 dias):

$$j_c = \frac{V_p \cdot i \cdot n}{360}$$

Exemplo: Calcular o juro obtido em uma aplicação de R$ 4.000,00, a uma taxa de juros de 60% aa, durante 20 dias, utilizando os critérios de juros exato e comercial.

Resolução:

Parte 1 – Juro exato:

Dados:

V_p = R$ 4.000,00;

i = 60% aa = 0,60 aa;

n = 20 dias;

j_e = ?

Utilizando a fórmula para o cálculo do juro exato, tem-se:

$$j_e = \frac{V_p \cdot i \cdot n}{365} = \frac{4.000 \cdot 0{,}60 \cdot 20}{365} = \frac{48.000}{365} = 131{,}51$$

Parte 2 – Juro comercial:

Dados:

V_p = R$ 4.000,00;

i = 60% aa = 0,60 aa;

n = 20 dias;

j_c = ?

Utilizando a fórmula para o cálculo do juro comercial, tem-se:

$$j_c = \frac{V_p \cdot i \cdot n}{360} = \frac{4.000 \cdot 0,60 \cdot 20}{360} = \frac{48.000}{360} = 133,33$$

Logo, no critério de juro exato obtemos j_e = R$ 131,51, enquanto para juro comercial obtivemos j_c = R$ 133,33.

Nota: relacionando os dois critérios de juros mencionados acima, tem-se sempre que $j_c > j_e$.

3.1.9. Valor nominal (N) e valor atual (V)

Define-se como **valor nominal** o valor de um compromisso na data de seu vencimento. Se após o vencimento o compromisso não for saldado, entendemos que o mesmo continuará tendo seu valor nominal, acrescido de juros e de eventuais multas por atraso.

Define-se como **valor atual** o valor do capital que, aplicado à dada taxa e em dado prazo, nos dá um valor nominal conhecido.

O valor nominal (N) e o valor atual (V) são calculados pelas expressões abaixo:

$$N = V \cdot (1 + i \cdot n) \qquad V = \frac{N}{1 + i \cdot n}$$

3.1.10. Desconto comercial ou desconto "por fora"

Define-se como **desconto comercial** como sendo o valor que se obtém pelo cálculo do juro simples sobre o valor nominal do compromisso que seja saldado n períodos antes do seu vencimento. Tem-se que:

$$D_c = N \cdot d \cdot n$$

onde

D_c = desconto comercial;

N = valor nominal;

n = número de períodos antes do vencimento;

d = taxa de desconto.

Sendo V_c o valor descontado comercial obtido da diferença entre o valor nominal e o desconto comercial, tem-se:

$$\begin{aligned} &V_c = N - D_c \\ &\Rightarrow V_c = N - N \cdot d \cdot n \\ &\Rightarrow V_c = N \cdot (1 - d \cdot n). \end{aligned}$$

Exemplo: Uma nota promissória, no valor de R$ 1.000,00 em seu vencimento, foi descontada 3 meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial era de 30% aa, qual foi o valor do desconto? Qual foi o valor atual comercial?

Resolução:

Parte 1 – Valor do desconto comercial:

Dados:

N = R\$ 1.000,00;

d = 30% aa = 2,5% am = 0,025 am;

n = 3 meses;

$D_c = ?$

Utilizando a fórmula para o cálculo do desconto comercial, tem-se:

$$D_c = N \cdot d \cdot n = 1.000 \cdot 0{,}025 \cdot 3 = 75{,}00.$$

Parte 2 – Valor atual comercial:

Dados:

N = R\$ 1.000,00;

D_c = R\$ 75,00;

$V_c = ?$

Como o valor do desconto comercial é dado por $D_c = N - V_c$, tem-se:

$$V_c = N - D_c = 1.000 - 75 = 925{,}00.$$

Logo, o desconto comercial foi de R\$ 75,00 e o valor atual comercial foi de R\$ 925,00.

Como uma extensão do desconto comercial, tem-se o **desconto bancário**, que corresponde ao desconto comercial acrescido de uma taxa prefixada, cobrada sobre o valor nominal. Essa taxa de despesas bancárias é referida freqüentemente como sendo despesas administrativas do banco ou instituição que faz a operação.

Sejam:

V_b = valor atual (ou valor descontado bancário);

D_b = desconto bancário;

D_c = desconto comercial;

h = taxa de despesas administrativas;

N = valor nominal;

n = número de períodos antes do vencimento;

d = taxa de desconto.

Tem-se o valor do desconto bancário:

$$D_b = D_c + N \cdot h$$
$$\Rightarrow D_b = N \cdot d \cdot n + N \cdot h$$
$$\Rightarrow D_b = N \cdot (d \cdot n + h).$$

E o valor descontado bancário será:

$$V_b = N - D_b$$
$$\Rightarrow V_b = N - N \cdot (d \cdot n + h)$$
$$\Rightarrow V_b = N \cdot [1 - (d \cdot n + h)].$$

Exemplo: Uma indústria retira do Banco Beta um empréstimo por 6 meses no valor de R$ 400.000,00. Sendo a taxa de juros igual a 24% aa e que o banco cobra 1,5% a título de despesas administrativas, qual será o valor atual bancário?

Resolução:

Dados:

N = R$ 400.000,00;

d = 24% aa = 2% am = 0,02 am;

h = 1,5% = 0,015;

n = 6 meses;

V_b = ?

Utilizando a formula para o cálculo do valor atual bancário, tem-se:

$$V_b = N \cdot [1-(d \cdot n + h)] = 400.000 \cdot [1-(0{,}02 \cdot 6 + 0{,}015)] = 400.000 \cdot [1-0{,}135] =$$

$$= 400.000 \cdot 0{,}865 = 346.000{,}00.$$

Logo, o valor atual bancário foi de R$ 346.000,00

3.2. JURO COMPOSTO

No regime de juros compostos, que tem grande importância financeira por retratar melhor a realidade, o juro gerado pela aplicação será incorporado à mesma passando a participar da geração de juros no período seguinte. Assim sendo, neste critério considera-se que os juros formados num período sejam calculados sobre o montante do período anterior.

É bom ressaltar que a formação do montante no regime de juro simples é linear, enquanto no regime de juro composto ela é exponencial.

3.2.1. Montante (V_f)

No regime de juro composto, a fórmula para obtenção do montante (ou valor futuro), ao fim de n períodos, é uma função exponencial do capital inicial aplicado. Nesta fórmula, a taxa de juros i refere-se à mesma medida de tempo utilizada para os n períodos e, além disso, deve ser expressa na forma unitária. Tem-se:

$$V_f = V_p \cdot (1+i)^n$$

Exemplo: Calcular o valor do resgate de uma aplicação de R$ 5.000,00, pelo prazo de 9 meses, à taxa de juros compostos de 7% am.

Resolução:

Dados:

V_p = R$ 5.000,00;

n = 9 meses;

i = 7% am = 0,07 am;

$V_f = ?$

Utilizando a formula para o cálculo do valor futuro, tem-se:

$$V_f = V_p \cdot (1+i)^n = 5.000 \cdot (1+0{,}07)^9 = 5.000 \cdot (1{,}07)^9 = 5.000 \cdot 1{,}838459212 = 9.192{,}30$$

Logo, o valor do resgate será de R$ 9.192,30.

3.2.2. Cálculo do juro

Como sabemos, montante é a soma do principal aos juros que a aplicação rende, no prazo considerado e à taxa de juros estipulada. Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} & V_f = V_p + j \\ & \Rightarrow j = V_f - V_p \\ & \Rightarrow j = V_p \cdot (1+i)^n - V_p \\ & \Rightarrow j = V_p \cdot [(1+i)^n - 1]. \end{aligned}$$

Exemplo: Calcular os juros de um empréstimo de R$ 60.000,00, pelo prazo de 10 meses, à taxa de juros compostos de 2% am.

Resolução:

Dados:

V_p = R$ 60.000,00;

n = 10 meses;

i = 2% am = 0,02 am;

j = ?

Utilizando a formula para o cálculo do juro composto, tem-se:

$$j = V_p \cdot [(1+i)^n - 1] = 60.000 \cdot [(1+0{,}02)^{10} - 1] = 60.000 \cdot [1{,}21899442 - 1] =$$

$$= 60.000 \cdot 0{,}21899442 = 13.139{,}66$$

Logo, será pago R$ 13.139,66 de juros pelo empréstimo solicitado.

3.2.3. Valor atual (V) e valor nominal (N)

O valor atual, como visto em juros simples, corresponde ao valor da aplicação em uma data inferior à do vencimento.

O valor nominal é o valor do título na data do seu vencimento.

O valor nominal (N) e o valor atual (V) são calculados pelas expressões abaixo:

$$N = V \cdot (1+i)^n \qquad V = \frac{N}{(1+i)^n}$$

Vale ressaltar que o valor atual pode ser calculado em qualquer data focal inferior à do montante, não precisando ser necessariamente na data zero. O cálculo do valor atual é apenas uma operação inversa do cálculo do montante. Assim, o valor atual, aplicado à taxa de juros compostos contratada, da data do valor atual até a data do vencimento, reproduz o valor nominal.

3.2.4. Taxas equivalentes

Dizemos que duas taxas são equivalentes se, considerados o mesmo prazo de aplicação e o mesmo capital, for indiferente aplicar em uma ou em outra. De outro modo, considerando-se um mesmo capital aplicado por um mesmo intervalo de tempo a cada uma das taxas, ambas as taxas produzirão um mesmo montante se forem equivalentes.

Exemplo: Verificar se as taxas $i_1 = 60,103\%$ ao ano e $i_2 = 4\%$ ao mês são equivalentes. Admitir um principal de R$ 100,00 e pelo prazo de um ano.

Resolução:

Parte 1 – Dados:

V_p = R$ 100,00;

i = 60,103% aa = 0,60103 aa;

n = 1 ano;

V_f = ?

Utilizando a fórmula para o cálculo do montante, tem-se:

$$V_f = V_p \cdot (1+i)^n = 100 \cdot (1+0,60103)^1 = 100 \cdot 1,60103 = 160,10$$

Parte 2 – Dados:

V_p = R$ 100,00;

i = 4% am = 0,04 am;

n = 1 ano = 12 meses;

$V_f = ?$

Utilizando a fórmula para o cálculo do montante, tem-se:

$$V_f = V_p \cdot (1+i)^n = 100 \cdot (1+0{,}04)^{12} = 100 \cdot 1{,}601032219 = 160{,}10$$

Logo, como as taxas i_1 = 60,103% aa e i_2 = 4% am produziram, no prazo de um ano, o mesmo montante de R$ 160,10, dizemos que são equivalentes.

Em algumas aplicações financeiras, quando o prazo (ou período) não é um número inteiro em relação ao prazo definido para a taxa (período fracionário), utiliza-se a convenção linear e a convenção exponencial para calcular montante, taxa e juros.

- **Convenção linear**: admite a formação de juros compostos para a parte inteira do período e de juros simples para a parte fracionária do período.

O cálculo do valor futuro na convenção linear é dado por:

$$V_f = V_p \cdot (1+i)^n \cdot \left[1 + i \cdot \frac{p}{q}\right], \text{ onde } \frac{p}{q} \text{ é a parte fracionária do período.}$$

- **Convenção exponencial**: adota o mesmo regime de capitalização para todo o período (tanto para a parte inteira como para a parte fracionária).

O cálculo do valor futuro na convenção exponencial é dado por:

$$V_f = V_p \cdot (1+i)^{n+\frac{p}{q}}, \text{ onde } \frac{p}{q} \text{ é a parte fracionária do período.}$$

3.2.5. Taxa efetiva e taxa nominal

Temos uma taxa de juros nominal quando o prazo de formação e incorporação de juros ao capital inicial não coincide com aquele a que a taxa se refere. Neste caso, é comum adotar-se a convenção de que a taxa por período de capitalização seja proporcional à taxa nominal. Procedemos em duas etapas:

- Calculamos a taxa proporcional simples correspondente a um período de capitalização.

- Potenciamos esta taxa pelo número de periodos de capitalização existente no intervalo de tempo a que se refere à taxa nominal.

Sendo

i = taxa nominal;

i_f = taxa efetiva;

l = número de capitalizações para 1 periodo da taxa nominal;

n = números de periodos de capitalização da taxa nominal;

V_p = principal;

V_f = montante.

tem-se:

$$i_f = \left(1+\frac{i}{l}\right)^k - 1 \qquad\qquad V_f = V_p \cdot \left(1+\frac{i}{l}\right)^{k \cdot n}$$

3.2.6. Desconto racional ou desconto "por dentro"

Define-se **desconto racional** como sendo a diferença entre o valor nominal de um titulo e o seu valor atual. Tem-se:

$$D_r = N - V$$

$$\Rightarrow D_r = N - \frac{N}{(1+d)^n}$$

$$\Rightarrow D_r = N \cdot \frac{(1+d)^n - 1}{(1+d)^n}$$

onde

D_r = desconto racional;

N = valor nominal;

n = número de períodos antes do vencimento;

d = taxa de desconto.

Sendo V_r o valor descontado racional obtido entre o valor nominal e o desconto racional, tem-se:

$$V_r = N - D_r$$
$$\Rightarrow V_r = N - N \cdot \frac{(1+d)^n - 1}{(1+d)^n}$$
$$\Rightarrow V_r = N \cdot \left(1 - \frac{(1+d)^n - 1}{(1+d)^n}\right)$$

Exemplo: Uma letra de câmbio, no valor de R$ 9.000,00 em seu vencimento, foi descontada 120 dias antes de seu vencimento. Sabendo-se que a taxa de desconto racional era de 3,25% am, qual foi o valor do desconto? Qual o valor atual racional?

Resolução:

Parte 1 – Valor do desconto:

Dados:

N = R$ 9.000,00;

d = 3,25% am = 0,0325 am;

n = 120 dias = 4 meses;

D_r = ?

Utilizando a fórmula para o cálculo do desconto racional, tem-se:

$$D_r = N \cdot \frac{(1+d)^n - 1}{(1+d)^n} = 9.000 \cdot \frac{(1+0{,}0325)^4 - 1}{(1+0{,}0325)^4} = 9.000 \cdot \frac{0{,}136475928}{1{,}136475928} = 1.080{,}78$$

Parte 2 – Valor atual racional:

Dados:

N = R$ 9.000,00;

D_r = R$ 1.080,78;

V_r =?

Como o valor do desconto racional é dado por $D_r = N - V_r$, tem-se:

$$V_r = N - D_r = 9.000 - 1.080{,}78 = 7.919{,}22$$

Logo, o desconto racional foi de R$ 1.080,78 e o valor atual racional foi de R$ 7.919,22.

3.3. EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

É freqüente a necessidade de antecipar ou de prorrogar títulos nas operações financeiras. Às vezes queremos substituir um título por outro ou por vários. Podemos também ter vários títulos que queremos substituir por um único ou por vários.

Tais questões dizem respeito, de modo geral, à comparação de valores diferentes referidos a datas diferentes, considerando-se uma dada taxa de juros.

3.3.1. Data focal e equação de valor

Data focal (também chamada de data de avaliação ou data de referência) é a data que se considera como base de comparação dos valores referidos a datas diferentes.

A equação de valor permite que sejam igualados capitais diferentes, referidos a datas diferentes, para uma mesma data focal, desde que seja fixada uma certa taxa de juros. Em outras palavras, a equação de valor pode ser obtida igualando-se em uma data focal as somas dos valores atuais e/ou montantes dos compromissos que formam a alternativa em análise.

3.3.2. Capitais equivalentes

Diz-se que dois ou mais capitais, com datas de vencimento determinadas, são equivalentes quando, levados para uma mesma data focal à mesma taxa de juros, tiverem valores iguais.

3.4. RENDAS CERTAS OU ANUIDADES OU SÉRIES DE PAGAMENTOS

Quando o objetivo é constituir-se um capital em uma data futura, tem-se um processo de capitalização. Caso contrário, quando se quer pagar uma dívida, tem-se um processo de amortização. Pode ocorrer também o caso em que se tem o pagamento pelo uso, sem que haja amortização, que é o caso dos aluguéis.

Estes exemplos caracterizam a existência de rendas ou anuidades, que podem ser basicamente de dois tipos:

- rendas certas ou determinísticas: são aquelas cuja duração e pagamentos são predeterminados, não dependendo de condições externas. Os diversos parâmetros, como o valor dos períodos, prazo de duração, taxa de juros etc., são fixos e imutáveis.

- rendas aleatórias ou probabilísticas: os valores e/ou as datas de pagamento ou de recebimento podem ser variáveis aleatórias. É o caso dos seguros de vida: os valores de pagamento (mensalidades) são certos, sendo aleatórios o valor do seguro a receber e a data de recebimento. Esse tipo de renda é estudado apenas na **Matemática Atuarial**.

O valor atual ou valor presente de uma série de pagamentos ou anuidades é a soma dos valores atuais de seus termos, soma esta realizada para uma mesma data e à mesma taxa de juros compostos.

Analogamente, o montante ou valor futuro de uma série de pagamentos ou anuidades é a soma dos montantes ou valores futuros de seus termos, considerada uma dada taxa de juros compostos e uma data.

3.4.1. Classificação das anuidades

1) Quanto à periodicidade:

- periódicas: se todos os períodos são iguais.
- não-periódicas: se os períodos não são iguais entre si.

2) Quanto ao prazo:

- temporárias: quando a duração for limitada.
- perpétuas: quando a duração for ilimitada.

3) Quanto ao valor dos termos:

- constante: se todos os termos são iguais.
- variável: se os termos não são iguais entre si.

4) Quanto à forma de pagamento ou de recebimento:

- imediatas: quando os termos são exigíveis a partir do primeiro período.
    - postecipadas ou vencidas: se os termos são exigíveis no fim dos períodos.
    - antecipadas: se os termos são exigíveis no início dos períodos.
- diferidas: se os termos forem exigíveis a partir de uma data que não seja o primeiro período.
    - postecipadas ou vencidas: se os termos são exigíveis no fim dos períodos.
    - antecipadas: se os termos são exigíveis no início dos períodos.

Por modelo básico de anuidade entende-se as anuidades que são simultaneamente:

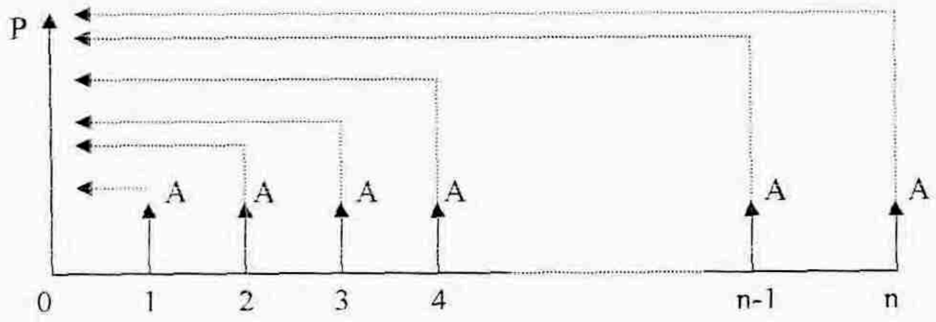
- temporárias.
- constantes.
- imediatas e postecipadas.
- periódicas.

E que a taxa de juros i seja referida ao mesmo período dos termos.

3.4.2. Valor atual do modelo básico

Seja um principal P a ser pago em n termos iguais a A, imediatos, postecipados e periódicos. Seja também uma taxa de juros i, referida ao mesmo período dos termos.

A representação gráfica do modelo é a seguinte:



A soma do valor atual dos termos na data zero é dada por:

$$P = \frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{A}{(1+i)^n}$$

Ou, colocando-se A em evidência, vem:

$$P = A \cdot \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Colocando a soma entre colchetes como sendo:

$$(P/A,i,n) = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Tem-se $P = A \cdot (P/A,i,n)$, onde $(P/A,i,n) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ é o fator de valor atual de uma anuidade no modelo básico, também denotado como $FVA(i,n)$.

Isolando A, tem-se $A = P \cdot (A/P,i,n)$, onde $(A/P,i,n) = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ é o fator de recuperação de capital no modelo básico, também denotado como $FRC(i,n)$.

Deve-se observar que FRC é o inverso de FVA.

Exemplo: Um aparelho de DVD custa R$ 500,00 a vista, mas pode ser financiado sem entrada em 8 prestações mensais a taxa de 2% am. Qual será o valor de cada prestação paga pelo comprador?

Resolução:

Dados:

P = R$ 500,00;
n = 8 meses;
i = 2% am = 0,02 am;
A =?

Primeiramente calcula-se o valor $FRC(i,n)$:

$$(A/P,i,n) = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{0{,}02}{1-(1+0{,}02)^{-8}} = \frac{0{,}02}{1-0{,}853490371} = 0{,}136509799$$

Utilizando a fórmula $A = P \cdot (A/P,i,n)$, tem-se:

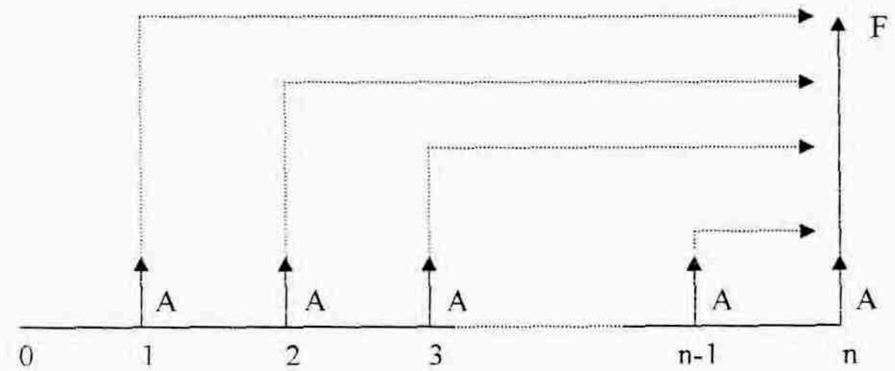
$$A = P \cdot (A/P,i,n) = 500 \cdot 0{,}136509799 = 68{,}25$$

Logo, o comprador pagará R$ 68,25 em cada prestação na compra do DVD.

3.4.3. Montante do modelo básico

Seja um processo de capitalização em que são aplicadas parcelas iguais a A, periódicas e postecipadas, a uma taxa de juros i, referida ao mesmo período dos termos. O problema é determinar o montante (F) na data focal n, que resulta deste processo de capitalização.

A representação gráfica deste modelo é a seguinte:



O montante (F) é o resultado da soma dos montantes de cada um dos termos, à taxa de juros i, na data focal n. Admitindo que esteja se fazendo esta soma a partir do termo de n-ésima ordem (ou seja, o último termo) e até o termo de 1ª ordem (que é o primeiro termo):

$$F = A + A \cdot (1+i) + A \cdot (1+i)^2 + \ldots + A \cdot (1+i)^{n-1}$$

Colocando-se A em evidência:

$$F = A \cdot [1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1}]$$

Colocando a soma entre colchetes como sendo:

$$(F / A,i,n) = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{n-1}$$

Tem-se $F = A \cdot (F / A,i,n)$, onde $(F / A,i,n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ é o fator de acumulação de capital de uma série de pagamentos ou anuidades no modelo básico, também denotado por $FAC(i,n)$.

Isolando A, tem-se $A = F \cdot (A / F,i,n)$, onde $(A / F,i,n) = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$ é o fator de formação de capital do modelo básico, também denotado por $FFC(i,n)$.

Deve-se observar que FFC é o inverso de FAC.

Exemplo: Meu irmão foi ao Banco Beta e abriu uma caderneta de poupança. Sua idéia é depositar todo mês R$ 100,00, durante 3 anos. Sabendo-se que com essa aplicação ele está ganhando 1% am, quanto possuirá ao final desse período?

Resolução:

Dados:

A = R$ 100,00;
n = 3 anos = 36 meses;
i = 1% am = 0,01 am;
F =?

Primeiramente calcula-se o valor de $FAC(i,n)$:

$$(F / A,i,n) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}01)^{36} - 1}{0{,}01} = \frac{0{,}430768784}{0{,}01} = 43{,}07687836$$

Utilizando a fórmula $F = A \cdot (F / A,i,n)$, tem-se:

$$F = A \cdot (F / A,i,n) = 100 \cdot 43{,}07687836 = 4.307{,}69$$

Logo, ao final de 3 anos, meu irmão possuirá R$ 4.307,69 na caderneta de poupança.

CAPÍTULO 4

Sistemas de Amortização

4.1. INTRODUÇÃO

Dentro da Matemática Financeira, o termo dívida está associado a uma quantia monetária que é emprestada por um certo prazo. Quem assume a dívida tem a obrigação de restituir o capital emprestado, acrescidos de juros devidos, no prazo estipulado para o empréstimo.

Segundo as práticas usuais, os empréstimos classificam-se em: de curto, de médio e de longo prazo. Os empréstimos de curto e de médio prazo caracterizam-se, normalmente, por serem saldados em até 3 anos. Já os empréstimos de longo prazo (financiamentos) por existirem várias modalidades de restituição do capital emprestado e de encargos financeiros têm um tratamento especial, onde essas operações de crédito têm suas condições previamente fixadas por contratos bilaterais entre a empresa e o órgão financiador.

Define-se como um sistema de amortização, a forma de devolução do capital emprestado, mais os encargos financeiros (juros, IOF, TAC, etc.).

4.1.1. Conceitos básicos

Para um melhor entendimento desse capítulo, daremos os principais conceitos do uso corrente nas operações de empréstimos e financiamentos, a saber:

a) Mutuante ou credor: aquele que concede o empréstimo;
b) Mutuário ou devedor: aquele que recebe o empréstimo;
c) Taxa de juros: taxa contratada entre as partes;
d) IOF: imposto sobre operações financeiras;
e) TAC: taxa de abertura de conta;
f) Prestação: soma da amortização, acrescida de juros e outros encargos financeiros, pagos em um dado período;
g) Amortização: parcelas de devolução do capital emprestado;
h) Prazo de amortização: intervalo de tempo durante o qual serão pagas as amortizações;
i) Período de amortização: intervalo de tempo existente entre duas amortizações;
j) Saldo devedor: estado da dívida em determinado instante de tempo;
k) Prazo de carência: corresponde ao período compreendido entre a primeira liberação do empréstimo ou financiamento e o pagamento da primeira amortização.
l) Planilha: quadro onde são colocados os valores referentes ao empréstimo ou financiamento, constituído de várias colunas, que apresentam, após cada pagamento, a parcela de juros pagos, a amortização, a prestação, os encargos financeiros e o saldo devedor;

4.2. CLASSIFICAÇÃO DAS MODALIDADES DE AMORTIZAÇÃO

4.2.1. Sistema de amortização constante (SAC)

No Sistema de Amortização Constante (SAC), as parcelas de amortização são iguais.

O valor da amortização (a) é calculado através da divisão do capital emprestado (V_p) pelo número de amortizações (n), ou

$$a = \frac{V_p}{n}$$

O valor do saldo devedor de cada período t, anotado por P_t, é obtido da seguinte maneira:

Saldo devedor no primeiro período:

$$P_1 = P_0 - a = V_p - \frac{V_p}{n} = V_p \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = V_p \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{V_p}{n} \cdot (n-1) = a \cdot (n-1).$$

Saldo devedor no segundo período:

$$P_2 = P_1 - a = a \cdot (n-1) - a = a \cdot (n-1-1) = a \cdot (n-2).$$

Prosseguindo, tem-se que o saldo devedor, para cada período t é dado por:

$$\begin{aligned} & P_t = P_{t-1} - a \\ & \Rightarrow P_t = a \cdot (n - t + 1) - a \\ & \Rightarrow P_t = a \cdot (n - t + 1 - 1) \\ & \Rightarrow P_t = a \cdot (n - t). \end{aligned}$$

Os juros são calculados, a cada período, multiplicando-se a taxa de juros contratada pelo saldo devedor existente sobre o período anterior assumindo valores decrescente nos períodos. Os juros de um certo período t são calculados sobre o saldo devedor do período anterior. Tem-se:

$$\begin{aligned} & j_t = i \cdot P_{t-1} \\ & \Rightarrow j_t = i \cdot a \cdot (n - t + 1) \end{aligned}$$

A prestação, a cada período, A_t, é igual à soma da amortização e dos encargos financeiros (juros, comissões, etc.), sendo periódica, sucessiva e decrescente em progressão aritmética, de razão (G) igual ao produto da taxa de juros pela parcela de amortização. Assim,

$$A_t = a + j_t$$
$$\Rightarrow A_t = a + i \cdot a \cdot (n - t + 1)$$
$$\Rightarrow A_t = a \cdot [1 + i \cdot (n - t + 1)]$$

Assim, dada a razão da P.A., $G = i \cdot a$ e, $A_1 = a \cdot (1 + i \cdot n)$ como sendo a primeira prestação, para o valor da prestação para cada período t, tem-se:

$$A_t = A_1 - (t - 1) \cdot G$$
$$\Rightarrow A_t = a \cdot (1 + i \cdot n) - (t - 1) \cdot G$$

Exemplo: Uma empresa solicita um empréstimo no valor de R$ 100.000,00, que o banco contactado libera no ato do contrato, pelo SAC. A taxa de juros cobrada pelo banco é de 7,5% am e o valor presente será amortizado em 4 parcelas mensais. Construir a planilha de operação de crédito.

Resolução:

Dados:

V_p = R$ 100.000,00;

n = 4 meses;

i = 7,5% am = 0,075 am;

Sistema de Amortização utilizado = Sistema de Amortização Constante.

O cálculo da amortização mensal é dado por:

$$a = \frac{V_p}{n} = \frac{100.000}{4} = 25.000,00.$$

O saldo devedor, após o pagamento de cada prestação mensal, é dado por:

Saldo devedor ao final do primeiro mês: $P_1 = 100.000 - 25.000 = 75.000,;$

Saldo devedor ao final do segundo mês: $P_2 = 75.000 - 25.000 = 50.000;$

Saldo devedor ao final do terceiro mês: $P_3 = 50.000 - 25.000 = 25.000;$

Saldo devedor ao final do quarto mês: $P_4 = 25.000 - 25.000 = 0.$

Os juros de cada mês são dados por:

Juros do primeiro mês: $j_1 = 0{,}075 \cdot 100.000 = 7.500;$

Juros do segundo mês: $j_2 = 0{,}075 \cdot 75.000 = 5.625;$

Juros do terceiro mês: $j_3 = 0{,}075 \cdot 50.000 = 3.750;$

Juros do quarto mês: $j_4 = 0{,}075 \cdot 25.000 = 1.875.$

O valor da prestação para cada mês é dado por:

Prestação ao final do primeiro mês: $A_1 = 25.000 + 7.500 = 32.500;$

Prestação ao final do segundo mês: $A_2 = 25.000 + 5.625 = 30.625;$

Prestação ao final do terceiro mês: $A_3 = 25.000 + 3.750 = 28.750;$

Prestação ao final do quarto mês: $A_4 = 25.000 + 1.875 = 26.875.$

A partir dos dados acima obtidos, podemos construir a seguinte planilha da operação de crédito:

Mês (t)	Saldo Devedor (P_t)	Amortização (a)	Juros (j_t)	Prestação (A_t)
0	100.000,00	-	-	-
1	75.000,00	25.000,00	7.500,00	32.500,00
2	50.000,00	25.000,00	5.625,00	30.625,00
3	25.000,00	25.000,00	3.750,00	28.750,00
4	-	25.000,00	1.875,00	26.875,00
Total	-	100.000,00	18.750,00	118.750,00

O SAC, também conhecido como Sistema Hamburguês, é um sistema de fundamental importância no Brasil, principalmente devido à sua ampla utilização pelo Sistema Financeiro de Habitação (SFH), a partir de 1971, nas operações de financiamento para aquisição da casa própria.

4.2.2. Sistema Francês de Amortização

O Sistema Francês consiste em um plano de amortização de uma dívida em prestações periódicas, iguais e sucessivas, em que o valor de cada prestação, ou pagamento, é composto por duas parcelas distintas: uma de juros e outra de amortização.

Os juros, por incidirem sobre o saldo devedor, são decrescentes e as parcelas de amortização assumem valores crescentes. A soma dessas duas parcelas permanece sempre igual ao valor da prestação.

O valor das parcelas é determinado com base na mesma fórmula utilizada para séries de pagamentos com termos postecipados, ou seja:

$$A = V_p \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$\Rightarrow A = V_p \cdot (A/V_p, i, n)$$

Obs.: entenda-se V_p como o valor presente (ou principal).

Para calcular o valor da parcela de juros correspondente a uma dada prestação, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$j_t = i \cdot P_{t-1}$$
$$\Rightarrow j_t = i \cdot A \cdot \frac{(1+i)^{n-t+1}-1}{(1+i)^{n-t+1} \cdot i}$$
$$\Rightarrow j_t = i \cdot A \cdot (P_t / A, i, n-t+1)$$

para $t = 1, ..., n$.

No cálculo da parcela de amortização, faz-se a diferença entre a prestação e o juro, correspondentes ao periodo:

$$a_t = A - j_t$$

para $t = 1, \ldots, n$.

O saldo devedor no Sistema Francês é determinado por:

$$P_t = A \cdot \frac{(1+i)^{n-t} - 1}{(1+i)^{n-t} \cdot i}$$

$$\Rightarrow P_t = A \cdot (P_t / A, i, n - t)$$

para $t = 1, \ldots, n$.

Exemplo: (Utilizaremos o mesmo exemplo que no SAC).

Uma empresa solicita um empréstimo no valor de R$ 100.000,00, que o banco contactado libera no ato do contrato, pelo Sistema Francês. A taxa de juros cobrada pelo banco é de 7,5% am e o valor presente será amortizado em 4 parcelas mensais. Construir a planilha de operação de crédito.

Resolução:

Dados:

V_p = R$ 100.000,00;

n = 4 meses;

i = 7,5% am = 0,075 am;

Sistema de Amortização utilizado = Sistema Francês.

Calcula-se, primeiramente, o valor da prestação A:

$$A = V_p \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 100.000 \cdot \frac{0,075}{1-(1+0,075)^{-4}} = 100.000 \cdot \frac{0,075}{0,25119947} =$$

$$= 100.000 \cdot 0,298567508 = 29.856,75$$

Os juros de cada mês são dados por $j_t = i \cdot A \cdot \dfrac{(1+i)^{n-t+1} - 1}{(1+i)^{n-t+1} \cdot i}$:

Juros do primeiro mês:

$$j_1 = 0,075 \cdot 29.856,75 \cdot \frac{(1+0,075)^{4-1+1} - 1}{(1+0,075)^{4-1+1} \cdot 0,075} =$$

$$= 0,075 \cdot 29.856,75 \cdot 3,34932627 = 7.500$$

Juros do segundo mês:

$$j_2 = 0,075 \cdot 29.856,75 \cdot \frac{(1+0,075)^{4-2+1} - 1}{(1+0,075)^{4-2+1} \cdot 0,075} =$$

$$= 0,075 \cdot 29.856,75 \cdot 2,60052574 = 5.823,24$$

Juros do terceiro mês:

$$j_3 = 0,075 \cdot 29.856,75 \cdot \frac{(1+0,075)^{4-3+1} - 1}{(1+0,075)^{4-3+1} \cdot 0,075} =$$

$$= 0,075 \cdot 29.856,75 \cdot 1,79556517 = 4.020,73$$

Juros do quarto mês:

$$j_4 = 0{,}075 \cdot 29.856{,}75 \cdot \frac{(1+0{,}075)^{4-4+1} - 1}{(1+0{,}075)^{4-4+1} \cdot 0{,}075} =$$

$$= 0{,}075 \cdot 29.856{,}75 \cdot 0{,}930232558 = 2.083{,}03$$

Calcula-se, agora, o valor de cada amortização:

Amortização no primeiro mês:	$a_1 = 29.856{,}75 - 7.500 = 22.356{,}75$
Amortização no segundo mês:	$a_2 = 29.856{,}75 - 5.823{,}24 = 24.033{,}51$
Amortização no terceiro mês:	$a_3 = 29.856{,}75 - 4.020{,}73 = 25.836{,}02$
Amortização no quarto mês:	$a_4 = 29.856{,}75 - 2.083{,}03 = 27.773{,}72$

Finalizando, calcula-se o valor do saldo devedor após cada prestação:

Saldo devedor no primeiro mês:

$$P_1 = P_0 - A_1 = 100.000 - 22.356{,}75 = 77.643{,}25$$

Saldo devedor no segundo mês:

$$P_2 = P_1 - A_2 = 77.643{,}25 - 24.033{,}51 = 53.609{,}74$$

Saldo devedor no terceiro mês:

$$P_3 = P_2 - A_3 = 53.609{,}74 - 25.836{,}02 = 27.773{,}72$$

A partir dos dados acima obtidos, podemos construir a seguinte planilha da operação de crédito:

Mês (t)	Saldo Devedor (P_t)	Amortização (a_t)	Juros (j_t)	Prestação (A)
0	100.000,00	-	-	-
1	77.643,25	22.356,75	7.500,00	29.856,75
2	53.609,74	24.033,51	5.823,24	29.856,75
3	27.773,72	25.836,02	4.020,73	29.856,75
4	-	27.773,72	2.083,03	29.856,75
Total	-	100.000,00	19.427,00	119.427,00

Como um caso particular do Sistema Francês, tem-se o Sistema Price (ou Tabela Price), com as seguintes características:

a) quando a taxa de juros for anual, com pagamento mensal, semestral ou trimestral, usa-se a taxa proporcional ao período de pagamento;

b) quando a taxa de juros for mensal, com pagamento semestral, trimestral ou anual, usa-se a taxa equivalente ao período de pagamento.

4.2.3 Outros tipos de sistemas de amortização

4.2.3.1. Sistema de Amortização Misto (SAM)

O Sistema de Amortização Misto (SAM) foi criado em maio de 1979 pelo BNH, e constituiu-se num misto entre o Price e o SAC, originando-se a sua denominação. O SAM é um plano de pagamentos composto por prestações cujos valores são resultantes da média aritmética dos valores das prestações dos planos SAC e Price, correspondentes aos respectivos prazos; os valores das parcelas de amortização e juros resultam da mesma regra.

4.2.3.2. Sistema Americano (SA)

No Sistema Americano de Amortização (SA), o mutuário obriga-se a devolver o principal em uma só parcela, após ter decorrido o prazo de carência estipulado. Os juros podem ser pagos durante a carência ou capitalizados e devolvidos juntamente com o principal.

O chamado sinking fund, que muitas vezes é confundido com o Sistema Americano, é um fundo de amortização que é constituido pelo mutuário para pagar o principal devido, quando o cálculo é feito pelo sistema americano. Com tal providência, o mutuário procura evitar o problema de liquidez que surgiria devido a um grande pagamento de uma só vez.

4.2.3.3. Sistema de Amortizações Variáveis (SAV)

Neste tipo de sistema de amortização, a devolução do principal é feita em parcelas desiguais, ocorrendo na prática quando as partes fixam as parcelas de amortizações, sem nenhum critério particular, e a taxa de juros cobrada, sendo esta calculada também sobre o saldo devedor.

4.2.3.4. Sistema de Amortização Crescente (SACRE)

Esse tipo de sistema de amortização é uma variação do sistema de amortização constante. No SACRE, a prestação é calculada como no SAC, mas é mantida constante. Normalmente, a prestação permanece congelada por um certo periodo de tempo (geralmente um ano), após os quais recalcula-se a prestação.

Atualmente, este é o sistema de amortização mais utilizado pela Caixa Econômica Federal em suas linhas de crédito imobiliário.

CAPÍTULO 5

Fórmulas Matemáticas para Sistemas de Amortização com Carência

Atendendo a falta de fórmulas para o cálculo das parcelas de amortização, saldo devedor, juros e prestação para os sistemas de amortização com carência, este capítulo será destinado para a demonstração e obtenção dessas fórmulas, afim de suprir essa escassez de informação.

Trabalhar-se-á com dois tipos de sistemas de amortização: Sistema de Amortização Constante (SAC) e Sistema Francês de Amortização. Para esses dois sistemas de amortização, será apresentada as fórmulas durante um empréstimo que apresente carência, podendo ou não, terem os juros capitalizados.

Nota: O período de carência será denotado pela letra k, o número de parcelas de amortização por n, o período desejado durante o empréstimo por t e serão deduzidas as fórmulas para o sistema de anuidades postecipadas, ou seja, o período do empréstimo varia de $t = 0,\dots,n + k$.

5.1. Sistema de Amortização Constante (SAC) com prazo de carência

5.1.1. SAC com prazo de carência e sem juros capitalizados

5.1.1.1. Amortização (a_t)

Durante o período de carência, o mutuário não paga as parcelas de amortização. Logo, tem-se que:

$$a_t = 0,$$

para $t = 1,...,k$.

Passado o período de carência, como no SAC, as amortizações são constantes. Logo, utiliza-se a fórmula apresentada para o cálculo das parcelas de amortização sem período de carência. Tem-se:

$$a_t = \frac{V_P}{n},$$

para $t = k+1,...,k+n$.

A soma de todas as parcelas de amortização será igual ao valor do empréstimo, dado por:

$$\sum_{t=0}^{k+n} a_t = n \cdot a$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = n \cdot \frac{V_P}{n}$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = V_P$$

5.1.1.2. Saldo Devedor (P_t)

No período de carência, o saldo devedor segue inalterado, sendo este igual ao valor inicial do empréstimo, já que, pela definição, ele diminui a partir do período que se começa a pagar as parcelas de amortização, o que não ocorre durante a carência. Logo, tem-se que:

$$P_t = a \cdot n$$
$$\Rightarrow P_t = \frac{V_p}{n} \cdot n$$
$$\Rightarrow P_t = V_p,$$

para $t = 0,\ldots,k$.

Para o periodo após a carência, tem-se o saldo devedor, dado por:

$$P_t = a \cdot (n-(t-k))$$
$$\Rightarrow P_t = \frac{V_p}{n} \cdot (n-t+k),$$

para $t = k+1,\ldots,k+n$.

5.1.1.3. Juros (j_t)

Durante o periodo de carência, os juros são calculados multiplicando-se a taxa de juros pelo valor inicial do empréstimo. Logo:

$$j_t = i \cdot a \cdot n$$
$$\Rightarrow j_t = i \cdot \frac{V_p}{n} \cdot n$$
$$\Rightarrow j_t = i \cdot V_p,$$

para $t = 1,\ldots,k$.

Passado o período de carência, os juros são calculados multiplicando-se a taxa de juros pelo saldo devedor do período anterior (P_{t-1}). Logo:

$$\begin{aligned}
&j_t = i \cdot P_{t-1} \\
&\Rightarrow j_t = i \cdot a \cdot (n-(t-1)+k) \\
&\Rightarrow j_t = i \cdot \frac{V_p}{n} \cdot (n-t+k+1),
\end{aligned}$$

para $t = k+1,\ldots,k+n$.

O valor total de juros pagos será a soma dos juros pagos durante e após o período de carência.

Durante o período de carência, a soma dos juros é dada por:

$$\sum_{t=0}^{k} j_t = k \cdot i \cdot V_p$$

Durante a amortização da dívida, os juros obedecem a uma progressão aritmética decrescente de razão $G = -i \cdot a = -i \cdot \frac{V_p}{n}$, onde $a_1 = i \cdot V_p$. Tem-se, então, que o termo geral dessa P.A. é dado por:

$$\begin{aligned}
&a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \\
&\Rightarrow a_n = i \cdot V_p + (n-1) \cdot \left(-i \cdot \frac{V_p}{n}\right) \\
&\Rightarrow a_n = i \cdot V_p \cdot \left[1 - \frac{n-1}{n}\right] \\
&\Rightarrow a_n = i \cdot V_p \cdot \left[\frac{n-n+1}{n}\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{i \cdot V_p}{n}$$

Assim, a soma dos termos dessa P.A. (ou seja, dos juros pagos durante o pagamento das amortizações) é dada por:

$$\sum_{t=k+1}^{k+n} j_t = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=k+1}^{k+n} j_t = \frac{\left(i \cdot V_p + \dfrac{i \cdot V_p}{n}\right) \cdot n}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=k+1}^{k+n} j_t = \frac{\left(\dfrac{i \cdot V_p \cdot n + i \cdot V_p}{n}\right) \cdot n}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=k+1}^{k+n} j_t = \frac{i \cdot V_p (n+1)}{2}$$

Logo, juntando a soma dos juros durante e depois do período de carência, tem-se:

$$\sum_{t=0}^{k+n} j_t = \sum_{t=0}^{k} j_t + \sum_{t=k+1}^{k+n} j_t$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = k \cdot i \cdot V_p + \frac{i \cdot V_p \cdot (n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = i \cdot V_p \cdot \left(k + \frac{n+1}{2}\right)$$

5.1.1.4. Prestação (A_t)

A prestação é a soma da amortização com o juro. Como durante a carência, o mutuário não paga as parcelas de amortização, a prestação corresponde apenas ao juros. Sendo assim, tem-se:

$$A_t = j_t$$
$$\Rightarrow A_t = i \cdot V_p,$$

para $t = 1,\dots,k$.

Depois do período de carência, a prestação para cada período é a obtida somando-se a amortização com o juro, ambos do período correspondente. Tem-se:

$$A_t = a_t + j_t$$
$$\Rightarrow A_t = \frac{V_p}{n} + i \cdot a \cdot (n - t + k + 1)$$
$$\Rightarrow A_t = \frac{V_p}{n} + i \cdot \frac{V_p}{n} \cdot (n - t + k + 1)$$
$$\Rightarrow A_t = \frac{V_p}{n}\left[1 + i \cdot (n - t + k + 1)\right]$$

para $t = k + 1,\dots,k + n$.

A soma de todas prestações será a soma das parcelas de amortização com a soma dos juros, no período de $t = 0,\dots,k + n$. Tem-se:

$$\sum_{t=0}^{k+n} A_t = \sum_{t=0}^{k+n} a_t + \sum_{t=0}^{k+n} j_t$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = V_p + i \cdot V_p \cdot \left(k + \frac{n+1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = V_p \cdot \left[1 + i \cdot \left(k + \frac{n+1}{2}\right)\right]$$

Exemplo: A empresa Guerra & Chico Ltda solicita ao Banco Alfa S.A. um empréstimo de R$ 10.000,00, entregue no ato da assinatura do contrato. Sabendo-se que o banco cobra uma taxa de 10% aa, que foi concedido um período de carência de 3 anos e que o empréstimo será amortizado em 5 parcelas anuais, pelo SAC, construir a planilha do empréstimo.

Resolução:

Dados:

V_p =10.000,00;

i =10% aa = 0,1 aa;

k = 3 anos de carência;

n = 5 parcelas de amortização;

Sistema de amortização utilizado = SAC.

Neste exemplo, ter-se-á que analisar os valores durante e depois do período de carência. Assim sendo, o período t será de 0 a $k+n$, ou seja, de 0 a 8.

Durante a carência não ocorre o pagamento das parcelas de amortização. Logo:

$$a_1 = 0;$$
$$a_2 = 0;$$
$$a_3 = 0.$$

Passado o período de carência, as parcelas de amortização são constantes e dadas por:

$$a = \frac{V_p}{n} = \frac{10.000}{5} = 2.000$$

Assim, tem-se:

$$a_4 = 2.000;$$
$$a_5 = 2.000;$$
$$a_6 = 2.000;$$
$$a_7 = 2.000;$$
$$a_8 = 2.000.$$

Nota-se que a soma das amortizações é igual ao valor do empréstimo.

Como durante a carência não há pagamento de amortizações, o saldo devedor fica inalterado. Logo:

$$P_o = 10.000;$$
$$P_1 = 10.000;$$
$$P_2 = 10.000;$$
$$P_3 = 10.000.$$

Calcula-se o saldo devedor, após o período de carência, usando a fórmula $P_t = a \cdot (n - t + k)$.

Saldo devedor no quarto ano:

$$P_4 = 2.000 \cdot (5 - 4 + 3) = 2.000 \cdot 4 = 8.000.$$

Saldo devedor no quinto ano:

$$P_5 = 2.000 \cdot (5 - 5 + 3) = 2.000 \cdot 3 = 6.000.$$

Saldo devedor no sexto ano:

$$P_6 = 2.000 \cdot (5 - 6 + 3) = 2.000 \cdot 2 = 4.000.$$

Saldo devedor no sétimo ano:

$$P_7 = 2.000 \cdot (5 - 7 + 3) = 2.000 \cdot 1 = 2.000.$$

Saldo devedor no oitavo ano:

$$P_8 = 2.000 \cdot (5 - 8 + 3) = 2.000 \cdot 0 = 0.$$

No cálculo dos juros, tem-se que durante a carência, multiplica-se a taxa de juros pelo valor inicial do empréstimo, ou seja,

$$j_t = i \cdot V_p = 0{,}1 \cdot 10.000 = 1.000.$$

Assim,

$$j_1 = 1.000;$$
$$j_2 = 1.000;$$
$$j_3 = 1.000;$$

Passado o período de carência, os juros são calculados sobre o saldo devedor do período anterior, ou seja, pela fórmula $j_t = i \cdot a \cdot (n - t + k + 1)$.

Juros do quarto ano:

$$j_4 = 0{,}1 \cdot 2.000 \cdot (5 - 4 + 3 + 1) = 200 \cdot 5 = 1.000.$$

Juros do quinto ano:

$$j_5 = 0{,}1 \cdot 2.000 \cdot (5 - 5 + 3 + 1) = 200 \cdot 4 = 800.$$

Juros do sexto ano:

$$j_6 = 0{,}1 \cdot 2.000 \cdot (5 - 6 + 3 + 1) = 200 \cdot 3 = 600.$$

Juros do sétimo ano:

$$j_7 = 0{,}1 \cdot 2.000 \cdot (5 - 7 + 3 + 1) = 200 \cdot 2 = 400.$$

Juros do oitavo ano:

$$j_8 = 0{,}1 \cdot 2.000 \cdot (5 - 8 + 3 + 1) = 200 \cdot 1 = 200.$$

Calcula-se a soma total dos juros pagos nessa operação financeira:

$$\sum_{t=0}^{k+n} j_t = i \cdot V_p \cdot \left(k + \frac{n+1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 0{,}1 \cdot 10.000 \cdot \left(3 + \frac{5+1}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 1.000 \cdot 6$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 6.000{,}00$$

Como a prestação é a soma da amortização com o juro, em cada periodo correspondente. Como durante a carência só é pago o juro, tem-se:

$$A_1 = j_1 = 1.000;$$
$$A_2 = j_2 = 1.000;$$
$$A_3 = j_3 = 1.000.$$

Após o período de carência, a prestação é obtida por $A_t = a \cdot [1 + i \cdot (n - t + k + 1)]$

Prestação no quarto ano:

$$A_4 = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 4 + 3 + 1)] = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 5] = 2.000 \cdot 1{,}5 = 3.000.$$

Prestação no quinto ano:

$$A_5 = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 5 + 3 + 1)] = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 4] = 2.000 \cdot 1{,}4 = 2.800.$$

Prestação no sexto ano:

$$A_6 = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 6 + 3 + 1)] = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 3] = 2.000 \cdot 1{,}3 = 2.600.$$

Prestação no sétimo ano:

$$A_7 = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 7 + 3 + 1)] = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 2] = 2.000 \cdot 1{,}2 = 2.400.$$

Prestação no oitavo ano:

$$A_8 = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 8 + 3 + 1)] = 2.000 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 1] = 2.000 \cdot 1{,}1 = 2.200.$$

Calcula-se a soma total das prestações dessa operação financeira:

$$\sum_{t=0}^{k+n} A_t = V_p \cdot \left[1 + i \cdot \left(k + \frac{n+1}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 10.000 \cdot \left[1 + 0{,}1 \cdot \left(3 + \frac{5+1}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 10.000 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 6)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 10.000 \cdot 1{,}6$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 16.000{,}00$$

A partir dos dados acima obtidos, podemos construir a seguinte planilha da operação de crédito:

Ano(t)	Saldo Devedor (P)	Amortização (a)	Juros (j)	Prestação (A)
0	10.000,00	-	-	-
1	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
2	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
3	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
4	8.000,00	2.000,00	1.000,00	3.000,00
5	6.000,00	2.000,00	800,00	2.800,00
6	4.000,00	2.000,00	600,00	2.600,00
7	2.000,00	2.000,00	400,00	2.400,00
8	-	2.000,00	200,00	2.200,00
Total	-	10.000,00	6.000,00	16.000,00

5.1.2. SAC com carência e juros capitalizados

5.1.2.1. Saldo Devedor (P_t)

Durante o período de carência, o saldo devedor é obtido somando-se o saldo devedor do período anterior com os juros capitalizados também do período anterior. Tem-se:

$$P_t = P_0, \; para \; t = 0;$$
$$P_t = P_0 \cdot (1+i)^1, \; para \; t = 1;$$
$$P_t = P_1 \cdot (1+i) = P_0 \cdot (1+i)^2, \; para \; t = 2;$$
$$\vdots$$
$$P_t = P_0 \cdot (1+i)^k, \; para \; t = k.$$

Assim, o saldo devedor durante o período de carência é dado por:

$$P_t = P_0 \cdot (1+i)^t,$$

para $t = 0,\ldots,k$.

Para o período depois da carência, tem-se que o saldo devedor é dado por:

$$P_t = a \cdot (n - (t-k))$$
$$\Rightarrow P_t = \frac{V_p \cdot (1+i)^k}{n} \cdot (n - t + k),$$

para $t = k+1,\ldots,k+n$.

5.1.2.2. Amortização (a_t)

Durante o período de carência, o mutuário não paga as parcelas de amortização. Logo:

$$a_t = 0,$$

para $t = 1,\ldots,k$.

Passado o período de carência, as parcelas de amortização são calculadas na divisão entre o saldo devedor no período k (P_k) e o número de parcelas a serem pagas (n). Logo:

$$a_t = \frac{P_k}{n}$$
$$\Rightarrow a_t = \frac{V_p \cdot (1+i)^k}{n},$$

para $t = k + 1,\ldots,k + n$.

A soma de todas as parcelas de amortização será igual ao valor do empréstimo, acrescido dos juros durante o período de carência. Tem-se que:

$$\sum_{t=0}^{k+n} a_t = n \cdot a$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = n \cdot \frac{V_p \cdot (1+i)^k}{n}$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = V_p \cdot (1+i)^k$$

5.1.2.3. Juros (j_t)

No período de carência, não há pagamento de juros, pois estes estão acrescidos ao saldo devedor neste período. Logo:

$$j_t = 0,$$

para $t = 1,\ldots,k$.

Passado o período de carência, os juros são calculados multiplicando-se a taxa de juros pelo saldo devedor do período anterior (P_{t-1}). Logo:

$$\begin{aligned} j_t &= i \cdot P_{t-1} \\ \Rightarrow j_t &= i \cdot a \cdot (n-(t-1)+k) \\ \Rightarrow j_t &= i \cdot \frac{P_0 \cdot (1+i)^k}{n} \cdot (n-t+k+1), \end{aligned}$$

para $t = k+1, \dots, k+n$.

Para calcular a soma total dos juros, sabe-se que não ocorre pagamento de juros durante o período de carência e que durante a amortização da dívida, os juros obedecem a uma progressão aritmética decrescente de razão $G = -i \cdot a = -i \cdot \frac{V_p \cdot (1+i)^k}{n}$, onde $a_1 = i \cdot V_p \cdot (1+i)^k$. Logo, o termo geral dessa P.A. é dado por:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot r \\ \Rightarrow a_n &= i \cdot V_p \cdot (1+i)^k + (n-1) \cdot \left(-i \cdot \frac{V_p \cdot (1+i)^k}{n} \right) \\ \Rightarrow a_n &= i \cdot V_p \cdot (1+i)^k \cdot \left[1 - \frac{n-1}{n} \right] \\ \Rightarrow a_n &= i \cdot V_p \cdot (1+i)^k \cdot \left[\frac{n-n+1}{n} \right] \\ \Rightarrow a_n &= \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k}{n} \end{aligned}$$

Assim, a soma dos termos dessa P.A. (ou seja, dos juros pagos durante o pagamento das amortizações) é dada por:

$$\sum_{t=0}^{k+n} j_t = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = \frac{\left(i \cdot V_p \cdot (1+i)^k + \dfrac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k}{n}\right)\cdot n}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = \frac{\left(\dfrac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k \cdot n + i \cdot V_p \cdot (1+i)^k}{n}\right)\cdot n}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k \cdot (n+1)}{2}$$

5.1.2.4. Prestação (A_t)

A prestação é a soma da amortização com o juro. Como durante a carência, o mutuário não paga as parcelas de amortização e os juros, as prestações também são nulas neste período. Logo:

$$A_t = 0,$$

para $t = 1,\ldots,k$.

Depois do período de carência, a prestação para cada período é a obtida somando-se a amortização com o juro, ambos do período correspondente. Tem-se:

$$A_t = a_j + j_t$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{P_0 \cdot (1+i)^k}{n} + i \cdot \frac{P_o \cdot (1+i)^k}{n} \cdot (n - t + k + 1)$$

$$\Rightarrow A_t = \frac{P_0 \cdot (1+i)^k}{n} \cdot [1 + i \cdot (n - t + k + 1)]$$

para $t = k + 1,\ldots,k + n$.

A soma de todas prestações será a soma das parcelas de amortização com a soma dos juros, no período de $t = 0,...,k+n$. Tem-se, então, que;

$$\sum_{t=0}^{k+n} A_t = \sum_{t=0}^{k+n} a_t + \sum_{t=0}^{k+n} j_t$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = V_p \cdot (1+i)^k + i \cdot V_p \cdot (1+i)^k \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = V_p \cdot (1+i)^k \cdot \left[1 + i \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)\right]$$

Exemplo: (Idem ao anterior) A empresa Guerra & Chico Ltda solicita ao Banco Alfa S.A. um empréstimo de R$ 10.000,00, entregue no ato da assinatura do contrato. Sabendo-se que o banco cobra uma taxa de 10% aa, que foi concedido um período de carência de 3 anos e que o empréstimo será amortizado em 5 parcelas anuais, pelo SAC, com juros capitalizados e acrescidos ao saldo devedor, construir a planilha do empréstimo.

Resolução:

Dados:

V_p =10.000,00;

i =10% aa = 0,1 aa;

k = 3 anos de carência;

n = 5 parcelas de amortização;

Sistema de amortização utilizado = SAC, com juros capitalizados.

Neste exemplo, ter-se-á que analisar os valores durante e depois do período de carência. Assim sendo, o periodo t será de 0 a $k+n$, ou seja, de 0 a 8.

Durante a carência não ocorre o pagamento das parcelas de amortização. Logo:

$$a_1 = 0;$$
$$a_2 = 0;$$
$$a_3 = 0.$$

Passado o período de carência, as parcelas de amortização são constantes e dadas por:

$$a = \frac{V_p \cdot (1+i)^k}{n} = \frac{10.000 \cdot (1+0{,}1)^3}{5} = 2.662{,}00.$$

Assim:

$$a_4 = 2.662{,}00;$$
$$a_5 = 2.662{,}00;$$
$$a_6 = 2.662{,}00;$$
$$a_7 = 2.662{,}00;$$
$$a_8 = 2.662{,}00.$$

Nota-se que a soma das amortizações é igual ao valor do saldo devedor no último periodo da carência.

No período de carência, o saldo devedor é capitalizado conforme a taxa de juros cobrada. Logo:

$$P_o = 10.000{,}00;$$
$$P_1 = 10.000 \cdot (1+0{,}1) = 10.000 \cdot 1{,}1 = 11.000{,}00;$$
$$P_2 = 10.000 \cdot (1+0{,}1)^2 = 10.000 \cdot 1.21 = 12.100{,}00;$$
$$P_3 = 10.000 \cdot (1+0{,}1)^3 = 10.000 \cdot 1{,}331 = 13.310{,}00.$$

Calcula-se o saldo devedor, após o período de carência, usando a fórmula $P_t = a \cdot (n - t + k)$.

Saldo devedor no quarto ano:

$$P_4 = 2.662 \cdot (5 - 4 + 3) = 2.662 \cdot 4 = 10.648{,}00.$$

Saldo devedor no quinto ano:

$$P_5 = 2.662 \cdot (5 - 5 + 3) = 2.662 \cdot 3 = 7.986{,}00.$$

Saldo devedor no sexto ano:

$$P_6 = 2.662 \cdot (5 - 6 + 3) = 2.662 \cdot 2 = 5.324{,}00.$$

Saldo devedor no sétimo ano:

$$P_7 = 2.662 \cdot (5 - 7 + 3) = 2.662 \cdot 1 = 2.662{,}00.$$

Saldo devedor no oitavo ano:

$$P_8 = 2.662 \cdot (5 - 8 + 3) = 2.662 \cdot 0 = 0.$$

No período de carência, não há pagamento de juros, pois estes estão acrescidos ao saldo devedor neste período. Logo:

$$j_1 = 0;$$
$$j_2 = 0;$$
$$j_3 = 0.$$

Passado o período de carência, os juros são calculados sobre o saldo devedor do período anterior, ou seja, pela fórmula $j_t = i \cdot a \cdot (n - t + k + 1)$.

Juros do quarto ano:

$$j_4 = 0{,}1 \cdot 2.662 \cdot (5 - 4 + 3 + 1) = 266{,}2 \cdot 5 = 1.331{,}00.$$

Juros do quinto ano:

$$j_5 = 0{,}1 \cdot 2.662 \cdot (5 - 5 + 3 + 1) = 266{,}2 \cdot 4 = 1.064{,}80.$$

Juros do sexto ano:

$$j_6 = 0{,}1 \cdot 2.662 \cdot (5 - 6 + 3 + 1) = 266{,}2 \cdot 3 = 798{,}60.$$

Juros do sétimo ano:

$$j_7 = 0{,}1 \cdot 2.662 \cdot (5 - 7 + 3 + 1) = 266{,}2 \cdot 2 = 532{,}40.$$

Juros do oitavo ano:

$$j_8 = 0{,}1 \cdot 2.662 \cdot (5 - 8 + 3 + 1) = 266{,}2 \cdot 1 = 266{,}20.$$

Calculam-se os juros pagos durante a amortização da dívida:

$$\sum_{t=0}^{k+n} j_t = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k \cdot (n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 0{,}1 \cdot 10.000 \cdot (1+0{,}1)^3 \cdot \frac{5+1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 1.000 \cdot 1{,}1^3 \cdot 3$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 3.000 \cdot 1{,}331$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 3.993{,}00$$

Sabe-se que a prestação é a soma da amortização com o juro, em cada período correspondente. Como durante a carência não há pagamento de ambos, tem-se:

$$A_1 = 0;$$
$$A_2 = 0;$$
$$A_3 = 0.$$

Após o período de carência, a prestação é obtida por $A_t = a \cdot [1 + i \cdot (n - t + k + 1)]$.

Prestação no quarto ano:

$$A_4 = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 4 + 3 + 1)] = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 5] = 2.662 \cdot 1{,}5 = 3.993{,}00.$$

Prestação no quinto ano:

$$A_5 = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 5 + 3 + 1)] = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 4] = 2.662 \cdot 1{,}4 = 3.726{,}80.$$

Prestação no sexto ano:

$A_6 = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 6 + 3 + 1)] = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 3] = 2.662 \cdot 1{,}3 = 3.460{,}60.$

Prestação no sétimo ano:

$A_7 = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 7 + 3 + 1)] = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 2] = 2.662 \cdot 1{,}2 = 3.194{,}40.$

Prestação no oitavo ano:

$A_8 = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot (5 - 8 + 3 + 1)] = 2.662 \cdot [1 + 0{,}1 \cdot 1] = 2.662 \cdot 1{,}1 = 2.928{,}20.$

Calcula-se a soma das prestações dessa operação financeira:

$$\sum_{t=0}^{k+n} A_t = V_p \cdot (1+i)^k \cdot \left[1 + i \cdot \frac{n+1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 10.000 \cdot (1+0{,}1)^3 \cdot \left[1 + 0{,}1 \cdot \frac{5+1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 10.000 \cdot 1{,}331 \cdot [1 + 0{,}3]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 13.310 \cdot 1{,}3$$

$$\Rightarrow \sum_{t=o}^{k+n} A_t = 17.303{,}00$$

A partir dos dados acima obtidos, podemos construir a seguinte planilha da operação de crédito:

Ano(t)	Saldo Devedor (P)	Amortização (a)	Juros (j)	Prestação (A)
0	10.000,00	-	-	-
1	11.000,00	-	-	-
2	12.100,00	-	-	-
3	13.310,00	-	-	-
4	10.648,00	2.662,00	1.331,00	3.993,00
5	7.986,00	2.662,00	1.064,80	3.726,80
6	5.324,00	2.662,00	798,60	3.460,60
7	2.662,00	2.662,00	532,40	3.194,40
8	-	2.662,00	266,20	2.928,20
Total	-	13.310,00	3.993,00	17.303,00

5.2. Sistema Francês de Amortização com prazo de carência

5.2.1. SF com prazo de carência e sem juros capitalizados

5.2.1.1. Prestação

No período de carência, não ocorre o pagamento das parcelas de amortização e sim, somente, dos juros. Logo:

$$A_t = j_t = i \cdot V_p$$

para $t = 1,\ldots,k$.

Passado o período de carência, calcula-se o valor das prestações com a fórmula já conhecida para o SF sem carência. Tem-se:

$$A = V_p \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

para $t = k+1,\ldots,k+n$.

A soma das prestações é dividida em duas partes. Durante o período de carência, tem-se:

$$\sum_{t=0}^{k} A_t = k \cdot i \cdot V_p$$

Durante a amortização da dívida, a soma é dada por:

$$\sum_{t=k+1}^{k+n} A_t = n \cdot A$$

$$\Rightarrow \sum_{t=k+1}^{k+n} A_t = n \cdot \frac{i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}}$$

Logo, a soma total das prestações é dada por:

$$\sum_{t=0}^{k+n} A_t = \sum_{t=0}^{k} A_t + \sum_{t=k+1}^{k+n} A_t$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = k \cdot i \cdot V_p + \frac{n \cdot i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = i \cdot V_p \cdot \left[k + \frac{n}{1-(1+i)^{-n}} \right]$$

5.2.1.2. Juros

Durante o período de carência, no SF sem juros capitalizados, são pagos os juros sobre o valor do empréstimo. Logo:

$$j_t = i \cdot V_p$$

para $t = 1, \ldots, k$.

Após o término do período de carência, os juros são pagos sobre o saldo devedor do período anterior da seguinte maneira:

$$j_t = i \cdot P_{t-1}$$

$$\Rightarrow j_t = i \cdot A \cdot \frac{(1+i)^{n-(t-k)+1} - 1}{(1+i)^{n-(t-k)+1} \cdot i}$$

$$\Rightarrow j_t = i \cdot A . \frac{\left[1-(1+i)^{-(n-t+k+1)}\right]}{i}$$

$$\Rightarrow j_t = \frac{V_p \cdot i \cdot \left[1-(1+i)^{-(n-t+k+1)}\right]}{1-(1+i)^{-n}}$$

para $t = k+1,\ldots,k+n$.

A soma dos juros é obtida pela diferença entre a soma das prestações e a soma das amortizações. Como neste caso a soma das amortizações é igual ao valor do empréstimo, tem-se:

$$\sum_{t=0}^{k+n} j_t = \sum_{t=0}^{k+n} A_t - \sum_{t=0}^{k+n} a_t$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = i \cdot V_p \cdot \left[k + \frac{n}{1-(1+i)^{-n}}\right] - V_p$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = V_p \cdot \left[i \cdot \left(k + \frac{n}{1-(1+i)^{-n}}\right) - 1\right]$$

5.2.1.3. Amortização

Sabe-se que, durante o período de carência, não ocorre pagamento das parcelas de amortização. Assim,

$$a_t = 0$$

para $t = 1,\ldots,k$.

Ao término do período de carência, dá-se início a amortização da dívida, sendo que as parcelas de amortização são obtidas da diferença entre a prestação e o juros de um referido período. Tem-se:

$$a_t = A_t - j_t$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{V_p \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} - \frac{V_p \cdot i \cdot [1-(1+i)^{(n-t+k+1)}]}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{V_p \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot (1+i)^{-(n-t+k-1)}$$

para $t = k+1,\ldots,k+n$.

Sabe-se que a soma das amortizações deverá ser o valor do empréstimo. Como curiosidade, vejamos a demonstração.

As amortizações, a cada período, no pagamento da dívida, obedece a uma progressão geométrica decrescente de razão $q = \frac{1}{1+i}$. O primeiro termo dessa P.G. é obtido por:

$$a_1 = A - j$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}} - \frac{i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[1-(1+i)^{-(n-t+k+1)}\right]$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[(1+i)^{-(n-t+k+1)}\right]$$

Logo, a soma das amortizações será a soma dos termos da P.G. apresentada. Tem-se:

$$\sum_{t=0}^{k+n} a_t = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \frac{i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[(1+i)^{-(n-t+k+1)}\right] \cdot \frac{\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1}{\dfrac{1}{1+i} - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \frac{i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[(1+i)^{-(n-t+k+1)}\right] \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\dfrac{1-1-i}{1+i}}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \left(\frac{i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[(1+i)^{-(n-t+k+1)}\right] \cdot \left[(1+i)^{-n} - 1\right] \right) \div \left(\frac{-i}{1+i} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i) \cdot (1+i)^{-(n-t+k+1)} \cdot \left[(1+i)^{-n} - 1\right]}{-i \cdot \left[1-(1+i)^{-n}\right]}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^{-(n-t+k)} \cdot \left[(1+i)^{-n} - 1\right]}{i \cdot \left[(1+i)^{-n} - 1\right]}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = V_p \cdot (1+i)^{-(n-t+k)}$$

Como quer-se a soma de todas as amortizações, tem-se $t = k + n$. Logo:

$$\sum_{t=0}^{k+n} a_t = V_p \cdot (1+i)^{-(n-k-n-k)}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = V_p \cdot (1+i)^0$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = V_p$$

5.2.1.4. Saldo Devedor

Durante o período de carência, o saldo devedor não altera-se, pois não ocorre pagamentos de amortizações nem de juros capitalizados. Logo:

$$P_t = V_p$$

para $t = 0,\dots,k$.

Passado o período de carência, o saldo devedor é obtido conforme o mesmo raciocínio utilizado se o empréstimo fosse sem carência. Tem-se:

$$P_t = A \cdot \frac{(1+i)^{n-(t-k)} - 1}{(1+i)^{n-(t-k)} \cdot i}$$

$$\Rightarrow P_t = A \cdot \frac{(1+i)^{n-t+k} - 1}{(1+i)^{n-t+k} \cdot i}$$

$$\Rightarrow P_t = A \cdot \frac{[1-(1+i)^{-(n-t+k)}]}{i}$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{V_p \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \frac{[1-(1+i)^{-(n-t+k)}]}{i}$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{V_p}{1-(1+i)^{-n}} \cdot [1-(1+i)^{-(n-t+k)}]$$

para $t = k+1,\dots,k+n$.

Exemplo: (utilizaremos o mesmo exemplo que no SAC)

A empresa Guerra & Chico Ltda solicita ao Banco Alfa S.A. um empréstimo de R$ 10.000,00, entregue no ato da assinatura do contrato. Sabendo-se que o banco cobra uma taxa de 10% aa, que foi concedido um período de carência de 3 anos e que o empréstimo será amortizado em 5 parcelas anuais, pelo SF, construir a planilha do empréstimo.

Resolução:

Dados:

V_p=10.000,00;

i=10% aa = 0,1 aa;

k = 3 anos de carência;

$n = 5$ parcelas de amortização;

Sistema de amortização utilizado = SF.

Neste exemplo, ter-se-á que analisar os valores durante e depois do período de carência. Assim sendo, o período t será de 0 a $k + n$, ou seja, de 0 a 8.

No período da carência, as prestações são dadas multiplicando a taxa de juros pelo valor do empréstimo. Tem-se:

$$A_t = i \cdot V_p = 0{,}1 \cdot 10.000 = 1.000{,}00$$

Assim:

$$A_1 = 1.000{,}00;$$
$$A_2 = 1.000{,}00;$$
$$A_3 = 1.000{,}00.$$

Passado o período de carência, as prestações são constantes e obtidas da seguinte maneira:

$$A_t = \frac{V_p \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{10.000 \cdot 0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-5}} = \frac{1.000}{0{,}379078676} = 2.637{,}97$$

Assim, as prestações são iguais a:

$$A_4 = 2.637{,}97;$$
$$A_5 = 2.637{,}97;$$
$$A_6 = 2.637{,}97;$$
$$A_7 = 2.637{,}97;$$
$$A_8 = 2.637{,}97.$$

A soma das prestações nessa operação financeira é dada por:

$$\sum_{t=0}^{k+n} A_t = i \cdot V_p \cdot \left[k + \frac{n}{1-(1+i)^{-n}} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 0{,}1 \cdot 10.000 \cdot \left[3 + \frac{5}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 1.000 \cdot \left[3 + \frac{5}{1-0{,}620921323} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 1.000 \cdot [3 + 13{,}18987404]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 1.000 \cdot 16{,}18987404$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 16.189{,}87$$

Os juros, durante a carência, são calculados sobre o valor do empréstimo. Logo:

$$j_t = i \cdot V_p = 0{,}1 \cdot 10.000 = 1.000{,}00$$

e assim,

$$j_1 = 1.000{,}00;$$
$$j_2 = 1.000{,}00;$$
$$j_3 = 1.000{,}00.$$

Utilizando a fórmula $j_t = A_t \cdot [1-(1+i)^{-(n-t+k-1)}]$, obtêm-se os juros durante a amortização da dívida.

Juros do quarto ano:

$$j_4 = 2.637{,}97 \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-4+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot [1-(1{,}1)^{-5}] = 1.000{,}00$$

Juros do quinto ano:

$$j_5 = 2.637{,}97 \cdot [1 - (1 + 0{,}1)^{-(5-5+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot [1 - (1{,}1)^{-4}] = 836{,}20$$

Juros do sexto ano:

$$j_6 = 2.637{,}97 \cdot [1 - (1 + 0{,}1)^{-(5-6+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot [1 - (1{,}1)^{-3}] = 656{,}02$$

Juros do sétimo ano:

$$j_7 = 2.637{,}97 \cdot [1 - (1 + 0{,}1)^{-(5-7+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot [1 - (1{,}1)^{-2}] = 457{,}83$$

Juros do oitavo ano:

$$j_8 = 2.637{,}97 \cdot [1 - (1 + 0{,}1)^{-(5-8+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot [1 - (1{,}1)^{-1}] = 239{,}82$$

Calcula-se a soma dos juros desta operação financeira, por:

$$\sum_{t=0}^{k-n} j_t = V_p \cdot \left[i \cdot \left(k + \frac{n}{1-(1+i)^{-n}} \right) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 10.000 \cdot \left[0{,}1 \cdot \left(3 + \frac{5}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \right) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 10.000 \cdot \left[0{,}1 \cdot \left(3 + \frac{5}{1-0{,}620921323} \right) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 10.000 \cdot [0{,}1 \cdot (3 + 13{,}18987404) - 1]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 10.000 \cdot [0{,}1 \cdot 16{,}18987404 - 1]$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 10.000 \cdot 0{,}618987404$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 6.189{,}87$$

Durante o período de carência não ocorre o pagamento das parcelas de amortização.

Logo:

$$a_1 = 0;$$
$$a_2 = 0;$$
$$a_3 = 0.$$

As parcelas de amortização são obtidas pela fórmula $a_t = A_t \cdot [(1+i)^{-(n-t+k+1)}]$.

Tem-se:

Amortização do quarto ano:

$$a_4 = 2.637{,}97 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-4+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot (1{,}1)^{-5} = 1.637{,}97$$

Amortização do quinto ano:

$$a_5 = 2.637{,}97 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-5+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot (1{,}1)^{-4} = 1.801{,}77$$

Amortização do sexto ano:

$$a_6 = 2.637{,}97 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-6+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot (1{,}1)^{-3} = 1.981{,}95$$

Amortização do sétimo ano:

$$a_7 = 2.637{,}97 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-7+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot (1{,}1)^{-2} = 2.180{,}14$$

Amortização do oitavo ano:

$$a_8 = 2.637{,}97 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-8+3+1)}] = 2.637{,}97 \cdot (1{,}1)^{-1} = 2.398{,}15$$

A soma das parcelas de amortização é igual ao valor do empréstimo.

Durante o período de carência, o saldo devedor é inalterável, ou seja, continua igual ao valor do empréstimo.

$$P_1 = 10.000{,}00;$$
$$P_2 = 10.000{,}00;$$
$$P_3 = 10.000{,}00.$$

O saldo devedor de um período após a carência é obtido pela diferença entre o saldo devedor e a amortização do período anterior. Utilizando-se da fórmula $P_t = \dfrac{V_p}{1-(1+i)^{-n}} \cdot [1-(1+i)^{-(n-t+k)}]$, tem-se:

Saldo devedor no quarto ano:

$$P_4 = \frac{10.000}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-4+3)}] = 26.379{,}75 \cdot [1-(1{,}1)^{-4}] = 8.362{,}02$$

Saldo devedor no quinto ano:

$$P_5 = \frac{10.000}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-5+3)}] = 26.379{,}75 \cdot [1-(1{,}1)^{-3}] = 6.560{,}25$$

Saldo devedor no sexto ano:

$$P_6 = \frac{10.000}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-6+3)}] = 26.379{,}75 \cdot [1-(1{,}1)^{-2}] = 4.578{,}30$$

Saldo devedor no sétimo ano:

$$P_7 = \frac{10.000}{1-(1+0,1)^{-5}} \cdot [1-(1+0,1)^{-(5-7+3)}] = 26.379,75 \cdot [1-(1,1)^{-1}] = 2.398,16$$

Saldo devedor no oitavo ano:

$$P_8 = \frac{10.000}{1-(1+0,1)^{-5}} \cdot [1-(1+0,1)^{-(5-8+3)}] = 26.379,75 \cdot [1-(1,1)^{0}] = 0$$

A partir dos dados acima obtidos, podemos construir a seguinte planilha da operação de crédito:

Período (t)	Saldo Devedor (P)	Amortização (a)	Juro (j)	Prestação (A)
0	10.000,00	-	-	-
1	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
2	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
3	10.000,00	-	1.000,00	1.000,00
4	8.362,03	1.637,97	1.000,00	2.637,97
5	6.560,26	1.801,77	836,20	2.637,97
6	4.578,31	1.981,95	656,02	2.637,97
7	2.398,17	2.180,14	457,83	2.637,97
8	-	2.398,17	239,82	2.637,99
Total	-	10.000,00	6.189,87	16.189,87

Nota: Fez-se um acerto no último periodo.

5.2.2. SF com prazo de carência e juros capitalizados

5.2.2.1. Prestação

No periodo de carência, não ocorrem o pagamento das parcelas de amortização nem dos juros. Logo:

$$A_t = 0$$

para $t = 1,\dots,k$.

Passado o período de carência, calcula-se o valor das prestações sobre o saldo devedor do último período da carência. Tem-se:

$$A = V_p \cdot (1+i)^k \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

para $t = k+1,\dots,k+n$.

Como durante a carência não há pagamentos de prestações, tem-se que a soma total das prestações é a soma durante a amortização da dívida. Logo:

$$\sum_{t=k+1}^{k+n} A_t = n \cdot A$$

$$\Rightarrow \sum_{t=k+1}^{k+n} A_t = n \cdot \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k}{1-(1+i)^{-n}}$$

5.2.2.2. Juros

Durante o período de carência não são pagos os juros, pois estes estão se acumulando sobre o valor do empréstimo. Logo:

$$j_t = 0$$

para $t = 1,\dots,k$.

Após o término do período de carência, os juros são pagos sobre o saldo devedor do período anterior da seguinte maneira:

$$j_t = i \cdot P_{t-1}$$

$$\Rightarrow j_t = i \cdot A \cdot \frac{(1+i)^{n-(t-k)+1} - 1}{(1+i)^{n-(t-k)+1} \cdot i}$$

$$\Rightarrow j_t = i \cdot A . \frac{[1-(1+i)^{-(n-t+k+1)}]}{i}$$

$$\Rightarrow j_t = \frac{V_p \cdot (1+i)^k \cdot i \cdot [1-(1+i)^{-(n-t+k+1)}]}{1-(1+i)^{-n}}$$

para $t = k+1,...,k+n$.

A soma dos juros é obtida pela diferença entre a soma das prestações e a soma das amortizações. Como neste caso a soma das amortizações é igual ao valor do empréstimo, acrescidos dos juros capitalizados, tem-se:

$$\sum_{t=0}^{k+n} j_t = \sum_{t=0}^{k+n} A_t - \sum_{t=0}^{k+n} a_t$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = i \cdot V_p \cdot (1+i)^k \cdot \left[\frac{n}{1-(1+i)^{-n}}\right] - V_p \cdot (1+i)^k$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = V_p \cdot (1+i)^k \cdot \left[i \cdot \left(\frac{n}{1-(1+i)^{-n}}\right) - 1\right]$$

5.2.2.3. Amortização

Sabe-se que, durante o período de carência, não ocorre pagamento das parcelas de amortização. Assim,

$$a_t = 0$$

para $t = 1,...,k$.

Ao término do período de carência, dá-se início a amortização da dívida, sendo que as parcelas de amortização são obtidas da diferença entre a prestação e o juros de um referido período. Tem-se:

$$a_t = A_t - j_t$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{V_p \cdot (1+i)^k \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} - \frac{V_p \cdot (1+i)^k \cdot i \cdot [1-(1+i)^{-(n-t+k+1)}]}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\Rightarrow a_t = \frac{V_p \cdot (1+i)^{-(n-t+1)} \cdot i}{1-(1+i)^{-n}}$$

para $t = k+1, \ldots, k+n$.

Como a soma das amortizações deverá ser o valor do empréstimo, acrescido dos juros capitalizados. Como curiosidade, vejamos a demonstração.

As amortizações, a cada período, no pagamento da dívida, obedece a uma progressão geométrica decrescente de razão $q = \frac{1}{1+i}$. O primeiro termo dessa P.G. é obtido por:

$$a_1 = A - j$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k}{1-(1+i)^{-n}} - \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[1-(1+i)^{-(n-t-k+1)}\right]$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[(1+i)^{-(n-t+k-1)}\right]$$

Logo, a soma das amortizações será a soma dos termos da P.G. apresentada. Tem-se:

$$\sum_{t=0}^{k+n} a_t = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[(1+i)^{-(n-t+k+1)}\right] \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \frac{i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[(1+i)^{-(n-t+1)}\right] \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\frac{1-1-i}{1+i}}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \left(\frac{i \cdot V_p}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \left[(1+i)^{-(n-t+1)}\right] \cdot \left[(1+i)^{-n} - 1\right] \right) \div \left(\frac{-i}{1+i} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i) \cdot (1+i)^{-(n-t+1)} \cdot \left[(1+i)^{-n} - 1\right]}{-i \cdot \left[1-(1+i)^{-n}\right]}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^{-(n-t)} \cdot \left[(1+i)^{-n} - 1\right]}{i \cdot \left[(1+i)^{-n} - 1\right]}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = V_p \cdot (1+i)^{-(n-t)}$$

Como se quer a soma de todas as amortizações, tem-se que $t = k + n$. Logo:

$$\sum_{t=0}^{k+n} a_t = V_p \cdot (1+i)^{-(n-k-n)}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} a_t = V_p \cdot (1+i)^k$$

5.2.2.4. Saldo Devedor

Durante o período de carência, o saldo devedor é capitalizado segundo a taxa de juros cobrada, segundo um progressão geométrica de razão $1+i$. Logo:

$$P_t = V_p \cdot (1+i)^t$$

para $t = 0, \ldots, k$.

Passado o período de carência, o saldo devedor é obtido conforme o mesmo raciocínio utilizado se o empréstimo fosse sem carência. Tem-se:

$$P_t = A \cdot \frac{(1+i)^{n-(t-k)} - 1}{(1+i)^{n-(t-k)} \cdot i}$$

$$\Rightarrow P_t = A \cdot \frac{(1+i)^{n-t+k} - 1}{(1+i)^{n-t+k} \cdot i}$$

$$\Rightarrow P_t = A \cdot \frac{[1-(1+i)^{-(n-t+k)}]}{i}$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{V_p \cdot (1+i)^k \cdot i}{1-(1+i)^{-n}} \cdot \frac{[1-(1+i)^{-(n-t+k)}]}{i}$$

$$\Rightarrow P_t = \frac{V_p \cdot (1+i)^k}{1-(1+i)^{-n}} \cdot [1-(1+i)^{-(n-t+k)}]$$

para $t = k+1, \ldots, k+n$.

Exemplo: (utilizaremos o mesmo exemplo que no SAC)

A empresa Guerra & Chico Ltda solicita ao Banco Alfa S.A. um empréstimo de R$ 10.000,00, entregue no ato da assinatura do contrato. Sabendo-se que o banco cobra uma taxa de 10% aa, que foi concedido um período de carência de 3 anos e que o empréstimo será amortizado em 5 parcelas anuais, pelo SF, com juros capitalizados e acrescidos ao saldo devedor, construir a planilha do empréstimo.

Resolução:

Dados:

V_p=10.000,00;

i=10% aa = 0,1 aa;

k = 3 anos de carência;

$n = 5$ parcelas de amortização;

Sistema de amortização utilizado = SF, com juros capitalizados.

Neste exemplo, ter-se-á que analisar os valores durante e depois do período de carência. Assim, o período t será de 0 a $k+n$, ou seja, de 0 a 8.

No período da carência, não são pagas prestações. Tem-se:

$$A_t = 0.$$

Assim, :

$$A_1 = 0;$$
$$A_2 = 0;$$
$$A_3 = 0.$$

Passado o período de carência, as prestações são constantes e obtidas da seguinte maneira:

$$A_t = \frac{V_p \cdot i \cdot (1+i)^k}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{10.000 \cdot 0{,}1 \cdot (1+0{,}1)^3}{1-(1+0{,}1)^{-5}} = \frac{1.000 \cdot 1{,}331}{0{,}379078676} = 3.511{,}14$$

Assim, as prestações são iguais a:

$$A_4 = 3.511{,}14;$$
$$A_5 = 3.511{,}14;$$
$$A_6 = 3.511{,}14;$$
$$A_7 = 3.511{,}14;$$
$$A_8 = 3.511{,}14.$$

A soma das prestações nessa operação financeira é dada por:

$$\sum_{t=0}^{k+n} A_t = \frac{i \cdot V_p \cdot (1+i)^k \cdot n}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = \frac{0{,}1 \cdot 10.000 \cdot (1+0{,}1)^3 \cdot 5}{1-(1+0{,}1)^{-5}}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = \frac{5.000 \cdot 1{,}331}{1-0{,}620921323}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = \frac{6655}{0{,}379078676}$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} A_t = 17.555{,}72.$$

Não ocorre pagamento de juros durante a carência. Logo:

$$j_t = 0.$$

e assim, :

$$j_1 = 0;$$
$$j_2 = 0;$$
$$j_3 = 0.$$

Utilizando a fórmula $j_t = A_t \cdot [1-(1+i)^{-(n-t+k+1)}]$, obtêm-se os juros durante a amortização da dívida.

Juros do quarto ano:

$$j_4 = 3.511{,}14 \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-4+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot [1-(1{,}1)^{-5}] = 1.331{,}00$$

Juros do quinto ano:

$$j_5 = 3.511{,}14 \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-5+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot [1-(1{,}1)^{-4}] = 1.112{,}98$$

Juros do sexto ano:

$$j_6 = 3.511{,}14 \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-6+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot [1-(1{,}1)^{-3}] = 873{,}17$$

Juros do sétimo ano:

$$j_7 = 3.511{,}14 \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-7+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot [1-(1{,}1)^{-2}] = 609{,}37$$

Juros do oitavo ano:

$$j_8 = 3.511{,}14 \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-8+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot [1-(1{,}1)^{-1}] = 319{,}19.$$

Calcula-se a soma dos juros desta operação financeira, por:

$$\sum_{t=0}^{k+n} j_t = V_p \cdot (1+i)^k \cdot \left[\frac{i \cdot n}{1-(1+i)^{-n}} - 1\right]$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 10.000 \cdot (1+0{,}1)^3 \cdot \left[\frac{0{,}1 \cdot 5}{1-(1+0{,}1)^{-5}} - 1\right]$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 10.000 \cdot 1{,}331 \cdot \left[\frac{0{,}5}{1-0{,}620921323} - 1\right]$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 13.310 \cdot [1{,}318987404 - 1]$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 13.310 \cdot [0{,}318987404]$$
$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{k+n} j_t = 4.245{,}72.$$

Durante o período de carência não ocorre o pagamento das parcelas de amortização.

Logo:

$$a_1 = 0;$$
$$a_2 = 0;$$
$$a_3 = 0.$$

As parcelas de amortização são obtidas pela fórmula $a_t = A_t \cdot [(1+i)^{-(n-t-k+1)}]$.

Tem-se:

Amortização do quarto ano:

$$a_4 = 3.511{,}14 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-4+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot (1{,}1)^{-5} = 2.180{,}14.$$

Amortização do quinto ano:

$$a_5 = 3.511{,}14 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-5+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot (1{,}1)^{-4} = 2.398{,}16.$$

Amortização do sexto ano:

$$a_6 = 3.511{,}14 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-6+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot (1{,}1)^{-3} = 2.637{,}97.$$

Amortização do sétimo ano:

$$a_7 = 3.511{,}14 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-7+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot (1{,}1)^{-2} = 2.901{,}77.$$

Amortização do oitavo ano:

$$a_8 = 3.511{,}14 \cdot [(1+0{,}1)^{-(5-8+3+1)}] = 3.511{,}14 \cdot (1{,}1)^{-1} = 3.191{,}94.$$

A soma das parcelas de amortização é igual ao valor do empréstimo, acrescido os juros capitalizados.

Durante o período de carência, o saldo devedor é capitalizado conforme a taxa de juros cobrada. Tem-se:

Saldo devedor no primeiro ano: $P_1 = 10.000 \cdot (1+0{,}1) = 10.000 \cdot 1{,}1 = 11.000{,}00$.

Saldo devedor no segundo ano: $P_2 = 10.000 \cdot (1+0{,}1)^2 = 10.000 \cdot 1{,}21 = 12.100{,}00$.

Saldo devedor no terceiro ano: $P_3 = 10.000 \cdot (1+0{,}1)^3 = 10.000 \cdot 1{,}331 = 13.310{,}00$.

O saldo devedor de um período após a carência é obtido pela diferença entre o saldo devedor e a amortização do período anterior. Utilizando-se da fórmula $P_t = \dfrac{V_p \cdot (1+i)^k}{1-(1+i)^{-n}} \cdot [1-(1+i)^{-(n-t+k)}]$, tem-se:

Saldo devedor no quarto ano:

$$P_4 = \frac{10.000 \cdot (1+0{,}1)^3}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-4+3)}] = 35.111{,}44 \cdot [1-(1{,}1)^{-4}] = 11.129{,}85.$$

Saldo devedor no quinto ano:

$$P_5 = \frac{10.000 \cdot (1+0{,}1)^3}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-5+3)}] = 35.111{,}44 \cdot [1-(1{,}1)^{-3}] = 8.731{,}70.$$

Saldo devedor no sexto ano:

$$P_6 = \frac{10.000 \cdot (1+0{,}1)^3}{1-(1+0{,}1)^{-5}} \cdot [1-(1+0{,}1)^{-(5-6+3)}] = 35.111{,}44 \cdot [1-(1{,}1)^{-2}] = 6.093{,}72.$$

Saldo devedor no sétimo ano:

$$P_7 = \frac{10.000 \cdot (1+0,1)^3}{1-(1+0,1)^{-5}} \cdot [1-(1+0,1)^{-(5-7+3)}] = 35.111,44 \cdot [1-(1,1)^{-1}] = 3.191,95.$$

Saldo devedor no oitavo ano:

$$P_8 = \frac{10.000 \cdot (1+0,1)^3}{1-(1+0,1)^{-5}} \cdot [1-(1+0,1)^{-(5-8+3)}] = 35.111,44 \cdot [1-(1,1)^0] = 0.$$

A partir dos dados acima obtidos, podemos construir a seguinte planilha da operação de crédito:

Período (t)	Saldo Devedor (P)	Amortização (a)	Juro (j)	Prestação (A)
0	10.000,00	-	-	-
1	11.000,00	-	-	-
2	12.100,00	-	-	-
3	13.310,00	-	-	-
4	11.129,85	2.180,14	1.331,00	3.511,14
5	8.731,70	2.398,16	1112,98	3.511,14
6	6.093,72	2.637,97	873,17	3.511,14
7	3.191,96	2.901,77	609,37	3.511,14
8	-	3.191,96	319,19	3.511,16
Total	-	13.310,00	4.245,71	17.555,72

Nota: Fez-se um acerto no último período.

CONCLUSÃO

Ao término do presente trabalho, pode-se chegar a idéia de que, para efetuar certas operações financeiras, precisa-se de técnicas mais práticas e objetivas.

Buscou-se tratar de uma forma clara e simples, a falta de recursos para a operação de um empréstimo que abordava carência, apresentando as fórmulas matemáticas que estariam suprindo essa necessidade.

Com o auxílio do método utilizado na elaboração de planilhas para sistemas de amortização com ou sem carência, encontradas nos livros de Matemática Financeira atuais, pode-se, então, chegar a dedução das fórmulas matemáticas para os sistemas de amortização com carência.

Aproveitou-se, também, para que fosse introduzida a capitalização dos juros sobre o valor do empréstimo, e assim, deduzir, também, as fórmulas matemáticas com essa operação financeira.

Espera-se que essas fórmulas, deduzidas e demonstradas, possam ser de grande utilidade, não só para pessoas que se utilizam dessas operações financeiras, mas que sejam também aptas a serem apresentadas em cursos de Matemática Financeira, afim de auxiliar os alunos da referida disciplina.

Contudo, almeja-se que as fórmulas matemáticas para sistemas de amortização com carência sejam uma ferramenta que possa simplificar os cálculos financeiros e tragam soluções mais imediatas para problemas e situações que as envolvam.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARVALHO, Thales Melo de. *Matemática Comercial e Financeira*. São Paulo: Fename, 1980.

[2] FRANCISCO, Walter de. *Matemática Financeira*. São Paulo: Atlas, 1985.

[3] FORTUNA, Eduardo. *Mercado Financeiro – Produtos e Serviços*. 7. ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1995.

[4] GUERRA, Fernando. *Matemática Financeira através da HP-12C*. 1. ed. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1997.

[5] MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. *Matemática Financeira*. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1993.

[6] MORGADO, Augusto César de Oliveira; WAGNER, Eduardo; ZANI, Scheila Cristina. *Progressões e Matemática Financeira*. Rio de Janeiro: Solgraf Publi, 1999.

[7] VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. *Matemática Financeira*. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2000.

[8] SITE: http://www.cempem.fae.unicamp.br/lapemmec/integrantes/hpalunos/jeanpiton/edumat/historia_mat_fin/historia.html, disponível em 20/02/03.