UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Aplicações e Recreações em Trigθnθmetria

Eliane Aparecida Carlos Silva França

Monografia apresentada ao curso de Matemática para obtenção do grau em Licenciatura Plena de Matemática

Florianópolis
2001

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Aplicações e Recreações em Trigθnθmetria

Eliane Aparecida Carlos Silva França

Monografia apresentada ao curso de Matemática para obtenção do grau em Licenciatura Plena de Matemática

ORIENTADOR: Prof° Antônio Vladimir Martins

Florianópolis
2001

"A matemática de fato é o método por excelência para investigação,
representação e domínio da natureza, pois nos campos em que ela
é eficaz, é tudo o que temos, se não é a própria realizade,
é aquilo que mais perto da realidade podemos obter."

(Morris Kline)

Aos meus pais que tanto me ajudaram
Durante essa longa caminhada...

Agradecimentos

Aos meus pais, mais do que todos, porque me ensinaram a lutar por meus objetivos e porque mesmo distantes, sempre estavam presentes, dando-me apoio, incentivando-me e Principalmente, orando por mim; **o meu eterno amor e gratidão...**

Ao meu marido Vanderlei, pela paciência e compreensão que teve durante todo o curso; **o meu amor...**

Ao meu filho Jonayhan, por ser o meu maior estímulo de seguir em frente e por ser a minha razão de viver; **o meu amor...**

Aos meus irmãos e parentes mais próximos, pelo orgulho que sempre tiveram de mim; **a minha gratidão**

Às minhas grandes amigas: Cláudia, Kátia, Samanta e Simone, por sempre estarem ao meu lado e por tornarem as dificuldades Passageiras; **um grande abraço...**

À minha grande companheira acadêmica: Sabrina, pela sua amizade incondicional; **a minha eterna amizade...**

A todos os professores, que contribuíram para a minha formação profissional e **à secretária Silvia do Curso de Matemática**, por sua competência profissional e por seu carisma; **o meu agradecimento**...

Ao meu professor orientador Antônio Vladimir, por suas orientações valiosas, por sua perseverança, apoio e confiança, por seu bom humor, sinceridade e pontualidade, por sua dedicação e entusiasmo; **a minha gratidão...** por sua competência profissional; **o meu elogio...** e principalmente pela valorização que deu a este trabalho, **o meu muito obrigado...**

Em especial à DEUS, pela luz que sempre iluminou o meu caminho...

Índice

Introdução

"A Matemática está presente em diversas atividades do cotidiano do homem", essa é a explicação que o professor dá aos alunos para estimular o aprendizado matemático.

A dificuldade na matemática existe e é bem real, talvez por isso muitos alunos investigam e questionam se realmente precisam saber tudo aquilo que os professores ensinam.

E uma das dificuldades na Matemática é a *Trigonometria.* Esse assunto é tratado muito tecnicamente nas salas de aula. Decora-se tabelinhas, fórmulas, identidades trigonométricas, etc... , mas com qual objetivo?

Baseando-se nessas preocupações, as quais foram também da autora deste trabalho, o presente trabalho de conclusão de curso traz uma série de problemas práticos e outros recreativos, envolvendo Trigonometria. Alguns destes, são à nível de Ensino Médio e outros à nível do Ensino Superior, visto que essas preocupações estendem-se também aos alunos universitários.

O desejo é mostrar um pouco da Trigonometria Prática e Recreativa, e dessa maneira estimular e fortalecer o aprendizado matemático.

Um pouco de história...

1 - Alguns Tópicos da história da Trigonometria

Nos últimos anos percebe-se a preocupação e o empenho em valorizar a história da matemática como recurso didático.

A matemática desde os seus primórdios, entrelaça-se tão intimamente com a história da civilização, sendo mesmo uma das alavancas principais do progresso humano, tanto que sua história é não só altamente motivadora em termos de ensino como também muito rica em aspectos culturais.

Como disse o historiador Morris Kline: "A Matemática de fato é o método por excelência para investigação, representação e domínio da natureza, pois nos campos em que ela é eficaz, é tudo o que temos, se não é a própria realidade, é aquilo que mais perto da realidade podemos obter".

A Trigonometria foi uma criação da matemática grega. Ela surgiu devido às necessidades da Astronomia, a fim de se prever as efemérides celestes, para calcular o tempo e para ser utilizada na Navegação e na Geografia.

A história da Trigonometria mostra em seu interior o crescimento embrionário de três partes clássicas da matemática: Álgebra, Análise e Geometria. Seus estudos se concentravam na Trigonometria Esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera.

1.1 - Contribuições de alguns matemáticos...

Euclides (± 300 a.C.) – Em seu livro "Fenômenos", começou a estudar Geometria Esférica.

Aristarco de Samos (± 300 a.C.) – Deduziu várias coisas sobre a distância do Sol e da Lua, entre elas:

> *"A distancia da terra ao Sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da Terra à Lua".*

Na demonstração desse fato, vemos pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo.

Hiparco de Nicéia (± 120 a.C.) – Pode-se dizer que foi o fundador da Trigonometria. Foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o acaso de várias estrelas usando para isso uma tabela de cordas, por ele calculada. A trigonometria que utilizava era baseada em uma única função, a corda de um arco de círculo arbitrário. É provável que a divisão do círculo em 360° tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco.

Menelau de Alexandria (± 100 a.C.) – Já apresenta uma Trigonometria bem desenvolvida, em seu livro "Geometria Esférica". Neste, Menelau demonstra vários teoremas sobre triângulos esféricos. O Teorema de Menelau foi importante pois tornou possível a passagem do plano para a esfera.

Teodósio (± 20 a.C.) – Compilou o que os gregos sabiam (conheciam) sobre a "Trigonometria", em seu livro "Sobre a esfera".

Ptolomeu (± 150 d.C.) – Citou vários resultados de Hiparco sobre a Trigonometria e Astronomia. Deve-se a ele o nosso conhecimento desses fatos. Seu principal trabalho foi "Almagesto", onde traz uma tabela de cordas. Deduziu, o que em notação moderna e usando funções seno e cosseno, é a expressão
$sen\ (a \pm b)$. Demonstrou também que $sen^2 a + cos^2 a = 1$, onde a é um ângulo agudo.
A exposição da Trigonometria dada por Ptolomeu foi padrão até o Renascimento.

Nasir Eddin – Árabe, sistematizou a Lei dos Senos para triângulos.

Al-Biruni (? , 476) – Hindu, assim como os outros hindus, abandonou as tabelas de corda e adotou as tabelas de seno. Passou a trabalhar com a corda AB do arco $\overset{\frown}{AB}$, em um círculo de raio 3438 (usando $\pi = 3{,}14$). Com a mudança de raio, as tabelas de Ptolomeu não mais puderam ser utilizadas, o que foi necessário refazê-las..

Fibonacci (1180 – 1250) – Em seu livro "Prática da Geometria" (1220), propôs a utilização da Trigonometria em Cartografia e em Topografia.

George Peurbach (1423 – 1476) – Do Vietnã, traduziu o Almagesto e começou a calcular tabelas de senos mais precisas, exigidas pelas aplicações.

João Regiomontano (1436 – 1476) – Foi aluno de George Peurbach, o qual conhecia os trabalhos sobre Trigonometria de Nasir Eddin e a partir deles, organizou a Trigonometria como uma "parte" da Matemática independente da Astronomia. Escreveu em 1464 "De Triangulus", onde estuda cuidadosamente a resolução de triângulos , usando a Trigonometria do triângulo retângulo. Demonstra também a Lei dos Senos. A fim de evitar o uso de frações e de decimais, calculou duas tabelas de seno: uma usando raio de 600.000 unidades e a outra de 1.000.000 de unidades. Calculou também tabelas de tangentes.

Tycho Brahe (1546 – 1601) – Preocupado com a precisão das observações astronômicas, construiu instrumentos de observações.

Bartolomeu Petisco (1561 – 1613) – É a ele que se deve a palavra Trigonometria, que quer dizer: "medida dos ângulos de um triângulo".

Roberval (1602 – 1675) – A curva seno foi introduzida em seus estudos sobre a ciclóide. No livro "Mecânica de Wallis" (1616 – 1703), publicado em 1670, vemos um gráfico de dois períodos da função seno (é o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica). Usando o método dos indivisíveis, Roberval mostrou que:

$$\int_a^b \operatorname{sen} x dx = \cos b - \cos a$$

François Vieta – Françês, sistematizou o estudo da Trigonometria Esférica que era até então um amontoado de fórmulas desconexas e mostrou que:

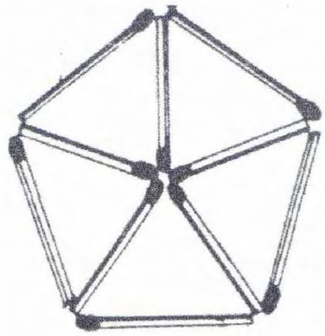
$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2.\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2 - *Palitos de Fósforo*

2.1 - Apresentação

Na RPM 21(1992), na sessão "Cartas do Leitor", o professor Hideo Kumayama, de São Bernardo do Campo – SP, diz que encontrou na Revista Globo Ciência de 1991, uma versão do problema de construir 5 triângulos no plano, com 10 palitos de fósforo.

A solução apresentada foi:



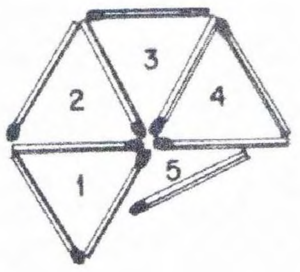
Estará certa tal solução ???

Referência Bibliográfica

KUMAYAMA, Hideo. *Revista do Professor de Matemática – número 21*. SBM. 1992

2.2 – *Solução*

Com palitos de mesmo comprimento e dispostos num mesmo plano, é fácil de verificar que a configuração dada é impossível de ser realizada.



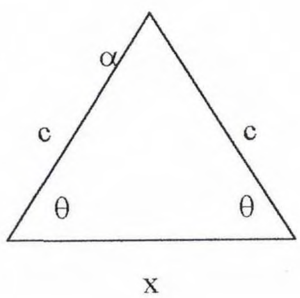
Uma explicação para isto é:

Os ângulos em torno do ponto central devem somar 360°. Como os palitos de fósforo têm o mesmo comprimento, então eles formam 5 triângulos eqüiláteros, ou seja, o ângulo em torno do ponto central do polígono formado é 5 x 60° = 300°. Desse modo o polígono não fecha.

Terá solução tal problema proposto?

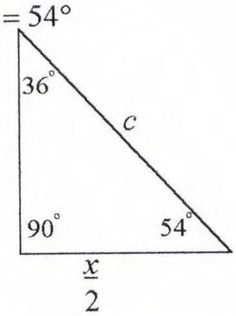
Temos duas opções para solucionar o problema:

1) Palitos com dois comprimentos diferentes.



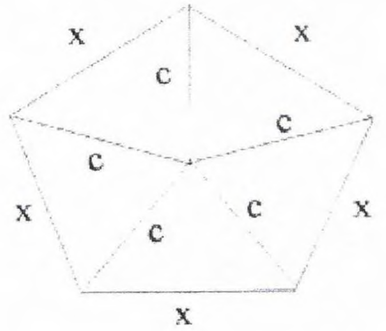
$$\alpha = \frac{360°}{5} \Rightarrow \alpha = 72°$$

$$\alpha = 2\theta = 180° \Rightarrow 72° + 2\theta = 180° \Rightarrow \theta = 54°$$

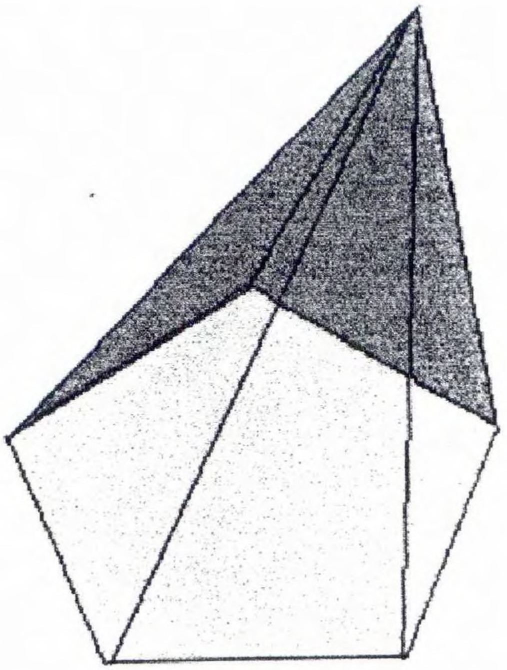


$$\operatorname{sen} 36° = \frac{\frac{x}{2}}{c} \Rightarrow c.\operatorname{sen} 36° = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2.c.\operatorname{sen} 36°$$

Desse modo, se os 5 palitos que saem do centro tivessem comprimento c e os outros 5 palitos da fronteira tivessem comprimento $2c$sen36°, a figura fecharia.



2) Deslocando o ponto central para cima do plano, de modo que os 5 triângulos sejam as faces laterais de uma pirâmide.



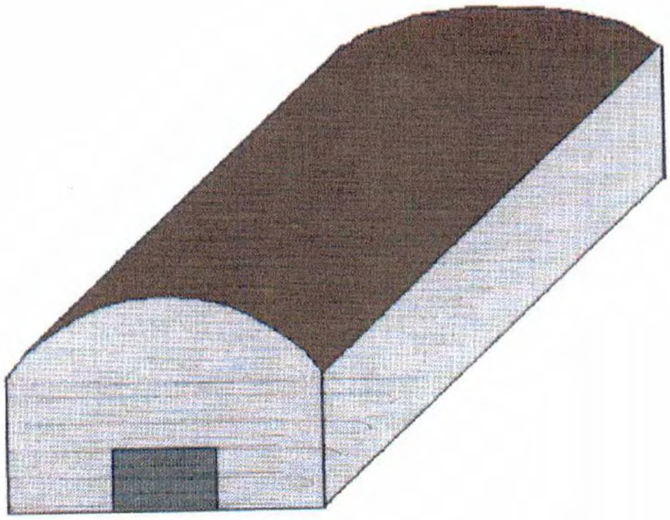
3 – A área do telhado

3.1 – Apresentação

Um construtor pretende construir um grande depósito, de forma retangular, com as dimensões assinaladas na figura.

A cobertura, em forma de arco de circunferência, deve Ter 6m de altura máxima, no centro do vão.

A questão e: Quanto de telha o construtor deve comprar para cobrir todo o telhado?



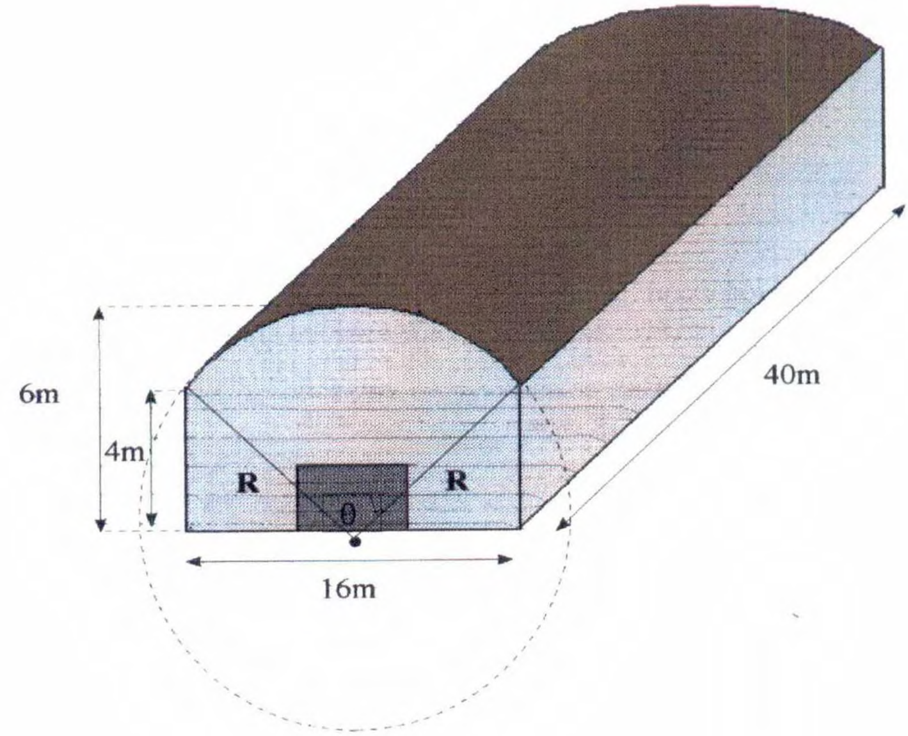
Referência Bibliográfica

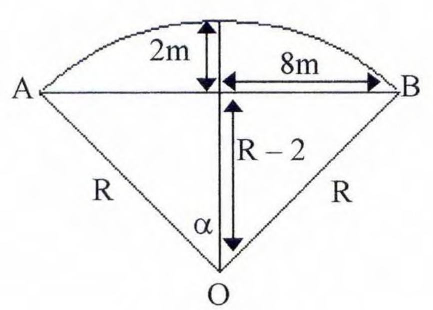
IMENES, Luiz Marcio.. *Revista do Professor de Matemática – número 13.* SBM. 1988

3.2 – Solução

A área do telhado é igual à área de um retângulo de lados x e y, onde x é o comprimento do arco menor de circunferência $\overset{\frown}{AB}$ e y é o comprimento do depósito (y = 40m).

Determinação de x:





Sabe-se da Geometria que $x = \theta.R$ (θ medido em radianos). Precisamos então descobrir quem são θ e R Logo:

$R^2 = 8^2 + (R - 2)^2$ (Pitágoras)

$R^2 = 64 + R^2 - 4.R + 4 \Rightarrow 4R = 68 \Rightarrow R = 17m$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{R} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{17} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha \cong 0{,}4705 \Rightarrow \alpha \cong \operatorname{arcsen} 0{,}4705 \Rightarrow \alpha \cong 28°$$

$R^2 = 8^2 + (R-2)^2$ (Pitágoras)
$R^2 = 64 + R^2 - 4.R + 4 \Rightarrow 4R = 68 \Rightarrow R = 17m$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{R} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{17} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha \cong 0{,}4705 \Rightarrow \alpha \cong \operatorname{arcsen} 0{,}4705 \Rightarrow \alpha \cong 28°$$

Como $\alpha \cong 28°$, então $\theta = 56°$. Fazendo a transformação necessária, obtemos:

πrad - 180°
θrad - 56°

$$\theta = \frac{\pi.56}{180}rad \Rightarrow \theta = \frac{14\pi rad}{45}$$
Desde que :
$$x = \theta R, x = \frac{14\pi}{45}.17 \cong 16{,}6m$$
Então a área do telhado é:
$A = x.y \cong 16{,}6(m).40(m) = 664m^2$

Sabendo a área do telhado e o tamanho (área) de cada telha, basta fazer uma "Regra de Três Simples" e calcular a quantidade de telhas necessária a ser utilizada:

$$\begin{bmatrix} 1telha - A_{telha} \\ ntelhas - A_{telhado} \end{bmatrix}$$

onde: A_{telha} : Área de cada telha
$A_{telhado}$: Área do telhado

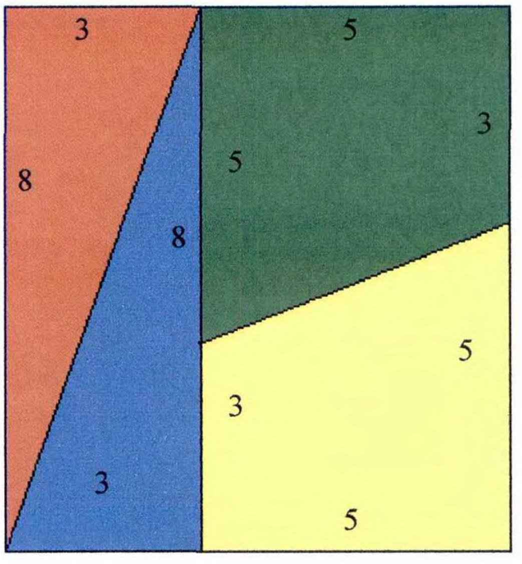
$$n = \frac{A_{telhado}}{A_{telha}}$$

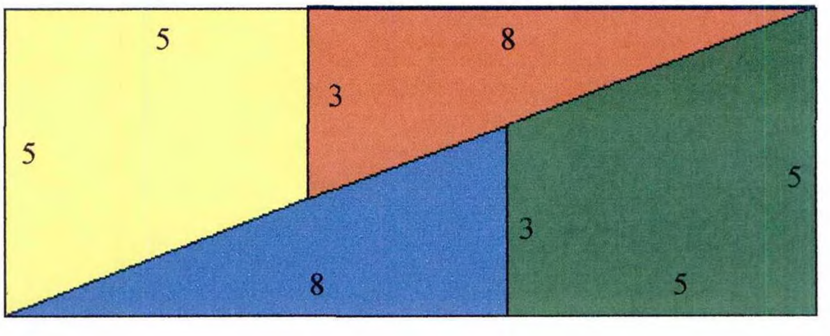
Portanto:
A quantidade de telhas necessárias para cobrir o telhado é igual a $664m^2$ (Área do telhado), dividido pela área de cada telha.

4 – *“64 = 65”?*

4.1 – Apresentação

O Quadrado cujo lado mede 8(unidades) está subdividido em quatro polígonos (dois trapézios congruentes e dois triângulos congruentes), conforme mostra a figura abaixo. Vamos recortá-lo (separar os quatro polígonos) e em seguida reagrupá-los de tal maneira que formem um retângulo.





Ótimo! Ficou perfeito, ou quase...
Notamos que o retângulo é de 5x13 o qual corresponde a uma área de 65; já o quadrado é 8x8 o qual corresponde a uma área de 64.
Onde estará o erro?

Referência Bibliográfica

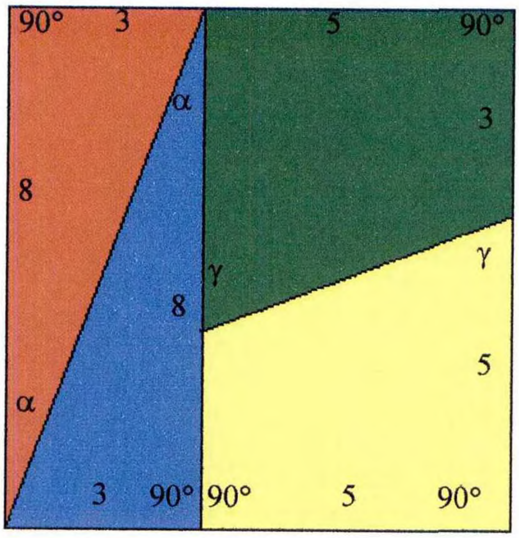
BALL, W. W. Rouse; COXESTER, H. S. *Mathematical Recreations and Essays*. Dover Publications. INC, New York

PETERSON, John [a] ; HASHISAKI, Joseph. *Teoria de La Aritmética*. Centro Regional de Ayuda Tecnico, Mexico, 1969.

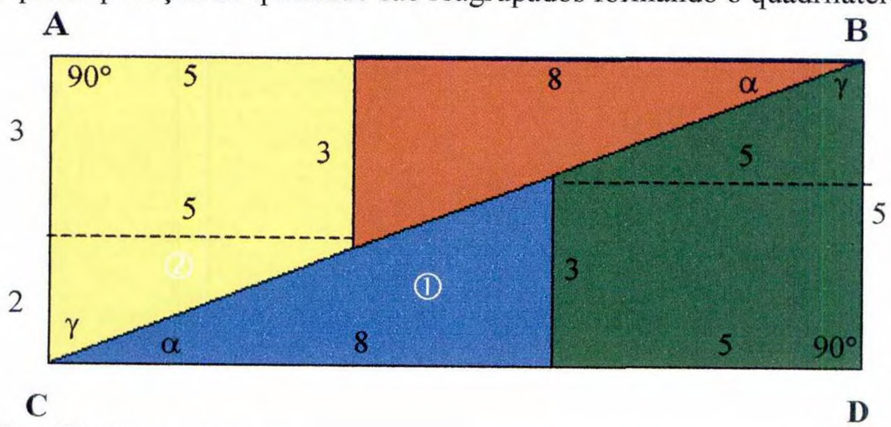
ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A. *Handbook of Mathematical*. Dover Publications, INC, NY, 1965.

4.2 – Solução

Relacionando os ângulos, temos:



Inicialmente, os quatro pedaços do quadrado são reagrupados formando o quadrilátero ABCD da figura abaixo.



Dos triângulos ① e ②, tiramos que:

$$tg\alpha = \frac{3}{8} \Rightarrow \alpha = arctg\frac{3}{8}$$

$$\cot g\gamma = \frac{2}{5} \Rightarrow \gamma = arc\cot g\frac{2}{5}$$

No livro de fórmulas matemáticas "Handbook of Mathematical Functions" de Milton Abramowitz e outros, pág 80, encontramos a seguinte fórmula:

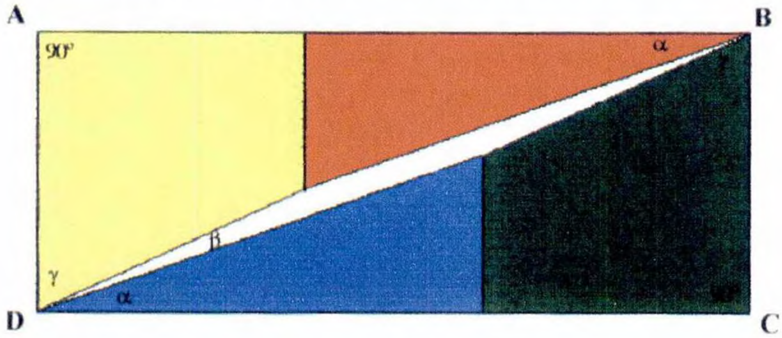
$$\boxed{arctg(a) = arc\cot g(b) = arctg\left(\frac{b.a+1}{b-a}\right)}$$

Aplicando-a temos:

$$\alpha + \gamma = arctg\left(\frac{3}{8}\right) + arc\cot g\left(\frac{2}{5}\right) = arctg\left(\frac{\frac{2}{5}.\frac{3}{8}+1}{\frac{2}{5}-\frac{3}{8}}\right) = arctg\left(\frac{\frac{46}{40}}{\frac{1}{40}}\right) = arctg46.(*)$$

E $arctg\,46 \cong 1{,}54906 \cong 88{,}75° \neq 90°$.

Dessa maneira verificamos que existe um ângulo β, entre α e γ.



O quadrilátero ABCD tem os ângulos A e C iguais a 90° e B e D congruentes.
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, portanto:

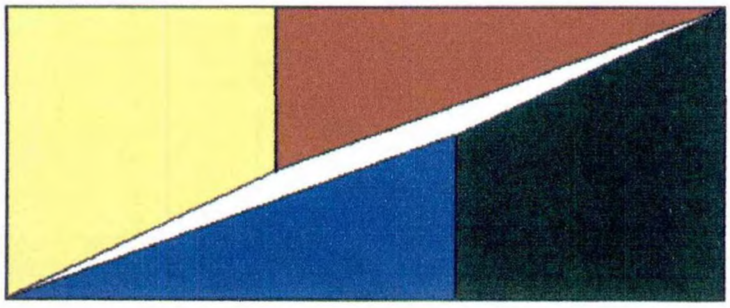
$$90° + (\alpha + \beta + \gamma) + 90° + (\alpha + \beta + \gamma) = 360° \Rightarrow 180° + 2.(\alpha + \beta + \gamma) = 360° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{360° - 180°}{2} \Rightarrow \alpha + \gamma = 90° - \beta \underset{(*)}{\Rightarrow} arctg46 = 90° - \beta$$

aplicando tg nos dois lados da igualdade temos:

$$46 = tg(90° - \beta) \Rightarrow \cot g\beta \Rightarrow 46 = \frac{1}{tg\beta} \Rightarrow tg\beta = \frac{1}{46} \Rightarrow \beta = arctg\left(\frac{1}{46}\right) \cong 0{,}021735706 \cong 1{,}25° \neq 0°$$

Finalmente, observamos que as figuras não se encaixam perfeitamente, pois formam um paralelogramo entre elas com 1(uma) unidade de área.



NOTA: As dimensões do retângulo e do quadrado dados acima, estão relacionadas por:

$$5x13 - 8^2 = 1$$

Existem outros quadrados e retângulos que também podem gerar este mesmo tipo de paradoxo.
As relações são:

$13x34 - 21^2 = 1$
$34x89 - 55^2 = 1$
$5^2 - 3x8 = 1$
$13^2 - 8x21 = 1$

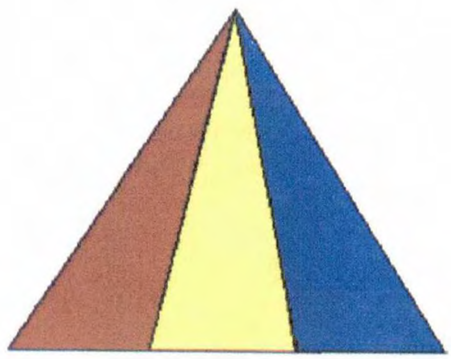
Essa relação tem, conexão com os famosos ***Números de Fibonacci:***

1 1 2 3 5 8 13 21 34 ...

5.1 – Apresentação

Dividindo o lado de um triângulo em 03 partes iguais, queremos descobrir se o ângulo oposto a este lado fica dividido em 03 ângulos iguais, isto é, se cada um equivale a 20°.

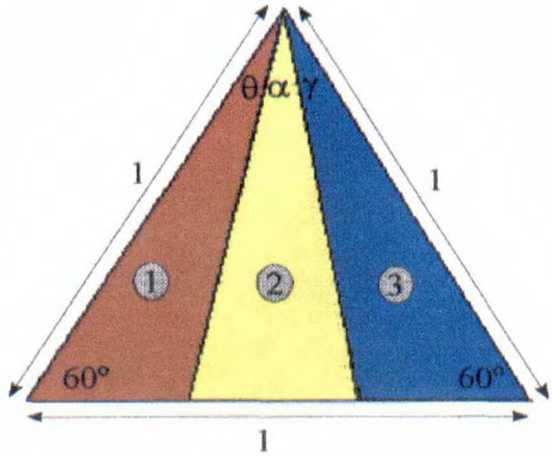
Vamos descobrir ?



Referência Bibliográfica

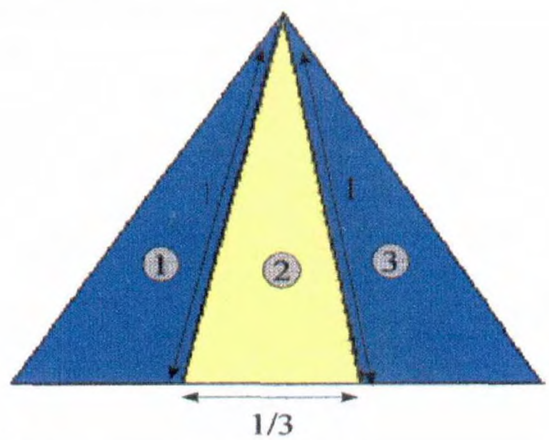
MARSDEN, J. ; WEINSTEIN, A. *Calculus I.* 2nd, Springer – Verlage, New York, 1985

5.2 – Solução:



Sem perda de generalidade, podemos considerar o lado do triângulo igual a uma unidade de comprimento.

A partir da trisecção do lado, obtivemos três novos triângulos. Os triângulos ① e ③, são congruentes pelo caso LAL (1 unidade; 60°; 1/3 unidade).



Dessa maneira θ deve ser igual a γ.

Da Trigonometria sabemos que são válidas as seguintes relações:

Lei dos Senos:

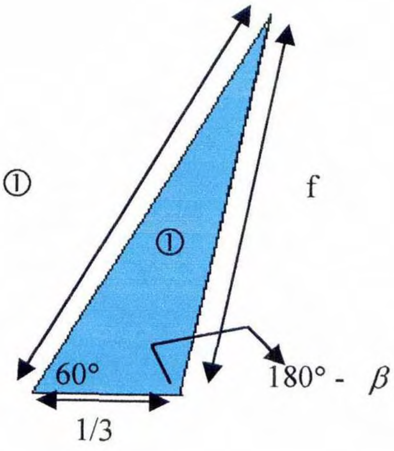
$$\frac{a}{\operatorname{sen} a} = \frac{b}{\operatorname{sen} b} = \frac{c}{\operatorname{sen} c}$$

Lei dos Cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$$

Analisando separadamente cada um dos três triângulos, temos:

TRIÂNGULO 1:



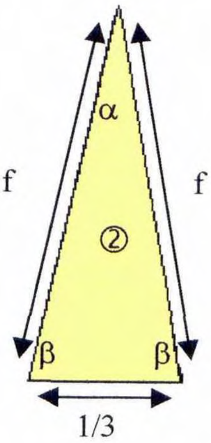
$$\frac{1}{\operatorname{sen}(180° - \beta)} = \frac{f}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{1/3}{\operatorname{sen}\theta} \quad \text{(relação 1)}$$

$$1^2 = f^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2.f.\frac{1}{3}.\cos(180^2 - \beta)$$

$$1 = 1^2 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}.1.\cos(180° - \beta) = 0$$

$$1^2 - \frac{2}{3}.1\cos(180° - \beta) - \frac{8}{9} = 0 \quad \text{(relação 2)}$$

TRIÂNGULO 2:



$$\frac{f}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{f}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{1/3}{\operatorname{sen}\alpha}$$

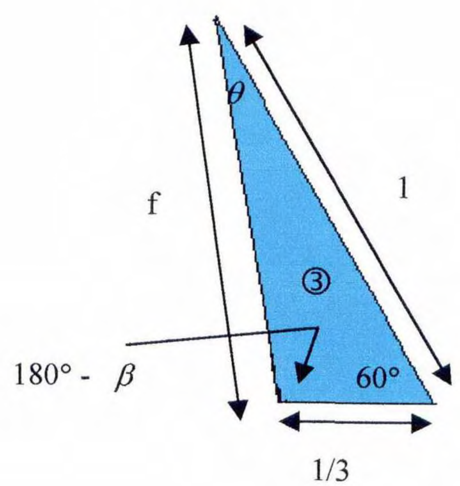
$$\frac{f}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{1/3}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \text{(relação 3)}$$

$$f^2 = f^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2.f.\frac{1}{3}.\cos\beta$$

$$\frac{2}{3}.f\cos\beta - \frac{1}{9} = 0$$

$$\frac{2}{3}.f.\cos\beta - \frac{1}{9} = 0 \qquad \text{(relação 4)}$$

TRIÂNGULO 3



$$\frac{f}{\operatorname{sen}60°} = \frac{1}{\operatorname{sen}(180° - \beta)} = \frac{1/3}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \text{relação 5}$$

$$f^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2.1.\frac{1}{3}.\cos 60°$$

$$f^2 = 1 + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}.\frac{1}{2}$$

$$f^2 = 1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$$

$$f^2 = \frac{7}{9}$$

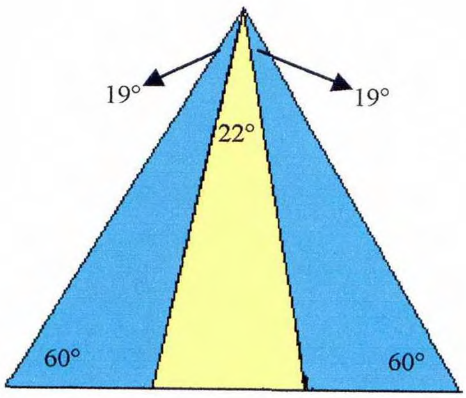
$f = \frac{\sqrt{7}}{3}$ relação 6

Portanto das relações (5) e (6) obtemos:

$$\frac{f}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{1/3}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}/3}{\sqrt{3}/2} = \frac{1/3}{\operatorname{sen}\theta} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}\operatorname{sen}\theta}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \theta \cong 19^\circ$$

Desde que:
$\gamma = \theta$ e $\theta + \gamma + \alpha = 60^\circ$,
concluímos que
$19^\circ + 19^\circ + \alpha \cong 60^\circ$
e portanto:
$\alpha \cong 22^\circ$

Finalmente:



Surpresos? Pois é, triseccionando o lado de um triângulo equilátero, não significa que o ângulo oposto a esse lado dividir-se-á igualmente.

6 – Corte e Costura

6.1 – Apresentação

O objetivo do problema a seguir é mostrar que o gráfico do cosseno pode ser usado para fazer precisamente o molde de uma manga de camisa.

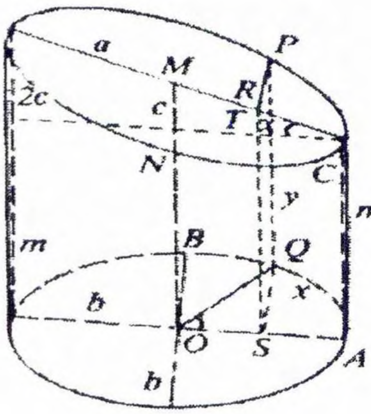
Referência Bibliográfica

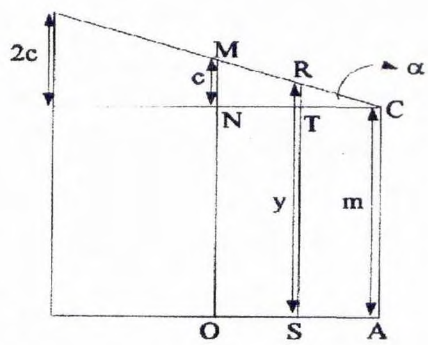
ROSA NETO, Ernesto. *Revista do Professor de Matemática – número 09.* SBM, 1986

6.2 – Solução

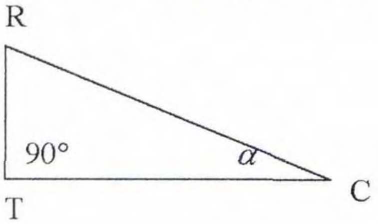
Uma manga é um tronco de cilindro, dependendo da grife. Vamos fazer o corte em função de b, a e m, onde:

$$\begin{cases} \text{m - comprimento da manga} \\ \text{b - raio da circunferência da base da manga} \end{cases}$$





Para cada ponto P da figura, vamos calcular a altura de y = PQ em função do arco $\overset{\frown}{AQ}$ de medida x.
Para isto, calculemos TR em função de x:



Do triângulo CRT, tiramos que:

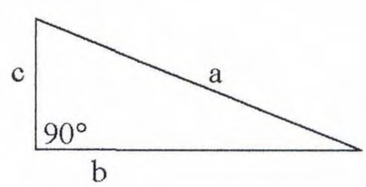
$$\cos\alpha = \frac{TC}{RC} = \frac{NC}{MC} = \frac{OA}{MC} = \frac{b}{a} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b}{a}$$

Sabemos que: $1 + tg^2\alpha = 1 + \dfrac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \dfrac{(1-\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = 1 + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2} = \dfrac{a^2}{b^2}$

Portanto: $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{b}{a} \\ tg^2\alpha = \dfrac{a^2}{b^2} - 1 \end{cases}$

Segue que:

$\dfrac{a^2}{b^2} - 1 = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2} = \dfrac{c^2}{b^2}$, *pois*



$a^2 = b^2 + c^2$

(Teorema de Pitágoras)

Ou seja, $tg^2\alpha = \dfrac{c^2}{b^2} \Rightarrow tg\alpha = \dfrac{c}{b}$

Também do triângulo CRT, tiramos que:

$$tg\alpha = \frac{TR}{TC} \Rightarrow TR = TC.tg\alpha = AStg\alpha = (OA - OS).tg\alpha$$

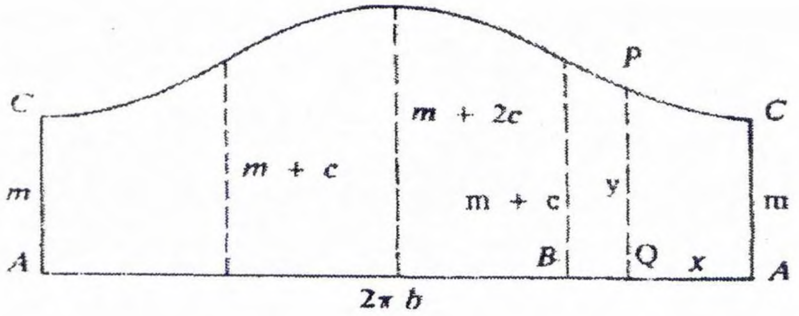
Observando o tronco de cilindro, tiramos que:

$$\begin{cases} OA = b \\ \cos x = \dfrac{OS}{OQ} = \dfrac{OS}{b} \Rightarrow OS = b.\cos x \end{cases}$$

$$TR = (OA - OS).tg\alpha = (b - b.\cos x).tg\alpha = (b - b.\cos x).\frac{c}{b} = c - c.\cos x = c.(1 - \cos x)$$

Logo: $y = RS = TR + TS = c.(1 - \cos x) + TS = c.(1 - \cos x) + m$

Finalmente: $\boxed{y = m + c.(1 - \cos x)}$

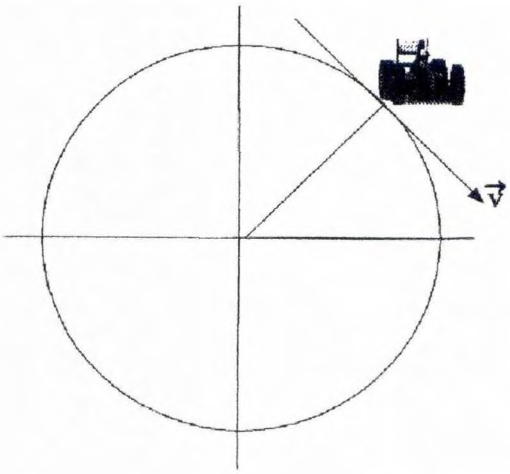


7 – Aceleração Centrípeta

7.1 – Apresentação

O objetivo do problema a seguir é mostrar que a aceleração centrípeta de uma partícula em movimento circular uniforme é dada por:

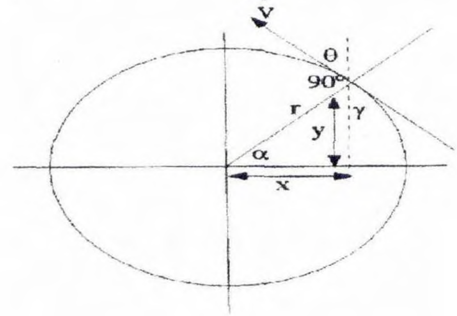
$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}}$$ sendo v a velocidade da partícula e r o raio do círculo



Referência Bibliográfica

NINIO, F. *American Jourscal Physic.* 61(11), Novembro, 1993

7.2 – Solução



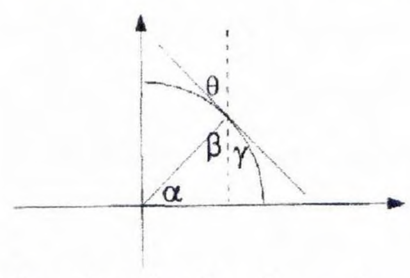
Tem-se que:

$\vec{r} = \vec{r}(t)$; vetor posição da partícula

r = x(t)i + y(t)j; partícula em movimento sobre o círculo.

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

o vetor $\vec{v}$ é tangente ao círculo e perpendicular à $\vec{r}$.



Relacionando os ângulos θ, γ, β, percebemos que:

1) $\theta = \gamma$, pois são ângulos opostos pelo vértice
2) $\alpha + \beta + 90° = 180°$
3) $\beta = 90° - \theta$

Das expressões 2) e 3), tiramos que:

$\alpha + (90° - \theta) + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = \theta$

$v_x < 0$

- Do triângulo ① da figura acima, obtemos:

$\cos\theta = \frac{x}{r} e \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$

- Do triângulo ②, obtemos:

$\cos\theta = \frac{v_y}{v} e \operatorname{sen}\theta = \frac{v_x}{v}$, onde $v = \left|\vec{v}\right|$

De $v_y = v.\cos\theta$ e $\cos\theta = \frac{x}{r}$, tiramos:

$$v_y = v.\frac{x}{r} = \frac{v}{r}.x$$

De $v_x = -v.\operatorname{sen}\theta$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$, tiramos

$$v_x = -v.\frac{y}{r} = -\frac{v}{r}.y$$

onde $\frac{v}{r}$ é constante (movimento uniforme)

Sabemos que:

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j}$$

$$\to a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{v_y}{r}\right) = -\frac{v}{r}.\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{r}.v_y = -\frac{v}{r}.v\cos\theta$$

Então: $a_x = -\frac{v^2}{r}.\cos\theta$

$$\to a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{v}{r}.x\right) = -\frac{v}{r}.\frac{dx}{dt} = \frac{v}{r}.v_x = -\frac{v}{r}.(-v\operatorname{sen}\theta)$$

Então $a_y = -\frac{v^2}{r}.\operatorname{sen}\theta$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}.\cos\theta, -\frac{v^2}{r}.\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{\left(-\frac{v^2}{r}.\cos\theta\right)^2 + \left(-\frac{v^2}{r}.\operatorname{sen}\theta\right)^2} = \sqrt{\frac{v^4}{r^2}.\cos^2\theta + \frac{v^4}{r^2}.\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{\frac{v^4}{r^2}.\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)} = \frac{v^2}{r}$$

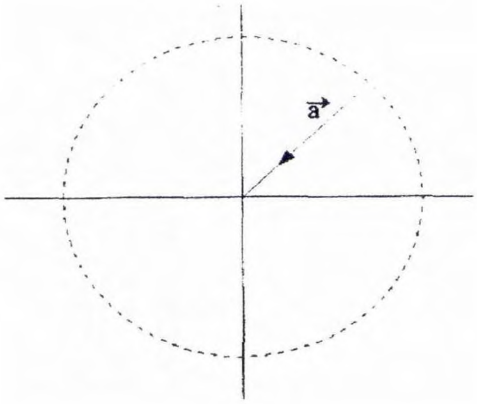
Ou seja, $a = \left|\vec{a}\right| = \frac{v^2}{r}$

- <u>**NOTA:**</u> Para $0 < \theta < 90°$ (partícula no I quadrante), $\cos\theta > 0$ e sen $\theta > 0$.

$a_x = -v^2.\cos\theta < 0$ e $a_y = -v^2.\operatorname{sen}\theta < 0$

Além disso:

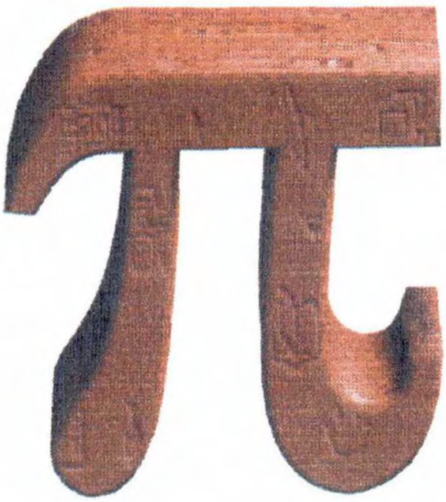
$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}.\cos\theta, -\frac{v^2}{r}.\operatorname{sen}\theta \right) = \left[-\frac{v^2}{r^2}.(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \right] = \left(-\frac{v^2}{r^2} \right)\vec{r}$, ou seja, $\vec{a}$ e $\vec{r}$ são paralelos.



8 – Aproximação de Machin para π

8.1 – Apresentação

Em 1706 John Machin (1680 - 1751) descobriu uma elegante fórmula para calcular π, com precisão de 100 casas decimais.



Sua descoberta resume-se em:

Referência Bibliográfica

PEITGEN, Heinz-Otto; JURGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar. *Fractals for the classroom.* Montclair, NCTM, New York, 1991

8.2 – Solução

Do Cálculo e da Trigonometria, tiramos que:

- $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$
- $tg(x+y) = \frac{tgx + tgy}{1 - tg.tgy}$
- $tg(x-y) = \frac{tgx - tgy}{1 + tgx.tgy}$

Seja β nas seguintes condições:

$0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ e $tg\beta = \frac{1}{5}$, ou seja, $\beta = arctg\frac{1}{5}$

Garantimos que existe β, pois tg: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow [0, +\infty)$ é sobrejetiva.

Segue-se:

$$tg2\beta = tg(\beta + \beta) = \frac{tg\beta + tg\beta}{1 - tg\beta.tg\beta} = \frac{2tg\beta}{1 - tg^2\beta}$$

De tg $\beta = \frac{1}{5}$, tem-se que:

$$tg2\beta = \frac{2.\left(\frac{1}{5}\right)}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

e,

$$tg4\beta = tg(2\beta + 2\beta) = \frac{2.tg2\beta}{1 - tg^2 2\beta}$$

De $tg2\beta = \frac{5}{12}$, tem-se que:

$$tg4\beta = \frac{2.\left(\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

Como $tg4\beta = \frac{120}{119} \cong 1{,}0084 \cong 1$ e $tg\frac{\pi}{4} = 1$, então $4\beta \cong \frac{\pi}{4}$

Logo tg $\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg(4\beta) - tg(\pi/4)}{1 + tg(4\beta).tg(\pi/4)} = \frac{tg(4\beta) - 1}{1 + tg(4\beta)}$

De $tg4\beta = \frac{120}{119}$, tem-se que:

$$tg\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\left(\frac{120}{119}\right) - 1}{1 + \left(\frac{120}{119}\right)} = \frac{\frac{1}{119}}{\frac{239}{119}} = \frac{1}{119}$$

Em outros termos:

$$4\beta - \frac{\pi}{4} = arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

Portanto:

$$\frac{\pi}{4} = 4\beta - arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} = 4.arctg\left(\frac{1}{5}\right) - 4arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

ou seja,

$$\pi = 16.arctg\left(\frac{1}{5}\right) - 4arctg\left(\frac{1}{239}\right)$$

Para x = 1, em $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$ tem-se a fórmula de Leibniz-Gregory para π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \ldots$$

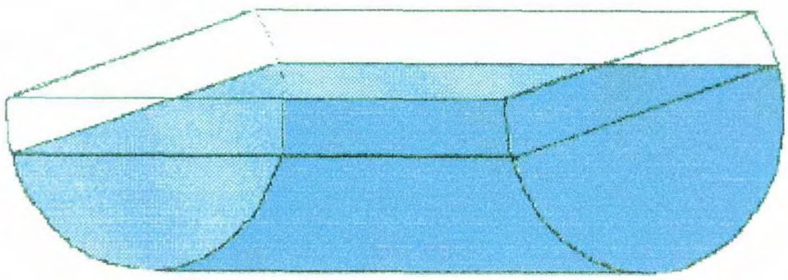
	x	$x - \frac{x^3}{3}$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$
arctg1	1	0,666666667	0,8666666667	0,723809525
arctg 1/5	0,2	0,197333334	0,197397334	0,197395506
arctg1/239	4,184100418.10-3	4,184076001.10-3	4,184076001.10-3	4,184076001.10-3
Fórmulas { Leibniz – Gregory	4	2,666666668	3,46666668	2,8952381
John Machin	3,1958159	3,14059704	3,14162104	3,14159792

9 – Bebedouro de Água para animais

9.1 - Apresentação

Para fabricar um bebedouro para gado, tapa-se os dois extremos de um tanque com secção transversal semi-circular de raio r e comprimento L (como mostrará a figura).

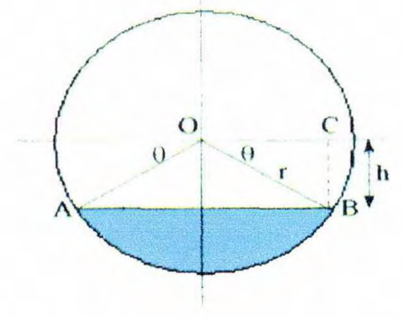
Enchendo o bebedouro até uma distância h do topo, qual será o volume de água no bebedouro?



Referência Bibliográfica

WHITLEY, William Glenn. *Notas de aulas de Métodos Numéricos.* Primeiro Semestre, 2000.

9.2 – Solução



Sabemos que o volume do cilindro é a área da base vezes o seu comprimento ($V_c = A_b \times L$). Vamos então calcular a área que contém água, em função de h e r.

Da geometria tiramos que a área com água é a área do setor $\widehat{OAB}$ menos a área do triângulo OAB, ou seja, $A_a = A_s - A_t$

I) Área do Setor:

Seja s o comprimento do arco menor $\widehat{AB}$, cujo ângulo interno é $2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

Calcula-se o comprimento do arco, pela fórmula: s = α, onde α é o ângulo interno do respectivo arco.

Então segue que:

$s = 2.\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).r$, portanto,

$$A_s = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{s.r}{2} = \frac{2.\left(\frac{\pi}{2}\right).r.r}{2} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).r^2$$

Do Δ OBC, tiramos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{r} \Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right)$$

Fazendo a substituição temos:

$$A_s = \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right)\right].r^2$$

II) Área do triângulo:

Sejam: $\begin{cases} AB - base \\ h - altura \end{cases}$

$$A_t = \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{AB.h}{2}$$

Deixando AB em função de r e h, temos que: $r^2 = h^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ (Teorema de Pitágoras)

$$\frac{(AB)^2}{4} = r^2 - h^2 \Rightarrow (AB)^2 = 4\left(r^2 - h^2\right) \Rightarrow AB = 2\sqrt{r^2 - h^2}$$

Portanto: $A_t = \dfrac{2\sqrt{r^2 - h^2}.h}{2} = h.\sqrt{r^2 - h^2}$

Finalmente, a área da região que contém água é:

$$A_a = A_s - A_t = \left[\frac{\pi}{2} - \text{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right)\right].r^2 - h.\sqrt{r^2 - h^2} = \frac{\pi r^2}{2} - r^2.\text{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{r^2 - h^2}$$

Portanto, o volume de água no bebedouro é:

$$V = A_a L = L.\left[\frac{\pi r^2}{2} - r^2.\text{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{r^2 - h^2}\right]$$

9.3 – Aplicação

Problema: Um fazendeiro construiu um bebedouro com comprimento L igual a 3m, raio da secção transversal igual a 0,40m e colocou 300 litros de água.
Qual será a profundidade da água no bebedouro?

Solução:
Como já calculamos, o volume com água no bebedouro é:

$$V = L.\left[\frac{\pi r^2}{2} - r^2.\text{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{r^2 - h^2}\right]$$

Sabemos que:

$$\begin{bmatrix} 1m^3 - 1000l \\ x - 300l \end{bmatrix}$$

Precisamos saber quantos m^3 equivalem a 300 litros de água, para aplicarmos na fórmula.

$$x = \frac{300}{1000} = 0{,}3m^3$$

Portanto:

$$0{,}3 = 3.\left[\frac{\pi(0{,}4)^2}{2} - (0{,}4)^2.\text{arcsen}\left(\frac{h}{0{,}4}\right) - h\sqrt{(0{,}4)^2 - h^2}\right]$$

$$0{,}1 = 0{,}08\pi - 0{,}16.\text{arcsen}\left(\frac{h}{0{,}4}\right) - h\sqrt{0{,}16 - h^2}$$

$$0{,}16.\text{arcsen}\left(\frac{h}{0{,}4}\right) + h\sqrt{0{,}16 - h^2} - 0{,}151327412 = 0$$

com $h \in [0 ; 0{,}4]$ (✱)

Obtemos uma equação com apenas uma variável h, mas a dificuldade se encontra em como isolar h.
Existem "métodos numéricos" que possibilitam encontrar uma aproximação para h, com quantas casas decimais eu desejar.
Neste caso, temos os limites inferior e superior para h, esse não pode ser inferior a zero, pois sabemos que existe água no bebedouro, logo tem uma profundidade. Sabemos também que h não pode ser maior que r, senão a água transbordaria, e mesmo assim, seria no máximo igual a r, que é a altura do bebedouro. Ou seja, $h \in [0 ; 0{,}4]$.
Dessa maneira podemos calcular h, pelo "Método da Bisecção", por exemplo. Este não é o único e nem o mais rápido para se conseguir uma "boa aproximação", mas é um método fácil de ser manipulado.
A idéia deste método é a aplicação sucessiva do **Teorema do Valor Intermediário:** *"Se f é contínua em [a,b] e f(a).f(b) < 0, então existe c entre a e b, tal que f(c) = 0".*

Seja $d_1 = \frac{(a+b)}{2}$, uma 1ª aproximação para a raiz c de $f(x) = 0$, então podem ocorrer três casos:

1) $f(d_1) = 0$, isto é, $c = d_1$ é a raiz procurada;
2) $f(d_1) =$ e $f(a)$ tem sinais opostos;
3) $f(d_1) =$ e $f(b)$ tem sinais opostos;

No 2° caso há uma raiz entre a e d_1, no 3° ,há uma raiz entre b e d_1. Ocorrendo o 2° ou 3° caso, continuo na mesma situação anterior, só que o comprimento do intervalo é a metade do anterior. E assim tomando-se novas e novas médias aritméticas..

Para a equação (✱), tem-se a função:

$$f(h) = 0{,}16.\mathrm{arcsen}\left(\frac{h}{0{,}4}\right) + h\sqrt{0{,}16 - h^2} - 0{,}151327412 = 0$$

que é contínua em [0 ; 0,4] e f(0,4) = -0,015132741... < 0.

1ª Iteração:

a = 0 f(a) = -0,151327412
b = 0,4 f(b) = 0,1
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0{,}4}{2} = 0{,}2$ f(c) = 0,001730424302

2ª Iteração:

a = 0 f(a) = -0,151327412
b = 0,2 f(b) = 0,001730424302
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{0+0{,}2 = 0{,}1}{2}$ f(c) = -0,072168738

3ª Iteração:

a = 0,1 f(a) = -0,072168738
b = 0,2 f(b) = 0,001730424302
$c = \frac{A+B}{2} = \frac{0{,}1+0{,}2}{2} = 0{,}15$ f(c) = -0,003297559

4ª Iteração:

a = 0,2 f(a) = 0,001730424302
b = 0,15 f(b) = -0,003297559
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}2+0{,}15}{2} = 0{,}175$ f(c) = -0,015931468

5ª Iteração:

a = 0,2 f(a) = 0,001730424302
b = 0,175 f(b) = -0,015931468
$c = \frac{a+b}{2} = \frac{0{,}2+0{,}175}{2} = 0{,}1875$ f(c) = -0,007017573258

6ª Iteração

a = 0,2 f(a) = 0,001730424302

b = 0,1875 f(b) = -0,007017573258

$c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0{,}2+0{,}1875}{2} = 0{,}19375$ f(c) = -0,002621943805

7ª Iteração

a = 0,2 f(a) = 0,001730424302

b = 0,19375 f(b) = -0,002621943805

$c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0{,}2+019375}{2} = 0{,}196875$ f(c) = -0,000440016

↳já posso garantir uma precisão de 2 casas decimais.

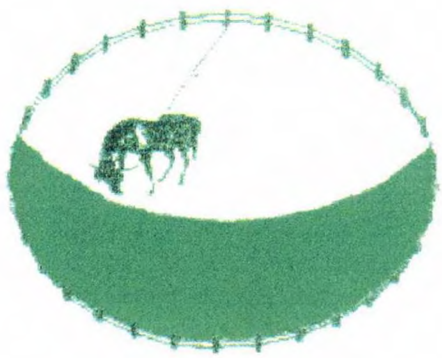
Logo h com duas casas de precisão é 0,19m = 19cm e a profundidade da água no tanque é igual a 0,4m – 0,19m = 0,21m.

10 – O cavalo do Presidente

10.1 – Apresentação

Eu tenho um pasto circular e meu cavalo está preso a um mourão da cerca que delimita o pasto, por uma corda.

Qual deverá ser o comprimento da corda a fim de que o cavalo possa comer exatamente a metade do pasto?



Referência Bibliográfica

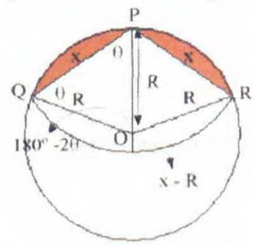
BRYANT, Victor. *Metrics Spaces Iteration and Applications.* Cambridge University Press, 1985.

Revista do Professor de Matemática – número 22. SBM, 1992.

10.2 – Solução

Sejam: $\begin{cases} \text{x – tamanho da corda} \\ \text{d – diâmetro do pasto com 01 unidade} \\ \text{R – raio do círculo} \end{cases}$

Vamos descobrir qual é a área pastada e em seguida o tamanho da corda x.



Sejam: $\begin{cases} \text{A – área pastada} \\ A_v \text{ – área de cada seção vermelha} \\ A_a \text{ – área do triângulo OPQ} \\ A_s \text{ – área do setor } \overset{\frown}{PQR} \end{cases}$

$$\boxed{A = 2Av + A_s}$$

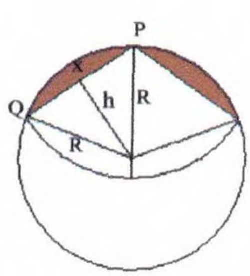
Vamos calular $A_v = A_{setor\overset{\frown}{OPQ}} - A_a$

$$A_{setor\overset{\frown}{OPQ}} = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{\overline{PQ}\ x\ R}{2} = \frac{(180^0 - 2\theta)R\ x\ R}{2} = \frac{(180^0 - 2\theta)R^2}{2}$$

Sendo $R = \frac{1}{2}$ (unidade), então:

$$A_{setor\overset{\frown}{OPQ}} = \frac{(180^0 - 2\theta)}{8}$$

$$A_a = \frac{base\ x\ altua}{2} = \frac{\overline{PQ}\ x\ h}{2}$$



Como ΔOPQ é isósceles, a altura, partindo do vértice que une os dois lados iguais, divide a base em duas partes iguais, logo $R^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2$, daí segue que:

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{X^2}{4}}$$

Portanto:

$$A_a = \frac{x.\left(R^2 - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{4}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad e$$

$$A_v = \left(\frac{180° - 2\theta}{8}\right) - \left(\frac{x}{4}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Vamos agora calcular A_s :

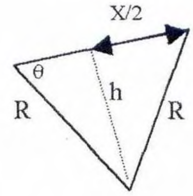
$$A_s = \frac{base \; x \; altura}{2} = \frac{\widehat{RQ}.x}{2} = \frac{2\theta.x.x}{2} = \theta x^2$$

Portanto:

$$A = 2A_v + A_s = 2\left[\left(\frac{180° - 2\theta}{8}\right) - \left(\frac{x}{4}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right] + \theta x^2 = \frac{180° - 2\theta}{4} - \frac{x}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \theta x^2$$

Do ΔOPQ, tiramos que:

$$\cos\theta = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}.2 = x \Rightarrow \theta = ar\cos x$$



Substituindo temos que:

$$\text{A} = \frac{\pi - 2.ar\cos x}{4} - \frac{x}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + x^2.ar\cos x = \frac{\pi}{4} - \frac{ar\cos x}{2} - \frac{x}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + x^2 ar\cos x$$

De $x = \cos\theta = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, tiramos que:

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \text{arcsen}\, x, \; \textit{ou seja}, \; \frac{\text{arcsen}\, x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{ar\cos x}{2}$$

Finalmente: $\boxed{A = \frac{1}{2}.\text{arcsen}\, x - \frac{x}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + x^2 ar\cos x}$

Para que o cavalo coma somente a metade do pasto, devemos encontrar x, tal que:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\text{arcsen}\, x - \frac{x}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + x^2 ar\cos x \Rightarrow 1 = \text{arcsen}\, x - x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2x^2 ar\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{arcsen}\, x = 1 + x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - 2x^2 ar\cos x \Rightarrow x = \text{sen}\left[1 + x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} - 2x^2 ar\cos x\right]$$

Escrevendo $f(x) = \operatorname{sen}\left[1 + x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - 2x^2 ar\cos x\right]; 0 \le x \le 1$, então a equação para x pode ser reescrita na forma x = f(x), isto é, x é ponto fixo de f.

Um Teorema da Topologia garante que este ponto fixo pode ser obtido por processo iterativo: x_1, x_2, $= f(x_1)$, x_3, $= f(x_2)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$..., onde x_1 é um conveniente "chute" inicial aproximado para x.

Como: $A(0{,}5) = \frac{1}{2}, \operatorname{arcsen}(0{,}5) - \frac{0{,}5}{2}(1-0{,}5)^{\frac{1}{2}} + (0{,}5)^2 . \arccos(0{,}5) = 0{,}30708 < \frac{\pi(0{,}5)^2}{2} = 0{,}39$

Portanto é razoável escolher $x_1 = 0{,}5$

$$x_2 = f(x_1) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}5[1-(0{,}5)^2]^{\frac{1}{2}} + (0{,}5)^2 . ar\cos(0{,}5)\} = 0{,}7892$$

$$x_3 = f(x_2) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}7892\,[1-(0{,}7892\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}7892\,)^2 \arccos(\,0{,}7892\,)\} = 0{,}6137$$

$$x_4 = f(x_3) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6137\,[1-(0{,}6137\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6137\,)^2 \arccos(\,0{,}6137\,)\} = 0{,}7166$$

$$x_5 = f(x_4) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}7166\,[1-(0{,}7166\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}7166\,)^2 \arccos(\,0{,}7166\,)\} = 0{,}6496$$

$$x_6 = f(x_5) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6496\,[1-(0{,}6496\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6496\,)^2 \arccos(\,0{,}6496\,)\} = 0{,}6924$$

$$x_7 = f(x_6) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6924\,[1-(0{,}6924\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6924\,)^2 \arccos(\,0{,}6924\,)\} = 0{,}6644$$

$$x_8 = f(x_7) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6644\,[1-(0{,}6644\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6644\,)^2 \arccos(\,0{,}6644\,)\} = 0{,}6826$$

$$x_9 = f(x_8) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6826\,[1-(0{,}6826\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6826\,)^2 \arccos(\,0{,}6826\,)\} = 0{,}6707$$

$$x_{10} = f(x_9) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6707\,[1-(0{,}6707\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6707\,)^2 \arccos(\,0{,}6707\,)\} = 0{,}6784$$

$$x_{11} = f(x_{10}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6784\,[1-(0{,}6784\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6784\,)^2 \arccos(\,0{,}6784\,)\} = 0{,}6734$$

$$x_{12} = f(x_{11}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6734\,[1-(0{,}6734\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6734\,)^2 \arccos(\,0{,}6734\,)\} = 0{,}6767$$

$$x_{13} = f(x_{12}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6767\,[1-(0{,}6767\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6767\,)^2 \arccos(\,0{,}6767\,)\} = 0{,}6746$$

$$x_{14} = f(x_{13}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6746\,[1-(0{,}6746\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6746\,)^2 \arccos(\,0{,}6746\,)\} = 0{,}6759$$

$$x_{15} = f(x_{14}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6759\,[1-(0{,}6759\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6759\,)^2 \arccos(\,0{,}6759\,)\} = 0{,}6751$$

$$x_{16} = f(x_{15}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6751[1-(0{,}6751)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6751)^2 \arccos(\,0{,}6751)\} = 0{,}6756$$

$$x_{17} = f(x_{16}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6756\,[1-(0{,}6756\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6756\,)^2 \arccos(\,0{,}6756\,)\} = 0{,}6753$$

$$x_{18} = f(x_{17}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6753\,[1-(0{,}6753\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6753\,)^2 \arccos(\,0{,}6753\,)\} = 0{,}6755$$

$$x_{19} = f(x_{18}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6755\,[1-(0{,}6755\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6755\,)^2 \arccos(\,0{,}6755\,)\} = 0{,}6753$$

$$x_{20} = f(x_{19}) = \operatorname{sen}\{1 + 0{,}6753\,[1-(0{,}6753\,)^2]^{\frac{1}{2}} - 2(0{,}6753\,)^2 \arccos(\,0{,}6753\,)\} = 0{,}6755$$

Temos que: $x_{20} = x_{18} \Rightarrow f(x_{19}) = f(x_{17})$.

Logo $x \cong 0{,}675$ (unidade), com precisão de três casas decimais.

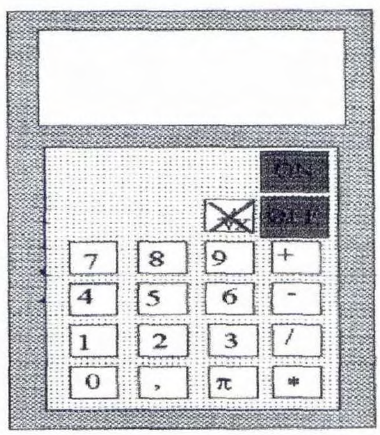
Substituindo esse valor na expressão para A(x), temos: $A(0{,}675) \cong 0{,}4998 \cong 0{,}5$.

NOTA: Analogamente, como no exercício 9- "Bebedouro de água para animais"(já apresentado neste trabalho), usamos o Método da Bisecção para encontrar o valor de x, onde $x \in [0,1]$, e conseguimos uma aproximação de $x \cong 0{,}67578125$, com 8 iterações, para o tamanho da corda que prende o cavalo

11 – Cálculo de √x sem usar a tecla $\boxed{\sqrt{x}}$ de uma calculadora

11.1 – Apresentação

A seguir mostraremos uma fórmula para calcular √x, sem usar a tecla $\boxed{\sqrt{x}}$ da calculadora, utilizando somente uma calculadora com operações básicas



Referência Bibliográfica

WAGNER, Edward; OLIVEIRA, Aroldo de. *Revista do Professor de Matemática – número 4*. SBM, 1984

11.2 – Solução

Encontramos 2 soluções para este problema:

1) Seja x = $tg^2\theta$ *e* $\sqrt{x} = tg\theta$, *para* $x > 0$ *e* $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

(sempre existe θ nestas condições, pois tg $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathrm{IR}$ *é sobrejetora.)*

Vamos descobrir como calcular $\sqrt{x}$, isto é, achar tgθ, aplicando somente as operações permitidas (inclusive algumas identidades trigonométricas e alguns artifícios matemáticos).
Segue-se:

$$x = tg^2\theta \Rightarrow x+1 = tg^2\theta + 1 \Rightarrow x+1 = \sec^2\theta \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\sec^2\theta} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \cos^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{1}{x+1}\right) - 1 = 2(\cos^2\theta) - 1 \Rightarrow \frac{2}{x+1} - 1 = \cos 2\theta \Rightarrow \frac{2(x+1)}{x+1} = \cos 2\theta \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = \cos 2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ar\cos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \theta$$

$$Como\ tg\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow tg\theta \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]}\ e\ \sqrt{x} = tg\theta,\ então:$$

$$\boxed{\sqrt{x} = \frac{\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]} \qquad \mathbf{(1)}}$$

2) Seja x = $\frac{1}{\cos^2\theta}$ *e* $\sqrt{x} = \frac{1}{\cos\theta}$, *para* $x \geq 1$

Sempre existe θ, nestas condições, pois $x \geq 1$ implica $0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$ *e* $\cos : \mathrm{IR} \rightarrow [-1,1]$ *é sobrejetora.*

Da mesma maneira, vamos descobrir quem é θ.

Segue-se:

$$x = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\cos 2\theta + 1}{2}} \Rightarrow x = \frac{2}{\cos 2\theta + 1} \Rightarrow \cos 2\theta + 1 = \frac{2}{x} \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{2}{x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = \frac{2-x}{x} = 2\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x} = \theta$$

$$Daí\ \sqrt{x} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \qquad \boxed{\sqrt{x} = \frac{1}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x}{x}\right]}} \quad \textbf{(2)}$$

Observação: Quando 0 < x < 1, a solução número (2) continua funcionando para $x' = \frac{1}{x} > 1$

Segue-se:

$$\sqrt{x'} = \frac{1}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{2-x'}{x'}\right]} = \frac{1}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)\right]} = \frac{1}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos(2x-1)\right]}$$

De $\sqrt{x'} = \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $\sqrt{x'} = \frac{1}{\cos\left[\frac{1}{2}\arccos(2x-1)\right]}$, tiramos que:

$$\boxed{\sqrt{x} = \cos\left[\frac{1}{2}\arccos(2x-1)\right]} \quad \textbf{(3)}$$

11.3 – Aplicação

Dado x, calcule $\sqrt{x}$ através das fórmulas (1), (2) e (3), supondo que esteja em mãos a calculadora apresentada anteriormente.

x	***Solução(1)***	***Solução(2)***	***Solução(3)***	***Valor exato de uma calculadora com a tecla*** $\sqrt{x}$
13	3,605551275	3,605551275	----	3,605551475
2,7	1,643167675	1,643167673	----	1,643167673
0,7	0,83666	----	0,83666	0,83666

Comparando os resultados obtidos nas soluções (1), (2) e (3), com o valor exato de uma calculadora que tenha tecla $\sqrt{x}$, percebemos que os valores encontrados são bastante precisos.

OBSERVAÇÃO: Segue abaixo, as identidades trigonométricas utilizadas neste problema:

$$tg\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\frac{1}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b$$

$$\cos 2a = 2.(\cos^2 a) - 1$$

12 – E quando a bateria de sua calculadora científica acaba???

12.1 – Apresentação

Uma calculista precisa calcular sen36°, quando a bateria de sua calculadora científica acaba. Ela consegue emprestado uma máquina de "feirante" que não tem a tecla "senx".

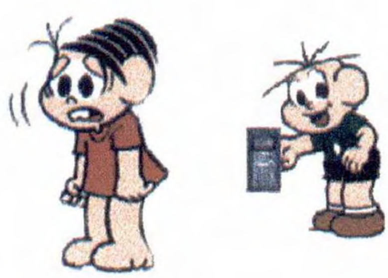
Sem se atrapalhar ela tecla 3,1415926 e divide por 5. Com essa operação ela obtém um número x, em seguida, calcula e usa este valor para o seno de 36°.

A questão é:

I) Por que esse valor encontrado é uma aproximação para o seno de 36°?

II) Qual é o erro que a calculista comete em relação ao valor exato da calculadora científica?

III)E se o problema fosse calcular tg10°, $tg10^{10}$ ou $tg10^{100}$?



<u>Referência Bibliográfica</u>

MARSDEN, J.; WEINSTEIN, A. Calculus I. 2^{nd} , Springer – Verlage, New York, 1985

SILVEIRA, J. F. Porto da; *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*. Volume 8, N°2, Outubro de 1977.

SCHELIN, Charles W. Calculator Function Approximation. Amer Math Monthly, Volume 90, Issues (May, 1983), 317-325

12.2 - Solução

12.2.1 - Solução I);

Do Cálculo sabemos que:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots \text{ (série de Maclaurin)}$$

De início a calculista transformou 36° em radianos, isto é:

$$\begin{bmatrix} \pi rad - 180° \\ x rad - 36° \end{bmatrix}$$

Então: $x = \dfrac{\pi r(rad).36°}{180°} = \dfrac{\pi}{5} rad \cong \dfrac{3{,}1415926}{5} \cong 0{,}62831$

Utilizando apenas as duas primeiras parcelas da série, ela obteve:

Sen $0{,}62831 = 0{,}62831 - \dfrac{(0{,}62831)^3}{6} = 0{,}586969$

O resultado que ela obteria em uma calculadora científica para seno de 0,672831 é 0,58777835. Comparando os resultados percebemos que a calculista obteve uma precisão de duas casas decimais.

12.2.2 - Solução II):

Sejam: $\begin{cases} V_A : \textit{Valor aproximado encontrado pela calculista} : 0{,}586969 \\ V_E : \textit{Valor exato com uma calculadora de } 10 \textit{ dígitos} : 0{,}587782252 \end{cases}$

O erro cometido, pela calculista, foi:

$$E = \frac{V_{E-}V_A}{V_E} = \frac{0{,}587782252 - 0{,}586969}{0{,}587782252} \cong 0{,}001388$$

Ou seja, o erro equivale a 0,13%

12.2.2 - Solução III):

Para calcular tg 10°, será necessário conhecer a série que converge para tgx.
Seja $tgx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$
Sabendo-se (do Cálculo) que:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

e

$$tgx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \textit{ então} :$$

$$\text{tg x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Vamos calcular os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, ..., logo:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \dots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

$$\left(a_0 - \frac{a_0 x^2}{2!} + \frac{a_0 x^4}{4!} - \frac{a_0 x^6}{6!} + \dots\right) + \left(a_1 x - \frac{a_1 x^3}{2!} + \frac{a_1 x^5}{4!} - \frac{a_1 x^7}{6!} + \dots\right) + \left(a_2 x^2 - \frac{a_2 x^4}{2!} + \frac{a_2 x^6}{4!} - \frac{a_2 x^8}{6!} + \dots\right) +$$

$$\left(a_3 x^3 - \frac{a_3 x^5}{2!} + \frac{a_3 x^7}{4!} - \frac{a_3 x^7}{4!} - \frac{a_3 x^9}{6!} + \dots\right) + \left(a_4 x^4 - \frac{a_4 x^6}{2!} + \frac{a_4 x^8}{4!} - \frac{a_4 x^{10}}{6!} + \dots\right) + \left(a_5 x^5 - \frac{a_5 x^7}{2!} + \frac{a_5 x^9}{4!} + \frac{a_5 x^{11}}{6!} + \dots\right)$$

$$\left(a_6 x^6 - \frac{a_6 x^8}{2!} + \frac{a_6 x^{10}}{4!} - \frac{a_6 x^{12}}{6!} + \dots\right) + \left(a_7 x^7 - \frac{a_7 x^9}{2!} + \frac{a_7 x^{11}}{4!} - \frac{a_7 x^{11}}{4!} - \frac{a_7 x^{13}}{6!} + \dots\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$a_0 = 0$

$a_1 x = x \Rightarrow a_1 = 1$

$a_2 = 0$

$$\frac{-a_1 x^3}{2!} + a_3 x^3 = \frac{-1x^3}{3!} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2!} + a_3\right)x^3 = \frac{-1x^3}{3!} \Rightarrow a_3 = \frac{-1}{3!} + \frac{1}{2!} \Rightarrow a_3 = \frac{-1+3}{6} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}$$

$a_1 = 0$

$$\frac{a_1 x^5}{1!} - \frac{a_3 x^5}{2!} + a_5 x^5 = \frac{1}{5!}x^5 \Rightarrow \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{3.2!} + a_5\right)x^5 = \frac{1}{5!}x^5 \Rightarrow \frac{1}{24} - \frac{1}{6} + a_5 = \frac{1}{120} \Rightarrow a_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_5 = \frac{1-5+20}{120} \Rightarrow a_5 = \frac{2}{15}$$

$a_6 = 0$

$$\frac{-a_1 x^7}{6!} + \frac{a_3 x^7}{4!} - \frac{a_5 x^7}{2!} + a_7 x^7 = \frac{-1x^7}{7!} \Rightarrow \left(\frac{-1}{6!} + \frac{1}{3.4!} - \frac{2}{15.2!} + a_7\right)x^7 = \frac{-1x^7}{7!} \Rightarrow a^7 = \frac{-1}{7!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{3.4!} + \frac{2}{15.2!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_7 = \frac{-1}{5040} + \frac{1}{720} - \frac{1}{72} + \frac{2}{30} \Rightarrow a_7 = \frac{-1+7-70+336}{5040} \Rightarrow a_7 = \frac{17}{315}$$

e assim por diante.

Portanto pode-se escrever tg x, como:

$$tgx = 0 + 1.x + 0.x^2 + \frac{1.x^3}{3} + 0.x^4 + \frac{2.x^5}{15} + 0.x^6 + \frac{17.x^7}{315} + \dots$$

tg x = x + $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{17x^7}{315}+\ldots$

Assim tg x pode ser aproximada por:

$$x-x^3+2x^5, ou\ seja, tg10° = tg\left(\frac{\pi}{18}\right)=\frac{\pi}{18}-\left(\frac{x^3}{18}\right)\frac{1}{3}+\left(\frac{\pi^5}{18}\right)\frac{2}{15}=\frac{\pi}{18}+\frac{x^3}{17496}+\frac{2\pi^5}{28343520}\cong$$

$$\cong 0{,}174532925+0{,}00177219231 1+0{,}0000215936259\cong 0{,}17632671$$

Comparando esse resultado, com o valor exato de uma calculadora científica $\left[tg\dfrac{\pi}{18}=0{,}17632698\right]$ obtemos uma precisão de 6 casas decimais.

E tg 10^{10}?

Na máquina Casio Fraction fx-82 SUPER, com 10 dígitos no visor, a resposta é: -E-.

Sendo $\theta = 10^{10}$rad, vamos reduzí-lo a um argumento entre 0 e 2π.

Sabendo-se que : $tg(\theta+2\pi k)=\dfrac{tg\theta+tg2\pi k}{1-tg\theta, tg2\pi k}$ $e\ tg2\pi k = 0,\ k\in$ **Z**, temos que:

$tg(\theta + 2\pi k) = tg\theta$

Portanto:

$$10^{10}=10.10^9\, e\,\frac{10}{2\pi}\cong 1\ (volta\ inteira),\ com\ 2\pi\cong 6{,}283185307$$

$$10.10^9-1(2\pi).10^9\cong 3{,}716814693.10^9=37{,}16814693..10^8\Rightarrow$$

$$10^{10}\cong 37{,}16814693.10^8+2\pi 10^9\quad \textbf{(1)}$$

De $37{,}16814693.10^8$ e $\dfrac{37{,}16814693}{2\pi}\cong 5$ (voltas inteiras):

$37{,}16814693.10^8 - 5(2\pi).10^8 \cong 5{,}752220394.10^8 = 57{,}52220394.10^7 \Rightarrow$

$37{,}16814693.10^8 = 57{,}52220394.10^7 + 5(2\pi).10^8$ **(2)**

De $57{,}2220394.10^7$ e $\dfrac{57{,}52220394}{2\pi}\cong$ 9 (voltas inteiras):

$57{,}2220394.10^7$-$9(2\pi).10^7 \cong 0{,}973536175.10^7 = 9{,}73536175.10^6 \Rightarrow$

$57{,}2220394.10^7 = 9{,}73536175.10^6 + 9(2\pi).10^7$ **(3)**

De $9{,}73536175.10^6$ e $\dfrac{9{,}73536175}{2\pi}\cong 1$ (volta inteira):

$9{,}73536175.10^6$ - $1(2\pi).10^6 \cong 3{,}452176443.10^6 = 34{,}52176443.10^5 \Rightarrow$

$9{,}73536175.10^6 = 34{,}52176443.10^5 + (2\pi).10^6$ **(4)**

De $34{,}52176443.10^5$ e $\dfrac{34{,}52176443}{2\pi} \cong 5$ (voltas inteiras):

$34{,}52176443.10^5 - 5(2\pi).10^5 \cong 3{,}105837894.10^5 = 31{,}05837894.10^4 \Rightarrow$

$34{,}52176443.10^5 = 31{,}05837894.10^4 + 5(2\pi).10^5$ **(5)**

De $31{,}05837894.10^4$ e $\dfrac{31{,}05837894}{2\pi} \cong 4$ (voltas inteiras)

$31{,}05837894.10^4 - 4(2\pi).10^4 \cong 5{,}925637711.10^4 = 59{,}25637711.10^3 \Rightarrow$

$31{,}05837894.10^4 = 59{,}25637711.10^3 + 4(2\pi).10^4$ **(6)**

De $59{,}25637711.10^3$ e $\dfrac{59{,}25637711}{2\pi} \cong 9$ (voltas inteiras):

$59{,}25637711.10^3 - 9(2\pi).10^3 \cong 2{,}707709345.10^3 = 27{,}07709345.10^2 \Rightarrow$

$59{,}25637711.10^3 = 27{,}07709345.10^2 + 9(2\pi).10^3$ **(7)**

De $27{,}07709345.10^2$ e $\dfrac{27{,}07709345}{2\pi} \cong 4$ (voltas inteiras):

$27{,}07709345.10^2 - 4(2\pi).10^2 \cong 1{,}944352221.10^2 = 19{,}44352221.10$

$27{,}07709345.10^2 = 19{,}44352221.10^1 + 4(2\pi).10^2$ **(8)**

De $19{,}44352221.10^1$ e $\dfrac{19{,}44352221}{2\pi} \cong 3$ (voltas inteiras):

$19{,}44352221.10^1 - 3(2\pi).10^1 \cong 0{,}593966288.10^1 = 5{,}9366288.10^0$

$19{,}44352221.10^1 = 5{,}9366288.10^0 + 3(2\pi).10$ **(9)**

Fazendo as substituições necessárias, obtemos:

$$
\begin{aligned}
10^{10} &\cong 37{,}16814693.10^8 + 2\pi.10^9 \cong \\
&\cong 57{,}52220394.10^7 + 2\pi(1.10^9 + 5.10^8) \cong \\
&\cong 9{,}73536175.10^6 + 2\pi(1.10^9 + 5.10^8 + 9.10^7) \cong \\
&\cong 34{,}52176443.10^5 + 2\pi(1.10^9 + 5.10^8 + 9.10^7 + 1.10^6) \cong \\
&\cong 31{,}05837894.10^4 + 2\pi(1.10^9 + 5.10^8 + 9.10^7 + 1.10^6 + 5.10^5) \cong \\
&\cong 59{,}25637711.10^3 + 2\pi(1.10^9 + 5.10^8 + 9.10^7 + 1.10^6 + 5.10^5 + 4.10^4) \cong \\
&\cong 27{,}07709345.10^2 + 2\pi(1.10^9 + 5.10^8 + 9.10^7 + 1.10^6 + 5.10^5 + 4.10^4 + 9.10^3) \cong \\
&\cong 19{,}44352221.10^1 + 2\pi(1.10^9 + 5.10^8 + 9.10^7 + 1.10^6 + 5.10^5 + 4.10^4 + 9.10^3 + 4.10^2) \cong \\
&\cong 5{,}93966288.10^0 + 2\pi(1.10^9 + 5.10^8 + 9.10^7 + 1.10^6 + 5.10^5 + 4.10^4 + 9.10^3 + 4.10^2 + 3.10^1)
\end{aligned}
$$

Assim, tg, $10^{10} \cong$ tg $5{,}93966288.10^0 \cong -0{,}357705026$

NOTA: Deve-se observar que dependendo da quantidade de dígitos usados para π obtemos valores diferentes para tg 10^{10}. Assim para $2\pi = 6{,}28$, fizemos os cálculos e encontramos tg $10^{10} \cong -0{,}7495$. Com o uso do software matemático MATLAB obtemos tg$10^{10} \cong -0{,}5583$.

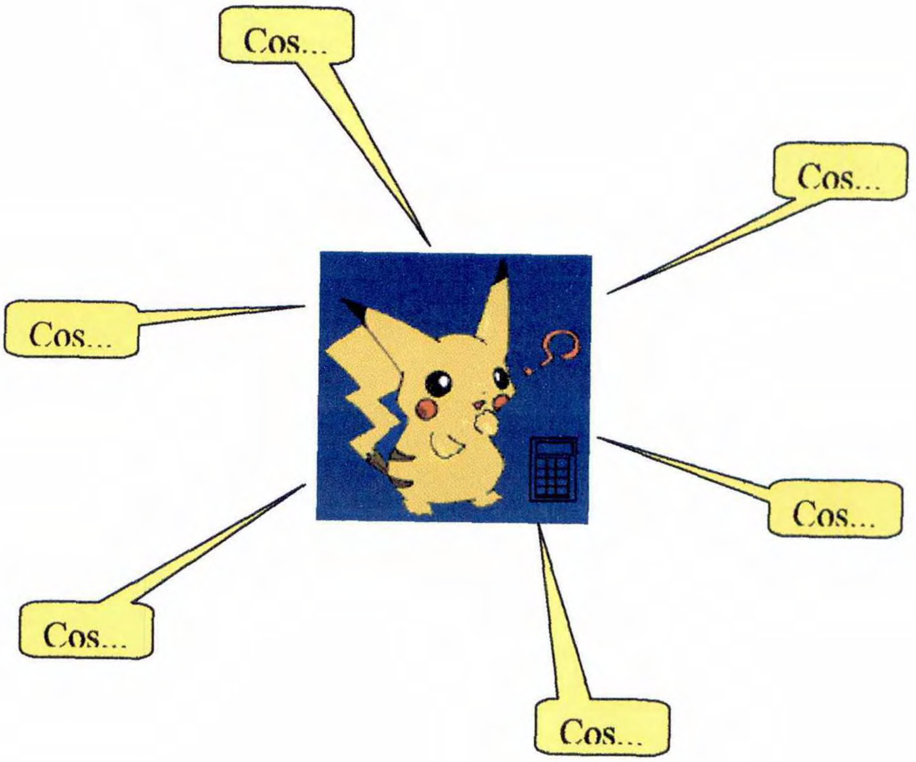
O cálculo de tg de números muito grandes, como se vê, é muito delicado e o leitor interessado poderá consultar o artigo "É via série de Taylor que sua mini calculadora avalia as funções transcendentes? "do Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática de J. F. Porto da Silveira, ou então, "Calculator Function Approximation " de Charles W. Schelin.

13 - A tecla Cos

13.1 - Apresentação:

Faça a seguinte brincadeira:

Tecle qualquer número em sua calculadora, em radianos, em seguida aperte repetidamente a tecla Cos *até que o número no visor comece a se repetir. Repita esta operação para um outro número qualquer, em radianos, e você verá que o número que vai começar a se repetir é o mesmo de antes, ou seja, 0739085133 (a quantidade de algarismos depende da quantidade de dígitos da sua máquina de calcular).*



Referência Bibliográfica

BRYANT, Victor. *Metrics Spaces Interation and Applications.* Cambridge University Press, 1985.

LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos.* IMPA, 2ª edição, Rio de Janeiro, 1977.

13.2 – Solução:

A seguir apresentaremos esta demonstração, ou seja, para x_1 qualquer em radianos, a sequência x_1, $\cos(x_1)$, $\cos(\cos(x_1))$, $\cos(\cos(\cos(x_1)))$,... converge para 0,739085133...

Inicialmente vamos escolher dois "chutes" iniciais e testar esta sequência: x_1, $\cos(\cos(x_1))$, $\cos(\cos(\cos(x_1)))$,...

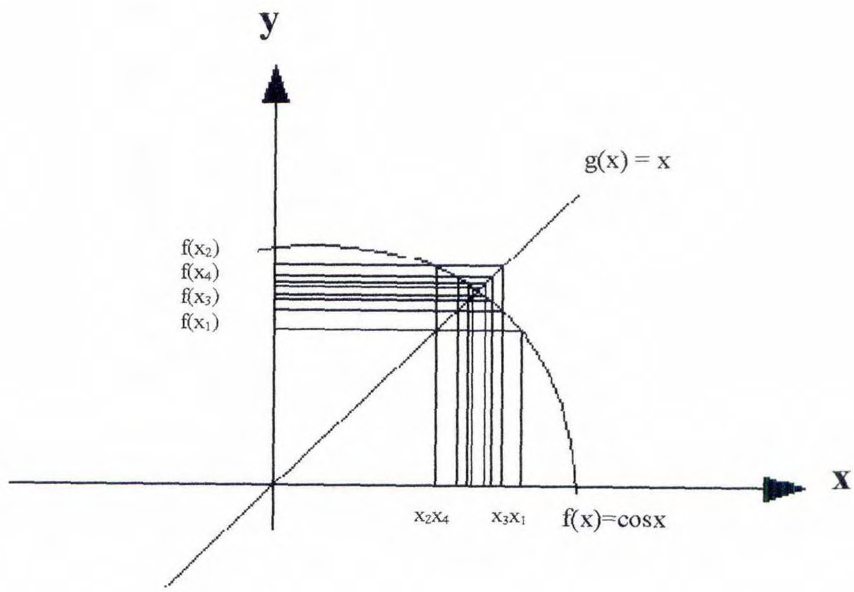
Nº de Iterações	*Sequência*	*1º chute*	*2º chute*
1	x_1	73(rad)	-0.7(rad)
2	$x_2 = \cos(x_1)$	-0.736192718	0.764842187
3	$x_3 = \cos(x_2)$	0.741030404	0.721491639
4	$x_4 = \cos(x_3)$	0.737773377	0.750821328
5	$x_5 = \cos(x_4)$	0.739968111	0.731128772
6	$x_6 = \cos(x_5)$	0.73849016	0.744421183
7	$x_7 = \cos(x_6)$	0.73948585	0.7354802
8	$x_8 = \cos(x_7)$	0.738815145	0.741508651
9	$x_9 = \cos(x_8)$	0.739266973	0.737450453
10	$x_{10} = \cos(x_9)$	0.738962631	0.740185285
11	$x_{11} = \cos(x_{10})$	0.739167646	0.73834361
12	$x_{12} = \cos(x_{11})$	0.73029548	0.739584428
13	$x_{13} = \cos(x_{12})$	0.739122574	0.738748709
14	$x_{14} = \cos(x_{13})$	0.739059911	0.73931171
15	$x_{15} = \cos(x_{14})$	0.739102122	0.738932489
16	$x_{16} = \cos(x_{15})$	0.739073689	0.739187947
17	$x_{17} = \cos(x_{16})$	0.739092842	0.739015872
18	$x_{18} = \cos(x_{17})$	0.73907994	0.739131786
19	$x_{19} = \cos(x_{18})$	0.739088631	0.739053706
20	$x_{20} = \cos(x_{19})$	0.739082777	0.739106302
21	$x_{21} = \cos(x_{20})$	0.73908672	0.739070873
22	$x_{22} = \cos(x_{21})$	0.739084064	0.739094738
23	$x_{23} = \cos(x_{22})$	0.739085853	0.739078662
24	$x_{24} = \cos(x_{23})$	0.739084648	0.739089491
25	$x_{25} = \cos(x_{24})$	0.73908546	0.739082197
26	$x_{26} = \cos(x_{25})$	0.739084913	0.73908711

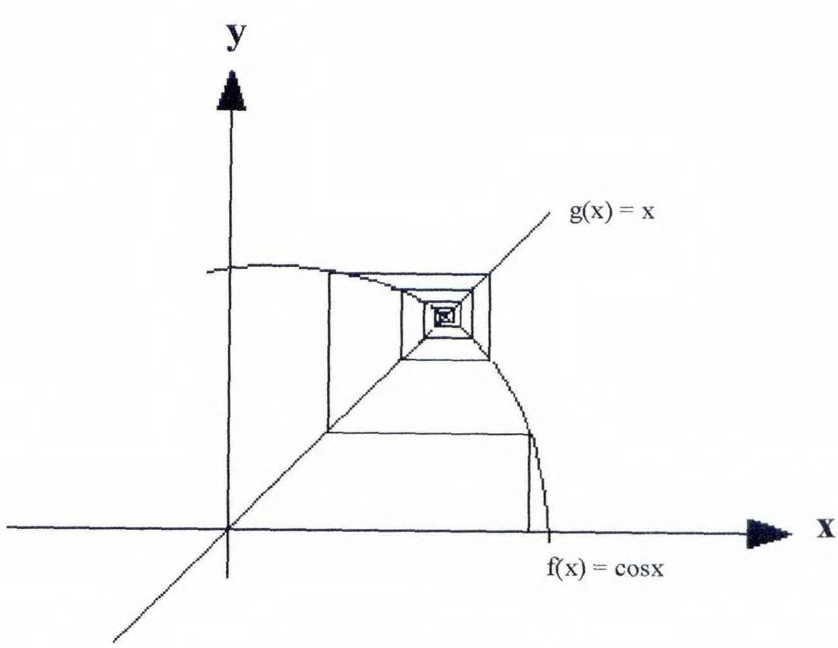
Nº de Iterações	*Sequência*	*1º chute*	*2º chute*
27	$x_{27} = \cos(x_{26})$	0,739085281	0,739083801
28	$x_{28} = \cos(x_{27})$	0,739085033	0,73908603
29	$x_{29} = \cos(x_{28})$	0,7390852	0,739084528
30	$x_{30} = \cos(x_{29})$	0,739085087	0,73908554
31	$x_{31} = \cos(x_{30})$	0,739085163	0,739084858
32	$x_{32} = \cos(x_{31})$	0,739085112	0,739085318
33	$x_{33} = \cos(x_{32})$	0,739085147	0,739085008
34	$x_{34} = \cos(x_{33})$	0,739085123	0,739085217
35	$x_{35} = \cos(x_{34})$	0,739085139	0,739085076
36	$x_{36} = \cos(x_{35})$	0,739085129	0,739085171
37	$x_{37} = \cos(x_{36})$	0,739085136	0,739085107
38	$x_{38} = \cos(x_{37})$	0,739085131	0,73908515
39	$x_{39} = \cos(x_{38})$	0,739085134	0,739085121
40	$x_{40} = \cos(x_{39})$	0,739085132	0,739085141
41	$x_{41} = \cos(x_{40})$	0,739085133	0,739085127
42	$x_{42} = \cos(x_{41})$	0,739085132	0,739085136
43	$x_{43} = \cos(x_{42})$	0,739085133	0,73908513
44	$x_{44} = \cos(x_{43})$	0,739085133	0,739085134
45	$x_{45} = \cos(x_{44})$	0,739085133	0,739085132
46	$x_{46} = \cos(x_{45})$	...	0,739085133
47	$x_{47} = \cos(x_{46})$	...	0,739085132
48	$x_{48} = \cos(x_{47})$	...	0,739085133
49	$x_{49} = \cos(x_{48})$	...	0,739085133
50	$x_{50} = \cos(x_{49})$	...	...
51	$x_{51} = \cos(x_{50})$	0,739085133	0,739085133

Percebemos que para $x_1 = 73$rad, $x_{43} = x_{44} = x_{45} = ... = 0.739085133$ e para $x_1 = -0.7$ rad $= x_{48} = x_{49} = = x_{50} = ... = 0.739085133$, da mesma maneira que o anterior, apenas com um número maior de iterações, a seqüência convergiu para 0.739085133.

Observemos que, tomando-se x = 0,739085133 rad e pressionando a tecla **Cos** obtém-se cos(x) = x.

Vamos analisar o gráfico das seguintes funções:
$f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = x$





Por que este processo de "aplicar f repetidamente" leva a uma solução da equação x = f(x)? Que condições deve satisfazer f(x)?

Suponha que x_0 é a solução de x = f(x) [x_0 é ponto fixo de f] e x_1 é um "chute";
$x_2 = f(x_1)$ deve estar mais próximo de x_0 do que x_1 de x_0 :

$|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$, ou seja, $|f(x_1) - f(x_0)| < |x_1 - x_0|$

Como não se sabe de antecedência, o valor de x_0 para o processo iterativo convergir, pode-se exigir que:
$|f(x) - f(y)| < |x - y|$, para cada x, y onde $x \neq y$.

("f reduz a distância entre pontos")

Para f(x) = cosx, tem-se:

$\forall\ x \neq y$, $|\cos x - \cos y| = \left|-2.\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| = 2\,\text{sen}\left|\left(\frac{x-y}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$

Como $\left|\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \leq 1$, então:

$|\cos x - \cos y| \leq 2\left|\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| < 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|$, pois $|\text{sen}\,u| < |u|, \forall u \neq 0$, ou seja, $|\cos x - \cos y| < |x - y|$

PROPOSIÇÃO 1: Se $|f(x) - f(y)| < |x - y|, x \neq y$, então a equação x = f(x) tem no máximo uma raiz (isto é, f tem no máximo um ponto fixo).

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que existam dois pontos fixos x_0 e x_0':

$$\mathbf{x_0 = f(x_0); \qquad x_0' = f(x_0')}$$

Então:

$$|x_0 - x_0'| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por hipótese}}}{|f(x_0) - f(x_0')| <} |x_0 - x_0'|$$, que é um absurdo!

Dessa maneira comprovamos que se $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, então f tem no máximo um ponto fixo.

Observação: Pode acontecer que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, mas f não tem ponto fixo.

➢**Exemplo 1:** $\mathbf{f(x) = x + \frac{1}{x}}$, **$x \in [1, +\infty)$.**

Sejam x, y ≥ 1, então:

$xy \geq, \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{1} = 1 < 2$, ou seja, $\frac{1}{xy} < 2$

Somando (-2) em ambos os lados da desigualdade, temos:

$$-2+\frac{1}{xy} < 0$$

Multiplicando tudo por $\left(\frac{y-x}{xy}\right)^2$, com x ≠ y (hipótese), temos:

$$-2+\frac{1}{xy}\left(\frac{(y-x)^2}{xy}\right) < 0$$

Desenvolvendo;

$$\frac{-2(y-x)^2}{xy}+\left(\frac{y-x}{xy}\right)^2 < 0$$

$$\frac{-2(y-x)(y-x)}{xy}+\left(\frac{y-x}{xy}\right)^2 < 0$$

$$\frac{2(x-y)(y-x)}{xy}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2 < 0$$

Somando e subtraindo $(x-y)^2$, temos:

$$(x-y)^2+\frac{2(x-y)(y-x)}{xy}-(x-y)^2+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2 < 0$$

$$\left[(x-y)^2+2(x-y).\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2\right] < (x-y)^2$$

$$\left[(x-y)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right]^2 < (x-y)^2$$

Extraindo a raiz quadrada;

$$\left|(x-y)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right| < |x-y|$$

$$\left|\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(y+\frac{1}{y}\right)\right| < |x-y|$$

$$|f(x)-f(y)| < |x-y|$$

Como vimos na Proposição 1, f tem no máximo um ponto fixo.

Mas se existe x, tal que f(x) = x, então $x+\frac{1}{x}=x \Rightarrow \frac{1}{x}=0$, o que é um absurdo!

Portanto concluímos que f não tem ponto fixo.

- **Outra tentativa de garantir a existência do ponto fixo de f, seria exigir um pouco mais de f:**
  $|f(x)-f(y)| \le k.|x-y|, \quad 0 < k = cte < 1, \quad \forall \ x \ e \ y \in Dom\ f.$

(FUNÇÕES COM ESTA PROPRIEDADE SÃO CHAMADAS DE CONTRAÇÃO)

Acontece que nem toda contração tem ponto fixo, como veremos a seguir:

➢Exemplo 2: $X = \{x \in Q \,/\, x \geq 1\} = [1, +\infty) \cap Q$.

f: X → X dada por $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ **satisfaz** $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}.|x - y|,\ x, y \in X$.

Ou seja, f é contração em X e não existe x ∈ X, tal que f(x) = x.

De fato:

$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$, $x, y \geq 1$ e $x, y \in Q$

Então:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{y}\right)\right| = \left|\frac{x-y}{2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right| = \left|\frac{x-y}{2} + \frac{(y-x)}{xy}\right| = \left|\frac{x-y}{2} - \frac{(x-y)}{xy}\right| =$$

$$\left|(x-y)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right)\right| = |x-y| . \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right|$$

Devemos mostrar que $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| \leq \frac{1}{2}$

Sabemos que $x.y \geq 1$, segue então que $\frac{1}{xy} \leq 1$

Somando (-1) nos dois lados da desigualdade, temos:

$$-1 + \frac{1}{xy} \leq 0$$

Multiplicando tudo por $\frac{1}{xy} \rangle 0$;

$$\frac{1}{xy}\left(-1 + \frac{1}{xy}\right) \leq 0$$

$$\frac{-1}{xy} + \left(\frac{1}{xy}\right)^2 \leq 0$$

Somando $\frac{1}{4}$ nos dois lados da desigualdade, temos:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{xy} + \left(\frac{1}{xy}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

Fatorando, temos:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Extraindo a raiz quadrada;

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Dessa maneira, $|f(x)-f(y)| = |x-y|.\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{xy}\right| \le \frac{1}{2}|x-y|$, então f é contração em X.

Mas para f(x) = $\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$, não existe x em X tal que f(x) = x, pois $\frac{x}{2}+\frac{1}{x} = x \Rightarrow x^2+2 = 2.x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ x = $+\sqrt{2}$, pois x $\ge$ 1; só que x = $\sqrt{2} \notin$ X.
Portanto concluímos que f é contração em X mas não tem ponto fixo em X.

PROPOSIÇÃO 2: Seja f: [a,b] $\rightarrow$ [a,b] derivável. Então f é contração em [a,b] se e somente se existe 0 < k < 1, tal que $|f'(x)| \le k, \forall x \in (a,b)$.

DEMONSTRAÇÃO:

$\Leftarrow$ $|f(x)| \le k, 0 < k < 1, \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f é contração em [a,b]

Sejam x, y $\in$ (a,b), onde x $\ne$ y. Pelo Teorema do Valor Médio, existe c, entre x e y, tal que
$f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, então $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f(c)| \le k \quad (0 \langle k \langle 1)$

$\uparrow$
por hipótese

Portanto $|f(x) - f(y)| \le k . |x - y|$ (f é contração em [a,b]).

$\Rightarrow$ f é contração em [a,b] $\Rightarrow |f(x)| \le k, 0 < k < 1, \forall x \in (a,b)$

Sabemos que f'(x) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Para todo x e x + h em (a,b), temos $|f(x + h) - f(x)| \le k|x + h - x| = k|h|$ (pois f é contração).
Daí $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le k$ (desde que h $\ne$ 0).
Então: $|f'(x)| = \left|\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \lim\limits_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le k, \quad \forall x \in (a,b).$

➢Exemplo 3: f: IR$\rightarrow$ IR , f(x) = cosx, não é contração em IR

De fato, se f(x) = cosx fosse contração em IR então a função g: $[-\pi, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$ dada por x $\rightarrow$ cosx seria contração em $[-\pi, \pi]$.
Pela proposição acima teríamos:

$|g'(x)| = |-\text{senx}| = |\text{senx}| \le k < 1, \forall x \in (-\pi, \pi)$, o que é um absurdo, pois para:
$x = \frac{\pi}{2} \in (-\pi,\pi), g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Portanto como g não é contração em $[-\pi, \pi]$ então f não é contração em **IR.**

➢**Exemplo 4:** **f: IR → IR f(x) = cos(cosx), é contração em IR** .

De fato: $|f'(x)| = |[\cos(\cos x)]'| = |-\text{sen}(\cos x).(-\text{sen}x)| = |\text{sen}(\cos x)|.|\text{sen}x|$.
Sabemos que $|\text{sen}u| \leq |u|$, então:

$$\text{sen}(\cos x)|\text{sen}x| \leq |\cos x|\,|\text{sen}x| = |\cos x.\text{sen}x| \underset{\uparrow *}{=} \left|\frac{\text{sen}\,2x}{2}\right| = \frac{1}{2}.|\text{sen}\,2x| \leq \frac{1}{2}$$

$$*\ \text{sen}2x = 2.\text{sen}x.\cos x \implies \frac{\text{sen}\,2x}{2} = \text{sen}x.\cos x$$

Ou seja, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2},\ 0 < \frac{1}{2} < 1$

Portanto como vimos na proposição 2, essa derivada é limitada por $k = \frac{1}{2} < 1$ e sendo assim $f(x) = \cos(\cos x)$ é uma função contração em **IR**.

TEOREMA: "<u>PRINCÍPIO DO PONTO FIXO DE BANACH</u>"

Se (M,d) é um espaço métrico completo então toda contração f: M → M possui um único ponto fixo em M. Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e pusermos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... , $x_{n+1} = f(x_n)$, ... , a sequência (x_n) converge em M e $a = \lim x_n$ é o ÚNICO ponto fixo de f.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos, inicialmente, que a sequência (x_n) converge para um ponto $a \in M$, ou seja, $a = \lim x_n$.

Vamos mostrar que *a* é ponto fixo de f.
De fato, como f é contínua temos que:
$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$, ou seja, $f(a) = a$, logo *a* é ponto fixo de f.

Mostraremos agora que f não admite dois pontos fixos distintos.
De fato, se $f(a) = a$ e $f(b) = b$:
$d(f(x), f(y)) \leq c.d(a,b)$ (pois f é contração, por hipótese)
$d(a,b) \leq c.d(a,b) \implies d(a,b) - c.d(a,b) \leq 0$, portanto,
$0 \leq d(a,b).[1 - c] \leq 0$
Sabemos que $0 \leq c < 1$, então $1 - c > 0$, dessa maneira $d(a,b) = 0$, ou seja, $a = b$.

Só nos resta mostrar que a sequência (x_n) tem limite, ou seja, basta mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy (***Toda sequência de Cauchy, em espaço métrico completo, é convergente neste espaço***).

Ora,
$d(x_1,x_2) = d(f(x_0),f(x_1)) \leq c.d(x_0,x_1)$
$d(x_2,x_3) = d(f(x_1),f(x_2)) \leq c.d(x_1,x_2) \leq c.(c.d(x_0,x_1)) = c^2.d(x_0,x_1)$
...
Em geral, temos que:

$d(x_n,x_{n+1}) \leq c^n.d(x_0,x_1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Segue que, para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$:

$d(x_n,x_{n+p}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1},x_{n+p}) \leq [c^n + c^{n+1} + \ldots + c^{n+p-1}].d(x_0,x_1) =$

$= c^n [\, 1 + c + \ldots + c^{p-1}].d(x_0,x_1) = c^n.\dfrac{(1-c^p)}{1-c}\, d(x_0,x_1) \leq \dfrac{c^n.d(x_0,x_1)}{1-c}$ (pois $0 \leq c < 1$)

Assim, $0 \leq d(x_n,x_{n+p}) \leq \dfrac{c^n.d(x_0,x_1)}{1-c}$

Como $c^n \to 0$ quando $n \to \infty$ (lembre-se que $0 \leq c < 1$), segue que $d(x_n,x_{n+p}) \to 0$ quando $n \to \infty$, ou seja, (x_n) é sequência de Cauchy em M.

NOTA: **$f: X \to X$, $f^2(x) = f_0f(x) = f(f(x))$ é a 2ª iteração de f (ou 2º iterado de f). Em geral, $f^n(x) = f_0f_0f_0\ldots{}_0f(x)$, nvezes.**

TEOREMA: **Seja (X,d) espaço métrico completo e $f: X \to X$, tal que para algum n_0, o iterado f^{no} é contração em X. Então f tem um *único* ponto fixo, além disso, a sequência x_1, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ ... converge para o *único* ponto fixo.**

DEMONSTRAÇÃO:

$f^{no}: X \to X$ é contração em X e (X,d) é completo. Pelo "Princípio do Ponto Fixo de Banach", f^{no} tem um único ponto fixo x_0, isto é,

$f^{no}(x_0) = x_0$

Aplicando f em ambos os lados,

$f(f^{no}(x_0)) = f(x_0)$

$f^{no+1}(x_0) = f(f^{no}(x_0)) = f(x_0)$ (1)

Escrevendo $y_0 = f(x_0)$, tem-se:

$f^{no}(y_0) = f^{no}(f(x_0)) = f^{no+1}(x_0) \overset{(1)}{=} f(x_0) = y_0$

Ou seja, $f^{no}(y_0) = y_0$, então y_0 é ponto fixo de f^{no}.

Desse modo x_0 e y_0 são pontos fixos de f, mas pela unicidade do "Princípio do Ponto Fixo de Banach", devemos ter:

$x_0 = y_0 = f(x_0)$, ou seja, x_0 é ponto fixo de f^{no}.

APLICAÇÃO:

Aplicando os resultados acima para a sequência x_1, $\cos(x_1)$, $\cos(\cos(x_1))$,... temos que:

$f(x) = \cos x$ não é uma função contração em $\mathbb{R}$, mas $\cos(\cos x)$ é contração em $\mathbb{R}$, e toda função contração definida em um espaço métrico completo, tem um único ponto fixo que é o limite da sequência x1, cosx1, cos(cosx1), cos(cos(cosx1)),... ., ou seja, 0739085133...

Conclusão

Ao término do presente trabalho, a autora sente-se realizada em poder mostrar uma pequena parte da Trigonometria.

O objetivo maior é tornar a matemática ao todo, a mais prática e "gostosa" possível. Mostrou-se um pouco disso para a Trigonometria, espera-se mais desenvolvimentos para as demais áreas da Matemática.

Esse trabalho estará disponível na Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para uso esperado de professores e alunos que tenham essa mesma preocupação que a autora.

Bibliografia

1. ABRAMOWITZ, Milton; STEGUN, Irene A. *Handbook of Mathematical.* Dover Pub., INC, New York, 1965.

2. BALL, W. W. Rouse; COXETER, H. S. M. *Mathematical Recreations And Essays.* Dover Pub., INC, New York.

3. BRYANT, Victor. *Metrics Spaces Interation and Applications.* Cambridge University Press, 1985.

4. CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. Trigonom*etria e Números Complexos.* Copyright, 1992.

5. IMENES, Kuiz Márcio. *Revista do Professos de Matemática – número 13.* SBM, 1988.

6. KENNEDY, Edward S. *Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula: Trigonometria.* Atual editora, Ltda, 1994.

7. KUMAYAMA, Hideo. *Revista do Professor de Matemática – número 21.* SBM, 1992.

8. LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos.* 2ª edição, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

9. MARSDEN, J.; WEINSTEIN, A . *Calculus I.* 2nd, Springer – Verlage, New York, 1985.

10. NINIO, F. *American Jourscal Physics 61(11).* Novembro, 1993.

11. PEITGEN, Heinz-Otto; JURGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar. *Fractals for the classroom.* Montclair, NCTM, New York, 1991.

12. PETERSON, John A .; HASHISAKI, Joseph. *Teoria de La Aritmetica.* Centro Regional de Ayuda Tecnico, México, 1969.

13. *Revista do Professor de Matemática – número 22.* SBM, 1992.

14. ROSA NETO, Ernesto. *Revista do Professor de matemática – número 9.* SBM, 1986.

15. SCHELIN, Charles W. *Calculator Function Approximation.* Amer Math Monthly, Volume 90, Issues (May, 1983), 317-325.

16. SILVEIRA, J. F. Porto da. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática – número 2.* Vol. 8, Outubro: 1987.

17. WAGNER, Edward; OLIVEIRA, Aroldo de. *Revista do Professor de Matemática - número 4.* SBM, 1984.

18. WHITLEY, William Glenn. *Notas de aula de Métodos Numéricos.* Primeiro Semestre, 2000.