

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

OS TEOREMAS DE SINGULARIDADE NA GEOMETRIA
LORENTZIANA

Leandro Augusto Lichtenfelz

Florianópolis
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

OS TEOREMAS DE SINGULARIDADE NA GEOMETRIA
LORENTZIANA

Leandro Augusto Lichtenfelz

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação
em Matemática e Computação Científica da
Universidade Federal de Santa Catarina como
parte dos requisitos para a obtenção do título
de Bacharel em Matemática e Computação
Científica.

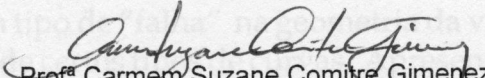
Orientador: Ivan Pontual Costa e Silva

Florianópolis
2009

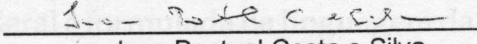
Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática - Habilitação Bacharelado em Matemática e Computação Científica, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 44/CCM/09.

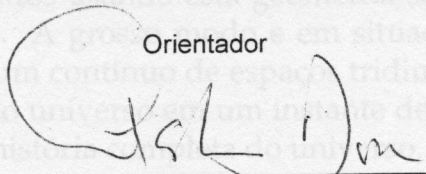
Introdução

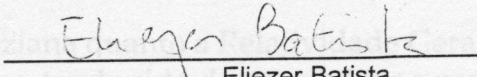
O objetivo deste trabalho é estudar os chamados Teoremas de Singularidade na Relatividade Geral. Muitos resultados recebem esta denominação hoje em dia, e todos estão ligados a algum tipo de singularidade. A variedade em questão, geralmente, incompleta causalmente. Apresentamos aqui dois deles, um provado por Stephen Hawking e Roger Penrose em conexão com as singularidades cosmológicas (conhecidas popularmente por *big bang* e *big crunch*) e outro de Roger Penrose, motivado por singularidades que ocorrem em certas geometrias descrevendo buracos negros. Evidentemente, demonstrações de existência de tais fenômenos são de grande interesse na Física. Contudo, muitas discussões ainda estão em andamento no sentido de determinar se as hipóteses necessárias para estes Teoremas serem verdadeiros são realísticas do ponto de físico, ou seja, se os modelos adequados para o nosso universo satisfazem tais hipóteses (ver, por exemplo, [HE], Capítulo 8). Por outro lado, existe um interesse geométrico intrínseco nos Teoremas de Singularidade, independente destas considerações.


Prof.ª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da Disciplina

Banca Examinadora:


Ivan Pontual Costa e Silva

Orientador

Celso Melchades Dória


Eliezer Batista

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar os chamados *Teoremas de Singularidade* na Relatividade Geral. Muitos resultados recebem esta denominação hoje em dia, e todos estão ligados a algum tipo de "falha" na geometria da variedade em questão; geralmente, incompletude de certos tipos de curvas. Apresentaremos aqui dois deles, um provado por Stephen Hawking, que trata de singularidades cosmológicas (conhecidas popularmente por *big-bang* e *big-crunch*) e outro de Roger Penrose, motivado por singularidades que ocorrem em certas geometrias descrevendo *buracos negros*. Evidentemente, demonstrações de existência de tais fenômenos são de grande interesse na Física. Contudo, muitas discussões ainda estão em andamento no sentido de determinar se as hipóteses necessárias para estes Teoremas serem verdadeiros são realísticas do ponto de físico, ou seja, se os modelos adequados para o nosso universo satisfazem tais hipóteses (ver, por exemplo, [HE], Capítulo 8). Por outro lado, existe um interesse geométrico intrínseco nos Teoremas de Singularidade, independente destas considerações.

A teoria da Relatividade Geral é formulada na linguagem da Geometria Lorentziana, e os modelos da teoria construídos usando esta geometria são o que chamamos tipicamente de espaços-tempos. A grosso modo e em situações favoráveis, um espaço-tempo é constituído de um contínuo de espaços tridimensionais, cada um representando uma fotografia do universo em um instante de tempo, colados um sobre o outro para formar uma história completa do universo. Apresentaremos alguns dos exemplos centrais da teoria no Capítulo 5, com um certo grau de detalhe, para ilustrar os Teoremas e as principais estruturas definidas ao longo do trabalho.

Tanto a Geometria Lorentziana quanto a Relatividade Geral, que a motivou, são teorias relativamente recentes, tendo sido desenvolvidas a partir do começo século XX. Os pré-requisitos para nos aprofundarmos em temas como estes são vários, de modo que nos foi imprescindível uma seleção cuidadosa do que incluir, para evitar um trabalho excessivamente extenso. Optamos por assumir uma certa base de conhecimentos de Geometria Diferencial clássica e Geometria Riemanniana. Mesmo assim, discutimos brevemente as definições e conceitos básicos, dando mais atenção aos aspectos que se alteram na passagem do contexto Riemanniano para o Lorentziano. Os dois primeiros capítulos, portanto, omitem as demonstrações, uma vez que todas elas podem ser encontradas nas referências e os resultados apresentados não são o foco do trabalho.

Capítulo 1

Noções Básicas

Este capítulo servirá para fixar a notação e introduzir algumas definições e teoremas básicos, que serão apenas brevemente discutidos. Um conhecimento prévio de aspectos elementares de variedades diferenciáveis e Geometria Riemanniana será assumido, conforme já mencionados. Tais aspectos podem ser encontrados, por exemplo, nos três primeiros capítulos da referência [Man].

1.1 Tensor Métrico

Lembramos que um campo tensorial $(0, 2)$ simétrico \mathbf{g} associa a cada ponto p de uma variedade diferenciável M uma forma bilinear simétrica $\mathbf{g}_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Dizer que \mathbf{g} é não-degenerado significa que para cada $p \in M$, \mathbf{g}_p o é, ou seja, dado $v \in T_pM$, $\mathbf{g}_p(v, w) = 0$ para todo $w \in T_pM$ implica $v = 0$. Se o índice η_p da forma quadrática \mathbf{g}_p for o mesmo para todo $p \in M$, dizemos que este é o *índice de \mathbf{g}* .

No Apêndice A, discutimos alguns fatos gerais a respeito de espaços vetoriais munidos de uma forma bilinear simétrica não-degenerada (produto escalar).

Definição 1.1.1. *Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n . Um tensor métrico (ou métrica) \mathbf{g} em M^n é um campo tensorial do tipo $(0, 2)$ que é suave, simétrico, não-degenerado e de índice constante η .*

Uma variedade diferenciável M^n , munida de um tensor métrico \mathbf{g} chama-se *variedade Pseudo-Riemanniana*. Alternativamente, usaremos a notação de par ordenado (M^n, \mathbf{g}) , conforme for conveniente. Vamos ressaltar dois casos: se $\eta = 0$, isto é, \mathbf{g} é positiva definida em todo ponto, então M^n é dita ser uma *variedade Riemanniana*. Se $\eta = 1$ e $n > 1$, M^n será chamada de *variedade de Lorentz*. Usaremos frequentemente a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle_p \equiv \mathbf{g}_p$, ou apenas $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eventualmente, o índice η é também chamado de *índice de M^n* , quando não há possibilidade de confusão.

Para cada vetor $v \in T_pM$, existem três possibilidades mutuamente exclusivas, que definem o *caráter causal* de v , como a seguir.

- (i) Se $\langle v, v \rangle > 0$, v é um vetor *tipo-espaço*.
- (ii) Se $\langle v, v \rangle < 0$, v é *tipo-tempo*.

(iii) Se $\langle v, v \rangle = 0$, e $v \neq 0$, v é tipo-luz.

Um vetor v que é tipo-tempo ou tipo-luz é dito *causal*. Considera-se o vetor nulo como sendo tipo-espaço.

Dadas $(M^n, \mathbf{g}^M), (N^k, \mathbf{g}^N)$ variedades Pseudo-Riemannianas, é possível construir a variedade produto $(M \times N)^{n+k}$ e torná-la uma variedade Pseudo-Riemanniana, de maneira natural. Para isto, basta definir $\mathbf{g} := \pi_M^*(\mathbf{g}^M) + \pi_N^*(\mathbf{g}^N)$, onde π_M e π_N são as projeções sobre M^n e N^k , respectivamente, e o asterisco em sobrescrito indica o *pullback* pela aplicação correspondente.

Outro conceito importante é o de *isometria*, que aqui desempenha papel similar ao dos homeomorfismos na topologia, ou dos isomorfismos lineares na álgebra linear. Dizemos que um difeomorfismo $\Phi : M^n \rightarrow N^n$ é *conforme* se $\Phi^*(\mathbf{g}^N) = f\mathbf{g}^M$, onde $f \in \mathfrak{F}(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é de classe } C^\infty\}$ é uma função sempre positiva ou sempre negativa. A definição abaixo trata de alguns casos especiais.

Definição 1.1.2. *Seja $\Phi : M^n \rightarrow N^n$ um difeomorfismo entre duas variedades Pseudo-Riemannianas. Se $\Phi^*(\mathbf{g}^N) = c\mathbf{g}^M$, para alguma constante $c \neq 0$, dizemos que Φ é uma homotetia com coeficiente c . Os casos $c = 1$ e $c = -1$ recebem o nome de isometria e anti-isometria, respectivamente.*

Existem ainda as *isometrias locais*, que são aplicações suaves $\Phi : M^n \rightarrow N^n$ tais que, para todo $p \in M^n$, existe $U \subseteq M^n$ vizinhança aberta de p tal que $\Phi|_U : U \rightarrow \Phi(U)$ é uma isometria. Em particular, Φ é um difeomorfismo local.

Dado $\xi = (x_1, \dots, x_n) : U \subseteq M^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sistema de coordenadas local, o tensor métrico \mathbf{g} de M^n é algumas vezes escrito na notação clássica

$$\mathbf{g} \equiv ds^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{em } U).$$

No caso de $M^n = \mathbb{R}^n$, por exemplo, devido ao isomorfismo canônico $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$, o produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fornece um tensor métrico \mathbf{g} tal que $\mathbf{g}_{ij} = \delta_{ij}$, no sistema de coordenadas global dado pela função identidade, o que nos permite escrever

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 \quad (\text{em } \mathbb{R}^n).$$

Observe que com \mathbf{g} assim definido \mathbb{R}^n é uma variedade Riemanniana. Modificando os sinais das ν primeiras componentes da diagonal de \mathbf{g} , $1 \leq \nu \leq (n-1)$, obtemos uma variedade Pseudo-Riemanniana, de índice ν , que denotaremos por \mathbb{R}_ν^n . Explicitamente, \mathbb{R}_ν^n é \mathbb{R}^n com a métrica¹

$$ds^2 = -dx_0^2 - \dots - dx_{\nu-1}^2 + dx_\nu^2 + \dots + dx_{n-1}^2 \quad (\text{em } \mathbb{R}_\nu^n).$$

¹Quando $\nu \geq 1$, é tradicional escrever a primeira coordenada como x_0 ao invés de x_1 .

Deste ponto em diante, vamos omitir a referência explícita à dimensão das variedades, e denotar M^n simplesmente por M , se não houver risco de confusão. Se V, W são campos vetoriais em M , também usaremos $\langle V, W \rangle$ ao invés de $\mathbf{g}(V, W)$ para denotar a função que a cada $p \in M$ associa o número real $\mathbf{g}_p(V(p), W(p))$.

O conjunto $\mathfrak{X}(M)$ forma naturalmente um anel, com as operações de soma e produto ponto a ponto. Sobre este anel, temos o módulo $\mathfrak{X}(M) := \{X : M \rightarrow TM \mid X \text{ de classe } C^\infty, X(p) \in T_pM, \forall p \in M\}$ dos campos vetoriais suaves em M . Cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ age naturalmente como uma derivação em $\mathfrak{F}(M)$, e denotamos por $Xf \in \mathfrak{F}(M)$ o resultado dessa ação em um elemento $f \in \mathfrak{F}(M)$. Denotaremos o Colchete de Lie de $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ por $[X, Y] := XY - YX$.

1.2 Conexão

Definição 1.2.1. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma conexão (afim) ∇ em M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

satisfazendo, para quaisquer $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

- (i) $\nabla_V(X + \alpha W) = \nabla_V X + \alpha \nabla_V W$,
- (ii) $\nabla_{X+fV} W = \nabla_X W + f \nabla_V W$,
- (iii) $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f \nabla_V W$.

Conexões são em geral estruturas independentes de métricas. Mas se um tensor métrico está presente, vale o seguinte resultado fundamental:

Teorema 1.2.2. *Dada qualquer variedade Pseudo-Riemanniana M , existe uma única conexão ∇ em M satisfazendo*

- (iv) $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$,
- (v) $X\langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle$,

para quaisquer $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Esta é a *conexão de Levi-Civita*. Uma conexão qualquer é dita *simétrica* quando satisfaz o item (iv) acima, e *compatível com a métrica* quando satisfaz (v).

Uma equação que define a conexão de Levi-Civita de forma única é conhecida por *fórmula de Koszul*:

$$2\langle \nabla_V W, X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle.$$

$\nabla_V W$ chama-se *derivada covariante de W em relação a V* . É conveniente introduzir símbolos especiais para denotar os coeficientes de $\nabla_V W$, que é um campo vetorial, no caso em que V e W são campos coordenados de uma certa carta local.

Fixaremos a partir de agora uma variedade Pseudo-Riemanniana M , sobre a qual nossas construções geométricas serão feitas. Em particular, ∇ denotará sempre a conexão de Levi-Civita de M .

Convém mencionar algumas consequências da Definição 1.2.1. A propriedade (ii), que chamamos de $\mathfrak{X}(M)$ -linearidade, garante que a dependência de ∇ na primeira entrada é *pontual*, ou seja, o valor do campo $\nabla_X Z$ em um ponto $p \in M$ não depende dos valores de X em qualquer ponto diferente de p . Contudo, ∇ atua como uma *derivada* na segunda entrada, e portanto o valor de $\nabla_X Y$ em p depende dos valores de Y não só em p , mas numa vizinhança aberta do mesmo. Mais precisamente, vale a

Proposição 1.2.3. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$.*

- (i) *Se $X(p) = Y(p)$, então $\nabla_X Z(p) = \nabla_Y Z(p)$, $\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$.*
- (ii) *Se existe $U \subseteq M$ vizinhança aberta de p tal que $X(q) = Y(q)$, $\forall q \in U$, então $\nabla_Z X(p) = \nabla_Z Y(p)$, $\forall Z \in \mathfrak{X}(M)$. \square*

Faz sentido, portanto, escrever $\nabla_x Y(p)$ para um vetor $x \in T_p M$. Entende-se ao escrevermos desta maneira que estamos falando de $\nabla_X Y(p)$, onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer campo vetorial tal que $X(p) = x$, uma vez que o resultado é independente da escolha particular de X . De forma análoga faz sentido escrever $\nabla_X Y$ ainda que X e Y sejam campos vetoriais localmente definidos, isto é, em um aberto $U \subseteq M$.

Seja $\xi = (x_1, \dots, x_n) : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas local, e $\partial_1, \dots, \partial_n$ os campos coordenados associados a ξ . Os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k relativos a ∇ e ξ são dados por

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (\text{em } U). \quad (1.1)$$

Usando a fórmula de Koszul, podemos obter a expressão clássica para os símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n g^{ia} \left\{ \frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a} \right\} \quad (\text{em } U). \quad (1.2)$$

A derivada covariante pode ser estendida de maneira natural para campos vetoriais sobre curvas. Lembramos que dada uma curva suave $\gamma : I \rightarrow M$, um *campo vetorial sobre γ* é uma aplicação $X : I \rightarrow TM$, tal que $X(t) \in T_{\gamma(t)} M$, $\forall t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Denotamos por $\mathfrak{X}(\gamma)$ o conjunto de todos os campos vetoriais suaves sobre γ . Note que, se $V \in \mathfrak{X}(M)$, então $V|_\gamma := (V \circ \gamma) \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Teorema 1.2.4. *(Derivada covariante induzida sobre curvas) Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva suave. Existe uma única aplicação: $\nabla^\gamma : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ satisfazendo:*

- (i) $\nabla^\gamma(rX + Y) = r\nabla^\gamma X + \nabla^\gamma Y$,

- (ii) $\nabla^\gamma(hX) = \frac{dh}{dt}X + h\nabla^\gamma X$,
 (iii) $\nabla^\gamma(V \circ \gamma) = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} V$,
 (iv) $\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle = \langle \nabla^\gamma X, Y \rangle + \langle X, \nabla^\gamma Y \rangle$,

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $h \in \mathfrak{F}(I)$, $r \in \mathbb{R}$ e $V \in \mathfrak{X}(M)$.

A terceira condição nos diz que, essencialmente, ∇^γ é a derivada ∇ tomada sempre no sentido do vetor tangente à curva γ , isto é, γ' . Em coordenadas locais em $\gamma(t_0)$, com $t_0 \in I$,

$$(\nabla^\gamma X)(t_0) = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{dX^i}{dt}(t_0) \partial_i|_{\gamma(t_0)} + X^i(t_0) \nabla_{\gamma'(t_0)} \partial_i \right\}.$$

Usaremos a notação $X' := \nabla^\gamma X$ quando não houver risco de confusão. Dado $W \in \mathfrak{X}(\gamma)$, dizemos que W é *paralelo ao longo de γ* se $\nabla^\gamma W = 0$.

1.3 Geodésicas

Definição 1.3.1. *Seja $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva suave. Se o campo $\gamma' : I \rightarrow TM$ de vetores tangentes for um campo paralelo, isto é, se $\nabla^\gamma(\gamma') \equiv \gamma'' = 0$, então γ é chamada geodésica.*

Intuitivamente, geodésicas são curvas de aceleração zero. Com respeito a um sistema de coordenadas $\xi = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, a equação $\gamma'' = 0$ se escreve como

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0, \quad (1.3)$$

para cada componente k de γ'' . Estas n equações chamam-se *equações geodésicas*. Como mostra o teorema abaixo, o vetor velocidade em um ponto sobre uma geodésica essencialmente determina a curva, da mesma maneira que as condições iniciais de uma equação diferencial ordinária determinam uma única solução (e de fato por razão análoga).

Teorema 1.3.2. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$ geodésicas. Se existir um número $t_0 \in I$ para o qual $\gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0)$, então $\gamma_1 = \gamma_2$.*

Se os intervalos onde γ_1 e γ_2 estão definidas forem diferentes, elas ao menos coincidem onde quer que eles se interceptem. Um resultado importante que é obtido como consequência do Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais Ordinárias é o seguinte:

Teorema 1.3.3. *Seja $v \in T_p M$. Existe uma única geodésica $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ satisfazendo:*

- (i) $0 \in I_v$ e $\gamma_v'(0) = v$,
 (ii) Se $\sigma : J \rightarrow M$ é uma geodésica, com $0 \in J$, para a qual $\sigma'(0) = v$, então $J \subseteq I_v$ e $\sigma = \gamma_v|_J$.

γ_v é dita ser *maximal*.

A noção de caráter causal pode ser estendida diretamente para curvas suaves. Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é dita ser *tipo-espaço* se o vetor $\gamma'(t)$ é tipo-espaço, para todo $t \in I$; analogamente para curvas *tipo-tempo*, *tipo-luz* e *causais*.

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva suave por partes mas não suave, então existem pontos $s_1, \dots, s_k \in (a, b)$ onde γ tem *quebras*, isto é, os vetores $\gamma'(s_i^+), \gamma'(s_i^-) \in T_{\gamma(s_i)}M$, derivada de γ pela direita e pela esquerda, respectivamente, são diferentes e $\gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ é suave, para $i = 2, \dots, k$. Neste caso, γ é dita tipo-tempo [resp. tipo-luz, causal] se cada restrição $\gamma|_{[s_{i-1}, s_i]}$ é tipo-tempo [resp. tipo-luz, causal] e

$$\langle \gamma'(s_i^+), \gamma'(s_i^-) \rangle \leq 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

A motivação para esta condição extra ficará clara mais adiante (Capítulo 3), quando definirmos os chamados cones temporais.

Evidentemente, uma curva suave ou suave por partes qualquer pode não ter nenhum caráter causal definido. No entanto, como uma geodésica σ satisfaz $\sigma'' \equiv 0$, o Teorema 1.2.4, item (iv) implica que a aplicação $t \mapsto \langle \sigma', \sigma' \rangle$ é constante, de modo que geodésicas sempre possuem um caráter causal bem definido.

Podemos definir o comprimento de uma curva suave por partes em uma variedade Pseudo-Riemanniana M , de maneira análoga àquela que fazíamos para curvas no plano ou no espaço, no contexto da geometria diferencial clássica.

Definição 1.3.4. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave por partes em M . O comprimento de arco de γ é dado por*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

onde $\|\gamma'(s)\| := |\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle|^{1/2}, \forall s \in [a, b]$.

Definição 1.3.5. *Seja $p \in M$. Considere o subconjunto $\mathbb{D}_p \subseteq T_pM$ de todos os vetores $v \in T_pM$ tais que o domínio da geodésica maximal γ_v inclui o intervalo $[0, 1]$. Definimos a aplicação exponencial de M em p como a função que leva cada $v \in \mathbb{D}_p$ em $\exp_p(v) = \gamma_v(1) \in M$.*

É possível mostrar² que \mathbb{D}_p é aberto em $T_pM \cong \mathbb{R}^n$; mais geralmente, o domínio $\mathbb{D} \subseteq TM$, que é a união de todos os \mathbb{D}_p para cada $p \in M$, é aberto em TM , e $\exp : \mathbb{D} \subseteq TM \rightarrow M$ é uma função suave.

A aplicação exponencial permite obter uma comparação local entre M e seu plano tangente, em cada ponto. Isso dá origem, na verdade, a um sistema de coordenadas naquele ponto, conforme o seguinte teorema.

Teorema 1.3.6. *Para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $\tilde{U} \subseteq T_pM$, contendo 0, tal que a restrição $\exp_p|_{\tilde{U}}$ é um difeomorfismo sobre um aberto U em torno de p .*

²Ver referência [Man], capítulo dois.

Quando o aberto $\tilde{U} \subseteq T_p M$ no teorema acima é *estrelado*, isto é, $v \in \tilde{U} \Rightarrow tv \in \tilde{U}$, para todo $t \in [0, 1]$, então dizemos que $U \subseteq M$ é uma *vizinhança normal* de $p \in M$.

Um conjunto de vetores linearmente independentes $\beta = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq T_p M$ forma uma *base ortonormal* se $\langle e_i, e_j \rangle = \eta_j \delta_{ij}$, onde $\eta_j = \pm 1$, de acordo com o caráter causal de e_j . Em particular, cada elemento desta base é ou tipo-tempo, ou tipo-espaço. É sempre possível obter uma base com estas propriedades em qualquer espaço vetorial munido de produto escalar, conforme a Proposição A.11.

Seja $p \in U \subseteq M$, U vizinhança normal e $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. Como U é difeomorfo a \tilde{U} via $\exp_p|_{\tilde{U}}$, podemos associar, para cada $x \in U$, as n componentes de $v_x = \exp_p|_{\tilde{U}}^{-1}(x)$ com respeito à base β . Isto fornece um sistema de coordenadas, chamado *sistema de coordenadas normal*. Nestas coordenadas, temos:

$$(i) \ g_{ij}(p) = \delta_{ij} \eta_j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$(ii) \ \Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

onde $\eta_j = \langle e_j, e_j \rangle$. Existe uma família de geodésicas especiais em uma vizinhança normal U de p , chamadas *geodésicas radiais*, que vão de p até cada um dos pontos de U .

Teorema 1.3.7. *Seja $p \in M$, $U \subseteq M$ vizinhança normal de p . Então, para cada $q \in U$, existe uma única geodésica $\sigma_{pq} : [0, 1] \rightarrow U$ com $\sigma_{pq}(0) = p$, $\sigma_{pq}(1) = q$.*

Observação 1.3.8. Se M for uma variedade Riemanniana, então σ_{pq} é a curva de menor comprimento, dentre as curvas que permanecem em U , ligando p a q . O análogo da situação acima no caso em que M é Lorentziana é o seguinte: se existe uma curva do tipo tempo ligando p a q em U , então σ_{pq} é do tipo tempo e é a curva de maior comprimento, dentre aquelas de U , que ligam p a q (cf. referência [O'NEILL], Proposição 5.34).

Definição 1.3.9. *Se $p \in M$, uma vizinhança convexa de p é um aberto U contendo p tal que, $\forall q \in U$, existe um subconjunto aberto $\mathbb{D}_q^* \subseteq \mathbb{D}_q$, estrelado e contendo 0, tal que $U = \exp_q(\mathbb{D}_q^*)$ difeomorficamente. Dito de outra forma, U é uma vizinhança normal de cada um de seus pontos.*

Teorema 1.3.10. *Todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança convexa. \square*

Seja $U \subseteq M$ uma vizinhança convexa de p . Então, em U , fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} \Delta : U \times U &\rightarrow TM \\ (p, q) &\mapsto \vec{p}\vec{q}, \end{aligned}$$

onde $\vec{p}\vec{q} := \sigma'_{pq}(0)$, e $\sigma_{pq} : [0, 1] \rightarrow U$ é a única geodésica tal que $\sigma_{pq}(0) = p$ e $\sigma_{pq}(1) = q$. Usaremos no futuro o seguinte resultado a respeito de Δ , que pode ser encontrado na referência [O'NEILL], Capítulo 5.

Proposição 1.3.11. *Se $U \subseteq M$ é um aberto convexo, então $\Delta : U \times U \rightarrow TM$ é um difeomorfismo sobre sua imagem, $\Delta(U \times U)$, que é um aberto de TM . \square*

1.4 Curvatura

Definição 1.4.1. *Seja M uma variedade Pseudo-Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita. O tensor de Riemann \mathbf{R} de M (às vezes dito tensor de curvatura) é*

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\mapsto \mathbf{R}_{XY}Z, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{R}_{XY}Z := \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_YZ + \nabla_Y\nabla_XZ$.

Pode-se verificar que \mathbf{R} é $\mathfrak{F}(M)$ -linear em cada um de seus argumentos. Portanto, de forma análoga ao que fizemos para conexões, faz sentido escrever, $\forall x, y, z \in T_pM$, o vetor $\mathbf{R}_{xy}z \in T_pM$, entendido como $\mathbf{R}_{XY}Z$, onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ são escolhidos de forma que $X(p) = x$, $Y(p) = y$ e $Z(p) = z$. A $\mathfrak{F}(M)$ -linearidade então garante que $\mathbf{R}_{xy}z$ não depende da escolha feita. Além disso, para cada $x, y, z \in T_pM$, podemos definir a aplicação linear

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xy} : T_pM &\rightarrow T_pM \\ z &\mapsto \mathbf{R}_{xy}z. \end{aligned}$$

Interpretado desta maneira, \mathbf{R} possui as seguintes propriedades.

- (i) $\mathbf{R}_{xy} = -\mathbf{R}_{yx}$,
- (ii) $\langle \mathbf{R}_{xy}v, w \rangle = -\langle \mathbf{R}_{xy}w, v \rangle$,
- (iii) $\mathbf{R}_{xy}z + \mathbf{R}_{zx}y + \mathbf{R}_{yz}x = 0$, (1ª Identidade de Bianchi)
- (iv) $\langle \mathbf{R}_{xy}v, w \rangle = \langle \mathbf{R}_{vw}x, y \rangle$, (Simetria por pares)

para quaisquer $x, y, v, w \in T_pM$.

Um conceito relacionado com \mathbf{R} é o de *curvatura seccional*. Dados $v, w \in T_pM$ linearmente independentes, o subespaço gerado por eles, $\Pi_{v,w} \equiv \text{span}\{v, w\}$, é dito ser um *plano tangente* a M em p . Considere a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle v, w \rangle & \langle w, w \rangle \end{bmatrix}.$$

Claramente, o determinante de Q é diferente de zero se, e somente se, o plano $\Pi_{v,w}$ é não-degenerado (isto é, $g_p|_{\Pi_{v,w}}$ é não-degenerada).

Definição 1.4.2. *Seja $\Pi_{v,w} \subseteq T_pM$ um plano tangente não-degenerado. Nesse caso, a curvatura seccional de $\Pi_{v,w}$ é definida por*

$$K(\Pi_{v,w}) = \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{\det(Q)}.$$

Um cálculo simples mostra que K não depende dos geradores v, w , e portanto pode ser pensado como uma curvatura associada ao plano em si. Quando $\dim(M) = 2$, temos um único subespaço de T_pM de dimensão 2, a saber, ele próprio. Se $M \subseteq \mathbb{R}^3$ e o tensor métrico de M for aquele induzido pelo produto interno usual de \mathbb{R}^3 , ao calcular a curvatura seccional de M obtemos a *curvatura Gaussiana* da geometria clássica de superfícies.

Contraindo o tensor \mathbf{R} , obtemos dois outros invariantes geométricos importantes. São eles o *tensor de Ricci*, que é a única contração não-nula (a menos de sinal) de \mathbf{R} , e a *curvatura escalar* \mathbf{S} , que é a contração (métrica) de \mathbf{R} .

As expressões locais para estes tensores calculadas em um sistema de coordenadas $\xi = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ são

$$\mathbf{Ric}_{ab} = \sum_{m=1}^n \mathbf{R}_{abm}^m \quad e \quad \mathbf{S} = \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{ij} \mathbf{Ric}_{ij} \quad (\text{em } U).$$

É tradicional dizer que M tem *curvatura constante* quando sua curvatura seccional é constante, isto é, tem o mesmo valor numérico em toda a variedade M . Neste caso, o tensor de curvatura \mathbf{R} adquire uma forma mais simples, como mostra a seguinte Proposição.

Proposição 1.4.3. *O tensor de curvatura \mathbf{R} de uma variedade Pseudo-Riemanniana M com curvatura constante K_0 é dado por*

$$\mathbf{R}_{xyz} = K_0(\langle z, x \rangle y - \langle z, y \rangle x), \quad \forall x, y, z \in T_p M, \forall p \in M. \quad \square$$

1.5 Extensibilidade e Completude

Se considerarmos $M = \mathbb{R}^n$ como variedade Riemanniana da forma padrão, isto é, com o tensor métrico vindo do produto interno usual, é fácil calcular que as geodésicas são precisamente todas as curvas da forma $\gamma(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$, onde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Estas possuem a notável propriedade de estarem definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Claramente, esta condição não se verifica em geral. De fato, se removermos um ponto x de \mathbb{R}^n , as geodésicas que antes passavam por x agora não podem estar definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Estamos interessados nas geodésicas maximais, cujos domínios são, por definição, os maiores possíveis.

Definição 1.5.1. *Seja M uma variedade Pseudo-Riemanniana. Se toda geodésica maximal $\gamma : I \rightarrow M$ está definida em toda reta, ou seja, $I = \mathbb{R}$, então M é dita ser geodesicamente completa.*

Na verdade, podemos ser mais específicos e distinguir três tipos de completude, de acordo com o caráter causal das geodésicas em questão: completude tipo-espaco, tipo-tempo e tipo-luz. Existem exemplos que mostram que essas três formas de completude são logicamente independentes (ver [O'NEILL], pg. 154).

Dada uma geodésica qualquer $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, podemos supor sem perda de generalidade que $a = 0$, pois reparametrizações (translações) da forma $\tilde{t} = t - a$ satisfazem $\gamma'(t) = \gamma'(\tilde{t})$, e em particular são ainda geodésicas.

Extensões do domínio $(0, b)$ à direita ou à esquerda podem ser tratadas da mesma maneira. O seguinte resultado é consequência da existência de vizinhanças normais em todo ponto.

Teorema 1.5.2. *Se uma geodésica $\gamma : [0, b) \rightarrow M$ admite extensão (contínua) $\tilde{\gamma} : [0, b] \rightarrow M$, então existe $\epsilon > 0$ tal que o domínio de γ pode ser estendido até $[0, b + \epsilon)$. Uma tal geodésica é dita extensível (à direita). Do contrário, é dita inextensível (à direita).*

Extensibilidade à esquerda é definida de forma análoga. Claramente, é suficiente analisar extensibilidade à direita de geodésicas definidas em intervalos da forma $[0, b)$. Abaixo, temos alguns resultados nessa direção.

Fixe $\gamma : [0, b) \rightarrow M$ geodésica. Em princípio uma extensão $\tilde{\gamma} : [0, b + \epsilon) \rightarrow M$ não precisaria sequer ser diferenciável, e muito menos uma geodésica. Surpreendentemente, a existência de extensões contínuas implica na existência de extensões geodésicas.

Teorema 1.5.3. *γ é extensível como geodésica se, e somente se, admite uma extensão contínua. \square*

Teorema 1.5.4. *γ é extensível como geodésica se, e somente se, existe $p \in M$ tal que para toda seqüência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, b)$, convergindo para b , a seqüência $\{\gamma(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ em M converge (no sentido topológico) para p . \square*

Dada $\alpha : I \rightarrow M$ qualquer, se existe uma reparametrização, isto é, um difeomorfismo $s : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I$ tal que $\alpha \circ s$ é geodésica, então α é dita ser uma *pré-geodésica*.³ Note que pré-geodésicas também possuem caráter causal bem definido.

Teorema 1.5.5. *Se $\alpha : [0, b) \rightarrow M$ é uma pré-geodésica tipo-tempo ou tipo-espaço, então α é inextensível (à direita) se, e somente se, possui comprimento infinito.*

Estes são os critérios que usaremos neste trabalho. Num sentido mais amplo, temos também o problema da extensibilidade da própria variedade M . A pergunta é: seria possível ver M como uma subvariedade aberta de outra variedade maior, \tilde{M} ? No caso do exemplo no início desta seção, de \mathbb{R}^n menos um ponto, a resposta certamente é sim. Para formular a questão mais precisamente, damos a seguinte definição.

Definição 1.5.6. *Uma variedade Pseudo-Riemanniana conexa M é extensível quando existem uma variedade Pseudo-Riemanniana $\tilde{M} \neq M$ e uma isometria $\Phi : M \rightarrow U \subseteq \tilde{M}$ tal que \tilde{M} é conexa e U é aberto em \tilde{M} (em particular, $\text{ind}(\tilde{M}) = \text{ind}(M)$).*

³Convém observar que se $\alpha : I \rightarrow M$ já é uma geodésica, dada uma reparametrização $s : J \rightarrow I$, $\alpha \circ s$ é também uma geodésica se e somente se $s(t) = at + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Tais reparametrizações são ditas *afins*.

No caso em que M não é conexa, M é extensível quando ao menos uma de suas componentes conexas o for. Uma variedade que não admite extensão é dita ser *maximal* ou simplesmente *inextensível*.

Variedades compactas, por exemplo, são inextensíveis. De fato, se M é compacta e $\Phi : M \rightarrow U \subseteq \tilde{M}$ é uma isometria, com U aberto em \tilde{M} , a continuidade de Φ implica que U é também compacto em \tilde{M} , portanto fechado. Se \tilde{M} é conexa, temos necessariamente $U = \tilde{M}$.

1.6 Subvariedades Pseudo-Riemannianas

No contexto Pseudo-Riemanniano, nem toda *subvariedade diferenciável* será automaticamente uma *subvariedade Pseudo-Riemanniana*, essencialmente porque a "métrica" induzida na subvariedade pode ser degenerada, ou não possuir um índice bem definido. As demonstrações e demais detalhes nesta seção podem ser encontradas no Capítulo 4 de [O'NEILL].

Definição 1.6.1. *Seja M uma variedade Pseudo-Riemanniana com tensor métrico \mathbf{g}^M e N subvariedade diferenciável de M . Dizemos que N é uma subvariedade Pseudo-Riemanniana de M se $\mathbf{g}^N := j^*(\mathbf{g}^M)$ define um tensor métrico em N , onde $j^*(\mathbf{g}^M)$ denota o pullback do tensor métrico de M pela inclusão $j : N \rightarrow M$.*

Exemplo 1.6.2. *Seja $M = \mathbb{R}_1^3$. O conjunto $N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ define uma subvariedade Pseudo-Riemanniana de M , porque em cada ponto $p = (x_0, y_0, z_0) \in N$, o espaço tangente $T_p N$ é gerado pelos vetores $v_1(p) = (0, 0, 1)$ e $v_2(p) = (-y_0, x_0, 0)$, sendo v_1 tipo-tempo, $\langle v_1(p), v_1(p) \rangle = -1$, e v_2 tipo-espaço, $\langle v_2(p), v_2(p) \rangle = 1$. Assim, N é uma variedade de Lorentz.*

Exemplo 1.6.3. *Tome novamente $M = \mathbb{R}_1^3$, mas $N = \{(x, y, y) \in \mathbb{R}_1^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$. Neste caso N não é subvariedade Pseudo-Riemanniana, porque dado qualquer $p \in N$, uma base para $T_p N$ é $v_1(p) = (0, 1, 1)$ e $v_2(p) = (1, 0, 0)$; contudo, $\langle v_1(p), v_1(p) \rangle = 0$ e $\langle v_1(p), v_2(p) \rangle = 0$, o que implica $\langle v_1(p), w \rangle = 0$ para todo $w \in T_p N$, ainda que $v_1(p) \neq 0$. Portanto a "métrica" induzida em N é degenerada.*

Sabemos da Geometria Diferencial de variedades que se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, a imagem inversa $f^{-1}(c)$ de um valor regular c de f é uma hipersuperfície suave $N \subseteq M$. A próxima

Proposição é uma adaptação deste resultado para o caso Pseudo-Riemanniano.

Proposição 1.6.4. *Seja (M, g) uma variedade Pseudo-Riemanniana, $f \in \mathcal{F}(M)$ e $c \in \text{Im}(f)$. Então, $N := f^{-1}(c)$ é uma subvariedade Pseudo-Riemanniana (de codimensão 1) de M se e somente se tivermos $g(\text{grad}(f), \text{grad}(f)) > 0$ em toda N ou $g(\text{grad}(f), \text{grad}(f)) < 0$ em toda N . No primeiro caso temos $\text{ind}(N) = \text{ind}(M)$ e no segundo $\text{ind}(N) = \text{ind}(M) - 1$. \square*

Fixamos, de agora em diante, uma variedade Pseudo-Riemanniana M e uma subvariedade Pseudo-Riemanniana N de M .

Identificaremos de maneira natural o espaço $T_p N$ com $dj_p(T_p N) \subseteq T_p M$, para cada $p \in N$. Observe que, mediante essa identificação, dados quaisquer $p \in N$ e $v, w \in T_p N$, temos $\mathbf{g}^N(v, w) = \mathbf{g}^M(v, w)$, por definição, de modo que podemos escrever simplesmente $\mathbf{g}(v, w)$ ou $\langle v, w \rangle$ sem perigo de confusão.

Contudo, a geometria induzida em N difere em geral da geometria de M ; por exemplo, geodésicas de N não necessariamente são geodésicas quando vistas em M . Esta diferença é medida por um tensor, conforme veremos.

Definição 1.6.5. Um campo vetorial sobre $j : N \rightarrow M$, também chamado de campo vetorial sobre N , é uma aplicação suave $X : N \rightarrow TM$ satisfazendo $(\Pi \circ X)(p) = p$, $\forall p \in N$, onde $\Pi : TM \rightarrow M$ é a projeção canônica.

Denotamos o conjunto de todos os campos vetoriais sobre N por $\overline{\mathfrak{X}}(N)$. Note que $\overline{\mathfrak{X}}(N)$ é um módulo sobre $\mathfrak{F}(N)$.

Cada subespaço $T_p N$ de $T_p M$ é não-degenerado, por definição. Isto induz uma decomposição única da forma

$$T_p M = T_p N + T_p N^\perp,$$

onde $T_p N^\perp$ é o subespaço (também não-degenerado; ver Apêndice A) dos vetores $v \in T_p M$ tais que $\langle v, w \rangle = 0$, $\forall w \in T_p N$. Vale a relação $ind(M) = ind(N) + coind(N)$ entre os índices de M e N , onde $coind(N)$ é o índice da forma bilinear g_p restrita a $T_p N^\perp$. Aqueles vetores em $T_p N^\perp$ são ditos *normais* a N , em oposição àqueles de $T_p N$, que são *tangentes*.

Dado um vetor $v \in T_p M$, escrevemos

$$v = \tan(v) + \text{nor}(v)$$

para representar a (única) decomposição de v como soma de $\tan(v) \in T_p N$ e $\text{nor}(v) \in T_p N^\perp$. Denotamos por

$$\tan_p : T_p M \rightarrow T_p N \quad e \quad \text{nor}_p : T_p M \rightarrow T_p N^\perp$$

as projeções ortogonais em cada ponto $p \in N$, que são aplicações lineares. Estes conceitos podem ser estendidos para campos vetoriais em $\overline{\mathfrak{X}}(N)$.

Um campo vetorial $X \in \overline{\mathfrak{X}}(N)$ é dito ser *normal* [resp. *tangente*] a N se $X(p) \in T_p N^\perp$ [resp. $T_p N$], $\forall p \in N$. O conjunto de todos os campos vetoriais normais [resp. tangentes] a N forma um módulo sobre $\mathfrak{F}(N)$, denotado por $\mathfrak{X}(N)^\perp$ [resp. $\mathfrak{X}(N)$], que é submódulo de $\overline{\mathfrak{X}}(N)$. Dado qualquer campo vetorial $X \in \overline{\mathfrak{X}}(N)$, podemos definir as projeções $\tan(X) \in \mathfrak{X}(N)$, $\tan(X)(p) := \tan_p(X(p))$ e $\text{nor}(X) \in \mathfrak{X}(N)^\perp$, $\text{nor}(X)(p) := \text{nor}_p(X(p))$, que são também suaves.

Seja agora

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

a conexão de Levi-Civita de M . Para melhor entender a geometria de N induzida pela de M , gostaríamos inicialmente de determinar como ∇ age sobre os campos vetoriais de N . Segundo a Proposição 1.2.3, podemos restringir ∇ a $\mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(M)$, diretamente.

Com respeito à segunda entrada, vimos que $\nabla_X Y(p)$ depende dos valores de Y em alguma vizinhança de p , e não somente do valor $Y(p)$. Assim sendo, não podemos em princípio calcular $\nabla_X(Y)$ para $Y \in \mathfrak{X}(N)$.

Contudo, usando um sistema de coordenadas adaptado a N em $p \in N$, é sempre possível estender localmente o campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ para um campo $\bar{Y} \in \mathfrak{X}(U)$, onde $U \subseteq M$ é uma vizinhança aberta de p , e aí sim calcular $\nabla_X(Y)$. Este campo não dependerá da extensão utilizada, o que torna possível restringir ∇ para o domínio $\mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N)$. Uma vez feito isto, podemos considerar mais geralmente

$$\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N).$$

A função $\bar{\nabla}$ é chamada *conexão induzida em $N \subseteq M$* . A referência [O'NEILL], cap. 4, contém maiores detalhes sobre a construção que acabamos de fazer. Algumas propriedades da conexão induzida são listadas na Proposição abaixo.

Proposição 1.6.6. *Seja $\bar{\nabla}$ a conexão induzida em $N \subseteq M$. Dados $V, W \in \mathfrak{X}(N)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$, temos*

- (i) $\bar{\nabla}_V(X)$ é $\mathfrak{F}(N)$ -linear em V .
- (ii) $\bar{\nabla}_V(X)$ é \mathbb{R} -linear em X .
- (iii) $\bar{\nabla}_V(fX) = Vf.X + f\bar{\nabla}_V(X)$, para toda $f \in \mathfrak{F}(N)$.
- (iv) $[V, W] = \bar{\nabla}_V(W) - \bar{\nabla}_W(V)$.
- (v) $V\langle X, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_V(X), Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_V(Y) \rangle$. \square

Vale observar que mesmo quando $V, W \in \mathfrak{X}(N)$, não necessariamente temos $\bar{\nabla}_V(W) \in \mathfrak{X}(N)$. Isto nos leva a estudar a parte tangente e a parte normal de $\bar{\nabla}_V(W)$ quando $V, W \in \mathfrak{X}(N)$.

Quanto à parte tangente, pode ser mostrado, usando a fórmula de Koszul, que se ${}^N\nabla$ denota a conexão de Levi-Civita de N , temos $\tan(\bar{\nabla}_V(W)) = {}^N\nabla_V(W)$, para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(N)$. Sobre a parte normal, temos a Proposição abaixo.

Proposição 1.6.7. *A função*

$$\mathbf{\Pi} : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N)^\perp$$

$$(V, W) \mapsto \text{nor}(\bar{\nabla}_V W)$$

é $\mathfrak{F}(N)$ -bilinear e simétrica (portanto um campo tensorial). $\mathbf{\Pi}$ é chamado tensor de Weingarten. \square

Em suma, podemos decompor $\bar{\nabla}$ numa parte tangente e outra normal, de acordo com a fórmula

$$\bar{\nabla}_V W = {}^N\nabla_V W + \mathbf{\Pi}(V, W), \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(N). \quad (1.4)$$

A conexão induzida, bem como a decomposição 1.4, podem ser escritas para campos vetoriais sobre uma curva α . De fato, se $\alpha : [a, b] \rightarrow N$ é uma curva suave em $N \subseteq M$ e $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, temos

$$\left(\bar{\nabla}_{\alpha'(t)}^\alpha V\right)(t) = \left({}^N\nabla_{\alpha'(t)}^\alpha V\right)(t) + \mathbf{\Pi}(\alpha'(t), V(t)), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.5)$$

Observação 1.6.8. A fórmula 1.5 acima nos permite concluir imediatamente que, embora geodésicas de N não sejam necessariamente geodésicas quando vistas em M , se uma curva σ é geodésica de M , então, se um segmento de σ estiver contido na subvariedade N , será geodésica em N também. De fato, para uma tal curva, se $V = \sigma'$ o lado esquerdo de 1.5 nada mais é do que σ'' , que é zero porque σ é geodésica em M . Mas o lado direito de 1.5 é a soma de um vetor tangente a N com um vetor normal a N , e portanto cada uma de suas parcelas precisa ser zero também. Em particular, ficamos com ${}^N\nabla_{\sigma'}\sigma' = 0$, que é a condição para que σ seja geodésica em N .

O seguinte Teorema, conhecido como *Equação de Gauss*, advém da equação 1.4. Ele diz exatamente como relacionar o tensor de curvatura \mathbf{R} de M com o tensor de curvatura ${}^N\mathbf{R}$ da subvariedade Pseudo-Riemanniana N . A diferença entre os dois é medida pelo tensor de Weingarten de N .

Teorema 1.6.9. *Dados V, W, X, Y campos vetoriais tangentes a $N \subseteq M$,*

$$\langle \mathbf{R}_{VW}X, Y \rangle = \langle {}^N\mathbf{R}_{VW}X, Y \rangle + \langle \mathbf{\Pi}(V, X), \mathbf{\Pi}(W, Y) \rangle - \langle \mathbf{\Pi}(V, Y), \mathbf{\Pi}(W, X) \rangle. \square$$

Quando N tem codimensão 1, podemos usar esta fórmula para explicitar uma relação entre as curvaturas seccionais $K, {}^NK$ de M e N , respectivamente, que será útil mais adiante. Introduzimos para isto a seguinte definição.

Definição 1.6.10. *Seja Υ um campo vetorial unitário normal definido em N . O operador de Weingarten derivado de Υ é a aplicação*

$$\mathcal{S}_\Upsilon : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$$

definida implicitamente pela equação

$$\langle \mathcal{S}_\Upsilon(V), W \rangle = \langle \mathbf{\Pi}(V, W), \Upsilon \rangle, \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(N).$$

Esta definição depende do campo vetorial Υ escolhido, e em geral pode não ser possível construir globalmente um campo vetorial com as propriedades listadas na definição. Contudo, dado $p \in N$, isso é sempre possível localmente, o que é suficiente, uma vez que a fórmula acima é $\mathfrak{F}(M)$ -linear em Υ e portanto depende apenas pontualmente de Υ .

Uma fórmula explícita para \mathcal{S}_Υ pode ser obtida, em termos da conexão induzida $\bar{\nabla}$ em N . Dado um campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(N)$, lembrando que $\langle \Upsilon, \Upsilon \rangle = 1$, temos

$$V\langle \Upsilon, \Upsilon \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla_V \Upsilon, \Upsilon \rangle = 0.$$

Isto mostra que $\nabla_V \Upsilon$ é tangente a N . Assim, se $W \in \mathfrak{X}(N)$,

$$\langle \mathcal{S}_\Upsilon(V), W \rangle = \langle \mathbf{\Pi}(V, W), \Upsilon \rangle = \langle \nabla_V W, \Upsilon \rangle = V\langle W, \Upsilon \rangle - \langle \nabla_V \Upsilon, W \rangle.$$

Portanto $\mathcal{S}_\Upsilon(V) = -\bar{\nabla}_V(\Upsilon)$.

Corolário 1.6.11. *Seja \mathcal{S}_Υ o operador de Weingarten derivado de Υ . Se $v, w \in T_p N \subseteq T_p M$ geram um subespaço não degenerado, então*

$$K(v, w) = {}^N K(v, w) + \epsilon \frac{\langle \mathcal{S}_\Upsilon(v), v \rangle \langle \mathcal{S}_\Upsilon(w), w \rangle - \langle \mathcal{S}_\Upsilon(v), w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}, \quad \forall v, w \in T_p M,$$

onde $\epsilon = +1$ se $\text{ind}(N) = \text{ind}(M)$ e $\epsilon = -1$ do contrário. \square

O tensor de Weingarten pode ser metricamente contraído, dando origem a um campo vetorial normal a N , que desempenhará papel importante no estudo das hipersuperfícies mais adiante.

Definição 1.6.12. O vetor de curvatura média H de $N \subseteq M$ é a contração métrica de Π . Explicitamente, dado $p \in N$, se $n = \dim(N)$, temos

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Pi(e_i, e_i),$$

onde e_1, \dots, e_n é uma base ortonormal em $T_p N$.

Um cálculo elementar mostra que a fórmula acima usando uma base ortonormal não depende da escolha da mesma.

A fim de ilustrar um pouco da teoria de subvariedades que acabamos de apresentar, damos aqui o exemplo das *hiperquadráticas*.

Exemplo 1.6.13. (*Hiperquadráticas em $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$*) Considere a função $\mathbf{q} : \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{q}(x) = \langle x, x \rangle$. Explicitamente, se $x = (x_0, \dots, x_n)$,

$$\mathbf{q}(x) = -x_0^2 - \dots - x_\nu^2 + x_{\nu+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Dadas constantes $r > 0$ e $\epsilon = \pm 1$, definimos a *hiperquadrática de raio r e sinal ϵ* como sendo o conjunto $A_\epsilon(r) := \mathbf{q}^{-1}(\epsilon r^2)$. O gradiente da função \mathbf{q} é $\text{grad}(\mathbf{q})_{(x_0, \dots, x_n)} = 2(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Assim, temos

$$\langle \text{grad}(\mathbf{q})_{(x_0, \dots, x_n)}, \text{grad}(\mathbf{q})_{(x_0, \dots, x_n)} \rangle = 4(-x_0^2 - \dots - x_\nu^2 + x_{\nu+1}^2 + \dots + x_n^2) = 4\epsilon r^2,$$

para qualquer ponto $(x_0, \dots, x_n) \in A_\epsilon(r)$. Segue da Proposição 1.6.4 que $A_\epsilon(r)$ é uma subvariedade Pseudo-Riemanniana de $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$ de codimensão 1. O índice de $A_\epsilon(r)$ é $\nu + 1$ se $\epsilon = 1$ e ν se $\epsilon = -1$.

Sabemos que $\text{grad}(\mathbf{q})$ é um campo vetorial normal a $A_\epsilon(r)$. Isto nos permite calcular o operador de Weingarten derivado de $\Upsilon := \frac{\text{grad}(\mathbf{q})}{2r}$, segundo a fórmula $S_\Upsilon(V) = -\bar{\nabla}_V(\Upsilon)$, para $V \in \mathfrak{X}(A_\epsilon(r))$.

$$S_\Upsilon(V) = -\bar{\nabla}_V(\Upsilon) = -\sum_{j=0}^n V\left(\frac{x_j}{r}\right)\partial_j = -\frac{1}{r}\sum_{j=0}^n V^j\partial_j = -\frac{V}{r}, \quad \forall V \in \mathfrak{X}(A_\epsilon(r)).$$

Segue diretamente do Corolário 1.6.11 que *todas as hiperquadráticas possuem curvatura seccional constante igual a $\frac{\epsilon}{r^2}$* . Uma vez conhecido o operador de Weingarten, obtemos o tensor de Weingarten, pois

$$\langle \Pi(V, W), \Upsilon \rangle = \langle S_\Upsilon(V), W \rangle = \frac{-1}{r}\langle V, W \rangle = \frac{-\epsilon}{r}\langle V, W \rangle \langle \Upsilon, \Upsilon \rangle = \langle \frac{-\epsilon}{r}\langle V, W \rangle \Upsilon, \Upsilon \rangle,$$

para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(A_\epsilon(r))$. Como $A_\epsilon(r)$ tem codimensão 1, $\Pi(V, W) = \frac{-\epsilon}{r}\langle V, W \rangle \Upsilon$.

Capítulo 2

Cálculo Variacional

Neste capítulo, vamos desenvolver a teoria necessária para estudar a maximalidade (ou minimalidade) do comprimento de uma dada curva. Isto quer dizer que estamos interessados em comparar o comprimento de uma curva α com o comprimento de curvas "vizinhas", num certo sentido a ser tornado preciso. Esta comparação é especialmente frutífera no caso em que α é uma geodésica, onde resultados conectando curvatura e focalização de geodésicas aparecem.

Novamente, estamos interessados apenas no enunciado dos resultados. A prova destes pode ser obtida no cap. 10 da referência [O'NEILL]. Fixamos uma variedade (M, g) que será assumida ser Lorentziana ou Riemanniana.

2.1 Campos de Jacobi

Definição 2.1.1. Uma variação de um segmento de curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ é uma aplicação a dois parâmetros

$$x : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M,$$

satisfazendo $\alpha(u) = x(u, 0)$, $\forall u \in [a, b]$.

As curvas $u \mapsto x(u, v)$, para cada $v \in (-\delta, \delta)$, são chamadas *longitudinais*, enquanto que aquelas da forma $v \mapsto x(u, v)$, para cada $u \in [a, b]$, são ditas *transversais*. A curva α é chamada *curva de base*. Uma variação pode ser pensada como uma família a um parâmetro de curvas vizinhas de α .

A derivada parcial $V(u) := x_v(u, 0)$ define um campo vetorial sobre a curva $x(u, 0) \equiv \alpha(u)$, chamado *campo vetorial variacional* de x .

Uma variação x de uma geodésica α cujas curvas longitudinais são também todas geodésicas é dita *variação geodésica*.

Definição 2.1.2. Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, um campo vetorial Y sobre γ é dito ser um campo de Jacobi quando satisfaz a equação

$$Y''(t) = R_{Y(t)\gamma'(t)}(\gamma'(t)), \quad \forall t \in I,$$

conhecida como equação diferencial de Jacobi.

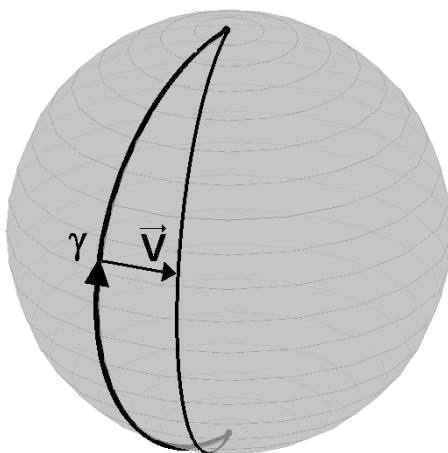
Exemplo 2.1.3. Um exemplo simples de uma variação geodésica é a função

$$\mathbf{x} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (-\delta, \delta) \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x}(u, v) = (\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(u)),$$

onde $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$. A curva de base é $\gamma(u) = (\cos(u), 0, \sin(u))$ e o campo vetorial variacional é $V(u) = \mathbf{x}_v(u, 0) = (0, \cos(u), 0)$. Usando as coordenadas naturais de \mathbb{R}^3 e a métrica euclidiana, $V(u) = \cos(u)\partial_y$ e

$$V'(u) = (\cos(u))' \partial_y + \cos(u) \nabla_{\gamma'} (\partial_y) \Big|_0 = -\sin(u) \partial_y,$$

$$V''(u) = -\cos(u) \partial_y = -V(u).$$



Um cálculo em coordenadas para o tensor de curvatura \mathbf{R} da esfera (na métrica induzida de \mathbb{R}^3) mostra que a expressão $\mathbf{R}_{Y(u)\gamma'(u)}(\gamma'(u))$ é igual a $-V(u)$, e portanto que V é um campo de Jacobi sobre γ . Isto acontece precisamente por esta ser uma variação geodésica, segundo o Lema abaixo.

Lema 2.1.4. O campo vetorial variacional de uma variação geodésica é sempre um campo de Jacobi. \square

Observe que a equação de Jacobi é linear; se $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(\gamma)$ são campos de Jacobi sobre alguma geodésica γ , e $c \in \mathbb{R}$, então $Y_1 + cY_2$ também é um campo de Jacobi sobre γ .

Fixada uma geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, os campos de Jacobi sobre γ formam portanto um espaço vetorial real, que denotaremos por $\mathfrak{J}(\gamma)$. O próximo Lema nos diz que a dimensão deste espaço é $2n$, onde n é a dimensão de M .

Lema 2.1.5. Seja γ uma geodésica com $\gamma(0) = p$ e $v, w \in T_pM$. Então, existe um único campo de Jacobi Y sobre γ tal que $Y(0) = v$ e $Y'(0) = w$. \square

Podemos relacionar os campos de Jacobi com a aplicação exponencial, que é definida em termos de geodésicas radiais. Lembramos que dado $v \in T_pM$, denotamos por γ_v a geodésica maximal que começa em p com velocidade inicial $\gamma'_v(0) = v$.

Proposição 2.1.6. *Seja $p \in M$ e $x \in T_pM$. Dado $v_x \in T_x(T_pM) \simeq T_pM$,*

$$d\exp_p(v_x) = V(1),$$

onde V é o único campo de Jacobi sobre γ_x satisfazendo as condições iniciais

$$V(0) = 0 \quad e \quad V'(0) = v_x \in T_pM. \quad \square$$

Mais adiante, usaremos esta relação para explorar o significado geométrico das singularidades da aplicação exponencial. Estas representam essencialmente uma quebra do caráter maximal (ou minimal) das geodésicas radiais.

2.2 Primeira e Segunda Variação

Vamos trabalhar com curvas regulares, que são aquelas curvas α tais que $\langle \alpha', \alpha' \rangle$ é sempre diferente de zero. Tais curvas são portanto sempre tipo-tempo ou tipo-espaço. Se α é também uma geodésica, dizemos que α é uma *geodésica regular*.

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ uma curva regular e $x : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ uma variação de α . Considere a função $L_x : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L_x(v) = \int_a^b |g(\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_u(u, v))| du.$$

L_x mede o comprimento de cada curva longitudinal da variação x , sendo $L_x(0)$ o comprimento de α , por definição. Derivando em $v = 0$, obtemos a fórmula

$$L_x'(0) = \epsilon \int_a^b g\left(\frac{\alpha'}{|\alpha'|}, V'\right) du,$$

sendo $\epsilon = \pm 1$ o sinal (constante) de α , ou seja, o sinal de $g(\alpha', \alpha')$, e V o campo vetorial variacional de x .

Até aqui, estamos assumindo que as funções envolvidas são sempre suaves. No entanto, em grande parte da teoria causal a ser apresentada surgem naturalmente curvas suaves por partes. Assim, em geral, uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ pode apresentar *quebras* em uma quantidade finita de pontos $a < u_1 < \dots < u_k < b$, onde a derivada $\alpha'(u_i^+)$ difere de $\alpha'(u_i^-)$, $i = 1, \dots, k$. Por praticidade, convencionamos $a \equiv u_0$ e $b \equiv u_{k+1}$. Vamos usar a notação

$$\Delta\alpha'(u_i) = \alpha'(u_i^+) - \alpha'(u_i^-) \in T_{\alpha(u_i)}M, \quad i = 1, \dots, k,$$

para representar a diferença entre as derivadas laterais.

Uma variação $x : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ é dita ser *suave por partes* quando é contínua e existe uma quantidade finita de pontos $a < u_1 < \dots < u_k < b$ tais que a restrição de x para $[u_{i-1}, u_i] \times (-\delta, \delta)$ é suave, para $i = 1, \dots, k+1$. Portanto, mesmo que x seja suave por partes, suas curvas transversais são sempre suaves, enquanto que as curvas longitudinais e o campo vetorial variacional em geral serão apenas suaves por partes. Podemos sempre assumir que as quebras de α e x são as mesmas, uma vez que ambas são em quantidades finitas, adicionando quebras triviais, isto é, aquelas em que α é suave ou x é suave.

Um argumento de integração por partes aplicado em cada intervalo $[u_{i-1}, u_i]$ onde α é suave fornece a seguinte fórmula.

Proposição 2.2.1. (Primeira Variação) Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ uma curva suave por partes, com velocidade constante $|\langle \alpha', \alpha' \rangle| = c > 0$ e sinal ϵ . Para uma variação x de α , temos

$$L'_x(0) = -\frac{\epsilon}{c} \int_a^b \langle \alpha'', V \rangle du - \frac{\epsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta \alpha'(u_i), V(u_i) \rangle + \frac{\epsilon}{c} \langle \alpha', V \rangle \Big|_a^b,$$

onde u_1, \dots, u_k são as quebras de x e α . \square

Convém notar que na fórmula acima não há dependência explícita da variação x , apenas do campo vetorial variacional V . Observe também que se α é suave, o termo do somatório é automaticamente zero. No caso em que α é uma geodésica, o primeiro termo também zera.

Uma *variação de extremos fixos* de uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ é uma variação x de α cujas curvas transversais $v \mapsto x(a, v)$ e $v \mapsto x(b, v)$ são constantes. As geodésicas suaves são uma espécie de ponto crítico para as variações de extremos fixos, uma vez que $L'_x(0)$ é zero para qualquer dessas variações, pela fórmula da primeira variação. Vale também a recíproca.

Proposição 2.2.2. Uma curva α suave por partes e de velocidade constante $c > 0$ é uma geodésica suave se, e somente se, $L'_x(0) = 0$ para toda variação x de α . \square

Estamos interessados em comparar os valores de $L_x(v)$ com $L_x(0)$, para v pequeno. Quando $L'_x(0) > 0$ ou $L'_x(0) < 0$, sabemos que esta função cresce ou diminui com v , respectivamente. No caso em que 0 é um ponto crítico de L_x , precisamos calcular $L''_x(0)$.

Dada uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ regular, seu vetor tangente determina uma decomposição da forma

$$T_{\alpha(t)}M = \text{span}\{\alpha'(t)\} + \text{span}\{\alpha'(t)\}^\perp, \quad \forall t \in [a, b],$$

de forma análoga à decomposição obtida no caso de subvariedades. Se $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$, escrevemos $Y = Y^\top + Y^\perp$ para designar as componentes tangente e normal a α , conforme indicado acima. De maneira explícita,

$$Y^\top(u) = \frac{\langle Y(u), \alpha'(u) \rangle}{\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle} \alpha'(u), \quad \forall u \in [a, b].$$

Se α é uma geodésica, então

$$(Y^\top)'(u) = \left(\frac{\langle Y(u), \alpha'(u) \rangle}{\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle} \right)' \alpha'(u) = \frac{\langle Y'(u), \alpha'(u) \rangle}{\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle} \alpha'(u) = (Y')^\top(u), \quad \forall u \in [a, b],$$

pois $\alpha'' = 0$ e $\langle \alpha', \alpha' \rangle$ é constante. Assim, $(Y')^\top = (Y^\top)'$ e consequentemente $(Y')^\perp = (Y^\perp)'$. Podemos usar a ordem que for conveniente.

Proposição 2.2.3. (Segunda Variação) Seja $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica com velocidade $c > 0$ e sinal ϵ . Para uma variação de extremos fixos \mathbf{x} de σ , temos

$$L_x''(0) = \frac{\epsilon}{c} \int_a^b \left[\langle (V^\perp)', (V^\perp)' \rangle - \langle \mathbf{R}_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle \right] du$$

onde V é o campo vetorial variacional da variação \mathbf{x} . \square

Novamente, esta fórmula mostra que $L_x''(0)$ depende apenas do campo vetorial variacional V , e não da variação \mathbf{x} como um todo. Em verdade, $L_x''(0)$ depende somente de V^\perp , a parte normal de V . Para ver isto, sabemos do Capítulo 1, seção 1.4, que $\mathbf{R}_{vv} = 0, \forall v \in TM$. Como $V^\top = f\sigma'$ para alguma função real f , temos

$$\langle \mathbf{R}_{V^\top\sigma'} V, \sigma' \rangle = \langle \mathbf{R}_{f\sigma'\sigma'} V, \sigma' \rangle = f \langle \mathbf{R}_{\sigma'\sigma'} V, \sigma' \rangle = 0, \text{ e}$$

$$\langle \mathbf{R}_{V\sigma'} V^\top, \sigma' \rangle = \langle \mathbf{R}_{V\sigma'} f\sigma', \sigma' \rangle = \langle \mathbf{R}_{f\sigma'\sigma'} V, \sigma' \rangle = f \langle \mathbf{R}_{\sigma'\sigma'} V, \sigma' \rangle = 0,$$

usando a simetria por pares de \mathbf{R} na última equação.

No fim das contas, $L_x''(0)$ depende somente de V^\perp .

2.3 A Forma Índice

Dados $p, q \in M$ e um intervalo $[0, b]$, denotamos por $\Omega(p, q)$ o conjunto de todas as curvas $\alpha : [0, b] \rightarrow M$ suaves por partes de p até q . Apenas para motivação, vamos pensar intuitivamente em $\Omega(p, q)$ como uma variedade¹. Nesta "variedade", cada "ponto" é uma curva suave por partes de p até q .

Se $\mathbf{x} : [0, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ é uma variação de extremos fixos de uma curva $\alpha \in \Omega(p, q)$, para cada $v \in (-\delta, \delta)$, temos uma curva $u \mapsto \mathbf{x}(u, v)$ também em $\Omega(p, q)$. Assim, \mathbf{x} pode ser pensada como uma família a 1 parâmetro de pontos de $\Omega(p, q)$, ou seja, uma curva em $\Omega(p, q)$ começando em α . A velocidade inicial desta curva é dada pelo campo vetorial variacional V , que se anula em 0 e b pois \mathbf{x} é variação de extremos fixos.

Em uma variedade, o espaço tangente em um ponto nada mais é do que as velocidades de todas as curvas que passam por aquele ponto. Essa discussão motiva a seguinte definição.

Definição 2.3.1. Dada $\alpha \in \Omega(p, q)$, o espaço tangente a $\Omega(p, q)$ em α , denotado por $T_\alpha(\Omega)$, é o conjunto de todos os campos vetoriais suaves por partes V sobre α tais que $V(0) = 0$ e $V(b) = 0$.

Uma questão que surge naturalmente é a seguinte: todo campo vetorial $V \in T_\alpha(\Omega)$ pode ser realizado como o campo vetorial variacional de alguma variação de extremos fixos \mathbf{x} de α ? A resposta é afirmativa. Não é difícil verificar que a variação

$$\mathbf{x}^V(u, v) := \exp_{\alpha(u)}(vV(u)), \quad (2.1)$$

definida nos intervalos apropriados, a chamada *variação canônica para V* , tem como campo vetorial variacional o próprio V .

¹A construção de $\Omega(p, q)$ como variedade (de dimensão infinita) pode ser tornada precisa, mas não o faremos aqui.

A função comprimento de arco L pode ser pensada como um funcional sobre $\Omega(p, q)$. Como no caso de variedades diferenciáveis, se $V \in T_x(\Omega)$, queremos definir $V(L)$ como sendo um número, que corresponde à derivada de L na direção V . A escolha natural é $V(L) = L'_x(0)$, onde x é uma variação de extremos fixos cujo campo vetorial variacional é V . Como vimos, $V(L)$ não dependerá da escolha da variação x .

Ainda seguindo nossa analogia, lembramos que $p \in M$ é um ponto crítico da função $f \in \mathfrak{F}(M)$ quando $v(f) = 0, \forall v \in T_p M$. Assim, a Proposição 2.2.2 diz que as geodésicas regulares suaves de $\Omega(p, q)$ constituem os "pontos críticos" do funcional L . Discutiremos sobre as geodésicas tipo-luz mais adiante, pois estas não são curvas regulares, no sentido que definimos.

No cálculo diferencial em \mathbb{R}^n , para estudar o comportamento de uma função f numa vizinhança de um ponto crítico, analisamos a sua forma Hessiana nesse ponto. A próxima definição tenta capturar este conceito, e criar um análogo da Hessiana para o funcional L .

Definição 2.3.2. A forma índice I_σ de uma geodésica regular $\sigma \in \Omega(p, q)$ é a única forma bilinear simétrica

$$I_\sigma : T_\sigma(\Omega) \times T_\sigma(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para qualquer $V \in T_\sigma(\Omega)$,

$$I_\sigma(V, V) = L_x''(0),$$

onde x é qualquer variação de extremos fixos de σ com campo vetorial variacional V .

Utilizando a fórmula dada pela Proposição 2.2.3 e a identidade de polarização para formas bilineares garantem a existência de I_σ . Explicitamente,

$$I_\sigma(V, W) = \frac{\epsilon}{c} \int_a^b [\langle (V^\perp)', (W^\perp)' \rangle - \langle \mathbf{R}_{V\sigma'} W, \sigma' \rangle] du, \quad \forall V, W \in T_\sigma(\Omega).$$

Já vimos que a parte tangente de V e W nesta fórmula é desprezível, pelas simetrias de \mathbf{R} . Portanto, restringimos doravante a forma índice para o espaço $T_\sigma^\perp(\Omega) := \{V \in T_\sigma(\Omega) : T \perp \sigma\}$, e denotamos esta restrição por I_σ^\perp .

2.4 Pontos Conjugados

Considere o seguinte fenômeno. Sobre uma geodésica σ , temos dois pontos $\sigma(a)$ e $\sigma(b)$ de maneira que outras geodésicas partindo de $\sigma(a)$, com vetor velocidade "próximo" de $\sigma'(a)$, apesar de se afastarem de σ num primeiro momento, eventualmente voltam e passam por $\sigma(b)$.

Tal fenômeno não ocorre em \mathbb{R}^n com a métrica usual, mas acontece, por exemplo, na esfera S^2 . Fixado um segmento geodésico σ que liga o pólo sul ao pólo norte, outras geodésicas partindo do pólo sul se afastam de σ , porém reconvergem para o pólo norte. Isto sugere uma conexão entre curvatura e reconvergência de famílias de geodésicas.

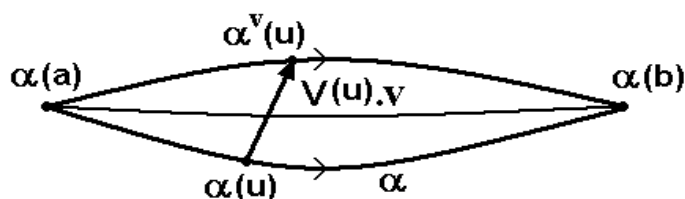
Uma maneira de definir o que são geodésicas "próximas" a σ é construir uma variação geodésica \mathbf{x} de σ , como fizemos no Exemplo 2.1.3. Vimos naquele exemplo que o campo vetorial variacional de \mathbf{x} é um campo de Jacobi. O detalhe importante aqui é que este campo de Jacobi zera precisamente nos pólos.

Definição 2.4.1. Se $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ é uma geodésica, dois pontos $\sigma(a)$ e $\sigma(b)$ são ditos conjugados sobre σ se existir um campo de Jacobi $Y \in \mathfrak{X}(\sigma)$ não nulo tal que $Y(a) = 0$ e $Y(b) = 0$.

Se $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ é uma geodésica e $x : [a, b] \times (-\delta, +\delta) \rightarrow M$ é uma variação geodésica de α , usando coordenadas locais podemos escrever

$$x^i(u, v) = \alpha^i(u) + V^i(u) + o(v^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

onde V é o campo (de Jacobi) variacional de \mathbf{x} . Assumimos que a imagem de \mathbf{x} está contida no domínio de um sistema de coordenadas, por simplicidade. Como $\forall v \in (-\delta, \delta)$, $\alpha^v : [a, b] \rightarrow M$ dada por $\alpha^v(u) := \mathbf{x}(u, v)$ é uma curva longitudinal associada ao valor v do parâmetro, isto sugere que o campo de Jacobi V mede um "deslocamento em primeira ordem" entre a geodésica α e suas "vizinhas", e V ser zero nos extremos a e b significa que estas "reconvergem em primeira ordem".



É importante ressaltar que nem sempre a reconvergência descrita acima acontece, quando temos dois pontos conjugados. Contudo, veremos na próxima Proposição que uma certa convergência "em primeira ordem" está sempre presente.

Podemos cometer um leve abuso de linguagem e dizer que pontos p, q sobre σ são conjugados, desde que não haja ambiguidade em relação a quais parâmetros a, b satisfazem $\sigma(a) = p$ e $\sigma(b) = q$.

A relação de conjugação não depende da parametrização de σ . Portanto, em geral vamos trabalhar com σ definida no intervalo $[0, b]$.

Fixe uma geodésica qualquer $\sigma : [0, b] \rightarrow M$, e considere $\mathfrak{J}_{0b}(\sigma)$ o conjunto de todos os campos de Jacobi $Y \in \mathfrak{X}(\sigma)$ que se anulam em 0 e b . Evidentemente, $\mathfrak{J}_{0b}(\sigma)$ é um subespaço do espaço dos campos de Jacobi sobre σ que se anulam em 0, e este último tem dimensão n , pelo Lema 2.1.5.

O número $\dim(\mathfrak{J}_{0b}(\sigma))$ é chamado *ordem de conjugação* de $\sigma(0)$ e $\sigma(b)$ sobre σ . Observe que, como o campo de Jacobi $u \mapsto u\sigma'(u)$ se anula em 0 mas não em b , a ordem de conjugação de dois pontos conjugados quaisquer sobre σ é no máximo $n - 1$.

Proposição 2.4.2. Se $p = \sigma(0)$, as seguintes afirmações são equivalentes.

- (i) $\sigma(b)$ é conjugado a $p = \sigma(0)$ sobre σ .
- (ii) Existe uma variação geodésica não-trivial² \mathbf{x} de σ tal que todas as curvas longitudinais de \mathbf{x} começam em p e $\mathbf{x}_v(b, 0) = 0$.
- (iii) A aplicação exponencial $\exp_p : D_p \subseteq T_p M \rightarrow M$ é singular em $b\sigma'(0)$, ou seja, existe um vetor $x \in T_{b\sigma'(0)}(T_p M)$, não-nulo, tal que $d(\exp_p)(x) = 0$. \square

Note que no item (ii) as curvas longitudinais da variação $\mathbf{x} : [0, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ todas começam em p , isto é, $\mathbf{x}(0, v) = p, \forall v \in (-\delta, \delta)$, mas não temos necessariamente $\mathbf{x}(b, v) = q, \forall v \in (-\delta, \delta)$. A condição $\mathbf{x}_v(b, 0) = 0$ significa que a expansão de Taylor da última curva transversal $v \mapsto \mathbf{x}(b, v)$ em torno de 0 coincide com a de $\mathbf{x}(b, 0) \equiv q$ em primeira ordem.

No caso de uma geodésica regular σ , a ordem de conjugação dos seus extremos pode ser obtida da forma índice I_σ^\perp , conforme a Proposição abaixo.

Proposição 2.4.3. *Se $\sigma \in \Omega(p, q)$ é uma geodésica regular, o núcleo da forma bilinear I_σ^\perp é precisamente o espaço $\mathfrak{J}_{0b}(\sigma)$ dos campos de Jacobi sobre σ que se anulam em $p = \sigma(0)$ e $q = \sigma(b)$. \square*

Definição 2.4.4. *Uma geodésica α é dita ser coespacial quando o subespaço $\text{span}\{\alpha'(t)\}$ de $T_{\alpha(t)}M$ é tipo-espaço, para algum t (e portanto para todos os valores de t).*

Se M é uma variedade Lorentziana, geodésicas coespaciais são tipo-tempo. Por outro lado, quando M é uma variedade Riemanniana, todas as geodésicas são coespaciais.

Teorema 2.4.5. *Seja $\sigma \in \Omega(p, q)$ uma geodésica coespacial, com sinal ϵ .*

- (i) *Se não existem pontos conjugados a $p = \sigma(0)$ sobre σ , a forma índice ϵI_σ^\perp é positiva definida.*
- (ii) *Se $q = \sigma(b)$ é o único ponto conjugado a p sobre σ , então ϵI_σ^\perp é semi-definida positiva, mas não definida.*
- (iii) *Se existe um ponto $\sigma(r)$ conjugado a p com $0 < r < b$, então I_σ^\perp não é semi-definida. \square*

Este é o resultado fundamental desta seção, que nos permitirá estabelecer a existência de pontos conjugados sob certas condições de curvatura.

2.5 Pontos Focais

A idéia de pontos conjugados pode ser generalizada. Dada uma subvariedade Pseudo-Riemanniana P de M e um ponto $q \in M$, denote por $\Omega(P, q)$ o conjunto de todas as curvas suaves $\alpha : [0, b] \rightarrow M$ com $\alpha(0) \in P$ e $\alpha(b) = q$.

As variações naturais de $\alpha \in \Omega(P, q)$ a serem consideradas agora são aquelas cujas curvas longitudinais estão todas em $\Omega(P, q)$. Deste modo, a curva transversal inicial $v \mapsto \mathbf{x}(0, v)$ é uma curva em P e a curva transversal final $v \mapsto \mathbf{x}(b, v)$ é constante em q . Dizemos que uma tal variação é uma (P, q) -variação de α . Como anteriormente, os campos vetoriais variacionais deste tipo de variação fornecem uma noção natural de vetor tangente a $\Omega(P, q)$.

²Isto significa que o campo vetorial variacional não é idênticamente nulo.

Definição 2.5.1. Dada $\alpha \in \Omega(P, q)$, o espaço tangente a $\Omega(P, q)$ em α , denotado por $T_\alpha(\Omega)$, é o conjunto de todos os campos vetoriais $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tais que $V(0) \in T_{\alpha(0)}P$ e $V(b) = 0$.

Usando a variação canônica (eq. 2.1), vemos que todo $V \in T_\alpha(\Omega)$ é o campo vetorial variacional uma (P, q) -variação de α . Pequenas modificações na Proposição 2.2.2 fornecem o seguinte resultado análogo.

Proposição 2.5.2. Seja $\alpha \in \Omega(P, q)$ curva regular. Então $L'_x(0) = 0$ para toda (P, q) -variação de α se e somente se α é uma geodésica normal a P .³ \square

Procedemos, como antes, no sentido de estudar a segunda variação para a classe de curvas α que são pontos críticos do funcional comprimento de arco, L . A segunda variação de uma geodésica $\sigma \in \Omega(P, q)$ normal a P envolve o tensor de Weingarten Π de P .

Proposição 2.5.3. Seja $\sigma \in \Omega(P, q)$ uma geodésica normal a P , com velocidade $c > 0$, e ϵ o sinal de σ . Para uma (P, q) -variação x de σ ,

$$L''_x(0) = \frac{\epsilon}{c} \int_0^b [\langle (V^\perp)', (V^\perp)' \rangle - \langle \mathbf{R}_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle] du - \frac{\epsilon}{c} \langle \sigma'(0), \Pi(V(0), V(0)) \rangle.$$

Uma forma índice pode ser definida também neste caso, de maneira inteiramente análoga. Como antes, a identidade de polarização fornece a forma bilinear em $T_\sigma(\Omega)$ dada por

$$I_\sigma(V, W) = \frac{\epsilon}{c} \int_0^b [\langle (V^\perp)', (W^\perp)' \rangle - \langle \mathbf{R}_{V\sigma'} W, \sigma' \rangle] du - \frac{\epsilon}{c} \langle \sigma'(0), \Pi(V(0), W(0)) \rangle,$$

para quaisquer $V, W \in T_\sigma(\Omega)$. Podemos novamente restringir I_σ^\perp a $T_\sigma^\perp(\Omega) \times T_\sigma^\perp(\Omega)$.

Introduzimos, por conveniência, a seguinte variante do tensor de Weingarten.

Definição 2.5.4. O tensor de Weingarten normal da subvariedade Pseudo-Riemanniana $P \subseteq M$ é a função

$$\tilde{\Pi} : \mathfrak{X}(P) \times \mathfrak{X}^\perp(P) \rightarrow \mathfrak{X}(P)$$

definida implicitamente pela equação

$$\langle \tilde{\Pi}(V, Z), W \rangle = -\langle \Pi(V, W), Z \rangle, \quad \forall V, W \in \mathfrak{X}(P), \quad \forall Z \in \mathfrak{X}^\perp(P).$$

Proposição 2.5.5. Um campo de Jacobi $Y \in \mathfrak{X}(\sigma)$, onde σ é uma geodésica normal a P , é o campo vetorial variacional de uma (P, q) -variação geodésica x de σ se e somente se:

- (i) $Y(0) \in T_{\sigma(0)}P$.
- (ii) $\tan(Y'(0)) = \tilde{\Pi}(Y(0), \sigma'(0))$.

Um campo de Jacobi que satisfaz estas duas condições é chamado *campo P -Jacobi sobre σ* .

³Isto significa que $\sigma(0) \in P$ e $\sigma'(0) \in T_{\sigma(0)}P^\perp$

Definição 2.5.6. *Seja σ uma geodésica de M normal a $P \subseteq M$. Dizemos que $\sigma(r)$, $r \neq 0$, é um ponto focal de P sobre σ se existir um campo P -Jacobi $Y \in \mathfrak{X}(\sigma)$ não-nulo com $Y(r) = 0$.*

O conjunto $P\mathfrak{J}(\sigma)$ dos campos P -Jacobi sobre σ forma um espaço vetorial, de dimensão n . Isto se deve ao fato de que, para cada $x \in T_{\sigma(0)}P$ e $z \in T_{\sigma(0)}P^\perp$, existe um único campo de Jacobi Y sobre σ tal que $Y(0) = x$ e $Y'(0) = \widetilde{\Pi}(x, \sigma'(0)) + z$, de acordo com o Lema 2.1.5. A associação $x + z \mapsto Y$ dada desta forma define um isomorfismo linear entre $T_{\sigma(0)}P \oplus T_{\sigma(0)}P^\perp \simeq T_{\sigma(0)}M$ e $P\mathfrak{J}(\sigma)$.

Definição 2.5.7. *A ordem focal de um ponto focal $\sigma(r)$ ($r \neq 0$) de P é a dimensão do subespaço $P\mathfrak{J}_r(\sigma) \subseteq P\mathfrak{J}(\sigma)$, formado pelos campos P -Jacobi que se anulam em r .*

A ordem focal de qualquer ponto focal $\sigma(r)$ é no máximo $n - 1$, uma vez que o campo vetorial $u \mapsto u\sigma'(u)$ sobre σ é um campo P -Jacobi que se anula somente em $u = 0$.

Proposição 2.5.8. *Seja $\sigma : [0, b] \rightarrow M$ uma geodésica normal a P . As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) $\sigma(b)$ é um ponto focal de P sobre σ .
- (ii) Existe uma (P, q) -variação geodésica x de σ , não trivial, tal que $x_v(b, 0) = 0$.
- (iii) A aplicação exponencial normal⁴ $\exp^\perp : NP \rightarrow M$ é singular em $b\sigma'(0)$. \square

O item (ii) desta Proposição sugere uma interpretação geométrica dos pontos focais, a saber, que existe uma certa variação x para a qual as geodésicas longitudinais emanando de P , próximas a σ , $u \mapsto x(u, v)$ com v pequeno, reconvergem para um ponto de "quase encontro", $\sigma(r)$.

Exemplo 2.5.9. *Seja $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ o hiperbolóide imerso em \mathbb{R}^3 com a métrica Riemanniana $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. As geodésicas de \mathbb{R}^3*

$$\begin{aligned} \sigma_1 : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}^3 & \sigma_2 : [0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (1 + t, 0, 0) & t &\mapsto (1 - t, 0, 0) \end{aligned}$$

são normais a P no ponto $a = \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = (1, 0, 0)$. Neste exemplo, $c = \sigma_1(1)$ é um ponto focal de P sobre σ_1 e $b = \sigma_2(1)$ é um ponto focal de P sobre σ_2 . Explicitamente, temos as (P, q) -variações:

$$\mathbf{x}_1(u, v) = (1 - u)(\cos(v), \sin(v), 0), \quad u \in [0, 1], \quad v \in (-\pi, \pi), \quad e$$

$$\mathbf{x}_2(u, v) = ((1 + u)\cosh(v), 0, (1 - u)\sinh(v)), \quad u \in [0, 1], \quad v \in (-1, 1).$$

As curvas $u \mapsto \mathbf{x}_1(u, v)$ e $u \mapsto \mathbf{x}_2(u, v)$ são claramente geodésicas de \mathbb{R}^3 , para cada v , e portanto os campos vetoriais variacionais $(\mathbf{x}_1)_v(u, 0) = (0, 1 - u, 0)$ e $(\mathbf{x}_2)_v(u, 0) = (0, 0, 1 - u)$ são campos P -Jacobi sobre σ_1 e σ_2 , respectivamente. Observe que as geodésicas normais a P emanando da hipérbole $\{(x, 0, z) : x^2 - z^2 = 1\}$, que correspondem às curvas longitudinais da variação \mathbf{x}_1 , passam arbitrariamente próximas, mas não sobre, o ponto c , com exceção da própria σ_1 , enquanto que aquelas emanando da circunferência $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$, que correspondem às curvas longitudinais de \mathbf{x}_2 , convergem efetivamente para b .

⁴Restrição da aplicação exponencial $\exp : \mathbb{D} \subseteq TM \rightarrow M$ para $\mathbb{D} \cap NP$, onde NP é o fibrado normal de P .

Proposição 2.5.10. *Se $\sigma \in \Omega(P, q)$ é uma geodésica regular e normal a P , então o núcleo da forma índice I_σ^\perp associada a σ é o espaço vetorial $P\mathfrak{J}_b(\sigma)$ dos campos P -Jacobi que se anulam em $q = \sigma(b)$. \square*

Temos o seguinte Teorema, análogo àquele para pontos conjugados, que relaciona a forma índice com a existência de pontos focais, para o caso de geodésicas coespaciais.

Teorema 2.5.11. *Seja $\sigma \in \Omega(P, q)$ geodésica coespacial normal a P com sinal ϵ .*

- (i) *Se não existem pontos focais de P sobre σ , então ϵI_σ^\perp é positiva definida.*
 - (ii) *Se $q = \sigma(b)$ é o único ponto focal de P sobre σ , então ϵI_σ^\perp é semidefinida positiva, mas não definida.*
 - (iii) *Se existe um ponto focal $\sigma(r)$ de P sobre σ com $0 < r < b$, então I_σ^\perp não é semidefinida.*
- \square

2.6 Convergência de Subvariedades

Se $P \subseteq M$ é uma subvariedade Pseudo-Riemanniana de M , e σ uma geodésica normal a P , vimos no Teorema 2.5.11 que a existência de pontos focais está relacionada com os zeros de campos P -Jacobi sobre σ . Estes campos sempre podem ser pensados como campos vetoriais variacionais de uma variação geodésica.

Algumas condições tendem a facilitar o aparecimento de pontos focais. É natural esperar que uma delas tenha a ver com a forma com que P está imersa em M .

Observe que no Exemplo 2.5.9, as geodésicas normais emanando da hipérbole $y = 0$ de P convergem essencialmente por causa da própria curvatura desta hipérbole. Isto também se deve ao fato de que o espaço ambiente \mathbb{R}^3 , neste exemplo, não possui curvatura, o que mantém a convergência inicial causada por P . Conforme veremos, estas duas condições, convergência inicial em P e manutenção desta por M , são suficientes para determinar a existência de pontos focais.

Definição 2.6.1. *Seja $P \subseteq M$ uma subvariedade Pseudo-Riemanniana de M , e seja H seu vetor de curvatura média (Definição 1.6.12). A convergência de P é a função real k , definida sobre o fibrado normal NP de P , por*

$$k(z) = \langle z, H_p \rangle, \quad \forall z \in T_p P^\perp.$$

Teorema 2.6.2. *Seja P uma hipersuperfície tipo-espaço da variedade Riemanniana ou Lorentziana M , e σ uma geodésica de M normal a P em $p = \sigma(0)$. Suponha que*

- (i) $k(\sigma'(0)) = \langle \sigma'(0), H_p \rangle > 0$.
- (ii) $\text{Ric}(\sigma', \sigma') \geq 0$.

Então, existe um ponto focal $\sigma(r)$ de P sobre σ com $0 < r \leq \frac{1}{k(\sigma'(0))}$, desde que σ esteja definida pelo menos em $[0, r]$. \square

Quando $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície tipo-espaço, podemos definir um campo vetorial $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}^\perp(S)$ de maneira única, exigindo que ele seja normal, tipo-tempo e futuro-dirigido, uma vez que $T_p S^\perp$ tem dimensão 1, para cada $p \in S$, e assim considerar a função $\mathbf{k} : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{k}(p) = \langle \mathbf{u}(p), H_p \rangle$. Desta maneira, a convergência de S se reduz a uma função escalar sobre S . Vamos sempre nos referir a esta função quando S for uma hipersuperfície tipo-espaço.

2.7 O Caso Tipo-luz

No problema variacional que estamos considerando, é necessário tratar o caso das geodésicas tipo-luz separadamente, por conta de certas technicalidades, tais como a não-diferenciabilidade do comprimento de arco $|\alpha'(u)|$ em $u = 0$. Uma das maneiras de contornar essa dificuldade é considerar, ao invés do comprimento de arco, o funcional de energia, dado por $E(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^b \langle \alpha', \alpha' \rangle du$, e fazer uma análise semelhante à que fizemos anteriormente. Sem entrar em mais detalhes, iremos apenas enunciar o análogo do Teorema 2.6.2 para este caso, que será utilizado mais adiante no trabalho.

Teorema 2.7.1. *Seja P uma subvariedade tipo-espaço $(n-2)$ -dimensional de uma variedade de Lorentz M e H o vetor de curvatura média de P . Seja σ uma geodésica tipo-luz normal a P em $p = \sigma(0)$ tal que*

- (i) $\mathbf{k}(\sigma'(0)) = \langle \sigma'(0), H_p \rangle > 0$.
- (ii) $\text{Ric}(\sigma', \sigma') \geq 0$.

Então existe um ponto focal $\sigma(r)$ de P sobre σ com $0 < r \leq \frac{1}{\mathbf{k}(\sigma'(0))}$, desde que σ esteja definida neste intervalo. \square

Um dos pontos de partida para a teoria de Causalidade, a ser discutida no próximo capítulo, é determinar quando é possível conectar dois pontos $p, q \in M$ por uma curva α , com a condição de α ser tipo-tempo. Uma segunda condição, mais fraca, é pedir que α seja apenas causal, isto é, que a cada instante t , $\alpha'(t)$ seja tipo-tempo ou tipo-luz. Obviamente, a primeira implica na segunda, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, se $M = \mathbb{R}^2$ com a métrica $ds^2 = dx^2 - dy^2$, os pontos $p = (0, 0)$ e $q = (1, 1)$ podem ser conectados pela curva causal $\alpha(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$, mas nenhuma curva tipo-tempo pode sair de p e chegar em q . Note que neste exemplo, α é uma geodésica tipo-luz sem pontos conjugados. O Teorema a seguir diz que a recíproca é válida se excluirmos este tipo de situação.

Teorema 2.7.2. *Se α é uma curva causal de p a q e α não admite reparametrização como geodésica tipo-luz sem pontos conjugados, então existe uma variação de extremos fixos x de α tal que as curvas longitudinais são tipo-tempo. Em particular, p e q podem ser conectados por curvas tipo-tempo. \square*

Pontos focais sobre uma curva causal tendem a dar espaço para pequenas perturbações (variações), tornando-a tipo-tempo. Para subvariedades, temos a seguinte versão.

Teorema 2.7.3. *Seja P uma subvariedade tipo-espaço de M , e $\alpha \in \Omega(P, q)$ uma curva causal. Suponha que α não é uma geodésica tipo-luz normal a P sem pontos focais antes de q . Então, existe uma variação $x : [0, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ de α tal que as curvas longitudinais $u \mapsto x(u, v)$ são tipo-tempo, para todo $v \in (-\delta, \delta)$, $v \neq 0$. \square*

Capítulo 3

Causalidade

Conforme já foi mencionado, a teoria de Causalidade trata da questão de determinar, dado um ponto p fixo, quais pontos podem ser conectados a p por curvas tipo-tempo (ou tipo-luz). Fisicamente, estes pontos representam os eventos que podem influenciar ou ser influenciados pelo evento p , uma vez que nesse contexto curvas tipo-tempo representam trajetórias de partículas materiais e curvas tipo-luz, como o nome sugere, trajetórias de raios de luz.

Veremos que, para uma certa classe de variedades Lorentzianas, resultados essencialmente causais estão relacionados de maneira não trivial com a geometria e a topologia destas variedades.

3.1 Orientação Temporal

Fixe uma variedade Lorentziana M .

Definição 3.1.1. *Seja τ uma função definida em M que associa, para cada $p \in M$, um dos dois cones temporais em T_pM . Dizemos que τ é uma orientação temporal quando $\forall p \in M$, existe uma vizinhança U de p e um campo vetorial suave $X \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $X(q) \in \tau(q)$, $\forall q \in U$.*

M é dita *temporalmente orientável* se existe uma orientação temporal para M . Neste caso, uma vez escolhida a orientação temporal, dizemos que M está *temporalmente orientada*.

Teorema 3.1.2. *Se M é conexa e temporalmente orientável, então M admite exatamente duas orientações temporais.*

Demonstração. Sendo M temporalmente orientável, sejam τ_1, τ_2 duas orientações temporais. Ponha

$$A = \{p \in M : \tau_1(p) = \tau_2(p)\},$$

$$B = \{p \in M : \tau_1(p) \neq \tau_2(p)\}.$$

Se $p \in A$ [resp., $p \in B$], existe vizinhança aberta U de p e $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $X_i(q) \in \tau_i(q)$, $i = 1, 2$, $\forall q \in U$. Mas $\langle X_1(p), X_2(p) \rangle < 0$ [resp., $\langle X_1(p), X_2(p) \rangle > 0$] (Apêndice A, Proposição A.13). Por continuidade, diminuindo U se necessário, podemos

assumir que $\langle X_1(q), X_2(q) \rangle < 0$ [resp., $\langle X_1(q), X_2(q) \rangle > 0$], $\forall q \in U$, e novamente pelo Teorema A.13 podemos concluir que $U \subseteq A$ [resp., $U \subseteq B$]. Assim, A e B são abertos, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = M$. A conexidade de M implica $A = \emptyset$ e $B = M$ ou $A = M$ e $B = \emptyset$. Dessa forma, se τ_1, τ_2, τ_3 são orientações temporais, tome $p \in M$. Se $\tau_1(p) \neq \tau_2(p)$, como só há dois cones temporais em $T_p M$, $\tau_3(p) = \tau_1(p)$ ou $\tau_3(p) = \tau_2(p)$, e pela primeira parte, temos $\tau_3 = \tau_1$ ou $\tau_3 = \tau_2$. Finalmente, dada τ orientação temporal, seja $-\tau$ a função que a cada $p \in M$ associa o cone temporal oposto a $\tau(p)$ em $T_p M$. Como existe U vizinhança aberta de p e $X \in \mathfrak{X}(U)$ com $X(q) \in \tau(q)$, $\forall q \in U$, tomando $Y = -X$ temos $Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $Y(q) = (-\tau)(q)$, $\forall q \in U$. Assim $-\tau$ é uma orientação temporal distinta de τ , o que completa a prova. ■

Teorema 3.1.3. *Uma variedade de Lorentz M é temporalmente orientável se e somente se existe um campo vetorial tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração. Se M admite um campo vetorial tipo-tempo X , então $\tau(p) = C(X(p))$ fornece uma orientação temporal. Suponha, por outro lado, que M é temporalmente orientável, e escolha uma orientação temporal τ qualquer. Assim, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança aberta U_p de p e um campo vetorial X_{U_p} , definido em U_p , tal que $X_{U_p}(q) \in \tau(q)$, $\forall q \in U_p$. Tome $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_p\}_{p \in M}$ de M . Assim, o suporte de cada função f_λ está contido em $U(\lambda)$, onde $U(\lambda) = U_x$ para algum $x \in M$. Como $0 \leq f_\lambda \leq 1$ e os cones temporais são convexos, o campo vetorial dado por

$$X(q) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(q) X_{U(\lambda)}(q), \quad \forall q \in M,$$

é tipo-tempo em todo ponto. ■

Observação 3.1.4. O Teorema 3.1.3 deixa claro que uma orientação temporal pode não existir em uma variedade Lorentziana M qualquer. Contudo, sempre existe um *recobrimento duplo* de M que é temporalmente orientável (ver referência [O'NEILL], Lema 7.17).

Observação 3.1.5. Quando uma orientação temporal τ em M é definida usando um campo vetorial tipo-tempo $X \in \mathfrak{X}(M)$, como na demonstração do Teorema 3.1.3, dizemos que τ é a *orientação temporal induzida por X* .

Suponha que M é uma variedade Lorentziana temporalmente orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vetorial tipo-tempo como na demonstração do Teorema 3.1.3. Neste caso, dizemos que um vetor causal $v \in T_p M$ é *futuro-dirigido* se $\langle v, X(p) \rangle < 0$. Do contrário, v é dito *passado-dirigido*. Notamos que se v é tipo-tempo e $w \in T_p M$ causal com $\langle v, w \rangle < 0$, então w é futuro-dirigido se e somente se v o for.

Definição 3.1.6. *Suponha que M é temporalmente orientada. Uma curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ causal é dita futuro-dirigida [resp. passado-dirigida] se $\gamma'(t)$ é um vetor futuro-dirigido [resp. passado-dirigido], para todo $t \in I$.*

Dada uma curva $\gamma : [a, b) \rightarrow M$ causal e futuro-dirigida, se existe $p \in M$ tal que, para toda sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[a, b)$ com $s_n \rightarrow b$, temos $\gamma(s_n) \rightarrow p$, então p é dito *ponto limite futuro* de γ . O conceito de *ponto limite passado* é definido analogamente.

Como M é Hausdorff, esses pontos, se existirem, são únicos. Quando γ não admite um ponto limite futuro [resp. passado], dizemos que γ é futuro-inextensível [resp. passado-inextensível]. Uma curva causal que é passado-inextensível e futuro-inextensível simultaneamente é dita simplesmente *inextensível*. Note que essas definições estão de acordo com aquelas dadas para geodésicas, segundo o Teorema 1.5.4.

Definição 3.1.7. *Um espaço-tempo é uma variedade Lorentziana M conexa e temporalmente orientada.*

Exemplo 3.1.8. A variedade Lorentziana \mathbb{R}_1^n pode ser munida de uma orientação temporal natural, a saber, aquela induzida pelo campo vetorial $\frac{\partial}{\partial x^0}$, que é tipo-tempo. A \mathbb{R}_1^n com esta orientação temporal damos o nome de *espaço-tempo de Minkowski*. Este é um exemplo muito importante, que desempenha um papel central na geometria Lorentziana. *Deste ponto em diante, sempre que nos referirmos a \mathbb{R}_1^n , vamos assumir esta orientação temporal, salvo menção contrária.*

Ao longo do resto deste capítulo, assumiremos fixado um espaço-tempo arbitrário (M, g) .

3.2 Relações de Causalidade

Definiremos agora as assim chamadas *relações de causalidade* em M . Dados $p, q \in M$, usaremos o símbolo:

(1) $p \ll q$, se existe uma curva suave por partes, tipo-tempo e futuro-dirigida de p até q .

(2) $p < q$, se existe uma curva suave por partes, causal e futuro-dirigida de p até q .

Tem-se $p \ll q \Rightarrow p < q$. Definimos ainda a relação $p \leq q$ para indicar que $p < q$ ou $p = q$. Se $A \subseteq M$, o conjunto

$$I^+(A) := \{ q \in M : \exists p \in A \text{ com } p \ll q \}$$

é chamado *futuro cronológico* de A , e

$$J^+(A) := \{ q \in M : \exists p \in A \text{ com } p \leq q \}$$

é chamado *futuro causal* de A . Segue imediatamente das definições acima que $A \cup I^+(A) \subseteq J^+(A)$. O *passado cronológico* e o *passado causal* são definidos de forma temporalmente dual. Em verdade, esta dualidade se estende para todos os conceitos e demonstrações envolvendo passado e futuro, de modo que é suficiente nos concentrarmos apenas no futuro daqui por diante, e assim faremos. Se $p \in M$, escreveremos $I^+(p) \equiv I^+(\{p\})$, e similarmente para J^+ .

Exemplo 3.2.1. Em $M = \mathbb{R}_1^n$, podemos calcular explicitamente os conjuntos $I^+(p)$ e $J^+(p)$, para qualquer $p \in M$. De fato, usando o Lema 5.1.6, temos que se $p = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$, então

$$I^+(p) = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in M : \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - x_i)^2 < (p_0 - x_0)^2, x_0 > p_0 \right\},$$

$$J^+(p) = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in M : \sum_{i=1}^{n-1} (p_i - x_i)^2 \leq (p_0 - x_0)^2, x_0 \geq p_0 \right\}.$$

Este exemplo apresenta algumas propriedades particulares. Note que $I^+(p)$ é aberto, $J^+(p)$ é fechado e $\overline{I^+(p)} = J^+(p)$. Se considerarmos, por outro lado, $M = \mathbb{R}_1^2 \setminus \{(1, 1)\}$, veremos que $J^+(0, 0)$ não é o fecho de $I^+(0, 0)$, não sendo sequer um conjunto fechado ele próprio. Contudo, conforme provaremos adiante, se $J^+(p)$ for fechado então ele será o fecho de $I^+(p)$.

Ambas as relações \leq, \ll são transitivas: se $p \ll q$ e $q \ll r$, por exemplo, basta considerar a justaposição de uma curva tipo-tempo que liga p a q com outra curva tipo-tempo que liga q a r ; obteremos assim uma curva tipo-tempo de p a r , provando $p \ll r$. Vale ainda uma espécie de transitividade mais geral, obtida diretamente do Teorema 2.7.2.

Corolário. Dados $x, y, z \in M$, se $x \ll y$ e $y \leq z$, ou $x \leq y$ e $y \ll z$, então $x \ll z$. \square

Sabemos que um aberto $U \subseteq M$ pode ser visto ele próprio como uma variedade de Lorentz, bastando para isto restringir as cartas e a métrica de M para U . No caso em que M é um espaço-tempo, U pode ser visto ele próprio como espaço-tempo, já que podemos restringir também a orientação temporal de M para U . Isto nos permite definir relações de causalidade intrínsecas de U .

Se $A \subseteq U$, denotaremos por $I^+(A, U)$ o *futuro cronológico de A relativo a U* , que consiste daqueles pontos de U aos quais é possível chegar com uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida contida em U e partindo de A . Analogamente, $J^+(A, U)$ denota o *futuro causal de A relativo a U* . Em particular, $I^+(A, M) \equiv I^+(A)$ e $J^+(A, M) \equiv J^+(A)$. Note que $I^+(A, U) \subseteq I^+(A) \cap U$, embora em geral $I^+(A) \cap U \neq I^+(A, U)$. Quando $q \in I^+(p, U)$ (resp. $J^+(p, U)$), escreveremos $p \ll_U q$ (resp. $p \leq_U q$). Estas relações são particularmente simples no caso em que $U \subseteq M$ é convexo, conforme o seguinte Lema.

Lema 3.2.2. Seja $U \subseteq M$ uma vizinhança convexa.

(i) Se $p \neq q$ em U , então $q \in I^+(p, U) \Leftrightarrow \overrightarrow{pq}$ é tipo-tempo, futuro-dirigido (analogamente para J^+).

(ii) $I^+(p, U)$ é aberto em U , $\forall p \in U$.

(iii) $J^+(p, U)$ é o fecho (em U) de $I^+(p, U)$, $\forall p \in U$.

(iv) Se $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências em U com $p_n \rightarrow p \in U$, $q_n \rightarrow q \in U$, então $q_n \in J^+(p_n, U)$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q \in J^+(p, U)$.

(v) Toda curva causal contida em um compacto $K \subseteq U$ é extensível.

Demonstração. Fixe $X \in \mathfrak{X}(M)$ campo vetorial tipo-tempo, futuro-dirigido (vindo da orientação temporal de M).

(i) A existência de uma curva tipo-tempo futuro-dirigida em U de p a q implica que \vec{pq} é tipo-tempo (ver Observação 1.3.8). Se $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ é uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida de p até q , a demonstração daquela Proposição deixa claro que \vec{pq} deve estar no mesmo cone temporal que $\alpha'(a)$, que é um cone futuro por hipótese. Logo \vec{pq} é, também, futuro-dirigido.

Por outro lado, se temos que \vec{pq} é tipo-tempo, futuro-dirigido, então já que as geodésicas não mudam de caráter causal, a geodésica radial $\sigma_{pq} : [0, 1] \rightarrow U$ é uma curva tipo-tempo de p até q . Como $\sigma_{pq}'(0) \equiv \vec{pq}$, que é futuro-dirigido, a função $\langle X(\sigma_{pq}(t)), \sigma_{pq}'(t) \rangle$ é negativa em $t = 0$. Sendo contínua, essa função só pode ficar positiva se existir t_0 tal que $\langle X(\sigma_{pq}(t_0)), \sigma_{pq}'(t_0) \rangle = 0$. Isto implicaria que $\sigma_{pq}'(t_0)$ é tipo-espaço, uma contradição.

(ii) Seja $q \in I^+(p, U)$. Então, por (i), \vec{pq} é tipo-tempo, futuro-dirigido. Logo $\langle \vec{pq}, X(p) \rangle < 0$. Pela Proposição 1.3.11, \vec{pq} depende de forma contínua de q , de modo que é possível encontrar uma vizinhança V de q tal que $\langle \vec{pr}, \vec{pq} \rangle < 0, \forall r \in V$. Assim, usando (i) novamente, concluímos que $V \subseteq I^+(p, U)$, e portanto que $I^+(p, U)$ é aberto.

(iii) Como $I^+(p, U) = \{q \in U : \langle \vec{pq}, \vec{pq} \rangle < 0\}$, temos $\overline{I^+(p, U)} = \{q \in U : \langle \vec{pq}, \vec{pq} \rangle \leq 0\}$, sendo o fecho em U . Mas este último é exatamente $J^+(p, U)$, por (i).

(iv) Segue imediatamente de (1), já que \vec{pq} depende continuamente de p e q .

(v) Reparametrizando se necessário, podemos escrever uma tal curva como $\alpha : [0, b] \rightarrow K \subseteq U$, onde $b \leq \infty$. Basta olhar extensibilidade à direita. Tome uma sequência $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ em $[0, b)$ tal que $t_i \rightarrow b$. Ora, a sequência $\{\alpha(t_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ permanece no compacto K , por hipótese, donde admite uma subsequência convergente, digamos, $\{\alpha(s_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$. Seja x o limite desta subsequência. Para mostrar que α é extensível, precisamos mostrar agora que, dada uma sequência arbitrária $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ em $[0, b)$ com $s_i \rightarrow b$, tem-se $\alpha(s_i) \rightarrow x$. Suponha que não. Passando para subsequência se necessário, assumimos que $\{\alpha(s_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge para $y \in K, y \neq x$. Mas α é causal, e portanto o item (iv) implica que $x \in J^+(y, U)$ e $y \in J^+(x, U)$. Por (1), temos \vec{xy} futuro-dirigido e passado-dirigido ao mesmo tempo, uma contradição. ■

Veremos mais adiante que as propriedades (i) e (iii)-(v) são em geral falsas para um espaço-tempo genérico. Por outro lado, o item (ii) não apenas vale em geral como ainda admite uma versão mais forte, que provaremos agora. Ela diz essencialmente que a relação \ll é aberta; em outras palavras, o conjunto $I^+ \equiv \{(p, q) \in M \times M : p \ll q\}$ constitui um aberto de $M \times M$.

Proposição 3.2.3. *Dados $p, q \in M$, com $p \ll q$, existem vizinhanças abertas U, V de p, q respectivamente tais que, $\forall p' \in U, \forall q' \in V$, tem-se $p' \ll q'$.*

Demonstração. Seja σ uma curva tipo-tempo de p a q . Tome vizinhanças convexas W, W' de p, q respectivamente e considere pontos $q^- \in W', p^+ \in W$ ambos sobre a curva σ , com q^- antes de q e p^+ depois de p . Pelo lema 3.2.2, os conjuntos $U := I^+(q^-, W')$ e $V := I^-(p^+, W)$ são abertos em M , e possuem as propriedades desejadas. ■

Esta Proposição revela uma relação entre a causalidade e a topologia de M : os conjuntos $I^+(A)$, para qualquer $A \subseteq M$, são abertos. Vale ainda a

Proposição 3.2.4. *Seja $A \subseteq M$ um subconjunto qualquer de M .*

(i) $\text{int}(J^+(A)) = I^+(A)$.

(ii) $\overline{J^+(A)} = \overline{I^+(A)}$.

Demonstração. (i) Como $I^+(A) \subseteq J^+(A)$ e $I^+(A)$ é aberto, $I^+(A) \subseteq \text{int}(J^+(A))$. Por outro lado, dado $p \in \text{int}(J^+(A))$, existe $U \subseteq J^+(A)$ vizinhança aberta de p . Tome $q \in I^-(p, U)$. Assim, para algum $a \in A$, $a \leq q$ e $q \ll p$, o que implica $a \ll p$.

(ii) De $I^+(A) \subseteq J^+(A)$ temos $\overline{I^+(A)} \subseteq \overline{J^+(A)}$. Seja $p \in \overline{J^+(A)}$ e U uma vizinhança aberta qualquer de p . Por hipótese, existe $q \in U \cap J^+(A)$, isto é, $a \leq q$ para algum $a \in A$. Tomando $r \in I^+(q, U)$, teremos $a \leq q$ e $q \ll r$, donde $a \ll r$. Como $r \in U \cap I^+(A)$ e U é arbitrária, $p \in \overline{I^+(A)}$. ■

O próximo Corolário é uma consequência direta do Teorema 2.7.3, que nos dá uma idéia da estrutura de conjuntos da forma $J^+(A) \setminus I^+(A)$, onde $A \subseteq M$.

Corolário 3.2.5. *Seja $A \subseteq M$ e $q \in J^+(A) \setminus I^+(A)$. Se α é uma curva causal e futuro-dirigida de A a q , então α é uma geodésica tipo-luz sem pontos conjugados antes de q . Além disso, α permanece em $J^+(A) \setminus I^+(A)$ até q .*

3.3 O Lema da Curva Limite

No que segue, vamos estudar sequências de curvas causais $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e definir certos tipos de convergência para tais sequências. Em geral, mesmo que cada γ_n seja suave, não será verdade que o limite também o seja, embora veremos que a curva limite será contínua. Portanto precisamos introduzir uma noção de causalidade válida para curvas que são apenas contínuas.

Definição 3.3.1. *Uma aplicação contínua $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ é dita ser uma curva C^0 , causal e futuro-dirigida (resp. passado dirígida) se, para qualquer $t_0 \in I$, existe $U(t_0) \subseteq M$ vizinhança aberta e convexa de $\alpha(t_0)$ e um $\epsilon_{t_0} > 0$ tais que:*

(i) $\alpha(I \cap (t_0 - \epsilon_{t_0}, t_0 + \epsilon_{t_0})) \subset U(t_0)$.

(ii) $\forall t_1, t_2 \in (t_0 - \epsilon_{t_0}, t_0 + \epsilon_{t_0}) \cap I$, com $t_1 < t_2$, existe uma curva causal, suave e futuro-dirigida (resp. passado-dirigida) em $U(t_0)$ de $\alpha(t_1)$ até $\alpha(t_2)$.

Um aspecto importante dessa definição é que as relações causais entre pontos de um espaço-tempo permanecem inalteradas se trabalharmos com curvas C^0 causais ao invés de curvas suaves por partes. Mais precisamente, temos o

Teorema 3.3.2. *Sejam $p, q \in M$. São equivalentes:*

- (i) $p < q$.
- (ii) $\exists \alpha : [a, b] \rightarrow M$ curva C^0 , causal e futuro-dirigida tal que $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$.

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) é imediato.

(ii) \Rightarrow (i): Seja α como no enunciado. Então, para cada $t \in [a, b]$, existe uma vizinhança aberta e convexa $U(t)$ de $\alpha(t)$ satisfazendo as duas condições da definição de curva C^0 causal futuro-dirigida. Sendo $\alpha([a, b])$ compacto, podemos extrair de $\{U(t)\}_{t \in [a, b]}$ uma subcobertura finita $\{U(t_1), \dots, U(t_k)\}$. Tome $a = u_0 < u_1 < \dots < u_l = b$ partição de $[a, b]$ subordinada à cobertura $\{U(t_1), \dots, U(t_k)\}$; isto é, para cada $i \in \{0, \dots, l-1\}$, existe $j \in \{1, \dots, k\}$ com $\alpha([u_i, u_{i+1}]) \subset U_j$.

Assim, existem curvas suaves, causais e futuro-dirigidas: β_0 entre $\alpha(a)$ e $\alpha(u_1)$, β_1 entre $\alpha(u_1)$ e $\alpha(u_2)$, até β_{l-1} entre $\alpha(u_{l-1})$ e $\alpha(b)$. Concatenando $\beta_0, \dots, \beta_{l-1}$, obtemos uma curva suave por partes, causal e futuro-dirigida que liga $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$, isto é, $p < q$, como queríamos. ■

Introduzimos agora uma noção fundamental de convergência de curvas.

Definição 3.3.3. *Seja $\Gamma = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de curvas (não necessariamente causais) em M . Um ponto $p \in M$ é um ponto de acumulação da seqüência Γ se existe uma subsequência $\tilde{\Gamma} = (\gamma_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe um $p_{n_i} \in \text{Im}(\gamma_{n_i})$ de modo que a seqüência $(p_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ converge para p . Dizemos que a subsequência $\tilde{\Gamma}$ distingue o ponto p . Uma curva γ em M é uma curva limite de Γ quando existe uma subsequência $\tilde{\Gamma}$ de Γ que distingue cada um dos pontos da imagem de γ , conforme acima.*

O próximo Teorema lança uma luz sobre a Definição 3.3.1, pois sugere que uma curva C^0 causal é aproximada, de forma arbitrariamente precisa, por curvas causais suaves por partes.

Teorema 3.3.4. *Toda curva C^0 , causal e futuro-dirigida $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva limite de alguma seqüência $\Gamma = (\gamma_n : [a, b] \rightarrow M)_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas suaves por partes, causais e futuro-dirigidas.*

Demonstração. Seja $\{U_1, \dots, U_k\}$ uma cobertura de $\text{Im}(\gamma)$ por vizinhanças normais e convexas, construída como no Teorema anterior, e $P_0 = \{a = u_0 < u_1 < \dots < u_l = b\}$ partição de $[a, b]$ subordinada à $\{U_1, \dots, U_k\}$. Tome $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência qualquer de partições refinando P_0 , com $\|P_n\| \rightarrow 0$. Note que, para cada $m \in \mathbb{N}$, é possível escolher uma curva $\gamma_m : [a, b] \rightarrow M$ cuja restrição para qualquer intervalo $[t_j, s_j]$ de P_m é uma curva suave, causal e futuro-dirigida de $\gamma(t_j)$ a $\gamma(s_j)$. De fato, como $\gamma([u_i, u_{i+1}])$ está sempre contida em algum dos convexos U_1, \dots, U_k , para todo i , quaisquer dois pontos de $\gamma([u_i, u_{i+1}])$ podem ser ligados por uma tal curva. Em particular, já que P_m refina P_0 , o mesmo vale para quaisquer subintervalos da

partição P_m . É evidente que desta forma γ_m é uma curva suave por partes, causal e futuro-dirigida.

Afirmamos que γ é uma curva limite da sequência $\Gamma = (\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ assim obtida. Com efeito, fixe $x \in [a, b]$, e seja $U \subset M$ uma vizinhança qualquer de $\gamma(x)$. Tome $\epsilon > 0$ de forma que $\gamma((x - \epsilon, x + \epsilon) \cap [a, b]) \subset U$. Uma vez que a norma das partições tende a zero, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $i > N$, temos $\|P_i\| < \epsilon$. Para $m > N$, denote por $[t_m, s_m]$ o subintervalo de P_m que contém x . Por construção, $\gamma_m(t_m) = \gamma(t_m)$ e $\gamma_m(s_m) = \gamma(s_m)$. Mas $|x - t_m|$ e $|x - s_m|$ são ambos menores do que $|t_m - s_m|$, pois $x \in [t_m, s_m]$. Além disso, $|t_m - s_m| \leq \|P_m\| < \epsilon$. Logo $\gamma(t_m), \gamma(s_m) \in U$, donde $Im(\gamma_m) \cap U \neq \emptyset$. Isto mostra que a própria sequência Γ distingue todos os pontos de γ , e portanto que γ é curva limite desta sequência. ■

Observação 3.3.5. Claramente, a noção de curva limite independe de parametrização, no seguinte sentido: se $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ é curva limite de uma sequência de curvas Γ , e $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow I$ é qualquer função contínua, então $\gamma \circ h$ é também curva limite de Γ , pois $Im(\gamma \circ h) \subseteq Im(\gamma)$.

Observação 3.3.6. Em geral, se uma sequência Γ de curvas causais futuro-dirigidas possui uma curva limite γ , esta não necessariamente será causal futuro-dirigida.

Considere, por exemplo, $M = \mathbb{R}^2$, com o elemento de linha $ds^2 = dx^2 - dy^2$ nas coordenadas naturais. A sequência

$$\begin{aligned} \gamma_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{1}{n}, t\right) \end{aligned}$$

de curvas tipo-tempo (portanto causais) futuro-dirigidas possui como curva limite

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (0, -t) \end{aligned}$$

que é passado-dirigida. Na verdade, de acordo com a Observação 3.3.5, dada qualquer função contínua $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a curva

$$\begin{aligned} \alpha_h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (0, h(t)) \end{aligned}$$

é também curva limite de $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$. No caso em que $h(t) = \text{sen}(t)$, a curva α_h não possui nem mesmo um caráter causal bem definido.

O resultado principal desta Seção é uma ferramenta técnica fundamental na geometria Lorentziana. Vamos estabelecê-lo por uma série de lemas.

Lema 3.3.7. Para todo $p \in M$, existe um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ normal em p tal que $x^1 : U \rightarrow \mathbb{R}$ possui gradiente tipo-tempo em todos os pontos de U .

Demonstração. Seja $(x^1, \dots, x^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas normal em p com $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ tipo-tempo. Temos $(\nabla x^1)^i \equiv g^{i1}$, $i = 1, \dots, n$ em U . Mas $g_{ij}(p) = \eta_{ij}$. Ainda,

$$\langle \nabla x^1, \nabla x^1 \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} g^{i1} g^{j1} = g^{11}, \text{ e } g^{11}(p) = -1 < 0.$$

Por continuidade, podemos diminuir U de modo que ∇x^1 permaneça tipo-tempo em toda parte dentro de U . ■

Lema 3.3.8. *Seja $K_0 > 1$. Dado $p \in M$, existe $U \subset M$ vizinhança de p tal que a métrica plana g_0 em U que tem o elemento de linha*

$$ds_{g_0}^2 = -K_0 dx^1{}^2 + \sum_{i=2}^n dx^i{}^2,$$

com respeito a algum sistema de coordenadas normal em $p \in U$, possui a propriedade de que, para todo $q \in U$ e todo $v \in T_q M - \{0_q\}$, se $g(v, v) \leq 0$, então $g_0(v, v) < 0$.

Demonstração. Suponha que não. Então, tomando a vizinhança U cada vez menor, podemos construir uma sequência $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em M , com $q_k \rightarrow p$, e uma sequência $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde $v_k \in T_{q_k} M - \{0_{q_k}\}$, tais que $g(v_k, v_k) \leq 0$ mas $g_0(v_k, v_k) \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Fixe um sistema de coordenadas normal $(x^1, \dots, x^n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em p e escreva $v_k = \sum_{i=1}^n v_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Podemos assumir que a norma euclidiana $\|(v_k^1, \dots, v_k^n)\|$ é 1, já que $v_k \neq 0_{q_k}$. Mas então cada (v_k^1, \dots, v_k^n) pode ser pensado como um elemento de $S^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que é compacta, e portanto podemos assumir que a sequência $\left((v_k^1, \dots, v_k^n) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, sem perda de generalidade (passando para uma subsequência se necessário). Logo $(v_k^1, \dots, v_k^n) \rightarrow (v_0^1, \dots, v_0^n)$, que também possui norma euclidiana unitária. Como $\frac{\partial}{\partial x^i}(q_k) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, por continuidade, $v_k \rightarrow \sum_{i=1}^n v_0^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \equiv v_0 \in T_p M$. Em $T_p M$, $g(v_0, v_0) \leq 0$ e $g_0(v_0, v_0) \geq 0$, donde $g_0(v_0, v_0) - g(v_0, v_0) \geq 0$, ou seja

$$-K_0(v_0^1)^2 + \sum_{i=2}^n (v_0^i)^2 - [-(v_0^1)^2 + \sum_{i=2}^n (v_0^i)^2] \geq 0,$$

$$(v_0^1)^2(1 - K_0) \geq 0.$$

Como $(v_0^1)^2 \geq 0$ e $K_0 > 1$, $(v_0^1)^2(1 - K_0) \leq 0$. Daí $v_0^1 = 0$. Mas $(v_0^1)^2 \geq \sum_{i=2}^n (v_0^i)^2 \geq 0$; logo $v_0^i = 0$, para $i = 2, \dots, n$, o que é um absurdo, porque implica em $v_0 = 0$, com $\|(v_0^1, \dots, v_0^n)\| = 1$. ■

Definiremos agora a noção de retificabilidade para uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ qualquer, onde E é uma variedade Riemanniana. Como sabemos, a métrica Riemanniana g_E de E induz uma distância em E , dada por

$$d_E(x, y) = \inf_{\gamma \in \ell_{x,y}} \{ L(\gamma) \},$$

onde $\ell_{x,y}$ denota o conjunto de todas as curvas suaves por partes de x até y , e o comprimento de arco é com respeito a g_E .

Definição 3.3.9. Seja (E, g_E) uma variedade Riemanniana, e $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ uma curva (contínua) qualquer. Dizemos que γ é g_E -retificável quando é finito o supremo

$$L_{g_E}(\gamma) := \sup_{P \text{ partição de } [a, b]} (l_P(\gamma))$$

onde, se $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ é uma partição de $[a, b]$,

$$l_P(\gamma) = \sum_{i=1}^k d_E(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)).$$

Nesse caso, $L_{g_E}(\gamma)$ é o g_E -comprimento de γ . Assumiremos sem demonstração o seguinte resultado, que será usado crucialmente daqui em diante (ver referência [NO]). Lembramos que, no contexto deste trabalho, as variedades diferenciáveis são sempre Hausdorff e com base enumerável, e que pelo Teorema de Hopf-Rinow, uma variedade (E, g_E) Riemanniana é geodesicamente completa se e somente se (E, d_E) é um espaço métrico completo.

Teorema 3.3.10. Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana completa. \square

Lema 3.3.11. Seja h uma métrica Riemanniana completa em M , e $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva C^0 , causal e futuro-dirigida. Então, para quaisquer $a, b \in I$ com $a < b$, o h -comprimento $L_{h, [a, b]}(\gamma) := L_h(\gamma|_{[a, b]})$ de γ fica bem definido, e é finito. Além disso, fixado $t_0 \in I$, a aplicação $S : I \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$S(t) = \begin{cases} L_{h, [t_0, t]}(\gamma) & \text{se } t_0 \leq t \\ -L_{h, [t, t_0]}(\gamma) & \text{se } t \leq t_0 \end{cases}$$

é contínua e injetiva. Finalmente, se $I = (a, b)$ e γ é futuro-inextensível, então $S([t_0, b)) = [0, +\infty)$. (Resultado análogo vale se γ é passado-inextensível).

Demonstração. Fixe $h, \gamma : [a, b] \rightarrow M$ conforme enunciado. Mostraremos que γ é retificável, com respeito à distância d_h . Inicialmente, assumamos que $\gamma([a, b])$ está contido em um aberto U , tal que \bar{U} é compacto e $\bar{U} \subset V$, onde V é um aberto associado a um sistema de coordenadas $\Phi = (x^1, \dots, x^n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ com ∇x^1 tipo-tempo, o que é possível pelo lema 3.3.7. Pelo lema 3.3.8, podemos supor que $\forall q \in U, \forall v \in T_q M, v \neq 0, g(v, v) \leq 0 \Rightarrow g_0(v, v) < 0$, onde g_0 é a métrica plana

$$ds_{g_0}^2 = -K_0 dx^1{}^2 + \sum_{i=2}^n dx^i{}^2, \quad (3.1)$$

com $K_0 > 1$ alguma constante. Considere a função

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x^1(\gamma(t)) \end{aligned}$$

que claramente é contínua. Podemos assumir que temos uma cobertura finita $\{U_1, \dots, U_k\}$ (em U) de $\gamma([a, b])$ por convexos e uma partição $P_0 = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ de $[a, b]$ satisfazendo:

(1) $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \exists j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_j$;

(2) $\forall t, t' \in [t_{i-1}, t_i], t < t', \exists \delta_{t,t'} : [c, d] \rightarrow U_j$ tal que $\delta_{t,t'}$ é suave, causal e futuro-dirigida, $\delta_{t,t'}(c) = \gamma(t), \delta_{t,t'}(d) = \gamma(t')$.

Fixemos então $i \in \{1, \dots, k\}$ e $t, t' \in [t_{i-1}, t_i]$ com $t < t'$ e $\delta_{t,t'} : [c, d] \rightarrow U_j$ como em (2). Temos $(x^1 \circ \delta_{t,t'})'(s) = \langle \nabla x^1(\delta_{t,t'}(s)), \delta_{t,t'}'(s) \rangle$, e ∇x^1 é tipo-tempo em U . Podemos supor, sem perda de generalidade, que ∇x^1 é passado-dirigido, trocando x^1 por $-x^1$ se necessário. Então $(x^1 \circ \delta_{t,t'})'(s) > 0$ e $x^1 \circ \delta_{t,t'}$ é crescente, de modo que $x^1(\delta_{t,t'}(c)) < x^1(\delta_{t,t'}(d))$, isto é, $x^1(\gamma(t)) < x^1(\gamma(t'))$; logo, f é crescente. Isto significa que f é um homeomorfismo sobre sua imagem $J \equiv f([a, b])$, o que nos permite considerar a reparametrização $\tilde{\gamma} := \gamma \circ f^{-1}$ de γ . Note que $x^1 \circ \tilde{\gamma}(\lambda) = (x^1 \circ \gamma) \circ f^{-1}(\lambda) \equiv \lambda$, ou seja, $(x^1, \dots, x^n) \circ \tilde{\gamma}(\lambda) \equiv (\lambda, y^2(\lambda), \dots, y^n(\lambda)), \forall \lambda \in J$, onde pusemos $y^l := x^l \circ \tilde{\gamma}$, para $2 \leq l \leq n$.

Agora, fixe $\lambda_1, \lambda_2 \in J$ com $\lambda_1 < \lambda_2$. Não há perda de generalidade em assumir U convexo com respeito a g_0 . Pelo Teorema 3.3.2, tem-se $\tilde{\gamma}(\lambda_1) \leq_g \tilde{\gamma}(\lambda_2)$, o que implica em $\tilde{\gamma}(\lambda_1) \leq_{g_0} \tilde{\gamma}(\lambda_2)$, por construção. Considere a curva $\alpha : [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow U$ dada por

$$\alpha(\lambda) = \Phi^{-1} \left[(\lambda_1, y^2(\lambda_1), \dots, y^n(\lambda_1)) + (\lambda - \lambda_1) \left(1, \frac{y^2(\lambda_2) - y^2(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \dots, \frac{y^n(\lambda_2) - y^n(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \right].$$

Como $\Phi \circ \alpha$ descreve uma reta e g_0 é plana, α é essencialmente a g_0 -geodésica (radial) de $\tilde{\gamma}(\lambda_1)$ a $\tilde{\gamma}(\lambda_2)$, que portanto será causal, e então $g_0(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda)) \leq 0$. Mas isto implica

$$\begin{aligned} -K_0 + \sum_{i=2}^n \frac{(y^i(\lambda_2) - y^i(\lambda_1))^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} &\leq 0, \\ \sum_{i=2}^n (y^i(\lambda_2) - y^i(\lambda_1))^2 &\leq K_0(\lambda_2 - \lambda_1)^2, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i(\lambda_2) - y^i(\lambda_1))^2} &\leq \sqrt{(K_0 + 1)}|\lambda_2 - \lambda_1|, \end{aligned}$$

pois $y^1(\lambda_2) - y^1(\lambda_1) = \lambda_2 - \lambda_1$. Para uma partição qualquer $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ de $[a, b]$ e qualquer $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned} d_h(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) &= d_h(\tilde{\gamma}(f(t_{i-1})), \tilde{\gamma}(f(t_i))) \leq \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} h(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda)) d\lambda = \\ &= \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} \sqrt{\sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n h_{lm}(\alpha(\lambda)) \left(\frac{[y^l(\lambda_i) - y^l(\lambda_{i-1})][y^m(\lambda_i) - y^m(\lambda_{i-1})]}{(\lambda_i - \lambda_{i-1})^2} \right)} d\lambda, \end{aligned}$$

onde escrevemos $\lambda_j = f(t_j), j = i, i-1$. Para algum $H > 0$, podemos fazer $|h_{lm}(\alpha(\lambda))| \leq H$. Observe também que os termos

$$Y_i^{lm} \equiv \frac{[y^l(\lambda_i) - y^l(\lambda_{i-1})][y^m(\lambda_i) - y^m(\lambda_{i-1})]}{(\lambda_i - \lambda_{i-1})^2}$$

na integral acima são constantes (i.e., não dependem de λ). Escolha $K_1 > 0$ tal que $K_1 > |Y_i^{lm}|, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall l, m \in \{1, \dots, n\}$. Fazendo isto, obtemos a seguinte estimativa:

$$l_P(\gamma) = \sum_{i=1}^k d_h(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \leq n \sqrt{HK_1} (f(b) - f(a)). \quad (3.2)$$

Logo, existe $C > 0$ tal que $l_P(\gamma) \leq C|(x^1 \circ \gamma)(a) - (x^1 \circ \gamma)(b)|$, o que implica na existência de $L_{h,[a,b]}(\gamma)$. O caso geral claramente pode ser reduzido a este considerando uma cobertura finita de $\gamma([a, b])$ por abertos como acima.

Seja agora $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ qualquer curva C^0 , causal e futuro-dirigida (I não necessariamente compacto). Fixe $t_0 \in I$. A aplicação $S : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$S(t) = \begin{cases} L_{h,[t_0,t]}(\gamma) & \text{se } t_0 \leq t \\ -L_{h,[t,t_0]}(\gamma) & \text{se } t \leq t_0 \end{cases}$$

está bem-definida, pela parte anterior.

Afirmção 1 S é crescente, portanto injetiva.

Sejam $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$. Evidentemente, tem-se $S(t_2) = S(t_1) + L_{h,[t_1,t_2]}(\gamma)$. Agora, $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ é não-constante; logo, existem $a, b \in [t_1, t_2], a < b$, com $\gamma(a) \neq \gamma(b)$. Considerando a partição $P = \{t_1, a, b, t_2\}$, vemos que

$$0 < d_h(\gamma(t_1), \gamma(a)) + d_h(\gamma(a), \gamma(b)) + d_h(\gamma(b), \gamma(t_2)) \equiv l_P(\gamma) \leq L_{h,[t_1,t_2]}(\gamma),$$

pois $d_h(\gamma(a), \gamma(b)) > 0$. Segue-se que $S(t_2) > S(t_1)$.

Afirmção 2 S é contínua.

É suficiente provar a continuidade de S em $t_0 \in \text{int}(I)$; o caso geral é análogo. Modificando ligeiramente a demonstração da primeira parte, imediatamente após a equação (3.2), é possível obter uma constante $C > 0$ tal que, $\forall t, t' \in J$, onde J é alguma vizinhança de t_0 , $|S(t) - S(t')| \leq C|f(t) - f(t')|$ para uma f contínua, e isto implica a continuidade de S .

Finalmente, suponha $I = (a, b)$, com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e γ futuro-inextensível. Então, podemos supor que para alguma sequência crescente $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em (a, b) com $t_n \rightarrow a$, a sequência $(\gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ não converge. Pela completude da métrica Riemanniana h e o Teorema de Hopf-Rinow, $(\gamma(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ não é de Cauchy com respeito a d_h . Construa uma subsequência $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ da seguinte forma. Para algum $\epsilon_0 > 0$, existem $n_1 < m_1$ satisfazendo $d_h(\gamma(t_{n_1}), \gamma(t_{m_1})) \geq \epsilon_0$. Daí, existem $n_2, m_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n_1 < m_1 < n_2 < m_2$ e $d_h(\gamma(t_{n_2}), \gamma(t_{m_2})) \geq \epsilon_0$. Uma vez escolhidos $n_1 < m_1 < \dots < n_k < m_k$, existem $n_{k+1}, m_{k+1} \in \mathbb{N}$, satisfazendo $n_1 < m_1 < \dots < n_k < m_k < n_{k+1} < m_{k+1}$ e $d_h(\gamma(t_{n_{k+1}}), \gamma(t_{m_{k+1}})) \geq \epsilon_0$.

Seja $A > 0$. Evidentemente, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\epsilon_0 > A$. Considere

o intervalo $[t_{n_1}, t_{m_N}]$ e a partição $P = \{t_{n_1} < t_{m_1} < \dots < t_{n_N} < t_{m_N}\}$ deste mesmo intervalo. Temos:

$$A < N\epsilon_0 \leq \sum_{i=1}^N d_h(\gamma(t_{n_i}), \gamma(t_{m_i})) \leq L_{h, [t_{n_1}, t_{m_N}]}(\gamma) \equiv S(t_{n_N}) - S(t_{n_1}).$$

Como A era arbitrário, isto implica que $\lim_{N \rightarrow +\infty} S(t_{n_N}) = +\infty$, e portanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = +\infty$, ou seja, $S([t_0, b)) = [0, +\infty)$. Analogamente, pode-se mostrar que $\lim_{t \rightarrow -\infty} S(t) = -\infty$ se γ é passado-inextensível. Logo $S((-\infty, t_0]) = (-\infty, 0]$. ■

Lema 3.3.12. (Arzelá-Ascoli) *Seja X um espaço métrico separável, localmente compacto, e (M, h) uma variedade Riemanniana completa. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de aplicações contínuas de X em M tal que:*

(i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua.

(ii) $\forall x_0 \in X$, o conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x_0)\}$ é limitado em M , com respeito a d_h .

Então, existem uma subsequência $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $f : X \rightarrow M$ contínua tal que, para todo $K \subseteq X$, K compacto, tem-se $f_{n_i}|_K \rightarrow f|_K$ uniformemente.

Demonstração. Ver Referência [EL]. □

Fixe uma métrica Riemanniana completa, h , em M . Pelo Lema 3.3.11, dada uma seqüência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas C^0 , causais, futuro-dirigidas e inextensíveis, podemos parametrizar cada γ_n por h -comprimento de arco. Denote por $\tilde{\gamma}_n$ esta reparametrização. A inextensibilidade para o futuro então implica que podemos tomar $\text{dom}(\tilde{\gamma}_n) = [0, +\infty)$. No Teorema abaixo, vamos trabalhar com as curvas já parametrizadas por h -comprimento de arco, em relação à métrica h fixada.

Teorema 3.3.13. (Lema da Curva Limite) *Seja $(\tilde{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de curvas C^0 , causais e futuro-inextensíveis, parametrizadas por h -comprimento de arco, com $\tilde{\gamma}_n(0) \rightarrow p$. Então, existe uma curva $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ C^0 , causal e futuro-inextensível, com $p = \gamma(0)$, e uma subsequência $(\tilde{\gamma}_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ que converge para γ uniformemente em cada compacto de $[0, +\infty)$, com respeito à métrica d_h . Em particular, γ é curva limite de $(\tilde{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Demonstração. Dados $t, t' \in [0, +\infty)$, com $t < t'$,

$$d_h(\tilde{\gamma}_n(t), \tilde{\gamma}_n(t')) \leq L_{h, [t, t']}(\tilde{\gamma}_n) \equiv t' - t, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

uma vez que parametrizamos por h -comprimento de arco. Isto significa que a família $(\tilde{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é equicontínua. Para um $t \in [0, +\infty)$ fixo,

$$d_h(\tilde{\gamma}_n(t), p) \leq d_h(\tilde{\gamma}_n(t), \tilde{\gamma}_n(0)) + d_h(\tilde{\gamma}_n(0), p) \leq t + Y, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para algum $Y > 0$, já que $\tilde{\gamma}_n(0) \rightarrow p$, e portanto o conjunto $\{\tilde{\gamma}_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Pelo Lema 3.3.12, existe $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ contínua e $(\tilde{\gamma}_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ subsequência de tal $(\tilde{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que $\tilde{\gamma}_{n_i}|_K \rightarrow \gamma|_K$ uniformemente, em cada $K \subseteq [0, +\infty)$ compacto.

Fixe $t_0 \in [0, +\infty)$. Sejam U um aberto convexo contendo $\gamma(t_0)$, e $\epsilon > 0$ tal que, para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \cap [0, +\infty)$, $\gamma(t) \in U$. Temos

$$d_h(\widetilde{\gamma}_{n_i}(t), \gamma(t_0)) \leq |t - t_0| + d_h(\widetilde{\gamma}_{n_i}(t_0), \gamma(t_0)), \quad \forall t \in [0, +\infty), \forall i \in \mathbb{N}.$$

Agora, seja $\delta > 0$ tal que $\{q \in M : d_h(q, \gamma(t_0)) < \delta\} \subseteq U$. Se escolhermos $\epsilon < \delta/2$, para i grande o suficiente e para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \cap [0, +\infty)$, temos $\widetilde{\gamma}_{n_i}(t) \in U$. Considere $t_1, t_2 \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \cap [0, +\infty)$ com $t_1 < t_2$. Vale a convergência uniforme $\widetilde{\gamma}_{n_i}|_{[t_1, t_2]} \rightarrow \gamma|_{[t_1, t_2]}$, e em particular $\widetilde{\gamma}_{n_i}(t_1) \rightarrow \gamma(t_1)$, $\widetilde{\gamma}_{n_i}(t_2) \rightarrow \gamma(t_2)$. Mas como pelo Teorema 3.3.2 vale $\widetilde{\gamma}_{n_i}(t_1) <_U \widetilde{\gamma}_{n_i}(t_2)$ para i suficientemente grande e U é convexo, $\gamma(t_1) \leq_U \gamma(t_2)$. Além disso, como a parametrização de cada $\widetilde{\gamma}_{n_i}$ é por comprimento de arco, vale

$$|t_1 - t_2| \leq C|x^1 \circ \widetilde{\gamma}_{n_i}(t_1) - x^1 \circ \widetilde{\gamma}_{n_i}(t_2)|, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

para alguma constante $C > 0$, se assumirmos que U é como na demonstração do Lema 3.3.11, o que podemos fazer sem perda de generalidade. Mas então pela convergência das sequências $\widetilde{\gamma}_{n_i}(t_1)$ e $\widetilde{\gamma}_{n_i}(t_2)$ obtemos, tomando o limite na desigualdade acima, que

$$|t_1 - t_2| \leq C|x^1 \circ \gamma(t_1) - x^1 \circ \gamma(t_2)|.$$

Isto garante $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, e portanto $\gamma(t_1) <_U \gamma(t_2)$, ou seja, γ é C^0 , causal e futuro-dirigida.

Resta apenas mostrar que γ é futuro-inextensível. Suponha, por absurdo, que ela seja extensível. Então, existe $q_0 \in M$ tal que qualquer sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, +\infty)$ com $t_n \rightarrow +\infty$ satisfaz $\gamma(t_n) \rightarrow q_0$. Tome W uma vizinhança convexa de q_0 , com fecho compacto $\overline{W} \subseteq V$, onde $(V, (x^1, \dots, x^n))$ é um sistema de coordenadas com ∇x^1 tipo-tempo e passado-dirigido. Reduzindo W se necessário, podemos supor que temos definida em W uma métrica plana como na equação (3.1). Nestas condições, para qualquer curva $\sigma : [a, b] \rightarrow W$ C^0 , causal e futuro-dirigida, temos

$$L_{h,[a,b]}(\sigma) \leq C|x^1 \circ \sigma(b) - x^1 \circ \sigma(a)|$$

para alguma constante $C > 0$ (lembrando que, em sendo ∇x^1 tipo-tempo passado-dirigido, temos $x^1 \circ \sigma$ crescente para qualquer curva σ como acima).

Consideremos apenas as curvas que satisfazem $x^1(\sigma(b)) \leq x^1(q_0)$ e $x^1(\sigma(a)) \geq x^1(\gamma(t_1))$, onde t_1 é um número real tal que $\gamma([t_1, +\infty)) \subseteq W$. Neste caso, existe $\delta > 0$ tal que $L_{h,[a,b]}(\sigma) \leq \delta$, para todas estas curvas. Note agora que $T = \{q \in W : x^1 \circ \gamma(t_1) < x^1(q) < x^1(q_0)\}$ é aberto, e que $\gamma([t_1 + 1, t_1 + \delta + 2]) \subseteq T$. Assim, para i suficientemente grande, devemos ter $\gamma_{n_i}([t_1 + 1, t_1 + \delta + 2]) \subseteq T$ pela convergência uniforme em compactos. Isto implica em:

$$x^1(\gamma(t_1)) < x^1(\widetilde{\gamma}_{n_i}(t_1 + 1)) < x^1(\widetilde{\gamma}_{n_i}(t_1 + \delta + 2)) < x^1(q_0),$$

e portanto, lembrando que $\widetilde{\gamma}_{n_i}$'s são parametrizadas por comprimento de arco,

$$\delta + 1 \equiv L_{h,[t_1+1, t_1+\delta+2]}(\widetilde{\gamma}_{n_i}) \leq \delta,$$

uma contradição. Logo γ é futuro-inextensível. ■

3.4 Condições de Causalidade

Os teoremas de singularidade, que são o principal objeto deste trabalho, requerem certas restrições sobre a estrutura causal de (M, g) , que passamos a considerar.

Definição 3.4.1. Dizemos que a condição de cronologia vale em $p \in M$ quando $p \notin I^+(p)$. O espaço-tempo (M, g) é dito cronológico se a condição de cronologia vale em todo $p \in M$.

Definição 3.4.2. Dizemos que a condição de causalidade vale em $p \in M$ quando não existir curva causal $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ com $\alpha(a) = \alpha(b) = p$. O espaço-tempo (M, g) é dito causal se a condição de causalidade vale em todo $p \in M$.

Teorema 3.4.3. O conjunto dos pontos de M onde a condição de cronologia [causalidade] falha é uma união disjunta (possivelmente vazia) de conjuntos da forma $I^+(p) \cap I^-(p)$ [$J^+(p) \cap J^-(p)$]. Em particular, o conjunto dos pontos onde a condição de cronologia vale é um fechado.

Demonstração. Seja F o conjunto dos pontos onde a cronologia [causalidade] falha. Defina, para todos $p, q \in F$, a relação

$$p \sim q \iff p \in I^+(q) \cap I^-(q) \quad [J^+(q) \cap J^-(q)].$$

Afirmção: \sim é uma relação de equivalência.

Se $p \in F$, $p \in I^+(p)$, logo $p \in I^-(p)$ e daí $p \in I^+(p) \cap I^-(p)$, donde $p \sim p$.

Se $p \sim q$, então $p \in I^+(q)$ o que implica $q \in I^-(p)$. Por outro lado, $p \in I^-(q)$, logo $q \in I^+(p)$. Disto concluímos que $q \in I^+(p) \cap I^-(p)$, isto é, $q \sim p$.

Se $p \sim q$ e $q \sim r$, temos $p \in I^+(q)$ e $q \in I^+(p)$ donde $r \ll q \ll p$, o que imediatamente fornece $r \ll p$; $p \in I^+(r)$. Por outro lado, $p \in I^-(q)$ e $q \in I^-(r)$, daí $p \ll q \ll r$ e obtemos $p \ll r$; $p \in I^-(r)$. Mas então $p \sim r$. [Considerações inteiramente análogas valem para J^\pm]. O resultado segue diretamente. ■

Exemplo 3.4.4. (Espaço-tempo não-cronológico) Tome $M = \mathbb{R}^3$, com a métrica Pseudo-Riemanniana de índice 2 dada nas coordenadas naturais (x, y, z) por $ds^2 = dx^2 - dy^2 - dz^2$. Em M , considere a subvariedade conexa $C = \{(x, y, z) \in M : y^2 + z^2 = 1\} = f^{-1}(0)$, onde

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto y^2 + z^2 - 1. \end{aligned}$$

O gradiente $grad(f)_{(x,y,z)} = -2(0, y, z)$ é sempre diferente de zero e tipo-tempo nos pontos de C , logo C é uma variedade Lorentziana, pela Proposição 1.6.4. O campo vetorial $X = z \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial z}$ é tipo-tempo quando restrito a C , e induz uma orientação temporal, tornando C um espaço-tempo. A curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow C$ dada por $\gamma(t) = (0, \cos(t), \sin(t))$ é claramente tipo-tempo fechada. Assim, C não é cronológico. Observe ainda que γ é inextensível, porque possui h -comprimento infinito, onde h é a métrica Riemanniana induzida pela métrica Euclidiana de \mathbb{R}^3 . Apesar disso, sua imagem está contida no compacto $K = \{(0, y, z) \in C : y^2 + z^2 = 1\}$, ao contrário do que ocorre em vizinhanças convexas (veja Lema 3.2.2).

Todo espaço-tempo causal é cronológico, mas a recíproca não é verdadeira. Verificaremos isto mais adiante no Exemplo 4.1.8.

O próximo Teorema mostra que espaços-tempos compactos têm interesse menor em aplicações físicas. De fato, um espaço-tempo é não-cronológico se e só se admite uma curva tipo-tempo fechada. Essa curva é interpretada na Física como a linha de mundo (trajetória no espaço-tempo) de um observador, e que uma tal curva seja fechada poderia significar que um observador seria capaz de visitar seu próprio passado, o que seria uma fonte potencial de inúmeros paradoxos.

Teorema 3.4.5. *Se M é compacta, então (M, g) não é cronológico.*

Demonstração. Claramente, $\{I^+(p)\}_{p \in M}$ é uma cobertura aberta de M . Seja $\{I^+(p_1), \dots, I^+(p_k)\}$ uma subcobertura finita. Podemos assumir $I^+(p_i) \not\subseteq I^+(p_j)$ (descartando aqueles índices i para os quais isto acontece, sem deixarmos de ter uma cobertura), sempre que $p_i \neq p_j$. Agora, $p_1 \in I^+(p_i)$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Portanto, $p_i \ll p_1$. Mas então, para todo $p \in M$, se $p_1 \ll p$, temos $p_i \ll p_1 \ll p$ e daí $p_i \ll p$. Disto decorre $I^+(p_1) \subseteq I^+(p_i)$. Por hipótese, somos forçados a concluir que $i = 1$. Logo $p_1 \in I^+(p_1)$, o que significa que a condição de cronologia falha em p_1 . ■

Definição 3.4.6. *Um aberto $U \subseteq M$ é dito ser causalmente convexo se $J^+(U) \cap J^-(U) \subseteq U$. Esta condição é equivalente à seguinte: dados $p, q \in U$ e $r \in M$, se $p \leq r \leq q$, então $r \in U$. Em outras palavras, todo segmento de curva causal cujos extremos pertencem a U fica inteiramente contido em U .*

Exemplo 3.4.7. *Dados $p, q \in M$ com $p \ll q$, seja $D = I^+(p) \cap I^-(q)$. Dados $p', q' \in D$ e $r \in M$ com $p' \leq r \leq q'$, temos $p \ll p' \leq r$, que implica $p \ll r$. Analogamente, $r \leq q' \ll q$ implica $r \ll q$. Logo $r \in D$, e D é causalmente convexo.*

Apesar de não permitir curvas causais fechadas, um espaço-tempo causal poderia ainda admitir curvas que chegassem "arbitrariamente perto" de serem fechadas (o que de fato acontece no Exemplo 3.4.11 mais adiante). Isto, por sua vez, significaria intuitivamente que perturbando um pouco a métrica, poderíamos obter curvas tipo-tempo fechadas. Para evitar essa eventualidade, introduzimos a noção de causalidade forte.

Definição 3.4.8. *Dizemos que a condição de causalidade forte se verifica em $p \in M$ se, para toda vizinhança U de p , existir um aberto causalmente convexo $V \subseteq U$ contendo p . Quando a causalidade forte se verifica em todo ponto de M , (M, g) é dito ser fortemente causal.*

Uma caracterização alternativa é dada pela proposição abaixo.

Proposição 3.4.9. *A causalidade forte vale em $p \in M$ se, e somente se, para todo U aberto contendo p , existir $V \subseteq U$ aberto contendo p tal que qualquer segmento de curva causal com extremos em V fica inteiramente contido em U .*

Demonstração. Seja U um aberto qualquer contendo p . Tome $V \subseteq U$ aberto contendo p tal que os segmentos de curvas causais com extremos em V permanecem em U . Escolha $p^+, p^- \in V$ com $p^- \ll_V p \ll_V p^+$, e defina $W = I^+(p^-, U) \cap I^-(p^+, U)$. W é aberto, contém p e $W \subseteq U$.

Afirmção: W é causalmente convexo. De fato, dados $p', q' \in W$ e $r \in M$ com $p' \leq r \leq q'$, temos $p^- \ll_U p' \leq r \leq q' \ll_U p^+$. Portanto, existe uma curva α tipo-tempo, futuro-dirigida de p^- a p^+ passando por r . Como $p^\pm \in V$, $Im(\alpha) \subseteq U$. Logo $p^- \ll_U r \ll_U p^+$, e $r \in W$. Portanto W é causalmente convexo, e a causalidade forte vale em p .

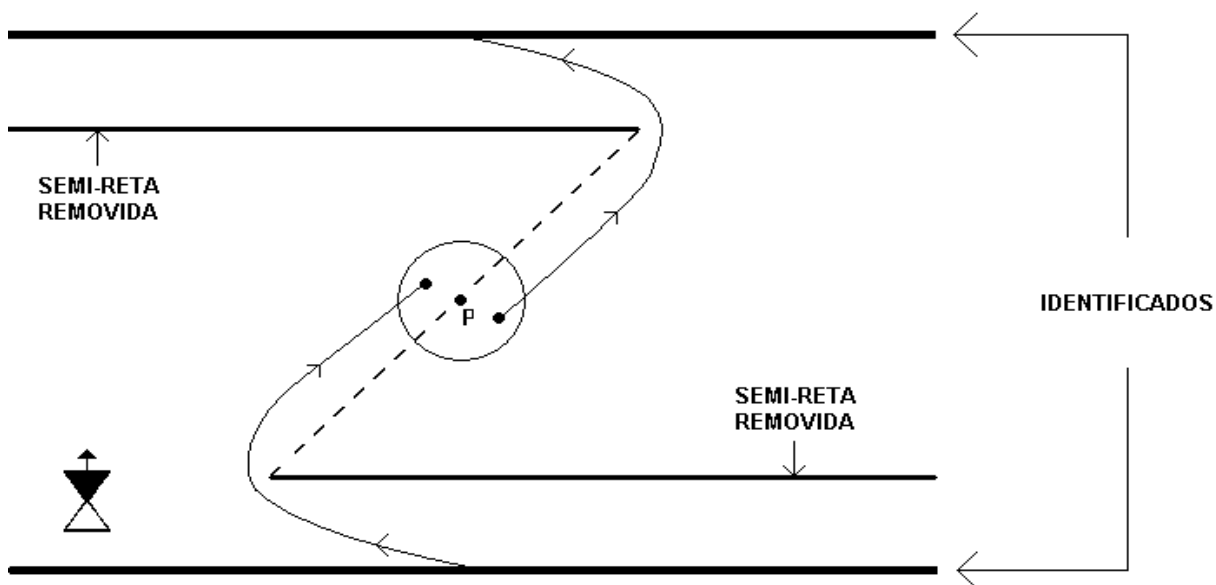
A outra implicação é imediata. ■

Observação 3.4.10. A caracterização que acabamos de provar é útil porque deixa claro que a causalidade forte falha em $p \in M$ se e somente se existir U_0 vizinhança de p e uma sequência $(\gamma_n : [a_n, b_n] \rightarrow M)_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas causais tais que $\gamma_n(a_n), \gamma_n(b_n) \rightarrow p$ e $Im(\gamma_n) \not\subseteq U_0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Isto quer dizer que as curvas causais γ_n são "quase fechadas" em p , e a causalidade é "quase" violada. Por outro lado, se a condição de causalidade é violada em p , então existe $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ causal e futuro-dirigida com $\gamma(a) = \gamma(b) = p$. Sendo causal, γ não pode ser constante; logo, existe $t \in (a, b)$ tal que $\gamma(t) \neq p$. Sendo M Hausdorff, existe uma vizinhança $U_0 \subseteq M$ contendo p que não contém $\gamma(t)$, isto é, $Im(\gamma) \not\subseteq U_0$. Podemos então definir a sequência $(\gamma_n \equiv \gamma)_{n \in \mathbb{N}}$. A discussão que acabamos de fazer mostra que a condição de causalidade forte também é violada em p . Estabelecemos assim que causalidade forte implica causalidade. Para ver que a recíproca não é verdadeira, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 3.4.11. Em \mathbb{R}^2_1 , temos a métrica de Minkowski $ds^2 = dx^2 - dy^2$ definida no sistema de coordenadas global (x, y) . Note que a aplicação $\Phi : \mathbb{R}^2_1 \rightarrow \mathbb{R}^2_1$ dada por $\Phi(x, y) = (x, y + 1)$ é uma isometria. A ação do grupo gerado por essa isometria no plano é propriamente descontínua, de modo que o quociente de \mathbb{R}^2_1 por esta ação torna-se uma variedade de Lorentz localmente isométrica a \mathbb{R}^2_1 , que denotaremos por \mathfrak{A} .

\mathfrak{A} pode ser representada pela região do plano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$, lembrando que $(x, 0) \sim (x, 1)$. Considere agora $L_1 = \{(x, \frac{1}{4}) : x \geq \frac{1}{4}\}$ e $L_2 = \{(x, \frac{3}{4}) : x \leq \frac{3}{4}\}$. Estes conjuntos são fechados em \mathfrak{A} , e portanto $\widetilde{\mathfrak{A}} \equiv \mathfrak{A} \setminus \{L_1, L_2\}$ é um aberto de \mathfrak{A} que pode então ser visto como uma variedade de Lorentz por si só. A figura abaixo ilustra esta variedade.



A curva $\alpha : (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \rightarrow \tilde{\mathfrak{M}}, \alpha(t) = (t, t)$ (linha pontilhada na figura) é uma geodésica tipo-luz, pois $\alpha'' = 0$, e $\alpha'(t) = (1, 1)$, que é tipo-luz. Claramente, em qualquer ponto p sobre α , é possível construir curvas causais e futuro-dirigidas cujos extremos se aproximam arbitrariamente de p , ainda que a causalidade seja preservada em toda parte.

Existe uma importante relação entre a topologia dos espaços-tempos e a condição de causalidade forte, que iremos explorar agora.

Proposição 3.4.12. Os conjuntos $\{I^+(p) \cap I^-(q) : p, q \in M\}$ formam uma base para uma topologia em M , chamada topologia de Alexandrov.

Demonstração. Obviamente, tais conjuntos cobrem M . Dados $N = I^+(p) \cap I^-(q)$, $N' = I^+(p') \cap I^-(q')$ e $r \in N \cap N'$, como $N \cap N'$ é aberto, podemos encontrar $r^\pm \in N \cap N'$ com $r^- \ll_{N \cap N'} r \ll_{N \cap N'} r^+$. Dado $r' \in I^+(r^-) \cap I^-(r^+)$, temos $p, p' \ll r^- \ll r' \ll r^+ \ll q, q'$, o que implica $r' \in N \cap N'$. Portanto $I^+(r^-) \cap I^-(r^+) \subseteq N \cap N'$. ■

A topologia de Alexandrov é bastante natural do ponto de vista da estrutura causal, mas é em geral mais grosseira que a topologia de fundo de M . Além disso, se (M, g) não é cronológico, essa topologia não é sequer T_0 !

Lema 3.4.13. A causalidade forte vale em $p \in M$ se, e somente se, para toda vizinhança $U \subseteq M$ de p , existirem $x, y \in M$ tais que $p \in I^+(x) \cap I^-(y) \subseteq U$.

Demonstração. Suponha que vale a causalidade forte em p , e seja U uma vizinhança qualquer de p . Tome $V \subseteq U$ aberto com a propriedade de que curvas causais com extremos em V ficam contidas em U . Podemos então escolher $x, y \in V$ com $x \ll p \ll y$. Dado $q \in I^+(x) \cap I^-(y)$, existe uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida α de x a y passando por q . Mas então $Im(\alpha) \subseteq U$, e daí $q \in U$. Concluindo, $p \in I^+(x) \cap I^-(y) \subseteq U$.

A recíproca é imediata, se lembrarmos que $I^+(x) \cap I^-(y)$ é sempre causalmente convexo, para quaisquer $x, y \in M$. ■

Teorema 3.4.14. *(M, g) é fortemente causal se, e somente se, a topologia de Alexandrov coincide com a topologia de M.*

Demonstração. Como $I^+(p) \cap I^-(q)$, com $p, q \in M$, é sempre um aberto, a topologia de Alexandrov está contida na topologia de M. Se, porém, ela coincide com a topologia de M, então o conjunto $\{I^+(p) \cap I^-(q) : p, q, \in M\}$ é na verdade uma base para a topologia de M, pela Proposição 3.4.12. Logo, para cada $p \in M$ e $U \subseteq M$ aberto contendo p , existem $x, y \in M$ com $p \in I^+(x) \cap I^-(y) \subseteq U$. Pelo lema anterior, a causalidade forte vale em p .

Suponha, por outro lado, que a causalidade forte vale em todo ponto de M. Tome $U \subseteq M$ um aberto qualquer. Se $p \in U$, o lema anterior garante que existem $x, y \in M$ tais que $p \in I^+(x) \cap I^-(y) \subseteq U$. Como U era arbitrário e, pela proposição 3.4.12, o conjunto $\{I^+(p) \cap I^-(q) : p, q, \in M\}$ é uma base para a topologia de Alexandrov, esta coincide com a topologia de M. ■

Proposição 3.4.15. *Sejam U um aberto convexo, $V \subseteq U$ aberto e $p \in V$. Então, existem $p^\pm \in V$ tais que $p \in I^+(p^-, U) \cap I^-(p^+, U) \subseteq V$.*

Demonstração. Como U é uma vizinhança normal de p , existe $\xi = (x^1, \dots, x^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sistema de coordenadas normal em p , e $\epsilon > 0$ tal que

$$B_\epsilon \equiv \{q \in U : \sum_{i=1}^n (x^i(q))^2 \leq \epsilon^2\} \subseteq V$$

pelo Lema 3.3.8, e, além disso, com respeito à métrica plana g_0 em U dada por

$$ds^2 = -4d(x^1)^2 + \sum_{i=2}^n d(x^i)^2,$$

todo vetor $w \in T_q M^*$ com $q \in B_\epsilon$, causal na métrica original, é tipo-tempo nesta nova métrica, para ϵ pequeno o suficiente.

Defina $p_\pm = \xi^{-1}(\pm \frac{\epsilon}{4}, 0, \dots, 0)$. Então $p_\pm \in B_\epsilon \subseteq V$. Seja $q \in I^+(p_-, U) \cap I^-(p_+, U)$, e considere uma curva futuro-dirigida, tipo-tempo (com respeito a g) $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ em U de p_- a p_+ passando por q . Qualquer segmento de α contido em B_ϵ será então tipo-tempo com respeito a g_0 .

Considere ainda os conjuntos

$$\tilde{C}_+ = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : -4(x^1 - \frac{\epsilon}{4})^2 + \sum_{i=2}^n (x^i)^2 \leq 0, x^1 \leq \frac{\epsilon}{4} \right\}.$$

$$\tilde{C}_- = \left\{ (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : -4(x^1 + \frac{\epsilon}{4})^2 + \sum_{i=2}^n (x^i)^2 \leq 0, x^1 \geq \frac{-\epsilon}{4} \right\}.$$

Claramente, $\tilde{D} \equiv \tilde{C}_- \cap \tilde{C}_+ \neq \emptyset$, pois \tilde{D} contém a origem. Além disso, se $(x^1, \dots, x^n) \in \tilde{D}$, temos

$$\sum_{i=2}^n (x^i)^2 \leq 4(x^1 + \frac{\epsilon}{4})^2 \quad e \quad \sum_{i=2}^n (x^i)^2 \leq 4(x^1 - \frac{\epsilon}{4})^2, \quad |x^1| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Somando ambas as desigualdades e dividindo os dois lados por 4, vem

$$\frac{1}{2} \sum_{i=2}^n (x^i)^2 \leq 2(x^1)^2 + \frac{\epsilon^2}{8},$$

que finalmente implica em

$$\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \leq 5(x^1)^2 + \frac{\epsilon^2}{4} \leq \frac{5\epsilon^2}{8} + \frac{\epsilon^2}{4} = \frac{7\epsilon^2}{8} < \epsilon^2.$$

$\therefore \xi^{-1}(\tilde{D}) \subseteq \text{int}(B_\epsilon)$.

Se utilizarmos em \mathbb{R}^n a métrica

$$d\tilde{s}^2 = -4dr^2 + \sum_{i=2}^n d(x^i)^2,$$

então ξ se torna uma isometria de (U, g_0) sobre sua imagem. Suponha que α sai de B_ϵ . Como α é tipo-tempo com respeito a g_0 (dentro de B_ϵ), a curva $\xi \circ \alpha|_{[a, t_0]}$ é tipo-tempo em \mathbb{R}^n com a métrica acima, onde $t_0 = \inf \{ t \in [a, b] : \alpha(t) \in \partial B_\epsilon \}$ (note que este conjunto é não-vazio, pelo Teorema da Alfândega).

Contudo, se α sai de B_ϵ , então ela sai de $\xi^{-1}(\tilde{D})$, o que significa que $\xi \circ \alpha$ precisa sair de \tilde{D} . Neste caso, $\xi \circ \alpha$ intersecta o cone de luz

$$\sum_{i=2}^n (x^i)^2 - 4(x^1 - \frac{\epsilon}{4})^2 = 0, \quad x^1 \leq \frac{\epsilon}{4},$$

que é fronteira de \tilde{C}_+ , em um ponto, digamos, \tilde{r} . Mas então se $r = \xi^{-1}(\tilde{r})$, o vetor \vec{r}_+ precisa ser futuro-dirigido, tipo-luz com respeito a g_0 , de modo que ele não pode ser tipo-tempo na métrica original g , contrariando o fato de que $r \ll p_+$ (porque esta relação implica, num convexo, que \vec{r}_+ deve ser futuro-dirigido e tipo-tempo, pelo Lema 3.2.2). Assim, α nunca deixa B_ϵ , e portanto fica em V . Em particular, $q \in V$. Logo $I^+(p_-, U) \cap I^-(p_+, U) \subseteq V$. ■

Teorema 3.4.16. *O conjunto dos pontos em M onde a causalidade forte vale é um aberto.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança convexa de um ponto $p \in M$ no qual a causalidade forte vale, e $V \subseteq U$ uma vizinhança de p tal que quaisquer segmentos de curvas causais cujos extremos estão em V permanecem em U . Queremos mostrar que a causalidade forte ainda vale em qualquer ponto de V .

Dado $q \in V$, seja $W \subseteq V$ uma vizinhança qualquer de q . Pela Proposição 3.4.15, existem $q_\pm \in W$ tais que $q \in I^+(q_-, U) \cap I^-(q_+, U) \subseteq W$. Sejam $r_\pm \in I^+(q_-, U) \cap I^-(q_+, U)$, e $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ uma curva causal com $\alpha(a) = r_-$, $\alpha(b) = r_+$. Temos então $\text{Im}(\alpha) \subseteq U$. Para qualquer $t \in [a, b]$, valem as relações: $q_- \ll_U r_- \leq_U \alpha(t) \leq_U r_+ \ll_U q_+$

que implicam em $\alpha(t) \in I^+(q_-, U) \cap I^-(q_+, U)$. Portanto $I^+(q_-, U) \cap I^-(q_+, U)$ é uma vizinhança causalmente convexa de q . Isto prova que a causalidade forte vale em V , como queríamos. ■

Proposição 3.4.17. *Se a causalidade forte vale em todos os pontos de um compacto $K \subseteq M$ então, dada qualquer curva C^0 , causal, futuro-inextensível $\alpha : [0, b) \rightarrow M$ com $\alpha(0) \in K$, existe $t_0 \in (0, b)$ tal que $\alpha(t) \notin K, \forall t, t_0 < t < b$.*

Demonstração. Suponha que não. Então, existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, b)$ com $t_n \rightarrow b$ para a qual $\alpha(t_n) \in K, \forall n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir que $\alpha(t_n) \rightarrow p \in K$ pela compacidade. Como α é futuro-inextensível, existe uma sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, b)$ com $s_n \rightarrow b$ tal que $\alpha(s_n)$ não converge para p . Assim, podemos assumir que existe $U \subseteq M$ vizinhança de p tal que $\alpha(s_n) \notin U, \forall n \in \mathbb{N}$. Seja $V \subseteq U$ vizinhança de p tal que quaisquer segmentos de curvas causais com extremos em V permanecem em U . Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ com a propriedade de que, se $n \geq n_0$, então $\alpha(t_n) \in V$. Como $s_n \rightarrow b$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n_1} > t_{n_0}$, e como $t_n \rightarrow b$, existe $n_2 > n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n_2} > s_{n_1} > t_{n_0}$. Note que $\alpha|_{[t_{n_0}, t_{n_2}]}$ é C^0 , causal e seus extremos estão em V . Além disso, $\alpha(t_{n_0}) < \alpha(s_{n_1}) < \alpha(t_{n_2})$, logo existe uma curva suave por partes, causal e futuro-dirigida de $\alpha(t_{n_0})$ até $\alpha(t_{n_2})$ passando por $\alpha(s_{n_1}) \notin U$, uma contradição com a definição de V . ■

Definição 3.4.18. *Seja $\gamma : [a, b) \rightarrow M$ uma curva C^0 , causal e futuro-dirigida. γ é dita ser futuro-aprisionada em um compacto $K \subseteq M$ se existir $t_0 \in [a, b)$ para o qual $\gamma(t) \in K, \forall t \in (t_0, b)$.*

γ é dita ser parcialmente futuro-aprisionada se existir uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[a, b)$ com $t_n \rightarrow b$ tal que $\gamma(t_n) \in K, \forall n \in \mathbb{N}$.

Com esta definição, a Proposição 3.4.17 diz que nenhuma curva C^0 , causal e futuro-inextensível pode ficar parcialmente futuro-aprisionada em um compacto onde vale a condição de causalidade forte. Obviamente, valem afirmações análogas para curvas passado-inextensíveis.

No próximo Capítulo, a causalidade forte será um requisito fundamental para obter certos resultados sobre a existência de geodésicas maximais.

Capítulo 4

Existência de Geodésicas Maximais

4.1 A Topologia C^0 no Espaço das Curvas Causais

Nosso objeto neste Capítulo é desenvolver ferramentas para provar a existência de *geodésicas maximais* entre pontos causalmente relacionados. Como ficará claro em nossa exposição, na ausência de restrições na estrutura causal, tais geodésicas em geral não existem.

Fixe um intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ compacto e não-vazio. Nesta seção, (M, g) denotará um espaço-tempo *fortemente causal* previamente fixado, e h uma métrica Riemanniana completa em M . A função distância induzida por h que torna M um espaço métrico será denotada por d_h .

Seja $\tilde{\mathcal{C}} := \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \text{ é curva } C^0, \text{ causal e futuro-dirigida}\}$.

Em $\tilde{\mathcal{C}}$, introduzimos a seguinte relação de equivalência:

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha(a) = \beta(a), \alpha(b) = \beta(b) \text{ e } \text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\beta).$$

Definimos então $\mathcal{C} := \tilde{\mathcal{C}}/\sim$. Denotaremos a classe de equivalência de um elemento $\alpha \in \tilde{\mathcal{C}}$ por $[\alpha]$.

Lema 4.1.1. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$. Então $[\alpha] = [\beta]$ se, e somente se, existe um homeomorfismo crescente $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ para o qual $\beta = \alpha \circ f$.*

Demonstração. É óbvio que a existência de tal homeomorfismo implica em $[\alpha] = [\beta]$. Suponha, por outro lado, que $[\alpha] = [\beta]$. Note que como (M, g) é causal, α e β são injetivas. Como $\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\beta)$, para cada $t \in [a, b]$ existe um único $s_t \in [a, b]$ tal que $\beta(t) = \alpha(s_t)$. Podemos então definir $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ pondo $f(t) := s_t, \forall t \in [a, b]$. Claramente, f é invertível, $f(a) = a$ e $f(b) = b$, logo f é crescente, e por construção $\beta = \alpha \circ f$. Para provar que f é contínua, e portanto um homeomorfismo, seja $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $[a, b]$ uma sequência qualquer com $t_k \rightarrow t_0$. Por continuidade, $\beta(t_k) \rightarrow \beta(t_0) \equiv \alpha(f(t_0))$. Se $f(t_k)$ não convergisse para $f(t_0)$, então pela compacidade de $[a, b]$ poderíamos extrair uma subsequência $\{t_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ com $f(t_{k_j}) \rightarrow s_0 \neq f(t_0)$. Mas $\alpha(f(t_{k_j})) \rightarrow \alpha(s_0)$, pela continuidade de α , e $\alpha(f(t_{k_j})) \equiv \beta(t_{k_j}) \rightarrow \beta(t_0) = \alpha(f(t_0))$ pela continuidade de β , o que implica

$\alpha(s_0) = \alpha(f(t_0))$ e por injetividade $s_0 = f(t_0)$, uma contradição. Logo $f(t_k) \rightarrow f(t_0)$, ou seja, f é contínua. ■

Em \mathcal{C} , podemos definir uma topologia da seguinte forma. Para cada $A, B, C \subseteq M$ com $A, B \subseteq C$, seja

$$\mathcal{C}_c(A, B) := \{ [\gamma] \in \mathcal{C} : \gamma(a) \in A, \gamma(b) \in B, \gamma([a, b]) \subseteq C \}.$$

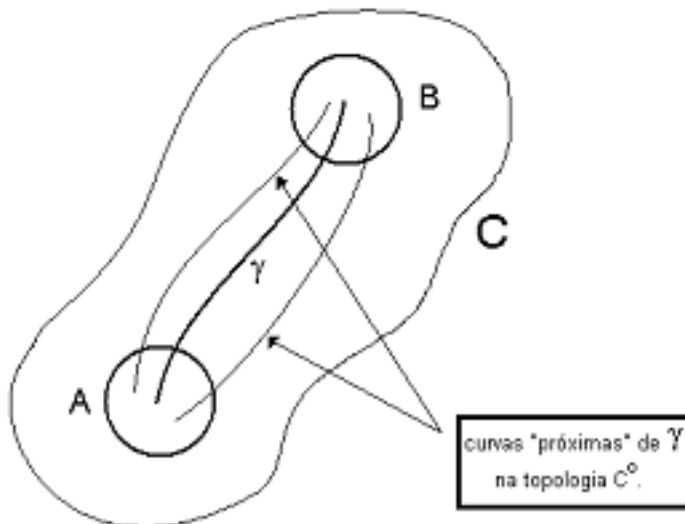
É fácil ver que este conjunto está bem definido, já que as propriedades que o especificam dentro de \mathcal{C} não variam se mudarmos o representante de uma dada classe de equivalência. Temos a seguinte proposição.

Proposição 4.1.2. O conjunto $\{ \mathcal{C}_c(A, B) : A, B, C \text{ abertos} \}$ é base para uma topologia em \mathcal{C} .

Demonstração. Obviamente, tais conjuntos cobrem \mathcal{C} , pois toda curva pertence a $\mathcal{C}_M(M, M)$. Se A, A', B, B', C, C' são abertos de M com $A, B \subseteq C$ e $A', B' \subseteq C'$, então $[\gamma] \in \mathcal{C}_{C \cap C'}(A \cap A', B \cap B')$ implica em $Im(\gamma) \subseteq C \cap C'$, $\gamma(a) \in A \cap A'$ e $\gamma(b) \in B \cap B'$. Isto, por sua vez, significa que $[\gamma] \in \mathcal{C}_C(A, B) \cap \mathcal{C}_{C'}(A', B')$. Logo $\mathcal{C}_{C \cap C'}(A \cap A', B \cap B') \subseteq \mathcal{C}_C(A, B) \cap \mathcal{C}_{C'}(A', B')$. ■

A topologia que os conjuntos $\mathcal{C}_c(A, B)$ (com A, B, C abertos) geram é chamada *topologia C^0* em \mathcal{C} .

Observação 4.1.3. Seja $\gamma \in \mathcal{C}$. Um subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ contendo $[\gamma]$ ser aberto na topologia C^0 significa que existem $A, B, C \subseteq M$ abertos de M com $A, B \subseteq C$ tais que, para qualquer curva $\beta \in \mathcal{C}$ com $\beta(a) \in A$, $\beta(b) \in B$ e $Im(\beta) \subseteq C$ tem-se $[\beta] \in \mathcal{A}$. A figura abaixo ilustra este fato e mostra que a noção de proximidade da topologia C^0 é a mais natural, se consideramos apenas as imagens das curvas em questão.



Proposição 4.1.4. Seja $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathcal{C} , e $\gamma \in \mathcal{C}$. São equivalentes:

(i) A sequência $\{[\gamma_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{C} converge para $[\gamma]$ na topologia C^0 .

(ii) $\gamma_n(a) \rightarrow \gamma(a)$, $\gamma_n(b) \rightarrow \gamma(b)$ e para qualquer aberto $U \subseteq M$ que contenha $Im(\gamma)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$ tem-se $Im(\gamma_n) \subseteq U$.

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Suponha que $[\gamma_n] \rightarrow [\gamma]$ na topologia C^0 . Seja U uma vizinhança de $Im(\gamma)$, e $A, B \subseteq U$ abertos contendo $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, respectivamente. Como $\mathcal{C}_v(A, B)$ é aberto na topologia C^0 , para n grande o suficiente $[\gamma_n] \in \mathcal{C}_v(A, B)$, o que é equivalente a $\gamma_n(a) \in A$, $\gamma_n(b) \in B$ e $Im(\gamma_n) \subseteq U$.

(ii) \Rightarrow (i) Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ um aberto qualquer na topologia C^0 contendo $[\gamma]$. Então, existem $A, B, C \subseteq M$ abertos com $A, B \subseteq C$ tais que $[\gamma] \in \mathcal{C}_c(A, B) \subseteq \mathcal{A}$. Logo $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ e $Im(\gamma) \subseteq C$. Pela hipótese de convergência, existem $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_1 \Rightarrow \gamma_n(a) \in A$, $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_2 \Rightarrow \gamma_n(b) \in B$ e $N_3 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_3 \Rightarrow Im(\gamma_n) \subseteq C$. Tome $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Assim, para $n > N$, $[\gamma_n] \in \mathcal{C}_c(A, B) \subseteq \mathcal{A}$. Concluimos que $[\gamma_n] \rightarrow [\gamma]$. ■

Observação 4.1.5. Em vista da Proposição acima, dada uma sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{C} e $\gamma \in \mathcal{C}$, frequentemente abusaremos da notação dizendo que $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para γ na topologia C^0 ao invés de dizer que $\{[\gamma_n]\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow [\gamma]$ na topologia C^0 .

Teorema 4.1.6. Dada uma sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{C} e $\gamma \in \mathcal{C}$, com $\gamma_n(a) \rightarrow \gamma(a)$ e $\gamma_n(b) \rightarrow \gamma(b)$, as seguintes condições são equivalentes:

(i) γ é curva limite da sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(ii) Existe uma subsequência de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para γ na topologia C^0 .

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii). Seja $\{\gamma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que distingue γ , e $W \subseteq M$ qualquer aberto contendo $Im(\gamma)$. Pela causalidade forte e compacidade de $[a, b]$, existem coberturas abertas $\{U_1, \dots, U_s\}$ e $\{V_1, \dots, V_s\}$ de $\gamma([a, b])$ tais que, $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, U_i é convexo, $V_i \subseteq U_i$ e qualquer segmento de curva C^0 , causal com extremos em V_i tem sua imagem contida em U_i . Além disso, existe uma partição $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_s = b\}$ de $[a, b]$ tal que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq V_i$, $\forall i \in \{1, \dots, s\}$. Podemos assumir, diminuindo as coberturas se necessário, que $U_1 \cup \dots \cup U_s \subseteq W$. Como γ é uma curva limite, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escolher $p(i, k) \in Im(\gamma_{n_k})$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} p(i, k) = \gamma(t_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, s\}$. Vamos escolher, em particular, $p(0, k) := \gamma_{n_k}(a)$ e $p(s, k) := \gamma_{n_k}(b)$. De agora em diante, fixe $i \in \{1, \dots, s\}$.

Afirmção. Existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $k > N_i \Rightarrow p(i-1, k) <_{U_i} p(i, k)$.

De fato, pela causalidade da curva γ , $\gamma(t_{i-1}) \neq \gamma(t_i)$, e portanto eventualmente $p(i-1, k) \neq p(i, k)$, já que M é Hausdorff. Como $\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i) \in V_i$, k grande o suficiente implicará em $p(i-1, k), p(i, k) \in V_i$, de modo que o segmento de γ_{n_k} entre $p(i-1, k)$ e $p(i, k)$ estará eventualmente contido em U_i (e portanto em W). Neste caso, devemos ter $p(i, k) <_{U_i} p(i-1, k)$ ou $p(i-1, k) <_{U_i} p(i, k)$. Mas o primeiro está proibido para valores grandes de k , pois do contrário concluiríamos que $\gamma(t_i) \leq_{U_i} \gamma(t_{i-1})$, contrariando a causalidade. Portanto, k suficientemente grande implica em $p(i-1, k) <_{U_i} p(i, k)$, provando a afirmação.

Agora, defina $N = \max\{N_1, \dots, N_s\}$. Para $k > N$, temos, claramente, $Im(\gamma_{n_k}) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_s \subseteq W$. Como por hipótese $\gamma_{n_k}(a) \rightarrow \gamma(a)$ e $\gamma_{n_k}(b) \rightarrow \gamma(b)$, a Proposição 4.1.4 nos diz que $[\gamma_{n_k}] \rightarrow [\gamma]$.

(ii) \Rightarrow (i). Se $\{\gamma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma subsequência de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo para γ na topologia C^0 , defina:

$$\mathbf{J} := \left\{ t \in [a, b] : \forall s \in [a, t] \text{ e } \forall U \subseteq M \text{ contendo } \gamma(s), \right. \\ \left. \exists N_s \in \mathbb{N} \text{ tal que } k > N_s \Rightarrow Im(\gamma_{n_k}) \cap U \neq \emptyset \right\}.$$

Claramente, $a \in \mathbf{J}$, pois $\gamma_{n_k}(a) \rightarrow \gamma(a)$. Seja $t_0 := \sup \mathbf{J}$. Então qualquer $s \in [a, b]$ com $s < t_0$ pertence a \mathbf{J} . Existe, ainda, uma sequência $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ em \mathbf{J} com $t_m \rightarrow t_0^-$. Como $t_0 \in \bar{\mathbf{J}} \subseteq [a, b]$, γ está definida em t_0 , e por continuidade $\gamma(t_m) \rightarrow \gamma(t_0)$. Seja U uma vizinhança qualquer de $\gamma(t_0)$. Podemos escolher $m_0 \in \mathbb{N}$ com $\gamma(t_{m_0}) \in U$. Agora, como $t_{m_0} \in \mathbf{J}$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k > N_0 \Rightarrow Im(\gamma_{n_k}) \cap U \neq \emptyset$. Mas então, pela definição de \mathbf{J} , temos $t_0 \in \mathbf{J}$, e portanto $\mathbf{J} \equiv [a, t_0]$. Afirmamos que $t_0 = b$. Suponha que não. Neste caso, $t_0 < b$; logo, existe s_0 com $t_0 < s_0 < b$ tal que $\gamma(s_0)$ não é um ponto limite, isto é, podemos encontrar U_0 vizinhança de $\gamma(s_0)$ de tal modo que uma quantidade infinita de γ_{n_k} 's não intersectam U_0 . Isto imediatamente implica em $\gamma(b) \notin U_0$ e $\gamma([a, t_0]) \cap U_0 = \emptyset$. A continuidade de γ nos permite escolher $\epsilon > 0$ tal que $\gamma([s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon]) \subseteq U_0$. Como $\gamma([a, s_0 - \epsilon])$ e $\gamma([s_0 + \epsilon, b])$ são fechados disjuntos (devido à causalidade), a normalidade de (M, d_h) , como espaço métrico, permite escolher abertos disjuntos $W_1, W_2 \subseteq M$ satisfazendo $\gamma([a, t_0]) \subseteq \gamma([a, s_0 + \epsilon]) \subseteq W_1$ e $\gamma(b) \in \gamma([s_0 + \epsilon, b]) \subseteq W_2$. Daí, $\gamma([a, b]) \subseteq W_1 \cup U_0 \cup W_2$. Como $[\gamma_{n_k}] \rightarrow [\gamma]$ por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k > N \Rightarrow Im(\gamma_{n_k}) \subseteq W_1 \cup U_0 \cup W_2$, $\gamma_{n_k}(a) \in W_1$ e $\gamma_{n_k}(b) \in W_2$. Suponha que $Im(\gamma_{n_k}) \cap U_0 = \emptyset$. Neste caso, $Im(\gamma_{n_k}) \subseteq W_1 \cup W_2$. Mas $\gamma_{n_k}(a) \in W_1$, $\gamma_{n_k}(b) \in W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, logo $\{W_1, W_2\}$ é uma cisão não-trivial de $Im(\gamma_{n_k})$, contrariando a conexidade da mesma. Devemos portanto ter $Im(\gamma_{n_k}) \cap U_0 \neq \emptyset$. Isto, por outro lado, contradiz nossa escolha de U_0 . A única conclusão possível é que $t_0 = b$, ou seja, $\mathbf{J} = [a, b]$, e γ é curva limite de $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ■

Observação 4.1.7. Note que na demonstração anterior a implicação (ii) \Rightarrow (i) requer, em verdade, apenas causalidade e não causalidade forte. A outra direção requer causalidade forte. Não é possível enfraquecer estas hipóteses, como mostram os exemplos abaixo.

Exemplo 4.1.8. Vejamos que (ii) $\not\Rightarrow$ (i) na ausência de causalidade. Considere $\mathfrak{B} \equiv \mathbb{R}^2$ munido da métrica $ds^2 = -2dx dy$, no sistema de coordenadas natural. Em \mathfrak{B} , as direções horizontal $y = cte.$ e vertical $x = cte.$ são imagens de curvas tipo-luz. O campo $V = \partial_y + \partial_x$ fornece uma orientação temporal naturalmente, indicada na figura 4.1. Considere a aplicação $\Phi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$, $\Phi(x, y) = (x + 1, y)$. É evidente que Φ é um difeomorfismo, e segue imediatamente da expressão da métrica de \mathfrak{B} que ela é na verdade uma isometria.

Como a ação do grupo gerado por Φ em \mathfrak{B} é propriamente descontínua, podemos definir \mathfrak{B} como o quociente de \mathfrak{B} por esta ação. Podemos ver este quociente como a faixa $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, identificando as laterais, ou então, para melhor visualizar a identificação $(-\frac{1}{2}, y) \sim (\frac{1}{2}, y)$, como um cilindro (fig. 4.1).

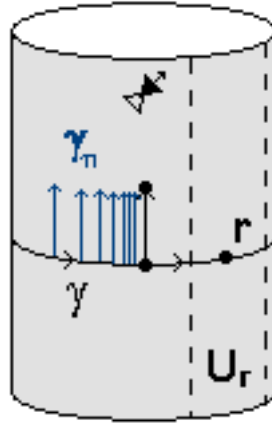


Figura 4.1: $\tilde{\mathfrak{B}}$ é um cilindro, com orientação temporal indicada pelo cone duplo com seta na figura.

Em $\tilde{\mathfrak{B}}$, não há curvas tipo-tempo fechadas: é fácil ver que qualquer curva tipo-tempo, digamos, futuro-dirigida deve "subir" o cilindro em uma direção entre os eixos vertical e horizontal, não podendo portanto retornar ao ponto de partida. Logo $\tilde{\mathfrak{B}}$ é cronológico, mas não é causal. Basta considerar a curva $\gamma : [0, 2] \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}$ na figura 4.1, cuja expressão é:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ (0, t - 1) & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Observe que na primeira expressão $\gamma(1) = (1, 0)$ e na segunda $\gamma(1) = (0, 0)$. Como $(1, 0) \sim (0, 0)$, γ está bem definida (e é contínua). Em verdade, γ é C^∞ por partes, e sua derivada $\gamma'(t)$, $t \neq 1$, é sempre igual a $(1, 0)$ ou $(0, 1)$, ambos tipo-luz, futuro-dirigidos em $\tilde{\mathfrak{B}}$, o que implica que γ é causal. A existência do segmento fechado $\gamma|_{[0,1]}$ mostra que $\tilde{\mathfrak{B}}$ não é causal.

Ora, a sequência $\gamma_n : [0, 2] \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}$, $\gamma_n(t) = (-\frac{1}{n}, \frac{t}{2})$, $n \geq 3$, que é exibida na figura 4.1 converge para γ na topologia C^0 , uma vez que $\gamma_n(0) = (-\frac{1}{n}, 0) \rightarrow (0, 0) = \gamma(0)$, $\gamma_n(2) = (-\frac{1}{n}, 1) \rightarrow (0, 1) = \gamma(2)$ e a imagem $\gamma_n([0, 2]) = \{(-\frac{1}{n}, y) : 0 \leq y \leq 1\}$ eventualmente fica dentro de qualquer aberto contendo a imagem de $\gamma|_{[1,2]} = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$, portanto dentro de qualquer aberto contendo $\gamma([0, 2])$.

Mas γ não é curva limite de $\{\gamma_n\}_{n \geq 3}$. Basta tomar o ponto $r = (\frac{1}{4}, 0) = \gamma(\frac{1}{4})$ e o aberto $U_r = \{(x, y) : \frac{1}{5} < x < \frac{1}{3}\}$ contendo r . Neste caso, a intersecção da imagem de qualquer γ_n com U_r é vazia, o que impede γ de ser curva limite.

Vamos verificar agora que a topologia C^0 é metrizável. Para este fim, construiremos explicitamente a métrica que gera esta topologia. Antes, porém, um lema.

Lema 4.1.9. *Seja (E, d) um espaço métrico. Defina $\Theta_E = \{A \subseteq E : A \text{ é não-vazio, limitado e } \forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow d(x, A) = 0\}$. A aplicação*

$$\begin{aligned} \rho_E : \Theta_E \times \Theta_E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \max\left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y) \right\} \end{aligned}$$

é uma função distância em Θ_E , chamada Métrica de Hausdorff em Θ_E .

Demonstração. É evidente por construção que ρ_E está bem definida e que temos simetria: $\forall A, B \in \Theta_E, \rho_E(A, B) = \rho_E(B, A)$. Suponha agora que $\rho_E(A, B) = 0$. Então, $\sup_{x \in A} d(x, B) = 0 = \sup_{y \in B} d(A, y)$. Mas $d(x, B) = 0 \Rightarrow x \in B, \forall x \in A$. Analogamente $d(A, y) = 0 \Rightarrow y \in A, \forall y \in B$. Logo $A = B$. Resta apenas verificar a desigualdade triangular. Sejam $A, B, C \in \Theta_E$. Temos, $\forall x \in A, \forall z \in C$,

$$d(x, B) := \inf_{y \in B} d(x, y) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z), \quad \forall y \in B.$$

$$\therefore d(x, B) - d(x, z) \leq d(y, z), \quad \forall y \in B.$$

$$\therefore d(x, B) - d(x, z) \leq d(z, B) \equiv \inf_{y \in B} d(z, y) \leq \rho_E(C, B).$$

A última desigualdade pode ser reescrita como

$$d(x, B) - \rho_E(C, B) \leq d(x, z).$$

Aqui, como $z \in C$ é arbitrário, temos

$$d(x, B) - \rho_E(C, B) \leq d(x, C) \leq \rho_E(A, C).$$

$$\therefore d(x, B) \leq \rho_E(A, C) + \rho_E(C, B).$$

De maneira inteiramente análoga, podemos mostrar que

$$d(y, A) \leq \rho_E(A, C) + \rho_E(C, B), \quad \forall y \in B.$$

$$\therefore \rho_E(A, B) \leq \rho_E(A, C) + \rho_E(C, B),$$

e a demonstração está completa. ■

Teorema 4.1.10. *A função*

$$H : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{dada por : } H([\gamma], [\beta]) = \rho_M(\text{Im}(\gamma), \text{Im}(\beta)) + d_h(\gamma(a), \beta(a)) + d_h(\gamma(b), \beta(b)),$$

onde ρ_M é a métrica Hausdorff para Θ_M , é uma métrica em \mathcal{C} , e a topologia induzida por ela é exatamente a topologia C^0 .

Demonstração. Note que H está bem definida, pois $\text{Im}(\gamma)$ é não-vazio e compacto, $\forall \gamma \in \widetilde{\mathcal{C}}$. É fácil ver, usando o Lema 4.1.9, que ela é de fato uma métrica.

Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ aberto na topologia gerada por H . Se \mathcal{A} não é aberto na topologia C^0 , existe $[\gamma] \in \mathcal{A}$ que não é ponto interior (no sentido da topologia C^0) de \mathcal{A} . Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a cobertura aberta $\{B_{1/n}^h(\gamma(t))\}_{t \in [a, b]}$ de $\gamma([a, b])$, e defina:

$$C_n := \bigcup_{t \in [a, b]} B_{1/n}^h(\gamma(t)), \quad A_n := B_{1/n}^h(\gamma(a)) \quad \text{e} \quad B_n := B_{1/n}^h(\gamma(b)).$$

Como $[\gamma] \in \mathcal{C}_{C_n}(A_n, B_n) \not\subseteq \mathcal{A}$, existe $[\gamma_n] \in \mathcal{C}_{C_n}(A_n, B_n) \setminus \mathcal{A}$.

Afirmação. $[\gamma_n] \xrightarrow{C^0} [\gamma]$.

Claramente, $\gamma_n(a) \rightarrow \gamma(a)$ e $\gamma_n(b) \rightarrow \gamma(b)$. Seja $W \subseteq M$ uma vizinhança qualquer de $\gamma([a, b])$. Para cada $t \in [a, b]$, tome $\epsilon_t > 0$ com $B^h_{2\epsilon_t}(\gamma(t)) \subseteq W$. Então, $\{B^h_{\epsilon_t}(\gamma(t))\}_{t \in [a, b]}$ é uma cobertura aberta de $\gamma([a, b])$, e podemos extrair uma subcobertura finita $\{B^h_{\epsilon_1}(\gamma(t_1)), \dots, B^h_{\epsilon_k}(\gamma(t_k))\}$. Seja $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Considere $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$. Para cada $t \in [a, b]$, existe $t' \in [a, b]$ tal que $\gamma_n(t) \in B^h_{1/n}(\gamma(t'))$. Para algum $i \in \{1, \dots, k\}$, $\gamma(t') \in B^h_{\epsilon_i}(\gamma(t_i))$. Daí

$$d_h(\gamma_n(t), \gamma(t_i)) \leq d_h(\gamma_n(t), \gamma(t')) + d_h(\gamma(t'), \gamma(t_i)) < \frac{1}{n} + \epsilon_i < 2\epsilon_i,$$

o que implica em $\gamma_n(t) \in B^h_{2\epsilon_i}(\gamma(t_i)) \subseteq W$. Portanto $Im(\gamma_n) \subseteq W$, provando a afirmação.

Pelo Teorema 4.1.6, γ é curva limite de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Seja $\{\gamma_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que distingue γ . Como \mathcal{A} é H -aberto, existe $r > 0$ tal que $B^H_r([\gamma]) \subseteq \mathcal{A}$. Seja $\{B^h_{r/4}(\gamma(t_1)), \dots, B^h_{r/4}(\gamma(t_l))\}$ uma cobertura finita de $Im(\gamma)$ por d_h -bolas, com $t_1 = a$ e $t_l = b$. Podemos escolher $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > N_0 \Rightarrow Im(\gamma_{n_m}) \subseteq \bigcup_{i=1}^l B^h_{r/4}(\gamma(t_i))$, $d_h(\gamma_{n_m}(a), \gamma(a)) < \frac{r}{4}$ e $d_h(\gamma_{n_m}(b), \gamma(b)) < \frac{r}{4}$, pela C^0 -convergência. Neste caso, dado $t \in [a, b]$, $\gamma_{n_m}(t) \in B^h_{r/4}(\gamma(t_i))$ para algum i , e

$$d_h(\gamma_{n_m}(t), Im(\gamma)) \leq d_h(\gamma_{n_m}(t), \gamma(t_i)) < \frac{r}{4}.$$

$$\therefore \sup_{t \in [a, b]} d_h(\gamma_{n_m}(t), Im(\gamma)) \leq \frac{r}{4}, \quad \forall m > N_0.$$

Para cada $j \in \{1, \dots, l\}$, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $Im(\gamma_{n_m}) \cap B^h_{r/4}(\gamma(t_j)) \neq \emptyset, \forall m > N_j$. Tome $N = \max\{N_0, N_1, \dots, N_l\}$. Dado $s \in [a, b]$, $\gamma(s) \in B^h_{r/4}(\gamma(t_j))$ para algum j . Para $m > N$,

$$d_h(\gamma(s), Im(\gamma_{n_m})) \leq d_h(\gamma(s), \gamma_{n_m}(t')),$$

para algum $t' \in [a, b]$ com $\gamma_{n_m}(t') \in B^h_{r/4}(\gamma(t_j))$. Logo

$$d_h(\gamma(s), Im(\gamma_{n_m})) \leq d_h(\gamma(s), \gamma(t_j)) + d_h(\gamma(t_j), \gamma_{n_m}(t')) < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2}.$$

$$\therefore \sup_{s \in [a, b]} d_h(\gamma(s), Im(\gamma_{n_m})) \leq \frac{r}{2}.$$

Isto significa que $\rho_M(Im(\gamma), Im(\gamma_{n_m})) \leq \frac{r}{2}$ e, juntamente com as desigualdades $d_h(\gamma_{n_m}(a), \gamma(a)) < \frac{r}{4}$ e $d_h(\gamma_{n_m}(b), \gamma(b)) < \frac{r}{4}$, que $H([\gamma], [\gamma_{n_m}]) < r$. Logo $[\gamma_{n_m}] \in B^H_r([\gamma]) \subseteq \mathcal{A}$, em contradição com a escolha da sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Provamos assim que \mathcal{A} é aberto na topologia C^0 .

Agora, sejam $A, B, C \subseteq M$ abertos, $A, B \subseteq C$ e $[\gamma] \in \mathcal{C}_c(A, B)$. Escolha $\{B^h_r(t_1), \dots, B^h_r(t_m)\}$ uma cobertura finita de $\gamma([a, b])$ por d_h -bolas de raio r tal que $t_1 = a$, $B^h_{2r}(a) \subseteq A$, $t_m = b$, $B^h_{2r}(b) \subseteq B$ e $\bigcup_{i=1}^m B^h_{2r}(t_i) \subseteq C$. Qualquer que seja $[\beta] \in B^H_r([\gamma])$, temos $d_h(\beta(a), \gamma(a)), d_h(\beta(b), \gamma(b))$ ambos menores que r , pela definição de H . Logo $\beta(a) \in A$ e $\beta(b) \in B$. Além disso, $\rho_M(Im(\gamma), Im(\beta)) < r$. Então, $\forall t \in [a, b]$, $d_h(\beta(t), Im(\gamma)) < r$, de

modo que para algum $s_t \in [a, b]$, $d_h(\beta(t), \gamma(s_t)) < r$. Como $\gamma(s_t) \in B^h_r(\gamma(t_j))$ para algum j , a desigualdade triangular fornece $d_h(\beta(t), \gamma(t_j)) < 2r$, o que implica $\beta(t) \in C$. Sendo $t \in [a, b]$ arbitrário, $Im(\beta) \subseteq C$. Concluimos que $[\beta] \in \mathcal{C}_c(A, B)$, e portanto que $B^H_r([\gamma]) \subseteq \mathcal{C}_c(A, B)$. Segue que $\mathcal{C}_c(A, B)$ é H -aberto, e as duas topologias coincidem. ■

Agora, defina

$$\tilde{\Omega} := \{ \gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \text{ é } C^\infty \text{ por partes, causal e futuro-dirigida.} \}$$

$$\text{e } \Omega := \{ [\gamma] \in \mathcal{C} : \gamma \in \tilde{\Omega} \}.$$

Teorema 4.1.11. *Existe uma sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\tilde{\Omega}$ tal que $X = \{[\gamma_n] : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Omega$ é denso em \mathcal{C} . Em particular, (\mathcal{C}, H) é um espaço métrico separável e Ω é denso em \mathcal{C} .*

Demonstração. Seja $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sequência densa em M , que existe porque M é segundo-contável e portanto (M, d_h) é separável. Seja $P = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$. O conjunto das sequências finitas com valores em P é enumerável. Chame de \mathcal{S} este conjunto. Diremos que uma sequência $(p_{k_1}, \dots, p_{k_l}) \in \mathcal{S}$ é *aceitável* se para cada $i = 1, \dots, l$,

- (i) $p_{k_{i-1}}, p_{k_i} \in U_i$, para algum U_i aberto convexo.
- (ii) $p_{k_{i-1}} \ll_{U_i} p_{k_i}$.

Denote o subconjunto (enumerável) das sequências aceitáveis por \mathcal{S}_0 . Definiremos uma aplicação $F : \mathcal{S}_0 \rightarrow \tilde{\Omega}$ da seguinte forma: dada $(p_{k_1}, \dots, p_{k_l}) \in \mathcal{S}_0$, se $\overrightarrow{p_{k_{i-1}} p_{k_i}}$ denota a geodésica radial (e causal) em qualquer U_i convexo contendo $p_{k_{i-1}}$ e p_{k_i} , então $F(p_{k_1}, \dots, p_{k_l})$ é a justaposição dos segmentos formados pelas geodésicas radiais futuro-dirigidas $\overrightarrow{p_{k_1} p_{k_2}}, \dots, \overrightarrow{p_{k_{l-1}} p_{k_l}}$, reparametrizadas de tal modo que o domínio seja $[a, b]$. O conjunto $F(\mathcal{S}_0) \subseteq \tilde{\Omega}$ é enumerável. Seja $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência em $\tilde{\Omega}$ obtida de uma enumeração qualquer de $F(\mathcal{S}_0)$, e $\{[\gamma_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência correspondente em Ω . Vamos mostrar a densidade desta em Ω .

Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ aberto. Fixe $[\gamma] \in \mathcal{A}$. Existem $A, B, C \subseteq M$, $A, B \subseteq C$ tais que $\mathcal{C}_c(A, B) \subseteq \mathcal{A}$. Tome $\{U_1, \dots, U_l\}$ uma cobertura aberta de $\gamma([a, b])$ por convexos e uma partição $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b\}$ de $[a, b]$ com $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$, para cada $i = 1, \dots, l$ e tal que $U_1 \cup \dots \cup U_l \subseteq C$, $U_1 \subseteq A$ e $U_l \subseteq B$. Construiremos uma sequência aceitável $(p_{k_0}, \dots, p_{k_l}) \in \mathcal{S}_0$ indutivamente. Tome qualquer $p_- \in I^-(\gamma(a), U_1)$. Como P é denso em M , podemos escolher $p_{k_0} \in I^+(p_-, U_1) \cap I^-(\gamma(a), U_1)$. Em particular, $p_{k_0} \ll_{U_1} \gamma(a)$, logo existe $V_1 \subseteq U_1$ vizinhança de $\gamma(a)$ tal que $p_{k_0} \ll_{U_1} p'$, $\forall p' \in V_1$. Escolha $p_{k_1} \in V_1 \cap P$, com $p_{k_1} \ll_{U_1} \gamma(t_1)$. Agora, uma vez escolhidos p_{k_0}, \dots, p_{k_i} , para $i < l$, tais que $p_{k_{j-1}} \ll_{U_j} p_{k_j}$ e $p_{k_j} \ll_{U_j} \gamma(t_j)$, para cada $1 \leq j \leq i$, temos $p_{k_j} \in U_{j+1}$ e $p_{k_j} \leq_{U_{j+1}} \gamma(t_{j+1})$. Consideramos então $V_{j+1} \subseteq U_{j+1}$ uma vizinhança de $\gamma(t_{j+1})$ tal que $p_{k_j} \ll_{U_{j+1}} p'$, $\forall p' \in V_{j+1}$. Daí, escolhamos $p_{k_{j+1}} \in P \cap V_{j+1}$ com $p_{k_{j+1}} \ll_{U_{j+1}} \gamma(t_{j+1})$. A sequência $(p_{k_0}, \dots, p_{k_l})$ assim obtida é aceitável e $\beta \equiv F(p_{k_0}, \dots, p_{k_l})$ é na verdade uma (tipo-tempo) geodésica por partes. Por construção, $\beta(a) = p_{k_0} \in U_1 \subseteq A$, $\beta(b) = p_{k_l} \in U_l \subseteq B$, e $Im(\beta)$ está em $U_1 \cup \dots \cup U_l \subseteq C$, logo $[\beta] \in \mathcal{C}_c(A, B) \subseteq \mathcal{A}$. Como $[\beta] \in X = \{[\gamma_n] : n \in \mathbb{N}\}$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ temos $[\beta] = [\gamma_{n_0}]$. Logo X é denso em \mathcal{C} na topologia C^0 , como queríamos. ■

Teorema 4.1.12. *Sejam $A, B, C \subseteq M$, com $A, B \subseteq C$. Se A e B são fechados e C é compacto em M , então $\mathcal{C}_c(A, B)$ é compacto em \mathcal{C} na topologia C^0 .*

Demonstração. Como a topologia C^0 é metrizável, basta verificar que $\mathcal{C}_c(A, B)$ é sequencialmente compacto. Sendo assim, considere $\{[\gamma_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}_c(A, B)$ e construa, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\gamma}_n : [0, \infty) \rightarrow M$ extensão de γ_n , futuro-inextensível e parametrizada por h -comprimento de arco. Como C é compacto, existe uma subsequência $\{\gamma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de modo que $\gamma_{n_k}(a) \rightarrow p \in C$. Na verdade, $p \in A$, porque A é fechado. Seja $\{\tilde{\gamma}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ a subsequência de $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ correspondente. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\tilde{\gamma}_{n_k}(0) \rightarrow p$ (lembrando que $\tilde{\gamma}_n(0) = \gamma_n(a)$). Pelo Lema da Curva Limite, existe $\tilde{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow M$ curva C^0 , causal e futuro-inextensível com $\tilde{\gamma}(0) = p$ tal que $\tilde{\gamma}_{n_k}|_K \rightarrow \tilde{\gamma}|_K$ h -uniformemente em cada $K \subseteq [0, \infty)$ compacto. Seja $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sequência em $[0, \infty)$ tal que $\tilde{\gamma}_{n_k}(s_k) = \gamma_{n_k}(b)$. Neste caso, afirmamos que $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. Suponha que não. Passando para uma subsequência se necessário, podemos assumir então que $s_k \rightarrow +\infty$. Dado $t \in [0, \infty)$, eventualmente $s_k > t$. Mas então $\tilde{\gamma}_{n_k}(t) \in C$, e como $\tilde{\gamma}_{n_k}|_{[0, t]} \rightarrow \tilde{\gamma}|_{[0, t]}$ h -uniformemente, temos em particular $\tilde{\gamma}([0, t]) \subseteq C$. Esse raciocínio vale para $t \in [0, \infty)$ arbitrário, logo $\tilde{\gamma}([0, \infty)) \subseteq C$, o que significa que $\tilde{\gamma}$ fica futuro-aprisionada em um compacto, em contradição com a Proposição 3.4.17. Assim, devemos ter $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ limitada. Agora, sendo $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ limitada, podemos assumir, passando para uma subsequência se necessário, que $s_k \rightarrow s_0 \in [0, \infty)$. Dado $t \in [0, \infty)$ com $0 \leq t < s_0$, eventualmente teremos $s_k > t$, o que nos permite concluir como antes que $\tilde{\gamma}([0, t]) \subseteq C$. Além disso, $\tilde{\gamma}_{n_k} \rightarrow \tilde{\gamma}(s_0) \in B$, já que B é fechado. Reparametrizando $\tilde{\gamma}|_{[0, s_0]}$, obtemos uma curva C^0 , causal e futuro-dirigida γ tal que $[\gamma] \in \mathcal{C}_c(A, B)$, $\gamma_{n_k}(a) \rightarrow \gamma(a)$ e $\gamma_{n_k}(b) \rightarrow \gamma(b)$.

Finalmente, seja W uma vizinhança de $\tilde{\gamma}([0, s_0]) = \gamma([a, b])$. Por continuidade, podemos escolher $s_1 > s_0$ de modo que ainda temos $\tilde{\gamma}([0, s_1]) \subseteq W$. Para cada $t \in [0, s_1]$, seja $\epsilon_t > 0$ tal que $B^h_{2\epsilon_t}(\tilde{\gamma}(t)) \subseteq W$. O conjunto $\{B^h_{2\epsilon_t}(\tilde{\gamma}(t))\}_{t \in [0, s_1]}$ é uma cobertura aberta de $\tilde{\gamma}([0, s_1])$, que é compacto, permitindo assim extrair uma subcobertura finita $\{B^h_{\epsilon_1}(\tilde{\gamma}(t_1)), \dots, B^h_{\epsilon_j}(\tilde{\gamma}(t_j))\}$. Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k > N_1 \Rightarrow s_k \in [0, s_1]$. Colocamos $\epsilon := \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_j\}$. Pela convergência h -uniforme $\tilde{\gamma}_{n_k}|_{[0, s_1]} \rightarrow \tilde{\gamma}|_{[0, s_1]}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $k > N_2 \Rightarrow d_h(\tilde{\gamma}_{n_k}(t), \tilde{\gamma}(t)) < \epsilon, \forall t \in [0, s_1]$. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Assim, para qualquer $s \in [0, s_1]$, temos $\tilde{\gamma}(s) \in B^h_{\epsilon_i}(\tilde{\gamma}(t_i))$ para algum $i \in \{1, \dots, j\}$, e portanto

$$d_h(\tilde{\gamma}_{n_k}(s), \tilde{\gamma}(t_i)) \leq d_h(\tilde{\gamma}_{n_k}(s), \tilde{\gamma}(s)) + d_h(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(t_i)) < 2\epsilon_i.$$

Logo, $\tilde{\gamma}_{n_k}(s) \in B^h_{2\epsilon_i}(\tilde{\gamma}(t_i)) \subseteq W$. Concluimos que $\tilde{\gamma}_{n_k}([0, s_1]) \subseteq W$, para $k > N$. Mas então $\gamma_{n_k}([a, b]) \equiv \tilde{\gamma}_{n_k}([0, s_k]) \subseteq \tilde{\gamma}_{n_k}([0, s_1]) \subseteq W$, para $k > N$, o que nos dá a convergência $[\gamma_{n_k}] \xrightarrow{C^0} [\gamma]$. ■

Corolário. \mathcal{C} é localmente compacto.

Demonstração. Dada $[\gamma] \in \mathcal{C}$, escolha qualquer compacto $K \subseteq M$ tal que $Im(\gamma) \subseteq int(K)$, que existe porque $Im(\gamma)$ é compacto e M é localmente compacta. Logo, $[\gamma] \in \mathcal{C}_{int(K)}(int(K), int(K)) \subseteq \mathcal{C}_K(K, K)$. Este último conjunto é compacto, pelo Teorema, e $[\gamma] \in int(\mathcal{C}_K(K, K))$, pois $\mathcal{C}_{int(K)}(int(K), int(K))$ é aberto, provando o corolário. ■

Observação 4.1.13. Na demonstração do Teorema 4.1.12, acabamos provando que se uma sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{C} converge uniformemente (com respeito a d_h) para $\gamma \in \mathcal{C}$, então $[\gamma_n] \xrightarrow{C^0} [\gamma]$. A recíproca não é verdadeira, como mostra o seguinte exemplo. Em (\mathbb{R}^2, g_0) , onde $ds^2_{g_0} \equiv dx^2 - dy^2$, defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, a curva $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma_n(t) := (0, t^{n+1})$, e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\gamma(t) := (0, t)$, $\forall t \in [0, 1]$. Claramente, $Im(\gamma_n) = Im(\gamma)$, $\gamma_n(0) = \gamma(0)$ e $\gamma_n(1) = \gamma(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $H([\gamma_n], [\gamma]) = 0$, o que implica $[\gamma_n] = [\gamma]$. Em particular, vale trivialmente a convergência $[\gamma_n] \xrightarrow{C^0} [\gamma]$. Mas, se h é a métrica Euclidiana usual,

$$\sup_{t \in [0, 1]} d_h(\gamma_n(t), \gamma(t)) = \sup_{t \in [0, 1]} |t^{n+1} - t| = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \geq \frac{1}{2},$$

donde não podemos ter $\gamma_n \rightarrow \gamma$ h -uniformemente. Note ainda que $[\gamma_n], [\gamma] \in \mathcal{C}_c(A, B)$, onde $A = \{(0, 0)\}$, $B = \{(0, 1)\}$ são fechados e $C = \{(0, t) : 0 \leq t \leq 1\}$ é compacto. Esse exemplo pode ser interpretado como implicando que $\mathcal{C}_c(A, B)$ não é compacto na topologia da convergência h -uniforme.

Dados $p, q \in M$, com $p < q$, usaremos de agora em diante o símbolo $\mathcal{C}(p, q)$ para denotar o conjunto $\mathcal{C}_{J^+(p) \cap J^-(q)}(\{p\}, \{q\})$.

Teorema 4.1.14. *Se $p, q \in M$, $p < q$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto em M .
- (ii) $\mathcal{C}(p, q)$ é compacto em \mathcal{C} .

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii). Segue imediatamente do Teorema 4.1.12.

(ii) \Rightarrow (i). Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $J^+(p) \cap J^-(q)$. Tome $\{\gamma_n\}$ sequência em \mathcal{C} com $\gamma_n(a) = p$, $\gamma_n(b) = q$ e $\gamma_n(t_n) = x_n$, para algum $t_n \in [a, b]$. Como $\{[\gamma_n] : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{C}(p, q)$ e este conjunto é compacto, existe uma subsequência $\{\gamma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e uma curva $\gamma \in \mathcal{C}$ tal que $[\gamma_{n_k}] \xrightarrow{C^0} [\gamma] \in \mathcal{C}(p, q)$. Em particular, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Seja $K \subseteq M$ um compacto qualquer contendo $Im(\gamma)$. Pela convergência na topologia C^0 e pela compacidade de K , existe uma subsequência $\{x_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{m_k} \in int(K)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e $x_{m_k} \rightarrow x_0 \in K$. Se $x_0 \notin Im(\gamma)$, existem abertos disjuntos $U, V \subseteq M$ tais que $x_0 \in U$ e $Im(\gamma) \subseteq V$. Mas então, como $[\gamma_{m_k}] \xrightarrow{C^0} [\gamma]$, para k grande o suficiente teremos $x_{m_k} \equiv \gamma_{m_k}(t_{m_k}) \in U$ e $Im(\gamma_{m_k}) \subseteq V$, uma contradição. Assim, $x_0 \in Im(\gamma)$, e $q \leq x_0 \leq p$, ou seja, $x_0 \in J^+(p) \cap J^-(q)$. Portanto $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto. ■

Iremos agora dar a definição da mais forte condição de causalidade possível. Aqui na Geometria Lorentziana, ela desempenha um papel análogo ao da completude geodésica na Geometria Riemanniana, sendo a condição natural para substituí-la neste contexto, como veremos mais adiante.

Definição 4.1.15. Um subconjunto $U \subseteq M$ é dito ser globalmente hiperbólico quando valem ambas as condições:

(H1) A causalidade forte vale em U .

(H2) Dados $p, q \in U$ com $p < q$, o conjunto $J^+(p) \cap J^-(q)$ está contido em U e é compacto.

Quando M é ela própria um conjunto globalmente hiperbólico, dizemos que (M, g) é um espaço-tempo globalmente hiperbólico.

Em particular, todo espaço-tempo globalmente hiperbólico é fortemente causal. A condição de hiperbolicidade global é bastante forte. No entanto, todo espaço-tempo é globalmente hiperbólico localmente. Mais precisamente, temos a

Proposição 4.1.16. Seja (M_0, g_0) um espaço-tempo qualquer (não necessariamente fortemente causal). Dado $p \in M_0$,

(i) Existe vizinhança U de p tal que $(U, g_0|_U)$ é um espaço-tempo fortemente causal.

(ii) Existe vizinhança V de p tal que $(V, g_0|_V)$ é um espaço-tempo globalmente hiperbólico.

Demonstração. (i). Dado $p \in M_0$, tome U vizinhança convexa de p . Pela Proposição 3.4.15, para qualquer aberto $A \subseteq U$ e $q \in A$, existem $q^\pm \in A$ tais que $q \in I_U(q^+, q^-) \equiv I^+(q^-, U) \cap I^-(q^+, U) \subseteq A$. Como $I_U(q^+, q^-)$ é causalmente convexo em $(U, g_0|_U)$, isto mostra que este último é um espaço-tempo fortemente causal.

(ii). Seja $(U, g_0|_U)$ como no item anterior, e tome $V \subseteq U$ aberto causalmente convexo contendo p tal que $\bar{V} \subseteq U$, com \bar{V} compacto. Dados $q, r \in V$ com $q <_U r$, claramente temos $J^+(q, U) \cap J^-(r, U) \subseteq V$. Pelo Lema 3.2.2, $J^+(q, U)$ e $J^-(r, U)$ são fechados (em U), logo $J^+(q, U) \cap J^-(r, U)$ é um subconjunto fechado do compacto \bar{V} , sendo portanto compacto também. Conclusão: $(V, g_0|_V)$ é globalmente hiperbólico. ■

Teorema 4.1.17. Se (M, g) é globalmente hiperbólico, então:

(i) Dadas $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências em M com $p_n \leq q_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $p_n \rightarrow p$, $q_n \rightarrow q$, tem-se $p \leq q$.

(ii) Se $A \subseteq M$ é compacto, $J^\pm(A)$ é fechado.

(iii) Se $A, B \subseteq M$ são compactos, $J^+(A) \cap J^-(B)$ é compacto.

Demonstração. (i) Inicialmente vamos provar que $J^\pm(x)$ é fechado, $\forall x \in M$. De fato, considere $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seqüência em $J^+(x)$ com $y_n \rightarrow y$. Tome $y^+ \in I^+(y)$. Como $y \in I^-(y^+) \subseteq J^-(y^+)$, e $I^-(y^+)$ é aberto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $y_n \in I^-(y^+)$. Além disso, $J^-(y^+) \cap J^+(x)$ é compacto, portanto fechado, donde $y = \lim y_n \in J^-(y^+) \cap J^+(x)$. Em particular, $y \in J^+(x)$. Logo, qualquer cone causal em M é

fechado. Sejam $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como no enunciado. Suponha, por absurdo, que $q \notin J^+(p)$. Então existe $U \subseteq M \setminus J^+(p)$ vizinhança de q . Escolha $q^+ \in I^+(q) \cap U$. Já que $q \in I^-(q^+) \cap U$, que é aberto, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de maneira que $n \geq N_0$ implica $q_n \in I^-(q^+) \cap U$. Temos assim $p_n \leq q_n \ll q^+$, e portanto $p_n \leq q^+$, $\forall n \geq N_0$. Mas isto garante que $p \leq q^+$. Logo $q^+ \in J^+(p)$ e $q^+ \in U$, com $J^+(p) \cap U = \emptyset$, um absurdo.

(ii) Seja $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $J^+(A)$, A compacto, com $p_n \rightarrow p$. Por definição, existe $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em A com $a_n \leq p_n$. Sendo A compacto, existe subsequência $\{a_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $a_{n_j} \rightarrow a$. Temos $a \in A$, porque A é fechado. Pelo item anterior, $a_{n_j} \leq p_{n_j} \Rightarrow a \leq p$. Logo $p \in J^+(A)$, como queríamos.

(iii) Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em $J^+(A) \cap J^-(B)$, $A, B \subseteq M$ compactos. Então, existem sequências $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em A e $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em B tais que $p_n \leq x_n \leq q_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir, passando para subsequência se necessário, que $p_n \rightarrow p \in A$ e $q_n \rightarrow q \in B$. Escolha $p^- \in I^-(p)$ e $q^+ \in I^+(q)$. Como $p, q \in I^+(p^-) \cap I^-(q^+)$, eventualmente teremos $p_n, x_n, q_n \in I^+(p^-) \cap I^-(q^+) \subseteq J^+(p^-) \cap J^-(q^+)$, que é compacto. Para alguma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, temos $x_{n_j} \rightarrow x$. Pelo item (i), $p \leq x \leq q$. Como $p \in A$, $q \in B$, temos $x \in J^+(A) \cap J^-(B)$. ■

Cada um desses resultados é em geral falso se (M, g) é apenas fortemente causal.

4.2 Distância Lorentziana

Nesta seção, (M, g) denota um espaço-tempo qualquer. Fixe $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Dados $p, q \in M$, $p < q$, usaremos o símbolo $\Omega(p, q)$ para indicar o conjunto de todas as curvas suaves por partes, causais e futuro-dirigidas $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, com $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. O comprimento Lorentziano de $\gamma \in \Omega(p, q)$ é definido da maneira usual, isto é,

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{-g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

Definição 4.2.1. A função distância Lorentziana em M , denotada $\tau : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$, é dada por

$$\tau(p, q) = \begin{cases} \sup \{ L(\gamma) : \gamma \in \Omega(p, q) \}, & \text{se } p < q; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação 4.2.2. Se (M, g) é causal, então $\tau(p, p) = 0$, $\forall p \in M$. Ainda nesta situação, se $\tau(p, q) > 0$, então $\tau(q, p) = 0$. Em particular, τ não é simétrica.

Observação 4.2.3. Dados $p, q \in M$, se $q \in I^+(p)$, existe $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ tipo-tempo e futuro-dirigida com $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$. Então $0 < L(\alpha) \leq \tau(p, q)$. Por outro lado, se $q \notin I^+(p)$, temos duas possibilidades: ou $q \notin J^+(p)$, e portanto $\tau(p, q) = 0$, por definição; ou então $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$. Neste último caso, todas as curvas causais

ligando p a q são tipo-luz, de modo que $\tau(p, q) \equiv \sup \{ L(\gamma) : \gamma \in \Omega(p, q) \} = 0$.
 Concluimos assim que

$$\tau(p, q) > 0 \iff q \in I^+(p).$$

Equivalentemente,

$$I^+(p) = \{ q \in M : \tau(p, q) > 0 \}.$$

Note que se (M, g) não é cronológico, então a existência de $p \in I^+(p)$ faz com que tenhamos $\tau(p, p) > 0$.

Definição 4.2.4. (M, g) é dito ser vicioso em $p \in M$ se $I^+(p) \cap I^-(p) = M$, e totalmente vicioso se for vicioso em todos os pontos.

Proposição 4.2.5. Valem as seguintes afirmações:

(i) Se $p \in I^+(p)$, então $\tau(p, p) = +\infty$. (Portanto, dado $q \in M$, tem-se necessariamente $\tau(q, q) = 0$ ou $\tau(q, q) = +\infty$).

(ii) (M, g) é totalmente vicioso se, e somente se, $\tau(p, q) = +\infty, \forall p, q \in M$.

(iii) Se (M, g) é vicioso em p , então (M, g) é totalmente vicioso.

Demonstração. (i) Se $p \in I^+(p)$, existe $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ curva tipo-tempo, futuro-dirigida com $\alpha(0) = \alpha(1) = p$. Defina, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\bar{\alpha}_m : [0, m] \rightarrow M$ por $\bar{\alpha}_m(t) := \alpha(t - n)$, se $t \in [n, n + 1], \forall n \in \mathbb{N}, n < m$. Note que cada $\bar{\alpha}_m$ é também tipo-tempo, futuro-dirigida, de modo que $\bar{\alpha}_m \in \Omega(p, p), \forall m \in \mathbb{N}$. Temos $L(\bar{\alpha}_m) \equiv mL(\alpha), \forall m \in \mathbb{N}$, e $L(\alpha) > 0$. Logo $\tau(p, p) = +\infty$.

(ii) Suponha (M, g) totalmente vicioso, e tome $p, q \in I^+(p) \cap I^-(p)$. Seja α curva tipo-tempo de p a q . O item anterior garante a existência de uma sequência de curvas $\{\alpha_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tipo-tempo, futuro-dirigidas de p para p com $L(\alpha_m) \rightarrow +\infty$. Assim, dado qualquer número $A > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m > m_0, L(\alpha_m + \alpha) = L(\alpha_m) + L(\alpha) > L(\alpha_m) > A$, onde $\alpha_m + \alpha$ denota a curva obtida pela concatenação de α_m com α , que vai de p a q . Portanto $\alpha_m + \alpha \in \Omega(p, q)$, e temos $\tau(p, q) = +\infty$.

Suponha, por outro lado, $\tau(p, q) = +\infty, \forall p, q \in M$. Fixe $p \in M$. Dado qualquer $q \in M, \tau(p, q) = +\infty > 0$, por hipótese. Logo $q \in I^+(p)$. Temos também, por hipótese, que $\tau(q, p) = +\infty$, o que implica $p \in I^+(q)$, ou seja, $q \in I^-(p)$. Concluimos que $q \in I^+(p) \cap I^-(p)$, e como q era arbitrário, $M = I^+(p) \cap I^-(p)$.

(iii) Seja $r \in M$ qualquer. Vamos mostrar que $M = I^+(r) \cap I^-(r)$, e portanto que M é totalmente vicioso. Dado $q \in M$, como por hipótese $M = I^+(p) \cap I^-(p)$, temos $q, r \in I^+(p) \cap I^-(p)$. Assim, existem curvas $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$ tipo-tempo, futuro-dirigidas com $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = \beta(1) = p$ juntamente com parâmetros $t_0, s_0 \in [0, 1]$ tais que $\alpha(t_0) = q, \beta(s_0) = r$. Defina $\gamma : [t_0, t_0 + 2] \rightarrow M$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{para } t_0 \leq t \leq 1, \\ \beta(t - 1), & \text{para } 1 \leq t \leq 2, \\ \alpha(t - 2), & \text{para } 2 \leq t \leq 2 + t_0. \end{cases}$$

A curva γ é tipo-tempo, futuro-dirigida, de q para q passando por r , logo $q \in I^+(r) \cap I^-(r)$. Portanto $M = I^+(r) \cap I^-(r)$, como queríamos. ■

Proposição 4.2.6. (*Desigualdade Triangular Reversa*) Para quaisquer $p, q, r \in M$ com $p \leq q \leq r$, temos $\tau(p, q) + \tau(q, r) \leq \tau(p, r)$.

Demonstração. Vamos dividir em 3 casos:

(i) $p = q$. Pelo item (i) da proposição 4.2.5, $\tau(p, p) = 0$ ou $+\infty$. No primeiro caso, $\tau(p, q) + \tau(q, r) = \tau(p, p) + \tau(p, r) = \tau(p, r) \leq \tau(p, r)$. No segundo caso, a mesma idéia da demonstração do item (ii) da proposição 4.2.5 (a saber, concatenar curvas arbitrariamente longas de p para p com uma curva de p para r) mostra que $\tau(p, r) = +\infty$, e como $\tau(p, p) = +\infty$, a desigualdade segue.

(ii) $q = r$. O caso $\tau(q, q) = 0$ é imediato. Se $\tau(q, q) = +\infty$, então novamente $\tau(q, r) = +\infty$, e $\tau(p, r) = \tau(p, q) = +\infty$, e a desigualdade se verifica.

(iii) $p \neq q$ e $q \neq r$. Sejam $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$ curvas causais, futuro-dirigidas de p a q e de q a r , respectivamente. Então $\alpha + \beta$ é curva causal futuro-dirigida de p a r , e a aditividade da integral nos dá:

$$L(\alpha) + L(\beta) = L(\alpha + \beta) \leq \tau(p, r) \implies L(\alpha) \leq \tau(p, r) - L(\beta).$$

$$\therefore \tau(p, q) \leq \tau(p, r) - L(\beta).$$

Se $\tau(p, q) = +\infty$, teremos também $\tau(p, r) = +\infty$, e a desigualdade desejada vale. Se $\tau(p, q) < +\infty$, então podemos subtrair a quantidade finita $\tau(p, q)$ de ambos os lados, e somar $L(\beta)$, que também é finito, o que fornece:

$$L(\beta) \leq \tau(p, r) - \tau(p, q) \implies \tau(q, r) \leq \tau(p, r) - \tau(p, q).$$

$$\therefore \tau(p, q) + \tau(q, r) \leq \tau(p, r). \quad \blacksquare$$

Teorema 4.2.7. A função distância Lorentziana $\tau : M \times M \rightarrow [0, +\infty]$ é semicontínua inferiormente.

Demonstração. Sejam $p_0, q_0 \in M$, e $\epsilon > 0$. Temos 3 casos a considerar:

(i) $\tau(p_0, q_0) = 0$. Para quaisquer $p, q \in M$, vale $\tau(p, q) \leq 0 > -\epsilon = \tau(p_0, q_0) - \epsilon$.

(ii) $0 < \tau(p_0, q_0) < +\infty$. Neste caso, existe $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ curva tipo-tempo, futuro-dirigida de p_0 a q_0 tal que $L(\alpha) > \tau(p_0, q_0) - \frac{\epsilon}{3}$. Sejam $U_0, V_0 \subseteq M$ vizinhanças convexas de p_0 e q_0 , respectivamente, e $t_0, s_0 \in [a, b]$, com $a < t_0 < s_0 < b$, tais que $\alpha([a, t_0]) \subseteq U_0$, $\alpha([s_0, b]) \subseteq V_0$. As aplicações

$$\Delta_1 : U_0 \times U_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta_2 : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, p') \mapsto |\overrightarrow{pp'}| \qquad (q, q') \mapsto |\overrightarrow{qq'}|$$

são contínuas, logo existem $U_0' \subseteq U_0$ e $V_0' \subseteq V_0$ vizinhanças de p_0 e q_0 , respectivamente, tais que

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{p\alpha(t_0)}| - |\overrightarrow{p_0\alpha(t_0)}| &< \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall p \in U_0', \\ |\overrightarrow{\alpha(s_0)q}| - |\overrightarrow{\alpha(s_0)q_0}| &< \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall q \in V_0'. \end{aligned}$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $U_0' \subseteq I^-(\alpha(t_0))$ e $V_0' \subseteq I^+(\alpha(s_0))$. Assim, as geodésicas radiais $p\alpha(t_0)$ e $\alpha(s_0)q$ (notação cf. teorema 4.1.11) são sempre tipo-tempo e futuro-dirigidas, ou constantes. Daí,

$$\begin{aligned} \tau(p, q) &\geq L(p\alpha(t_0) + \alpha|_{[t_0, s_0]}\alpha(s_0)q) = |\overrightarrow{p\alpha(t_0)}| - \frac{\epsilon}{3} + L(\alpha|_{[t_0, s_0]}) + |\overrightarrow{\alpha(s_0)q_0}| - \frac{\epsilon}{3} \\ &\geq L(\alpha|_{[a, t_0]}) + L(\alpha|_{[s_0, b]}) - \frac{2\epsilon}{3} = L(\alpha) - \frac{2\epsilon}{3} > \tau(p_0, q_0) - \epsilon. \end{aligned}$$

(i) $\tau(p_0, q_0) = +\infty$. Dado $A > 0$, existe uma curva α , tipo-tempo, de p_0 a q_0 tal que $\overline{L(\alpha)} > (A + \epsilon) - \frac{\epsilon}{3}$. O mesmo argumento do caso (ii) nos permite concluir a existência de vizinhanças U_0', V_0' de p_0 e q_0 , respectivamente, tais que

$$\tau(p, q) > (A + \epsilon) - \epsilon \equiv A, \quad \forall p \in U_0', \forall q \in V_0'. \quad \blacksquare$$

Definição 4.2.8. *Sejam $p, q \in M$, $p < q$. Uma curva $\gamma \in \Omega(p, q)$ é maximal se $L(\gamma) = \tau(p, q)$.*

Proposição 4.2.9. *Sejam $p, q \in M$, $p < q$. Se $\gamma \in \Omega(p, q)$ é uma curva maximal, então $\forall s, t \in [a, b]$ com $s < t$, temos $L(\gamma|_{[s, t]}) = \tau(\gamma(s), \gamma(t))$.*

Demonstração. Por definição, $L(\gamma([s, t])) \leq \tau(\gamma(s), \gamma(t))$. Pela desigualdade triangular reversa, temos

$$\begin{aligned} \tau(p, \gamma(s)) + \tau(\gamma(s), \gamma(t)) + \tau(\gamma(t), q) &\leq \tau(p, q) = L(\gamma) \\ &= L(\gamma|_{[a, s]}) + L(\gamma|_{[s, t]}) + L(\gamma|_{[t, b]}) \leq \tau(p, \gamma(s)) + L(\gamma|_{[s, t]}) + \tau(\gamma(t), q) \\ &\Rightarrow \tau(\gamma(s), \gamma(t)) \leq L(\gamma|_{[s, t]}), \end{aligned}$$

como queríamos. \blacksquare

Teorema 4.2.10. *Sejam $p, q \in M$, $p < q$. Se $\gamma \in \Omega(p, q)$ é maximal, então é possível reparametrizá-la de modo a torná-la uma geodésica causal.*

Demonstração. Existe uma cobertura finita $\{U_1, \dots, U_k\}$ de $\gamma([a, b])$ por convexos e uma partição $P = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$ de $[a, b]$ tais que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Para cada i ,

$$\tau(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = L(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq \overrightarrow{|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)|} = \tau(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)).$$

$$\therefore L(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) = \overrightarrow{|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)|}.$$

Portanto $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ é reparametrização da geodésica radial de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$ em cada U_i . Isto mostra que γ pode ser reparametrizada como uma geodésica por partes. Usando essencialmente o mesmo argumento nas supostas quebras de γ , podemos mostrar que γ é na verdade uma geodésica sem quebras, isto é, suave. ■

4.3 Comprimento de arco Lorentziano

Nosso objetivo nesta seção é estender o comprimento de arco Lorentziano para curvas C^0 causais.

Fixe (M, g) espaço-tempo qualquer, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$.

Definição 4.3.1. Uma partição $P = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$ de $[a, b]$ é dita ser admissível para uma curva $\gamma \in \mathcal{C} = \{\alpha : [a, b] \rightarrow M : \alpha \text{ é curva } C^0, \text{ causal e futuro-dirigida}\}$ se $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ existir $U_i \subseteq M$ aberto convexo com $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$, e $\forall t, s \in [t_{i-1}, t_i]$ com $t < s$, tivermos $\gamma(t) <_{U_i} \gamma(s)$.

Denotaremos o conjunto das partições admissíveis de uma curva $\gamma \in \mathcal{C}$ por Π_γ . Note que se $P \in \Pi_\gamma$ e Q é uma partição de $[a, b]$ que refina P , isto é, $P \subseteq Q$, então $Q \in \Pi_\gamma$. Para cada $P \in \Pi_\gamma$, $P = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$, definimos

$$l_g(\gamma, P) := \sum_{i=1}^k \overrightarrow{|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)|},$$

onde $\overrightarrow{|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)|}$ denota a única geodésica radial de $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$, em algum convexo U_i contendo $\gamma([t_{i-1}, t_i])$. Esta é suave, causal, e $\overrightarrow{|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)|}$ denota o seu comprimento (bem-definido, calculado de acordo com a métrica g de M).

Proposição 4.3.2. Dada $\gamma \in \mathcal{C}$ e $P \in \Pi_\gamma$, se Q é um refinamento de P , então $l_g(\gamma, Q) \leq l_g(\gamma, P)$.

Demonstração. Seja $P = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$ e U_i , $i = 1, \dots, k$, abertos convexos com $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. É suficiente provar a afirmação para o caso em que $Q = \{c\} \cup P$ com, digamos, $t_{j-1} < c < t_j$, para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. O caso geral se prova a partir deste por indução finita. Temos $\gamma(t_{j-1}) <_{U_j} \gamma(c) <_{U_j} \gamma(t_j)$, e a geodésica radial $\overrightarrow{|\gamma(t_{j-1})\gamma(t_j)|}$ possui comprimento maior do que a geodésica quebrada $\overrightarrow{|\gamma(t_{j-1})\gamma(c)|} + \overrightarrow{|\gamma(c)\gamma(t_j)|}$, portanto

$$\overrightarrow{|\gamma(t_{j-1})\gamma(t_j)|} \leq \overrightarrow{|\gamma(t_{j-1})\gamma(c)|} + \overrightarrow{|\gamma(c)\gamma(t_j)|},$$

e o resultado segue. ■

Definição 4.3.3. O funcional de comprimento de arco Lorentziano é a função $L_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L_g(\gamma) := \inf_{P \in \Pi_\gamma} \{ l_g(\gamma, P) \}.$$

(Este ínfimo sempre existe, uma vez que $\forall \gamma \in \mathcal{C}$ e $\forall P \in \Pi_\gamma$, temos $l_g(\gamma, P) \geq 0$.)

Observação 4.3.4. Note que o compacto previamente fixado $[a, b]$ é arbitrário. Podemos eventualmente considerar outro intervalo $[c, d]$, e todas as definições e resultados continuam formalmente os mesmos. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma curva C^0 , causal e futuro-dirigida e $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ é um homeomorfismo crescente, qual a relação entre $L_g^{[c,d]}(\gamma \circ h)$ e $L_g^{[a,b]}(\gamma)$?

Dada uma partição $P = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$ de $[a, b]$, admissível para γ , $h^{-1}(P) = \{h^{-1}(a) \equiv c < \dots < h^{-1}(b) \equiv d\}$ é uma partição de $[c, d]$ admissível para $\gamma \circ h$, pois $\gamma \circ h([h^{-1}(t_{i-1}), h^{-1}(t_i)]) \equiv \gamma \circ h(h^{-1}([t_{i-1}, t_i])) \equiv \gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$, para cada $i = 1, \dots, k$, onde U_i é um aberto convexo, e $\forall s', t' \in [h^{-1}(t_{i-1}), h^{-1}(t_i)]$, com $s' < t'$, colocando $s := h(s')$ e $t := h(t')$, temos $s < t$, pois h é crescente, $s, t \in [t_{i-1}, t_i]$, logo $\gamma(s) <_{u_i} \gamma(t) \implies (\gamma \circ h)(h^{-1}(s)) <_{u_i} (\gamma \circ h)(h^{-1}(t)) \implies (\gamma \circ h)(s') <_{u_i} (\gamma \circ h)(t')$. Portanto,

$$\begin{aligned} L_g^{[c,d]}(\gamma \circ h) &\leq l_g^{[c,d]}(\gamma \circ h, h^{-1}(P)) = \sum_{i=1}^k |(\gamma \circ h)(h^{-1}(t_{i-1}))(\gamma \circ h)(h^{-1}(t_i))| = \\ &= \sum_{i=1}^k |\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)| \equiv l_g(\gamma, P) \implies L_g^{[c,d]}(\gamma \circ h) \leq L_g^{[a,b]}(\gamma). \end{aligned}$$

Trabalhando com h^{-1} , e trocando os papéis de $[c, d]$ e $[a, b]$, teremos também $L_g^{[a,b]}(\gamma) \leq L_g^{[c,d]}(\gamma \circ h)$, e portanto $L_g^{[a,b]}(\gamma) = L_g^{[c,d]}(\gamma \circ h)$. Neste sentido, dizemos que o funcional de comprimento de arco Lorentziano é independente de parametrização.

Agora, dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, lembramos que

$$\begin{aligned} \alpha \sim \beta &\Leftrightarrow \text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\beta), \alpha(a) = \beta(a) \text{ e } \alpha(b) = \beta(b) \\ &\Leftrightarrow \exists h : [a, b] \rightarrow [a, b] \text{ homeomorfismo crescente tal que } \alpha = \beta \circ h. \end{aligned}$$

A observação que acabamos de fazer mostra que, neste caso, $L_g(\alpha) = L_g(\beta)$. Portanto o funcional

$$\begin{aligned} L_g : \mathcal{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ [\gamma] &\mapsto L_g(\gamma) \end{aligned}$$

fica bem-definido. Quando conveniente, chamaremos este último também de funcional de comprimento de arco Lorentziano. Para cálculos práticos, porém, trabalharemos sempre com um representante fixo γ da classe $[\gamma] \in \mathcal{C}$.

Como anteriormente, denotaremos por $\tilde{\Omega}$ o conjunto das curvas suaves por partes, causais e futuro-dirigidas, definidas em $[a, b]$, e $\Omega = \{\gamma \in \mathcal{C} : \gamma \in \tilde{\Omega}\}$.

Teorema 4.3.5. *Se $\gamma \in \tilde{\Omega}$, então*

$$L_g(\gamma) = \int_a^b \sqrt{-g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt.$$

Demonstração. Seja $P = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$ qualquer partição de $[a, b]$ admissível para γ . Como geodésicas radiais causais são localmente maximais, se $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ para U_i aberto convexo, $i = 1, \dots, k$, temos

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{-g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{-g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \\ &\leq \sum_{i=1}^k \overrightarrow{|\gamma'(t_{i-1})\gamma'(t_i)|} \equiv l_g(\gamma, P). \end{aligned}$$

Assim, $L(\gamma) \leq L_g(\gamma)$. Agora, dado $\epsilon > 0$, mostraremos que existe uma partição $P \in \Pi_\gamma$ para a qual $l_g(\gamma, P) < L(\gamma) + \epsilon$. Isto implica que $L_g(\gamma) \leq L(\gamma) + \epsilon$. Como ϵ é arbitrário, teremos $L_g(\gamma) \leq L(\gamma)$ e portanto a igualdade $L_g(\gamma) = L(\gamma)$.

Primeiro, Assuma que γ é suave e que $\gamma([a, b]) \subseteq U$, onde U é um convexo tal que $\forall s, t \in [a, b]$, com $s < t$, temos $\gamma(t) <_U \gamma(s)$.

Afirmção. $\forall t_0 \in [a, b]$,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{|\gamma(t_0)\gamma(t)|}}{|t - t_0|} = |\gamma'(t_0)|.$$

De fato, seja $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas normal centrado em $\gamma(t_0)$. Dado $t \in [a, b]$, $t \neq t_0$, $\overrightarrow{|\gamma(t_0)\gamma(t)|} = \sqrt{-\eta_{jl} \xi^j(\gamma(t)) \xi^l(\gamma(t))}$. Defina

$$\begin{aligned} \bar{\xi} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \xi(\gamma(t)). \end{aligned}$$

$\bar{\xi}$ é suave, portanto

$$\bar{\xi}(t) = \overrightarrow{\bar{\xi}(t_0)} + \bar{\xi}'(t_0)(t - t_0) + R(t - t_0)(t - t_0),$$

onde

$$\lim_{t \rightarrow t_0} R(t - t_0) = 0.$$

Temos assim que, para $j = 1, \dots, n$,

$$\xi^j(\gamma(t)) = \overrightarrow{\xi^j(\gamma(t_0))} + (\xi^j \circ \gamma)'(t_0)(t - t_0) + R^j(t - t_0)(t - t_0).$$

Substituindo na expressão para $\overrightarrow{|\gamma(t_0)\gamma(t)|}$, ficamos com

$$\frac{\overrightarrow{|\gamma(t_0)\gamma(t)|}}{-\eta_{jl} (\xi^j \circ \gamma)'(t_0) R^l(t-t_0) (t-t_0)^2 - \eta_{jl} R^j(t-t_0) R^l(t-t_0)(t-t_0)^2} = \sqrt{-\eta_{jl} (\xi^j \circ \gamma)'(t_0) (\xi^l \circ \gamma)'(t_0)(t-t_0)^2 \dots}$$

Tomando o limite,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{|\gamma(t_0)\gamma(t)|}}{|t-t_0|} = \sqrt{-g_{jl}(\gamma(t_0)) (\xi^j \circ \gamma)'(t_0) (\xi^l \circ \gamma)'(t_0)} \equiv |\gamma'(t_0)|,$$

provando a afirmação feita anteriormente.

Agora, dado $\epsilon > 0$, para cada $t \in [a, b]$, existe $\delta_t > 0$ tal que, dado qualquer $s \in (t - \delta_t, t + \delta_t) \cap [a, b]$, com $s \neq t$,

$$\left| \frac{\overrightarrow{|\gamma(t)\gamma(s)|}}{|s-t|} - |\gamma'(t)| \right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Note que $\{(t - \delta_t, t + \delta_t) : t \in [a, b]\}$ é uma cobertura aberta do compacto $[a, b]$. Podemos extrair uma subcobertura finita $\{(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0), \dots, (t_k - \delta_k, t_k + \delta_k)\}$, com $t_0 = a, t_k = b$, e $t_0 < t_1 < \dots < t_k$.

Sejam $s_1 < \dots < s_k$ em $[a, b]$ satisfazendo $t_{i-1} < s_i < t_i$, para $i \in \{1, \dots, k\}$, e $[t_{i-1}, s_i] \subseteq (t_{i-1} - \delta_{i-1}, t_{i-1} + \delta_{i-1})$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Logo $P_0 := \{t_0, s_1, t_1, \dots, s_k, t_k\}$ é uma partição de $[a, b]$, aceitável para γ , e

$$\begin{aligned} l_g(\gamma, P_0) &= \overrightarrow{|\gamma(t_0)\gamma(s_1)|} + \overrightarrow{|\gamma(s_1)\gamma(t_1)|} + \dots + \overrightarrow{|\gamma(s_k)\gamma(t_k)|} = \\ &= \sum_{j=1}^k \overrightarrow{|\gamma(t_{j-1})\gamma(s_j)|} + \sum_{j=1}^k \overrightarrow{|\gamma(s_j)\gamma(t_j)|} < \\ &< \sum_{j=1}^k |\gamma'(t_{j-1})|(s_j - t_{j-1}) + \sum_{j=1}^k |\gamma'(t_j)|(t_j - s_j) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

É possível escolher $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^l |\gamma'(u_j^*)|(u_j - u_{j-1}) < L(\gamma) + \frac{\epsilon}{2},$$

sempre que $|P| < \delta$, onde $P = \{a = u_0 < \dots < u_l = b\}$ é uma partição de $[a, b]$ e $u_j^* \in [u_{j-1}, u_j]$, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$. Temos

$$l_g(\gamma, P_0) < \sum_{j=1}^{k-1} |\gamma'(t_{j-1})|(s_j - s_{j-1}) + |\gamma'(a)|(s_1 - a) + |\gamma'(b)|(b - s_k) + \frac{\epsilon}{2},$$

e sem perda de generalidade podemos assumir $|P_0| < \delta$, de modo que para a partição $P_1 := \{a, s_1, \dots, s_k, b\}$, $|P_1| < \delta$, e $l_g(\gamma, P_1) < L(\gamma) + \epsilon$, como desejado.

O caso geral pode ser reduzido a este, bastando para isto construir uma cobertura finita de $\gamma([a, b])$ por abertos convexos, e aplicando o resultado à restrição de γ para cada aberto destes. ■

Lema 4.3.6. *Seja (X, d) um espaço métrico, e $x_0 \in X$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua superiormente [inferiormente] em x_0 se, e somente se, para qualquer sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X com $x_n \rightarrow x_0$, tivermos $f(x_0) \geq \limsup f(x_n)$ [$f(x_0) \leq \liminf f(x_n)$].*

Demonstração. Provaremos o lema para funções semicontínuas superiormente, sendo o caso das funções semicontínuas inferiormente análogo.

Suponha f semicontínua superiormente. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em (X, d) com $x_n \rightarrow x_0$. Se tivéssemos $\limsup f(x_n) > f(x_0)$, então existiria $\epsilon_0 > 0$ satisfazendo $f(x_0) + \epsilon_0 < \limsup f(x_n)$. Assim, para alguma subsequência $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f(x_{n_j}) > f(x_0) + \epsilon_0, \forall j \in \mathbb{N}$. Porém, para alguma vizinhança U de x_0 , vale $f(x) < f(x_0) + \epsilon_0, \forall x \in U$, pela semicontinuidade. Como $x_{n_j} \rightarrow x_0$, eventualmente $x_{n_j} \in U \Rightarrow f(x_{n_j}) < f(x_0) + \epsilon_0$, uma contradição. Logo $\limsup f(x_n) \leq f(x_0)$.

Suponha, por outro lado, $f(x_0) \geq \limsup f(x_n)$, para toda sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X com $x_n \rightarrow x_0$. Ora, se f não fosse semicontínua superiormente em x_0 , então existiriam, por definição, $\epsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $y_n \rightarrow x_0$ para a qual $f(y_n) \geq f(x_0) + \epsilon_0 \Rightarrow \limsup f(x_n) \geq f(x_0) + \epsilon_0$, em contradição com a hipótese. ■

Teorema 4.3.7. *Se (M, g) é fortemente causal, então $L_g : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínuo superiormente.*

Demonstração. Seja $\gamma \in \mathcal{C}$. Se L_g não é semicontínuo inferiormente em $[\gamma]$, então para algum $\epsilon_0 > 0$ e alguma sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{C} , com $[\gamma_n] \rightarrow [\gamma]$, temos $L_g(\gamma_n) \geq L_g(\gamma) + \epsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Escolha $P \in \Pi_\gamma$ para a qual $L_g(\gamma) \leq l_g(\gamma, P) < L_g(\gamma) + \frac{\epsilon_0}{2}$. Escreva $P = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$, e sejam U_1, \dots, U_k abertos convexos e V_1, \dots, V_k abertos causalmente convexos tais que $V_i \subseteq U_i, \gamma([t_{i-1}, t_i]) \subseteq V_i$, e $\forall t, s \in [t_{i-1}, t_i]$, com $t < s$, temos $\gamma(t) <_{U_i} \gamma(s)$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Como cada aplicação

$$\Delta_i : U_i \times U_i \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \mapsto |\vec{p}\vec{q}|$$

é contínua, existem abertos W_0, \dots, W_k tais que $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \gamma(a) \in W_0 \subseteq V_1, \gamma(t_i) \in W_i \subseteq V_{i-1} \cap V_i$, e $\forall p \in W_{i-1}, \forall q \in W_i$, temos

$$|\vec{p}\vec{q}| < \overrightarrow{|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)|} + \frac{\epsilon_0}{2k}.$$

Como $[\gamma_n] \xrightarrow{\mathcal{C}_0} [\gamma]$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Im(\gamma_n) \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_k, Im(\gamma_n) \cap W_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \gamma_n(a) \in W_0$ e $\gamma_n(b) \in W_k$, sempre que $n \geq n_0$. Deste modo, podemos inferir que

$$L_g(\gamma_{n_0}|_{[t_{i-1}, t_i]}) \leq \overrightarrow{|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)|} < \overrightarrow{|\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)|} + \frac{\epsilon_0}{2k}.$$

Somando em i , obtemos

$$L_g(\gamma_{n_0}) < l_g(\gamma, P) + \frac{\epsilon_0}{2} < L_g(\gamma) + \epsilon_0,$$

uma contradição. ■

4.4 Geodésicas Maximais

Fixamos nesta seção (M, g) um espaço-tempo fortemente causal, e h uma métrica Riemanniana completa em M .

Lema 4.4.1. *Se X é um espaço topológico Hausdorff e compacto, e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-contínua inferiormente [superiormente], então f atinge um mínimo [máximo] em X . Além disso, se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em X tal que $x_n \rightarrow x$ e $f(x_n) \rightarrow y \in \mathbb{R}$, então $y \geq f(x)$ [$y \leq f(x)$].*

Demonstração. Fazemos o caso em que f é semicontínua inferiormente, sendo o outro análogo.

Se f não é limitada inferiormente, podemos escolher uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $f(x_n) < -n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir $x_n \rightarrow x_0$ pela compacidade. A semicontinuidade inferior de f garante que existe U vizinhança de x_0 tal que, $\forall y \in U$, $f(y) > f(x_0) - 1$. Mas para n suficientemente grande $f(x_n) < f(x_0) - 1$ e $x_n \in U$, uma contradição. Existe portanto $a := \inf\{f(x) : x \in X\} > -\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $a_n \in X$ com $a + \frac{1}{n} > f(a_n) \leq a$. Podemos novamente assumir $a_n \rightarrow a_0 \in X$. Suponha $f(a_0) > a$ e escolha $\delta > 0$ com $f(a_0) > a + \delta$, $\epsilon = f(a_0) - a - \delta > 0$. Existe U vizinhança de a_0 tal que, $\forall x \in U$, $f(x) > f(a_0) - \epsilon = a + \delta$. Eventualmente, $a_n \in U$ e $\frac{1}{n} < \delta$, logo $f(a_n) > a + \delta$ e $a + \delta > a + \frac{1}{n} > f(a_n)$, uma contradição. Assim $f(a_0) = a$, e o mínimo é atingido. Para a segunda afirmação, dado $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança U de x tal que $z \in U \Rightarrow f(z) > f(x) - \epsilon$. Mas para n suficientemente grande $x_n \in U$. $\therefore f(x_n) > f(x) - \epsilon$, e aí $y \leq f(x) - \epsilon$. Como ϵ era arbitrário, $y \leq f(x)$. ■

O primeiro teorema desta seção lida com curvas contidas em um compacto.

Teorema 4.4.2. *Seja $K \subseteq M$ compacto, $p, q \in K$. Considere uma sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas C^0 causais, $\gamma_n : [a, b] \rightarrow M$, com $\gamma_n([a, b]) \subseteq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\gamma_n(a) \rightarrow p$, $\gamma_n(b) \rightarrow q$. Então, existe uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ que é C^0 , causal e futuro-dirigida tal que*

(i) $Im(\gamma) \subseteq K$, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$;

(ii) γ é curva limite de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;

(iii) Para alguma subsequência $\{\gamma_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $L_g(\gamma) \geq \limsup(L_g(\gamma_{n_j}))$.

Demonstração. Temos $[\gamma_n] \in \mathcal{C}_K(K, K)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e como este último é compacto em \mathcal{C} , existe $\gamma \in \mathcal{C}_K(K, K)$ e uma subsequência $\{\gamma_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $[\gamma_{n_j}] \rightarrow [\gamma]$. Em particular, $\gamma_{n_j}(a) \rightarrow \gamma(a)$ e $\gamma_{n_j}(b) \rightarrow \gamma(b)$, logo $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Isso estabelece (i). Como $\gamma_n(a) \rightarrow \gamma(a)$, $\gamma_n(b) \rightarrow \gamma(b)$ e (M, g) é fortemente causal, o teorema 4.1.6 garante que γ é curva limite de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, provando (ii). Finalmente, pela semicontinuidade superior de L_g , temos $L_g(\gamma) \geq \limsup (L_g(\gamma_{n_j}))$, conforme em (iii). ■

Corolário 4.4.3. *Sejam $p, q \in M$, $p < q$, e $K \subseteq M$ compacto. Se $J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq K$, então existe geodésica causal e maximal, $\gamma[a, b] \rightarrow M$ com $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$. Em particular, $\tau(p, q) < +\infty$.*

Demonstração. Seja $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de curvas C^0 , causais e futuro-dirigidas $\gamma_n : [a, b] \rightarrow M$, $\gamma_n(a) = p$, $\gamma_n(b) = q$, $\forall n \in \mathbb{N}$, com $L_g(\gamma_n) \rightarrow \tau(p, q)$. Como $Im(\gamma_n) \subseteq J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq K$, e este último é compacto, o teorema 4.4.2 garante a existência de $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow M$ curva C^0 , causal e futuro-dirigida, com $\bar{\gamma}(a) = p$, $\bar{\gamma}(b) = q$, que é curva limite de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Além disso, para alguma subsequência $\{\gamma_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, temos

$$L_g(\bar{\gamma}) \geq \limsup L_g(\gamma_{n_j}) \equiv \tau(p, q).$$

Pela definição de L_g , para alguma geodésica quebrada $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ com $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$,

$$\tau(p, q) \leq L_g(\bar{\gamma}) \leq L_g(\gamma) \equiv L(\gamma) \leq \tau(p, q).$$

Portanto $L(\gamma) = \tau(p, q)$ e γ é maximal. Em particular, γ pode ser escolhida como geodésica (suave), pelo Teorema 4.2.10, e $\tau(p, q) < +\infty$. ■

Note que a condição de $J^+(p) \cap J^-(q)$ ser compacto é automaticamente satisfeita para $p < q$ em um espaço-tempo globalmente hiperbólico, e nesse caso sempre existe geodésica *maximal* entre $p, q \in M$ com $p < q$.

Corolário 4.4.4. *Se (M, g) é globalmente hiperbólico, então $\tau : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração. Vimos que no caso atual, $\tau(p, q) < +\infty$, $\forall p, q \in M$. Se τ não é semicontínua superiormente, então existem sequências $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $p_n \rightarrow p$, $q_n \rightarrow q$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que $\tau(p_n, q_n) \geq \tau(p, q) + \epsilon_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, $0 < \tau(p_n, q_n) < +\infty$, e $\exists \alpha_n : [a, b] \rightarrow M$ curva causal, futuro-dirigida com $\alpha_n(a) = p_n$, $\alpha_n(b) = q_n$ e $L_g(\alpha_n) > \tau(p_n, q_n) - \frac{\epsilon_0}{2} \geq \tau(p, q) + \frac{\epsilon_0}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $p_- \in I^-(p)$ e $q_+ \in I^+(q)$. Como $p, q \in I^+(p_-) \cap I^-(q_+)$, eventualmente teremos $p_n, q_n \in I^+(p_-) \cap I^-(q_+)$, o que implicará em $Im(\alpha_n) \subseteq J^+(p_-) \cap J^-(q_+)$. Como este último conjunto é compacto, pelo teorema 4.4.2 existe $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ curva C^0 , causal, curva limite de $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$, e uma subsequência $\{\alpha_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ para a qual

$$\tau(p, q) \geq L_g(\alpha) \geq \limsup L_g(\alpha_{n_j}) \geq \tau(p, q) + \frac{\epsilon_0}{2},$$

que evidentemente é um absurdo. ■

Capítulo 5

Hiperbolicidade Global e Domínios de Dependência

5.1 Conjuntos Acronais

Daqui em diante, (M, g) denotará um espaço-tempo qualquer.

Definição 5.1.1. Um subconjunto $A \subseteq M$ é dito acronal se, para quaisquer $p, q \in A$, temos $q \notin I^+(p)$.

Por exemplo, os conjuntos $A_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}_1^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ em R_1^3 e $A_2 = \{(x, x) \in \mathbb{R}_1^2 : x \in \mathbb{R}\}$ em R_1^2 são acronais, mas qualquer aberto U de um espaço-tempo arbitrário não é acronal: basta tomar uma curva (geodésica, por exemplo) $\sigma : [0, b) \rightarrow M$ tipo-tempo com $\sigma(0) \in U$. Por continuidade, existirá $\epsilon > 0$ tal que $\sigma(\epsilon) \in U$, e assim $\sigma(\epsilon) \in I^+(\sigma(0))$, violando a definição.

Qualquer subconjunto de um conjunto acronal é também acronal. Pela proposição 3.2.3, se A é acronal, então \overline{A} também o é.

Definição 5.1.2. A borda de um conjunto acronal $A \subseteq M$ é o conjunto de todos os pontos $p \in \overline{A}$ com a propriedade de que para cada vizinhança U de p , existe uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida em U que vai de $I^-(p, U)$ até $I^+(p, U)$ sem intersectar A .

Denotaremos, daqui por diante, a borda de um subconjunto acronal $A \subseteq M$ por $borda(A)$ ¹.

No caso dos exemplos acima, temos $borda(A_1) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ e $borda(A_2) = \emptyset$.

Vamos assumir sem prova a validade do seguinte resultado, conhecido como Teorema de Brower sobre Invariância de Domínio (ver referência [Spivak]).

Lema 5.1.3. (Invariância de Domínio) Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Se $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e injetiva, então F é um homeomorfismo de U sobre o aberto $F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Proposição 5.1.4. Sejam N, P variedades topológicas n -dimensionais. Se $F : N \rightarrow P$ é injetiva e contínua, então F é um homeomorfismo de N sobre um aberto $F(N) \subseteq P$.

¹Esta não deve ser confundida com a noção de *bordo*, vista no estudo de variedades.

Demonstração. Seja $G : F(N) \rightarrow N$ a inversa de $F : N \rightarrow F(N)$. Tome $p \in N$ e $(U, \phi), (V, \psi)$ cartas locais em p e $F(p)$, respectivamente, tais que $F(U) \subseteq V$. Como a função $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva e contínua, pelo lema 5.1.3 ela é um homeomorfismo sobre o aberto $\psi \circ F \circ \phi^{-1}(\phi(U)) = \psi(F(U))$.

Temos também que $F(U) = \psi^{-1}(\psi(F(U)))$ é aberto, já que ψ é homeomorfismo, e $F|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1}) \circ \phi$ é um homeomorfismo sobre $F(U)$, pois ϕ é homeomorfismo também. Em particular, $G|_{F(U)} = (F|_U)^{-1}$, logo é contínua. Portanto G é ela própria contínua. ■

Definição 5.1.5. Um subconjunto $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície topológica se $\forall p \in S$, $\exists U \subseteq M$ aberto contendo p e um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap \Pi$, onde $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$ é algum hiperplano.

Os cones de luz $J^+(p) \setminus I^+(p)$, com $p \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, são exemplos de hipersuperfícies topológicas. Para verificar isto, provaremos antes o seguinte Lema.

Lema 5.1.6. Em \mathbb{R}_1^{n+1} , a métrica g é dada por $ds^2 = -dx_0^2 + \sum_{i=1}^n dx_i^2$. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ é uma curva tipo-tempo, $\gamma(t) = (x_0(t), \dots, x_n(t))$, $\forall t \in [a, b]$, então

$$-(x_0(b) - x_0(a))^2 + \sum_{i=1}^n (x_i(b) - x_i(a))^2 < 0, \text{ e } x_0(b) > x_0(a).$$

Demonstração. Usaremos o isomorfismo canônico entre \mathbb{R}_1^{n+1} e seus espaços tangentes para identificar g com a forma quadrática Lorentziana (ver Apêndice A). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = g(\gamma'(t), \gamma(b) - \gamma(a))$, $\forall t \in [a, b]$. Temos $f'(t) = g(\gamma''(t), \gamma(b) - \gamma(a))$. Seja $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$, e defina também $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(t) = g(\gamma'(t), e_0)$. Considere $h'(t) = g(\gamma''(t), e_0)$. Como $g(\gamma'(t), e_0)$ não pode ser zero porque $\gamma'(t)$ é tipo-tempo, ou $g(\gamma'(t), e_0) < 0$, $\forall t \in [a, b]$, ou $g(\gamma'(t), e_0) > 0$, $\forall t \in [a, b]$. Suponha que vale o primeiro caso. O outro caso é análogo. Então $h'(t) < 0$, $\forall t \in [a, b]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (a, b)$ tal que $h(b) - h(a) = h'(c)(b - a) < 0$. Logo $g(\gamma'(b), e_0) < 0$, ou seja, $-(x_0(b) - x_0(a)) < 0$, donde $x_0(b) > x_0(a)$. Além disso, $f'(t) = g(\gamma''(t), \gamma(b) - \gamma(a)) < 0$. Aplicando mais uma vez o Teorema do Valor Médio, agora para f , concluímos que $f(b) - f(a) < 0 \Rightarrow g(\gamma'(b), \gamma(b) - \gamma(a)) < 0$. ■

Voltando ao nosso exemplo, dado $p = (p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, é consequência imediata do fato de \mathbb{R}_1^{n+1} ser ele próprio uma vizinhança convexa de p que $J^+(p) = \overline{I^+(p)}$ (veja o Lema 3.2.2). Assim, o Lema 5.1.6 nos diz que

$$J^+(p) \setminus I^+(p) = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^n : (p_0 - x_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2, x_0 \geq p_0 \right\}.$$

Essa caracterização deixa claro que, dado um ponto $x = (x_0, \dots, x_n) \in J^+(p) \setminus I^+(p)$, sua coordenada x_0 pode ser determinada em função das outras coordenadas, pela expressão

$$x_0 = h(x_1, \dots, x_n) = p_0 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - p_i)^2}.$$

Assim, a função $\phi : J^+(p) \setminus I^+(p) \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1} \cap \Pi$ dada por $\phi(x_0, \dots, x_n) = (0, x_1, \dots, x_n)$, onde Π é o hiperplano $x_0 = 0$ em \mathbb{R}_1^{n+1} , possui inversa $\phi^{-1} : \mathbb{R}_1^{n+1} \cap \Pi \rightarrow J^+(p) \setminus I^+(p)$ dada por $\phi^{-1}(0, x_1, \dots, x_n) = (h(x_1, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n)$. Como ambas são contínuas, é fácil ver que ϕ é o homeomorfismo requerido na definição de hipersuperfície topológica.

Teorema 5.1.7. *Um subconjunto acronal $A \subseteq M$ é uma hipersuperfície topológica se e somente se $A \cap \text{borda}(A) = \emptyset$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $p \in A$, U vizinhança aberta de p com um homeomorfismo $\phi : U \rightarrow \phi(U)$, $\phi(U)$ aberto de \mathbb{R}^n tal que $\phi(U \cap A) = \phi(U) \cap \Pi$, $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$ hiperplano. Observamos que, se $V \subseteq U$ é aberto, temos, já que ϕ é injetiva,

$$\phi(V \cap A) = \phi(V \cap U \cap A) = \phi(V) \cap \phi(U \cap A) = \phi(V) \cap \phi(U) \cap \Pi = \phi(V) \cap \Pi.$$

Em particular podemos assumir que U é conexo, e que $\phi(U)$ é uma bola em \mathbb{R}^n , sem perda de generalidade. Agora, os conjuntos $I^\pm(p, U)$ são conexos, e como A é acronal, $I^+(p, U) \cap I^-(p, U) = \emptyset$, e $I^\pm(p, U) \cap A = \emptyset \Rightarrow I^\pm(p, U) \subseteq U \setminus A$. Mas

$$\phi(U) = \phi((U \setminus A) \cup (A \cap U)) = \phi(U \setminus A) \cup \phi(A \cap U).$$

$$\therefore \phi(U \setminus A) = \phi(U) \setminus \phi(A \cap U) = \phi(U) \setminus (\phi(U) \cap \Pi) = \phi(U) \setminus \Pi,$$

e este último conjunto claramente tem duas componentes conexas, digamos, \tilde{U}_\pm . Portanto $U \setminus A$ tem duas componentes conexas disjuntas $U_\pm = \phi^{-1}(\tilde{U}_\pm)$.

Suponha que $I^\pm(p, U) \subseteq U_+$, e tome $p_\pm \in I^\pm(p, U)$. Como $p_- \ll_U p \ll_U p_+$, podemos escolher $V \subseteq U$ vizinhança de p tal que $\phi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ é uma bola aberta e $p_- \ll_U p' \ll_U p_+$, $\forall p' \in V$. Agora, $V \cap U_\pm \neq \emptyset$, e podemos tomar $q \in U_- \cap V$. Sejam $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$, $\beta : [1, 2] \rightarrow U$ curvas tipo-tempo futuro-dirigidas com $\alpha(0) = p_-$, $\alpha(1) = \beta(1) = q$, $\beta(2) = p_+$. Ambas as curvas devem intersectar $A \cap U$. Logo $\alpha + \beta : [0, 2] \rightarrow U$ intersecta $A \cap U$ duas vezes, em contradição com a acronalidade de A . Por razão inteiramente análoga, não podemos ter $I^\pm(p, U) \subseteq U_-$. Logo $I^+(p, U)$ e $I^-(p, U)$ estão em componentes conexas distintas de $U \setminus A$. Portanto, em particular, qualquer curva tipo-tempo de $I^-(p, U)$ para $I^+(p, U)$ deve passar por A , e assim $p \notin \text{borda}(A)$. Concluimos que $A \cap \text{borda}(A) = \emptyset$.

(\Leftarrow) Fixe $p \in A$. Como $p \notin \text{borda}(A)$, existe $U \subseteq M$ vizinhança aberta de p tal que qualquer curva tipo-tempo futuro-dirigida em U de $I^-(p, U)$ para $I^+(p, U)$ intersecta A . Seja $X : M \rightarrow TM$ qualquer campo vetorial suave, tipo-tempo e futuro-dirigido em M . Tome $\phi = (x^1, \dots, x^n) : V \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ sistema de coordenadas em p tal que $V \subseteq U$ e $X|_V = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Escreva $\phi(p) = (t_0, x_0)$, onde $t_0 \equiv x^1(p) \in \mathbb{R}$ e $x_0 = (x^2(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Sejam $\epsilon > 0$ e $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ tais que $(t_0, x_0) \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times \mathcal{N} \subseteq \phi(V)$, e escolha $a, b \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ com $t_0 - \epsilon < a < t_0 < b < t_0 + \epsilon$. Dado $x \in \mathcal{N}$, considere a curva $\alpha_x : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \rightarrow V$ dada por $\alpha_x(t) := \phi^{-1}(t, x)$, $\forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Temos $(\phi \circ \alpha_x)'(t) = (1, 0)$, ou seja, $\alpha_x'(t) = \frac{\partial}{\partial x^1}(\alpha_x(t)) \equiv X(\alpha_x(t))$, $\forall t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, isto é, α_x é uma curva integral de X , e portanto uma curva tipo-tempo futuro-dirigida. Em particular, α_{x_0} é uma

tal curva, e $\alpha_{x_0}(t_0) = \phi^{-1}(t_0, x_0) \equiv p$, logo $\alpha_{x_0}(b) = \phi^{-1}(b, x_0) \in I^+(p, V) \subseteq I^+(p, U)$ e $\alpha_{x_0}(a) = \phi^{-1}(a, x_0) \in I^-(p, V) \subseteq I^-(p, U)$, e como as aplicações

$$\begin{aligned} \phi_a : \mathcal{N} &\rightarrow M & e & & \phi_b : \mathcal{N} &\rightarrow M \\ x &\mapsto \phi^{-1}(a, x) & & & x &\mapsto \phi^{-1}(b, x) \end{aligned}$$

são obviamente contínuas e podemos, tomando \mathcal{N} menor se necessário, assumir que $\phi^{-1}(a, x) \in I^-(p, U)$ e $\phi^{-1}(b, x) \in I^+(p, U)$, $\forall x \in \mathcal{N}$.

Definimos agora $h : \mathcal{N} \rightarrow (a, b)$ da seguinte forma. Como $\forall x \in \mathcal{N}$, $\alpha_x|_{[a,b]}$ é uma curva tipo-tempo futuro-dirigida começando em $I^-(p, U)$ e terminando em $I^+(p, U)$, ela intersecta A pela escolha de U , e o faz exatamente uma vez já que A é acronal, num ponto $q_x \in A$, digamos. Defina $h(x) := x^1(q_x)$. Temos assim $q_x \equiv \phi^{-1}(h(x), x) \equiv \alpha_x(h(x))$, e $a < h(x) < b$. Afirmamos que h é contínua. De fato, seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathcal{N} com $x_n \rightarrow x_0 \in \mathcal{N}$, e suponha por absurdo que $\{h(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ não converge para $h(x_0)$. Então, como $[a, b]$ é compacto, podemos encontrar uma subsequência $\{x_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $h(x_{n_m}) \rightarrow s_0 \in [a, b]$, $s_0 \neq h(x_0)$. Mas como ϕ^{-1} é contínua, $\phi^{-1}(h(x_{n_m}), x_{n_m}) \rightarrow \phi^{-1}(s_0, x_0)$ e por construção $\phi^{-1}(h(x_{n_m}), x_{n_m}) \in A$, para todo m , logo $\phi^{-1}(s_0, x_0) \in \bar{A}$. Mas $\phi^{-1}(h(x_0), x_0) \in A$. Portanto, a curva $\alpha_{x_0}|_{[a,b]}$ passa por \bar{A} em s_0 e $h(x_0)$, contrariando a acronalidade de \bar{A} . Provamos assim que h deve ser contínua.

Agora, considere a função $F : (a, b) \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(t, x) = (t - h(x), x)$. F é contínua e injetiva, porque $F(t, x) = F(t', x') \Rightarrow x = x' \Rightarrow t = t'$, ou seja, $(t, x) = (t', x')$. Pelo Lema 5.1.3, F é um homeomorfismo sobre o aberto $F((a, b) \times \mathcal{N})$. Além disso, se $q \in A \cap \phi^{-1}((a, b) \times \mathcal{N})$, escrevemos $\phi(q) = (t, x) \in (a, b) \times \mathcal{N}$ e $F(\phi(q)) = (t - h(x), x)$. Como $\phi^{-1}(h(x), x) \in A$ e também $\phi^{-1}(t, x) \in A$, temos $t \equiv h(x)$, e $F(\phi(q)) = (0, x) \in (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap F((a, b) \times \mathcal{N})$. Reciprocamente, se $(0, x) \in F((a, b) \times \mathcal{N})$, $(0, x) = F(t, x') = (t - h(x'), x')$, de modo que $x' = x$ e $t = h(x)$. Portanto $\phi^{-1}(h(x), x) \in A \cap \phi^{-1}((a, b) \times \mathcal{N})$ e $F \circ \phi(\phi^{-1}(h(x), x)) \equiv (0, x)$. Se definirmos $U_0 := \phi^{-1}((a, b) \times \mathcal{N})$, $\Pi := \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ e $\Phi := F \circ \phi|_{U_0}$, então U_0 é uma vizinhança de p e Φ é um homeomorfismo sobre um aberto de \mathbb{R}^n , de tal forma que $\Phi(U_0 \cap A) = \Phi(U_0) \cap \Pi$, e A é portanto uma hipersuperfície topológica. ■

Corolário 5.1.8. *Um subconjunto acronal $A \subseteq M$ é uma hipersuperfície topológica fechada se e somente se $\text{borda}(A) = \emptyset$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se A é uma hipersuperfície topológica fechada, $A = \bar{A}$ e $\text{borda}(A) \cap A = \emptyset$. Mas por definição $\text{borda}(A) \subseteq \bar{A} \equiv A \Rightarrow \text{borda}(A) = \emptyset$.

(\Leftarrow) Como $\text{borda}(A) = \emptyset$, em particular $A \cap \text{borda}(A) = \emptyset$, logo A é hipersuperfície topológica. Se $p \in \bar{A} \setminus A$, seja $U \subseteq M$ qualquer vizinhança de p , e $\alpha : [-1, 1] \rightarrow U$ qualquer curva tipo-tempo, futuro-dirigida com $\alpha(0) = p$. Então $\alpha(-1) \in I^-(p, U)$ e $\alpha(1) \in I^+(p, U)$, mas α não pode intersectar A , pois isto violaria a acronalidade de \bar{A} . Logo $p \in \text{borda}(A)$. Portanto $\bar{A} \setminus A \subseteq \text{borda}(A) = \emptyset \Rightarrow A = \bar{A}$. ■

Definição 5.1.9. Um subconjunto $S \subseteq M$ é um conjunto futuro [passado] se $I^+(S) \subseteq S$ [$I^-(S) \subseteq S$].

Se $S \subseteq M$ é um conjunto qualquer, $I^+(S)$ ou $I^-(S)$ são ambos conjuntos futuros.

Observação 5.1.10. Conjuntos passados e futuros têm claramente propriedades análogas, e nós vamos assumir daqui por diante que cada propriedade provada para conjuntos futuros tem sua contraparte para conjuntos passados, pela dualidade temporal.

Proposição 5.1.11. Seja $F \subseteq M$ um conjunto futuro.

(i) $M \setminus F$ é um conjunto passado.

(ii) $\bar{F} = \overline{I^+(F)}$ e $\text{int}(F) = I^+(F)$. Em particular, $\partial F = \partial I^+(F)$ e F é aberto se e somente se $I^+(F) = F$.

Demonstração. (i) Seja $p \in I^-(M \setminus F)$. Então, para algum $q \in M \setminus F$, $q \in I^+(p)$. Assim, se tivéssemos $p \in F$, teríamos também $q \in I^+(F) \subseteq F$, uma contradição. Logo $p \in I^-(M \setminus F) \Rightarrow p \in M \setminus F$, e $I^-(M \setminus F) \subseteq M \setminus F$.

(ii) Claramente $\overline{I^+(F)} \subseteq \bar{F}$, e $I^+(F) \subseteq \text{int}(F)$. Seja $q \in \bar{F}$ e U vizinhança aberta de q . Tome $p \in U \cap F$ e $p_+ \in I^+(p, U)$. Então $p_+ \in I^+(F)$ e $U \cap I^+(F) \neq \emptyset$. Logo $q \in \overline{I^+(F)}$ e $\bar{F} \subseteq \overline{I^+(F)}$. Se $q \in \text{int}(F)$, podemos escolher $U \subseteq F$, e dado $p \in U$, tome $p_- \in I^-(p, U)$. Então $p_- \in F$, e $p \in I^+(F)$. Logo $\text{int}(F) \subseteq I^+(F)$ e $I^+(F) = \text{int}(F)$. Dessa forma

$$p \in \partial F \Leftrightarrow p \in \bar{F} \setminus \text{int}(F) \Leftrightarrow p \in \overline{I^+(F)} \setminus I^+(F) \Leftrightarrow p \in \partial I^+(F). \blacksquare$$

Estudaremos agora a fronteira de conjuntos futuros (e conseqüentemente de conjuntos passados). Pela Proposição 5.1.11 (ii), isto é o mesmo que considerar conjuntos da forma $\partial I^+(S)$, para algum $S \subseteq M$. Note que, se F é um conjunto futuro, como $I^+(F) = I^+(\bar{F})$ e $\partial F = \partial I^+(\bar{F})$, podemos sempre assumir S fechado.

Teorema 5.1.12. Seja $S \subseteq M$.

(i) $\partial I^+(S)$ é uma superfície topológica fechada e acronal.

(ii) Se $p \in \partial I^+(S) \setminus S$ e S é fechado, então existe uma geodésica $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ tipo-luz, passado-dirigida, com $\gamma(0) = p$ e contida em $\partial I^+(S)$, que é passado-inextensível ou possui um ponto limite passado em S .

Demonstração. (i) Sejam $p, q \in \partial I^+(S)$. Se $p \ll q$, então para alguma vizinhança U de p , $p' \ll q$, $\forall p' \in U$. Mas $U \cap I^+(S) = \emptyset$, então para algum $p' \in I^+(S)$, $p' \ll q \Rightarrow q \in I^+(S) \cap \partial I^+(S)$, o que é impossível já que $I^+(S)$ é aberto. Logo $q \notin I^+(p)$ e $\partial I^+(S)$ é acronal. Agora, em vista do Corolário 5.1.8, precisamos apenas mostrar que $\text{borda}(\partial I^+(S)) = \emptyset$. Sejam $p \in \partial I^+(S)$, $p_{\pm} \in I^{\pm}(p)$, e α qualquer curva tipo-tempo futuro-dirigida de p_- até p_+ . Existe U vizinhança de p tal que $p_- \ll p' \ll p_+$, $\forall p' \in U$. Mas $U \cap I^+(S) \neq \emptyset$, e $U \cap (M \setminus I^+(S)) \neq \emptyset$, já que $p \in \partial I^+(S)$, logo podemos escolher $p_1 \in U \cap I^+(S)$ e $p_2 \in U \cap (M \setminus I^+(S))$. Como $p_1 \in I^+(S)$ e $p_+ \in I^+(p_1)$,

então $p_+ \in I^+(S)$. Como $I^+(S)$ é um conjunto futuro, pela Proposição 5.1.11 item (i), $M \setminus I^+(S)$ é um conjunto passado. Logo, como $p_- \in I^-(p_2)$ e $p_2 \in M \setminus I^+(S)$, temos $p_- \in I^-(M \setminus I^+(S)) \subseteq M \setminus I^+(S)$. Por continuidade, α deve intersectar $\partial I^+(S)$. Assim $p \notin \text{borda}(\partial I^+(S))$, e consequentemente $\partial I^+(S) \cap \text{borda}(\partial I^+(S)) = \emptyset$. Uma vez que $\text{borda}(\partial I^+(S)) \subseteq \overline{\partial I^+(S)} \equiv \partial I^+(S)$, $\text{borda}(\partial I^+(S)) = \emptyset$.

(ii) Seja $p \in \partial I^+(S) \setminus S$. Tome uma sequência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $I^+(S)$ com $p_n \rightarrow p$. Fixe uma métrica Riemanniana completa arbitrária h em M , e seja $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de curvas tipo-tempo passado-dirigidas tais que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow M$, com $\gamma_n(0) = p_n$ e $\gamma_n(1) = q_n \in S$. Podemos estender cada γ_n para o passado e reparametrizar de maneira que $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de curvas tipo-tempo, passado-dirigidas, passado-inextensíveis $\tilde{\gamma}_n : [0, +\infty) \rightarrow M$ parametrizadas por h -comprimento de arco, com $\tilde{\gamma}_n(0) = p_n$ e, para algum $t_n \in [0, +\infty)$, $\tilde{\gamma}_n(t_n) = q_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\tilde{\gamma}_n(0) \rightarrow p$, pelo Teorema da Curva Limite, existe $\tilde{\gamma} : [0, +\infty) \rightarrow M$ curva C^0 , causal, passado-dirigida e passado-inextensível tal que $\tilde{\gamma}(0) = p$ e uma subsequência $\{\tilde{\gamma}_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\tilde{\gamma}_{n_m}|_K \rightarrow \tilde{\gamma}|_K$, h -uniformemente em cada $K \subseteq [0, +\infty)$ compacto. Daqui, temos duas possibilidades:

(1) $\{t_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente.

(2) $\{t_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente.

Em qualquer caso, podemos assumir que $t_{n_m} \rightarrow t_0 \in [0, +\infty]$. Seja $0 < t < t_0$. Eventualmente, $t_{n_m} > t$, e como $\tilde{\gamma}_{n_m}$ é tipo-tempo, passado-dirigida, $q_{n_m} = \tilde{\gamma}_{n_m}(t_{n_m}) \ll \tilde{\gamma}_{n_m}(t)$. Daí $\tilde{\gamma}_{n_m}(t) \in I^+(S)$. Como $\tilde{\gamma}_{n_m}(t) \rightarrow \tilde{\gamma}(t)$, $\tilde{\gamma}(t) \in \overline{I^+(S)}$. Mas se $\tilde{\gamma}(t) \in I^+(S)$, como $p \in J^+(\tilde{\gamma}(t))$, então $p \in I^+(S)$, o que é impossível já que $p \in \partial I^+(S)$ e $I^+(S)$ é aberto. Logo $\tilde{\gamma}(t) \in \partial I^+(S)$. Se $t_0 = 0$, $q_{n_m} = \tilde{\gamma}_{n_m}(t_{n_m}) \rightarrow \tilde{\gamma}(0) = p$. Isto implica $p \in S$, pois S é fechada, em contradição com $p \in \partial I^+(S) \setminus S$. Concluimos que $t_0 \in (0, +\infty]$ e $\tilde{\gamma}([0, t_0]) \subseteq \partial I^+(S)$. No caso (1), $t_0 < +\infty$, e $q_{n_m} = \tilde{\gamma}_{n_m}(t_{n_m}) \rightarrow \tilde{\gamma}(t_0) \in S$, novamente porque S é fechada. Assim, $\tilde{\gamma} : [0, t_0) \rightarrow M$ possui um ponto limite passado em S . No caso (2), $\tilde{\gamma} : [0, +\infty) \rightarrow M$ é passado-inextensível, e $\tilde{\gamma}([0, +\infty)) \subseteq \partial I^+(S)$. Finalmente, como $\forall t, t' \in [0, t_0)$, com $t < t'$, devemos ter $\tilde{\gamma}(t') < \tilde{\gamma}(t)$ mas $\tilde{\gamma}(t') \not\ll \tilde{\gamma}(t)$, já que $\partial I^+(S)$ é acronal, $\tilde{\gamma}|_{[0, t_0)}$ pode ser reparametrizada como uma geodésica tipo-luz passado-dirigida em $\partial I^+(S)$ começando em p , e a demonstração está completa. ■

Observação 5.1.13. Um subconjunto $B \subseteq M$ tal que $B = \partial F$, com F conjunto passado ou futuro, é dito ser uma *fronteira acronal*. O Teorema 5.1.12 mostra que fronteiras acronais são hipersuperfícies topológicas fechadas.

Considere, por exemplo, o disco fechado $D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}_1^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sabemos que $I^+(D)$ é um conjunto futuro, e a sua fronteira é $J^+(D) \setminus I^+(D)$, que é uma hipersuperfície topológica fechada.

Observação 5.1.14. Seja $S \subseteq M$ um conjunto fechado. Pelo Teorema 5.1.12, para cada ponto $p \in \partial I^+(S) \setminus S$, existe uma geodésica tipo-luz futuro-dirigida $\bar{\gamma} : (a, 0] \rightarrow M$ com $\bar{\gamma}(0) = p$, $-\infty \leq a < 0$, tal que $\bar{\gamma}((a, 0]) \subseteq \partial I^+(S)$, e ou $\bar{\gamma}$ é passado-inextensível ou possui um ponto limite passado em S . $\bar{\gamma}$ pode ser estendida de uma única maneira como geodésica tipo-luz futuro-inextensível $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ com $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$ e $\gamma(0) = p$, chamada de *gerador* de $\partial I^+(S)$ (passando por p). Note, contudo, que γ não precisa permanecer em $\partial I^+(S)$ para o futuro de p , conforme ilustra a figura abaixo.

Em verdade, a esse respeito, temos a seguinte Proposição.

Proposição 5.1.15. *Seja $S \subseteq M$ um conjunto fechado, e $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ um gerador de $\partial I^+(S)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.*

(i) *Se para algum $t \in (a, b)$, $\gamma(t) \notin \partial I^+(S)$, então $\gamma(t) \in I^+(S)$.*

(ii) *Sejam $t_0, s_0 \in (a, b)$ com $t_0 < s_0$ e $\gamma([t_0, s_0]) \subseteq \partial I^+(S)$. Se $\gamma(t_0)$ e $\gamma(s_0)$ são pontos conjugados de γ ou existe outro gerador β de $\partial I^+(S)$ que encontra γ em $\gamma(s_0)$, então $\gamma(t) \in I^+(S)$, $\forall t > s_0$ em (a, b) .*

Demonstração. (i) Para algum $p \in \partial I^+(S)$, existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $\gamma(t_0) = p$. Temos que, para $s \in (a, b)$, $s < t_0$, $\gamma(s) \in \partial I^+(S)$. Se para algum $t \in (a, b)$, $\gamma(t) \notin \partial I^+(S)$, evidentemente $t > t_0$. Mas se $\gamma(t) \notin \overline{I^+(S)}$, então para algum aberto U contendo $\gamma(t)$, $U \subseteq M \setminus \overline{I^+(S)}$. Escolha $q \in U$, $\gamma(t) \ll q$. Assim $p \ll q$, e para alguma vizinhança V de $p \equiv \gamma(t_0)$, $p' \ll q$, para todo $p' \in V$. Podemos escolher $p_1 \in V \cap I^+(S)$, já que $p \in \partial I^+(S)$. Mas isto implicaria $q \in I^+(S)$, uma contradição. Portanto $\gamma(t) \in \overline{I^+(S)}$, e se $\gamma(t) \notin \partial I^+(S)$, só nos resta concluir que $\gamma(t) \in I^+(S)$.

(ii) Em qualquer um dos dois casos do enunciado, $\gamma(t_0) \ll \gamma(t)$ para $t > s_0$, e se tivéssemos $\gamma(t) \in \partial I^+(S)$, isso violaria a acronalidade de $\partial I^+(S)$. Por (i), $\gamma(t) \in I^+(S)$.

■

5.2 Hipersuperfícies de Cauchy

Introduziremos agora a noção de hipersuperfície de Cauchy, muito importante no estudo dos espaços-tempos. Conforme veremos, apenas uma classe restrita de espaços-tempos admitem hipersuperfície de Cauchy, os globalmente hiperbólicos.

Definição 5.2.1. *Um conjunto $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície de Cauchy se toda curva tipo-tempo inextensível intersecta S exatamente uma vez.*

Em \mathbb{R}^n , os hiperplanos $S_k := \{(x_1, \dots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{R}^n : x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$, para cada k real fixo, são hipersuperfícies de Cauchy.

Proposição 5.2.2. *Qualquer hipersuperfície de Cauchy $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície topológica, acronal e fechada. (Em particular, $\text{borda}(S) = \emptyset$).*

Demonstração. Como curvas tipo-tempo inextensíveis não podem intersectar S mais de uma vez, S é acronal. Seja $p \in \overline{S}$, e U uma vizinhança de p . Escolha $p_{\pm} \in I^{\pm}(p, U)$ e γ uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida em U de p_- até p_+ . Seja β_+ uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida e futuro-inextensível começando em p_+ e β_- uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida e passado-inextensível terminando em p_- . A curva $\beta_- + \gamma + \beta_+$ intersecta S uma vez, já que é claramente tipo-tempo e inextensível. Se β_{\pm} intersecta S , então p estaria ou em $I^+(S)$ ou em $I^-(S)$, violando a acronalidade de \overline{S} . Portanto γ deve intersectar S , o que mostra que $p \notin \text{borda}(S)$. Logo $\text{borda}(S) = \emptyset$, e o resultado segue do Corolário 5.1.8. ■

A recíproca não é verdadeira, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 5.2.3. O hiperbolóide $N_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : x^2 + y^2 = z^2 - 1, z \geq 0\}$ é uma hipersuperfície topológica fechada. N_+ é também acronal. Para verificar acronalidade, tome $(x_0, y_0, z_0) \in N_+$. Sabemos que

$$I^+(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_1^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 < 0\}.$$

Dado $(x, y, z) \in N_+$, temos

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 &= (x^2 + y^2 - z^2) + (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2) - 2(xx_0 + yy_0 - zz_0) = \\ &= -2 - 2(xx_0 + yy_0 - zz_0) = -2(xx_0 + yy_0 - zz_0 + 1) \geq 0, \end{aligned}$$

porque a desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que

$$xx_0 + yy_0 + 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 1} \equiv zz_0.$$

No entanto, N_+ não é uma hipersuperfície de Cauchy, já que a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ dada por $\gamma(t) = (\cosh(t), 0, \sinh(t))$ é tipo-tempo ($\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{R}_1^3} \equiv -1$), inextensível, e não intersecta N_+ , pois $(\cosh(t))^2 + 0^2 - (\sinh(t))^2 \equiv 1 \neq -1$.

Proposição 5.2.4. *Seja $C \subseteq M$ um conjunto fechado e α uma curva causal, passado-dirigida e passado-inextensível começando em $p \in M$. Suponha que α não intersecta C .*

(i) *Se $p_0 \in I^+(p, M \setminus C)$, então existe uma curva tipo-tempo, passado-dirigida e passado-inextensível que começa em p_0 e não intersecta C .*

(ii) *Se α não pode ser reparametrizada como uma geodésica tipo-luz sem pontos conjugados, então existe uma curva tipo-tempo, passado-dirigida e passado-inextensível que começa em p e não intersecta C .*

Demonstração. Observe que a parte (i) segue da parte (ii), de modo que basta provarmos (ii). Fixe $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer métrica em M tal que a topologia induzida por d coincida com a de M . Podemos escrever $\alpha : [a, b) \rightarrow M$ e tomar uma sequência crescente $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[a, b)$ de modo que $s_n \rightarrow b$ e $\{\alpha(s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ não converge. Das hipóteses, segue que $Im(\alpha)$ não pode ser acronal, logo existe $s \in (a, b)$ com $\alpha(s) \ll_{M \setminus C} \alpha(a)$. Construiremos uma curva tipo-tempo, passado-dirigida β da seguinte forma. Como $\alpha(s) \ll_{M \setminus C} \alpha(a) \equiv p$ e, para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, $s_{n_1} > s$, temos $\alpha(s_{n_1}) \ll_{M \setminus C} p$. Escolha qualquer curva tipo-tempo, passado-dirigida $\gamma : [0, 1] \rightarrow M \setminus C$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = \alpha(s_{n_1})$. Como C é fechado, existe U_1 vizinhança de $\alpha(s_{n_1})$ tal que $U_1 \subseteq M \setminus C$. Para algum $\epsilon_1 > 0$, $1 - \epsilon_1 > 0$ e $\gamma((1 - \epsilon_1, 1]) \subseteq U_1$. Escolha t_1 tal que $1 - \epsilon_1 < t_1 < 1$ e $d(\alpha(s_{n_1}), \gamma(t_1)) < 1$, e defina $p_1 := \gamma(t_1)$. Assim, $\alpha(s_{n_1}) \ll_{M \setminus C} p_1$ e podemos reparametrizar $\gamma|_{[0, t_1]}$ de modo a obter uma curva tipo-tempo, passado-dirigida $\beta_1 : [0, 1] \rightarrow M \setminus C$ de p até p_1 . Suponha agora que temos $n_1 < \dots < n_k$ em \mathbb{N} , pontos $p \equiv p_0, p_1, \dots, p_k \in M \setminus C$ tais que $d(p_i, \alpha(s_{n_i})) < \frac{1}{i}$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, e curvas tipo-tempo, passado-dirigidas $\beta_1, \dots, \beta_k : [0, 1] \rightarrow M \setminus C$ tais que $\beta_i(0) = p_{i-1}$, $\beta_i(1) = p_i$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, e assumamos ainda que $p_i \gg_{M \setminus C} \alpha(s_{n_i})$, $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Note que $\alpha(s_{n_{k+1}}) \ll_{M \setminus C} p_k$. Escolha $p_{k+1} \in M \setminus C$ tal que $d(p_{k+1}, \alpha(s_{n_{k+1}})) < \frac{1}{k+1}$ e $p_k \gg_{M \setminus C} p_{k+1} \gg_{M \setminus C} \alpha(s_{n_{k+1}})$, e escolha uma curva tipo-tempo, passado-dirigida $\beta_{k+1} : [0, 1] \rightarrow M \setminus C$ com $\beta_{k+1}(0) = p_k$ e $\beta_{k+1}(1) = p_{k+1}$. Defina $n_{k+1} := n_k + 1$. Deste modo, temos definida

indutivamente uma subsequência $\{s_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e uma sequência $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de curvas tipo-tempo, passado-dirigidas $\beta_i : [0, 1] \rightarrow M \setminus C$ com $d(\beta_i(1), \alpha(s_{n_i})) < \frac{1}{i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Defina $\beta : [0, +\infty) \rightarrow M$ colocando $\beta(s) := \beta_{[s]+1}(s - [s])$, para qualquer $s \in [0, +\infty)$, onde $[s]$ é a parte inteira de s . β é tipo-tempo, passado-dirigida e temos $d(\beta(k), \alpha(s_{n_k})) = d(\beta_{k+1}(0), \alpha(s_{n_k})) = d(\beta_k(1), \alpha(s_{n_k})) < \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\beta(0) = p$. A subsequência $\{s_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ pode ser escolhida de modo que $\{\alpha(s_{n_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ não converge, fazendo com que $\{\beta(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ também não convirja. Sendo assim, β é passado-inextensível. ■

Obviamente, temos também uma versão temporalmente dual desta Proposição.

Teorema 5.2.5. *Um subconjunto $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície de Cauchy se e somente se S é acronal e toda curva causal inextensível intersecta S .*

Demonstração. (\Leftarrow) Imediato.

(\Rightarrow) É claro que nesta situação S é acronal. Suponha, por absurdo, que existe uma curva causal e inextensível γ que não intersecta S . Pela Proposição 5.2.2, S é fechada, e dado um ponto p em γ , existe uma vizinhança U de p disjunta de S . Tome $p_+ \in I^+(p, U)$. Da Proposição 5.2.4 item (i), existe uma curva tipo-tempo, passado-dirigida e passado-inextensível $\beta_- : [0, b) \rightarrow M \setminus C$ com $\beta_-(0) = p_+$. Tome $\epsilon > 0$ tal que $\beta_-([0, \epsilon]) \subseteq U$. Pela versão temporalmente dual da Proposição 5.2.4 item (i), existe uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida e futuro-inextensível $\beta_+ : [0, a) \rightarrow M \setminus C$ com $\beta_+(0) = \beta_-(\epsilon)$. Portanto, reparametrizando convenientemente $\beta_-|_{[0, \epsilon)} + \beta_+$ obtemos uma curva β tipo-tempo, futuro-dirigida e inextensível que não intersecta S , em contradição com a hipótese sobre S . ■

Para o próximo resultado, vamos precisar de dois Lemas.

Lema 5.2.6. *Para qualquer curva integral $\alpha : [0, b) \rightarrow M$, $b < +\infty$, de um campo vetorial suave $X : M \rightarrow TM$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $\exists \epsilon > 0$ e uma curva integral $\bar{\alpha} : [0, b + \epsilon) \rightarrow M$ de X tal que $\bar{\alpha}|_{[0, b)} = \alpha$.
- (b) α é extensível.
- (c) $\exists K \subseteq M$ compacto tal que $Im(\alpha) \subseteq K$.
- (d) $\exists \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sequência em $[0, b)$ com $t_n \rightarrow b$ tal que $\{\alpha(t_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Demonstração. As implicações (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) são imediatas para qualquer curva contínua.

(d) \Rightarrow (a). Seja $q \in M$ tal que $\alpha(t_n) \rightarrow q$, e $F : U \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ um fluxo local de X em q . Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(t_n) \in U$, e $t_n > b - \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Defina $\epsilon := t_{n_0} + \delta - b$ e $\bar{\alpha} : [0, b + \epsilon) \rightarrow M$ por

$$\bar{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } 0 \leq t \leq t_{n_0} \\ F(\alpha(t_{n_0}), t - t_{n_0}), & \text{se } t_{n_0} \leq t < b + \epsilon \end{cases}$$

Assim, $\bar{\alpha}$ é contínua, e claramente uma curva integral de X que estende α . ■

Lema 5.2.7. *Seja $X : M \rightarrow TM$ um campo vetorial suave em M .*

- (a) *Seja $F : U \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ o fluxo local de X , e seja $p \in U$. Se existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $(-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$ com $t_n \rightarrow 0$ tal que $F(p, t_n) = p$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $X(p) = 0$.*

(b) Se uma curva integral $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M$ de X é extensível com ponto limite p , então $X(p) = 0$.

Demonstração. (a) Seja (V, ϕ) um sistema de coordenadas em p . Pela continuidade de F , existe $U_0 \subseteq U$ vizinhança de p e $0 < \delta \leq \epsilon$, tal que $F(U_0 \times (-\delta, \delta)) \subseteq V$. A curva $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ dada por $\alpha(t) = F(p, t)$ é uma curva integral de X , com $\alpha(0) = p$. Em particular, $X(p) = \alpha'(0)$. Se $(\phi \circ \alpha)'(0) \neq 0$, existe $\delta \geq \delta' > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta' \Rightarrow \frac{(\phi \circ \alpha)(t) - \phi(p)}{t} \neq 0.$$

Mas eventualmente $0 < |t_n| < \delta'$, e

$$\frac{(\phi \circ \alpha)(t_n) - \phi(p)}{t_n} = \frac{(\phi \circ F)(p, t_n) - \phi(p)}{t_n} = \frac{\phi(p) - \phi(p)}{t_n} \equiv 0,$$

uma contradição. Portanto $(\phi \circ \alpha)'(0) = 0 \Rightarrow \alpha'(0) = 0 \Rightarrow X(p) = 0$.

(b) Suponha $X(p) \neq 0$, e seja $F : U_0 \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ um fluxo local de X em p . Por (a), existe $0 < a < \epsilon$ para o qual $F(p, t) \neq p, \forall t \in [-a, a]$. Assim, existem vizinhanças U, V de p e $F(p, a) \equiv F_a(p) \neq p$, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$. Pela continuidade da aplicação $F_a : U_0 \rightarrow M, F_a(x) = F(x, a)$, existe $U' \subseteq U$ vizinhança de p para a qual $F_a(U') \subseteq V$. Como $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M$ é extensível e p é ponto limite de α , para algum $t_0 \in [0, +\infty)$, temos $\alpha(t) \in U', \forall t \geq t_0$. Considere a curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, dada por $\beta(t) = F(\alpha(t_0), t)$. Pela unicidade das curvas integrais, devemos ter $\beta(t) = \alpha(t + t_0), \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Mas $\beta(a) = F(\alpha(t_0), a) = F_a(\alpha(t_0)) \in V$, e também $\beta(a) = \alpha(t_0 + a) \in U' \subseteq U$, já que $a > 0$ e portanto $t_0 + a > t_0$, contrariando $U \cap V = \emptyset$. ■

Teorema 5.2.8. *Seja $S \subseteq M$ uma hipersuperfície de Cauchy.*

(a) S é conexa.

(b) Se $T \subseteq M$ é hipersuperfície de Cauchy, então T é homeomorfa a S .

Demonstração. Seja $X : M \rightarrow TM$ qualquer campo vetorial suave, tipo-tempo e futuro-dirigido, e $F : \mathcal{R} \subseteq M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ o seu fluxo, onde $\mathcal{R} = \{(p, t) \in M \times \mathbb{R} : t \in I_p\}$, e I_p é o domínio da curva integral maximal de X começando em p . \mathcal{R} é aberto em $M \times \mathbb{R}$, e F é uma aplicação suave, com $M \times \{0\} \subseteq \mathcal{R}$. Assim, para todo $p \in M$,

$$\alpha_p : I_p \rightarrow M$$

$$t \mapsto F(p, t)$$

é a curva integral maximal com $\alpha_p(0) = F(p, 0) = p$. Escreva $I_p = (a, b)$, com $-\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty$. α_p é uma curva tipo-tempo e futuro-dirigida. Mostraremos que $\beta := \alpha_p|_{[0, b)}$ é futuro-inextensível. Do contrário, se $b < +\infty$, pelo Lema 5.2.6, existe $\epsilon > 0$ e $\bar{\alpha} : [0, b + \epsilon) \rightarrow M$ curva integral de X tal que $\bar{\alpha}|_{[0, b)} = \beta$, o que violaria a maximalidade de α_p . Se, por outro lado, $\beta = +\infty$, então o Lema 5.2.7, item (ii), implicaria que $X(p) = 0$, onde p é o eventual ponto limite futuro de β , o que contradiz X ser tipo-tempo. Analogamente, $\gamma = \alpha_p|_{(a, 0]}$ é passado-inextensível.

Concluimos que α_p é inextensível, $\forall p \in M$. Portanto existe um único $t_p \in I_p$ tal que $\alpha_p(t_p) \in S$, já que S é hipersuperfície de Cauchy. Defina

$$\rho_S : M \rightarrow S$$

$$p \mapsto \alpha_p(t_p).$$

Se $p \in S$, então $\alpha_p(0) = p \in S$, logo $t_p = 0$ e $\rho_S(p) = p$. Portanto $\rho_S|_S = Id|_S$. Em particular, ρ_S é sobrejetiva.

Afirmção. ρ_S é aberta e contínua.

De fato, seja $\mathcal{R}_S := \mathcal{R} \cap (S \times \mathbb{R})$. \mathcal{R}_S é aberto em $S \times \mathbb{R}$ na topologia produto, S com a topologia induzida de M . $F_S := F|_{\mathcal{R}_S}$ é contínua. Agora, seja $(p, t) \in \mathcal{R}_S$, e $q = F_S(p, t) = F(p, t)$. Temos $\rho_S(F(p, t)) = \alpha_q(t_q) \equiv F(q, t_q)$. Mas $\alpha_q(0) = \alpha_p(t) \Rightarrow I_p = t + I_q$ e $\alpha_q(s) = \alpha_p(t + s)$, $\forall s \in I_q$, ou $F(q, s) = F(p, t + s)$, $\forall s \in I_q$. Em particular, $F(q, t_q) = F(p, t + t_q)$, e como $p \in S$, $t + t_q = 0$. Portanto:

$$\rho_S(F_S(p, t)) = F(q, -t) = F(p, t - t) = p = \pi(p, t), \quad (5.1)$$

onde $\pi : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$ é a projeção canônica. Se $(p, t), (p', t') \in \mathcal{R}_S$, então $F_S(p, t) = F_S(p', t') \Rightarrow \rho_S \circ F_S(p, t) = \rho_S \circ F_S(p', t') \Rightarrow p = p'$. Daí $F(p, t) = F(p', t') \Rightarrow \alpha_p(t) = \alpha_{p'}(t') \equiv r \Rightarrow I_p = t + I_r$ e $\alpha_r(s) = \alpha_p(t + s)$, $\forall s \in I_r$. Mas então $I_p = t' + I_r$ e $\alpha_r(s) = \alpha_p(t' + s)$, $\forall s \in I_r \Rightarrow \alpha_r(-t) = \alpha_r(-t') = p = \alpha_p(t' - t)$. Como $p \in S$ e S é acronal, $t = t'$. Mostramos assim que F_S é injetiva. Agora, \mathcal{R}_S é uma subvariedade topológica n -dimensional de $M \times \mathbb{R}$. Pela Invariância de Domínio, $F_S(\mathcal{R}_S)$ é aberto em M e $F_S : \mathcal{R}_S \rightarrow F_S(\mathcal{R}_S)$ é um homeomorfismo. Mas note que dado $p \in M$, devemos ter $F_S(\alpha_p(t_p), -t_p) = F(F(p, t_p), -t_p) \equiv p$. Logo $p \in F_S(\mathcal{R}_S)$. Assim, $F_S(\mathcal{R}_S) = M$, isto é, F_S é sobrejetiva. Pela equação 5.1, temos $\rho_S \equiv \pi \circ F_S^{-1}$, e em particular (já que π é aberta) ρ_S é aberta e contínua, conforme afirmado.

(a) Como $\rho_S : M \rightarrow S$ acima definida é contínua e sobrejetiva, e M é conexa, $S = \rho_S(M)$ é conexa.

(b) Se $T \subseteq M$ é outra hipersuperfície de Cauchy, $\rho_S|_T : T \rightarrow S$ e $\rho_T|_S : S \rightarrow T$ são contínuas e claramente inversas uma da outra, portanto S e T são homeomorfas. ■

Definição 5.2.9. Um subconjunto $A \subseteq M$ é dito ser acausal se $\forall p, q \in A$, não existe curva causal de p até q .

Observação 5.2.10. Vimos (Proposição 5.2.2) que toda hipersuperfície de Cauchy S é uma hipersuperfície topológica, fechada e acronal (em particular $borda(S) = \emptyset$), e também que a recíproca não é verdadeira (Exemplo 5.2.3). Acausalidade, no entanto, é uma hipótese estritamente mais forte do que acronalidade. O conjunto $S = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_1^2$ não é acausal, pois ele próprio é a imagem de uma curva tipo-luz inextensível, mas é acronal; dado (x_0, x_0) em S ,

$$I^+(x_0, x_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2 : (x - x_0)^2 - (y - x_0)^2 < 0\},$$

o que evidentemente exclui todos os pontos de S .

Definição 5.2.11. Uma hipersuperfície topológica fechada e acausal $S \subseteq M$ é dita ser uma hipersuperfície de Cauchy parcial.

Observação 5.2.12. Note que uma hipersuperfície de Cauchy $S \subseteq M$ em geral não é uma hipersuperfície de Cauchy parcial, a menos que S seja também acausal. Este é o caso em grande parte dos exemplos. De fato, R. Geroch mostrou em [Geroch] que um espaço-tempo M admite uma hipersuperfície de Cauchy se, e somente se, M é globalmente hiperbólico², e no caso afirmativo, M admite necessariamente uma hipersuperfície de Cauchy acausal. Portanto, pensar apenas em hipersuperfícies de Cauchy acausais não implica perda de generalidade em espaços-tempos globalmente hiperbólicos.

A existência de uma hipersuperfície de Cauchy é uma hipótese global bastante restritiva sobre o espaço-tempo em questão. Conforme observado previamente, ela implica em hiperbolicidade global. Apesar de a prova fornecida por Geroch estar além do escopo deste trabalho, iremos ilustrar alguns de seus aspectos através de dois exemplos simples.

Exemplo 5.2.13. Tome novamente $M = \mathbb{R}_1^2$ e considere $S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Dado qualquer $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_1^2$, seja $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ uma curva tipo-tempo e inextensível com $\gamma(0) = p$. Mostraremos que γ necessariamente intersecta S , que é portanto uma hipersuperfície de Cauchy. Temos $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = x'(t)^2 - y'(t)^2 < 0 \Rightarrow y'(t)^2 > 0$. Logo $y'(t) > 0, \forall t \in (a, b)$, ou $y'(t) < 0, \forall t \in (a, b)$. Tome, por exemplo, o primeiro caso, no qual γ é futuro-dirigida. Então $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem, que é aberta. Como $y(a, b)$ é um intervalo, se tivéssemos $y(a, b) \neq \mathbb{R}$, $y(a, b)$ seria limitado superior ou inferiormente. Suponha que o fosse superiormente. Então, existiria $c \in \mathbb{R}$ para o qual $y(t) \leq c, \forall t \in (a, b)$. Seja $y_1 = \sup\{y(t) : t \in (a, b)\}$. Temos $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t) = y_1$, já que y é crescente.

Voltando ao nosso exemplo, fixe $t_0 \in (a, b)$. Então, para qualquer $t \in (a, b), t > t_0$, o lema anterior fornece

$$(x(t) - x(t_0))^2 - (y(t) - y(t_0))^2 < 0.$$

Em particular, se $y(t_0) = 0$, então $y(t) \neq 0, \forall t \neq t_0$, logo S é acronal. Tome qualquer sequência $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em (a, b) com $t_k \rightarrow b$. Temos $y(t_k) \rightarrow y_1$, logo devemos ter, pelo lema,

$$0 \leq (x(t_k) - x(t_{k'}))^2 < (y(t_k) - y(t_{k'}))^2 \xrightarrow{k, k' \rightarrow +\infty} 0.$$

Este argumento mostra que $\{x(t_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, portanto uma sequência convergente. Seja $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ qualquer outra sequência em (a, b) com $s_k \rightarrow b$. Novamente, $\{x(s_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ precisa ser de Cauchy. Logo $x(t_k) \rightarrow x_1$ e $x(s_k) \rightarrow \bar{x}_1$. Contudo, $y(s_k) \rightarrow y_1$, logo $0 \leq (x(t_k) - x(s_k))^2 < (y(t_k) - y(s_k))^2 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Logo $x_1 = \bar{x}_1$. Concluindo, $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = x_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) = (x_1, y_1)$, contrariando o fato de que γ não tem pontos limites. Portanto $y(a, b) = \mathbb{R}$ e, em particular, para algum $t_0 \in (a, b)$ vale $y(t_0) = 0$, o que implica $\gamma(t_0) \in S$. Assim, S é hipersuperfície de Cauchy em \mathbb{R}_1^2 , e esse espaço-tempo é globalmente hiperbólico. Esse exemplo generaliza-se facilmente para estabelecer que \mathbb{R}_1^n é globalmente hiperbólico.

Exemplo 5.2.14. Outro exemplo que vamos agora analisar mostra que hipersuperfícies de Cauchy são um conceito estritamente global, e muito sutil. Tomando

²Um dos sentidos desta equivalência será visto adiante (Corolário 5.3.10).

$M = \mathbb{R}_1^2 \setminus \{(0,0)\}$ e g a métrica usual de \mathbb{R}_1^2 , o espaço-tempo (M, g) é localmente isométrico a \mathbb{R}_1^2 , e a diferença entre os dois é nada mais que um ponto. Agora, porém, nenhum subconjunto de M pode ser uma hipersuperfície de Cauchy. Para mostrar isto, considere o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2 : x^2 - y^2 < 0\}$. Claramente $C \subseteq M$, e C pode ser decomposto numa união disjunta $C = C_+ \cup C_-$, onde $C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2 : y > |x|\}$ e $C_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2 : y < -|x|\}$. Seja $(x_-, y_-) \in C_-$ e $(x_+, y_+) \in C_+$. Temos $y_+ > |x_+| \geq 0 \Rightarrow y_+ > 0$, e $y_- < -|x_-| \leq 0 \Rightarrow y_- < 0$. Escolha qualquer $0 < y_0 < \min\{y_+ - |x_+|, |y_-| - |x_-|\}$, e considere as curvas $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow M$, para $i = 1, 2, 3, 4$, dadas por

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (1-t)(x_-, y_-) + t(0, -y_0) & \gamma_2(t) &= (1-t)(0, -y_0) + t\left(\frac{y_0}{2}, 0\right) \\ \gamma_3(t) &= (1-t)\left(\frac{y_0}{2}, 0\right) + t(0, y_0) & \gamma_4(t) &= (1-t)(0, y_0) + t(x_+, y_+)\end{aligned}$$

Derivando, obtemos $\gamma_1'(t) = (-x_-, -y_- - y_0)$, $\gamma_2'(t) = (\frac{y_0}{2}, y_0)$, $\gamma_3'(t) = (-\frac{y_0}{2}, y_0)$, $\gamma_4'(t) = (x_+, y_+ - y_0)$.
 $g(\gamma_i', \gamma_i') = \frac{y_0^2}{4} - y_0^2 < 0$, para $i = 2, 3$.
 $g(\gamma_1', \gamma_1') = x_-^2 - (y_0 - |y_-|)^2$
 $g(\gamma_4', \gamma_4') = x_+^2 - (y_+ - y_0)^2$.

Mas $y_0 < |y_-| - |x_-| \Rightarrow |x_-| < |y_-| - y_0 \Rightarrow x_-^2 < (|y_-| - y_0)^2$, e $y_0 < y_+ - |x_+| \Rightarrow |x_+| < y_+ - y_0 \Rightarrow x_+^2 < (y_+ - y_0)^2$. Assim, todas as curvas são tipo-tempo, e a curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ obtida por justaposição é também tipo-tempo em M , e conecta (x_-, y_-) a (x_+, y_+) . Portanto, nenhum conjunto acronal $S \subseteq M$ pode intersectar simultaneamente C_- e C_+ . Digamos que S não intersecta C_+ . A curva $\beta_+ : (0, +\infty) \rightarrow M$, $\beta_+(t) = (0, t)$ é tipo-tempo, inextensível e $Im(\beta_+) \subseteq C_+$, portanto β_+ não intersecta S . Similarmente, se S não intersecta C_- , a curva $\beta_- : (-\infty, 0) \rightarrow M$, $\beta_-(t) = (0, t)$ é tipo-tempo, inextensível e $Im(\beta_-) \subseteq C_-$, logo não intersecta S . De um modo ou de outro, mostramos que para qualquer subconjunto acronal $S \subseteq M$, S não é hipersuperfície de Cauchy. Portanto não existe uma tal.

5.3 Domínios de Dependência

Definição 5.3.1. *Seja $A \subseteq M$ acronal. O domínio de dependência futuro ou desenvolvimento de Cauchy futuro de A é o conjunto*

$$D^+(A) = \{p \in M : \text{toda curva causal e passado-inextensível } \alpha : [a, b] \rightarrow M \text{ com } \alpha(a) = p \text{ intersecta } A.\}$$

O domínio de dependência passado ou desenvolvimento de Cauchy passado é definido de maneira temporalmente dual. Finalmente, o domínio de dependência (total) ou simplesmente desenvolvimento de Cauchy de A é $D(A) := D^+(A) \cup D^-(A)$.

Proposição 5.3.2. *Um subconjunto acronal $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície de Cauchy se, e somente se, $D(S) = M$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $p \in M \setminus D^-(S)$, e α uma curva causal e passado-inextensível começando em p . Seja β uma curva causal futuro-inextensível que não intersecta S começando em p (que existe porque $p \notin D^-(S)$). Então $\alpha + \beta$, convenientemente reparametrizada, é uma curva causal inextensível, que deve portanto intersectar S . Como ela não o faz via β , α deve intersectar S . Assim, $p \in D^+(S)$.

(\Leftarrow) Trivial. ■

Proposição 5.3.3. *Seja $A \subseteq M$ um conjunto acronal. Então,*

(i) $D^\pm(A) \cap I^\mp(A) = \emptyset$.

(ii) $D^+(A) \cap D^-(A) = A$.

(iii) $D^+(A) \setminus A = D(A) \cap I^+(A)$.

Demonstração. (i) $p \in D^+(A) \cap I^-(A) \Rightarrow \exists q \in A$ tal que $p \ll q$. Como $D^+(A) \subseteq J^+(A)$, $\exists r \in A$ com $r \leq p$, violando a acronalidade de A . A prova de que $D^-(A) \cap I^+(A) = \emptyset$ é análoga.

(ii) Se $p \in D^+(A) \cap D^-(A)$, seja $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ uma curva causal, futuro-dirigida e inextensível tal que para algum $a < t_0 < b$, $\alpha(t_0) = p$. O segmento $\alpha|_{[t_0, b)}$ é futuro-inextensível e intersecta A em algum $t_0 \leq t_1 < b$. De maneira similar, α deve intersectar A para algum $a < t_2 \leq t_0$, já que $p \in D^+(A)$. Mas A é acronal, logo devemos ter $t_1 = t_0 = t_2$. Em particular, $p \in A$. A afirmação de que $A \subseteq D^+(A) \cap D^-(A)$ é evidente, pela definição.

(iii) $D(A) \cap I^+(A) = (D^+(A) \cup D^-(A)) \cap I^+(A) = (D^+(A) \cap I^+(A)) \cup (D^-(A) \cap I^+(A)) = (D^+(A) \cap I^+(A)) \cup \emptyset = D^+(A) \cap I^+(A) = ((D^+(A) \setminus A) \cup A) \cap I^+(A) = (D^+(A) \setminus A) \cap I^+(A) \cup (A \cap I^+(A))$. Mas $A \cap I^+(A) = \emptyset$, já que A é acronal, e $D^+(A) \setminus A \subseteq I^+(A)$, e o resultado segue. ■

Exemplo 5.3.4. Se $A \subseteq M$ é acronal, é claro que $A \subseteq D^\pm(A)$, mas é possível que $D^\pm(A) \subseteq A$ também. Por exemplo, considere $M = \mathbb{R}_1^3$ e $A = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Tome $(x_0, y_0, z_0) \in M \setminus A$. Se $y_0 \neq 0$, tome $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, com $\gamma(t) = (x_0, y_0, z_0 + t)$. Assim γ é inextensível, $\gamma'(t) = (0, 0, 1)$ e $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{R}_1^3} = -1$, logo γ é tipo-tempo. Além disso, como $y_0 \neq 0$, γ nunca intersecta A .

$\therefore (x_0, y_0, z_0) \notin D(A)$. Se $y_0 = 0$, definimos $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ por

$$\beta(t) = \begin{cases} (x_0, \frac{z_0}{\pi} \cos(\frac{\pi t}{2}), |z_0|t), & \text{se } -1 \leq t \leq 1 \\ (x_0, 0, |z_0|t), & \text{se } t \geq 1 \text{ ou } t \leq -1 \end{cases}$$

Como $(x_0, y_0, z_0) \notin A$, $z_0 \neq 0$. Assim, $\langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_{\mathbb{R}_1^3} = -z_0^2 + \frac{z_0^2}{4} < 0$, para $-1 \leq t \leq 1$, e $\langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_{\mathbb{R}_1^3} = -z_0^2 < 0$, para $|t| \geq 1$. Portanto β é tipo-tempo, inextensível e não intersecta A . Novamente, concluímos que $(x_0, 0, z_0) \notin D(A)$, e então $D(A) = A$.

Outro exemplo do mesmo fenômeno pode ser construído considerando $M = \mathbb{R}_1^2$ e $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}_1^2 : x \in \mathbb{Q}\}$. Dado $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_1^2 \setminus A$, se $y_0 = 0$, então $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Defina $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ como $\alpha(t) = (x_0, t)$. α é inextensível, tipo-tempo, passa por p e evita A , já que $(x_0, 0) \notin A$. Se $y_0 \neq 0$, escolha $0 < \epsilon < |y_0|$ e $a \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ irracional. Defina $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ pondo $\beta(t) = (1-t)(a, 0) + t(x_0, y_0)$. Daí $\langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle_{\mathbb{R}_1^2} = (x_0 - a)^2 - y_0^2 < \epsilon^2 - y_0^2 < 0$, e novamente β é tipo-tempo, inextensível e não intersecta A , logo $(x_0, y_0) \notin D(A)$. $\therefore D(A) = A$.

Os dois exemplos anteriores são na verdade instâncias de um fenômeno geral. Mais precisamente, vale a seguinte proposição.

Proposição 5.3.5. *Seja $A \subseteq M$ acronal.*

(i) *$borda(A)$ é um conjunto fechado (acronal). Em particular, $A \subseteq borda(A) \Leftrightarrow borda(A) = \overline{A}$.*

(ii) *Se $p \in borda(A)$, então $D^+(A) \cap I^+(p) = \emptyset$ e $D^-(A) \cap I^-(p) = \emptyset$.*

(iii) *$borda(A) = \overline{A} \Rightarrow A = D(A)$.*

Demonstração. (i) Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $borda(A)$. Assuma que $x_k \rightarrow x_0$. Seja U uma vizinhança aberta de x_0 , e escolha $x_{\pm} \in I^{\pm}(x_0, U)$. Como $x_0 \in \mathcal{O} \equiv I^+(x_-, U) \cap I^-(x_+, U)$ e este último é aberto, eventualmente $x_k \in \mathcal{O}$. Mas então, como $x_k \in borda(A)$, existe uma curva tipo-tempo α_k de, digamos, $x_k^- \in I^-(x_k, \mathcal{O})$ até $x_k^+ \in I^+(x_k, \mathcal{O})$ que evita A . Seja β_k uma curva tipo-tempo em U de x_k^+ a x_+ , e γ_k uma curva tipo-tempo em U de x_- a x_k^- . Se β_k ou γ_k intersectassem A , isto violaria a acronalidade de \overline{A} , já que $x_k \in \overline{A}$. Portanto a curva tipo-tempo $\gamma_k + \alpha_k + \beta_k$ vai de x_- a x_+ em U e não cruza A . Assim $x_0 \in borda(A)$, pois claramente $x_0 \in \overline{A}$.

(ii) Seja $p \in borda(A)$, e suponha que tenhamos $q \in D^+(A) \cap I^+(p)$. Podemos escolher $p_{\pm} \in I^{\pm}(p, I^+(q))$ e α curva tipo-tempo de p_- a p_+ evitando A . Sejam α_+ curva tipo-tempo de p_+ para q e α_- curva tipo-tempo, passado-inextensível saindo de p_- . Se α_{\pm} intersectassem A , isso violaria a acronalidade de \overline{A} , pois $p \in \overline{A}$. Mas $\alpha_- + \alpha + \alpha_+$ tem que intersectar A , já que $q \in D^+(A)$, e portanto α intersecta A , uma contradição. Logo $D^+(A) \cap I^+(p) = \emptyset$. Analogamente, provamos que $D^-(A) \cap I^-(p) = \emptyset$.

(iii) Dado $p \in D(A)$, digamos $p \in D^+(A)$, se $p \notin A$, então, pela proposição 5.3.3 item (iii), em particular $p \in I^+(A)$. Daí, para algum $q \in A$, $p \in I^+(q)$. Mas como $\overline{A} = borda(A)$, por (i), $A \subseteq borda(A)$, e aí $p \in I^+(q) \cap D^+(A)$, o que contradiz (ii), pois $q \in borda(A)$. Concluimos que $p \in A$. Caso em que $p \in D^-(A)$ é análogo. ■

O item (iii) da proposição acima diz essencialmente que se $D(A) \neq A$, então $A \setminus borda(A) \neq \emptyset$. Em particular, o caso de interesse é quando $A \cap borda(A) = \emptyset$, ou seja, quando A é uma hipersuperfície topológica.

Corolário. *Seja $A \subseteq M$ acronal, $p \in D^+(A)$. Então $I^-(p) \cap I^+(A) \subseteq D^+(A)$ e $I^-(p) \cap A$ é uma hipersuperfície topológica.*

Demonstração. Seja $S = I^-(p) \cap A$. Como $S \subseteq A$, S é acronal. Suponha que $q \in borda(S) \cap S$, e seja U vizinhança aberta de q . Tome uma curva α tipo-tempo, de $I^-(q, U')$ a $I^+(q, U')$ evitando S , onde $U' = U \cap I^-(p)$, que também contém q . Se α intersectasse A em um ponto r , digamos, teríamos $r \ll p$, e então $r \in I^-(p) \cap A \equiv \overline{S}$, uma contradição. Logo α evita A , o que prova que $q \in borda(A)$, pois $q \in \overline{S} \subseteq \overline{A}$, já que $S \subseteq A$. Pela Proposição 5.3.5 item (i), $D^+(A) \cap I^+(q) = \emptyset$. No entanto $p \in D^+(A) \cap I^+(q)$, uma contradição. Logo $borda(S) \cap S = \emptyset$, e S é hipersuperfície topológica. ■

Proposição 5.3.6. (Regressão) *Seja $A \subseteq M$ um conjunto acronal, e $\alpha : [0, b) \rightarrow M$ uma curva causal, passado-dirigida com $\alpha(0) \in D^+(A)$. Se para algum $0 < s < b$, $\alpha(s) \notin D^+(A)$, então existe $0 \leq s_0 < s$ tal que $\alpha(s_0) \in A$.*

Demonstração. Seja $\beta : [s, a) \rightarrow M$ qualquer curva causal, passado-inextensível com $\beta(s) = \alpha(s)$. A curva $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } 0 \leq t \leq s \\ \beta(t), & \text{se } s \leq t \leq a \end{cases}$$

é passado-inextensível e começa em $\alpha(0) \in D^+(A)$, portanto precisa intersectar A . Como $\alpha(s) \notin D^+(A)$, podemos escolher β tal que $Im(\beta)$ não intersecta A . Concluimos que o trecho $\alpha|_{[0, s]}$ intersecta A , e o resultado segue. ■

Proposição 5.3.7. *Se $A \subseteq M$ é acronal e $p \in int(D(A))$, então toda curva C^0 , causal e inextensível passando por p intersecta $I^+(A)$ e $I^-(A)$.*

Demonstração. Fixe uma métrica d em M compatível com a topologia de M . Podemos supor que $p \in D^+(A)$. Seja $\alpha : [0, b) \rightarrow M$ uma curva causal, passado-inextensível com $\alpha(0) = p$. Como α é passado-inextensível, existe uma sequência crescente de parâmetros $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, b)$, convergindo para b , tal que nenhuma subsequência de $\{\alpha(s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Iremos construir indutivamente uma curva tipo-tempo, β , da seguinte maneira. Seja U uma vizinhança de p com $U \subseteq D(A)$. Tome $p_+ \in I^+(p, U)$. Como $\alpha(s_1) \leq p \ll p_+$, existe $p_1 \in M$ tal que $\alpha(s_1) \ll p_1 \ll p_+$, $d(p_1, \alpha(s_1)) < 1$. Assumindo agora que temos uma sequência p_0, p_1, \dots, p_k de pontos em M tais que $p_0 = p_+, \alpha(s_k) \ll p_k, p_i \ll p_{i-1}, d(p_i, \alpha(s_i)) < \frac{1}{i}, \forall i \in \{1, \dots, k\}$, novamente temos $\alpha(s_{k+1}) \leq \alpha(s_k) \leq p_k$, logo podemos escolher $p_{k+1} \in M$ com $\alpha(s_{k+1}) \ll p_{k+1} \ll p_k$, e $d(\alpha(s_{k+1}), p_{k+1}) < \frac{1}{k+1}$. Seja $\beta : [0, +\infty) \rightarrow M$ uma curva tipo-tempo, passado-dirigida tal que cada segmento $\beta|_{[i-1, i]}$ é tipo-tempo, passado-dirigido ligando p_{i-1} a $p_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Como $\beta(k) = p_k, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ não pode convergir, já que $\{\alpha(s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ não converge, β é passado-inextensível. Como $\beta(0) = p_+ \in D^+(A)$, β precisa intersectar A , isto é, existe $t_0 \in (0, +\infty)$ tal que $\beta(t_0) \in A$. Mas β é tipo-tempo e A acronal, logo $\beta(t) \in I^-(A), \forall t > t_0$. Para $n > t_0$, temos por construção $\alpha(s_n) \ll \beta(n) \ll \beta(t_0)$, logo $\alpha(s_n) \in I^-(A)$. Além disso, se $p \in D^+(A) \setminus A$, pela proposição 5.3.3 item (iii), $p \in I^+(A)$, logo qualquer curva causal futuro-inextensível começando em p intersecta $I^+(A)$, trivialmente. Uma versão temporalmente dual desta prova mostra que se $p \in D^-(A)$, qualquer curva causal futuro-inextensível intersecta $I^+(A)$, e se $p \in D^-(A) \setminus A, p \in I^-(A)$ e assim qualquer curva causal passado-inextensível começando em p intersecta $I^-(A)$, novamente de maneira trivial. Finalmente, se $p \in A$, pela proposição 5.3.3 item (ii), $p \in D^+(A) \cap D^-(A)$, e a análise anterior mostra que o resultado vale também neste caso. ■

Observação 5.3.8. O resultado anterior não precisa valer para $p \in D(A) \setminus int(D(A))$. Considere $M = \mathbb{R}_1^2$ e

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2 : x \in (-1, 1), y = 0 \text{ para } x \in (-1, 0], y = -x \text{ para } x \in (0, 1)\}.$$

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_1^2, \alpha(t) = (x(t), y(t))$ qualquer curva tipo-tempo, futuro-dirigida com $\alpha(a) \in A$. Então $-1 < x(a) < 1$, e temos dois casos:

(i) $y(a) = 0$ e $-1 < x(a) \leq 0$. Como $y'(t) > 0$ (pois α é futuro-dirigida), $y(t) > 0 \Rightarrow \alpha(t) \notin A$, para todo $t > a$.

(ii) $0 < x(a) < 1$ e $y(a) = -x(a)$. Observamos que $x'(t) - y'(t) < 0, \forall t \in (a, b]$. Temos $(x(t) - x(a))^2 - (y(t) - y(a))^2 < 0$, o que implica $|x(t) - x(a)| < |y(t) - y(a)| = y(t) - y(a)$, pois $y'(t) > 0$, e assim $x(a) - x(t) < y(t) - y(a) \Rightarrow y(t) + x(t) > 0$, de modo que $(x(t), y(t)) \notin A$ novamente. Concluimos que $\alpha(t) \notin A, \forall t \in (a, b]$, logo A é acronal. $D^\pm(A), I^\pm(A)$ são como na figura anterior, e vemos que a curva $\beta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_1^2, \beta(t) = (-t, -t)$ é uma geodésica tipo-luz, passado-inextensível que não intersecta $I^-(A)$, apesar de começar em $(0, 0) \notin \text{int}(D(A))$.

Chegamos ao resultado mais importante desta seção.

Teorema 5.3.9. *Se $A \subseteq M$ é acronal, então $\text{int}(D(A))$ é globalmente hiperbólico.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em uma série de afirmações.

Afirmção 1. A condição de causalidade vale em todo $p \in D(A)$.

Seja $p \in D(A)$, e suponha que exista uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ causal, futuro-dirigida com $\alpha(0) = \alpha(1) = p$. Defina $\beta : (-\infty, +\infty) \rightarrow M$ por $\beta(t) = \alpha(t - [t])$, onde $[t]$ denota a parte inteira de t . β é causal e futuro-dirigida. Como α é não-constante, existe $t_0 \in (0, 1)$ para o qual $\alpha(t_0) \neq p$. Consideramos a sequência

$$t_n = \begin{cases} n + t_0, & \text{se } n \text{ é par;} \\ n, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Então, $t_n \rightarrow +\infty$, mas

$$\beta(t_n) = \begin{cases} \alpha(t_0), & \text{se } n \text{ é par;} \\ p, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

e portanto $\beta(t_n)$ não converge. Similarmente, a sequência

$$s_n = \begin{cases} -n + t_0, & \text{se } n \text{ é par;} \\ -n, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

tende a $-\infty$, mas $\beta(s_n) = \beta(t_n), \forall n \in \mathbb{N}$, logo $\beta(s_n)$ não converge. Assim, β é inextensível, e precisa intersectar A já que $p \in D(A)$. Digamos que ela o faça em $\beta(s_0) = q \in A$. Por construção, $\beta(s_0 + n) = q, \forall n \in \mathbb{N}$. Dado qualquer $v \in T_q M$ não-nulo, seja J o único campo de Jacobi sobre $\beta_{[s_0, s_0+1]}$ com $J(s_0) = 0$ e $J'(s_0) = v$. Assim, J é não-nulo (por unicidade) mas $J(s_0) = J(s_0 + d) = 0$, ou seja, s_0 e $s_0 + d$ são pontos conjugados. Como a imagem destes por β é q , temos $q \ll q$, violando acronalidade de A .

Afirmção 2. A condição de causalidade forte vale em $\text{int}(D(A))$.

Suponha que a causalidade forte falha em $p \in \text{int}(D(A))$. Então existe uma vizinhança U de p (podemos assumir $U \subseteq \text{int}(D(A))$) e uma sequência $\{\gamma_n : [0, 1] \rightarrow M\}_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas causais e passado-dirigidas com $\gamma_n(0), \gamma_n(1) \rightarrow p$, e tais que $\text{Im}(\gamma_n) \not\subseteq U, \forall n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir, pela convergência, que $\gamma_n(0), \gamma_n(1) \in U$,

$\forall n \in \mathbb{N}$. Fixe uma métrica Riemanniana completa h em M , e seja $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de curvas passado-inextensíveis $\tilde{\gamma}_n : [0, +\infty) \rightarrow M$ extendendo as γ_n 's e parametrizadas por h -comprimento de arco. Podemos então assumir que existe uma sequência $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $(0, +\infty)$ tal que $\tilde{\gamma}_n(0) = \gamma_n(0) \rightarrow p$ e $\tilde{\gamma}_n(s_n) = \gamma_n(1) \rightarrow p$. Pelo Lema da Curva Limite, existe uma curva C^0 , causal e passado-inextensível $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e uma subsequência $\{\tilde{\gamma}_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\tilde{\gamma}_{n_m}|_K \rightarrow \gamma|_K$, h -uniformemente, em cada compacto $K \subseteq [0, +\infty)$. Agora, se $\{s_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente, podemos assumir que $s_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} s_0 \in (0, +\infty)$. Neste caso, $\tilde{\gamma}_{n_m}(s_{n_m}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \gamma(s_0)$, logo $\gamma(0) = \gamma(s_0) = p$, violando causalidade em $D(A)$. Portanto $\{s_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ precisa ser ilimitada. Neste caso, assumimos que $s_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$. Como γ é passado-inextensível, pela proposição 5.3.7 ela precisa intersectar $I^-(A)$ em, digamos, $q = \gamma(t_0)$. Assim, para algum $r \in A$, $q \ll r \leq p$. Considere agora as curvas $\beta_m : [0, 1] \rightarrow M$ dadas por $\beta_m(t) = \gamma_m(1-t)$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Estas são curvas causais e futuro-dirigidas. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n_m} > t_0$, $\forall m \geq N$. Assim, $\forall m \geq N$, existe $\bar{t}_m \in (0, 1)$ para o qual $\beta_m(\bar{t}_m) = \gamma_m(1-\bar{t}_m) = \tilde{\gamma}_m(t_0) \rightarrow q$. Seja $\tilde{\beta}_m : [0, +\infty) \rightarrow M$ extensão causal, futuro-inextensível de β_m , parametrizada por h -comprimento de arco, para cada $m \geq N$. Temos que $\tilde{\beta}_m(0) = \beta_m(0) = \gamma_m(1) \rightarrow p$, e para alguma sequência $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ em $[0, +\infty)$, $\tilde{\beta}_m(t_m) = \beta_m(\bar{t}_m) = \tilde{\gamma}_m(t_0) \rightarrow q$. Novamente pelo Lema da Curva Limite, existe uma curva limite C^0 , causal e futuro-inextensível $\beta : [0, +\infty) \rightarrow M$ tal que $\beta(0) = p$ e uma subsequência $\{\tilde{\beta}_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{\tilde{\beta}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ para a qual $\tilde{\beta}_k|_C \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \beta|_C$ h -uniformemente para cada compacto $C \subseteq [0, +\infty)$. Se $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada superiormente, podemos assumir $t_k \rightarrow a$ para algum $a \in (0, +\infty)$, e daí $\tilde{\beta}_k(t_k) \rightarrow \beta(a) \equiv q$, logo $p \leq q \ll p \Rightarrow p \ll p$, violando causalidade em $D(A)$. Portanto $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ não pode ser limitada superiormente, e assumimos agora que $t_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$, sem perda de generalidade. Como β é futuro-inextensível, precisa intersectar $I^+(A)$ em algum ponto, que denotamos $q' = \beta(b)$. Assim, existe $r' \in A$, $r' \ll q'$. Finalmente, $\tilde{\beta}_k(b) \rightarrow q'$ e $\tilde{\beta}_k(t_k) \rightarrow q$, logo para k grande o suficiente, $t_k > b$ e $r' \ll \tilde{\beta}_k(b) \leq \tilde{\beta}_k(t_k) \ll r$, violando a acronalidade de A . Esta contradição final estabelece a afirmação 2.

Afirmção 3. Se $p, q \in \text{int}(D(A))$ e $p < q$, então $J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq \text{int}(D(A))$.

Como $p, q \in \text{int}(D(A))$, podemos escolher $p_- \ll p$ e $q \ll q_+$, com $p_-, q_+ \in D(A)$. Temos assim $J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq I^+(p_-) \cap I^-(q_+) =: T$, e como este último conjunto é aberto, se $T \subseteq D(A)$ então $T \subseteq \text{int}(D(A))$, e a afirmação segue. Considere, portanto, $x \in T \setminus D(A)$. Seja $\beta_+(\beta_-)$ uma curva causal futuro(passado)-inextensível começando em x não intersectando A . Seja $\alpha_+(\alpha_-)$ uma curva tipo-tempo futuro(passado)-dirigida de $q_+(p_-)$ até x . Se $p_- \in D^+(A)$, então já que $p_- \ll q_+$, $q_+ \in D^+(A)$ também. Logo $\alpha_+ + \beta_-$ precisa intersectar A . $\therefore \alpha_+$ intersecta A . Mas então $x \in I^-(A) \Rightarrow p_- \in I^-(A) \cap D^+(A)$, o que é impossível, pela Proposição 5.3.3 item (i). Logo $p_- \in D^-(A)$. Analogamente podemos mostrar que $q_+ \in D^+(A)$. Mas aí $\alpha_+ + \beta_-$ e $\alpha_- + \beta_+$ precisam intersectar A , de modo que α_+ e α_- ambas intersectam A , violando a acronalidade de A . Portanto $T \subseteq D(A)$.

Afirmção 4. Se $p, q \in \text{int}(D(A))$ e $p < q$, então $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto.

Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $J^+(p) \cap J^-(q)$. Seja $\alpha_n : [0, +\infty) \rightarrow M$, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de curvas causais futuro-inextensíveis parametrizadas por

h -comprimento de arco tais que para certas sequências $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\bar{s}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, +\infty)$, $s_n \leq \bar{s}_n$, tem-se $\alpha_n(0) = p$, $\alpha_n(s_n) = x_n$ e $\alpha_n(\bar{s}_n) = q$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Considere também $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\beta_n : [0, +\infty) \rightarrow M$, sequência de curvas causais passado-inextensíveis parametrizadas por h -comprimento de arco tais que, para sequências $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\bar{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, +\infty)$, $a_n \leq \bar{a}_n$, tem-se $\beta_n(0) = q$, $\beta_n(a_n) = x_n$ e $\beta_n(\bar{a}_n) = p$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema da Curva Limite, existem curvas C^0 causais, $\alpha, \beta : [0, +\infty) \rightarrow M$, que são curvas limite de $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, respectivamente, com α futuro-inextensível e β passado-inextensível, juntamente com subsequências $\{\alpha_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ e $\{\beta_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ tais que $\alpha_{n_m}|_K \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \alpha|_K$ e $\beta_{n_m}|_K \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \beta|_K$ h -uniformemente em cada compacto $K \subseteq [0, +\infty)$. Suponha agora que $\{s_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ e $\{a_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ são ambas ilimitadas superiormente. Neste caso, podemos supor como sempre $a_{n_m}, s_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$. Da proposição 5.3.7, segue que para certos valores $s_0, a_0 \in [0, +\infty)$, devemos ter $\alpha(s_0) \in I^+(A)$ e $\beta(a_0) \in I^-(A)$. Como $\alpha_{n_m}(s_0) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \alpha(s_0)$ e $\beta_{n_m}(a_0) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \beta(a_0)$, para valores de m grandes o suficiente temos $\alpha_{n_m}(s_0) \in I^+(A)$, $\beta_{n_m}(a_0) \in I^-(A)$, $s_{n_m} > s_0$ e $a_{n_m} > a_0$. Assim, para m grande, $x_{n_m} = \beta_{n_m}(a_{n_m}) \leq \beta_{n_m}(a_0) \in I^-(A) \Rightarrow x_{n_m} \in I^-(A)$ e $x_{n_m} = \alpha_{n_m}(s_{n_m}) \geq \alpha_{n_m}(s_0) \in I^+(A) \Rightarrow x_{n_m} \in I^+(A)$, violando acronalidade. Portanto é necessário que $\{a_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ ou $\{s_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ sejam limitadas superiormente. Digamos que $\{a_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ o seja, e podemos assumir $a_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} a$, de modo que $x_{n_m} = \beta_{n_m}(a_{n_m}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \beta(a) \equiv x_0$. Temos portanto $x_0 \leq q$. Se $\{s_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ também é limitada superiormente, assumimos $s_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} s$. Então $x_{n_m} = \alpha_{n_m}(s_{n_m}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \alpha(s) \equiv x_0$ e $p \leq x_0$. $\therefore x_0 \in J^+(p) \cap J^-(q)$, e o resultado está provado.

Assuma então $s_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$. Afirmamos que isto implica, primeiro, que $x_0 \in D^+(A)$ e $q \in D^+(A) \setminus A$. Suponha que $x_0 \notin D^+(A)$. Neste caso, existe uma curva causal, passado-inextensível η começando em $a \neq x_0$ que não intersecta A . Agora, vimos que para m grande o suficiente, $x_{n_m} = \alpha_{n_m}(s_{n_m}) \in I^+(A)$, e $x_{n_m} \leq q$, logo $q \in I^+(A)$. Portanto $q \in D(A) \cap I^+(A) = D^+(A) \setminus A$. Escolha $q_+ \in I^+(q) \cap D(A)$, tal que $q_+ \in D^+(A) \setminus A$ também. Então $x_0 \ll q_+$, e podemos tomar uma curva tipo-tempo passado-dirigida ζ de q_+ até x_0 . $\zeta + \eta$ precisa então intersectar A , logo ζ o faz. Mas isso significa que $x_0 \in I^-(A)$, e assim para m grande o suficiente $x_{n_m} \in I^+(A) \cap I^-(A)$, novamente violando acronalidade. Isto estabelece que $x_0 \in D^+(A)$. Escolha $\{\gamma_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sequência de curvas da forma $\gamma_m : [0, +\infty) \rightarrow M$, causais, passado-inextensíveis, parametrizadas por h -comprimento de arco tais que $\gamma_m(0) = x_{n_m}$, $\gamma_m(c_m) = p$, para alguma sequência $\{c_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ em $[0, +\infty)$ tal que $\gamma_m|_{[0, c_m]}$ é uma reparametrização de $\beta_{n_m}|_{[0, s_{n_m}]}$, para cada m . Seja $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ uma curva limite de $\{\gamma_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ C^0 , causal e passado-inextensível com $\gamma(0) = x_0$, e $\{\gamma_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ subsequência convergindo h -uniformemente para γ em cada compacto de $[0, +\infty)$. Novamente, caso $\{c_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ seja limitada superiormente, podemos assumir $c_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c \Rightarrow \gamma_{m_k}(c_{m_k}) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \gamma(c)$. $\therefore \gamma(c) = p$. $\therefore p \leq x_0$, e o resultado está provado. Verificamos então o caso $c_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$. A curva $\beta|_{[0, a]} + \gamma$ é passado-inextensível e começa em $q \in \text{int}(D(A))$, logo pela proposição 5.3.7, ela precisa intersectar $I^-(A)$. Claramente $\beta|_{[0, a]}$ não o faz, então γ intersecta $I^-(A)$, isto é, existe $c_0 \in (0, +\infty)$ tal que $\gamma(c_0) \in I^-(A)$. Portanto, para k grande o suficiente, $c_{m_k} > c_0$ e $p = \gamma_{m_k}(c_{m_k}) \leq \gamma_{m_k}(c_0) \in I^-(A)$. Em particular, $p \in I^-(A) \cap D(A) \equiv D^-(A) \setminus A$. Vimos que $J^+(p) \cap J^-(q) \subseteq \text{int}(D(A))$, logo em particular $x_n \in \text{int}(D(A))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e podemos assumir que $x_k \in I^+(A) \cap D(A) = D^+(A) \setminus A$. Pela Regressão (prop. 5.3.6), existem sequências $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $(0, +\infty)$ com $0 < d_k < c_{m_k}$, $0 < e_k < s_{m_k}$, $\gamma_{m_k}(d_k) = \beta_{m_k}(e_k) \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Se $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ [$\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$] é ilimitada superiormente, então

eventualmente $\beta_{m_k}(e_k) \in I^+(A)$ [$\gamma_{m_k}(d_k) \in I^-(A)$], violando acronalidade. Portanto podemos assumir $e_k \rightarrow e$, $d_k \rightarrow d$, logo $\beta_{m_k}(e_k) = \gamma_{m_k}(d_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \gamma(d) = \beta(e) = y_0$, e $p \leq y_0 \leq x_0$. Em particular, $p \leq x_0 \leq q$, e a prova está completa. ■

Corolário 5.3.10. *Se (M, g) admite uma hipersuperfície de Cauchy $S \subseteq M$, então (M, g) é globalmente hiperbólico.*

Demonstração. Pela proposição 5.3.2, se $S \subseteq M$ é hipersuperfície de Cauchy, então $M = D(S) \Rightarrow M = \text{int}(D(S))$ que é globalmente hiperbólico pelo Teorema 5.3.9. ■

Vimos anteriormente que \mathbb{R}_1^n admite hipersuperfície de Cauchy. O Corolário 5.3.10 estabelece então que \mathbb{R}_1^n é globalmente hiperbólico.

Proposição 5.3.11. *Se $A \subseteq M$ é acronal e $p \in \text{int}(D(A)) \setminus I^-(A)$, então $I^-(p) \cap D^+(A)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $I^-(p) \cap D^+(A)$, e h uma métrica Riemanniana auxiliar, completa, em M . Escolha $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $\alpha_n : [0, +\infty) \rightarrow M$ sequência de curvas causais passado-inextensíveis parametrizadas por h -comprimento de arco, de modo que para alguma sequência de parâmetros $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, +\infty)$, $\alpha_n(0) = p$ e $\alpha_n(t_n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M$ uma curva limite C^0 , causal e passado-inextensível com $\alpha(0) = p$, e uma subsequência $\{\alpha_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ convergindo para α h -uniformemente em cada compacto de $[0, +\infty)$. Se $\{t_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ é ilimitada superiormente, para m grande o suficiente temos $x_{n_m} = \alpha_{n_m}(t_{n_m}) \in I^-(A)$. $\therefore x_{n_m} \in I^-(A) \cap D^+(A) = \emptyset$, um absurdo. Podemos então assumir que $t_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} t_0$. $\therefore x_{n_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \alpha(t_0) \equiv x_0$. Em particular, $x_0 \in I^-(p)$. Seja β qualquer curva causal passado-inextensível começando em x_0 . Agora, $x_0 \leq p$ e $p \in \text{int}(D(A))$, logo para algum $p_+ \in D(A)$, $p \ll p_+ \Rightarrow x_0 \ll p_+$. Além disso, como $p \in D(A) \setminus I^-(A)$, $p \notin D^-(A) \setminus A$. $\therefore p \in D^+(A) \Rightarrow p_+ \in D^+(A)$. Seja γ uma curva tipo-tempo, passado-dirigida de p_+ até x_0 . $\gamma + \beta$ precisa intersectar A . Se γ intersecta A em um ponto distinto de x_0 , então $x_0 \in I^-(A)$, e eventualmente $x_{n_m} \in I^-(A) \cap D^+(A)$, novamente uma contradição. Logo β intersecta A e $x_0 \in D^+(A) \cap I^-(p)$, completando a prova. ■

Historicamente, alguns autores (por exemplo, a referência [Geroch]) definiram $D^+(A)$ exigindo somente que curvas tipo-tempo, passado-inextensíveis, partindo desse conjunto intersectassem A . A próxima proposição estabelece a relação entre essas definições.

Proposição 5.3.12. *Seja $A \subseteq M$ acronal. Defina $T^+(A) := \{p \in M : \text{toda curva tipo-tempo passado-inextensível começando em } p \text{ intersecta } A\}$. Então, $D^+(A)$ é denso em $T^+(A)$, isto é, $D^+(A) \subseteq T^+(A) \subseteq \overline{D^+(A)}$. Além disso, $T^+(A)$ é fechado se e somente se A é fechado, e em caso afirmativo temos $T^+(A) = \overline{D^+(A)}$.*

Demonstração. A inclusão $D^+(A) \subseteq T^+(A)$ é evidente. Seja $p \in T^+(A)$. Se $p \in \bar{A} \subseteq \overline{D^+(A)}$, nada resta a fazer. Assuma portanto $p \notin \bar{A}$. Seja U uma vizinhança qualquer de p . Se U intersecta \bar{A} então U intersecta $\overline{D^+(A)}$, e também $D^+(A)$. Assuma $U \cap \bar{A} = \emptyset$, e escolha $p_- \in I^-(p, U)$. Seja β uma curva causal, passado-dirigida começando em p_- . Se β não intersecta \bar{A} , então existe uma curva tipo-tempo passado-inextensível de p evitando \bar{A} , pela Proposição 5.2.4, contrário ao

fato de que $p \in T^+(A)$. Logo β intersecta \bar{A} em um ponto q , digamos. Mas então existe uma curva tipo-tempo passado-dirigida α de p a q . α não intersecta \bar{A} em nenhum outro ponto, já que \bar{A} é acronal. Ela pode ser estendida para uma curva tipo-tempo passado-inextensível passando por q . Logo $q \in A$. Então β intersecta A , e $p_- \in D^+(A)$. $\therefore U \cap D^+(A) \neq \emptyset$, e $p \in \overline{D^+(A)}$.

$\therefore T^+(A) \subseteq \overline{D^+(A)}$, provando a primeira afirmação.

Se $T^+(A)$ é fechado, então $\overline{D^+(A)} \subseteq \overline{T^+(A)} = T^+(A) \subseteq \overline{D^+(A)}$. $\therefore T^+(A) = \overline{D^+(A)}$, e $\bar{A} \subseteq \overline{D^+(A)} = T^+(A)$. Mas se $p \in \bar{A} \setminus A$, nenhuma curva tipo-tempo passado-inextensível partindo de p intersecta A , uma contradição. Assim $\bar{A} \setminus A = \emptyset \Rightarrow A = \bar{A}$. Finalmente, se A é fechado, seja $p \in \overline{D^+(A)}$. Afirmamos que $p \in T^+(A)$ e portanto $T^+(A) = \overline{D^+(A)}$ novamente. Se $p \in A \subseteq T^+(A)$, nada a fazer. Se $p \notin A$, existe U vizinhança de p com $U \cap A = \emptyset$. Seja β qualquer curva tipo-tempo passado-inextensível começando em p . Tome $p_- \in I^-(p, U)$ sobre β . Como $p \in I^+(p_-, U)$, podemos escolher $p' \in I^+(p_-, U) \cap D^+(A)$. Mas isto claramente implica $p_- \in D^+(A)$, logo β intersecta A . Então $p \in T^+(A)$. $\therefore \overline{D^+(A)} \subseteq T^+(A)$. $\therefore T^+(A) = \overline{D^+(A)}$, e $T^+(A)$ é fechado. ■

5.4 Horizontes de Cauchy

Definição 5.4.1. *Seja $A \subseteq M$ um conjunto acronal. Então, o horizonte futuro de Cauchy de A é o conjunto*

$$H^+(A) := \overline{D^+(A)} \setminus I^-(D^+(A)) = \{p \in \overline{D^+(A)} : I^+(p) \cap D^+(A) = \emptyset\}.$$

O horizonte passado de Cauchy de A é definido de maneira temporalmente dual, e o horizonte de Cauchy de A é $H(A) := H^+(A) \cup H^-(A)$.

Exemplo 5.4.2. Tome $A = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}_1^3 : x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}_1^3$. Temos $D^+(A) = A$, portanto

$$I^-(D^+(A)) \cap D^+(A) = I^-(A) \cap A = \emptyset,$$

e $\overline{D^+(A)} = \bar{A} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}_1^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Assim, $H^+(A) = \bar{A}$.

Exemplo 5.4.3. Em \mathbb{R}_1^2 , considere $A = [0, 2] \times \{0\}$. Nesse caso, $D^+(A)$ corresponde a todas as combinações convexas dos pontos $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$. $D^+(A)$ é fechado, e neste caso $H^+(A) = \{(x, x) \in \mathbb{R}_1^2 : x \in [0, 1]\} \cup \{(x, 2-x) \in \mathbb{R}_1^2 : x \in [1, 2]\}$, que também é fechado e acronal. Este exemplo mostra que $H^+(A)$ serve como uma espécie de fronteira futura para $D^+(A)$.

Proposição 5.4.4. *Seja $A \subseteq M$ acronal.*

- (i) $H^\pm(A)$ é um conjunto acronal fechado.
- (ii) $\partial D^\pm(A) = H^\pm(A) \cup A$.
- (iii) $\text{borda}(H^+(A)) \subseteq \text{borda}(A)$, valendo igualdade se A é fechado.
- (iv) $\partial D(A) = H(A)$.

Demonstração. (i) Como $\overline{D^+(A)}$ é fechado e $I^-(D^+(A))$ é aberto, $H^+(A) \equiv \overline{D^+(A)} \setminus I^-(D^+(A))$ é fechado. Além disso,

$$\begin{aligned} I^+(H^+(A)) \cap D^+(A) = \emptyset &\Rightarrow I^+(H^+(A)) \subseteq \text{int}(M \setminus D^+(A)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow I^+(H^+(A)) \cap \overline{D^+(A)} = \emptyset \Rightarrow I^+(H^+(A)) \cap H^+(A) = \emptyset, \end{aligned}$$

pois $H^+(A) \subseteq \overline{D^+(A)}$, logo $H^+(A)$ é acronal.

(ii) Seja $p \in \partial D^+(A) \setminus A$. $\partial D^+(A) \subseteq \overline{D^+(A)}$, logo $p \in \overline{D^+(A)}$. Dado $q \in I^+(p)$, suponha $q \in D^+(A)$. Seja α uma curva tipo-tempo, passado-dirigida de q a p , e β qualquer curva causal, passado-inextensível começando em p . $\alpha + \beta$ é uma curva causal, passado-inextensível começando em q , e portanto ela precisa intersectar A . Agora, se α intersectasse A , já que $p \notin A$, isto significaria que $p \in I^-(A)$. Mas $D^+(A) \cap I^-(A) = \emptyset \Rightarrow \overline{D^+(A)} \cap I^-(A) = \emptyset$, uma contradição. Logo α não intersecta A , o que significa que β o faz. Então $p \in D^+(A)$. Em particular $p \in I^+(A)$. Podemos portanto escolher uma vizinhança aberta U de p tal que $U \subseteq I^+(A)$ e, $\forall p' \in U$, $p' \ll q$. Escolha qualquer $p' \in U$, e seja γ uma curva causal, passado-inextensível começando em p' e ζ uma curva tipo-tempo, passado-dirigida de q a p' . Novamente, já que $p' \in I^+(A)$, ζ não pode intersectar A , pois A é acronal. Mas $\gamma + \zeta$ precisa intersectar A porque $q \in D^+(A)$, logo γ o faz, e $p' \in D^+(A)$. Mas então $U \subseteq D^+(A)$. $\therefore p \in \text{int}(D^+(A))$, contrariando o fato de que $p \in \partial D^+(A)$. Concluimos que $q \notin D^+(A) \Rightarrow I^+(p) \cap D^+(A) = \emptyset \Rightarrow p \in H^+(A)$. Deste modo, temos $\partial D^+(A) \subseteq H^+(A) \cup A$.

Seja $p \in H^+(A) \cup A$, e U uma vizinhança arbitrária de p . Como $A \cup H^+(A) \subseteq \overline{D^+(A)}$, tudo que precisamos mostrar é que $p \notin \text{int}(D^+(A))$, isto é, $U \not\subseteq D^+(A)$. De fato, se $p \in A$, nenhuma curva tipo-tempo passado-dirigida começando em p pode intersectar A em outro ponto distinto de p , pela acronalidade de A , e portanto se tomarmos $p_- \in I^-(p, U) \subseteq U$, $p_- \notin D^+(A)$. Se $p \in H^+(A)$, nenhuma curva tipo-tempo futuro-dirigida saindo de p pode intersectar $D^+(A)$, logo tomando $p_+ \in I^+(p, U)$, seguramente $p_+ \notin D^+(A)$. Assim $U \not\subseteq D^+(A)$, e $H^+(A) \cup A \subseteq \partial D^+(A)$.

(iii) Seja $p \in \text{borda}(H^+(A)) \subseteq \overline{H^+(A)}$. Por (i), $\overline{H^+(A)} = H^+(A)$, ou seja, $p \in H^+(A)$. Suponha $p \notin \bar{A}$, e seja U vizinhança aberta de p com $U \cap \bar{A} = \emptyset$. Sejam $p_{\pm} \in I^{\pm}(p, U)$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ uma curva qualquer tipo-tempo, futuro-dirigida com $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = p_+$. Como $p \in H^+(A)$, $p_+ \notin D^+(A)$. Como $p \in \overline{D^+(A)}$, podemos escolher $p' \in I^+(p_-, U) \cap D^+(A)$. Seja β uma curva tipo-tempo, passado-dirigida em U de p' a p_- e γ uma curva causal passado-inextensível começando em p_- . Como $\beta + \gamma$ intersecta A , e β não o faz, γ intersecta A , logo $p_- \in D^+(A)$. Mas então α precisa intersectar $\partial D^+(A)$ que é $A \cup H^+(A)$, pelo item (ii); logo α intersecta $H^+(A)$, contrariando $p \in \text{borda}(H^+(A))$. Portanto $p \in \bar{A}$.

Novamente, seja U vizinhança aberta arbitrária de p , $p_{\pm} \in I^{\pm}(p, U)$ e $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ tipo-tempo, futuro-dirigida de p_- até p_+ , não intersectando $H^+(A)$. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, $\alpha(t_0) \in A$. Agora, $I^+(p) \cap D^+(A) = \emptyset \Rightarrow p_+ \notin D^+(A) \Rightarrow p_+ \notin A$, logo $a < t_0 < b$. Como $\alpha(t_0) \notin H^+(A)$, mas $\alpha(t_0) \in A \subseteq \overline{D^+(A)}$, então $\alpha(t_0) \in J^-(D^+(A))$, e podemos escolher $t_0 < t < b$ tal que $\alpha(t) \in U \cap I^-(D^+(A))$. De $\alpha(t) \in I^+(A) \cap I^-(D^+(A))$ segue que $\alpha(t) \in D^+(A)$. Mas $\alpha(b) = p_+ \notin D^+(A)$, logo para algum $t < t' < b$, $\alpha(t') \in \partial D^+(A) = H^+(A) \cup A$, novamente por (ii), e daí $\alpha(t') \in A$, violando a acronalidade de A . Concluimos que α não pode intersectar A , logo $p \in \text{borda}(A)$, já que

$p \in \bar{A}$ conforme vimos.

Agora, se A é fechado, seja $p \in \text{borda}(A)$. Precisamos verificar que $p \in \text{borda}(H^+(A))$. Mas $p \in \text{borda}(A) \Rightarrow p \in \bar{A} \subseteq \overline{D^+(A)}$, e $I^+(p) \cap D^+(A) = \emptyset$, pela Proposição 5.3.5 item (ii), logo $p \in H^+(A)$. Tudo que precisamos mostrar, portanto, é que α não intersecta $H^+(A)$ em U . Suponha que ela o faça, em algum ponto $\alpha(t_0)$, com $t_0 \in [a, b]$. Seja $V \subseteq U$ vizinhança aberta de $\text{Im}(\alpha)$ com $V \cap A = \emptyset$. Seja β qualquer curva causal, passado-inextensível saindo de p_- . Como $p_- \in I^-(p) \subseteq I^-(A)$, $p_- \notin \overline{D^+(A)}$. $\therefore p_- \notin H^+(A)$. Daí $a < t_0 \leq b$, e $p_- \ll_v \alpha(t_0)$. Como $\alpha(t_0) \in \overline{D^+(A)}$, para algum $p' \in D^+(A)$, temos $p_- \ll_v p' \Rightarrow p_- \in D^+(A)$, uma contradição. $\therefore \alpha$ não intersecta $H^+(A)$ e a demonstração está completa.

(iv) Se $p \in H^+(A)$, seja U qualquer vizinhança aberta de p , e $q \in I^+(p, U)$. Agora, $q \notin D^+(A)$. Se $q \in D^-(A)$, então $p \in I^-(A)$, e podemos tomar $V := U \cap I^-(A)$ como vizinhança aberta de p . Contudo, já que $p \in \overline{D^+(A)}$, $V \cap D^+(A) \neq \emptyset \Rightarrow I^-(A) \cap D^+(A) \neq \emptyset$, uma contradição. Portanto $q \notin D^-(A)$, e assim $q \notin D(A)$. Portanto $p \in \partial D(A)$, e $H^+(A) \subseteq \partial D(A)$. Analogamente, $H^-(A) \subseteq \partial D(A)$. $\therefore H(A) \subseteq \partial D(A)$.

Suponha agora, por absurdo, que existe $p \in \partial D(A) \setminus H(A)$. $\partial D(A) \subseteq \overline{D(A)} = \overline{D^+(A) \cup D^-(A)} = \overline{D^+(A)} \cup \overline{D^-(A)}$. Além disso, $\text{int}(D^\pm(A)) \subseteq \text{int}(D(A))$. $\therefore \partial D(A) \cap \text{int}(D^\pm(A)) = \emptyset \Rightarrow p \in \partial D^+(A) \cup \partial D^-(A) \equiv H(A) \cup A$. $\therefore p \in A = D^+(A) \cap D^-(A) \subseteq \overline{D^+(A)} \cap \overline{D^-(A)} \subseteq \overline{D^+(A)} \cap \overline{D^-(A)}$. Logo, existem $p_\pm \in I^\pm(p) \cap D^\pm(A)$. Seja $p' \in (I^-(p_+) \cap I^+(p_-)) \setminus D(A)$. Tome α_- (α_+) curva tipo-tempo, futuro-dirigida (passado-dirigida) de p_- (p_+) até p' , e β_- (β_+) curva causal, futuro-inextensível (passado-inextensível) começando em p' e não intersectando A . $\alpha_- + \beta_-$ ($\alpha_+ + \beta_+$) precisa intersectar A , portanto α_- (α_+) o faz. Mas isto viola a acronalidade de A . Portanto, $\partial D(A) \setminus H(A) = \emptyset$. $\therefore \partial D(A) = H(A)$. ■

Corolário 5.4.5. *Seja $A \subseteq M$ acronal. O conjunto $H^+(A) \setminus \text{borda}(A)$ é uma hipersuperfície topológica acronal. Em particular, se A é uma hipersuperfície topológica fechada, então $H^+(A)$ também o é.*

Demonstração. Como $H^+(A)$ é acronal, pela proposição 5.4.4 item (i), assim também $S := H^+(A) \setminus \text{borda}(A)$. Afirmamos que $\text{borda}(S) \subseteq \text{borda}(A)$. Seja portanto $p \in \text{borda}(S)$. Em particular, podemos supor $p \notin \text{borda}(H^+(A))$, pois já vimos que $\text{borda}(H^+(A)) \subseteq \text{borda}(A)$. No entanto, $p \in \bar{S} \subseteq H^+(A)$. Logo, existe U vizinhança de p para a qual qualquer curva tipo-tempo em U de $I^-(p, U)$ até $I^+(p, U)$ intersecta $H^+(A)$. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ uma tal curva que não intersecta S . Para algum $t_0 \in [0, 1]$, $\alpha(t_0) \in H^+(A)$. Mas $\alpha(t_0) \notin S$, logo $\alpha(t_0) \in \text{borda}(A)$. Em particular, $\alpha(t_0) \in \bar{A} \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$, o que significa que $p \in \bar{A}$. Como temos também $\alpha(t_0) \in U \cap \text{borda}(A)$, $p \in \overline{\text{borda}(A)}$. $\text{borda}(A)$ é um conjunto fechado, pela proposição 5.3.5 item (i), logo $p \in \text{borda}(A)$. Deste modo, se $p \in S$, então $p \notin \text{borda}(A)$, e daí $p \notin \text{borda}(S)$, isto é, $S \cap \text{borda}(S) = \emptyset$, e S é hipersuperfície topológica. Se A é uma hipersuperfície topológica fechada, então $\text{borda}(A) = \emptyset \Rightarrow S \equiv H^+(A)$, e este último é fechado, pela proposição 5.4.4, item (i). ■

Observação 5.4.6. Os seguintes exemplos mostram que $\text{borda}(A)$ não precisa estar contida em $\text{borda}(H^+(A))$ no caso em que A não é fechado, e $H^+(A)$ pode não ser uma hipersuperfície topológica.

Considere $M = \mathbb{R}^3$, $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Seja $A_1 = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \}$, e $A_2 = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{Q}^3 : x^2 + y^2 < 1 \}$. Estes dois conjuntos são acronais, e nenhum deles é fechado. Claramente, $H^+(A_1)$ é o cone $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, com $z \geq 0$, que não é hipersuperfície, apesar de $borda(A_1) = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \}$ ser a sua "fronteira", e $H^+(A_1) \setminus borda(A_1)$ ser uma hipersuperfície. Mesmo não sendo A_1 fechado, $borda(\overline{A_1}) = borda(H^+(A_1))$.

Por outro lado, $\overline{A_2} = borda(A_2) = H^+(A_2) = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$. Novamente, este conjunto não é uma hipersuperfície, e aqui temos $borda(H^+(A_2)) = \{ (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \} \neq borda(A_2)$. Este exemplo também mostra que podemos ter $H^+(A) \setminus borda(A) = \emptyset$.

Teorema 5.4.7. *Seja $A \subseteq M$ acronal. Para cada $p \in H^+(A) \setminus borda(A)$, existe uma geodésica tipo-luz, passado-dirigida começando em p e contida em $H^+(A)$, que ou é passado-inextensível, ou termina em $borda(A)$.*

Demonstração. Seja $p \in H^+(A) \setminus borda(A)$. Como $I^+(p) \cap D^+(A) = \emptyset$, existe uma sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas causais, passado-inextensíveis $\gamma_n : [0, +\infty) \rightarrow M$ que evitam A , com $p_n := \gamma_n(0) \in I^+(p)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $p_n \rightarrow p$. Pelo Lema da Curva Limite, existe uma curva C^0 , causal e passado-inextensível $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$. Como $H^+(A)$ é acronal, γ é uma pré-geodésica tipo-luz enquanto ela permanecer em $H^+(A)$. Temos agora dois casos a considerar.

(i) $p \notin \bar{A}$.

Neste caso, podemos escolher uma vizinhança aberta de p com $U \cap \bar{A} = \emptyset$. Escolha qualquer $p_- \in I^-(p, U)$, e seja β qualquer curva causal, passado-inextensível saindo de p_- . Como $p \in \overline{D^+(A)}$, podemos escolher $p' \in I^+(p_-, U) \cap D^+(A)$. Seja α qualquer curva tipo-tempo, passado-dirigida de p' até p_- . $\alpha + \beta$ intersecta A , mas α não o faz, já que $Im(\alpha) \subseteq U$, e portanto β intersecta A . Mas então $p_- \in D^+(A) \setminus A$, o que implica $p_- \in I^+(A)$. Em particular, $p \in I^+(A)$, e podemos assumir que $U \subseteq I^+(A)$. Agora, seja $\epsilon > 0$ tal que $\gamma([0, \epsilon]) \subseteq U$, e suponha que para algum $s \in (0, \epsilon]$, $\gamma(s) \notin H^+(A)$. Neste caso, ou $\gamma(s) \notin \overline{D^+(A)}$, ou $\gamma(s) \in \overline{D^+(A)} \cap I^-(D^+(A))$. No segundo caso, eventualmente $\gamma_n(s) \in I^-(D^+(A)) \cap U$. Mas por construção $\gamma_n([s, +\infty))$ não intersecta A , e dada uma curva tipo-tempo, passado-dirigida α_n de $D^+(A)$ a $\gamma_n(s)$, $\alpha_n + \gamma_n|_{[s, +\infty)}$ precisa intersectar A , logo α_n o faz e $\gamma_n(s) \in I^-(A)$. Mas $\gamma_n(s) \in U$, logo $\gamma_n(s) \in I^+(A)$, o que contradiz a acronalidade de A . Concluimos que $\gamma(s) \notin \overline{D^+(A)}$. Contudo, neste caso podemos escolher $q \in I^-(\gamma(s), U \cap (M \setminus \overline{D^+(A)}))$, e como $\gamma(s) \ll p$, $q \ll_U p$. Mas vimos que nesta situação $q \in D^+(A)$, o que é outro absurdo. Portanto $\gamma([0, \epsilon]) \subseteq H^+(A)$.

(ii) $p \in \bar{A} \setminus borda(A)$.

Neste caso, podemos escolher uma vizinhança U de p tal que qualquer curva tipo-tempo, futuro-dirigida de $I^-(p, U)$ até $I^+(p, U)$ intersecta A . Novamente, escolha $\epsilon > 0$ de modo que $\gamma([0, \epsilon]) \subseteq U$, e suponha que para algum $s \in (0, \epsilon]$, $\gamma(s) \notin H^+(A) \cap \bar{A}$. Como $\bar{A} \cap H^+(A)$ é fechado, sendo intersecção de dois fechados, podemos escolher $V \subseteq U$ vizinhança aberta de $\gamma(s)$ tal que $V \cap H^+(A) \cap \bar{A} = \emptyset$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_{n_0}([0, \epsilon]) \subseteq U$, e $\gamma_{n_0}(s) \in V$. Seja $\delta > 0$ e $\gamma_- : [s, s + \delta] \rightarrow U$, $\gamma_+ : [-\delta, 0] \rightarrow U$ curvas tipo-tempo, passado-dirigidas tais que $\gamma_-([s, s + \delta]) \subseteq V$, $\gamma_+([-\delta, 0]) \subseteq I^+(p, U)$. $\gamma_-(s) = \gamma_{n_0}(s)$, e $\gamma_+(0) = \gamma_{n_0}(0) \equiv p_{n_0}$. Seja $\beta : [-\delta, s + \delta] \rightarrow M$; $\beta = \gamma_+ + \gamma_{n_0}|_{[0, s]} + \gamma_-$. Novamente, ou $\gamma(s) \notin \overline{D^+(A)}$, ou então $\gamma(s) \in \overline{D^+(A)} \cap I^-(D^+(A))$. Agora, observe

que $p \ll_v p_{n_0} \ll_v \beta(-\delta)$, logo $\beta(-\delta) \in I^+(p, U)$ e $\beta(s + \delta) \ll_v \beta(s) = \gamma_{n_0}(s)$, e como $\gamma(s) \leq p$, podemos sempre escolher γ_- tal que $\gamma_-(s + \delta) \ll_v \gamma(s) \Rightarrow \beta(s + \delta) \ll_v p \Rightarrow \beta(s + \delta) \in I^-(p, U)$. Se β não intersecta \bar{A} , poderíamos tomar $W \subseteq \bar{W} \subseteq U$ vizinhança aberta de $Im(\beta)$ tal que $\bar{W} \cap \bar{A} = \emptyset$, e então escolher uma curva tipo-tempo em \bar{W} de $\beta(s + \delta)$ a $\beta(-\delta)$ que não intersecta \bar{A} , contrariando a escolha de U . Logo β intersecta \bar{A} . Contudo, γ_- não intersecta \bar{A} por construção e $Im(\gamma_+) \subseteq I^+(p)$, $p \in \bar{A}$, logo γ_+ também não intersecta \bar{A} devido à acronalidade de \bar{A} . Assim, para algum $0 \leq s' \leq s$, $p' = \gamma_{n_0}(s') \in \bar{A}$. Mas $p_- := \beta(s + \delta) \ll_v p' \ll p_+ := \beta(-\delta)$, e se $p' \in \bar{A} \setminus A$ poderíamos construir uma curva tipo-tempo em U de $p_- \in I^-(p, U)$ a $p_+ \in I^+(p, U)$ evitando A , novamente em contradição com a maneira como U foi escolhido. Portanto $p' \in A$. Mas isto implica que γ_{n_0} intersecta A , contrariando a maneira como as curvas γ_n foram escolhidas. Só nos resta concluir que $\gamma([0, \epsilon]) \subseteq \bar{A} \cap H^+(A)$.

Finalmente, suponha que γ deixa $H^+(A)$, e seja $\mathcal{J} := \{ t \in [0, +\infty) : \gamma([0, t]) \subseteq H^+(A) \}$. Defina $t_0 = \sup \mathcal{J}$. Como $H^+(A)$ é fechado, $t_0 \in \mathcal{J}$. Se $\gamma(t_0) \notin \text{borda}(A)$, então $\gamma(t_0) \in H^+(A) \setminus \text{borda}(A)$, e pelo que vimos, existe uma geodésica $\beta : [0, \epsilon] \rightarrow M$ tipo-luz, passado-dirigida em $H^+(A)$ com $\beta(0) = \gamma(t_0)$, e em particular $t_0 > 0$. Se $\beta'(0) \neq \lambda \gamma'(t_0)$, para qualquer $\lambda > 0$, a curva $\bar{\gamma} : [0, t_0 + \epsilon] \rightarrow M$ dada por $\bar{\gamma}|_{[0, t_0]} = \gamma|_{[0, t_0]}$, $\bar{\gamma}|_{[t_0, t_0 + \epsilon]}(s) = \beta(s - t_0)$, $\forall t_0 \leq s \leq t_0 + \epsilon$, não seria uma pré-geodésica tipo-luz, e teríamos $\beta(\epsilon) \ll \gamma(t_0)$, contrariando a acronalidade de $H^+(A)$. Logo $\bar{\gamma}$ pode ser reparametrizada como uma geodésica tipo-luz, de modo que $\bar{\gamma}|_{[0, t_0 + \epsilon]} \equiv \gamma|_{[0, t_0 + \epsilon]}$, contrariando a definição de t_0 como supremo de \mathcal{J} . Concluimos que $\gamma(t_0) \in \text{borda}(A)$, e a prova está completa. ■

Definição 5.4.8. Um conjunto acronal $A \subseteq M$ é dito ser uma hipersuperfície de Cauchy futura quando $J^+(A) \subseteq D^+(A)$. Definimos hipersuperfície de Cauchy passada de maneira dual.

Teorema 5.4.9. Um conjunto acronal $A \subseteq M$ é uma hipersuperfície de Cauchy futura se, e somente se, $H^+(A) = \emptyset$, e em caso afirmativo, A é uma hipersuperfície topológica fechada.

Demonstração. (\Rightarrow) Se $p \in H^+(A)$, seja $q \in I^+(p)$. Como $p \in \overline{D^+(A)}$, podemos escolher $p' \in I^-(q) \cap D^+(A)$. Então $p' \in J^+(A) \Rightarrow q \in I^+(A) \subseteq D^+(A)$, uma contradição. Logo $H^+(A) = \emptyset$.

(\Leftarrow) Seja $p \in J^+(A) \setminus D^+(A)$, e $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ curva causal, passado-dirigida com $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) \in A$. Seja $\mathcal{J} := \{ t \in [0, 1] : \alpha([0, t]) \subseteq M \setminus D^+(A) \}$, e defina $t_0 = \sup \mathcal{J}$. Claramente $\alpha(t_0) \in \partial D^+(A) = H^+(A) \cup A \equiv A$ (pois $H^+(A) = \emptyset$). Tome $q \in I^+(\alpha(t_0))$. Já que $p \notin D^+(A)$, $\alpha(0) \neq \alpha(t_0)$, e podemos escolher $\epsilon > 0$ tal que $0 < t_0 - \epsilon$ e $\alpha([t_0 - \epsilon, t_0]) \subseteq I^-(q)$. Mas $\alpha(t_0 - \epsilon) \notin D^+(A)$, e assim existe uma curva β causal, passado-inextensível começando em $\alpha(t_0 - \epsilon)$ que evita A . Seja γ uma curva tipo-tempo, passado-dirigida de q a $\alpha(t_0 - \epsilon)$. Se γ intersecta A , então $(\alpha(t_0 - \epsilon) \notin D^+(A) \Rightarrow \alpha(t_0 - \epsilon) \notin A)$ temos $\alpha(t_0) \leq \alpha(t_0 - \epsilon) \in I^-(A) \Rightarrow \alpha(t_0) \in A \cap I^-(A)$, violando acronalidade. Portanto $\alpha + \beta$ não intersecta A , e $q \notin D^+(A)$. Isto implica $I^+(\alpha(t_0)) \cap D^+(A) = \emptyset$. $\therefore \alpha(t_0) \in H^+(A) = \emptyset$, um absurdo. Logo $J^+(A) \setminus D^+(A) = \emptyset \Rightarrow J^+(A) \subseteq D^+(A)$.

Suponha agora que A é uma hipersuperfície de Cauchy futura. Se $p \in \bar{A} \setminus A$, seja $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow M$ uma curva tipo-tempo, passado-inextensível com $\alpha(1) = p$. Como \bar{A} é acronal, α intersecta \bar{A} apenas em p , e em particular α não intersecta

A . Mas $\alpha(0) \in I^+(\bar{A}) = I^+(A)$, e $\alpha(0) \notin D^+(A)$, uma contradição. Logo A é fechada. $p \in \text{borda}(A) \Rightarrow I^+(p) \cap D^+(A) = \emptyset$ e $p \in \bar{A} \subseteq \overline{D^+(A)}$, isto é, $p \in H^+(A)$, novamente um absurdo. Logo $\text{borda}(A) = \emptyset$, e A é uma hipersuperfície topológica fechada, como queríamos. ■

Corolário 5.4.10. *Seja $A \subseteq M$ um conjunto acronal não vazio. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) A é uma hipersuperfície de Cauchy.
- (ii) A é uma hipersuperfície de Cauchy futura e passada.
- (iii) $H(A) = \emptyset$.

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii) Como $M = D(A)$, $J^\pm(A) \subseteq D(A)$, mas $J^\pm(A) \cap I^\mp(A) = \emptyset$ da acronalidade, logo $J^\pm(A) \cap (D^\mp(A) \setminus A) = \emptyset \Rightarrow J^\pm(A) \subseteq D^\pm(A)$.

(ii) \Rightarrow (iii) Temos $H^+(A) = H^-(A) = \emptyset \Rightarrow H(A) = \emptyset$.

(iii) \Rightarrow (i) $H(A) = \emptyset \Rightarrow \partial D(A) = \emptyset \Rightarrow D(A) = M$. ■

Observação 5.4.11. É perfeitamente possível que um espaço-tempo possua uma hipersuperfície de Cauchy futura e uma hipersuperfície de Cauchy passada, mas nenhuma hipersuperfície de Cauchy. Por exemplo, se $M = \mathbb{R}_1^2 \setminus \{(0, 0)\}$, os conjuntos $A_\pm = \{(x, \pm 1) \in \mathbb{R}_1^2 : x \in \mathbb{R}\}$ são respectivamente hipersuperfície de Cauchy futura e passada, mas este espaço-tempo não admite uma hipersuperfície de Cauchy, como vimos no Exemplo 5.2.14.

Por outro lado, um espaço-tempo pode ser globalmente hiperbólico e ainda assim conter uma hipersuperfície de Cauchy futura (ou passada) que não é hipersuperfície de Cauchy. Este é o caso se tomarmos $M = \mathbb{R}_1^2$, com a métrica de Lorentz usual g_0 , e definir $A_\pm = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2 : y = \pm \sqrt{1 + x^2}\}$. Apesar de (M, g_0) ser globalmente hiperbólico, A_+ é uma hipersuperfície de Cauchy futura, mas não é hipersuperfície de Cauchy passada, sendo a situação reversa no caso de A_- . Ilustramos o caso de A_- abaixo.

Teorema 5.4.12. *Seja $A \subseteq M$ hipersuperfície topológica acronal e fechada. Se vale ao menos uma das condições:*

- (i) (M, g) é globalmente hiperbólico e A é compacto; ou
 - (ii) A é acausal (portanto hipersuperfície de Cauchy parcial) e toda geodésica tipo-luz inextensível intersecta A ,
- então A é uma hipersuperfície de Cauchy.

Demonstração. Suponha que A não é uma hipersuperfície de Cauchy. Pelo corolário 5.4.10, ou $H^+(A) \neq \emptyset$, ou $H^-(A) \neq \emptyset$. Suponha, por exemplo, que $H^+(A) \neq \emptyset$, sendo o outro caso análogo. Se vale (i), seja $p \in H^+(A)$. Como $\text{borda}(A) = \emptyset$, pelo teorema 5.4.7, existe uma geodésica tipo-luz, passado-inextensível γ em $H^+(A)$ começando em p . Agora, ou $p \in A$, ou então podemos escolher uma vizinhança aberta de p com $U \cap A = \emptyset$, já que A é fechado. Neste caso, para $p_- \in I^-(p, U)$, podemos encontrar $p' \in I^+(p_-, U) \cap D^+(A)$, e como $p_- \ll_v p'$, $p_- \in D^+(A) \subseteq J^+(A)$, e $p_- \ll_v p \Rightarrow p \in I^+(A)$. De qualquer forma $p \in J^+(A)$. Por outro lado, $\text{Im}(\gamma) \subseteq H^+(A) \subseteq D^+(A) \subseteq J^+(A) = J^+(A)$, uma vez que $J^+(A)$ é fechado para A compacto, pois (M, g) é globalmente hiperbólico. Mas então $\text{Im}(\gamma) \subseteq J^-(p) \cap J^+(A)$, e este último conjunto é compacto, novamente porque (M, g) é globalmente hiperbólico e A é

compacto. Como (M, g) é em particular fortemente causal, e γ é inextensível, então γ não pode ficar aprisionada em um compacto, e chegamos numa contradição.

Por outro lado, suponha (ii) válida. Se $p \in H^+(A) \cap A$, a demonstração do Teorema 5.4.7 estabelece a existência de uma geodésica tipo-luz, passado-dirigida $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow M$ com $\gamma([0, \epsilon]) \subseteq H^+(A) \cap A$ e $\gamma(0) = p$, contrariando a acausalidade de A . Logo $H^+(A) \cap A = \emptyset$. Seja $p \in H^+(A)$. O gerador de $H^+(A)$ que passa por p é uma geodésica $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ tipo-luz, futuro-dirigida e inextensível com $\gamma(t_0) = p$ para $a < t_0 < b$. Devemos ter $\gamma((a, t_0]) \subseteq H^+(A)$, já que $\text{borda}(A) = \emptyset$ e $\gamma((a, t_0]) \cap A = \emptyset$. Então para algum $t_0 < t < b$, $\gamma(t) \in A$, pela hipótese (ii). Ora, $A \subseteq \overline{D^+(A)}$, e se algum $q \in I^+(\gamma(t)) \cap D^+(A)$, então $q \in I^+(p) \cap D^+(A)$, o que é impossível. Logo $I^+(\gamma(t)) \cap D^+(A) = \emptyset$, e $\gamma(t) \in H^+(A) \setminus A$. Com essa última contradição, concluímos a prova. ■

5.5 Hipersuperfícies tipo-espaço

Lema 5.5.1. *Toda hipersuperfície $S \subseteq M$ acronal e tipo-espaço é também acausal.*

Demonstração. Suponha que não. Então, existem $p, q \in S$, $p \neq q$, tais que $p < q$. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva causal, futuro-dirigida com $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Como $p \not\prec q$, α precisa ser uma pré-geodésica tipo-luz, normal a S em p , o que é impossível pois $T_p S \subseteq T_p M$ é tipo-espaço. ■

Observação 5.5.2. Um hipersuperfície tipo-espaço não precisa ser acronal. Considere, por exemplo, o helicóide

$$\begin{aligned} \sigma : (0, 2\pi) \times (1, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}_1^3 \\ (u, v) &\mapsto (v \cos(u), v \sin(u), u). \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= (-v \sin(u), v \cos(u), 1) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (\cos(u), \sin(u), 0). \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -v \sin(u) & v \cos(u) & 1 \\ \cos(u) & \sin(u) & 0 \end{vmatrix} = (-b \sin(u), b \cos(u), -v) \neq (0, 0, 0). \end{aligned}$$

$S := \text{Im}(\sigma)$ é uma hipersuperfície regular, e $\{\frac{\partial \sigma}{\partial u}|_p, \frac{\partial \sigma}{\partial v}|_p\}$ é base de $T_p S$ (cf. referência [Man2]). Note que $g\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) = 0$, $g\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) = v^2 - b^2$ e $g\left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}, \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right) = 1$. Assim, $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ são ambos tipo-espaço, e portanto $T_p S \subseteq T_p \mathbb{R}_1^3$ é tipo-espaço, $\forall p \in S$. Logo S é tipo-espaço. Mas S não é acronal. Considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, dada por $\gamma(t) = (2, 0, t)$. γ é uma curva tipo-tempo,

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= (2, 0, 0) = \sigma(0, 2) \in S, \\ \text{e } \gamma(2\pi) &= (2, 0, 2\pi) = \sigma(2\pi, 2) \in S. \end{aligned}$$

Lema 5.5.3. *Se $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície topológica acausal, então $D(S)$ é aberto (e portanto globalmente hiperbólico).*

Demonstração. Estabeleceremos o resultado através de uma série de afirmações.

Afirmção 1: $I(S) := I^-(S) \cup S \cup I^+(S)$ é aberto.

É suficiente considerar $p \in S$. Se $I(S)$ não é aberto, existe uma sequência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $M \setminus I(S)$ com $p_n \rightarrow p$. Em particular, $p_n \notin D^-(S) \cup D^+(S)$. Podemos então assumir a existência de uma sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas tipo-tempo, futuro-dirigidas e inextensíveis, evitando S , digamos $\gamma_n : (a_n, b_n) \rightarrow M$, com $a_n < 0 < b_n$ e $\gamma_n(0) \equiv p_n \rightarrow p$. Seja U uma vizinhança aberta qualquer de p . Escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que γ_{n_0} intersecta U . Existe $\delta > 0$ tal que a imagem de $\gamma := \gamma_{n_0}|_{[-\delta, \delta]}$ está contida em U . Tome $p_{\pm} \in I^{\pm}(p, U)$, tais que $p \in U_0 := I^+(p_-, U) \cap I^-(p_+, U)$. Como $U_0 \subseteq U$ é uma vizinhança aberta de p , aumentando n_0 se necessário podemos assumir $\gamma([-\delta, \delta]) \subseteq U_0$. Podemos então estender γ para uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida em U de p_- a p_+ . Como $\gamma_{n_0}(0) \in \text{Im}(\gamma)$ não pertence a $I(S)$, por hipótese, essa extensão evita S , e portanto $p \in \text{borda}(S)$. Mas $\text{borda}(S) \cap S = \emptyset$, um absurdo.

Afirmção 2: $S \subseteq \text{int}(D(S))$.

Suponha que existe $p \in S \setminus \text{int}(D(S))$. Existe uma sequência $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas causais, futuro-dirigidas e inextensíveis $\gamma_n : (a_n, b_n) \rightarrow M$ com $a_n < 0 < b_n$, evitando S , tais que $\gamma_n(0) \rightarrow p$. Seja $U \subseteq I(S)$ uma vizinhança convexa (aberta) de p , e $\mathcal{N} \subseteq U$ uma vizinhança aberta de p com fecho $\overline{\mathcal{N}} \subseteq U$ compacto. Podemos assumir que $\gamma_n(0) \in I^+(S) \cap \mathcal{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e que as γ_n 's não estão contidas em \mathcal{N} , já que podemos assumir causalidade forte em $(U, g|_U)$, pela Proposição 4.1.16. Para cada $n \in \mathbb{N}$, define $s_n = \sup\{t \in (a_n, 0) : \gamma_n(t) \in \partial\mathcal{N}\}$. Obviamente, $s_n \in (a_n, 0)$ e $\gamma_n(s_n) =: e_n \in \partial\mathcal{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Podemos também assumir $e_n \rightarrow e \in \partial\mathcal{N}$, pela compacidade, $e_n \leq_U \gamma_n(0)$, e como U é convexo, $e \leq_U p$, pelo Lema 3.2.2, logo $e \in J^-(p)$. Mas $e \neq p$, logo $e \notin S$, já que S é acausal. Se $e \in I^+(S)$, então $p \in I^+(S)$, violando a acronalidade de S . Suponha agora que $p \in I^-(S)$. Para n suficientemente grande, $e_n = \gamma_n(s_n) \in I^-(S)$ e $\gamma_n([s_n, 0]) \subseteq I(S)$. Pela acronalidade de S , $I^-(S) \subseteq M \setminus I^+(S)$. Observamos agora que $\partial I^+(S) \cap I(S) = S$. De fato, a inclusão $S \subseteq \partial I^+(S) \cap I(S)$ é evidente. Seja $q \in \partial I^+(S) \cap I(S)$. Como $I^+(S)$ é aberto, $q \notin I^+(S)$. Se $q \in \partial I^+(S) \cap I^-(S)$, então como $I^-(S)$ é aberto, $I^-(S) \cap I^+(S) \neq \emptyset$, violando acronalidade. Logo $q \in S$, e aí $\partial I^+(S) \cap I(S) \subseteq S$. Temos $\gamma_n(0) \in I^+(S)$, $\gamma_n(s_n) \in M \setminus I^+(S)$, logo $\gamma_n|_{(0, s_n)}$ cruza $\partial I^+(S)$, e como $\gamma_n([0, s_n]) \subseteq I(S)$, ela cruza em um ponto de S , uma contradição. Logo $e \notin I(S)$. Mas isto contradiz $e \in \partial\mathcal{N} \subseteq \overline{\mathcal{N}} \subseteq I(S)$. Esta última contradição estabelece a afirmação.

Afirmção 3: $D^+(S) \setminus S = I^+(S) \cap D(S)$ é aberto.

Suponha que não. Então existe $p \in D^+(S) \setminus S$ que não é interior, e portanto uma sequência $\{\sigma_n : [0, a_n) \rightarrow M\}_{n \in \mathbb{N}}$ de curvas causais e passado-inextensíveis, evitando S , com $\sigma_n(0) \rightarrow p$. Seja $\sigma : [0, a) \rightarrow M$ curva limite, C^0 , causal e passado-inextensível. Temos $\sigma(0) = p$, logo existe um único $0 < t_0 < a$ para o qual $\sigma(t_0) \in S$, pela acausalidade de S , e o fato de que $p \in D^+(S)$. Pela afirmação 2, $\sigma(t_0) \in \text{int}(D(S))$. Escolha qualquer $0 < t_1 < t_0$ tal que $\sigma(t_1) \in \text{int}(D(S))$. Novamente pela acausalidade, $\sigma(t_1) \notin S$. Se $\sigma(t_1) \in D^-(S)$, isto violaria acronalidade, então $\sigma(t_1) \in D^+(S) \setminus S \Rightarrow \sigma(t_1) \in I^+(S)$. Mas então, como $\sigma_n(t_1) \rightarrow \sigma(t_1)$, para n grande o suficiente, $\sigma_n(t_1) \in I^+(S) \cap D(S) = D^+(S) \setminus S$, e assim σ_n intersectaria S , uma contradição. Isto prova a afirmação.

Analogamente, pode-se verificar que $D^-(S) \setminus S$ é aberto. Seja $q \in D(S)$. Se $q \in D^+(S) \setminus S \subseteq \text{int}(D^+(S) \setminus S) \subseteq \text{int}(D(S))$, terminamos. Do contrário, $q \in S \subseteq \text{int}(D(S))$ pela afirmação 2. Logo $D(S) \subseteq \text{int}(D(S))$. ■

Observação 5.5.4. O Lema 5.5.3 acima não é verdadeiro se retirarmos a hipótese de S ser uma hipersuperfície topológica e/ou se S é apenas acronal, mas não acausal. Por exemplo, seja $M = \mathbb{R}_1^2$. Considere os seguintes casos.

(i) $S = [-1, 1] \times \{0\}$.

S é acausal, mas não hipersuperfície topológica, pois $\text{borda}(S) \cap S = \{(-1, 0), (1, 0)\}$. Neste caso, $D(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}_1^2 : |x| + |y| \leq 1\}$, que é fechado, e não é aberto.

(ii) $S = (-1, 0) \times \{0\} \cup \{(x, -x) \in \mathbb{R}_1^2 : 0 \leq x < 1\}$.

S é uma hipersuperfície topológica acronal, mas não acausal. Claramente, $\{(x, -x) \in \mathbb{R}_1^2 : 0 \leq x < 1\} \subseteq D(S)$, e nenhum ponto deste conjunto é interior, de modo que $D(S)$ não é aberto.

Teorema 5.5.5. *Seja $S \subseteq M$ uma hipersuperfície C^∞ fechada, tipo-espaço e acronal. Dado $q \in D^+(S)$, existe uma geodésica γ de S a q , normal a S e sem pontos focais antes de q . Além disso, $L(\gamma) = \tau(q, S)$, onde τ é a distância Lorentziana. Em particular, se $q \notin S$, então γ é tipo-tempo.*

Demonstração. O resultado é imediato para $q \in S$. Suponha que $q \in D^+(S) \setminus S$. Pelos lemas 5.5.1 e 5.5.3, S é uma hipersuperfície topológica acausal, e assim $D(S)$ é aberto e globalmente hiperbólico. A aplicação $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \tau(q, p)$ é portanto contínua, pelo Corolário 4.4.4. Agora, $D^+(S) \cap J^-(q)$ é compacto. $K := S \cap J^-(q) \equiv S \cap (D^+(S) \cap J^-(q))$ é um subconjunto fechado de $D^+(S) \cap J^-(q)$, portanto compacto, pela Proposição 5.3.11. $F := f|_K$ é contínua, portanto existe $p \in J^-(q) \cap S$ que é um máximo global. Claramente, $\tau(p, q) \equiv \tau(S, q)$. Além disso, existe γ geodésica de p a q em $D^+(S)$ com $\tau(q, p) = L(\gamma)$, pela hiperbolicidade global de $D(S)$. γ é normal a S e portanto tipo-tempo, e não possui pontos focais antes de q , pela maximalidade. ■

O próximo Lema, que enunciaremos sem prova, é uma consequência direta da teoria de interseção *mod* 2. Para uma demonstração, ver referência [GP], pg. 78.

Lema 5.5.6. *Uma curva fechada que intersecta uma hipersuperfície fechada S em um único ponto de maneira transversal não é livremente homotópica a uma curva fechada que não intersecta S . □*

Definição 5.5.7. *Uma hipersuperfície conexa e fechada $S \subseteq M$ é dita ser bilateral se existir $\mathcal{N} \subseteq M$ vizinhança aberta e conexa de S tal que $\mathcal{N} \setminus S = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$, onde \mathcal{N}^\pm são abertos conexos e não-vazios com $\mathcal{N}^+ \cap \mathcal{N}^- = \emptyset$.*

Lema 5.5.8. *Toda hipersuperfície tipo-espaço $S \subseteq M$ fechada e conexa é bilateral.*

Demonstração. Seja \mathcal{N} uma vizinhança normal de S , isto é, existe $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq NS$ aberto com $\mathcal{Z} \subseteq \tilde{\mathcal{N}}$ (aqui, $\mathcal{Z} = \{0_p \in T_p M : p \in S\}$ é a seção zero do fibrado normal, NS) tal

que $\exp^+|_{\tilde{\mathcal{N}}} : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$ é um difeomorfismo³. Seja $X : M \rightarrow TM$ qualquer campo vetorial suave, tipo-tempo e futuro-dirigido. Defina $f : \tilde{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(v) = \langle v, X(\Pi_{NS}(v)) \rangle$, onde $\Pi_{NS} : NS \rightarrow S$ é a projeção canônica. Note que f é contínua, e como S é tipo-espaço, todo $v \in \tilde{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{Z}$ é tipo-tempo. Assim temos $f(v) > 0$ ou $f(v) < 0$, $\forall v \in \tilde{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{Z}$, e $f(v) < 0 \Leftrightarrow v$ é futuro-dirigido. Defina $\tilde{\mathcal{N}}^+ := f^{-1}(-\infty, 0)$ e $\tilde{\mathcal{N}}^- := f^{-1}(0, +\infty)$; estes conjuntos são abertos, disjuntos e não-vazios.

Afirmção 1: \mathcal{N} é conexa.

De fato, sejam $p, q \in \mathcal{N}$. Então, existem $p_0, q_0 \in S$ e $v_p \in N_{p_0}S, v_q \in N_{q_0}S$ tais que as curvas (na verdade, geodésicas)

$$\begin{aligned} \sigma_p : [0, 1] &\rightarrow \mathcal{N} & \sigma_q : [0, 1] &\rightarrow \mathcal{N} \\ t &\mapsto \exp_{p_0}(tv_p) & t &\mapsto \exp_{q_0}(tv_q) \end{aligned}$$

conectam p_0 a p e q_0 a q , respectivamente. Como $S \subseteq \mathcal{N}$ é conexa, existe uma curva contínua γ em S conectando p_0 e q_0 . Justapondo $-\sigma_p + \gamma + \sigma_q$, obtemos uma curva contínua em \mathcal{N} de p a q .

Afirmção 2: $\mathcal{N}^\pm := \exp^+(\tilde{\mathcal{N}}^\pm)$ são subconjuntos conexos e abertos de \mathcal{N} , e $\mathcal{N} \setminus S = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-$.

Temos $p \in \mathcal{N} \setminus S \Leftrightarrow \exists v \in \tilde{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{Z}$ com $p = \exp^+(v)$, isto é,

$$\mathcal{N} \setminus S \equiv \exp^+(\tilde{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{Z}) \equiv \exp^+(\tilde{\mathcal{N}}^+ \cup \tilde{\mathcal{N}}^-) \equiv \exp^+(\tilde{\mathcal{N}}^+) \cup \exp^+(\tilde{\mathcal{N}}^-) = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^-.$$

Por construção, \mathcal{N}^\pm são abertos, não-vazios e disjuntos. Sejam agora $v^1, v^2 \in \tilde{\mathcal{N}}^+$. Então $v^i \in N_{p_i}S$, $i = 1, 2$. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ qualquer curva contínua conectando p_1 e p_2 . O campo vetorial (C^∞) normal $V : S \rightarrow NS$, $V(p) = \text{Nor}(X(p))$ é sempre tipo-tempo e futuro-dirigido, já que X é futuro-dirigido. Como $[0, 1]$ é compacto, existe $\delta > 0$ tal que $\delta V(\alpha(t)) \subseteq \tilde{\mathcal{N}}^+$, $\forall t \in [0, 1]$. A curva $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}^+$, onde $\tilde{\alpha}(t) = \delta V(\alpha(t))$, conecta múltiplos dos vetores v^i , de modo que $\tilde{\mathcal{N}}^+$ é conexo. Analogamente, $\tilde{\mathcal{N}}^-$ é conexo. Como $\exp^+|_{\mathcal{N}}$ é um difeomorfismo, \mathcal{N}^\pm são conexos. ■

No que segue, π_1 denota o grupo fundamental. Um breve tratamento deste tema em particular, juntamente com recobrimentos Pseudo-Riemannianos, pode ser encontrado no Apêndice A da referência [O'NEILL].

Teorema 5.5.9. *Seja $S \subseteq M$ hipersuperfície conexa e fechada, tipo-espaço.*

(i) *Se a aplicação $j_\# : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ induzida pela inclusão $j : S \rightarrow M$ é sobrejetiva, então $M \setminus S$ não é conexa (dizemos neste caso que S separa M).*

(ii) *Se S separa M , então S é acronal.*

Demonstração. (i) Suponha $M \setminus S$ conexa. Escolha $p \in S$, e seja $\alpha : [-1, 1] \rightarrow M$ qualquer curva tipo-tempo, futuro-dirigida intersectando S exatamente uma vez em $\alpha(0) \equiv p$. Tome $\gamma : [0, 1] \rightarrow M \setminus S$ curva contínua com $\gamma(0) = \alpha(1)$ e $\gamma(1) = \alpha(-1)$. Então $\alpha|_{[0,1]} + \gamma + \alpha|_{[-1,0]}$ é um *loop* contínuo em $p \in M$. A hipótese significa que existe uma homotopia de ponto fixo que deforma este *loop* em outro da forma $\beta : [0, 1] \rightarrow S$

³Que tal vizinhança sempre existe é provado à pg. 200 de [O'NEILL].

em p . Seja $V : S \rightarrow NS$ um campo vetorial C^∞ tipo-tempo, futuro-dirigido e \mathcal{N} uma vizinhança normal de S . Podemos sempre assumir que $\exp^+(V(\beta(t))) \in \mathcal{N}$, $\forall t \in [0, 1]$. A aplicação

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}$$

$$(s, t) \mapsto \exp^+(sV(\beta(t)))$$

é uma homotopia livre entre β e uma curva que não intersecta S , em contradição com o lema 5.5.6.

(ii) Suponha que S não é acronal, e seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida com $\alpha(0), \alpha(1) \in S$. Podemos assumir que $\alpha(0, 1) \subseteq M \setminus S$ sem perda de generalidade, já que S é fechada, e α a intersecta transversalmente. Tome $\mathcal{N} = \mathcal{N}^+ \cup \mathcal{N}^- \cup S$ como na demonstração do Lema 5.5.8. Afirmamos que existem números $0 < a < b < 1$ tais que $\alpha(a) \in \mathcal{N}^+$ e $\alpha(b) \in \mathcal{N}^-$. De fato, seja $((x^1, \dots, x^n), U)$ um sistema de coordenadas numa vizinhança de $\alpha(0)$, adaptado a S , tal que $U \subseteq \mathcal{N}$ e $p \in U \cap S \Leftrightarrow x^1(p) = 0$. Agora, $\nabla x^1(\alpha(0))$ é obviamente tipo-tempo, pois é ortogonal à hipersuperfície de "nível zero" $S \cap U$. Portanto, podemos assumir que ∇x^1 é tipo-tempo em U , por continuidade, e passado-dirigido. Estas condições garantem que $(x^1 \circ \alpha)$ seja crescente, dado que $(x^1 \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla x^1(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle$. Como $S \cap U$ corresponde ao nível zero de x^1 e $(x^1 \circ \alpha)$ é crescente, para valores de t suficientemente pequenos, $\alpha(t)$ não volta a intersectar S . Escolha $\delta > 0$ tal que $\alpha([0, \delta]) \cap S = \emptyset$, $\alpha([0, \delta]) \subseteq V$ e $\Pi_{NS}[(\exp^+)^{-1}(\alpha[0, \delta])] \subseteq V$, onde $V \subseteq U$ é um aberto convexo. Tome $0 < a < \delta$. Como $\alpha(a) \notin S$, $v := (\exp^+)^{-1}(\alpha(a))$ é um vetor tipo-tempo em um ponto $p_a \in S \cap U$.

Afirmamos que v é futuro-dirigido, de maneira que $\alpha(a) \in \mathcal{N}^+$. Com efeito, se a geodésica radial $\sigma_v : [0, 1] \rightarrow V$, $\sigma_v(t) = \exp^+(tv)$ (que fica em V , pois este é convexo) fosse passado-dirigida, então a curva $\gamma := \alpha|_{[0, a]} + (-\sigma_v)$ seria futuro-dirigida, permaneceria em U e vai de $\alpha(0)$ a p_a , ambos em S . Contudo, $(x^1 \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla x^1(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle > 0$, pois escolhemos ∇x^1 passado-dirigido. Assim x^1 cresce ao longo de γ , mas tem que ser zero em ambos os extremos, pois estes estão em S , o que é um absurdo. Portanto $\alpha(a) \in \mathcal{N}^+$. Analogamente, podemos provar que para um certo $a < b < 1$, $\alpha(b) \in \mathcal{N}^-$. Sejam $p, q \in M \setminus S$. Como M é conexa, existe uma curva contínua $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ com $\beta(0) = p$, $\beta(1) = q$. Se $\beta([0, 1]) \subseteq M \setminus S$, terminamos. Senão, existem $c < d \in (0, 1)$ tais que $\beta([0, c]), \beta([d, 1]) \subseteq M \setminus S$, com $\beta(c), \beta(d) \in \mathcal{N}$. Se $\beta(c), \beta(d)$ estão ambos em \mathcal{N}^\pm , então eles podem ser conectados por uma curva contínua em $\mathcal{N}^\pm \subseteq M \setminus S$. Do contrário, se $\beta(c) \in \mathcal{N}^+$ e $\beta(d) \in \mathcal{N}^-$, digamos, então eles podem ser conectados respectivamente a $\alpha(a)$ por uma curva em \mathcal{N}^+ e a $\alpha(b)$ por uma curva em \mathcal{N}^- . Em qualquer caso, p, q podem ser conectados por uma curva em $M \setminus S$. Logo $M \setminus S$ é um conjunto conexo, contrariando a hipótese de que S separa M . Concluímos então que S é acronal. ■

Corolário 5.5.10. *Se $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície conexa, fechada e tipo-espaço, e M é simplesmente conexa, então S é acronal (e portanto acausal).*

Observação 5.5.11. A hipótese de ser fechada é fundamental. O helicóide, apresentado na Observação 5.5.2, é uma hipersuperfície conexa, tipo-espaço dentro de \mathbb{R}_1^3 , que é simplesmente conexa. Contudo, como vimos, ele não é acronal, não sendo fechado.

Teorema 5.5.12. *Se $S \subseteq M$ é hipersuperfície conexa, fechada e tipo-espaço, então existe um espaço-tempo $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ e um recobrimento Pseudo-Riemanniano $k : \widetilde{M} \rightarrow M$ tal que, se \widetilde{S} é uma componente conexa de $k^{-1}(S)$, então $k|_{\widetilde{S}} : \widetilde{S} \rightarrow S$ é uma isometria (em particular um difeomorfismo) e \widetilde{S} é uma hipersuperfície acronal, conexa, fechada e tipo-espaço em \widetilde{M} .*

Demonstração. Seja $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ um espaço-tempo com $k : \widetilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento Pseudo-Riemanniano qualquer. Fixe \widetilde{S} uma componente conexa de $k^{-1}(S)$, e seja $\widetilde{p} \in \widetilde{S}$. Existe uma vizinhança aberta \widetilde{U} de \widetilde{p} em \widetilde{M} e uma vizinhança aberta U de $p \equiv k(\widetilde{p})$ em M tal que $k|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \rightarrow U$ é uma isometria. Podemos assumir que U é o domínio de um sistema de coordenadas $\xi = (x^1, \dots, x^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M em p , de maneira que $\xi \circ k|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um sistema de coordenadas de \widetilde{M} em \widetilde{p} . Se tomarmos ainda ξ adaptado a S , ou seja, $q \in U \cap S \Leftrightarrow x^1(q) = 0$, então

$$\widetilde{q} \in \widetilde{U} \cap \widetilde{S} \Leftrightarrow k|_{\widetilde{U}}(\widetilde{q}) \in U \cap S \Leftrightarrow x^1 \circ k|_{\widetilde{U}}(\widetilde{q}) = 0,$$

logo $(\xi \circ k|_{\widetilde{U}}, \widetilde{U})$ é adaptado para \widetilde{S} . Portanto, \widetilde{S} é uma hipersuperfície fechada (e conexa) em \widetilde{M} . Além disso, dados $\widetilde{v}, \widetilde{w} \in T_{\widetilde{p}}\widetilde{S} \subseteq T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$, temos

$$\widetilde{g}_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}, \widetilde{w}) = g_p(d(k|_{\widetilde{U}})_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}), d(k|_{\widetilde{U}})_{\widetilde{p}}(\widetilde{w})),$$

já que k é isometria local, logo

$$\widetilde{g}_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}, \widetilde{v}) = g_p(d(k|_{\widetilde{U}})_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}), d(k|_{\widetilde{U}})_{\widetilde{p}}(\widetilde{v})) \geq 0, \text{ e}$$

$$\widetilde{g}_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}, \widetilde{v}) = 0 \Rightarrow d(k|_{\widetilde{U}})_{\widetilde{p}}(\widetilde{v}) = 0 \Rightarrow \widetilde{v} = 0.$$

Portanto \widetilde{S} é tipo-espaço, e $k|_{\widetilde{S}} : \widetilde{S} \rightarrow S$ é uma isometria local (Riemanniana).

Agora, construiremos $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ e $k : \widetilde{M} \rightarrow M$ da seguinte forma. Se $j : S \rightarrow M$ denota a inclusão, então $j_{\#} : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ é injetiva. Assim, existe um recobrimento $k : \widetilde{M} \rightarrow M$, com \widetilde{M} conexa, tal que $k_{\#}(\pi_1(\widetilde{M})) = \text{Im}(j_{\#}) = j_{\#}(\pi_1(S)) \subseteq \pi_1(M)$. Podemos definir (via pullback) uma métrica \widetilde{g} em \widetilde{M} , e dar uma orientação temporal a $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, de modo que $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ se torna um espaço-tempo e k um recobrimento Pseudo-Riemanniano. Vimos que uma componente conexa \widetilde{S} de $k^{-1}(S)$ é uma hipersuperfície fechada, conexa e tipo-tempo em \widetilde{M} e que $k|_{\widetilde{S}} : \widetilde{S} \rightarrow S$ é uma isometria local.

Afirmção 1: $k|_{\widetilde{S}}$ é injetiva.

Com efeito, tome $\widetilde{p} \in \widetilde{S}$ e $p = k(\widetilde{p}) \in S$ como pontos de base para $\pi_1(\widetilde{M})$ e $\pi_1(M)$, respectivamente. Seja $\widetilde{q} \in \widetilde{S}$, tal que $k(\widetilde{q}) = p$, $\beta : [0, 1] \rightarrow \widetilde{S}$ uma curva qualquer de \widetilde{p} a \widetilde{q} . Agora, $\beta = k \circ \beta$ é um loop em S , e sendo $j_{\#}([\beta]) \in \text{Im}(j_{\#})$, existe um loop $\widetilde{\alpha}$ em \widetilde{M} em \widetilde{p} tal que $k_{\#}([\widetilde{\alpha}]) = j_{\#}([\beta]) \Rightarrow [k \circ \widetilde{\alpha}] = [\beta] = [k \circ \beta]$. Portanto $\widetilde{\alpha}$ e β são homotópicas por uma homotopia de ponto fixo, e em particular $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{p} = \beta(1) = \widetilde{q}$. Dessa forma, $k|_{\widetilde{S}} : \widetilde{S} \rightarrow S$ é de fato um difeomorfismo.

Afirmção 2: \widetilde{S} é acronal.

Pelo teorema 5.5.9, basta mostrar que $i_{\#} : \pi_1(\widetilde{S}) \rightarrow \pi_1(\widetilde{M})$ é sobrejetiva, onde

$i : \widetilde{S} \rightarrow \widetilde{M}$ é a inclusão. Seja $x \in \pi_1(\widetilde{M})$. $z = k_{\#}(x) \in \text{Im}(k_{\#}) = \text{Im}(j_{\#})$, de modo que $\exists y \in \pi_1(S)$ com $z = j_{\#}(y)$. Mas $\widetilde{y} = (k|_{\widetilde{S}})^{-1}_{\#}(y) \in \pi_1(\widetilde{S})$. $\therefore (k|_{\widetilde{S}})_{\#}(\widetilde{y}) = y$, o que implica $(j \circ (k|_{\widetilde{S}}))_{\#}(\widetilde{y}) = k_{\#}(x)$. Temos, $\forall \widetilde{p} \in \widetilde{S}$,

$$j \circ k|_{\widetilde{S}}(\widetilde{p}) = k(\widetilde{p}) = k \circ i(\widetilde{p}),$$

donde $j \circ k|_{\widetilde{S}} = k \circ i$. Logo $k_{\#}(i_{\#}(\widetilde{y})) = k_{\#}(x)$. Mas como k é recobrimento, $k_{\#}$ é injetiva. $\therefore i_{\#}(\widetilde{y}) = x$. ■

Capítulo 6

Exemplos de Espaços-Tempos

O objetivo principal deste capítulo é analisar alguns exemplos importantes e bem conhecidos de espaços-tempos.

6.1 Produtos Torcidos

Existe uma generalização da noção de produto cartesiano $(M \times N, g \times h)$ de duas variedades Pseudo-Riemannianas (M, g) e (N, h) , chamada *produto torcido*. Vários espaços-tempos importantes podem ser apresentados desta maneira, logo faz-se necessária uma breve exposição das propriedades gerais que estas estruturas possuem.

Definição 6.1.1. *Sejam $(B, {}^B g)$ e $(F, {}^F g)$ variedades Pseudo-Riemannianas. Dada uma função suave $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ e estritamente positiva, definimos o produto torcido de B por F com função de torção f , denotado por $M = B \times_f F$, como sendo a variedade diferenciável $B \times F$ munida com tensor métrico g , dado por*

$$g_{(p,q)}(v, v) = {}^B g_p(d\pi_B(v), d\pi_B(v)) + f^2(p)[{}^F g_q(d\pi_F(v), d\pi_F(v))], \quad \forall v \in T_{(p,q)}(M),$$

onde $\pi_B : M \rightarrow B$ e $\pi_F : M \rightarrow F$ são as projeções. A variedade B é chamada base de M e F é a fibra de M .

Como no caso de produtos cartesianos, dado um campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(B)$, podemos considerar seu *lift* $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$, definindo $\tilde{V}(p, q) = V(p)$, e analogamente para F . Vamos denotar por $\mathfrak{L}(B)$ o conjunto dos *lifts* de todos os campos vetoriais de B , e $\mathfrak{L}(F)$ para os *lifts* de F . Apresentaremos agora alguns resultados a respeito da curvatura de produtos torcidos, cujas demonstrações podem ser encontradas na referência [O'NEILL], Capítulo 7.

Sejam ∇^B a conexão de Levi-Civita de B , Π o tensor de Weingarten de F e ∇ a conexão de Levi-Civita de M . Descrevendo a geometria de M em termos de B, F e da função de torção f , temos a

Proposição 6.1.2. *Dados $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(F)$,*

- (i) $\nabla_X Y \in \mathfrak{L}(B)$ é o lift de $\nabla^B_X Y$ em B .
- (ii) $\nabla^B_X V = \nabla^B_X V = \frac{Xf}{f} V$.

- (iii) $\text{nor}(\nabla^B_V W) = \Pi(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \text{grad}(f)$.
(iv) $\text{tan}(\nabla^B_V W) \in \mathfrak{L}(F)$ é o lift de $\nabla_V W$ em F . \square

Pelo item (i) desta Proposição, o tensor de Weingarten de cada subvariedade da forma $B \times \{q\} \subseteq M$, com $q \in F$, é identicamente nulo. Isto faz com que o tensor de curvatura \mathbf{R} de M coincida com o lift do tensor de curvatura ${}^B\mathbf{R}$ de B , para vetores tangentes a B , segundo o Teorema 1.6.9.

A relação de \mathbf{R} com o tensor de curvatura ${}^F\mathbf{R}$ de F é um pouco mais elaborada.

Proposição 6.1.3. *Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{L}(B)$ e $U, V, W \in \mathfrak{L}(F)$.*

- (i) $\mathbf{R}_{VX}Y = \left(\frac{H^f(X, Y)}{f}\right)V$, onde H^f é a Hessiana de f .
(ii) $\mathbf{R}_{XY}V = \mathbf{R}_{VW}X = 0$.
(iii) $\mathbf{R}_{XV}W = \left(\frac{\langle V, W \rangle}{f}\right) {}^B\nabla_x(\text{grad}(f))$.
(iv) $\mathbf{R}_{VW}U = {}^F\mathbf{R}_{VW}U - \left(\frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2}\right)\{\langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V\}$. \square

Usando esta Proposição, um cálculo direto nos permite obter as relações entre o tensor de Ricci de M , \mathbf{Ric} , e os tensores de Ricci de B e F , ${}^B\mathbf{Ric}$ e ${}^F\mathbf{Ric}$, respectivamente. Elas são listadas abaixo para referência futura.

Corolário 6.1.4. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{L}(B)$ e $V, W \in \mathfrak{L}(F)$.*

- (i) $\mathbf{Ric}(X, Y) = {}^B\mathbf{Ric}(X, Y) - \left(\frac{\dim(F)}{f}\right)H^f(X, Y)$.
(ii) $\mathbf{Ric}(X, V) = 0$.
(iii) $\mathbf{Ric}(V, W) = {}^F\mathbf{Ric}(V, W) - \langle V, W \rangle \left(\frac{\Delta f}{f} + (\dim(F) - 1) \left(\frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2}\right)\right)$,

onde Δf é o laplaciano (contração da Hessiana) da função f em B . \square

O último Teorema desta seção trata da questão de hiperbolicidade global para variedades Lorentzianas que são produtos torcidos. Mais detalhes sobre este Teorema podem ser encontrados na referência [BE], pg. 66.

Teorema 6.1.5. *Se (M, g) é um espaço-tempo globalmente hiperbólico e (H, h) é uma variedade Riemanniana completa, então o produto torcido $M \times_f H$ é globalmente hiperbólico, para qualquer função de torção f suave e positiva.* \square

6.2 A equação de Einstein

A equação de Einstein, cuja definição foi motivada por considerações físicas a respeito da interação entre a matéria e a curvatura de um espaço-tempo¹, é

$$\mathbf{Ric} - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = T, \quad (6.1)$$

¹Este é um tópico que infelizmente foge ao escopo do trabalho. O leitor interessado poderá encontrar uma discussão aprofundada deste assunto na referência [Grav].

onde \mathbf{Ric} é o tensor de Ricci, S a curvatura escalar, Λ uma constante, chamada *constante cosmológica* e T o *tensor de energia-momento*. Este último está relacionado com a matéria presente no espaço-tempo, e quando $T \equiv 0$, 6.1 é chamada *equação de Einstein no vácuo*. Neste caso, se $\Lambda = 0$, a equação se reduz a

$$\mathbf{Ric} = \frac{1}{2}Sg. \quad (6.2)$$

Se (M, g) for *Ricci plana*, isto é, seu tensor de Ricci se anula identicamente em todos os pontos, então ela automaticamente satisfaz a equação de Einstein no vácuo. Reciprocamente, se (M, g) satisfaz a equação 6.2, podemos contrair (metricamente, com g^{ij}) ambos os lados para obter

$$S = \frac{1}{2}Sn \Rightarrow \left(1 - \frac{n}{2}\right)S = 0,$$

onde n é a dimensão de M . Isto implica $S = 0$ para $n \neq 2$. Substituindo $S = 0$ em 6.2, obtemos $\mathbf{Ric} = 0$. Portanto as variedades (de dimensão maior que dois) que satisfazem a equação de Einstein no vácuo com constante cosmológica zero são exatamente as variedades Ricci planas.

Suponha agora que (M, g) satisfaz uma equação da forma $\mathbf{Ric} = cg$, para alguma constante $c \neq 0$. Isto implica $S = cn$, $n = \dim(M)$. Vamos assumir $n > 2$. Assim, a equação de Einstein no vácuo se torna

$$cg - \frac{cn}{2}g + \Lambda g = 0 \Rightarrow \Lambda = c\left(\frac{n-2}{2}\right).$$

Portanto, qualquer variedade na qual o tensor de Ricci é proporcional à métrica satisfaz a equação de Einstein no vácuo, com constante cosmológica não-nula, dada pela fórmula que obtivemos. As variedades que têm curvatura seccional constante caem nesta categoria; se (M, g) tem curvatura seccional constante igual a K_0 , a Proposição 1.4.3 nos diz que

$$\mathbf{R}_{xyz} = K_0(\langle z, x \rangle y - \langle z, y \rangle x).$$

Então, com respeito a um sistema de coordenadas $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ qualquer em M ,

$$K_0(\langle \partial_j, \partial_k \rangle \partial_l - \langle \partial_k, \partial_l \rangle \partial_j) = \mathbf{R}_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_{jkl}^i \partial_i.$$

Tomando produto interno com ∂_m de ambos os lados, ficamos com

$$K_0(g_{jk}g_{lm} - g_{kl}g_{jm}) = \sum_{i=1}^n g_{im}R_{jkl}^i.$$

Contraindo com g^{am} ,

$$K_0(g_{jk}\delta_{al} - g_{kl}\delta_{aj}) = \mathbf{R}_{jkl}^a,$$

onde cada δ_{xy} representa um *delta de Kronecker*, isto é, $\delta_{xy} = 1$ se $x = y$ e $\delta_{xy} = 0$ caso contrário. Nessa última fórmula, ao fazermos $a = l$, obtemos os termos \mathbf{R}_{jka}^a

cuja soma para $a = 1, \dots, n$ fornece o tensor de Ricci nestas coordenadas. Uma vez que façamos $a = l$, o termo $\delta_{aj} = \delta_{lj}$ só é diferente de zero, portanto, para $j = a = l$. Porém, neste caso, as simetrias do tensor \mathbf{R} fazem com que \mathbf{R}_{jkl}^a seja zero. Isto quer dizer que para $a = l$ o termo $-g_{kl}\delta_{aj}$ da fórmula que derivamos não dá contribuição. Portanto,

$$\mathbf{Ric}_{jk} = \sum_{a=1, a \neq j}^n \mathbf{R}_{jka}^a = (n-1)K_0 g_{jk},$$

provando assim que $\mathbf{Ric} = (n-1)K_0 g$, como queríamos.

É evidente que a classe de espaços-tempos que satisfazem a equação de Einstein são de grande interesse físico.

Exemplo 6.2.1. (*O Universo Estático de Einstein*) Este espaço-tempo é o produto cartesiano $M = \mathbb{R}_1^1 \times S^3$; adotamos em S^3 a métrica usual, induzida de \mathbb{R}^4 . A orientação temporal de M é aquela induzida pelo *lift* do campo vetorial tipo-tempo ∂_0 , que está globalmente definido em \mathbb{R}_1^1 . Esta variedade pode ser mergulhada dentro de $\mathbb{R}_1^1 \times \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}_1^5$ como o "hipercilindro"

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

onde $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ denotam as coordenadas naturais de \mathbb{R}_1^5 ; suprimindo as duas dimensões "esféricas" θ e ϕ , podemos visualizar M como um cilindro da forma $x_1^2 + x_2^2 = 1$ em \mathbb{R}_1^3 (ver [HE]). Esta representação cilíndrica é importante, porque iremos analisar a estrutura conforme de outros espaços-tempos mapeada em alguma região dentro do universo estático de Einstein.

Para obter uma parametrização explícita de M , usamos em $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ as coordenadas $x_1 = \text{sen}(r')\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)$, $x_2 = \text{sen}(r')\text{sen}(\phi)\text{cos}(\theta)$, $x_3 = \text{sen}(r')\text{cos}(\phi)$ e $x_4 = \text{cos}(r')$, obedecendo as restrições $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \phi < \pi$ e $0 < r' < \pi$, e uma coordenada t' para \mathbb{R}_1^1 . Assim, a métrica se escreve

$$ds^2 = -(dt')^2 + (dr')^2 + \text{sen}^2(r') (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2). \quad (6.3)$$

É possível mostrar, a partir das fórmulas que apresentamos para produtos torcidos (considerando aqui a função de torção $f \equiv 1$) que $\mathbf{Ric}(\partial_{t'}, \partial_{t'}) = 0$ e, para campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ortogonais a $\partial_{t'}$, $\mathbf{Ric}(X, \partial_{t'}) = 0$ e $\mathbf{Ric}(X, Y) = 2\langle X, Y \rangle$. Contraindo \mathbf{Ric} , obtemos curvatura escalar constante igual a 6. Este espaço-tempo é solução das equações de Einstein, porém com tensor de energia-momento T não-nulo. Neste caso em particular, T é interpretado fisicamente como o tensor de energia-momento de um *fluido perfeito* (ver referências [HE] ou [O'NEILL] para mais detalhes a esse respeito).

6.3 O Espaço-tempo de Minkowski

Definimos (Exemplo 3.1.8) o espaço-tempo de Minkowski como sendo a variedade Lorentziana \mathbb{R}_1^n com orientação temporal induzida pelo campo vetorial ∂_0 . Por conveniência, vamos trabalhar com \mathbb{R}_1^{n+1} . Usaremos aqui as coordenadas naturais (x_0, \dots, x_n) , nas quais a métrica se escreve

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

Devido à expressão global que temos para a métrica de Minkowski, vemos diretamente da fórmula para os símbolos de Christoffel (Cap. 1, equação 1.2) que $\nabla_{\partial_i} \partial_j \equiv 0$, para $i, j = 0, \dots, n$, e portanto $\mathbf{R} \equiv 0$, o que significa que este espaço-tempo é *plano*. Assim, R_1^{n+1} é também *Ricci plano*, o que mostra que ele é solução de vácuo da equação de Einstein (com constante cosmológica nula). Além disso, as equações geodésicas (Capítulo 1, equação 1.3) se reduzem a $\gamma'' = 0$, o que fornece $\gamma(t) = at + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes arbitrárias. Em particular, R_1^{n+1} é *geodesicamente completo*.

Convém lembrar que, conforme provamos no Exemplo 5.2.13, \mathbb{R}_1^{n+1} é um espaço-tempo globalmente hiperbólico.

No caso de dimensão quatro, podemos fazer algumas mudanças na métrica a fim de melhor observar o aspecto global do espaço-tempo de Minkowski. Vamos construir o chamado *diagrama de Penrose*.

Utilizando coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , dadas por $x^4 = t$, $x^1 = r \sin(\theta) \sin(\phi)$, $x^2 = r \sin(\theta) \cos(\phi)$, $x^3 = r \cos(\theta)$, com as restrições $0 < r < +\infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$, a métrica se torna

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (6.4)$$

A seguir, definimos as chamadas coordenadas tipo-luz $v = t + r$, $w = t - r$. Observe que temos imediatamente $v \geq w$, e a métrica

$$ds^2 = -dvdw + \frac{1}{4}(v - w)^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (6.5)$$

Aqui, $-\infty < v, w < +\infty$. A nomenclatura deste sistema de coordenadas deve-se ao fato de que as superfícies v constante e w constante são tipo-luz (na métrica não aparecem termos dv^2 ou dw^2). Fazendo a mudança $p = \arctan(v)$, $q = \arctan(w)$, onde $-\frac{\pi}{2} < p, q < +\frac{\pi}{2}$, compactificamos, de certa forma, a imagem de v, w de $(-\infty, +\infty)$ para $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. No sistema (p, q, θ, ϕ) ,

$$ds^2 = \sec^2(p)\sec^2(q) \left(-dpdq + \frac{1}{4}\sin^2(p - q)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right). \quad (6.6)$$

O fator $\sec^2(p)\sec^2(q)$ é sempre positivo no domínio em questão, de modo que a métrica (6.6) nas coordenadas acima é conforme a

$$ds^2 = -4dpdq + \sin^2(p - q)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (6.7)$$

Nesta última, fazemos a mudança $t' = p + q$, $r' = p - q$, a fim de obtermos

$$ds^2 = -dt'^2 + -dr'^2 + \sin^2(r')(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad (6.8)$$

com as restrições

$$-\pi < t' + r' < \pi, \quad -\pi < t' - r' < \pi, \quad r' \geq 0, \quad (6.9)$$

que seguem daquelas para p e q . A expressão (6.8) é idêntica à métrica do universo estático de Einstein (6.3). Portanto, o espaço de Minkowski pode ser aplicado

conformalmente sobre uma região aberta e limitada dentro do universo estático de Einstein. Como transformações conformes preservam o sobre caráter causal, podemos ver a estrutura causal de Minkowski globalmente, na região dada por (6.9), que é exibida na figura abaixo (região hachurada).

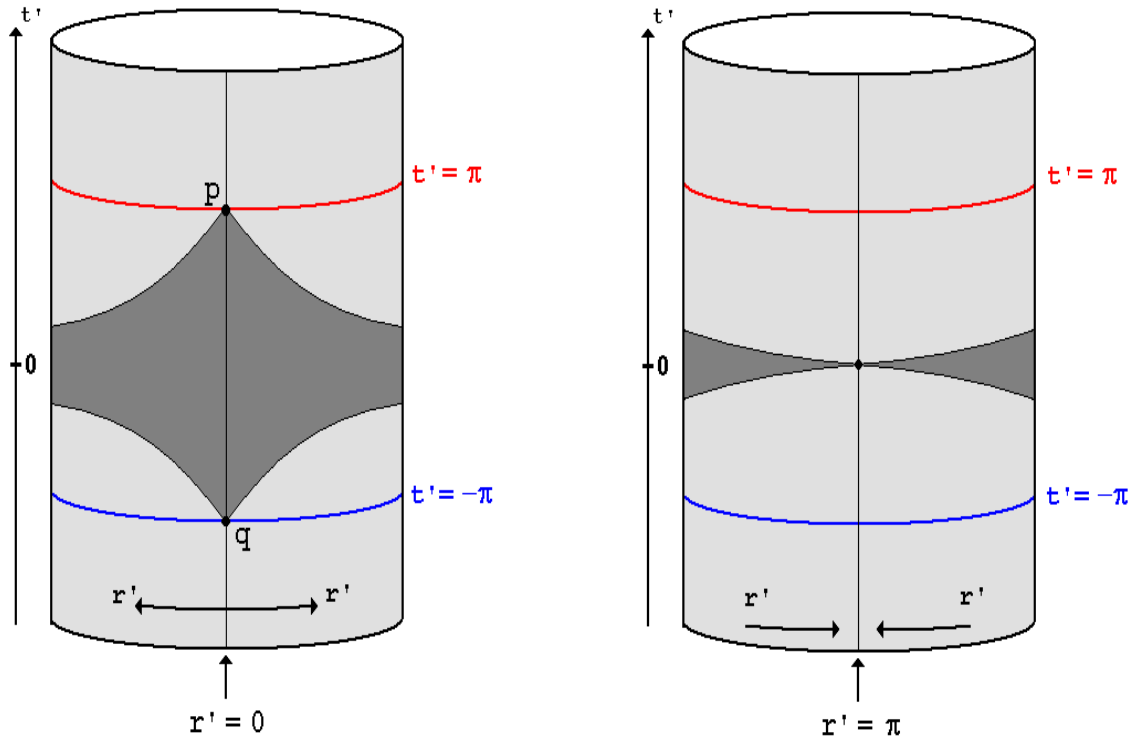


Figura 6.1: Estrutura conforme de Minkowski representada no universo estático de Einstein. Na esquerda, a região $0 \leq |r'| \leq \frac{\pi}{2}$ do cilindro. Na direita, temos $|r'| \geq \frac{\pi}{2}$. As curvas tipo-tempo futuro-dirigidas (inextensíveis) convergem para \mathbf{p} ($t' = \pi, r' = 0$), enquanto as curvas passado-dirigidas convergem para \mathbf{q} ($t' = -\pi, r' = 0$). Estes pontos não pertencem à representação de Minkowski.

A fronteira dessa região pode ser pensada como representando a estrutura conforme do infinito em \mathbb{R}_1^4 , de maneira análoga ao que ocorre na bem conhecida imersão conforme do plano hiperbólico em um disco no \mathbb{R}^2 (disco de Poincaré).

6.4 O Espaço-tempo de de Sitter

Definição 6.4.1. O espaço-tempo de de Sitter n -dimensional de raio $r > 0$ é a variedade

$$S_1^n(r) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle x, x \rangle = r^2\}$$

com estrutura diferenciável e métrica induzidas de \mathbb{R}_1^{n+1} .

Este é um caso particular de uma hiperquádrica, com sinal $\epsilon = 1$. Provamos no Exemplo 1.6.13 que uma hiperquádrica como esta é uma variedade de Lorentz. A orientação temporal em $S_1^n(r)$ é dada pelo campo vetorial

$$\tan(\partial_0) = \partial_0 - \text{nor}(\partial_0) = \partial_0 - \frac{\langle \partial_0, \text{grad}(f) \rangle}{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle} \text{grad}(f) = \partial_0 + \frac{x_0}{2r^2} \text{grad}(f),$$

que é sempre tipo-tempo em $S_1^n(r)$, pois

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_0 + \frac{x_0}{2r^2} \text{grad}(f), \partial_0 + \frac{x_0}{2r^2} \text{grad}(f) \right\rangle &= -1 + \frac{x_0}{r^2} \langle \partial_0, \text{grad}(f) \rangle + \left(\frac{x_0}{2r^2} \right)^2 \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle \\ &= -1 - \frac{2x_0^2}{r^2} + \frac{x_0^2}{r^2} = -1 - \frac{x_0^2}{r^2} < 0, \end{aligned}$$

para qualquer ponto $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in S_1^n(r)$.

Outro Corolário do estudo das hiperquádricas que fizemos é o fato de que o espaço-tempo de de Sitter tem curvatura (seccional) constante igual a $\frac{1}{r^2}$. Isto significa, conforme vimos na seção anterior, que S_1^n é uma solução das equações de Einstein no vácuo, com constante cosmológica positiva $\left(\frac{n-1}{r^2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)$, para $n > 2$.

Para cada $r > 0$, temos uma homotetia $\phi_r : S_1^n(r) \rightarrow S_1^n(1)$ dada por $\phi_r(x) = \frac{x}{\sqrt{r}}$, de modo que restringiremos nossa discussão a $S_1^n \equiv S_1^n(1)$, sem perda de generalidade.

Uma definição alternativa de S_1^n é dada pelo produto torcido $\mathbb{R}_1 \times_{\text{cosh}} S^{n-1}$, cuja métrica, lembramos, tem a forma

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2(t)d\sigma^2, \quad (6.10)$$

onde $d\sigma^2$ é a métrica usual da esfera. A fim de provar que este produto torcido é isométrico a S_1^n , defina a aplicação

$$\Phi : \mathbb{R}_1 \times_{\text{cosh}} S^{n-1} \rightarrow S_1^n \subseteq \mathbb{R}_1^{n+1}$$

$$(t, p_1, \dots, p_n) \mapsto (\sinh(t), \cosh(t)p_1, \dots, \cosh(t)p_n).$$

Φ é injetiva: dados (t, p_1, \dots, p_n) e (s, q_1, \dots, q_n) tais que $\Phi(t, p_1, \dots, p_n) = \Phi(s, q_1, \dots, q_n)$, temos $\sinh(t) = \sinh(s)$, o que implica $t = s$. Como $\cosh(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, o resultado segue. Dado $(y_0, \dots, y_n) \in S_1^n$, escolha t tal que $\sinh(t) = y_0$. Como

$$\frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}{y_0^2 + 1} = 1 \quad \text{e} \quad 1 + y_0^2 = \cosh^2(t),$$

tomando $q_1 = \frac{y_1}{\cosh(t)}, \dots, q_n = \frac{y_n}{\cosh(t)}$, temos $(q_1, \dots, q_n) \in S^{n-1}$.

Assim, $\Phi(t, q_1, \dots, q_n) = (y_0, \dots, y_n)$, donde Φ é sobrejetiva. Sua derivada é

$$d\Phi_{(t, p_1, \dots, p_n)} = \begin{bmatrix} \cosh(t) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sinh(t)p_1 & \cosh(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sinh(t)p_2 & 0 & \cosh(t) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & & & \ddots & \\ \sinh(t)p_n & 0 & 0 & 0 & \dots & \cosh(t) \end{bmatrix},$$

que é sempre invertível, pois seu determinante é $\cosh^n(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Assim, Φ é um difeomorfismo global.

Seja $\mathbf{p} = (t, p_1, \dots, p_n)$. Dado $\mathbf{v} = (v^0, v^1, \dots, v^n) \in T_p(\mathbb{R}_1 \times_{\cosh} S^{n-1})$, temos

$$\begin{aligned} d\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) &= (v^0 \cosh(t), v^0 \sinh(t)p_1 + v^1 \cosh(t), \dots, v^0 \sinh(t)p_n + v^n \cosh(t)) = \\ &= v^0 (\cosh(t), \sinh(t)p_1, \dots, \sinh(t)p_n) + \cosh(t)(0, v^1, \dots, v^n). \end{aligned}$$

Lembrando que $(p_1, \dots, p_n) \in S^{n-1}$ e (v^1, \dots, v^n) é tangente a S^{n-1} ,

$$\begin{aligned} \langle d\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}), d\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbb{R}_1^{n+1}} &= (v^0)^2 (-\cosh^2(t) + \sinh^2(t)(p_1^2 + \dots + p_n^2)) + \\ &= 2v^0 \sinh(t) \cosh(t) (p_1 v^1 + \dots + p_n v^n) + \cosh^2(t) [(v^1)^2 + \dots + (v^n)^2] = \\ &= - (v^0)^2 + \cosh^2(t) [(v^1)^2 + \dots + (v^n)^2] = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}_1 \times_{\cosh} S^{n-1}}. \end{aligned}$$

$\therefore \Phi$ é isometria.

O espaço-tempo de de Sitter é geodesicamente completo. Um cálculo explícito das geodésicas nos permitirá estabelecer esta afirmação. Veremos que qualquer geodésica de S_1^n está contida na interseção de S_1^n com algum hiperplano em \mathbb{R}_1^{n+1} passando pela origem.

Considere um ponto qualquer $p \in S_1^n$, e seja Π um hiperplano passando por p e pela origem de \mathbb{R}_1^{n+1} . Ao restringirmos a métrica g de \mathbb{R}_1^{n+1} para este hiperplano, três possibilidades podem ocorrer: $g|_{\Pi}$ ser positiva definida, $g|_{\Pi}$ ser Lorentziana, isto é, não-degenerada de índice 1, ou $g|_{\Pi}$ ser degenerada. Defina $\Lambda = \Pi \cap S_1^n$.

(i) $g|_{\Pi}$ é positiva definida. Neste caso, Π munido da métrica $g|_{\Pi}$ é um espaço vetorial com produto interno de dimensão 2, e assim admite uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$. Dado $v \in \Pi$, $v = \alpha e_1 + \beta e_2$, temos $v \in \Lambda$ se e somente se $g(v, v) = 1$, pela definição de S_1^n . Esta condição fornece $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Logo Λ é uma circunferência em Π . Podemos parametrizá-la pela curva $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \Lambda$, dada por $\sigma(t) = \cos(t)e_1 + \sin(t)e_2$. Esta curva é tipo-espaço, uma vez que $g(\sigma', \sigma') = 1$. Como

$$\sigma''(t) = -\sigma(t) = \frac{1}{2} \text{grad}(f)_{(\sigma(t))}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

σ'' é normal a S_1^n , portanto sua parte tangente é zero e σ é geodésica em S_1^n .

(ii) $g|_{\Pi}$ é não-degenerada de índice 1. Então Π ainda admite uma base ortogonal $\{e_0, e_1\}$, onde $e_1 = p$, logo $g(e_1, e_1) = 1$, e $g(e_0, e_0) = -1$. Dado $v \in \Pi$, a condição para que $v = \alpha e_0 + \beta e_1 \in \Lambda$ é $-\alpha^2 + \beta^2 = 1$, o que define dois ramos de hipérbole em Π . A curva $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \Lambda$ dada por $\sigma(t) = \sinh(t)e_0 + \cosh(t)e_1$ é tipo-tempo, pois $g(\sigma', \sigma') = -\cosh^2(t) + \sinh^2(t) = -1$, e satisfaz

$$\sigma''(t) = \sigma(t) = \frac{1}{2} \text{grad}(f)_{(\sigma(t))}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde σ'' é normal a S_1^n ; logo σ é geodésica em S_1^n .

(iii) $g|_{\Pi}$ é degenerada. Note que, como $p \in \Pi$, $g|_{\Pi}$ não é identicamente nula. Escolha $u \neq 0$ tal que $g(u, w) = 0, \forall w \in \Pi$. Assim, u é em particular tipo-luz, e o conjunto $\{p, u\}$ forma uma base de Π . A fim de que $v = \alpha p + \beta u \in \Pi$ esteja em Λ , devemos ter $\alpha^2 = 1$, o que é equivalente a $\alpha = \pm 1$. Esta condição define duas retas paralelas em Π , sendo que a reta que passa por p pode ser parametrizada como $\sigma(t) = p + tu$. Como $\sigma'(t) = u$, vemos que σ é tipo-luz. Além disso, σ é uma geodésica do espaço ambiente \mathbb{R}_1^{n+1} que permanece em S_1^n , o que significa que ela é também geodésica de S_1^n , pela Observação 1.6.8.

Todas as geodésicas de de Sitter podem ser obtidas por uma reparametrização afim daquelas que acabamos de descrever. Com efeito, suponha que $\sigma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S_1^n$ é uma geodésica não-constante de S_1^n , onde I é um intervalo contendo 0. Defina $p = \sigma(0)$, $v = \sigma'(0) \neq 0$ e considere o plano Π que passa pela origem de \mathbb{R}_1^{n+1} , contendo p , ao qual v é tangente. Como σ está contida em S_1^n , $g(\sigma(t), \sigma(t)) = 1$, onde g é a métrica de \mathbb{R}_1^{n+1} . Assim $g(\sigma'(t), \sigma(t)) \equiv 0$, e em particular $g(p, v) = 0$. A restrição de g à interseção $\Lambda = \Pi \cap S_1^n$ cai em um dos três casos descritos anteriormente. Se $g|_{\Pi}$ for positiva definida, por exemplo, $g(v, v) > 0$ já que $v \in \Pi$. Tomando

$$\gamma(t) = \cos(ct)p + \operatorname{sen}(ct)\frac{v}{|v|}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $c = |v|$, temos que γ é uma geodésica, $\gamma(0) = p = \sigma(0)$ e $\gamma'(0) = c\frac{v}{|v|} = v = \sigma'(0)$. Pelo Teorema 1.3.2, $\sigma = \gamma|_I$ em todo intervalo I . Argumentos inteiramente análogos a este para os outros dois casos concluem nossa afirmação.

Uma consequência interessante desta classificação é que o espaço-tempo de de Sitter, apesar de ser geodesicamente completo, possui pontos p, q que não podem ser ligados por geodésica alguma. Veja por exemplo o que acontece se $p = (0, 0, \dots, 1)$ e $q = (1, 0, \dots, 0, -\sqrt{2})$. Estes pontos pertencem a S_1^n ; sabemos que qualquer geodésica partindo de p precisa estar contida em um plano passando por p e pela origem de \mathbb{R}_1^{n+1} . O mesmo vale para q . Como p, q e 0 não são colineares, o único plano que passa simultaneamente pelos três é $\Pi = \{(x_0, 0, \dots, 0, x_n) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : x_0, x_n \in \mathbb{R}\}$. Uma base para Π é dada por $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1)\}$, donde se vê que $g|_{\Pi}$ é não-degenerada de índice 1. Portanto, as únicas geodésicas que poderiam em princípio ligar p a q são as geodésicas tipo-tempo, dadas por parametrizações adequadas dos ramos da hipérbole $\Pi \cap S_1^n \equiv \{(\alpha, 0, \dots, 0, \beta) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : -\alpha^2 + \beta^2 = 1.\}$. Mas p e q pertencem a ramos diferentes desta hipérbole, logo é impossível existir uma geodésica saindo de p e chegando em q .

Esta situação revela mais um contraste entre a geometria Lorentziana e a Riemanniana; em variedades Riemannianas geodesicamente completas, todo par de pontos admite uma geodésica conectando-os².

Quanto à causalidade, de Sitter é globalmente hiperbólico. Verificaremos isto diretamente, mostrando que o conjunto $S = \widetilde{S} \cap S_1^n$, onde $\widetilde{S} = \{(0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_1^{n+1} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, é uma hipersuperfície de Cauchy.

²Conforme o Teorema de Hopf-Rinow. Ver [O'NEILL] ou [Man].

Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S_1^n$ uma curva tipo-tempo e inextensível. Defina $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$, ou seja, $\tilde{\gamma}$ é simplesmente γ vista como curva em \mathbb{R}_1^{n+1} . Assim, $\tilde{\gamma}$ é ainda tipo-tempo, pois a métrica de S_1^n coincide com a métrica de \mathbb{R}_1^{n+1} para aqueles vetores que são tangentes a S_1^n , como é o caso de $\tilde{\gamma}' \equiv \gamma'$. Além disso, se $\tilde{\gamma}$ tivesse um ponto limite futuro ou passado em R_1^n , então, como S_1^n é um conjunto fechado em R_1^n , este ponto limite pertenceria a S_1^n , em contradição com a inextensibilidade de γ . Logo $\tilde{\gamma}$ é inextensível. Tendo estas propriedades, $\tilde{\gamma}$ intersecta \tilde{S} , que é uma hipersuperfície de Cauchy em \mathbb{R}_1^{n+1} , exatamente uma vez, em algum ponto $\tilde{\gamma}(t_0) \in \tilde{S}$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Mas $\tilde{\gamma}$ está contida em S_1^n , portanto $\gamma(t_0) \in (\tilde{S} \cap S_1^n) \equiv S$, como queríamos.

Para S_1^4 , podemos escrever a métrica usando as coordenadas $x_1 = \sinh(t)$, $x_2 = \cosh(t)\cos(\chi)$, $x_3 = \cosh(t)\sin(\chi)\cos(\theta)$, $x_4 = \cosh(t)\sin(\chi)\sin(\theta)\cos(\phi)$ e $x_5 = \cosh(t)\sin(\chi)\sin(\theta)\sin(\phi)$:

$$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2(t) \left(d\chi^2 + \sin^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right). \quad (6.11)$$

Estas coordenadas cobrem toda S_1^4 , exceto pelas singularidade usuais da esfera, $\chi = 0$, $\chi = \pi$, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$.

Procedemos agora como no caso de Minkowski para estudar o infinito em S_1^4 . Definimos uma nova coordenada t' por

$$t' = 2\text{arctg}(e^t) - \frac{\pi}{2}, \text{ onde } -\frac{\pi}{2} < t' < \frac{\pi}{2},$$

e fazemos $r' = \chi$. A métrica de S_1^4 se torna então $ds^2 = \cosh^2(t)ds^2$, onde ds^2 é a mesma de (6.3). Assim, a região que representa conformalmente de Sitter no universo estático de Einstein é $-\frac{\pi}{2} < t' < \frac{\pi}{2}$.

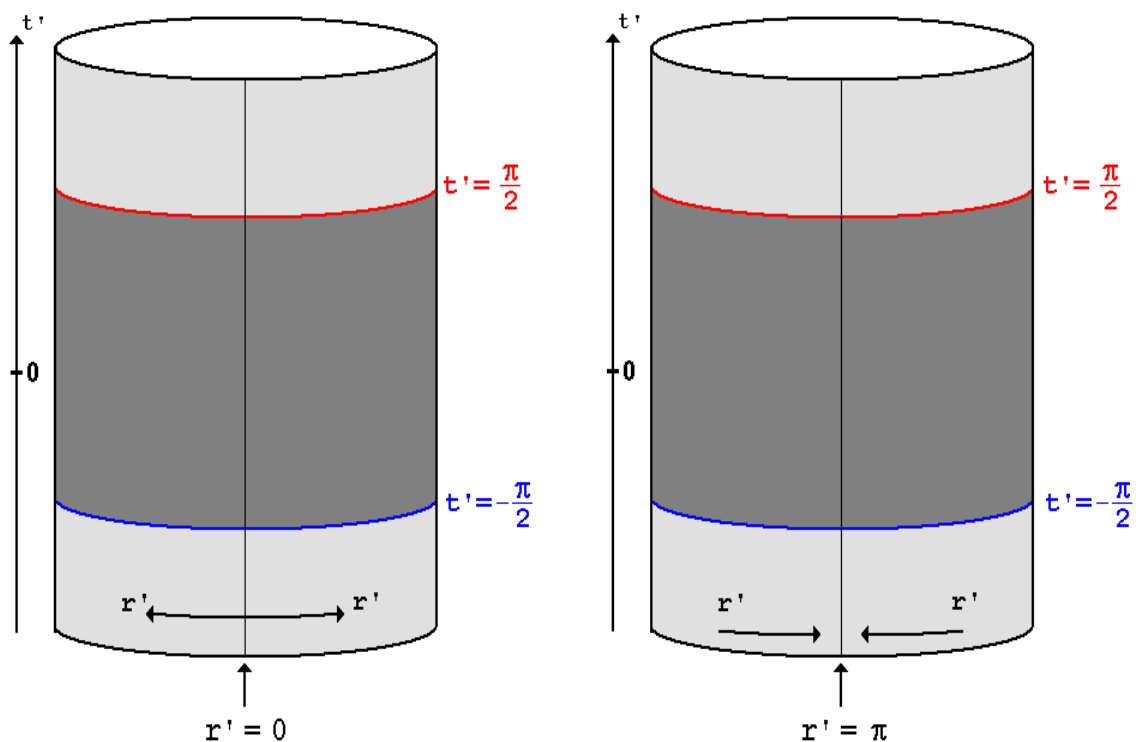


Figura 6.2: Estrutura conforme de de Sitter representada no universo estático de Einstein.

6.5 O Espaço-tempo de Anti-de Sitter

Fixe $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Considere o conjunto

$$H_1^n(\alpha) = \{p \in \mathbb{R}_2^{n+1} : \langle p, p \rangle = -\alpha^2\}.$$

Esta é uma hiperquádrica, com sinal $\epsilon = -1$, e portanto é uma subvariedade Pseudo-Riemanniana n -dimensional de \mathbb{R}_2^{n+1} , cujo índice é $2 - 1 \equiv 1$; portanto uma variedade de Lorentz para $n \geq 2$.

Escrevendo $p = (x_0, \dots, x_n) \in H_1^n(\alpha)$, a condição $\langle p, p \rangle = -\alpha^2$ se torna

$$-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = -\alpha^2.$$

O campo vetorial X em \mathbb{R}_2^{n+1} dado por

$$X = x_1$$

Definição 6.5.1. *O espaço-tempo Anti-de Sitter é a variedade diferenciável*

$$H_1^n(r) = \{p \in \mathbb{R}_2^{n+1} : \langle p, p \rangle = -r^2\}$$

com estrutura diferenciável, métrica e orientação temporal induzidas de \mathbb{R}_2^{n+1} .

A análise deste espaço-tempo pode ser feita por meios análogos àqueles usados em de Sitter, de maneira que vamos omitir alguns detalhes. Anti-de Sitter pode ser visto também como uma hiperquádrica, porém com $\epsilon = -1$. Como o espaço ambiente, \mathbb{R}_2^{n+1} , tem índice 2, $H_1^n(r)$ é uma variedade de índice $2 - 1 = 1$, portanto uma variedade de Lorentz. O produto escalar na definição acima se escreve, nas coordenadas naturais de \mathbb{R}_2^{n+1} ,

$$-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = -1. \quad (6.12)$$

Este espaço-tempo é difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Quanto à curvatura, conforme vimos no Exemplo 1.6.13, $H_1^n(r)$ possui curvatura seccional constante igual a $-\frac{1}{r^2}$, o que o torna solução das equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica negativa $\left(\frac{1-n}{r^2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)$, para $n > 2$.

Vamos nos restringir ao caso $r = 1$, como fizemos em de Sitter.

No que diz respeito às condições de causalidade, H_1^n não é sequer cronológico. De fato, a expressão $\alpha(t) = (0, 0, \dots, 0, \cos(t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, define uma curva tipo-tempo fechada em H_1^n .

Para evitar este tipo de violação de causalidade, podemos considerar o recobrimento universal de H_1^n , chamado *espaço-tempo Anti-de Sitter universal*, \widetilde{H}_1^n . Tal recobrimento sempre existe, e a métrica de \widetilde{H}_1^n é aquela induzida pelo *pullback* da aplicação de recobrimento. Em particular, \widetilde{H}_1^n é localmente isométrico a H_1^n . Topologicamente, \widetilde{H}_1^n é \mathbb{R}^n . No estudo de propriedades causais, trabalharemos com \widetilde{H}_1^n ao invés de H_1^n .

No caso $n = 4$, uma parametrização para H_1^4 é obtida fazendo $x_1 = \cosh(r)\cos(t)$, $x_2 = \cosh(r)\sin(t)$, $x_3 = \sinh(r)\cos(\theta)$, $x_4 = \sinh(r)\sin(\theta)\cos(\phi)$ e $x_5 = \sinh(r)\sin(\theta)\sin(\phi)$, e nessas coordenadas a métrica de H_1^4 é dada por

$$ds^2 = -\cosh^2(r)(dt^2) + dr^2 + \sinh^2(r)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (6.13)$$

Podemos visualizar \widetilde{H}_1^4 como \mathbb{R}^4 com a métrica acima. Obedecidas as restrições "esféricas" usuais, isto é, $0 < \theta < \pi$ e $0 < \phi < 2\pi$, esta métrica é não-singular para todo $r > 0$, ou para $r < 0$. Evidentemente, estas duas regiões são isométricas, de modo que podemos nos restringir, por exemplo, a $r > 0$. Também temos $-\infty < t < +\infty$.

\widetilde{H}_1^4 é fortemente causal. De fato, seja $p = (t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$ um ponto qualquer, nas coordenadas que acabamos de introduzir, e U uma vizinhança aberta de p . Como queremos mostrar a existência de uma vizinhança de p causalmente convexa $V \subseteq U$, podemos supor sem perda de generalidade que U está contida no domínio $W \subseteq \widetilde{H}_1^4$ onde estão bem definidas as coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Defina $T : W \rightarrow \mathbb{R}$ por $T(t, r, \theta, \phi) = t - t_0$. Por continuidade, existe $\epsilon > 0$ tal que $V := T^{-1}(-\epsilon, \epsilon) \subseteq U$, já que $T(p) = 0$. Afirmamos que V é uma vizinhança causalmente convexa de p . Temos

$$\text{grad}(T)_{(t,r,\theta,\phi)} = \left(-\frac{1}{\cosh^2(r)}, 0, 0, 0 \right) = -\frac{1}{\cosh^2(r)} \partial_t, \quad \forall (t, r, \theta, \phi) \in W,$$

e portanto $\text{grad}(T)$ é tipo-tempo, passado-dirigido. Dada uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ com $\gamma(a), \gamma(b) \in V$, $-\epsilon < T(\gamma(a)), T(\gamma(b)) < \epsilon$, por definição. Como $(T \circ \gamma)'(t) = \langle \text{grad}(T)_{(\gamma(t))}, \gamma'(t) \rangle > 0$ para todo $t \in [a, b]$, a função $T \circ \gamma$ é crescente. Portanto,

$$-\epsilon < T(\gamma(a)) < T(\gamma(t)) < T(\gamma(b)) < \epsilon \Rightarrow \gamma(t) \in V, \quad \forall t \in (a, b).$$

Isto prova que γ está contida em V , e portanto que V é causalmente convexo, como queríamos.

A estrutura causal do espaço-tempo universal de Anti-de Sitter nas vizinhanças de um ponto p qualquer pode ser representada em um diagrama como na figura 6.5 abaixo.

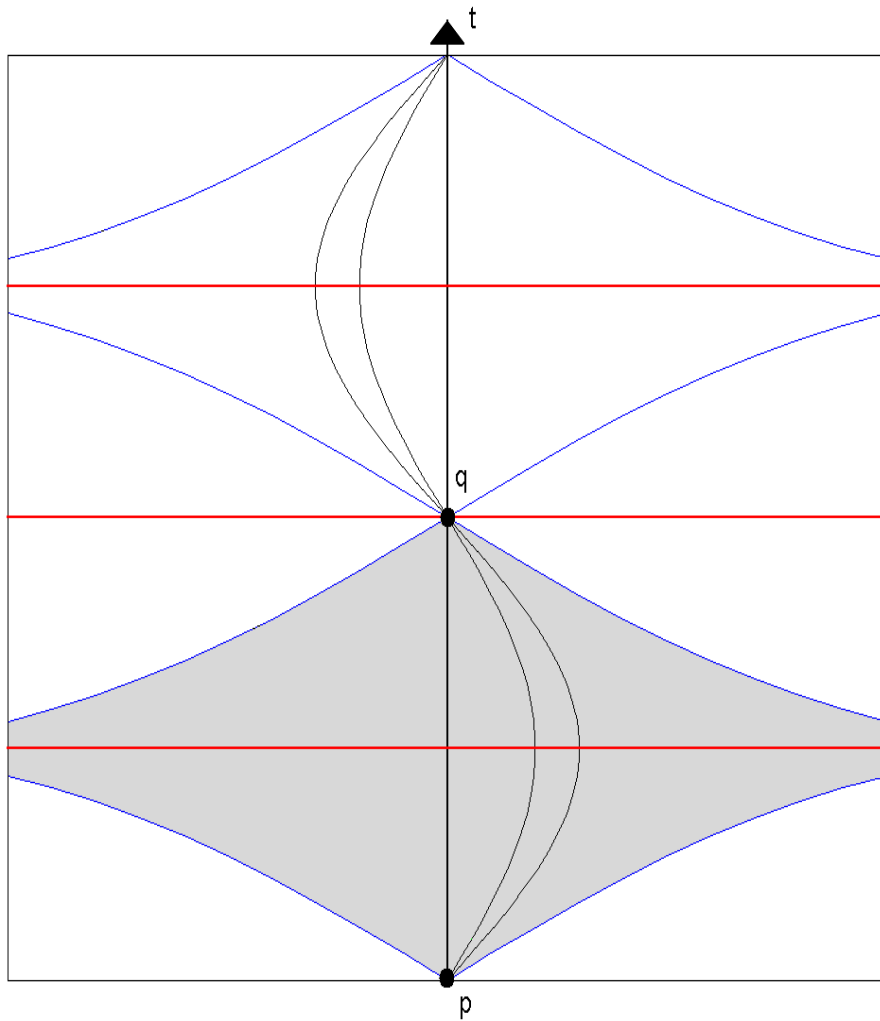


Figura 6.3: Causalidade em \widetilde{H}_1^4 (com duas dimensões omitidas). Em azul, geodésicas tipo-luz tendem assintoticamente às seções t constante, que são as linhas vermelhas, sem nunca intersectá-las. A área hachurada representa $J^+(p) \cap J^-(q)$, e as curvas em preto são geodésicas tipo-tempo (inclusive o eixo vertical t).

Nesta figura, vemos um conjunto da forma $J^+(p) \cap J^-(q)$ (área hachurada) em Anti-de Sitter que não é compacto, já que não é limitado, e portanto \widetilde{H}_1^4 não é globalmente hiperbólico. Isto significa que \widetilde{H}_1^4 não admite uma hipersuperfície de Cauchy. Em particular, apesar de todas as seções t constante, cuja união cobre todo \widetilde{H}_1^4 , serem hipersuperfícies acronais, fechadas e tipo-espaço, nenhuma delas é uma hipersuperfície de Cauchy.

Para analisar o comportamento do espaço-tempo universal de Anti-de Sitter no infinito, compactificamos a coordenada r , definindo

$$r' = 2 \operatorname{arctg}(e^r) - \frac{\pi}{2}, \quad 0 < r' < \frac{\pi}{2}.$$

Para $r < 0$, temos $-\frac{\pi}{2} < r' < 0$. Nesta nova coordenada, a métrica de Anti-de Sitter fica conforme à (6.3). Unindo estas duas regiões, obtemos a representação da figura

abaixo.

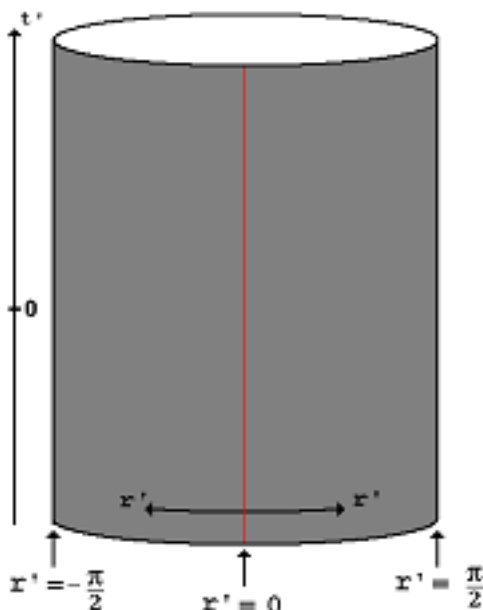


Figura 6.4: Região representando Anti-de Sitter no universo estático de Einstein. Sobre a linha vermelha, a métrica é singular, mas esta linha pertence ao espaço.

6.6 Os Espaços-tempos de Schwarzschild e Kruskal

Esta solução das equações de Einstein foi descoberta em 1916 pelo astrônomo Karl Schwarzschild, pouco tempo depois do surgimento da Relatividade Geral. Ela descreve duas regiões aparentemente desconexas. Uma delas, o exterior, representa fisicamente a região em torno de um corpo massivo esfericamente simétrico, como por exemplo uma estrela.

Fixe uma constante $m > 0$.

Definição 6.6.1. A região exterior do espaço-tempo de Schwarzschild de massa m é a variedade diferenciável $M_I = P \times S^2$, onde $P = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 : r > 2m\}$, munida com a métrica

$$-\mathfrak{h}(r)dt^2 + \frac{1}{\mathfrak{h}(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad (6.14)$$

onde $\mathfrak{h}(r) = (1 - \frac{2m}{r})$.

Note que este é um produto torcido da variedade Lorentziana P , cuja métrica é $ds_P^2 = -\mathfrak{h}dt^2 + \frac{1}{\mathfrak{h}}dr^2$, com a esfera S^2 e a função de torção $r : P \rightarrow \mathbb{R}$. Pode-se mostrar, usando as fórmulas para a curvatura de Ricci de produtos torcidos, que o tensor de Ricci de M_I é identicamente zero. Sendo Ricci plana, M_I automaticamente satisfaz às equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica zero.

A orientação temporal deste espaço-tempo é dada pelo *lift* do campo vetorial ∂_t . É interessante notar que os coeficientes g_{ij} da métrica (6.14) não dependem de t . Decorre disto que as funções

$$\Phi_c : M_I \rightarrow M_I$$

$$(t, r, x) \mapsto (t + c, r, x),$$

onde $(t, r) \in P$ e $x \in S^2$, são isometrias, cujas órbitas $c \mapsto \Phi_c(t, r, x)$ são todas curvas tipo-tempo. Um espaço-tempo que admite uma família a 1 parâmetro de isometrias cujas órbitas são tipo-tempo é dito ser *estacionário*. Fisicamente, isto significa que um observador cuja linha de mundo coincide com uma dessas órbitas não percebe alterações na geometria ao seu redor.

Além de estacionário, M_I é também *estático*. Um espaço-tempo é estático quando é estacionário e, para cada ponto p , existe uma hipersuperfície tipo-espaço Σ contendo p que é normal às órbitas geradas por sua família a 1 parâmetro de isometrias. As hipersuperfícies $\Sigma_{t_0} = \{(t_0, r, x) : r > 2m, x \in S^2\}$ são tipo-espaço em M_I ; a ausência de termos $dt dr$, $dt d\theta$ ou $dt d\phi$ na métrica mostra que o campo ∂_t é ortogonal a Σ_{t_0} , e portanto as órbitas $c \mapsto \Phi_c(t, r, x)$ também o são, $\forall (t, r) \in P, \forall x \in S^2$.

Quando $r \rightarrow +\infty$ a função $h(r)$ tende a 1, e assim a métrica de M_I tende à métrica de Minkowski em coordenadas esféricas. Esta condição é desejável se quisermos levar em conta que conforme nos afastamos da região onde está situada a estrela, a força gravitacional diminui e o espaço tende a ficar plano, como Minkowski.

A expressão da métrica em (6.14) faz sentido também para $0 < r < 2m$. Neste caso, porém, há uma inversão dos papéis das coordenadas t e r ; o campo vetorial ∂_t agora é tipo-espaço, enquanto ∂_r é tipo-tempo. O significado físico atribuído a esse fenômeno é o seguinte: a região $0 < r < 2m$ corresponde a um buraco negro, resultante do colapso gravitacional de algum corpo massivo sobre si mesmo, que deixou apenas uma singularidade³ em $r = 0$. A orientação temporal agora é dada por $-\partial_r$, o que significa que qualquer curva tipo-tempo futuro-dirigida eventualmente atinge $r = 0$.

Definição 6.6.2. A região interior do espaço-tempo de Schwarzschild de massa m é a variedade diferenciável $M_{II} = B \times S^2$, onde $B = \{(t, r) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 2m\}$, munida com a métrica (6.14).

Observação 6.6.3. É importante ter em mente que a singularidade $r = 0$ em si não faz parte do espaço-tempo. Existem várias tentativas de tratar este problema, mas não as abordaremos aqui (ver [HE] Capítulo 8).

Devemos fazer uma distinção entre as singularidade em $r = 0$ e $r = 2m$ na métrica de Schwarzschild. A primeira é uma "singularidade real"; em outras palavras, não é possível estender M_{II} para além de $r = 0$. Isto se prova calculando o *invariante de Kretschmann*,

$$\mathcal{K} = \sum_{i,j,k,l=1}^4 \mathbf{R}_{ijkl} \mathbf{R}^{ijkl} = \frac{48m^2}{r^6},$$

que claramente diverge quando r tende a zero. Os valores de $\mathcal{K} : M_{II} \rightarrow \mathbb{R}$ não dependem do sistema de coordenadas utilizado. Assim, dada qualquer extensão

³Essa expressão será usada aqui de maneira informal. Discutiremos esse termo de forma mais precisa no Capítulo 6.

\widetilde{M}_{II} de M_{II} , por definição existe uma isometria $\Psi : M_{II} \rightarrow U \subseteq \widetilde{M}_{II}$, e os valores $\mathcal{K}(\Psi(p_n)) = \mathcal{K}(p_n)$ divergem para qualquer sequência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em M_{II} com $r(p_n) \rightarrow 0$. É neste sentido que dizemos não ser possível estender M_{II} para além de $r = 0$.

A singularidade $r = 2m$, entretanto, não é desta natureza. Vamos mostrar agora que é possível construir uma variedade contendo (cópias isométricas de) M_I e M_{II} . Considere a função

$$f(y) = (y - 2m)e^{(y/2m)-1},$$

definida para $y \in (0, +\infty)$. Temos

$$f'(y) = e^{(y/2m)-1} + \frac{f(y)}{2m} > 0, \quad \forall y \in (0, +\infty),$$

logo f é um difeomorfismo sobre sua imagem, que é $(\frac{-2m}{e}, +\infty)$. A região

$$Q_m = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : uv > \frac{-2m}{e} \right\}$$

é um aberto de \mathbb{R}^2 , cuja fronteira é a hipérbole $uv = \frac{-2m}{e}$. A cada ponto $(u, v) \in Q_m$, vamos associar uma coordenada $r := f^{-1}(uv) \in (0, +\infty)$, que fica bem definida porque uv pertence à imagem de f . Conforme nos aproximamos da fronteira de Q_m , esta coordenada tende a zero.

Definição 6.6.4. O aberto $Q_m \subseteq \mathbb{R}^2$ munido da métrica

$$ds^2 = 2F(r)dudv, \quad F(r) = \frac{8m^2}{r}e^{1-(r/2m)},$$

é chamado plano de Kruskal de massa m .

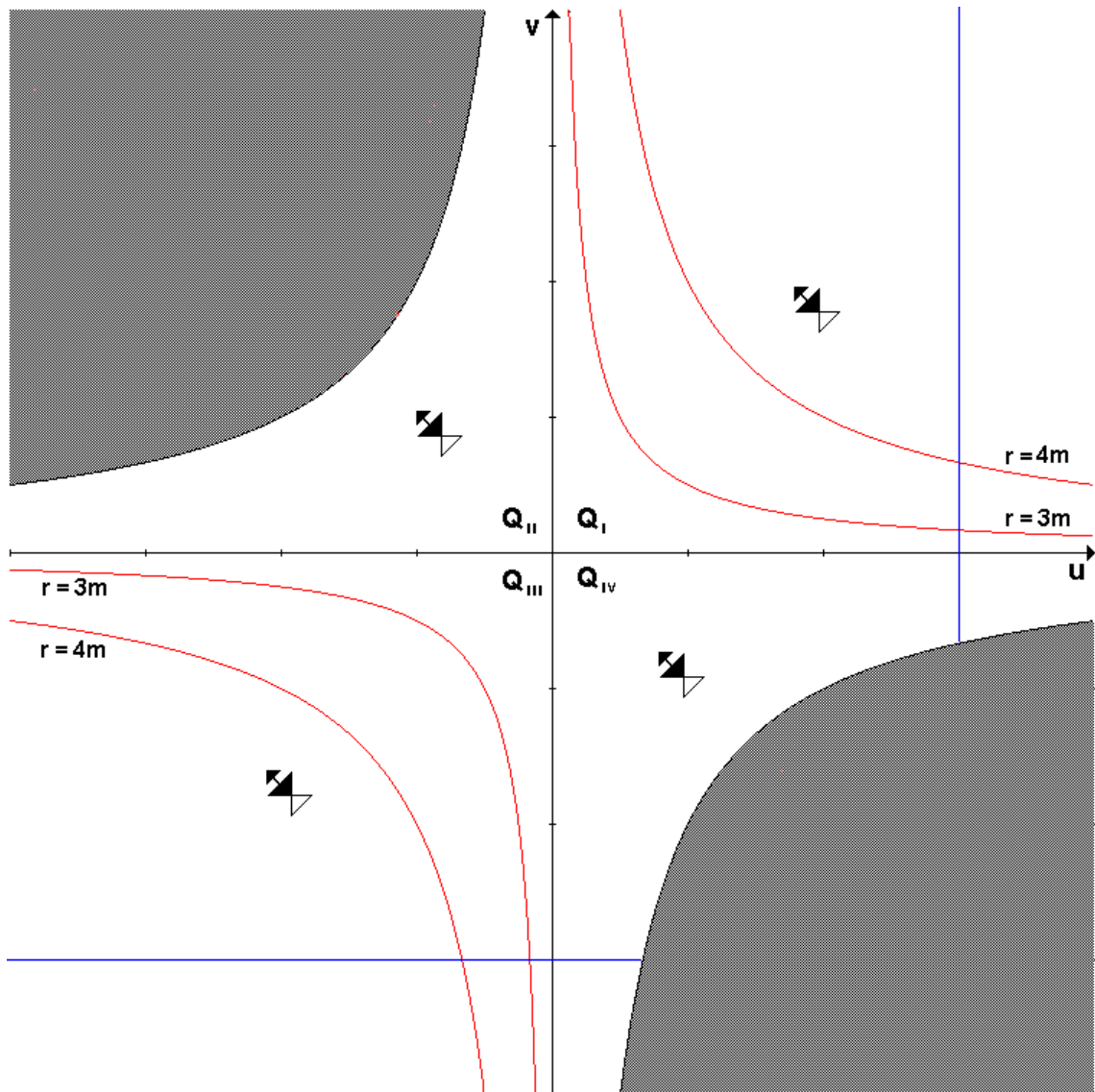


Figura 6.5: O plano de Kruskal (área hachurada não faz parte do plano). A orientação temporal é exibida pelos cones. Linhas azuis correspondem à geodésicas tipo-luz inextensíveis, saindo da singularidade $r = 0$ no quadrante Q_{IV} . Linhas vermelhas representam curvas de nível $r = cte$.

Removendo os eixos $\{(u, v) \in Q_m : uv = 0\}$, ficamos com quatro quadrantes, Q_I, Q_{II}, Q_{III} e Q_{IV} , como na figura. Pela própria expressão da métrica, a geometria de Q depende apenas do valor de r ; sendo assim, a aplicação $(u, v) \mapsto (-u, -v)$ define uma isometria entre Q_I e Q_{III} , e também entre Q_{II} e Q_{IV} .

Existe uma diferença importante entre estes dois últimos quadrantes, apesar de eles serem isométricos, devida à orientação temporal. Se uma curva causal inextensível $\alpha : [0, b) \rightarrow Q_m$ (possivelmente $b = +\infty$) começa em Q_{IV} , ou seja, $\alpha(0) \in Q_{IV}$, então existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(s) \notin Q_{IV}, \forall s \in [0, b)$ com $s > t_0$. Isto significa que α é forçada a sair de Q_{IV} em *tempo próprio finito*. A situação se inverte em Q_{II} . Se uma curva causal inextensível $\alpha : [0, b) \rightarrow Q_m$ é tal que $\alpha(t_0) \in Q_{II}$, para algum $t_0 \in [0, b)$, então duas coisas acontecem. Primeiro, $\alpha(s) \in Q_{II}$, para todo $s > t_0$ em $[0, b)$; nenhuma curva causal pode entrar em Q_{II} e sair novamente. Segundo, teremos necessariamente $b < +\infty$, e quando $t \rightarrow b, r(\alpha(t)) \rightarrow 0$. Resumindo, qualquer curva causal entrando em Q_{II} lá permanece, e necessariamente "colide" com a singularidade $r = 0$ para um valor finito do seu parâmetro.

Fisicamente, o comportamento que acabamos de descrever em Q_{II} é o que caracteriza um *buraco negro*. Por analogia, regiões como Q_{IV} são muitas vezes chamadas de *buraco branco*.

Definição 6.6.5. O espaço-tempo de Kruskal de massa m é o produto torcido $K_m = Q_m \times_r S^2$ do plano de Kruskal de massa m e a esfera S^2 , com função de torção r .

A orientação temporal de K_m é induzida pelo *lift* do campo vetorial tipo-tempo $\partial_v - \partial_u \in \mathfrak{X}(Q_m)$.

Os quadrantes $Q_I \times_r S^2$ e $Q_{III} \times_r S^2$ são isométricos à *região exterior do espaço-tempo de Schwarzschild*, enquanto $Q_{II} \times_r S^2$ e $Q_{IV} \times_r S^2$ são isométricos à *região interior do espaço-tempo de Schwarzschild*. Para ver isto, defina uma segunda coordenada

$$t : Q_I \cup Q_{II} \rightarrow \mathbb{R}$$

pondo $t = 2m \ln(|v/u|)$. Assim,

$$dt = 2m \left(\frac{dv}{v} - \frac{du}{u} \right).$$

Para calcular dr , usamos a definição implícita $f(r) = uv$, obtendo

$$f'(r)dr = vdu + udv \Rightarrow dr = \frac{uvdu}{uf'(r)} + \frac{uvdv}{vf'(r)} = \frac{f(r)du}{uf'(r)} + \frac{f(r)dv}{vf'(r)}.$$

Por outro lado, $\frac{f(r)}{f'(r)} = 2m\mathfrak{h}$. Disto decorre que

$$dr = 2m\mathfrak{h} \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \right).$$

Um cálculo direto usando as fórmulas que obtivemos mostra que a aplicação

$$\Psi : Q_I \times_r S^2 \cup Q_{II} \times_r S^2 \rightarrow M_I \cup M_{II}$$

dada por $\Psi(u, v, x) = (t(u, v), r(u, v), x)$, $\forall (u, v) \in Q_I \cup Q_{II}$, $\forall x \in S^2$ define uma isometria.

É fácil ver que K é inextensível, já que o invariante de Kretschmann diverge quando nos aproximamos de $r = 0$.

Capítulo 7

Os Teoremas de Singularidade

7.1 Os Teoremas de Singularidade de Hawking

Teorema 7.1.1. *Seja $S \subseteq M$ uma hipersuperfície de Cauchy futura, tipo-espaço, com convergência futura $k \geq b > 0$. Suponha $\text{Ric}(v, v) \geq 0$, $\forall v \in TM$, v tipo-tempo. Então, toda curva tipo-tempo, futuro-dirigida saindo de S possui comprimento menor ou igual a $\frac{1}{b}$. Em particular, M é geodesicamente incompleta.*

Demonstração. Seja $\gamma : [a, b) \rightarrow M$ uma curva qualquer tipo-tempo, futuro-dirigida começando em S , e escolha $p \notin S$ sobre γ . Temos $p = \gamma(c)$, para algum $c \in [a, b)$, e $p \in J^+(S) \subseteq D^+(S)$, logo $L(\gamma|_{[a, c]}) \leq \tau(S, p)$. Pelo Teorema 5.5.5, existe uma geodésica tipo-tempo $\tilde{\gamma}$ de S a p cujo comprimento é exatamente $\tau(S, p)$. Sendo maximal, $\tilde{\gamma}$ não pode ter pontos focais antes de p , logo $\tau(S, p) \leq \frac{1}{b}$. ■

Lema 7.1.2. *Seja $S \subseteq M$ subvariedade tipo-espaço de M . A função $d_S : M \rightarrow [0, +\infty]$ dada por $d_S(p) = \tau(S, p)$ é semicontínua inferiormente.*

Demonstração. Seja $p \in M$. Se $p \notin J^+(S)$, $\tau(S, p) \equiv 0$, por definição, logo $\forall \epsilon > 0$, temos, $\forall q \in M$,

$$\tau(S, q) \geq 0 > \tau(S, p) (\equiv 0) - \epsilon.$$

De outro modo, considere $p \in J^+(S)$, e seja $\epsilon > 0$. Se $\tau(S, p) < +\infty$, existe $p_0 \in S$ e uma curva γ causal, futuro-dirigida de p_0 a p tal que

$$L(\gamma) > \tau(S, p) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Pela semicontinuidade inferior de τ , existe U vizinhança de p tal que, $\forall q \in U$,

$$\tau(S, q) \geq \tau(p_0, q) > \tau(p_0, p) - \frac{\epsilon}{2} \geq L(\gamma) - \frac{\epsilon}{2} > \tau(S, p) - \epsilon.$$

Finalmente, se $\tau(S, p) = +\infty$, então dado $A > 0$, existe $p_0 \in S$ com $\tau(p_0, p) > A$. Pela semicontinuidade de τ , existe uma vizinhança aberta U de p tal que, $\forall q \in U$, $\tau(S, q) \geq \tau(p_0, p) > A$. ■

Teorema 7.1.3. *Suponha que $\text{Ric}(v, v) \geq 0$, para todo v tipo-tempo, e que existe $S \subseteq M$ hipersuperfície compacta, tipo-espaço com convergência futura $k > 0$. Então, (M, g) possui ao menos uma curva (em verdade, uma geodésica) tipo-tempo incompleta.*

Demonstração. Podemos assumir que S é acronal (portanto acausal), passando para um recobrimento Pseudo-Riemanniano de M se necessário, em vista do Teorema 5.5.12. Pela compacidade de S , existe $b > 0$ tal que $k \geq b > 0$ em S . Provaremos o seguinte:

Existe uma geodésica tipo-tempo, futuro-inextensível, começando em S e normal a S de comprimento menor ou igual a $\frac{1}{b}$.

Suponha que esta afirmação é falsa. Defina

$$\mathcal{B} = \{ v \in NS : v = 0 \text{ ou } v \text{ é futuro-dirigido e } |v| \leq \frac{1}{b} \}.$$

Afirmção 1: \mathcal{B} está contido no domínio de \exp^\perp .

De fato, seja $v \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, e considere a geodésica maximal γ_v . Note que, como $\gamma_v : [0, c) \rightarrow M$ é tipo-tempo, inextensível e começa em S , $L(\gamma_v) > \frac{1}{b}$. Portanto, existe um parâmetro $0 < t_0 < c$ tal que $t_0|v| \equiv L(\gamma_v|_{[0, t_0]}) > \frac{1}{b}$. Assim, $\frac{1}{b} < t_0|v| \leq t_0 \frac{1}{b} \Rightarrow t_0 > 1$, logo $\gamma_v|_{[0, 1]}$ está definida, e portanto $\gamma_v(1) \equiv \exp^\perp(v)$.

Afirmção 2: \mathcal{B} é compacto.

De fato, considere a função $f : S \times \mathbb{R} \rightarrow NS$, onde $f(p, x) = x \cdot \mathbf{u}(p)$, sendo \mathbf{u} um campo vetorial tipo-tempo, futuro-dirigido e unitário, que fixamos em S . Evidentemente, f é contínua e $f(S \times [0, \frac{1}{b}]) \equiv \mathcal{B}$, logo \mathcal{B} é compacto. Note que podemos assumir $H^+(S) \neq \emptyset$, caso contrário estamos de volta nas hipóteses do teorema 7.1.1, porque S seria uma hipersuperfície de Cauchy futura.

Afirmção 3: $\overline{D^+(S)} \subseteq \exp^\perp(\mathcal{B})$.

Claramente, $S \subseteq \exp^\perp(\mathcal{B})$. Se $p \in D^+(S) \setminus S$, existe uma geodésica $\gamma : [c, d] \rightarrow M$ tipo-tempo, futuro-dirigida e normal a S com $\gamma(c) \in S$, $\gamma(d) = p$ e $L(\gamma) = \tau(S, p)$. Sendo γ maximal, não possui pontos focais antes de p , e portanto $L(\gamma) \leq \frac{1}{b}$. Temos $L(\gamma) = |\gamma'(c)|(d-c)$, logo se definirmos $h : [0, 1] \rightarrow [c, d]$ por $h(t) = c + t(d-c)$, e $\tilde{\gamma} := \gamma \circ h$ uma reparametrização geodésica de γ e $v := \tilde{\gamma}'(0) = \gamma'(h(0))h'(0) = \gamma'(c)(d-c)$. Portanto $|v| = L(\gamma) \leq \frac{1}{b} \Rightarrow v \in \mathcal{B}$ e $\tilde{\gamma} = \gamma_v$. Mais ainda, $\tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(1) \equiv \exp^\perp(v) = p$. Portanto $D^+(S) \subseteq \exp^\perp(\mathcal{B}) \Rightarrow \overline{D^+(S)} \subseteq \exp^\perp(\mathcal{B})$, já que $\exp^\perp(\mathcal{B})$ é fechado.

Concluimos então que $\overline{D^+(S)}$ é compacto e portanto $H^+(S)$ também. Seja agora $p \in \overline{D^+(S)} \setminus D^+(S)$. Existe uma sequência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $D^+(S)$ com $p_n \rightarrow p$. Como vimos anteriormente, $p_n = \exp^\perp(v_n)$, para $v_n \in \mathcal{B}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como \mathcal{B} é compacto, podemos assumir que $v_n \rightarrow v \in \mathcal{B}$. $v \in \text{dom}(\exp^\perp)$ pela afirmação 1, logo $p_n \equiv \exp^\perp(v_n) \rightarrow \exp^\perp(v)$ por continuidade, e assim $p = \exp^\perp(v)$. Observe, também, que $|v_n| \rightarrow |v| \leq \frac{1}{b}$, e como τ é semicontínua inferiormente, pelo Lema 7.1.2,

$$\tau(S, p_n) \equiv |v_n| \rightarrow |v|, \text{ e assim}$$

$$|v| \geq \tau(S, p) \Rightarrow L(\gamma_v) \geq \tau(S, p) \Rightarrow L(\gamma_v) = |v| = \tau(S, p),$$

logo γ_v é uma geodésica maximal de S a p . A função $\phi := d_S|_{H^+(S)}$ (ver Lema 7.1.2) é semicontínua inferiormente, portanto, de acordo com o Lema 4.4.1, atinge um mínimo no conjunto compacto $H^+(S)$, digamos em $q \in H^+(S)$. Agora, como $\text{borda}(S) = \emptyset$, pelo Teorema 5.4.7, existe uma geodésica tipo-luz, passado-inextensível $\alpha : [0, a) \rightarrow H^+(S)$ começando em q . Sejam $s, t \in [0, a)$ com $s < t$, e β, γ geodésicas maximais de S a $\alpha(s), \alpha(t)$, respectivamente. Temos, já que α é tipo-luz,

$$\tau(S, \alpha(t)) = L(\gamma) = L(\alpha|_{[s, t]} + \gamma) < L(\beta) \equiv \tau(S, \alpha(s)).$$

$\therefore \phi(\alpha(t)) < \phi(\alpha(s))$, e ϕ decresce estritamente ao longo de α . Mas isto contradiz a minimalidade em $q = \alpha(0)$. Esta contradição estabelece o teorema. ■

Observação 7.1.4. Se $S \subseteq M$ é uma hipersuperfície tipo-espaço que não é Cauchy nem compacta, então os teoremas falham completamente. (Exemplo: considere o mergulho de H^n em \mathbb{R}_1^{n+1} . Este possui convergência 1, mas não é uma hipersuperfície de Cauchy futura, nem um compacto. Geodésicas normais convergem todas para o ponto focal na origem, mas \mathbb{R}_1^{n+1} é obviamente completo, e $Ric(v, v) \equiv 0 \geq 0$, para todos os vetores $v \in T\mathbb{R}_1^{n+1}$)

7.2 O Teorema de Singularidade de Penrose

Fixe (M, g) um espaço-tempo. Lembramos que, dada uma subvariedade tipo-espaço $S \subseteq M$ de dimensão $k < \dim(M)$, o vetor de curvatura média em $p \in S$ é dado por

$$H_p := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \Pi(e_i, e_i),$$

onde Π é o tensor de Weingarten de S e $\{e_1, \dots, e_k\}$ é qualquer base ortonormal em p .

Proposição 7.2.1. *Seja S subvariedade tipo-espaço de codimensão maior ou igual a 2. As seguintes afirmações são equivalentes, para um ponto $p \in S$:*

- (i) $k(v) = \langle H_p, v \rangle > 0$, $\forall v$ não-nulo, causal, futuro-dirigido e normal a S em p .
- (ii) $k(v) = \langle H_p, v \rangle \geq 0$, $\forall v$ não-nulo, tipo-luz, futuro-dirigido e normal a S em p .
- (iii) H_p é passado-dirigido e tipo-tempo.

Demonstração. (ii) \Rightarrow (iii). Como S é tipo-espaço, $(T_p S)^\perp$ é tipo-tempo e podemos escolher uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_k\}$, $k \geq 2$, e_1 tipo-tempo, futuro-dirigido e e_2, \dots, e_k tipo-espaço. Escreva $H_p = ae_1 + \sum_{i=2}^k b_i e_i$, e ponha $w = \sum_{i=2}^k b_i e_i$. Assim, w é tipo-espaço. Se $w = 0$, $e_1 - e_2$ é tipo-luz, e $0 < \langle H_p, e_1 - e_2 \rangle = -a$. Logo $a < 0$. Em particular $a \neq 0$, de modo que H_p é tipo-tempo e $\langle H_p, e_1 \rangle = a < 0$, logo H_p é passado-dirigido. Se $w \neq 0$, $e_1 - \frac{w}{|w|}$ é tipo-luz, e $0 < \langle H_p, e_1 - \frac{w}{|w|} \rangle \Rightarrow -a - |w| > 0 \Rightarrow -a > |w| \geq 0$, donde $a^2 > |w|^2 \equiv g(w, w) \geq 0$. Assim $g(H_p, H_p) = -a^2 + g(w, w) < 0$ e $g(H_p, e_1) < 0$, logo H_p é tipo-tempo e passado-dirigido. As outras implicações são imediatas. ■

Definição 7.2.2. *Uma subvariedade $S \subseteq M$ com $\text{codim}(S) \geq 2$ é dita ser futuro [passado] convergente se H_p é tipo-tempo, passado[futuro]-dirigido, $\forall p \in S$. Uma subvariedade compacta, tipo-espaço de codimensão 2 que é futuro [passado] convergente é chamada superfície fechada aprisionada [anti-aprisionada].*

Definição 7.2.3. *Seja $A \subseteq M$ um conjunto acronal. O horismos futuro [passado] de A é o conjunto*

$$E^+(A) = J^+(A) \setminus I^+(A) \quad [E^-(A) = J^-(A) \setminus I^-(A)].$$

Se $E^+(A)$ [$E^-(A)$] é compacto, A é dito ser futuro [passado]-aprisionado. Em qualquer caso, dizemos que A é um conjunto aprisionado.

Os conceitos recém-definidos de superfície fechada aprisionada e conjunto aprisionado são totalmente independentes. O primeiro é um conceito local, geométrico-diferencial, enquanto que o último tem um caráter mais causal, global. Para ver isto mais claramente, vamos considerar alguns exemplos, um deles no espaço-tempo de Kruskal. Precisamos do seguinte lema.

Lema 7.2.4. *Se $B \times_f F$ é um produto torcido de um espaço-tempo (B, g_0) por uma variedade Riemanniana conexa (F, h) , então para quaisquer conjuntos $S \subseteq B, T \subseteq F$, temos*

$$J^\pm(S \times T, B \times_f F) = J^\pm(S, B) \times T,$$

$$I^\pm(S \times T, B \times_f F) = I^\pm(S, B) \times T.$$

Demonstração. As provas dos quatro casos são similares, portanto faremos para I^+ . Seja $(p, q) \in I^+(S \times T, B \times_f F)$. Então, existe uma curva tipo-tempo, futuro-dirigida $\bar{\alpha} : [0, 1] \rightarrow B \times_f F$ com $\bar{\alpha}(1) = (p, q)$ e $\bar{\alpha}(0) \in S \times T$. Podemos escrever, para cada $t \in [0, 1]$, $\bar{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, de modo que $\alpha_1(0) \in S, \alpha_2(0) \in T$. Portanto

$$g_{\alpha(t)}(\bar{\alpha}'(t), \bar{\alpha}'(t)) < 0 \Rightarrow (g_0)_{\alpha_1(t)}(\alpha_1'(t), \alpha_1'(t)) + (h_{\alpha_2(t)})(\alpha_2'(t), \alpha_2'(t)) < 0.$$

Como h é Riemanniana, $h_{\alpha_2(t)}(\alpha_2'(t), \alpha_2'(t)) \geq 0$, logo $(g_0)_{\alpha_1(t)}(\alpha_1'(t), \alpha_1'(t)) < 0$, e α_1 é tipo-tempo em (B, g_0) . Claramente, α_1 é também futuro-dirigida em (B, g_0) , o que nos permite concluir $p \in I^+(S, B)$. Portanto $I^+(S \times T, B \times_f F) \subseteq I^+(S, B) \times T$.

Por outro lado, dado $(p, q) \in I^+(S, B) \times T$, temos $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ tipo-tempo, futuro-dirigida com $\alpha(0) \in S$ e $\alpha(1) = p$. Defina $\bar{\alpha} : [0, 1] \rightarrow B \times F$ como $\bar{\alpha}(t) := (\alpha(t), q)$, $\forall t \in [0, 1]$. Logo $\bar{\alpha}(0) \in S \times T$ e $\bar{\alpha}(1) = (p, q)$. $\bar{\alpha}$ é claramente futuro-dirigida e tipo-tempo, e assim $(p, q) \in I^+(S \times T, B \times_f F)$. ■

Exemplo 7.2.5. Tome $M = \mathbb{R}^3, ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$ e $A \subseteq M$ o conjunto acronal

$$A = \{ (0, 0, y) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R} \}.$$

O campo vetorial $V = \frac{\partial}{\partial y}$ é tangente a A , e $g(V, V) = 1$ em A , portanto V gera os espaços tangentes de A em cada ponto. Em particular, A é uma subvariedade tipo-espaço de M , de dimensão 1. Um cálculo simples mostra que $H_p \equiv 0$ em cada $p \in A$. Sendo assim, H_p é tipo-espaço, logo A não é futuro nem passado convergente. Observe também que as sequências $\{(n, n, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{(-n, -n, 0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ estão respectivamente em $E^+(A)$ e $E^-(A)$, e não admitem subsequência convergente, de modo que estes últimos não são compactos, e portanto A não é futuro nem passado-aprisionada. Se identificarmos $(t, x, y) \sim (t, x + 1, y + 1)$, obtemos um espaço-tempo (M', g') que pode ser visto como produto torcido (com função de torção $f \equiv 1$) do cilindro de Lorentz $(\mathbb{R} \times S^1, g_0)$, com métrica de Lorentz plana $ds^2 = -dt^2 + dx^2$, vindo da identificação $(t, x) \sim (t, x + 1)$ em \mathbb{R}_1^2 , e o círculo (S^1, h) com métrica $ds^2 = dy^2$. Neste novo espaço-tempo, ganhamos um conjunto da forma $A' = p \times S^1$, ao fixar $p \in \mathbb{R} \times S^1$. Como M' é localmente isométrico a M , A' ainda possui vetor de curvatura média zero, e portanto não é futuro-convergente. Entretanto, pelo lema 7.2.4,

$$J^\pm(A', M') = J^\pm(p, \mathbb{R} \times S^1) \times S^1,$$

$$I^\pm(A', M') = I^\pm(p, \mathbb{R} \times S^1) \times S^1.$$

$$\therefore E^\pm(A', M') = E^\pm(p, \mathbb{R} \times S^1) \times S^1.$$

Qualquer ponto $p \in \mathbb{R} \times S^1$ é futuro (e passado) aprisionado, portanto A' também, já que S^1 é compacto.

Por outro lado, seja $Q_m = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \cdot v > \frac{-2m}{e}\}$ o plano de Kruskal de massa m , e fixe qualquer $p = (u_0, v_0) \in Q_m$. Considere o conjunto $A_p = p \times S^2$ no espaço-tempo de Kruskal. Pela proposição 7.35 de [O'NEILL], se $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal em $q \in S^2$,

$$H_{(p,q)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \Pi(e_i, e_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{-h(e_i, e_i)}{r(p)} = \frac{1}{r(p)} \nabla r(p).$$

Mas $(\nabla r)^i = g^{iu} \frac{\partial r}{\partial u} + g^{iv} \frac{\partial r}{\partial v}$, e um cálculo simples mostra que $\nabla r = \frac{1}{F} \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{F} \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v}$. Consideraremos Q_m temporalmente orientado pelo campo vetorial $T = \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}$. De fato, temos

$$g_0(T, T) = g_0\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) - 2g_0\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) + g_0\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) \equiv -2F < 0,$$

pois F é claramente positiva. Observe também que

$$\frac{\partial r}{\partial u} \equiv \frac{2m}{r} e^{(1-\frac{r}{2m})} u \equiv \frac{1}{4m} Fu, \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial v} \equiv \frac{2m}{r} e^{(1-\frac{r}{2m})} v \equiv \frac{1}{4m} Fv.$$

$$\therefore \nabla r = \frac{1}{4m} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right). \quad \langle H, H \rangle = \frac{1}{16u^2 r^2} 2uvF = \frac{v}{8ur^2} F.$$

$$\langle H, T \rangle = \frac{-(u-v)}{4ur} F.$$

Portanto H é tipo-tempo precisamente quando $uv < 0$, que equivale a dizer $f(r) < 0$ ou $0 < r < 2m$, e é passado-dirigido quando tivermos também $u < v$, e futuro-dirigido quando $v < u$. Assim A_p é uma superfície aprisionada [anti-aprisionada] para $u_0 v_0 < 0$ e $u_0 < v_0$ [$u_0 > v_0$]. Mas A_p não é um conjunto futuro-aprisionado ou passado-aprisionado, pois

$$E^\pm(A_p, K_m) = E^\pm(p, Q_m) \times S^2,$$

e é fácil ver que os conjuntos $E^\pm(p, Q_m)$ não são compactos em Q_m , para as regiões nas quais $0 < r < 2m$. Por exemplo, a curva $\alpha : [0, b) \rightarrow Q_m$ dada por $\alpha(t) = (u_0, v_0 + t)$ é tipo-luz, futuro-dirigida:

$$g(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0, \quad g(\alpha'(t), T(\alpha(t))) = g\left(\frac{\partial}{\partial v}|_{\alpha(t)}, \frac{\partial}{\partial v}|_{\alpha(t)} - \frac{\partial}{\partial u}|_{\alpha(t)}\right) = -2F < 0.$$

Além disso, $u_0(t + v_0) = u_0 t + u_0 v_0$ e se tomarmos $u_0 v_0 < 0$ e $u_0 < v_0$, o que implica $u_0 < 0$ e $v_0 > 0$, teremos $u_0(t + v_0) > \frac{-2m}{e}$; dado que $b \equiv \frac{v_0 u_0 + \frac{2m}{e}}{|u_0|} > 0$, escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $b - \frac{1}{N} > 0$, fazendo com que a sequência $\{\alpha(b - \frac{1}{N+n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ esteja em $E^+(p, Q_m)$. Esta, porém, não admite subsequência convergente.

Contudo, existem condições sob as quais podemos garantir que convergência futura implica em aprisionamento futuro.

Proposição 7.2.6. *Seja $S \subseteq M$ superfície fechada aprisionada. Suponha*

(i) *Ric(v, v) ≥ 0 , para todo v tipo-luz.*

(ii) *(M, g) é tipo-luz completo.*

Então, $E^+(S)$ é compacto.

Demonstração. Fixe uma métrica Riemanniana auxiliar h em M , e seja

$$\widetilde{S} = \{ v \in NS : v \text{ é futuro-dirigido, tipo-luz e } h(v, v) = 1 \}.$$

Se definirmos $\Phi : NS \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\Phi(v) = (g(v, v), h(v, v))$, o valor $(0, 1)$ é regular para Φ , e \widetilde{S} é claramente uma das componentes conexas da subvariedade diferenciável $\Phi^{-1}(0, 1)$, de dimensão $(n - 2)$, de NS . Em particular, $\dim(\widetilde{S}) = n - 2$ e \widetilde{S} é suave.

Afirmção 1. \widetilde{S} é compacta.

Seja $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \widetilde{S} , e denote por $\Pi : NS \rightarrow S$ a projeção do fibrado NS na base S , com $p_n := \Pi(v_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Já que $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está em S e S é compacta, podemos assumir $p_n \rightarrow p_0 \in S$. Note que, como $\dim(S) = n - 2$, $\dim(N_p) = 2$, para qualquer fibra N_p , $p \in S$. Podemos tomar um referencial local $\{e_1, e_2\}$ em uma vizinhança de p_0 , e assumir que este seja h ortonormal (o que sempre pode ser feito localmente, via Gram-Schmidt). Podemos assim escrever, para cada n ,

$$v_n(p_n) = a_n e_1(p_n) + b_n e_2(p_n),$$

para qualquer p_n em uma vizinhança de p_0 , digamos, U , onde está definido o referencial local. Como $a_n^2 + b_n^2 = 1$, para todo n , podemos assumir também que $(a_n, b_n) \rightarrow (a_0, b_0) \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, pela compacidade de S^1 . Deste modo $v_n \rightarrow a_0 e_1(p_0) + b_0 e_2(p_0)$, e $h(v_0, v_0) = 1$. Por continuidade, $g(v_0, v_0) = 0$, e v_0 é futuro-dirigido, logo $v_0 \in \widetilde{S}$, provando a afirmação.

Considere agora a função $k : NS \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k(v) = \langle H_{\Pi(v)}, v \rangle$. Esta função é suave, e como S é futuro-convergente, $k(v) > 0$, $\forall v \in \widetilde{S}$. Como \widetilde{S} é compacta, $k|_{\widetilde{S}}$ atinge um valor mínimo; denote-o por $k_0 > 0$. Tome $b = \frac{1}{k_0}$, e defina

$$\mathcal{K} := \{ tv \in NS : v \in \widetilde{S}, 0 \leq t \leq b \}.$$

A compacidade de \mathcal{K} segue diretamente da compacidade de \widetilde{S} e $[0, b]$. Como (M, g) é tipo-luz completo, certamente vale $\mathcal{K} \subseteq \text{dom}(\text{exp}^\perp)$, e o conjunto $\text{exp}^\perp(\mathcal{K}) \subseteq M$ está bem-definido, sendo ainda compacto.

Afirmção 2. $E^+(S) \subseteq \text{exp}^\perp(\mathcal{K})$.

De fato, seja $p \in E^+(S)$. Se $p \in S$, então $p = \text{exp}^\perp(0_p)$, e $0_p \in \mathcal{K}$, portanto nada mais a fazer. Do contrário, $p \in \partial I^+(S) \setminus S$, e existe uma geodésica tipo-luz, futuro-dirigida $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, com $\text{Im}(\alpha) \subseteq E^+(S)$, $\alpha(0) \in S$, $\alpha(1) = p$, α sem pontos focais antes de 1. Em particular, $p = \text{exp}^\perp(\alpha'(0))$. Agora, de (i), α deveria ter um ponto focal antes de $\frac{1}{k(\alpha'(0))}$, e assim $\frac{1}{k(\alpha'(0))} \geq 1$. Mas escrevendo $\|\alpha'(0)\| := \sqrt{h(\alpha'(0), \alpha'(0))}$, e $v_\alpha := \frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|}$, temos $v_\alpha \in \widetilde{S}$, $\alpha'(0) = \|\alpha'(0)\|v_\alpha$. Então

$$1 \leq \frac{1}{k(\alpha'(0))} = \frac{1}{\|\alpha'(0)\|k(v_\alpha)} \leq \frac{b}{\|\alpha'(0)\|}.$$

$$\therefore 0 < \|\alpha'(0)\| \leq b \Rightarrow \alpha'(0) \in \mathcal{K},$$

provando assim a afirmação.

Logo, resta apenas mostrar que $E^+(S)$ é fechado. Para isto, seja $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $E^+(S)$ com $p_n \rightarrow p_0 \in M$. Como $E^+(S) \subseteq \text{exp}^\perp(\mathcal{K})$ e este último é compacto, temos em verdade $p_0 \in \text{exp}^\perp(\mathcal{K})$. Assim, podemos escrever $p_0 = \text{exp}^\perp(t_0 v)$,

com $0 \leq t_0 \leq b$ e $v \in \widetilde{S}$. Com isto, p_0 está na imagem de uma geodésica tipo-luz $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$, dada por $\gamma(t) = \exp^+(tv)$, com $\gamma(0) \equiv \exp^+(0) \in S$. Isto mostra que $p_0 \in I^+(S)$.

Afirmção 3. $E^+(S) \subseteq \partial I^+(S)$.

Dado $p \in J^+(S) \setminus I^+(S)$, seja U qualquer vizinhança de p . Seja $\beta : [0, \epsilon] \rightarrow M$ qualquer curva tipo-tempo, futuro-dirigida com $\beta([0, \epsilon]) \subseteq U$ e $\beta(0) = p$. Para algum $q \in S$, $q \leq p \ll \beta(\epsilon) \Rightarrow \beta(\epsilon) \in I^+(S)$. Como $p \notin I^+(S)$, isto prova a afirmação.

Agora, como $\partial I^+(S)$ é fechado, $p_0 \in \partial I^+(S)$, e como $I^+(S)$ é aberto, $\partial I^+(S) \cap I^+(S) = \emptyset \Rightarrow p_0 \notin I^+(S)$. Logo $p_0 \in E^+(S)$. Portanto $E^+(S)$ é fechado, e sendo assim é compacto, conforme afirmado. ■

Observação 7.2.7. Na proposição 7.2.6, precisamos apenas da hipótese de geodésicas tipo-luz em (M, g) serem completas para o futuro. Se elas forem completas para o passado e S for anti-aprisionada, uma versão temporalmente dual da prova mostra que $E^-(S)$ também é compacto.

Observação 7.2.8. No espaço-tempo de Kruskal, como vimos acima, temos superfícies aprisionadas (e anti-aprisionadas), e este espaço-tempo tem Ricci identicamente nulo, de modo que a condição (i) da proposição 7.2.6 é automaticamente satisfeita. Porém, como neste espaço-tempo em geral as geodésicas tipo-luz não são completas para o futuro ou para o passado, a proposição não precisa valer, e de fato não vale, como observamos: $E^+(S)$ [$E^-(S)$] não são compactos qualquer que seja S superfície aprisionada [anti-aprisionada].

Teorema 7.2.9. (*Penrose*)

Suponha que

- (i) (M, g) é globalmente hiperbólico.
 - (ii) Existe $S \subseteq M$ superfície fechada e aprisionada.
 - (iii) $\text{Ric}(v, v) \geq 0$, para todo $v \in TM$ tipo-luz.
 - (iv) (M, g) é tipo-luz geodesicamente completo.
- Então, $E^+(S)$ é uma hipersuperfície de Cauchy em (M, g) .

Demonstração. Com efeito, (ii)-(iv) implicam que $E^+(S)$ é compacto, pela proposição 7.2.6. Além disso, $E^+(S)$ é claramente acronal. Como (M, g) é globalmente hiperbólico, e S é compacto, $J^+(S)$ é fechado. Temos $I^+(S) = \text{int}(J^+(S))$, logo $J^+(S) = \overline{J^+(S)} = \partial J^+(S) \cup \text{int}(J^+(S)) = \partial I^+(S) \cup I^+(S)$. $\therefore E^+(S) = \partial I^+(S)$. Mas este último é uma hipersuperfície topológica fechada. Como (M, g) é globalmente hiperbólico, isto implica que $E^+(S)$ é uma hipersuperfície de Cauchy. ■

Corolário 7.2.10. *Suponha*

- (i) Existe $\Sigma \subseteq M$ hipersuperfície de Cauchy não compacta.
 - (ii) $\text{Ric}(v, v) \geq 0$, para todo $v \in TM$ tipo-luz.
 - (iii) Existe $S \subseteq M$ superfície fechada e aprisionada.
- Então (M, g) é (tipo-luz) geodesicamente incompleto.

Demonstração. Suponha que (M, g) é tipo-luz geodesicamente completo. A condição (i) implica que (M, g) é globalmente hiperbólico, e juntamente com (ii) e (iii) significa que todas as hipóteses do teorema 7.2.9 são satisfeitas. Portanto $E^+(S)$

é uma hipersuperfície de Cauchy para (M, g) . Mas (ii), (iii) e completude tipo-luz nos dizem que $E^+(S)$ é compacto, pela proposição 7.2.6, e como $E^+(S)$ e Σ são ambas hipersuperfícies de Cauchy, eles precisam ser homeomorfos, o que contradiz o fato de Σ não ser compacto. ■

Apêndice A

Espaços Vetoriais com Produto Escalar

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita.¹

Definição A.1. Uma forma bilinear em V é uma aplicação bilinear $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Quando b satisfaz $b(u, v) = b(v, u)$, $\forall u, v \in V$, dizemos que b é simétrica.

Fixe uma forma bilinear simétrica $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) b é positiva [resp. negativa] definida quando $b(v, v) > 0$ [resp. $b(v, v) < 0$], $\forall v \in V$, $v \neq 0$.

(ii) b é positiva [resp. negativa] semi-definida quando $b(v, v) \geq 0$ [resp. $b(v, v) \leq 0$], $\forall v \in V$.

(iii) b é não-degenerada quando $b(u, v) = 0$ para todo $u \in V$ implica $v = 0$.

Quando b é positiva definida ou negativa definida, dizemos que b é definida, e analogamente para semi-definida. Indicaremos por $b > 0$ [resp. $b < 0$] quando b for positiva [resp. negativa] definida.

É imediato verificar que a restrição de b a um subespaço vetorial de V é novamente uma forma bilinear simétrica, que também será definida (ou semi-definida) se b o for.

Definição A.2. O índice de b , denotado por $\text{ind}(b)$, é o número natural que corresponde à maior dimensão de um subespaço $W \subseteq V$ tal que $b|_W$ é negativa definida. Mais precisamente,

$$\text{ind}(b) = \max\{n \in \mathbb{N} : \exists W \subseteq V \text{ subespaço vetorial, com } b|_W < 0 \text{ e } \dim(W) = n\}.$$

Quando b é positiva semi-definida, temos $\text{ind}(b) = 0$, e quando b é negativa definida $\text{ind}(b) = \dim(V)$. Em geral, o índice de b pode assumir qualquer valor entre 0 e $\dim(V)$.

Definição A.3. A matriz de uma forma bilinear simétrica $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, com respeito a uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , denotada por \mathbf{b} , é dada por $\mathbf{b}_{ij} = b(v_i, v_j)$. Esta matriz é claramente simétrica, uma vez que a forma bilinear b o é.

¹Ao longo deste Apêndice, estaremos sempre assumindo que $V \neq \{0\}$.

Se $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ são duas bases de V e \mathbf{b}, \mathbf{b}' são as matrizes da forma bilinear b com respeito às bases B, B' , respectivamente, então estas matrizes se relacionam de acordo com a expressão

$$\mathbf{b} = \mathbf{T}^t \mathbf{b}' \mathbf{T},$$

onde \mathbf{T} é a matriz mudança de base de B para B' . Como T e T' são sempre invertíveis, esta fórmula mostra que \mathbf{b} é invertível se e somente se \mathbf{b}' o for.

Proposição A.4. *Uma forma bilinear simétrica b é não-degenerada se e somente se sua matriz \mathbf{b} com respeito a alguma base (e portanto com respeito a qualquer base, pela discussão acima) for invertível.*

Demonstração. Seja $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de V . Para um dado $v \in V$, a condição $b(v, w) = 0, \forall w \in V$ é equivalente a $b(v, u_i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Por simetria, esta condição se escreve

$$b(v, u_i) = b\left(\sum_{k=1}^n v_k u_k, u_i\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{b}_{ik} v_k = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Assim, b é degenerada se e somente se a equação acima admitir uma solução não-nula, isto é, um vetor $v = (v_1, \dots, v_n)$ não-nulo. Por outro lado, os vetores v que satisfazem esta equação são exatamente aqueles vetores do núcleo da matriz \mathbf{b} , o qual é diferente de $\{0\}$ se e somente se \mathbf{b} for não-singular. ■

Estudaremos particularmente as formas bilineares não-degeneradas, uma vez que estas estão presentes em cada espaço tangente de uma variedade Pseudo-Riemanniana, e constituem os objetos que essencialmente ditam a geometria da mesma.

Definição A.5. *Um produto escalar b em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica não-degenerada.*

Exemplo A.6. Em $V = \mathbb{R}^2$, a função $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $b((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 x_2 - y_1 y_2$ define um produto escalar. Observe que, nesse exemplo, o conjunto de todos os vetores *tipo-tempo*, isto é, aqueles $v \in V$ tais que $b(v, v) < 0$, formam dois cones disjuntos. De fato, a condição $(x_1)^2 - (y_1)^2 < 0$ é satisfeita exatamente por aqueles vetores cuja coordenada y é maior, em módulo, do que a coordenada x . Estes pertencem a duas regiões, exibidas em azul na figura A abaixo, cujas fronteiras são as retas $x = y$ e $x = -y$.

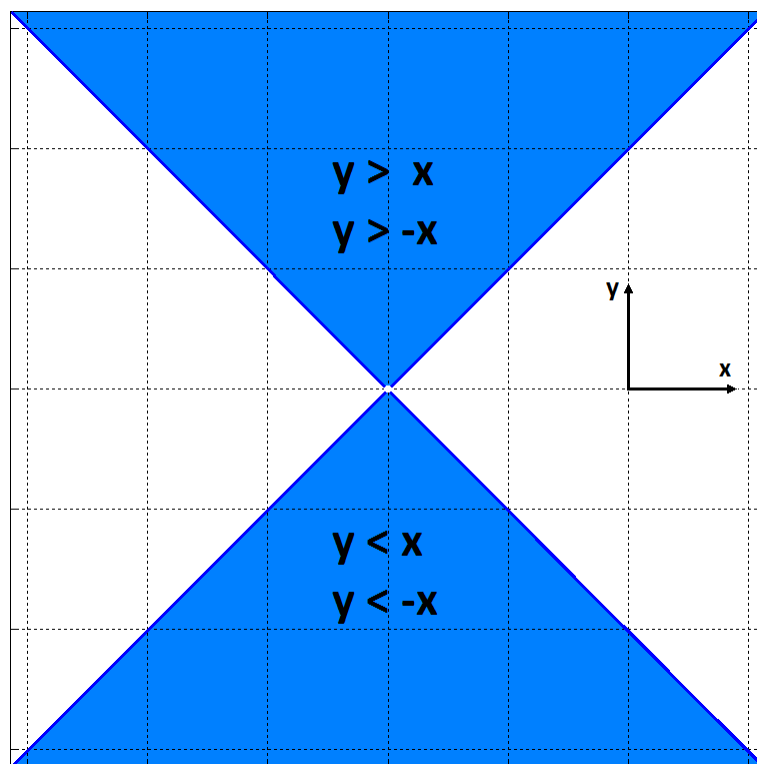


Figura A.1: Cones disjuntos contendo os vetores tipo-tempo em \mathbb{R}^2 .

Em geral, podemos definir $b : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$b(v, v) = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2, \text{ onde } v = (x_0, \dots, x_n).$$

Esta é a chamada *forma quadrática Lorentziana*.

Dizemos que dois vetores $v, w \in V$ são *ortogonais*, com relação a um produto escalar b , quando $b(v, w) = 0$. Denotamos esta relação por $v \perp w$.

Note que, ao contrário do que acontece em espaços vetoriais com produto interno, quando b é apenas um produto escalar podemos ter $b(v, v) = 0$ sem que v seja o vetor nulo. De fato, no exemplo A.6 acima, temos $b((x, x), (x, x)) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto significa que todo vetor da reta $x = y$ é ortogonal a ele mesmo. Um vetor não-nulo v satisfazendo $b(v, v) = 0$ é chamado *tipo-luz*. Os vetores tipo-luz ou tipo-tempo são chamados *causais*. Todo vetor que não é causal é dito ser *tipo-espaço*.

Definimos de maneira usual o *complemento ortogonal* de um subespaço vetorial $W \subseteq V$ como sendo

$$W^\perp = \{v \in V : v \perp w, \forall w \in W\}.$$

É importante ressaltar algumas propriedades do complemento ortogonal, definido aqui para qualquer produto escalar b , que diferem do caso em que b é um produto interno. Uma delas, já mencionada, é a possibilidade de um vetor não-nulo ser ortogonal a ele mesmo. Isto tem ainda outra consequência, a saber: nem sempre

vale a decomposição $V = W + W^\perp$. No exemplo A.6 acima, se tomarmos W como sendo o espaço gerado pelo vetor $(1, 1)$, então

$$W^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : b((x, y), (1, 1)) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} = W,$$

e portanto $W + W^\perp = W \subsetneq V$. Contudo, vale a seguinte Proposição.

Proposição A.7. *Seja V um espaço vetorial munido de um produto escalar b e $W \subseteq V$ um subespaço qualquer.*

(i) $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$.

(ii) $(W^\perp)^\perp = W$.

Demonstração. (i) Se $m = \dim(W)$ e $n = \dim(V)$, escolha $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V tal que $\{e_1, \dots, e_m\}$ é uma base de W . Para um dado $v \in V$, temos $v \in W^\perp$ se e somente se $b(v, e_i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Escrevendo $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$, temos

$$v \in W^\perp \Leftrightarrow b\left(\sum_{j=1}^n v_j e_j, e_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_{ij} v_j = 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Esta última condição pode ser pensada como um sistema linear, com n incógnitas (v_1, \dots, v_n) e m equações. Como por hipótese b é não-degenerada, a matriz \mathbf{b} é invertível, e portanto o espaço de soluções desta equação tem dimensão $n - m$. Este espaço é exatamente W^\perp , donde $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$.

(ii) Dado $v \in W$, temos $v \perp W^\perp$, por definição. Logo $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. Usando o item (i), temos

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V),$$

$$\dim(W^\perp) + \dim((W^\perp)^\perp) = \dim(V).$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $\dim(W) = \dim((W^\perp)^\perp)$, o que juntamente com $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ fornece $W = (W^\perp)^\perp$. ■

Definição A.8. *Um subespaço $W \subseteq V$ é dito ser não-degenerado se $b|_W$ é não-degenerada.*

Quando a forma bilinear b é definida, todo subespaço de V é automaticamente não-degenerado. Contudo, no caso indefinido, sempre existem subespaços degenerados, como aqueles gerados por vetores tipo-luz. No Exemplo A.6, $W = \text{span}\{(1, 1)\}$ é degenerado. A próxima Proposição fornece uma caracterização de subespaços degenerados.

Proposição A.9. *Um subespaço $W \subseteq V$ é não-degenerado se e somente se $V = W \oplus W^\perp$.*

Demonstração. Lembramos que a identidade

$$\dim(W + U) + \dim(W \cap U) = \dim(W) + \dim(U)$$

é válida para quaisquer subespaços U, W de um espaço vetorial V , independente de V possuir ou não um produto escalar (ou interno). No caso particular em que $U = W^\perp$, usando a Proposição A.7 item (i), temos

$$\dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V).$$

Isto mostra que $W + W^\perp = V$ se e somente se $W \cap W^\perp = \{0\}$, e qualquer uma destas condições é equivalente a $V = W \oplus W^\perp$. Por outro lado, o subespaço $W \cap W^\perp = \{v \in W : v \perp W\}$ ser igual a $\{0\}$ é o mesmo que W ser não-degenerado. ■

Uma consequência imediata desta Proposição é que W é não-degenerado se e somente se W^\perp o for, uma vez que $(W^\perp)^\perp = W$.

Sabemos que todo espaço vetorial V de dimensão finita com produto interno admite uma base ortonormal, isto é, uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ tal que $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Um resultado análogo vale para espaços com produto escalar, no seguinte sentido.

Definição A.10. *Seja V um espaço vetorial com produto escalar b . A norma de um vetor $v \in V$, denotada por $|v|$, é dada por $|v| := \sqrt{|b(v, v)|}$.*

Assim, um conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ é *ortogonal* se $b(v_i, v_j) = 0$ para $i \neq j$, e *ortonormal* se, além de ortogonal, cada v_i possui norma igual a 1. Isto significa que $b(v_i, v_i) = \pm 1$, $i = 1, \dots, n$. É fácil verificar que qualquer conjunto ortonormal é automaticamente um conjunto L.I. (contudo, conjuntos que são apenas *ortogonais* podem ser L.D.; considere $\{(1, 1), (2, 2)\}$ no Exemplo A.6).

Proposição A.11. *Todo espaço vetorial V com produto escalar b possui uma base ortonormal.*

Demonstração. Vamos proceder indutivamente, mostrando que é possível construir um conjunto ortonormal com $n = \dim(V)$ elementos, que portanto será uma base de V . Em primeiro lugar, note que sempre é possível construir um conjunto ortonormal com 1 elemento, pois como b é não-degenerada, existe $v \in V$ com $b(v, v) \neq 0$. Logo $\{\frac{v}{|v|}\}$ é um conjunto ortonormal. Suponha agora que tenhamos construído um conjunto ortonormal $\{e_1, \dots, e_k\}$, com $k < n$. Seja $W = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$. A matriz de $b|_W$ na base $\{e_1, \dots, e_k\}$ é a sua própria inversa, porque é uma matriz diagonal, cujos elementos não-nulos são todos 1 ou -1 . Pela Proposição A.4, W é não-degenerado. Como $k < n$, a Proposição A.7 item (i) nos diz que $\dim(W^\perp) \geq 1$. Assim, W^\perp também é não-degenerado, e portanto contém um vetor v tal que $b(v, v) = \pm 1$, pelo mesmo raciocínio do início da demonstração. O conjunto $\{e_1, \dots, e_k, v\}$ é ortonormal, e o resultado segue. ■

Fixe, daqui por diante, um espaço vetorial V , de dimensão $n + 1$, munido de um produto escalar b com $\text{ind}(b) = 1$. Escrevemos $\langle u, v \rangle := b(u, v)$, para $u, v \in V$. Seja \mathcal{T}_p o conjunto de todos os vetores tipo-tempo em V , isto é, $\mathcal{T}_p = \{v \in V \mid \langle v, v \rangle < 0\}$.

Definição A.12. *Se $v \in \mathcal{T}_p$, dizemos que $C(v) = \{u \in V \mid \langle u, v \rangle < 0\}$ é o cone temporal que contém v . O cone oposto a $C(v)$ é $C(-v)$.*

Por definição, $v \in C(v)$. Sejam u, v dois vetores tipo-tempo. Devemos ter $\langle u, v \rangle < 0$ ou $\langle u, v \rangle > 0$. De fato, podemos construir uma base $\beta = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ de V conforme a Proposição A.11. Neste caso, $\text{ind}(b) = 1$, e portanto podemos assumir $\langle e_0, e_0 \rangle = -1$ e $\langle e_i, e_i \rangle = -1, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Escreva $u = (u_0, \dots, u_n)$ e $v = (v_0, \dots, v_n)$ na base β . Como u, v são tipo-tempo, temos

$$-u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 < 0, \quad e \quad -v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2 < 0.$$

Disto segue que

$$\sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} < |u_0|, \quad e \quad \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} < |v_0|.$$

Por outro lado, sabemos pela desigualdade de Cauchy-Schwartz que

$$|v_1 u_1 + \dots + v_n u_n| < \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} < |v_0 u_0|,$$

donde se vê que não podemos ter $\langle u, v \rangle = 0$. Com uma pequena modificação no argumento acima, prova-se que se u é tipo-tempo e v é tipo-luz, também não podemos ter $\langle u, v \rangle = 0$. Assim, *todo vetor ortogonal a um vetor tipo-tempo é tipo-espaço*. Isto nos leva a concluir que

$$\mathcal{T}_p = C(v) \cup C(-v),$$

qualquer que seja $v \in \mathcal{T}_p$. É claro que estes resultados dependem crucialmente do índice do produto escalar em questão ser 1.

Proposição A.13. *Dados $v, w \in \mathcal{T}_p$, v e w pertencem ao mesmo cone temporal se, e somente se, $\langle v, w \rangle < 0$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{T}_p$ tal que $v \in C(u)$. Podemos assumir que $\langle u, u \rangle = -1$, já que $C(u) = C(\alpha u), \forall \alpha > 0$. O Teorema estará provado se mostrarmos que $w \in C(u) \Leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0$. Dado que $V = \text{Span}\{u\} \oplus u^\perp$, pois $\text{Span}\{u\}$ é obviamente não-degenerado, decomponamos $v = \alpha u + \hat{v}$ e $w = \beta u + \hat{w}$, com \hat{v} e $\hat{w} \in u^\perp$. Mas

$$\langle v, v \rangle < 0 \Rightarrow -\alpha^2 + \|\hat{v}\|^2 < 0 \Rightarrow \|\hat{v}\| < |\alpha|.$$

Analogamente para $|\beta| > \|\hat{w}\|$. Temos $\langle v, w \rangle = -\alpha\beta + \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle$. Como u é tipo-tempo e $\hat{v}, \hat{w} \in u^\perp$, temos \hat{v}, \hat{w} tipo-espaço. Assim, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, $|\langle \hat{v}, \hat{w} \rangle| \leq \|\hat{v}\| \|\hat{w}\| < |\alpha\beta|$.

$$v \in C(u) \Rightarrow \langle v, u \rangle = -\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow \langle v, w \rangle > 0 \Leftrightarrow -\beta > 0.$$

$\therefore w$ pertence a $C(u)$ se e somente se $\langle v, w \rangle < 0$. ■

Finalmente, ressaltamos que os cones temporais em cada espaço tangente são cones convexos. Com efeito, se $v, w \in C(u)$ e $t \in [0, 1]$, usando o critério acima, basta calcular

$$\langle tv + (1-t)w, u \rangle = \langle tv, u \rangle + \langle (1-t)w, u \rangle = t\langle v, u \rangle + (1-t)\langle w, u \rangle < 0,$$

pois $\langle v, u \rangle$ e $\langle w, u \rangle$ são ambos negativos. Daí $tv + (1-t)w \in C(u)$. Se $t \in (0, +\infty)$ e $v \in C(u)$, claramente $\langle tv, u \rangle < 0$ e portanto $v \in C(u)$, provando a afirmação.

Conclusão

Concluímos assim a apresentação dos Teoremas de Singularidade, bem como a teoria causal necessária para formular e provar estes resultados. Estes teoremas estão entre as primeiras versões provadas por Hawking e Penrose. Desde então, foram provadas muitas generalizações envolvendo condições um pouco diferentes que poderiam ser estudadas a partir daqui. Algumas dessas generalizações estão ligadas à situações cosmológicas, outras a colapsos estelares ou buracos negros (usando a idéia de superfícies fechadas aprisionadas). A referência [BE], Capítulo 11 contém resultados posteriores aos que vimos aqui.

Existem ainda questões relacionadas que podem ser exploradas, entre elas:

1. Como determinar quantas geodésicas incompletas temos de fato, uma vez provada a existência de ao menos uma.
2. Determinar de que maneira estender um dado espaço-tempo, quando não temos unicidade. De fato, o espaço-tempo de Schwarzschild admite várias extensões, a menos que se exijam certas condições sobre uma tal.
3. Formular uma definição de singularidades para que elas pertençam ao espaço-tempo (ou a algum outro objeto relacionado, como um fibrado sobre M) e possam portanto ser classificadas de alguma maneira.

Em resumo, muitos problemas permanecem em aberto na teoria de causalidade/singularidade na Relatividade Geral, e este trabalho pode eventualmente servir como referência ou ponto de partida para o estudos dos mesmos.

Referências Bibliográficas

- [O'NEILL] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry, with applications to relativity*, Pure and applied mathematics (Academic Press), 1983.
- [BE] Beem, J. K. e Ehrlich, P. E. *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker Inc., N. Y., 1996.
- [GP] Guillemin, V. e Pollack, A. *Differential Topology*, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [Man] Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988 - 2ª Edição (Projeto Euclides).
- [Man2] Carmo, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 2ª Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.
- [NO] K. Nomizu e H. Ozeki, *The existence of complete Riemannian metrics*, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) 889-891.
- [Grav] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
- [EL] Lima, E. L. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA, 1977.
- [Spivak] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. 1, 3ª Edição, Publish or Perish, 2005.
- [HE] Hawking, S. W. e Ellis, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- [Geroch] Geroch, R. P. *The Domain of Dependence*, J. Math. Phys. 11, 437-9 (1970b).