UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – CFM
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA MATEMÁTICA



TRABALHO

DE CONCLUSÃO DE CURSO

# *UM ESTUDO DIDÁTICO DO PITÁGORAS*

# *TEOREMA DE*

# *EM CLASSE DE 8ª SÉRIE*



Orientando ADRIANA MACHADO BARRIM TEIXEIRA
Orientadora NERI TEREZINHA BOTH CARVALHO

Florianópolis, 27, de fevereiro de 2003.

200919

Esta Manografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 12/SCG/03.

Nereu E. Burin

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

N. Carvalho

Profª Neri Terezinha Both Carvalho
Orientadora

Rosimary Pereira

Profª Rosimary Pereira

Prof. José Luiz Rosas Pinho

## AGRADECIMENTOS

Sou muito grata ao Deus que me concede A VIDA agora e, a perspectiva de VIDA ETERNA, no futuro. O Seu conhecimento, através da Bíblia, me deu um sentido e objetivo na vida.

Aos meus pais que sempre acreditaram em mim.

Ao meu esposo, que acompanhou cada passo neste processo me incentivando e me encorajando.

E as minhas irmãs: Silmara, Magna, Rosana e Eliane.

A Neri, por ter aceitado a me orientar na realização deste trabalho e por tudo que me ensinou sobre a Didática da Matemática.

As minhas amigas e companheiras de trabalho Maria da Graça Souza, Sayonara Massignan Weydmann e Maria Isabel Vargas da Cunha.

Aos professores, em especial Wladimir pelo seu carisma e paciência.

Aos Professores José Luiz e Rosimary, por aceitarem o convite de participar da banca e por suas contribuições que enriqueceram nosso trabalho.

A todos aqueles que incentivaram e desejaram a conclusão desta etapa.

# Sumário

# Introdução

Na geometria Euclidiana, o Teorema de Pitágoras é considerado um teorema chave pelos matemáticos. São inúmeros os problemas de Geometria, tanto Plana como Espacial, onde o Teorema de Pitágoras é ferramenta na sua resolução.

Faremos neste trabalho um estudo didático sobre o Teorema de Pitágoras.

De maneira geral, segundo Grenier (1996), a didática matemática interessa-se à construção do saber matemático, ao funcionamento e às condições de aprendizagem dos conhecimentos. Um dos ramos da pesquisa em didática matemática, ou seja, da Educação Matemática, investiga o comportamento de um determinado conteúdo (objeto de estudo) do ponto de vista da antropologia, buscando identificar os elementos que formam o seu habitat, as transformações evolutivas que sofreu ao longo dos anos, como se comporta em diferentes ambientes etc.

O objetivo de nosso trabalho é o de explicitar elementos da transposição didática realizada sobre o Teorema de Pitágoras como objeto do "saber a ensinar"[1] ao "saber ensinado"[2].

No Capítulo I apresentamos o quadro teórico e as questões de nossa problemática.

---

[1] **Saber a ensinar** é o saber disponibilizado para ser estudado em alguma Instituição (Ensino Fundamental, Ensino Médio, Curso de graduação, classe, etc.)

[2] **Saber ensinado** é o saber que é objeto de estudo em uma Instituição.

No Capítulo II, fazemos um breve estudo histórico da evolução do Teorema de Pitágoras centrando nossa atenção a 4 tipos de demonstrações as quais consideraremos um saber a ensinar.

No Capítulo III realizamos um estudo sobre o Teorema de Pitágoras como saber a ensinar no Ensino Fundamental segundo as proposições dos Parâmetros Curriculares Nacionais, Proposta Curricular de Santa Catarina e Planejamento das Escolas. Também analisamos neste capítulo o estudo do Teorema de Pitágoras como objeto ensinado através de dois livros didáticos.

No Capítulo IV faremos uma investigação não aprofundada em classe de 1ª série do Ensino Médio, onde buscamos elementos que nos permita identificar se o Teorema de Pitágoras é uma ferramenta disponível para os alunos da 1ª série do Ensino Médio, visto que ele é estudado no fim da 8ª série do Ensino Fundamental.

Este estudo foi feito através de uma Micro-engenharia Didática[3] (Ver pág. 9)

Com este estudo adquiriremos conhecimentos sobre o objeto Teorema de Pitágoras de como ele é proposto como saber a ensinar e como este saber é ensinado na 8ª série do Ensino Fundamental.

[3]Micro-engenharia Didática: vista como metodologia de pesquisa (concepção, observação e análise de seqüência de ensino).

# Capítulo I

# Quadro Teórico e Questões de Pesquisa

Os conteúdos dos saberes matemáticos destinados a ensinar, conforme as proposições dos livros didáticos, como diz Chevallard (1991) são em geral "criações didáticas", originadas por "necessidades de ensino".

A princípio para o matemático, estas criações funcionam como instrumentos e passam depois a serem ensinados como objeto de estudo. O saber a ser ensinado, conforme proposto em um livro didático de uma instituição particular, por exemplo uma série, foi submetido a um conjunto de transformações adaptativas até se tomar viável de ser um objeto ensinado.

Segundo Chevallard (1991):

*"Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os 'objetos de ensino'. O 'trabalho' que de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática".* (Tradução livre, pág. 39)

A transposição que sofre um saber se passa em níveis diferentes:

a) no nível científico (ou saber dos sábios) – aquele produzido pelo matemático normalmente nas universidades ou institutos de pesquisa;

b) nível do saber a ensinar – o saber acadêmico e/ou aquele que é produzido da noosfera (Ver pág. Seguinte). Exemplos: livros para-didáticos, brochuras, compilações etc.;

c) nível do saber ensinado – aquele produzido nos livros didáticos e ou de classes propriamente ditas.

Nós questionamos: quais as modificações que sofre o objeto "Teorema de Pitágoras" de saber a ensinar a saber ensinado?

Chevallard designa "noosfera" tudo o que interfere na seleção dos conteúdos que comporão os programas escolares e que determina as abordagens dos conteúdos e métodos, objetivos e formas de sistemas didáticos[4] que conduzem o processo de ensino. Fazem parte da noosfera: cientistas, professores, especialistas, políticos, atores de livros, associações de pais e outros agentes da educação.

Deste ponto de vista, nós estamos interessados em estudar as transformações que sofre o objeto Teorema de Pitágoras na passagem de objeto a ensinar a objeto a ser ensinado na instituição 8ª série do Ensino Fundamental.

Então mais precisamente nós perguntamos: *"Como vive o saber Teorema de Pitágoras, no ensino da classe de 8ª série do Ensino Fundamental, ou seja, como vive o saber Teorema de Pitágoras na Proposta Curricular Nacional, na Proposta Curricular de SC, nos Planos de Ensino e nos Livros Didáticos?"*

Notemos que para conhecer as características de vida de um saber matemático, precisamos extrair elementos sobre a "ecologia" deste saber na instituição respectiva. Isto nos leva a usar a teoria "Antropológica do Saber", (Chevallard, 1991) na análise do livro didático. Esta teoria nos fornece um instrumental em termos de tarefa, técnica e tecnologia que permite identificar as "organizações praxiológicas" do saber nas diferentes Instituições. Esta teoria busca estudar, em uma instituição, o que existe sobre um determinado saber matemático, através de perguntas tais como: O que existe e por que? O que poderia existir naquela instituição? O que não existe e porque? Entre outras questões.

Nossas questões se enquadram nesta perspectiva.

Uma vez conhecendo o saber, "Teorema de Pitágoras" como saber a ensinar e como ensinado na instituição 8ª série, através dos livros didáticos, nós nos interessamos a conhecer alguns elementos da relação do aluno com este saber. Por isto colocamos uma segunda questão de pesquisa:

---

[4] Sistema didático: segundo Brousseau um sistema didático é descrito pelas relações que se estabelecem entre o professor, aluno e objeto matemático onde existe uma intensão de ensinar.

O Teorema de Pitágoras é uma ferramenta disponível aos alunos no início da 1ª série do Ensino Médio?

Para buscar respostas a esta questão, faremos uma experimentação em classe de 1ª série do Ensino Médio.

Nós iremos realizar uma única sessão didática. Para a elaboração desta experimentação iremos nos apoiar na teoria de Micro-engenharia Didática, descrita por R. Douady (Revista do Professor de Matemática, vol 1, nº 1; 1990). Consideraremos as etapas: a) concepção das questões; b) análise *a priori* das questões; c) aplicação da seqüência didática para coleta dos dados e a análise *a posteriori*. A análise *a priori* nos permite fazer hipóteses sobre possíveis resoluções dos alunos, concepções, erros, desempenhos, etc.. A análise *a posteriori* nos permite confrontar os fenômenos observados com os previstos *a priori* para tirar conclusões.

# Capítulo II

# Um Pouco de História sobre o "Teorema de Pitágoras"

Vamos primeiramente estudar um pouco da História sobre o Teorema de Pitágoras para conhecer sua evolução ao longo da história e como ele é hoje, como saber a ensinar na 8ª série do Ensino Fundamental.

## II.1- O Teorema de Pitágoras – de Casos Particulares ao Caso Geral

Nós identificamos diferentes apreensões do Teorema de Pitágoras ao longo da história, as quais apresentamos a seguir.

- **Casos particulares:**

*a) O Teorema de Pitágoras como relação numérica do tipo* $3^2 + 4^2 = 5^2$

Esta relação era vista como uma propriedade de um triângulo retângulo particular, de lados 3, 4 e 5. Esta relação era conhecida pelos egípcios e babilônios, antes dos gregos (Eves,1964, pp. 61-64 e 73-74).

*b) O Teorema de Pitágoras como situação problema que envolve comprimento:*

*"[...] quebrar a reta e fazer a largura 3, comprimento 4, então a distância entre os cantos é 5."*

Esta forma de existência foi identificada em um manuscrito chinês datando de mais de mil anos Antes de Cristo (Eves,1969a, p. 54).

*c) O Teorema de Pitágoras como situação problema que envolve tamanho de quadrados formado pelos seus lados:*

*"O quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados sobre os catetos."*

Temos aqui três acepções diferentes do Teorema de Pitágoras. A primeira delas, numérica e a relação se centra sobre os lados do triângulo retângulo. A Segunda geométrica, e a problemática se concentra sobre os lados do triângulo retângulo. Já na terceira, também geométrica, a relação muda de foco. Não é mais os lados do triângulo que estão em jogo diretamente mas sim a área dos quadrados formado pelos lados do triângulo.

- **Numérico e geométrico indissociados**

Segundo Lima (1991a), a verificação das relações do tipo $3^2 + 4^2 = 5^2$ foi obtida pela constatação da área de quadrados dos lados do triângulo retângulo, como mostraremos a seguir.

Considerando a última asserção sobre o teorema de Pitágoras, construindo os quadrados relativamente aos lados do triângulo, obtemos:

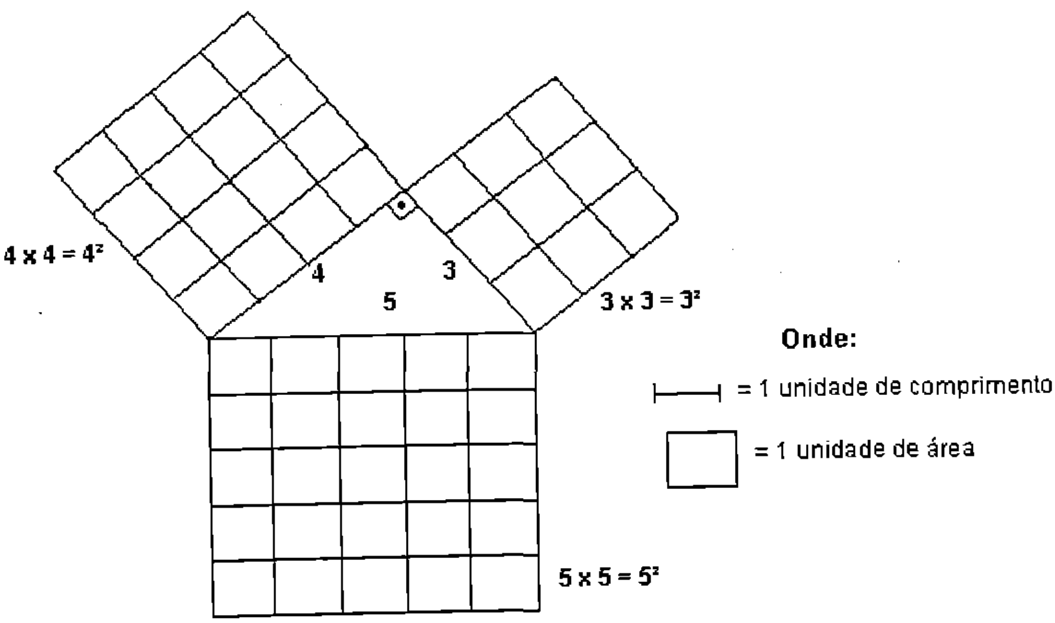



**Fig. 1**

Uma verificação por construção e pelo cálculo da área:

Considerando que cada quadradinho corresponde a 1 unidade de área, verificamos que nos três quadrados existem 25, 16 e 9 unidades de área; notando que 25=16+9 ou $5^2=4^2+3^2$, confirma-se a relação: a área do quadrado construído sobre o maior lado do triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados.

Este tipo de verificação fez com que se estabelecesse uma relação entre as medidas dos lados do triângulo retângulo e as áreas dos quadrados construídos sobre os lados. Esta concepção fez evoluir o enunciado do Teorema de Pitágoras para o caso geral.

- **Caso geral:** "*o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados dos catetos*"(Eves, 1969b, p. 53).

Nesta generalização o Teorema de Pitágoras retorna a relação sobre os lados do triângulo retângulo. Assim: se ABC é um triângulo retângulo em A e considerando $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$, temos $a^2 = b^2 + c^2$.

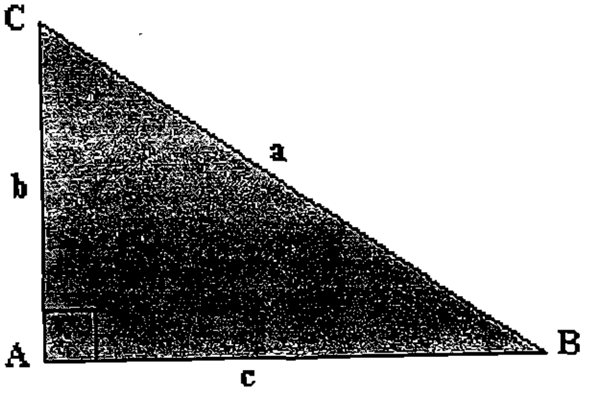



**Fig. 2**

Ou seja, $(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto b})^2 + (\text{Cateto adjacente c})^2$.

Tomando a medida dos lados: a, b e c obtemos relação $a^2 = b^2 + c^2$. Esta é uma generalização do Teorema de Pitágoras, no sentido de que, a relação $a^2= b^2 + c^2$, vale para qualquer triângulo retângulo. Neste caso, as medidas dos lados do triângulo é que são as variáveis consideradas.

Temos assim que historicamente teve uma evolução de situações numéricas para geométricas e também uma variação sobre as relações entre lados dos triângulos e áreas.

Notemos que estes casos particulares apresentam cada um deles, uma particularidade em si próprio. No caso a) a restrição é feita em função do tipo do triângulo, triângulo retângulo e a identificação de que existia uma relação entre comprimentos dos lados que era: $a^2 = b^2 + c^2$. O caso b) tem por particularidade uma verificação do valor da hipotenusa de uma maneira experimental. Também, como o caso a) se centra no comprimento dos lados.

Diferentemente aos casos a) e b) o caso c) se centra sobre a figura geométrica formada pelos lados do triângulo e identifica igualdade das soma das áreas dos quadrados formados pelos catetos com o quadrado formado pela hipotenusa. Temos neste caso uma leitura sobre as áreas dos quadrados dos lados do triângulo (mesmo que não explícita) e não do comprimento dos lados.

Na generalização do Teorema de Pitágoras ele volta a se centrar sobre os lados do triângulo retângulo.

Lima (1991a) afirma, que em 1927, Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos), escreveu o manuscrito *"The Pythagorean proposition"*, um trabalho que em sua Segunda edição acabou contendo 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Segundo Boyer (1956), os egípcios, babilônios e gregos não demonstram o Teorema de Pitágoras. Supõe-se que a "Escola Pitágorica" tenha dado a primeira prova efetiva desta afirmação. (Boyer, 1956, pp. 35-36. Eves, 1954, p. 97).

Apresentaremos a seguir quatro demonstrações, dentre as 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras.

Escolhemos as demonstrações que consideramos ser possível de encontrá-las nos livros didáticos. Buscamos ilustrar uma mudança de quadro, conforme R. Donady (1986). Apresentamos 2 (duas) demonstrações no "quadro algébrico" e 2 (duas) demonstrações no "quadro geométrico", isto é dois tratamentos diferentes: um usando como ferramenta elementos da álgebra e o outro usando como ferramenta elementos da geometria.

Vejamos a seguir as 4 (quatro) demonstrações.

## II.2- Demonstrações do Teorema de Pitágoras

Como dito anteriormente, aproximadamente 370 demonstrações do Teorema de Pitágoras foram catalogadas por Loomis, durante 1907 a 1940.

O trabalho de Loomis, disponibiliza todo este saber como um saber a ensinar. Consideremos que este saber, uma vez disponível, pode vir a ser saber ensinado, no Ensino Fundamental e Médio após um trabalho de elementarização realizado pela noosfera.

Neste trabalho, retemos quatro destas demonstrações duas algébricas e duas geométricas, das quais fizemos como hipótese que elas (ou uma delas) possa ser abordada nos livros didáticos de 8ª série do Ensino Fundamental.

A escolha "algébrica" e "geométrica" deve-se ao fato da importância do tratamento de diferentes quadros teóricos no ensino de matemática. Nossa escolha das demonstrações se baseia no que consideramos *a priori*, como simples, de fácil compreensão para os alunos, demonstrações que utilizam saberes oficialmente disponíveis na 8ª série.

## II.2.1- Demonstrações Geométricas

- **"A mais bela prova"**

Loomis, um apaixonado pelo Teorema de Pitágoras, considera "a mais bela prova" a demonstração a seguir:

**Teorema "A mais bela prova"**: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos"

Apresentamos primeiramente as configurações:

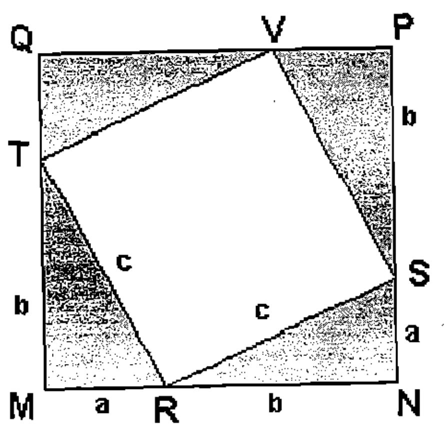



Fig. 3

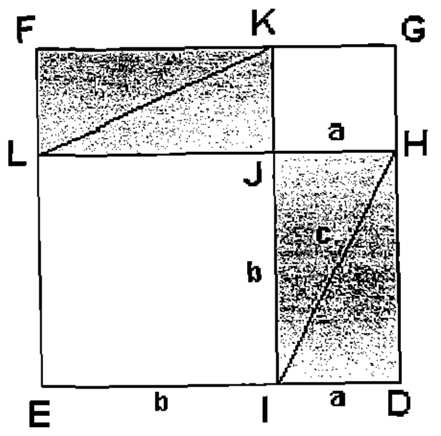



Fig. 4

Considere o quadrado MNPQ (qualquer medida de lado), em que o lado é a soma de dois números, representados por $a$ e $b$. Retiremos 4 triângulos congruentes do quadrado de lado $a + b$: notemos que NSR$\equiv$MRT$\equiv$QTV$\equiv$PVS, pois PV=NS=MR=QT e também PS=NR=MT=QV por construção e os triângulos são retângulos. Logo pelo caso LAL conforme a Fig. 3, obtemos os triângulos NSR, MRT, QTV, PVS são congruentes.

<u>Demonstração</u>:

i) O quadrilátero SRTV, cujo lado é a hipotenusa de medida $c$ dos triângulos congruentes, é um quadrado, pois os triângulos (NSR, MRT, QTV e PVS) são retângulos. Vejamos:

consideremos por exemplo o triângulo retângulo NSR: o ângulo do vértice N é reto, portanto mede 90°. A soma dos ângulos de vértices S e R é igual a 90°, pela propriedade das soma dos ângulos internos. Os ângulos $N\hat{R}S$ e $P\hat{S}V$ são congruentes. O ângulo raso do lado PN, no vértice S, é 180°. Logo, cada ângulo do quadrilátero SRTV é 90°. Analogamente para os outros triângulos. Também os segmentos TR=RS=SV=VT, pois os triângulos NSR, MRT, QTV, PVS são congruentes.

ii) Se fizermos a mesma operação com quadrado EDGF, conforme a figura 4, construindo 2 retângulos de lados *a* e *b*, restarão dois quadrados de lados *a* e *b* respectivamente, pois $(a+b)^2=a^2 + 2.a.b + b^2$. Comparando as figuras (Fig. 3 e Fig. 4) notemos que se retirarmos 4 triângulos retângulos de lados *a*, *b* e *c*, restam dois quadrados um de lado *a* e outro de lado *b*, cuja soma da área é igual a área do quadrado de lado *c* da Fig. 3. Logo, a área do quadrado de lado *c* é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem *a* e *b*.

- **"A demonstração de Papus":**

Papus, segundo Lima (1991a), faz uma generalização do Teorema de Pitágoras.

**Teorema de Papus:** "a área do paralelogramo BCDE é a soma das áreas de ABFG e AIJC".

Consideremos a situação seguinte (fig. 5):

ABC um triângulo qualquer, em vez de quadrados sobre os lados, consideremos paralelogramos, sendo dois deles quaisquer, e o terceiro tal que CD seja paralelo a AH e AH=CD.

Tracemos os paralelogramos ABFG e ACJI quaisquer. Observe a Fig. 5 no encontro dos prologamentos dos segmentos JI e FG obtemos o ponto H. A partir do segmento AH, tracemos o terceiro paralelogramo, com a seguinte restrição: AH = DC e AH//DC. Logo obtemos o terceiro paralelogramo BCDE.

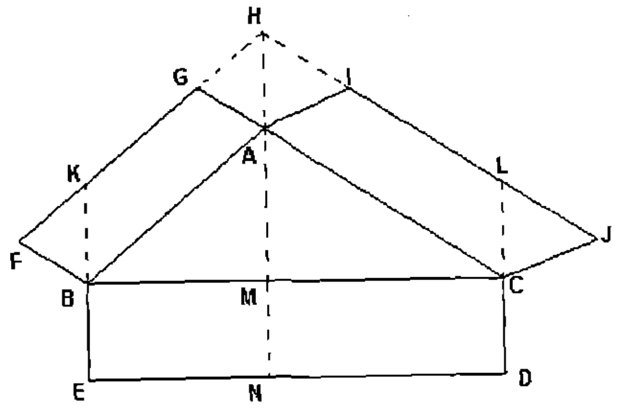



**Fig. 5**

Assim, AHKB tem a mesma área que ABFG e a mesma área que BMNE. Segue-se que as áreas de BMNE e ABFG são iguais. Analogamente, são iguais as áreas de CDNM e CAIJ. Portanto a área de BCDE é a soma das áreas de ABFG e CAIJ.

## II.2.2- Demonstração Agébrica

- **"A prova mais curta"**

Segundo Loomis, a prova mais curta e também a mais conhecida baseia-se na semelhança de triângulos.

**Teorema "A prova mais curta":** "O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos num triângulo retângulo".

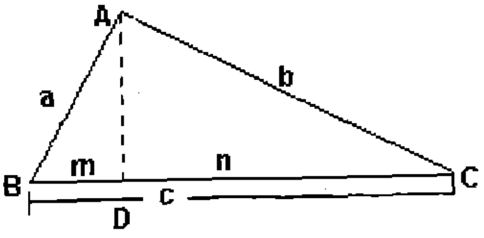



**Fig. 6** – A prova mais curta

Demonstração:

a) Sejam ABC um triângulo retângulo em A, AD a altura do triângulo ABC relativa ao lado BC. Os triângulos ABC, DBA e DAC são semelhantes ($\hat{B}$ é ângulo agudo comum dos triângulos retângulos DBA e ABC, analogamente para os triângulos ABC e DAC). Tome $m$ e $n$ respectivamente as projeções dos catetos $a$ e $b$ sobre a hipotenusa $c$, temos: (i) $\frac{c}{a} = \frac{a}{m} \Rightarrow a^2 = mc$ e (ii) $\frac{c}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = nc$; Somando membro a membro (i) e (ii), obtemos $a^2 + b^2 = mc + nc$, mas $m + n = c$, então $c^2 = a^2+b^2$.

Esta demonstração é feita usando relações métricas de um triângulo retângulo.

- **Demonstração do "Presidente"**

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos durante apenas 4 meses (foi assassinado em 1881) era general e também gostava de matemática.

**Teorema do Presidente:** "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos"

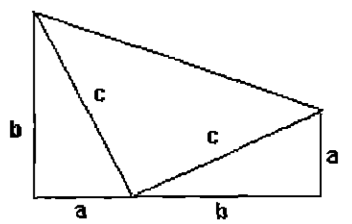



**Fig. 7** - Demontração do Presidente

Mostremos que a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados dos catetos $a$ e $b$.

Demonstração: Baseado na Fig. 7, a área do trapézio com bases $a$, $b$ e altura $a + b$ é igual à semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de 3 triângulos retângulos. Portanto

$$\frac{a+b}{2} \text{ x } (a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{2ab}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Simplificando, obtendo $a^2 + b^2 = c^2$

Ao longo da história encontramos o teorema de Pitágoras inicialmente como uma relação numérica particular que evoluiu para um tratamento geométrico e depois é generalizado e tratado algebricamente. O que se constata é que a demonstração geométrica e algébrica às vezes se confunde, pois uma completa a outra. Poucos são os teoremas em que há tantas maneiras de demonstrar.

# Capítulo III

# Estudo do Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental

Neste capítulo faremos um estudo das proposições dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e Parâmetros Curriculares de Santa Catariana (PCSC), planejamentos anuais de escolas sobre o Teorema de Pitágoras como saber a ensinar no Ensino Fundamental. Também faremos o estudo dos livros didáticos, considerando que estes apresentam o Teorema de Pitagórico como ele é ensinado nas escolas, uma vez que os professores se apoiam nos livros didáticos na preparação das aulas e são os livros didáticos a fonte de informações para os alunos.

## III.1- Teorema de Pitágoras nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Vejamos neste parágrafo a proposição dos PCNs sobre o objeto Teorema de Pitágoras como saber a ensinar.

Os PCNs não propõem o Teorema de Pitágoras como conteúdo para uma determinada Instituição de Ensino. O Teorema de Pitágoras é citado no PCNs como exemplo para mostrar que a partir de demonstrações concretas ou empíricas, pode-se levar os alunos a compreender a importância e necessidade das demonstrações para legitimar as hipóteses levantadas em uma determinada situação matemática .

*"Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre os três domínios: [...] o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas.[...] Por exemplo, um quebra cabeça constituído por peças planas devem compor, por justaposição, de duas maneiras diferentes, um modelo material de um quadrado* (Ver Fig. 3 e 4, pág.15). *Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, observa-se que* $a^2=b^2 + c^2$. *Diz-se, então, que o teorema de Pitágoras foi "provado"."* (PCN, 1998, p. 126)

Este comentário, refere-se a demonstração geométrica, citada no Capítulo II.2.1 "a mais bela prova".

## III.2- Teorema de Pitágoras na Proposta Curricular de SC (PCSC)

As disciplinas curriculares propostas pela Secretaria de Educação do Estado estão apresentadas na Proposta Curricular de Santa Catarina 1998. Segundo esta proposta, sobre a rubrica "campos geométricos" temos sub-itens: geometria, sistemas de medidas e trigonometria como podemos ver na tabela abaixo.

Os conteúdos propostos na rubrica "Campos geométricos" na Proposta Curricular SC/98.

| | ENSINO FUNDAMENTAL | | | | | | | | | ENSINO MÉDIO | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CAMPOS GEOMÉTRICOS | PRÉ | 1ª | 2ª | 3ª | 4ª | 5ª | 6ª | 7ª | 8ª | 1ª | 2ª | 3ª |
| 1. GEOMETRIA | | | | | | | | | | | | |
| • Produção histórico-cultural | | | | | | | | | | | | |
| • Exploração do espaço tridimensional | | | | | | | | | | | | |
| • Elementos de Desenho Geométrico | | | | | | | | | | | | |
| • Estudo das Representações Geométricas no Plano | | | | | | | | | | | | |
| • Geometria Analítica | | | | | | | | | | | | |
| 2. SISTEMAS DE MEDIDAS | | | | | | | | | | | | |
| • Produção histórico-cultural | | | | | | | | | | | | |
| • Conceitos e Medidas de: Comprimento, superfície, Volume, capacidade, ângulo, Tempo, massa, peso, velocidade e temperatura | | | | | | | | | | | | |
| 3. TRIGONOMETRIA | | | | | | | | | | | | |
| • Produção histórico-cultural | | | | | | | | | | | | |
| • Relações trigonométricas no Triângulo retângulo | | | | | | | | | | | | |
| • Funções trigonométricas | | | | | | | | | | | | |

**Tabela 01 - Disciplinas curriculares - Proposta Curricular de Santa Catarina**

Constatamos que o teorema de Pitágoras não é tratado explicitamente nesta Proposta Curricular 98. Entendemos que a Proposta Curricular 98, não entra a este nível de detalhamento.

Podemos pensar a priori, que o Teorema de Pitágoras tem lugar no ensino da geometria devido sua importância como teorema no contexto da geometria Euclidiana.

Podemos pensar que o teorema de Pitágoras tem lugar no ensino, na sub-rubrica "Sistemas de Medidas", se o associarmos aos conceitos de medida de comprimento, mas também ele pode ser estudado na sub-rubrica "Trigonometria" no estudo do triângulo retângulo.

Se considerarmos a 1ª sub-rubrica "Sistemas de Medidas", podemos pensar que o teorema de Pitágoras poderá ser estudo no Ensino Fundamental a partir da 7ª série.

## III.3- Teorema de Pitágoras nos Planejamentos anuais de ensino da 8ª Série do Ensino Fundamental

De 10 escolas visitadas, na rede Estadual, tivemos dificuldades para obter cópias dos planos de ensino das séries do Ensino Fundamental, pois os planejamentos de ensino não estavam disponíveis. Somente em uma escola, nas redondezas do Centro da cidade de Florianópolis, tivemos acesso aos Planejamentos anuais de ensino. Identificamos no Planejamento da 8ª série, um lugar para o Teorema de Pitágoras. Ele é explicitado como conteúdo no contexto na unidade 5 – "Relações Métricas". Ressaltamos que neste Planejamento o objetivo específico atribuído ao Teorema de Pitágoras e o de ser ferramenta: "Aplicar o Teorema de Pitágoras no cálculo de medidas de um triângulo retângulo". Notemos aqui que a finalidade é o cálculo de comprimento de segmentos.

Em conclusão:

Segundo os PCNs O Teorema de Pitágoras será estudado, mas o interesse está sobre o tipo de demonstração que se pode fazer, já na PCSC não temos elementos sobre como será trabalhado o Teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental e se trabalhado em que classe?!!

Segundo os Planejamentos anuais sabemos que o Teorema de Pitágoras é objeto de estudo no contexto das "Relações Métricas do triângulo retângulo" na classe de 8ª série.

## III.4- Estudo dos Livros Didáticos

O estudo dos livros didáticos nos dá elementos de como o Teorema de Pitágoras é ensinado.

Para este estudo, optamos por estudar dois livros didáticos usados como livro texto na classe de 8ª série do Ensino Fundamental da Grande Florianópolis.

Consideramos também, que os professores utilizam estes livros na preparação das aulas, o que nos faz considerar que o saber desenvolvido nestes livros compõem o saber ensinado em classe.

Os livros escolhidos foram publicados em 1998, no ano da divulgação da Proposta Curricular SC e Propostas Curriculares Nacionais. A escolha se justifica, pela constatação, que os mesmos são utilizados em classe nas escolas da Grande Florianópolis.

Estudaremos em cada livro o desenvolvimento do conteúdo e os exercícios. Para estudo dos exercícios consideraremos, a priori, uma tipologia definida segundo as tarefas, a qual apresentaremos a seguir:

**Uma tipologia de problemas segundo a tarefa**

Para viabilizar nosso trabalho adotamos os seguintes critérios: alguns exercícios tinham vários itens, consideramos cada um desses itens como um exercício independente.

Inspiramo-nos na classificação dos exercícios dadas por Aurélio (TCC, 2002), também explicitamos, a priori, sub-tipos em função de partitularidades.

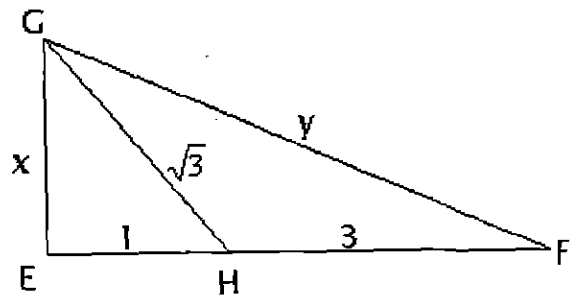
Definimos, a priori, sete tipos. Sendo que do tipo 1 havia cinco sub-tipos enquanto que o tipo 2 apenas três sub-tipos de exercícios segundo a tarefa. Vejamos a seguir:

**Tipo 1:** Calcular ou determinar medidas de lados desconhecidos.

**Sub-tipo 1:** Calcular medida de lado desconhecido de triângulos retângulos.

*"Calcule x e y."* (Livro 1[5] - p. 119)

[5] Livro 1: Matemática Conceitos e Histórias; Livro 2: A conquista da Matemática – Teoria e Aplicações.

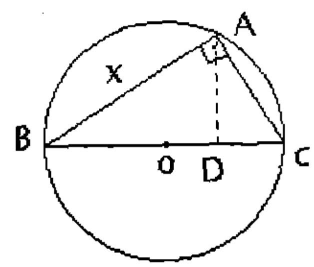



**Sub-tipo 2:** Calcular outro elemento linear, tal como, perímetro, altura, diagonal do quadrado.

*"Em um triângulo equilátero, a altura mede $2\sqrt{3}$ cm . Qual é o perímetro?"* (Livro 1- p. 120)

**Sub-tipo 3:** Calcular elementos de polígonos particulares (lado do trapézio, diagonal do losango, comprimento de corda do círculo, distância entre os centros das circuferências)

*"Todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo. Na figura abaixo, uma corda $\overline{AB}$ é projetada ortogonalmente sobre o diâmetro $\overline{BC}$, determinando um segmento $\overline{BD}$ que mede 9 cm. Se o raio da circunferência mede 8 cm, calcule a medida x da corda $\overline{AB}$."* (Livro 2 - p. 192)




**Sub-tipo 4:** Determinar os comprimentos dos lados a partir da razão entre elementos lineares.

*"Determine os catetos de um triângulo retângulo, sabendo que a razão entre suas medidas é 3:4 e que a hipotenusa mede 20 cm"* (Livro 1- p. 127).

**Sub-tipo 5:** Calcular lados a partir da soma, diferença e produto, bem como, a combinação dessas operações entre os lados.

*"A diferença entre os catetos de um triângulo retângulo é **d** e a área é **s**. Determine os catetos para: a) **d** = 17 e **s** = 84; b) **d** = 21 e **s** = 540."* (Livro 1 - p. 127).

**Tipo 2:** Calcular área de um polígono.

**Sub-tipo 1:** Calcular área de um polígono dado alguma medida.

*"A diagonal de um quadrado mede 15 cm. Qual é a sua área?"* (Livro 1- p. 120).

**Sub-tipo 2:** Calcular a área a partir da razão entre lados de um polígono.

*"Num retângulo, um dos lados é ¾ do outro e a diagonal mede 10 cm. Calcule sua área."* (Livro 1- p. 126).

**Sub-tipo 3:** Calcular a área a partir das operações (produto, soma e diferença) entre os lados.

*"Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 m e a diferença entre os catetos é 3 m. Determine a área.* ***Sugestão:*** $b - c = 3 \Rightarrow (b - c)^2 = 9$*"* (Livro 1 - p. 127).

**Tipo 3:** Mostrar se as medidas dadas são lados de um triângulo retângulo.

*"Quais das seqüências de valores a seguir são medidas dos lados de um triângulo retângulo?*

*a) 7 cm, 9 cm, 12 cm*
*b) 16 cm, 12 cm, 20 cm*
*c) 12 cm, 5 cm, 13 cm*
*d) 11 cm, 15 cm, 17 cm"* (Livro 1 - p. 119).

**Tipo 4:** Situação do cotidiano.

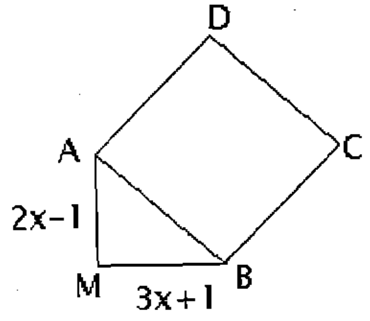
*"Um avião levanta vôo para ir da cidade A até a cidade B, situada a 500 km de distância. Depois de voar 300 km em linha reta, o piloto descobre que a rota está errada e para corrigi-la, ele altera a direção de vôo de um ângulo de 90°. A que distância o avião estava da cidade B quando houve alteração da rota?"* (Livro 2 - p. 194).

**Tipo 5:** Determinar projeções sobre a hipotenusa.

*"Os catetos de um triângulo retângulo medem 15 cm e 20 cm. Determine suas projeções sobre a hipotenusa."* (Livro 1 - p. 127).

**Tipo 6:** Determinar o polinômio que expressa a área do quadrado.

*"Qual é o polinômio que expressa a área do quadrado ABCD ao lado?"* (Livro 2 - p. 183)




**Tipo 7**: Calcular a razão entre os segmentos determinados pela altura sobre a hipotenusa.

*"Em um triângulo retângulo, as medidas dos catetos são expressas por x e 2x. Qual é a razão entre o maior e o menor dos segmentos determinados pela altura sobre a hipotenusa?"* (Livro 2 - p. 194).

A figura na resolução dos exercícios tem sua relativa importância, quer ela seja dada com o enunciado, quer seja realizada pelo aluno. No estudo da figura o aluno é levado a identificar os elementos do exercício, e para isso precisa na resolução examinar sub-figuras, traços auxiliares, verificar propriedades do triângulo retângulo etc.

Segundo Duval (1994) , diferentes apreensões da figura são mobilizadas na resolução dos exercícios: por exemplo **"apreensão perceptiva[6]"** e **"apreensão operatória[7]"**: *"A apreensão perceptiva é aquela que permite identificar ou reconhecer, imediatamente, uma forma, ou um objeto, seja no plano ou no espaço.* (Duval, 1994, p. 123) (Tradução livre) E "a *apreensão operatória tem uma função heurística na resolução do problema. É a apreensão de uma figura dada em suas diferentes modificações possíveis em outras figuras"*. (Duval, 1994, p. 126). (Tradução livre)

Para o estudo dos exercícios, escolhemos, a priori, considerar duas variáveis: a tarefa e o papel do desenho no enunciado. Consideramos que a identificação de elementos destas variáveis poderia nos fornecer maior clareza sobre a forma dos exercícios propostos.

---

[6] ***L'appréhension perceptive:*** *elle "permet d'identifier ou reconnaître, immédiatement, une forme, ou um objet, soit dans um plan soit dans l'espace"* (Duval, 1994, p. 123)
[7] ***L'appréhension opératoire:*** *elle a une fonction heuristique dans la résolusion de problème. C'est "l'appréhension d'une figura donnée em sés différentes modifications possibles en d'autres figures"*(Duval, 1994, p. 126)

## III.4.1- Estudo do livro 1: Matemática Conceitos e Histórias

Autor: Scípione Di Pierro Netto, editora Scipione, 8ª série, ano 1998.
Contém 12 Capítulos subdividido em unidades menores (ítens). Ainda tem uma unidade que trata de "Pequenas Histórias Matemáticas" e "Lógica e Criatividade" . Por fim, 16 (dezesseis) cartazes chamadas de "Pranchas de Apoio Pedagógico".

Em função do nosso objeto de estudo, nós iremos estudar o **Capítulo VI** "Relações métricas em triângulos retângulos".

- **Uma presença do Teorema de Pitágoras – como conseqüência das relações métricas**

O **Capítulo VI** "Relações métricas em triângulos retângulos", está subdividido em quatro itens, sendo que o primeiro "Projeções ortogonais", com uma proposta de conceituar projeção ortogonal de um ponto ou de um segmento sobre a reta.

No segundo, "Relações métricas de um triângulo retângulo", usando semelhança de triângulos se introduzem as quatros relações métricas do triângulo retângulo.

No terceiro, "Aplicações do Teorema de Pitágoras": Determinar a altura do triângulo equilátero e diagonal do quadrado.

E por fim "Problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras", do qual envolve problemas típicos, onde a medida de um dos lados deve ser determinada.

Um complemento a este capítulo são as Histórias 4 e 5 "Os números Pitagóricos" e "A diagonal e o lado do quadrado" ("As Pequenas Histórias com Matemática", pp. 10-13). Este reconhece as grandezas incomensuráveis através da diagonal do quadrado e aquele três números inteiros que servem de medidas para os lados de um triângulo retângulo. (ANEXO - I)

Conclusão:

Na seqüência do conteúdo programático, deste livro texto, se observa o Teorema de Pitágoras como ferramenta de estudo. Neste livro, o Teorema de Pitágoras é uma conseqüência das relações métricas de um triângulo retângulo.

- **Uma Organização Didática**

Com relação ao capítulo de estudo, identificamos uma proposta de trabalho (pág. 50) onde os objetivos e conteúdos se confundem. Nesta proposta o Teorema de Pitágoras, aparece como objeto matemático que tem lugar no ensino a partir das relações métricas no triângulo retângulo.

Objetivos Específicos

| Objetivos operacionais e conteúdo | Previsão de aulas |
|---|---|
| Espera-se que o aluno seja capaz de:<br>• Conceituar projeção ortogonal de um ponto ou de um segmento sobre uma reta.<br>• Compreender e deduzir as principais relações métricas nos triângulos retângulos, especialmente o teorema de Pitágoras.<br>• Relacionar lados, alturas, projeções de um lado sobre o outro num triângulo retângulo.<br>• Aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos na resolução de problemas. | **12% a 13%**<br>das aulas |

**Tabela 3**

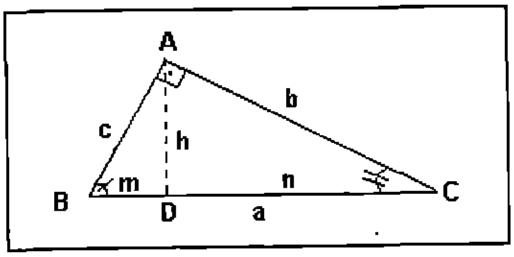
A finalidade é compreender e deduzir as principais relações métricas nos triângulos retângulos, especialmente o Teorema de Pitágoras. Bem como relacionar lados, alturas, projeções de um lado sobre o outro num triângulo retângulo. Também a aplicação das relações métricas dos triângulos nas resoluções de problemas.

No manual do professor, deste livro didático, propõe-se que este desenvolva suas aulas em 4 fases. Numa primeira fase, o professor apresenta uma situação-problema, e um instrumento de auxílio, as **Pranchas de Apoio Pedagógico** (ANEXO - II), pelos quais um tema poderia ser iniciado. As pranchas apresentam passo a passo da demonstração do Teorema de Pitágoras, caso particular de Papus. (Ver demonstração de Papus p. 16)

- **Teorema de Pitágoras – Um objeto matemático**

Vejamos como este livro introduz a demonstração do teorema de Pitágoras:

*"Considere o triângulo ABC, reto em A:"* (p. 113)

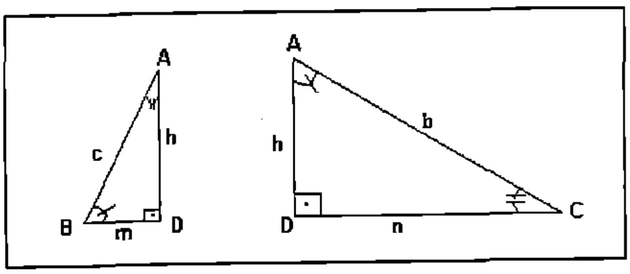



$D\hat{A}C \cong A\hat{B}C$

$B\hat{A}D \cong A\hat{C}B$

*"Indicaremos as medidas* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ *e* $\overline{AB}$ *por* ***a, b*** *e* ***c****, respectivamente; a altura* $\overline{AD}$ *terá a medida* ***h*** *e as projeções dos catetos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{AC}$ *sobre a hipotenusa terão medidas* ***m*** *e* ***n****, respectivamente."* (p. 114)

*"A altura* $\overline{AD}$ *divide o* $\Delta ABC$ *em dois triângulos semelhantes:"* (p. 114)




$\Delta BAD \approx \Delta ACD$

*"Do mesmo modo, pode-se observar que o triângulo ABC é também semelhante a qualquer um dos anteriores que o compõem."* (p. 114)

$\Delta BCA \approx \Delta BAD \approx \Delta ACD$

*"Vamos agora escrever algumas relações de semelhança, lembrando que, em dois triângulos semelhantes, os lados homólogos são* ***proporcionais****."* (p. 114)

*"Esses lados homólogos são sempre opostos aos ângulos iguais em medida."* (p. 114)

1ª Relação: $b.c=a.h$

*"Em todo triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa á hipotenusa."* (p. 115)

2ª Relação: $h^2=mn$

*"Em todo triângulo retângulo, a altura à hipotenusa é média proporcional entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenusa."* (p. 115)

3ª Relação: $b^2=na$ e $c^2=a.m$

"*Em todo triângulo retângulo, cada cateto é média proporcional entre a hipotenusa e a projeção desse cateto sobre a hipotenusa.*" (p. 115)

4ª Relação: $a^2=b^2+c^2$

Pois se consideramos a 1º relação: $c^2=na$ e $b^2=am$ e adicionarmos temos $c^2+b^2=na+am=a(n+m)$, mas $n+m=a$, então $a^2=c^2+b^2$. Ou seja:

"*Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*" (p. 115)

Temos aqui o Teorema de Pitágoras como uma regra do triângulo retângulo. A demonstração "Demonstração de Papus" é apresentada neste livro como sugestão ao professor. A demonstração "prova mais curta" é apresentada no desenvolvimento do conteúdo.

**a) Estudo dos Exercícios**

São apresentados neste livro, no **Capítulo VI** um total de 53 (cinquenta e três) "Exercícios", entre os quais, sob a designação "Exercícios complementares" encontramos 17 exercícios, e como "Exercícios de Aprofundamento", 3 exercícios. Para este estudo consideramos apenas 39 (trinta e nove) dos quais se faz presente o uso do Teorema de Pitágoras.

Apresentamos a seguir a tabela qua fornece o nº de exercícios segundo a tarefa conforme a tipologia já apresentada.

| | Tipo de tarefa | Quantidade |
|---|---|---|
| **Tipo 1:** Calcular / determinar medidas de lados desconhecidos. | **Sub-tipo 1:** Calcular medida de lado desconhecido de triângulos retângulos. | 20 |
| | **Sub-tipo 2:** Calcular outro elemento linear, tal como, perímetro, altura, diagonal do quadrado. | 9 |
| | **Sub-tipo 3:** Calcular elementos de polígonos particulares | 4 |
| | **Sub-tipo 4:** Determinar os comprimentos dos lados a partir da razão entre elementos lineares. | 9 |
| | **Sub-tipo 5:** Calcular lados a partir da soma, diferença e produto, bem como, a combinação dessas operações entre os lados. | 7 |
| **Tipo 2:** Calcular área de um polígono. | **Sub-tipo 1:** Calcular área de um polígono dado alguma medida. | 2 |
| | **Sub-tipo 2:** Calcular a área a partir da razão entre lados de um polígono. | 1 |
| | **Sub-tipo 3:** Calcular a área a partir das operações (produto, soma e diferença) entre os lados. | 1 |
| **Tipo 3:** Mostrar se as medidas dadas são lados de um triângulo retângulo. | | 4 |
| **Tipo 4:** Situação do cotidiano. | | 1 |
| **Tipo 5:** Determinar projeções sobre a hipotenusa. | | 2 |
| **Total** | | **60** |

Dentre 20 exercícos do tipo 1, em 10 destes o Teorema de Pitágoras é utilizado 2 vezes na resolução.

- 49/60 dos exercícios são do tipo 1. O que mostra a importância do Teorema de Pitágoras em problemas cuja tarefa é determinar uma medida.

- 4/60 são do tipo 3 onde o Teorema de Pitágoras é uma ferramenta que permite caracterizar um tipo de triângulo, o triângulo retângulo, isto é, “se o Teorema de Pitágoras é válido, então o triângulo é retângulo”.

Notemos que somente um exercício contextualiza uma situação do cotidiano.

**b) Exercícios segundo o papel do desenho em cada problema**

Neste estudo usaremos a classificação a metodologia aplicada por Chaachoua (1997), que identificou três papéis pelo desenho que acompanha o enunciado de um problema:

**Ilustração do enunciado**[8]: *"Uma das funções principais do desenho é a de ilustrar o enunciado, em particular no caso onde o problema apresenta uma certa complexidade nas hipóteses, ou quando o enunciado é composto de varias hipóteses".*

**Explicitar a hipótese**[9]: *Uma outra forma do desenho é levar em conta certas hipóteses não explicitadas no enunciado".*

**Meio de tornar visível a figura ou uma sub-figura pertinente para a resolução**[10]: *"Um desenho é dado de maneira que a apreensão perceptiva não seja um obstáculo para a resolução do problema. E mais precisamente, o desenho supõe facilitar para o aluno, a extração de uma sub-figura pertinente à resolução do problema".*

Um outro papel para o desenho no enuciado, identificado por Aurélio (2002) é o de **completar o enunciado**: *"Neste caso, o desenho é indispensável porque nele estão presentes dados que não foram citados no enunciados"* (Aurélio, 2002, p. 21).

Estudando sob os quatros papéis desempenhados pelo desenho no enunciado de um problema, obtivemos os seguintes resultados:

| Papel do desenho | Quantidade |
|---|---|
| Ilustração do enunciado | 7 |
| Explicitar a hipótese | 0 |
| Meio de tornar visível uma figura ou uma sub-figura pertinente para a resolução | 0 |
| Complementar o enunciado | 13 |
| **Total** | 20 |

Dos 20 execícios com desenhos, observamos que em 13 deles, o desenho desepenha o papel de completar o enunciado, enquanto que 7 são apenas ilustrações.

*"Isto nos mostra que o estudo é realizado sobre o desenho dado, não cabendo ao aluno a representação gráfica da resolução do problema" (*Aurélio;2002).

---

[8] ***Ilustration de L'énoncé:*** *"Une dês fonctions principales du dessin est d'ilustrer l'énoncé, en particulier dans le cas où le problème presente une certaine complexité dans lês hypothèses ou lorsque dans l'énoncé comporte plusieurs hypothèses"* (Chaachoua; 1997). Tradução livre.

[9] ***Prise em charge des hypothèses:*** *"Une autre fonction du dessin est la prise em charge de certaines hypothèses non explicitées dans l'énoncé"* (Chaachoua; 1997). Tradução livre.

[10] ***Moyen pour rendre visible la figura ou une sous figure pertinente pour la résolution:*** *"Un dessin est donné de façon à ce que l'appréhension perceptive ne soit pas um obstacle pour la résolution de probléme. Et plus précisément, le dessin et supposé faciliter, chez l'élève, l'extraction de sous-figures pertinentes our la résolution de problème"* (Chaachoua; 1997). Tradução livre.

Conclusão:

Neste livro didático o Teorema de Pitágoras é visto como uma relação métrica do triângulo retângulo. Porém propõe ao professor um estudo do Teorema de Pitágoras como objeto a "Demonstração de Papus".

Segundo os exercícios deste livro didático é sob aspecto ferramenta do Teorema de Pitágoras, como regra do triângulo retângulo que se centra o ensino na 8ª série do Ensino Fundamental.

### III.4.2- Estudo do livro 2: A conquista da Matemática – Teoria e Aplicações

Autores: José Ruy Giovanni, Benedito Castrucci e José Ruy Giovanni Jr., editora FTD, 8ª série, ano 1998.

O livro se divide em 12 unidades onde cada uma delas se divide em capítulos.

- **Estudo da Unidade 9 – Triângulo retângulo: Relações Métricas**

Limitamos nosso estudo a esta unidade, pois este é o habitat (o lugar) de estudo do objeto de nosso interesse.

- **O Teorema de Pitágoras como objeto matemático e/ou como ferramenta**

O Capítulo 1 da Unidade 9, trata do teorema de Pitágoras como um objeto matemático explicitamente: "O Triângulo Retângulo e o Teorema de Pitágoras". Também no Capítulo 3 "Outras Relações Métricas no Triângulo Retângulo" o Teorema de Pitágoras é tratado como objeto matemático. Através de Relações Métricas o Teorema de Pitágoras é facilmente demonstrado.

Já no Capítulo 2 "Duas Aplicações do Teorema de Pitágoras" o Teorema de Pitágoras tem lugar como ferramenta visando a resolução de problemas.

Neste livro didático, então, o Teorema de Pitágoras é estudado ora como objeto ora como ferramenta.

- **Uma Organização Didática**

Identificamos neste livro uma organização didática, sugerida ao professor. Vejamos:

Objetivos Específicos

| Conteúdo | Objetivos |
|---|---|
| 1. O triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras | Reconhecer a hipotenusa e os catetos em um triângulo retângulo.<br>Deduzir e aplicar o teorema de Pitágoras no cálculo de medidas desconhecidas dos lados de um triângulo retângulo.<br>Aplicar o teorema Pitágoras em outras figuras geométricas. |
| 2. Duas aplicações importantes do teorema de Pitágoras | Aplicar o teorema de Pitágoras no cálculo da medida da diagonal de um quadrado e no cálculo da medida da altura de um triângulo equilátero. |

**Tabela 2 – Objetivos Específicos** (tabela, p. 22)

Temos aqui o "Teorema de Pitágoras" como conteúdo expecífico de estudo e com a finalidade de calcular medidas desconhecidas (lados de triângulo retângulo e altura do triângulo equilátero).

Na "Orientação Metodológica" o autor sugere ao professor duas demonstrações do Teorema de Pitágoras (uma demonstração algébrica e uma demonstração geométrica). A demonstração geométrica é feita com apoio material concreto (recortes), fazendo analogia com o algébrico.

Vejamos a proposição passo a passo:

**A demonstração algébrica**

*"Proponha aos alunos que construam, numa folha de papel sulfite, um triângulo ABC retângulo em A; depois, peça lhes que recortem o triângulo e indiquem os ângulos A, B e C e que, em seguida:*
*a) tracem a altura relativa ao vértice A, obtendo-se o segmento AH denominado altura h;*
*b) assinalem as notações algébricas a, b, c, m, n, h, respectivamente relacionadas com as medidas dos segmentos BC, AC, AB, BH, HC E AH;*
*c) recortem o triângulo pela altura h;*
*d) verifiquem as semelhanças entre os triângulos por sobreposição. O triângulo ABC e o triângulo ABH têm em comum os ângulos H e B. Relacionado com o teorema de Tales,*

*podemos afirmar que existe proporcionalidade entre os lados homólogos dos triângulos."* (p. 22).

*"Após a comparação os alunos deverão observar os lados homólogos e a razão entre suas medidas, demonstrando algebricamente que:*

$\frac{\overline{AB}}{HB} = \frac{\overline{AC}}{HA} = \frac{\overline{BC}}{BA}$. *Então:* $\frac{c}{m} = \frac{b}{h} = \frac{a}{c}$, *de onde se obtêm:* $c^2 = am$ *e* $bc = ah$, *que são relações métricas dos triângulos ABC e ABH."* (p. 22)

A presença da demonstração algébrica "a mais curta prova", conforme Elon Lima, baseia-se na semelhança de triângulos retângulos "num triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção sobre ela".

**A demonstração de Bhaskara do teorema de Pitágoras:**

*"Material: cartolina; tesoura; compasso; régua.*

*a) Construir quatro triângulos retângulos congruentes.*
*b) Recortá-los.*
*c) Construir um quadrado cujo lado tenha como medida a diferença entre os catetos do triângulo retângulo construído ( o lado deve ser c - b):*
*d) Montar com essas peças outro quadrado de lado a:*

$a^2$ *(área do quadrado maior)*

$\frac{b.a}{2}$ *(área de cada triângulo)*

$(c\text{-}b)^2$ *(área do quadrado* $c - b$ *)*

*Conclusão:*

$$a^2 = 4.\frac{b.c}{2} + (c-b)^2$$

$$a^2 = 2.b.c + c^2 - 2.bc + b^2$$

$a^2 = c^2 + b^2$ " (pp. 22-23)

Para desenvolver utiliza-se conceitos do cálculo da área de quadrado e de triângulo. Bem como, a soma e subtração de polinômios e o desenvolvimento do trinômio de quadrado perfeito $(c-b)^2$.

## ➢ Estudo do Capítulo 1: O triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras

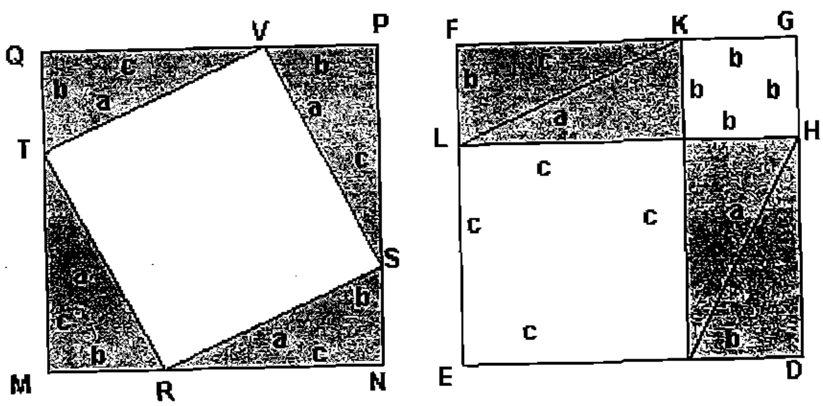
### • Teorema de Pitágoras – Um objeto matemático

No desenvolvimento do conteúdo deste capítulo, proposto para o aluno, o Teorema de Pitágoras é apresentado no estudo do triângulo retângulo particular de lados 3, 4 e 5, sob a concepção de área das figuras obtidas com os lados seguidos de uma demonstração geométrica:

> *"Considerando que cada quadradinho corresponde a **1 unidade de área**, verificamos que nos três quadrados existem 25, 16, e 9 unidades de área; notando que 25 = 16 + 9 ou $5^2 = 4^2 + 3^2$, confirma-se a relação: **a área do quadrado construído sobre o maior lado do triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os dois menores lados.**"* (p. 179)

"A mais bela prova" é desenvolvida para o aluno conforme segue:

> *"Considere o triângulo retângulo da figura seguinte: **a = medida da hipotenusa, b=medida de um cateto** e **c = medida de outro cateto**"* [...] *"Observe, agora, os quadrados MNPQ e DEFG, que têm a mesma área, pois o lado de cada quadrado mede (b + c)"* (p. 179).




*"Observando os dois quadrados, temos:*
*área do quadrado MNPQ=área do quadrado RSVT + (área do triângulo RNS). 4 áreas do quadrado DEFG=área do quadrado IELJ + área do quadrado GHJK + (área do retângulo DIJH).2 área do quadrado RSVT = $a^2$*

*área do quadrado RNS=* $\frac{b.c}{2}$

*área do quadrado IELJ=$c^2$*
*área do quadrado GHJK=$b^2$*
*área do retângulo DIJH=b.c*
*Como as áreas dos quadrados MNPQ e DEFG são iguais, temos:*

*$a^2 + \left(\frac{bc}{\cancel{2}}\right)\cancel{4} = c^2 + b^2 + (bc).2 \Rightarrow a^2 + 2bc = c^2 + b^2 + 2bc$. Cancelando 2bc, podemos escrever: $a^2 = b^2 + c^2$"* (p. 180).

Notemos que neste capítulo a presença do Teorema de Pitágoras como objeto matemático é central. Duas demonstrações são apresentadas para os alunos.

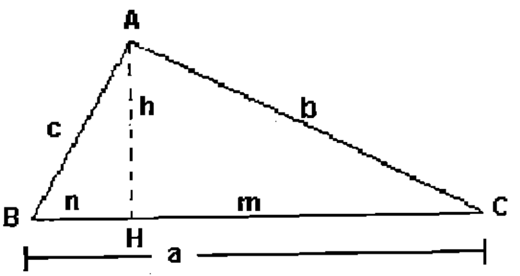
Estudo do Capítulo 2: Duas aplicações importantes do Teorema de Pitágoras.

Neste capítulo o Teorema de Pitágoras é estudado como ferramenta em duas situações problemas:

- Cálculo da medida da diagonal de um quadrado.
- Cálculo da altura de um triângulo equilátero.

Ainda mais tarde, uma demonstração algébrica se faz presente neste livro didático, como conseqüência das relações métricas do triângulo retângulo no **Capítulo 3** desta unidade "Outras Relações Métricas no Triângulo Retângulo".

*"Em qualquer triângulo retângulo, **a altura relativa à base divide o triângulo em dois outros triângulos retângulos, semelhantes ao triângulo dado e semelhantes entre si.**"* (p. 188)




| | |
|---|---|
| 1) | $\Delta ABH \approx \Delta ABC$ |
| 2) | $\Delta ACH \approx \Delta ABC$ |
| 3) | $\Delta ABH \approx \Delta ACH$ |

Resumindo as relações apresentada, são:

1ª relação: $c^2 = na$ *e* $b^2 = am$

*"2ª relação: $h^2 = mn$"* (p. 189)

*"3ª relação: $bc = ah$"* (p. 190)

A demonstração algébrica do teorema de Pitágoras:

*"Da 1ª relação, temos:* $b^2=am$ $\quad c^2=am$ *[...] Adicionando membro a membro as duas igualdades, temos:* $b^2+c^2=am+na \rightarrow b^2+c^2=a\underbrace{(m+n)}_{a}$ [redacted]" (p. 190)

Portanto, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos dois catetos.

Neste livro, no desenvolvimento do conteúdo o Teorema de Pitágoras tem lugar como objeto matemático no estudo do triângulo retângulo e como ferramenta no cálculo de medidas desconhecidas do triângulo, diagonal do quadrado e altura do triângulo equilátero. Para os alunos duas demonstrações são propostas "A mais bela prova" e a "prova mais cuta" além de uma outra demonstração geométrica proposta para o professor (ver pág. 36).

**a) Estudo dos exercícios**

São apresentados no livro didático nesta **Unidade** 9 um total de 51 (cinqüenta e um) "Exercícios de Fixação" e 17 (dezessete) "Exercícios de Revisão". Sendo 30 (trinta) exercícios de fixação no primeiro capítulo, 13 (treze) no segundo e 8 (oito) no terceiro.

Desconsideramos 9 exercícios desta Unidade, pois o teorema de Pitágoras não se fazia presente na resolução do problema. Logo, consideremos apenas 42 exercícios neste estudo.

Assim como no estudo do livro "Matemática Conceitos e Histórias" também consideremos o estudo dos exercícos segundo a tarefa e o papel desempenhado pelo desenho no enunciado.

O resultado do levantamento que fizemos foi o seguinte:

| Tipo de tarefa | | Quantidade |
|---|---|---|
| **Tipo 1:** Calcular / determinar medidas de lados desconhecidos. | **Sub-tipo 1** Calcular medida de lado desconhecido de triângulos retângulos. | 17 |
| | **Sub-tipo 2:** Calcular outro elemento linear, tal como, perímetro, altura, diagonal do quadrado. | 36 |
| | **Sub-tipo 3:** Calcular elementos de polígonos particulares | 6 |
| | **Sub-tipo 5:** Calcular lados a partir expressões algébricas (produto, soma e diferença, equação do 2° grau e outras). | 3 |
| **Tipo 2:** Calcular a área de um polígono. | | 3 |
| **Tipo 3:** Afirmar se as medidas dadas são de um triângulo retângulo. | | 4 |
| **Tipo 4:** Situação do cotidiano. | | 12 |
| **Tipo 5:** Determinar projeções sobre a hipotenusa. | | 2 |
| **Tipo 6:** Determinar o polígono que expressa a área do quadrado. | | 1 |
| **Tipo 7:** Determinar a razão entre os segmentos determinados pela altura sobre a hipotenusa. | | 1 |
| **Total** | | **85** |

## b) Exercícios segundo o papel do desenho em cada problema

| Papel do desenho | Quantidade |
|---|---|
| Ilustração do enunciado | 14 |
| Explicitar a hipótese | 0 |
| Meio de tornar visível uma figura ou uma sub-figura pertinente para a resolução | 0 |
| Complementar o enunciado | 30 |
| **Total** | 44 |

O estudo dos exercícios segundo a tarefa nos mostra que o autor preserva suas proposições manifestadas no desenvolvimento do conteúdo quanto ao Teorema de Pitágoras como ferramenta.

Quanto a **tarefa:**

Notemos uma importância dada aos exercícios que envolvem situações do cotidiano pois 12/85 dos exercícios são desta natureza.

Também cabe destacar que:

- 62/85 dos exercícios são do tipo 1: Determinar medidas de lados desconhecidos; e
- 36/85 dos exercícios são do sub-tipo 2: calcular um elemento linear (diagonal de um quadrado, altura).

O que denota uma coerência entre desenvolvimento do conteúdo e as tarefas dos exercícios. Pois, cálculo de lado de um triângulo retângulo, diagonal do quadrado e altura do triângulo equilátero são exemplos de utilização do Teorema de Pitágoras estudados no desenvolvimento do conteúdo.

Quanto ao **papel do desenho** no enunciado:

Duas funções são atribuídas aos desenhos nos exercícios: "Ilustrar o enunciado (14/44) e completar o enunciado (30/44).

O que revela um predominância do desenho para completar um enunciado de uma situação problema.

**Tabela comparativa dos dois livros didáticos:**

| Tipo de tarefa | | Livro 01 | Livro 02 |
|---|---|---|---|
| **Tipo 1:** Calcular/determinar medidas de lados desconhecidos. | **Sub-tipo 1:** Calcular medida de lado desconhecido de triângulos retângulos. | 20 | 17 |
| | **Sub-tipo 2:** Calcular elemento linear (perímetro, altura, diagonal do quadrado) | 9 | 36 |
| | **Sub-tipo 3:** Calcular elementos de polígonos particulares (lado do trapézio, diagonal do losango, comprimento de corda do cícurlo, distância entre os centros das circuferências) | 4 | 6 |
| | **Sub-tipo 4:** Determinar os comprimentos dos lados a partir da razão entre elementos lineares. | 9 | - |
| | **Sub-tipo 5:** Calcular lados a partir expressões algébricas (produto, soma e diferença, equação do 2° grau e outras). | 7 | 3 |
| **Tipo 2:** Calcular área de um polígono. | **Sub-tipo 1:** Calcular área de um polígono dado alguma medida. | 2 | 3 |
| | **Sub-tipo 2:** Calcular a área a partir da razão entre lados de um polígono. | 1 | - |
| | **Sub-tipo 3:** Calcular a área a partir das operações (produto, soma e diferença) entre os lados. | 1 | - |
| **Tipo 3:** Mostrar/Afirmar se as medidas dadas são lados de um triângulo retângulo. | | 4 | 4 |
| **Tipo 4:** Situação do cotidiano. | | 1 | 12 |
| **Tipo 5:** Determinar projeções sobre a hipotenusa. | | 2 | 2 |
| **Tipo 6:** Determinar o polígono que expressa a área do quadrado. | | - | 1 |
| **Tipo 7:** Determinar a razão entre os segmentos determinados pela altura sobre a hipotenusa. | | - | 1 |
| **Total** | | **60** | **85** |

A comparação dos dois livros didáticos nos revela que o livro 2 dá ênfase ao exercícios do sub-tipo 2 (36/85 do livro 2 contra 9/60 do livro 1). Também o livro 2 trabalha bastante situações do cotidiano 12/85 contra 1/60 do livro 1.

Mas notemos que somente o livro 1 propõe exercícios do sub-tipo 4, 9/60 e que também usa tarefas com expressões algébricas – sub-tipo 5: 7/60 contra 3/85 do livro 2.

A comparação dos dois livros didáticos nos revela que o livro 2 dá ênfase aos exercícios do sub-tipo 2, do tipo 1 (36/85 do livro 2 contra 9/60 do livro 1). Também o livro 2 trabalha bastante situações do cotidiano 12/85 contra 1/60 do livro 1.

# Capítulo IV

# A Experimentação

## IV.1- Apresentação

O objetivo desta experimentação é de verificar se o Teorema de Pitágoras é um saber disponível para o aluno do 1ª série do Ensino Médio. Isto é, se os alunos o aplicam na resolução de um problema onde a configuração que representa a situação problema tem um triângulo retângulo, onde uns dos seus lados é incógnita do problema.

Considerando que os alunos estudam o Teorema de Pitágoras em 8ª série, elaboramos dois problemas, os quais são resolvidos usando Teorema de Pitágoras.

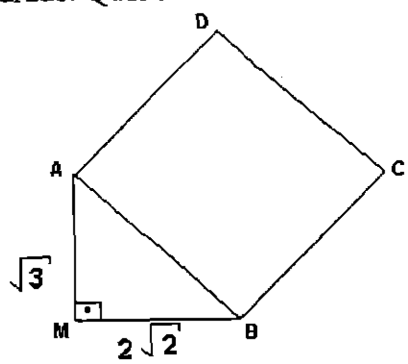
Vejamos:

**Problema 1: Um apartamento sinistrado**

Durante um incêndio em um edifício de apartamento, os bombeiros utilizam uma escada Magirus de 40m para atingir a janela do apartamento sinistrado. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 24 m do edifício. Qual é a altura do apartamento sinistrado em relação ao chão? Resolva e Justifique.

**Problema 2: Área de um quadrado**

Sabendo que ABCD é um quadrado. Qual sua área?



## IV.2- Análise *a priori*

Faremos a análise de cada um dos problemas.

Retomemos na medida que faremos a análise os dois problemas:

**Problema 1: Um apartamento sinistrado**

| |
|---|
| Durante um incêndio em um edifício de apartamento, os bombeiros utilizam uma escada Magirus de 40m para atingir a janela do apartamento sinistrado. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 24 m do edifício. Qual é a altura do apartamento sinistrado em relação ao chão? Resolva e Justifique. |

O enunciado é dado em linguagem natural.

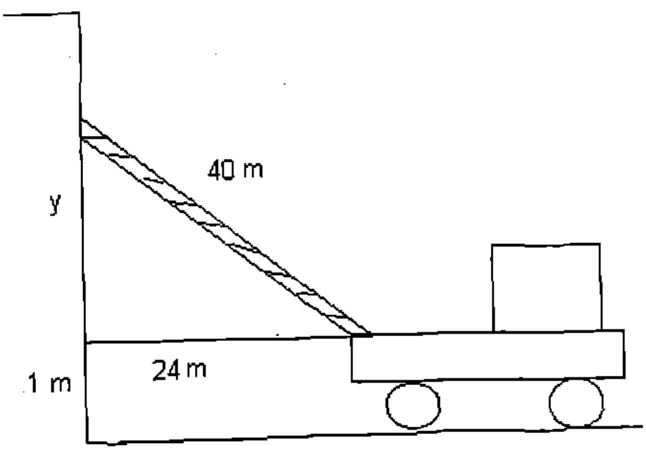
**Tarefa 1:** determinar a altura do apartamento sinistrado em relação ao chão.

**Condição do problema:**

- escada de 40 metros atinge a janela do apartamento;
- escada colocada a 1 metro de altura do chão e afastada a 24 m do edifício.

**Incógnita:** altura do apartamento em relação ao chão.

Uma representação gráfica da situação problema:

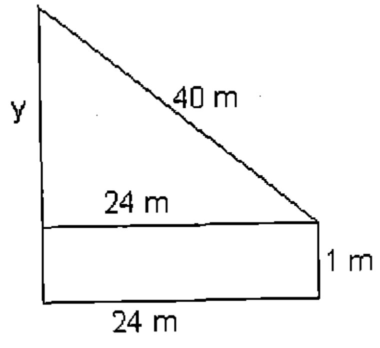



Supomos que um primeiro questionamento poderia ser feito pelos alunos: se a escada chega até a janela, qual a altura que é para determinar? Da janela do apartamento até o nível do caminhão ou até o chão? Como calcular a diferença da janela até o chão do apartamento?

O desenho feito por nós tem por função de ilustrar o enunciado do problema, representando a situação problema geometricamente.

Resolver o problema, significa:

1) estudar a configuração[11] obtida. Nela reconhecer uma sub-figura de estudo – um triângulo retângulo. Este estudo permite identificar o saber declarativo[12] "Teorema de Pitágoras" que deve ser mobilizado na resolução.




2) Aplicar o Teorema de Pitágoras permite obter a expressão $40^2 = 24^2 + y^2$;

$$40^2 = 24^2 + y^2$$
$$y^2 = 1600 - 576$$
$$y^2 = 1024$$
$$y = 32\ m$$

3) Considerar a condição que a escada está a 1m do chão e adicionar ao valor determinado. Assim: 32 + 1 = 33. Logo, a resposta será: A altura do apartamento sinistrado em relação ao chão é 33m .

Uma sub-tarefa é a resolução do cálculo da raiz quadrada $\sqrt{1024}$ . Pensamos a priori, que calcular a $\sqrt{1024}$ não seja problemático para os alunos da 1ª série do Ensino Médio.

Dois procedimentos para o cálculo do $\sqrt{1024}$ :

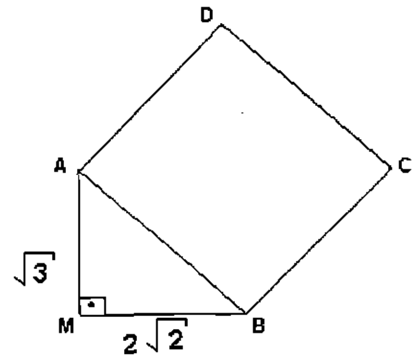
1. Por Fatoração $1024 = 2^{10}$; $\sqrt{1024} = \sqrt{2^{10}} = 2^5$.
2. Algoritmo da raiz quadrada:

$$\begin{array}{r|l} 1024 & \\ 124 & 32 \\ \cline{2-2} 0 & 62x2 = 124 \end{array}$$

[11] Notemos que a figura de estudo é composta por um triângulo e um retângulo cujas definições devem ser consideradas.
[12] Saber declarativo: anuncia as propriedades, os estudos dos objetos, conceitos ou as relações entre conceitos. Tem essencialmente uma função de descrição. Ex.: definições, teoremas, propriedades.

**Problema 2: Área de um quadrado**

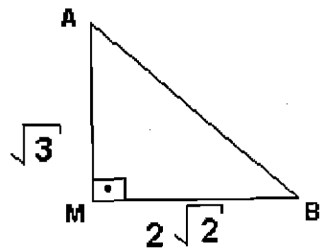
Sabendo que ABCD é um quadrado. Qual sua área?




O enunciado é dado em linguagem natural e simbólica, vem acompanhado de um desenho, cujo papel é de complementar o enunciado.

**Tarefa:** determinar a área do quadrado ABCD.
Uma **configuração** composta de dois objetos: um triângulo retângulo e um quadrado.
**Dados do problema:** medidas dos catetos do triângulo retângulo (AM= $\sqrt{3}$ e MB=$2\sqrt{2}$).

Para **resolução,** identificar por apreensão perceptiva e operatória o triângulo retângulo




**Sub-tarefa 1:** determinar o lado AB do triângulo retângulo. Isto é a hipotenusa.
**Resolução:** aplicação do Teorema de Pitágoras.

$$l^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2$$
$$l^2 = 4.2 + 3$$
$$l^2 = 8 + 3$$
$$l = \sqrt{11}$$

Nesta resolução o Teorema de Pitágoras é ferramenta, e ao mesmo tempo determina uma técnica, $a^2 = b^2 + c^2$, e é ainda a tecnologia, como teorema da geometria.

**Sub-tarefa 2:** calcular a área do quadrado ABCD.

**Resolução:** sabemos que a área do quadrado $l \times l$ (lado x lado), onde $l = \sqrt{11}$. Temos a área 11 u.a..
**Técnica:** fórmula de cálculo de área do quadrado
**Tecnologia:** definição da área do quadrado.

**Comentários gerais:**

O Problema 1 envolve a produção de um desenho da situação problema para identificação dos elementos do triângulo retângulo. A medida de afastamento da base da escada, a 1 m do chão, pode confundir os alunos que apresentarem dificuldade em manusear dados em um problema. Após a correta representação do problema em desenho, o aluno resolve o problema usando o Teorema de Pitágoras.

Depois de resolver o Problema 1, supomos que o aluno será capaz de resolver o Problema 2, pois uma vez aplicado o Teorema Pitágoras, a solução é obtida usando a fórmula de cálculo da área do quadrado.

Na tentativa de determinar o lado do triângulo os alunos poderão eventualmente tentar usar "relações trigonométricas do triângulo retângulo", o que não lhes permitirá obter a solução, uma vez que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ não são dados.

Nestes dois problemas estudados, o valor a determinar (comprimento do segmento) não é explicitado, cabe ao aluno identificar o segmento e o triângulo retângulo que permite a utilização do Teorema de Pitágoras.

## IV.3- Análise *a posteriori*

A experimentação foi realizada em uma única sessão com alunos da 1ª série do Ensino Médio de um colégio da Grande Florianópolis. Aplicamos em classe de 1ª série do Ensino Médio porque o Teorema de Pitágoras foi estudado na escola observada em fins da 8ª série.

A sessão ocorreu no dia 17/06/2002 às 10:50 horas, teve duração de 1 hora e 25 minutos. Os alunos foram organizados em duplas totalizando cinco duplas, e, a cada dupla foi designado um observador (ANEXO III).

Para análise contamos com os protocolos[13] das 4 duplas e as notas dos observadores e materiais escritos pelos alunos. A gravação de uma dupla ficou inaudível impossibilitando assim a transcrição.

Os problemas foram propostos um de cada vez (ANEXO – IV). Os alunos foram informados para não apagar o que fizessem. Apenas que cancelassem, ou que anulassem tentativas de resolução incorretas. Também deveriam entregar a folha de rascunho juntamente com a solução dos exercícios.

Para a resolução do 1° problema, foi delimitado o tempo em até 45 minutos e para o segundo exercício 40 minutos. Mesmo se neste tempo a dupla não conseguisse resolver, o material relativo à resolução deveria ser recolhido. Não foi permitido ao observador que desse dicas ou que influênciasse nas respostas dos alunos.

## ➤ Resolução dos Alunos do Problema 01

Tiramos trechos do protocolo para entendermos o que se passou durante cada resolução das duplas.

- **Estudo da dupla A**[14]

Leitura e produção do desenho:

*"1. A: Desenhando, o apartamento tá aqui.*
*2. B: 24 m, o caminhão está a 1 m, a escada tem 40 m.*
*3. A: Seria assim, né.*
*4. B: Isso aqui é assim óh, assim a certo?"*

Teorema de Pitágoras é disponível?

Indentificamos explicitamente no protocolo o enunciado do Teorema de Pitágoras, mas o mesmo não é denominado.

---

[13] Protocolos: registros de gravações em fita cassete das falas dos alunos durante a resolução dos exercícios.

[14] Legenda: Marietu (A) e Maiara (B)

*"15. A e B: Soma dos catetos ao quadrado é igual a hipotenusa ao quadrado."*

A forma como manuseiam a equação: $x^2 + 576 = 1600$, é correta e a resolvem sem dificuldade. Solução: $x^2 = 1024$.

Como previamos *a priori*, o cálculo $\sqrt{1024}$ é um novo problema e a dupla A usa fatoração para determinar a raiz quadrada de 1024.

*"19. B: tem que fatorar, não é isso.*
*20. A: x é igual a 32.*
*21. B: É"*

$$\left[\begin{array}{r|l} 1024 & 2 \\ 512 & 2 \\ 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}\right]$$

Nota da ficha de resolução

A Solução determinada:

A solução do problema é determinarda sem dificuldade:

*"19. A: x é igual a 32.*
*20. B: É*
*21. A: Ainda tem isso aqui, soma 1.*
*22. B: É*
*23. A: A resposta aqui?*
*24. B: A altura do apartamento em relação ao chão é de 33 metros.*
*25. A: Tá certo."*

Não justificam a resposta conforme pedia no enunciado nem mencionam a necessidade ou não de justificar.

- **Estudo da dupla B**[15]

Leitura e produção do desenho:

[15] Legenda: Fernando (F) e Luiz (L)

Nesta dupla o desenho surge como um instrumento utilizado por Luiz (L) para explicar a Fernando (F) o texto do problema:

*"3. L: É, assim oh.*
*4. F: Então vamos fazer. Desenhar aí.*
*5. L: É assim oh, é aquela parada de teorema .*
*6. F: Ah tô ligado. Então vou fazer o desenho.*
*7. L: Tem o apartamento, ai tem a escada, ai forma um tipo um triângulo.*
*8. F: Aqui é 40 m, to ligado, ta aqui é um metro do chão. Ta então tem que saber o canto.*
*9. L: Não mas tem mais, aqui é 24.*
*10. F: Afastado 24, não tinha percebido cara.*
*11. L: Aqui embaixo é 24 também, aqui isso aqui é 24. Tenho que saber isso aqui. Qual é a altura do apartamento sinistrado, tem que saber a altura do apartamento sinistrado. Tem que saber o cateto, a hipotenusa é aqui."*

<u>Teorema de Pitágoras é disponível?</u>

Notemos que durante a produção do desenho, os alunos já fazem referência a um Teorema *"aquela parada do teorema"*. Identificam o triângulo retângulo no desenho do qual está associado o Teorema de Pitágoras.

Esta dupla também não explicita o nome do Teorema mas identifica os elementos do triângulo e a natureza do triângulo *"tem que saber o cateto, a hipotenusa é aqui"*. Então, temos a formulação da resolução:

*"12. F: Isso aqui é 40 né!*
*13. L: Ta 40.*
*14. F: Ta então é 40 ao quadrado.*
*15. L: $40^2$ é igual a $x^2+24^2$."*

Não tem dificuldade em manusear a equação, $1600= b^2+576$. Porém surge um novo problema, determinar a raiz de 1024:

*"22. F: Tá certo agora vai ficar assim oh... Faz assim x=1600-576. Dá 1024.*
*23. L: De 1024, qual é a raiz quadrada disso?"*

O calculo da $\sqrt{1024}$ foi problemática para a dupla, pensaram em usar a calculadora.

*"24. F: Não tem?*
*25. L: Cadê a calculadora?*
*26. F: Esse exercício não tem?*
*27. L: Todo mundo já tá na 2ª, a gente tá nessa ainda.*
*28. F: Têm quantos?*
*29. L: Não tem pressa, vamos fazer a raiz.*

*30. F: Vai dá isso.*
*31. L: Não tem raiz.*
*32. F: Não sei, eu acho que tá errado, cara."*

Esta dupla refazem as contas, achando que tem alguma coisa errada e então, fazem uma revissão:

*"37. L: Temos que ver a altura com a distância .... Isto aqui é a altura.*
*38. F: Não, como fazer de outro jeito.*
*39. L: Tá isso aqui é o a, aqui é o b e esse é o c. Pô, também fizesse coisa errada. 1600=x+576."*

Novamente a discurssão sobre a raiz quadrada de 1024:

*"42. F: Mas não precisa dar exato.*
*43. L: Tem que dá exato."*

O que leva os alunos a pensar na fatoração como técnica:

*"44. F: Cara vamos fatorar esse número. Vamos, meu, fatora esse número aqui."*
*"49. L: Ah, tá, tá,..., divide por 2 de novo,.. divide por 2 de novo, ..., divide por 2 de novo."*

$$\left[\begin{array}{l|l} 1024 & 2 \\ 512 & 2 \\ 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ & 2^{10} \end{array}\right]$$

Nota da Ficha de resolução

Conforme nota da Ficha de resolução do aluno:

*"52. F: Tá certo? Tá como é que fazemos agora?*
*53. L: Agora é... 2x24... 4x2=8... 8x2=12...x4=24... será que dá isso?"*

$$\boxed{\sqrt{2^2.2^2.2^2.2^2.2^2}}$$

Nota da Ficha de resolução

<u>A Solução determinada:</u>

*"57. L:16, ...x2=36,... Tá certo mesmo cara, cara é 32.*
*58. F: Será que dá isso mesmo?... Acho que é isso a altura é +1 é 33."*

Não justificaram suas respostas conforme o enunciado pede.

- **Estudo da dupla C**[16]

Leitura e produção do desenho:

Ao fazer o desenho, a dupla identifica a hipotenusa e um dos catetos:

*"6. C: Ah! É aquele, a hipotenusa, o cateto.*
*7. B: Tá, escada de 40 m*
*8. C: A é a hipotenusa*
*9. B: Ta aqui, aqui é um metro do chão."*

Conforme a análise apriore era de se esperar que apresentassem dificuldades em manusear dados em um problema quanto a medida de afastamento da base da escada, a 1 m do chão. Um dos alunos da dupla não compreende, logo, surge o diálogo:

*"21. C: Pode fazer assim também, que vê? A ta, tem mais isso aqui um metro. 24 , 40, a gente descobre esse resultado e isola mais um.*
*22. B: Uh. Ficou bem... Ta mais pode ser. Mas não é aqui o um, é aqui oh. Por que é do quarenta, entendesse? Ele ta a qui.*
*23. C: Mais ele ta colocado a um metro do chão.*
*24. B: Então, não o prédio, não o prédio ta colocado a um metro do chão, é o caminhão. O caminhão.*
*25. C: É, então.*
*26. B: Então, não adianta se colocar...*
*27. C: Então, Tá mas dá a mesma distância aqui oh.*
*28. B: Pô mais não dá de somar daqui.*
*29. C: Porque daqui, não adianta somar quarenta e um tudo, por que daqui não tá vertical, tá horizontal,e pode dar maior. Deve dá medindo isso aqui, e não isso aqui. Isso aqui as vezes pode dar maior. Isso aqui não é mesma coisa que isso aqui.*
*30. B: Tá mais não, mas cara, aqui pode mudar a estrutura do edifício.*
*31. C: Não vai mudar. Porque tu vai medir só isso aqui. Daí tu soma mais um metro.*

[16] Legenda: Bruno (B) e Cristino (C)

*32. B: Então, tu vais tirar um metro na estrutura geral do edifício. Claro que vai, vê só: aqui tá o edicício, aqui não diz nada edifício, o edifício é esse."*

Teorema de Pitágoras é disponível?

Apesar de identificarem as nominações de um triângulo retângulo (hipotenusa, cateto) ao formular o desenho, os alunos não lembram de imediato o teorema de Pitágoras:

*"19. C: A hipotenusa é igual a axb ao quadrado [$h^2=a^2xb^2$].*
*20. B: Assim oh, a hipotenusa é igual cateto ângulo vezes o cateto..."*

A dupla resolve 40x40=1600, ou seja, sabem que a hipotenusa é ao quadrado, no entanto, não sabem identificar de imediato se na fórmula do Teorema de Pitágoras o sinal entre os catetos é mais ou menos:

*"40. B: Tá acho que é axb ao quadrado."*
*"59. C: É a mesma coisa.*
*60. B: $x^2$ ..., ah é mais, a hipotenusa é igual a soma dos catetos, né?*
*61. C: ao quadrado.*
*62. B: Assim oh, hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos catetos ao quadrado."*

Depois de identificar corretamente o Teorema de Pitágoras, surge um novo problema que é determinar a raiz de 1024, no qual a dupla não teve dificuldades:

*"70. B: Agora x igual a raiz de 1024.*
*71. C: Tem que fatorar.*
*72. B: Só vê por aqui pô. Dá trinta e*
*73. C: Trinta e dois*
*74. B: ...trinta e dois. 2x2 quatro, 2x 3 seis, 2x3 seis, 3x3 nove, 4, 12 , 1024.*

| 32x32=1024 |
|---|

Nota da ficha do Aluno

*"75. C: x é igual a 32."*

Os alunos não usaram fatoração nem o algoritmo do cálculo de raízes. Para determinação da raíz usaram multiplicação sucessiva até chegarem a 32x32=1024.

A Solução determinada:

*"75. C: x é igual a 32.*
*76. B: x é igual a 32. Então a gente achou tá. Qual é a altura do apartamento em relação ao chão. Mas daí tem um lance cara. Esse não é esse metro aqui não. Mas a gente não considerou esse um metro aqui não."*
*"83. C: A gente calculou assim oh. O caminhão tá aqui né.*

*84. B: Esse aqui é o caminhão.*
*85. C: Tá daí a gente calculou só foi isso aqui, só. Daí só soma um daí tá.*
*86. B: Até daí sim.*
*87. C: Daí dá 33."*

Esta dupla justificou a resolução como consequência do desenho o qual permitiu a aplicação do Teorema de Pitágoras. Notemos o que foi registrado na ficha de resolução:

*"Achamos este resultado pois o problema representado através de um desenho, se tornou uma forma triângular mostrando um cateto e a hipotenusa; assim sendo resolvido pela fôrmula* $h^2=a^2+b^2$*."*

- **Estudo da dupla E**[17]

Leitura e produção do desenho:

A dupla não entendeu o enunciado ao ler apenas. Então partem para o desenho. Ao formular o desenho chegam na identificação dos elementos de um triângulo retângulo, porém com idéias erradas, querem calcular ângulos:

*"5. B: Aqui dá 24 m, aqui, via até o final um metro até a escada. Tem que achar isso, c.*
*6. B: Então esse metro vai entrar na altura em relação ao chão... Então esse metro vai contar com cos-seno, lado, cateto oposto sobre hipotenusa e cateto oposto oposto sobre hipotenusa."*

Mesmo com o desenho corretamente representado a dupla não identifica o teorema de Pitágoras, insistentemente dizem não lembrar.

Teorema de Pitágoras é disponível?

Os alunos ariscam escrever, montando matemáticamente o teorema de Pitágoras, porém tem dificuldade na operação com a equação. Notamos que nos registros da ficha do aluno:

[17] Legenda: Rodrigo (B) e Rômulo (T)

"$1600=576+c^2$
$c^2=576-1600$ (-1)
$c^2=2176$"

Ao extrair a raiz, encontram uma raiz não exata, o que torna-se um grande problema para os alunos desta dupla:

*"18. B: Só que não vai dá exata.*
*19. T: 2 na Quarta vezes raiz de tudo isso. Eu não consigo fazer isso."*

Encontramos na ficha do aluno o seguinte resultado: "$4\sqrt{86}$"

Questionam o valor não exato mas não fazem revisão do procedimento.

Perguntado pelo observador o que a dupla estava aplicando para achar este resultado, a dupla responde corretamente, porém apresentam dúvida:

*"23. B: O teorema de Pitágoras.... não é assim?".*
*24. B: Não, o Teorema de Pitágoras, não,... oooh, a fórmula prá achar assim o c é fácil pra caramba só que não lembro. Não, não lembro nada.*
*25. T: Eu acho que não tá certo o que fizessem,... aqui."*
*"42. B: O que?... Oh, é, por causa do que eu estava tentando me lembrar mais ou menos, dá 8ª. É,..., negócio de cosseno, eu tou achando que é isso, ... E também.... tô muito confuso. Por causa que a professora também tinha passado outras fórmulas que daí.... Prá descobrir senos, assim, tendo a e b descobrir c .... Só que daí não tou me lembrando, e tá muito confuso. Daí eu tô me tentando lembror mais ou menos."*

Obtemos da nota registrada na ficha do aluno: "$cos(c) = \frac{ca}{n} = \frac{24}{40} = \frac{x}{1}$". Como mensionamos na análise *a priori* este caminho não chegaria a lugar algum, pois não temos as medidas dos ângulos.

Numa terceira tentativa de resolver o problema. Surge sugestões das relações métricas do triângulo retângulo e "vagas" lembranças de muitas fórmulas:

*"50. B: Nada. É que eu lembrei, que a professora explicava uma fórmula assim. Ela passava várias fórmulas,..., prá achar.... tinha até aquele negócio assim, tinha altura.... Ah, não sei, não consigo mais lembrar como é que fazia isso.*
*54. B: É, não, no caso assim, era um negosso ou projeção... Que a professora explicou, que daí tinha assim, ... Daí, isso aqui era assim a e isso aqui era m, se eu não me engano, e isso aqui era h e n, e tinha a, b e c. Aqui era essa fórmula aqui usava pra descobri uma dessa aqui, ou a ou b ou c. E tinha outra que era pra descobrir o h, m e n. Daí, eu me lembro tinha uma fórmula que tem até um nome, que ela explicou, daí tinha a fórmula prá achar isso aqui."*

A dupla retoma ao enunciado.

A Solução determinada:

Nenhuma solução foi determinada por esta dupla. Entregam suas anotações num prazo maior do que foi estipulado, 1 hora após a entrega do primeiro exercício.

*"55. B: Eu não me lembro.... Não cara eu não sei...... Vão deixar isso aqui."*

Notemos nesta dupla, que equacionam o problema usando Teorema de Pitágoras $1600=576 + c^2$ e cometem o erro ao isolar c. O que gera o problema da raíz inexata que se transforma em obstáculo na resolução e os alunos passam a explorar outras fórmulas.

Notemos que o Teorema de Pitágoras foi usado corretamente por 4 duplas porém o nome Teorema de Pitágoras não foi citado. Podemos dizer que a propriedade do triângulo retângulo é disponível para os alunos.

Todas as duplas fizeram um desenho na resolução, que permitiu a formulação da resolução.

A dupla E mostra saber que a propriedade usada é o Teorema de Pitágoras, o erro cometido ao resolver a equação, $1600=576 + c^2$ é que leva a não resolução do exercício.

## ➢ Resolução dos Alunos do Problema 02

- **Estudo da dupla A**

Leitura e estudo do desenho:

O desenho dado neste problema complementa o enunciado. Esta dupla usou a própria figura dada para a resolução do problema.

Teorema de Pitágoras foi utilizado?

Identificaram a aplicação do teorema de Pitágoras:

*"3. A: É a mesma coisa que fizemos."*

Vão logo fazendo as contas e de imediato acham o resultado:

*"9. B: Claro, fica* $\sqrt{3}\sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$. *Seria raiz de onze ao quadrado?*
*10. A: Não, temos que calcular a área do quadrado.*
*11. B: Então seria* $\sqrt{11}$, *escreve ai....*
*12. A: Dá 11. Tá mais 11 o Quê? Qual o resultado."*

A radiciação não é um problema a esta dupla, facilmente fazem esta operação. Ao ser questionado pelo observador como chegaram a este resultado, reformulam o problema e procuram a fórmula da área do quadrado.

Uma das alunas encontrou a área do quadrado facilmente, enquanto a outra procura saber quanto vale a área do triângulo em vez da área do quadrado.

*"18. B: Lado vezes lado. É a mesma coisa que lado ao quadrado.... Dá pra fazer assim também, óh..... Cara tu não lembra de mais nenhuma regra? Qual a área do triângulo?*

*19. A: A área do triângulo tu faz assim, daí tu faz a sim, dá 2 vezes a área.*

*20. B: A gente pode fazer 2 vezes a área do triângulo que cabe dentro do quadrado.*

*21. A: Que? Tá coisa vai dar tipo assim Maiara. Tu fazes área do triângulo divide por 2. Ah, não mais vai dar a área do triângulo.... vamos ver.*

*22. B: Quanto que é* $\left(\sqrt{11}\right)$*?*

*23. A: É 11. Tu corta faz raiz. Tu faz* $\sqrt{11}.\sqrt{11} = \sqrt{11.11} = \sqrt{11^2} = 11$.

*24. B: Fórmula da área do triângulo? Né, base vezes altura dividido por 2? É um negócio assim.*

*25. A: Tá mais tu quer saber, quanto vale o lado do quadrado.*

*26. A: Tá mais vale 11.*

*27. B: Não vale* $\sqrt{11}$*, x é igual* $\sqrt{11}$*."*

A Solução determinada:

A solução vem após concluir que falta uma unidade de medida para definir a área:

*"30. A: Tá ... onze que.*

*31. B: Onze* $m^2$*, sei lá o que.*

*32. A: Tá mas não tem metros ai.*

*33. B: Tá não tem ... não tem unidade de medida. É onze a resposta, mas tás preocupada com a unidade.*

*34. A: É.*

*35. B: Mas não cita nada aqui. Só pede a área. Sistema universal de unidade, lá.*

*36. A: Tá a área é onze (risos). Onze o que? Não tem.*

*37. B: Deve ser 11* $m^2$*, não sei, mas na real todos os cálculos é onze. Tu concorda que todos os cálculos é onze. Não é.*

*38. A: Am Ram! É onze alguma coisa, falta alguma coisa.*

*39. B: Tá mas não diz que coisa que é.*

*40. A: Tipo tu nunca dá a área de um lugar é 2m é* $2m^2$*. Ou onze alguma coisa ao quadrado.*

*41. B: Tás em dúvida se é* $cm^2$*? É* $1m^2$*, mas não especifica."*

Justificam a solução. Para a dupla uma unidade de área não especificada tornou-se um grande problema.

- **Estudo da dupla B**

<u>Teorema de Pitágoras foi utilizado?</u>

Acham fácil e começam a incluir medidas na figura do enunciado, identificam a hipotenusa e usam a fórmula $x^2=a^2+b^2$, vejamos:

*"4. L: Isso aqui é hipotenusa.*
*5. F: É, então é essa mais esse ao quadrado.*
*6. L:* $x^2 = (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2$ *então,* $x^2 = 3 + 4.2$ *é né?"*

Refazem passo a passo, pois Fernando apresenta uma outra resposta:

*"10. L: Não, dá 11...3 + 8, dá 11, né agora não dá mais.*
*11. F: Da onde que dá 11? Isso aqui tem que fazer assim.*
*12. L:* $x^2 = (\sqrt{3}\sqrt{3}) + (2\sqrt{2})(2\sqrt{2})$*..., 3 vezes 3.*
*13. F: Tá, da* $(\sqrt{3})^2$ *"*

<u>A Solução determinada:</u>

A solução é determinada corretamente. Identificamos que os cálculos foram refeitos por 4 vezes. Não identificamos o que levam os alunos a verificar ou duvidar da resolução. Uma entrevista com os alunos poderia exclarecer a razão das verificações dos alunos.

*"20. L: Não, agora, a gente faz a área ...* $(\sqrt{11})^2$. *É* $\sqrt{11}\sqrt{11} = (\sqrt{11})^2$
*21. F: É 11.*
*22. L: Deve ser 11.*
*23. F: Muito simples, cara, o outro era mais complicado.*
*24. L: Tá resposta da área é 11. Área* $= a.b = \sqrt{11}\sqrt{11} = (\sqrt{11})^2 = 11.a^2 = b^2 + c^2$. $a^2 = (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2$
*25. F: Isso.* $a^2 = 3 + 4.2$
*26. L: Vamos ver, 3+8=11.* $a^2 = 11$. $a = \sqrt{11}$
*27. F: Mas é quadrado.*
*28. L: Base vezes altura dá* $\sqrt{11}$ *e altura* $\sqrt{11}$ *... Tá a resposta."*

- **Estudo da dupla C**

<u>Leitura e estudo do desenho:</u>

Representam um desenho semelhante, porém não colocam as medidas.

<u>Teorema de Pitágoras foi utilizado?</u>

A formulação da propriedade do triângulo retângulo é imediata:

*"3. C:Só substituir isso aqui, a gente calculou.*
*4. B: Aqui é o <u>a</u> eaqui é <u>b</u>.*
*5. C: já coloca ai.*
*6. B: vamos dizer que aqui é o <u>a</u>.*
*7. C: Dá a mesma coisa.*
*8. B: Claro que não*
*9. C: Nós só damos os catetos.*
*10. B: Tá se lembra que é o opostos que é os catetos? Esse aqui é o <u>b</u> e esse aqui é o <u>a</u>."*

Através das anotações que temos na ficha do aluno podemos observar a formulação correta:

"$x^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2$
$x^2=4.2+3$
$x^2=8+3$
$x^2=11$
$x=\sqrt{11}$ "

<u>A Solução determinada:</u>

A solução para calcular a área do quadrado :

*"18. B: valor de x vai dar 11. Agora qual é a área.*
*19. C: Qual a área?*
*20. B: A área é.*
*21. C: raiz quadrada de 11, raiz quadra de 11.*
*22. B: Não, raiz quadrada não. É onze ao quadrado.*
*23. C: raiz quadrada de onze ao quadrado.*
*24. B:Quê?*
*25. C: Dá onze.*
*26. B: onze. Área ao quadrado é 11 raiz ao quadrado. Área ao quadrado é 11. É isso."*

Notemos que o fato do lado do quadrado ser $\sqrt{11}$ o que implica na área do quadrado ser 11 parece ter pertubado os alunos. Será o significado de $\sqrt{11}$ e de 11 u.a. que foi a causa da problemática estabelecida?

- **Estudo da dupla E**

<u>Teorema de Pitágoras foi utilizado?</u>

A dupla não lembra o que podem usar para resolver O observador tenta ajudar através de pergunta: "*Vocês vêem alguma semelhança nesse problema com o anterior?*", os alunos tentam formular o problema através de lembranças de exercícios feitos anteriormente, mas é muito confuso conforme o próprio aluno diz, vejamos:

*"6. B: Vou tentar aplicar cosseno, assim foi o que lembro assim....Eu tava tentando descobri, usar uma daquelas fórmulas, daí, prá descobri o a, que daí seria como é um quadrado. Aqui seria a medida de um quadrado, daí para achar a área seria a medida dele mesmo .... Mas eu não consigo me lembrar como é que fazia isso."*

Nesta equipe temos a confirmação de que o Teorema de Pitágoras foi um conhecimento adquirido na 8ª série, porém não assimilado.

*"8. B: Eu tentei pensar, tipo, fazer tangente, que seria cateto oposto e cateto adjacente, ou cateto adjacente e cateto oposto, se eu não me engano..... Tá muito confuso por causa que me lembro, praticamente nada da 8ª série. Não tou conseguindo me lembrar. Deve tá tudo errado, por causa que tô muito confuso."*

Parece haver uma concorrência entre relações trigonométricas no triângulo retângulo, relações métricas do triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras estudados na 8ª série.

Esta dupla não resolve o problema. Os alunos entregam os dois exercício após 1h e 30min.

- **Estudo da dupla D**

Para o estudo desta dupla usamos somente a ficha do aluno.

A dupla D, fazem um desenho. Conforme nota do observador: "dificuldade em colocar a medida 1 m. Dificuldade no teorema de Pitágoras: + ou - ?"

Formulam o teorema de Pitágoras sem mencionar nome em sua ficha. Usaram a seguinte formulação, conforme nota da ficha do aluno:

"$a^2=b^2+c^2$
$40^2=b^2+24^2$
$1600 = b^2 - 576$
$-b^2=576-1600\ (-1)$
$b^2= 1024$"

Na tentativa de extrair a raiz fazem a multiplicação de quadrados. Conforme nota na ficha do aluno, escolhem os seguintes quadrados: 25x25; 41x41; 42x42; 52x52; 38x38 e por fim 32x32 onde chegaram na resposta correta para b= 32.

Solução correta "32 + 1 = 33 m".

Porém não justificam suas respostas.

Quanto ao problema 2, acharam os valores, sem dificuldade em achar o quadrado da radiciação.

Identificam o lado do quadrado e por fim chegam ao resultado correto da área do quadrado.

## Conclusão da experimentação

A dupla A, B, C, D e E usam a propriedade do triângulo retângulo na resolução do **Problema 1.**

Com relação ao **Problema 2** a dupla E teve dificuldade na resolução, pensamos nós, que pode ter sido consequência das dificuldades (dos erros) na resolução do problema.

Temos assim que a propriedade do triângulo retângulo é uma ferramenta disponível na 1ª série do Ensino Médio. O nome do Teorema "Teorema de Pitágoras" é que se mostrou não rotineiro. Os alunos falam "teorema", mas não atem o nome do Teorema.

# Conclusão

Neste trabalho buscamos obter elementos de resposta à questão: "quais modificações sofre o objeto "Teorema de Pitágoras" de saber a ensinar a saber ensinado?". Mais precisamente, buscamos identificar como "vive" o Teorema de Pitágoras, no ensino da 8ª série do Ensino Fundamental e se este saber é disponível para o aluno em fim de 8ª série, isto é, se os alunos no início da 1ª série do Ensino Médio, o utilizam como ferramenta na resolução de problemas.

Teorema de Pitágoras como saber a ensinar:

Historicamente notamos que o Teorema de Pitágoras como objeto evolui de casos particulares, estudo de números que tem uma relação, comprimentos até a generalização como uma propriedade do triângulo retângulo.

As demonstrações do Teorema de Pitágoras foram objeto de estudo de muitos anos ao longo da História (370 demonstrações foram catalogadas).

No Ensino Fundamental, segundo Parâmetros Curriculares Nacionais, o Teorema de Pitágoras é proposto como exemplo para trabalhar demonstração com objetos concretos.

Na Proposta Curricular de Santa Catarina, não identificamos um lugar explícito onde ele será estudado. Mas no Planejamento anual de uma escola, o Teorema de Pitágoras é objeto a ensinar na unidade "Relações Métricas" e explicitamente lhe é atribuído a função de ferramenta nos objetivos.

O Teorema de Pitágoras como saber a ser ensinado:

Os dois livros estudados mostram duas abordagens distintas:

O livro 1: "Matemática conceitos e histórias", o Teorema de Pitágoras é simplesmente uma 4ª relação métrica, do triângulo retângulo, no desenvolvimento do conteúdo. Mas propõe separadamente, ao professor através de "Pranchas de apoio pedagógico" a "Demonstração do caso Particular de Papus".

Temos aqui que o estudo do Teorema de Pitágoras vai depender do trabalho do Professor.

O livro 2: "A Conquista da Matemática Teoria e Aplicações", propõem ao professor a realização de uma atividade com material concreto "Demonstração de Bhasckara" e a demonstração através das relações métricas do triângulo retângulo.

Neste livro desenvolve-se um estudo com elementos de histórias e uma demonstração geométrica e algébrica. Também retoma a demonstração do Teorema de Pitágoras via relações métricas.

Teorema de Pitágoras como saber disponível:

Usado de maneira rotineira como uma regra do triângulo retângulo ($a^2=b^2+c^2$). Porém o teorema não é denominado, ou seja, os alunos não identificam, segundo nossa micro-engenharia didática, como sendo o "Teorema de Pitágoras".

Uma dupla mostra a existência uma possível confusão na utilização do Teorema de Pitágoras, pois o triângulo retângulo evoca relações métricas e relações trigonométricas.

Cabe-nos perguntar se existe uma concorrência entre Teorema de Pitágoras, relações métricas e relações trigonométricas no Ensino?

# Referência Bibliográfica

BROUSSEAU, G. (1998), Thórie des situations didactiques; éditions La pensée sauvage, Grenoble.

BOYER, Carl Benjamin (1906) - História da matemática: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.pp. 37 - 45.

CHAACHOUA, Abdelhamid; Fonctions du dessin dans l'enseignemente de la géométrie dans l'espace. Etude d'um cas: la vie dês problèmes de construction et rapports dês enseignants à ces problème; Laboratoire Leibniz – IMAG; 1997.

CHEVALLARD, Y. (1991) La Transposition Didatique: du savoir savant au savoir enseigné, Éditions La pensée Sauvage, Grenoble, p. 30.

CHEVALLARD, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique. Perspectives apporte es par une approche anthropologique, *Recherches em didactique des mathésmatiques*, Vol. 12(1), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 73-111.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'ánalyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 19 (2), éditions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 221-266.

DOUADY, Régine. A Universidade e a Didática da Matemática: Os IREM na França. **Revista do Professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, Volume 1, nº 1, 2º, Março de 1990, pp. 1-22.

DOUADY, Régine. "Jeus de cadres et dialectique autil-objet". RDM volume nº 2, 1986.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figura dans une démarche géométrique. *Repères*-IREM, nº 17, pp. 121-137. (1994)

EVES, Howard (a)– **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Editora UNICAMP, São Paulo, 2ª Edição, 1997.

EVES, Howard (b) – **Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula – Geometria.**, 1969, Tradução: Hygino H. Domingues. Editora Atual, São Paulo, 1992.

GIOVANNI, José Ruy et al. **A Conquista da Matemática Teoria e Aplicação**: Unidade 9 - Triângulo Retângulo: Relações Métricas. 8ª série. São Paulo. Editora FTD AS. (não tem ano). p. 177.

GRANIER, D.; Curso de DEA, 1996.

LIMA, Elon Lages (a). **Meu Professor de Matemática e outras histórias:** Mania de Pitágoras. Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: 1991, pp. 52-58.

LIMA, Elon Lages (b). **Medida e Forma em Geometria – Comprimento, Área, Volume e Semelhança:** Nota histórica. Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: 1991, pp. 3-26.

ROTHBART, Andrea et al. Números Pitagóricos: uma fórmula de fácil dedução e algumas aplicações geométricas. **Revista do Professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, N° 7, 2° semestre de 1985, pp. 49-51.

PIERRO NETO, Scipione di. **Matemática conceitos e histórias**: Pitágoras e o retângulo do pedreiro. A escola de Pitágoras. Matemática Scipione, 7ª série. São Paulo: 2ª ed. Editora Scipione, 1998.

PIERRO NETO, Scipione di. **Matemática conceitos e histórias**: A diagonal e o lado do quadrado. Os números pitagóricos. Matemática Scipione, 8ª série. São Paulo: 2ª ed. Editora Scipione, 1998.

## Internet

LIMA, Mário. **Teorema de Pitágoras - Demonstrações Geométricas**. Disponível em: <http://www.portugaljovem.net.mariolima/aluno/08/decomposicao> Links: Quadrícula, Área dos quadrados, Partição de Perigal, **Mais demonstrações geométricas**: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; 1, 2; 1; . Acesso em: 27 agosto 2001.

CLARK UNIVRESITY, *Euclid's Elements*, I (book I); preposition 47. Disponível em: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/book1/propI47.html> Acesso em: 27 agosto 2001.

MARIO LIMA, decomposição de figuras e teorema de pitágoras. Diponível em: <http://www.portugaljovem.net/mariolima/alunos/matematica.htm> Links: Temas – geometria – decomposição de figuras e teorema de Pitágoras – th. Pitágoras. Acesso em: 15 de maio de 2002.

## Publicações

- **Trabalho de Conclusão de Curso**. Semelhança de Triângulo um Estudo Didático. Marco Aurélio Maestri (2002).
- **PCN – Proposta Curricular Nacional** – 2000
- **Proposta Curricular de Santa Catarina**. Educação Infantil. Ensino Fundamental e Ensino Médio (Disciplinas Curriculares)- 1998, pp. 105-113.

# ANEXOS

# ANEXO – I

## AS PEQUENAS HISTÓRIAS COM MATEMÁTICAS


## OS NÚMEROS PITAGÓRICOS

Chamam-se **pitagóricos** os três números inteiros que servem de medidas para os lados de um triângulo retângulo. Como encontrá-los? Vejamos.

Consideremos o quadrado ABCD, do qual cada lado é a soma de dois inteiros representados por **a** e **b**. Pelos pontos P, Q, R, S, que definem os segmentos que medem **a** e **b** sobre os lados, tracemos um novo quadrado de lado **c**.

Vamos calcular a área de ABCD de dois modos.

1º modo

$$A_{ABCD} = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 \qquad \text{(I)}$$

2º modo

$$A_{ABCD} = A_{PQRS} + 4 \cdot A_{\Delta PBQ}$$

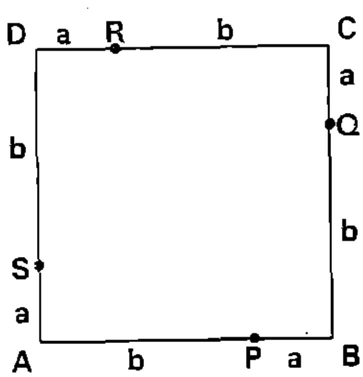
Como $A_{PQRS} = c^2$ e $A_{\Delta PBQ} = \dfrac{ab}{2}$,

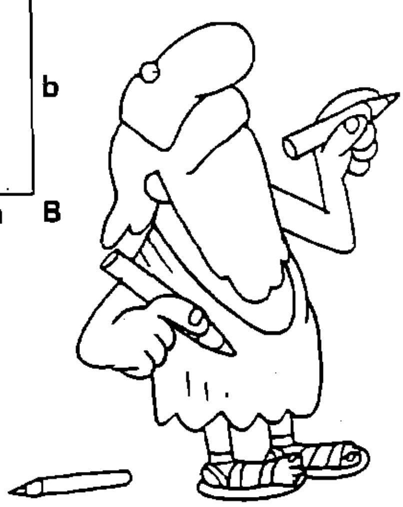
podemos escrever:

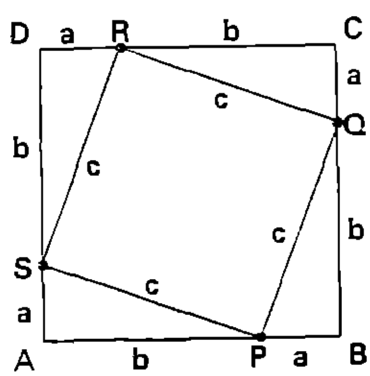
$$A_{ABCD} = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2 + 2ab \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), obtemos:

$$c^2 + 2ab = (a + b)^2$$
$$c^2 + \cancel{2ab} = a^2 + \cancel{2ab} + b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

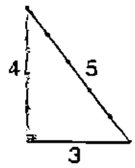


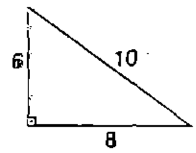



Como **a** e **b** são catetos do triângulo e **c** é hipotenusa, esse resultado se enuncia:
Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.
Veja alguns exemplos.

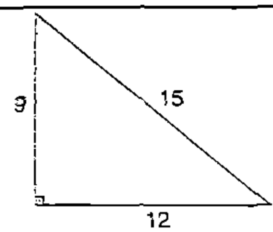
$5^2 = 3^2 + 4^2$
$25 = 9 + 16$ (verdade)
$25 = 25$ (verdade)




$10^2 = 6^2 + 8^2$
$100 = 36 + 64$ (verdade)
$100 = 100$ (verdade)

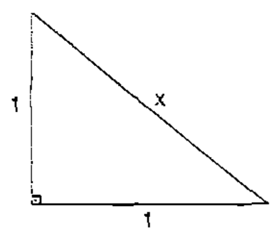



$15^2 = 12^2 + 9^2$
$225 = 144 + 81$ (verdade)
$225 = 225$ (verdade)




Isso quer dizer que, dados dois lados de um triângulo retângulo, sempre é possível calcular o terceiro lado.

$x^2 = 1^2 + 1^2$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2} = 1{,}414...$




Os números 3, 4 e 5 e os múltiplos que formam uma seqüência diretamente proporcional a 3, 4 e 5 são seqüências de números pitagóricos. Observe.

| **seqüências** | **teorema de Pitágoras** | |
|---|---|---|
| 3, 4, 5 | $3^2 + 4^2 = 5^2$ | $9 + 16 = 25$ (V) |
| 6, 8,10 | $6^2 + 8^2 = 10^2$ | $36 + 64 = 100$ (V) |
| 9,12,15 | $9^2 + 12^2 = 15^2$ | $81 + 144 = 225$ (V) |

| **seqüências** | **teorema de Pitágoras** | |
|---|---|---|
| 5,12,13 | $5^2 + 12^2 = 13^2$ | $25 + 144 = 169$ (V) |
| 10, 24, 26 | $10^2 + 24^2 = 26^2$ | $100 + 576 = 676$ (V) |
| 15, 36, 39 | $15^2 + 36^2 = 39^2$ | $225 + 1296 = 1521$ (V) |

**Resumindo: Somente os números pitagóricos formam triângulos retângulos.**

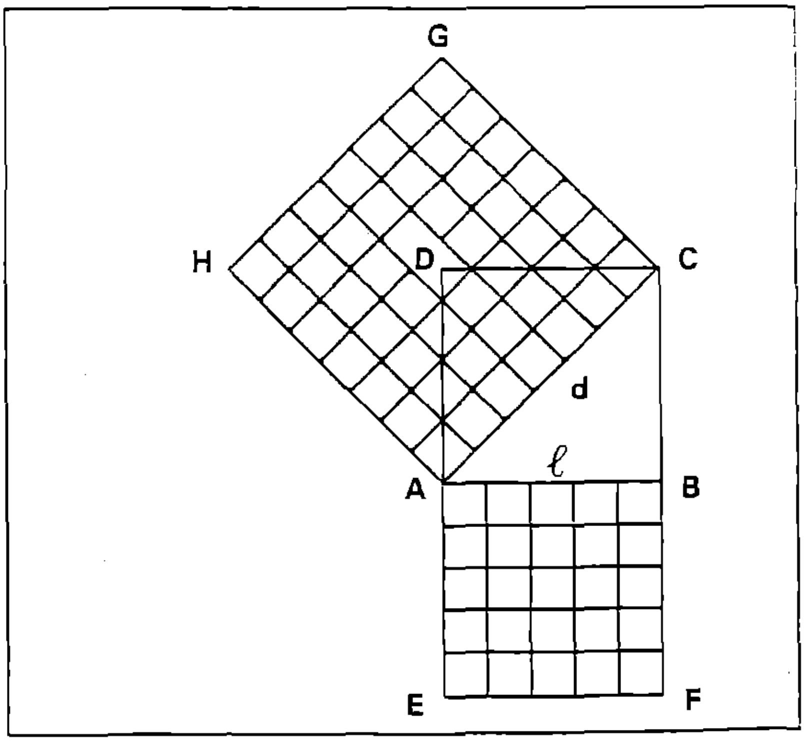
# HISTÓRIA 5

# A DIAGONAL E O LADO DO QUADRADO

O aluno reclamou com o professor por não ter entendido o fato de o lado do quadrado e sua diagonal não terem submúltiplo comum.

O professor sugeriu então desenhar um quadrado e sua diagonal.

Suponhamos que o lado $\ell$ e a diagonal **d** tenham um submúltiplo comum. Parece razoável que, se o lado medir 5 cm, a diagonal "poderia" medir 7 cm. Então, vamos construir sobre um dos lados e sobre a diagonal dois quadrados. O submúltiplo comum será o centímetro.



Assim, o quadrado construído sobre a diagonal teria exatos 49 $cm^2$ e o quadrado construído sobre o lado teria exatos 25 $cm^2$, certo? Como o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo ABC leva em conta o lado $\ell$ e a diagonal **d**, temos:

$$\ell^2 + \ell^2 = d^2$$

$$2\ell^2 = d^2$$

Como $\ell = 5$ cm e $d = 7$ cm, temos:

$$2 \cdot 5^2 = 7^2$$

$$2 \cdot 25 = 49$$

$$50 = 49!!!$$

Isso significa que, se você reconhece que a diagonal e o lado do quadrado admitem um submúltiplo comum, então 50 = 49, o que é absurdo! Logo, não se pode admitir que a diagonal e o lado tenham submúltiplo comum.

Se você quiser mais precisão, poderá medir 10 unidades (no lado) e "ter" 14 unidades (na diagonal).

$$\ell^2 + \ell^2 = d^2 \text{ ou } 2\ell^2 = d^2$$

Como $\ell = 10$ e $d = 14$, podemos escrever:

$$2 \cdot 10^2 = 14^2$$

$$200 = 196!!!$$

A mesma conclusão repete-se aqui. Admitir submúltiplos comuns ao lado e à diagonal nos conduziriam a 200 = 196, o que é absurdo.

– E se eu considerar uma medida mais precisa, professor? Por exemplo,

$$\ell = 1 \text{ e } d = \sqrt{2} = 1{,}414...$$

– Então vamos experimentar:

$$d^2 = 2\ell^2$$

$$(1{,}414)^2 = 2 \cdot 1^2$$

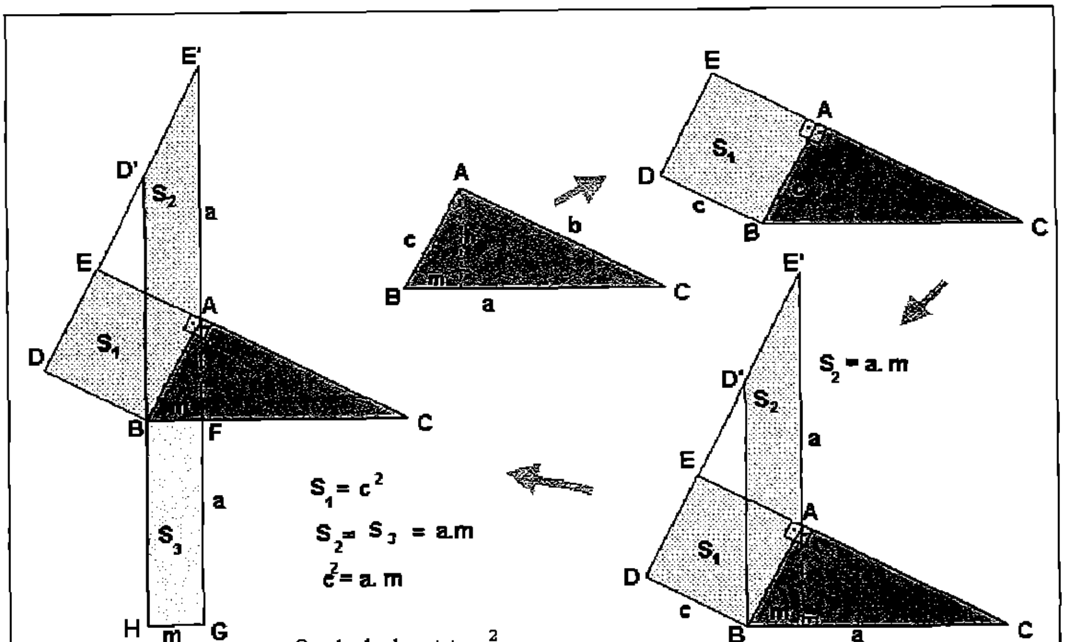
$$1{,}999396 = 2!!!$$

– Também é absurdo.

– Isso vai acontecer sempre, seja qual for a aproximação usada para a diagonal (ou lado). Nunca haverá um submúltiplo comum. Grandezas desse tipo são chamadas **incomensuráveis**.

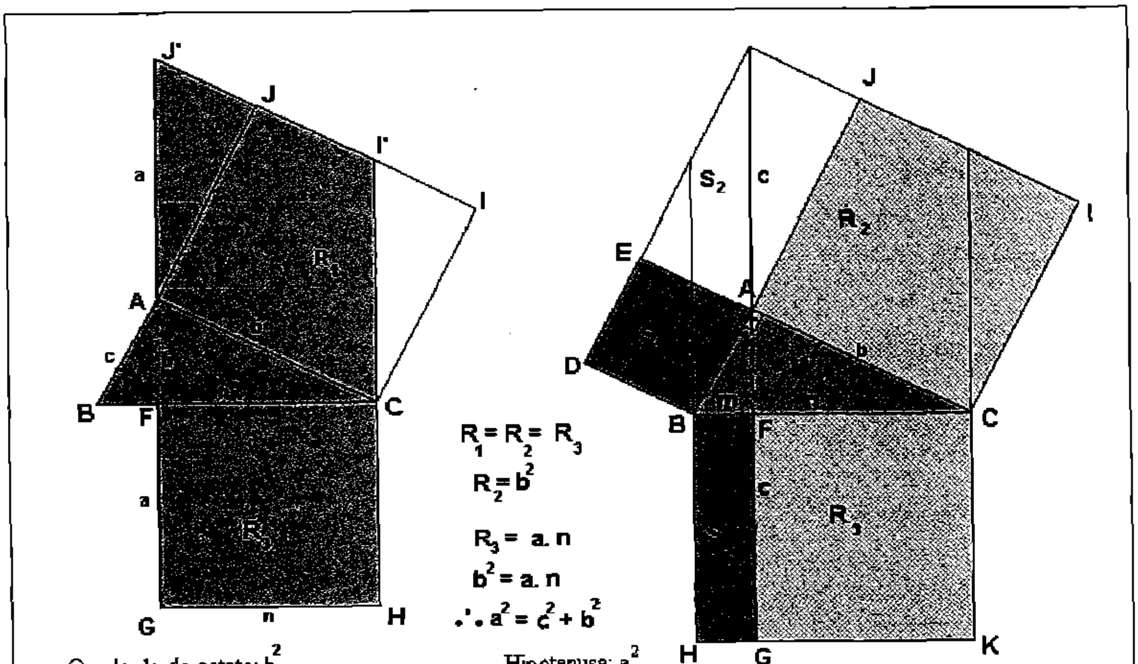
# ANEXO – II

## Prancha Pedagógica - Demonstração do Teorema De Papus



Quadrado do cateto: $c^2$

Fig. 1



Quadrado do cateto: $b^2$

Hipotenusa: $a^2$

Fig. 2

# ANEXO – III

## FICHA DO OBSERVADOR

*Sua participação e atuação é muito importante para a realização desta experimentação.*

***Solicitamos que sejam observados os seguintes itens:***

1. *Entregar à dupla uma **FICHA DO ALUNO** junto com uma folha em branco para **rascunho**;
2. Pedir que os alunos preencham o cabeçalho da ficha (Escola e nome do aluno);
3. Controlar a gravação, **rodar, virar ou trocar a fita** quando necessária.
4. Identificar na FICHA DO OBSERVADOR, seus nomes, os nomes dos alunos e fazer uma legenda;
5. Anotar na FICHA DO OBSERVADOR, sempre que possível, todas as tentativas de resolução dos alunos, situação de indecisão, de formulação da solução etc.;
6. Registrar na FICHA DO OBSERVADOR desenhos utilizados pela dupla na resolução do problema;
7. Marcar na FICHA DO OBSERVADOR, **de tempo em tempo**, a **hora** para informar ao pesquisador o tempo usado pela dupla na realização da tarefa (total ou parcial);
8. Fazer uma PERGUNTA À DUPLA quando perceber que um fato importante ocorreu e não houve registro que esclareça ao pesquisador (gravado ou registrado por escrito);
9. Fornecer FOLHAS DE RASCUNHO caso a dupla solicitar;
10. ***Recolher todos os rascunhos** utilizados pelos alunos acompanhados **com a FICHA DO ALUNO**, no termino de cada exercício;
11. Anotar a legenda escolhida na FICHAS DO ALUNO antes de entregar as fichas para ao pesquisador.

**OBS.:** * As fichas devem ser entregues uma de cada vez: **1° a FICHA N° 01, depois de concluída**, então entregar **a FICHA N° 02.**

# ANEXO – IV

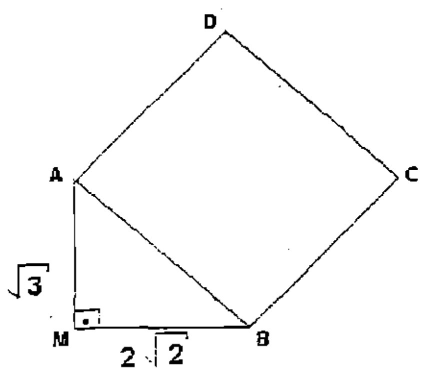
## FICHAS DOS ALUNOS

FICHA DO ALUNO N° 02

ESCOLA:________________________________________
ALUNO(A):____________________________________(___)
ALUNO(A):____________________________________(___)

**Problema:**

2) Sabendo que ABCD é um quadrado. Qual sua área?



FICHA DO ALUNO Nº 01

ESCOLA:________________________________________________

ALUNO(A):__________________________________________(___)

ALUNO(A):__________________________________________(___)

**Problema:**

1) Durante um incêndio em um edifício de apartamento, os bombeiros utilizam uma escada Magirus de 40m para atingir a janela do apartamento sinistrado. A escada estava colocada a 1 m do chão, sobre um caminhão que se encontrava afastado 24 m do edifício. Qual é a altura do apartamento sinistrado em relação ao chão? Resolva e justifique.