Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática
Curso de Matemática

Integral de Riemann no $\mathbb{R}^n$

Luiz Carlos Leal Junior

Orientador: Ruy Coimbra Charão

Florianópolis - Santa Catarina

Julho/ 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 43/SCG/04.

Profª. Carmen Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Depto. de Matemática/ UFSC (Orientador)

Prof. Dr. Félix Pedro Quispe Gómez
Depto. de Matemática/ UFSC

Prof. Dr. Milton dos Santos Braitt
Depto. de Matemática/ UFSC

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Departamento de Matemática
Curso de Matemática

Integral de Riemann no $\mathbb{R}^n$

Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como trabalho de conclusão de curso, para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Luiz Carlos Leal Junior

Florianópolis - Santa Catarina

Julho/ 2004

A todos que amo, em especial ao meu filho Caynnan.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus que me auxiliou na transposição de mais uma etapa de minha vida, dando- me coragem e perseverança para continuar e concluí-la.

Agradeço à minha esposa Heliza, que esteve sempre ao meu lado me apoiando e até mesmo me aturando durante minha graduação, tendo sempre uma palavra de apoio para me dar e sendo acima de tudo uma grande amiga.

Agradeço a meus pais, Luiz e Roseli, pelo incentivo e esforço para que eu pudesse concluir meu curso, me auxiliando nos momentos difíceis e participando nos momentos alegres de minha vida.

Agradeço aos meus irmãos, Suelen e Jhonatta, meus avós e amigos pelo constante incentivo e presença em minha vida.

Agradeço a agradável companhia dos meus colegas de graduação e também pela ajuda nos estudos.

Agradeço aos meus amigos da IASD de Sambaqui pela constante presença em minha vida e pela companhia em nossa caminhada maior.

Agradeço aos funcinários: Sílvia, Iara e Alcino (coordenadoria do curso de matemática), Odete (BS/ CFM), Marion e Airton (Depto de matemática), Irineu, Eloísa e Rita (DRH/ UFSC) pelo carinho e ajuda nos momentos em que mais precisei.

Agradeço à PRAC, FAPEU, CAPES e CNPq que me possibilitaram concluir meu curso através do apoio financeiro.

Agradeço aos professores que de alguma forma me ajudaram neste trabalho e na graduação, em especial, aos professores Jaúber e Pinho.

Agradeço aos professores Félix e Milton que prontamente aceitaram me auxiliar neste trabalho e participar da banca examinadora.

Agradeço por último ao professor Ruy Charão, pela paciência e orientação, durante nossos trabalhos de iniciação científica e conclusão de curso.

Notações

$\dim(A)$: Dimensão do conjunto A;

$J(g(x))$: Jacobiano da função g(x);

M_U : Supremo do conjunto U;

m_U : Ínfimo do conjunto U;

graf(h) : Gráfico da função h;

int(S) : Interior do conjunto S;

viz(x) : Vizinhança do ponto x;

$\mu(B)$: Volume do conjunto B, onde B pode ser um retângulo do $\mathbb{R}^n$;

$\underline{\int_A} f$: Integral inferior de f sobre A;

$\overline{\int_A} f$: Integral superior de f sobre A;

A^c : Conjunto complementar de A;

$\mathbb{Q}_{[a,b]}$: Racionais pertencentes ao intervalo [a,b];

$\mathbb{Q}^c_{[a,b]}$: Conjunto complementar de $\mathbb{Q}_{[a,b]}$ em [a,b];

1_A : Função característica de A;

$med_B(A)$: Medida do conjunto A, em relação ao conjunto B, para $A \subset B$;

med(A) : Medida do conjunto A;

o(h,x_0**)** : Oscilação da função h no ponto x_0;

$\Upsilon(f)$: Conjunto das descontinuidades de f.

Sumário

Resumo

Neste trabalho, estudamos a Integral de Riemann, seus aspectos históricos e sua construção. Mostramos os teoremas de Darboux e Riemann que são úteis na identificação de funções Riemann- integráveis. Propriedades elementares da integral de Riemann são também demonstradas, inclusive o teorema de Fubini. Apresentamos ainda um breve relato da teoria formulada por Henry Lebesgue para conjuntos de medida nula e mostramos o teorema de Lebesgue que caracteriza as funções Riemann-integráveis. Como consequência, é provada uma caracterização de conjuntos com volume.

Introdução

Muitos livros de análise tratam da integral de Riemann como requisito para a integral de Lebesgue, a qual em muitas aplicações seria mais eficaz do que a integral de Riemann. Segundo Burkill: " Há muito tempo é evidente que todo usuário do cálculo integral, seja da matemática pura ou aplicada, deve interpretar integração no sentido de Lebesgue. Alguns princípios simples então dirigem a manipulação de expressões contendo integrais".

Porém, se faz necessário um estudo aprofundado da teoria de integração formulada por Riemann (Século XIX), pois ela é o fundamento das teorias hoje vigentes de integração. Recentemente surgiu uma simples modificação da integral de Riemann, chamada então de Integral Henstock - Kurzweil, ou de Riemann generalizada, que faz com que a integral resultante seja mais geral que a integral de Lebesgue.

O objetivo deste trabalho é desenvolver propriedades da integral de Riemann, encontrar princípios simples que a dirijam, aplicar teoremas e teorias a modo de fundamentar seu estudo.

No primeiro capítulo estudamos os aspectos históricos e fundamentais para construção da integral de Riemann, com definições e propriedades.

O segundo consta das condições de integrabilidade, que são especificadas através de teoremas. No terceiro capítulo introduzimos o conceito de medida e volume zero de um conjunto e no quarto e sexto capítulos estudamos os teoremas de Lebesgue e Fubini, respectivamente, onde o último trata da ordem de integração.

No quinto capítulo introduzimos o conceito de integral imprópria, onde se faz necessário o estudo de teoria de convergência . Alguns exemplos elucidativos são mostrados. Finalizamos, no sétimo capítulo, este trabalho com um resultado sobre mudança de variável na integral. Tal assunto é de extrema utilidade para o cálculo de integrais.

Capítulo 1

Integral de Riemann no $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo faremos uma abordagem a vida de Georg Friedrich Bernhard Riemann e alguns de seus trabalhos, assim como um aspecto histórico do cálculo integral até a formulação feita por Riemann. Abordaremos a construção da integral na versão de Riemann, enunciaremos as definições e em seguida algumas das principais propriedades da integral.

1.1 Biografia de Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann filho de um pastor luterano, foi educado em condições modestas. Era uma pessoa tímida e fisicamente frágil.

Riemann teve uma boa instrução em Berlim e depois em Göttingen onde obteve seu doutoramento com uma tese sobre teoria das funções de variáveis complexas, onde aparecem as equações denominadas de Cauchy-Riemann, embora já fossem conhecidas por Euler e D'Alembert. Neste trabalho ele estabelece o conceito de superfície de Riemann que desempenharia papel fundamental em Análise.

Nomeado professor na Universidade de Gottingen em 1854, apresentou um trabalho perante o corpo docente e que resultou em uma das mais célebres conferências da história da Matemática. Nele estava uma ampla e profunda visão da Geometria e seus fundamentos que até então permanecia marginalizada.

Ao contrário de Euclides e em sentido mais amplo do que Lobachevsky, observou que seria necessário tratar-se de pontos, ou de retas, ou do espaço não no sentido comum mas como uma coleção de n-uplas que são combinadas segundo certas regras, uma das quais a de achar distancia entre dois pontos infinitamente próximos.

Para Riemann, o plano é uma superfície de uma esfera e reta é o círculo máximo sobre a esfera. De sua sugestão de estudar espaços métricos em geral com curvatura, tornou-se possível a teoria da relatividade, contribuindo assim para o desenvolvimento da Física.

Um de seus brilhantes resultados foi perceber que a integral exigia uma definição mais cuidadosa do que a de Cauchy e, baseado em seus conceitos geométricos, concluiu que as funções limitadas nem sempre são integráveis.

Em 1859, Riemann foi nomeado sucessor de Dirichlet na cadeira de Gottingen já ocupada por Euler. Com seu estado de saúde sempre precário, acabou por morrer em 1866 em conseqüência de uma tuberculose.

1.2 Aspectos Históricos - O cálculo de áreas

O estudo do cálculo integral começou na antiguidade, há mais de 3000 anos.O problema central era calcular áreas de regiões planas.

Os gregos antigos tiveram grande importância nesse sentido. O poder criador da matemática grega chegaria a seu ponto culminante com Arquimedes (287-212 AC), por muitos considerado o maior gênio matemático do mundo antigo. Sua poderosa contribuição à geometria é rigorosa e cheia de imaginação. Arquimedes aperfeiçoa o método de exaustão, usado nas medidas de áreas e volumes, com tal virtuosidade que se pode considerá-lo como uma verdadeira antecipação do cálculo integral.

O cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas sempre foi um desafio para os matemáticos gregos. Durante um longo período foram desenvolvidas técnicas para a abordagem e solução desses problemas. Podemos dizer que essas técnicas conduziram à idéia de integral, a qual aparece de modo embrionária nas idéias de Arquimedes , ao utilizar o método de exaustão concebido por Eudoxo (408-355 A.C.).

Muito tempo depois, já no século XVII, Leibnitz (1646-1716) e Newton (1642-1727), criadores do Cálculo Diferencial, lançaram as bases do Cálculo Integral. No entanto, somente com Cauchy (1789-1857) e Riemann (1826-1866) é que o conceito de integral foi estabelecido de maneira rigorosa. Nessa época o conceito de limite já havia amadurecido, possibilitando um tratamento mais rigoroso do Cálculo. Durante um longo período foi desenvolvido um conceito de integração baseado na proposta original de Riemann. Todavia, essa teoria contém algumas deficiências que a tornam inadequada ao estudo de vários problemas da Análise Matemática.

Após detectadas algumas deficiências da integral de Riemann, uma reformulação do conceito de integral fazia-se necessária, de tal maneira que o novo conceito de integração contivesse o anterior devido à Riemann, mas que não apresentasse as deficiências daquele. Em outras palavras, dever-se-ia procurar uma teoria de integração de maneira que a nova classe de funções integráveis necessariamente contivesse a classe das funções integráveis à Riemann, mas que, por outro lado, não contivesse as deficiências que a integral de Riemann apresenta.

Este era o cenário, no que se refere à integração, no final do século XIX. Em 1902, Henri Lebesgue (1875-1941) publicou sua tese de doutoramento que tratava da apresentação de uma nova noção de integral. Sua noção de integral, num certo sentido, se colocava na contra-mão do pensamento matemático existente naquela época, tanto que em princípio elas foram muito criticadas.

Com o aparecimento e desenvolvimento de novas idéias na Matemática, a integral proposta por Lebesgue passou a ser melhor compreendida e mais tarde passou a ser indispensável o seu conhecimento. Todavia, trataremos neste trabalho da teoria de integração no sentido desenvolvido por Riemann a qual, ainda hoje é de grande interesse, útil e fundamental na formação de qualquer matemático.

1.3 Construção da Integral de Riemann

Na tentativa de resolver o problema de determinar áreas, se chega na definição de integral. Vamos daqui por diante aplicar procedimento semelhante para calcular o volume de um sólido e por fim generalizar e chegar à definição de integral de Riemann no $\mathbb{R}^n$.

Lembremos os fatos básicos relativos à funções de uma variável real. Se f(x) é definida para $a \leq x \leq b$, subdividimos o intervalo [a,b] em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de comprimento igual $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$ e escolhemos pontos arbitrários ξ_i em cada um desses subintervalos. Em seguida formamos a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

e tomamos o limite dessa soma quando n tende a infinito para obter a integral definida de a até b da função f.

$$\int_a^b f(x)\, dx \; = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x.$$

De modo semelhante, vamos considerar uma função f de n varáveis definida num "retângulo" A fechado do $\mathbb{R}^n$. Estudaremos a integral de Riemann de $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, com A limitado e f limitada.

Seja B um "retângulo" (finito), não degenerado, do $\mathbb{R}^n$, fixado, que contém A. Em tudo que segue, consideremos f definida em B, por zero fora de A, isto é,

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } \; x \in A \\ 0, & \text{se } \; x \in B \backslash A \end{cases}$$

Observação 1.1 *Se n=2, B é um retângulo. Se n=3, B é um paralelepípedo.*

Isto é, $B = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ com $[a_i, b_i]$ intervalos de $\mathbb{R}$, não degenerados.

Vamos dividir cada intervalo $[a_i, b_i]$ em m_i subintervalos, formando assim uma partição P de B:

$$a_i = x_0^i < x_1^i < \ldots x_{m_{i-1}}^i < x_{m_i}^i = b_i$$

Assim, a partição P é formada por: $m_1.m_2.\cdots.m_n$ subretângulos R da forma:

$$R = [x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1] \times [x_{j_2}^2, x_{j_2+1}^2] \times \cdots \times [x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n],$$

com $0 \leq j_i \leq m_{i-1}$.

$$R = [x_{j_1}^1 + i, x_{j_1+1}^1 + (i+1)] \times [x_{j_2}^2 + k, x_{j_2+1}^2 + (k+1)].$$

Onde $0 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq m$, para n e m naturais.

1.3.1 Definições e Propriedades

Definição 1.1 *Seja B um retângulo do $\mathbb{R}^n$, então o volume de B é definido por*

$$\mu(B) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i);$$

Definição 1.2 *Seja P uma partição de B. Então denotamos a soma superior de f em [a,b], relativa à partição P por:*

$$S(f, P) = \sum_{R \in P} [\sup_{x \in R} f(x)].\mu(R).$$

E a soma inferior de f em [a,b], relativa à partição P por:

$$s(f, P) = \sum_{R \in P} [\inf_{x \in R} f(x)].\mu(R).$$

Propriedade 1.1 *s(f,P) $\leq$ S(f,P)*

Justificativa: Segue do fato que

$$\inf_{x \in R} f(x) \leq \sup_{x \in R} f(x).$$

□

Definição 1.3 *Um refinamento P' de P é uma partição de B tal que se $R' \subset P'$, então existe $R \in P$ de modo que $R' \subset R$.*

Propriedade 1.2 *Se P' e P são partições de B, e P' é refinamento de P, então*

$$S(f,P') \leq S(f,P) \ \text{ e } \ s(f,P) \leq s(f,P').$$

Justificativa: Segue dos fatos que $\sup_{R'} f \leq \sup_R f$ e $\inf_{R'} \geq \inf_R$

□

Propriedade 1.3 *Sejam **P'** e **P"** partições de B, então:* $s(f, \boldsymbol{P'}) \leq S(f, \boldsymbol{P''})$.

Justificativa: Seja P refinamento comum de de **P'** e **P"** (Pode ser obtido unindo- se as subdivisões de cada uma das partições **P'** e **P"**). Então pelas propriedades anteriores: $s(f, \mathbf{P'}) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f, \mathbf{P''})$.

□

Observação 1.2 $P \subset$ ***P'*** *significa que P é refinamento de **P'**, isto é, cada retângulo de P está contido num retângulo de **P'**.*

Propriedade 1.4 *Seja* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitada por M, isto é,* $|f(x)| \leq M$, *para todo* $x \in A, M > 0$. *Suponhamos A limitado. Então*

$$-M\mu(B) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M\mu(B)$$

com B retângulo contendo A e P partição qualquer de B.

Justificativa:

Essa propriedade diz-nos que conjunto dos números S(f, P) para todo P partição de B, é limitado. O mesmo se aplica para s(f, P).

De fato, temos pela limitação de f uqe

$$-M \leq f(x) \leq M, \ \text{ para todo } \ x \in A.$$

Isso implica que:

$$s(f,P) = \sum_{R \in P} [\inf_{x \in R} f(x)].\mu(R) \geq \sum_{R \in P} -M\mu(R) = -M \sum_{R \in P} \mu(R) = -M\mu(B).$$

Analogamente,

$$S(f,P) = \sum_{R \in P} [\sup_{x \in R} f(x)].\mu(R) \leq \sum_{R \in P} M\mu(R) = M \sum_{R \in P} \mu(R) = M\mu(B)$$

Agora usando $s(f,P) \leq S(f,P)$, temos

$$-M\mu(B) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq M\mu(B).$$

Isso conclui a justificativa.

$\square$

Como consequência da última propriedade, temos:

Propriedade 1.5 *Existe* $S = \inf\{S(f,P)/P$ *partição de* $B\}$ *e existe* $s = \sup\{s(f,P)/P$ *partição de* $B\}$*, e sempre teremos* $s \leq S$*.*

Justificativa: Esta propriedade é imediata porque esses conjuntos são limitados em $\mathbb{R}$, conforme a propriedade anterior.

$\square$

Definição 1.4 *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitada, com* A *limitado. A integral superior de* f *sobre* A*, é definida e denotada por:*

$$\overline{\int_A} f = S = \inf\{S(f,P)/P \ \text{ é partição de } B\}.$$

A integral inferior de f sobre A, é definida e denotada por:

$$\underline{\int_A} f = s = \sup\{s(f,P)/P \ \text{ é partição de } B\}.$$

Onde B *é um retângulo finito que contém* A*.*

Consequência das propriedades e definições:

$$\underline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} f.$$

Definição 1.5 *Se s= S, dizemos que f é integrável em A no sentido de Riemann, e que S é a integral de f sobre A.*

Denotamos a integral de f sobre A da seguinte forma:

$$\int_A f = s = S.$$

Outras Notações:

$$\int_A f = \int_A f(x)dx = \int_A f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n.$$

Casos mais comuns:

Se n=1, então $\displaystyle\int_A f = \int_a^b f(x)\, dx$, onde $A = [a,b]$;

Se n=2, então $\displaystyle\int_A f = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy$;

Se n=3, então $\displaystyle\int_A f = \iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$;

Capítulo 2

Condições para integrabilidade

Neste capítulo estudaremos a condição de Riemann para que uma função f, limitada com domínio em algum conjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ e imagem na reta real. Essa condição, necessária e suficiente, está relatada no teorema 2.1 .

Em seguida o teorema 2.2, relaciona a diferença entre as somas de Riemann da função f e de sua integral I, sob as mesmas condições de domínio e imagem do teorema 2.1 estabelecendo relações com uma partição P do retângulo finito B que cobre seu domínio.

2.1 Teorema de Riemann

Teorema 2.1 (Condição de Riemann para integrabilidade) *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada, A limitado, e $A \subset B$, B retângulo (finito) do $\mathbb{R}^n$. Consideremos f definida em B, por zero fora de A. Então f é integrável (à Riemann) em A se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe P_ε partição de B tal que $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Demonstração: Suponhamos que vale a condição de Riemann. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe P_ε partição de B tal que

$$0 \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Então, do teorema anterior, temos

$$0 \leq S - s \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos que se $S - s = 0$, então $S = s$, e assim f é Riemann integrável. Isso diz que a condição de Riemann é suficiente para a integrabilidade de f.

Reciprocamente, suponhamos que f é Riemann integrável. Assim, $\sup\{s(f, P)/ \text{ P partição}\} = s = S = \inf\{S(f, P)/ \text{ P partição}\}$. Seja $\varepsilon > 0$. Pela definição de ínfimo, existe partição P_1

tal que $S \leq S(f, P_1) < S + \frac{\varepsilon}{2}$.

Também pela definição de supremo , existe partição P_2 tal que $s - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P_2) \leq s$.

Seja $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, onde P_ε é refinamento comum de P_1 e P_2. Então usando as propriedades de somas superiores e inferiores:

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < s(f, P_2) \leq s(f, P_\varepsilon) \leq S(f, P_\varepsilon) \leq S(f, P_1) < S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomemos $s = S = I$. Assim,

$$0 \leq S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < I + \frac{\varepsilon}{2} - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

Então, existe partição P_ε tal que, $S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$. Assim, a necessidade da condição de Riemann está provada.

□

2.2 Teorema de Darboux

Teorema 2.2 (Darboux) *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada, A limitado e $A \subset B$, B retângulo. Definir f sobre B, por zero fora de A. Então f é Riemann integrável , com integral I se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se P é partição de B, em retângulos $R_1, R_2, \cdots, R_N$ todos com lados de comprimento menores ou iguais a δ, temos que*

$$\left| \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mu(R_i) - I \right| < \varepsilon \tag{2.2}$$

para qualquer escolha de $x_i \in R_i$, com $i = 1, 2, ...N$.

Demonstração: Suponhamos que vale a condição de Darboux. Queremos provar que $S = I = s$, onde I é o número real que aparece na condição de Darboux.

Seja $\varepsilon > 0$, então por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que se P é partição de B em retângulos de lados menores ou iguais a δ temos que é válida a desigualdade 2.2, para qualquer escolha de $x_i \in R_i$, $i = 1, 2, ...N$.

Vamos escolher $x_i \in R_i (R_i \in P)$ tal que

$$|f(x_i) - \sup_{R_i} f| < \frac{\varepsilon}{2N\mu(R_i)}. \tag{2.3}$$

Daí, obtemos que

$$|S(f, P) - I| = \left| \sum_{R \in P} (\sup_{R} f)\mu(R_i) - I \right|$$

$$\leq \left|\sum_{R\in P}(\sup_R f)\mu(R_i) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mu(R_i)\right| + \underbrace{\left|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mu(R_i) - I\right|}_{<\varepsilon/2}.$$

Notemos que

$$\left|\sum_{R\in P}(\sup_R f)\mu(R_i) - \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mu(R_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{N}\left[\sup_{R_i} f - f(x_i)\right]\mu(R_i)\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N}\left|\sup_{R_i} f - f(x_i)\right|\mu(R_i) \leq \sum_{i=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2N\mu(R_i)}.\mu(R_i) = \frac{\varepsilon}{2}$$

pela escolha de x_i em 2.3

Logo,

$$|S(f,P) - I| < \varepsilon, \tag{2.4}$$

onde P é uma partição tal que os retângulos de P têm lados menores ou iguais a $\delta = \delta(\varepsilon)$. Uma tal P depende de ε. Analogamente, fazendo uma escolha de $x_i \in R_i$ tal que

$$|f(x_i) - \inf_{R_i} f| < \frac{\varepsilon}{2N\mu(R_i)},$$

mostramos que

$$|s(f,P) - I| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

De 2.4 e 2.5 segue que:

$$0 \leq S(f,P) - s(f,P) < 2\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário e P uma partição que depende de ε, pelo teorema de Riemann, segue que f é integrável.

Sendo assim, 2.4 e 2.5 nos dizem que $s = S = I = \int_A f$.

Reciprocamente, vamos supor que f é integrável com integral I. Faremos a prova de que a condição de Darboux é válida em duas etapas.

1^a **Etapa:** Seja P partição de B, retângulo fixo contendo A e seja $\varepsilon > 0$. Mostraremos que existe $\delta > 0$ tal que se P' é partição de B, com $\|P'\| \leq \delta$ (isto é, os lados dos retângulos de P' tem comprimentos menores ou iguais a δ), então o volume total dos retângulos de P' que não estão inteiramente contidos em um retângulo de P, é menor que ε, isto é,

$$\sum_{\substack{R'\in P' \\ R'\not\subset R\in P}} \mu(R') \leq \varepsilon.$$

Caso n=1:

Neste caso, B=[a,b] e a partição inicial P é contituída de N pontos. É então suficiente tomar $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{N}$. Daí, se P' é partição com $\|P'\| \leq \delta$:

$$\sum_{\substack{R' \in P' \\ R' \not\subset R \in P}} \mu(R') \leq N\delta \leq \varepsilon$$

Caso n $\geq$ 2:

Sejam $V_1, V_2, \ldots, V_m$ retângulos de P. Seja T a área total das faces adjacentes dos retângulos acima relacionados. Seja $\varepsilon > 0$, tomemos $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{T}$. Sejam também P' partição com $\|P'\| \leq \delta$ e $R \in P'$ retângulo não inteiramente contido em algum retângulo V_j de P.

Neste caso, existem pelo menos dois retângulos V_j e V_i de P, adjacentes, tais que R intercepta seus lados.

Seja A a área "adjacente" que intercepta R, de V_j e V_i.

Logo, $\mu(R) \leq \delta A$.

Se forem mais de dois retângulos que têm áreas adjacentes que interceptam R, incluir estas áreas em A.

Daí, podemos ver que

$$\sum_{\substack{R \in P' \\ R \not\subset V_j \in P}} \mu(R) \leq \sum_{\substack{R \in P' \\ R \not\subset V_j \in P}} \delta A = \delta \sum_{\substack{R \in P' \\ R \not\subset V_j \in P}} A \leq \delta T \leq \varepsilon.$$

Portanto a 1^a etapa está concluída.

Se necessário podemos diminuir o tamanho de δ, tal que se $\|P'\| < \delta$, então cada retângulo R da partição original P contém pelo menos um retângulo R' de P'. Isto é atendido se tomar $\delta > 0$ como na 1^a etapa e ainda $0 < \delta \leq \frac{1}{2}\min\{$comprimentos dos lados dos retângulos de P$\}$.

2^a **Etapa:**

Conclusão da prova do teorema:

Por hipótese, temos f limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in B$. Também por hipótese, f é integrável com integral I. Então, por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe partição P_1 tal que

$$S(f, P_1) - I \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Também existe partição P_2 tal que:

$$I - s(f, P_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $P = P_1 \cup P_2$(isto é, P é o menor refinamento comum a P_1 e P_2).

Então,

$$S(f,P) - I \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad e \quad I - s(f,P) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Pois P é refinamento de P_1 e P_2 e pelas propriedades de somas superiores e inferiores.

Então para esta partição P, dado $\varepsilon > 0$, pela 1^a etapa, existe $\delta > 0$ tal que se P' é uma partição qualquer com $\|P'\| \leq \delta$, então:

- $\displaystyle\sum_{\substack{R' \in P' \\ R' \not\subset R \in P}} \mu(R') \leq \frac{\varepsilon}{2M}$,
- Cada retângulo $R \in P$ contém pelo menos um retângulo $R' \in P'$.

Sejam $R_1, R_2, \ldots, R_N$ os retângulos de P', sendo P' uma partição com as propriedades acima. Sejam $R_1, R_2, \ldots, R_K$ os retângulos de P' que estão contidos em retângulos de P. Claro que K é maior que o número de retângulos de P. Sejam $R_{K+1}, R_{K+2}, \ldots, R_N$ os retângulos de P' que não estão inteiramente contidos em retângulos de P.

Sejam $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2, \ldots, x_N \in R_N$ escolhas quaisquer, então:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mu(R_i) \\
&= \sum_{i=1}^{K} f(x_i)\mu(R_i) + \sum_{i=K+1}^{N} f(x_i)\mu(R_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{K} f(x_i)\mu(R_i) + \sum_{i=K+1}^{N} M\mu(R_i) \\
&= \sum_{i=1}^{K} f(x_i)\mu(R_i) + M \underbrace{\sum_{i=K+1}^{N} \mu(R_i)}_{\leq \varepsilon/2M} \\
&\leq \sum_{i=1}^{K} \sup_{R_i} f \mu(R_i) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{R \in P} (\sup_{R \in P} f)\mu(R) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= S(f,P) + \frac{\varepsilon}{2} \leq I + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = I + \varepsilon
\end{aligned}$$

por causa de 2.6.

Análogamente, podemos ver que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mu(R_i) \geq I - \varepsilon,$. Combinando as duas estimativas anteriores temos que

$$I - \varepsilon \leq \sum_{i-1}^{N} f(x_i)\mu(R_i) \leq I + \varepsilon.$$

Isso diz que

$$\left|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\mu(R_i) - I\right| \leq \varepsilon,$$

onde $R_1, R_2, \ldots, R_N$ são os retângulos de uma partição P' tal que $\|P'\| \leq \delta$. E isto prova a necessidade da condição de Darboux

$\square$

Relação entre: s(f,P), S(f,p) e a soma de Riemann.

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada, A limitado e P partição de B, B retângulo contendo A.

$$\text{s(f,P)} = \sum_{R \in P} [\inf_R f(x)]\mu(R);$$

$$\text{S(f,P)} = \sum_{R \in P} [\sup_R f(x)]\mu(R);$$

Uma soma de Riemann de f é dada por:

$$\sum_{R \in P} f(x)\mu(R), x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$s(f, P) \leq \sum_{R \in P} f(x)\mu(R) \leq S(f, P).$$

Para qualquer escolha de $x \in R$, com $R \in P$.

2.3 Exemplos

Exemplo 2.1 *Mostraremos por definição que:*

$$\int_0^1 x dx = \int_{[0,1]} f = \frac{1}{2}.$$

Justificativa:

Tomemos P_n partição de B=A=[0,1] em n "retângulos" de comprimento $\delta_x = \dfrac{1}{n}$ com $n \geq 1$.

É fácil ver que :

$$S(f, P_n) = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n};$$

e

$$s(f, P_n) = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Aqui n é o número de retângulos da partição.

Notemos que $S(f, P_n) - s(f, P_n) = \frac{1}{n}$.

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n > 0$ tal que

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) \leq \varepsilon.$$

Logo, pelo teorema de Riemann, f é integrável.

Como $S \leq \inf_n (f, P_n) = \dfrac{1}{2}$ e $s \geq \sup_n (f, P_n) = \dfrac{1}{2}$ resulta que

$$\int_{[0,1]} f = S = s = \frac{1}{2}.$$

♦

Exemplo 2.2 *Seja f a função de Dirichlet* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$*:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \in \mathbb{Q}_{[0,1]} \\ 1, & se \quad x \in \mathbb{Q}^c_{[0,1]} = \mathbb{I}_{[0,1]} \end{cases}$$

Então f não é Riemann integrável. Aqui $\mathbb{Q}_{[0,1]} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *e* $\mathbb{I}_{[0,1]} = \mathbb{Q}^c \cap [0,1]$*, sendo* $\mathbb{Q}^c$ *o complementar de* $\mathbb{Q}$ *em* $\mathbb{R}$*.*

Justificativa:

Seja P partição de B=A=[0,1], notamos que:

$$S(f, P) = \sum_{R \in P} (\sup_R f)\mu(R) = \underbrace{\sum_{R \in P} 1.\mu(R)}_{\text{volume de}[0,1]} = 1$$

então

$$S = \inf_{R \in P} S(f, P) = 1.$$

Mas,

$$s(f, P) = \sum_{R \in P} (\inf_R f)\mu(R) = \sum_{R \in P} 0.\mu(R) = 0,$$

então,

$$s = \sup_{R \in P} s(f, P) = 0.$$

E portanto, $s < S$ e f não é Riemann integrável.

♦

Capítulo 3

Conjuntos de volume e medida zero

Abordaremos aqui a definição de volume e medida de valor zero. Os conceitos apresentados são generalizações do conceitos de conjunto de conteúdo nulo para $\mathbb{R}^2$ quando a soma das áreas dos retângulos que cobrêm este conjunto é menor que um ε qualquer, e para $\mathbb{R}^3$ quando a soma dos volumes dos paralelepípedos que cobrêm o conjunto é também menor que ε. Estabeleceremos o conceito de medida nula, e exploraremos sua vantagem sobre os conjuntos de volume nulo, além de apresentarmos exemplos onde encontramos conjuntos de medida nula ou volume nulo.

Definição 3.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. A função caracterítica de A é definida por:*

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in A \\ 0, & se \quad x \notin A \end{cases}$$

Definição 3.2 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, A limitado. Diz-se que A tem volume se 1_A é Riemann integrável. Se este for o caso, define- se volume de A por $\mu(A) = \int_A 1_A$.*

Se A for um intervalo, triângulo, retângulo ou um paralelepípedo, então essa definição de volume coincide com a definição usual de volume destes objetos.

3.1 Conjuntos de volume nulo

Definição 3.3 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ dizemos que A tem volume zero, ou nulo, se A tem volume e $\mu(A) = 0$.*

Lema 3.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado com volume. Então $\mu(A) = 0$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existem retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_m$ tais que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{m} \mu(R_i) < \varepsilon.$$

Prova:

Suponhamos que A tem volume nulo, isto é, $\mu(A) = 0$. Assim, 1_A é integrável e $\int_A 1_A = 0$. Seja S retângulo contendo A. Seja $\varepsilon > 0$ e pela definição de $\int_A 1_A = 0$, temos que existe partição P tal que $S(1_A, P) < \varepsilon$.

Sejam $R_1, R_2, \ldots, R_m$ os retângulos desta partição que interceptam A; assim, $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i$.

Daí,

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(R_i) = \sum_{R \in P} (\sup_R 1_A) \mu(R) = S(1_A, P) < \varepsilon.$$

Reciprocamente suponhamos que dado $\varepsilon > 0$, existam retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_m$, cuja união contenha A e $\sum_{i=1}^{m} \mu(R_i) < \varepsilon$.

Seja S o retângulo contendo A . Seja P partição de S em retângulos $V_1, V_2, \ldots, V_N$ de modo que, cada V_i esteja contido em algum dos retângulos R_j ou no máximo intercepte algum dos R_j na fronteira, para $i = 1, 2, \ldots\ N$ e $j = 1, 2, \ldots\ m$.

Então,

$$S(1_A, P) = \sum_{i=1}^{N} \sup_{V_i} 1_A \mu(V_i) = \sum_{V_i \subset R_j} \sup_{V_i} 1_A \mu(V) = \sum \mu(R_i) < \varepsilon.$$

Daí, obtemos para todo $\varepsilon > 0$ que

$$0 \leq s(1_A, P) \leq S(1_A, P) < \varepsilon;$$

Isso nos diz que $S = \inf_P S(1_A, P) = 0$. Logo, $0 \leq s \leq S = 0$ e portanto S= s= 0.

Assim, 1_A é integrável e

$$\int_A 1_A = 0.$$

□

3.2 Conjuntos de medida nula

Definição 3.4 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, não necessariamente limitado. Diz- se que A tem medida nula, se dado $\varepsilon > 0$, existem retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_m$ (podendo serem infinitos), tais que:*

$$A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m \;\; e \;\; \sum_{m=1}^{\infty} \mu(R_m) < \varepsilon.$$

Observação 3.1 *Os retângulos R_m na definição de medida nula podem se sobrepor.*

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ com volume nulo, então do lema 3.1, concluimos que A tem medida nula.

Observação 3.2 *O conceito de* ***medida nula*** *depende do espaço onde se está trabalhando.*

3.3 Medida nula Vs Volume nulo

Que vantagem tem a medida nula sobre o volume nulo?

Note que se $A = \{x_0\} \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ fixo, então A tem volume e $\mu(A) = 0$.

De fato, seja B retângulo contendo A e seja P partição de B. note que :

$$s(1_A, P) = \sum_{R \in P} (\inf_R (1_A))\mu(R) = 0 \text{ e } S(1_A, P) = \sum_{R \in P} (\sup_R (1_A))\mu(R) = \sum_{R \in P} 1.\mu(R) < \frac{1}{n}$$

com $n \in \mathbb{N}$, se o retângulo inicial B foi tomado com $\mu(B) \leq \frac{1}{n}$.

Portanto,

$$0 \leq s(1_A, P) \leq \inf_P S(1_A, P) \leq \frac{1}{n}$$

e então s= S= 0.

Logo, 1_A é integrável e $\int_A 1_A = 0$.

Análogamente, se $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathbb{R}^n$, então A tem volume e é zero.

Agora, se A tem infinitos pontos, não necessariamente terá volume nulo pois veremos no exemplo 3.3 que $A = \mathbb{Q} \cap B$ não tem volume, ou seja, 1_A não é integrável.

A vantagem de medida nula segue do seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ de medida nula. Então, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ tem medida nula.*

Demonstração:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ de medida nula. Assim, como A_i tem medida nula, dado $\varepsilon > 0$, existem retângulos $R_1^i, R_2^i, \ldots, R_j^i, \ldots$ tais que

$$A_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j^i \quad \text{com} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_j^i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto vale para cada $i \in \mathbb{N}$, sabemos também que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j^i.$$

Notar que o volume total dos retângulos R_j^i é dado por:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(R_j^i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon,$$

e daí,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j^i \quad \text{é enumerável,}$$

de modo que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ tem medida nula.

$\square$

Na definição de conjuntos de medida nula, podemos trabalhar com retângulos abertos ou fechados. Como consequência , também podem ser mistos, ou seja, a definição para abertos ou fechados é equivalente.

Prova:

Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$. Suponhamos que existam retângulos abertos $V_1, V_2, \ldots, V_N, \ldots$ que cobrem A e $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) < \varepsilon$. Sejam $R_1 = \overline{V_1}, R_2 = \overline{V_2}, \ldots, R_N = \overline{V_N}, \ldots$ retângulos fechados do $\mathbb{R}^n$.

Note que

$$\mu(R_i) = \mu(\overline{V_i}) = \mu(V_i).$$

Assim,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) < \varepsilon.$$

Portanto, existem retângulos fechados que cobrem A, com volume total menor que ε.

Reciprocamente suponhamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ é tal que dado $\varepsilon > 0$, existam retângulos fechados $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ tais que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) < \varepsilon.$$

Queremos provar que isso também ocorre para retângulos abertos.

Então, seja $\varepsilon > 0$, e pela hipótese, para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2^N}$, onde $N = \dim \mathbb{R}^n$, existem retângulos fechados $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) < \frac{\varepsilon}{2^N}.$$

Para cada um destes retângulos R_i, escolhemos um retângulo V_i aberto que o contenha, e com lados de comprimento dobrado em relação aos lados do mesmo. Assim, $R_i \subset V_i$ implica que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

Por exemplo,

$$R_i = [a, b] \times [c, d] \text{ e } V_i = \left[a - \frac{b-a}{2}, b + \frac{b-a}{2}\right] \times \left[c - \frac{d-c}{2}, d + \frac{d-c}{2}\right].$$

Mas,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_I) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^N \mu(R_i) < 2^N \frac{\varepsilon}{2^N} = \varepsilon.$$

Donde para todo $\varepsilon > 0$, existem retângulos abertos V_i tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) < \varepsilon.$$

$\square$

Observação 3.3 *Seja $A = \{x_0\}, x_0 \in \mathbb{R}^n$, então A tem medida nula.*

Prova: Seja $\varepsilon > 0$. Seja R um retângulo centrado em x_0, com lado e comprimento iguais a $\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Portanto $A = \{x_0\} \subset R$ e

$$\mu(R) = \left(\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^n = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Isto nos diz que A tem medida nula.

$\square$

Aplicação do Teorema 3.1 e da Observação 3.3:

Todo conjunto enumerável, tem medida nula.

Justificativa:

De fato, se A é enumerável podemos escrevê-lo como união de conjuntos unitários de elementos de A, ou seja, $A = \bigcup_{x_i \in A} \{x_i\}$.

Exemplos: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ são enumeráveis e portanto tem medida nula.

Observações:

1) Seja $A \subset B,$ com $med(B) = 0$ então $med(A) = 0$.

Justificativa:

Pois os retângulos que cobrem B também cobrem A ($A \subset B$).

2) Seja $A \subset B$ e B com volume, então isso não implica que A tem volume.

Justificativa:

Basta tomar B=[0,1] e $A = \mathbb{Q}_{[0,1]}$, como no exemplo 3.4.

3.4 Exemplos

Exemplo 3.1 *Mostraremos que $A = \{x \in \mathbb{R}^2 / \|x\| = 1\}$ tem medida nula.*

Justificativa:

De fato, note que A pode ser escrito como: $A = A_1 \bigcup A_2$, onde A_1 é o gráfico da função $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ e A_2 é o gráfico de $f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Note também que f_1 e f_2 são uniformemente contínuas (contínuas num compacto). Seja $\varepsilon > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(x')\| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{se} \quad \|x - x'\| < \delta.$$

Seja também P partição regular de [-1,1] com $\|P\| < \delta$. Considere

$$R = \bigcup_{i=1}^{m} R_i \quad \text{e} \quad \triangle\, x = |x_i - x_{i-1}|, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Daí $A \subset R$.

Mas,

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(R_i) = \sum_{R_i} \triangle x.\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4} \underbrace{\sum \triangle x}_{=2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$A \subset A_1 \bigcup A_2 \subset R \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{m} \mu(R_i) = \varepsilon,$$

e portanto A tem medida nula.

♦

Exemplo 3.2 *Seja A um conjunto limitado de* $\mathbb{R}$*, sem volume, com* $A = \mathbb{I}_{[0,1]}$ *e*

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in A \\ 0, & se \quad x \notin A. \end{cases}$$

Então 1_A *não é Riemann integrável.*

Justificativa:

De fato, seja P partição de $B = A \subset [0,1]$, então

$$\begin{cases} S(1_A, P) = & 1, \quad \text{para todo } \ P \ \text{ partição} \\ s(1_A, P) = & 0 \end{cases}$$

Logo, $s < S$, e portanto 1_A não é Riemann integrável.

♦

Exemplo 3.3 *Seja* $A = \mathbb{Q} \cap B$*,* B *intervalo limitado de* $\mathbb{R}$*, então* A *não tem volume.*

Justificativa:

Seja $1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad x \in B \backslash A, \end{cases}$

e seja P partição de B=$\mathbb{R}$, então

$$\begin{cases} S(1_A, P) = & \mu(B), \quad \text{para todo } \; P \; \text{ partição} \\ s(1_A, P) = & 0 \end{cases}$$

Assim, $s = \sup s(f, P) \neq \inf S(f, P) = S$.

Logo, 1_A não é Riemann integrável.

♦

Exemplo 3.4 *Sejam $A = \mathbb{Q}_{[0,1]}$, B=[0,1] e $A \subset B$. Então A não tem volume.*

Justificativa:

Seja P partição de B, então

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad x \in A^c. \end{cases}$$

Portanto

$$\begin{cases} S(1_A, P) = & 1, \quad \text{para todo } \; P \; \text{ partição} \\ s(1_A, P) = & 0 \end{cases}.$$

Logo, 1_A não é Riemann integrável e consequentemente não tem volume.

♦

Exemplo 3.5 *$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ tem medida nula.*

Justificativa:

De fato, dado $\varepsilon > 0$, tomando para $m \in \mathbb{N}$

$$R_m = \left[m - \frac{\varepsilon}{2^{m+2}}, m + \frac{\varepsilon}{2^{m+2}} \right].$$

Então

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_m R_m \quad \text{e} \quad \sum_m \mu(R_m) = \sum_m \frac{2\varepsilon}{2^{m+2}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

♦

Exemplo 3.6 *Seja $A = \mathbb{R}$ considerado como um subconjunto do $\mathbb{R}^2$, então A tem medida nula, isto é, $A = \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\}$.*

Justificativa:

De fato, para $\varepsilon > 0$, tomando

$$R_i = [i, -i] \times \left[\frac{-\varepsilon}{2i2^{i+2}}, \frac{\varepsilon}{2i2^{i+2}}\right], i \in \mathbb{N},$$

obtemos

$$\mu(R_i) = 2i.\frac{2\varepsilon}{2i2^{i+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{i+1}},$$

e consequentemente

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Notamos que

$$\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \{0\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Logo, $med_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R}) = med_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$.

Daí, $med_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \neq 0$, pois se $\mathbb{R} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]$ então $\sum_{i=1}^{\infty} \mu([a_i, b_i]) = +\infty$.

♦

Exemplo 3.7 *A fronteira de um conjunto deve ter medida nula?*

Resposta:

Não, vejamos alguns exemplos:

- $\partial\mathbb{Q}_{[0,1]} = [0, 1]$ que não tem medida nula;
- $\partial\mathbb{I}_{[0,1]} = [0, 1]$ que também não tem medida nula;
- $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ que tem medida nula;
- $\partial[0, 1] = \{0, 1\}$ o conjunto não tem medida nula, porém a fronteira tem medida nula.

♦

Capítulo 4

Caracterização de funções integráveis

Este capítulo se refere a um dos mais importantes resultados na teoria de integração ele usa o conceito de medida nula e de oscilação de uma função. Em suma teorema de Lebesgue nos diz que se a medida do conjunto formado pelas descontinuidades da extensão por zero ao $\mathbb{R}^n$ da função f tiver medida nula, então a função f é Riemann integrável.

Apresentamos também as propriedades da integral, bem como o teorema do valor médio para integrais.

4.1 Teorema de Lebesgue

Quão regular deve ser uma função para ser Riemann- Integrável?

A resposta está no seguinte teorema:

Teorema 4.1 (Lebesgue) *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada com A limitado. Seja $\widetilde{f}$ a extensão por zero de f ao $\mathbb{R}^n$. Então f é Riemann- integrável se, e somente se, $\Upsilon(\widetilde{f})$ tem medida nula.*

Será útil na prova deste teorema saber quão "ruim"é uma descontinuidade de $\widetilde{f}$. Para isso, vamos precisar do conceito de oscilação de uma função.

Definição 4.1 *Seja $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a **oscilação** de h em x_0, denotada por $o(h, x_0)$ é definida da seguinte forma:*

$$o(h, x_0) = \inf_U \{ \sup_{x_1, x_2 \in U} |f(x_1) - f(x_2)| \},$$

onde o ínfimo é sobre todas as vizinhanças U de x_0.

Observação:

i) $o(h, x_0) \geq 0$;

ii) $o(h, x_0) = 0$ se, e somente se, h é contínua em x_0;

Justificativa:

De fato, h contínua em x_0 se,e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $U_\varepsilon = \text{Viz}(x_0)$ tal que $\sup\{|f(x) - f(x')|/x' \in U_\varepsilon\} < \varepsilon$, e isto é equivalente a $o(h, x_0) = 0$.

Demonstração do Teorema:

Seja B o retângulo que contém A. Temos

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f, & \text{sobre A;} \\ 0, & \text{sobre } A^c. \end{cases}$$

Observação: Fora de B, $\widetilde{f}$ não tem descontinuidades.

1^a **Etapa:**

Vamos agora provar a suficiência. Suponha que $\text{med}(\Upsilon(\widetilde{f})) = 0$. Provaremos que f é Riemann integrável. Seja $\varepsilon > 0$, e $D_\varepsilon = \{x \in B/o(\widetilde{f}, x) \geq \varepsilon\}$. Claro que $D_\varepsilon \subset \Upsilon(\widetilde{f})$. Logo, med($D_\varepsilon$)=0, pois $\text{med}(\Upsilon(\widetilde{f})) = 0$. Afirmação: D_ε é fechado.

De fato, Seja y ponto de acumulação de D_ε. Então toda vizinhança U de y contém algum ponto x_0 distinto de y, mas pertencente a D_ε. É claro então que essa vizinhança é também vizinhança de $x_0 \in D_\varepsilon$. Pela definição de D_ε,

$$\sup_{x_1, x_2 \in U} |\widetilde{f}(x_1) - \widetilde{f}(x_2)| \geq o(\widetilde{f}, x_0) \geq \varepsilon, \text{pois } \ x_0 \in D_\varepsilon. \tag{4.1}$$

Segue que 4.1 vale para toda vizinhança U de y. Logo,

$$\inf\{\sup_{x_1, x_2 \in U} |\widetilde{f}(x_1) - \widetilde{f}(x_2)| \geq \varepsilon\},$$

e portanto

$$o(\widetilde{f}, y) \geq \varepsilon \ \text{ e } \ y \in D_\varepsilon.$$

Isso implica que D_ε é fechado. Então, $D_\varepsilon \subset \Upsilon(\widetilde{f}) \subset B$ que é limitado, implica que D_ε é limitado. Logo, D_ε é compacto. Como med(D_ε)=0, então existem retângulos $R_1, R_2, \ldots$ de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$D_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(R_i) < \varepsilon.$$

Como D_ε é compacto, existem finitos retângulos que cobrem D_ε, digamos $R_1, R_2, \ldots, R_N$. Mas, certamente $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mu(R_i) < \varepsilon$. Seja P partição de B. Se necessário refinamos P de modo que cada retângulo esteja contido em alguns dos retângulos R_i (i=1,2, …, N), ou não intercepte

D_ε. Então os retângulos de P se dividem em grupos:

$G_1 = \{S \in P / S \subset R_i, i = 1, 2, \ldots, N\}$ e $G_2 = \{S \in P / S \cap D_\varepsilon = \emptyset\}$.

Notar que, para cada $S \in G_2$, a oscilação de $\widetilde{f}$ em S é menor que ε, isto é,

$$\inf_{U} \sup_{x_1, x_2 \in U} |\widetilde{f}(x_1) - \widetilde{f}(x_2)| < \varepsilon.$$

Logo, para cada $x \in S$, existe $U_x = viz(x)$ aberta, tal que

$$\sup_{U_x} \widetilde{f} - \inf_{U_x} \widetilde{f} < \varepsilon,$$

Claro que $S \subset \bigcup\limits_{x \in S} U_x$, e como S (retângulos fechados) é compacto, existem $x_1, x_2, \ldots, x_N$ pertencentes a S, tais que $S \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_{x_i}$.

Agora refinamos a partição P em S, de modo que cada novo retângulo de P esteja contido em alguma das vizinhanças $U_{x_i}(i = 1, 2, \ldots, M)$, e fazemos isso para cada $S \in G_2$, obtendo assim um nova partição P $(P = P_\varepsilon)$ tal que

$$S(\widetilde{f}, P) - s(\widetilde{f}, P) = \sum_{S \in P} \left(M_S \widetilde{f} - m_S \widetilde{f} \right) \mu(S)$$

$$= \sum_{S \in G_1} \underbrace{\left(M_S \widetilde{f} - m_S \widetilde{f} \right)}_{\leq 2M} \mu(S) + \sum_{S \in G_2} \underbrace{\left(M_S \widetilde{f} - m_S \widetilde{f} \right)}_{< \varepsilon} \mu(S)$$

$$< \sum_{S \in G_1} 2M\mu(S) + \sum_{S \in G_2} \varepsilon\mu(S) \leq 2M \sum_{S \in G_1} \mu(S) + \varepsilon\mu(B)$$

$$\leq 2M \sum_{i=1}^{N} \mu(R_i) + \varepsilon\mu(B) < \varepsilon(2M + \mu(B)).$$

Onde $M_S \widetilde{f} = \sup_{x \in S} f(x)$ e $m_S \widetilde{f} = \inf_{x \in S} f(x)$.

Isto é, dado $\varepsilon > 0$, usando o fato de que med($\Upsilon(\widetilde{f})$)=0, vimos que existe $P = P_\varepsilon$ partição de B retângulo contendo A, tal que

$$S(\widetilde{f}, P) - s(\widetilde{f}, P) < \varepsilon(2M + \mu(B)),$$

onde M é a constante que limita f. Do teorema de Riemann temos que $\widetilde{f}$ é integrável, isto é, f integrável.

2^a **Etapa:**

Vamos provar a necessidade. Suponhamos agora que f é Riemann integrável, queremos provar que med($\Upsilon(\widetilde{f})$)=0. Notar que , sendo B retângulo contendo A, tem- se $\Upsilon(\widetilde{f}) = \{x \in B/o(\widetilde{f}, x) > 0\}$. Notar também que $\Upsilon(\widetilde{f}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, onde $D_n = \{x \in B/o(\widetilde{f}, x) \geq \frac{1}{n}\}$.

Idéia: Tomando $n \in \mathbb{N}$, fixo mas arbitrário e provaremos que $med(D_n) = 0$. Para isto, tomaremos $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como f é integrável, pelo teorema de Riemann, existe $P = P_\varepsilon$ partição de B tal que: $S(\widetilde{f}, P) - s(\widetilde{f}, P) < \varepsilon$.

Note que:

$$D_n = \{x \in D_n/x \in \partial S, \text{ algum } S \in P\} \bigcup \{x \in D_n/x \in \; int(S), \text{ algum } S \in P\} = D_n^1 \bigcup D_n^2.$$

Donde med(D_n^1)=0, pois med(∂S)=0, se S é retângulo do $\mathbb{R}^n$; mostremos agora que D_n^2 tem medida nula. Seja

$$G = \{S \in P/\exists x \in D_n \text{ com } \; x \in int(S)\}.$$

Note que para cada $S \in G$, existe $x \in D_n$ tal que $x \in int(S)$ e $o(\widetilde{f}, x) \geq \frac{1}{n}$, tal que pela definição de oscilação $M_S\widetilde{f} - m_S\widetilde{f} \geq \frac{1}{n}$.

Logo,

$$\frac{1}{n}\sum_{S \in G} \mu(S) = \sum_{S \in G} \frac{1}{n}\mu(S) \leq \sum_{S \in G} (M_S\widetilde{f} - m_S\widetilde{f})\mu(S)$$

$$\leq \sum_{S \in P} (M_S\widetilde{f} - m_S\widetilde{f})\mu(S) = S(\widetilde{f}, P) - s(\widetilde{f}, P) < \varepsilon.$$

Então,$\sum_{S \in G} \mu(S) < n\varepsilon$ e, é claro que $D_n^2 \subset \bigcup_{S \in G} S$ implica $med(D_n^2) = 0$, e consequentemente, $\Upsilon(\widetilde{f}) = D_n^1 \bigcup D_n^2$ tem medida nula, para todo n.

Logo, $\Upsilon(\widetilde{f}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ tem medida nula.

□

4.2 Conjuntos com volume

Dizemos que um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^n$ tem volume (ou é Jordan mensurável) quando, tomando-se um bloco $B \subset \mathbb{R}^n$ que contenha A, a função característica $1_A : B \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável. Para A com volume, definimos seu volume como a integral da função característica

$$\mu(A) = \int_A 1_A(x)\, dx.$$

Como consequência do teorema de Lebesgue provaremos a seguir importantes resultados sobre conjuntos com volume.

Proposição 4.1 *$A \subset \mathbb{R}^n$ limitado, A tem volume se, e somente se, $med(\partial A) = 0$.*

Demonstração:

Por definição, A te volume se, e somente se, 1_A é integrável. Pelo teorema de Lebesgue 1_A é integrável se,e somente se, med($\Upsilon(1_A)$)=0. Então, basta provar que: $\Upsilon(1_A) = \partial A$.

De fato,

1. $x \in \partial A$ e se, para todo $U = viz(x)$ tem- se $U \cap A \neq \emptyset$ então, para todo $x_1 \in A \cap U$ e para todo $x_2 \in A^c \cap U$ temos: $1_A(x_1) - 1_A(x_2) = 1$ e então 1_A não é contínua em $x \in \partial A$ que implica $x \in \Upsilon(1_A)$. Portanto, $\partial A \subset \Upsilon(1_A)$.

2. 2) Seja $x \in \Upsilon(1_A)$ e suponha que x não pertença à ∂A.

   Logo, por definição de ∂A, existe U=viz(x) tal que $U \subset A$ ou $U \subset A^c$. Daí,

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad U \subset A \\ 0, & \text{se} \quad U \subset A^c \end{cases}$$

   de $x \in U$ que 1_A é constante em U ou seja, 1_A é contínua em x, isto diz que x não pertence a $\Upsilon(1_A)$. CONTRADIÇÃO!

   Logo, $\Upsilon(1_A) \subset \partial A$; por (1) e (2) $\Upsilon(1_A) = \partial A$.

$\square$

Proposição 4.2 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada, A limitado e com volume. Suponha que o conjunto das descontinuidades de f é finito ou enumerável. Então f é integrável.*

Demonstração:

Note que: $\Upsilon(\widetilde{f}) \subseteq \Upsilon(f) \bigcup \partial A$.

Como A tem volume então med(∂A)=0. Assim $\Upsilon(f)$ é finito ou enumerável e portanto $med(\Upsilon(f)) = 0$ e consequentemente $med(\Upsilon(\widetilde{f})) = 0$ do teorema de Lebesgue f é integrável.

$\square$

Note que nesta proposição não precisamos estender f para se ter a integrabilidade, pois a mesma depende das descontinuidades da extensão $\widetilde{f}$, não de f.

Teorema 4.2 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado com medida nula, e seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, limitada e integrável. Então $\int_A f = 0$.*

Demonstração:

Observe primeiro que um conjunto de medida nula não pode conter um retângulo do tipo: $R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n),\ a_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

De fato, sabemos que $R \subset B$ e med(B)=0 implica que med(R)=0, mas retângulos do tipo R não podem ter medida nula. Seja B retângulo contendo A, e seja $\widetilde{f}$ a extensão de f por zero ao retângulo B . Seja P partição de B em retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_N$. Temos que:

$$|f(x)| \leq M, \quad \text{para todo} \quad x \in A, \ \text{ e algum } \ M > 0.$$

Notemos que :

$$|\widetilde{f}(x)| = \begin{cases} |f(x)|, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad c, c. \end{cases} \leq \begin{cases} M, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad c, c. \end{cases}$$

$$\leq M \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad c, c. \end{cases} \leq M.1_A.$$

Daí,

$$s(\widetilde{f}, P) = \sum_{i=1}^{N} m_{R_i}(\widetilde{f})\mu(R_i) \leq \sum_{i=1}^{N} M m_{R_i}(1_A)\mu(R_i) = M \sum_{i=1}^{N} m_{R_i}(1_A)\mu(B). \tag{4.2}$$

Suponhamos, por um momento, que $m_{R_i}(1_A) \neq 0$ para algum i. Então, para esse i devemos ter:$R_i \subset A$. Mas, como A tem medida nula, isso não pode ocorrer conforme observamos no início.

Logo, $m_{R_i}(1_A) = 0, \quad$ para todo $\ i = 1, 2, \ldots, N$. Portanto, de 4.2, concluimos que $s(\widetilde{f}, P) \leq 0, \quad$ para todo $\ P$ partição de B. Agora, note que:

$$\sup_R(\widetilde{f}) = -\inf_R(\widetilde{f}).$$

Daí

$$\begin{aligned} S(\widetilde{f}, P) &= \sum_{i=1}^{N} M_{R_i}(\widetilde{f})\mu(R_i) = \sum_{i=1}^{N} -m_{R_i}(-\widetilde{f})\mu(R_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{N} m_{R_i}(-\widetilde{f})\mu(R_i) = -s(-\widetilde{f}, P). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como $s(\widetilde{f}, P) \leq 0, \quad$ para todo $\ P$ Partição de B (Pelo fato que med(A)=0), temos,
$s(-\widetilde{f}, P) \leq 0$, para todo P partição;
deste fato e de 4.3, segue que
$S(\widetilde{f}, P) \geq 0, \quad$ para todo $\ P$ partição.

Assim,

$$s(\widetilde{f},P) \leq 0 \leq S(\widetilde{f},P), \quad \text{para todo} \quad P \text{ partição de B} .$$

Logo,

$$\underline{\int_A} f = s = \sup_P s(\widetilde{f},P) \leq 0 \leq S = \inf_P S(\widetilde{f},P) = \overline{\int_A} f.$$

Mas, sendo f integrável, temos

$$\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f = \int_A f.$$

Daí,

$$\int_A f \leq 0 \leq \int_A f$$

resultando

$$\int_A f = 0.$$

□

Teorema 4.3 *Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável, f limitada e A limitado, suponha que $f \geq 0$ e que $\int_A f = 0$. Então: med($\{x \in A/f(x) > 0\}$)= med($\{x \in A/f(x) \neq 0\}$)=0.*

Demosntração:

As hipóteses são: $\begin{cases} A \text{ limitado}, \quad f \text{ limitada} \\ f \geq 0, \quad f \text{ integrável} \\ \int_A f = 0. \end{cases}$

Devemos provar que :

$$med\{x \in A/f(x) > 0\} = med\{x \in A/f(x) \neq 0\} = 0.$$

De fato, Seja D= $\{ x \in A/f(x) \neq 0 \}$.

Notar que

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m \ , \ \text{ onde } \ D_m = \{x \in A/f(x) \geq \frac{1}{m}\}.$$

Para provar que med(D)=0, basta provar que med(D_m)=0, para todo m. Para isto, seja $\varepsilon > 0$, como f é integrável com $\int_A f = 0$, então pela definição de integral, existe partição P=P_ε tal que

$$0 \leq S(f,P) < \frac{\varepsilon}{m}, \tag{4.4}$$

com $m \geq 1$ fixado arbitrariamente. Sejam $R_1, R_2, \ldots, R_k$, os retângulos da partição P que interceptam D_m. Claro que

$$D_m \subset \bigcup_{i=1}^{k} R_i \subset \bigcup_{R \in P} R = B.$$

B retângulo onde $A \subset B$. Mas, para o m fixado:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(R_i) = \sum_{i=1}^{k} m \frac{1}{m} \mu(R_i).$$

Lembremos que $f(x) \geq \dfrac{1}{m}$, $x \in D_m$.

Daí,

$$\sup_{R_i}(f) \geq \frac{1}{m}, \text{ onde } 1 \leq i \leq k.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(R_i) = \sum_{i=1}^{k} m \frac{1}{m} \mu(R_i) \leq \sum_{i=1}^{k} m \sup_{R_i}(f) \leq m \sum_{R \in P} \sup(f) \mu(R),$$

e portanto,

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(R_i) \leq mS(f, P) < m \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

Donde

$$D_m \subset \bigcup_{i=1}^{k} R_i \text{ e } \sum_{i=1}^{k} \mu(R_i) < \varepsilon,$$

isto nos diz que D_m tem volume nulo e então D_m tem medida nula, ou seja, med(D)=0.

$\square$

4.3 Propriedades da integral

Teorema 4.4 *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ limitados, seja $\alpha \in \mathbb{R}$, e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis limitadas. Então:*

(i) f+g é integrável e

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g;$$

(ii) αf é integrável e

$$\int_A (\alpha f) = \alpha \int_A f;$$

(iii) Se $f \leq g$, então $\int_A f \leq \int_A g$;

(iv) $|f|$ é integrável e

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|;$$

(v) Se A tem volume e $|f| \leq M$, então

$$\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq M\mu(A);$$

(vi) Se A compacto e conexo com volume e f contínua, então existe $x_0 \in A$ tal que

$$\int_A f = f(x_0)\mu(A).$$

Este é chamado ***Teorema do valor médio para integrais****.*

E se $\mu(A)$ for diferente de zero, temos a média de f: $\overline{f} = \dfrac{\int_A f}{\mu(A)}$.

(vii) Suponha que $f : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável. Supor também que $med(A \cap B) = 0$. Suponha além disso que $f|_A$, $f|_B$ e $f|_{A\cap B}$ são integráveis. Então

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Demonstrações:

(i) Usa-se o teorema de Darboux para provar este item com f, g como no enunciado e $\dfrac{\varepsilon}{2}$ ao invés de ε em seguida usa-se a desigualdade triangular.

(ii) A demonstração segue usando-se o teorema de Darboux com $\dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}$, α difrente de 0.

(iii) $f \leq g$ implica em $\int_A f \leq \int_A g$ com f e g integráveis.

De fato! Seja B retângulo com $A \subset B$. Como f e g são integráveis

$$\int_A f \leq \inf_P S(f,P) \leq \inf_P S(f,P) = \int_A g.$$

(iv)Como por hipótese f é integrável. Mostrar $|f|$ integrável e $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.

Para isso, note que se f é contínua em $x \in A$, então $|f|$ também é contínua nesse x. Logo, $\Upsilon(|f|) \subset \Upsilon(f)$. Assim, $\Upsilon(|\widetilde{f}|) \subset \Upsilon(\widetilde{f})$. Mas f é integrável, e pelo teorema de Lebesgue a medida de $\Upsilon(\widetilde{f}) = 0$ e $\Upsilon(|\widetilde{f}|)$ tem medida nula. Portanto $|f|$ é integrável, usando então (ii) e (iii) segue que $|f|$ é integrável.

Agora vejamos que

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

implica

$$-\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f|$$

e consequentemente

$$\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|.$$

(v) Seja A com volume, limitado e $|f| \leq M$.

Mostraremos que

$$\left|\int_A\right| \leq \int_A |f| \leq M\mu(A).$$

Claro que $|f|$ é integrável e $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$, por (iv) temos que:

$$|\widetilde{f}| \leq \begin{cases} M, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad x \in A^c. \end{cases} = M \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad x \in A^c. \end{cases} = M1_A.$$

Como A tem volume, 1_A é integrável e de (ii) segue que $M1_A$ é integrável, portanto

$$|\widetilde{f}| \leq M1_A \text{ de (iii) segue que } \int_A |f| \leq \int_A M1_A \overset{(ii)}{=} M \int_A 1_A = M\mu(A).$$

(vi)**Teorema do valor médio para integrais [TVMI]**

Seja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, A compacto e conexo, e f contínua.

Pelas hipóteses sobre f e A, sabemos que:

$$\begin{cases} \text{existe} \;\; x_1 \in A, \;\; \text{tal que} \;\; f(x_1) = \inf_A f(x) \\ \text{existe} \;\; x_2 \in A, \;\; \text{tal que} \;\; f(x_2) = \sup_A f(x). \end{cases}$$

Seja $\lambda = \dfrac{\int_A f}{\mu(A)}$, se $\mu(A)$ é diferente de 0. Se $\mu(A) = 0$, o TVMI vale trivialmente:

$$0 < \left| \int_A f \right| \leq \int_A |f| \leq \mu(A) = 0.$$

Então temos por (v)

$$f(x_1) = m \leq \lambda \leq M = f(x_2).$$

Como f é contínua e A é conexo, pelo teorema do valor intermediário (Espaço métrico): existe $x_0 \in A$ tal que $\lambda = f(x_0)$, isto é, $f(x_0)\mu(A) = \int_A f$.

(vii) Temos por hipótese $f : A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$, A e B limitados, med($A \cap B$)=0 e $f|_A, f|_b$ e $f|_{A\cap B}$ integráveis.

Segue da definição que: $\displaystyle\int_A f = \int_A f|_A$. Sejam: $f_1 = f.1_A, f_2 = f.1_B$ e $f_3 = f.1_{A\cap B}$; assim, f_1, f_2 e f_3 são integráveis e

$$\int_{A\cup B} f_1 = \int_{A\cup B} f.1_A = \int_A f|_A = \int_A f$$

$$\int_{A\cup B} f_2 = \int_{A\cup B} f.1_B = \int_B f|_B = \int_B f$$

$$\int_{A\cup B} f_3 = \int_{A\cup B} f.1_{A\cap B} = \int_{A\cap B} f$$

Note que: $f = f_1 + f_2 - f_3$, e como são integráveis segue de (i) que f é integrável e

$$\int_{A\cup B} f = \int_{A\cup B} f_1 + \int_{A\cup B} f_2 - \int_{A\cup B} f_3$$

$$= \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f.$$

E do fato que $med(a \cap B) = 0$, temos

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

□

4.4 Exemplos

Exemplo 4.1 *Seja* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, se* $med(\Upsilon(f)) = 0$*, então* f *é integrável.*

Justificativa:

Segue diretamente das proposições anteriores.

♦

Exemplo 4.2 *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$ *limitado com volume. Seja* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e limitada. Então* f *é Riemann integrável.*

Justificativa:

Segue da proposição 4.2.

♦

Exemplo 4.3 *Seja* $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}_{[0,1]}, f(x) \equiv 1,$ *para todo* $x \in A$ *e* $\Upsilon(f) = \emptyset$*, mas* $\partial A = [0, 1]$ *então* ∂A *não tem medida nula.*

Justificativa:

Logo, a proposição 4.2 não garante a integrabilidade de f. De fato, para integrar devemos trabalhar com

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q}_{[0,1]} \\ 0, & \text{se} \quad c, c. \end{cases}$$

E a função de Dirichlet não é integrável.

♦

Exemplo 4.4 *Seja* $f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in [0,1] \\ 3-x, & se \quad x \in (1,2]. \end{cases}$ *, então f é integrável.*

Justificativa: Note que $\Upsilon(\widetilde{f}) = \{0,1,2\}$ tem volume nulo. Mas, A=[0,2] é limitado e f é limitada, segue então, pelo teorema de Lebesgue que f é integrável.

♦

Exemplo 4.5 *Seja* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$*, onde* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ *e*
$f(x) = \begin{cases} x^2 + \ sen\left(\frac{1}{y}\right), & se \quad y \neq 0 \\ x^2, & c.c \end{cases}$ *. Então f é integrável.*

Justificativa:

Seja $\widetilde{f}$ a extensão por zero.

Note que $\Upsilon(\widetilde{f}) \subseteq \{(x,0)/-1 < x < 1\} \cup \partial A = G$. Daí, se med(G)=0, então $med(\Upsilon(\widetilde{f})) = 0$, e pelo teorema de Lebesgue, f é integrável.

♦

Exemplo 4.6 *Mostraremos que a função característica do conjunto de Cantor é Riemann integrável.*

Justificativa:

De fato, seja E_i^c o complementar de E_i no intervalo $[0,1]$, para $i \in \mathbb{N}$. Seja $E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, então $\text{med}(E_1^c) = \dfrac{1}{3}$, e seja
$E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$, então $\text{med}(E_2^c) = 2\left(\dfrac{1}{9}\right)$.

Assim, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{med}(E_i^c) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}.\frac{1}{\frac{1}{3}} = 1$$

Seja $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ o conjunto de Cantor e $E^c = [0,1] \backslash E$.

Seja 1_C a função característica do conjunto de Cantor. Note que o conjunto das descontinuidades da função característica no conjunto de Cantor é o próprio conjunto de Cantor, e como med(E^c)=1, então como consequência do teorema de Lebesgue, med(E)=0, e portanto a função característica é Riemann integrável.

♦

Capítulo 5

Integrais Impróprias

Nos capítulos precedentes estudamos a integração de uma função limitada com domínio limitada. A integração de funções não limitadas ou com domínios não limitados é chamado integração imprópria e ela é feita como limite de integrais ordinárias, isto é, integrais de funções limitadas sobre domínios limitados.

A integração imprópria tem muita utilidade no estudo de convergência de séries infinitas e por isso desenvolvemos neste capítulo um breve estudo a este respeito.

5.1 Integrais impróprias

- Para uma função $f : A = [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ em geral definimos:

$$\int_A f = \int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f$$

  se esse limite existir.

- Para $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ se define:

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f$$

  se esse limite existir.

- Para $f : (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos:

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^\infty f = \lim_{a\to -\infty} \int_a^0 f + \lim_{b\to +\infty} \int_0^b f.$$

Definição 5.1 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada, e $f \geq 0$ sobre A e A não limitado. Suponhamos que f seja integrável sobre cada cubo $[-a,a]^n \subset \mathbb{R}^n, a > 0$.*

Então, definimos:

$$\int_A f = \lim_{a \to +\infty} \int_{[-a,a]^n} f \tag{5.1}$$

se esse limite existir.

Se o limite em* 5.1 *existir e for finito diz-se que f é integrável sobre A.

Observação 5.1 *Observamos que f está definida apenas sobre $[-a,a]^n \cap A$. Para a integração de f sobre $B = [-a,a]^n$, naturalmente, consideramos a extensão por zero de f a $[-a,a]^n \backslash A$.*

Teorema 5.1 (Teste da Comparação) *Sejam f e g limitadas com domínio em $A \subset \mathbb{R}^n$ e imagem em $\mathbb{R}$, com $0 \leq g \leq f$. Supor que f é integrável sobre A e que g é integrável sobre cada cubo $[-a,a]^n$.*

Então g é integrável e $\int_A g \leq \int_A f$.

Demonstração:

Notemos que como $g \leq f$ temos

$$0 \leq \int_{[-a,a]^n} g \leq \int_{[-a,a]^n} f \leq \int_A f, \forall \;\; a > 0.$$

Assim, a sequência $\displaystyle\int_{[-a,a]^n} g$ é crescente em $\mathbb{R}$ e limitada superiormente por $\int_A f \in \mathbb{R}^+$.

Logo, $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_{[-a,a]^n} g$ existe.

Isso diz que g é integrável e

$$\int_A g \leq \int_A f.$$

$\square$

Exemplo 5.1 *Existem funções limitadas f e g com domínio em $A \subset \mathbb{R}^n$ e imagem em $\mathbb{R}$ tais que $0 \leq g \leq f$. com f integrável e g não integrável. Como por exemplo*

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}, & se \quad x \in \mathbb{I}^+ \\ 0, & se \quad x \in \mathbb{Q}^+ \end{cases} \quad e \; f(x) = e^{-x}, \;\; se \;\; x \geq 0.$$

♦

Definição 5.2 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, f não limitada e A posssivelmente não limitado.*

Para cada $M > 0$ definir a função:

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq f(x) \leq M \\ M, & f(x) > M. \end{cases}$$

Suponhamos que para cada M, f_M integrável.

Então definimos

$$\int_A f = \lim_{M \longrightarrow \infty} \int_A f_M,$$

se esse limite existir. Se for finito, dizemos que f é integrável.

Teorema 5.2 (Teorema da Comparação) *Sejam g e f funções com domínio em $A \subset \mathbb{R}^n$ e imagem em $\mathbb{R}$. Suponhamos que $0 \leq g \leq f$ com f integrável. Suponhamos que para cada $M > 0$, g_M é integrável.*

Então g é integrável e $\displaystyle\int_A g \leq \int_A f$.

Demonstração:

Análoga ao caso de A não limitado, f e g limitadas.

□

Definição 5.3 *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ não necessariamente positiva, A não necessariamente limitado.*

Seja $f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0. \end{cases}$ *e* $f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geq 0. \end{cases}$

A função f_+ é a parte positiva de f e a função f_- é a parte negativa de f. Notamos que f= $f_+ - f_-$.

Dizemos que f é integrável (no sentido impróprio) se f_+ e f_- forem integráveis.

Nesse caso, definimos então $\displaystyle\int_A f = \int_A f_+ - \int_A f_-$.

Teorema 5.3 *Seja $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ contínua e F primitiva de f. Então f integrável se, e somente se, $\lim_{x\to\infty} F(x)$ existir e for finito.*

A prova deste teorema á feita usando-se o teorema fundamental do cálculo.

Teorema 5.4 *Seja $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, $f \geq 0$, e $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$. Então f integrável se, e somente se, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f$ existir e for finito.*

A prova deste teorema segue usando-se a definição de integral imprópria para uma função não limitada, dada acima.

5.2 Convergência condicional

Seja $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ existir dizemos que a integral $\displaystyle\int_a^{\infty} f$ é condicionalmente convergente.

Observação 5.2 *A definição para integral imprópria de uma função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é a convergência absoluta, que trata com f_+ e f_-.*

Exemplo 5.2 *Seja $f : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, então $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ pode ser tratada nos dois sentidos.*

Por exemplo, seja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x}, & se \ \neq 0 \\ 1, & se \ x = 0. \end{cases}$$

Note que seu domínio é $\mathbb{R}$, não limitado.

Calculamos:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{sen(x)}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{1}{x}\cos(x)\right)_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}dx\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\cos(b)}{b} + \cos(1)\right) - \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\cos(x)dx$$

$$= \cos(1) - \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\cos(x)dx.$$

E esse limite existe, pois para $b > 1$:

$$\left|\int_1^b \frac{cos(x)}{x^2}dx\right| \leq \int_1^b \left|\frac{cos(x)}{x^2}\right| dx$$

$$\leq \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b} < 1, \ \text{ para todo } b > 1.$$

Logo, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{sen(x)}{x}dx$ é condicionalmente convergente, mas não é absolutamente convergente, pois:

$$\int_1^{\infty} \frac{|sen(x)|}{x}dx \geq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|sen(x)|}{x}dx, \ n \geq 1$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|sen(x)|}{x}dx \geq \sum_{k=2}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|sen(x)|}{k\pi}dx$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |sen(x)|dx = \sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}, \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\int_1^{\infty} \frac{|sen(x)|}{x} dx = \infty.$$

Do mesmo modo vê-se que $\displaystyle\int_1^{\infty} f_+ = +\infty$. Assim, $\int_1^{\infty} \frac{sen(x)}{x} dx$ não é (absolutamente) convergente.

♦

5.3 Teorema da convergência monótona de Lebesgue

Teorema 5.5 *Sejam $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis, para n natural, não necessariamente limitadas. Suponhamos que $g_n \geq 0$ e $g_{n+1} \leq g_n$, para todo n.*

Suponhamos também que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$, para todo $x \in [0,1]$ (pontualmente).

Então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\, dx = 0$.

Observação: Vale também para [a,b] em intervalo qualquer de $\mathbb{R}$.

Para demonstrar este teorema precisamos do seguinte lema:

Lema 5.1 *Seja $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável com $|f(x)| \leq M$, $x \in [0,1]$, e $\displaystyle\int_0^1 f \geq \alpha > 0$. Então para α fixo, $E = \{x \in [0,1]/f(x) \geq \frac{\alpha}{2}\}$ contém uma união finita de intervalos de comprimento total $l \geq \dfrac{\alpha}{4M}$.*

Demonstração:

Como f é integrável então para $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$ existe partição P de $[0,1]$ tal que

Seja P aprtição de [0,1] tal que

$$\int_0^1 f - s(f,P) \leq \frac{\alpha}{4}.$$

Daí,

$$\alpha - s(f,P) \leq \int_0^1 f - s(f,P) \leq \frac{\alpha}{4},$$

implica que

$$\alpha - s(f,P) \leq \frac{\alpha}{4}.$$

Consequentemente

$$s(f,P) \geq \frac{3\alpha}{4}.$$

Sejam $D = \{R \in P/R \in E\}$ e l o comprimento total dos retângulos em D.

Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{3\alpha}{4} &\leq s(f,P) = \sum_{R\in D} \inf_R (f)\mu(R) + \sum_{\substack{R\in P\\ R\notin D}} \inf_R (f)\mu(R) \\
&\leq \sum_{R\in D} M\mu(R) + \sum_{\substack{R\in P\\ R\notin D}} \frac{\alpha}{2}\mu(R) \\
&= Ml + \frac{\alpha}{2}(1-l) \leq Ml + \frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\frac{3\alpha}{4} \leq Ml + \frac{\alpha}{2}$$

implica em

$$\frac{\alpha}{4} = \frac{3\alpha}{4} - \frac{2\alpha}{2} \leq Ml,$$

e portanto,

$$l \geq \frac{\alpha}{4M}.$$

E assim provamos o Lema.

$\square$

Prova do teorema:

Temos $g_{n+1} \leq g_n \leq g_1$, para todo n.

Como g_n integrável, temos:

$$0 \leq \int_0^1 g_{n+1} \leq \int_0^1 g_n \leq \int_0^1 g_1$$

pois $g_n \geq 0$, para todo n.

Assim, $x_n = \displaystyle\int_0^1 g_n$ é uma sequência em $\mathbb{R}$, monótona decrescente e limitada por 0 inferiormente e por $\displaystyle\int_0^1 g_1$ superiormente. Assim, x_n é convergente.

Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$, pois a sequência não negativa, tal que

$$\int_0^1 g_n = x_n \longrightarrow \lambda.$$

Objetivo: Mostrar que $\lambda = 0$.

Suponhamos por contradição que $\lambda > 0$. Queremos usar o lema, mas não podemos usar o mesmo para g_n, pois ela pode não ser limitada.

Para $M > 0$, seja

$$g_{n_M}(x) = \begin{cases} g_n(x), & g_n(x) \leq M \\ M, & g_n(x) > M. \end{cases}$$

Notemos que

$$\int_0^1 (g_n - g_{n_M}) \leq \int_0^1 (g_1 - g_{1_M}).$$

Seja $M > \dfrac{2\lambda}{5}$ tal que

$$\int_0^1 (g_1 - g_{1_M}) \leq \frac{\lambda}{5},$$

e tal M pode ser tomado pois

$$\int_0^1 g_{1_M} \text{ converge para } \int_0^1 g_1.$$

Daí, para esse M tem- se que

$$0 \leq \int_0^1 (g_n - g_{n_M}) \leq \int_0^1 (g_1 - g_{1_M} \leq \frac{\lambda}{5}.$$

Isso implica que

$$\lambda - \int_0^1 g_{n_M} \leq \int_0^1 (g_n - g_{n_M}) \leq \frac{\lambda}{5}.$$

Pois $\displaystyle\int_0^1 g_n = x_n \longrightarrow \lambda.$

Consequentemente

$$\lambda - \frac{\lambda}{5} = \frac{4\lambda}{5} \leq \int_0^1 g_{n_M},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e para $M \geq \frac{2\lambda}{5}$.

Isto é,

$$\int_0^1 g_{n_M} \geq \frac{4\lambda}{5} = \alpha > 0$$

e isso vale para qualquer $M \geq \dfrac{2\lambda}{5}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Então, pelo lema, para cada n:

$E_n = \{x \in [0,1]/g_{n_M} \geq \frac{2\lambda}{5}\}$ contém uma união finita de intervalos de comprimento total $l \geq \frac{\alpha}{4M} = \frac{\lambda}{5M}$, pois $0 \leq g_{n_M} \leq M$, para todo n, com $M \geq \dfrac{2\lambda}{5}$. Notemos que $E_{n+1} \subset E_n$, pois

$$0 g_{n+1_M} \leq g_{n_M}, \text{ já que } \leq g_{n+1} \leq g_n, \forall\, n.$$

definimos $D = \cup_{n=1}^{\infty}\{x \in [0,1]/g_{n_M}$ é descontínua em x $\}$.

Então med(D)=0 e portanto existe uma união U de retângulos abertos, que contém D, com comprimento total menor que $\varepsilon = \frac{\lambda}{5M}$.

É claro então que $E_n \not\subset U$, para todo n. Seja x_0 um ponto de acumulação de E_n, com $x_0 \notin E_n$. Então g_{n_M} é descontínua em x_0. De fato, x_0 é um ponto de acumulação de E_n, então existe sequência (x_k) em E_n tal que (x_k) converge para x_0. Mas,

$$g_{n_M}(x_k) \geq \frac{2\lambda}{5}, \text{ para todo } k.$$

Daí, se g_{n_M} fosse contínua em x_0, teríamos que ter

$$g_{n_M}(x_0) \geq \frac{2\lambda}{5},$$

e isto diria que x_0 está em E_n, o que nos contradiz.

Logo, $x_0 \in D \subset U$. Assim, $\overline{E_n} \subset E_n \bigcup U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $F_n = \overline{E_n} \backslash U$. Assim F_n é fechado, e também é limitado, pois $F_n \subset [0,1]$. Donde F_n é compacto, e $F_{n+1} \subset F_n$, pois $E_{n+1} \subset E_n$, para todo n. Com isso obtemos uma sequência de conjuntos compactos e encaixados, donde $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Logo, existe $x \in \cap_{n=1}^{\infty} E_n$, com $x \in [0,1]$, e portanto $x \in E_n$, para todo n, e pela definição de E_n resulta que ,

$$g_{n_M}(x) \geq \frac{2\lambda}{5}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$g_n(x) \geq g_{n_M}(x) \geq \frac{2\lambda}{5},$$

para todo n, e consequentemente

$$g_n(x) \geq \frac{2\lambda}{5}, \text{ para todo } n.$$

Isto nos diz que $g_n(x)$ não converge para 0, o que contradiz a hipótese. Esta contradição veio da suposição que $\lambda > 0$. Portanto, $\lambda = 0$,isto é,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n.$$

□

Corolário 5.1 *Sejam $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Suponhamos que (f_n) converge pontualmente para f em [0,1]. Suponhamos também que* $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f.$$

Demonstração:

Tomemos $g_n = f - f_n$, então $g_n \geq 0$ e $g_{n+1} \leq g_n$. Da hipótese que f_n converge pontualmente para f temos que g_n converge pontualmente para 0 em [0,1]. Notemos que se f e f_n são integráveis, g_n também será integrável para todo n.

Então, podemos aplicar o teorema da convergência monótona de Lebesgue para a sequência (g_n). Assim,

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f - f_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 f - \int_0^1 f_n \right) \text{ e portanto } \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f.$$

□

Corolário 5.2 *Seja* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \geq 0$*. Suponhamos que* $\displaystyle\int_0^1 f^2$ *existe. Então*

$$\int_0^1 (f - f_n)^2 \text{ converge para } 0.$$

Demonstração:

Definimos $g_n = (f - f_n)^2$, com n natural e $f_n = \begin{cases} f, & |f(x)| \leq n \\ n, & |f(x)| \geq n. \end{cases}$

Daí, é claro que $g_n \longrightarrow 0$ pontualmente em [0,1], $g_{n+1} \leq g_n$ e g_n's são integráveis, o que resulta, pelo teorema da convergência monótona em

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n = 0,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f - f_n)^2 = 0.$$

□

Teorema 5.6 *Sejam* $f_k : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções limitadas e integráveis para todo* k*. Suponhamos que* f_k *converge uniformemente para* f *em* $\mathbb{R}$*. Sendo* $R = [a,b] \times [c,d]$*. Então* f *é integrável e*

$$\int_R f = \lim_{k\to\infty} \int_R f_k.$$

Demonstração:

(i) f é limitada.

De fato, Dado $\varepsilon = 1$, existe N tal que

$$|f_k(x,y) - f(x,y)| < 1$$

se $k \geq N$, para todo $(x,y) \in R$ pois f_k converge uniformemente para f.

Em particular para k=N, temos

$$|f(x,y)| < 1 + M = \widetilde{M}, \text{ para todo } (x,y) \in R$$

onde M é a constante que limita f_N.

Isso implica que f é limitada.

(ii) Vamos provar que $\displaystyle\int_R f_k(x,y)\,dx\,dy$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Como f_k converge uniformemente para f, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que

$$|f_k(x,y) - f_l(x,y)| < \frac{\varepsilon}{\mu(R)}, \text{ se } k,l \geq N, \quad \text{para todo } (x,y) \in R,$$

(f_k converge uniformemente para f, implica que f_k é de Cauchy) . Portanto,

$$\left|\int_R f_k(x,y) - \int_R f_l(x,y)\right| = \left|\int_R (f_k - f_l)\right|$$

$$\leq \int_R |f_k(x,y) - f_l(x,y)| dxdy \leq \int_R \frac{\varepsilon}{\mu(R)} dxdy$$

$$\frac{\varepsilon}{\mu(R)} \int_R dxdy = \varepsilon, \text{ se } k,l \geq N.$$

$$\text{Assim, } \left(\int_R f_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ é sequência de Cauchy em } \mathbb{R}.$$

$$\text{Então existe } I \text{ em } \mathbb{R} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} \int_R f_k = I.$$

Seja $\varepsilon > 0$, então existe N tal que:

$$\left|\int_R f_k - I\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ se } k \geq N. \tag{5.2}$$

Também existe N_1 tal que:

$$|f_k(x,y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(R)}, \text{ se } k \geq N_1, \text{ para todo } (x,y) \in R, \tag{5.3}$$

pois $f_n \longrightarrow f$ uniformemente. Seja $N_2 = \max\{N, N_1\}$.

Como f_{N_2} é integrável, pelo teorema de Darboux, existe $\delta > 0$ de modo que se P é partição com $\|P\| < \delta$, Então

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n,m} f_{N_2}(\overline{x_i}, \overline{x_j}) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x_i} \underbrace{(y_{j+1} - y_j)}_{\Delta y_j} - \int_R f_{N_2}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para qualquer escolha de $\overline{x_i} \in [x_i, x_{i+1}]$ e $\overline{y_j} \in [y_j, y_{j+1}]$.

Agora, pela desigualdade triangular, para P partição e $\|P\| < \delta$:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\overline{x_i}, \overline{x_j})\Delta x_i \Delta y_j - I\right| \\
&\leq \left|\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\overline{x_i}, \overline{x_j})\Delta x_i \Delta y_j - \sum_{i,j=1}^{n,m} f_{N_2}(\overline{x_i}, \overline{x_j})\Delta x_i \Delta y_j\right| \\
&+ \left|\sum_{i,j=1}^{n,m} f_{N_2}(\overline{x_i}, \overline{x_j})\Delta x_i \Delta y_j - \int_R f_{N_2}\right| + \left|\int_R f_{N_2} - I\right| \\
&< \sum_{i,j=1}^{n,m} |f(\overline{x_i}, \overline{x_j}) - f_{N_2}(\overline{x_i}, \overline{x_j})|\Delta x_i \Delta y_j + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \frac{\varepsilon}{3\mu(R)} \sum_{i,j=1}^{n,m} \Delta x_i \Delta y_j + \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3\mu(R)}\mu(R) + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se P é partição qualquer com $\|P\| < \delta$, de R, então,

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n,m} f(\overline{x_i}, \overline{x_j})\Delta x_i \Delta y_j - I\right| < \varepsilon$$

para qualquer escolha de $(\overline{x_i}, \overline{y_j}) \in [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ e pelo teorema de Darboux, f é Riemann- integrável, com $\displaystyle\int_R f = I = \lim_{n\to\infty} \int_R f_k$.

$\square$

5.4 Aplicações

Aplicação 5.1 *Calcular* $I = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-nx^2} x^p dx.$

Resposta: I=0.

De fato, isso pode ser justificado com o teorema da convergência monótona. Seja $g_n(x) = e^{-nx^2}x^p,\ 0 < x \leq 1$. Claro que g_n é contínua e integrável em (0,1] se $p > -1$.

Notemos que

$$g_n(x) = e^{-nx^2}x^p \geq e^{-(n+1)x^2}x^p = g_{n+1}(x),$$

e que $g_n(x) \geq 0$, para todo x. Logo, $0 \leq g_{n+1} \leq g_n$ e assim g_n é sequência monótona decrescente. Para cada $x \in (0,1] : g_n(x)$ converge para 0 quando n tende para ∞, isto é, $g_n \longrightarrow 0$ pontualmente em (0,1]. Isso também vale para x=0, já que $g_n(0) = 0,\ \forall\ n$. Portanto, (g_n) atende as hipóteses do teorema da convergência monótona e

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-nx^2} x^p dx = 0.$$

♦

Aplicação 5.2 *Sejam* $g_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}$ *funções integráveis. Suponhamos que* $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *é também integrável. Então*

$$\int_0^1 g = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 g_n.$$

Justificativa:

Seja $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$. Claro que f_n é integrável para todo n, e

$$\int_0^1 f_n = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 g_k,$$

como $g_k \geq 0$, para todo k, temos $f_n \leq f_{n+1}$ resultando que f_n é sequência monótona crescente, com f_n convergindo para g. Como g é integrável por hipótese, então f_n e g atendem as hipóteses do corolário 5.1 do teorema da convergência monótona.

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 g,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 g_k = \int_0^1 g$$

existe.

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 g_k = \int_0^1 g.$$

♦

Aplicação 5.3 *Seja* (a_i) *uma sequência estritamente decrescente, para* $i = 1, 2, \ldots,\ a_i \geq 0$, *com* a_i *convergindo para* 0, *e* $a_1 = 1$. *Seja* f_i *sequência de números reais não negativos, e seja* $f(x) = f_i$, *para* $x \in (a_{i+1}, a_i]$. *Então* f *é "função escada", com possivelmente infinitos degraus.*

Suponhamos que f é integrável. É claro que isso ocorre se a sequência de números reais (f_i) *for limitada, nesse caso f será limitada. Por exemplo, se* $f_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$, *também f será integrável.*

Afirmação:
$\int_0^1 f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(a_i - a_{i+1})$.

Justificativa da afirmação :

definimos

$$g_n(x) = \begin{cases} f, & \text{se } x \in (a_n, 1] \\ 0, & \text{se } x \in [0, a_n]. \end{cases}$$

Notar que g_n é sequência monótona crescente, $g_n \geq 0$, para todo n. Claro que g_n é integrável, para todo n e

$$\int_0^1 g_n = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(a_i - a_{i+1}).$$

Também é certo que g_n converge para f e assim valem as hipóteses do corolário 5.1 para g_n e f.

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n = \int_0^1 f,$$

isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i(a_i - a_{i+1}) \right) = \int_0^1 f.$$

Consequentemente

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(a_i - a_{i+1}) = \int_0^1 f.$$

♦

Capítulo 6

Teorema de Fubini

Este teorema refere-se a mudança na ordem de integração, que dependendo da função e da região de integração, pode facilitar o calculo da integral. Por exemplo, como calcular:
$\int_A f(x,y)\,dx\,dy$, se $A = [0,1] \times [0,1]$ e $f(x,y) = (x+y)x$?
Usualmente fazemos da seguinte maneira:

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)xdxdy$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + yx)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + y\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2} \right) dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{4} \right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

Mas, se por exemplo, A for o seguinte triângulo:

$$A = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases},$$

se calcula $\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy.$
Isso é justificado pelo teorema de Fubini.

6.1 Teorema de Fubini

Teorema 6.1 (Teorema de Fubini) *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^n,\ B \subset \mathbb{R}^m$ *retângulos.*

Seja $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ *limitada e integrável. Para cada* $x \in A$*, definimos a função* $f_x : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *por* $f_x(y) = f(x,y)$*.*

Suponhamos que f_x *é integrável para cada* x *em* A*.*

Então $\displaystyle\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f_x(y)\, dy\right) dx.$
Do mesmo modo, se a função $f_y : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *for integrável para cada* y *em* B*, então* $\displaystyle\int_{A\times B} f = \int_B \left(\int_A f_y(x) dx\right) dy.$

Demonstração:

Hipóteses: $A \subset \mathbb{R}^n,\ B \subset \mathbb{R}^m$ retângulos, $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada e integrável. Para cada $x \in A$, $f_x\ : B \longrightarrow \mathbb{R}$, que leva y em f(x,y), é integrável.

Provaremos que

$$\int_{A\times B} f = \int_A \left(\int_B f_x(y) dy\right) dx.$$

Para simplificar a notação na prova, vamos supor que $A, B \subset \mathbb{R}$ $(n = m = 1)$, isto é, $A = [a,b], B = [c,d],\ a < b,\ c < d$. seja $g(x) = \displaystyle\int_B f_x(y)\, dy$.

Sejam P_A partição de $[a,b]$, na forma $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ e P_B partição de $[c,d]$ na forma $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$, isto é, $P_A = \{[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n\}$ e $P_B = \{[y_{i-1}, y_i], i = 1, 2, \ldots, m\}$. Chamaremos $R = A \times B$ o domínio de f. Claro que R é retângulo de $\mathbb{R}^2$. Seja P_R a partição de R, cujos retângulos saõ dados por $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$. Chamamos V_i os retângulos de P_A e de W_i os retângulos de P_B.

Calculemos agora

$$\begin{aligned} s(f, P_R) &= \sum_{R_{ij} \in P_R} m_{R_{ij}}(f)\mu(R_{ij}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n,m} m_{R_{ij}}(f)\mu(V_i)\mu(W_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} m_{R_{ij}}(f)\mu(W_i)\right)\mu(V_i). \end{aligned}$$

Notar que $m_{R_{ij}}(f) \leq m_{W_j}(f_x)$ para cada x em V_i.

Daí,

$$s(f, P_R) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} m_{R_{ij}}(f)\mu(W_i)\right)\mu(V_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(s(f_x, P_B)\right)\mu(V_i).$$

Mas f_x, por hipótese é integrável para todo $x \in A$. Então

$$s(f_x, P_B) \leq \int_c^d f_x(y) dy = g(x), \text{ para todo } x \in A.$$

Donde,

$$s(f, P_R) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(s(f_x, P_B)\right)_{x \in V_i}\mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{n} g\,(x)_{x\in V_i}\,\mu(V_i),$$

de modo que

$$s(f, P_R) \leq \sum_{i=1}^{n} m_{V_i}(g)\mu(V_i) = s(g, P_A)$$

resultando assim,

$$s(f, P_R) \leq s(g, P_A).$$

Analogamente, mostramos que

$$S(f, P_R) \geq S(g, P_A),$$

Isto é,

$$s(f, P_R) \leq s(g, P_A) \leq S(g, P_A) \leq S(f, P_R).$$

Como f é integrável sobre R, então devemos ter g integrável e:

$$\int_{A\times B} f = \int_A g = \inf_{P=P_A} \{S(f, P)\} = \sup_{P=P_A} \{s(f, P)\}.$$

Portanto,

$$\int_{A\times B} f = \int_R f = \int_A g = \int_A \left(\int_B f_x\right) = \int_A \left(\int_B f\right).$$

□

Se $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e A não for um retângulo, mas apenas um conjunto limitado, também podemos usar Fubini. Para isso tomamos um retângulo R que contenha Ω. Podemos então escrever $R = A \times B,\ A \subset \mathbb{R}^{n-m},\ B \subset \mathbb{R}^m,\ m < n$, com A e B retângulos. Daí, definimos f sobre R, por zero fora de Ω. Devemos tomar cuidado, que nesse caso podem ser desenvolvidas descontinuidades para f sobre $\partial\Omega$. Se $\partial\Omega$ for, por exemplo, delimitada por um número finito de gráficos de funções contínuas, não haverá esse problema.

Corolário 6.1 *O teorema de Fubini é válido se $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e limitada.*

Demonstração:

Segue do teorema de Lebesgue, que função contínua e limitada é integrável, sobre retângulos finitos.

□

Corolário 6.2 *Sejam φ e ψ funções com domínio em $[a,b]$ e imagem em $\mathbb{R}$, contínuas com $\varphi \leq \psi$.*

seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Suponhamos que f é integrável sobre A, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada. Suponhamos também que para cada $x \in [a,b]$ a função $f_x : [\varphi(x), \psi(x)] \longrightarrow \mathbb{R}$, que leva y de seu domínio em $f(x,y)$ nos reais, é integrável. Então

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Demonstração:

Notemos que se f é integrável, então $\Upsilon(f)$ tem medida nula. Mas ∂A tem medida nula de modo que $graf(\varphi)$ e $graf(\psi)$ têm medida nula, pois são funções uniformemente contínuas. Portanto $med(\Upsilon(\widetilde{f})) = 0$ e $\widetilde{f}$ integrável sobre R retângulo contendo A. Como f_x é integrável sobre $[\varphi(x), \psi(x)]$ implica que $\widetilde{f_x}$ é integrável sobre $[c,d]$ contendo $[\varphi(x), \psi(x)]$ e assim podemos usar o teorema de Fubini.

$$\int_A f = \int_A \widetilde{f} = \int_a^b \left(\int_c^d \widetilde{f_x} \right)$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

□

Exemplo 6.1 *Calcular o volume do tetraedro de vértices:* $(a,0,0), (0,b,0), (0,0,c)$.

Resolução:

Temos o plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ como limitante para o tetraedro, e que sua projeção no plano XY é dada pela região $R = \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b\left(1 - \frac{x}{a}\right). \end{cases}$

Para $z = f(x,y) = c\left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)$, teremos que o volume do tetraedro é dado por:

$$V = \int_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^a \left(\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy \right) dx.$$

Calculando essa integral iterada se obtém que

$$V = \frac{abc}{6}.$$

♦

Capítulo 7

Mudança de variável em integrais

Uma mudança de variáveis adequada, às vezes, ajuda a simplificar o cálculo de uma integral no $\mathbb{R}^n$. Mas para isso é necessário transformar a região de integração em uma região mais simples geometricamente.

Alguns exemplos de mudanças de variáveis como: coordenadas polares, cilíndricas e esféricas serão apresentados neste capítulo. Aqui Jg indica o determinante jacobiano da função g.

7.1 Mudança de variáveis

Teorema 7.1 (Mudança de variável) *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ conjunto limitado com volume, seja $g : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injetiva de classe C^1. Suponhamos que $(Jg)(x) \neq 0$, para todo $x \in A$. Supor que $J(g(x))$ e $J(g(x))^{-1}$ funções limitadas para $x \in A$.*

Suponhamos também que $g(A)$ tem volume. Seja $f : B = g(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada e integrável.

Então $(f \circ g)|J(g)|$ é integrável sobre A e $\displaystyle\int_A (f \circ g)J(g) = \int_{g(A)} f$, isto é,

$$\int_{g(A)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_A f(g(x_1, \ldots, x_n))|J(g(x_1, \ldots, x_n))|\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int_A f(g(x_1, \ldots, x_n)) \left| \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| dx_1 \ldots dx_n.,$$

sendo g_i as componentes da função g.

Usaremos o seguinte lema para provarmos este teorema:

Lema 7.1 *Seja* $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *transformação linear e* $A \subset \mathbb{R}^n$ *conjunto limitado com volume.*

Então $L(A)$ *tem volume e* $\mu(L(A)) = |\det(L)|\mu(A)$.

Demonstração: Etapa 1:

Caso especial onde A é um retângulo e L é a transformação linear dada por uma matriz fundamental: $L_i,\ (i = 1, 2)$ onde

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & c & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 1 \end{bmatrix},\ c \in \mathbb{R} \text{ e } L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ & \vdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & \ddots & & \\ 0 & & & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para analisar a atuação de uma matriz do tipo L_2 sobre um retângulo R, basta ver atuação de L_2 sobre a face do retângulo que está no plano X_iX_j, onde (i,j), $i > j$ é a única entrada da matriz L_2 que é 1 fora da diagonal.

Então um retângulo $R = [a_1, b_1] \times [a_2 \times b_2]$ é transformado por L_2 no paralelogramo de vértices: $(a_1 + a_2, a_2), (a_2 + b_1, a_2), (a_1 + b_2, b_2)$ e $(b_1 + b_2, b_2)$, se $b_1 - a_1 < b_2 - a_2$.

Se $b_1 - a_1 > b_2 - a_2$, então R é transformado num paralelogramo de vértices: $(a_1 + a_2, a_2), (a_1 + b_2, b_2), (b_1 + a_2, a_2)$ e $(b_1 + b_2, b_2)$.

Em ambos os casos vê-se que $\mu(L_2(R)) = \mu(R)$.

Portanto, como $det(L_2) = 1$, temos

$$\mu(L_2(R)) = |det(L_2)|\mu(R),$$

para qualquer retângulo R de $\mathbb{R}^n$.

Notemos que se $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, então
$L_1(S) = [a_1, b_1] \times \ldots \times [ca_i, cb_i] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \ldots \times [a_n, b_n]$, sendo que c é o elemento a_{ii} da matriz L_1.

Daí, $L_1(S)$ tem volume e

$$\mu(L_1(S)) = (b_1 - a_1) \cdots |c|(b_i - a_i)(b_{i+1} - a_{i+1}) \cdots (b_n - a_n)$$

$$= |c|\mu(S) = |\det(L_1)|\mu(S).$$

A seguir apresentaremos um exemplo da atuação de L_2 sobre um retângulo $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Supor que

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$L_2(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}.$$

Etapa 2:

Seja A um conjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$ limitado, e que tenha volume.

Afirmação: $L_i(A)$ tem volume e $\mu(L_i(A)) = |\det(L_i)|\mu(A)$, sendo L_i matriz fundamental do tipo L_1 ou L_2.

Prova da afirmação: Suponhamos que $\det(L_i) \neq 0$. Seja B retângulo contendo A. Como 1_A é integrável (A tem volume), existe para $\varepsilon > 0$ dado, partição $P = P_\varepsilon$ de B tal que

$$S(1_A, P) - \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2|\det(L_i)|}$$

$$\mu(A) - s(1_A, P) < \frac{\varepsilon}{2|\det(L_i)|}.$$

Sejam $V_\varepsilon = \bigcup\limits_{\substack{R \in P \\ R \subset A}} R$ e $W_\varepsilon = \bigcup\limits_{\substack{R \in P \\ R \cap A \neq \emptyset}} R$, consequentemente $V_\varepsilon \subset W_\varepsilon$.

Calculamos assim

$$\mu(L_i(V_\varepsilon)) = \mu_{\substack{R \in P \\ R \subset A}}(L_i(R))$$

$$= \sum_{\substack{R \in P \\ R \subset A}} |\det(L_i)|\mu(R) = |\det(L_i)| \sum_{\substack{R \in P \\ R \subset A}} \mu(R)$$

$$= |\det(L_i)| \sum_{\substack{R \in P \\ R \subset A}} (\inf_R 1_A)\mu(R) = |\det(L_i)| s(1_A, P)$$

e

$$\mu(L_i(W_\varepsilon)) = \mu_{\substack{R \in P \\ R \cap A \neq \emptyset}}(L_i(R))$$

$$= \sum_{\substack{R\in P\\ R\cap A\neq\emptyset}} |\det(L_i)|\mu(R) = |\det(L_i)| \sum_{\substack{R\in P\\ R\cap A\neq\emptyset}} \mu(R)$$

$$= |\det(L_i)| \sum_{\substack{R\in P\\ R\cap A\neq\emptyset}} (\sup_R 1_A)\mu(R) = |\det(L_i)|S(1_A, P)$$

Daí,

$$\mu(L_i(W_\varepsilon)) - \mu(L_i(V_\varepsilon)) =$$

$$= |\det(L_i)|S(1_A, P) - |\det(L_i)|s(1_A, P)$$

$$= |\det(L_i)|(S(1_A, P) - s(1_A, P))$$

$$= |\det(L_i)|\,[(S(1_A, P) - \mu(A)) + (\mu(A) - s(1_A, P))]$$

$$< |\det(L_i)| \left[\frac{\varepsilon}{2|\det(L_i)|} + \frac{\varepsilon}{2|\det(L_i)|}\right] = \varepsilon.$$

Seja $F = \{L_i(R)/R \in P,\ R\cap A \neq \emptyset \text{ e } R \not\subset A\}$, isto é, $F = \{L_i(W_\varepsilon) - L_i(V_\varepsilon)\}$. Notemos que

$$L_i(\partial A) \subset \bigcup_{L_i(R)\in F} L_i(R),$$

o que implica que F é finito.

No entanto,

$$\sum_{L_i(R)\in F} \mu(L_i(R)) = \mu(L_i(W_\varepsilon)) - \mu(L_i(V_\varepsilon)) < \varepsilon,$$

de modo que:

- $L_i(\partial A)$ está contida em uma união de retângulos com volume total menor que ε, para todo $\varepsilon > 0$;
- $L_i(\partial A)$ tem medida zero;
- $L_i(\partial A) = \partial(L_i(A))$ tem medida nula;

Portanto, pelas proposições do teorema de Lebesgue segue que $L_i(A)$ tem volume.

Também temos que $\mu(L_i(W_\varepsilon)) = |\det(L_i)|(S(1_A, P),$ para todo P partição de B retângulo que contenha A, daí pelo fato que 1_A é integrável

$$\mu(L_i(A)) = |\det(L_i)|\mu(A).$$

Etapa 3: Caso geral

- A limitado do $\mathbb{R}^n$ com volume
- L transformação linear

Usamos o fato que existem $L_1, L_2, \ldots, L_N$ matrizes fundamentais tais que

$$L = L_1 L_2 \ldots L_N A$$

Onde cada $L_i,\ (i = 1, 2, \ldots, N)$ é do tipo L_1 ou L_2. Daí por indução, L(A) tem volume e

$$\mu(L(A)) = |\det(L_1)||\det(L_2)|\ldots|\det(L_N)|\mu(A).$$

Portanto,

$$\mu(L(A)) = |\det(L)|\mu(A).$$

Logo, o lema está demonstrado.

□

Demonstração intuitiva do Teorema 7.1**:**

Se L for aplicação linear afim, isto é, $Lx = \widetilde{L}x + b,\ b \in \mathbb{R}^n,\ \widetilde{L}$ linear, então também $\mu(L(A)) = |\det(L)|\mu(A)$. Seja P partição de R retângulo contendo A. Seja $S \in P$, suponhamos $\|P\| < \delta$ para algum δ pequeno. Então a função $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, injetiva de classe C^1 é tal que $g|_S$ é uma aproximação linear afim $\widetilde{g}$, para $S \cap A \neq \emptyset$.

De fato, Se $x_0 \in S \cap A$, podemos tomar $\widetilde{g} = g(x_0) + Dg(x_0)$, isto é, $\widetilde{g}(h) = g(x_0) + Dg(x_0)h,\ h \in \mathbb{R}^n$, então $g(S) \cong \widetilde{g}(S),\ S \in P,\ S \cap A \neq \emptyset$.

Daí,

$$\mu(g(S)) \cong \mu(\widetilde{g}(S)) = |\det(\widetilde{g})|\mu(S)$$

$$= J(g(x_0))\mu(S),\ x_0 \in S \cap A,$$

pois S é um retângulo e $\widetilde{g}$ é linear.

Portanto,

$$\sum_{\substack{S\in P\\ S\cap A\neq\emptyset\\ y_0\in g(S)}} f(y_0)\mu(g(S)) \cong \sum_{\substack{S\in P\\ S\cap A\neq\emptyset\\ x_0=g^{-1}(y_0)}} f(y_0)|J(g(x_0))|\mu(S)$$

$$= \sum_{\substack{S\in P\\ S\cap A\neq\emptyset\\ x_0\in S}} f(g(x_0))|J(g(x_0))|\mu(S)$$

Isto é,

$$\sum_{\substack{S\in P\\ S\cap A\neq\emptyset\\ y_0\in g(S)}} f(y_0)\mu(S) \cong \sum_{\substack{S\in P\\ S\cap A\neq\emptyset\\ x_0=g^{-1}(y_0)\in S}} f(g(x_0))|J(g(x_0))|\mu(g(S)).$$

A aproximação acima melhora se δ diminuir. Mas se $\|P\|$ converge para 0, ocorre que

$$\sum_{\substack{S\in P\\ y_0\in g(S)}} f(y_0)\mu(g(S)) \text{ converge para } \int_{g(A)} f,$$

e também

$$\sum_{\substack{S\in P\\ x_0\in S}} f(g(x_0))|J(g(x_0))|\mu(S) \text{ converge para } \int_A (f\circ g)J(g)$$

se $\|P\|$ converge para 0.

Portanto,

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f\circ g)|J(g)|.$$

$\square$

Exemplo 7.1 *Seja R a região do plano $\mathbb{R}^2$ que está no 1^0 quadrante e é limitada pelas curvas:* $\begin{cases} xy=1, & xy=3\\ xy^2=4, & xy^2=1\end{cases}$. *Calcular* $I=\displaystyle\int\int_R xy\,dx\,dy.$

Resolução:

Para calcular I, usaremos o teorema 7.1, onde faremos a seguinte mudança de variáveis $(x,y)\longmapsto(u,v)$, onde escolhemos $u=xy$ e $v=xy^2$.

Pelo teorema 7.1: $\displaystyle\int_{R=g(A)} f(x,y) = \int_A (f\circ g)|J(g)|.$

Precisamos inverter a mudança

$$\begin{cases} u=xy\\ v=xy^2\end{cases},$$

obtendo assim, $y = \frac{v}{u}$ e $x = \dfrac{u^2}{v}$.

Calculemos agora J(g):

$$J(g) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{2}{v} - \frac{1}{v} = \frac{1}{v}.$$

Claro que g é injetiva e C^1 em uma região limitada no interior do 1^0 quadrante do plano UV. Também aí $J(g) \neq 0,\ J(g)$ e $J(g)^{-1}$ são limitados em qualquer conjunto limitado do interior desse quadrante.

Assim podemos aplicar o teorema 7.1 para $g^{-1} : R \longrightarrow R' = [1,3]_u \times [1,4]_v$.

Daí,

$$\int_{R=g(R')} xy\ dx\ dy = \int_{R'} (f \circ g) J(g)$$

$$\int_{[1,3]\times[1,4]} u \left|\frac{1}{v}\right|\ du\ dv = \int_1^3 \int_1^4 \frac{u}{v}\ dv\ du$$

$$= \int_1^3 u \log v|_1^4\ du = \int_1^3 u(\log 4 - \log 1)\ du$$

$$= \left(\frac{u^2}{2}\bigg|_1^3\right) \log 4 = \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) \log 4 = 4 \log 4.$$

♦

Vejamos a seguir algumas clássicas mudançãs de variáveis:

7.1.1 Coordenadas Polares

Nesta seção descreveremos o sistema de coordenadas introduzido por Newton, chamado sistema de coordenadas polares, que é conveniente para muitos propósitos.

A função que faz a transformação de coordenadas polares para coordenadas retangulares é dada por:

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r\mathrm{sen}\theta).$$

O Jacobiano é dado da seguinte forma

$$Jg(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r\mathrm{sen}\theta \\ \mathrm{sen}\theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r\mathrm{sen}^2\theta = r.$$

Se g é definida no conjunto $\{(r, \theta)/r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\}$, então $Jg(r, \theta)$ nunca é zero e g é injetiva neste conjunto.

Exemplo 7.2 *Calcule $\int\int_B sen(x^2+y^2)\,dx\,dy$, onde B é o semicírculo $x^2+y^2 \leq 1,\ y \geq 0$.*

Resolução:

Façamos a mudança de variável

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\mathrm{sen}\theta \end{cases} ; \qquad dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta.$$

Para que um ponto S permaneça no semicírculo B é suficiente que θ pertença ao intervalo $[0,\pi]$ e ρ ao intervalo $[0,1]$. Quando o ponto (ρ,θ) descrever o retângulo R=$\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2/0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$, o ponto S descreverá o semicírculo B.

Temos então:

$$\int\int_B \mathrm{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy \;= \int\int_R \mathrm{sen}\rho^2.\rho\,d\rho\,d\theta = \int\int_R \rho\mathrm{sen}\rho^2\,d\rho\,d\theta.$$

Como

$$\int\int_R \rho\mathrm{sen}\rho^2\,d\rho\,d\theta = \int_0^\pi \left[\int_0^1 \rho\mathrm{sen}\rho^2\,d\rho\right] d\theta = \pi\left[-\frac{1}{2}\cos\rho^2\right]_0^1$$

resulta

$$\int\int_B \mathrm{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy \;= \frac{\pi}{2}(1-\cos 1).$$

♦

7.1.2 Coordenadas Cilíndricas

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r,θ,z) , onde r e θ são coordenadas polares da projeção de P sobre o plano XY e z é a distância direta do plano XY ao ponto P.

A função que faz a transformação de coordenadas cilíndricas para coordenadas retangulares é dada por:

$$h(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta, z).$$

O Jacobiano é dado da seguinte forma

$$Jh(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\mathrm{sen}\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Se h é definida no conjunto $\{(r,\theta,z)/r>0,\ 0<\theta<2\pi,\ z\in\mathbb{R}\}$, então $Jh(r,\theta,z)$ nunca é zero e h é injetiva neste conjunto.

Exemplo 7.3 *Calcule* $\int_R ze^{-x^2-y^2}$*, onde* R *é o cilindro* $x^2+y^2\leq 1, 0\leq z\leq 1$.

Resolução:

Neste caso temos que

$$\begin{cases} 0\leq z\leq 1\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\\ 0\leq r\leq 1\end{cases};\qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

E portanto

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 ze^{-r}r\,dr\,d\theta\,dz = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1}).$$

♦

7.1.3 Coordenadas Esféricas

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto Q no espaço tridimensional é representado pela tripla ordenada (r,φ,θ) , a função que faz a transformação de coordenadas esféricas para coordenadas retangulares é dada por:

$$\phi(r,\varphi,\theta) = (r\text{sen}\varphi\cos\theta, r\text{sen}\varphi\text{sen}\theta, r\cos\varphi).$$

O Jacobiano é dado da seguinte forma

$$J\phi(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \text{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\text{sen}\varphi\text{sen}\theta\\ \text{sen}\varphi\text{sen}\theta & r\cos\varphi\text{sen}\theta & r\text{sen}\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\text{sen}\varphi & 0\end{vmatrix} = r^2\text{sen}\varphi.$$

Se ϕ é definida no conjunto $\{(r,\varphi,\theta)/r>0,\ 0<\theta<2\pi,\ 0<\varphi<\pi\}$, então $J\phi(r,\theta,z)$ nunca é zero e ϕ é injetiva neste conjunto.

Exemplo 7.4 *Integrar a função* $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ *sobre o conjunto* $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2<1\}$.

Resolução:

O conjunto B é a imagem de $A=\{(r,\varphi,\theta)/0<r<1,\ 0<\theta<2\pi,$
$0<\varphi<\pi\}$, sob g (exeto para os pontos de B sobre o plano XZ onde $x\geq 0$).

Portanto,

$$\int_B (x^2+y^2+z^2)dx\ dy\ dz = \int_A r^2.r^2 \operatorname{sen}\varphi\ dr\ d\varphi\ d\theta,$$

Desde que $\operatorname{sen}\varphi > 0$ na região relevante, Nossa integral será

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^4 \operatorname{sen}\varphi\ dr\ d\varphi\ d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{5}\ d\varphi\ d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} 2\ d\theta = \frac{4\pi}{5}.$$

♦

Referências Bibliográficas

[1] MARSDEN, Jerrold E., HOFFMAN, Michael J., *Elementary Classical Analysis*, 2nd ed, W.H. Freeman and Company, New York, 1993.

[2] PEREIRA, Maria Elita. *Uma generalização da Integral de Riemann.* Florianópolis, 1999. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina.

[3] RUDIN, Walter. *Principios de análise matemática.* Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico: Brasília: Universidade de Brasília, 1971.

[4] LIMA, Elon Lages. *Análise no espaço* $\mathbb{R}^n$. Brasília: Ed. Univ. de Brasília; São Paulo: Blucher, 1970.

[5] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise.*Vol. 2. 9. ed. [Rio de Janeiro]: IMPA, 1999- v. ISBN 85-244-0047-1

[6] STEWART, James. *Calculus.* 4th ed Pacific Grove: Brooks/Cole, 1999. ISBN 0-534-35949-3

[7] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Análise* . Brasília: Ed. Universidade Brasília; Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1975.

[8] HOING, Chaim Samuel. *A integral de Lebesgue e suas aplicações.* Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[9] BURKILL, J. C. (John Charles). *The Lebesgue integral.* Cambridge: Cambridge University Press, 1951. ISBN 0521043824.

[10] SIMMONS, George Finlay. *Cálculo com geometria analítica.* São Paulo: McGraw-Hill, c1987. v.

[11] WHEEDEN, Richard L; ZYGMUND, Antoni. *Measure and integral: an introduction to real analysis.* New York; Basel: Marcel Dekker, c1977. ISBN 0824764994.

[12] BOYER, Carl B.*História da matemática.* São Paulo: E. Blucher, 1974.