UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS HUMANAS

Fernando Tadeu Franceschi Moraes

ESTRUTURAS E A ANÁLISE FILOSÓFICA DAS TEORIAS CIENTÍFICAS

Florianópolis

2011

Fernando Tadeu Franceschi Moraes

ESTRUTURAS E A ANÁLISE FILOSÓFICA DAS TEORIAS CIENTÍFICAS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia para a obtenção do Grau de Mestre em Filosofia.
Orientador: Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa

Florianópolis

2011

Fernando Tadeu Franceschi Moraes

ESTRUTURAS E A ANÁLISE FILOSÓFICA DAS TEORIAS CIENTÍFICAS

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Filosofia", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Filosofia.

Florianópolis, 21 de março 2011.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa
Presidente

Prof. Dr. Décio Krause

Prof. Dr. Antônio Mariano Nogueira Coelho

Prof. Dr. Adonai Schulp Sant'Anna

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Newton da Costa pela orientação e pelo exemplo. Sua postura ante os mistérios da física, da matemática e da lógica é profundamente inspiradora e marcante.

Agradeço ao professor Décio Krause por ter sido praticamente um segundo orientador. Também sou grato pelos conselhos, profissionais e pessoais, e pelo incentivo.

Agradeço ao professor Antônio Coelho por algumas das melhores aulas que tive na vida. Sua ajuda na correção de alguns capítulos foi fundamental neste trabalho.

Agradeço ao amigo Jonas Becker pela inspiradora convivência nesses últimos anos, e pela ajuda e discussão em tantas idéias.

Agradeço aos meus pais pelo apoio incondicional em tudo até hoje.

Agradeço à Denise por trazer mais luz e cor à minha vida.

Lutar com palavras
é a luta mais vã.
Entanto lutamos
mal rompe a manhã.

Carlos Drummond de Andrade

RESUMO

A noção de estrutura tem aplicação em diversos campos do conhecimento, notadamente na matemática, na lógica e na filosofia da ciência. Na matemática, o trabalho do coletivo francês Bourbaki evidenciou o aspecto estrutural da matemática buscando, por intermédio deste conceito, uma sistematização de praticamente toda a matemática pura. No campo da lógica, estruturas específicas fornecem uma semântica à linguagens formais. Na filosofia da ciência, ela faz parte da resposta de alguns filósofos à questão da natureza das teorias científicas.
Nesta dissertação, tratamos o tema das estruturas a partir do trabalho realizado por Newton da Costa e Alexandre Rodrigues e desenvolvemos uma abordagem das linguagens formais baseada na definição de estrutura proposta por esses pesquisadores. Em seguida, discutimos a relação de alguns dos chamados métodos formais com a filosofia da ciência, principalmente no que tange à análise filosófica das teorias científicas, e nos fixamos sobre a chamada abordagem semântica, que busca compreender as teorias científicas através do conceito de modelo que, no sentido que empregamos neste trabalho, está vinculado à noção de estrutura matemática. Ademais, como mostramos, a axiomatização de teorias científicas pode ser enxergada de maneiras alternativas, dependendo das ferramentas que utilizamos para tal fim. Apontamos que, deste fato, podemos compreender de maneiras distintas a idéia de modelo, e que varia também a quantidade de classes de estruturas que podemos axiomatizar. Por fim, tratamos da relação entre os modelos empregados na prática científica e os modelos no contexto da matemática e na lógica.
Palavras-chave: estruturas, abordagem semântica, método axiomático, modelos

ABSTRACT

The notion of structure is useful in several fields of knowledge, mostly in mathematics, logic and in the philosophy of science. In mathematics, Bourbaki's work emphasized the structural aspect of mathematics, seeking from this concept a base for pure mathematics. In the field of logic, specific structures give a semantic to formal languages. In the philosophy of science, it is part of the answer from some philosophers to the question of the nature of scientific theories.
In this thesis, we consider the notion of structure from the point of view of the ideas developed by Newton da Costa and Alexandre Rodrigues, and we develop an approach to formal languages based on the definition of structure put forward by them. After that, we discuss the relationship between formal methods and the philosophy of science, and we fix ourselves on the so called semantic approach, according to which we can understand scientific theories through the concept of model, which in this work is linked to the notion of mathematical structure. Moreover, as we argue, the axiomatization of scientific theories can be seen in two different ways, according to the tools we use to axiomatize them. We point out that from this fact we can understand in distinct ways the concept of model and we can axiomatize a different number of classes of structures. Finally, we discuss the relationship between the models employed in the scientific practice and the models employed in the fields of mathematics and logic.
Keywords: Structures, semantic approach, axiomatic method, models

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A idéia de estrutura matemática desempenha, desde o século passado, importante papel em várias áreas do conhecimento. Se modernamente, o conceito de estrutura pode ser identificado com o trabalho do coletivo francês Bourbaki[1], uma idéia não-formal de estrutura permeia a matemática, em geral de modo implícito, desde há algum tempo. Mas foi decididamente no século XX que essa idéia tomou corpo e forma na matemática e chegou a disseminar-se para outras áreas. Podemos situar em 1930, com o influente livro *Moderne Algebre* do matemático alemão van der Waerden, o início dessa trajetória. Sua abordagem à álgebra é baseada no reconhecimento de que certas noções como grupos, anéis, ideais, corpos etc são, na verdade, realizações de uma mesma idéia que subjaz a todas elas, a saber, a de estrutura algébrica, e o objetivo da pesquisa em álgebra se resume na total elucidação dessas noções (Corry 2001; para um trabalho amplo sobre o surgimento e estabelecimento do conceito de estrutura na matemática, ver Corry 1996). Ainda que todos esses conceitos já fossem conhecidos pelos matemáticos da época, van der Waarden adotou uma abordagem única para definir e estudar cada um deles, dando uma unidade a conceitos que eram vistos como apenas vagamente relacionados, o que configurou enorme inovação. Mas como dito, não há nome mais associado ao conceito de estrutura do que o de Bourbaki, que a partir de 1939 iniciou a publicação de um tratado composto por vários volumes chamado *Éléments de mathématique*, que abarca praticamente todas as principais áreas da matemática pura. A principal inspiração para o trabalho do grupo francês foi o modelo proposto pelo livro de álgebra de van der Waerden. De fato, o projeto de Bourbaki em sua totalidade pode ser definido como uma tentativa de estender para toda a matemática a abordagem dispensada à algebra em *Moderne Algebra*, a saber, o reconhecimento de que os diversos campos da matemática como a álgebra, a topologia, a análise funcional etc., são realizações de uma mesma idéia subjacente a todas elas: a de estrutura matemática. O projeto bourbakista buscou apresentar uma visão unificada do que o grupo via como sendo as principais áreas da matemática, a partir de um sistema de notação comum, propondo questões semel-

[1] Nicolas Bourbaki é o pseudônimo de um grupo de matemáticos, principalmente franceses, que formaram um grupo a partir de 1935 tendo como objetivo redigir um tratado sobre os alicerces da análise matemática. Os membros que fundaram o grupo foram: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, André Weil, Jean Coulomb, Charles Ehresmann, Szolem Mandelbrojt e René de Possel.

hantes aos vários campos investigados e utilizando técnicas e métodos similares em domínios matemáticos aparentemente distantes (ibid.).

A ascensão da abordagem estruturalista na matemática possui como reflexo a consolidação do método axiomático, de sorte que podemos considerá-lo como a característica fundamental desta abordagem. É sintomático disso o fato de que van der Waerden tenha apresentado as teorias algébricas em seu livro de uma maneira totalmente abstrata e axiomática, como nenhuma outra exposição tão abrangente da álgebra fizera antes (ibid.). O filósofo Jaakko Hintikka expressou-se assim, em recente artigo:

> *"[T]he structuralist orientation of modern mathematics naturally leads to the use of axiomatization. To understand a kind of structure, for instance the structure of a group, is to have an overview over all its instantiations. In an axiomatic system, this is accomplished by capturing all those structures as the models of the system"*(Hintikka 2009, p. 02).

A compreensão de que tanto o método axiomático quanto a idéia de estrutura poderiam ser usados para abordar, de um ponto de vista filosófico, as teorias científicas, trouxe-os para a arena da filosofia da ciência. Talvez a mais notável aplicação desses instrumentos dê-se no interior da concepção filosófica denominada abordagem semântica das teorias científicas. Essa concepção filosófica dificilmente pode ser vista como um movimento único e integrado, e mais como um rótulo que agrega uma série de filósofos de diversas orientações. Podemos, contudo, situar um núcleo em torno do qual movem-se esse filófosos. *"This core is marked out by a commiment to the view that scientific theories can be caracterized by what their linguistic formulations refer to when the latter are interpreted semantically, in the model-theoretic sense"*(da Costa, French 2003, p. 22). Apesar de esta última formulação não ser a mais usual, ela espelha o famoso *slogan* dessa abordagem: uma teoria científica é caracterizada por uma classe de modelos. No caso do filósofo Patrick Suppes, considerado um dos precursores da abordagem semântica, o instrumento de axiomatização das teorias científicas é a teoria de conjuntos e os modelos são justamente estruturas conjuntistas que satisfazem esses axiomas.

Nesta dissertação abordamos principalmente estruturas matemáticas, o método axiomático e a abordagem semântica das teorias científicas, além de outros tópicos relacionados.

O primeiro capítulo desta dissertação é dedicado a apresentar a teoria de conjuntos ZFC, sobre a qual todo o nosso trabalho posterior será erigido.

No segundo capítulo, a partir da base já estabelecida, introduzimos o conceito de estrutura, basicamente um constructo conjuntista formado por um domínio não-vazio e relações sobre os elementos do domínio, mas também sobre subconjuntos de elementos do domínio, e relações de ordem mais alta, num sentido que se verá mais à frente. Apresentamos uma versão bastante geral do conceito de estrutura, seguindo a definição proposta por Newton da Costa e Alexandre Rodrigues (da Costa, Rodrigues 2007). No contexto da teoria de estruturas apresentada, podemos selecionar algumas destas estruturas, as álgebras livres, para desempenhar o papel de linguagens formais. Discutimos a relação entre linguagem e estruturas, especificando como se pode estabelecer uma linguagem que "fale" de modo natural dos elementos e relações em uma estrutura, sendo assim conveniente para que se formule os axiomas de uma teoria da qual a estrutura em questão é um dos modelos. A ligação entre a linguagem e as estruturas, como vemos, pode ser ser feita através do famoso predicado de Suppes, uma fórmula da linguagem da teoria de conjuntos que serve para relacionar estruturas e axiomas da seguinte forma: as estruturas que satisfazem o predicado são os modelos desses axiomas. Finalizando o capítulo, um tópico importante é o da definibilidade em uma estrutura. Veremos que conceitos distintos e aparentemenre distantes como o de definibilidade em uma estrutura (intuitivamente, um elemento é definível numa estrutura quando existe uma fórmula que o define, isto é, quando alguma fórmula da linguagem, quando interpretada nesse elemento da estrutura, é verdadeira) e o de definibilidade absoluta (intuitivamente, um elemento do domínio de uma estrutura é absolutamente definível quando invariante sob os automorfismos da estrutura), são equivalentes, no tocante a linguagens infinitárias, resultado de um teorema cuja demonstração apresentaremos.

No terceiro capítulo entramos propriamente na discussão filósofica. Tratamos das duas principais concepções filosóficas à questão das teorias científicas, a semântica e a sintática, e o papel que métodos formais como o axiomático, a lógica clássica, a teoria de modelos desempenharam na elaboração dessas concepções.

Dentro da concepção semântica discutimos duas abordagens, denominadas *abordagem de Suppes* e *abordagem de da Costa-Chuaqui*. Ambas as abordagens estão relacionadas entre si: a suppesiana está inserida no seio de seu grandioso projeto de pesquisa de axiomatização de teorias científicas, iniciado na década de cinquenta; a abordagem da Costa-Chuaqui é fruto dos esforços desses dois pesquisadores em produzir uma versão formalizada da primeira abordagem. Como procuramos evidenciar, são maneiras diferentes de proceder a axiomatização de uma teoria. O que nos leva a maneiras diferentes de se compreender a noção de modelo, conceito que ocupa destacada posição dentro da concepção semântica. Por fim, discutiremos as relações entre a palavra *modelo* em filosofia da ciência (considerando-se a acepção usual dentro lógica) e a idéia de modelo científico, que comparece na prática e no discurso do cientista.

2 A TEORIA DE CONJUNTOS ZFC

A teoria de conjuntos surgiu nas últimas décadas do século XIX com Georg Cantor (1845-1918), e a despeito de certa resistência de alguns matemáticos proeminentes da época, como Kronecker e Poincaré, à idéia de infinito "atual" ou "completo" introduzida pela teoria, ela foi adotada pelos matemáticos e revelou-se um instrumento extremamente poderoso às investigações matemáticas. Um paraíso, nas palavras de Hilbert (Hilbert 1967, p. 376).

Entretanto, o surgimento de alguns paradoxos, entre eles o de Burali-Forti e o de Russell acusaram falhas na teoria e colocaram-na sob suspeição. O matemático alemão Ernst Zermelo (1871-1953), em vista das críticas recebidas pela sua demonstração do teorema da boa ordenação, buscou axiomatizar a teoria de conjuntos a fim de esclarecer aspectos de sua demonstração (que fazia uso do chamado axioma da escolha).[1] Percebeu-se que um dos problemas associados à teoria era uma suposição implícita conhecida por princípio da compreensão (ou príncipio da abstração) que pode ser expressa da seguinte forma: para toda condição $\phi(x)$, a coleção ou classe $\{x : \phi(x)\}$ é um conjunto. Tal princípio conduzia a coleções demasiado abrangentes para serem conjuntos, ensejando os paradoxos acima citados. Portanto, uma das preocupações da axiomatização de Zermelo foi a de limitar a abrangência dos conjuntos através do esquema de axiomas da separação, cuja utilização, para a formação de um conjunto, pressupõe a existência de um conjunto previamente formado. A esse esquema de axiomas juntaram-se mais seis (extensionalidade, axioma dos conjuntos elementares, conjunto das partes, axioma da união, do infinito e o polêmico axioma da escolha), formando a primeira versão da teoria axiomatizada de Zermelo.

Aos axiomas propostos por Zermelo foram adicionados o esquema de axiomas da substituição, proposto de forma independente por Abraham Fraenkel (1891-1965), Thoralf Skolem (1887-1963) e Nels Lennes (1874-1951), e o axioma da regularidade, proposto por Skolem, Dimitry Mirimanoff (1861-1945) e John von Neumann (1903-1957). A teoria axiomática assim concebida ficou conhecida como teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha (ZFC). Há, entretanto, nessa designação, uma pequena injustiça que nos parece

[1] O teorema da boa ordenação nos diz que todo conjunto pode ser bem ordenado, ou seja, dado um conjunto é possível definir uma ordem sobre seus elementos de tal forma que todo subconjunto possua um menor elemento.

digna de nota. Zermelo não apresentou sua axiomatização numa linguagem formal específica, o que trouxe certa imprecisão à formulação do esquema de axiomas da separação, que Zermelo formulou da seguinte maneira: para qualquer condição "definida" $\phi(x)$ e conjunto A previamente dado, existe o conjunto dos elementos de A com a propriedade $\phi(x)$. Para Zermelo, o fato de que a condição fosse "definida" diria essencialmente que para cada objeto a do universo, o valor lógico da proposição $\phi(a)$ é bem determinado. No entanto, esse conceito mostrou-se algo ambíguo e não tão preciso como seria desejável. Foi Skolem, em 1922, quem propôs considerar a linguagem da teoria de conjuntos como uma linguagem de primeira ordem, onde uma "condição em x" é perfeitamente definível; a proposta de Skolem acabou sendo universalmente adotada (ver, por exemplo, Krause 2002, pp. 113-115). Posteriormente, foram desenvolvidas outras axiomatizações da teoria de conjuntos como, por exemplo, a de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG); a de Kelley-Morse (KM); a de Quine-Rosser (NF), dentre outras (mais informações em Krause 2002, cap. 5).

Neste primeiro capítulo nos dedicamos a explorar um pouco a teoria de conjuntos ZFC, visto que ela é a base de todo nosso desenvolvimento posterior. Ecoando Zermelo, podemos dizer que

> *"[S]et Theory is that branch of mathematics whose task is to investigate mathematically the fundamental notions "number", "order", and "function", taking them in their pristine, simple form, and to develop thereby the logical foundations of all of arithmetic and analysis; thus it constitutes an indispensable component of the science of mathematics"* (Zermelo 1967, p. 200)

A teoria de conjuntos, portanto, afigura-se como grande ferramenta à matemática, em especial no estudo de seus fundamentos, já que esta pode ser baseada naquela, no sentido de que todos os conceitos e objetos da matemática clássica podem ser reduzidos a conjuntos (Kunen 2009, p. 14).

Vejamos primeiramente a sintaxe de ZFC.

2.1 A SINTAXE DE ZFC

Neste trabalho, adotaremos a teoria de conjuntos ZFC de primeira ordem, que pode ser formulada da seguinte maneira. A linguagem de ZFC é uma linguagem de primeira ordem com identidade contendo um único símbolo de predicado não-lógico, o símbolo de predicado binário $\in$. Essa linguagem é chamada $L_{\in}$. A lógica subjacente à ZFC é a lógica de primeira ordem clássica com identidade.

Os axiomas de ZFC são os seguintes:

1. Extensionalidade: $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$
2. Regularidade: $\forall x(\exists y(y \in x) \to \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)))$
3. Par: $\forall x \forall y(\exists z(\forall w(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)))$

   Através desse axioma obtemos $\forall x(\exists z(\forall w(w \in z \leftrightarrow w = x)$, o conjunto unitário $\{x\}$. Pelo axioma da extensionalidade, ele é único para cada x.
4. Esquema da separação: Seja α uma fórmula de $L_\in$ na qual a variável y não ocorre livre, então para cada fórmula α o seguinte é um axioma: $\forall w \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in w \wedge \alpha(x))$

   Através do esquema da separação, podemos obter o conjunto vazio. Consideremos a lei lógica $\exists x(x = x)$, que nos garante a existência de algum conjunto, que chamamos de w. Tomemos, agora, a fórmula $x \neq x$. Utilizando o esquema de axiomas da separação, temos $\forall w \exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in w \wedge x \neq x)$, ou seja, $\exists y \forall x(x \notin y)$. Pelo axioma da extensionalidade, ele é único. Esse conjunto é representado por $\emptyset$.
5. União: $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(z \in w \wedge w \in x))$. O conjunto união y é abreviado por
   $$y = \bigcup_{w \in x} w$$
   .
6. Potência: $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$, onde $u \subseteq v := \forall w(w \in u \to w \in v)$.
7. Esquema da substituição: Seja $\phi(x, y)$ uma fórmula de $L_\in$ na qual as variáveis x e y são distintas e ocorrem livres. Seja u e v variáveis distintas de x e y. Então para cada fórmula ϕ, a seguinte expressão é um axioma:
   $$\forall x \exists ! y(\phi(x, y) \to \forall u \exists v \forall y(y \in v \leftrightarrow \exists x(x \in u \wedge \phi(x, y))))$$
8. Infinito: $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$
9. Escolha: $\forall x(\forall y(y \in x \to y \neq \emptyset) \wedge \forall t \forall z(t \in x \wedge z \in x \wedge t \neq z \to t \cap z = \emptyset) \to \exists t(t \subseteq x \wedge \forall u(u \in x \to \exists v(t \cap u = \{v\})))$

Findada a exposição da sintaxe de ZFC, nos atemos à sua semântica.

2.2 A SEMÂNTICA DE ZFC

Numa passagem famosa, o lógico Alfred Tarski escreveu que *"a possible realization in which all valid sentences of a theory T are satisfied is called a model of T"* (Tarski 1953, p. 11). Um modelo de uma teoria é um par formado por um domínio (um conjunto não vazio) e uma função que interpreta os símbolos não-lógicos da teoria neste domínio, de tal maneira que os axiomas da teoria sejam verdadeiros nesta estrutura. Portanto, dar uma semântica à linguagem de ZFC é prover um domínio não vazio para as variáveis desta linguagem, juntamente com uma relação binária sobre esse conjunto, justamente a interpretação do símbolo $\in$.

Esta discussão pode ser relacionada com a questão da consistência de ZFC que, segundo Ebbinghaus et al (Ebbinghaus, Flum, Thomas 1994, p. 112), é um dos problemas chave dos estudos fundacionais. Através daquele conhecido como segundo teorema da incompletude de Gödel, para um sistema formal consistente S recursivamente axiomatizável e contendo uma certa porção da aritmética - condições estas satisfeitas por ZFC - não há demonstração da consistência de S formalizável em S (sendo a consistência adequadamente representada).[2] Em outras palavras, assumindo-se a consistência de ZFC, tal consistência, se expressa adequadamente, não pode ser provada em ZFC. Por outro lado, pelo teorema da completude, uma teoria de primeira ordem (como o é ZFC), se consistente possui modelos. Ora, assumiremos como é praxe que ZFC é consistente, logo, que possui modelos, e estes, como indicados anteriormente, são constructos conjuntistas. Portanto, uma maneira de entender o segundo teorema da incompletude no contexto da teoria de conjuntos ZFC é que ele proíbe que provemos a existência desses modelos (que tem que existir, assumida a consistência de ZFC) no sistema axiomático ZFC, pois se o fizéssemos estaríamos provando a consistência de ZFC dentro de ZFC.

2.2.1 O *modelo* pretendido de ZFC

Procuramos formular aqui uma idéia geral daquela que é considerada, num sentido intuitivo, a interpretação pretendida dos axiomas de ZFC. Conhecida na literatura como *modelo* pretendido ou intencional da teoria de conjuntos, ele nos fornece uma visão intuitiva da

[2] Como nos mostra Solomon Feferman (Feferman 1960)

"verdade" dos axiomas de ZFC. A noção de *modelo* da qual falamos aqui não corresponde à idéia de modelo apresentada acima. Aqui, falamos de um *modelo* intuitivo, cujo domínio não é um conjunto, mas uma classe própria, a saber, a classe universal $V = \{x : x = x\}$. Na interpretação intuitiva pretendida, $x \in y$ será interpretado como significando "x é elemento de y", mas o domínio desse *modelo* é algo mais difícil de ser descrito.

Se considerarmos, como é usual, a teoria de conjuntos ZFC como o fundamento da matemática clássica, nosso domínio deve ser capaz de capturar toda a matemática através de conjuntos. Nessa direção, se desejamos falar apenas em conjuntos, devemos poder falar dos elementos de um conjunto qualquer, e todos esses elementos devem ser conjuntos também. Numa primeira aproximação, nosso domínio consiste de todos aqueles x tais que x é um conjunto, e $\forall y(y \in x \rightarrow y$ é um conjunto), e $\forall z \forall y(y \in x \wedge z \in y \rightarrow z$ é um conjunto) e assim por diante. Um tal x é denominado um conjunto hereditário. Uma importante característica de nosso domínio é que todo elemento de um conjunto hereditário é também um conjunto hereditário. Um modo de conceber esse universo é imaginar que um conjunto x só pode ter como elementos conjuntos que já tenham sido previamente formados, e a formação desses conjuntos ocorre em *etapas* (para uma descrição mais precisa desse processo ver, por exemplo, Shoenfield 1977). Para cada etapa α há certas etapas que precedem α — com a exceção da primeira —, e haverá etapas que sucedem α. Em cada etapa α, qualquer coleção x de conjuntos formados em etapas anteriores constitui um conjunto, que se diz formado na etapa α. Resulta disso que se a etapa β precede α, um conjunto x que é formado em β poderá ser formado também na etapa α, pois x é uma coleção de conjuntos formados em etapas que precedem α. Por fim, em nosso domínio, uma coleção de conjuntos só é um conjunto se for formado em alguma etapa. Isso nos dá uma visão, ainda que intuitiva e parcial, de nosso domínio: um universo de conjuntos formados em etapas. As etapas, dessa maneira, são cumulativas, razão pela qual esse universo é conhecido como Hierarquia Cumulativa de Conjuntos.

Procedemos agora um refinamento do universo intuitivo de conjuntos esboçado acima. Isso se dá especificando os conceitos de etapa e sucessão e precedência de etapas de uma maneira matematicamente precisa. Para tanto, utilizamos o conceito de número ordinal para designar as etapas e a relação de ordem usual entre os ordinais para a relação de precedência entre etapas.

Os números ordinais podem ser classificados em três tipos: primeiramente temos $\emptyset$, chamado de *zero*. Em seguida temos os ordinais da forma α^+, para um ordinal menor α; este é chamado *ordinal sucessor*. Por fim, há aqueles ordinais que não são sucessores de nenhum outro, os chamados *ordinais limites*.

Agora, por recursão transfinita sobre os ordinais, definimos V_α, onde α é um ordinal.

$$V_0 = \emptyset$$

$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$$

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$$

onde α é um ordinal limite.

a partir disso, definimos a seguinte igualdade:

$$WF = \bigcup_{\alpha} V_\alpha$$

onde α é um número ordinal.

WF é a chamada classe dos conjuntos bem fundados. Intuitivamente, WF é a classe dos conjuntos construídos através do processo iterativo, a partir do $\emptyset$. Portanto, os conjuntos bem fundados são definidos como aqueles que pertencem a algum V_α. Estamos agora em condições de caracterizar o universo conjuntista V, visto que o axioma da regularidade, previamente exposto, é equivalente a:

$$V = WF$$

Diferentemente dos outros axiomas de ZFC, o axioma da regularidade não possui aplicações na matemática clássica, mas evita certas "patologias" como, por exemplo, um conjunto x tal que $x = \{x\}$. (Para mais detalhes, Kunen 1980, cap. 3).

Para finalizar este tópico, consideremos a seguinte questão: dado um ordinal α, quais são os axiomas de ZFC satisfeitos em $\langle V_\alpha, \in\rangle$, onde $\in$ é relação de pertinência em V_α (Isto é, $x \in y$ significa que $x \in y$ e $x, y \in V_\alpha$)? Os seguintes resultados podem ser provados (as demonstrações desses resultados podem ser encontrados em Franco de Oliveira 1982, p. 298ss; Enderton 1977, p. 249ss).

1. Para um ordinal α qualquer, V_α é modelo dos axiomas da extensionalidade, união, esquema de separação, regularidade e escolha;

2. Os axiomas do par e da potência são satisfeitos em um V_α qualquer, onde α é ordinal limite;

3. O axioma do infinito é satisfeito em V_α para todo ordinal α, com $\alpha > \omega$;

   Disso, podemos concluir que se α é um ordinal limite maior que ω, V_α é um modelo para todos os axiomas de ZFC, com excessão do esquema de axiomas da substituição.

4. Todos os axiomas do esquema da substituição são satisfeitos em V_κ , se κ for um cardinal inacessível.

Uma teoria como ZFC, - formulada em primeira ordem e em uma linguagem enumerável - se consistente, possui modelo e, em decorrência dos axiomas da extensionalidade, da separação e do par possui um modelo infinito. Estas características fazem de ZFC uma teoria não-categórica, ou seja, uma teoria que possui modelos não isomorfos. Apesar dos grandes feitos já realizados em teoria de conjuntos, não há dúvida que ainda temos muito o que avançar na compreensão dos modelos de ZFC. Nossa compreensão do que são conjuntos também é incerta. O lógico W. Hodges possui uma passagem muito interessante que ilustra bem o ponto que queremos abordar. Ele escreve:

> *"It was Hilbert and his school who first exploited axioms, higher-order as well as first-order, as a means of defining classes of structures. Hilbert was horrifically inaccurate in describing what he was doing. When he set up geometric axioms, he said that they defined what was meant by a point. (...) Hilbert had simply confused defining a class of structures with defining the component relations and elements of a single structure. In this matter Hilbert was a spokesman for a confusion which many people shared. Even today one meets hopeful souls who believe that the axioms of set theory define what is meant by "set"'* (Hodges 2001, p. 69)

O que Hodges, de maneira bastante espirituosa, está dizendo, é que uma teoria axiomática como ZFC, construída como um cálculo não interpretado, especifica apenas a classe de modelos que satisfazem seus axiomas. Os axiomas por si só não nos dizem o que são conjuntos. Do ponto de vista filosófico, a questão sobre o que são conjuntos, assim entendemos, configura importante questão a ser explorada. Ademais, ela parece estar relacionada a uma maior compreensão dos modelos de ZFC; e talvez seja nesse contexto, o dos modelos de ZFC, que a questão pode vir a ser iluminada.[3]

[3]Como assinala K. Kunen, "[s]et theory is the study of models of ZFC" (Kunen 2009, p. 7)

No final dos anos trinta do século passado, Kurt Gödel desenvolveu, em suas investigações sobre a teoria de conjuntos, o chamado universo construtível $\langle L, \in \rangle$, onde $L \subseteq V$ é a classe própria dos conjuntos construtíveis. Deve-se ressalvar que o termo "construtível" aqui empregado tem um significado distinto dos usuais em filosofia da matemática. A definição da hierarquia dos conjuntos construtíveis de Gödel ocorre de forma semelhante à da hierarquia de Von Neumann, e a diferença fundamental está nas etapas sucessoras. Nestas, em vez da operação irrestrita do conjunto potência, usamos uma operação conjunto das partes descritíveis, onde descritível significa descritível por uma fórmula de $L_{\in}$ com parâmetros no nível precedente (ver, por exemplo, Kunen 1980, cap. 6). Os trabalhos de Gödel sobre o universo construtível deram origem ao estudo dos modelos internos, que permitiram obter os primeiros resultados de consistência relativa do axioma da escolha e da hipótese generalizada do contínuo.[4]

Finalizando nossa discussão sobre a semântica de ZFC, vamos nos fixar sobre um modelo bastante peculiar da teoria que, dentre outras coisas, nos mostra que a noção de cardinalidade não é absoluta, sendo relativa ao modelo fixado.

2.2.1.1 Um estranho modelo de ZFC

É importante observar como ZFC pode ser visto, por um lado, como a teoria que fornece as "ferramentas" para a matemática e, por outro, como objeto de investigações matemáticas. A fim de não se cometer enganos é sempre necessário distinguir esses dois níveis. O paradoxo de Skolem é bastante ilustrativo nesse ponto.

Segundo o teorema de Löwenhein-Skolem, uma teoria T de primeira ordem com linguagem enumerável que possui um modelo infinito, possui um modelo enumerável. Como ZFC é uma teoria de primeira ordem que, se consistente, devido aos axiomas da extensionalidade, do par e da separação possui modelos infinitos, ZFC, pelo teorema, deve possuir um modelo enumerável. Este fato, à primeira vista, pode parecer bastante estranho, tanto que, apesar de não se configurar num paradoxo propriamente dito, ele recebeu essa alcunha devido à estranheza do que assevera pois, como pode ZFC, com o axioma da potência, ter um modelo enumerável? É sabido que pelo axioma da potência, sendo possível obter o conjunto de todos os subconjuntos de ω, obtêm-

[4] A hipótese do contínuo assevera que não há nenhum cardinal entre o cardinal do conjunto dos números naturais e o do conjunto dos números reais.

se um conjunto não enumerável. Vejamos como podemos tornar mais compreensível esse fato (seguiremos aqui, de perto, os desenvolvimentos em Ebbinghaus, Flum, Thomas 1994, p. 112).

É possível derivar a seguinte sentença ϕ em ZFC:

$$\phi = \exists x \neg \exists y (FUN(y) \wedge INJ(y) \wedge DOM(y) = x \wedge IMG(y) \subseteq \omega)$$

A sentença ϕ[5] expressa, no universo conjuntista (o modelo intencional, identificado com a hierarquia de von Neumann), a existência de um conjunto não enumerável.

Pelo teorema de Löwenhein-Skolem, seja $U = \langle A, \in^A \rangle$ um modelo enumerável de ZFC. Portanto $U \models \phi$, ou seja, existe $a \in A$ tal que

$$U \models \neg \exists y (FUN(y) \wedge \ldots \wedge IMG(y) \subseteq \omega)[a] \qquad (*)$$

O conjunto $\{b \in A | b \in^A a\}$, é o conjunto dos elementos b de A, vistos como parte do universo conjuntista tal que $b \in^A a$ dentro do modelo U. Esse conjunto é no máximo enumerável, por ser um subconjunto de A. Portanto, no universo conjuntista, ou seja, fora do modelo U, existe uma função injetiva cujo domínio é $\{b \in A | b \in^A a\}$ e cuja imagem é um subconjunto de ω. Entretanto, isso não contradiz $(*)$, pois o que $(*)$ está dizendo é que dentro de U não existe tal função injetiva definida sobre a em ω^A ou, mais exatamente, que não existe $b \in A$ tal que $FUN^A(b)$, $DOM^A(b) = a$, $INJ^A(b)$, $IMG^A(b) \subseteq^A \omega^A$; em outras palavras, o conjunto a é não enumerável em U.

[5] Essa fórmula nos diz, intuitivamente, que existe x tal que não existe y que seja uma função injetora, cujo domínio seja igual ao conjunto x e cuja imagem seja subconjunto de *omega*.

3 ESTRUTURAS E LINGUAGENS

Neste capítulo, desenvolvemos uma teoria das estruturas baseada em trabalhos realizados por Newton da Costa e Alexandre Rodrigues. Essa teoria é toda desenvolvida no escopo da teoria de conjuntos ZFC, apresentada no capítulo anterior.

As estruturas desempenham um papel central na matemática desde meados do século passado, quando o coletivo francês Bourbaki buscou reescrever a matemática evidenciando seu caráter estrutural. Para Bourbaki, a matemática clássica pode ser vista como o estudo das estruturas mães (algébricas, de ordem e topológicas), e das estruturas oriundas da combinação destas (Bourbaki 1999, pp. 1273, 1274). Com a teoria das estruturas desenvolvida, buscamos, com o auxílio de recursos oriundos da álgebra universal, caracterizar as linguagens formais dentro desse arcabouço como um tipo particular de estrutura, mais especificamente como uma álgebra livre. Os desenvolvimentos desse capítulo têm como um de seus objetivos produzir uma concepção rigorosa de um tópico que é explorado com mais pormenor no próximo capítulo: o conceito de *modelo*. Esse conceito ocupa um papel central dentro daquela que é conhecida como concepção semântica das teorias científicas. No entanto, em geral não há uma caracterização precisa desse conceito. Dentro da teoria das estruturas que aqui desenvolvemos emergirão, portanto, duas linhas: a das linguagens formais, que serão vistas dentro de uma concepção algébrica e a dos *modelos*, que serão estruturas específicas construídas na teoria. Nossa abordagem busca, portanto, estabelecer uma mesma base conceitual para esses tópicos, promovendo, ao mesmo tempo, uma caracterização mais rigorosa dos mesmos.

3.1 UMA DEFINIÇÃO DE ESTRUTURA

Nesta primeira seção, seguimos os desenvolvimentos de da Costa e Rodrigues (da Costa, Rodrigues 2007), fazendo pequenas alterações a fim de permitir que o dominío da estrutura seja composto por mais de um conjunto base, e também algumas simplificações que são explicadas mais a frente.

Nossa primeira definição é a do conjunto τ de tipos. Esse conjunto é também importante para o desenvolvimento das linguagens formais na próxima seção.

Definição 3.1.1 *O conjunto τ de tipos é o menor conjunto satisfazendo as seguintes condições:*

1. *Os símbolos $0, 1, \ldots n-1$, com $1 \leq n < \omega$, pertencem a τ;*

2. *Se $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \tau$, então $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle \in \tau$, $1 \leq n < \omega$, onde $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$ é a sequência finita de n termos, composta por $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.*

Definimos agora a ordem de um elemento de τ.

Definição 3.1.2 *Se $a \in \tau$, a ordem de a, denotada por $ord(a)$, é definida como:*

1. *$ord(k) = 0$, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$;*

2. *$ord(\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle) = max\{ord(a_0), ord(a_1), \ldots, ord(a_{n-1})\} + 1$.*

Ou seja, *ord* é uma função do conjunto τ no conjunto ω dos números naturais.

A definição seguinte nos permite construir, de uma família de conjuntos bases $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$, o domínio da estrutra, as relações e proprieades sobre essa família. Nesta definição, as operaçõs conjuntistas de conjunto potência e produto cartesiano são usadas, sendo denotadas, respectivamente, por "$\times$" and "$\mathcal{P}$".

Definição 3.1.3 *Seja $\{D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}\}$ uma família de conjuntos não vazios. Definimos uma função t, chamada de escala baseada em $\{D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}\}$, tendo τ como dominío, da seguinte forma:*

1. *$t(k) = D_k$, para $k = 0, 1, \ldots n-1$;*

2. *Se $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \tau$, então $t(\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle) = \mathcal{P}(t(a_0) \times t(a_1) \times \ldots \times t(a_{n-1}))$.*

A função t, intuitivamente, nos provê um universo em etapas, tendo como base os elementos da família D_n, isto é, $\{D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}\}$, e, com o crescimento das ordens dos tipos, os objetos atribuídos a eles crescem em complexidade também. Dado $a \in \tau$, os elementos de $t(a)$ são ditos do tipo a. Os elementos de tipo $k = 0, 1, \ldots n-1$, por exemplo, (isto é, elementos de D_k, já que $t(k) = D_k$, para $k = 0, 1, \ldots n-1$)

são chamados indivíduos. Os elementos de $t(\langle\langle 1\rangle\rangle)$ são propriedades de propriedades de indivíduos, como podemos ver da definição acima. Como outro exemplo, consideremos relações entre objetos de tipo 0 e 1. Os elementos de $t(\langle 0,0,1\rangle)$ são relações ternárias nas quais os primeiros dois *relata* são de tipo 0 e o terceiro é de tipo 1; já os elementos de $t(\langle\langle 0,1\rangle,1\rangle)$ são relações entre uma relação e um objeto.

O conjunto $\bigcup(range(D_n))$, a escala baseada na família D_n, é denotado por $\varepsilon(D_n)$.

Uma sequência é uma função cujo domínio é um número ordinal, finito ou infinito. Em nosso tratamento, família terá o mesmo sentido que sequência. A sequência $a_0, a_1, ...$ cujo domínio é o ordinal λ, será escrita $(a_\iota)_{\iota\in\lambda}$ ou a_ι, $\iota \in \lambda$, ou simplesmente a_ι, se o domínio estiver claro pelo contexto.

Definição 3.1.4 *O cardinal K_{D_n} associado a $\varepsilon(D_n)$ é definido como*

$$K_{D_n} = sup\{|\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k|, |\mathcal{P}(\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k)|, |\mathcal{P}^2(\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k)|, \ldots\}$$

.

Aqui, $|\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k|$ denota o cardinal do conjunto $\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k$.

Definimos agora a estrutura e sobre a família D_n.

Definição 3.1.5 *Uma estrutura e baseada na família D_n é um par ordenado da forma*

$$e = \langle D_n, R_\iota\rangle$$

.

Aqui, R_ι é uma sequência de elementos de $\varepsilon(D_n)$, e supomos que o domínio dessa sequência é estritamente menor que K_{D_n}. Dizemos que K_{D_n} e $\varepsilon(D_n)$ são o cardinal e a escala associados a e, respectivamente.

Como já dito, cada elemento de $\varepsilon(D_n)$ tem um certo tipo. A ordem de uma relação é definida como a ordem de seu tipo, ou seja, a ordem do tipo dos elementos que formam a relação. A ordem de e, denotada ord(e), é a ordem do maior dos tipos das relações da família R_ι, se houver alguma, caso contrário, ord(e)=ω.

A definição que exibimos acima capta não somente estruturas elementares, como também aquelas de ordem superior, de maneira que as estruturas usuais da matemática clássica podem ser reduzidas a estruturas de acordo com a definição apresentada. Em alguns casos, essa redução é uma tarefa complexa, por exemplo, a que envolve variedades diferenciáveis, mas é sempre possível, normalmente de maneiras alternativas (da Costa, Rodrigues 2007, p. 5).

No início desta seção, assinalamos que a nossa apresentação conteria algumas simplificações em relação a de da Costa e Rodrigues (da Costa, Rodrigues 2007). Divergimos do trabalho original permitindo que indivíduos e operações ocorram nas estruturas, ao passo que da Costa e Rodrigues reduzem operações a relações e identificam indivíduos com seus conjuntos unitários. A principal razão dessa mudança é simplificar a exposição neste trabalho, já que do ponto de vista matemático essas diferenças são apenas uma questão de convenção. Portanto, na definição de estruturas aqui proposta os objetos da família R_ι podem ser não somente relações, mas operações também, isto é, relações satisfazendo a bem conhecida condição funcional, ou mesmo elementos distintos do domínio, os quais tomamos como sendo operações 0-árias.

3.2 LINGUAGENS FORMAIS

Apresentamos agora uma abordagem das linguagens formais desenvolvida a partir da noção da estutura acima delineada. Aqui, linguagens são um tipo especial de estrutura, as álgebras livres. Nesta seção apresentamos tópicos de álgebra universal necessários a nossa exposição. Seguimos, com modificações, o exposto em Barnes e Mack (Barnes, Mack 1975), e nossa abordagem é totalmente desenvolvida dentro do arcabouço da teoria de estruturas apresentada na seção anterior.

Definição 3.2.1 *O tipo de similaridade de uma estrutura* $e = \langle D, R_\iota \rangle$ *é uma família* $s_{\lambda<\iota}$ *de tipos, tal que, para cada* $\lambda < \iota$, s_λ *é o tipo de* R_λ.

Dizemos que duas estruturas têm o mesmo tipo de similaridade quando a família s é igual em ambas, ou seja, quando suas relações têm o mesmo tipo. Como uma família é sempre ordenada, dado duas estruturas com o mesmo tipo de similaridade, as relações em ambas ocorrem sempre na mesma ordem, a ordem dos tipos da família.

Definição 3.2.2 *Uma* s*-álgebra* A *é uma estrutura* $\langle A, R_\iota \rangle$ *tal que* $ord(R_n) \leq 1$ *para cada* n *e* A *tem tipo de similaridade* s.

A restrição à ordem das relações a 1 ou menos, serve para fazer cada s-álgebra uma álgebra no sentido usual, isto é, uma estrutura composta de um conjunto (o domínio) com uma família de operações definidas sobre esse conjunto.

Definição 3.2.3 *Sejam A,B s-álgebras com* $A = \langle A, R_\iota \rangle$ *e* $B = \langle B, R'_\iota \rangle$. *Um homomorfismo de A em B é uma função* $\varphi : A \to B$ *tal que, para todo* $R_{\lambda<\iota}$ *da s-álgebra A cujo tipo é* $\langle 0_1, \ldots, 0_k \rangle$*, temos:*

$$\varphi(R_{\lambda<\iota}(a_1, \ldots, a_k)) = R'_{\lambda<\iota}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k))$$

Definição 3.2.4 *Sejam A, B s-algebras e* $\varphi : A \to B$ *um homomorfismo. Se* φ *é uma bijeção dizemos que a função* $\varphi : A \to B$ *é um isomorfismo entre A e B*

Definição 3.2.5 *Seja X um conjunto, seja F uma s-álgebra com domínio F e seja* $\sigma : X \to F$ *uma função. Dizemos que* $\langle F, \sigma \rangle$ *(também denotado por F) é uma s-álgebra livre sobre o conjunto X de livres geradores se, para toda s-álgebra A e função* $\tau : X \to A$*, existe um único homomorfismo* $\varphi : F \to A$ *tal que* $\varphi\sigma = \tau$.

Teorema 3.2.1 *Para todo conjunto X e todo tipo de similaridade s, existe uma s-álgebra livre sobre X. Essa s-álgebra livre sobre X é única a menos de isomorfismo.*

Demonstração[Unicidade] Nós mostramos primeiramente que se $\langle F, \sigma \rangle$ é livre sobre X, e se $\varphi : F \to F$ é um homomorfismo tal que $\varphi\sigma = \sigma$, então $\varphi = 1_F$, a função identidade sobre F. Para mostrar isso, tomemos $A = F$ e $\tau = \sigma$ nas condições definidas. Então $1_F : F \to F$ tem a propriedade requerida por φ, e, pela sua unicidade, ela é a única função que satisfaz $\varphi\sigma = \sigma$.

Sejam agora $\langle F, \sigma \rangle$ e $\langle G, \varsigma \rangle$ s-álgebras livres sobre X. Já que $\langle F, \sigma \rangle$ é livre, existe um homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi\sigma = \varsigma$. Já que $\langle G, \varsigma \rangle$ é livre, existe um homorfismo $\phi : G \to F$ tal que $\phi\varsigma = \sigma$. Portanto $\phi\varphi\sigma = \phi\varsigma = \sigma$, e pelo resultado acima, $\phi\varphi = 1_F$. De modo similar, $\varphi\phi = 1_F$. Portanto φ, ϕ são isomorfismos mutuamente inversos, e a unicidade está provada.

[Existência] Uma álgebra F será construída como uma união de conjuntos F_n $(n \in \omega)$, os quais são definidos indutivamente da seguinte maneira:

1) $F_0 = X$

2) Consideremos F_r definido para $0 \leq r < n$. Então, definamos $F_n = \{(s_t, a_1, \ldots, a_k) | s_t$ *um termo de* $s,$ $s_t = \langle 0_1, \ldots, 0_k \rangle, a_i \in F_{r_i}, \sum_{i=1}^{k} r_i = n - 1\}$

3) Então

$$F = \bigcup_{n \in \omega} F_n$$

Obtemos, com isso, o conjunto F. A fim de torná-lo uma s-álgebra, devemos especificar a ação das operações correspondentes aos tipos da família s.

4) Se $s_t = \langle 0_1, \ldots, 0_k \rangle$, seja $s_t(a_1, \ldots, a_k) = (s_t, a_1, \ldots, a_k)$.

Isso torna F uma s-álgebra. Alguns esclarecimentos são importantes neste ponto. No processo para se construir uma s-álgebra, devemos especificar as operações desta álgebra. Como um abuso de linguagem, permitimos que as operações sendo construídas sejam nomeadas exatamente como o tipo do elemento da sequência s, a qual determina o tipo de similaridade da álgebra que está sendo construída. Pode-se observar isso mais claramente no item 4 acima, em que, do lado esquerdo da igualdade, s_t denota a operação, e, do lado direito, ela denota um tipo da sequência s. A razão para essa identificação advém do fato de que ainda não temos, propriamente, uma estrutura com operações. As operações estão sendo construídas a partir dos elementos dos conjuntos F_n. Para completar a construção, devemos especificar a aplicação $\sigma : X \to F$.

5) Para cada $x \in X$, seja $\sigma(x) = x \in F_0$.

Por fim, precisamos mostrar que F é livre sobre X, isto é, devemos mostrar que se A é s-álgebra qualquer e $\tau : X \to A$ uma aplicação qualquer de X em A, então existe um único homomorfismo $\varphi : F \to A$ tal que $\varphi\sigma = \tau$. Fazemos isso construindo indutivamente a restrição φ_n de φ a F_n e mostrando que φ_n é completamente determinada por τ e por φ_k para $k < n$.

Temos que $F_0 = X$. Para $x \in X$, a condição de homomorfismo requer $\varphi\sigma(x) = \tau(x)$, e como $\sigma(x) = x \in F_0$, devemos ter $\varphi_0(x) = \tau(x)$. Portanto, $\varphi_0 : F_0 \to A$ está definida, e é determinada unicamente pelas condições a serem satisfeitas por φ.

Suponhamos que φ_k está definida e unicamente determinada para $k < n$. Um elemento de $F_n (n > 0)$ é da forma $(s_t, a_1, \ldots, a_k)$

com $s_t = \langle 0_1, \ldots, 0_k \rangle$ $a_i \in F_{r_i}$, e

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = n - 1.$$

Portanto, $\varphi_{r_i}(a_i)$ está unicamente definida para $i = 1, \ldots, k$. Além disso como $(s_t, a_1, \ldots, a_n) = s_t(a_1, \ldots, a_k)$ e como a condição de homomorfismo de φ requer que $\varphi(s_t, a_1, \ldots, a_k) = s_t(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_k))$, definimos $\varphi_n(s_t, a_1, \ldots, a_k) = s_t(\varphi_{r_i}(a_1), \ldots, \varphi_{r_i}(a_k))$.

Isso determina φ_n unicamente, e como cada elemento de F pertence a exatamente um subconjunto F_n, colocando-se $\varphi(\alpha) = \varphi_n(\alpha)$ para $\alpha \in F_n$ $(n \geq 0)$, vemos que φ é um homomorfismo de F em A satisfazendo $\varphi\sigma(x) = \varphi_0 = \tau(x)$ para todo $x \in X$ como requerido, e que φ é o único tal isomorfismo, e isso completa a prova.

A partir dos desenvolvimentos acima realizados passamos, agora, ao desenvolvimento das linguagens formais.

3.3 A LINGUAGEM DA TEORIA DE TIPOS SIMPLES

Apresentamos nesta seção, como uma s-álgebra específica, a linguagem da teoria de tipos simples. Isso nos permite, ao considerar fragmentos dessa linguagem, formular linguagens específicas para uma determinada teoria, como a teoria dos grupos, por exemplo.

Para cada tipo $a \in \tau$, temos:

1. Um conjunto enumerável V_a, dito o conjunto de variáveis de tipo a.

2. Um conjunto R_a de símbolos de constante de tipo a, que eventualmente pode ser vazio para alguns elementos de τ.

Definimos agora o conjunto de todas as variáveis e constantes da linguagem.

Definição 3.3.1 *Para todo $a \in \tau$:*

1. $V = \bigcup V_a$, o conjunto das variáveis;

2. $R = \bigcup R_a$, o conjunto das constantes.

Como podemos observar, há variáveis para cada conjunto do domínio, isto é, para cada conjunto da família D_k há uma família de variáveis restrita a D_k.

Para cada elemento de τ, definimos o termo deste tipo:

Definição 3.3.2 *Seja $a \in \tau$, o conjunto T de termos é definido por:*

$$T_a = V_a \cup R_a$$

Como estamos tratando as linguagens formais como álgebras, o próximo passo é especificar o conjunto de geradores para formar nossa álgebra livre. Vamos tomar X como sendo o seguinte conjunto:

$$X = \{T^a(t_0, \ldots, t_{n-1}) | T^a \in T_a, a = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in \tau, t_k \in T_k\}$$

Como se pode ver nesta definição, $a \neq 0, 1, \ldots, n-1$. A idéia intuitiva disso é que os termos individuais não devem, por si mesmos, formar fómulas atômicas.

Seja $s = \{\neg, \rightarrow, (\forall x) | x \in V_a, a \in \tau\}$, tal que $\neg = \langle 0 \rangle$, $\rightarrow = \langle 0, 0 \rangle$, e $(\forall x) = \langle 0 \rangle$. Neste ponto, é necessário atentar à identificação feita previamente, na demonstração do teorema 3.2.1, entre as operações na s-álgebra livre e os elementos da sequência de tipos s. Os conectivos e quantificadores não são de fato tipos, mas, como a construção feita na prova do teorema, eles são construídos a partir dos correspondetes tipos da sequência s, e, seguindo a convenção feita, o mesmo símbolo é usado para nomear ambos. $P(V, R)$ é a s-álgebra livre sobre o conjunto X acima, com V e R como acima definidos. Uma vez mais, o leitor não deve confundir os símbolos que representam as relações definidas sobre a álgebra com seus tipos, que nos informam sobre os objetos que elas relacionam e o peso da relação.

Um elemento w de $P(V, R)$ é chamado fórmula.

Definição 3.3.3 *Seja $w \in P(V, R)$, o conjunto $V(w)$ é o conjunto de variáveis da fórmula w, assim definido:*

$$V(w) = \bigcap \{U | U \subseteq V, w \in P(U, R)\}$$

As variáveis que ocorrem numa fórmula podem ser livres ou ligadas. Definimos o conjunto das variáveis livres da seguinte maneira:

Definição 3.3.4 *Seja $w \in P(V, R)$. O conjunto $var(w)$ de variáveis livres de w é indutivamente definido:*

1. $var(R^a(t_0, \ldots, t_{n-1})) = \{t_i : t_i \in V_i\}$;

2. $var(X^a(t_0, \ldots, t_{n-1})) = \{t_i : t_i \in V_i\} \cup \{X^a\}$;

3. $var(\neg w) = var(w)$;

4. $var(w_1 \to w_2) = var(w_1) \cup var(w_2)$;

5. $var(\forall x w) = var(w) - \{x\}$.

Isso conclui a nossa construção das linguagens formais como álgebras livres. O próximo passo é definir a ordem de uma linguagem.

Da teoria de tipos acima exposta podemos agora considerar fragmentos dela. Em seguida, mostramos como podemos obter aquelas que são conhecidas como linguagens de primeira, segunda ou n-ésima ordem. Consideremos agora a seguinte definição:

Definição 3.3.5 *A ordem de um termo é a ordem de seu tipo.*

Para obtermos linguagens de segunda ordem, por exemplo, temos de nos restringir a termos cujos tipos sejam de ordem 1 ou menos, e, em particular, a variavéis cujas ordens de seus tipos sejam 1 ou menos (ou seja, variáveis de ordem 1 ou menos). Além disso, temos de considerar, ao construir o tipo de similaridade s, somente quantificadores sobre variáveis de tipos disponíveis a nós, ou seja, nesse caso, àquelas cujas ordens são 1 ou menos. Assim, quantificamos somente sobre indivíduos ou propriedades e relações sobre indivíduos. Da mesma maneira, podemos obter linguagens de n-ésima ordem restringindo o conjunto de termos à ordem $n-1$ ou menos, e, da mesma forma, permitindo quantificação apenas sobre variáveis de ordem $n-1$ ou menos. Resumimos esse raciocínio na seguinte definição:

Definição 3.3.6 *A ordem de uma linguagem* $\pounds$ *é definida como* $ord(\pounds) = max\{ord(x_a) : x_a \in V_a\} + 1$.

Esta definição capta, em nossa opinião, a noção intuitiva de que a ordem de uma linguagem nos informa sobre os conjuntos que quantificamos, ou, mais precisamente, a ordem dos objetos sobre os quais quantificamos.

3.4 A LINGUAGEM DE UMA ESTRUTURA

Nesta seção, relacionamos os dois desenvolvimentos feitos até aqui: a teoria das estruturas e as linguagens vistas como álgebras livres. Como já dissemos, uma questão importante é se, dada uma estrutura, existe uma linguagem mais adequada para se usar associada a ela. De acordo com a abordagem aqui desenvolvida, associada a cada estrutura e podemos construir uma linguagem formal adequada para falar dos elementos desta estrutura. Linguagem esta que tem como símbolos de constante exatamente um símbolo para cada relação presente na estrutura, com ambos, o símbolo de constante e a correspondente relação, sendo de mesmo tipo.

Em nossa abordagem, dada uma estutura e, para construirmos uma linguagem adequada a esta estrutura devemos considerar a sua ordem e restringirmos os termos da linguagem a essa ordem ou menos. Assim, o conjunto X de livres geradores da álgebra livre, como definido, é restrito a esses termos, isto é, ao construirmos uma linguagem formal como uma álgebra livre, o conjunto de livres geradores é constituido pelas fórmulas atômicas construídas através dos símbolos disponíveis.

Como consequência desta discussão, as linguagens nas quais podemos tratar mais adequadamente os elementos de uma estrutura são as linguagens £ tais que $ord(e) \leq ord(\pounds)$.[1] Por exemplo, para estruturas de primeira ordem devemos usar, no mínimo, linguagens de primeira ordem. Tomemos, como um exemplo simples, a teoria de grupos, que lida com grupos (estruturas de primeira ordem). Estas estruturas, pela abordagem aqui desevolvida, são tratadas de forma mais natural por linguagens de segunda ordem, pois assim podemos falar sobre subgrupos e quantificar sobre subconjuntos do domínio. Isso, naturalmente, não significa que seja impossível usar linguagens de primeira ordem nesse caso. Na realidade, a linguagem mais comumente usada para desenvolver a teoria de grupos é uma linguagem de primeira ordem, a linguagem da teoria de conjuntos ZFC, que também é usada para tratar de outras teorias que não são de primeira ordem, como estruturas bem-ordenadas e corpos de Dedekind completos (Kunen 2009, pp. 89,90).

Esta é uma discussão que atualmente é bastante vívida em filosofia e fundamentos da matemática. Devemos nos restringir a linguagens de primeira ordem ou devemos adotar linguagens de ordem superior? Seria uma linguagem de segunda ordem a mais apropriada para se fundamentar a matemática? (Para uma defesa da lógica de segunda ordem ver, por exemplo, Shapiro 1991). No próximo capítulo, abordamos com um pouco mais de pormenor essas e outras questões relacionadas.

Apresentada uma linguagem apropriada (no sentido acima discutido) para se falar dos elementos de uma estrutura e, podem ser definidas, da maneira padrão, para essa linguagem, a noção de uma estrutura

[1] Seguimos aqui sugestão feita por da Costa em comunicação pessoal.

satisfazendo uma sentença α dessa linguagem no sentido tarskiano, isto é, $e \models \alpha$ (da Costa, Rodrigues 2007, p. 6).

3.5 O PREDICADO DE SUPPES

Dada uma estrutura e uma linguagem adequada para esta estrutura, discutimos nesta seção como formular o predicado de Suppes para essa estrutura usando essa linguagem (seguimos aqui da Costa, Chuaqui 1988). A proposta suppesiana de axiomatização de teorias científicas, dentro daquela que é conhecida como abordagem semântica das teorias científicas, é tratada com algum pormenor no capítulo seguinte. Nesta seção, expomos os desenvolvimentos técnicos do trabalho de da Costa e Chuaqui, que deram uma formulação precisa da idéia suppesiana de que axiomatizar uma teoria é dar-lhe um predicado conjutista, ao identificarem esse predicado com o conceito de espécie de estruturas oriundo do trabalho do coletivo francês Bourbaki.

Recordemos, incialmente, a definição de tipo de similaridade de uma estrutura e: uma família de tipos que determina as relações presentes na estrutura. De acordo com esta definição, duas estruturas têm o mesmo tipo de similaridade se os tipos de suas relações formam a mesma família, e se as estruturas têm o mesmo número de conjuntos em seus domínios.

Sejam $e = \langle D_n, R_\iota \rangle$ e $g = \langle E_n, L_\iota \rangle$ estruturas de mesmo tipo de similaridade, podemos estender uma dada função $f : D_k \mapsto E_k$ com $k < n$ para uma função da escala $\varepsilon(D_n)$ na escala $\varepsilon(E_n)$.

Definição 3.5.1 *Seja f uma função como a descrita acima, para cada tipo $a \in \tau$ definimos:*

1. *Para os objetos de tipo k, com $0 \leq k < n$, temos $f(D_k) = \{f(x) : x \in D_k)\}$;*

2. *Para $a \in \tau$ tal que $a = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$, e R o conjunto de objetos de tipo tipo a, temos $f(R) = \mathcal{P}(f(t_{a_0}) \times f(t_{a_1}) \times \ldots \times f(t_{a_{n-1}}))$*

Essa função associa objetos de tipo a em $\varepsilon(D_n)$ a objetos de tipo a em $\varepsilon(E_n)$. O caso mais interessante é quando a seguinte definição é verificada:

Definição 3.5.2 *Sejam $e = \langle D_n, R_\iota \rangle$ e $g = \langle E_n, L_\iota \rangle$ estruturas de mesmo tipo de similaridade $s_{\lambda<\iota}$, e seja f uma função bijetora de D_k*

em E_k com $0 \leq k < n$, dizemos que a família $f' = f_{s_{\lambda<\iota}}$ é um isomorfismo entre e e g quando $f_a(R^a) = L^a$, onde R^a e L^a significam que R e L têm tipo a.

Definição 3.5.3 *Uma sentença Φ da linguagem apropriada para a estrutura e é dita transportável se para toda estrutura g isomórfica a e temos que*

$$e \models \Phi \Leftrightarrow g \models \Phi.$$

Definição 3.5.4 *Um predicado de Suppes é uma fórmula P(e) da linguagem da teoria de conjuntos que diz que e é uma estrutura de tipo de similaridade s satisfazendo Γ, um conjunto de sentenças transportáveis Φ da liguagem adequada a e.*

Quando ocorre *P(e)*, isto é, quando e satisfaz P, e é dita uma P-estrutura. De acordo com da Costa e Chuaqui (da Costa, Chuaqui 1988, p. 104), essa definição captura o sentido no qual podemos dizer que uma teoria é uma classe de modelos, precisamente a classe de modelos que são P-struturas para algum predicado P adequado.

Consideremos agora exemplos de predicados de Suppes para duas teorias: a teoria de grupos e a mecânica clássica de partículas.

Exemplo 1 O predicado de Suppes para a teoria de grupos.

Seja G um conjunto; como definido previamente, introduzimos a função t_G, ou simplesmente t, cujo domínio é o conjunto τ de tipos, para criar a escala $\varepsilon(G)$. Escolhemos, então, a relação $\circ$ de tipo $\langle 0,0,0\rangle$, isto é, $\circ \in \mathcal{P}(G \times G \times G)$, uma relação $-$ de tipo $\langle 0,0\rangle$, isto é, $- \in \mathcal{P}(G \times G)$ e um elemento i de tipo 0, isto é, $i \in G$. De acordo com as definições estabelecidas anteriormente, a ordem de cada uma das relações é 1 e a ordem de i é 0. Lembrando o fato de que uma função n-ária é uma relação $n+1$-ária, a operação usual de composição se torna uma relação ternária, e a operação inverso se torna uma relação binária.

A estrutura de grupo é $G = \langle G, \circ, -, i\rangle$ e a ordem desta estrutura é a maior ordem de suas relações, logo, $ord(G)$ é 1. O próximo passo é escrever os postulados e dar o predicado conjuntista.

Como definido anteriormente, a linguagem para G é uma linguagem de segunda ordem. O conjunto T de termos é formado por um conjunto de variáveis $V = \bigcup V_a$, tal que $ord(a) \leq 1$ e o conjunto $\{\circ^{\langle 0,0,0\rangle}, -^{\langle 0,0\rangle}, i^0\}$ de símbolos de constante. O tipo de similaridade s para essa linguagem é $s = \{\neg, \rightarrow, (\forall x) | x \in V_a, a \in \tau\}$, com a restrição

feita acima de que $ord(a) \leq 1$. Para o conjunto X de livres geradores tomamos
$X = \{T^a(t_0, \ldots, t_{n-1}) | T^a \in T_a, a = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in \tau, t_k \in T_k\}$, portanto, pelo teorema 3.2.1 existe uma álgebra livre sobre o conjunto de geradores X, e essa é a linguagem para a estrutura G.

Com a linguagem especificada, podemos escrever os axiomas usuais para a teoria de grupos. Denominando-os 1, 2 e 3, escrevemos:

1. $\forall x \forall y \forall z(((x \circ y) \circ z) = (x \circ (y \circ z)))$

2. $\forall x \exists y(x - y = i)$

3. $\forall x(x \circ i = x)$

Então, o predicado de Suppes para a teoria de grupos é escrito da seguinte maneira:

$$G(X) \Longleftrightarrow \exists G \exists \circ \exists - \exists i(X = \langle G, \circ, -, i \rangle \wedge 1 \wedge 2 \wedge 3)$$

Exemplo 2 O predicado de Suppes para a mecânica clássica de partículas.

Inicialmente, precisamos apresentar algumas estruturas matemáticas: a primeira delas é o corpo dos números reais R. Nesta estrutura há apenas um conjunto base, o conjunto R dos números reais. Os objetos desse conjunto são de tipo 0. As operações são $+$, $\cdot$, 0, 1, $<$, que são de tipos $\langle 0,0,0 \rangle$, $\langle 0,0,0 \rangle$, 0, 0 e $\langle 0,0 \rangle$, respectivamente. Fazemos um pequeno alerta aqui para que o leitor não confunda o símbolo de tipo 0 com o elemento 0 do corpo. De maneira usual, essas são as operações de adição, multiplicação, o elemento neutro da adição, o elemento neutro da multiplicação e a relação "menor que" entre os números reais. A linguagem do corpo dos números reais, de acordo com a nossa abordagem, é uma linguagem de segunda ordem. Os axiomas para o corpo dos reais são bem conhecidos e são fórmulas transportáveis.

A próxima estrutura é a de espaço vetorial sobre o corpo dos reais R. Nesse estrutura há dois conjuntos base, o conjunto V de vetores e o conjunto R dos números reais. Os objetos de V são do tipo 1. Junto com as operações do corpo R, teremos aqui as operações $\mathbf{+}$, $\cdot$, $\mathbf{0}$ que são de tipos $\langle 1,1,1 \rangle$, $\langle 0,1,1 \rangle$, 1, respectivamente. Um espaço vetorial euclidiano é um espaço vetorial com produto interno e produto vetorial, denotados por **(x,y)** e [**x,y**] e cujos tipos são $\langle 1,1,0 \rangle$ e $\langle 1,1,1 \rangle$, respectivamente. As ordens das linguagens de espaço vetorial e de espaço vetorial euclidiano são, de acordo com nossa abordagem, 2, isto é, uma linguagem de segunda ordem. Os axiomas para essas estruturas são bem conhecidos e claramente transportáveis.

A próxima estrutura que apresentamos é de espaço afim real, que é um espaço vetorial com a adição de um domínio A, cujos elementos são de tipo 2. A nova operação é a diferença de pontos, a qual para $p, q \in A$ é denotada por $q - p$, e cujos tipos são $\langle 2, 2, 1\rangle$. O próximo axioma necessário é aquele que diz que a diferença de pontos é um vetor e o da lei da adição de pontos, que diz que $p, q, r \in A$, $q - p + r - q = r - p$. Um espaço afim em que o espaço vetorial é euclidiano é um espaço euclidiano. E neste nós podemos definir a distância entre pontos $p, q \in A$ da seguinte maneira: $d(p, q) = |q - p| = \sqrt{\textbf{(q-p,p-q)}}$.

Definimos agora a estrutura de *espaço-tempo galileano*, o qual também podemos chamar de espaço-tempo clássico. Adicionamos ao espaço afim quadridimensional apresentado acima adicionando um novo universo V_1 que é um subconjunto de V, e as operações $\mathbf{t}$ de A em R de tipo $\langle 2, 0\rangle$ e relações de tipo $\langle 3, 3, 1\rangle$ e $\langle 3, 3, 3\rangle$ denotadas $(,)$ e $[,]$ respectivamente. $\mathbf{t}$ representa a medida do tempo. Os dois axiomas seguintes devem ser satisfeitos:

1. V_1 é um espaço vetorial tridimensional que é subespaço de V e $(,)$ e $[,]$ são seu produto escalar e produto vetorial, respectivamente;

2. $\mathbf{t}$ é uma função de A em R tal que para cada $P \in A$ o conjunto $\{Q : \mathbf{t}(Q) = \mathbf{t}(P)\}$ é um espaço vetorial euclidiano com espaço vetorial V_1. O espaço afim para $\mathbf{t}(P) = r$ é denotado por $A(r)$.

Para a mecânica clássica de partículas, adicionamos um novo universo $\mathbf{P}$, o conjunto de partículas e o conjunto N dos números naturais, para fins de indexação. Logo, a família de universos pode ser dada pela sequência R, V, A, V_1, $\mathbf{P}$ e N. As operações sobre esses conjuntos são aquelas necessárias para tornar R, V, A, V_1 uma estrutura de *espaço-tempo galileano* adicionadas das seguintes novas relações:

1. Uma função $\mathbf{a}$ de tipo $\langle 0, 2\rangle$ que nos fornece a origem de cada tempo;

2. Uma função $\mathbf{s}$ de tipo $\langle 4, 0, 2\rangle$ para a posição de uma partícula em cada tempo. Denotamos essa função por $\mathbf{s}_p(t)$;

3. Uma função massa m de tipo $\langle 4, 0\rangle$;

4. Uma função força $\mathbf{f}$ de tipo $\langle 4, 4, 0, 1\rangle$ que representa as forças internas;

5. Uma função força $\mathbf{g}$ de tipo $\langle 4, 0, 5, 1\rangle$ que representa as forças externas.

Para os axiomas específicos da mecânica precisamos de algumas conceitos da análise, como o de derivada e o de convergência de séries. O corpo dos números reais deve ser completado com as correspondentes operações de diferenciação, integração e adição de séries. Como a diferenciação, por exemplo, leva funções reais em funções reais, a ordem dessa operação será 2. Portanto, em nossa abordagem, a linguagem adequada para se falar sobre essa estrutura é, no mínimo, uma linguagem de terceira ordem.

Axiomas cinemáticos

1. A imagem de $\mathbf{t}$ é um intervalo I de números reais;
2. $\mathbf{P}$ é um conjunto finito e não vazio;
3. $\mathbf{a}$ é uma função de I em A tal que, para cada $i \in I$, $\mathbf{a}(i) \in A(i)$;
4. $\mathbf{s}$ é uma função de $\mathbf{P} \times I$ em A tal que para cada $p \in \mathbf{P}$ e $i \in I$ temos que $\mathbf{s}_p(i) \in A(t)$;
5. m é uma função de $\mathbf{P}$ em R;
6. $\mathbf{f}$ é uma função de $\mathbf{P} \times \mathbf{P} \times I$ em V_1;
7. $\mathbf{g}$ é uma função de $\mathbf{P} \times I \times N$ em V_1;
8. Para todo $p \in \mathbf{P}$ e $i \in I$ a função vetorial $\mathbf{s}_p(i) - \mathbf{a}(i)$ é duas vezes diferenciável em i.

Axiomas dinâmicos

9. Para $p \in \mathbf{P}$, $m(p)$ é um número real positivo;
10. Para $p, q \in \mathbf{P}$ e $i \in I$, $\mathbf{f}(p, q, i) = -\mathbf{f}(q, p, i)$;
11. Para $p, q \in \mathbf{P}$ e $i \in I$, $[\mathbf{s}(p, i) - \mathbf{s}(q, i), \mathbf{f}(p, q, i) - \mathbf{f}(q, p, i)] = 0$;
12. Para $p \in \mathbf{P}$ e $i \in I$, a série $\Sigma_n \mathbf{g}(p, i, n)$ é absolutamente convergente;
13. Para $p \in \mathbf{P}$ e $i \in I$, $m(p)D^2(\mathbf{s}_p(i)) = \Sigma_{q\in\mathbf{P}}\mathbf{f}(p, q, i) + \Sigma_n \mathbf{g}(p, i, n)$.

Onde D^2 representa a segunda derivada com relação a i.

Essas fórmulas são transportáveis, no sentido definido previamente. A motivação para elas pode ser encontrada, por exemplo, em Suppes 2002.

3.6 DEFINIBILIDADE EM ESTRUTURAS

Um tópico interessante a ser explorado sobre estruturas é o da definibilidade. A questão de se saber quais subconjuntos do domínio de uma estrutura são definíveis nesta estrutura está intimamente ligada à ordem da linguagem que usamos para falar da estrutura. Vejamos a seguinte definição:

Definição 3.6.1 *Seja L uma linguagem de primeira ordem e e uma estrutura para L. Seja D o domínio de e. Seja $k \in N^+$ e $X \subseteq D^k$. O conjunto X é definível em e se, e somente se, existe uma fórmula φ de L tal que todas as variáveis livres de φ ocorrem em $a_1, a_2, ..., a_k$ e*

$$X = \{(a_1, a_2, ..., a_k) \in D^k : e \models \varphi(a_1, a_2, ..., a_k)\}$$

Uma pergunta pertinente é se existe uma noção absoluta de definibilidade. Segundo H. Rogers (Rogers 1965), os lógicos, preocupados com sistemas formais particulares, passaram ao largo dessa questão, ao passo que uma noção natural de definibilidade absoluta tem sido corrente em matemática. Trata-se da noção de invariância sob automorfismos. Um automorfismo em uma estrutura e é uma função bijetora de A em A (onde A é o domínio da estrutura) na qual cada relação da estrutura é preservada. Por exemplo, a função $f(n) = n+1$ é um automorfismo da estrutura $\langle Z, \leq \rangle$, pois para x, y quaisquer de Z, $x \leq y \Leftrightarrow x+1 \leq y+1$, mas essa função não é um automorfismo da estrutura $\langle Z, + \rangle$, pois $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$ para x, y quaisquer. Um subconjunto do domínio de uma estrutra e, $V \subseteq A$, é invariante sob todos os automorfismos se $f(V) = V$ para todo automorfismo f da estrutura. Em $\langle Z, + \rangle$ o único automorfismo não trivial (os automorfismo triviais são as funções identidade) é $f(n) = -n$, logo, o conjunto $\{1\}$ não é absolutamente definível já que ele não é preservado pelo automorfismo, mas o conjunto $\{-1, 1\}$ o é. Em $\langle Z, \leq \rangle$, $f(n) = n + k$ é um automorfismo para todo $k \in Z$. Os únicos conjuntos absolutamente definíveis são Z e $\emptyset$

Posto isso, o passo seguinte é o de se perguntar acerca da relação entre o conceito de definabilidade e o de definabilidade absoluta. Os automorfismos de uma estrutura preservam as relações definíveis nessa estrutura, portanto, se um subconjunto do domínio de uma estrutura é defínivel nessa estrutura, ele será invariante sob todos os automorfismos dessa estrutura. Contudo, a noção de definabilidade absoluta não implica a de definabilidade. Vejamos um exemplo ilustrativo: consideremos a estrutura $\langle \omega, +, \cdot \rangle$, onde ω denota o conjunto dos números naturais e os símbolos $+$ e $\cdot$ a adição e multiplicação usuais nos naturais. O único automorfismo de $\langle \omega, +, \cdot \rangle$ é a função identidade $f(n) = n$, para todo número natural n; temos, então, que todos os subconjuntos de ω são invariantes sob este automorfismo e, portanto, que todo subconjunto de ω é absolutamente definível em $\langle \omega, +, \cdot \rangle$. Mas os conjuntos definíveis em $\langle \omega, +, \cdot \rangle$ o são por uma fórmula da linguagem associada à $\langle \omega, +, \cdot \rangle$. E como essa é uma linguagem enumerável, o número de fórmulas da linguagem também será enumerável, ou seja, apenas um número enumerável de subconjuntos de $\langle \omega, +, \cdot \rangle$ será definível. Ora, como o conjunto dos subconjuntos de ω tem é um conjunto não enumerável, há muitos subconjuntos de ω que não serão definíveis em $\langle \omega, +, \cdot \rangle$. Há, portanto, muito mais subconjuntos absolutamente definíveis de $\langle \omega, +, \cdot \rangle$ do que definíveis. Ainda que usássemos linguagens de segunda ordem ou ordens superiores o mesmo problema persistiria, pois continuaríamos com uma totalidade enumerável de fórmulas. Disso, podemos concluir que a noção de definibilidade absoluta é absoluta no sentido de ela não ser relativa à linguagem associada à estrutura, seja ela de qual ordem for.

A situação é diferente para as linguagens infinitárias. De fato, como é explicitado no teorema a seguir, definibilidade absoluta corresponde à expressibilidade em linguagens infinitárias. Consideremos uma lógica infinitária de primeira ordem $L_{\alpha\beta}$, onde α e β são ordinais. Sendo $L_{\alpha\beta}$ de primeira ordem, quantificações sobre objetos, da forma $(\exists x_0, x_1, ..., x_\lambda)$ para $\lambda < \beta$ são permitidas; assim como disjunções da forma $\varphi_0 \vee \varphi_1 \vee ... \vee \varphi_\mu$ para $\mu < \alpha$, e conjunções da forma $\varphi_0 \wedge \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_\mu$ para $\mu < \alpha$. Se α e β são maiores que ω, essas quantificações, disjunções e conjunções podem ter comprimento infinito. A atribuição de significados às formulas de $L_{\alpha\beta}$, com α e β maiores que ω apenas estende o que ocorre no caso finito. Por simplicidade, limitamos o teorema a seguir a estruturas da forma $\langle U, R \rangle$ onde R é uma relação binária sobre U, e a linguagens infinitárias $L_{\alpha\beta}$ contendo um único símbolo de predicado binário P.[2]

Teorema 3.6.1 *Seja $\langle U, R \rangle$ uma estrutura e $V \subseteq U$. V é absolutamente definível em $\langle U, R \rangle$ se, e somente se, para algum ordinal α e algum ordinal β, existe uma fórmula de $L_{\alpha\beta}$ (com o símbolo de predicado P) que define V, onde P é interpretado como R e os quantificadores são interpretados como variando sobre U.*

Prova: $(\Leftarrow)$ Suponhamos por hipótese que V é definível em $\langle U, R \rangle$ através de uma fórmula de $L_{\alpha\beta}$, então existe uma fórmula $\varphi(x)$,

[2]O teorema e sua demonstração encontram-se em Rogers 1965, p. 197.

tal que $u \in V \Leftrightarrow \varphi(u)$ é verdadeira em $\langle U, R\rangle$ (onde "$\varphi(u)$" indica a fórmula $\varphi(x)$ com a variável x interpretada como um objeto $u \in U$). Seja f um automorfismo de $\langle U, R\rangle$. Pela definição de automorfismo, para u_1, u_2 de U, $\langle u_1, u_2\rangle \in R \Leftrightarrow \langle f(u_1), f(u_2\rangle \in R$. Temos, então, que $\varphi(u)$ é verdadeira se, e somente se $\varphi(f(u))$ é verdadeira (a demonstração desse fato no caso de linguagens finitas é feito com indução sobre o comprimento das fórmulas; para fórmulas de $L_{\alpha\beta}$ simplesmente se estende o caso finito). Portanto, $u \in V \Leftrightarrow f(u) \in V$, ou seja, $f(V) = V$ e, portanto, V é absolutamente definível.

($\Rightarrow$) Suponhamos por hipótese que V é absolutamente definível em $\langle U, R\rangle$. Suponhamos também que U é infinito (o caso com U finito pode ser obtido com simples mudanças na construção abaixo). Seja γ um número ordinal de mesma cardinalidade que U. Sejam α e β ordinais de cardinalidade maior que γ. Seja $\{e_\lambda\}_{\lambda<\gamma}$ uma enumeração de U sem repetições. Seja $J = \{\lambda | e_\lambda \in V\}$. Para todo par $\lambda, \mu < \gamma$, seja $\psi_{\lambda\mu}$ a fórmula $Px_\lambda x_\mu$ se $\langle e_\lambda, e_\mu\rangle \in R$ e seja $\psi_{\lambda\mu}$ a fórmula $\neg Px_\lambda x_\mu$ se $\langle e_\lambda, e_\mu\rangle \notin R.(x_0, x_1, ..., x_\lambda, ...$ são as variáveis individuais de $L_{\alpha\beta}$). Seja então a seguinte fórmula $\varphi(x)$:

$$(\exists x_0, x_1, ..., x_\lambda, ...)_{\lambda<\gamma}$$

$$[(\bigwedge_{\lambda,\mu<\gamma_{\lambda\neq\mu}} x_\lambda \neq x_\mu) \wedge (\bigwedge_{\lambda,\mu<\gamma} \psi_{\lambda\mu}) \wedge (\forall y)[\bigvee_{\mu<\gamma} y = x_\mu] \wedge (\bigvee_{\lambda\in J} x = x_\lambda)]$$

Mostremos agora que a fórmula $\varphi(x)$ acima define o conjunto V em $\langle U, R\rangle$, isto é, que $u \in V \Leftrightarrow \varphi(u)$ é verdadeira em $\langle U, R\rangle$.

Se $u \in V$, então $u = e_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in J$. Interpretando $x_0, x_1, ..., x_\lambda, ...$ como $e_0, e_1, ..., e_\lambda, ...$ a fórmula $\varphi(u)$ é verdadeira em $\langle U, R\rangle$, pois:

cada $x_\lambda \neq x_\mu$ para todo $\lambda, \mu < \gamma$ é verdadeira, pois $e_0, e_1, ...e_\lambda, ...$ é uma enumeração sem repetições de U.

cada $\psi_{\lambda\mu}$ é verdadeira pela própria definição de $\psi_{\lambda\mu}$.

$$[\bigvee_{\mu<\gamma} y = x_\mu]$$

é verdadeira pois como $e_0, e_1, ...e_\lambda, ...$ é uma enumeração de U, cada elemento de U é algum componente desa enumeração.

$$\bigvee_{\lambda\in J} x = x_\lambda$$

é verdadeira pois, pela definição do conjunto J, como $e_0, e_1, ...e_\lambda, ...$ enumera os elementos de U, enumera também os elementos de $V \subseteq U$, logo, um elemento de V será algum componente dessa enumeração.

Portanto, se $u \in V$, $\varphi(u)$ é verdadeira em $\langle U, R\rangle$.

Reciprocamente, suponhamos que $\varphi(u)$ é verdadeira. Seja $d_0, d_1, ..., d_\lambda, ...$ uma interpretação para as variáveis $x_0, x_1, ..., x_\lambda, ...$ que torna $\varphi(u)$ verdadeira em $\langle R, U\rangle$.

Então, sob essa interpretação, como cada $x_\lambda \neq x_\mu$ para todo $\lambda, \mu < \gamma$ é verdadeira e, para cada $y \in U$, $y = x_\mu$ para algum $\mu < \gamma$ é verdadeira, $\{d_\lambda\}_{\lambda<\gamma}$ é uma enumeração de U sem repetições.

Seja $f : U \to U$ uma função tal que $f(e_\lambda) = d_\lambda$ para todo $\lambda < \gamma$. Como $e_0, e_1, ...e_\lambda, ...$ e $d_0, d_1, ...d_\lambda, ...$ são enumerações sem repetições de U, temos que f é bijetora.

Como $\varphi(u)$ é verdadeira quando interpretamos $x_0, x_1, ..., x_\lambda, ...$ como $d_0, d_1, ..., d_\lambda, ...$, temos que com essa interpretação cada $\psi_{\lambda\mu}$ é verdadeira, isto é, f preserva R e o complementar de R, ou seja, f é um automorfismo.

Como V é absolutamente definível em $\langle U, R\rangle$, isto é, invariante sob os automorfismos de $\langle U, R\rangle$ e $V = \{e_\lambda\}_{\lambda\in J}$, temos $V = \{d_\lambda\}_{\lambda\in J}$.

E, pelo fato de $\varphi(u)$ ser verdadeira com a interpretação especificada acima, podemos concluir que a quarta parte da fórmula φ é verdadeira, ou seja, que $u = d_{\lambda_0}$ para algum λ_0 de J. Logo, $u \in V$. Portanto, se $\varphi(u)$ é verdadeira em $\langle U, R\rangle$, $u \in V$, o que conclui a demonstração.

4 A FILOSOFIA E AS TEORIAS CIENTÍFICAS

Uma análise apropriada da ciência deve compreender, ao menos, os seguintes tópicos:

1. **Dimensão lógica**

   É a que trata da análise e explicitação do aspecto lógico da ciência. A ciência é uma atividade eminentemente racional, em que são realizadas inferências. De sorte que, implícita ou explicitamente, há uma lógica subjacente à atividade científica. [1] Esta lógica subjacente é, comumente, a lógica clássica. Isto, contudo, não pode ser tomado como regra, já que nada nos garante que, em certos contextos, lógicas heterodoxas não sejam as mais adequadas para a investigação científica, como propõem alguns autores (mais sobre isso em da Costa 1999, cap. 5). Ademais, esta dimensão trata de explicitar as teorias matemáticas que comparecem em determinada investigação científica.

2. **Dimensão metodológica**

   É a que trata dos métodos utilizados na observação, experimentação e medição, por exemplo, a teoria dos erros e a estatística. A metodologia delimita as interconexões entre teoria e experiência, e a atividade científica é circunscrita pelas normas metodológicas.

3. **Dimensão sintática**

   É a que trata dos aspectos sintáticos de uma teoria científica, em particular com a preocupação de axiomatizar e formalizar uma teoria científica. Esta dimensão, em certo sentido, engloba a dimensão lógica;

4. **Dimensão semântica**

   É a que nos permite tratar os conceitos de verdade, de denotação, de consequência semântica e de outros conceitos similares de uma maneira rigorosa; também é a dimensão na qual estão inseridos os modelos (no sentido da teoria de modelos); desta forma, está conectada com a dimensão sintática;

[1] Muito oportuno aqui é lembrarmos do primeiro princípio pragmático da razão de da Costa: "A razão sempre se expressa por meio de uma lógica" (da Costa 2008, p. 61).

5. **Dimensão epistemológica**

   É a que trata das limitações e possibilidades de conhecimento originadas por métodos e técnicas quando utilizados na investigação de determinado campo do saber.

6. **Dimensão pragmática**

   É a que trata, entre outras coisas, da psicologia, da economia e da sociologia da ciência;

7. **Dimensão metassemiótica**

   É aquela na qual se produz uma crítica filosófica da ciência, que apesar de informal, pois "constitui-se essencialmente em crítica de idéias, de pressupostos, da linguagem (...), consiste em atividade de elucidação de conceitos, na dialetização de concepções teóricas e na análise de conceitos fundamentais."(da Costa 1999, p. 208); também trata do aspecto metafísico e ideológico da ciência;

8. **Dimensão histórica**

   É a que trata da evolução histórica de conceitos, paradigmas e métodos que nortearam a ciência em cada época.

Neste capítulo tratamos das dimensões sintática, semântica e epistemológica, relacionadas à análise filosófica das teorias científicas.

4.1 O SEXTO PROBLEMA DE HILBERT

Podemos afirmar, prescindindo de maior rigor histórico, que o uso de métodos formais no estudo de teorias científicas, mais especificamente do método axiomático como o concebemos hoje, teve um grande incentivo a partir do famoso sexto problema de Hilbert. Em palavras hoje célebres, Hilbert apresentou esse problema da seguinte forma:

> "As investigações dos fundamentos da geometria sugerem o problema: tratar, de maneira semelhante, por meio de axiomas, aquelas ciências físicas nas quais a matemática desempenha um papel importante; em primeiro plano estão a teoria das probabilidades e a mecânica.
>
> "Investigações relevantes, feitas por físicos, sobre os fundamentos da mecânica, já existem; eu me refiro aos escritos de Mach, ... Hertz, ... Boltzmann ... e Volkmann ... . É, portanto,

> desejável que a discussão dos fundamentos da mecânica seja levada a efeito também por matemáticos. Assim, o trabalho de Boltzmann sobre os princípios da mecânica sugere o problema de se desenvolver matematicamente os processos-limites, nele meramente indicados, que levam de um ponto de vista atomístico às leis do contínuo. Inversamente, poder-se-ia tratar de derivar as leis do movimento dos corpos rígidos por um processo limite, a partir de axiomas envolvendo a idéia de variação contínua das condições de um material que encha o espaço de forma contínua, condições essas definidas por parâmetros. Porque a questão da equivalência de diferentes sistemas de axiomas é, sempre, de grande interesse teórico.
>
> “Se a geometria deve servir de modelo para o tratamento dos axiomas da física, convém que se tente primeiramente, por meio de pequeno número de axiomas, delimitar uma classe, tão extensa quanto possível, de fenômenos físicos, e, então, pela adição de novos axiomas, chegar-se gradualmente às teorias mais especiais. Ao mesmo tempo, o princípio de Lie da subdivisão talvez possa ser deduzido de uma teoria profunda dos grupos infinitos de transformações. O matemático terá de levar em conta não apenas as teorias próximas da realidade, mas, também, como na geometria, todas as teorias logicamente possíveis. Ele precisa estar alerta para obter um inventário completo de todas as conclusões que são conseqüências do sistema de axiomas assumido.
>
> “Mais ainda, o matemático tem o dever de testar exatamente, em cada instância, se os novos axiomas são compatíveis com os axiomas previamente admitidos. O físico, quando suas teorias se desenvolvem, muitas vezes se encontra forçado, pelos resultados de suas experiências, a formular hipóteses novas; ele se baseia, para garantir a compatibilidade dessas hipóteses com os axiomas anteriores, somente nas experiências efetuadas ou em certa intuição física, prática essa que na construção rigorosamente lógica de uma teoria não é aceitável. A demonstração desejada de compatibilidade de todas as pressuposições parece-me, também, de relevância, pela circunstância de que o esforço para se obter tal demonstração sempre nos conduz, mais efetivamente, a uma formulação exata dos axiomas.” (original de 1900 apud da Costa 1987, pp. 1-3)

Parece-nos claro que, apesar de alguma alterações, esse espírito — a aplicação de métodos formais [2] — imbuiu boa parte da filosofia da

[2] Entre os métodos formais, naturalmente, consideramos além do método axiomático, toda a lógica que veio a desenvolver-se no século XX, como a teoria

ciência no século XX, especialmente os campos em que trabalharam os filósofos e lógicos rotulados como partidários das abordagens semântica e sintática.

Embora o método axiomático tenha sempre sido considerado, desde os antigos gregos até os dias atuais, como um método fundamental de codificação e sistematização das disciplinas lógico-matemáticas, foi apenas no século XX que ele disseminou-se de fato, logrando atingir em profundidade não só a matemática como as ciências empíricas, marcadamente a física. [3] Nesse sentido, a proposta de Hilbert de tratar a física por meio de axiomas pode ser vista como bastante inspiradora desse movimento.

Algumas das razões que podemos elencar em favor da axiomatização das ciências físicas são: 1) através da axiomatização, os conceitos básicos da teoria em estudo tornam-se mais claros e se pode fazer uma idéia mais perfeita do alcance e do significado da mesma; 2) a parte teórica e a parte observacional da teoria, embora difíceis de serem separadas, se tornam mais nítidas; 3)As interconexões entre a teoria axiomatizada e outras que ela pressupõe ou nas quais é utilizada volvem-se mais precisas; 4)A axiomatização permite que se fale, rigorosamente, dos modelos da teoria e que se empreguem resultados da lógica e da matemática na sua investigação metateórica (por exemplo, lançando mão de teoremas de representação e imersão, como proposto por Suppes) (da Costa 1987, pp. 3,4; ver também Suppes 1968).

Contudo, devemos atentar também às limitações do método axiomático. Enquanto ele nos parece um instrumento poderoso de análise e investigação de determinado campo do saber, é bem menos natural vê-lo como uma ferramenta propositiva de teorias científicas, ou seja, como algo a que se recorra quando da busca por novas teorias, ainda que isso não se aplique à matemática, como os casos da topologia e da álgebra deixam transparecer. Essa visão, segundo Leo Corry, é também compartilhada por Hilbert, para quem o método axiomático era, acima de tudo, uma ferramenta para a investigação retrospeciva da estrutura lógica de teorias científicas bem estabelecidas e consolidadas, e as dificuldades encontradas no estudo delas (Corry 2006, pp. 1701,1702).

Os inúmeros avanços das disciplinas formais no século XX serviram de estímulo e apoio a muitos matemáticos, lógicos e filósofos

---

da prova, teoria da recursão, teoria de modelos.

[3]Devemos ressalvar aqui, no entanto, o emprego do método axiomático em obras marcantes da ciência de séculos passados, como o *Principia* de Isaac Newton e a *Mecânica Analítica* de Joseph Louis Lagrange.

em suas perquirições sobre a ciência e, mais especificamente, sobre o conceito de teoria científica. Duas das grandes concepções filosóficas que emergiram no século passado e buscaram analisar e compreender as teorias científicas são as chamadas abordagem sintática, também conhecida como Received View, e a abordagem semântica.[4]

A abordagem sintática tem origem entre os membros e as idéias do célebre grupo de pensadores conhecido como Círculo de Viena. Resumidamente, nesta abordagem, uma teoria científica **T** pode ser caracterizada, segundo Muller 2009, da seguinte maneira:

1. Erigindo-se uma linguagem formal $L_{\mathbf{T}}$, cujo vocabulário, $VOC(L_{\mathbf{T}})$, inclua todos os predicados que expressam conceitos fundamentais de **T**. O conjunto $SENT(L_{\mathbf{T}})$ das sentenças de $L_{\mathbf{T}}$ é definido indutivamente da maneira usual.

2. Erigindo-se um aparato dedutivo formal que permita raciocinar rigorosamente em $L_{\mathbf{T}}$, isto é, provar teoremas (isso fixa uma relação de dedução entre as sentenças, geralmente abreviada por $\vdash$).

3. Separando-se um certo número de sentenças de $SENT(L_{\mathbf{T}})$ para formar o conjunto $AX(\mathbf{T})$ dos axiomas de **T**; eles devem ser formalizações dos postulados, princípios e leis que caracterizam **T** e não são dedutíveis de outros postulados, princípios e leis de **T**.

   A quíntupla $F_{\mathbf{T}} \equiv \langle VOC(L_{\mathbf{T}}), SENT(L_{\mathbf{T}}), AX(\mathbf{T}), T, \vdash \rangle$, é a formalização de **T**, onde T é o fecho dedutivo dos axiomas (que deve ser consistente):

   $$T \equiv \{\alpha \in SENT(L_{\mathbf{T}}) | AX(\mathbf{T}) \vdash \alpha\}$$

   Os 3 primeiros passos podem ser tomados tanto para teorias matemáticas quanto para teorias empíricas; os dois passos seguintes são tomados apenas para teorias empíricas.

4. Distinguindo-se no vocabulário de $L_{\mathbf{T}}$ os termos teóricos e os termos observacionais, a fim de conectar $F_{\mathbf{T}}$ aos resultados de experimentos e observações. Os axiomas que contêm somente termos teóricos são chamados postulados teóricos, e aqueles contendo

[4] Apesar de a abordagem semântica e a abordagem sintática serem historicamente consideradas como opostas, é necessário ressalvar que essa divisão não é tão clara como alguns filosófos (principalmente os identificados com a abordagem semântica) buscaram apontar, e que considerações semânticas e pragmáticas entraram nas elaborações dos membros do Círculo de Viena. Mais sobre isso em Mormann 2007.

ambos termos teóricos e observacionais - e portanto, conectando-os - são chamados postulados de correspondência. As sentenças de $L_{\mathbf{T}}$ compostas apenas por termos observacionais são, em princípio, abertas à verificação ou à falsificação, isto é, é possível, em princípio, determinar se uma sentença observacional é verdadeira ou falsa através de observações relevantes. Para tornar isso possível, a sub-linguagem observacional de $L_{\mathbf{T}}$ é interpretada (no sentido lógico padrão) num domínio específico $D_{\mathbf{T}}$ de objetos observáveis relevante para $\mathbf{T}$; isso provê também, através dos postulados de correspondência, a chamada interpretação parcial das sentenças teóricas.

5. Seja $O_t(\mathbf{T}) \subset SENT(L_{\mathbf{T}})$ o conjunto de sentenças observacionais verificadas pelos cientistas num determinado tempo t e que são relevantes para $\mathbf{T}$; sendo estas membros de $D_{\mathbf{T}}$. Uma formalização $F_{\mathbf{T}}$ é considerada empiricamente adequada num determinado tempo t se, e somente se, T for consistente e toda verdade relevante para $\mathbf{T}$ empiricamente estabelecida, isto é, toda sentença observacional verificada em $O_t(\mathbf{T})$, for membro de T. Em outras palavras se, e somente se

$$O_t(\mathbf{T}) \subset T \subset SENT(L_{\mathbf{T}})$$

Esse esquema, correndo o risco da generalização, configura o esqueleto daquilo que ficou conhecido como abordagem sintática (ver, por exemplo, Suppe 1977). No entanto, no decorrer do século passado, essa abordagem foi perdendo adeptos e hoje, pelo menos na forma como foi concebida, é considerada anacrônica. Nesse processo, a abordagem semântica, por mais que não esteja isenta de críticas, se impôs na filosofia da ciência contemporânea. Sugerimos três fatores que contribuíram fortemente para a passagem da abordagem sintática à abordagem semântica a partir de fins dos anos 40 do século passado: 1) as contundentes críticas recebidas. Dentre elas, duas das principais eram que o foco nas linguagens formalizadas acarretaria em extrema artificialidade e dificuldade na reelaboração das teorias; e que a ênfase na linguagem poderia ter como consequência que, ao se indentificar uma teoria com um conjunto de enunciados, toda diferença nos axiomas implicaria uma diferença na teoria, o que entraria em choque com o fato de que podemos ter duas axiomatizações diferentes da, intuitivamente dizendo, mesma teoria. Essas e outras tantas críticas presentes na literatura sobre o tema acabaram minando a posição sintática; 2) as ferramentas técnicas à disposição. Não podemos deixar de situar historicamente a abordagem sintática, ou seja, entender esta abordagem dentro do contexto dos desenvolvimentos técnicos de sua época, pois, como sugeriu Steven French (French 2010), no esforço de representar as teorias científicas, os filósofos da ciência se voltam para as ferramentas que eles dispõem. No caso dos positivistas lógicos, essas ferramentas eram os recursos proporcionados pela lógica de primeira ordem (e podemos incluir também a teoria dos tipos), e, no caso de Suppes e seguidores, as ferramentas eram aquelas da nascente teoria de modelos. Posto isso, parece claro que novas ferramentas, quando incorporadas à análise filosófica, possam vir a tornar obsoleta a concepção que atualmente se afigura hegemônica; 3) a evolução do método axiomático. Esse é um ponto que desenvolvemos mais longamente na próxima seção. Fazemos, portanto, apenas uma pequena menção aqui: como argumentaremos, o modo de lidar com o método axiomático que está inserido principalmente nos trabalhos de P. Suppes, não é exatamente a mesma utilizada pelos positivistas lógicos — em geral uma noção de caráter lógico-linguístico, extraída dos trabalhos de Hilbert, Peano, entre outros. O que emerge dos trabalhos de Suppes é uma concepção que primeiramente aparece nos trabalhos de N. Bourbaki, onde o método axiomático assume um caráter conjuntista-estrutural (da Costa 1987, p. 18,19). Como vemos adiante, essa não é uma mudança inocente e traz interessantes consequências à análise filosófica das teorias científicas.

4.2 MODELOS

Provavelmente uma das questões mais centrais de toda a filosofia da ciência é ‘O que é uma teoria científica?’. Uma tentativa de resposta a essa questão, a abordagem sintática nos moldes do Círculo de Viena, apesar de seus interessantes desenvolvimentos, praticamente não é mais considerada como um programa de pesquisa promissor. Atualmente, muitos dos filósofos que arriscam uma resposta empregam, de uma maneira ou de outra, a palavra *modelo*.

A idéia de modelo tem uso em diversos campos do saber e no discurso coloquial, com variadas acepções e funções diversas, muitas das quais incompatíveis entre si. Dentro da filosofia da ciência, uma abordagem das teoria científicas denominada abordagem semântica dá aos modelos um papel de protagonista na resposta à pergunta formulada acima. A abordagem semântica surgiu entre fins da década de 40 e começo da década de 50, e hoje é amplamente utilizada por filósofos de diferentes escolas, tanto realistas quanto anti-realistas. Segundo essa abordagem, para caracterizarmos uma teoria não devemos nos concentrar na particular linguagem que utilizamos para formulá-la mas, antes, nos modelos dos axiomas dessa teoria. Assim, os axiomas de uma teoria, se consistentes, possibilitam que se especifique uma classe de estruturas que são os modelos desses axiomas, e mesmo que diferentes axiomas venham a caracterizar uma mesma classe, isso não gerará problemas, pois a ênfase é dada às estruturas designadas, e não ao modo como elas são selecionadas (para mais informações sobre essa abordagem ver, por exemplo, Suppe 1989). Dentre os debates em torno desta posição, podemos destacar aquele que trata da relação entre teoria e modelos. Basicamente, as posições variam entre aquela que atribui aos modelos um papel representacional e aquela que lhes atribui um papel constitucional de uma teoria. No primeiro caso, abstem-se de dizer o que *é* uma teoria, e busca-se tão somente *representá-la* através de uma classe de modelos, enquanto, no segundo caso, argumenta-se em favor de uma identificação entre teorias e classes de modelo (para uma boa discussão sobre o tema ver da Costa, French 2003, cap. 2 e 3). Outra questão em torno dessa abordagem se refere à própria utilização da palavra "semântica" para designá-la pois, como discute Otávio Bueno (Bueno 1999, cap. 3), não é totalmente claro em que sentido podemos dizer que a proposta daqueles filósofos identificados com essa abordagem pode ser dita semântica.

Como um desdobramento natural desta posição, podemos articular algumas perguntas cujas respostas são fundamentais para a boa compreensão da dita abordagem semântica:[5] o que são modelos? Como os obtemos? Modelos em que sentido desta palavra?

A primeira destas perguntas afigura-se essencial, visto que não há consenso sobre o que são os modelos. Ao buscarmos por esse conceito em livros e artigos e ao observarmos o discurso científico, nos defrontamos com as noções de modelo icônico, modelo por analogia, modelo lógico, entre outras. Contudo, se restringirmos nossa análise aos modelos enquanto estruturas podemos ainda nos perguntar: que tipo de aparato conceitual é empregado para apresentar os modelos? Eles são simplesmente estruturas conjuntistas de primeira ordem, ou seja, aquelas nas quais se pode aplicar as ferramentas da teoria de modelos?

Afirma-se, geralmente, que a abordagem semântica teve como

[5] Ainda que hoje o nome *abordagem semântica* seja mais um rótulo que agrega uma grande quantidade de filófosos de diferentes orientações que um programa unificado de pesquisa, mantemos aqui essa designação por ela estar consagrada na literatura sobre o tema, além de acreditarmos que as questões e colocações aqui desenvolvidas interessem à maioria daqueles que trabalham dentro dessa tradição de pesquisa.

grande inspiração os trabalhos de Alfred Tarski na década de 50 do século passado, quando ele deu início aos desenvolvimentos de um ramo da lógica matemática denominado teoria de modelos que, grosso modo, lida com as relações entre linguagens formais de primeira ordem e estruturas que as interpretam. Podemos observar, da literatura existente, que muitos filófos consideram os modelos nessa acepção tarskiana; e ainda que a proposta de P. Suppes, como a entendemos, faça um uso diferente do conceito de modelo ele próprio, em trabalhos e livros, dá a entender que está se referindo à noção tarskiana de modelo [6] (Suppes 2002, pp. 20-21).

No entanto, há mais aqui. De fato, não é o caso simplesmente de que teorias científicas são, de alguma forma, classes de estruturas no sentido da teoria de modelos, e que os filófosos devem empregar as ferramentas desse ramo da lógica matemática para tirar conclusões sobre elas. Naturalmente, se se quer especificar rigorosamente o que se entende por modelo no contexto filófico da pergunta sobre o que são teorias científicas, devemos ser cuidadosos. Como vemos adiante, baseado no trabalho de Suppes (Suppes 1957, Suppes 2002) e na formulação rigorosa de sua idéia chave por Newton da Costa e Rolando Chuaqui (da Costa, Chuaqui 1988), podemos compreender que as teorias de alguma forma são representadas ou constituídas por uma classe de modelos de duas maneiras diferentes (e isto está relacionado com duas maneiras diferentes de se compreender o método axiomático).

Analisamos nas próximas páginas duas abordagens que denominamos *abordagem de Suppes* e *abordagem de da Costa-Chuaqui.* [7] Como procuramos evidenciar, são maneiras diferentes de se efetuar a axiomatização de uma teoria. E isso nos leva a maneiras diferentes de se compreender a noção de modelo. Ambas as abordagens estão relacionadas entre si: a abordagem suppesiana está inserida no seio de seu grandioso projeto de pesquisa de axiomatização de teorias científicas, iniciado na década de cinquenta do século passado; a abordagem de da Costa-Chuaqui é fruto dos esforços desses dois pesquisadores em produzir uma versão formalizada da primeira abordagem. Ambas são, como as denominamos, axiomatizações internas, na medida em que se realizam *dentro* da teoria de conjuntos ZFC, e ambas expressam a axiomatização de teorias através de um predicado conjuntista, isto é, através de uma fórmula da linguagem de ZFC. As abordagens se

[6] Por modelo na acepção tarskiana, queremos dizer uma estrutura na qual é interpretada os símbolos não-logicos de uma linguagem formal, satisfazendo um conjunto de sentenças dessa linguagem e empregando a correspondente noção de verdade.

[7] Essa distinção foi primeiramente proposta em Krause, Arenhart, Moraes 2011.

diferenciam nos limites de cada uma (há classes de estruturas que podem ser axiomatizados por uma abordagem, mas não por outra) e na maneira como em cada uma delas trabalhamos com estruturas de ordem superior (em geral, as mais utililizadas em teorias científicas). A abordagem de da Costa-Chuaqui já tem toda a sua parte técnica desenvolvida no capítulo anterior. Dedicaremos, portanto, mais espaço à discussão da abordagem suppesiana sem, contudo, deixar de apontar as diferenças entre ambas e a discussão daí resultante.

4.3 AXIOMATIZAÇÕES INTERNAS

Como apontamos, geralmente se diz que a abordagem semântica possui como vantagem sobre a a sintática o fato de não focar sobre uma particular linguagem ou, pelo menos, de não considerá-la como um ponto essencial; ela tem como foco os modelos. Não podemos, no entanto, ignorar completamente a linguagem, na medida em que ao considerar uma classe de estruturas, devemos prover um conjunto de axiomas que essa classe modela. Devemos, portanto, empregar o método axiomático, e isso envolve a estipulação de uma linguagem e de um aparato dedutivo.

De maneira um tanto geral, podemos dizer que uma teoria T compreende três níveis de postulados. Primeiramente, deve-se apresentar uma linguagem formal, geralmente enumerável e, então, seguem-se:

1. Os postulados lógicos, em geral aqueles do cálculo de predicados de primeira ordem com identidade. É possível, no entanto, o uso de lógicas de ordem superior ou, até mesmo, lógicas não-clássicas;

2. Um grupo de postulados "matemáticos", em geral aqueles de ZFC de primeira ordem;

3. Os postulados específicos da teoria, que dependem do campo específico que será analisado.

As duas abordagens que tratamos a seguir são o que podemos denominar axiomatizações internas, visto que são realizadas *dentro* da teoria de conjuntos ZFC. Isso nos permite focar apenas no passo três, já que a lógica subjacente (cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade) e os postulados matemáticos (os axiomas de ZFC) já estão pressupostos.

Notemos que as estruturas que são modelos dos axiomas são entidades conjuntistas que apenas modelam os axiomas específicos da teoria e não os axiomas de ZFC, pois estaríamos neste caso demonstrando a consistência de ZFC dentro da própria teoria (condição proibida pelo segundo teorema de Gödel), supondo, é claro, que ZFC seja consistente. E ainda que estejamos neste trabalho considerando ZFC de primeira ordem para definir as estruturas, há maneiras alternativas de apresentá-las. As mais notáveis são através de lógicas de ordem superior (Carnap 1958), cuja grande diferença é podermos interpretar os elementos básicos de uma estrutura como predicados e não como conjuntos e da teoria das categorias (da Costa, French 2003).

Em distinção ao que estamos chamando de axiomatização interna, denominamos de "externa" uma formulação que não pressuponha, em princípio, uma teoria de conjuntos ou aparato similar. Pressupõe-se apenas uma "certa capacidade intuitiva, de idealização construtiva, cujas regularidades estão catalogadas pela aritmética intuicionista" (da Costa 2008, p. 74) ou, como denomina Kunen, um *finitistic reasoning* (Kunen 2009, pp. 28, 186), isto é, uma metateoria informal, com a qual possamos construir símbolos, compreender e elaborar sequências de números, relações etc. Nesse processo, podemos erigir linguagens satisfazendo os passos (1)-(3) acima até obtermos teorias formais como, por exemplo, ZFC. Uma vez de posse de uma teoria formal, reconstruímos, *dentro* dela, nossas intuições iniciais. Em outras palavras, a lógica (e isso se aplica a outras teorias) deve ser construída duas vezes (Kunen 2009, p. 191), ainda que, é importante salientar, não possamos provar que as nossas contruções formais correspondam exatamente às nossas intuições. Na verdade, há inúmeros exemplos de que a esfera intuitiva e a formal não podem ser justapostas. Para citar um, consideremos o conjunto intuitivo dos números naturais, os quais podem ter um conjunto correspodente completamente diferente em algum modelo da aritmética de primeira ordem (ver, por exemplo, Kaye 1991).

Com isso não se está querendo dizer, naturalmente, que o que denominamos axiomatização interna prescinda da intuição em sua utilização, mas enquanto ela se vale, logo de partida, de todo um aparato conceitual previamente elaborado, a externa ampara-se, de início, tão somente na intuição. No entanto, ressalvemos, a intuição comparecerá, na primeira abordagem, no momento de se estabelecer os axiomas específicos de alguma teoria, processo no qual uma certa semântica informal — que, em geral, não corresponde à semântica formal — de certa forma nos guia na elaboração dos axiomas que, idealmente, buscam captá-la. Contudo, os axiomas, após elaborados, são vistos de uma perspectiva formal, destituídos de significado. Sobre a importância da intuição para as ciências formais, da Costa escreve:

> "na elaboração de linguagens formais, no estudo finitista e metateórico de teorias formalizadas e na edificação de novos sistemas de lógica, há necessidade de uma atividade racional subjacente, de natureza construtiva e intuitiva; é universalmente aceito, hoje, o fato óbvio de que não pode haver aritmética formalizada sem a aritmética intuitiva. No cerne deste tópico, encontra-se a velha disputa entre Russell e Poincaré: o primeiro acreditava que se poderia reduzir a aritmética à lógica, de conformidade com o desejo de Frege, definindo-se a noção de número natural em função de idéias lógicas mais simples, por um simbolismo lógico-formal apropriado. Poincaré, por sua vez, acentuava que a aritmética já se encontrava implícita quando Russell escrevia seus símbolos, quando tratava de diferenciá-los, de organizá-los em expressões simbólicas, de isolá-los, enfim ao elaborar sua linguagem artificial e passigráfica. Hoje se sabe que ambos tinham certa dose de razão. Aliás, Bourbaki, por exemplo, ao apresentar a definição de números naturais em seu sistema, diz claramente que eles não devem ser confundidos com os inteiros intuitivos, não formalizados, que aparecem na metamatemática."
> (da Costa 2008, p. 73)

4.4 A ABORDAGEM DE SUPPES

Segundo uma passagem bastante conhecida do filósofo Patrick Suppes, para axiomatizar uma teoria devemos prover um predicado conjuntista, isto é, uma fórmula da linguagem da teoria de conjuntos (geralmente informal, ou seja, sem a preocupação de justificar todas as entidades conjuntistas utilizadas), e as estruturas conjuntistas que satisfazem esse predicado são chamadas de modelos da teoria. Em Suppes 1957, cap. 12; Suppes 2002 cap. 2 são apresentados e discutidos alguns exemplos de como podemos axiomatizar teorias científicas através de predicados conjuntistas. Suppes não fornece uma definição rigorosa de como se pode escrever tal predicado; seu objetivo é elucidar através de exemplos o que está envolvido na definição de tais predicados.

Suppes, como dissemos, trabalha dentro de uma teoria de conjuntos informal, e podemos também situar nossa discussão no escopo de ZFC ao nível informal. A primeira vantagem de começarmos com ZFC (ou outra teoria de conjuntos similar) é a possibilidade de pressupormos toda a matemática à nossa disposição,[8] sem que tenhamos de nos preocupar em axiomatizar cada uma das teorias matemáticas necessárias para nosso estudo. Outra vantagem é prescindirmos de considerações metamatemáticas que aparecem na axiomatização tradicional, que procede através da elaboração de sistemas formais, e trabalharmos diretamente no ambiente matemático usual, ainda que, na abordagem semântica estejam presentes considerações metamatemáticas.

A abordagem suppesiana consiste, basicamente, em descrever uma classe de estruturas que "modela" algum domínio científico específico. Não nos interessa, para a discussão que queremos promover, os detalhes sobre a maneira como essa classe de estruturas pode ser obtida, maneira essa que, em geral, pode envolver a experiência acumulada do cientista, a experimentação empírica, *insights* etc. O passo seguinte é escrever os postulados da teoria desse domínio científico na linguagem de ZFC ($L_\in$), possivelmente enriquecida com símbolos adicionais. Esses símbolos adicionais podem ser introduzidos de várias maneiras como, por exemplo, pela abreviação de fórmulas de $L_\in$ na metalinguagem, ou através de alguma teoria da definição (basicamente obedecendo-se as condições de Lesniewski, ver Suppes 1957, cap. 8). Esses axiomas são então abreviados através de um predicado conjuntista, uma fórmula de $L_\in$ (possivelmente ampliada), que representa a conjunção desses axiomas.

Suppes, ao comentar seu famoso *slogan* invocado acima, nos diz que *"[P]erhaps the most important point of confusion to clear up about this slogan is the intimate relation between axiomatization and definition"*(Suppes 2002, p. 30). Esclareçamos um pouco esse ponto, mostrando como é possível exprimir o predicado "é um grupo".

Suppes apresenta, inicialmente, a formulação padrão dos axiomas de grupo:

1. $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
2. $x \circ e = x$
3. $x \circ x^{-1} = e$

Em que $\circ$ é a operação binária, e é o elemento neutro e x^{-1} o elemento inverso de x relaticamente à operação $\circ$. A dificuldade com esses axiomas, nos diz Suppes, é que, se tomados de forma isolada, não nos permitem entender como eles se relacionam com axiomas de outras teorias ou como, exatamente, eles se relacionam com os objetos

[8] Quando fazemos referência a toda a matemática, estamos nos referindo à possibilidade, já aludida, de se erigir toda a matemática clássica dentro de ZFC.

matemáticos. Segundo Suppes, estas dificuldades são superadas pelo reconhecimento de que, em essência, esses axiomas são parte de uma definição, a saber, a do predicado "é um grupo". Os axiomas são a parte mais importante dessa definição, eles nos dizem quais são as propriedades mais relevantes que um objeto matemático deve possuir para satisfazer o predicado "é um grupo".

Suppes, então, apresenta algumas definições até obter um "*one-place predicate*", de forma que ele escreve: "*[A]n algebra $G = (A, \circ, e, ^{-1})$ is a group if and only if for every x, y and z in A the three axioms given above are satisfied.*"(Suppes 2002, p. 32) Segundo Suppes, essa caracterização da estrutura conjuntista de grupo responde à questão sobre qual tipo de objeto matemático é um grupo.

Podemos ainda exprimir esse predicado através de uma fórmula de ZFC. Isso não foi feito por Suppes, que se utiliza, para seus propósitos, da teoria ingênua de conjuntos.

Um grupo G, portanto, é uma quádrupla ordenada $\langle G, \circ, e, ^{-1} \rangle$, satisfazendo os axiomas 1, 2 e 3 acima. Em símbolos, o predicado para G pode ser expresso da seguinte maneira:

$$P(G) \leftrightarrow \exists G \exists \circ \exists e \exists^{-1} (G = \langle G, \circ, e, ^{-1} \rangle \wedge 1 \wedge 2 \wedge 3)$$

Suppes chama de grupo qualquer estrutura $G = (A, \circ, e, ^{-1})$ que satisfaça esse predicado. Em outras palavras, $G = (A, \circ, e, ^{-1})$ é um modelo dos axiomas da teoria de grupos. Mas o é em que sentido? Observemos que nada nos é dito sobre o conceito de satisfação. Uma característica dessa abordagem é que mostrarmos que uma estrutura *satisfaz* determinados postulados, significa provarmos que os objetos e as relações desta estrutura possuem as propriedades estabelecidas por esses postulados. E isso é feito *dentro* de ZFC. Então, de que maneira mostramos que alguma estrutura pertence à classe caracterizada por um determinado predicado conjuntista, por exemplo, que a estrutura $\langle Z, + \rangle$ é um grupo? Nesse caso, simplesmente derivamos como teorema de ZFC que os elementos de Z, juntamente com a operação $+$, possuem as propriedades requeridas para serem um grupo. Dizemos, então, que $\langle Z, + \rangle$ *satisfaz* os axiomas da teoria de grupos e, portanto, que essa estrutura é um *modelo* desses axiomas de grupo.

Notemos, contudo, que as noções de "satisfação" e "modelo" diferem do usual em lógica. De fato, não há, neste caso, uma linguagem formal específica da teoria de grupos sendo interpretada em alguma estrutura, nem uma função interpretação que associa elementos da estrutura a elementos da linguagem. Em sua acepção tarskiana padrão, modelos são estruturas que satisfazem (num sentido bem conhecido) certas sentenças de uma determinada linguagem formal (ver, por exemplo, Mendelson 1979, pp. 50-55). Já na abordagem de Suppes, restringindo-se ao caso ora em tela, basta mostrarmos, por exemplo, que $\vdash_{ZFC} \forall x, y, z \in Z(x + (y + z) = (x + y) + z)$, para afirmarmos que a estrutura $\langle Z, +\rangle$ satisfaz o axioma da associatividade da adição. Podemos provar esse resultado da seguinte forma: consideremos a expressão $(a +_Z b) +_Z c = a +_Z (b +_Z c)$, que nos diz que a operação $+_Z$, isto é, a operação soma no conjunto dos inteiros, é associativa. Os inteiros a, b e c podem ser vistos no contexto de ZFC como classes de equivalência de números naturais, ou seja, são o mesmo que $[\langle m, n\rangle], [\langle p, q\rangle]$ e $[\langle r, s\rangle]$, respectivamente, com m, n, p, q, r, s números naturais. Podemos escrever então $(a +_Z b) +_Z c = ([\langle m, n\rangle] +_Z [\langle p, q\rangle]) +_Z [\langle r, s\rangle]$. A última expressão é igual a $[\langle (m{+}p){+}r, (n{+}q){+}s\rangle]$, em que $+$ designa a soma entre os números naturais. Agora, nos valendo do fato de que a operação $+$ é associativa entre os números naturais (propriedade esta que é facilmente provada com o princípio da indução), o restante da demonstração é simples: a última expressão, então, é igual a $[\langle m{+}(p{+}r), n{+}(q{+}s)\rangle] = ([\langle m, n\rangle] +_Z ([\langle p, q\rangle]) +_Z [\langle r, s\rangle]) = a +_Z (b +_Z c)$. E o mesmo se aplica aos outros axiomas. Essa é a idéia, como a compreendemos, por trás da sugestão de Suppes de que a ferramenta para a filosofia da ciência é a matemática, e não a metamatemática (van Fraassen, p. 221). Ademais, visto que Suppes atribui um papel especial aos isomorfismos entre estruturas e teoremas de representação (no caso da teoria de grupos, temos o famoso teorema de Cayley[9]), parece razoável que ele siga esse tipo de abordagem, em detrimento das preocupações usuais dos lógicos, que envolvem tópicos como relações de consequência, definibilidade e condições de aplicabilidade de ferramentas da teoria de modelos. Para nos ajudar a compreender melhor de que maneira esta abordagem é a mais consoante com a prática matemática, vejamos outro exemplo: consideremos o modo como a aritmética de Peano é desenvolvida nos textos usuais de teoria de conjuntos (ver, por exemplo, Enderton 1977). Neles, prova-se que em ZFC existe uma estrutura $\langle \omega, 0, \sigma\rangle$, comumente denominada estrutura de Peano, em que ω é o conjunto dos ordinais finitos de von Neumann, 0 é o conjunto vazio que, por definição, pertence a ω, e σ é a função sucessor que, para cada $n \in \omega$, atribui $n \cup \{n\}$, o seu sucessor por definição. Em seguida, prova-se que os axiomas específicos de Peano são *satisfeitos* diretamente em ZFC; por exemplo,

[9]Esse teorema diz, sucintamente, que todo grupo é isomorfo a um particular grupo de permutação, ou seja, qualquer grupo, por mais variada que seja a natureza de seus elementos, pode ser representado como um grupo de permutações.

que σ é injetora e que ω é indutivo. Assim, os axiomas de Peano são teoremas de ZFC quando entendidos como propriedades desta estrutura particular. Neste caso, novamente, não está envolvida uma linguagem específica da aritmética que deve ser interpretada nesta estrutura, a fim de mostar que a estrutura satisfaz os axiomas formulados nesta linguagem. Já quando apresentamos uma linguagem para a aritmética, por exemplo, de primeira ordem $\pounds_{AR} = \{0, s, +, \cdot\}$, e a interpretamos em uma estrutura de Peano em ZFC, precisamos de uma atribuição de objetos na estrutura para os símbolos da linguagem, frequentemente realizada por uma função interpretação, e de uma relação de satisfação entre sequências de elementos do domínio e fórmulas escritas nesta linguagem. Em particular, para as fórmulas que representam a versão em primeira ordem dos axiomas de Peano, temos que na interpretação usual a estrutura de Peano acima, com as devidas modificações, é modelo, no sentido de Tarski, da aritmética de Peano, quando esta for formulada em linguagem de primeira ordem.

Buscando aprofundar um pouco mais esse ponto, e seguindo a idéia de se utilizar a matemática e não a metamatemática nesse tipo de análise, observemos que o que estamos chamando de axiomatização no sentido de Suppes também difere da acepção padrão. Como dissemos, no caso suppesiano estamos lidando com os objetos matemáticos diretamente. Visto que Z é um termo da linguagem da teoria de conjuntos que denota o conjunto dos números inteiros (construído em ZFC), quando dizemos que a estrutura formada por esse conjunto com a operação $+$ (também um termo dessa linguagem, denotando uma operação em Z) possui determinada propriedade, nós a estabelecemos *diretamente* na linguagem de ZFC; não se trata, primeiramente, de enunciar essa propriedade numa linguagem formal específica da teoria de grupos, por exemplo, e, então, coordenar esses símbolos com aqueles presentes no conjunto para então mostrar que a fórmula que expressa determinada propriedade é satisfeita pela estrutura $\langle Z, +\rangle$. Neste último procedimento, estamos operando no nível da metamatemática. Na abordagem suppesiana, pelo menos como a entendemos, nos mantemos sempre na matemática, ou seja, nos referindo diretamente à teoria de conjuntos, sem a mediação de uma linguagem formal específica da teoria que queremos tratar. Devemos salientar que a argumentação aqui apresentada pode, talvez, não conformar-se com a maneira como o próprio Suppes entende seu trabalho, já que há passagens em sua obra em que ele parece comprometer-se com a concepção tarskiana de modelo [10] mas, ao mesmo tempo, nos parece claro que a

[10] "I claim that the concept of model in the sense of Tarski may be used without

argumentação acima reflete o modo como Suppes executa seu trabalho.

Seguindo a discussão, é importante assinalar que do ponto de vista metateórico, a classe de modelos selecionada por um determinado predicado conjuntista é dependente do modelo de ZFC em que estivermos trabalhando, e esse fato, em determinados casos, pode ter importantes consequências. Um exemplo que ilustra essa situação é o seguinte: suponhamos que determinada teoria faça uso do conjunto $A = \{2^{\aleph_0}, \aleph_\alpha\}$, onde α é um número cardinal. Ao nos perguntarmos sobre a quantidades de elementos desse conjunto, nossa resposta dependerá do modelo de ZFC que estivermos considerando, visto que a noção de cardinalidade não é absoluta, isto é, varia de acordo com o modelo. Podemos, portanto, ter situações em que A possui dois elementos, por exemplo, quando $\alpha = \aleph_\omega$; em outros modelos, contudo, A pode ter apenas um elemento, se considerarmos algum em que valha a hipótese do contínuo e $\alpha = 1$ (ver Kunen 2009, p. 160). Além disso, como ZFC é uma teoria de primeira ordem, se for consistente não pode ter seus modelos construídos dentro da própria teoria. Em particular, assumindo-se sua consistência, ZFC possui um modelo enumerável, e nesse modelo, por exemplo, o conjunto dos números reais é enumerável. Esse fato pode trazer consequência interessantes ou grandes complicações para a filosofia da ciência ao se buscar relacionar, por exemplo, teorias e experimentos. Em poucas palavras: o que podemos dizer sobre teorias empíricas quando consideramos um modelo enumerável de ZFC? É possível conduzir uma análise das teorias científicas na qual busque-se "capturar" fatos empíricos do mundo em tais modelos? Como poderíamos conceber o mundo de acordo com uma teoria como uma classe de estruturas nesse modelo específico? Quais seriam as consequências, por exemplo, do uso de modelos enumeráveis para algumas das principais concepções filosóficas erigidas na abordagem semântica? Como isso afetaria, por exemplo, as *subestruturas empíricas* dos modelos das teorias na abordagem de van Fraassen? Não tratamos neste trabalho destas questões, mas estamos certos de que elas merecem, no futuro, ser analisadas e elucidadas.

O último tópico que tratamos da proposta que denominamos abordagem de Suppes é uma comparação dessa maneira de efetuar a axiomatização de teorias com a axiomatização padrão em linguagens formais de primeira ordem. Apesar de sua simplicidade, a abordagem suppesiana é bastante poderosa. Enquanto a axiomática padrão em primeira ordem da teoria de grupos (para continuar com o nosso exemplo) caracteriza como modelos desses axiomas a classe de todos os grupos e

distortion as a fundamental concept [...]", Suppes 2002, pp. 20,21 apenas ela, o predicado conjuntista suppesiano nos permite axiomatizar classes mais restritas de estruturas. Um exemplo típico é axiomatizarmos todos os grupos exceto alguma classe específica. Por simplicidade, suponhamos que desejamos axiomatizar todos os grupos com excessão do grupo aditivo dos inteiros, $\langle Z, +\rangle$ (o procedimento é o mesmo para classes maiores). Podemos realizar isso com a simples adição, ao predicado conjuntista para grupos apresentado anteriormente, de uma quarta condição (outro axioma), a saber, um axioma restrigindo as estruturas que satisfazem o predicado, ou seja, impondo que entre as estruturas que satisfazem o predicado, todas elas sejam diferentes de $\langle Z, +\rangle$, o que pode ser facilmente expressado no predicado através da condição $G \neq Z$. Tomando outro exemplo, consideremos a estrutura de Peano $P = \langle \omega, 0, \sigma\rangle$, com os axiomas usuais da aritmética escritos na linguagem de ZFC. E seja, agora, a estrutura $2P = \langle 2\omega, 0, 2\sigma\rangle$, onde 2ω é o conjunto dos números naturais pares e 2σ representa a adição de 2, que também é um modelo desses axiomas. Podemos escrever um predicado de Suppes com os postulados de Peano mais a condição de que o domínio seja diferente de 2ω, por exemplo, e, então, essa estrutura não pertence à classe de modelos desses postulados. Isso é possível pois, na linguagem de ZFC, podemos fazer referência a um particular elemento que desejemos excluir da classe de estruturas determinada pelo predicado. Nesse ponto reside uma diferença fundamental entre a abordagem de Suppes e a de da Costa-Chuaqui e mesmo da abordagem de Bourbaki (cuja concepção de estrutura e a noção de espécie de estrutura serviram de inspiração para o trabalho de Newton da Costa e Rolando Chuaqui). Nas duas últimas, o predicado (ou os axiomas, no caso de Bourbaki) possui duas partes principais: a tipificação e os axiomas. Uma tipificação é uma fórmula ou conjunção de fórmulas que especifica as particulares relações, operações e elementos distinguidos que estamos considerando na axiomatização (para a definição formal, ver Bourbaki 1968, p. 261). Exemplifiquemos: no caso dos grupos, a tipificação é $\circ \in P(G \times G \times G)$, isto é, $\circ$ é uma operação do conjunto $G \times G$ no conjunto G, consistindo num conjunto de triplas ordenadas. No caso dos espaços vetoriais, nós temos $+ \in P(V \times V \times V) \wedge \cdot \in P(K \times V \times V)$. Além disso, nessas abordagens, os axiomas devem ser fórmulas *transportáveis*. Intuitivamente, isso significa que a definição das fórmulas não deve depender de nenhuma propriedade específica da construção feita a partir dos conjuntos básicos e auxiliares, mas apenas fazer referência ao modo como essas propriedades se relacionam (Ibid.). Em outras palavras, como coloca Marshall e Chuaqui (Marshall, Chuaqui 1991, p. 932), uma fórmula ϕ é transportável se ela é verdadeira em uma estrutura A e se e, somente se, ela é verdadeira em toda estrutura B isomorfa a A. Na abordagem de Suppes não há essa restrição, isto é, as fórmulas não precisam ser transportáveis, o que amplia as possibilidades de axiomatização.

Como um exemplo que ilustra esse ponto, consideremos um predicado para uma estrutura composta por um conjunto D e uma operação σ tomada de $t(\langle 0, 0\rangle)$ (isto é, uma operação binária sobre D) satisfazendo as seguintes condições (axiomas): (a) $\emptyset \in D$; (b) σ é injetiva; (c) $\emptyset$ não pertence à imagem de σ; (d) D é o menor conjunto que satisfaz as condições anteriores. Nesse caso, estamos fazendo menção a um objeto particular, o conjunto $\emptyset$, e dizendo nos axiomas que ele deve pertencer ao domínio da estrutura. Devido a isso, os axiomas não são transportáveis, ou seja, apesar de eles serem satisfeitos em alguma estrutura, existem estruturas isomorfas a esta em que estes axiomas não são satisfeitos, e as fórmulas transportáveis são justamente aquelas que são invariantes sob isomorfismos. Nesse exemplo, em particular, não é possível axiomatizar a estrutura $M = \langle D, \sigma\rangle$ com esses axiomas na maneira padrão, ou seja, fixando um vocabulário e fazendo uso da lógica de primeira ordem. Ainda que essas dificuldades possam ser contornadas com modificações e adaptações ao nosso exemplo, o ponto aqui é que na abordagem suppesiana não há restrições ao tipo de fórmulas que podemos usar para axiomatizar uma teoria.

Essa discussão pode ser resumida num interessante resultado. Quando nos restringimos a linguagens de primeira ordem, para axiomatizar uma classe de estruturas de primeira ordem, devemos prover um conjunto Γ de sentenças tal que todas as estruturas desta classe sejam modelos (no sentido de Tarski) de Γ; além disso, todos os modelos de Γ devem pertencer à classe axiomatizada. Uma condição necessária e suficiente para que uma classe de estruturas seja axiomatizada por um conjunto de sentenças de primeira ordem é que essa classe seja fechada por equivalência elementar e ultrapodutos. Então, nos valendo dos exemplos prévios, nesse tipo de axiomatização, quando lidamos com os grupos e os axiomas usuais dessa teoria escritos em linguagem de primeira ordem, não é possível que $\langle Z, +\rangle$ fique fora da classe axiomatizada se, por exemplo, $\langle 2Z, 2+\rangle$ estiver na classe (nesse caso, $2Z$ denota o conjuntos dos números inteiros pares e $2+$ a operação de adicionar 2), já que ambas as estruturas são elementarmente equivalentes. O mesmo se aplica às estruturas $P = \langle \omega, 0, \sigma\rangle$ e $2P = \langle 2\omega, 0, 2\sigma\rangle$. Mas, como vimos, dentro da abordagem suppesiana podemos, através de um predicado conjuntista, definir classes de modelos formadas por estruturas de primeira ordem que não são fechadas por equivalência elementar.

Nessa abordagem, portanto, a axiomatização é mais "forte" que a usual, já que nela podemos axiomatizar um número maior de classes de estruturas do que no procedimento usual, e os exemplo apresentados acima confirmam isso. Podemos, portanto, estabelecer o seguinte resultado:

Existem classes de estrutruras de primeira ordem axiomatizáveis através de um predicado conjuntista à maneira de Suppes que não o são através de um conjunto de fórmulas de uma linguagem de primeira ordem.

Esse resultado pode ser generalizado para linguagens de ordem superior através do mesmo procedimento (podemos tomar a classe de todas as estruturas bem ordenadas exceto $\langle \omega, \epsilon \rangle$, por exemplo).

Para compreendermos perfeitamente esse resultado devemos atentar ao seguinte: para axiomatizarmos uma classe de estruturas de primeira ordem, se procedermos edificando uma linguagem formal de primeira ordem específica (como na abordagem de da Costa-Chuaqui) e estabelecendo um conjunto de fórmulas como axiomas, as classes de estruturas axiomatizáveis serão aquelas que estiverem de acordo com as restrições apontadas acima. Mas se escrevermos esses axiomas diretamente na linguagem de ZFC (que, lembremos, é uma linguagem de primeira ordem também), podemos axiomatizar toda a sorte de classes de estruturas que quisermos, mas atendo-se ao seguinte ponto: essas estruturas *não* serão modelos na acepção tarskiana, mas sim no contexto da abordagem de Suppes que explicitamos nesta seção.

4.5 A ABORDAGEM DE DA COSTA-CHUAQUI

No segundo capítulo desta dissertação, apresentamos uma teoria das estruturas; mostramos como, através dos recursos da álgebra universal, podemos construir rigorosamente linguagens formais, em particular a linguagem da teoria de tipos simples (linguagens estas que são representadas por álgebras livres), e apresentamos o que é denominado predicado de Suppes, justamente a formalização da noção de predicado conjuntista apresentada na seção anterior, e tudo isso foi realizado dentro do escopo da teoria de conjuntos ZFC. Essa é a abordagem que denominamos da Costa-Chuaqui.

Recordemos, rapidamente, alguns pontos que são apresentados no capítulo anterior. Dada uma estrutura $e = \langle D, R_\iota \rangle$, podemos associar, canonicamente, uma linguagem a essa estrutura da seguinte forma: para cada tipo $a \in \tau$, temos i) um conjunto enumerável V_a, dito o conjunto de variáveis de tipo a; ii) um conjunto R_a de símbolos de constante de tipo a. A união das variáveis e constantes de todos os tipos formam os termos da linguagem. Após isso, especificamos o conjuntos de livres geradores e o tipo de similaridade da estrutura. De posse disso, o teorema 3.2.1 nos garante a existência de uma álgebra livre sobre o conjunto de livres geradores que é única, a menos de isomorfismo (para os detalhes, ver o capítulo 2 desta dissertação).

Após elaborada a linguagem formal escreve-se, nessa linguagem, os axiomas da teoria que se pretende axiomatizar e define-se um predicado conjuntista (que representa a conjunção desses axiomas), uma fórmula $P(e)$ da teoria de conjuntos que diz que e é uma estrutura de determinado tipo de similaridade satisfazendo um conjunto de sentenças transportáveis (os axiomas da teoria) Γ de uma linguagem adequada a e.

Quando ocorre $P(e)$, isto é, quando a estrutura e satisfaz o predicado P, dizemos que e é uma P-estrutura. De acordo com da Costa e Chuaqui (da Costa, Chuaqui 1988, p. 104) essa definição captura o sentido no qual podemos dizer que uma teoria é caracterizada por uma classe de modelos, precisamente a classe de modelos que são P-estruturas para algum predicado P adequado. Quando tratamos, na seção anterior, daquilo que denominamos abordagem de Suppes, em vários momentos mencionamos as diferenças entre esta abordagem e a de da Costa-Chuaqui. Parece-nos, agora, após essa pequena explanação sobre a última abordagem, que é interessante que sistematizemos e enfatizemos essas diferenças. Comecemos, contudo, pelo que ambas possuem em comum. As duas são o que chamamos de abordagens internas, ou seja, todos os desenvolvimentos são feitos *dentro* da teoria de conjuntos ZFC. Portanto, nesse caso, ao axiomatizarmos uma teoria, temos de nos preocupar apenas com os axiomas específicos da teoria em questão, e podemos pressupor tanto os postulados lógicos, por exemplo os da lógica de primeira ordem com identidade, como os postulados matemáticos, por exemplo, os de ZFC de primeira ordem.

Todas as distinções entre as duas abordagens derivam de uma diferença básica: a maneira como em cada uma realizamos a axiomatização de teorias. Na abordagem de Suppes, como já dissemos, escrevemos os axiomas diretamente na linguagem de ZFC, isto é, utilizamos uma linguagem de primeira ordem, em geral estendida pela adição de alguns símbolos, na qual, quando formulamos os axiomas, fazemos menção direta aos objetos conjuntistas (quando falamos do conjunto dos números naturais, dos números inteiros, *são eles mesmos* que aparecem nos axiomas). Na abordagem de da Costa-Chuaqui, podemos ter uma linguagem formal, à qual o predicado conjuntista faz referência, fazendo um papel de intermediação; neste caso não temos os *próprios* objetos conjuntistas nos axiomas, mas fórmulas. Ademais, nessa abordagem podemos construir linguagens de qualquer ordem, aquelas que serão as mais adequadas dependendo da ordem da estrutura que estamos tratando. Disso decorre que na primeira abordagem os axiomas são sempre escritos numa linguagem de primeira ordem, e as estruturas que são modelos destes axiomas, como exaustivamente enfatizamos na seção anterior, o são numa acepção diferente da tarskiana. Ao passo que, na segunda abordagem, pela maneira como, dada uma estrutura, construímos uma linguagem adequada para ela, as estruturas que satisfazem um determinado conjunto de sentenças Γ são modelos na acepção lógica usual.

No segundo capítulo, apresentamos a construção da linguagem da teoria de tipos simples como uma álgebra livre, mas, em muito casos, não é necessário empregar todos os recursos da teoria de tipos. Uma interessante questão é investigar que classes de modelos podem ser determinadas se os axiomas são escritos em uma ou em outra linguagem, ou seja, quais são os efeitos de restringir a apresentação dos axiomas a uma linguagem de uma ordem específica. Sabemos, por exemplo, que a classe de modelos definida pelo predicado para a aritmética, se empregarmos uma linguagem formal de primeira ordem na formulação dos axiomas, conta, entre seus elementos, com os chamados modelos não-*standard*. Se empregarmos, contudo, linguagens de segunda ordem ou maiores, tais modelos não serão selecionados. [11] Os desenvolvimentos que efetuamos previamente acerca das distinções entre as duas maneiras de se axiomatizar uma teoria podem nos ajudar a aprofundar a discussão deste tópico. Um argumento que pode ser tomado em favor das linguagens de primeira ordem é a possibilidade de com elas lidarmos com estruturas de ordem superior usuais da matemática como, por exemplo, as estruturas bem ordenadas ou os grupos cíclicos. Embora essas estruturas não possam ser formalizadas como teorias de primeira ordem (pois, para definir a noção de boa ordem, por exemplo, temos que dizer que todos os *subconjuntos* não vazios possuem um menor elemento) podemos lidar com elas dentro da linguagem de primeira ordem da teoria de conjuntos ZFC, isto é, podemos construí-las através da lin-

[11] Note o leitor que esse resultado, contudo, é relativo a um determinado modelo de ZFC, isto é, dado um modelo de ZFC, todas as estruturas que satisfazem os axiomas de Peano, quando estes são formulados numa linguagem de segunhda ordem, são isomorfos. Mais sobre isso em Ebbinghaus, Flum, Thomas 1994, p. 113.

guagem de ZFC. Devemos perceber, no entanto, que, nesses casos, essas estruturas de ordem superior devem ser encaradas à luz da abordagem de Suppes. Se, ao contrário, empregarmos linguagens de primeira ordem no sentido da abordagem de da Costa-Chuaqui, essas linguagens não terão poder expressivo suficiente para caracterizar essas estruturas de ordem superior (nesse caso, linguagens de ordem superior serão as mais adequadas). Nessa abordagem, no tocante à classe de modelos selecionada, como apontamos com o exemplo da aritmética acima, há consideráveis diferenças se adotarmos, por exemplo, linguagens de primeira ou segunda ordens.

Outra questão interessante para o filósofo da ciência, seria especificar (se isso for possível) as condições sob as quais os axiomas específicos de determinada teoria poderiam ser escritos exclusivamente em linguagens de primeira ordem, pois, juntamente à sua alegada claridade e evidência, quando nos restringimos a essas linguagens, podemos empregar as ferramentas da teoria de modelos (lembremos que não há uma teoria de modelos bem desenvolvida para linguagens de ordem supeior). Aqui, no entanto, devemos ser cautelosos, pois podem haver diferenças entre uma teoria axiomatizada através de recursos de ordem superior, numa versão, por assim dizer, completa, e uma axiomatização em primeira ordem da mesma teoria. A título de exemplo, podemos citar a geometria elementar de Tarski que *não* é idêntica à geometria euclidiana, mas, antes, uma versão em primeira ordem desta, que não possue todas as propriedades da teoria "completa".

Há também uma interessante posição com relação à ordem das linguagens que difere das que apresentamos acima e atribue pouca importância a esse tipo de debate, por considerá-lo motivado de forma errada (essa é, basicamente, a posição expressa por Wilfrid Hodges em (Hodges 2001, pp. 70-73)). A base desta posição é o conhecido procedimento com o qual é possível escrever sentenças de uma linguagem de ordem superior numa conveniente linguagem de primeira ordem poliádica. Por exemplo, tomando o caso de uma linguagem de segunda ordem, devemos introduzir dois tipos de variáveis. As de primeiro tipo são variáveis para os indivíduos, enquanto as de segundo tipo são para as relações e propriedades. Introduz-se uma relação de pertinência que irá relacionar as variáveis do primeiro às do segundo tipo, ou seja, no lugar em que, dentro da linguagem de segunda ordem, havia uma predicação, há, agora, uma relação de pertinência entre variáveis de dois tipos. Em vista desse procedimento de tradução poderíamos imaginar que, em último caso, não importa muito o tipo de linguagem que utilizamos. E, realmente, Hodges aponta que, do ponto de vista sintático, a situação é essa mesma. Contudo, como dissemos, há diferenças, em relação à classe de modelos selecionada, entre as aritméticas de primeira e segunda ordens; e é justamente nessa questão, a dos modelos, que podemos apontar as diferenças. O próprio Hodges nos diz que o que de fato distingue os cálculo de predicado de primeira e segunda ordem é somente sua interpretação pretendida (Hodges 2001, p. 72). Ademais, devemos observar que não é simplesmente o caso de traduzirmos todas as teorias de segunda ordem em teorias de primeira ordem e concluirmos disso que as linguagens de primeira são tudo o que precisamos. Se traduzirmos, por exemplo, a aritmética de segunda ordem numa linguagem de primeira ordem, não obtemos a aritmética de primeira ordem, mas uma versão mais sofisticada desta, com diferentes tipos de variáveis e complicações adicionais. Também deve ser notado que essa passagem de teorias de ordem superior para teorias de primeira ordem é sempre relativa a uma estrutura: dada uma estrutura de ordem superior, podemos encontrar uma estrutura de primeira ordem associada a ela e uma respectiva linguagem de primeira ordem canonicamente associada a esta estrutura; podemos, então, efetuar investigações, e se algum interessante resultado for encontrado nessa estrutura de primeira ordem, podemos fazer o caminho de volta, retornando à estrutura de ordem superior com a sua linguagem associada e reinterpretar esse resultado (essa técnica é apresentada em da Costa, Rodrigues 2007, pp. 8-9 em que ela é utilizada para tratar problemas de definibilidade).

Esse tipo de discussão sobre linguagens é um tópico presente nos debates atuais, principalmente em filosofia da matemática, mas não nos estendemos mais sobre o assunto, pois foge aos objetivos desta dissertação

4.6 MODELOS EM CIÊNCIA

Por fim, nos parece importante abordar um tema que aparentemente é tratado sem muita problematização na filosofia da ciência: os modelos científicos. O que se busca questionar aqui é uma certa identificação aceita logo de partida por parte dos filósofos da ciência em geral, especialmente por aqueles envolvidos com a abordagem semântica.

Como dissemos, muitos daqueles filósofos que atualmente se preocupam em conduzir uma análise das teorias científicas, ou seja, que buscam compreender em que consiste o tipo de conhecimento teórico que é veiculado pelas teorias científicas,[12] utilizam a palavra modelo

[12]Como observa Muller (Muller 2009, p. 5), a ciência abriga outros tipos de conhe-

em suas análises e respostas. Devido a isso, é importante que esteja sempre claro qual o conceito de modelo que está sendo invocado pelo filósofo em suas análises e reflexões. Na seção anterior, como é patente, o conceito de modelo empregado é o de estrutura conjuntista e, como argumentamos, podemos compreender de duas formas distintas a maneira como essas estruturas modelam os axiomas de determinada teoria. No entanto, é importante observar que o conceito de modelo tem também largo emprego no discurso e na prática científica desde há muito. Esta "coincidência" nos leva à seguinte questão: se os cientistas em seu discurso e em sua prática se utilizam de modelos e os filósofos em suas análises das teorias científicas também se valem de modelos, estão eles falando das mesmas coisas e as utilizando da mesma maneira? Segundo a abordagem semântica, sim. Essa não é uma questão muito discutida atualmente, mas, em nossa opinião, possui reflexos importantes na pesquisa que hoje se faz. Primeiramente, devemos dizer que não é nosso intuito, ao tocar nessa questão, promover uma crítica da abordagem citada; esperamos apenas promover alguns questionamentos acerca da relação entre os modelos empregados na ciência e os modelos enquanto estruturas conjuntistas.

No período logo posterior ao surgimento da abordagem semântica, P. Suppes, em um hoje célebre artigo, afirmou que o conceito de modelo na matemática e nas ciência empíricas seria essencialmente o mesmo (Suppes 1960, p. 289), ou seja, que os modelos (isto é, estruturas conjuntistas) poderiam ser tomados como aquilo que os cientistas querem dizer com "modelo". Apesar de soar um tanto exagerada, essa afirmação, segundo entendemos, tornou-se uma espécie de dogma na filosofia da ciência.

Tentamos brevemente responder a duas questões: 1)Por que os modelos utilizados na prática científica não podem ser identificados com os modelos utilizados na lógica e na matemática?; 2)Qual o ganho, na análise da ciência, ao se considerar que modelos científicos e modelos lógicos não podem ser identificados?

Numa primeira observação, nos parece lícito dizer que, pelo menos aparentemente, estruturas conjuntistas são bastante diferentes daquilo que é, em geral, denominado modelo pelos cientistas. Ainda que em alguns casos, por exemplo, dentro da física teórica quando falamos dos modelos das equações da relatividade geral, possamos dizer que os modelos apresentadas são, de alguma forma, estrututras, há uma gama gigantesca de exemplos que tornam bastante inverossímel essa

---

cimento, como aquele resultante dos dados experimentais, conhecimentos sobre como projetar e conduzir experimentos científicos, de como aplicar as teorias etc.

suposição. Um dos grandes problemas de se assumir essa identificação é que teríamos que aceitar que todos os modelos científicos deveriam estabelecer, de alguma forma, uma relação de satisfação com aquilo que é modelado, mas, enquanto no domínio da lógica essa relação é totalmente clara e compreensível, no caso dos modelos científicos — dada sua extrema diversidade — não há uma maneira clara, afora um uso metafórico da palavra *satisfação*, de estabelecermos essa relação. Ademais, ainda que se consiga estabelecer uma relação de satisfação com um conjunto de sentenças numa linguagem formalizada como é usualmente concebida em lógica, não é isso que determina o sucesso ou não de um modelo dentro da prática científica.

Em Suppes 1960, 2002, o autor nos diz que a diferença entre os modelos científicos e os modelos lógicos é apenas de uso e não de significado, ou seja, os modelos, a despeito de utilizados de diferentes maneiras (em diferentes contextos), manteriam o seu significado original, a saber, aquele da acepção tarskiana de verdade. No entanto, temos que conceder que, em geral, a distinção entre significado e uso não é nem óbvia nem facilmente realizável; ademais, mesmo que suponhamos sempre possível essa distinção, é difícil aceitar que usos da noção de modelo em contextos que sejam muito distantes da análise filosófica das teorias possam manter o mesmo significado do uso em lógica e matemática.

Naturalmente não estamos aqui procurando negar que se possa dar um tratamento aos modelos científicos através de estruturas conjuntistas. Propostas como a de estruturas parciais e isomorfismo parciais [13] (ainda que o propósito dos autores pareça não ser esse) podem talvez ser utilizadas para esse fim. Mas devemos atentar ao seguinte ponto: é possível representar os modelos científicos como estruturas conjuntistas assim como é possível representar os números naturais como conjuntos. Mas, da mesma forma que este fato não implica que os números *sejam* conjuntos, não podemos inferir daí que os modelos científicos *sejam* estruturas conjuntistas.

Podemos enumerar algumas das principais características que os modelos e a idéia de modelagem ocupam na ciência (Bailer-Jones 2002):

1. Modelagem é amplamente concebida como sendo central ao fazer científico.

2. Há considerável diversidade entre definições e descrições de modelos científicos.

[13] ver, por exemplo, da Costa, French 1990, 2003

3. Modelos são comumente caracterizados por simplicações e omissões com o objetivo de "capturar a essência" daquilo que é modelado.

4. Modelos são pensados para prover *insights* e eles não fazem isso simplesmente combinando dados experimentais.

5. É esperado que modelos sejam submetidos a testes empíricos.

O ponto aqui é que os contextos nos quais geralmente é empregada a palavra modelo em ciência simplesmente *não* são contemplados pela análise filosófica (por exemplo, contextos de descoberta científica ou produção de teorias). Não queremos dizer, é claro, que a filosofia não possa contemplar e analisar a produção de teorias, por exemplo, mas não é através da filosofia que se produz teorias físicas ou se dão descobertas científicas. Portanto, parece-nos importante distinguir o estudo dos modelos dentro de uma perspectiva filosófica da afirmação de que os modelos usados em contextos totalmente estranhos à filosofia possam ser os mesmos empregados por esta, ou seja, que os modelos científicos sejam essencialmente modelos à la Tarski.

Mas se os modelos científicos não podem ser identificados com estruturas conjuntistas é natural que nos perguntemos o que afinal são esses modelos. Essa é uma questão complexa, pois não nos parece que cabe ao filósofo determinar o que o cientista deve ou não considerar como modelo, numa atitude normativista que só dificulta o diálogo entre ambos. Mas o importante papel que os modelos vêm desempenhando na ciência principalmente nas últimas décadas originou uma série de questões próprias que talvez merecessem um tratamento mais adequado. E é justamente nesse ponto, acreditamos, que reside o principal desdobramento de se negar uma identificação entre modelos lógicos e científicos: a possibilidade de se produzir uma "teoria sobre os modelos" ou, nos termos usados pela filósofa Daniela M. Bailer-Jones, uma *philosophy of modeling* (Bailer-Jones 2002). Dada a imensa diversidade dos modelos científicos, é praticamente impossível que se produza uma definição ampla o suficiente que os abarque todos. O que, claro, não impede o filósofo de procurar definições para grandes grupos de tipos de modelos e de possíveis relações entre eles.

Questões como essas, nos parece, ultrapassam as preocupações e o escopo do estudo dos fundamentos da ciência e da análise filosófica das teorias científicas, ainda que naturalmente interessem à filosofia da ciência. Em vista disso, seria interessante, dada a distinção que fizemos, propor talvez uma divisão de tarefas dentro da filosofia da ciência: de um lado, o estudo dos fundamentos lógicos das teorias científicas, via teoria de conjuntos e estruturas, por exemplo; de outro, o estudo da prática científica e daquilo que ela compreende, em que compareceriam reflexões sobre os modelos científicos e outros temas. Ainda que não seja possível - e nem desejável - uma separação estrita dessas tarefas, a simples admissão dessas duas zonas de reflexão pode ajudar a endereçar melhor as questões de cunho fundacional e aquelas oriundas da prática científica. Talvez fosse o caso de nos lembrarmos dos positivistas lógicos, os quais, em suas investigações, buscavam realizar uma reconstrução lógica das teorias que não necessariamente envolvesse a prática científica, e que, no fundo, configurava uma visão idealizada da ciência. Nas suas investigações, contudo, eles sabiam que estavam fazendo algo distinto do que fazem os cientistas, e assumiam isso (ver Mormann 2007). Como é sabido, a abordagem semântica buscou substituir a concepção dos positivistas lógicos pois — entre outros motivos — as discussões empreendidas por esta *"did not have much to do with real science"* (Suppe 1989, p. 14). O filósofo, contudo, deve sempre estar ciente de que — e até pode parecer trivial dizê-lo — sua tarefa, suas preocupações e suas indagações *não* são — e nem devem ser — as do cientista. No afã de dar conta da prática científica, alguns proponentes da abordagem semântica podem talvez ter alargado demasiadamente o escopo de atuação desta abordagem, olvidando-se que o propósito inicial dela foi a análise da estrutura das teorias científicas[14]. Nesse caso, uma divisão de tarefas como a proposta acima permite, em nossa opinião, um estudo filosófico da prática científica que possa tratar, entre outras coisas, dos modelos científicos em toda a sua variedade e complexidade.

Como um interessante exemplo de questão filosófica envolvendo modelos, podemos citar o seguinte: como dissemos, uma característica dos modelos científicos é a busca pela representação da "essência" daquilo que é modelado. Neste processo, detalhes são desconsiderados e o modelo resulta, portanto, de simplificações do fenômeno modelado, em que são perdidas precisão e acurácia de dados e até, poderíamos dizer, encetam dúvidas sobre se o modelo final conforma-se ou não à "realidade" do fenômeno. Destarte, compreender e analisar dicotomias como essas, ou seja, captar a essência versus acurácia e captar a essência versus conformar-se à realidade são exemplos típicos de questões que deveriam interessar a todos aqueles que se engajassem numa *philosophy of modeling*.

Naturalmente, desdobrar questões como essa vai muito além das

[14] *"The Semantic Conception of Theories is a philosophical analysis of the nature of scientific theories"* (Suppe 1989, p. 1).

intenções e possibilidades desta dissertação. Se há algum mérito na maneira como abordamos a questão, é chamar a atenção, acompanhado de alguns argumentos, de um tópico pouco discutido na filosofia da ciência e praticamente ausente na produção filosófica brasileira.

5 EPÍLOGO

Esta dissertação não buscou responder alguma pergunta específica ou simplesmente apresentar de maneira pormenorizada algum tópico da filosofia. O tema geral deste trabalho, contudo, é facilmente identificável: os desdobramentos de praticamente um século de aplicações de alguns dos chamados métodos formais na análise filosófica das teorias científicas e seus fundamentos. Naturalmente tal questão, se exaustivamente respondida, demandaria tempo e espaço indisponíveis em um mestrado e seu corresponente trabalho de conclusão. De sorte que nos ocupamos apenas de alguns poucos pontos, buscando questionar certas idéias arraigadas e lançar um olhar, em nossa opinião original, sobre aspectos fundacionais da denominada abordagem semântica das teorias científicas.

A teoria de conjuntos, ZFC, exposta no primeiro capítulo serviu de base para todo o trabalho realizado, e em particular para a definição do conceito de estrutura. Poderíamos agora nos perguntar se era necessário que assim fosse. A resposta é simples: não. Como assinalamos no terceiro capítulo, é possível, alternativamente, introduzir o conceito de estrutura por meios não conjuntistas, por exemplo, através de lógicas de ordem superior, como o fizeram Russell e Carnap. Mas não há ainda um estudo aprofundado da equivalência das duas abordagens. Mais: poderíamos, pelo menos em princípio, ter optado por uma outra teoria de conjuntos, como von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), ou uma teoria de conjuntos paraconsistente (ver da Costa, Bueno, Béziau 1996), ou ainda a teoria de quase-conjuntos (ver, por exemplo, French, Krause 2006). Uma questão que se coloca é que para alguns propósitos pode ser interessante analisar como determinadas teorias podem ser axiomatizadas a partir de diferentes teorias de conjuntos e as consequências filosóficas disso.

A teoria de estruturas desenvolvida no segundo capítulo teve como objetivo primeiro possibilitar o tratamento de três importantes tópicos: estruturas, linguagens formais e teorias científicas através de uma mesma base. E isso, em nossa opinião, é consequência desejável da busca por clarificação conceitual em discussões em torno dos fundamentos da filosofia da ciência. O exemplo exibido no segundo capítulo sobre a mecânica de partículas é esclarecedor nesse sentido. À primeira vista, a abordagem proposta pode parecer deveras complexa, e a abordagem de Suppes, como aparece em seu trabalho e de seus colaboradores, mais simples e próxima do estilo informal do trabalho matemático cotidiano.

Embora estejamos cientes de que o método por nós proposto envolve complicações adicionais se comparado à abordagem suppesiana original, creditamos como de grande importância a precisão e o rigor proporcionados por ele, sempre importantes em discussões de cunho fundacional. Ademais, os esforços extras serão compensados se considerarmos os interessantes resultados que podem ser alcançados. Para citar apenas um, consideremos a teoria de Galois generalizada, desenvolvida por da Costa e Rodrigues (da Costa, Rodrigues 2007). Se estamos interessados em precisão e claridade conceitual, é necessário utilizar um método rigoroso como o que, em nossa opinião, propusemos neste trabalho. No entanto, em algumas situações podemos naturalmente proceder de maneira mais ou menos informal, dando menos atenção ao formalismo.

A filosofia da ciência ainda é uma área de estudos relativamente nova. No que concerne ao estudo das teorias científicas, muitas disputas ainda não estão resolvidas. Como esperamos ter deixado claro neste trabalho, acreditamos que a busca por maior rigor e clareza só traga benefícios às análises e reflexões daqueles que se dedicam a tão importante tema.

REFERÊNCIAS

Bailer-Jones, D. (2002) 'Scientists' Thoughts on Scientific Models', *Perspectives on Science*, vol. 10, no. 3, pp. 275-301.

Barnes, D. W., Mack, J. M. (1975) *An algebraic introduction to mathematical logic*, New York: Springer.

Bourbaki, N. (1968) *Theory of sets*, Hermann and Addison-Wesley.

Bourbaki, N. (1999) 'The architecture of mathematics', In: Ewald, W. (ed.) *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics* vol. 2, pp. 1264-1276.

Bueno, O. (1999) *O empirismo construtivo: uma reformulação e defesa*, São Paulo: CLE.

Carnap, R. (1958) *Introduction to Symbolic Logic and Its Applications*, New York: Dover.

Corry, L. (1996) *Modern algebra and the rise of mathematical structures*, Basel and Boston: Birkhäuser Verlag.

Corry, L. (2001) 'Mathematical Structures from Hilbert to Bourbaki: The Evolution of an Image of Mathematics', in A. Dahan and U. Bottazzini (eds.) *Changing Images of Mathematics in History. From the French Revolution to the new Millenium*, London: Harwood Academic Publishers, pp. 167-186.

Corry, L. (2006) 'On the origins of Hilbert´s sixth problem: physics and the empiricist approach to axiomatization', *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Madrid, Spain, pp. 1697-1718.

da Costa, N. C. A. (1987) 'O conceito de estrutura em ciência', *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática* 8, pp. 1-22.

da Costa, N. C. A. (1999) *O Conhecimento Científico*, Discurso Editorial.

da Costa, N. C. A. (2008) *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, São Paulo: Hucitec (3^a ed.).

da Costa, N. C. A., Bueno, O., Béziau, J-Y. (1996) *Elementos de uma teoria paraconsistente de conjuntos*, São Paulo: CLE, 1996.

da Costa, N. C. A. Chuaqui, R. (1988) 'On Suppes' set theoretical predicates', *Erkenntnis* 29, pp. 95-112.

da Costa, N. C. A., French, S. (1990) 'The model-theoretical approach in philosophy of science', *Philosophy of Science* 57, pp. 248-265.

da Costa, N. C. A., French, S. (2003) *Science and Partial Truth: a unitary approach to models and scientific Reasonig*, New York: Oxford University Press.

da Costa, N. C. A., Rodrigues, A. A. M. (2007) 'Definability and invariance', *Studia Logica* 86, pp. 1-30.

Ebbinghaus, H.D., Flum, J., e Thomas, W. (1994) *Mathematical Logic*, New York: Springer- Verlag.

Enderton, H. B. (1977) *Elements of set theory* New York: Academic Press.

Feferman, S. (1960) 'Arithmetization of metamathematics in a general setting', *Fundamenta Mathematicae*, 49, pp. 35-92.

Franco de Oliveira, A.J. (1982) *Teoria de conjuntos, intuitiva e axiomática (ZFC)*, Livraria Escolar Editora, Lisboa.

French, S. (2010) 'Keeping quiet on the ontology of models', *Synthese*, vol. 172, n. 2, pp. 231-249.

French, S., Krause, D. (2006) *Identity in Physics. A historical, philosophical and formal analysis*, Oxford: Oxford University Press.

Hilbert, D. (1967) 'On the infinite', In: van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, pp. 367-392.

Hintikka, J. (2009) 'What is the axiomatic method', *Synthese*, DOI: 10.1007/s11229-009-9668-8

Hodges, W. (2001) 'Elementary Predicate Logic', In: Gabbay, Dov. M., and Guenthner, F. (eds.) *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 1, 2nd. edition, Springer.

Kaye, R. (1991) *Models of Peano Arithmetic*, Oxford: Clarendon Press.

Krause, D. (2002) *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*, Sâo Paulo: EPU.

Krause, D., Arenhart, J. R. B., Moraes, F. T. F. (2011) 'Axiomatization and Models of Scientific Theories', *Foundations of Science*, DOI: 10.1007/s10699-011-9226-y

Kunen, K. (1980) *Set theory: an intoduction of independence proofs*, Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland (Studies in Logic and the foundations of mathematics, vol. 102).

Kunen, K. (2009) *The Foundations of Mathematics*, London: College Publications.

Marshall, M. V., Chuaqui, R. (1991) 'Sentences of Type Theory: the only sentences preserved under isomorphism', *The Journal of Symbolic Logic*, 56(3), 932-948.

Mendelson, E. (1979) *Introduction to Mathematical Logic*, 2nd ed., New York: D. Van Nostrand.

Mormann, T. (2007) 'The Structure of Scientific Theories in Logical Empiricism', In: Richardson, A.; Uebel, T. *The Cambridge Companion to Logical Epiricism*, pp. 136-164.

Muller, F. A. (2009) 'Reflections on the revolution at Stanford', *Synthese*, DOI: 10.1007/s11229-009-9669-7.

Rogers Jr., H. (1965) 'Some Problems of Definability in Recursive Function Theory', In: Crossley, J. N. (ed.), *Sets, Models, and Recursion Theory*. Proceedings of the Summer School in Mathematical Logic and Tenth Logic Colloquium. Leicester, Aug./Sept., North Holland, pp. 183-201.

Shapiro, S. (1991) *Foundations without foundationalism, a case for second-order logic*, Oxford: Clarendon Press.

Shoenfield, J. R. (1977) 'Axioms of Set Theory', In: Barwise, J. *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, pp. 321-344.

Suppe, F. (1977) *The structure of scientific theories*, Urbana: University of Illinois Press.

Suppe, F. (1989) *The Semantic conception of theories and scientific realism*, Urbana: University of Illinois Press.

Suppes, P. (1957) *Introduction to logic*, New York: Van Nostrand.

Suppes, P. (1960) 'A comparison of the meaning and uses of models in mathematics and the empirical sciences', *Synthese* 12, pp. 287-301.

Suppes, P. (1968) 'The desirability of formalization in science', *Journal of Philosophy* 65, pp. 651-664.

Suppes, P. (2002) *Representation and Invariance of Scientific Structures*, CSLI Pu., Stanford.

Tarski, A. (1953) 'A general method in proofs of undecidability', In: A. Tarski, A. Mostowski, and R. M. Robinson (Eds.), *Undecidable theories.* Amsterdam: North-Holland Publishing Co.

van Fraassen, B. C. (1989) *Laws and Symmetry*, Oxford: Clarendon Press.

Zermelo, E. (1977) 'Investigations in the fundations of set theory I', In: van Heijenoort, J., *From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, pp. 199-215.