

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA**

Jonas Rafael Becker Arenhart

**DISCUSSÕES SOBRE A NÃO-INDIVIDUALIDADE  
QUÂNTICA**

Florianópolis

2011



Jonas Rafael Becker Arenhart

**DISCUSSÕES SOBRE A NÃO-INDIVIDUALIDADE  
QUÂNTICA**

Tese submetida ao Programa de Pós-  
Graduação em Filosofia para a obtenção  
do Grau de Doutor em Filosofia.  
Orientador: Prof. Dr. Décio Krause

Florianópolis

2011



## RESUMO

Neste trabalho tratamos com alguns problemas filosóficos sugeridos pela mecânica quântica não-relativista. Nossa abordagem é formal, no sentido de que privilegiamos o estudo dos problemas em sistemas de lógica e teoria dos conjuntos convenientes, e que nossas sugestões para uma possível solução destes problemas deve ser buscada módulo uma determinada lógica. O tópico central unindo os capítulos consiste na alegada não-individualidade das partículas quânticas. Segundo alguns autores, as partículas com as quais trata a teoria não são indivíduos em nenhum sentido tradicional deste termo. Começamos esclarecendo o campo do debate, mostrando que de um ponto de vista ontológico, ou seja, da natureza das entidades com as quais a teoria está comprometida, temos o que se chama de subdeterminação da metafísica pela física: a teoria quântica por si só não nos fornece recursos para determinarmos se as partículas com as quais ela trata são indivíduos ou não indivíduos. Este é um tópico que deve ser decidido no campo da argumentação filosófica. Aqui, investigaremos como podemos dar um sentido rigoroso para a sugestão de que estas entidades são não-indivíduos introduzindo uma teoria de conjuntos que busca tratar com este tipo de entidades, a teoria de quase-conjuntos. No escopo desta teoria, não-indivíduos são representados como objetos para os quais a noção de identidade não se aplica com sentido. Nos capítulos seguintes apresentamos desenvolvimentos a partir deste ponto. Nossa primeira dificuldade consiste em se introduzir as noções de cardinalidade e contagem para não-indivíduos. Mostraremos como uma definição alternativa na teoria de quase-conjuntos pode ser apresentada com algumas das propriedades que se espera de uma definição de cardinal. Algumas objeções são estudadas e mostramos que não colocam obstáculos a este aspecto de nosso desenvolvimento. Assim, os conceitos de contagem, cardinalidade e individualidade podem ser mantidos separados. Na sequência argumentaremos que a própria noção de quantificação faz sentido quando tratamos de não-indivíduos, ou seja, podemos quantificar com sentido sobre entidades sem individualidade. Segundo alguns autores, a noção de quantificação, tão fundamental para o discurso ordinário, só faz sentido quando pressupomos que a identidade faz sentido para as entidades sobre as quais quantificamos. Argumentaremos que estas teses não se sustentam, e assim, que não constituem ameaça ao modo particular através do qual estamos compreendendo as partículas

quânticas. Por fim apresentaremos um debate recente que busca estabelecer que as partículas quânticas devem obedecer ao Princípio de Identidade dos Indiscerníveis (PII), de modo que não podem ser não-indivíduos. Segundo este princípio, objetos diferindo numericamente possuem uma qualidade que os distingue. Não-indivíduos violam este princípio, eles são tais que podem de fato possuir todas as suas propriedades em comum sem serem numericamente o mesmo. Mostraremos que os argumentos apresentados em favor de PII em mecânica quântica dependem de que se aceite determinadas hipóteses metafísicas, no caso, que se aceite que relações podem ser utilizadas como estabelecendo discernibilidade qualitativa, algo que podemos rejeitar baseados em argumentos razoáveis. Concluimos o trabalho com um apêndice acerca de duas teorias clássicas da individualidade, a teoria de feixes e teoria do substrato, que são amplamente mencionadas no decorrer da tese mas que não são exploradas independentemente no corpo do texto.

**Palavras-chave:** Mecânica quântica. Subdeterminação da Metafísica. Teoria de Quase-Conjuntos. Cardinalidade. Quantificadores. Identidade dos Indiscerníveis.

## ABSTRACT

In this work we shall deal with some philosophical problems stemming from non-relativistic quantum mechanics. We adopt a formal approach, in the sense that we privilege the treatment of the problems inside proper logical and set theoretical systems, and also in the sense that our suggestions for a possible solution to those problems should always be looked for in the scope of a specific system of logic. The main guide line unifying the following chapters consists in the so-called non-individuality of quantum particles. According to some authors, the particles with which quantum theory deals are not individuals in any sense of this term. We begin by schematizing some terms of the debate, showing that from an ontological point of view, that is, from the point of view of the nature of the particles with which the theory is committed, we have the so-called underdetermination of the metaphysics by the physics: quantum theory by itself does not provide resources for us to determine whether the particles are individuals or non-individuals. That is a matter to be determined by philosophical arguments. Here we shall investigate how we may provide a rigorous sense to the suggestion that those entities are non-individuals by the introduction of a particular set theory, quasi-set theory, whose aims are dealing properly with that kind of entities. In the scope of that theory non-individuals are represented as objects for which the concept of identity does not make sense. In the chapters that follow we present developments taking that notion as our point of departure. Our first problem consists in the introduction of the notions of counting and cardinality for collections of non-individuals. We show how an alternative definition in quasi-set theory may be presented with some of the desired properties cardinals should have. Some objections are taken into account and we argue that they pose no obstacles for this aspect of our developments. As a consequence, the concepts of counting, cardinality and individuality may be seen as separated notions. In the sequence we argue that the notion of quantification makes sense when we deal with non-individuals, that is, we may quantify with sense over entities without individuality. According to some authors, the very notion of quantification, so fundamental for ordinary discourse, only makes sense when we presuppose that identity makes sense for the entities over which we quantify. We argue that those theses do not obtain, and so they do not pose difficulties for our particular understanding of the nature of quantum particles. In the end

we present a recent debate in which some authors argue that quantum particles obey the Principle of the Identity of the Indiscernibles (PII), so that they cannot be non-individuals. According to that principle, numerically distinct objects differ qualitatively too. Non-individuals do violate that principle, they are such that they may in fact possess all their properties in common and still be numerically distinct. We show that the arguments presented in favor of PII in quantum mechanics rely on the previous acceptance of some metaphysical hypothesis, in this case, the acceptance that relations do discern qualitatively, a thesis we may reject based on reasonable arguments. We conclude the work with an appendix concerning two classical theories about individuality, the bundle theory and the substratum theory, which are mentioned during the thesis but are not explored independently in the main body of the text.

**Keywords:** Quantum Mechanics. Metaphysical Underdetermination. Quasi-set Theory. Cardinality. Quantifiers. Principle of the Identity of the Indiscernibles.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	9
1.1 ONTOLOGIA E TEORIAS CIENTÍFICAS .....	9
1.2 QUASE-CONJUNTOS E CARDINALIDADE .....	13
1.3 QUANTIFICAÇÃO E PII .....	17
1.4 TEORIAS DA INDIVIDUAÇÃO .....	20
1.5 OBSERVAÇÕES GERAIS .....	22
<b>2 ESQUEMAS ONTOLÓGICOS</b> .....	23
2.1 INTRODUÇÃO .....	24
2.2 DOIS SENTIDOS PARA ONTOLOGIA .....	29
2.3 LÓGICAS .....	37
2.4 MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-RELATIVISTA .....	44
2.4.1 Indistinguibilidade e subdeterminação .....	44
2.4.2 O que as partículas não poderiam ser .....	53
2.5 SUBDETERMINAÇÃO RECONSIDERADA .....	56
<b>3 TEORIA DE QUASE-CONJUNTOS</b> .....	59
3.1 INTRODUÇÃO .....	59
3.2 NÃO-INDIVÍDUOS, IDENTIDADE E A MATEMÁTICA PADRÃO .....	63
3.3 A TEORIA $\Omega$ : LÓGICA E LINGUAGEM .....	68
3.4 AXIOMAS ESTRUTURAIS .....	70
3.5 AXIOMAS DE EXISTÊNCIA .....	75
3.6 AXIOMAS PARA QC .....	80
3.7 EXTENSIONALIDADE FRACA E SUAS CONSEQUÊNCIAS	85
3.8 EQUICONSISTÊNCIA .....	89
3.9 NÃO-REFLEXIVIDADE E OS FUNDAMENTOS DA MQ	92
<b>4 QUASE-CARDINAIS FINITOS</b> .....	97
4.1 CONTAGEM E INDIVIDUALIDADE .....	98
4.2 ROTULANDO E CONTANDO ENTIDADES QUÂNTICAS	104
4.3 QUASE-CARDINAIS SEGUNDO DOMENECH E HOLIK	107
4.4 QUASE-CARDINAIS FINITOS .....	116
4.5 CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE CONTAGEM E CARDINALIDADE .....	123
4.6 RELAÇÃO ENTRE DUAS DEFINIÇÕES DE QUASE-CARDINAL	127
4.7 PROBLEMAS COM ESTAS DEFINIÇÕES? .....	134
4.8 OBSERVAÇÕES ADICIONAIS .....	140
<b>5 QUANTIFICAÇÃO E NÃO-REFLEXIVIDADE</b> .....	143
5.1 INTRODUÇÃO .....	144

5.2	LÓGICAS NÃO-REFLEXIVAS .....	148
5.3	QUANTIFICAÇÃO E IDENTIDADE .....	151
5.4	ANÁLISE DOS ARGUMENTOS .....	154
5.5	SINTAXE E QUANTIFICAÇÃO .....	159
5.6	SEMÂNTICA NÃO-REFLEXIVA .....	164
5.7	QUANTIFICAÇÃO GENERALIZADA .....	169
5.8	QUANTIFICAÇÃO E LINGUAGEM NATURAL .....	175
5.9	OBSERVAÇÕES FINAIS .....	180
<b>6</b>	<b>A VERSÃO FRACA DO PII .....</b>	<b>183</b>
6.1	PII E MECÂNICA QUÂNTICA .....	183
6.2	O STATUS DE PRINCÍPIOS METAFÍSICOS NA MQ .....	187
6.3	VERSÕES DO PII .....	190
6.4	CASO 1: PII E INDIVIDUAÇÃO POR FEIXES DE PROPRIEDADES .....	195
6.5	CASO 2: PII E CONTAGEM .....	201
6.6	CASO 3: PII E EMPIRISMO .....	207
6.7	OBSERVAÇÕES FINAIS .....	212
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>215</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>221</b>
	<b>APÊNDICE A – Apêndice: duas teorias da individualidade</b>	<b>231</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Este é um trabalho tratando de aspectos ontológicos da mecânica quântica não-relativista. Como se sabe, esta teoria é abundante em paradoxos e problemas de interesse para o filósofo da ciência e o estudioso dos fundamentos da ciência em geral. A natureza da ontologia associada a esta teoria é um destes problemas, aquele que nos interessará aqui. Nesta introdução, além de especificar os problemas que serão tratados neste trabalho, também começaremos a esclarecer um pouco da terminologia que será empregada no decorrer do texto. Em todo o trabalho, vamos nos restringir apenas à versão não-relativista da teoria, de modo que em geral, no que se segue, não nos preocuparemos em fazer esta qualificação, que ficará subentendida. Os primeiros pontos a serem esclarecidos então dizem respeito ao sentido que estamos emprestando ao termo “ontologia” e como a investigação da ontologia pode estar associada a uma teoria científica, se é que pode.

### 1.1 ONTOLOGIA E TEORIAS CIENTÍFICAS

“Ontologia” não é um termo simples de se entender precisamente. Geralmente, encontramos a definição de ontologia como sendo o estudo daquilo que há, do que existe. Neste sentido, aparentemente, a ontologia não conhece limites ou restrições, não é uma investigação que busca desvendar os componentes mais gerais do mundo módulo alguma teoria ou outro tipo de atividade de investigação. Trata-se em geral de uma atividade que envolve muita investigação *a priori* e incessante avaliação de argumentos que entraram para a história da filosofia como altamente controversos. Como exemplos deste tipo de controvérsia, temos o problema da existência de universais, e também a questão acerca da melhor forma de se entender os objetos particulares (como sendo constituídos unicamente por suas propriedades, como possuindo alguma forma de substrato último que lhes caracteriza unívocamente, entre outros; tocaremos neste assunto em breve).

Neste sentido que estamos discutindo, a ontologia seria um dos ramos da metafísica, entendida aqui como uma disciplina filosófica abarcando não apenas a ontologia, mas também vários ramos distintos de investigação. Dentre os problemas metafísicos, encontramos atualmente a questão do livre-arbítrio, da identidade pessoal, da causalidade, das modalidades, do tempo e do espaço, entre outras, que não

são simplesmente questões acerca daquilo que existe, mas também são consideradas questões metafísicas. Assim, estaremos entendendo a ontologia como um dos ramos da metafísica, como sendo precisamente aquele ramo que trata das características mais gerais dos seres, ou, se preferirmos, dos tipos mais gerais de seres, fazendo uma classificação dos seres. Em geral, quando tomada neste sentido, a ontologia é vista por muitos filósofos como sendo o ramo central da metafísica, mas não precisamos nos preocupar com esta questão de prioridades aqui.

Mas o problema que poderia surgir agora é: como se classificam os seres? E o quê este tipo de investigação tem a ver com a ontologia como sendo o estudo daquilo que há? É aqui que se faz a ligação entre estes modos de se entender a ontologia e a sua posição como uma disciplina metafísica. A ontologia, por ser uma disciplina metafísica, trata das características mais gerais dos seres, dos tipos mais gerais de objetos que poderão existir. Assim, ela trata daquilo que há, mas do modo mais geral possível: ela estuda a questão sobre se existem propriedades e relações, e como estes devem ser entendidos (como universais, como tropos, ou sem nenhuma existência independente dos objetos particulares que as possuem?), sobre a existência de objetos particulares, que portam propriedades (existem independentemente das propriedades, ou necessitam de algum conjunto de propriedades que os caracterizem sem as quais deixam de ser o que são, ou podem ser eliminados em função de conjuntos de propriedades?). Algumas vezes, o estudo deste tipo de problema é chamado de determinação das ‘categorias ontológicas’, as categorias mais gerais do que existe, que em generalidade perderiam apenas para a categoria do próprio ser.

Todavia, há algum tempo uma nova tendência tem se desenvolvido e predomina no estudo do que se poderia chamar de *ontologia analítica*, ou seja, ontologia estudada por filósofos de orientação analítica, utilizando os métodos preconizados por esta corrente. Uma das características deste tipo de estudo é o uso de ferramentas e técnicas modernas, como aquelas providas pela lógica matemática. Neste caso, seguindo a grande influência do filósofo norte-americano W.V. Quine, a ontologia pode ter sua questão central formulada através do uso de quantificadores existenciais. Perguntar pelo que existe é perguntar pelos objetos que devem ser os valores das variáveis ligadas por quantificadores existenciais em uma sentença verdadeira de uma teoria. Aqui entra o segundo componente deste tipo de abordagem: além de termos que especificar exatamente o que vamos entender por lógica neste contexto, devemos notar que o problema da ontologia fica relativizado a uma teoria específica formulada em uma linguagem específica tendo-se

esta lógica como lógica subjacente.

Neste segundo sentido emprestado ao termo ontologia, conforme dissemos, a investigação fica relativizada a uma teoria. Em geral, as teorias de que se trata aqui são teorias científicas. Este tipo de estudo é claramente influenciado pelo grande desenvolvimento das ciências naturais desde o século dezanove, e de sua capacidade de apresentar alguma forma de progresso (algo não totalmente isento de controvérsias, mas que podemos admitir sem prejuízos para nossa argumentação). Claro, a metafísica, em contraposição, é dita não ter apresentado nenhuma forma de progresso nesses mais de dois mil anos de existência. Buscar apoio nas investigações científicas para as nossas investigações filosóficas certamente não é algo novo na filosofia, mas nos últimos anos esta tendência tem se acentuado, de modo que se tem sugerido que a própria metafísica deve passar por um processo de ‘naturalização’, e a ontologia, em particular, deve se ater segundo esta proposta apenas ao estudo daquilo que há relativamente às nossas melhores teorias científicas. Devemos notar que, ao menos aparentemente, neste último sentido o estudo da ontologia deve ter um caráter quase sempre provisório, sempre dependente da situação atual no desenvolvimento das teorias científicas.

Diante destas duas formas de se estudar a ontologia, como devemos proceder? Podemos tranquilamente abandonar um dos tipos de estudo e nos restringir apenas a um dos tipos de ontologia? Se fizermos isto, defenderemos que a ontologia deve ser estudada apenas em um dos dois sentidos apresentados aqui: ou apenas no seu sentido que chamaremos de *tradicional*, buscando as categorias ontológicas, ou no seu sentido que chamaremos de *naturalizado*, relativamente a teorias científicas. Por outro lado, podemos tentar conciliar os dois tipos de estudos e nos beneficiar com aquilo que ambos podem nos fornecer de melhor para o estudo daquilo que há.

É basicamente a esta tarefa de conciliação que nos dedicaremos nos capítulo 2 deste trabalho. Proporemos que ambas as abordagens ao problema da ontologia possuem pontos positivos e negativos que podem se compensar. De um ponto de vista metafísico, as limitações da ontologia em sentido tradicional concernem a sua quase que total despreocupação com as investigações científicas e com limites à especulação que poderiam ser impostos por uma busca mais guiada por características das teorias científicas. Assim, se não nos preocuparmos com aspectos do mundo ao nosso redor podemos cair muitas vezes em abismos de especulação que poderiam tornar nosso trabalho totalmente desvinculado do mundo real, dando à ontologia e à metafísica aquele

aspecto negativo que muitos evocam ao desqualificar uma proposição ou teoria como meramente ‘metafísica’.

Por outro lado, estudar a ontologia em seu sentido naturalizado também não é o suficiente quando estamos interessados em determinados aspectos do problema ontológico. Tem-se reconhecido cada vez mais que as teorias científicas podem ser compatíveis com diversas ontologias, ou seja, elas podem nos contar diversas histórias sobre como o mundo pode ser, mas sozinhas não são capazes de decidir entre estas diversas opções. Ou seja, devemos recorrer a outro âmbito de argumentações para se estudar a ontologia associada a uma teoria. Não é surpreendente que este outro âmbito seja a discussão de ontologia em seu sentido tradicional. Proporemos que este é um dos principais aspectos em que os dois sentidos de ontologia podem ser vistos como colaborando: a ontologia em seu sentido tradicional fornece as categorias que a ontologia em seu sentido naturalizado deve empregar para se classificar os seres ditos existir de acordo com uma teoria.

Assim, nosso ponto aqui consistirá em apresentar evidências e argumentos para a tese de que não podemos querer que uma teoria científica corrobore uma particular ontologia de modo a deixar sem dúvida alguma que outras possibilidades possam ser compatíveis com a teoria. Em geral, quando isto ocorre, devemos investigar melhor para descobrirmos se nenhuma hipótese de caráter ontológico já não havia se introduzido tacitamente sem percebermos. Este tipo de estudo poderá lançar algumas luzes na chamada *Tese da Subdeterminação da Metafísica pela Física*, a tese segundo a qual as teorias físicas, por serem compatíveis com mais de uma ontologia, subdeterminam a ontologia (a tese emprega a palavra ‘metafísica’ pois é comum nos países de língua inglesa a identificação entre ‘metafísica’ e ‘ontologia’, de modo que se fala da ‘metafísica associada a uma teoria’). Como as teorias científicas sozinhas não possuem todos os recursos para a investigação ontológica, não é de se espantar que sejam compatíveis com diversas ontologias.

Para exemplificar este tipo de relação, apresentaremos o caso da mecânica quântica não-relativista. Durante muito tempo, argumentou-se que esta teoria estava comprometida com objetos que se denominou *não-indivíduos*. Não-indivíduos, para uma caracterização por alto, seriam objetos para os quais em algum sentido as relações de identidade e de diferença não fazem sentido. Não podemos afirmar, por exemplo, que um não indivíduo é igual a si próprio, e como consequência deste tipo de tese, também teremos que outras características dos indivíduos devem falhar para estes objetos, como por exemplo, ser contado, ser rotulado, ser nomeado, entre outras. A situação, todavia, começou a

mudar quando se percebeu que a teoria na verdade não exclui uma ontologia de indivíduos. De fato, percebeu-se que as partículas quânticas poderiam sim ser entendidas como sendo indivíduos, mas aquilo que confere a individualidade das partículas<sup>1</sup> deve ser buscado em algo que transcende as suas qualidades. Ou seja, chegou-se aos poucos a perceber que utilizando princípios de individuação que vão além das propriedades dos objetos, podemos sim falar em indivíduos na mecânica quântica. O que não podemos, aparentemente, é sustentar que um indivíduo nesta teoria seja caracterizado apenas por suas propriedades, pois a teoria descreve situações nas quais uma multiplicidade de objetos partilham todas as suas propriedades sem que sejam o mesmo, neste caso acabando com os planos de se caracterizar unicamente um objeto através de suas qualidades.

O problema que se apresenta então é: como podemos decidir entre estas ontologias? Esta deve ser uma escolha baseada em características da teoria mas também em aspectos conceituais do estudo de ontologia em seu sentido tradicional. Se, por exemplo, não for possível desenvolver um aparato conceitual adequado para tratarmos com os objetos que consideramos serem os não-indivíduos, inclusive com o intuito de clarificar melhor esta noção, então esta opção está claramente em desvantagem. Neste trabalho, buscaremos apresentar um desenvolvimento precisamente nestas linhas, argumentando que algumas das principais dificuldades com as quais esta posição se depara podem ser superadas. Nossa primeira tarefa consiste em apresentar um aparato lógico que seja capaz de dar conta de algumas características destes objetos (para mais discussões sobre este tema, o leitor também pode consultar Krause (KRAUSE, 2011c), onde a relação entre ontologia e metafísica também é discutida).

## 1.2 QUASE-CONJUNTOS E CARDINALIDADE

O aparato lógico que vamos utilizar em nosso trabalho é a teoria de quase-conjuntos  $\mathfrak{Q}$ , desenvolvida por Décio Krause (para uma exposição, ver (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.7)). No capítulo 3 apresentamos a teoria. Trata-se de uma teoria de conjuntos com átomos, ao estilo Zermelo-Fraenkel com urelemente (ZFU). A ideia fundamental por trás da teoria é que existem dois tipos de átomos (objetos da teoria

---

<sup>1</sup>Neste trabalho, ‘partícula’ será um substituto conveniente para os objetos da mecânica quântica, sendo usado como um termo o mais neutro possível, sem que-remos com isto nos comprometer com as conotações usuais atribuídas ao termo.

que não são coleções): um deles, que chamaremos de macro-átomos ou M-átomos representa os objetos usuais, indivíduos, e o outro tipo, o dos micro-átomos, ou m-átomos, que representarão os não-indivíduos. Para tanto, a identidade será uma relação que será introduzida na teoria por definição, e não estará definida para m-átomos, satisfazendo assim a primeira exigência intuitiva sobre não-indivíduos.

Lembremos que apesar de estarmos fornecendo uma teoria formal, compatível com diferentes interpretações, nossa motivação no desenvolvimento da teoria está sempre voltada para os não-indivíduos de acordo com nossa interpretação da mecânica quântica, sugerindo que os objetos desta teoria podem ser vistos como algum tipo de não-indivíduos. Notemos que o fato de introduzirmos objetos na teoria para representar os não-indivíduos reflete nossa atitude geral com relação à ontologia: não queremos que a ontologia seja derivada da teoria. De fato, acreditamos que ela não pode, em seus traços mais gerais, ser obtida deste modo, e assim devemos introduzir os objetos que desejamos na ontologia da teoria com as características que acreditamos que tenham, para com isto fundamentar de modo mais rigoroso nossos estudos de ontologia.

Este ponto está relacionado com aspectos da própria teoria de conjuntos clássica, seja Zermelo-Fraenkel com átomos ou sem átomos. Nesta teoria, como é usual, a identidade vale irrestritamente para todas as entidades com as quais ela trata, e assim a própria possibilidade de se representar legitimamente não-indivíduos (no sentido que os estamos entendendo) fica impedida. Deste modo, a não-individualidade, caso queiramos um sistema com não-indivíduos, deve ser assumida desde o começo na própria formulação da teoria, não introduzido posteriormente através de algum truque como se tenta muitas vezes fazer em teorias de conjuntos usuais, pois em geral nestas teorias a validade irrestrita da identidade acabará impedindo que se introduza este tipo de noção de modo *filosoficamente* satisfatório.

Com o aparato da teoria de quase-conjuntos podemos fazer basicamente tudo o que se faz em teorias como ZFU mais o tratamento de objetos que consideramos como representando não-indivíduos. Para deixar a teoria ainda mais conforme nossa compreensão intuitiva dos objetos quânticos, acrescentamos ao vocabulário da teoria uma relação de indistinguibilidade, o que nos permitirá ter em  $\mathfrak{Q}$  objetos que podem ser indistinguíveis mas não idênticas. Claro, estamos falando dos m-átomos. O comportamento peculiar que atribuímos aos não-indivíduos começará a se manifestar em sua contraparte na teoria de quase-conjuntos de diversas maneiras; uma delas, que desejamos discu-

tir aqui, diz respeito ao próprio modo de atribuírmos cardinalidade a coleções contendo estes objetos.

Segundo a definição usual, para atribuírmos cardinais à coleções finitas é suficiente estabelecermos uma correspondência um-a-um entre os elementos da coleção e um número natural. Este modo de proceder possui algumas características interessantes quando tomado intuitivamente, e sua contraparte formal, quando realizada no contexto de uma teoria de conjuntos, também preserva algumas destas características. Podemos mencionar as principais destas características que nos interessarão aqui: a possibilidade de se rotular os elementos sendo contados, de se ordenar a coleção dos elementos sendo contados, e como uma alegada pré-condição para o bom funcionamento destas características, a possibilidade de se identificar os elementos sendo contados. Neste caso, a questão que surge imediatamente é: e como aplicamos este procedimento aos m-átomos?

Este é precisamente o ponto que atacaremos no capítulo 4. De um ponto de vista metafísico, a contagem tomada neste sentido específico pode ser vista como tendo consequências desagradáveis para uma ontologia de não-indivíduos. Alguns filósofos, como Jantzen (JANTZEN, 2010), por exemplo, sustentaram que este tipo de argumento é suficiente para se mostrar que não podemos abandonar a noção de identidade e ainda assim fazer sentido de uma multiplicidade de objetos. ‘Muitos’ implica a identidade de cada um dos objetos envolvidos justamente pelo fato de que a contagem destes objetos deve ser feita rotulando-os um a um. Como podemos evitar as dificuldades propostas por este argumento e garantir que uma ontologia de não-indivíduos é compatível com uma noção de cardinalidade?

Exploraremos duas opções: primeiramente, no capítulo 3 introduziremos a noção de quase-cardinal, que generaliza a noção de cardinal, por axiomas. Isto resolve o problema na teoria  $\mathfrak{Q}$ . Em uma segunda abordagem, desenvolvida no capítulo 4, trataremos desta questão motivando informalmente uma espécie de procedimento alternativo de contagem que não necessita da identificação dos objetos rotulados para que se conte os elementos de uma coleção, e em um segundo momento mostraremos como esta definição pode ser formalizada no aparato da teoria de quase-conjuntos  $\mathfrak{Q}$ . Discutiremos inicialmente uma proposta feita por Domenech e Holik em (DOMENECH; HOLIK, 2007), apresentando com alguns detalhes o projeto destes autores, e depois forneceremos nossa própria definição. Alguns resultados serão obtidos mostrando que as duas definições atribuem os mesmos cardinais aos q-sets finitos.

O nosso objetivo com estes desenvolvimentos técnicos é mos-

trar que a afirmação de que a atribuição de cardinalidade e contagem necessitam da identidade dos objetos sendo contados pode ser contornada. Podemos resistir a este tipo de conclusão simplesmente fornecendo métodos alternativos para se obter os mesmos resultados sem fazer as mencionadas pressuposições. Isto deixaria a ontologia de não-indivíduos que estamos esboçando com um problema a menos: noções importantes como a de contagem e cardinalidade podem ser tornadas compatíveis com esta ontologia, e assim vamos desenvolvendo o aparato conceitual em torno dos não-indivíduos.

Mas há ainda outro perigo relacionado às noções de contagem e cardinalidade. Jantzen (JANTZEN, 2010) apresentou um argumento lançando uma dúvida sobre um aspecto técnico crucial destas definições de cardinalidade para coleções de não-indivíduos formalizadas na teoria  $\Omega$ . Segundo ele, a noção de *unitário forte* de um objeto  $x$ , que significa intuitivamente uma coleção com apenas um objeto indistinguível de  $x$ , é tal que a identidade pode ser introduzida na teoria  $\Omega$  através dela. Ou seja, se temos a noção de unitário forte, temos também a noção de identidade, e assim de qualquer modo uma ontologia de não-indivíduos está ameaçada. Todavia, esta não é qualquer identidade, Jantzen introduz uma relação valendo entre dois objetos quaisquer simulando uma identidade com a condição de que estejam confinados a um quase-conjunto fixo, ou seja, a identidade é relativa ao contexto desta coleção fixada.

Este argumento será apresentado e investigado. Argumentaremos que a teoria de quase-conjuntos, por certas peculiaridades técnicas, não é compatível com uma generalização da definição de Jantzen para objetos quaisquer em geral, fora de qualquer contexto. Assim, sugeriremos que a fórmula empregada por ele pode ser interpretada como uma forma de identidade contextual, que vale apenas quando restrita à alguns contextos, mas não de modo geral. Neste sentido, a teoria de quase-conjuntos funciona de modo oposto às teorias de conjuntos clássicas, como ZFC. Nesta última, e nas teorias clássicas em geral, como já mencionamos, a identidade vale de modo irrestrito, e assim, a noção de não-indivíduos não pode ser representada adequadamente. Mas, podemos representar de modo apenas restrito a noção de não-indivíduos, podemos nos confinar a um conjunto específico e, com alguns truques matemáticos (conforme expomos no capítulo 3), considerar os objetos desta coleção fixada como sendo não-indivíduos. Isto, claro, depende de esquecermos o contexto mais amplo da teoria de conjuntos na qual estamos trabalhando e que estas teorias inclui a identidade para todos os objetos. Do mesmo modo, na teoria de quase-conjuntos podemos considerar que os objetos possuem identidade ape-

nas contextualmente, quando esquecemos o contexto mais amplo no qual elas se encontram. Isto, em nossa opinião, é o suficiente para superarmos as dificuldades propostas por Jantzen.

### 1.3 QUANTIFICAÇÃO E PII

Outro aspecto problemático envolvendo a não-individualidade diz respeito ao uso de quantificadores. Há uma tese, muitas vezes apenas implícita, de que o uso de quantificadores com sentido pressupõe que as entidades sobre as quais quantificamos possam ser tais que pelo menos em princípio faça sentido falarmos acerca da *mesma entidade*, ou de entidades *diferentes*. Para falarmos com sentido “Para todo  $x$  tal que” ou “existe  $x$  tal que”, o domínio sobre o qual  $x$  varia deve ser compreendido por objetos com condições de identidade. Claro, se esta tese estiver correta, então uma ontologia propondo a existência de objetos sem identidade parece estar ameaçada. Temos que enfrentar um dilema: ou a ontologia em questão é legítima, e os quantificadores não fazem sentido para estes objetos (o que parece inaceitável se desejamos dizer que existem não-indivíduos) ou os quantificadores sempre fazem sentido e não existem de fato não-indivíduos.

Mas então, como podemos contornar as dificuldades propostas por esta linha de ataque? Como a própria teoria de quase-conjuntos poderá dar sentido ao uso de quantificadores? Analisaremos estes problemas no capítulo 5. Apresentaremos com cuidado o problema e discutiremos possíveis soluções para estas dificuldades, argumentando que a quantificação poderá sim ser mantida para não-indivíduos e fazer completo sentido. Nossa proposta consiste em dividir o problema em três âmbitos distintos: o aspecto sintático, o semântico e um aspecto que poderíamos chamar de pragmático. Analisando cada caso, podemos sustentar que a identidade pode ser dispensada mesmo quando se trata de atribuir significado aos quantificadores.

Para o caso da sintaxe, podemos argumentar que a utilização dos conceitos de uma linguagem recebe seu significado das regras estipuladas para estes conceitos. Assim, por exemplo, o uso dos quantificadores recebe seu significado das fórmulas utilizadas como axiomas para quantificadores. Ainda, podemos argumentar que a análise pode seguir uma direção inversa à proposta pelo argumento: ao invés de necessitarmos da identidade para entendermos os quantificadores, podemos analisar a identidade em termos de quantificadores, e assim, é o próprio significado da identidade que depende do significado dos quantificadores.

De um ponto de vista semântico, a ideia é que os quantificadores adquirem seu significado através de uma interpretação feita em uma metalinguagem dos símbolos da linguagem. Em particular, estipulamos deste modo condições de verdade para fórmulas contendo quantificadores, e estas condições dependem dos objetos sobre os quais estamos quantificando, ou seja, da coleção compreendendo o domínio de interpretação. Segundo o modo usual de se fazer esta interpretação, a metalinguagem que utilizamos é uma teoria de conjuntos clássica, que supõe a identidade fazendo sentido para todos os objetos. Neste caso, podemos contornar a dificuldade do seguinte modo: como podemos sempre recorrer a uma metalinguagem que apresente ela também as características de que a identidade não faça sentido para alguns dos objetos sobre os quais quantificamos, então esta atribuição de interpretação pode ser feita sem recorrermos ao uso de uma metalinguagem que pressuponha a identidade dos objetos sobre os quais quantificamos. Ainda, no caso da teoria  $\mathcal{Q}$ , se a utilizarmos como metalinguagem, podemos garantir que este tipo de interpretação pode ser feito apenas com seus recursos, sem a identidade.

No plano pragmático, a afirmação é que na própria linguagem natural a quantificação só pode ser entendida se utilizarmos a identidade dos objetos sobre os quais quantificamos. Neste caso, o problema está em se manter a quantificação juntamente com a afirmação de que a ontologia de uma determinada teoria pode ser compreendida por não-indivíduos. Nossa argumentação neste sentido se baseará em uma questão específica: como podemos inferir tão seguramente uma tese de caráter ontológico de aspectos pragmáticos de nossa linguagem? Apontaremos para outros aspectos da linguagem natural que aparentemente contradizem esta tese, como por exemplo, o fato de que nesta linguagem sempre podemos expressar atributos contraditórios de um objeto sem nos comprometermos com uma ontologia de objetos contraditórios.

Toda esta discussão acerca da possibilidade de quantificação sobre não-indivíduos fica muitas vezes, como dissemos, apenas implícita na literatura. Um dos filósofos que recentemente se propôs a argumentar explicitamente neste sentido foi S. Saunders (SAUNDERS, 2006). Segundo Saunders, sem identidade os objetos da mecânica quântica não poderiam estar presentes no escopo dos quantificadores de uma linguagem de primeira ordem clássica, e assim, não poderiam nem mesmo ser objetos, se entendermos objetos como aquilo que está no escopo de um quantificador de uma linguagem de primeira ordem clássica. A proposta de Saunders para garantir a objetualidade das partículas, e que

depois foi fortemente ampliada em conjunto com F. Muller em (MULLER; SAUNDERS, 2008) consiste em mostrar que na verdade os objetos quânticos podem sim ser distinguidos uns dos outros, basta entendermos o termo ‘distinguilidade’ da forma correta.

Segundo Muller e Saunders, os objetos quânticos podem sim, como se diz na literatura, ser completamente indistinguíveis módulo suas propriedades monádicas. Todavia, existem relações simétricas e irreflexivas valendo entre estes objetos, e se podemos garantir que  $a$  e  $b$  são dois itens tais que existe uma relação irreflexiva  $R$  valendo entre eles, então podemos ver  $R$  como distinguindo entre  $a$  e  $b$ , já que não é o caso que  $Raa$  nem que  $Rbb$  (pela irreflexividade de  $R$ ). Com esta ideia, estes autores buscaram questionar uma das teses ontológicas mais bem aceitas da literatura filosófica da mecânica quântica: o fato de que o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) falha para partículas quânticas. Segundo este princípio, objetos qualitativamente indiscerníveis devem ser numericamente idênticos. Assim, se  $a$  e  $b$  são partículas numericamente distintas, então podemos distingui-las através de uma relação irreflexiva, e assim, provamos que a forma contrapositiva do princípio vale.

Trataremos deste argumento no capítulo 6. Apresentaremos o argumento com cuidado, e mostraremos como ele serve para se formular uma versão do PII chamada de PII fraco. Nossa proposta para superar as dificuldades levantadas por este argumento consistem em se recordar a nossa divisão de trabalho entre ontologia tradicional e ontologia naturalizada. Segundo este modo de ver, não podemos afirmar com toda a certeza que uma teoria científica demonstra a validade de um princípio metafísico. O mesmo será argumentado para o caso de PII fraco. Argumentaremos que aceitar que se trata de uma formulação legítima de PII é uma questão metafísica, que não pode ser decidida pela mecânica quântica.

Como discutimos brevemente, a formulação de PII fraco envolve a suposição de que relações distinguem objetos. O problema com esta proposta é que existe uma longa controvérsia em metafísica tradicional concernindo justamente o papel das relações. Elas tem a capacidade de distinguir? Esta é uma questão que a própria mecânica quântica não poderia responder. devemos recorrer a argumentos metafísicos para resolver esta disputa. Proporemos três testes metafísicos para PII fraco. Nossa sugestão é que, como existem contextos nos quais o PII é exigido, podemos testar a utilidade e plausibilidade de PII fraco estudando como ele se comporta nestes contextos. Se ele ajudar a desenvolver e fortalecer estas teorias, pode ser visto como um princípio que de fato

cumpra as exigências impostas sobre o PII. Caso contrário, deve ser visto pelo menos com desconfiança.

Os três testes envolverão as seguintes propostas: uma teoria de feixes da individualidade, a explicação da noção de contagem, e uma filosofia empirista. Em geral, estes são três contextos nos quais o PII costuma ser exigido. Na teoria de feixes da individuação, um indivíduo é visto como um feixe de propriedades, e o PII é necessário para se garantir que cada indivíduo sempre será caracterizado por suas propriedades, e que não haverão dois indivíduos qualitativamente idênticos (o que arruinaria a teoria de feixes). Na noção de contagem, como já expusemos acima, alguns filósofos propõem que contar exige a rotulação dos objetos sendo contados, e que esta, por sua vez, exige PII para garantir que rótulos distintos serão atribuídos a objetos distintos. Uma filosofia empirista, por sua vez, é muitas vezes apresentada como um contexto no qual o PII deve ser válido. Argumenta-se que é desejo dos empiristas reduzir fatos de diferença numérica a fatos de diferença qualitativa, e para tanto se precisa do PII.

Nossa argumentação buscará mostrar que nenhuma destas teses pode ser sustentada se a versão de PII que temos é a fraca. Assim, o apoio que PII fraco poderia derivar de qualquer uma destas teses é nulo. Deste modo, concluiremos que não há nenhuma motivação interessante para se supor que a versão proposta por Muller e Saunders é de fato o PII conforme ele foi proposto na tradição filosófica. O que permanece então, é um princípio sem nenhuma base metafísica para sua adoção.

## 1.4 TEORIAS DA INDIVIDUAÇÃO

Terminaremos o trabalho com um apêndice no qual expomos as teorias da individuação de acordo com a abordagem dos feixes de propriedades e com a abordagem adotando substratos. Estas teorias são mencionadas constantemente em nosso trabalho mas não são desenvolvidas detalhadamente no contexto do texto em geral, de modo que consideramos que um apêndice tratando destes temas poderia representar um acréscimo interessante para o leitor. Todavia, acreditamos que a compreensão geral dos argumentos explorados nos outros capítulos do texto não será prejudicada por aqueles que desejarem evitar o apêndice.

Basicamente, um teórico dos feixes aceita que objetos particulares possam ser reduzidos a propriedades. A questão central para o teórico dos feixes é determinar quais propriedades contam como legítimas e suficientes para individuar. Apenas propriedades monádicas? Po-

demos acrescentar relações? Estas são questões que debateremos no apêndice. Outro ponto fundamental diz respeito a como garantir que os feixes de fato individualizam um particular. Em geral, o teórico dos feixes assume uma versão de PII para garantir a unicidade de cada feixe. Todavia, como estamos argumentando, este princípio é bastante controverso, e de certa forma, o destino da teoria de feixes está ligado ao destino de PII. Ambos permanecem ou caem juntos.

Por sua vez, um teórico dos substratos acredita que apenas propriedades não bastam para se individualizar um particular. Um dos principais argumentos para esta concepção consiste justamente na possibilidade de que PII falhe, ou seja, que existam objetos numericamente distintos mas qualitativamente indiscerníveis. Assim, a tarefa de individualização deve ser atribuída a algo distinto das propriedades, que se sustenta ser um substrato. Um substrato é algo único a cada indivíduo e lhe atribui por este motivo a sua individualidade. Objetos qualitativamente indiscerníveis mas numericamente distintos tem sua distinção numérica garantida pelos seus distintos substratos. O problema com esta concepção é justamente a natureza misteriosa deste substrato. Que tipo de entidade é esta? Como podemos garantir que ela faz de fato aquilo para o que foi proposta? Como esclarecer estes aspectos centrais da teoria?

A disputa entre os teóricos dos feixes e os teóricos dos substratos é um exemplo de uma disputa daquilo que anteriormente chamamos de ontologia no seu sentido tradicional. Nenhuma delas se restringe à considerar as entidades como sendo apenas relativas a uma determinada teoria, e de modo algum buscam analisar a noção de individualidade restrita a determinado contexto. Elas buscam, antes, determinar um princípio de individualização de modo universal. Cabe ao estudo das ontologia em seu sentido naturalizado investigar qual delas é plausível no contexto de uma teoria científica determinada e, por fim, qual seria a melhor, se alguma delas puder se destacar. Claro, no caso da mecânica quântica, o principal problema será que muitos filósofos argumentam que nenhuma das duas teorias pode ser aplicada, e de fato, que nenhum princípio de individualização pode ser aplicado. Para esta discussão ficar mais completa, então, resolvemos acrescentar algumas informações adicionais sobre estas teorias no apêndice.

Estes são, então, alguns dos pontos que discutiremos no apêndice. Evidenciaremos que há uma dinâmica no debate entre teóricos dos feixes e do substrato: os argumentos de um lado buscam sempre apontar uma falha no seu opositor que pode ser explicada por sua própria teoria, e a resposta vem como um desafio a se explicar outro aspecto da indi-

vidualidade que apenas um dos lados (afirma-se) pode razoavelmente dar conta. Neste jogo de desafios, buscaremos mostrar que algumas das noções centrais são a identidade e a indistinguibilidade, dois conceitos chave durante nosso trabalho.

## 1.5 OBSERVAÇÕES GERAIS

Antes de passarmos ao texto, mais algumas observações de caráter geral acerca da estrutura deste trabalho devem ser feitas. Em primeiro lugar, gostaríamos de mencionar que apesar de os capítulos se sucederem em uma ordem que acreditamos ser natural, fizemos o possível para que os capítulos pudessem ser independentes e quase auto-contidos. Com exceção dos usos da teoria de quase-conjuntos feitas em capítulos posteriores ao capítulo 3, e que remetem a ele, praticamente todos os problemas e argumentos apresentados em cada capítulo são formulados de modo a não dependerem de modo essencial em sua apresentação dos capítulos anteriores.

Também é importante mencionar que parte do material desta tese já encontra-se publicado em alguns periódicos ou aceito para publicação. Em particular, mencionamos a definição de quase-cardinal finito no capítulo 4, que aparecerá em *Studia Logica* e a discussão das diferentes noções de quase-cardinal finito, que apareceu em *Foundations of Physics*. A discussão de objeções a esta definição aparecerá em *Synthese*. O capítulo acerca dos esquemas ontológicos aparecerá em versão inglesa em *Foundations of Science*.

Passamos agora ao texto propriamente.

## 2 ESQUEMAS ONTOLÓGICOS

Um exame minucioso da literatura sobre ontologia pode deixar o leitor com uma impressão de que existem pelo menos dois sentidos distintos do termo, ambos empregados pelos filósofos e nem sempre distinguidos. De acordo com o primeiro destes sentidos, que nós chamaremos aqui de ontologia em seu sentido *tradicional*, a ontologia é caracterizada como o estudo *a priori* das várias “categorias ontológicas” e das diversas relações existentes entre estas categorias. Em um segundo sentido, que poderia muito bem ser chamado de *ontologia naturalizada*, o estudo da ontologia está vinculado às nossas melhores teorias científicas, de modo que o trabalho a ser realizado consiste em se tentar derivar destas teorias os constituintes últimos da mobília do mundo. De um ponto de vista metodológico, estes dois sentidos da palavra estão muito distantes um do outro. Neste capítulo, discutiremos e proporemos uma possível relação entre estes sentidos e argumentaremos que eles podem ser tornados compatíveis e complementarem um ao outro. Também examinaremos como a lógica, entendida como uma ferramenta de caráter linguístico tratando do aparato conceitual de uma teoria e seus padrões básicos de inferência deve ser levada em conta neste tipo de estudo.<sup>1</sup> A ideia básica por trás de nossa proposta pode ser colocada do seguinte modo: a ontologia naturalizada investiga acerca da aplicabilidade das categorias ontológicas estudadas pela ontologia tradicional e fornece a ela uma espécie de *feedback*; em alguns casos, pode ser que não seja possível que este tipo de aplicação seja feito de modo razoável, e em outros sim. Em alguns casos, para expressarmos mais adequadamente aspectos relevantes das categorias ontológicas utilizadas, uma lógica distinta da clássica pode ser necessária.

Concluimos este capítulo discutindo o caso das ontologias que podem ser associadas com a mecânica quântica ortodoxa, argumentando que esta teoria exemplifica o tipo de relação entre os dois sentidos de ontologia que estivemos discutindo. Argumentaremos também que a distinção entre estes dois sentidos de ontologia proposta aqui pode tornar mais claras algumas questões ontológicas concernindo esta teoria. De fato, é amplamente reconhecido na literatura que a mecânica quântica pode ser vista como nos comprometendo com essencialmente dois tipos de ontologias: uma delas envolvendo indivíduos, a outra envolvendo *não-indivíduos*. A teoria, por si só, não nos permite decidir

---

<sup>1</sup> Claro, não consideramos que a lógica seja apenas isto, mas neste contexto ela será encarada basicamente a partir desta função.

entre as duas opções, de modo que obtemos a *subdeterminação da metafísica pela física*, isto é, a tese de que teorias científicas, em particular a mecânica quântica, subdeterminam a metafísica. Argumentaremos que a distinção entre os dois sentidos de ontologia pode tornar a subdeterminação da metafísica um fenômeno que já deveríamos ter esperado. Esta nova maneira de se considerar a subdeterminação coloca ênfase na argumentação de cunho estritamente metafísico, principalmente em situações em que desejamos argumentar a favor de uma das opções de ontologia em detrimento das outras, já que este tipo de questão não pode ser resolvido por um estudo ou exame de dados empíricos.

## 2.1 INTRODUÇÃO

Um considerável período de tempo já passou desde que duas tendências aparentemente conflitantes começaram a se desenvolver na filosofia, ou pelo menos no seu ramo chamado de “analítico”: por um lado, há um interesse cada vez maior em questões de cunho puramente metafísico que há algum tempo atrás seriam consideradas medievais ou até mesmo puro contra-senso. Questões consideradas mortas e enterradas, que agora ressurgem renovadas neste período pós-positivismo lógico, atestando que a metafísica está novamente viva e saudável (Ladyman and Ross chamam estes problemas pejorativamente de *metafísica neo-medieval*; ver seu manifesto contra este tipo de metafísica em (LADYMAN et al., 2007, cap.1)). Alguns exemplos deste tipo de questões tratam da identidade pessoal, livre arbítrio, a natureza do espaço e do tempo, causalidade, modalidade, e muitas outras. Por outro lado, o grande crescimento e sucesso da ciência nos últimos séculos juntamente com sua inevitável influência em praticamente todas as esferas da atividade humana levaram muitos filósofos, mesmo aqueles interessados em questões puramente metafísicas, a olhar para a ciência como um guia na conduta de suas investigações. Então, muitos destes filósofos fazem metafísica com os olhos voltados apenas para as teorias científicas, em especial as teorias físicas. Se uma investigação metafísica realmente reflete o assim chamado *Zeitgeist*, então, diz-se, o metafísico deveria tentar pelo menos manter suas especulações afinadas com as realizações de nossas melhores teorias científicas, já que elas incorporam de longe os mais bem sucedidos esforços no sentido responder a muitas das questões que colocamos concernindo a natureza da realidade (Ladyman e Ross (LADYMAN et al., 2007) são um exemplo extremo deste tipo de esforço; para uma abordagem mais simpática à

metafísica, ver também a discussão em Hawley (HAWLEY, 2006), que aborda problemas semelhantes aos que estamos propondo aqui).

Dadas estas particulares condições da situação atual, podemos garantir que a filosofia atual, em particular aquela de cunho estritamente metafísico, convive pacificamente com a ciência praticada atualmente? Diante de um conflito entre a nossa teoria metafísica favorita e alguns resultados de nossas melhores teorias científicas, que tipo de atitude devemos tomar? Deveríamos sustentar que a argumentação filosófica coerente é uma condição suficiente para a adoção de uma doutrina filosófica, independentemente de sua relação com os resultados da investigação científica atual? Se respondemos a esta questão afirmativamente, então, será o caso que, se alguma de nossas melhores teorias científicas estão em conflito com nossas especulações, podemos confiantemente acreditar que a próxima geração de teorias científicas estará mais afinada com aquilo que estamos considerando como a “boa” metafísica? Ou deveríamos tomar uma posição mais naturalista e aceitar que a ciência, mesmo que não nos forneça respostas definitivas em favor de uma particular doutrina metafísica, pode pelo menos nos fornecer razões para preferirmos alguma doutrina metafísica em detrimento de outras? Neste caso, que força deve ter a influência da ciência? Deveríamos confiar inteiramente na ciência e não deixar nenhum espaço para a metafísica?

Ambas as possibilidades esboçadas no parágrafo anterior, conforme as concebemos, são demasiado radicais. Especular com nossas costas voltadas para a investigação científica poderá nos levar a extremos indesejados, tais como aqueles que contribuíram para lançar a metafísica no limbo no qual ela se encontrava há algum tempo atrás. Por outro lado, fazer metafísica nos restringindo ao estudo de teorias científicas pode acabar nos tornando cegos para todos aqueles problemas tipicamente filosóficos, aqueles que concernem aos filósofos propriamente. De fato, os filósofos estão na maioria das vezes ocupados tratando de conceitos que simplesmente não podem ser investigados empiricamente ou ainda tentando identificar pressuposições da própria atividade científica (ou mesmo de toda atividade envolvendo ferramentas conceituais), problemas que merecem uma análise crítica tal como aquela fornecida pelo estudo filosófico. Então, neste caso, assim como em muitos outros, a verdade pode estar em um meio termo, nem concedendo todo o campo para a metafísica, nem deixando toda a ação para ser realizada pela ciência. O tipo de relação entre elas que temos em mente poderia permitir uma troca de informações útil e proveitosa para o desenvolvimento de uma *metafísica cientificamente informada*,

um campo de pesquisa propriamente filosófico que mantêm os seus olhos voltados para a ciência.

Neste capítulo argumentaremos em favor deste tipo de concepção esboçando um possível esquema das relações que podem valer entre a investigação filosófica e sua inspiração-aplicação de ordem científica, originada nas ciências empíricas. Acreditamos que seja possível garantir ao filósofo um campo de pesquisa que pode ser cientificamente informado e ao mesmo tempo que não seja extremamente naturalizado, um campo que garante um lugar especial para a filosofia sem ter que equacioná-la com algum ramo da ciência. Isto não significa que ciência ou filosofia tomarão a dianteira ditando as regras, mas antes que ambas vão trocar informações mutuamente de tal modo que, por um lado, a metafísica pode ser vista como pelo menos em parte uma disciplina fornecendo as ferramentas conceituais mais gerais para uma melhor compreensão e entendimento da ciência, e por outro lado, nossas teorias científicas vão atualizar algumas das bases conceituais fornecidas pela metafísica. Então, acreditamos que a metafísica pode garantir seu lugar como um campo de investigação autônomo e ainda se beneficiar de informações oriundas da ciência. Este é um primeiro passo na busca por uma teoria concernindo as relações entre a metafísica tradicional e as investigações fatuais.

Propor este tipo de relação não significaria de modo algum que o único tipo de metafísica legítima é aquele que de algum modo pode ser relacionado com a investigação científica, mas antes que caso a metafísica queira estar relacionada com este tipo de investigação (o que pode ser verdade apenas para uma parte da investigação que caem sob o título de “metafísica” atualmente), então deveríamos ser mais explícitos acerca de como estas relações devem ocorrer. Aqui não tencionamos tratar de todo o vasto campo da metafísica, mas antes vamos nos restringir àquela parte geralmente chamada de “ontologia”, comumente entendida como o estudo daquilo que há. Em linhas gerais, nossa proposta pode ser enunciada do seguinte modo: a ontologia pode ser dividida em uma investigação envolvendo dois aspectos; por um lado, em sua primeira linha de investigação, que remete à abordagem do filósofo tradicional à ontologia, ela deverá buscar pelas diferentes categorias ontológicas legítimas, os traços mais gerais daquilo que há, de modo que todas as possibilidades distintas deverão ser investigadas (neste aspecto particular, nossa inspiração deriva de Lowe (LOWE, 1998), (LOWE, 2011)). Neste tipo de investigação, por exemplo, a ontologia estará preocupada com a possibilidade de se assumir a existência de universais apenas, reduzindo particulares a feixes de propriedades,

ou com a existência de outros tipos de categorias, como tropos, tipos (espécies), *bare particulars*, entre outros. Em um segundo sentido, temos a ontologia tomada em seu sentido naturalizado, no qual nós investigamos o tipo de envolvimento que nossas teorias científicas tem com as categorias fornecidas pela investigação do primeiro sentido de “ontologia”. Assim, por exemplo, podemos estar interessados, como de fato muitos filósofos estão hoje em dia, em investigar a possibilidade de se associar a mecânica quântica não-relativista com uma ontologia contendo apenas propriedades e relações (ver Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008), nós também discutiremos esta proposta de modo breve mais adiante; para mais detalhes, ver também 6). Neste caso, estaríamos relacionando a mecânica quântica com uma ontologia contendo apenas uma categoria ontológica, aquela dos universais, e assim estaríamos buscando, através do aparato conceitual da teoria, conferir plausibilidade para esta tese. Outra possibilidade consiste em se tentar associar uma teoria do *substratum*, no sentido lockeano, à mecânica quântica, mais conhecido na literatura atual como um *bare particular* (para uma defesa recente de uma teoria do substratum, ver Moreland (MORELAND, 1998); para mais detalhes sobre alguns destes pontos, ver o apêndice A). Estes são alguns exemplos das possibilidades a serem investigadas, e nós teremos mais para dizer sobre elas depois.

Nós vamos também argumentar que as diversas possibilidades conceituais investigadas pela ontologia em seu sentido tradicional podem estar comprometidas com categorias que poderão envolver a necessidade de se utilizar uma linguagem alternativa e uma lógica alternativa, distinta da clássica para que possam ser representadas adequadamente. Como é bem conhecido, a lógica clássica (por simplicidade, neste ponto estaremos assumindo que se trata da lógica clássica de primeira ordem com identidade) está profundamente envolvida com teses ontológicas. Para mencionarmos alguns exemplos, podemos mencionar que os objetos com os quais ela trata devem possuir algum tipo de núcleo imutável que funciona como o portador das propriedades, que a relação de identidade se aplica universalmente (entre todos os objetos, faz sentido dizer que são idênticos ou distintos), que os nomes próprios sempre denotam unicamente, que propriedades contraditórias não podem ser predicadas do mesmo item ao mesmo tempo, entre outras (ver da Costa (COSTA, 1997, pp.126-137) para uma discussão sobre a influência de uma concepção dos objetos sobre as leis da lógica clássica). Mas, para tomarmos apenas este último caso como referência, se desejamos argumentar precisamente que uma ontologia de objetos contraditórios é possível, como alguns argumentam que de

fato seja, ou se desejamos argumentar que noções como por exemplo as de objetos contraditórios são instanciadas em alguma teoria científica (talvez alguma formalização rigorosa da teoria do átomo de Bohr, ou alguma formalização da teoria ingênua dos conjuntos de Cantor? Ver da Costa e Krause (COSTA; KRAUSE, 2006) e da Costa (COSTA, 2002) para cada uma destas teorias, respectivamente), então, certamente a lógica com a qual tratamos este tipo de objetos terá que ser distinta da lógica clássica, que é intolerante diante de contradições (a menos que se deseje trabalhar com uma teoria trivial, como seria o caso ao adotarmos a lógica clássica na presença de contradições).

Então, pelo que já foi dito acima, nossa proposta vai envolver três eixos distintos de investigação: (i) a ontologia em seu sentido clássico, compreendendo uma investigação conceitual da possibilidade de distintos esquemas categoriais ontológicos, (ii) ontologia em seu sentido naturalizado, relacionado ao primeiro sentido, no qual as categorias fornecidas por aquele tipo de investigação são usadas para tentarmos classificar os itens associados com uma teoria científica, (iii) o estudo do esquema lógico que deverá incorporar os tipos de entidades apontados como adequados de acordo com o passo (i). Para ilustrar uma aplicação de nossa proposta, já que este será o foco de nosso trabalho, nós iremos considerar o caso da mecânica quântica não-relativista. Esta teoria funciona como um interessante exemplar para nossos propósitos já que podemos argumentar (através de investigações do tipo (ii) mencionado acima) que ela é compatível com diferentes ontologias (no sentido (i) mencionado acima), e ainda mais do que isso, pelo fato de que não nos permite decidir, quando nos restringimos apenas aos recursos da teoria, qual dentre estas ontologias é a mais adequada. Esta situação, na qual uma teoria é compatível com pelo menos duas ontologias distintas entre as quais não podemos decidir baseando-nos apenas nos recursos da teoria é conhecida como a *Segunda Tese da Subdeterminação* (para mais detalhes sobre este tipo de discussão, ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4), French (FRENCH, 2011), Muller (MULLER, 2011)). Conforme discutiremos, a distinção proposta entre os dois sentidos para ontologia pode fazer com que a Subdeterminação pareça muito menos chocante do que ela de fato parece. Ainda, a teoria quântica é uma excelente candidata para uma tal ilustração pois, como nós veremos em breve, esta teoria já serviu de inspiração para que se formulassem sistemas de lógica alternativos clamando captar mais adequadamente algumas das várias formas que uma ontologia para a mecânica quântica pode assumir (nós vamos desenvolver um tal sistema para uma particular ontologia da mecânica quântica no capítulo 3).

## 2.2 DOIS SENTIDOS PARA ONTOLOGIA

“Metafísica” e “ontologia” são dois termos de arte em filosofia. Apesar de estarem em uso e sofrendo muita investigação séria há já muito tempo, nenhum destes termos parece permitir uma definição simples e absolutamente não controversa. Em um certo sentido operacional, podemos ser capazes de classificar um filósofo ou mesmo um trabalho filosófico como metafísico ou não-metafísico e, a menos que estejamos interessados em expor e discutir o que ambos termos significam e quais são seus limites, este tipo de conhecimento operacional serve para todos os propósitos práticos. Já que aqui estamos interessados em nos restringir apenas ao que concerne a ontologia, deixando de lado grande parte daquilo que cai sob o vasto termo “metafísica”, é conveniente que nós comecemos dizendo algo sobre estes termos, nem que seja apenas para evitar alguns mal entendidos no decorrer de nosso trabalho.

Podemos começar notando que na maioria dos contextos, principalmente entre os filósofos de língua inglesa, metafísica e ontologia podem ser identificadas como o mesmo conceito ou o mesmo tipo de atividade (ver, por exemplo, o uso destas palavras em French (FRENCH, 2011)). Esta é uma simplificação conveniente quando se deseja falar sobre tópicos como a “metafísica associada a uma teoria”, ou mesmo quando desejamos falar sobre a “subdeterminação da metafísica pela física”, conforme nós já mencionamos acima. Em geral, nestes contextos, fica claro que pela palavra “metafísica” estamos entendendo a *mobília última do mundo*, e não os problemas mais abstrusos que em geral também são considerados como sendo parte da metafísica mas não estão relacionados diretamente com questões de cunho puramente existencial. Por outro lado, para os nossos propósitos aqui, será conveniente distinguir entre aqueles termos, e nós iremos considerar a ontologia como um dentre os vários ramos da metafísica, sem todavia coincidir com ela. Este tipo de abordagem se combina muito bem com o fato de que alguns problemas obviamente metafísicos, como aqueles concernendo o livre-arbítrio ou o estudo da modalidade e mundos possíveis, por exemplo, não são naturalmente vistos como sendo problemas meramente ontológicos, mas são certamente vistos como problemas passíveis de investigação metafísica.

Vista como um dos ramos da metafísica, e não como coincidindo com ela, alguns filósofos atualmente atribuem para a ontologia um papel privilegiado dentre as investigações metafísicas. De fato, pode ser dito que ela é vista por estes filósofos como sendo o principal ramo

da metafísica (para uma defesa deste modo de ver a ontologia, ver a introdução de Lowe (LOWE, 1998)). Em geral, nestes casos, a investigação ontológica é vista como o estudo daquilo que existe, das características mais gerais do ser, e das categorias ontológicas mais gerais com as quais nós podemos classificar aquilo que existe. Neste sentido, a ontologia foca seus esforços no estudo das assim chamadas “categorias ontológicas”, os modos mais gerais de se classificar os seres existentes, talvez menos gerais apenas do que a própria categoria do ser, da existência puramente (para uma exposição geral e motivação sobre as categorias ontológicas, ver van Inwagen (INWAGEN, 2011)). Este tipo de investigação concerne as disputas tradicionais sobre a existência de universais, de particulares, de eventos, de estados de coisas, dentre muitas outras, e também trata com os argumentos propostos em favor ou contra assumirmos cada uma destas categorias em nossa ontologia. Ainda, este tipo de estudos trata das relações entre as várias categorias ontológicas. Por exemplo, tratamos da questão da possibilidade de se definir (ou de algum modo reduzir) particulares concretos em termos de universais exclusivamente, se podemos dispensar os estados de coisas e postular apenas particulares e universais, e assim por diante. Para um exemplo de uma ontologia abundante neste sentido, o leitor pode considerar o caso da ontologia proposta por Lowe ((LOWE, 1998) e (LOWE, 2011)), que defende uma ontologia adotando quatro categorias: universais, tropos, espécies e particulares. As relações entre estas categorias, falando por alto, pode ser entendida do seguinte modo: os particulares instanciam espécies e acidentes, seus tropos, os quais, por sua vez, são casos particulares dos universais.

Apesar do fato de que estes temas são bem conhecidos, existe ainda outro sentido para a palavra “ontologia”, muito em uso hoje em dia, e que também é entendido como o estudo daquilo que há, mas que todavia não pode ser identificado com o estudo da ontologia conforme enunciado acima. Este segundo significado da palavra concerne o estudo de ontologias (note o emprego do plural) relativamente à teorias de determinado tipo, principalmente teorias científicas (que geralmente são tomadas como sendo teorias físicas, mas poderiam também envolver teorias biológicas e ainda talvez algumas partes da psicologia experimental e da matemática). Isto é, neste caso nosso interesse recai naquilo que existe ou pode existir de acordo com alguma teoria científica específica. Para distinguir entre estes dois sentidos da palavra ontologia, o primeiro sendo tomado como tendo sentido absoluto, o segundo como sendo relativo apenas à alguma teoria, tratando com a mobília do mundo módulo alguma teoria científica, vamos designar o

primeiro sentido pela designação *ontologia tradicional*, e o segundo por ontologia no seu *sentido naturalizado*, colocando em evidência sua característica específica de sempre ser relativa a alguma teoria científica (sem, como mencionamos, excluir o caso de teorias formais como é o caso das teorias da matemática clássica).

Como deve ter sido notado, o segundo sentido das investigações ontológicas, apesar de sua enorme e bastante difundida influência a partir do século vinte em diante, está associado mais diretamente com o nome de W.V. Quine (por exemplo, em seu trabalho clássico “On what there is”, em (QUINE, 1964)). Quine foi um dos grandes filósofos responsáveis pela re-introdução da ontologia na ordem do dia dos filósofos analíticos, provendo em grande medida tanto uma boa parte do projeto de pesquisa naturalista em filosofia bem como os principais métodos a serem empregados e os padrões de rigor desejáveis neste ramo de pesquisa recém re-introduzido (ver a discussão em Chateaubriand (CHATEAUBRIAND, 2003)). Um dos aspectos centrais do legado de Quine para o estudo da ontologia em seu sentido naturalizado é o seu famoso critério de compromisso ontológico, que falando muito por alto, busca determinar os tipos de entidades com os quais uma teoria está ontologicamente comprometida. Sem entrarmos em digressões,<sup>2</sup> uma teoria está comprometida com aqueles tipos de entidades aos quais as variáveis ligadas da linguagem devem fazer referência para que as sentenças da teoria sejam verdadeiras, isto é, com aquelas entidades que devem pertencer ao domínio de interpretação da teoria para tornar verdadeiras as sentenças da teoria. Para sermos capazes de aplicar o critério, claro, a teoria deve estar formulada em uma linguagem que Quine chamava “regimentada” (mais sobre este tema adiante), na qual as sentenças são formuladas em uma linguagem tão clara e isenta de ambiguidades quanto possível. Então, por exemplo, uma teoria contendo entre suas sentenças verdadeiras a fórmula “ $\exists x(x \text{ é um cão})$ ” é tal que deve haver pelo menos um cão em seu domínio de interpretação, e assim, ela está comprometida com este tipo de entidades.

A primeira diferença valendo entre os dois ramos da ontologia que estamos propondo concerne claramente a metodologia empregada em suas investigações. No seu sentido tradicional, a ontologia é geralmente uma investigação conduzida puramente *a priori*, enquanto que a ontologia naturalizada é guiada por considerações oriundas da teoria científica em questão. Ainda, enquanto que o primeiro sentido (o

---

<sup>2</sup>De fato, nosso interesse aqui não está em uma análise exegética da filosofia de Quine, mas em deixar claro sua influência ao focalizar e relativizar o estudo da ontologia em teorias científicas.

tradicional) não coloca limites à sua aplicação – ele pretende tratar da estrutura geral daquilo que existe de um modo universal – o segundo sentido (o naturalizado) deve sempre ser relativo a uma teoria. Mas mesmo estas poucas diferenças já levantam algumas dificuldades: como podemos investigar aquilo que existe efetivamente se estamos restritos a apenas uma teoria; e o que dizer de situações em que teorias diferentes nos fornecem explicações totalmente diferentes sobre os tipos de fenômenos que existem? E o que devemos dizer nos casos em que estas teorias fornecem descrições empiricamente equivalentes dos mesmos fenômenos? Como devemos entender a mobília do mundo nestes casos? Pior ainda, a mesma teoria pode ser entendida como estando comprometida com diferentes ontologias (entendidas no sentido naturalizado), e então de que modo podemos saber o que há na realidade afinal de contas? E por aí seguem as diferenças.

Mas considerando a questão com cuidado, será que estas diferenças implicam que ambas as abordagens não são compatíveis entre si, e que estamos na verdade tratando com a mesma palavra aplicada a tipos de investigação completamente diferentes? Bem, apesar de serem distintas, o primeiro passo para notarmos que os dois tipos de investigação podem ser reconciliados e podem se auxiliar mutuamente vem de aceitarmos que a ontologia naturalizada não implica a tese mais forte de que as únicas coisas que existem são aquelas fornecidas pelas nossas melhores teorias científicas. Isto nos ajudaria pelo fato de permitir distintas ontologias associadas com teorias distintas. Um segundo passo consiste em uma melhor apreciação do fato de que a ontologia tradicional estuda as muitas diversas possibilidades, sem no entanto estar comprometida com a afirmação de que apenas um destes esquemas possíveis é consistente. É com estas teses como pano de fundo que podemos vislumbrar uma posição que seja capaz de tornar compatíveis ambos os tipos de investigação: em seu uso tradicional, a ontologia fornece um estudo *a priori* daquilo que pode existir, das categorias mais gerais do ser; ela investiga quais destas categorias são possíveis. Por outro lado, a ontologia em seu sentido naturalizado tenta conectar estas categorias com a investigação do mundo empírico, que por sua vez é desenvolvida pelas teorias científicas. A ontologia tradicional busca uma ligação das categorias ontológicas com aquelas entidades que acreditamos existir de acordo com uma teoria científica.

Então, para reforçar este ponto, podemos reconciliar um dos principais conflitos entre os dois sentidos de ontologia, o fato de que o estudo da ontologia associada a uma teoria científica tem um caráter específico e local, em oposição ao estudo da ontologia tomada em seu

sentido tradicional, que se pretende universal, já que uma possível configuração de categorias ontológicas pretende ser aplicável a tudo aquilo que existe, não apenas aos objetos com os quais uma teoria específica pode estar comprometida. A relação entre ambos os estudos propostos aqui pode nos ajudar a compreender melhor alguns aspectos da investigação ontológica empreendida em cada uma destas frentes. Um exemplo simples pode ser visto considerando o caso que mencionamos anteriormente, no qual uma teoria está comprometida com cães. Isto significa que existe uma espécie natural “cão”? Ou então um universal platônico sobre o qual caem todos os cães, e que os torna de fato cães? Se a resposta para uma destas perguntas é afirmativa, a teoria deve então ser vista como estando comprometida com objetos abstratos? Então, procedendo a investigação deste modo podemos ter a certeza de estarmos comprometidos com universais? Parece que isto não é assim necessariamente. É neste nível que começa a importante relação entre os dois sentidos de ontologia.

Vamos começar observando que a sentença “ $\exists x(x \text{ é um cão})$ ” por si só não menciona ou implica nada acerca de objetos abstratos, nem a teoria a qual esta sentença pertence precisa expressar este tipo de comprometimento de alguma forma (nos casos em que se trata de uma teoria científica, então quase certamente ela não conterà termos tais como “propriedades” ou “universais” em seu vocabulário). Então, do fato de que estamos comprometidos com a existência de cães não se segue necessariamente que deve existir um universal instanciado por todos os cães. De fato, talvez o realismo platônico não é necessário, ou podemos querer nos comprometer com alguma forma de nominalismo precisamente no caso da teoria que estamos considerando. Como já mencionamos, o tipo de comprometimento ontológico que estamos realmente assumindo, no sentido das categorias que podemos empregar para classificar os objetos daquele tipo, os cães, não estará completa e transparentemente expressa pela teoria, este não é um fato que podemos determinar apenas com a investigação empírica do tipo realizado pela teoria. Então, para este tipo de questão apelamos para a investigação da ontologia em seu sentido tradicional (em outras palavras, procedemos à investigação das diferentes possibilidades). Um caso análogo concerne, por exemplo, uma teoria comprometida com números. Isto implica necessariamente que estamos também comprometidos com objetos abstratos de acordo com esta teoria? Conforme estamos argumentando, este tipo de comprometimento não se segue da teoria apenas, ela não expressa este tipo de comprometimento explicitamente, isto vai depender de convicções ontológicas oriundas de outras frentes, que por

sua vez exige mais do que argumentação puramente matemática (ou, pelo menos, não apenas argumentos matemáticos, conforme parecem testemunhar argumentos padrão na filosofia da matemática, como por exemplo o famoso *argumento da indispensabilidade da matemática*). Então, existem aqueles itens com os quais uma teoria está comprometida explicitamente, através da quantificação existencial em suas sentenças verdadeiras, e aqueles com os quais ela está implicitamente comprometida, que vão depender de considerações metamatemáticas, e que aqui estamos considerando como tendo origem na investigação da ontologia em seu sentido tradicional (ver também a discussão em Chateaubriand (CHATEAUBRIAND, 2003, pp.50-52)).

Adotando este modo de se compreender o empreendimento ontológico, como sendo originado em dois níveis distintos mas relacionados, somos capazes de visualizar mais adequadamente a relação entre a multiplicidade de teorias científicas e as variadas mobílias que elas fornecem para este mesmo mundo. Ao mesmo tempo, esta distinção nos pode ser útil ao prevenir que caiamos em algumas armadilhas que podem pegar aqueles que abordam o assunto a partir de apenas de um destes pontos de vista. Como um exemplo de como estas vantagens aparecem, vamos considerar o caso da mecânica clássica. Esta teoria pode ser vista como comprometida com objetos particulares que, por sua vez, podem ser compreendidos de pelo menos dois modos distintos: podemos sustentar que estes particulares podem ser reduzidos a feixes de propriedades e/ou relações, ou podemos assumir alguma forma de individualidade transcendental valendo para eles, que incluiria algum tipo de *bare particular* ou *haecceitismo* juntamente com propriedades e relações. No primeiro caso, apenas propriedades e relações devem ser assumidas (juntamente com uma hipótese da impenetrabilidade, segundo a qual dois corpos distintos não podem ocupar o mesmo espaço ao mesmo tempo, e que deve ser assumida como uma hipótese adicional), de modo que a teoria contribui com a sua parte ao nos garantir que podemos sempre atribuir uma única trajetória própria de cada objeto. Este fato, juntamente com a hipótese da impenetrabilidade (outra premissa garantida pela teoria específica que estamos considerando), nos garante que apenas relações e propriedades são suficientes para individuar particulares desta teoria. Alternativamente, podemos também assumir que além de propriedades e relações cada particular possui um ingrediente extra que lhe é exclusivo, o *bare particular* ou *substratum*, que por sua vez fundamentaria a individualidade do particular e que, além desta tarefa de individuação, também seria o portador das propriedades, entendidas como universais ou como tropos, que é ainda outra

possibilidade. Neste caso, a ontologia em seu sentido tradicional está comprometida com duas categorias de itens, universais e particulares. Nenhuma destas opções encontra obstáculos naquilo que prega a teoria. Conforme é argumentado em French e Krause (ver (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.2)), a teoria por si própria não nos fornece uma resposta quanto a qual o tipo de itens com os quais ela se compromete, gerando assim uma espécie de subdeterminação da ontologia pela física. Para decidir qual destas opções é a mais razoável ou mais desejável, caso desejemos argumentar nesta direção, teremos que buscar argumentos em outras frentes, na ontologia em seu sentido tradicional, que é o âmbito no qual a controvérsia se desenvolve. Então, não é mesmo de se admirar que uma forma de subdeterminação deveria surgir, não está ao alcance da teoria decidir precisamente sobre estes assuntos específicos. Realmente, a mecânica clássica não nos fornece informação sobre como devemos entender as propriedades, ou se devemos ou não assumir substrata; estes são pontos especificamente metafísicos, a serem debatidos nas investigações de ontologia clássica.

Há ainda outra vantagem na proposta que estamos avançando aqui, relacionada mais uma vez ao fato de que ela torna consistente o estudo da ontologia em seu sentido tradicional, supondo uma aplicação universal, com o estudo do tipo naturalizado, que por sua vez é mais localizado e relativo aos diferentes modos pelos quais as teorias científicas podem ser vistas como representando o mundo. Devemos notar que apesar do fato de que a ontologia em seu sentido tradicional sempre manifestou um desejo de ser universal e único, quando consideramos seu sentido naturalizado, temos que teorias em disciplinas científicas distintas ou mesmo na mesma disciplina podem expressar compromissos com distintos tipos de objetos. Aqui, podemos seguir uma proposta apresentada por Rohrlich (ROHRLICH, 1999), segundo a qual diferentes teorias nos fornecem descrições de diferentes aspectos da realidade, nenhum dos quais tem mais direito de se considerar privilegiado sobre os demais. De acordo com Rohrlich, podemos examinar cientificamente o mesmo objeto a partir de diferentes *níveis cognitivos*, cada um deles tratando com uma diferente escala de comprimento, tempo e energia. Além disso, cada uma destas teorias emprega seus próprios métodos, conceitos e procedimentos experimentais.

Para considerar um exemplo destes distintos níveis, seguindo Rohrlich nós podemos considerar o caso, digamos, de um gato. O mesmo objeto (o gato) pode ser investigado como um objeto de teorias biológicas, de teorias químicas, de teorias físicas, da física de partículas, e assim por diante. Em princípio, a menos que se adote uma tese redu-

cionista, não terá sentido em se escolher um destes distintos níveis de descrição como sendo o mais adequado, ou ainda em tomar uma destas descrições como estando mais próxima da verdade. Então, dependendo do nível cognitivo no qual estamos conduzindo nossa investigação, vamos nos achar comprometidos com gatos, células, moléculas, átomos, e assim por diante. A divisão em níveis cognitivos, sem assumirmos o reducionismo, nos permite evitar uma problema do comprometimento implícito que se apresentava na abordagem de Quine ao estudo da ontologia: se aceitamos que estamos comprometidos com a existência de um gato, como o biólogo parece de fato estar, então parece que estamos comprometidos com a existência de cada parte componente do gato, suas células e moléculas, os átomos e elétrons que compõe as moléculas, as cordas que vibram para originar as partículas mais fundamentais que compõe os elétrons, e assim por diante. Certamente, a maioria destes itens não está implicada pela biologia sozinha e assim, devem ser tratados por teorias que atuam em níveis cognitivos distintos. Cada teoria deverá assumir apenas aquilo que é estritamente necessário para equipar o mundo com suas entidades básicas. Obviamente, em nossa abordagem está aberta a possibilidade para a defesa de alguma forma de reducionismo, supondo que alguma teoria é ontologicamente mais fundamental, ou mesmo em alguma forma muito forte de otimismo, uma teoria final verdadeira, à qual todas as outras teorias deveriam se reduzir e que, de acordo com este ponto de vista, nos forneceria a ontologia final, em ambos o sentidos da palavra (mesmo que seja relevante e interessante, não investigaremos a noção de redução de teorias neste contexto. Isto nos levaria muito longe dos objetivos mais restritos e modestos deste capítulo. Para um estudo breve de algumas formas de redução, ver Bueno (BUENO, 2009)).

A distinção proposta por Rohrlich tem ainda outro efeito interessante neste mesmo sentido. Se considerássemos a adoção de uma abordagem naturalista à ontologia sem as qualificações apresentadas por Rohrlich, então, aparentemente, o estudo de ontologia deveria estar restrito apenas a uma única teoria, aquela pretendendo nos dar a descrição última da realidade, pelo menos até o momento atual. Seguindo este tipo de abordagem, seria inquestionavelmente o caso que o estudo da ontologia deveria ser relativo apenas ao estudo das teorias finais, já que muitas vezes, pelo menos no modo usual de se compreendê-las, estas teorias são propostas para se ampliar o escopo de teorias prévias ou são utilizadas para se ultrapassar algumas de suas limitações. Neste caso, alguém que considerasse razoável argumentar que as teorias mais recentes nos dão uma melhor compreensão da mobília última do mundo

estaria comprometido com a tese de que, por exemplo, não faz muito sentido estudar a ontologia associada com a mecânica clássica, já que ela foi “substituída” pela relatividade geral (o mundo não pode mais ser como a mecânica clássica nos diz que ele é). Na esteira do mesmo argumento, seria igualmente sem fundamento estudar a ontologia associada à mecânica quântica não-relativista, pois aparentemente ela já foi superada pela teoria quântica de campos. Neste contexto, “superada” significa que teorias que superam suas predecessoras fornecem uma melhor e mais acurada descrição dos fenômenos. Por outro lado, se levarmos em consideração as distinções propostas por Rohrlich, podemos justificar e legitimar o interesse filosófico no estudo de ontologias (tradicionais e naturalizadas) associadas a diferentes teorias. Uma das principais motivações para se legitimar este tipo de estudo origina-se no fato de que em física, por exemplo, de fato utilizamos ainda a mecânica clássica, a mecânica quântica ortodoxa e a teoria quântica de campos em diversas situações, dependendo do caso em consideração. Ainda, adotar um ponto de vista reducionista tornaria o estudo da ontologia possível (ou no melhor dos casos, frutífero) apenas quando a teoria final for alcançada (se em algum momento ela for alcançada), pois poderá muito bem ser o caso que ela seja muito distinta de nossas melhores teorias científicas *atuais*. Então, mesmo que desejássemos apenas nos exercitar no estudo da ontologia das teorias atuais, como uma mera curiosidade, dado que a teoria final e verdadeira poderá ser completamente diferente daquelas que temos hoje, nós não ganharíamos nada com este tipo de atividade (mas Ladyman e Ross não pensam deste modo. Ver (LADYMAN et al., 2007, cap.1) para uma apresentação resignada da tese de que qualquer estudo de ontologia sempre deverá estar com os dias contados). Obviamente, este tipo de posição também pressupõe que a teoria final, caso encontremos uma, tenha realmente alguma forma de contato com a realidade e não seja simplesmente um mero corpo de conhecimento que por pura sorte “funciona”, isso é, que mais do que empiricamente eficiente, ela descreve a realidade, é um retrato dela.

## 2.3 LÓGICAS

Nesta seção nós passaremos ao exame do terceiro aspecto de nossa proposta: o papel desempenhado pela lógica tanto em tornar claros os compromissos ontológicos quanto em representar adequadamente as categorias ontológicas empregadas por uma particular ontologia em

seu sentido tradicional. Para começar, vamos distinguir dois aspectos que são relevantes quando estamos tratando da lógica. O primeiro diz respeito ao aspecto linguístico-sintático, no qual nós seguimos Quine (com as devidas generalizações apresentadas adiante). É bem conhecida a proposta de Quine de que as teorias deveriam ser formuladas em linguagens que ele chamou de “regimentadas”, isto é, linguagens de primeira ordem com regras de formação rigorosas e bem definidas, compreendendo apenas um vocabulário não-lógico finito, não contendo nem constantes individuais nem símbolos de operação (para a defesa de Quine do uso de linguagens regimentadas, ver a seção “A framework for theory”, em (QUINE, 1960)). O segundo aspecto a ser enfatizado e ao qual nós prestaremos atenção em breve trata da linguagem na qual a semântica para o cálculo formal (escrito na linguagem regimentada) é desenvolvido. Este aspecto é tão importante quanto o primeiro, pois é de certa forma na metalinguagem que as entidades com as quais lidamos estão; de certo modo, estas entidades irão fazer parte do domínio de interpretação das teorias, suas ontologias no sentido naturalizado apresentado acima.

Começamos examinando o aspecto sintático. As restrições defendidas por Quine àquilo que considerava serem linguagens aceitáveis, compreendendo um vocabulário austero, devem ser relaxadas caso desejemos que nosso estudo englobe as diversas possibilidades de categorias ontológicas. Quine, como é bem conhecido, fazia uso destas condições no vocabulário precisamente para restringir as possibilidades apenas àquelas que considerava serem as mais econômicas, uma estratégia que peca tanto por impor limitações às teorias que podem legitimamente ser estudadas quanto pelo simples fato de que exclui, em princípio, algumas das interessantes opções atualmente sob o escrutínio dos filósofos. Além disso, a própria lógica clássica nos compromete com categorias ontológicas que poderíamos certamente estar interessados em rejeitar, ou, talvez, pelo menos não tomar como primárias, mas apenas como derivadas de outras que se considera mais fundamentais. Conforme foi observado por da Costa (por exemplo, em da Costa (COSTA, 1997, pp.126-137), e também especificamente com relação à identidade por French e Krause em (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.6)), associados com a lógica clássica encontramos uma imagem idealizada do mundo, estática, na qual propriedades são atribuídas a substâncias imutáveis. Assim, da Costa sugere que seria razoável relativizar o critério de Quine para o comprometimento ontológico de modo que ele também permitisse diferentes lógicas e diferentes linguagens. Procedendo deste modo, teorias distintas poderiam instanciar distintas categorias ontológicas, até

mesmo algumas daquelas que eram proibidas pela lógica clássica, sendo suficiente para isto o uso de uma lógica distinta da clássica (Quine não aprovaria esta mudança, obviamente, mas é interessante considerar sua sugestão de que a mecânica quântica possa forçar uma mudança de lógica, ver (QUINE, 1992, pp.33-36). Ver também partes da discussão apresentada no capítulo 5).

Para considerarmos as vantagens da alteração proposta por da Costa, não precisamos nem mesmo sair do domínio da assim chamada Lógica Clássica (mesmo que, conforme já mencionamos, não seja uma tarefa simples definir o que se entende precisamente por Lógica Clássica). Uma lógica clássica de segunda ordem, por exemplo, nos permitiria expressar compromisso ontológico com propriedades e relações. Mudando para o campo das lógicas não-clássicas, poderíamos ir ainda mais longe. Vamos considerar o caso de alguns sistemas de lógicas de primeira ordem paraconsistentes, por exemplo, que são, falando por alto, sistemas de lógica nos quais a existência de contradições não levam necessariamente à trivialização; complementando um destes cálculos com uma relação binária de pertinência nos permitiria expressar comprometimento ontológico com objetos tais como o conjunto de Russell e objetos contraditórios em geral (para um estudo geral de sistemas de lógica paraconsistente, ver da Costa, Krause e Bueno (COSTA; KRAUSE; BUENO, 2006)). Neste caso, conforme outros filósofos já argumentaram, poderíamos desenvolver mais adequadamente uma ontologia baseada nas ideias de A. Meinong, aceitando objetos contraditórios tais como o círculo-quadrado (com as devidas restrições, obviamente, de que Meinong distinguia entre existência e subsistência. Neste caso, se levarmos ao pé da letra a doutrina de Meinong alguns dos objetos contraditórios não podem ser ditos existir, mas apenas subsistir. Assim, algumas questões de interpretação devem ser encaradas, mas não vamos tratar destes temas aqui, ver algumas destas observações em van Inwagen (INWAGEN, 2011)). Este tipo de ontologia, obviamente, não poderia ser desenvolvido no contexto da lógica clássica, que, para termos o benefício da possibilidade de estudarmos diferentes possibilidades metafísicas, deve ser substituída quando não for conveniente para o conjunto de categorias ontológicas que desejamos adotar.

Ainda, como a relação de pertinência e a linguagem de segunda ordem dos exemplos anteriores deve ter deixado claro, nós não vamos nos restringir àquilo que Quine considerava as lógicas mais adequadas, isto é, a lógica de primeira ordem, já que nós vamos aceitar lógicas de ordem superior e teorias de conjunto como tendo direito a serem incluídas na categoria de lógicas (além disso, de acordo com alguns

filósofos, a teoria de categorias é o pano de fundo conceitual mais adequado para expressar adequadamente compromisso com uma ontologia de estruturas, o assim chamado *realismo estrutural ontológico*, mas este é um tópico extremamente controverso, principalmente devido ao fato de que a noção de estrutura que está em jogo nestas discussões não está nem um pouco clara; para uma visão não de todo simpática ao uso de categorias no contexto do realismo estrutural ontológico, ver French (FRENCH, 2011)). Então, o reparo proposto por da Costa é um primeiro passo para permitir que diferentes ontologias possíveis, derivadas de diferentes categorias ontológicas possíveis, tenham cada uma delas um meio de expressão adequado. Uma ontologia permitindo objetos contraditórios (para dar apenas um exemplo), conforme nós já argumentamos, não poderia ser adequadamente expressa em uma lógica clássica, e nem em nenhuma lógica na qual uma contradição implicasse trivialidade. Outro exemplo relevante no qual uma lógica não clássica pode ser requerida concerne o caso de uma possível ontologia associada com a mecânica quântica não-relativista, mas nós retornaremos a esta discussão em breve.

Conforme mencionamos anteriormente, além do aspecto sintático presente na relação entre lógica e ontologia, há também o aspecto semântico, que trata de algumas características metamatemáticas das teorias. Este é também um aspecto essencial já que é na metalinguagem que determinamos e fixamos o domínio de interpretação de uma teoria, e também, conseqüentemente, é neste nível que as entidades com as quais a teoria está comprometida fazem a sua aparição (para uma investigação de algumas das relações entre estruturas e linguagens, ver Krause, Arenhart e Moraes (KRAUSE; ARENHART; MORAES, 2011)). Então, em uma interpretação da teoria que estamos considerando, os objetos com os quais nos comprometemos através da teoria são dados na metalinguagem, que é em geral uma teoria de conjuntos, teoria de categorias ou até mesmo alguma lógica de ordem superior. Levando este fato em consideração nos permite explicar o fato simples muitas vezes expresso como nos garantindo que uma teoria pode ter ontologias distintas associadas a ela, os seus diversos modelos. O principal ponto a ser levado em consideração aqui é que as entidades que podem aparecer como os “seres” com os quais se compromete uma determinada teoria são de alguma forma guiados pelos axiomas governando a metalinguagem. Mas, mais uma vez é importante prestarmos atenção ao fato de que existem muitas teorias de conjuntos distintas, nem todas elas compatíveis entre si. Qual dentre elas devemos empregar? Em geral, o procedimento mais recomendado consiste em se empregar a te-

oria que nos é mais familiar, a mais conhecida em geral, isto é, a teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel, mantida em um nível informal. Mas, como é o caso também da lógica clássica, esta teoria (e de fato todas as outras) trás consigo suas próprias restrições e hipóteses de cunho especificamente ontológico, como por exemplo o fato de se submeter ao princípio de não-contradição, ao fato de permitir a aplicação da relação de identidade de modo irrestrito, entre outros. Uma das dificuldades geradas por este tipo de abordagem é bastante clara: se queremos tratar com entidades que violam algumas das leis da lógica clássica, como os objetos inconsistentes fazem, por exemplo, ao incorporar itens como um conjunto de Russell, teremos que reconhecer que a metalinguagem não contém este tipo de entidades, e assim, não estamos realmente nos comprometendo com sua existência. Obviamente, mais do que isto deve ser entendido: ao empregarmos Zermelo-Fraenkel como metalinguagem nós re-introduzimos a validade da lei de não-contradição para todos os objetos com os quais estamos lidando. Procedendo deste modo, através da metalinguagem nós re-introduzimos precisamente aquelas características que desejávamos restringir na própria formulação da linguagem e lógica que adotamos como linguagem objeto (ver a discussão em (COSTA; BÉZIAU; BUENO, 1995)). Uma das principais razões para se atribuir relevância a aspectos semânticos se origina, obviamente, em determinarmos como podemos evitar este tipo de situação.

Este ponto pode ser melhor compreendido quando consideramos um sistema arbitrário de lógica não clássica, principalente no caso das chamadas lógicas heterodoxas, isto é, sistemas violando algumas das leis da lógica clássica. Vamos supor também que a motivação para se propor um tal sistema é empregá-lo como um substituto para a lógica clássica em geral ou em algum contexto específico. Nestes casos, quando estamos adotando estas atitudes em particular, devemos notar que uma semântica formulada em uma teoria de conjuntos clássica como Zermelo-Fraenkel não será adequada se vista de uma perspectiva filosófica. Este ponto já foi bastante discutido na literatura em contextos nos quais desejamos, utilizando uma lógica heterodoxa, substituir a lógica clássica. Neste casos, a semântica para o sistema lógico em questão deveria estar afinada com as motivações que tínhamos a princípio para justificar a própria proposta destes sistemas de lógica, pois em caso contrário, acabamos por pressupor a lógica clássica, e assim não podemos consistentemente sustentar que a estamos substituindo (ver a discussão deste e outros pontos relacionados em da Costa (COSTA, 1997), da Costa *et. al.* (COSTA; BÉZIAU; BUENO, 1995)). Um exemplo simples de uma tal situação acontece com as lógicas intuicio-

nistas de Brouwer-Heyting. Neste caso, sua filosofia intuicionista, que está sempre presente como pano de fundo na motivação e formulação destes sistemas de lógica, está comprometida, entre outras teses de caráter puramente construtivo, com uma restrição da lei do terceiro excluído, por exemplo. Apesar disto, em uma semântica clássica para esta lógica, como aquela que foi proposta por Kripke, por exemplo, usando a teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel como metalinguagem, teremos que na verdade a lei do terceiro excluído é assumida sem restrições, e assim, através desta semântica, restauramos o compromisso com a mesma lei que desejávamos restringir com a formulação do sistema de lógica em questão (para uma discussão sobre as várias formas de intuicionismo e lógicas intuicionistas, ver (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1984, cap.4)). O mesmo acontece com as lógicas relevantes. De acordo com os proponentes mais exaltados destas lógicas, a lógica clássica está errada e deve ser substituída por um sistema de lógica relevante, já que são estes sistemas que captam a verdadeira noção de implicação lógica. Mas, a menos que uma semântica baseada em uma teoria de conjuntos relevante seja apresentada e desenvolvida, suas afirmações correm o risco de permanecerem sem suficiente base (para uma defesa recente das lógicas relevantes tratando também de problemas envolvendo a semântica, ver Read (READ, 2006)). Do mesmo modo que ocorre com a lógica intuicionista, a dificuldade encontra-se no fato de que uma metalinguagem clássica nos compromete precisamente com aquela lógica que desejávamos evitar ao propor o sistema que estamos tentando interpretar, e assim, ao invés de substituí-la, nós acabamos por pressupô-la na própria formulação do sistema de lógica não-clássica em questão. Note que este fato coloca um problema para todos aqueles que desejam substituir a lógica clássica por alguma lógica não-padrão, este desejo de derrogar a lógica clássica deve estar presente como motivação para que se estabeleça a tensão com a semântica clássica que estamos mencionando.

A exigência de que um sistema de lógica não-clássica deveria ter uma semântica formulada em uma metalinguagem adequada (no sentido exposto acima, compreendendo mais adequadamente seus pressupostos e motivações), vem formulada naquilo que podemos chamar propriamente de *O Princípio de Consistência Semântica de von Weizäcker da Costa* (este princípio foi introduzido com este nome e desta forma primeiramente em Krause e Arenhart (KRAUSE; ARENHART, 2011, p.10)). De acordo com este princípio, a semântica para um sistema de lógica não-clássica deve ser formulada em uma metalinguagem que é ela mesma suposta como sendo a mais adequada para codificar as categorias on-

tológicas que desejamos explorar em nossa ontologia. Consequentemente, os objetos com o quais a teoria formulada deste modo estará comprometida terão as características desejadas, e nós nos manteremos consistentes com as motivações que nos levaram a propor uma lógica não-clássica para captar aquelas características. Então, deste modo evitamos a re-introdução através da metalinguagem daquelas propriedades que estamos tentando restringir ou violar na própria formulação da linguagem, sendo este em nossa opinião um procedimento filosoficamente mais adequado para se formular uma semântica formal para a lógica e teoria que é erigida sobre ela.

Como uma observação final, é importante perceber que nossa posição é liberal o suficiente para evitar as restrições impostas por uma abordagem como a de Quine, que havia limitado de tal modo as ferramentas lógicas que algumas das posições relevantes não poderiam nem mesmo ser formuladas. Este tipo de restrição não é um privilégio de Quine, que fique claro. Uma incarnação mais recente de ideias como aquelas defendidas por Quine no que diz respeito à lógica foi proposta por Nicholson Smith (ver Smith (SMITH, 2008)). De acordo com Smith, a ferramenta mais adequada para o filósofo em geral e o investigador de ontologia em particular é a lógica de primeira ordem clássica e a sua respectiva teoria de modelos; isto é, para filosofar de modo razoável, devemos ser capazes de em primeiro lugar mostrar como o tópico em questão pode ser modelado no contexto da lógica de primeira ordem e estruturas de primeira ordem. Qualquer assunto ou problema resistindo este tipo de regimentação pode ser abandonado sem remorsos por falta de precisão e até mesmo talvez falta de sentido. Esta abordagem é muito útil para os objetivos de Smith, ele elimina por *fiat* qualquer possibilidade de se discutir a tese de que a vagueza é uma característica do mundo, e não da linguagem (e é precisamente isto que ele se propõe). O nosso ponto é que o argumento funciona na direção contrária também: ao invés de mostrar que não há vaguidade, um defensor da vagueza ontológica poderia tomar este fato como mostrando que a lógica clássica não dá conta de características essenciais da nossa ontologia. Nossa abordagem aos esquemas ontológicos não é vítima destas limitações indesejadas (ou pelo menos assim as consideramos), ela permite sistemas de lógica que podem compreender coisas como objetos vagos, não eliminando eles sem mais qualquer discussão além de um simples limite do sistema de lógica. Isto é, não deveríamos guiar nossa ontologia pela nossa lógica preferida, mas antes, ao estudar ontologia deveríamos procurar um sistema de lógica que codifique de modo razoável nossos pressupostos no caso em questão.

Com este ponto, nós terminamos a exposição do terceiro membro do tripé de nossa proposta para o estudo da ontologia. Vamos relembrar aqui que nós propomos que, para que a ontologia seja uma disciplina autônoma, com seu próprio campo de investigação, e para que esteja relacionada com a investigação científica, podemos combinar três ingredientes: (i) aquilo que chamamos de ontologia em seu sentido tradicional, no qual se realiza o estudo das categorias ontológicas possíveis, incluindo o estudo de quais categorias poderiam ser definidas ou entendidas em termos de outras, (ii) o estudo daquilo que chamamos de ontologia em seu sentido naturalizado, que busca relacionar o primeiro aspecto da ontologia tradicional com a pesquisa científica, e (iii) o estudo da lógica subjacente à teoria em questão, ou pelo menos, da lógica subjacente ao discurso tratando dos objetos com os quais a teoria está comprometida. Este último ramo deverá incluir, conforme apresentamos nesta seção, os aspectos sintáticos e semânticos, de tal modo que as categorias lógicas capturam adequadamente as categorias ontológicas (obviamente, se este é de fato o caso não pode ser demonstrado matematicamente, isto permanece como uma espécie de *Tese de Church* sobre as categorias ontológicas).

O nosso próximo objetivo é ilustrar toda esta discussão prévia com um exemplo de uma teoria científica atual: a mecânica quântica não-relativista. Vamos argumentar que esta teoria, através da relação de ambos os tipos de estudo de ontologia mencionados anteriormente pode ser vista como estando comprometida com pelo menos dois tipos de ontologia: uma na qual os objetos com os quais ela trata não são indivíduos, em um sentido que logo tornaremos um pouco mais claro, e outra na qual aqueles mesmos objetos podem ser considerados indivíduos. No segundo caso, aquele termo (indivíduo) também terá um sentido determinado, pois se argumenta que a própria teoria proíbe que algumas das várias estratégias empregadas para se caracterizar um indivíduo sejam empregados neste caso específico. Vamos ver mais de perto como este tópico aparece na literatura.

## 2.4 MECÂNICA QUÂNTICA NÃO-RELATIVISTA

### 2.4.1 Indistinguibilidade e subdeterminação

Conforme discutimos bastante brevemente nas seções anteriores, a mecânica clássica apresenta uma forma de subdeterminação da ontologia no sentido de que é compatível com pelo menos dois tipos de

ontologias. A subdeterminação aparece quando se percebe que, ao nos restringirmos apenas aos recursos da teoria, não temos elementos suficientes para decidir qual dentre aquelas ontologias é a que deve ser adotada. Neste trabalho, em particular, nosso maior interesse concernendo as características centrais destas ontologias vai tratar quase que exclusivamente com a natureza dos objetos particulares, de modo que podem ser considerados como sendo (de acordo com as ontologias associadas à mecânica clássica) por um lado feixes de propriedades, ou por outro como compostos de um substratum particular e suas propriedades (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.2), ver também o apêndice A). Obviamente, ainda outras propriedades adicionais poderiam ser investigadas, com alguns filósofos sustentando até mesmo que em muitas situações as partículas da mecânica clássica podem ser vistas como sendo também entidades sem individualidade, mesmo que esta não seja uma opção vista como plausível por grande parte dos filósofos (ver a discussão em French e Rickles (FRENCH; RICKLES, 2003), French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4)). Até este momento, a estranheza e sentimento de desconforto surgindo deste tipo de situação em que ocorre o fenômeno da subdeterminação pode ser explicado como surgindo de nossa tendência de estudar a ontologia seja apenas em seu sentido naturalizado, e da aparentemente não problemática ontologia “clássica” associada com ela, ou pelo fato de que estudamos ontologia apenas em seu sentido tradicional, e consideramos que apenas uma das possibilidades deve ser o caso, independentemente do que a mecânica clássica nos diga que é o caso. De acordo com nossa abordagem, então, o fenômeno da subdeterminação pode ser visto sob uma luz um tanto diferente, como o resultado de uma metafísica cujas direções são dadas pela teoria em consideração, mas mesmo assim não são completamente fixadas por ela. Obviamente, o ponto é que a ontologia associada com a mecânica clássica não é apenas uma questão de mecânica clássica e também não é apenas uma questão de argumentos ontológicos. No entanto, a literatura apresenta a subdeterminação da mecânica clássica como uma forma fraca de subdeterminação, e a mecânica quântica como indo mais longe, fornecendo elementos para se acreditar que há uma forma mais forte de subdeterminação. Vamos examinar do que se trata aqui.

Enquanto que na mecânica clássica é razoável aceitarmos que a escolha deverá recair entre duas formas de ontologia que tratam dos objetos particulares da teoria como sendo *indivíduos*, a dificuldade central sendo como escolher entre diferentes princípios de individuação para estes particulares, seja como feixes de propriedades, seja como portado-

res de substrata, na mecânica quântica o problema concerne a escolha entre dois tipos opostos de ontologias, uma delas compreendendo particulares que são indivíduos, a outra compreendendo objetos que não são indivíduos, os *não-indivíduos*. No centro deste dilema, desempenhando um papel central, encontramos a famosa indistinguibilidade das partículas quânticas e o papel específico desempenhado na teoria pelo assim chamado *Postulado da Indistinguibilidade*. Essas noções são usualmente contrastadas com a situação na mecânica clássica. Vamos considerar cada uma destas noções brevemente, e buscar compreender como elas entram na disputa concernindo a individuação, mesmo que sem entrarmos em todos os detalhes (ver French e Rickles (FRENCH; RICKLES, 2003), French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4)). Notemos que a investigação neste tipo de discussão centra-se no comportamento estatístico das partículas, não em partículas individuais consideradas isoladamente. Isto reflete tanto o fato de que dificilmente podemos separar uma partícula quântica e estudar suas propriedades isoladamente como fazemos com objetos do dia a dia, e também o fato de que uma teoria como a mecânica quântica é tida não como uma teoria sobre sistemas individuais, mas sobre tipos de sistemas. Então, a atenção será focada sobre a estatística.

A ideia de que as partículas da mecânica clássica podem ser consistentemente vistas como sendo indivíduos é dita estar de alguma forma captada na estatística de Maxwell-Boltzmann, a forma de estatística obedecida por estas partículas. Vamos ilustrá-la com o caso em que duas partículas, rotuladas 1 e 2 devem ser distribuídas em dois estados, chamados *A* e *B*. Nós temos então as seguintes possibilidades (onde  $A(1)$  significa que a partícula 1 está ocupando o estado *A*, e assim por diante):

1.  $A(1)$  e  $A(2)$ ;
2.  $B(1)$  e  $B(2)$ ;
3.  $A(1)$  e  $B(2)$ ;
4.  $A(2)$  e  $B(1)$ .

Assumindo a equiprobabilidade de cada evento, cada uma destas possibilidades recebe o mesmo peso, isto é,  $\frac{1}{4}$ , e apesar de serem consideradas como sendo indistinguíveis, no sentido de partilharem todas as suas propriedades intrínsecas (independentes do estado), permutações de partículas são consideradas como dando origem a possibilidades distintas. De fato, conforme podemos perceber da estatística, é relevante

para a contagem de possibilidades se é 1 ou 2 que está ocupando  $A$  ou  $B$  nas duas últimas possibilidades. Estas combinações distintas dão origem a situações distintas. É argumentado que é precisamente esta característica que garante que as partículas clássicas são indivíduos, pois deve haver algo em 1 que de algum modo explique a diferença de arranjos na situação na qual é esta partícula que está em  $A$ , digamos, e não 2.

Na estatística quântica, por outro lado, permutações de partículas indistinguíveis não são contadas como dando origem à arranjos distintos. Esta situação codifica a simetria por permutações das partículas quânticas e a alegada “perda de identidade” destas partículas também é vista geralmente como tendo origem com este tipo de fenómeno. De fato, é argumentado que dado que as partículas podem ser permutadas sem dar origem a uma situação distinta, então, por oposição ao que ocorre na estatística clássica, elas não podem ser vistas como tendo aquele “algo” que explicava esta diferença no caso clássico. Isto é, conforme alguns colocaram este ponto, a individualidade das partículas foi perdida. Obviamente, este é um modo um tanto rudimentar de se enunciar as coisas, e poderíamos razoavelmente perguntar quando foi que elas perderam a individualidade, ou se é o caso que tinham algo para perder de fato (em French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.3) o leitor encontrará algumas referências sobre o modo como alguns dos fundadores da mecânica quântica entendiam o assunto). Antes de discutirmos com mais cuidado alguns destes pontos, vamos apresentar brevemente as estatísticas e ver como o comportamento das partículas de acordo com elas difere do caso clássico.

Vamos considerar o caso simples de duas partículas, que novamente nós rotularemos 1 e 2. Os estados possíveis para estas partículas são representados por vetores em espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente. Os estados para o sistema composto por estas duas partículas serão representados no produto tensorial de ambos os espaços  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Se  $\{\psi_i\}$  e  $\{\phi_j\}$  são conjuntos de vetores formando bases para os espaços vetoriais  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente, então  $\{\psi_i \otimes \phi_j\}$  gera o espaço produto tensorial em questão. Para partículas indiscerníveis, isto é, partículas do mesmo tipo partilhando todas as mesmas propriedades intrínsecas, tomamos  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ .

Para os nossos dois sistemas 1 e 2, se queremos investigar como podem ser distribuídos em dois estados possíveis  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ , teremos as seguintes possibilidades:

1.  $|a_1\rangle|a_2\rangle$ ;

2.  $|b_1\rangle|b_2\rangle$ ;
3.  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1\rangle|b_2\rangle \pm |a_2\rangle|b_1\rangle)$ .

De fato, o primeiro ponto que devemos levar em consideração é que na mecânica quântica temos dois tipos diferentes de estatísticas: a estatística de Bose-Einstein (BE) para as partículas chamadas bósons, e as estatísticas de Fermi-Dirac (FD) para as partículas chamadas férmions. A diferença entre elas surge no terceiro caso apresentado acima. Para os bósons, aquela possibilidade assume o sinal “+”, e assumindo novamente a equiprobabilidade de cada um dos três arranjos distintos, cada uma deles receberá o mesmo peso, isto é,  $\frac{1}{3}$ . Para os férmions a terceira opção acima assume o sinal “-”. Ainda, para férmions apenas esta terceira possibilidade existe, eles não podem ser distribuídos de acordo com os dois primeiros casos pois eles não podem partilhar os mesmos estados, já que obedecem o chamado *Princípio de Exclusão*, de Pauli. Neste caso, já que há apenas uma possibilidade, seu peso é 1. Note que, assim como no caso clássico, para escrevermos os vetores correspondentes a cada uma das possibilidades nós tivemos que rotular as partículas e os estados. Alguém poderia desconfiar de que todo este procedimento testemunha contra o próprio projeto de se sustentar que as partículas neste caso não possuem identidade nem individualidade. Bem, antes de discutirmos este assunto com mais cuidado, devemos observar que o fato é que precisamente para garantir que a rotulação das partículas não possui nenhum efeito nos valores esperados dos observáveis, utilizamos vetores de estado simétricos e anti-simétricos, os primeiros para bósons, os segundos para férmions, acrescentando ainda o Postulado da Indistinguibilidade, enunciado abaixo. Claro, este pode ser visto como sendo apenas um truque matemático, pois o que realmente importa para a física é que os valores esperados da medida de qualquer observável  $\hat{O}$  para o sistema no estado  $|\psi\rangle$  não muda depois de uma permutação dos rótulos das partículas. Sendo  $P$  um operador de permutação e  $|\psi\rangle$  o vetor de estado para as partículas 1 e 2, expressamos este fato por meios do *Postulado da Indistinguibilidade* (PI):

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \langle P\psi|\hat{O}|P\psi\rangle = \langle\psi|P^{-1}\hat{O}P|\psi\rangle$$

Nós retornaremos à discussão sobre o papel e relevância do rótulos e sua relação com a identidade e individualidade no capítulo 4. O tópico da (não)individualidade das partículas quânticas está relacionado ao modo como entendemos o recém enunciado postulado. A primeira

vista, trata-se de um enunciado sobre os operadores  $\hat{O}$  representando observáveis: todo observável permitido deverá comutar com todos os operadores de permutação  $P$ . Então, de acordo com esta leitura, não há nenhuma medição que poderíamos realizar que resultaria em uma diferença entre o estado inicial e o estado permutado. Uma leitura relacionada a esta, aquela geralmente associada com argumentos a favor de tomarmos as partículas como não-indivíduos atribui ao Postulado da Indistinguibilidade uma restrição aos estados: os únicos estados permitidos para quaisquer partículas são os simétricos e os anti-simétricos. Neste caso, apenas bósons e férmions são possíveis, e já que os operadores representando observáveis sempre nos dão como resultado um vetor do mesmo tipo de simetria daquele sobre o qual aplicamos o operador, podemos garantir que nunca saímos de um estado simétrico (anti-simétrico) para um estado anti-simétrico (simétrico). Então, de acordo com este modo de se compreender o postulado, as partículas podem razoavelmente ser tomadas como não-indivíduos, nada é capaz de distinguir entre elas, e é este modo de lermos o postulado que tradicionalmente é assumido por aqueles que sustentam que as partículas quânticas, em oposição ao que ocorre com as partículas clássicas, não possuem individualidade. A própria ideia de que devemos ler PI como impondo restrições também nos estados possíveis levou alguns autores a propor uma distinção entre o Postulado da Indistinguibilidade e o chamado Postulado da Simetrização (PS), que serve para nos garantir precisamente que os únicos estados possíveis são os simétricos e os anti-simétricos. De acordo com a interpretação dos postulados buscando sustentar a não-individualidade das partículas, então, é sustentado que o Postulado da Indistinguibilidade também restringe os estados, e que ele é implicado pelo Postulado da Simetrização (ver French e Rickles (FRENCH; RICKLES, 2003) e French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4)),

Mas se este modo particular de se compreender PI e PS nos permitem entender as partículas como não-indivíduos, em que sentido preciso algo pode ser um não-indivíduo? Como tornar esta noção mais rigorosa? O primeiro ponto a ser notado é que a própria noção de particulares desprovidos de individualidade, neste caso, pode figurar como uma nova categoria ontológica, ou ainda talvez como uma subcategoria da categoria dos objetos, desde que a categoria dos objetos, por sua vez, não exija que certos critérios de identidade e re-identificação sejam satisfeitos. Estas restrições ao conceito de identidade devem ser feitas neste caso, pois em geral acredita-se que nada, de fato, que não exista nenhuma possibilidade de identificarmos uma partícula individual, nem

de nomeá-la, rotulá-la, ou nem mesmo de aplicar a elas todas aquelas características familiares dos objetos possuindo individualidade; aparentemente, para os não-indivíduos todas estas características deixam de fazer sentido. Então, estas partículas (ênfatizando, nesta leitura de PI) violam de alguma forma as principais propriedades da relação de identidade, e a lógica empregada para tratar delas deve, do mesmo modo, conter restrições à identidade. Isto já nos dá algumas dicas sobre as características peculiares que uma lógica para este tipo de objetos deveria ter, impondo restrições na própria noção de identidade, tida por muitos como básica e não negociável (vamos discutir mais sobre este ponto no capítulo 3).

Estas são apenas algumas das linhas mestras daquilo que poderíamos chamar de uma *metafísica da não-individualidade* (ver também as propostas em Krause (KRAUSE, 2011b)). Estudos adicionais devem ser feitos para se investigar a relação entre impermutabilidade (o fato de que permutações de partículas indiscerníveis do mesmo tipo não dão origem a arranjos distintos; o termo vem de Bitbol (BITBOL, 1996)) e não-individualidade, e ainda mais para nos permitir desenvolver uma ontologia compreendendo não-indivíduos e suas relações com os indivíduos, no caso de haver alguma. Nós deixaremos a discussão dos detalhes de um particular sistema formal proposto com o objetivo de acomodar uma noção de não-indivíduos para o próximo capítulo. Aqui mencionaremos apenas que existem sistemas formais designados especialmente para este propósito, tanto lógicas de ordem superior, como as chamadas Lógicas de Schrödinger, e teorias de conjuntos, as chamadas teorias de quase-conjuntos (ver as apresentações em French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, caps. 7,8)).

Todavia, pode ser argumentado que esta não é toda a história acerca de PI, já que esta não é a única leitura possível daquele postulado. Existe de fato uma maneira alternativa de lermos este postulado, que pode então ser visto como impondo uma restrição nos observáveis disponíveis e nas condições iniciais sobre os estados: apenas observáveis comutando com os operadores de permutação são permitidos, de modo que um sistema sempre começa em um estado simétrico ou anti-simétrico. Neste caso, os estados assimétricos não são banidos, eles existem mas são inacessíveis para as partículas cujos estados são representados por vetores de outros tipos de simetria, já que as partículas sempre iniciam em estados simétricos ou anti-simétricos, e nenhum operador os envia para algum dos estados assimétricos. Então, neste caso, seria possível, pelo menos em princípio, resistir à afirmação de que os rótulos associados às partículas não possuem nenhum sig-

nificado ou peso metafísico. Eles possuem significado, mas devido às restrições impostas pelo PI (nesta leitura particular), eles não podem realizar nenhum tipo de contribuição neste sentido. Isto é, as partículas são constrangidas a estarem em estados simétricos ou anti-simétricos e nunca passam para um estado assimétrico, ou, conforme Redhead e Teller enunciaram este fato (em (REDHEAD; TELLER, 1992, p.206)), estados como  $|a_1\rangle|b_2\rangle$  ou  $|a_2\rangle|b_1\rangle$  são estados fisicamente possíveis mas nunca realizados. Nesta leitura, as partículas poderiam ser entendidas como indivíduos, em algum sentido desta palavra (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4) para estas possibilidades).

Mas agora vem a questão: em que sentido as partículas quânticas podem ser indivíduos? Que tipo de princípio de individualidade podemos adotar para elas? Em geral, tem sido argumentado que a individualidade das partículas quânticas terá que ser fundamentada em alguma espécie de substrato lockeano ou um *thisness* não qualitativo ou ainda em alguma forma de haecitismo (ver Moreland (MORELAND, 1998), Adams (ADAMS, 1979)). Dado que as partículas neste caso podem ser absolutamente indiscerníveis (e para isto existem bons argumentos), tem-se argumentado que o *Princípio da Identidade dos Indiscerníveis* (PII) falha na mecânica quântica. Segundo este princípio, enunciado e defendido por Leibniz, dentre outros, objetos indiscerníveis são idênticos, algo que parece ser contradito pelo comportamento das partículas quânticas (ver (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4)). Agora, juntamente com a falha de PII cai também a possibilidade de se fundamentar a individualidade das partículas em algum conjunto de propriedades pertencendo a elas. Isto é, as assim chamadas teorias de feixes da individuação, cuja principal característica nos diz que um indivíduo é caracterizado por um determinado subconjunto relevante de suas propriedades, são inaplicáveis para o caso da mecânica quântica e assim, devemos buscar auxílio nos substratos ou em formas de haecitismo ou essências primitivas. Estas duas abordagens ao problema da individualidade (substratum e essências) postulam que além das propriedades qualitativas, os particulares também possuem um algo a mais que está além das qualidades, e que funciona para conferir a individualidade dos particulares. No caso da teoria dos substratos, este “algo a mais” é um ingrediente extra, algo que não é uma propriedade e que possui sua própria individualidade, geralmente chamado na literatura de língua inglesa de *bare particular*; no caso das essências primitivas, este “algo” seria uma propriedade não-qualitativa que é exclusiva para cada indivíduo. Em ambos os casos, dois objetos podem partilhar todas as suas qualidades, assim explicando sua indistinguibilidade, mas são seus

substratos ou suas essências que estão lá para dar conta de sua individualidade e diferença numérica. Vamos notar que, apesar de funcionarem para os propósitos de se garantir a individualidade das partículas, cada uma destas duas estratégias conta como uma forma diferente de se fazer isto. Para alcançar seus objetivos, o teórico defendendo o substrato deverá postular tanto a existência de propriedades quanto a existência de um item especial, o *bare particular*. O defensor das essências poderá se comprometer apenas com propriedades, mas algumas delas deverão ter um status especial, pois não poderão ser instanciadas em mais do que um único indivíduo (para mais discussões concernindo as posições metafísicas e suas relações com a mecânica quântica, ver French (FRENCH, 1998), French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006)).

Então, em resumo, parece que nossas opções são: aceitar a não individualidade quântica e sair em busca de uma explicação para este fenômeno da falta de identidade que as caracteriza, ou tomar o caminho dos indivíduos, e adotar alguma forma de princípio de individuação que em geral não foi visto com bons olhos na história da filosofia, por parecer (no mínimo) misterioso demais. Em ambas as abordagens PII é considerado como problemático. No primeiro caso, na opção pelas partículas como não-indivíduos, ele simplesmente não se aplica, pois estas entidades não possuem, de algum modo, identidade. Na abordagem das partículas como indivíduos, por outro lado, ele falha, pois parece ser simplesmente falso para elas. Esta possibilidade de escolha é uma manifestação novamente da tese da subdeterminação, não podemos decidir qual das teses metafísicas devemos adotar meramente a partir de considerações oriundas da mecânica quântica, a escolha a ser feita não está de alguma forma implícita na teoria, não pode ser lida a partir dela. Todavia, este modo de se entender a ontologia da mecânica quântica esteve sob constante ataque os últimos anos. Alguns a desafiaram argumentando que o PII pode ser recuperado na mecânica quântica, que trata-se de um princípio válido nesta teoria. Note que este tipo de tese iria eliminar a ideia de que as partículas quânticas podem ser entendidas como não-indivíduos, iria impor uma re-consideração dos argumentos contra uma teoria de feixes para a mecânica quântica e, com estas duas teses, poderia acabar com o fenômeno da subdeterminação. Vamos dar uma olhada rápida sobre estas discussões (para mais detalhes sobre este tópico, ver o capítulo 6).

## 2.4.2 O que as partículas não poderiam ser

Conforme nós mencionamos, uma terceira opção muito conhecida concernindo a natureza dos particulares, a assim chamada teoria de feixes, também poderia ser considerada no caso das partículas quânticas como um princípio de individuação. Como vimos anteriormente, esta abordagem pode e muitas vezes é de fato empregada para se explicar a individualidade das partículas clássicas. Na teoria quântica, por outro lado, as coisas não são tão simples, e existem fortes argumentos buscando mostrar que uma teoria de feixes simplesmente não pode funcionar para conferir individualidade às partículas quânticas. Certamente, fundamentando este tipo de argumento pela implausibilidade de uma teoria de feixes encontraremos o Postulado da Indistinguibilidade e a impermutabilidade associada a ele. Vamos ver agora brevemente quais são as dificuldades neste tipo de caso.

De acordo com a teoria de feixes, um indivíduo pode ser caracterizado como um feixe de propriedades. Nós não entraremos em detalhes acerca de como se deve entender a metáfora do feixe nem como as propriedades que de certa forma ‘constituem’ um indivíduo são coletadas (isto é, a natureza daquilo que mantém as propriedades todas juntas). O principal aspecto de uma teoria de feixes que nos interessa aqui é o fato de que para garantir a unicidade de um feixe, conforme deve ser exigido para que a teoria funcione corretamente, devemos adotar alguma versão do famoso *Princípio da Identidade dos Indiscerníveis* (PII), proposto e defendido por Leibniz no século dezessete, com uma reputação controversa desde então. De acordo com este princípio, falando informalmente, se dois objetos são qualitativamente indiscerníveis, isto é, se partilham todas as suas propriedades, então são realmente apenas um e o mesmo objeto. Este princípio nos garante precisamente aquilo que, de acordo com a nossa discussão anterior, devemos evitar no contexto da mecânica quântica quando tratamos de partículas de um mesmo tipo, ou seja, que a indistinguibilidade quantitativa colapse em identidade numérica. Conforme argumentamos, na teoria quântica existem situações nas quais duas entidades numericamente distintas são de fato qualitativamente idênticas.

Mas, antes de aceitarmos como estabelecidas estas conclusões negativas, é importante notar que o termo ‘propriedades’ aparecendo na formulação do PII pode de fato ter diversos sentidos. Vamos começar apresentando uma classificação de diversas versões do princípio notando que elas diferem no modo como este termo em particular deve ser entendido. Primeiramente, em sua versão mais fraca, que chamaremos PIII,

o princípio nos garante que dois objetos partilhando todas as suas propriedades e relações, incluindo relações espaço-temporais, são de fato a mesma entidade; em outra versão, que chamaremos PII2, excluimos do escopo das propriedades as relações espaço-temporais, mas relações de outros tipos ainda são permitidas; finalmente, a forma mais forte do princípio, PII3, enuncia que objetos partilhando todas as suas propriedades monádicas são de fato o mesmo objeto. Tem-se argumentado que, se a teoria de feixes deseja realmente ser uma teoria sobre a individuação de objetos particulares, então apenas PII3 é um candidato plausível, isto é, devemos garantir que objetos indiscerníveis relativamente às suas propriedades monádicas são idênticos, caso contrário a teoria falha em seu papel de fornecer um princípio de individuação (ver também as discussões em Adams (ADAMS, 1979)). Segundo este modo de ver, as relações não deveriam desempenhar nenhum papel na individuação, pois elas já pressupõe que os objetos relacionados estejam disponíveis e individuados, de modo que não podem por sua vez dar uma fundamentação para a individualidade.

A principal dificuldade para um defensor de uma teoria de feixes é que PII3 é incompatível até mesmo com a mecânica clássica, falhando até mesmo nestes contextos. Vamos nos lembrar que alguma versão de PII pode ser mantida na mecânica clássica desde que assumamos a Hipótese da Impenetrabilidade (uma hipótese de cunho eminentemente espacial) e também que a localização espacial seja uma propriedade permitida na individuação. Para a mecânica quântica, o caso não é tão simples. Nesta teoria, se nós identificamos as propriedades dos sistemas com os observáveis físicos, e entendermos que os operadores hermitianos os representam nos espaços de Hilbert atribuídos às partículas, então, para partículas em estados simétricos e anti-simétricos, como é o caso para bósons e férmions, pelo Postulado da Indistinguibilidade não podemos distinguir duas partículas do mesmo tipo nem mesmo através de relações, violando então até a versão PIII. Neste caso, já que sem PII nós não podemos garantir o bom funcionamento de uma teoria de feixes, permanecem então como as únicas opções alguma forma de teoria de substrato ou de essências individuais (ver French e Rickles (FRENCH; RICKLES, 2003), French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4)).

Então, mesmo que a mecânica quântica não nos diga que tipo de ontologia está associada a ela, se ela trata com indivíduos ou com não-indivíduos, ela pode então pelo menos ser vista como nos informando sobre o tipo de coisas das quais ela *não* trata. Este fato poderia ser visto como uma espécie de esquema meta-popperiano para a ontologia,

no qual a ontologia em seu sentido naturalizado proíbe ou bane alguma forma de ontologia no seu sentido tradicional. Aparentemente, uma ontologia baseada em uma teoria de feixes não pode ser compatível com a teoria quântica, ou seja, conforme a própria teoria esta *não* é uma opção possível. Apesar de todos estes argumentos, estas conclusões foram questionadas recentemente (ver, por exemplo, Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008), Muller (MULLER, 2011)). O núcleo do argumento em favor do PII na mecânica quântica consiste no fato de que outra distinção importante foi esquecida, uma distinção que alegadamente salva alguma forma de PII, mesmo que a forma mais forte do princípio não seja válida na teoria. Os proponentes do argumento sustentam que mesmo que PII3 seja refutado, podemos apelar para aquilo que é chamado de *distingüibilidade fraca*: os objetos 1 e 2 são fracamente discerníveis quando existe uma relação  $R$  que é irreflexiva e simétrica valendo entre eles. Uma relação  $R$  é irreflexiva quando para todo  $x$  pertencendo ao domínio da relação não é o caso que  $xRx$ , isto é, nenhum objeto está relacionado por  $R$  consigo mesmo. Então, objetos podem ser fracamente discerníveis por uma tal relação valendo entre eles, já que nenhum deles pode ter a relação consigo mesmo. Isto, argumenta-se, é um modo de se salvar PII, já que garantimos que objetos numericamente distintos podem ser discernidos por uma relação, mesmo que partilhem todas as suas propriedades monádicas.

Mas será que podemos encontrar tais relações para as partículas quânticas? Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008) acreditam ter demonstrado que sempre podemos. Por exemplo, a relação “ter spin oposto a em alguma direção” é uma relação binária entre dois elétrons, e é irreflexiva (nenhum elétron pode ter spin oposto a si mesmo em uma dada direção) e é simétrica. Mas este argumento realmente prova que tudo o que foi dito contra o PII na mecânica quântica está errado? Dificilmente, dizem os críticos desta proposta. A principal dificuldade apontada para a abordagem via PII fraco é que ela se envolve essencialmente com relações, e relações, conforme nós mencionamos anteriormente, pressupõe a individualidade dos itens relacionados. Então, a abordagem através da discernibilidade fraca foi rejeitada por muitos como uma forma de salvar PII por se envolver em uma espécie de circularidade, ela pressupõe que os objetos já estejam individuados para somente então ser capaz de colocá-los em uma relação que segundo esta abordagem deveria ser capaz de explicar e fundamentar esta individualidade. Vamos notar que, de fato, se a relação é irreflexiva, então devemos saber de antemão que estamos tratando com objetos numericamente distintos, e então não podemos fundamentar esta distinção na

relação irreflexiva neste caso, pois a distinção já está pressuposta (ver também Ladyman e Bigaj (LADYMAN; BIGAJ, 2010), Krause (KRAUSE, 2010), Hawley (HAWLEY, 2009) para críticas adicionais).

Então, existe um crescente consenso de que esta abordagem para salvar PII através da discernibilidade fraca falha em geral, e também que ela é mal-motivada diante do projeto maior de se fundamentar uma teoria de feixes para a individualidade. A subdeterminação ainda ocorre, pois de um lado temos uma ontologia de indivíduos, e do outro uma ontologia compreendendo não-indivíduos. Conforme estamos argumentando, decidir entre estas opções envolve mais do que um simples apelo à teoria em questão, e aqui a argumentação eminentemente filosófica pode mostrar sua relevância, indicando a viabilidade de algumas alternativas e sua consistência com os fatos expressos pela teoria. De fato, isto deveria ter estado claro desde o começo, teorias científicas não nos fornecem informações acerca das categorias ontológicas relevantes com as quais elas podem estar comprometidas, elas simplesmente não foram construídas para este objetivo.

## 2.5 SUBDETERMINAÇÃO RECONSIDERADA

O fenômeno da subdeterminação da ontologia pelas teorias científicas, tanto no caso da mecânica clássica quanto no caso da mecânica quântica nos mostra que existe uma relação interessante valendo entre o estudo puramente filosófico da ontologia tomada em seu sentido tradicional, com aquilo que chamamos de ontologia tomada em seu sentido naturalizado, focada nas teorias científicas e nas relevantes informações que podem nos fornecer acerca das ontologias associadas a elas. Por um lado, não podemos simplesmente “ler” nossas ontologias a partir de determinadas teorias científicas, devemos estar equipados de antemão com algumas categorias ontológicas de modo a sermos capazes de classificar adequadamente aquilo que nossas teorias dizem existir. Por outro lado, como nos mostra o caso da mecânica quântica, nosso conjunto favorito de categorias ontológicas pode de fato falhar, e isto é algo a ser apreendido a partir do estudo das teorias. Neste sentido, não é simplesmente o caso que qualquer conjunto de categorias vá funcionar. Então, ambos os sentidos de ontologia propostos aqui tem uma influência um sobre o outro; poderíamos dizer que a ontologia clássica influencia positivamente a ontologia naturalizada, ela fornece as categorias ontológicas. Por outro lado, a ontologia naturalizada influencia negativamente a ontologia clássica, ela pode restringir a gama de possibilidades conceituais

ao nosso dispor.

A proposta apresentada neste capítulo concernia em primeiro lugar uma distinção entre dois sentidos de “ontologia”: um sentido que chamamos de clássico e um que chamamos de naturalizado. A relação entre o sentido clássico e o sentido mais moderno, orientado para as teorias científicas, pode ser vista primeiramente como se segue: a ontologia clássica fornece as categorias ontológicas para que a ontologia em seu sentido naturalizado as aplique; por outro lado, a ontologia naturalizada pode ser utilizada para se argumentar que algumas espécies de ferramentas conceituais não se aplicam ou não são aptas para algumas teorias. Ainda, nós consideramos que a distinção entre as duas formas de ontologia e suas distintas tarefas podem representar um passo importante para uma melhora no estudo das situações em que casos de subdeterminação podem ocorrer, e ainda mais do que isso, para o próprio estudo da subdeterminação. Realmente, não deveríamos nos impressionar com o fato de que teorias científicas nos apresentam alguma forma de subdeterminação da metafísica, pois nas situações usuais em que este fenômeno aparece apenas os recursos da teoria são levados em consideração na hora de se decidir entre ontologias rivais. Conforme argumentamos, a teoria por si só não carrega informações concernindo este tipo de investigação, já que aquelas informações são fornecidas pelas investigações da ontologia em seu sentido clássico.

Além desta melhor compreensão da subdeterminação, a distinção entre os dois sentidos de ontologia nos permite manter a relevância de um tipo de investigação eminentemente filosófica, mesmo em contextos que atribuem um grande peso para as informações oriundas da investigação científica. O estudo da ontologia pode de fato ser cientificamente informado, mas ele não se restringe apenas a isto, pois conforme vimos, se nos confinarmos apenas àquilo que nos dizem as teorias científicas, não teremos as ferramentas conceituais necessárias para desenvolver o tipo de estudo relevante. Nestas circunstâncias, o estudo da ontologia restrito apenas ao seu sentido naturalizado ficaria simplesmente paralisado sem o seu complemento que o informa acerca das categorias ontológicas relevantes. Ainda, o estudo de ontologia em seu sentido tradicional, por sua vez, poderia cair em muitas dificuldades sem as informações adicionais advindas das teorias científicas, conforme ocorre no caso da mecânica quântica em sua relação com a teoria de feixes. Então, acreditamos que este seja um primeiro passo, mesmo que seja pequeno, para os propósitos de se estabelecer uma teoria razoável concernindo a relação entre investigação *a priori* e informação científica concernindo o mundo. Agora, passaremos para uma investigação de

um sistema formal proposto para se tratar com objetos os quais poderiam ser razoavelmente considerados como não-indivíduos, começando assim a fundamentação do estudo de uma metafísica compreendendo não-indivíduos.

### 3 TEORIA DE QUASE-CONJUNTOS

A teoria de quase-conjuntos  $\Omega$  é uma teoria ao estilo ZFU cuja principal motivação deriva de uma particular interpretação da mecânica quântica ortodoxa: conforme observamos no capítulo anterior, de acordo com alguns autores, existem situações nas quais as entidades com as quais tratamos nesta teoria não apenas são completamente indistinguíveis mas, o que é mais impressionante, mesmo enunciados expressando sua identidade ou diferença não fariam nenhum sentido. Este tipo de entidades foi tradicionalmente chamado de *não-indivíduos*. Para tratar mais adequadamente com este tipo peculiar de objetos, a teoria de quase-conjuntos  $\Omega$  permite a existência de entidades dotadas precisamente destas características (ou seja, entidades para as quais a noção standard de identidade não se aplica), bem como coleções cujos elementos são estas entidades. Aqui nós apresentamos os axiomas de  $\Omega$  e acrescentamos alguns comentários detalhados sobre suas formulações e propósitos, apresentamos e comentamos também alguns resultados concernindo a cardinalidade de coleções de não-indivíduos indistinguíveis. Para garantir que estamos operando sobre bases seguras, fornecemos um argumento que estabelece que  $\Omega$  e ZFU são equiconsistentes. Terminamos o capítulo fazendo algumas observações sobre a aplicação da teoria aos fundamentos da física quântica.

Note que este é o primeiro passo no intento de se preencher os frameworks ontológicos conforme expostos no capítulo anterior. Dado que adotamos uma interpretação particular da mecânica quântica, e que estamos assumindo que os itens com os quais ela trata são alguma forma de não-indivíduos, partimos para a apresentação de um sistema formal compreendendo as categorias ontológicas particulares daquela interpretação. Este capítulo vai tratar basicamente dos detalhes formais da teoria, apesar de mantermos em mente as motivações e a interpretação pretendida para o formalismo, qual seja, a de que a teoria trata de objetos que devem representar formalmente os não-indivíduos.

#### 3.1 INTRODUÇÃO

A teoria de quase-conjuntos  $\Omega$  é uma teoria de conjuntos ao estilo ZFU que admite dois tipos de átomos, um deles fazendo o mesmo papel que os átomos das teorias clássicas de conjuntos com *Urelemente*, o outro sendo a grande novidade da teoria de quase-conjuntos. Para

se ter uma ideia adequada daquilo que eles representam em nossa interpretação pretendida, é útil nos voltarmos um momento para a principal motivação para se propor a teoria (apesar do fato de que de um ponto de vista matemático a teoria é independente das suas motivações físicas). A teoria que estamos chamando  $\Omega$  foi construída tendo-se em mente o comportamento das partículas indistinguíveis ('idênticas', no jargão dos físicos) da mecânica quântica não-relativista. De acordo com alguns dos pioneiros fundadores da teoria quântica, tais como Schrödinger, Heisenberg, Born, e outros tais como Weyl, diferentemente do caso das partículas tratadas pela física clássica, os objetos quânticos não poderiam ser considerados como *indivíduos* pois, em um certo sentido específico, as partículas quânticas haviam 'perdido' sua individualidade (este é apenas um modo não muito rigoroso de falar originado nos primórdios da teoria quântica, conforme observamos anteriormente; de acordo com nosso modo de ver, não há nada a ser perdido se as partículas *não possuem individualidade* para começo de conversa). Obviamente, este tipo de enunciado necessita de muitas qualificações, mas a ideia é que as partículas quânticas, além de poderem ser em muitos casos absolutamente indistinguíveis, no sentido de que podem partilhar todas as suas propriedades intrínsecas, podem ser tais que não podemos nem mesmo afirmar que há sentido em enunciados de identidade concernindo elas, de modo que a identidade pode ser considerada como completamente sem sentido quando falamos destes objetos (esta é precisamente a posição de Schrödinger em seu trabalho de 1952, ver (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.3)).

A opinião de que as partículas quânticas eram totalmente desprovidas de individualidade estava tão difundida nos primeiros anos de desenvolvimento da teoria que foi até mesmo rotulada por comentaristas posteriores como a *Concepção Recebida* da não-individualidade das partículas (em inglês, *Received View*, para mais detalhes sobre a história e aspectos filosóficos relacionados a estes temas, ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.3)). Já que de acordo com este modo de ver as partículas não podem ser consideradas como sendo indivíduos, elas foram batizadas com o não muito conveniente nome de *não-indivíduos*. A terminologia utilizada aqui segue a tradição, mesmo que o termo 'não-indivíduos' possa carregar consigo algumas conotações indesejadas. Então, de um ponto de vista metafísico os não-indivíduos parecem ter um comportamento muito diferentemente dos objetos padrão tratados pela física clássica. Realmente, se considerarmos que a noção de identidade não se aplica a eles com sentido, então aparentemente toda uma ampla gama de conceitos tradicionais,

quando aplicados às partículas quânticas, vão falhar quando entendidos do modo usual. Alguns destes conceitos que poderiam ser mencionados são as noções de referência, numeração e contagem, ordenação, nomeação e rotulação, e outras noções envolvendo a referência também. Com estes conceitos fora de uso em seus sentidos tradicionais, a lógica e a teoria de conjuntos usuais, quando aplicadas a estas entidades, podem também ser questionadas neste domínio. Ou seja, podemos perguntar se estes aparatos clássicos, quando aplicados a estes tipos de entidades, nos fornecem um framework adequado para tratar delas de modo a captar estas características não usuais destas partículas (ver a próxima seção, e também a discussão do capítulo anterior tratando de lógica). Ao que tudo indica, um diferente aparato matemático deverá ser buscado para se fundamentar a Concepção Recebida em uma base formal mais adequada. A ideia chave por trás da introdução de um tipo extra de átomo em  $\Omega$  está precisamente neste ponto, pois precisamos fornecer axiomas que, além de tornar claro em que sentido este novo tipo de átomos representa não-indivíduos, também nos diga como coleções deste tipo de entidades se comportam de um modo conjuntistamente aceitável.

Então, ao levarmos em conta estas motivações,  $\Omega$  foi formalmente designada para tratar com coleções de itens que podem ser indistinguíveis mas que não podem entrar com sentido em relações de identidade nem de diferença. Como uma consequência, entre outras, teremos um aparato matemático que pode razoavelmente ser tomado como uma teoria de fundo no sentido proposto por Quine (Quine (QUINE, 1969)), de modo que podemos dizer que mesmo objetos para os quais a identidade e diferença não fazem sentido podem agora fazer parte dos valores das variáveis, resultando no fato de podermos nos comprometer legitimamente com entidades sem identidade. Certamente poderíamos supor que esses novos objetos aos quais a relação de identidade não se aplica podem ser divididos em vários tipos distintos, para podermos representar adequadamente a distinção que usualmente admitimos entre as partículas em física (elétrons, prótons, e assim por diante), mas esta demanda pode ser facilmente incorporada em nosso aparato, e será levada em conta apenas quando necessário. Para representar as entidades sem identidade, a linguagem da teoria possui um símbolo de predicado unário cujo significado pretendido é dado pelas entidades quânticas, e os itens satisfazendo este predicado são chamados *micro-átomos* ou, mais brevemente, *m-átomos*. Para eles a identidade não estará definida, mas eles podem estar relacionados por uma relação primitiva de *indistin-guibilidade* (representada pelo símbolo  $\equiv$ ), e podemos também formar

coleções contendo estes átomos como elementos. O segundo tipo de átomos, os *macro-átomos*, ou abreviadamente M-átomos, se comportam como os átomos de ZFU, e são introduzidos para representar ‘objetos clássicos’, de modo que a identidade de fato faz sentido para eles. Podemos também formar coleções, os *quase-conjuntos* (ou simplesmente q-sets), contendo como elementos qualquer um dos tipos de átomos ao aplicarmos as operações conjuntistas usuais de conjunto potência, união, interseção e assim por diante. A ideia também é que algumas dessas coleções, chamadas de *conjuntos*, e que se comportam como cópias de conjuntos de ZFU, não terão m-átomos aparecendo como elementos em nenhuma etapa de sua formação (falando tecnicamente, não há m-átomos no seu fecho transitivo), enquanto que outras coleções podem conter tais elementos. Os ‘conjuntos’ (que obedecem a um predicado primitivo  $Z$ ) funcionam exatamente como os conjuntos de ZFU, de modo que a teoria de conjuntos padrão com ur-elementos pode ser vista como contida dentro de  $\mathfrak{Q}$ . Ao considerarmos m-átomos, por outro lado, entramos em uma área que pode nos fornecer insights formais interessantes para a investigação filosófica concernindo os fundamentos da mecânica quântica, e em particular para fundamentarmos a teoria quântica em uma linguagem que englobe a noção de não-indivíduos *desde o começo* (ver abaixo). Esta linha de investigação em particular, buscando erigir a teoria quântica em uma linguagem distinta da usual e que foi chamada de ‘mecânica quântica não-reflexiva’, foi iniciada em French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006), (FRENCH; KRAUSE, 2010), Domenech, Holik e Krause (DOMENECH; HOLIK; KRAUSE, 2008), Domenech, Holik, Kniznik e Krause (DOMENECH et al., 2010), Krause e Arenhart (KRAUSE; ARENHART, 2011) (ver a última seção deste capítulo), e ainda está em pleno desenvolvimento, principalmente no que concerne a teoria quântica de campos e interações. De qualquer modo, consideramos interessante discutir suas bases matemáticas e lógicas, que são um importante complemento para o objetivo mais filosófico que a teoria pode ser considerada como tendo.

Nosso objetivo neste capítulo é fornecer uma apresentação detalhada da teoria de quase-conjuntos, apresentando vários de seus pormenores e desenvolvendo muitos pontos que algumas vezes não são abordados com detalhes nas exposições usuais da teoria. Em particular, desejamos articular com detalhes a noção de quase-cardinal de  $\mathfrak{Q}$ . Conforme é argumentado nas apresentações usuais da teoria, (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.7), (FRENCH; KRAUSE, 2010)), a noção de cardinal não pode ser introduzida através de nenhum dos procedimentos usuais, como por exemplo através da noção de um

ordinal inicial. Então, relativamente aos quase-cardinais temos pelo menos duas possibilidades: podemos tentar definir este conceito através de algum procedimento não padrão, ou podemos introduzir esta noção como primitiva na teoria. A primeira rota foi seguida por Domenech e Holik em (DOMENECH; HOLIK, 2007) para quase-cardinais finitos apenas, e a segunda é a abordagem usual ao problema, que nós também apresentaremos neste capítulo (ver o capítulo 4 para a apresentação de uma definição alternativa de quase-cardinais e uma discussão geral do projeto de Domenech e Holik). Devemos também notar que, pela própria natureza dos  $q$ -sets tendo  $m$ -átomos como elementos, não é uma tarefa simples aquela de atribuir um cardinal a esta coleções. Existe uma série de discussões filosóficas relevantes acerca das relações entre contagem, cardinalidade, identidade e individualidade, e não podemos esperar tornar estas coisas claras a menos que sejam tratadas com bastante rigor e cuidado. Discutiremos algumas destas questões no próximo capítulo, tratando da noção de cardinalidade aqui como uma noção primitiva (algo que também não é totalmente isento de controvérsias, conforme a discussão de Domenech e Holik aponta em (DOMENECH; HOLIK, 2007)). Ao introduzir esta noção através de axiomas, esperamos esclarecer algumas questões, como por exemplo o fato de que muitas das propriedades intuitivas dos cardinais são preservadas, bem como o procedimento para determinarmos o cardinal de um quase-conjunto específico. Estas são questões típicas que abordaremos no que se segue.

### 3.2 NÃO-INDIVÍDUOS, IDENTIDADE E A MATEMÁTICA PADRÃO

Nós dissemos acima que a lógica e a matemática padrão poderiam não ser adequadas para expressar formalmente a ideia de que algumas entidades não são indivíduos, quando estes são tomados como objetos para os quais a identidade e a diferença não são relações permitidas. Mas por que não? É claro que as teorias de conjuntos padrão, tais como ZFC ou ZFU (aqui nós não vamos levar em conta outras possibilidades, tais como teorias de categorias ou lógicas de ordem superior) possuem um enorme poder expressivo, de modo que podemos expressar nelas praticamente qualquer conceito que possamos precisar no desenvolvimento de teorias científicas. Nós veremos mais abaixo (seção 3.8) que até mesmo a noção de não-indivíduos, no sentido que estamos tratando aqui, pode de certa forma ser mapeada em ZFC. Mas esta alternativa tem a desvantagem de mascarar a própria não-individualidade

dos objetos envolvidos, de modo que preferimos desenvolver a teoria de quase-conjuntos sem apelarmos para estes recursos de ZFC. Vamos comentar um pouco mais sobre este ponto ao apresentarmos as ideias gerais sobre como poderíamos usar ZFC para tratar de não-indivíduos.

Trabalhando em ZFC (ou em ZFU), poderíamos selecionar um conjunto para fazer o papel de conjunto de átomos (poderia ser, digamos, o conjunto dos números naturais), e considerar alguns deles como desempenhando o papel de não-indivíduos. Então, o próximo passo consistiria em se definir uma relação de equivalência ( $\sim$ ) sobre este conjunto de modo que quando  $x$  e  $y$  são não-indivíduos, então  $x \sim y$  nos diz que eles são indistinguíveis (pertencem à mesma classe de equivalência). Baseados neste conjunto, podemos erigir uma hierarquia no sentido de von Neumann (ver a discussão na seção 3.8 para detalhes das construções) e estender a relação  $\sim$  para todos os elementos da hierarquia por recursão transfinita. Então, como nós veremos, podemos encontrar um modo de expressar que dois não-indivíduos são indistinguíveis por meios de  $\sim$ . Esta é basicamente a proposta de Hermann Weyl quando ele introduziu os seus ‘agregados de indivíduos’, o que significava simplesmente um conjunto dotado de uma relação de equivalência (WEYL, 1949, App.B), (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.6). Mas, dado que estamos dentro de ZFC, quaisquer *dois* objetos são distintos, mesmo que algumas vezes não sejamos capazes de expressar esta diferença. Por exemplo, segue-se do axioma da escolha que o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais admite uma boa ordem. Então, quaisquer dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$ , digamos os intervalos abertos disjuntos (dados pela ordem usual)  $(0, 1)$  e  $(2, 3)$ , possuem menores elementos de acordo com esta boa ordem. Esses menores elementos (relativos a esta boa ordem) são claramente distintos, mas já que não podemos expressar a boa ordem por uma fórmula de ZFC, não podemos nem mesmo nomear estes dois menores elementos apesar do fato de que a noção de identidade ( $=$ ) faz sentido para quaisquer dois objetos, incluindo estes dois em particular; de fato, é um teorema de ZFC que para todos  $x$  e  $y$ , temos que ou  $x = y$  ou  $(x \neq y)$ .

Então, aparentemente temos um problema aqui, um conflito entre o particular modo de entendermos a física que desejamos sustentar e a matemática e lógica subjacentes. Por um lado, a interpretação da física que estamos propondo diz que duas entidades quânticas em estado de superposição seriam ‘absolutamente’ indistinguíveis, enquanto que por outro lado a matemática subjacente nos diz o contrário, que elas não são deste modo (lembre a discussão do Postulado da Indistinguilidade no capítulo anterior). De fato, se elas são distintas, podemos conside-

rar, digamos, dois conjuntos abertos disjuntos com centro nestes objetos, e estes conjuntos servem para distinguir entre estes objetos, mesmo que esta distinção não se realize através de alguma propriedade física (outra alternativa seria simplesmente utilizar seus conjuntos unitários, algo possível no contexto de ZFC). Isto é, apesar de que dois objetos quânticos numericamente distintos não podem ser distinguidos, por um resultado simples da lógica subjacente eles *são diferentes*. Então, como poderemos sustentar que eles são realmente indiscerníveis (caso desejemos fundamentar esta ideia)? Como uma primeira sugestão, poderíamos propor que os objetos quânticos são como os menores elementos de intervalos de reais mencionados acima, isto é, algo que existe dentro da teoria mas que não pode ter suas diferenças explicitadas através da linguagem da teoria. Isto é mais ou menos o que faz a mecânica Bohmiana, na qual quaisquer duas partículas podem ser distinguidas por suas posições, mesmo que as variáveis de posição sejam consideradas como variáveis ocultas (ver (HOLLAND, 1993, pp.95-96)). Então, ao assumirmos esta possibilidade, aparentemente devemos nos comprometer com o fato de que existem variáveis ocultas de algum tipo, algo que nossa interpretação pretende evitar. Realmente, o que buscamos aqui é uma maneira de formular a mecânica quântica que seja equivalente ao modo usual (posteriormente, este programa deverá ser ampliado para dar conta também das teorias quânticas de campo – para uma discussão deste ponto, ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.9)) baseando-nos na própria noção de que as partículas quânticas são objetos absolutamente indiscerníveis, não-indivíduos, e que estas características devem ser incorporadas no formalismo *desde o começo* (conforme proposto por Heinz Post; ver (FRENCH; KRAUSE, 2006)). Isto é, desejamos tomar a indistinguibilidade e não-individualidade como um conceito primitivo e assim evitar o tipo de estratégia empregado quando se trabalha em teorias como ZFC, onde estes objetos são assumidos como sendo indivíduos (conjuntos ou átomos) para que depois sejam tornados indiscerníveis por meio da introdução de postulados de simetria como o próprio PI.

O que estivemos discutindo até aqui pode ser descrito com algum formalismo como se segue: suponha dois objetos quânticos, digamos dois elétrons, de modo que um deles esteja no Polo Sul e o outro no Polo Norte. É claro que eles devem ser considerados como distintos, pelo menos no sentido numérico. Mas se pretendemos chamar de ‘Joãozinho’ ao elétron no Polo Sul, enquanto que o elétron no Polo Norte será chamado de ‘Pedrinho’, poderíamos pensar que a situação quântica ‘Joãozinho está no Polo Sul e Pedrinho está no Polo

Norte' é descrita pelo vetor  $|S_J\rangle|N_P\rangle$  no produto tensorial dos correspondentes espaços de Hilbert. Aparentemente, este vetor nos permite distinguir entre os quanta. Mas, como Roger Penrose enfatizou, em mecânica quântica existe uma diferença entre *e* e *mais* (ver (PENROSE, 1989, p.357)). O vetor correto para descrever a situação acima não é aquele que mencionamos, e pior ainda, a situação está colocada de modo errado; devido à indiscernibilidade dos quanta (tanto elétrons, prótons, e assim por diante), nós não podemos dizer que Joãozinho está no Polo Sul e Pedrinho está no Polo Norte, mas antes devemos dizer que *um deles* está no Polo Sul e *o outro* está no Polo Norte, sem tentarmos discernir entre eles. Para este fim, utilizamos o vetor  $|S_J\rangle|N_P\rangle \pm |S_P\rangle|N_J\rangle$  ao invés daquele apresentado anteriormente (com a exceção de um fator de normalização que podemos ignorar por ora). O sinal menos é utilizado para férmions, e o sinal positivo é utilizado para bósons. A expressão que utilizamos acima 'o outro' pode nos induzir ao erro se pensarmos que estamos distinguindo os quanta; esta é apenas uma forma de expressão utilizada na metalinguagem, e não possui correspondente no formalismo (ver também a discussão de um problema relacionado em Dieks e Lubberdink (DIEKS; LUBBERDINK, 2010)). Conforme o vetor correto indica, a situação física não muda se nós permutarmos quanta indiscerníveis; fisicamente é indiferente se é Joãozinho que está no Polo Sul ou se é Pedrinho que está lá (mas, conforme já discutimos, a matemática nos diz algo diferente, devido principalmente ao Axioma da Extensionalidade da teoria de conjuntos subjacente). Em nossa interpretação, os objetos quânticos não são indivíduos, eles não possuem nada que se pareça com características pessoais peculiares (do mesmo modo que pessoas como Joãozinho e Pedrinho tem), exceto talvez pelas suas coordenadas espaço-temporais. Mas mesmo no caso de uma possível distinção espaço-temporal temos que a individualidade atribuída às partículas nestes casos é apenas uma espécie de 'pseudo' individualidade, surgindo apenas em contextos experimentais (utilizamos pseudo individualidade no sentido que Toraldo di Francia fala em 'mock individuality' em (FRANCIA, 1985)). Deve ser observado que no modo padrão de se entendê-la, esta pseudo individualidade não existe até que uma interação de medição seja realizada, mas antes da medição, os objetos estão ainda em estado de superposição, e de acordo com a física quântica e nossa interpretação dela, nenhuma forma de individuação é possível então. Todavia, dentro da matemática padrão somos forçados a considerá-las como distintas, e sua indistinguibilidade é tratada através do uso de condições de simetria, tais como o vetor 'adequado' que mencionamos acima mostra (o vetor é

ou simétrico, ou anti-simétrico no que diz respeito às permutações das partículas). Neste sentido, a teoria de quase-conjuntos é uma tentativa de se superar esta situação ao propor um modo de lidar com objetos indiscerníveis desde o começo, sem requerer a introdução do Postulado de Indistinguibilidade e do Postulado de Simetrização (relembre a discussão do capítulo anterior, e o papel dos rótulos atribuídos às partículas, que devemos discutir mais tarde. Ver também (REDHEAD; TELLER, 1991)).

Então, qual é a sugestão para superarmos a aparente tensão entre a lógica e a matemática clássica por um lado e a interpretação da teoria quântica que estamos propondo por outro? Obviamente, conforme mencionamos antes, poderíamos rejeitar a concepção dos objetos quânticos como sendo não-indivíduos e também nossa particular leitura do Postulado da Indistinguibilidade e tentar fundamentar a individualidade dos quanta em alguma forma de haecitismo ou essências primitivas. Esta não é a rota que desejamos seguir, conforme já mencionamos. Desejamos manter os não-indivíduos e investigar como o formalismo da matemática subjacente deve ser mudado para acomodar as características particulares deste tipo de entidades. Como já expressamos anteriormente, o grande obstáculo para este tipo de empreendimento concerne a noção de identidade; a matemática e a lógica clássica a aplicam sem restrições, podemos enunciar que toda entidade é idêntica ou diferente de qualquer outra. Todavia, a Concepção Recebida acerca da não-individualidade das partículas sugere que a identidade deve ser restrita, em muitas situações não há sentido em se afirmar que partículas da mesma espécie são iguais ou diferentes. A rota que vamos seguir aqui concerne precisamente uma restrição à identidade. Seguindo esta linha de ataque, com a teoria de quase-conjuntos restringindo a validade da identidade apenas à determinadas entidades das quais ela trata, podemos representar não-indivíduos no aparato conceitual formal sem que tensões apareçam como ocorre na matemática clássica.

Lembremos que no começo da mecânica quântica muitos autores aceitaram que as estatísticas quânticas haviam mostrado que as partículas haviam perdido sua individualidade, que não se poderia mais falar sobre sua identificação com sentido. Como estas noções de identidade e individualidade se relacionam? Vamos tomar a motivação oriunda das estatísticas quânticas de acordo com a qual não-indivíduos são entidades para as quais identidade e diferença são relações que não fazem mais sentido. Conforme já mencionamos, a teoria de quase-conjuntos vai incluir entidades, os  $m$ -átomos, para os quais nós não definiremos uma relação de identidade, fazendo deles então nossos repre-

sentantes oficiais dos não-indivíduos. A ideia é que já que a identidade não está definida para eles, então uma noção como a auto-identidade também deixa de fazer sentido para eles. Isto é importante pois, por um lado, a auto-identidade é tomada como expressando alguma forma de haecitismo, fundamentando deste modo a individualidade, e por outro lado, já que ela é a propriedade reflexiva da identidade, é muitas vezes tomada como formalizando o chamado *Princípio da Identidade* (mais sobre isso no capítulo 5). Então, restringindo a identidade estamos propondo um caso particular de uma lógica não-reflexiva, uma lógica violando a propriedade reflexiva da identidade e ainda, de acordo com nossa interpretação, uma lógica que trata mais propriamente com os não-indivíduos. Vamos agora tratar dos detalhes formais.

### 3.3 A TEORIA $\Omega$ : LÓGICA E LINGUAGEM

Nesta seção nós começamos propriamente com o desenvolvimento da teoria de quase-conjuntos. Nosso objetivo é tornar claros alguns aspectos da teoria que podem ter parecido obscuros para aqueles que ainda não a estudaram em todos os detalhes mas que todavia desejam ter uma boa compreensão do que se trata. Claramente, admitir m-átomos indistinguíveis irá demandar algumas modificações às abordagens tradicionais em teoria de conjuntos, modificações que deverão satisfazer certas exigências intuitivas oriundas das motivações expostas anteriormente: nossa teoria coincide formalmente com ZFU quando restrita aos objetos conjuntistas usuais (os M-átomos e coleções deles, ou seja, os conjuntos, coleções de  $\Omega$  que obedecem ao predicado primitivo  $Z$ ), mas também é tal que nos permite supor que existem entidades que respeitam algumas das propriedades dos objetos quânticos, como por exemplo (como discutimos anteriormente, de acordo com uma interpretação plausível – ver (FRENCH; KRAUSE, 2006) para uma argumentação mais detalhada) o fato de que a noção de identidade não faz sentido para eles e que, em algum sentido, eles podem ser ‘absolutamente’ indistinguíveis. Por esta razão, é importante que o vocabulário da teoria nos permita fazer distinções entre estes tipos de objetos.

A teoria de quase-conjuntos é apresentada aqui como uma teoria de primeira ordem. A lógica subjacente pode ser tomada como sendo constituída pelos axiomas usuais para a lógica clássica de primeira ordem sem o símbolo de identidade, mas com os conectivos usuais:  $\neg$  para a negação,  $\vee$  para a disjunção,  $\wedge$  para a conjunção e  $\rightarrow$  para a implicação, com o bicondicional  $\leftrightarrow$  definido como é usual. Os quanti-

ficadores são  $\forall$  para a quantificação universal e  $\exists$  para a quantificação existencial. As definições sintáticas usuais e uma lista de postulados para estes símbolos podem ser encontrados em livros de lógica padrão (por exemplo, Mendelson (MENDELSON, 1987, cap.2)).

O primeiro ponto a ser mencionado é que nós *não estamos* assumindo a lógica clássica de primeira ordem como a lógica subjacente da teoria, mas apenas os mesmos postulados sintáticos. Assumir a lógica clássica iria nos comprometer em particular com a semântica clássica desta lógica, e esta, como é bem sabido, é desenvolvida dentro de uma teoria de conjuntos clássica, como por exemplo Zermelo-Fraenkel. Isto implicaria em particular que os “significados” dos símbolos não-lógicos de nossa teoria seriam dados em uma teoria de conjuntos clássica, na qual a identidade valeria para todos os itens. Mas devemos notar que este é precisamente o tipo de situação que desejamos evitar, pois toda a motivação por trás do desenvolvimento de uma teoria de quase-conjuntos estaria perdida se a lógica clássica fosse assumida como sua lógica subjacente. Esta não é todavia a ocasião para entrarmos neste tipo particular de discussão, pois nós pretendemos discutir este tópico no capítulo 5, onde o uso dos quantificadores em  $\mathcal{Q}$  e nas lógicas não-reflexivas em geral deverão ser discutidas (ver também Arenhart e Krause (ARENHART; KRAUSE, 2009)).

A linguagem específica da teoria de quase-conjuntos consiste de uma família de símbolos próprios que nós podemos apresentar do seguinte modo:  $\mathcal{L} = \{M, m, Z, \equiv, \in, qc\}$ . Os pesos e significados pretendidos de cada um destes símbolos é dado a seguir:

1.  $m$ ,  $M$  e  $Z$  são símbolos de predicados unários;  $M(x)$  significa que  $x$  é um macro-átomo (M-átomo),  $m(x)$  significa que  $x$  é um micro-átomo (m-átomo), e  $Z(x)$  significa que  $x$  é um conjunto no sentido de ZFU;
2.  $\in$  e  $\equiv$  são símbolos de predicado binário;  $\in$  atua como a relação de pertinência usual, enquanto que  $x \equiv y$  significa que  $x$  é indistinguível de  $y$ ;
3.  $qc$  é um símbolo de função unária;  $qc(x)$  denota intuitivamente o quase-cardinal de  $x$ .

Devemos notar que variáveis individuais são termos, e que expressões da forma  $qc(t)$ , onde  $t$  é um termo, também são termos. Estes são os termos da linguagem primitiva da teoria. Fórmulas são definidas conforme o usual. Por conveniência nós iremos dividir os postulados da teoria em três grupos: no primeiro grupo, nós enunciaremos os postulados

que clarificam as relações e o comportamento dos símbolos específicos da linguagem, sem enunciar nenhum axioma de caráter existencial; estes são axiomas com propósitos puramente estrutural. No segundo grupo, apresentamos os axiomas que generalizam os axiomas usuais de ZFU, garantindo que alguns tipos específicos de coleções existem. Finalmente, o terceiro grupo de axiomas apresenta as leis que governam o símbolo para quase-cardinal. Neste caso, nós dividimos a seção em duas partes, uma delas apresentando os principais axiomas e outra tratando com o axioma da extensionalidade fraca e outros resultados relacionados. Devemos notar que estes grupos de axiomas estão relacionados uns aos outros, e que a divisão proposta aqui é meramente para conveniência de exposição.

Antes de seguirmos adiante, é interessante deixarmos alguns pontos claros. Em primeiro lugar, não é necessário utilizarmos uma lógica de primeira ordem como a lógica subjacente para a teoria  $\aleph$  (mas neste caso estaríamos modificando a teoria). Algum tipo de lógica de segunda ordem poderia ser utilizado, como ocorre com as teorias de conjuntos usuais, de modo que alguns esquemas de axiomas que utilizaremos aqui poderiam então ser escritos como fórmulas da linguagem propriamente. Nós não entraremos na discussão de qual destas abordagens é a melhor; adotaremos uma lógica de primeira ordem simplesmente por ser este o procedimento mais simples, e porque esta é a lógica empregada hoje em dia na apresentação das teorias de conjuntos. Um segundo ponto interessante que merece ser mencionado é que poderíamos de fato empregar uma linguagem de primeira ordem com identidade. Neste caso, poderíamos empregar uma linguagem bi-sortida na qual um dos tipos de termos denota  $m$ -átomos e o outro tipo de termos denota os objetos conjuntistas usuais. Seguindo esta abordagem, para garantir que a identidade não está definida para  $m$ -átomos deveríamos impor na definição de fórmula que o símbolo de identidade, quando ladeado por algum termo do tipo denotando  $m$ -átomos, não constitui fórmulas bem formadas. Novamente, nós não vamos seguir esta abordagem aqui, mesmo que pareça interessante e merecendo investigação.

Vamos apresentar agora o primeiro grupo de axiomas.

### 3.4 AXIOMAS ESTRUTURAIS

É o nosso propósito descrever uma teoria sobre átomos e coleções de átomos de um modo similar ao que se faz em ZFU. Já que temos dois tipos de átomos, nós iremos primeiramente especificar como

eles se relacionam entre si, e então qual é sua relação com as coleções (quase-conjuntos) da teoria. Conforme mencionamos anteriormente, motivados por uma concepção particular da natureza das partículas na mecânica quântica não-relativista, nós consideraremos que um dos tipos de átomos, os m-átomos, representam as partículas indistinguíveis, e assumimos que para eles a noção de identidade não está definida. Este tipo de átomos será representado na teoria pelo predicado unário  $m$ . O outro tipo de átomos, os M-átomos, atuam como os átomos usuais de ZFU, para os quais a identidade está definida; estes átomos satisfazem o predicado unário  $M$ . Nossa primeira preocupação é distinguir entre o comportamento destes átomos, e definir a noção de quase-conjuntos (daqui por diante  $q$ -sets), que, como nas teorias usuais que também são compatíveis com a existência de átomos, são definidos como algo que não é um átomo mas que pode ter átomos como elementos. Nós também estipulamos que átomos não possuem elementos. Então, temos:

**Axioma 3.1.**  $\forall x \neg(m(x) \wedge M(x))$  (Nenhuma entidade é tanto um m-átomo quanto um M-átomo.)

**Definição 3.1** (Quase-conjuntos).  $Q(x) =_{\text{def}} \neg m(x) \wedge \neg M(x)$  (Quase-conjuntos não são átomos.)

**Axioma 3.2.**  $\forall x \forall y (x \in y \rightarrow Q(y))$  (Se algo tem elementos, então é um quase-conjunto – portanto, átomos são vazios.)<sup>1</sup>

Agora, devemos lembrar que m-átomos representam em nossa interpretação pretendida os itens que não são indivíduos, os não-indivíduos, conforme eles figuram no entendimento de alguns autores acerca da natureza das partículas da mecânica quântica. Na teoria de quase-conjuntos, isto é representado pelo fato de que estes átomos falham em figurar na relação de identidade, mas podem entrar em uma relação mais fraca de indistinguibilidade. Para permitir esta característica em  $\Omega$ , não temos uma relação de identidade em nossa linguagem, e introduzimos esta relação por definição estipulando que ela não relaciona m-átomos. Para garantir isto, colocamos a seguinte definição:

**Definição 3.2** (Identidade).  $x = y =_{\text{def}} [(Q(x) \wedge Q(y) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \vee (M(x) \wedge M(y) \wedge \forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z))]$  (Objetos idênticos são ou q-sets tendo todos os mesmos elementos ou M-átomos pertencendo aos mesmos q-sets.)

---

<sup>1</sup>Certamente uma ótima continuação da teoria seria acrescentar a  $\Omega$  algum tipo de mereologia relacionando m-átomos e M-átomos, de modo que, digamos, M-átomos fossem considerados como sendo compostos de m-átomos.

Esta definição nos garante que a teoria de quase-conjuntos é extensional, isto é, os q-sets são determinados pelos seus elementos. O ponto é que o primeiro membro da conjunção da definição nos garante que uma forma de extensionalidade vale para q-sets. Lembremos que isto é verdadeiro mesmo que nós não possamos expressar na teoria que  $x$  e  $y$  possuem elementos idênticos, isto é, mesmo quando a identidade não faz sentido para os elementos destas coleções, ainda assim podemos garantir que se todo elemento de  $x$  é um elemento de  $y$  e conversamente, então  $x = y$ . Note também que esta definição não diz nada acerca de m-átomos, de modo que a teoria silencia acerca da identidade ou diferença destes itens.

Um dos fatos mais básicos acerca da identidade segue-se diretamente desta definição:

**Teorema 3.1.** *Se  $Q(x)$  ou  $M(x)$ , então  $x = x$ , isto é, a identidade é reflexiva.*

**Prova:** *A prova segue diretamente da definição da identidade e de alguns fatos sobre a lógica subjacente. Se  $Q(x)$ , então, já que  $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in x)$  é um teorema da lógica subjacente, com nossa hipótese de que  $x$  é um quase-conjunto( $Q(x)$ ), da regra de introdução da disjunção do cálculo proposicional nós temos que*

$$[(Q(x) \wedge Q(x) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in x)) \vee (M(x) \wedge M(x) \wedge \forall z(x \in z \leftrightarrow x \in z))],$$

*isto é,  $x = x$ . De forma totalmente análoga se demonstra o resultado para o caso de  $M(x)$ . ■*

Para garantir que a identidade terá a outra propriedade que é usualmente considerada como a caracterizando em sistemas de primeira ordem, nós postulamos a seguinte regra de substituição:

**Axioma 3.3.**  $\forall x \forall y(x = y \rightarrow (\alpha(x) \rightarrow \alpha(y)))$ , onde  $\alpha(x)$  é uma fórmula com  $x$  livre e  $\alpha(y)$  resulta dela quando substituímos algumas ocorrências de  $x$  por  $y$  e  $y$  é livre para  $x$  em  $\alpha$ .

Com este axioma e a reflexividade da identidade podemos garantir que a relação de identidade que definimos é simétrica e transitiva (ver Mendelson (MENDELSON, 1987, cap.2)).

Agora, vamos tratar da relação de indistinguibilidade. Intuitivamente, esta relação deve expressar que certos objetos são indistinguíveis, entendendo-se a indistinguibilidade de dois objetos como o fato de possuírem todas as propriedades em comum. Todavia, precisamos caracterizar a relação de indistinguibilidade de modo que não coincida nem formalmente nem semanticamente com a identidade padrão

(já que nossa motivação nos indica que os m-átomos podem ser indistinguíveis sem serem idênticos). O primeiro ponto a ser percebido é que a relação de identidade apresentada acima não está definida para m-átomos, que apesar disso ainda podem ser indistinguíveis. Então, a questão é: que tipo de axiomas deveríamos impor à relação primitiva de indistinguibilidade  $\equiv$ ? Parece razoável que ela deveria ser reflexiva, simétrica e transitiva, pois queremos formar classes de equivalência de elementos indiscerníveis. Todavia, para garantir que esta relação não vai acabar sendo a mesma relação que a identidade, devemos garantir que ela não é compatível com pelo menos uma das relações da linguagem, isto é, que a indistinguibilidade não é uma relação de congruência. Para garantir isto, nossos axiomas serão tais que o símbolo de relação  $\in$  pode não ser compatível com  $\equiv$ , isto é, resulta dos axiomas abaixo que de  $x \in y$  e  $x' \equiv x$  nós não podemos inferir que  $x' \in y$ . Mas, para todos os outros predicados, parece razoável que se  $x' \equiv x$  e  $P$  é algum dos predicados unários da linguagem, então  $P(x)$  implica  $P(x')$ . O mesmo vale para relações  $n$ -árias distintas da pertinência.<sup>2</sup> Então, pela primeira parte de nossa discussão, temos que:

**Axioma 3.4.**

1.  $\forall x(x \equiv x)$ ;
2.  $\forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$ ;
3.  $\forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$ ;

Mesmo que a indistinguibilidade não seja compatível com  $\in$  no caso dos m-átomos, gostaríamos que no caso dos objetos ‘clássicos’ a identidade e a indistinguibilidade fossem equivalentes, isto é, a lei de Leibniz deveria valer para estes itens, no sentido de que objetos clássicos indistinguíveis deveriam ser idênticos e reciprocamente. Buscando formalizar esta ideia, introduzimos outra definição e um postulado. Vamos lembrar que  $Z(x)$  significa que  $x$  é um *conjunto*, e se comporta como os conjuntos de ZFU. Os objetos *clássicos* da teoria são aqueles satisfazendo seja  $M$  seja  $Z$ . Nós nos referimos a eles, seguindo Zermelo, como as *Dinge*:<sup>3</sup>

**Definição 3.3** (Dinge).  $D(x) =_{\text{def}} Z(x) \vee M(x)$  (As *Dinge* são os objetos ‘clássicos’.)

<sup>2</sup>Esta discussão em particular é apresentada em (KRAUSE, 2005).

<sup>3</sup>Na formulação original de Zermelo de 1908, ele fez referência a um domínio compreendendo tanto átomos quanto conjuntos; estes foram chamados *Dinge*, ‘coisas’ em alemão, objetos do domínio.

**Axioma 3.5.**  $\forall_D x \forall y (x \equiv y \rightarrow x = y)$  (*Dinge* indiscerníveis são idênticas.)

Ao escrevermos este axioma nós empregamos quantificadores restritos, isto é, dada alguma fórmula  $\alpha$ , quando desejamos restringir o escopo do quantificador universal aos itens obedecendo  $\alpha$ , escrevemos  $\forall_\alpha \gamma$ . Esta fórmula abrevia  $\forall x (\alpha(x) \rightarrow \gamma)$ , e o mesmo vale para o quantificador existencial, isto é, a restrição deste quantificador para itens satisfazendo  $\alpha$  é escrita  $\exists_\alpha x \gamma$ , que abrevia  $\exists x (\alpha(x) \wedge \gamma)$ . Daqui por diante, iremos sempre empregar os quantificadores restritos quando conveniente. Outro ponto a ser mencionado é que se  $x$  é uma *Dinge* e  $y \equiv x$ , então  $y$  é também uma *Dinge* (isto é, qualquer coisa indistinguível de uma *Dinge* é ela também uma *Dinge*). Portanto, identidade e indistinguibilidade são noções equivalentes para as *Dinge*.

**Teorema 3.2.** *Se  $D(x)$  e  $x = y$ , então  $x \equiv y$ .*

**Prova:** *Aplicação imediata da regra da substituição. ■*

**Teorema 3.3.** *Se  $M(x)$  e  $x \equiv y$ , então  $M(y)$ . Se  $Z(x)$  e  $x \equiv y$ , então  $Z(y)$ .*

**Prova:** *Se  $M(x)$  então  $D(x)$ . Já que também temos  $x \equiv y$ , pelo nosso último axioma 3.5 temos que  $x = y$ . Então, por substituição, obtemos que  $M(y)$ . Uma prova análoga vale para o caso de  $Z$ . ■*

Estes resultados, juntamente com a propriedade de simetria da relação  $\equiv$  nos garantem que  $M$  e  $Z$  são compatíveis com a indistinguibilidade. Agora garantiremos que este resultado vale para  $Q$  e para  $m$  (mas, conforme observamos, nada do mesmo tipo pode ser provado para  $\in$ ).

**Axioma 3.6.**  $\forall x \forall y (m(x) \wedge x \equiv y \rightarrow m(y))$ .

Agora, vamos mostrar que  $Q$  é compatível com a indistinguibilidade.

**Teorema 3.4.** *Se  $Q(x)$  e  $x \equiv y$ , então  $Q(y)$ .*

**Prova:** *Suponha que não é o caso que  $Q(y)$ . Então, pela definição de  $q$ -sets, ou  $m(y)$  ou  $M(y)$ . Se  $m(y)$ , já que  $x \equiv y$  vale por hipótese, temos pelo último axioma 3.6 que  $m(x)$ , contradizendo a hipótese de que  $Q(x)$ . Se  $M(y)$ , por  $x \equiv y$  e pela compatibilidade da indistinguibilidade com  $M$  temos que  $M(x)$ , mais uma vez contradizendo o fato de que  $Q(x)$ . Então,  $Q(y)$ . ■*

Com estes resultados garantimos que a relação de indistinguibilidade é uma relação de equivalência mas não necessariamente uma

congruência, dado que não precisa ser compatível com a pertinência. Esta ideia está de acordo com a proposta intuitiva apresentada anteriormente, segundo a qual objetos indistinguíveis possuem todas as suas propriedades em comum. Mas, no caso de  $m$ -átomos deve ser notado que, apesar de serem indistinguíveis, eles não precisam ser membros dos mesmos  $q$ -sets. Isto evita que as reações de identidade e indistinguibilidade colapsem na mesma relação.

Além de coleções compreendendo  $m$ -átomos, na nossa teoria queremos também construir coleções ‘clássicas’, isto é,  $q$ -sets ao estilo ZFU, contendo apenas  $M$ -átomos e itens obtidos a partir do  $q$ -set vazio com as operações conjuntistas usuais, mas sem envolver  $m$ -átomos em nenhum dos passos da construção. Os  $q$ -sets obtidos deste modo serão aqueles que satisfarão o predicado  $Z$ , e serão chamados simplesmente de *conjuntos*. Vamos postular aqui que os objetos satisfazendo  $Z$  tem como elementos seja  $M$ -átomos seja outros conjuntos. Intuitivamente falando, com este passo nós garantimos que os elementos de um  $Z$  são todos eles objetos clássicos apenas. Nós também postulamos que todo item satisfazendo  $Z$  é um  $q$ -set (mas a conversa não é válida quando  $m$ -átomos são permitidos).

**Axioma 3.7.**  $\forall x(Z(x) \rightarrow Q(x))$  (Conjuntos são  $q$ -sets.)

**Axioma 3.8.**  $\forall_Q x \forall y (y \in x \rightarrow D(y)) \leftrightarrow Z(x)$

Este axioma nos diz que se nós olharmos para os elementos de um quase-conjunto e encontramos apenas coisas ‘clássicas’ (o que implica que os elementos desses elementos devem ser eles também *Dinge*, e assim por diante), então o quase-conjunto é um conjunto. A conversa, claramente, é um resultado desejável, então, é também postulado. Quando restringimos a teoria a conjuntos, digamos que ao acrescentar um postulado enunciando que nenhuma entidade é um  $m$ -átomo, obtemos precisamente ZFU, como veremos.

### 3.5 AXIOMAS DE EXISTÊNCIA

Dentre os postulados da última seção, nenhum enunciava a existência de qualquer  $q$ -set específico, mas apenas tornaram mais claras a estrutura de nossas concepções acerca de átomos e  $q$ -sets. Agora, começaremos a tornar mais claro que tipo de coleções existem. Seguindo nossas motivações, estes postulados serão similares aos postulados de ZFU, garantindo que algum  $q$ -set específico existe para que possamos em geral introduzir alguma operação específica. Obviamente, poderíamos se-

guir uma linha diferente e fundamentar a teoria de quase-conjuntos em axiomas como aqueles propostos para outros tipos de teorias de conjuntos, tais como Kelley-Morse, von Neumann-Bernays-Gödel, ou até mesmo teorias mais estranhas, tais como NF de Quine-Rosser ou ML de Quine-Wang, mas não seguiremos estas possibilidades aqui (de fato, poderíamos também fundamentar  $\Omega$  em alguma lógica não-clássica; talvez fosse interessante associá-la com alguma lógica paraconsistente, tal como a lógica paraclássica, de modo que a própria noção de complementaridade poderia ser tratada – para um estudo sobre lógicas paraconsistentes e uma interpretação desta noção seguindo estas linhas, ver, respectivamente (COSTA; KRAUSE; BUENO, 2006), (COSTA; KRAUSE, 2006)).

Começamos com a existência de um q-set vazio:

**Axioma 3.9** (Q-set vazio).  $\exists Q y \forall x \neg(x \in y)$

Então podemos provar:

**Teorema 3.5.** *O q-set vazio é de fato um conjunto, e é único.*

*Prova:* Pelo axioma 3.9 apresentado anteriormente, existe um q-set  $x$  tal que  $\forall y \neg(y \in x)$ . Mas o axioma 3.8 implica que em particular  $(y \in x \rightarrow D(y)) \rightarrow Z(x)$ . Pela lógica subjacente, temos que  $\neg(y \in x) \rightarrow (y \in x \rightarrow Z(x))$ , e então, por Modus Ponens, obtemos  $Z(x)$ . Para provar a unicidade, suponha que temos  $x$  e  $z$  tais que para qualquer  $y$ ,  $\neg(y \in x)$  e  $\neg(y \in z)$ . Pela lógica subjacente sabemos que  $\neg(y \in x) \rightarrow (y \in x \rightarrow y \in z)$  e  $\neg(y \in z) \rightarrow (y \in z \rightarrow y \in x)$ , e então, usando Modus Ponens duas vezes e a lógica proposicional, obtemos  $(y \in x \leftrightarrow y \in z)$ . Já que por hipótese  $Q(x)$  e  $Q(z)$ , então temos que  $Q(x) \wedge Q(z) \wedge \forall y (y \in x \leftrightarrow y \in z)$  e podemos obter a fórmula que nos dá  $x = z$ . ■

Então, com a unicidade garantida podemos introduzir a constante  $\emptyset$  sem nenhuma ambiguidade em nossa linguagem. O esquema da separação também é um postulado da teoria de quase-conjuntos. Dada qualquer fórmula  $\alpha$  na qual a variável  $x$  é livre e  $y$  não aparece livre em  $\alpha$ , qualquer instância do seguinte esquema é um axioma:

**Axioma 3.10** (Esquema da Separação).  $\forall Q z \exists Q y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \alpha(x))$

O q-set  $y$  cuja existência é garantida por este axioma é denotado por  $[x : x \in z \wedge \alpha(x)]$ , e quando  $y$  é um conjunto (isto é, algo satisfazendo o predicado  $Z$ ), nós podemos denotá-lo pela notação usual  $\{x : x \in z \wedge \alpha(x)\}$ . O próximo axioma é o axioma da união:

**Axioma 3.11** (União).  $\forall_Q x \exists_Q y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists_Q w (w \in x \wedge z \in w))$

Este q-set será denotado por  $\bigcup x$ , e outras notações padrão para ele (tais como  $u \cup v$ ) serão usadas quando conveniente. Agora, postularemos o axioma do conjunto potência. Para introduzi-lo, primeiro definimos a relação ‘estar contido em’, também chamada de ‘subqset’.

**Definição 3.4** (Subqset).  $x \subseteq y =_{\text{def}} \forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$

**Axioma 3.12** (Q-set potência).  $\forall_Q x \exists_Q y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$

Denotamos este q-set pelo seu símbolo usual  $\mathcal{P}(x)$ . Nosso próximo passo é garantir que para quaisquer objetos  $x$  e  $y$  existe sempre um q-set tal que ambos  $x$  e  $y$  são elementos deste q-set. Este é um enunciado análogo de algumas versões do axioma do par utilizado nas apresentações usuais da teoria de conjuntos, apesar de não ser a mais comum (que faz uso da relação de identidade, ver comentário abaixo):

**Axioma 3.13** (Axioma do par).  $\forall x \forall y \exists_Q z (x \in z \wedge y \in z)$

Generalizando o procedimento utilizado nas teorias de conjuntos clássicas, podemos aplicar o axioma da separação ao q-set cuja existência foi postulada pelo axioma do par tomando no lugar de  $\alpha$  a seguinte condição:  $\alpha(w) := w \equiv x \wedge w \equiv y$ . Se ambos  $x$  e  $y$  são *Dinge*, a indistinguibilidade se transforma na identidade (pelo axioma 3.5), e então nós obtemos em  $\Omega$  o par usual, denotado por  $\{x, y\}$ . Se um dentre  $x$  e  $y$  ou ambos, não são clássicos (isto é, são m-átomos), o q-set obtido pelo axioma acima é denotado por  $[x, y]_z$ , o qual nós chamamos de *par não-ordenado fraco* de  $x$  e  $y$  relativamente a  $z$ . Esta abordagem particular aos pares indica que na teoria de quase-conjuntos pares não-ordenados são relativos a algum q-set cuja existência é garantida previamente; em geral, não há par *tout court*; tais pares existem apenas para itens clássicos. Na maioria dos casos, quando fica claro pelo contexto qual é o q-set  $z$  a partir do qual o par é obtido, o índice pode ser omitido da notação. Uma característica peculiar dos pares é que para itens não-clássicos, em particular para m-átomos indistinguíveis, não podemos garantir que o par  $[x, y]_z$  terá apenas dois elementos (isto é, que o seu quase-cardinal é dois), pois este é o q-set cujos elementos são *todos* os indistinguíveis de  $x$  e de  $y$  pertencendo a  $z$ , e pode haver mais do que dois deles. Obviamente, estamos considerando esta discussão acerca da quantidade de elementos apenas como uma elucidação informal, pois ainda não introduzimos a noção de quantidade de elementos de um q-set.

Ainda, devemos notar que esta abordagem aos pares que apresentamos no parágrafo anterior reflete uma maneira particular de tratar com um problema que aparece se nós seguíssemos o modo mais simples de postular a existência de pares, isto é, se nós aceitássemos como um axioma a fórmula

$$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w \equiv x \vee w \equiv y).$$

Neste caso, suponha por exemplo que  $m(x)$  e que  $y \equiv x$ . Então o axioma apresentado nos garantiria a existência de um q-set contendo como elementos todos os indistinguíveis de  $x$ , isto é, nós formaríamos um q-set contendo tudo o que é indistinguível de  $x$ . Agora, podemos razoavelmente ter dúvidas sobre o status de tal q-set, ou mesmo sua utilidade na teoria, então, é melhor introduzir as coleções pelo método empregado aqui, que nos permite permanecer silenciosos sobre as coleções de *todos* objetos de algum tipo.

Com estes postulados, podemos introduzir as operações usuais de união, par, potência, interseção e diferença de q-sets e provar suas propriedades usuais. Já que este procedimento é bastante similar ao caso clássico, nós não entraremos nestes detalhes aqui.

A noção de par ordenado fraco pode ser definida da maneira usual, a partir dos pares não-ordenados fracos. Como ocorre com o caso não-ordenado, ele é sempre relativo à algum q-set  $z$  dado previamente.

**Definição 3.5** (Pares ordenados fracos).  $\langle x, y \rangle_z =_{\text{def}} [[x]_z, [x, y]_z]_{\mathcal{P}(\mathcal{P}(z))}$

A propriedade fundamental dos pares ordenados,  $\langle x, y \rangle = \langle w, z \rangle \leftrightarrow x = w \wedge y = z$ , não pode nem mesmo ser formulada em nossa teoria, pois pode ocorrer que alguns dos itens não sejam clássicos, e então a identidade não está definida para eles. Posteriormente, provaremos que  $\langle x, y \rangle \equiv \langle w, z \rangle \leftrightarrow x \equiv w \wedge y \equiv z$  vale.

Agora, podemos introduzir o produto cartesiano de dois q-sets. Mais uma vez, devemos lembrar que tratamos apenas com pares ordenados relativamente a algum q-set dado. Então, temos:

**Definição 3.6** (Produto Cartesiano).  $u \times v =_{\text{def}} \{ \langle x, y \rangle_{u \cup v} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(u \cup v)) : x \in u \wedge y \in v \}$

Vamos esboçar agora brevemente como relações e funções podem ser definidos em nossa teoria; de fato, estas noções nem sempre coincidem com as suas contrapartes clássicas, como era de se esperar, por isso as chamamos de *quase-relações* e *quase-funções*, que chamaremos abreviadamente de q-relações e q-funções, dado que generalizam as definições usuais. Começamos com quase-relações:

**Definição 3.7** (Quase-relação). *Um q-set  $R$  é uma relação binária entre os q-sets  $z$  e  $w$  se seus elementos são pares ordenados fracos da forma  $\langle x, y \rangle_{z \cup w}$ , com  $x \in z$  e  $y \in w$ .*

É simples de prosseguir a partir deste ponto e definir quase-relações  $n$ -árias, quase-relações de equivalência, entre outros conceitos da teoria de relações usual. Devemos tomar cuidado, todavia, quando tratamos das relações de ordem em  $\Omega$ . Neste caso, quando m-átomos estão envolvidos, simplesmente não podemos definir uma relação de ordem sobre um q-set. Intuitivamente falando, podemos ver que muitos conceitos da teoria das relações não podem nem mesmo ser expressos adequadamente para q-sets contendo m-átomos, como por exemplo, a noção de um menor elemento de um dado q-set de acordo com alguma relação de ordem, ou até mesmo a condição de anti-simetria para uma relação.

Para q-funções, não há nenhuma adaptação imediata da definição usual para a teoria de quase-conjuntos. De fato, a definição clássica enuncia que uma função é uma espécie de relação unívoca, isto é, que relaciona cada objeto do domínio com apenas um objeto do contradomínio, e para isto, a identidade é necessária. Então, devemos empregar uma estratégia diferente:

**Definição 3.8** (Quase-funções). *Dizemos que  $f$  é uma quase-função entre os q-sets  $u$  e  $v$  se e somente se  $f$  é uma quase-relação entre  $u$  e  $v$  tal que para todo  $x \in u$  existe um  $y \in v$  tal que se  $\langle x, y \rangle \in f$  e  $\langle w, z \rangle \in f$  e  $x \equiv w$ , então  $y \equiv z$ .*

Em palavras, uma quase-função mapeia elementos indistinguíveis em elementos indistinguíveis. Uma questão interessante concerne os tipos mais específicos de função, isto é, funções injetivas, sobrejetivas e bijeções. Podemos, com algumas restrições, definir os conceitos correspondentes, mas não faremos isto aqui (ver as definições em French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.7)).

Agora, também postulamos axiomas do infinito e da regularidade:

**Axioma 3.14** (Infinito).  $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup [y]_x \in x))$

**Axioma 3.15** (Regularidade).  $\forall_Q x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \forall z(z \in x \rightarrow \neg(z \in y)))$

Poderíamos também introduzir oficialmente uma versão do axioma esquema da substituição: seja  $A(x, y)$  uma fórmula com  $x$  e  $y$  variáveis livres. Dizemos que esta fórmula exprime uma condição  $y$ -funcional em um q-set  $t$  se  $\forall w(w \in t \rightarrow \exists s A(w, s) \wedge \forall w \forall u(w \in t \wedge u \in$

$t \rightarrow \forall s \forall s' (A(w, s) \wedge A(u, s') \wedge w \equiv u \rightarrow s \equiv s'))$ ). Abreviamos esta fórmula por  $\forall x \exists! y A(x, y)$ . Agora, o axioma da substituição nos garante que

$$\forall x \exists! y A(x, y) \rightarrow \forall_Q u \exists_Q v (\forall z (z \in v \rightarrow \exists w (w \in u \wedge A(w, z)))).$$

### 3.6 AXIOMAS PARA QC

Nessa seção apresentaremos os axiomas para os quase-cardinais. Conforme mencionamos anteriormente, relações de ordem não podem ser definidas convenientemente na teoria de quase-conjuntos pelo simples fato de que a relação de identidade não vale para m-átomos, e assim, muitas das propriedades das relações de ordem não podem nem mesmo ser expressas na linguagem de  $\mathfrak{Q}$ . Ou seja, para os casos particulares de q-sets contendo m-átomos como elementos não é possível definir alguns tipos de ordens, como por exemplo aquelas cujos enunciados exigem as condições de anti-simetria ou tricotomia, que por sua vez pressupõe a identidade. A consequência destas limitações é que a noção de boa-ordem também não poderá ser definida para este tipo de q-sets. Isto impõe uma grande limitação na associação de ordinais aos quase-conjuntos, isto é, se desejamos proceder da maneira usual, não podemos associar um ordinal a estes q-sets, e então eles não teriam nem mesmo um cardinal. Já que o procedimento usual para se definir cardinais falha (isto é, sendo cardinais tipos particulares de ordinais atribuídos a q-sets depois de determinarmos uma boa-ordem para eles), uma primeira abordagem alternativa consistiria em simplesmente postularmos a existência de quase-cardinais obedecendo a certas condições, de modo que esta noção permite que o conceito usual de cardinais seja aplicado também a q-sets tendo m-átomos como elementos.

Para escrevermos de modo conveniente os postulados, utilizamos  $\alpha, \beta$ , etc, para nomear cardinais (definidos de modo usual na parte clássica da teoria);  $Cd(y)$  significa que  $y$  é um cardinal e  $card(x)$  representa o cardinal de  $x$ , quando isto fizer sentido. A primeira restrição que vamos impor à noção de quase-cardinal é que um quase-cardinal deve ser um cardinal, no sentido clássico do termo. Conforme mencionamos, em geral, um cardinal não pode ser *atribuído* a um q-set da maneira usual, mas isto não nos proíbe de atribuir a ele um quase-cardinal diretamente *sem* usar a ordenação pressuposta pelos ordinais. Então, para garantirmos que para todo q-set há um cardinal, introduzimos

um axioma específico:<sup>4</sup>

**Axioma 3.16.**  $\forall x \exists! y (Cd(y) \wedge qc(x) = y \wedge (Z(x) \rightarrow y = card(x)))$

Nós afirmamos anteriormente que quase-cardinais são objetos clássicos. Assim, a expressão ‘existe apenas um’ faz sentido para eles. Como uma consequência simples, temos:

**Teorema 3.6.**  $qc(\emptyset) = 0$ .

*Prova:* Pelo axioma 3.16, temos que  $\exists! y (Cd(y) \wedge qc(\emptyset) = y \wedge (Z(\emptyset) \rightarrow y = card(\emptyset)))$ . Já que sabemos que o q-set vazio é um conjunto, na parte clássica da teoria podemos verificar que  $card(\emptyset) = 0$ , isto é, o  $y$  neste caso é 0, e então, já que também  $y = qc(\emptyset)$ , teremos que  $0 = qc(\emptyset)$ . ■

O primeiro postulado para quase-cardinais não foi relativizado para q-sets, então, mesmo no caso em que é aplicado em m-átomos teremos que o símbolo  $qc$  faz sentido. Dado que já determinamos que os m-átomos não possuem elementos, seu quase-cardinal deverá ser zero. Garantimos este fato explicitamente no próximo axioma:

**Axioma 3.17.**  $\forall x (\neg Q(x) \rightarrow qc(x) = 0)$  (O cardinal dos átomos é zero.)

Também postulamos que se  $y$  é um subqset de  $x$ , então o quase-cardinal de  $y$  é menor do que o quase-cardinal de  $x$ . Aqui, a relação de ordem entre os quase-cardinais é a ordem usual sobre os cardinais, conforme definida na parte clássica de  $\mathfrak{Q}$ , já que todo quase-cardinal é um cardinal.

**Axioma 3.18.**  $\forall_Q x \forall_Q y (y \subseteq x \rightarrow qc(y) \leq qc(x))$

O seguinte teorema é uma consequência simples da lei da substituição 3.3:

**Teorema 3.7.** *Se  $x = y$ , então  $qc(x) = qc(y)$ .*

*Prova:* Seja  $z$  o único cardinal tal que  $z = qc(x)$ . Já que  $x = y$  por hipótese, uma aplicação da lei da substituição nos dá  $z = qc(y)$ , e então, pela simetria e transitividade de  $=$ , nós temos que  $qc(x) = qc(y)$ . ■

---

<sup>4</sup>Há uma discussão interessante sobre a importância ou não que todo q-set tenha um quase-cardinal associado. Em particular, Domenech e Holik sustentaram em (DOMENECH; HOLIK, 2007) que isto implicaria em limitações no poder da teoria de representar algumas situações relevantes em mecânica quântica, mas nós discutiremos este tópico apenas no capítulo 4.

O seguinte resultado também é imediato:

**Teorema 3.8.** *Se  $x \subseteq y$  e  $y \subseteq x$ , então  $qc(x) = qc(y)$ .*

**Prova:** *Se  $x \subseteq y$  e  $y \subseteq x$ , então o axioma 3.18 apresentado anteriormente nos mostra que  $qc(x) \leq qc(y)$  e  $qc(y) \leq qc(x)$ . Então, já que ambos são cardinais ('objetos clássicos'),  $qc(x) = qc(y)$ . ■*

No próximo axioma,  $\alpha$  e  $\beta$  denotam cardinais, obtidos na parte clássica da teoria de quase-conjuntos. Ele nos garante que se  $x$  é um quase-cardinal  $\alpha$ , então para qualquer cardinal  $\beta \leq \alpha$ , existe um subq-set de  $x$  tendo precisamente aquele quase-cardinal.

**Axioma 3.19.**  $\forall x(\exists \alpha(\alpha = qc(x)) \rightarrow \forall \beta(\beta \leq \alpha \rightarrow \exists z(z \subseteq x \wedge qc(z) = \beta)))$

O próximo axioma nos dá uma generalização do fato bem conhecido de que para coleções disjuntas, o quase-cardinal da união é a soma de seus cardinais. Também postulamos que o quase-cardinal de um conjunto potência obedece à identidade  $qc(\mathcal{P}(x)) = 2^{qc(x)}$ , conforme o esperado.

**Axioma 3.20.**  $\forall x \forall y (\forall w (w \notin x \vee w \notin y) \rightarrow qc(x \cup y) = qc(x) + qc(y))$

Com este axioma, podemos obter o seguinte resultado familiar, nomeadamente, que o quase-cardinal da diferença entre q-sets  $x$  e  $y$  (denotada por  $x \setminus y$ ) é igual à diferença entre seus cardinais. Enunciaremos este resultado sem apresentar sua prova (mas, veja French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, p.293)):

**Teorema 3.9.** *Para q-sets finitos  $x$  e  $y$ , se  $x \subseteq y$ , então  $qc(y \setminus x) = qc(y) - qc(x)$ .*

**Axioma 3.21.**  $\forall_Q x (qc(\mathcal{P}(x)) = 2^{qc(x)})$

Nós também postulamos que:

**Axioma 3.22.**  $\forall_Q x (x \neq \emptyset \rightarrow qc(x) \neq 0)$  (Q-sets não-vazios possuem quase-cardinal diferente de zero.)

Não devemos confundir este resultado com o enunciado falso de que o único item cuja cardinalidade é 0 é o q-set vazio, pois na presença de átomos, e com a noção de quase-cardinais sendo primitiva, este enunciado é falso. O seguinte teorema foi assumido como axioma em (FRENCH; KRAUSE, 2006, p.287), mas é uma consequência imediata de nossos axiomas anteriores. Ele relaciona  $qc$  com q-sets finitos, onde  $Fin(x)$  significa que  $x$  é finito (em algum sentido padrão):

**Teorema 3.10.**  $\forall_Q x \forall_Q y (Fin(x) \wedge x \subset y \rightarrow qc(x) < qc(y))$ .

*Prova:* Por hipótese  $x \subset y$ , então o axioma 3.18 nos garante que  $qc(x) \leq qc(y)$ . Se  $y$  não é finito, o resultado é imediato. Se  $y$  também é finito, então não é vazio. Então devemos mostrar que  $qc(y) \neq qc(x)$ . Se este não fosse o caso, teríamos, por 3.9 que  $qc(y \setminus x) = 0$ . Além disso, já que  $y \setminus x$  não é vazio (dado que  $x \subset y$ ), por 3.22 nós temos que  $qc(y \setminus x) \neq 0$ , uma contradição. ■

Alguns interessantes resultados adicionais podem ser obtidos concernindo q-sets contendo m-átomos. Aqui nós vamos nos restringir a q-sets finitos, pois nos parece que são precisamente estas coleções que interessam aos físicos. Em primeiro lugar, vamos lembrar que, dado um q-set  $z$  de m-átomos, podemos formar os q-sets unitários fracos dos elementos de  $z$ , isto é, se  $x \in z$ , os q-sets  $[x]_z$  é caracterizado como contendo aqueles elementos de  $z$  que são indistinguíveis de  $x$ . O seguinte teorema é uma consequência fácil das definições apresentadas acima:

**Teorema 3.11.** *Se  $x, y \in z$  e  $x \equiv y$ , então*

1.  $qc([x]_z) = qc([x, y]_z)$
2.  $qc([y]_z) = qc([x, y]_z)$

(A partir de agora omitiremos os subscritos  $z$ , pois fica claro pelo contexto o q-set a partir do qual estamos tomando nossos unitário e pares).

*Prova:* Concernindo (1), nós sabemos por definição que para todo  $w \in [x]$ ,  $w \in [x, y]$ . Por outro lado, se  $w \in [x, y]$  então  $w \equiv x$  ou  $w \equiv y$ . Já que  $x \equiv y$ , então  $w \equiv x$  e  $w \in [x]$ . Então, pela definição de identidade  $[x] = [x, y]$ , e ainda por 3.7,  $qc([x]) = qc([x, y])$ , que é o resultado que desejávamos provar. Um raciocínio análogo mostra o resultado para o caso (2). ■

**Teorema 3.12.** *Se não é o caso que  $x \equiv y$ , então para qualquer q-set  $z$ ,  $qc([x, y]_z) = qc([x]_z) + qc([y]_z)$ .*

*Prova:* Se não for o caso que  $x \equiv y$ , então para qualquer  $z$ ,  $[x]_z \cap [y]_z = \emptyset$ . Então,  $[x, y]_z = [x]_z \cup [y]_z$ , e então, por 3.7  $qc([x, y]_z) = qc([x]_z \cup [y]_z)$ , e por 3.20, nós temos que  $qc([x, y]_z) = qc([x]_z) + qc([y]_z)$ . ■

Outro aspecto importante de  $\mathfrak{Q}$  é que a formação de unitários e pares fracos a partir de elementos de um dado q-set  $z$  de m-átomos de certa forma simula a formação de classes de equivalência módulo a relação  $\equiv$ , isto é, o quase-conjunto quociente pela relação de indistinguibilidade em  $z$  é o q-set  $[[x]_{\equiv} : x \in z]$ , onde cada um dos elementos é um unitário fraco relativo a  $z$  (o q-set de todos os indistinguíveis de

$x$  que pertencem a  $z$ ). Isto é importante pois pode nos ajudar a entender q-sets de pares ordenados e produtos cartesianos, assim como seus quase-cardinais. Aqui vamos nos restringir aos q-sets finitos  $u$  e  $v$  cujos elementos são m-átomos. Tomando  $x \in u$  e  $y \in v$ , podemos obter os pares  $\langle x, y \rangle_{u \cup v}$ . Agora, se qualquer  $w \equiv x$  é também um elemento de  $u$ , temos pela definição de pares ordenados e pares fracos que poderíamos escrever este q-set alternativamente como  $\langle w, y \rangle$ , de modo que o unitário fraco  $[x]_u$  atua como uma classe de equivalência módulo  $\equiv$ . Este q-set é o ‘mesmo’ que  $[w]_u$  (realmente, eles são indistinguíveis, conforme resulta do axioma da Extensionalidade Fraca – ver a próxima seção). O mesmo raciocínio vale para qualquer indistinguível de  $x$  pertencendo a  $v$ . Para obtermos um par ordenado ‘adicional’ precisaremos tomar seja algum  $w \in u$  tal que  $w$  não é indistinguível de  $x$ , ou algum  $z \in v$  tal que  $z$  não é indistinguível de  $y$ . Isto nos dá uma dica sobre como podemos determinar o número de elementos de  $u \times v$ , e é isto o que nós provamos agora:

**Teorema 3.13.** *Sejam  $u$  e  $v$  q-sets finitos contendo  $m$ -átomos. Então  $qc(u \times v) = qc(u/\equiv) \cdot qc(v/\equiv)$ . (É claro que este resultado é relativizado a  $u \cup v$ ).*

**Prova:** *Provaremos que este resultado vale para quaisquer q-sets finitos  $u$  e  $v$  por indução sobre os quase-cardinais finitos de  $u/\equiv$ . Suponha que  $qc(v/\equiv) = n$ . Se  $qc(u/\equiv) = 1$ , então, para cada uma das  $n$  classes de equivalência  $[y]$  de  $v/\equiv$ , podemos formar o par  $\langle x, y \rangle$ , e então nós temos exatamente  $n$  pares. Agora, vamos supor que o enunciado do teorema vale para  $m$ , e vamos mostrar que ele vale para  $m + 1$ . Neste caso, se  $qc(u/\equiv) = m + 1$ , podemos tomar  $z \in u$  e obter  $(u/\equiv) \setminus [[z]_u]$ , e vamos chamar de  $m$  o quase-cardinal desta coleção, que chamaremos de  $t$ . Por uma aplicação da hipótese de indução, obtemos que  $qc(t \times v/\equiv) = m \cdot n$ . Agora, pelo primeiro passo da prova nós também sabemos que  $qc([z]_u \times v/\equiv) = n$ , e então, por 3.20 temos que  $qc(u/\equiv \times v/\equiv) = qc(t \times v/\equiv \cup [z]_u \times v/\equiv) = (m \cdot n) + n$ , e o resultado que desejávamos está provado. ■*

Agora, dado este resultado, já que as relações  $R$  e as quase-funções  $f$  podem ser vistas como subqsets de produtos cartesianos de seus domínios e imagens, denotados respectivamente  $Dom$  e  $Im$ , podemos determinar indiretamente também os seus quase-cardinais. Uma primeira abordagem sugere que, já que  $R \subseteq Dom(R) \times Im(R)$ , podemos usar 3.18 e assumir que  $qc(R) \leq qc(Dom(R) \times Im(R))$ . Para transformar isto em uma igualdade, aplicamos o teorema anterior e obtemos  $qc(R) = qc(Dom(R)/\equiv) \cdot qc(Im(R)/\equiv)$ . O mesmo vale para

quase-funções.

### 3.7 EXTENSIONALIDADE FRACA E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Nosso próximo objetivo é apresentar o axioma da extensionalidade fraca, que generaliza o axioma da extensionalidade padrão utilizado em ZFU. Intuitivamente a extensionalidade fraca serve para nos garantir que dois q-sets com ‘a mesma quantidade’ de elementos do mesmo tipo são de fato indistinguíveis. Para enunciá-lo, vamos precisar de duas definições extras, quais sejam, a noção de *similaridade* entre q-sets, denotada por  $Sim$ , e a noção de *Q-similaridade*, denotada por  $Qsim$ . Intuitivamente falando, q-sets similares são aqueles que tem elementos da mesma espécie (indistinguíveis), e q-sets q-similares tem elementos do mesmo tipo, satisfazendo ainda a condição de que possuem sempre a mesma quantidade:

#### Definição 3.9.

1.  $Sim(x, y) =_{\text{def}} \forall z \forall w (z \in x \wedge w \in y \rightarrow z \equiv w)$ ;
2.  $Qsim(x, y) =_{\text{def}} Sim(x, y) \wedge qc(x) = qc(y)$ .

Agora, o Axioma da Extensionalidade Fraca pode ser enunciado. Aqui,  $x/\equiv$  representa o q-set quociente de  $x$  pela relação  $\equiv$ .

**Axioma 3.23** (Extensionalidade Fraca–WEA).  $\forall_Q x \forall_Q y ((\forall z (z \in x/\equiv \rightarrow \exists t (t \in y/\equiv \wedge QSim(z, t)))) \wedge \forall t (t \in y/\equiv \rightarrow \exists z (z \in x/\equiv \wedge QSim(t, z))) \leftrightarrow x \equiv y)$

Uma formulação alternativa é a seguinte:

**Teorema 3.14** (Formulação alternativa de WEA).  $\forall_Q x \forall_Q y ((\forall z (z \in x/\equiv \rightarrow \exists t (t \in y/\equiv \wedge qc(t) = qc(z) \wedge \forall w \forall s (w \in x/\equiv \wedge s \in y/\equiv \rightarrow w \equiv s))) \wedge \forall t (t \in y/\equiv \rightarrow \exists z (z \in x/\equiv \wedge qc(z) = qc(t) \wedge \forall s \forall w (s \in y/\equiv \wedge w \in x/\equiv \rightarrow s \equiv w)))) \leftrightarrow x \equiv y)$

Alguns resultados interessantes seguem-se deste axioma. O primeiro que desejamos mencionar segue-se:

**Teorema 3.15.** *Se  $x \subseteq y$  e  $y \subseteq x$  então  $x \equiv y$ .*

**Prova:** *Seja  $z \in x/\equiv$ . Se  $t \in z$ , já que  $x \subseteq y$ , então  $t \in y$ . Se existe  $w \in y/\equiv$ , se  $t \in w$ , então  $t \in x$  para  $y \subseteq x$ . Isto nos garante que  $Sim(z, w)$ . Do fato de que  $x \subseteq y$  segue-se que  $z \subseteq w$ , e já que  $y \subseteq x$ , nós também temos que  $w \subseteq z$ . A partir de  $z \subseteq w$  e  $w \subseteq z$ , nós*

derivamos por um teorema apresentado previamente 3.8 que  $qc(z) = qc(w)$ , e então que  $Qsim(z, w)$ . De um modo similar, nós mostramos que para toda classe de equivalência em  $y/\equiv$  existe uma classe  $Qsim$  em  $x/\equiv$ , e então, por WEA, temos que o teorema está provado. ■

**Teorema 3.16.**

1.  $\forall_Q x \forall_Q y (Sim(x, y) \wedge qc(x) = qc(y) \rightarrow x \equiv y)$
2. Para qualquer  $q$ -set  $z$ ,  $x \equiv y \wedge qc([x]_z) = qc([y]_w) \leftrightarrow [x]_z \equiv [y]_w$ .

**Prova:** Para a primeira proposição, de  $Sim(x, y) \wedge qc(x) = qc(y)$  segue-se que  $Qsim(x, y)$ . A partir de  $Sim(x, y)$ , existe apenas uma classe de equivalência em  $x/\equiv$  e em  $y/\equiv$ , e então, o resultado desejado segue-se de WEA. Com relação à segunda proposição, suponha que  $x \equiv y \wedge qc([x]_z) = qc([y]_w)$ . Dado que em particular  $x \equiv y$  e  $[x]_z$  é o  $q$ -set cujos elementos são os indistinguíveis dos  $x$  pertencendo a  $z$ , então para qualquer elemento  $x'$  em  $[x]_z$ , nós temos  $x' \equiv y$ . Pelo mesmo argumento, para qualquer  $y'$  em  $y$ , nós temos  $y' \equiv x$ . Então,  $Sim([x]_z, [y]_w)$ , e a partir deste fato e da hipótese de que  $qc([x]_z) = qc([y]_w)$ , nós temos  $Qsim([x]_z, [y]_w)$ . A partir da primeira parte do teorema, nós temos  $[x]_z \equiv [y]_w$ . Agora, suponha que  $[x]_z \equiv [y]_w$ . WEA nos garante que  $\forall x'(x' \in [x]_z/\equiv \rightarrow \exists y'(y' \in [y]_w/\equiv \wedge Qsim(x', y')) \wedge \forall y'(y' \in [y]_w/\equiv \rightarrow \exists x'(x' \in [x]_z/\equiv \wedge Qsim(y', x')))$ . Dado que  $[x]_z$  é o  $q$ -set dos indistinguíveis de  $x$  pertencendo a  $z$ ,  $[x]_z$  é o único  $q$ -set em  $[x]_z/\equiv$ , e o mesmo vale para  $[y]_w/\equiv$ , nos dando  $Qsim([x]_z/\equiv, [y]_w/\equiv)$ , e então, pela parte anterior, esses  $q$ -sets são indistinguíveis. ■

Podemos também provar o resultado concernindo pares ordenados mencionado anteriormente:

**Teorema 3.17.** Para qualquer  $q$ -set  $z$ ,  $\langle x, y \rangle_z \equiv \langle u, v \rangle_w \leftrightarrow x \equiv u \wedge y \equiv v$ .

**Prova:** Nós provamos apenas a condição suficiente. Suponha que  $\langle x, y \rangle_z \equiv \langle u, v \rangle_w$ . Se  $x \equiv y$ , então pela hipótese e por WEA,  $u \equiv v$ . Por definição, a hipótese se torna  $[[x]] \equiv [[u]]$  (com a referência ao índice  $z$  sendo omitida a partir de agora), e por duas aplicações da segunda parte do teorema anterior, nós temos que  $x \equiv u$ , e já que  $x \equiv y$ , nós temos que  $y \equiv u$  e então  $y \equiv v$ . Por outro lado, se não for o caso que  $x \equiv y$ , então pelo axioma WEA nós temos que  $[x]/\equiv$  é  $Qsim$  a  $[u]/\equiv$  ou então a  $[u, v]/\equiv$ . No segundo caso, teríamos que  $u \equiv v$ , e então, por WEA mais uma vez, nossa hipótese seria violada. Então,  $[x]/\equiv$  é  $Qsim$  a  $[u]/\equiv$ . Agora, suponha que não é o caso que  $y \equiv v$ . Então, em particular, não é o caso que  $[y] \equiv [v]$ , e então,  $[x, y]$  e  $[u, v]$  também não são indistinguíveis, contradizendo a hipótese. Então,  $y \equiv v$ . ■

Um corolário simples deste teorema expressa um fato que já mencionamos anteriormente, qual seja, que no caso de itens indistinguíveis, em particular de  $m$ -átomos indistinguíveis, não podemos fixar uma ordem nem mesmo para os elementos de um par ‘ordenado’.

**Corolário 3.1.** *Se  $x, y \in t$  e  $x \equiv y$ , então  $\langle x, y \rangle_t \equiv \langle y, x \rangle_t$ .*

Agora, apresentamos um último resultado obtido a partir de WEA, qual seja, o teorema da invariância sob ‘permutações’. De acordo com este teorema, falando intuitivamente, os elementos de um  $q$ -set podem ser ‘permutados’ com elementos indistinguíveis, dando origem a um  $q$ -set que é indistinguível daquele que tínhamos originalmente. Este resultado interessante simula aquilo que ocorre, por exemplo, em química. Suponha que um átomo de Hélio está em seu estado fundamental. É possível ‘eliminar’ um de seus elétrons através de uma ionização, obtendo assim um íon positivo. Então, podemos ‘capturar’ um elétron no átomo novamente, obtendo assim mais uma vez um átomo neutro. Qual é a diferença entre os dois átomos, antes e depois do procedimento de ionização/captura? E que podemos dizer dos dois elétrons em questão? São eles o mesmo elétron? Trata-se do mesmo átomo? Claro, estas são questões que não possuem resposta, ou melhor, se considerarmos a interpretação da teoria que estamos propondo aqui, nem mesmo as perguntas parecem ser questões legítimas. Se pudéssemos sustentar que os elétrons e átomos obtidos através dos processos descritos são iguais ou diferentes, então, como explicamos anteriormente, algum princípio metafísico deveria fundamentar este enunciado de diferença.

Para enunciar o resultado que desejamos, primeiramente precisamos da definição de um *unitário forte* de um determinado elemento. A ideia por trás do conceito de unitário forte é bastante simples; trata-se de um  $q$ -set com apenas um elemento. O caso realmente relevante ocorre quando tratamos de unitários fortes de  $m$ -átomos: podemos ter certeza de que o elemento que pertence a um unitário forte de um  $m$ -átomo  $x$  é indistinguível de  $x$ , mas não há como se demonstrar que este elemento é o próprio  $x$ , já que não temos a noção de identidade para  $m$ -átomos. Então,

**Definição 3.10.**

1. *Se  $x \in t$ , então  $S_x =_{\text{def}} [s \in \mathcal{P}([x]_t) : x \in s]$ ;*
2. *(Unitário forte de  $x$ )  $\langle x \rangle_z =_{\text{def}} \bigcap_{t \in S_x} t$ .*

**Teorema 3.18.** *Existe um unitário forte de  $x$ .*

**Prova:** *Dado um  $q$ -set  $z$  e  $x \in z$ , o  $q$ -set  $[x]_z$  existe pelo axioma do*

par. Dado que  $x \in [x]_z$ , pois a relação  $\equiv$  é reflexiva, então  $qc([x]_z) \geq 1$ . Então pelo axioma 3.19 existe um subqset de  $[x]_z$  cujo quase-cardinal é precisamente 1. Tome este q-set para ser o unitário forte de  $x$ . ■

**Teorema 3.19.** Para qualquer  $x$  e  $z$ , se  $w \in \langle x \rangle_z$ , então  $w \equiv x$ .

*Prova:* Imediata a partir da definição. ■

Este teorema é, de um ponto de vista técnico, bastante trivial, mas seu significado não é. Realmente ao afirmarmos que  $w$  pertence ao unitário forte de  $x$  e ao reconhecermos que  $\langle x \rangle$  tem quase-cardinal 1, poderíamos ser levados a concluir que  $w$  é o próprio  $x$ , mas esta conclusão deve ser resistida. De fato, para sermos capazes de expressar esta situação necessitamos do conceito de identidade, e então, o máximo que podemos dizer é que  $w$  é um objeto indiscernível de  $x$ , nada mais. Na interpretação pretendida da teoria, (onde os m-átomos são tomados como representando objetos quânticos), isto é útil para expressarmos coisas como ‘o elétron assim e assim’, digamos, para mencionar o elétron na camada mais externa de um átomo de Lítio  $1s^2 2s^1$ . Deveria ser notado que esta configuração eletrônica não individualiza o elétron mencionado, pelo menos não de acordo com a nossa concepção de individualidade (falando por alto, algo que pode pelo menos em princípio ser identificado, rotulado, nomeado, ocorrer em distintos instantes temporais mantendo sua identidade, etc). Mais adiante, no capítulo 4 trataremos deste assunto novamente com mais detalhes.

Como pode parecer óbvio, o unitário forte de  $x$  não é único, sendo que pelo axioma WEA todos os unitários fortes de  $x$  são indistinguíveis.

O próximo teorema simula em  $\mathfrak{Q}$  a não-observabilidade das permutações de objetos indistinguíveis, um resultado que, conforme discutimos anteriormente, é importante na física quântica e na discussão relacionada à individualidade e não-individualidade dos objetos quânticos (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4)). Falando informalmente, se tomarmos um elemento de um quase-conjunto  $x$  e o substituímos por algum elemento indistinguível dele que não pertence a  $x$ , então o novo q-set é indistinguível do original (lembre nossa discussão acima sobre o processo de ionização). Evidentemente, se  $x$  é um conjunto então a única substituição que preserva este resultado ocorre quando um elemento é substituído por si mesmo, pois objetos clássicos são indistinguíveis apenas de si próprios.

**Teorema 3.20** (Permutações não são observáveis). Seja  $x$  um q-set finito tal que  $\neg(x = [z]_t)$  para algum  $t$  e seja  $z$  um m-átomo tal que

$z \in x$ . Se  $w \in t$ ,  $w \equiv z$  e  $w \notin x$ , então existe  $\langle w \rangle_t$  tal que

$$(x - \langle z \rangle_t) \cup \langle w \rangle_t \equiv x.$$

**Prova:** (Omitiremos novamente os índices). Caso 1:  $t \in \langle z \rangle$  não é um elemento de  $x$ . Neste caso,  $x - \langle z \rangle = x$  e então nós podemos admitir a existência de  $\langle w \rangle$  tal que seu único elemento  $s$  pertença a  $x$  (por exemplo,  $s$  poderá ser o próprio  $z$ ); então  $(x - \langle z \rangle) \cup \langle w \rangle = x$ .

Caso 2:  $t \in \langle z \rangle$  é um elemento de  $x$ . Então  $qc(x - \langle z \rangle) = qc(x) - 1$  (por um resultado que não provamos aqui).<sup>5</sup> Então tomamos  $\langle w \rangle$  tal que seu elemento é o próprio  $w$ , e então segue-se que  $(x - \langle z \rangle) \cap \langle w \rangle = \emptyset$ . Portanto, por (3.20),  $qc((x - \langle z \rangle) \cup \langle w \rangle) = qc(x)$ . Isto nos diz intuitivamente que ambos  $(x - \langle z \rangle) \cup \langle w \rangle$  e  $x$  possuem a mesma quantidade de elementos indistinguíveis. Então, com uma aplicação do axioma da extensionalidade fraca obtemos o resultado do teorema. ■

Vamos agora nos voltar para o axioma das potências novamente. Já sabemos que não podemos nomear m-átomos de modo significativo. Mas vamos supor que fosse possível atribuir um nome a cada um deles, e seja  $A$  um q-set com dois m-átomos indistinguíveis, chamados  $a$  e  $b$ . Usando a notação acima, podemos tentar escrever  $\mathcal{P}(x) = [\emptyset, [a]_x, [b]_x, [a, b]_x]$ . Mas WEA nos garante que q-sets tendo a mesma quantidade de elementos indistinguíveis (expressando este fato em função de quase-cardinais) são de fato eles mesmos indistinguíveis. Então,  $[a]_x \equiv [b]_x$  e deste modo não poderíamos expressar sem ambiguidade o q-set  $\mathcal{P}(x)$  como acima. Isto de fato não importa. O que realmente é relevante é que os postulados acima nos permitem afirmar que é consistente com  $\mathfrak{Q}$  supor que qualquer q-set  $A$  tem  $2^{qc(A)}$  subqsets, então, é consonante com a existência de ambos  $\langle a \rangle_x$  e  $\langle b \rangle_x$ .

### 3.8 EQUICONSISTÊNCIA

Nesta seção, esboçaremos uma prova de que  $\mathfrak{Q}$  é equiconsistente com ZFU (e portanto, com ZFC). Apesar de que, como observamos anteriormente,  $\mathfrak{Q}$  pode ser desenvolvido fora de ZFU ou de ZFC, a partir do zero, este resultado que vamos apresentar é importante porque nos fornece fundamentos para dizermos que de alguma forma a teoria de conjuntos padrão está *por trás* da teoria  $\mathfrak{Q}$  e com isso, podemos, caso queiramos, justificar nossos passos em  $\mathfrak{Q}$  ao nos reportarmos a uma teoria bem conhecida. Em particular, com este tipo de procedimento

<sup>5</sup>Mas veja (FRENCH; KRAUSE, 2006, p.293).

podemos dar sentido ao uso dos quantificadores em  $\mathfrak{Q}$ , pois alguns poderiam argumentar que já que m-átomos não podem ser identificados, nem entrar em relações de identidade e diferença, então os quantificadores poderiam não fazer sentido nesta teoria. Não concordamos com esta linha de críticas feita à inteligibilidade da teoria. Existem em nossa opinião, diversas formas de se argumentar que os quantificadores fazem sentido em  $\mathfrak{Q}$  (ver a discussão mais detalhada deste tópico no capítulo 5; para uma justificação em  $\mathfrak{Q}$  seguindo as mesmas linhas dos argumentos apresentados para ZFC ou ZFU, ver (ARENHART; KRAUSE, 2009)). De qualquer forma, os resultados desta seção são interessantes independentemente deste tipo de motivação.

A primeira parte da prova, qual seja, de que se  $\mathfrak{Q}$  é consistente então ZFU também é, mostra-se relativamente simples. Neste caso, tudo o que temos que fazer é apresentar uma tradução da linguagem de ZFU na linguagem de  $\mathfrak{Q}$ , de modo que as traduções dos postulados de ZFU podem ser mostrados serem teoremas de  $\mathfrak{Q}$ . A tradução é como se segue:

**Definição 3.11** (Tradução de ZFU para  $\mathfrak{Q}$ ). *Seja  $\alpha$  uma fórmula da linguagem de ZFU, que nós suporemos aqui conter um predicado unário  $S$  tal que, falando informalmente,  $S(x)$  nos diz que  $x$  é um conjunto (portanto, se  $\neg S(x)$ ,  $x$  é um átomo). Denotamos por  $\alpha^q$  a tradução de  $\alpha$  para a linguagem de  $\mathfrak{Q}$  definida como se segue.*

1. Se  $\alpha$  é  $S(x)$ , então  $\alpha^q$  é  $Z(x)$ .
2. Se  $\alpha$  é  $x = y$ , então  $\alpha^q$  é  $((M(x) \wedge M(y)) \vee (Z(x) \wedge Z(y))) \wedge x = y$ .
3. Se  $\alpha$  é  $x \in y$ , então  $\alpha^q$  é  $((M(x) \vee Z(x)) \wedge Z(y)) \wedge x \in y$ .
4. Se  $\alpha$  é  $\neg\beta$ , então  $\alpha^q$  é  $\neg\beta^q$ .
5. Se  $\alpha$  é  $\beta \vee \gamma$ , então  $\alpha^q$  é  $\beta^q \vee \gamma^q$ .
6. Se  $\alpha$  é  $\forall x\beta(x)$ , então  $\alpha^q$  é  $\forall x(M(x) \vee Z(x) \rightarrow \beta^q)$ .

Com esta definição em mãos, tudo o que nos resta fazer é traduzir os axiomas de ZFU e provar que estas traduções são teoremas de  $\mathfrak{Q}$  (temos que assumir em  $\mathfrak{Q}$  uma versão do axioma esquema da substituição para que todas as traduções de axiomas de ZFU sejam teoremas de  $\mathfrak{Q}$ ). Não entraremos nestes detalhes aqui.

O resultado converso, nomeadamente, que se ZFU é consistente então  $\mathfrak{Q}$  também é requer um pouco mais de trabalho. Como ZFU e ZFC são equiconsistentes, provaremos que se ZFC é consistente então

$\Omega$  também deverá ser. Os detalhes, claro, serão apenas indicados. A partir de agora, vamos estar trabalhando em ZFC.

Seja  $m$  um conjunto, e  $\sim$  uma relação de equivalência definida sobre  $m$ . Chamamos  $m/\sim$  o correspondente conjunto quociente, cujos elementos (as classes de equivalência) são denotadas por  $C_i$ , com  $i \in I$ . Para qualquer  $x \in m$ , vamos definir o conjunto  $\hat{x} := \langle x, C_x \rangle$ , onde  $C_x$  é a classe de equivalência à qual  $x$  pertence. Se  $M$  é outro conjunto tal que  $\hat{m} \cap M = \emptyset$  e  $\text{rank}(M) = \text{rank}(\hat{m})$ , vamos definir  $X = \hat{m} \cup M$ . Agora definimos a seguinte hierarquia de conjuntos por indução transfinita:

1.  $Q_0 := X$
2.  $Q_1 := Q_0 \cup \mathcal{P}(Q_0)$
3.  $\vdots$
4.  $Q_{n+1} = Q_n \cup \mathcal{P}(Q_n)$
5.  $\vdots$
6.  $Q_\lambda := \bigcup_{\beta < \lambda} Q_\beta$  se  $\lambda$  é um ordinal limite,
7.  $\vdots$
8.  $Q := \bigcup_{\alpha \in On} Q_\alpha$ , onde  $On$  é a classe dos ordinais.

Vamos supor que temos também uma outra hierarquia chamada  $Q^S$ , construída exatamente como  $Q$  acima, mas com a única diferença de que o conjunto base é apenas  $M$  e não todo o conjunto  $X$ . Então, a esta hierarquia pertencem os conjuntos que chamaremos de ‘clássicos’.

É importante que seja notado que o rank dos elementos de  $m$  são menores do que o rank de  $\hat{m}$ , de modo que os elementos de  $m$  estão de fora desta hierarquia. Isto significa que dentro de  $Q$  não podemos fazer sentido da identidade ou diferença dos elementos de  $m$ , exatamente de acordo com o espírito por trás da proposta da teoria  $\Omega$ .

Agora nós definimos uma tradução da linguagem de  $\Omega$  para a linguagem de ZFC. Em primeiro lugar, vamos definir a indistinguibilidade de  $x$  e  $y$  (ambos são elementos de  $m$ ) por meio dos conjuntos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ ; escrevemos  $x \sim y$  se  $C_x = C_y$  ( $x$  e  $y$  são indistinguíveis, ou indiscerníveis). Deste modo estamos ‘identificando’  $x$  e  $y$  através das classes de equivalência às quais pertencem, e isto é feito sem qualquer referência aos próprios objetos, que por sua vez ficam de fora da hierarquia propriamente dita (quando são elementos de  $m$ ). Agora vamos passar para a tradução propriamente.

**Definição 3.12** (Tradução de  $\mathfrak{Q}$  para ZFC). *Seja  $\alpha$  uma fórmula da linguagem de  $\mathfrak{Q}$ , e chamemos  $\alpha^z$  sua tradução para a linguagem de ZFC, definida como se segue:*

1. *Se  $\alpha$  é  $m(x)$ , então  $\alpha^z$  é  $x \in \widehat{m}$*
2. *Se  $\alpha$  é  $M(x)$ , então  $\alpha^z$  é  $x \in M$ .*
3. *Se  $\alpha$  é  $Z(x)$ , então  $\alpha^z$  é  $x \in Q^S \wedge x \notin M$ .*
4. *A tradução do termo  $qc(x)$  é  $card(x)$ , o cardinal do conjunto  $x$ .*
5. *Se  $\alpha$  é  $x \equiv y$ , então  $\alpha^s$  é  $((x \in \widehat{m} \wedge y \in \widehat{m} \wedge x \sim y) \vee x = y)$ .*
6. *Se  $\alpha$  é  $x \in y$ , então  $\alpha^s$  é  $x \in y$ .*
7. *As outras fórmulas são traduzidas da maneira usual.*

Agora, resta a tarefa de mostrar que as traduções dos postulados de  $\mathfrak{Q}$  são teoremas de ZFC. Os detalhes podem ser vistos em (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.7). Com este resultado,  $Q$  é um modelo de  $\mathfrak{Q}$ . A ideia é que podemos simular a não-individualidade dentro de uma teoria de conjuntos clássica, apesar de que, como comentamos anteriormente, está é simplesmente outra face da estratégia de Weyl. Realmente, deve ficar claro que as entidades tratadas em ZFC, por exemplo, sempre obedecem a relação de identidade ou diferença, de modo que não temos uma não-individualidade no sentido metafísico que desejávamos. Mais tarde, no capítulo 4 voltaremos a discutir como os quase-conjuntos apresentam um comportamento análogo concernindo a individualidade.

### 3.9 NÃO-REFLEXIVIDADE E OS FUNDAMENTOS DA MQ

Agora que a teoria  $\mathfrak{Q}$  foi exposta com algum detalhe, podemos finalizar este capítulo mencionando algumas das aplicações concernindo os fundamentos da mecânica quântica ortodoxa (MQ) que já foram desenvolvidas (mesmo que apenas em estudos preliminares) empregando ferramentas quase-conjuntistas. Devemos recordar que a principal motivação por trás do desenvolvimento da  $\mathfrak{Q}$  foi o objetivo de fornecer um pano de fundo conceitual no qual pudéssemos tratar com objetos que possam ser absolutamente indistinguíveis sem que sejam idênticos. Agora, queremos mencionar alguns usos da teoria para se formalizar os principais aspectos do comportamento das partículas conforme elas são tratadas pela mecânica quântica, interpretada de acordo com alguma versão da Concepção Recebida.

Para começar, vamos mencionar o trabalho de Domenech e Holik em (DOMENECH; HOLIK, 2007) acerca dos quase-cardinais finitos e de procedimentos de contagem para coleções de não-indivíduos. O primeiro ponto a ser reconhecido é que não-indivíduos (e mesmo objetos indistinguíveis em geral) não parecem se submeter facilmente ao procedimento usual de contagem que consiste em se estabelecer uma correspondência um-a-um entre a coleção de objetos sendo contados e os predecessores de um determinado ordinal. Este tipo de procedimento, favorecido pela maioria dos filósofos, parece fracassar quando se trata de coleções de não-indivíduos conforme os estamos entendendo aqui, pois pressupõe que possamos atribuir de modo único um rótulo a cada objeto sendo contado e identificá-lo de modo inequívoco, algo que dificilmente pode ser dito possível para coleções de objetos que sejam não-indivíduos indistinguíveis legítimos. Esta impossibilidade é uma das razões pelas quais os cardinais não podem ser definidos em  $\Omega$  de acordo com os modos usuais de se proceder (com cardinais sendo ordinais particulares), e então eles devem ser definidos por algum procedimento não padrão ou, alternativamente, introduzidos como primitivos, obedecendo alguns axiomas, conforme fizemos acima. Domenech e Holik propuseram empregar os recursos da teoria de quase-conjuntos para se superar estas dificuldades quando estamos preocupados apenas com quase-conjuntos finitos. A principal ideia de sua proposta é que podemos codificar em  $\Omega$  um procedimento que pode ser considerado como realizável em sistemas quânticos em laboratório: em uma câmara de bolhas podemos, por exemplo, ionizar um átomo usando radiação e então, após uma aplicação deste procedimento podemos observar o rastro de um elétron. Repetindo este procedimento, podemos prosseguir deste modo até que nenhum rastro mais seja observado, e então somos capazes de saber quantos elétrons haviam, sem termos no entanto que mencionar sua identidade (no sentido que estamos usando o termo aqui). De um modo similar, podemos eliminar os elementos de um q-set um por um, e ao fazermos isso podemos contar (na parte clássica de  $\Omega$ ) o número de passos necessários para esvaziar o q-set, ao invés de contarmos diretamente seus elementos. Seguindo este modo de proceder nós não precisamos levar em conta a identidade dos elementos, que podem ser não-indivíduos indistinguíveis, mas apenas o número de passos necessários para esvaziar o q-set. Nós não vamos entrar em digressão sobre os detalhes aqui, mas a definição proposta nos permite falar sobre a quantidade dos elementos em uma coleção finita sem ter que pressupor sua identificação (e portanto, sua individualidade). Para uma discussão deste tópico, ver o capítulo 4.

Outra aplicação de  $\mathfrak{Q}$  deriva da própria necessidade de se desenvolver uma teoria de conjuntos com não-indivíduos:<sup>6</sup> a ideia principal consiste em se levar a sério o fato de que a matemática clássica está comprometida com indivíduos, já que qualquer objeto tratado por esta matemática obedece à teoria da identidade padrão. Então, uma teoria como ZFC não constituiria o framework conceitual mais adequado para se representar coleções de não-indivíduos conforme eles aparecem na mecânica quântica (de acordo com nossa interpretação particular; ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.6) para uma discussão completa). Seguindo esta linha de raciocínio, Domenech, Holik e Krause (DOMENECH; HOLIK; KRAUSE, 2008) desenvolveram uma teoria de espaços de Fock dentro da teoria de quase-conjuntos que não pressupõe a rotulação dos objetos e que é baseada em q-sets de m-átomos de maneira essencial, isto é, os espaços de Fock são construídos sobre coleções de objetos que tomamos como representando não-indivíduos na teoria de quase-conjuntos. Mesmo que os detalhes desta construção não possam ser discutidos aqui de modo conveniente, ela consegue, através de uma abordagem realmente diferente, mostrar que a mecânica quântica pode ser baseada em uma lógica não-clássica, uma lógica completamente afinada com as exigências da Concepção Recebida acerca da não-individualidade das partículas na teoria quântica.

Ainda seguindo este último tipo de abordagem, vamos supor que estejamos um pouco relutantes em mudar toda a matemática subjacente à mecânica quântica, e que desejamos apenas mudar a ontologia descrita pela matemática. Esta é a abordagem explorada em Krause e Arenhart (KRAUSE; ARENHART, 2011), onde um predicado quase-conjuntista é apresentado para a mecânica quântica ortodoxa (um predicado no sentido de P. Suppes (SUPPES, 2002), mas construído em  $\mathfrak{Q}$ ). Trabalhando em  $\mathfrak{Q}$ , podemos garantir que mesmo que a matemática seja desenvolvida na parte clássica da teoria de quase-conjuntos, a ontologia associada, encapsulada no domínio do quase-predicado, é uma coleção de não-indivíduos, garantindo assim mais uma vez que a teoria trata legitimamente com não-indivíduos e que podemos então estar comprometidos ontologicamente com eles. Assim como na aplicação mencionada no parágrafo anterior, este tipo de proposta é motivada pela exigência de que a não-individualidade seja assumida desde o começo (como um conceito primitivo), mas agora esta característica das partículas está codificada no framework lógico subjacente, e não na própria matemática. De qualquer modo, esta é ainda outra opção

---

<sup>6</sup>Este problema foi proposto por Yu. I. Manin como um de seus Problemas para a Matemática Atual; ver (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.6).

para que o comprometimento com não-indivíduos seja tornado preciso através do uso de  $\Omega$ .

Conforme já mencionamos, muitos resultados interessantes de um ponto de vista filosófico e matemático podem ser alcançados formalmente dentro do aparato de  $\Omega$ . Muito ainda precisa ser feito, como por exemplo, o uso da teoria de quase-conjuntos na teoria quântica de campos (para uma discussão relevante, ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.9), Domenech e Holik (DOMENECH; HOLIK, 2007)). Esperamos que o desenvolvimento apresentado aqui e as aplicações que já estão sendo levadas a cabo possam ser estimulantes ao leitor e que nós tenhamos conseguido mostrar que a não-reflexividade é uma tese interessante, que pode ser desenvolvida com fundamentos seguros e que deveria ser levada em consideração nas discussões sobre os fundamentos da mecânica quântica.



## 4 QUASE-CARDINAIS FINITOS

Neste capítulo nós discutiremos a relação entre duas características que as entidades quânticas são ditas possuir: i) elas podem ser consideradas como sendo de certo modo *não-indivíduos* e ii) elas podem ser agregadas em coleções tendo um número bem definido delas (um cardinal). A não-individualidade, conforme ela é geralmente entendida nestes contextos e conforme ela está sendo tomada neste trabalho (*vide* o capítulo 2), implica em particular que estes itens não podem possuir condições de identidade nem ser nomeados ou rotulados. Por outro lado, de acordo com o modo usual de se entender, o cardinal de um agregado é atribuído através de um procedimento de contagem que pressupõe algum tipo de condição de identidade que nos permita individuar e rotular as entidades sendo contadas. Então, tomadas em conjunto, a característica envolvendo cardinalidade e a não-individualidade parecem gerar um paradoxo: para serem contados e ter um número cardinal, estes agregados não poderiam envolver não-indivíduos, estas duas características parecem excluir uma a outra. Vamos argumentar que se pode manter tanto a interpretação dos objetos quânticos como não-indivíduos quanto a característica de que podem ser contados em qualquer situação dada.

Nosso primeiro passo consistirá em discutir a relação entre contagem, cardinalidade, rotulação e não-individualidade. Algumas abordagens a estes conceitos conforme são apresentadas na literatura serão tratados de modo breve, e vamos sustentar que aqueles argumentos propondo que a contagem pressupõe a identidade e a individualidade podem de fato ser resistidos. Para fundamentar nossa afirmação de que podemos consistentemente ter contagem e cardinalidade sem termos identidade e individualidade, proporemos uma definição de um procedimento alternativo de contagem. Primeiramente, analisaremos uma proposta semelhante nestas mesmas linhas apresentada por Domenech e Holik (DOMENECH; HOLIK, 2007). Investigaremos também algumas teses destes autores segundo as quais a definição proposta por eles não apenas possui vantagens para a concepção filosófica das partículas quânticas como não-indivíduos, mas também para o formalismo da teoria de quase-conjuntos propriamente, que é o aparato conceitual empregado por eles para formalizar suas definições. Entraremos em alguns detalhes acerca desta proposta particular e argumentaremos que algumas de suas características não estão em completo acordo com suas motivações, em particular, que algumas das críticas apresentadas

por estes autores à formulação usual da teoria  $\Omega$  não se sustentam, ou em outros casos, não se resolvem com a abordagem proposta por eles.

O próximo passo consiste em apresentar nossa própria proposta de definição de contagem e cardinalidade na teoria de quase-conjuntos. Iremos nos restringir apenas aos q-sets finitos, sem prejuízos para a discussão filosófica, e nossa motivação é baseada no trabalho de Domenech e Holik. Nossa definição é, de um ponto de vista técnico, mais simples, e conforme argumentaremos, para q-sets finitos as duas definições podem ser facilmente vistas como coincidindo. Como um último ponto a ser desenvolvido, passamos de alguns pontos mais técnicos da apresentação e discutimos uma objeção feita originalmente à definição de Domenech e Holik feita por Jantzen em (JANTZEN, 2010), mas que também poderia ser dirigida ao nosso trabalho conforme desenvolvido aqui. De acordo com Jantzen, o próprio conceito de unitário forte nos permite introduzir em  $\Omega$  uma noção de identidade, uma relação que simula o comportamento da identidade. Segundo ele, é esta relação que explica a própria possibilidade de definições alternativas de cardinalidade como aquela de Domenech e Holik e aquela que propomos aqui. Então, se Jantzen estiver correto em suas críticas, a ideia de que podemos definir uma noção de contagem e cardinalidade sem pressupor nem a rotulação nem a individualidade das entidades sendo contadas é uma ilusão. Argumentaremos que as dificuldades apontadas por Jantzen estão equivocadas, e que parte de seu argumento surge de se esquecer algumas características básicas da teoria  $\Omega$ . Por fim, mostraremos que  $\Omega$  pode ser vista como englobando uma forma de *individualidade contextual*, mais ou menos como ZFC pode ser visto como englobando certas formas de não-individualidade (conforme discutimos no capítulo anterior, tanto no caso do modelo em ZFC para  $\Omega$  quando no caso da estratégia de Weyl).

## 4.1 CONTAGEM E INDIVIDUALIDADE

A contagem parece ser uma atividade humana bastante simples. Intuitivamente, para contarmos uma coleção (finita) de objetos, tudo o que precisamos fazer é apontar para cada um deles sucessivamente atribuindo um numeral único em uma ordem determinada; ou em termos mais técnicos, de acordo com esta visão, que nos parece bastante natural, contar consiste em de certa forma estipular uma correspondência um-a-um entre os itens sendo contados e algum número ordinal finito. Até mesmo filósofos aceitam esta noção de contagem sem problematizar

nenhum de seus aspectos (ver por exemplo Lowe (LOWE, 1997, p.626), Steiner (STEINER, 2005, p.629), Jantzen (JANTZEN, 2010)). Agora, em uma primeira consideração este parece ser um procedimento inócua, mas na verdade não é tão inocente se considerado de um ponto de vista filosófico. De fato, de acordo com alguns filósofos, quando definida deste modo ‘contagem’ assume pelo menos em princípio a possibilidade de que se possa rotular unicamente com um número ordinal cada um dos itens pertencendo à coleção finita sendo contada, uma hipótese que, se analisada com cuidado, parece cheia de consequências e pressupostos, principalmente de um ponto de vista metafísico.

Ao discutir a natureza do objetos particulares, por exemplo, Bertrand Russell argumentou que a contagem apenas faz sentido se formos capazes de *distinguir qualitativamente* as entidades sendo contadas. Obviamente, Russell está considerando que ‘contar’ é o procedimento intuitivo que descrevemos no parágrafo anterior. Para propor sua posição, Russell enuncia o que ficou conhecido na literatura como o *Princípio de Verificação*, que nas palavras de Russell nos diz o seguinte (ver Russell (RUSSELL, 1940, pp.102-103)):<sup>1</sup>

Suponha que você deseja contar uma coleção de cinco objetos A, B, C, D, E, e suponha que B e C são indistinguíveis. Segue-se que, no momento em que estiver contando B, você irá contar C também, e portanto concluirá que existem quatro objetos a serem contados. Para dizer que B e C são “realmente” dois, apesar de parecerem ser apenas um, é dizer algo que, se B e C são totalmente indistinguíveis, parece totalmente desprovido de significado.

Isto é, de acordo com este ponto de vista, rotular itens distintos com numerais distintos apenas faz sentido se cada um dos itens sendo rotulados possui alguma característica distinguidora, a diferença numérica pressupõe a diferença qualitativa. Seguindo então a proposta de Russell, poderíamos concluir que a inocente noção de contagem pressupõe uma forma bastante forte do infame *Princípio da Identidade dos Indiscerníveis* (PII). De acordo com este princípio, enunciado em sua forma contrapositiva, itens numericamente distintos sempre devem apresentar alguma diferença qualitativa, que é precisamente aquilo que Russell

---

<sup>1</sup>No original em inglês temos: Suppose you wish to count a collection of five objects A, B, C, D, E, and suppose that B and C are indistinguishable. It follows that, in the moment of counting B, you will also count C, and therefore you will conclude that there are four objects to be counted. To say that B and C are “really” two, although they seem one, is to say something which, if B and C are totally indistinguishable, seems wholly devoid of meaning.

parece estar exigindo. Na sua formulação usual, o princípio enuncia que se  $x$  e  $y$  partilham todos os seus atributos, então  $x = y$ . Muitos filósofos preferem enunciar o princípio em uma linguagem formal de segunda ordem, e com este aparato podemos escrever o princípio da seguinte forma:

$$\forall F(F(x) \leftrightarrow F(y)) \rightarrow x = y \quad (4.1)$$

com  $F$  uma variável para propriedades e  $x$  e  $y$  percorrendo particulares.

Como é bem conhecido da literatura, PII está associado muito de perto com as chamadas *teorias de feixes* da individualidade (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4), Ladyman e Bigaj (LADYMAN; BIGAJ, 2010, p.118)). Os teóricos dos feixes, como Russell era no contexto da citação que apresentamos acima, sustentam que os particulares não são nada além de feixes de propriedades; de fato, de acordo com esta teoria, os particulares são de certa forma ‘reduzidos’ às suas propriedades. Este tipo de abordagem aos particulares conta como uma forma de princípio de individuação, e para evitar que feixes distintos instanciem todas as mesmas propriedades (arruinando assim a capacidade dos feixes de individuarem algo), alguma forma do PII deve ser assumida para garantir a unidade dos feixes. Os detalhes de uma teoria de feixes não deveriam nos preocupar aqui, mas o aparente fato alegado acima de que esta concepção dos particulares juntamente com PII deveria ser assumida como um pré-requisito para contarmos coleções de entidades parece ser um tema pronto para gerar uma grande controvérsia (para os detalhes das intrincadas construções de teorias de feixes e suas distintas formulações, ver van Cleve (CLEVE, 1998), onde algumas críticas são apresentadas. Ver também o capítulo 6 para mais discussões sobre a relação de PII com ambos contagem e uma teoria de feixes).

De fato, como se a associação entre contagem e teoria de feixes não fosse controversa o suficiente, podemos levar a argumentação neste sentido ainda um passo adiante; alguns autores fazem uso de um argumento mais forte insistindo em uma linha de raciocínio similar, mas agora indo da contagem, assumida como dada, para a validade do PII. O argumento consiste em se sustentar que a mera possibilidade conceitual de se saber quantos itens existem em uma coleção também parece garantir que, como um resultado do próprio processo de contagem empregado para se alcançar este fato, acabamos por dotar cada um dos itens na coleção sendo contada com uma propriedade distinguidora: *ter atribuído a si o rótulo  $n$  no processo de contagem*. Por exemplo, em uma coleção com dois objetos, um deles terá a propriedade de ter sido rotulado 1, o outro de ter sido rotulado 2, e isto os distingue. Este

parece ser o núcleo de um argumento apresentado por van Fraassen e Peschard em (FRAASSEN; PESCHARD, 2008). De fato, o argumento aparece no trabalho destes autores como uma possível proposta contra a necessidade de se adotar teorias de conjuntos alternativas diante da falha de PII. Isto é, com este argumento pretende-se sugerir que, como nas teorias clássicas de conjuntos o PII pode ser salvo por um argumento deste tipo, então, aparentemente não há necessidade de se buscar teorias alternativas para tratar de situações em que o princípio falha, como no caso da mecânica quântica. Apesar de não ser endossado pelos autores, este argumento é considerado por eles como sendo ‘difícil de refutar’ (ver van Fraassen e Peschard (FRAASSEN; PESCHARD, 2008); Ladyman e Bigaj, por outro lado, pensam que este tipo de argumento não deve ser visto como salvando PII, pois de fato, segundo eles, simplesmente trivializa o problema, ver (LADYMAN; BIGAJ, 2010, p.118). O problema neste caso permanece quanto ao status da teoria de conjuntos de fundo, que eles admitem ser a clássica). Então, este argumento propõe que, se sabemos quantos itens existem em uma determinada situação, podemos fazer uso dos rótulos utilizados no procedimento de contagem para distinguir entre eles. Portanto, ser capaz de contar uma coleção é agora empregado para se obter a conclusão de que a contagem parece *implicar* a validade de alguma forma do PII. Este argumento, obviamente, repousa tacitamente no fato de que para coleções finitas, ao nível intuitivo, ordinais e cardinais coincidem. Isto é, tendo uma coleção com um determinado cardinal (o número de elementos), podemos contá-los e usar os rótulos atribuídos no processo de contagem para distinguir entre eles (nós passamos então para os ordinais empregados na contagem dos itens da coleção).

Como já observamos anteriormente, a linha anterior de argumentação envolvendo PII é altamente controversa, em particular pelo fato de fazer uso de uma função distinguidora dos rótulos que é no mínimo dúbia. Ainda, alguns a criticaram por ter levado muito a sério a ideia de que a contagem deve ser vista como uma atividade empírica que deve ser de alguma forma realizada. Estes autores, por outro lado, preferem que a contagem inclua também a mera possibilidade metafísica de que possamos contar e rotular pelo menos *em princípio*, não no sentido de uma atividade empírica que deve ser levada a cabo. Motivados por estas observações entre outras, estes filósofos rejeitaram a teoria de feixes e propuseram uma visão alternativa de que o fato de que uma coleção tem um cardinal bem determinado apenas pressupõe que estes itens deveriam ter algum tipo de *identidade primitiva*, ou ainda uma *essência primitiva*, e não pressupõe de forma alguma PII, nem de

forma alguma serve para salvá-lo (ver Adams (ADAMS, 1979), Jantzen (JANTZEN, 2010)). De fato, longe de salvar PII, esta visão é comumente proposta como uma solução para as dificuldades suscitadas por uma teoria de feixes, e noções tais como ‘essências primitivas’ são utilizadas como princípios de individuação em contextos nos quais contra-exemplos ao PII podem ser formulados. De acordo com esta forma de ver o princípio de individuação, itens numericamente distintos podem sim ser vistos como qualitativamente indistinguíveis, pois sua diferença numérica é garantida por suas essências primitivas, não por alguma qualidade específica. O procedimento de contagem, de acordo com este modo de ver, é entendido do mesmo modo que anteriormente, mas o processo de rotular envolvido nele não possui agora nenhum papel de individuação; de fato, diante de uma situação possível apresentando  $n$  itens qualitativamente indistinguíveis, não há necessidade de que exista alguma questão de fato que determine a questão *epistemológica* sobre qual rótulo em particular é atribuído a qual entidade, mas isto não coloca nenhuma dificuldade: já que os itens possuem identidade primitiva, podemos ter certeza de que a contagem de modo único pode ser feita pelo menos em princípio, e isto é tudo o que se exige da contagem, não que alguém deva ser capaz de realizá-la.

Agora, mesmo que ambas estas visões tratem com o problema de um modo distinto e até mesmo oposto uma da outra e considerem o papel da rotulação nos processos de contagem de modos muito diferentes, o que é mais notório é que em ambas as visões o procedimento de contagem, quando entendido de acordo com a definição clássica, parece ser completamente incompatível com uma posição muito influente acerca da ontologia da mecânica quântica, a (já bastante mencionada neste trabalho) Concepção Recebida. De fato esta concepção é bastante difundida, e conforme já apresentamos (ver também French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4) para mais discussões e referências), sustenta que as entidades com as quais a mecânica quântica trata podem ser vistas como não sendo indivíduos em qualquer sentido desta palavra (e principalmente não no sentido das teorias de feixes; ver discussão feita no capítulo 2). Esta *não-individualidade* dos itens com os quais a teoria pode ser considerada como comprometida (sob esta interpretação em particular) se manifesta em algumas características destas entidades, principalmente no fato de que as relações de identidade e diferença não fazem nenhum sentido para elas, e então, os principais traços atribuídos aos indivíduos –ser rotulado, identificado, contado – não estão disponíveis para estes objetos. A tensão que mencionamos aparece, todavia, quando observamos que é sempre possível saber quan-

tas de tais entidades (os não-indivíduos) existem em qualquer contexto dado. De fato, como veremos em breve, mais do que isto é verdade: devemos saber quantas delas existem para sermos capazes de construir o espaço de Hilbert adequado para o tratamento do sistema quântico em questão. Mas se a cardinalidade é realmente dependente de PII ou de alguma forma de essência primitiva, como podem estas duas características das entidades quânticas coexistir? Isto é, se a contagem e a atribuição de cardinalidade são analisados de acordo com a visão tradicional, como podemos sustentar que as partículas são não-indivíduos, como a Concepção Recebida faz?

Uma maneira possível de se contra-argumentar consiste em apresentarmos noções alternativas de contagem. Realmente, mesmo que nós aceitemos que a noção tradicional de contagem nos compromete com a individualidade dos itens sendo contados, podemos também acreditar que a noção tradicional de contagem é apenas uma das várias maneiras possíveis de se caracterizar este conceito, que pode inclusive não ser aplicável em todos os casos. Poderíamos sustentar que para as entidades microscópicas, como por exemplo aquelas tratadas pela mecânica quântica, já que podemos interpretá-las como sendo não-indivíduos, um procedimento de contagem diferente deveria ser empregado, um que não pressuponha nem o conceito de identidade nem a possibilidade de rotulação das entidades sendo contadas (para sugestões nestas direções, ver Tzouvaras (TZOUVARAS, 2005), French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, p.287), Domenech e Holik (DOMENECH; HOLIK, 2007)). Mas será que podemos definir uma noção razoável de “contagem” sem pressupor a identidade? Alguns sugeriram que a noção tradicional de contagem é tão básica que, se o modo como compreendemos a mecânica quântica estiver em contradição com ele, então, é a nossa interpretação da mecânica quântica que deveria ser abandonada (este argumento é apresentado em Jantzen (JANTZEN, 2010)). Então, parece que se não tivermos boas razões para sustentar que uma noção alternativa de contagem pode realmente funcionar, de acordo com esta linha de raciocínio devemos manter a noção tradicional de contagem, e consequentemente a ontologia da mecânica quântica deve ser uma ontologia compreendendo indivíduos, caso contrário, não poderíamos contá-los.

## 4.2 ROTULANDO E CONTANDO ENTIDADES QUÂNTICAS

Agora, vamos relembrar que ao apresentarmos no capítulo 2 os argumentos que tradicionalmente são avançados em favor de se considerar as entidades quânticas como sendo não-indivíduos, tivemos que começar rotulando as partículas, vetores e espaços de Hilbert. Isto é, no argumento padrão para se sustentar a não-individualidade das entidades quânticas, começamos por rotular as partículas e contá-las! Então, devemos discutir com cuidado que tipo de papel os rótulos de partículas como 1 e 2 desempenham naqueles argumentos. Obviamente, eles servem para nos garantir que estamos tratando com *duas* partículas, mas o que mais se segue daí? Bem, vamos começar com a afirmação de cardinalidade, que é nossa principal preocupação aqui. Se estivermos de acordo com a análise acima da contagem e atribuição de cardinalidade apresentada na seção 4.1, parece que o mero fato de que estamos tratando com duas partículas é o suficiente para nos garantir que ambas as partículas tem alguma forma de individualidade, seja conferida por alguma forma de teoria de feixes, seja por uma identidade primitiva. De acordo com esta análise, ainda, os rótulos são consequências simples da individualidade e do processo de contagem associado a ela. No caso dos feixes, a própria possibilidade de rotularmos está fundamentada em alguma qualidade específica que cada partícula deveria possuir para garantir a contagem; no caso da identidade primitiva, apesar de que a rotulação não desempenha um papel epistemológico, não nos dando nenhum modo de efetivamente identificar qual objeto é qual, a própria possibilidade *em princípio* é garantida metafisicamente pela identidade primitiva de cada item.

Então, assumindo esta maneira de se ver a contagem, a consequência para a Conceção Recebida é muito simples: desde o começo, o discurso sobre a não-individualidade parece mal-motivado, pois conceitualmente a própria possibilidade de falarmos de um número definido de entidades pressupõe a sua individualidade (esta é a conclusão expressa em Jantzen (JANTZEN, 2010)). De fato, a inferência parece ser tão simples que deveríamos ter sido mais céticos quando começamos a rotular as partículas para apresentar o argumento anterior sobre mecânica quântica e não-individualidade. Não tínhamos discutido anteriormente que a rotulação, como uma possibilidade metafísica, já faz as mesmas pressuposições que a contagem, *i.e.*, que as entidades rotuladas e contadas devem de alguma forma ser indivíduos? Os rótulos, como um resultado do procedimento de contagem, carregam peso metafísico se a contagem deve ser tomada em seu sentido tradicional.

Este tipo de análise já foi conduzida por Redhead e Teller em (REDHEAD; TELLER, 1991) e em (REDHEAD; TELLER, 1992). De acordo com estes autores, o primeiro ponto a ser reconhecido é que nós não rotulamos as partículas propriamente, claro, mas antes vetores representando estados para as partículas, de modo que falar em rotular partículas é apenas uma *façon de parler* para abreviar o discurso. Ainda, segundo eles, é precisamente o uso de produtos tensoriais de espaços de Hilbert rotulados para representar os espaços de estados das partículas que é inconveniente para os nossos propósitos metafísicos de nos comprometermos com não-indivíduos, ou pelo menos, com entidades que não podem propriamente receber rótulos. De fato, eles dizem, deveríamos reconhecer que a rotulação pressupõe metafisicamente o que eles chamam de uma *Individualidade Transcendental de Rotulação* (LTI abreviadamente), um princípio de individuação que dá conta do fato de que os itens os possuindo podem ser, entre outras coisas, rotulados e contados. Esta LTI é um termo genérico para fazer referência à uma teoria de feixes ou identidade primitiva de um modo genérico, sem ter que se preocupar com as idiosincrasias de cada uma destas abordagens.<sup>2</sup> Agora, Redhead e Teller sugerem que este comprometimento com LTI não significa o fim da Concepção Recebida, mas é apenas um sinal de que devemos mudar para um formalismo alternativo mais adequado para este tipo de entidades, o *Formalismo dos Espaços de Fock*, que não se baseia em rótulo, e ainda assim garante o número de partículas bem determinado em cada estado.

Mas esta sugestão, entre algumas das dificuldades que ela certamente enfrenta (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, pp.193-197) para algumas das críticas), parece nos levar de volta ao problema com o qual começamos: aparentemente não precisamos mais de rótulos, mas ainda temos um cardinal associado com estas partículas. A questão que surge então é: como esta atribuição de cardinais deve ser entendida? Se a mesma análise tradicional expressa acima for empregada, voltamos precisamente para a Individualidade Transcendental de Rotulação que Redhead e Teller gostariam de evitar com sua proposta. Parece que não é o suficiente mudar para um formalismo de espaço de Fock, devemos prestar atenção também à outra característica da

---

<sup>2</sup>De fato, Redhead e Teller se referem a teorias de feixes e a teorias de *substrato*. Esta última difere significativamente da doutrina da identidade primitiva em muitos aspectos; entre eles, poderíamos mencionar que o teórico do substrato geralmente está comprometido com alguma forma da tese de *composição ontológica*, e considera que os substratos sejam um ingrediente extra no indivíduo, enquanto que os teóricos da identidade primitiva não estão comprometidos com estes tipos de teses. Estas diferenças, todavia, não afetam nosso argumento aqui.

Individualidade Transcendental de Rotulação, aquela que nos garante que é precisamente LTI que alegadamente nos assegura que podemos contar as coleções dos objetos. Ainda, o formalismo de espaços de Fock pode ser visto como desenvolvido a partir do formalismo dos espaços de Hilbert, de modo que ele pressupõe a contagem usada na formulação deste último (no capítulo 6 veremos uma crítica adicional de Muller e Saunders, sustentando que a contagem é apenas uma consequência do aparato formal, mas é absolutamente desprovido de peso ontológico).

Como uma primeira sugestão a ser considerada contra esta dificuldade, pode ser proposto que coleções de partículas quânticas possuem apenas uma cardinalidade, mas não um número ordinal atribuído a elas (ver Toraldo di Francia (FRANCIA, 1998, p.27)). Esta proposta é interessante porque ela identifica o núcleo do problema como sendo a noção de contagem e sua consequente atribuição de um ordinal. Então, a proposta consiste em manter ambas as noções separadas. Mas, apesar de esta ser uma ideia interessante, ela ainda deixa a atribuição de cardinais sem uma explicação. Além disso, esta estratégia não parece encarar o desafio proposto pelo problema com o qual estamos tratando aqui: como atribuir cardinais sem o procedimento padrão de contagem e sem assumir alguma forma de LTI. Deixaremos a discussão deste tipo de alternativa para outra ocasião, e tentaremos tratar de cardinalidade e contagem de modo relacionado. Então, a próxima sugestão que imediatamente vem em mente é que ao invés de tentarmos negar que coleções de não-indivíduos tem alguma característica que por sua vez exigiria que eles fossem indivíduos, deveríamos fornecer uma maneira alternativa de se entender a contagem e a atribuição de cardinalidade, de modo que estas noções não estejam vinculadas com a identidade e a individualidade (Lowe (LOWE, 2003, p.77) também sugere que a separação entre a contagem e a individualidade é conceitualmente possível; de fato, sugere que para o benefício da clareza conceitual destas questões, elas **devem** ser mantidas separadas).

Uma destas propostas que nós levaremos em consideração no nosso trabalho foi avançada por Domenech e Holik em (DOMENECH; HOLIK, 2007). Estes autores trabalharam no aparato conceitual da teoria de quase-conjuntos. Vamos apresentar sua abordagem de maneira informal e discuti-la na próxima seção. Faremos também uma pequena digressão sobre algumas de suas teses concernindo o status da teoria de quase-conjuntos e a adoção da quase-cardinalidade como uma noção primitiva.

### 4.3 QUASE-CARDINAIS SEGUNDO DOMENECH E HOLIK

Em seu trabalho *A discussion on particle number and quantum indistinguishability* (ver (DOMENECH; HOLIK, 2007)),<sup>3</sup> G. Domenech e F. Holik propuseram uma definição de quase-cardinais na teoria de quase-conjuntos que trata apenas com q-sets finitos. Listamos, como se segue, aquelas que consideramos serem as três principais teses destes autores neste trabalho:

1. segundo eles, a definição que propõem mostra que, pelo menos quando tratamos apenas com q-sets finitos, não é necessário introduzirmos a noção de quase-cardinal como um símbolo primitivo obedecendo a determinados axiomas, conforme tem sido feito nas apresentações usuais da teoria (ver, por exemplo, French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.7), e também o capítulo 3). Isto é, existe uma solução alternativa ao problema concernindo a introdução de quase-cardinais na teoria  $\mathfrak{Q}$  que é mais econômica que a usual;
2. eles sugerem que a definição apresentada por eles pode ser vista como um primeiro passo na formulação de uma versão da teoria permitindo que alguns q-sets permaneçam **sem** um quase-cardinal associado. Através desses q-sets, seria possível representar alguns sistemas que ocorrem na física quântica relativista, *viz.* aqueles sem um número de partículas bem determinado. De acordo com os autores, isto poderia ser um primeiro passo para nos ajudar a superar uma inadequação da teoria  $\mathfrak{Q}$  conforme ela é formulada usualmente, já que os axiomas empregados para os quase-cardinais nos garantem que todo q-set tem um quase-cardinal, não permitindo assim a existência dentro da teoria deste tipo de sistema;
3. sua definição deveria capturar um sentido específico da noção de contagem, tomada como um procedimento físico efetivo que pode ser realizado em laboratório. Ou seja, uma das motivações para a definição vem de procedimentos que podem ser realizados fisicamente, e a ideia é que a formalização capture esta motivação.

Vamos deixar a discussão da tese 3 para o final do capítulo, porque ela trata de questões metafísicas muito interessantes que não queremos começar a introduzir nesta seção especificamente. Vamos começar

---

<sup>3</sup>Quando fizermos menção ao trabalho de Domenech e Holik sem citar nenhuma referência em particular, é a este trabalho que estaremos nos referindo.

discutindo a tese 1, que é realmente uma das grandes novidades no trabalho de Domenech e Holik e uma contribuição das mais interessantes ao estudo da teoria de quase-conjuntos e sua aplicação. Realmente, a definição da noção de quase-cardinais apresenta tantas dificuldades que uma definição, mesmo que bastante complicada, já representa um avanço significativo neste tipo de estudo. Vejamos brevemente alguns motivos para estas dificuldades.

Conforme mencionamos anteriormente diversas vezes, nas formulações usuais de  $\mathfrak{Q}$ , para garantir que todo q-set possui um quase-cardinal associado, é o procedimento padrão empregar um símbolo de função unária  $qc$  acompanhado de axiomas específicos para esta noção (por exemplo, aqueles que apresentamos no capítulo 3). Talvez esta seja a maneira mais direta e simples de se resolver o problema de *como* associar cardinalidade a q-sets contendo m-átomos como elementos. Conforme vimos anteriormente, o conceito de quase-cardinal é geralmente assumido como primitivo pois em  $\mathfrak{Q}$  não podemos empregar os procedimentos usuais de definição de cardinais, como por exemplo o padrão *à la* von Neumann, que define o cardinal de uma coleção como o menor ordinal inicial equipolente ao conjunto (ver as definições relevantes em (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1984)). Neste caso particular, para aplicarmos esta definição a um q-set contendo m-átomos indistinguíveis teríamos que ter uma boa ordem definida sobre este q-set e colocá-la em correspondência um a um com um ordinal. A primeira dificuldade em se fazer isto, conforme já foi comentado anteriormente, é que não podemos definir uma boa ordem sobre um q-set cujos elementos são m-átomos indistinguíveis, pois a própria definição de uma relação de boa ordem exigiria que o conceito de identidade estivesse definido para os elementos da coleção sendo bem ordenada, algo que não é possível para casos envolvendo m-átomos. Ainda, não podemos estipular uma correspondência um a um entre um q-set qualquer e um ordinal, pois a própria noção de correspondência um a um, além de envolver a relação de identidade na sua definição, somente pode ser introduzida razoavelmente na formulação usual de  $\mathfrak{Q}$  com a ajuda do próprio conceito de  $qc$ . Assim, já que estamos tentando definir precisamente a noção de quase-cardinalidade, ela não pode estar disponível anteriormente para nós. Como se vê, não parece haver nenhuma maneira simples de definir precisamente a noção de quase-cardinalidade e então, a afirmação de que esta noção pode ser definida mesmo diante de todas as dificuldades deve ser vista como um grande resultado.

De fato, Domenech e Holik sugerem que este tipo de abordagem ao problema pode nos fornecer mais do que uma simples solução

a um problema técnico. De acordo com eles, a introdução da quase-cardinalidade como uma noção primitiva em  $\mathfrak{Q}$  acaba por introduzir uma limitação na teoria: existem, na teoria quântica, alguns agregados de partículas que não podem ser representados na teoria de quase-conjuntos quando ela é formulada deste modo (ver (DOMENECH; HOLIK, 2007, pp.858-859)). Mais precisamente, a afirmação é que a introdução do conceito de quase-cardinal como um conceito primitivo acaba por dotar **todos** os q-sets com um quase-cardinal, e é precisamente esta característica que acaba por limitar o poder representativo da teoria de quase-conjuntos, pois impede que sejam representados sistemas de partículas cujo número de partículas não está bem definido, e isto pela simples razão de que q-sets sem um cardinal associado são impossíveis dentro da teoria formulada deste modo. O exemplo paradigmático de uma situação em que isto ocorre são os casos de sistemas quânticos que não estão em um *autoestado* do operador número de partículas, uma situação bastante comum na mecânica quântica relativista. Então, de acordo com Domenech e Holik, garantir que todo q-set possui um quase-cardinal é ir longe demais quando se tem em mente os fundamentos da física. Seguindo esta discussão, segue-se que é razoável a grande importância atribuída para a tese 2, e podemos ver claramente sua relação com a tese 1: já que queremos que alguns q-sets permaneçam sem um quase-cardinal associado, e já que isto parece impossível de se obter quando adotamos a noção de quase-cardinal como noção primitiva na teoria de quase-conjuntos (*mas*, ver adiante), uma solução razoável parece consistir em buscarmos *definir* a noção de quase-cardinal, fazendo isto de modo que alguns q-sets falhem em ter uma quantidade bem definida de elementos. Basicamente, junto com a tese 3 exposta acima, este é o programa desenvolvido em (DOMENECH; HOLIK, 2007).

Antes de considerarmos a proposta feita pelos autores para desenvolver alguns aspectos deste de programa de pesquisa e começar a apresentar soluções para algumas das características de  $\mathfrak{Q}$  que podem ser indesejáveis em alguns contextos, é interessante mencionar aqui que a principal motivação para os primeiros desenvolvimentos da teoria de quase-conjuntos sempre foi a mecânica quântica não-relativista. Claro, French e Krause também já ensaiaram os primeiros passos para o tratamento da teoria quântica de campos dentro do aparato conceitual da teoria de quase conjuntos em (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.9). Mas, apesar disso, foi a teoria não-relativista que forneceu as primeiras motivações para o desenvolvimento dos quase-conjuntos. Então, mesmo quando desejamos tentar acomodar em  $\mathfrak{Q}$  algumas das características da teoria quântica de campos, devemos lembrar que este é praticamente

um novo projeto de pesquisa, que deverá fazer as modificações convenientes na teoria  $\mathfrak{Q}$  que, como dissemos, não foi projetada tendo-se estes objetivos em mente. Certamente, Domenech e Holik estão certos em afirmar que algumas modificações devem ser buscadas caso desejemos tratar adequadamente de sistemas da teoria quântica relativista. Todavia, como dissemos, isto não deve ser imputado como um defeito da teoria pois, a princípio, ela não foi desenvolvida para tratar deste tipo de sistemas.

Domenech e Holik propõem a introdução do conceito de quase-cardinais como uma noção definida, sem que necessitemos considerar esta noção como um símbolo primitivo. Vejamos agora, informalmente, como eles motivam a sua definição e como podemos explicar sem muito rigor os procedimentos que serão formalizados posteriormente na teoria de quase-conjuntos. Esta discussão nos interessa pois, em particular, ela está diretamente relacionada com o problema com o qual começamos, qual seja, como propor uma definição de contagem que não pressuponha a identidade. O núcleo da definição proposta por estes autores é baseado na ideia de que podemos apresentar um procedimento de acordo com o qual é possível eliminar elementos de uma coleção um por um, até que a coleção esteja vazia no caso em que seja finita. Isto é, dado um q-set não-vazio  $A$ , podemos, usando os recursos de  $\mathfrak{Q}$  menos  $qc$  (e mais dois axiomas específicos introduzidos por eles), tirar de  $A$  aquilo que contaria intuitivamente como um *único* elemento de  $A$ , e depois disso verificar se o q-set obtido deste modo, que vamos chamar  $A'$ , está vazio ou não. Se  $A'$  é o q-set vazio, sabemos então que  $A$  tinha apenas um elemento. Por outro lado, se  $A'$  não é vazio, basta repetirmos o procedimento tirando mais um elemento dele. Mais uma vez, verificamos se o q-set obtido deste modo, chame de  $A''$ , é ou não vazio. Se for vazio, paramos por aqui, e sabemos que  $A$  tinha apenas dois elementos; se não for vazio, prosseguimos eliminando mais um elemento. O procedimento segue deste modo. Em alguns casos, para alguns q-sets, o procedimento eventualmente chegará no q-set vazio em um número finito de repetições destes passos, mas em outros casos o procedimento poderá ser repetido um número indefinido de vezes e nunca alcançamos o q-set vazio. Duas possibilidades resultam daí: o q-set considerado pode ser esvaziado em um número finito de passos, e dizemos que ele é finito por definição, ou então não podemos esvaziá-lo através destes procedimentos, e dizemos que o q-set é infinito.

Vamos tratar de cada um dos casos separadamente. Na primeira possibilidade, aplicamos a um q-set  $A$  um procedimento que por hipótese eventualmente atingirá o q-set vazio, nos dando, de acordo

com a terminologia de Domenech e Holik, uma *cadeia descendente* do seguinte tipo:

$$\emptyset \subseteq \dots \subseteq A'' \subseteq A' \subseteq A,$$

onde  $A'$  denota o q-set que resulta de  $A$  ao eliminarmos dele “apenas um” elemento ( $A'$  é chamado um *descendente direto* de  $A$  na terminologia dos autores), e o mesmo vale para  $A''$  com relação a  $A'$ , etc. Na segunda possibilidade, a cadeia descendente será tal que, não importa quantos elementos de  $A$  retiremos dos q-sets formando cada membro da cadeia, nós nunca alcançaremos o q-set vazio em qualquer número finito de passos, e as cadeias terão a seguinte forma:

$$\dots \subseteq A'' \subseteq A' \subseteq A.$$

Nestes casos, o q-set não terá nenhum quase-cardinal associado a ele.

Para as cadeias descendentes do primeiro tipo, aquelas que atingem o q-set vazio em um número finito de passos, os autores mostram como podemos definir uma q-função para “contar” o número de passos necessários para realizar todo o procedimento. A ideia básica é que podemos associar um número natural a cada elemento da cadeia descendente, e esta associação vai satisfazer a condição de que algum número natural  $n$  será atribuído a  $A$ , o número  $n - 1$  será atribuído a  $A'$ , o descendente direto de  $A$ , e assim por diante, até atribuírmos 0 ao q-set vazio. Pode ser demonstrado que este número natural, nos casos em que há um, é de fato único. Ainda, notamos que a definição de q-set finito apresentada por estes autores repousa essencialmente nesta particular noção de enumeração: os q-sets finitos são aqueles para os quais existe um número natural que pode ser utilizado para contar os passos de uma cadeia descendente originada neste q-set que chega ao q-set vazio. Como veremos, dado que este número é único, também será, por definição, o quase-cardinal do q-set mencionado.

Como uma primeira consequência desta definição, teremos que todo q-set finito (no sentido especificado no parágrafo anterior) terá um quase-cardinal finito associado a ele, e que alguns q-sets permanecem sem um quase-cardinal associado. Será que os q-sets desta última categoria poderiam ser candidatos a representar sistemas sem um número de partículas bem definido? Bem, para considerar esta questão, existe uma característica importante da definição proposta por Domenech e Holik que merece ser mencionada: os q-sets que permanecem sem um quase-cardinal associado, de acordo com a definição destes autores, são precisamente aqueles que não são finitos. Devemos notar que Domenech e Holik reconhecem este fato, e não afirmam que a definição apre-

sentada por eles possa contribuir com uma solução satisfatória para a dificuldade apontada na tese 2. De fato, há boas razões para se seguir Domenech e Holik neste aspecto e não aceitar uma saída tão simples: se considerarmos os  $q$ -sets que não possuem um quase-cardinal associado como representando sistemas físicos para os quais o conceito de número de partículas não está bem definido, terminaremos sabendo apenas que tais coleções são todas de fato *infinitas*. Então, intuitivamente, conhecemos algumas informações sobre sua possível cardinalidade, mesmo que não nos seja permitido falar sobre ela; em particular, sabemos que ela deve ser pelo menos  $\aleph_0$ . Portanto, não é o caso que o quase-cardinal daqueles  $q$ -sets realmente não está bem definido, ele simplesmente não está sendo tratado por esta definição, permanece não especificado. Este tipo de situação pode ser compreendido de modo simples se mencionarmos um caso análogo clássico: ao trabalharmos em ZFC, nada nos impede de definirmos a noção de cardinal apenas para conjuntos finitos. Não se seguiria daí, sob tais circunstâncias, que para coleções infinitas o cardinal não está bem definido, ele simplesmente *não foi* definido. Nos parece que o mesmo vale no caso da definição de Domenech e Holik em  $\Omega$ . Então, como estes autores sugerem, estudos mais aprofundados poderiam ser realizados para ampliar esta ideia também no caso de  $q$ -sets infinitos, assim como para introduzir em  $\Omega$  coleções sem um cardinal bem definido.

Agora, considerando a principal ideia subjacente à definição de Domenech e Holik, uma de suas principais virtudes concerne o fato de que, pelo menos para o processo particular de se esvaziar um  $q$ -set conforme descrito por eles, não importa qual elemento específico está sendo tirado em cada passo particular, pois pelo menos idealmente, o número de elementos do  $q$ -set não depende da ordem em que cada elemento é retirado e nem da identificação de qual elemento está sendo retirado em um passo particular. Assim, a impossibilidade em princípio de identificação de alguns elementos não vai nos impedir de contar os  $q$ -sets cujos elementos são indistinguíveis. Obviamente, esta ideia reflete algum tipo de prática que poderia ser realizada em um laboratório, onde poderíamos empregar um procedimento específico para contar o número de elementos de uma coleção sem sermos capazes de os identificar. Para darmos um exemplo de um tal procedimento, consideramos o caso no qual desejamos contar quantos elétrons possui um átomo de Hélio. Podemos colocar o átomo em uma câmara de nuvens e ionizá-lo com radiação; o resultado será um rastro de um íon e outro de um elétron. Repetindo o procedimento, veremos mais uma vez um rastro de um íon e outro de um elétron. Note que não importa qual elétron foi

o primeiro e qual foi o segundo, nós não podemos identificá-los antes do procedimento, eliminá-los e checar sua identidade conforme o procedimento é aplicado, mas, todavia, podemos determinar quantos deles há (veja também a discussão (DOMENECH; HOLIK, 2007, p.867)).

Apesar da ideia engenhosa que está por trás do aparato técnico utilizado nesta definição, para que se possa garantir todos os resultados desejados necessitamos adotar dois postulados adicionais específicos. Então, apesar do fato de que a definição proposta é mais econômica em termos de noções primitivas, pois introduz a quase-cardinalidade como um conceito definido, a abordagem específica de Domenech e Holik ainda exige a introdução de axiomas específicos adicionais, pois sem eles os resultados desejados não podem ser obtidos e o conceito de quase-cardinal não pode ser introduzido adequadamente. Este parece ser um dos poucos pontos fracos da definição, que acaba por impor um enfraquecimento da tese 1. Nós vamos adiar para a seção 4.6 uma discussão e formulação detalhada dos axiomas introduzidos por estes autores, mencionando-os agora apenas para considerar sua natureza distinta dos outros axiomas da teoria de quase-conjuntos (e para fundamentar a afirmação de Domenech e Holik de que aparentemente, não podem ser derivados em  $\mathfrak{Q}$  sem que já tenhamos o conceito de cardinalidade).

O primeiro axioma nos garante a existência de cadeias descendentes, pelo menos uma para cada q-set não-vazio (ver (DOMENECH; HOLIK, 2007, p.868)), não importando se é finito ou infinito. De fato, não é fácil de ver como este axioma poderia ser provado em  $\mathfrak{Q}$  para q-sets em geral sem os axiomas para quase-cardinal. Como se pode ver, este é um enunciado de existência de caráter não-constructivo, garantindo-nos a existência de um q-set (a cadeia descendente) sem especificar como podemos obtê-lo. Há ainda um segundo axioma, adicionado a  $\mathfrak{Q}$  para garantir que, dados q-sets finitos  $x$  e  $y$  tais que  $x \equiv y$ , se  $x \subseteq y$ , então  $x$  é igual a  $y$ , mas se por outro lado  $y \subseteq x$ , então  $x$  é igual a  $y$  (ver (DOMENECH; HOLIK, 2007, p.869)). Este último axioma serve para garantir que, conforme procedemos eliminando os elementos de um q-set  $A$ , poderemos sempre distinguir um q-set de seu descendente direto. Mais adiante, apresentaremos uma versão formal de ambos os axiomas, escritos na linguagem de  $\mathfrak{Q}$ . Neste momento os apresentamos apenas informalmente, para motivar a definição de quase-cardinal de Domenech e Holik e discutir seu papel nos fundamentos da teoria de quase-conjuntos.

Ainda considerando este último ponto, é interessante considerar as motivações para se adotar estes axiomas adicionais. Isto é, quais são

as razões que temos para justificar a adição daqueles enunciados como axiomas em nossa teoria de quase-conjuntos. A primeira razão que poderíamos propor, obviamente, é que sem os referidos axiomas, aparentemente, não podemos prosseguir e enunciar a definição de quase-cardinal finito de acordo com a abordagem de Domenech e Holik. Mas, de um ponto de vista fundacional, a introdução de novos axiomas em uma teoria, e em particular axiomas postulando de forma não-constructiva a existência de alguma coleção, deve ser motivada de alguma forma, e devemos mostrar que a adoção dos axiomas extra é um acréscimo razoável e frutífero aos axiomas já adotados na teoria (ver SHOENFIELD, 1977) para uma motivação para os axiomas de ZFC). No caso da teoria de quase-conjuntos, gostaríamos de saber, por exemplo, se os novos axiomas propostos podem nos ajudar a entender o universo quase-conjuntista intuitivamente descrito pelos axiomas já aceitos, ou ainda se eles podem nos ajudar a resolver algum problema importante que não pode ser resolvido adequadamente apenas com a ajuda dos axiomas já constantes na teoria. Podemos, então, perguntar pelas razões para se adotar como um axioma o enunciado garantindo que para cada  $q$ -set não-vazio existe pelo menos uma cadeia descendente (o primeiro axioma de Domenech e Holik), e como a adoção desse enunciado pode nos ajudar a entender, por exemplo, a noção de quase-cardinal.

A questão crucial, então, parece ser a seguinte: além de serem úteis para a definição de quase-cardinais finitos, há algo mais que pode ser feito com os axiomas de Domenech e Holik, e que nos ajudaria a motivar sua adoção como novos axiomas permanentes para  $\Omega$ ? Como poderíamos justificar a sua adoção como postulados permanentes da teoria? Até o momento, estas são perguntas que não se pode responder conclusivamente, pois estudos adicionais ainda precisam ser feitos para se investigar que tipo de novos resultados seriam obtidos com estes axiomas. Como dissemos anteriormente, a primeira razão que vem em mente é que os novos postulados nos permitem definir o conceito de quase-cardinal finito. Entretanto, alguém poderia apresentar um contra-argumento, enunciando que esta mesma ideia poderia ser utilizada para justificar a adoção dos axiomas para quase-cardinais, aqueles empregados na teoria quando ela é formulada tendo este conceito como primitivo, já que eles nos permitem até mesmo deduzir fatos sobre as cadeias descendentes postuladas por Domenech e Holik. Além disso, poderia ser apresentado o argumento de que assumir a noção de quase-cardinal como primitiva possui uma vantagem, pois neste caso não precisamos desviar o desenvolvimento da teoria através de noções como cadeias descendentes e descendentes diretos para que

sejamos capazes de operar com quase-cardinais, podemos ir direto ao ponto. Como uma segunda razão favorecendo os axiomas de Domenech e Holik, poderíamos argumentar que são de fato enunciados plausíveis; fazem completo sentido no contexto da construção proposta por estes autores e parecem inócuos com relação às outras partes já bem estabelecidas da teoria. Mas, novamente, olhando a partir do outro lado, se a plausibilidade é o que realmente interessa, devemos conceder que os axiomas que foram originalmente propostos para o conceito de quase-cardinal também são plausíveis. Eles generalizam propriedades bem conhecidas dos cardinais, de modo que então também temos boas razões para adotá-los.

Uma maneira interessante de se responder a este problema consiste em deixar em segundo plano as motivações puramente quase-conjuntistas e lançar nosso olhar para aspectos da prática do físico. Deste modo, podemos ganhar alguns esclarecimentos acerca dos axiomas de Domenech e Holik e motivá-los como captando alguns destes aspectos. O axioma das cadeias descendentes, por exemplo, garante que sempre existe uma cadeia descendente para qualquer  $q$ -set. Isto refletiria o fato de que na prática sempre podemos efetuar o já mencionado processo de ionização e eliminar os elétrons de um átomo, por exemplo, um a um. O segundo axioma, por sua vez, nos garante que neste processo, se duas etapas neste tipo de contagem são indistinguíveis, então, são de fato a mesma etapa. Isto é, o fato de termos eliminado um elemento em determinado momento deve servir para distinguir entre antes da eliminação e depois. Assim, a motivação para os axiomas extras poderia ser vista como oriunda da própria física e da prática do físico. Isto se coaduna muito bem com uma parte do desenvolvimento da matemática atual, que busca inspiração na física. Todavia, como dissemos antes, parece que muito mais pode e deve ser dito sobre este tópico, os fundamentos da teoria de quase-conjuntos precisam ser mais profundamente investigados se desejamos ter uma melhor compreensão do impacto destes axiomas na teoria e se queremos tirar maior proveito da presença deles. Na seção 4.6 trataremos de algumas destas questões quando restritos a  $q$ -sets finitos, e mostraremos que os enunciados utilizados por Domenech e Holik como axiomas podem ser derivados como teoremas de  $\mathfrak{Q}$  neste caso particular. A discussão do caso geral, todavia, deixamos para outra ocasião.

#### 4.4 QUASE-CARDINAIS FINITOS

Vamos agora propor uma definição de quase-cardinais finitos em  $\Omega$ . A principal motivação para a definição seguinte, conforme já dissemos, vem da ideia de que podemos intuitivamente contar o número de elementos de uma coleção finita através um procedimento muito simples: seguindo Domenech e Holik, eliminamos os membros da coleção um por vez, e contamos o número de vezes que este procedimento é repetido até que a coleção em questão esteja vazia. Este número é o número de elementos originalmente na coleção e, então, podemos razoavelmente dizer que é o seu cardinal. Em princípio, a identificação dos elementos sendo tirados da coleção não precisa desempenhar nenhum papel neste processo, e, como mostraremos, ele pode ser formalizado na teoria de quase-conjuntos para coleções de m-átomos, isto é, coleções de objetos para os quais identidade e diferença não estejam definidos. Vamos ver agora como isto pode ser feito.

Em primeiro lugar, enunciaremos o axioma da escolha na formulação que utilizaremos nesta seção:

**Axioma 4.1** (AE). *Se  $A$  é um  $q$ -set cujos elementos são  $q$ -sets não-vazios, então existe uma  $q$ -função  $f$  tal que para todo  $B \in A$ ,  $f(B) \in B$*

Segue-se da definição de  $q$ -função que para qualquer  $B \in A$  cujos elementos são m-átomos indiscerníveis a  $q$ -função escolha não irá especificar um único e bem definido elemento de  $B$ .

Agora, já que bijeções conforme são definidas usualmente não estão disponíveis para nós, a definição tradicional de coleção finita como sendo aquelas coleções para as quais existe uma correspondência um-a-um com algum número natural não está disponível para nós também. Felizmente nós temos uma alternativa adequada para nossos propósitos, dada por Tarski. Precisamos apenas de uma definição prévia:

**Definição 4.1.** *Dado um  $q$ -set  $B$  cujos elementos são  $q$ -sets, chamamos um elemento  $A$  de  $B$   $\subset$ -minimal se  $\forall C(C \in B \rightarrow \neg(C \subset A))$ .*

Esta definição se aplica a  $q$ -sets cujos elementos são  $q$ -sets apenas; nenhum m-átomo está envolvido neste caso.

**Definição 4.2.** *Um  $q$ -set  $A$  é finito no sentido de Tarski se toda coleção não-vazia de subqsets de  $A$  possui um elemento  $\subset$ -minimal.*

É importante perceber que podemos falar de  $q$ -sets finitos, mesmo de  $q$ -sets cujos elementos são m-átomos indistinguíveis, sem ter que

empregar a definição usual na qual se faz uso de uma função um-a-um entre números naturais e os elementos de uma coleção. Conforme apresentamos acima, a definição usual de contagem e a definição usual de finitude estão ligadas estritamente, e ambas fazem uso essencial da noção de identidade. Finitude ao estilo de Tarski nos ajuda a evitar o uso da identidade ao estipularmos os q-sets finitos que deverão ser contados. No que se segue, quando falarmos sobre q-sets finitos, estaremos sempre nos referindo a finitude no estilo Tarski, a menos que o contrário seja dito explicitamente.

O próximo ponto importante é a definição de unitário forte de qualquer item  $A$  em  $\mathfrak{Q}$ , que nós denotaremos novamente por  $\langle A \rangle$ . Apresentaremos a definição aqui novamente apenas para manter esta seção auto-contida.

### Definição 4.3.

1. Dado qualquer objeto  $A$ , chamamos  $S_A$  ao q-set  $[S \in \mathcal{P}([A]) : A \in S]$  (aqui,  $\mathcal{P}$  denota a operação de q-set potência);
2.  $\langle A \rangle =_{def} \bigcap_{t \in S_A} t$ .

Nas apresentações usuais da teoria de quase-conjuntos a noção de unitário forte é frequentemente associada com o conceito de quase-cardinal, sendo até mesmo definida muitas vezes em termos desta noção, isto é, o unitário forte de  $A$  é um q-set com apenas um elemento indistinguível de  $A$  (novamente, se  $A$  é um m-átomo, não podemos provar que o unitário forte de  $A$  é o próprio  $A$ ). Já que não estamos tomando o símbolo de quase-cardinal como primitivo, definimos a noção de unitário forte como acima sem apelo aos quase-cardinais e, como Domenech e Holik argumentaram (ver (DOMENECH; HOLIK, 2007)), esta noção incorpora o que considerariamos intuitivamente como um q-set com apenas um elemento. Então, sem usar o conceito de cardinal, o unitário forte formaliza a ideia intuitiva de uma coleção possuindo apenas um elemento.

O próximo passo é a definição de uma função que retire os elementos de um q-set, e mais, que o faça retirando aquilo que intuitivamente considerariamos ser apenas um elemento a cada vez que a função em questão é aplicada. Vamos chamar esta função de *função subtração*. Dado um q-set finito  $A$ , por AE existe uma função escolha  $g$  para  $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ , onde  $\setminus$  denota a operação de diferença entre q-sets. Agora, a função subtração  $h$  de  $\mathcal{P}(A)$  para  $\mathcal{P}(A)$  pode ser definida como se segue:

### Definição 4.4.

1. Se  $B$  não é vazio, então  $h(B) = B \setminus \langle g(B) \rangle$ ;
2. Se  $B$  é vazio, então  $h(B) = \emptyset$ .

Falando intuitivamente,  $h$  tira um elemento de qualquer subqset de  $A$ , o que resulta em outro subqset de  $A$  com um elemento a menos do que a coleção original sobre a qual aplicamos a operação. Nos casos em que aplicamos a função sobre o q-set vazio, como não há nada para ser retirado, a função resulta novamente no q-set vazio. É interessante nos lembrarmos que estamos falando apenas intuitivamente que tiramos “apenas um” elemento de cada vez, pois uma prova rigorosa deste fato iria exigir o conceito de cardinal já definido. Uma prova parcial pode ser dada para os elementos clássicos da teoria de quase-conjuntos, já que para eles temos a definição clássica de cardinal e através de sua aplicação podemos obter o resultado desejado. Mais adiante, com nossa definição de cardinal poderemos também mostrar este resultado.

Devemos nos lembrar ainda que  $\mathcal{P}(A)$  é um q-set cujos elementos também são q-sets, e deste modo o conceito de identidade está definido para ele (pois está definido para q-sets), e assim o teorema da recursão poderá ser aplicado. Definiremos por recursão uma q-função  $f$  de  $\omega$  em  $\mathcal{P}(A)$ :

**Definição 4.5.**

1.  $f(0) = A$ ;
2.  $f(n + 1) = h(f(n))$ .

Podemos sempre ter certeza que a sequência definida deste modo irá sempre chegar no q-set vazio para algum  $n \in \omega$ , pois em caso contrário teríamos uma coleção de subqsets de  $A$  sem um elemento  $\subset$ -minimal, contradizendo assim o fato de que  $A$  é finito no sentido de Tarski. Então, intuitivamente falando, qualquer q-set finito terá apenas um número finito de estágios no processo de se “eliminar” seus elementos e chegar a ficar vazio. Dada esta situação, achamos plausível definir o cardinal de um q-set finito como o menor número de passos em que atingimos o q-set vazio.

**Definição 4.6.** *O cardinal de  $A$ , denotado  $qc(A)$ , é o menor número natural  $n$  tal que  $f(n) = \emptyset$ .*

Agora, devemos notar que a q-função  $f$  foi definida com a ajuda da noção de q-função subtração  $h$ , e está última por sua vez foi definida com o uso de uma q-função escolha  $g$ . Nossa próxima tarefa é mostrar

que faz sentido falar de um único cardinal de  $A$ , isto é, dadas  $q$ -funções escolha  $g_1$  e  $g_2$  para  $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ , não teremos resultados diferentes  $qc_1(A)$  e  $qc_2(A)$  definidos respectivamente com estas funções. Isto é o que vamos fazer agora.

Sejam  $g_1$  e  $g_2$  funções escolha para  $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ , e sejam  $h_1$  e  $h_2$  suas respectivas funções subtração. Pelo teorema da recursão podemos definir como acima as funções  $f_1$  e  $f_2$  de  $\omega$  para  $\mathcal{P}(A)$ . Temos que mostrar que se  $qc_1(A) = n$  e  $qc_2(A) = m$ , então  $n = m$ , isto é, o resultado é independente da ordem em que tiramos os elementos de  $A$ . Para o quase-conjunto vazio este resultado pode ser estabelecido diretamente.

**Lema 4.1.** *Se  $A = \emptyset$ , então  $qc_1(A) = \emptyset = qc_2(A)$ .*

*Prova:* Se  $A$  é vazio, por definição  $f_1(0) = A = \emptyset$  e  $f_2(0) = A = \emptyset$ , de onde temos que  $qc_1(A) = qc_2(A)$ . ■

Agora, suponha que  $A$  é não-vazio. Pelo axioma da separação podemos obter de  $\mathcal{P}(A)$  os seguintes  $q$ -sets:

1.  $C =_{def} [\langle g_1(f_1(t)) \rangle : 0 \leq t \leq n]$ ;
2.  $D =_{def} [\langle g_2(f_2(t)) \rangle : 0 \leq t \leq m]$ .

Devemos lembrar que a identidade aqui é sempre a *identidade extensional*, conforme definida no capítulo 3.

**Lema 4.2.**  $\bigcup C = A$ .

*Prova:*  $x \in \bigcup C \rightarrow x \in A$  é imediato. Agora, para mostrar a outra direção suponha que  $x \in A$  mas que não é o caso que  $x \in \bigcup C$ . Note que  $x \in f_1(0) = A$  e que não ocorre que  $x \in f_1(n) = \emptyset$ . Tome o menor  $k$  tal que  $x$  não está em  $f_1(k)$ . Note também que  $k \leq n$ , e então  $x \in f_1(k-1)$ . Mas  $f_1(k) = h_1(f_1(k-1)) = f_1(k-1) \setminus \langle g_1(f_1(k-1)) \rangle$ . Suponha que não é o caso que  $x \in \langle g_1(f_1(k-1)) \rangle$ , então  $x \in f_1(k)$ , o que é absurdo. Então,  $x \in \bigcup C$ . Isto nos dá o resultado desejado. ■

**Lema 4.3.**  $\bigcup D = A$ .

*Prova:* Adaptação simples do resultado anterior.

**Lema 4.4.** Para  $t \neq k$ , com  $t < k \leq n$ , temos que  $\langle g_1(f_1(t)) \rangle \cap \langle g_1(f_1(k)) \rangle = \emptyset$ .

*Prova:* Note que  $f_1(k) \subseteq f_1(t+1)$  e que  $g_1(f_1(t)) \cap f_1(t+1) = \emptyset$ , mas  $\langle g_1(f_1(k)) \rangle \subseteq f_1(k) \subseteq f_1(t+1)$ , e então os  $q$ -sets mencionados não possuem elementos em comum. ■

**Lema 4.5.** Para  $t \neq k$ , com  $t < k \leq m$ , temos que  $\langle g_2(f_2(t)) \rangle \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle = \emptyset$ .

*Prova:* Adaptação simples do resultado anterior.

**Lema 4.6.**  $[x \in C : \forall y \in D(x \cap y) = \emptyset] = \emptyset$ .

*Prova:* Suponha que algum  $x$  pertence a este  $q$ -set. Então, para algum  $k \leq n$  nós temos que  $x = \langle g_1(f_1(k)) \rangle$ . Já que  $\langle g_1(f_1(k)) \rangle \subseteq A = \bigcup D$  (pelo lema 3.3) existe pelo menos um  $y \in D$  tal que  $x \cap y$  é não vazio, contradizendo a hipótese. ■

**Lema 4.7.**  $[x \in D : \forall y \in C(x \cap y) = \emptyset] = \emptyset$ .

*Prova:* Adaptação do resultado anterior.

**Lema 4.8.**  $\forall x \in C, \exists y \in D(x \cap y) \neq \emptyset$ .

*Prova:* Segue-se do lema 4.6. ■

**Lema 4.9.**  $\forall x \in D, \exists y \in C(x \cap y) \neq \emptyset$ .

*Prova:* Segue-se do lema 4.7. ■

Usaremos também o seguinte lema, tirado de (DOMENECH; HO-LIK, 2007, p.865), onde aparece como proposição 4.4.

**Lema 4.10.** Se  $y \in \mathcal{P}(\langle x \rangle)$ , então  $y = \emptyset$  ou  $y = \langle x \rangle$ .

*Prova:* Seja  $X$  um  $q$ -set tal que  $x \in X$ , e considere  $y \in \mathcal{P}(\langle x \rangle)$ , de onde concluímos em particular que  $y$  é um  $q$ -set. Da lógica subjacente sabemos em particular que  $(x \in y \vee \neg(x \in y))$ . Vamos considerar o primeiro caso. Já que  $y \subseteq \langle x \rangle$ , então  $y \subseteq X$ , e já que por hipótese temos  $x \in y$ , então  $y \in S_x$ , e pela definição de  $\langle x \rangle$  temos então que  $\langle x \rangle \subseteq y$ , e então,  $\langle x \rangle = y$ . Para o segundo caso, já que  $\neg(x \in y)$ , então  $x \in \langle x \rangle \setminus y \subseteq \langle x \rangle \subseteq X$ , de onde temos em particular que  $\langle x \rangle \setminus y \in S_x$ , e disto segue-se que  $\langle x \rangle \subseteq \langle x \rangle \setminus y$ , e então  $\langle x \rangle = \langle x \rangle \setminus y$ . Se  $y$  não fosse vazio, teríamos que existe pelo menos um  $z$  tal que  $z \in y$ . Por hipótese temos  $y \subseteq \langle x \rangle$ , de onde se segue que  $z \in \langle x \rangle$ , mas, como nós vimos,  $\langle x \rangle = \langle x \rangle \setminus y$ , e então  $z \in \langle x \rangle \setminus y$ , isto é,  $\neg(z \in y)$ , o que é absurdo. Então,  $y = \emptyset$ . ■

**Lema 4.11.** Para  $x \in C$ , se  $u \leq m$ ,  $k \leq m$  e  $u \neq k$ , então não é o caso que  $x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle \neq \emptyset$  e  $x \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle \neq \emptyset$ .

*Prova:* Se  $x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle = \emptyset$  e  $x \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle = \emptyset$  então não há nada mais a se fazer. Lembre-se que  $x = \langle g_1(f_1(t)) \rangle \neq \emptyset$ , para algum  $t \leq n$ . Vamos supor que  $x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle \neq \emptyset$ . Pelo lema 4.5,  $\langle g_2(f_2(u)) \rangle \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle = \emptyset$  quando  $k \neq u$ . Já que  $z =_{def} x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle \neq \emptyset$  temos então em particular que  $z \subseteq x$  e pelo lema anterior  $z = x$ . Se  $w =_{def} x \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle \neq \emptyset$  também segue-se do lema anterior que  $w = x$ . Agora

note que  $w \cap z = (x \cap \langle g_2(f_2(u)) \rangle) \cap (x \cap \langle g_2(f_2(k)) \rangle) = x \cap x = x = \emptyset$ ,  
o que é absurdo. ■

**Lema 4.12.** *Para  $x \in D$ , se  $u \leq n$ ,  $k \leq n$  e  $u \neq k$ , então não é o caso que  $x \cap \langle g_1(f_1(u)) \rangle \neq \emptyset$  e  $x \cap \langle g_1(f_1(k)) \rangle \neq \emptyset$ .*

**Prova:** Adaptação da prova anterior.

**Teorema 4.1.** *Dado  $qc_1(A)$  e  $qc_2(A)$  definidos como acima, temos que  $qc_1(A) = qc_2(A)$ , isto é,  $n = m$ .*

**Prova:** Pelos lemas 4.8 e 4.11 existe para cada  $x \in C$  apenas um  $y \in D$  tal que  $x \cap y \neq \emptyset$ , isto é,  $n \leq m$ , e pelos lemas 4.9 e 4.12 temos para cada  $y \in D$  apenas um  $x \in C$  tal que  $x \cap y \neq \emptyset$ , isto é,  $m \leq n$ , de onde se segue que  $m = n$ . ■

Tendo provado este teorema, nós garantimos o resultado desejado, qual seja, que o cardinal de um q-set finito é independente da função escolha particular utilizada na definição da função subtração. Chamaremos agora de *função contagem* à q-função  $f$  dada na definição de cardinal acima quando esta é restrita ao menor  $n \in \omega$  tal que  $f(n) = 0$ . Com esta definição em mente, podemos estabelecer o cardinal de um q-set finito ao apresentarmos para ele uma função contagem adequada. No caso de q-sets satisfazendo ao predicado  $Z$ , em muitos casos podemos facilmente apresentar uma função contagem adequada para seus subqsets, facilitando assim a demonstração de muitos resultados, como poderemos verificar no seguinte teorema. Como apresentamos no capítulo 3 por definição, para um q-set clássico  $A$ , vamos denotar por  $card(A)$  o cardinal de  $A$  conforme este é definido na parte clássica da teoria de quase-conjuntos, isto é, definido seguindo a definição proposta por von Neumann como o menor ordinal equipolente a  $A$  e não equipolente a nenhum ordinal menor.

**Teorema 4.2.** *Dado  $n \in \omega$ ,  $qc(n) = n = card(n)$ .*

**Prova:** Tome como q-função escolha  $u(B) =$  o maior número natural pertencendo a  $B$  ( $B$  é finito). A função contagem correspondente é dada por  $h(B) = B \setminus \langle u(B) \rangle$ . Em particular, se  $B$  é um número natural, segue-se dessas definições que  $h(B) = B - 1$ , se  $B \neq 0$ . Então, por definição:  $f(0) = n$ , e  $f(k + 1) = h(f(k))$ . Temos da observação anterior que em particular  $f(n) = n - n = 0 = \emptyset$ . Se  $n$  não fosse o menor número ara o qual isto ocorre, então haveria algum  $k \in \omega$  tal que  $k < n$  e  $f(k) = 0$ , isto é,  $n - k = 0$ , o que é absurdo. ■

Podemos empregar a estratégia por trás da prova deste último teorema para mostrar que para qualquer q-set finito  $A$  satisfazendo  $Z$ , o cardinal de  $A$  conforme definido acima coincide com o seu cardinal

conforme sua definição *à la* von Neumann. Então, a contagem dos objetos dada aqui fornece os mesmos resultados que o procedimento usual quando aplicada a objetos clássicos de  $\Omega$ .

**Teorema 4.3.** *Se  $A$  é um  $q$ -set clássico finito no sentido de Tarski, então  $\text{card}(A) = n$  se e somente se  $qc(A) = n$ .*

**Prova:** *Se  $qc(A) = n$ , então, por definição existe uma  $q$ -função  $f$  que conta os elementos de  $A$  tal que  $f(n) = \emptyset$ . Podemos estipular uma bijeção  $t$  na parte clássica de  $\Omega$  entre  $A$  e  $n$  como se segue:  $t(k) = g(f(k-1))$ , para  $1 \leq k \leq n$ , e  $t(0) = A \setminus \{g(f(k-1)) : 1 \leq k \leq n\}$ . É simples de se verificar que  $t$  é de fato uma bijeção, e então que  $\text{card}(A) = n$ .*

*Agora, se  $\text{card}(A) = n$ , existe uma bijeção  $t$  entre  $A$  e  $n$  na parte clássica de  $\Omega$ . Podemos colocar a  $q$ -função escolhida para a definição da função contagem como a seguinte função  $g$ : para cada subconjunto  $B$  de  $A$ ,  $g(B) = t(k)$ , com  $k$  o menor número natural tal que  $t(k) \in B$ . Então,  $f$  é definido como se segue:  $f(0) = A$ ,  $f(1) = A \setminus \langle g(f(0)) \rangle$  e em geral,  $f(k) = f(k-1) \setminus \langle g(f(k-1)) \rangle$ , isto é, a função escolhida toma de cada subconjunto de  $A$  o elemento que é a imagem do menor número pela função  $t$ . Agora, temos apenas que mostrar que  $f(n) = \emptyset$ . Note que  $f(n) = f(n-1) \setminus \langle g(f(n-1)) \rangle$ . Se este conjunto não fosse vazio, haveria um elemento em  $A$  que não está na imagem da função  $t$ , contradizendo a hipótese. Então,  $qc(A) = n$ . ■*

Agora, também mostramos que para qualquer  $x$ ,  $qc(\langle x \rangle) = 1$ . Isto nos fornece uma contraparte formal para a explicação informal dada anteriormente de que o cardinal de  $\langle x \rangle$  é 1. Com o lema 4.10 é fácil de mostrar que  $\langle x \rangle$  é finito, e então a definição de cardinal pode ser aplicada a ele também.

**Teorema 4.4.** *Para qualquer  $x$ ,  $\langle x \rangle$  é finito no sentido de Tarski.*

**Prova:** *Basta considerarmos os casos. Dada qualquer família não vazia de subconjuntos de  $\langle x \rangle$ , teremos que ou  $\emptyset$  pertence a esta família, ou não pertence. No primeiro caso,  $\emptyset$  é o elemento  $\subset$ -minimal. Para o segundo caso, como a família não é vazia, então  $\langle x \rangle$  pertence à esta família, e pelo lema de 4.10 Domenech e Holik, é o único elemento desta família. Então,  $\langle x \rangle$  é o elemento  $\subset$ -minimal neste caso. ■*

**Teorema 4.5.** *Para qualquer  $x$ ,  $qc(\langle x \rangle) = 1$ .*

**Prova:** *Nós temos que mostrar que para qualquer função contagem  $f$ ,  $f(1) = \emptyset$ . Por definição  $f(0) = \langle x \rangle$  e  $f(1) = h(f(0)) = f(0) \setminus \langle g(\langle x \rangle) \rangle$ . Suponha que este último  $q$ -set não é vazio. Já que  $\langle x \rangle \setminus \langle g(\langle x \rangle) \rangle \subseteq \langle x \rangle$ , então  $\langle x \rangle \setminus \langle g(\langle x \rangle) \rangle \in \mathcal{P}(\langle x \rangle)$ , e pelo lema 4.10 temos que  $\langle x \rangle \setminus \langle g(\langle x \rangle) \rangle =$*

$\langle x \rangle$ , a partir do que se segue que  $\langle g(\langle x \rangle) \rangle = \emptyset$ , o que é absurdo. Então,  $f(1) = \emptyset$ , e este é o menor número para o qual isto ocorre, e então  $qc(\langle x \rangle) = 1$ . ■

Com o auxílio deste teorema, então, podemos garantir que estamos sempre tomando apenas um elemento do q-set sendo contado quando aplicamos nosso procedimento de contagem. Mais alguns resultados podem ser mostrados que nos ajudam a fixar a ideia de que o unitário forte possui apenas um elemento.

**Teorema 4.6.** *Se  $qc(A) = n$  e  $\neg(x \in A)$ , então  $qc(A \cup \langle x \rangle) = n + 1 = qc(A) + qc(\langle x \rangle)$ .*

**Prova:** *Seja  $g$  a função escolha para  $\mathcal{P}(\langle x \rangle)$  (tal que  $g(\langle x \rangle) \in \langle x \rangle$ ) que é usada na contagem com a qual obtemos que  $qc(\langle x \rangle) = 1$  pelo teorema 4.5 e seja  $h$  a função escolha utilizada na contagem empregada para obtermos  $qc(A) = n$ . Podemos utilizar a seguinte função escolha  $j$  para  $\mathcal{P}(A \cup \langle x \rangle)$ : se  $B$  é um subqset não-vazio de  $A$ , então  $j(B \cup \langle x \rangle) = h(B)$  e se  $B = \emptyset$  então  $j(B \cup \langle x \rangle) = g(\langle x \rangle)$ . Agora, existe uma função contagem  $f$  para  $A \cup \langle x \rangle$ , com uma função subtração  $s$ . Pela definição de contagem nós temos que  $f(n + 1) = s(f(n)) = f(n) \setminus \langle j(f(n)) \rangle$ . Se  $j(f(n)) = h(f(n))$  então existem ainda elementos de  $A$  no  $n$ -ésimo passo, contradizendo o fato de que  $qc(A) = n$  e nossa construção da função contagem, que deveria tornar  $A$  vazio em primeiro lugar. Então,  $j(f(n)) = g(f(n))$  e  $g(f(n)) \in \langle x \rangle$  e então devemos ter que  $f(n) = \langle x \rangle$  e  $f(n + 1) = \emptyset$ , pois em caso contrário ainda teríamos um elemento de  $A$  a ser contado, contradizendo novamente nossa definição de  $j$ . ■*

**Teorema 4.7.** *Se  $A \neq \emptyset$  é um q-set finito tal que  $qc(A) = n$  e  $x \in A$ , então  $qc(A \setminus \langle x \rangle) = n - 1$ .*

**Prova:** *Note que  $n = qc(A) = qc(A \setminus \langle x \rangle \cup \langle x \rangle)$ . Pelo nosso teorema anterior, temos que  $qc(A \setminus \langle x \rangle \cup \langle x \rangle) = qc(A \setminus \langle x \rangle) + qc(\langle x \rangle)$ , de onde temos também que  $qc(A \setminus \langle x \rangle) + 1 = n$ , isto é,  $qc(A \setminus \langle x \rangle) = n - 1$ . ■*

#### 4.5 CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS SOBRE CONTAGEM E CARDINALIDADE

Conforme nós dissemos anteriormente, uma das razões que nos proíbe de definir cardinais para q-sets em geral utilizando a definição usual é que para alguns q-sets finitos  $X$  não podemos em particular definir uma correspondência um-a-um entre  $\langle n, \in \rangle$  e  $\langle X, R \rangle$ , onde  $R$  é uma boa ordem de  $X$ . Este processo é uma maneira simples de se formalizar nas teorias de conjuntos usuais o procedimento de contagem

padrão que mencionamos anteriormente. Com a ajuda de definições e resultados anteriores, todavia, podemos fazer algo muito similar até mesmo para q-sets cujos elementos são m-átomos.

Em primeiro lugar, devemos notar que mesmo quando  $qc(X) = n$ , a relação  $\subset$  definida sobre o q-set  $[f(k) : 0 \leq k \leq n]$  é irreflexiva, transitiva e conectada. Em segundo lugar, já que é impossível definir relações de ordem sobre  $X$  quando este possui m-átomos como elementos, podemos aplicar a seguinte manobra: vamos fazer com que tudo se passe como se estivéssemos fixando os elementos de  $X$  conforme eles são eliminados no processo de contagem definido acima. Para tanto não precisamos assumir que seja possível identificar os elementos sendo eliminados em uma etapa particular, mas apenas que temos certeza que apenas um elemento está sendo eliminado em cada passo. No primeiro passo,  $f(0)$ , nada está sendo eliminado, de modo que podemos ficar com  $[f(k) : 1 \leq k \leq n]$ . Estamos contando o número de passos empregados para se esvaziar o q-set  $X$ , conforme explicamos anteriormente, e relação  $\subset$ , quando definida sobre o q-set mencionado, possui uma semelhança com as propriedades da pertinência para conjuntos transitivos.

Se denotarmos o q-set definido acima pela notação muito mais perspícua  $f(k)_{1 \leq k \leq n}$ , poderemos definir para  $X$  um certo tipo de estrutura, que chamaremos de a  $\subset$ -imagem de  $X$ , para tornar clara a similaridade intuitiva com as  $\in$ -imagens da teoria de conjuntos clássica.

**Definição 4.7.** *A  $\subset$ -imagem de um q-set finito  $X$  é o par  $\langle f(k)_{1 \leq k \leq n}, \subset \rangle$ , onde  $f(k)_{1 \leq k \leq n}$  é definido como acima.*

Esta noção pode nos ajudar a associar um ordinal com  $X$  de uma maneira indireta, sem termos que identificar os elementos de  $X$ . Precisamos apenas verificar que existe um isomorfismo preservando a ordem entre  $\langle f(k)_{1 \leq k \leq n}, \subset \rangle$  e  $\langle n, \in \rangle$ . A função  $j$  de  $n$  para  $f(k)_{1 \leq k \leq n}$  definida por  $j(k) = f(k+1)$  é um tal isomorfismo. É fácil de perceber que para cada elemento de  $n$  há apenas um elemento de  $f(k)_{1 \leq k \leq n}$  associado e conversamente. Ainda, se  $k \in m$ , com  $k < m < n$ , dado que  $j(k) = f(k+1)$  e  $j(m) = f(m+1)$ , nós temos que  $j(k) \subset j(m)$ .

Procedendo deste modo nós podemos associar de maneira indireta um ordinal a qualquer q-set finito  $A$ . As  $\subset$ -imagens permitem que esta estratégia funcione para qualquer q-set finito, em particular para aqueles que contem m-átomos como elementos. Isto nos dá um sentido preciso para a afirmação de que estamos de certo modo contando os elementos de um q-set quando aplicamos o procedimento definido na seção anterior. Já que não podemos contar os elementos diretamente,

contamos apenas o número de passos empregados para tornar o q-set vazio. No caso de q-sets clássicos, o ordinal associado em nosso processo com o uso das  $\subset$ -imagens e com o uso das  $\in$ -imagens são os mesmos, como se pode verificar facilmente.

Um outro aspecto no qual a nossa abordagem é conservativa com relação aos procedimentos usuais é que o ordinal associado com um q-set finito  $X$  através das  $\subset$ -imagens e o seu cardinal conforme definido acima são exatamente o mesmo número. Certamente, isto ocorre na abordagem clássica quando as definições de von Neumann são utilizadas. Um outro ponto a ser notado é que apesar do fato de que uma  $\subset$ -imagem possuir um último elemento, associado com o menor elemento de sua  $\in$ -imagem, o q-set  $X$  por si mesmo poderá não ter um menor elemento, pois não se segue de nossa discussão que seja possível definir uma relação de ordem sobre  $X$  quando seus elementos são m-átomos.

Seguindo estas discussões podemos ver mais claramente as relações entre contagem e identidade. Mesmo que a definição clássica de contagem esteja aparentemente ligada à identidade de modo essencial, conforme estamos propondo neste trabalho, esta não é a única maneira de se estabelecer contagem e cardinalidade para coleções finitas. Utilizando definições alternativas, como aquela que estamos empregando aqui, podemos contornar as dificuldades que aparecem quando tentamos contar itens para os quais a identidade não faz sentido e que podem ser indistinguíveis.

Como uma última consequência de nossas definições, podemos mostrar o seguinte resultado:

**Teorema 4.8.** *Dados q-sets finitos  $X$  e  $Y$ ,  $qc(X) = qc(Y)$  se e somente se existe uma bijeção entre  $\langle f(k)_{1 \leq k \leq n}, \subset \rangle$  e  $\langle g(k)_{1 \leq k \leq m}, \subset \rangle$ , onde estas são as  $\subset$ -imagens de  $X$  e de  $Y$  respectivamente.*

**Prova:** *Dadas estas  $\subset$ -imagens, se existe uma correspondência uma-um entre elas, isto é, se para cada  $f(k)$  existe apenas um  $g(k)$  e conversamente, então ambas estas  $\subset$ -imagens são isomorfas a mesma  $\in$ -imagem, e então  $m = n$  e o cardinal destes q-sets é o mesmo. Por outro lado, suponha que  $qc(X) = n = qc(Y)$ . Como nós vimos, a  $\in$ -imagem é isomorfa às  $\subset$ -imagens  $\langle f(k)_{1 \leq k \leq n}, \subset \rangle$  e  $\langle g(k)_{1 \leq k \leq n}, \subset \rangle$  de  $X$  e  $Y$ , de onde uma composição de funções nos dá a correspondência desejada entre os passos das contagens. ■*

Esta é uma generalização para q-sets finitos daquilo que é conhecido na literatura como o *Princípio de Hume*. O enunciado padrão deste princípio utiliza o conceito de equipolência, que não está disponível para

nós de modo geral em  $\mathfrak{Q}$ , pois faz uso do conceito de identidade. Nossa generalização nos parece intuitiva e plausível e, dado que o Princípio de Hume é, de acordo com alguns autores a principal lei que uma definição de cardinalidade deve satisfazer (ver, por exemplo, (FRAENKEL; BAR-HILLEL; LEVY, 1984, p96)), então consideramos que nosso objetivo de mostrar que a nossa definição de cardinalidade finita é plausível está agora encerrada.

Para finalizar esta seção apresentaremos agora mais algumas proposições que podem ser derivadas como teoremas a partir da definição de quase-cardinal que foi dada na seção anterior. O nosso interesse nestas proposições consiste no fato de que estes são utilizados como axiomas para o conceito de quase-cardinal quando este foi tomado como um símbolo primitivo na teoria (ver o capítulo 3). Lembremos que aqui estamos nos restringindo aos q-sets que são finitos no estilo de Tarski.

**Teorema 4.9.** *Para todo q-set  $x$  finito no sentido de Tarski,  $\exists!y(Cd(y) \wedge qc(x) = y \wedge (Z(x) \rightarrow y = card(x)))$ .*

**Prova:** *Se  $x$  é finito no sentido de Tarski, então podemos aplicar a definição de qc. Suponha que  $qc(x) = n$ . Este  $n$  é único e por definição é também um cardinal, no sentido usual da palavra, ou seja  $Cd(n)$ . Ainda, se  $Z(x)$ , então pelo teorema 4.3 temos que  $n = card(x)$ . ■*

**Teorema 4.10.**  $\forall x(\exists n(n = qc(x)) \rightarrow \forall m(m \leq n \rightarrow \exists z(z \subseteq x \wedge qc(z) = m)))$ .

**Prova:** *Esta proposição decorre imediatamente da definição de qc. Suponha que  $n = qc(x)$ . Então, dada uma função contagem  $f$  para  $x$ , temos por definição que  $f(0) = x$  e  $f(n) = \emptyset$ . Para qualquer  $m \leq n$ , temos que  $f(n) \subseteq f(m) \subseteq f(0)$ . Suponha que  $n - k = m$ . Então,  $f(k) \subseteq f(0) = x$  é um subqset de  $x$  tal que  $qc(f(k)) = m$ . Esta última igualdade pode ser verificada ao notarmos que  $g$  definida por  $g(0) = f(k)$  e  $g(t + 1) = f(t + k + 1)$  é tal que  $g(m) = \emptyset$ , pois por definição  $g(m) = f(k + m) = f(n) = \emptyset$ . Assim,  $qc(f(k)) = m$ . ■*

**Teorema 4.11.**  $\forall x \forall y (\forall w (w \notin x \vee w \notin y) \rightarrow qc(x \cup y) = qc(x) + qc(y))$ .

**Prova:** *Como  $x$  e  $y$  são finitos no estilo de Tarski, vamos supor que  $qc(x) = n$  e  $qc(y) = m$ . Seja  $g$  a particular função escolha para  $\mathcal{P}(x)$  (tal que  $g(C) \in C$  para  $C \subseteq x$ ) que é usada na contagem com a qual obtemos que  $qc(x) = n$  e seja  $h$  a função escolha utilizada na contagem empregada para obtermos  $qc(y) = m$ . Podemos definir a seguinte função escolha  $j$  para  $\mathcal{P}(x \cup y)$ : se  $B$  é um subqset não-vazio de  $x \cup y$  tal que  $B \cap x$  não é vazio, então  $j(B) = g(B \cap x)$ ; e se  $x \cap B = \emptyset$  então  $j(B) = h(B)$ . Agora, utilizando  $j$  existe uma função contagem  $f$  para  $x \cup y$ , com uma função subtração  $s$ . Pela definição de contagem nós*

temos que  $f(n+1) = s(f(n)) = f(n) \setminus \{j(f(n))\}$ . Se  $j(f(n)) = g(f(n))$  então existem ainda elementos de  $x$  no  $n$ -ésimo passo, contradizendo o fato de que  $qc(x) = n$  e nossa construção da função contagem, que deveria primeiro esvaziar  $x$ . Então,  $j(f(n)) = h(f(n))$  e  $g(f(n)) \in y$  e então devemos ter que  $f(n) = y$  e, seguindo este raciocínio,  $f(n+m) = \emptyset$ , pois em caso contrário ainda teríamos um elemento de  $y$  a ser contado, contradizendo o fato de que  $qc(y) = m$ . ■

**Teorema 4.12.**  $\forall_Q x (x \neq \emptyset \rightarrow qc(x) \neq 0)$ .

*Prova:* Se  $x$  não é vazio, pela definição de quase-cardinal segue-se que dada um função contagem  $f$  para  $x$ , temos que  $f(0) \neq \emptyset$ , de onde temos que  $qc(x) \neq 0$ . ■

**Teorema 4.13.**  $\forall_Q x \forall_Q y (y \subseteq x \rightarrow qc(y) \leq qc(x))$ .

*Prova:* Suponha que  $y \subseteq x$ . Se  $x = y$ , é imediato que  $qc(x) = qc(y)$ , de onde temos  $qc(x) \leq qc(y)$ . Se  $y \subset x$ , temos que  $x = x \setminus y \cup y$ , de onde temos que  $qc(x) = qc(x \setminus y) + qc(y)$ . Como da hipótese de que  $y \subset x$  temos pelo teorema anterior que  $qc(x \setminus y)$  é não nulo, então,  $qc(y) \leq qc(x)$ . ■

Não apresentaremos a prova do próximo resultado, que segue de perto a demonstração usual por indução, com algumas poucas adaptações.

**Teorema 4.14.**  $\forall_Q x (qc(\mathcal{P}(x)) = 2^{qc(x)})$

Note que não demonstramos o enunciado utilizado anteriormente como axioma da extensionalidade fraca. Este enunciado, um dos fundamentais concernindo a relação de indistinguibilidade, aparentemente não pode ser derivado apenas dos recursos de  $\mathfrak{Q}$  (sem a noção primitiva de quase-cardinal) mais as definições apresentadas aqui. Na próxima seção discutiremos mais alguns pontos concernindo este axioma.

## 4.6 RELAÇÃO ENTRE DUAS DEFINIÇÕES DE QUASE-CARDINAL

Nesta seção, vamos investigar como a definição de cardinal proposta por Domenech e Holik pode ser traduzida em nossa terminologia, e como as fórmulas que eles empregaram como axiomas podem ser derivadas como teoremas quando nos restringimos a  $q$ -sets finitos. Aqui, também apresentamos rigorosamente as ideias desenvolvidas por estes autores que discutimos previamente apenas em um nível informal. Diferentemente dos autores mencionados, vamos nos restringir apenas aos  $q$ -sets finitos no sentido de Tarski. Portanto, mesmo que

um dos axiomas introduzido por eles é também válido para q-sets infinitos (aquele que garante a existência de cadeias descendentes para q-sets não-vazios), nós iremos derivá-lo aqui, a partir de nossa abordagem restringindo-o a q-sets finitos. Isto pode ser feito sem nenhum prejuízo ao trabalho destes autores, pois o axioma mencionado não é aplicado em nenhum momento a q-sets infinitos em sua rota para definir quase-cardinais finitos. Além disso, como veremos, todo q-set finito no sentido de Tarski é também finito no sentido de Domenech e Holik.

A primeira noção importante de um ponto de vista técnico apresentada no trabalho de Domenech e Holik que não está presente nas abordagens usuais da teoria de quase-conjuntos é a ideia de que  $Y$  é *um descendente direto do q-set*  $X$ , denotado por  $DD_X(Y)$ , com a observação de que  $X$  é não-vazio. Formalmente, definimos  $DD_X(Y)$  como se segue:

**Definição 4.8.**  $DD_X(Y) \leftrightarrow \exists z(z \in X \wedge Y = X \setminus \langle z \rangle)$ .

Poderíamos generalizar esta definição para incluir o q-set vazio ao empregarmos a seguinte condição: se  $X$  é vazio, então ele é o seu próprio descendente direto. Agora, considerando nossa definição de quase-cardinais apresentada anteriormente, como podemos entender o conceito de descendente direto naquele aparato? Segue-se imediatamente que, para o q-set vazio, na nossa abordagem, dada uma função contagem  $f$  para  $X$ ,  $f(0) = X$ , e como acabamos de estipular,  $X$  é o seu próprio descendente direto. Para um q-set não-vazio e finito em geral, dada uma função contagem  $f$ , se  $qc(X) = n$ , então para cada  $f(k)$  no processo de contagem da definição de quase-cardinal, com  $k \leq n - 1$ , teremos que  $f(k + 1)$  será o descendente direto de  $f(k)$ , pois de acordo com a definição de  $f$ ,  $f(k + 1) = h(f(k)) = f(k) \setminus \langle g(f(k)) \rangle$ , e então,  $f(k + 1)$  é o candidato correto, ele satisfaz a definição para ser um descendente direto de  $f(k)$ .

O próximo conceito importante é o de *cadeia descendente de*  $X$ . Esta noção é introduzida por Domenech e Holik para quaisquer q-sets em geral, finitos ou infinitos. Mas aqui, como já observamos anteriormente, nós trabalharemos apenas com o caso finito. É importante mencionar que não introduzimos ainda a definição de q-sets finitos e infinitos conforme proposta por estes autores; ao contrário, aqui estamos considerando finitude no sentido de Tarski. A definição para o símbolo  $CD_X(\gamma)$ , que se lê “ $\gamma$  é uma cadeia descendente de  $X$ ”, é a seguinte:

**Definição 4.9.**  $CD_X(\gamma) \leftrightarrow (\gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \wedge X \in \gamma \wedge \forall z \forall y (z \in \gamma \wedge y \in \gamma \wedge z \neq y \rightarrow (z \subseteq y \vee y \subseteq z))) \wedge \forall z (z \in \gamma \wedge z \neq \emptyset \rightarrow \exists Y (Y \in$

$$\gamma \wedge DD_Z(Y) \wedge \forall w(w \in \gamma \wedge DD_Z(w) \rightarrow w = Y)))$$

Para traduzirmos esta definição em termos apresentados em nossa abordagem, é suficiente mencionarmos que de acordo com a nossa definição, dado um q-set  $X$  com uma função contagem  $f$  e tal que  $qc(X) = n$ , poderíamos considerar o q-set  $\gamma = [f(k) : 0 \leq k \leq n]$  como uma cadeia descendente de  $X$ . Se considerarmos cada uma das conjunções na definição 4.9 de uma cadeia descendente como uma condição imposta em  $\gamma$ , nós vamos perceber facilmente que o q-set que propusemos como satisfazendo cada uma das condições. Note que a primeira cláusula é trivialmente satisfeita, e já que por definição  $X = f(0)$ , então  $f(0) \in \gamma$ , e a segunda condição também é imediatamente satisfeita. Além disso, devemos notar que para  $f(k)$  e  $f(m)$  elementos de  $\gamma$  representando passos diferentes na contagem de  $X$ , se  $k < m$ , temos imediatamente que  $f(k) \subseteq f(m)$ , satisfazendo a terceira cláusula. No que diz respeito à última condição, temos que para qualquer  $f(k)$  tal que  $k \neq n$ , como vimos anteriormente, teremos  $f(k+1)$  como seu descendente direto, e a unicidade pode ser facilmente verificada.

Com estas noções traduzidas para o nosso esquema, podemos mostrar que a primeira fórmula utilizada como um axioma por Domenech e Holik é um teorema na teoria de quase-conjuntos, quando restrita a q-sets finitos. O primeiro axioma proposto por eles é o *Axioma das Cadeias Descendentes*, e como comentamos anteriormente, ele postula de forma não construtiva a existência de um tipo particular de q-sets:

**Axioma 4.2.**  $\forall_Q X(X \neq \emptyset \rightarrow \exists \gamma(CD_X(\gamma)))$

**Teorema 4.15.** *A sentença empregada por Domenech e Holik como seu primeiro axioma, quando restrito a q-sets finitos, é um teorema de  $\Omega$ .*

*Prova:* Em primeiro lugar, note que para qualquer q-set finito  $X$ , existe sempre uma função escolha  $g$ , e então, sua função subtração  $h$  está bem definida. A função contagem para  $X$  estabelecida pelo teorema da recursão conforme apresentamos acima. Como argumentamos, esta função de contagem sempre chega a um fim para algum número natural  $n$ , e teremos que por definição  $qc(X) = n$ . Como já indicamos anteriormente, com isto nós garantimos a existência de uma cadeia descendente para  $X$ . ■

É importante enfatizar, mais uma vez, que estamos falando apenas de q-sets finitos, pois em nossa abordagem para a definição de cardinalidade os q-sets infinitos não desempenham nenhum papel proeminente, e no trabalho de Domenech e Holik estes q-sets também

não são empregados quando se vai definir cardinalidade para o caso finito. Assim como no caso dos descendentes diretos, para uma maior generalidade seria razoável concedermos que o q-set vazio possui uma cadeia descendente, cujo único elemento é o próprio q-set vazio, e como argumentamos acima, não é difícil de perceber que a nossa definição garantiria imediatamente uma cadeia descendente para este caso.

Seria interessante também considerar a nossa definição quando não restrita aos q-sets finitos. Naquele caso, quando é aplicada a um q-set infinito, uma função contagem não chegaria no q-set vazio em um número finito de passos, e o resultado iria combinar perfeitamente com o papel proposto por Domenech e Holik para as cadeias descendentes, quando estas são relacionadas com q-sets infinitos. Isto poderia nos ajudar a provar, indiretamente (como na seção anterior), que q-sets infinitos tem um subqset enumerável. Vamos nos restringir, aqui, ao caso finito, e como mencionamos anteriormente, não estamos preocupados aqui com uma tentativa de resolver as dificuldades lançadas pela tese 2, mencionada acima.

Nosso próximo passo é considerar a definição destes autores de q-set finito. Os q-sets finitos em nossa abordagem serão também finitos na abordagem proposta por eles. No que diz respeito a esta noção, podemos ver uma diferença em ambas as abordagens ao notarmos que primeiro definimos q-sets finitos, e então, seguimos para definir quase-cardinalidade para eles. Por outro lado, os autores referidos definem quase-cardinalidade para alguns q-sets, e então, por definição, resulta que são estes precisamente os q-sets finitos. Para evitarmos qualquer confusão, cada vez que mencionarmos que um q-set é finito sem nenhuma qualificação adicional, estaremos significando finito no sentido de Tarski. Para finitude no sentido de Domenech e Holik escreveremos  $Fin(X)$ . A definição de  $Fin(X)$  é a seguinte:

**Definição 4.10.** *Se  $X$  um q-set não-vazio  $Fin(X) \leftrightarrow \exists n(n \in \omega \wedge \forall \gamma(CD_X(\gamma) \rightarrow \exists F(F \subseteq \gamma \times n^+ \wedge qf(F) \wedge \langle n, X \rangle \in F \wedge \forall z(z \in \gamma \rightarrow \exists j(j \in n^+ \wedge \langle j, z \rangle \in F))) \wedge \forall j(j \in n^+ \wedge j \neq 0 \rightarrow DD_{F(j)}(F(j-1))))))$*

Nesta definição,  $qf(F)$  significa que  $F$  é uma quase-função e  $n^+$  é o sucessor de  $n$ , que é definido como se faz usualmente nas teorias de conjuntos clássicas por  $n^+ =_{def} n \cup \{n\}$ . Poderíamos, novamente, para maior generalidade, permitir que o q-set vazio seja finito de acordo com o sentido de Domenech e Holik, e isto seria facilmente obtido fazendo-se as generalizações de descendente direto e cadeia descendente que já sugerimos acima. Na sua exposição, Domenech e Holik derivam este fato como um teorema, que depende do axioma adicional que introduzem

em  $\mathfrak{Q}$  e que consideraremos em breve. A q-função  $F$  na definição 4.10 “rotula” os passos no procedimento de contagem, nos permitindo saber quantas vezes o processo de eliminação de elementos de um q-set foi repetido. Agora, mostramos que a finitude no sentido de Tarski implica  $Fin$ .

**Teorema 4.16.** *Se  $X$  é finito no sentido de Tarski, então  $Fin(X)$ .*

**Prova:** *Se  $X$  é finito no sentido de Tarski, então, de acordo com nossa definição existe uma função contagem  $f$  para  $X$  tal que  $qc(X) = n$ , para algum  $n$ . Conforme mostramos anteriormente,  $[f(k) : 0 \leq k \leq n]$  é uma cadeia descendente. Certamente, a quase-função  $F$  de  $n^+$  em  $[f(k) : 0 \leq k \leq n]$  definida por  $F(k) = f(n - k)$  satisfaz a condição acima, e o teorema está provado. ■*

O próximo passo antes de apresentarmos a definição de quase-cardinal de acordo com Domenech e Holik consiste em apresentarmos seu segundo axioma. Este axioma é utilizado por eles para garantir, por exemplo, que para qualquer q-set finito (no sentido deles), a quase-função  $F$  cuja existência é garantida em sua definição de finitude é tal que  $F(0) = \emptyset$ .

**Axioma 4.3.**  $\forall_Q X \forall_Q Y (Fin(X) \wedge Fin(Y) \wedge X \equiv Y \rightarrow ((X \subseteq Y \rightarrow X = Y) \wedge (Y \subseteq X \rightarrow X = Y)))$

Para mostrarmos que este enunciado é um teorema em nosso sistema, vamos empregar um axioma de  $\mathfrak{Q}$  que utiliza a noção de quase-cardinal, o *Axioma da Extensionalidade Fraca*, cuja formulação aqui só pode ser feita depois que a definição de quase-cardinal já esteja disponível (e então, o axioma fica restrito aqui a q-sets finitos). Intuitivamente, recordemos, o axioma nos garante que q-sets  $X$  e  $Y$  tendo as mesmas quantidades de elementos indistinguíveis são eles mesmos indistinguíveis, e reciprocamente. Mais precisamente, se para cada classe de equivalência de  $X$  pela relação de indistinguibilidade existe uma classe de equivalência de  $Y$  por esta mesma relação tal que ambas possuem a mesma quase-cardinalidade e reciprocamente, então  $X$  e  $Y$  são indistinguíveis, e a conversa também vale (para mais discussões sobre este axioma, ver o capítulo 3 e (FRENCH; KRAUSE, 2006, pp. 290-291)).

**Teorema 4.17.** *O enunciado utilizado por Domenech e Holik como seu segundo axioma é um teorema de  $\mathfrak{Q}$  quando restrito a q-sets finitos.*

**Prova:** *Sejam  $X$  e  $Y$  q-sets finitos satisfazendo a hipótese do axioma 2. Vamos supor que  $X \subseteq Y$  é o caso, mas que  $X \neq Y$ . Então, para pelo menos um  $z$ ,  $z \in Y \setminus X$ . Neste caso, ou existe um elemento em  $Y$  do qual  $z$  é indistinguível, ou não há nenhum tal elemento. No segundo*

caso, a partir do axioma da extensionalidade fraca, já que nem todo elemento de  $Y$  possui um tipo “correspondente” em  $X$ , dado que não há nenhum elemento em  $X$  indistinguível de  $z$  e já que todo elemento de  $X$  está em  $Y$ , temos que não é o caso que  $X \equiv Y$ , contradizendo nossa hipótese. No primeiro caso, se  $z$  é indistinguível de algum elemento de  $X$ , será o elemento de alguma classe de equivalência de  $Y$  pela relação de indistinguibilidade. Segue-se que, já que  $X \subseteq Y$ , uma das classes de  $X$  será uma subclasse própria da correspondente classe de elementos de  $Y$ , e terá um quase-cardinal menor; assim, segue-se do axioma da extensionalidade fraca que não é o caso que  $X \equiv Y$ , contradizendo nossa hipótese novamente. Um argumento totalmente análogo trata do caso em que  $Y \subseteq X$ . ■

Devemos ter em mente que este enunciado foi derivado com a ajuda de nossa definição de quase-cardinal. Com este axioma em mãos e seguindo a abordagem de Domenech e Holik, algumas proposições podem ser derivadas para garantir que o  $n$  na definição de finitude é de fato único, e isto permite a estes autores definir quase-cardinal (ver (DOMENECH; HOLIK, 2007, p.870)). Vamos empregar o símbolo  $qcard(X)$  para distinguir esta definição do nosso  $qc$ . A definição é a seguinte:

**Definição 4.11.** *Se  $X$  é um  $q$ -set não-vazio e  $Fin(X)$ , então,  $qcard(X) = n$ , onde  $n$  é o número natural que aparece na definição de  $Fin(X)$ . Ainda, por definição  $qcard(\emptyset) = 0$ .*

Agora, vamos mostrar como esta definição se relaciona com a nossa:

**Teorema 4.18.** *Para qualquer  $q$ -set finito  $X$ , se  $qc(X) = n$ , então também  $qcard(X) = n$ .*

**Prova:** *Seja  $X$  um  $q$ -set finito no sentido de Tarski. Como vimos acima, segue-se disto que também temos que  $Fin(X)$ . Dada uma função contagem  $f$  para  $X$ , vamos supor que  $qc(X) = n$ . Então, como argumentamos anteriormente,  $\gamma = [f(k) : 0 \leq k \leq n]$  é uma cadeia descendente para  $X$ , e a  $q$ -função  $F$  de  $n^+$  em  $\gamma$  tal que  $F(k) = f(n - k)$  satisfaz a definição de  $Fin(X)$ , e em particular  $F(n) = X$ . Segue-se então imediatamente que  $qcard(X) = n$ . ■*

Agora, usando a definição de  $qcard$  podemos seguir o trabalho de Domenech e Holik e derivar, para  $q$ -sets finitos, as fórmulas usuais utilizadas como axiomas para quase-cardinalidade quando este é considerado um conceito primitivo da teoria  $\Omega$  (ver a seção anterior,

o capítulo 3, também (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.7)). Nós não vamos perseguir estes resultados aqui, indicando apenas que isto pode ser feito seguindo-se a apresentação de Domenech e Holik em (DOMENECH; HOLIK, 2007, pp. 871-873). Ainda, é interessante notar que aparentemente também não se pode derivar o axioma da extensionalidade fraca a partir da abordagem de Domenech e Holik. Agora, como em nossa exposição não precisamos de axiomas adicionais, acreditamos ter mostrado que pelo menos em parte nossa definição é mais simples que a de Domenech e Holik.

Outra linha de investigação interessante a se perseguir consiste em se mostrar que se um dado  $q$ -set  $x$  é tal que  $qcard(x) = n$ , então também que  $qc(x) = n$ . Faremos em linhas gerais as demonstrações para se obter este tipo de resultado.

O primeiro ponto importante consiste em entendermos como Domenech e Holik colocam mais precisamente as definições de seu trabalho que apresentamos anteriormente para funcionar. Podemos descrever, grosso modo, da seguinte forma a proposta destes autores: dado um  $q$ -set qualquer  $X$ , existe (pelo axioma das cadeias descendentes) uma cadeia descendente  $\gamma$  para  $X$ . Se existe um número natural  $n$  que rotula os passos desta cadeia descendente, conforme a definição de finitude de Domenech e Holik ensina que deve ser feito, então  $Fin(X)$ , e demonstra-se que este  $n$  é único. Então, ainda pela definição de finitude  $\gamma$  termina no  $q$ -set vazio, e assim é uma cadeia finita que serve para contar o número de elementos de  $X$ . Por definição, então,  $qcard(X) = n$ .

Para que possamos aplicar a um  $q$ -set  $X$  nossa definição, ele deve ser finito no sentido de Tarski. Assim, como uma primeira hipótese, vamos assumir que  $qcard(X) = n$ , e com isto, que  $Fin(X)$  (conforme a definição 4.10), e daí provar que  $X$  é finito no sentido de Tarski.

**Teorema 4.19.** *Se  $Fin(X)$  então  $X$  é finito no sentido de Tarski.*

**Prova:** *Vamos supor por absurdo que  $X$  não é finito no sentido de Tarski. Então, existe uma família  $A$  não vazia de subqsets de  $X$  que não possui um elemento  $\subset$ -minimal. Então, há em  $A$  há uma sequência  $C$  de  $q$ -sets da forma*

$$\dots, B'' \subseteq B' \subseteq B$$

*para algum  $B \subseteq X$ . Agora, pelo axioma da separação podemos formar o  $q$ -set  $W = [Y : Y \text{ é uma cadeia descendente de } X \text{ e } C \subseteq Y]$ . Tomando  $\gamma \in W$ , temos que se verifica facilmente que  $\gamma$  é uma cadeia descendente (no sentido da definição 4.9). Como  $\gamma$  contém  $C$ , é impossível que exista um  $n$  finito rotulando cada uma das etapas de  $\gamma$ , menos ainda que o número de elementos se  $\gamma$  seja finito no sentido da definição 4.10.*

*Logo, não é o caso que  $Fin(X)$ , contrariando a hipótese. ■*

Agora, podemos mostrar que existe uma função contagem para  $X$  caso  $Fin(X)$ . Note que por hipótese, existe uma cadeia descendente  $\gamma$  para  $X$ , e pela definição de  $Fin$ , existe uma  $q$ -função  $F : n^+ \mapsto \gamma$  para algum  $n \in \omega$ . Então, podemos colocar  $f(0) = X = F(n)$ , e para  $f(k+1)$  colocamos que  $DD_{f(k)}(f(k+1))$ , ou seja, por definição  $f(k+1)$  é um descendente direto de  $f(k)$ . Note que  $f(k+1) = F(n-k)$ . Assim, para  $k = n$  temos que por hipótese  $f(n) = F(0)$ , e pela proposição 4.11 de Domenech e Holik (DOMENECH; HOLIK, 2007, p.869), sabemos que  $F(0) = \emptyset$ , de modo que também  $f(n) = \emptyset$ . Assim, temos que  $qc(X) = n$ . Com esta construção, mostramos o seguinte teoremas:

**Teorema 4.20.** *Se  $qcard(X) = n$ , então  $qc(X) = n$ .*

Note, para demonstrar este resultado assumimos os dois axiomas de Domenech e Holik. Então, se estes axiomas valem, a equivalência entre as definições também pode ser garantida. Conforme indicamos anteriormente, para demonstrar que o segundo axioma de Domenech e Holik pode ser derivado como um teorema a partir de nossa abordagem, foi preciso assumirmos a versão finita do axioma da extensionalidade fraca. Do mesmo modo, se assumimos os axiomas de Domenech e Holik, não parece claro que poderemos provar este axioma como uma consequência dos demais axiomas de  $\Omega$  mais a definição de  $qcard$ . Assim, fica em aberto o status deste axioma em ambas as abordagens aos quase-cardinais finitos. De fato, parece bastante plausível que ele não possa ser demonstrado somente a partir de uma das abordagens aos quase-cardinais, dado que é talvez o principal axioma de  $\Omega$  caracterizando a relação de indistinguibilidade, de modo que quando nos restringimos apenas aos outros recursos da teoria não temos axiomas fortes o suficiente para que se demonstre este enunciado nem mesmo no caso finito.

#### 4.7 PROBLEMAS COM ESTAS DEFINIÇÕES?

Agora, será que a definição apresentada por nós fornece razões o suficiente para dissociarmos cardinalidade e contagem das noções de identidade e individualidade? Se ela o faz, teríamos garantido que a Concepção Recebida não corre o menor risco de entrar em uma espécie de colapso conceitual pelo fato de que a contagem e atribuição de cardinalidade, que são noções utilizadas em alguns momentos, pressupõem identidade e individualidade. Isto certamente aconteceria se contagem

e atribuição de cardinalidade tivessem um privilégio metafísico sobre afirmações tais como aquelas feitas pela Conceção Recebida. Agora, esta é precisamente a proposta de Jantzen (JANTZEN, 2010). De acordo com a visão dele, a atribuição de cardinalidade tem duas características básicas: (i) ela está ligada intrinsecamente à noção de contagem no sentido tradicional, e esta, por sua vez, está relacionada com a individualidade como expusemos acima; (ii) as definições tradicionais de contagem e cardinalidade são tão básicas e simples que possuem mais direitos do que outros tipos de afirmações metafísicas, tais como aquelas feitas pela Conceção Recebida. Nestas circunstâncias, ao encararmos uma contradição entre a Conceção Recebida e a concepção tradicional de cardinalidade, é a nossa interpretação da mecânica quântica que deveria ser abandonada. Nós comentaremos estas afirmações na próxima seção; acreditamos que elas estejam baseadas em alguma forma injustificada de preconceito. Nesta seção primeiro analisaremos algumas objeções feitas às definições alternativas de contagem apresentada anteriormente.

Diante de nossa proposta de definição alternativa para cardinais, Jantzen argumenta que não existem boas razões que nos levem a adotar a nova definição em lugar da tradicional (de fato, Jantzen tem em mente apenas a definição proposta por Domenech e Holik (DOMENECH; HOLIK, 2007), mas os detalhes de cada uma das construções não são essenciais para o seu argumento, a menos em uma característica, na qual ambas as definições estão de acordo e sobre a qual falaremos agora). De fato, Jantzen argumenta contra esta proposta específica de uma definição alternativa de cardinais buscando mostrar que ela tem um ponto fraco: ela fracassa em suas próprias bases em ser uma definição real de cardinalidade e contagem *sem* pressupor a identidade e individualidade das entidades sendo contadas. Então, se seu argumento estiver correto, a definição usual deve ser mantida, e com ela a individualidade das partículas deve ser assumida. Jantzen apresenta um argumento para o efeito de que a partir de uma hipótese feita em  $\mathcal{Q}$  de que o q-set potência é *realmente* o conjunto potência (isto é, a operação de q-set potência nos dá todos os subqsets de um dado q-set), e a partir da definição 4.3 de unitário forte, somos capazes de definir uma relação de identidade *relativa* ao q-set potência de qualquer q-set. Então, podemos sempre empregar a definição usual para fornecer um cardinal para qualquer q-set. Mais do que isto, Jantzen afirma que é esta relação de identidade implícita que explica o sucesso que temos ao definir cardinais através de um procedimento alternativo conforme estamos fazendo, por exemplo. Vamos agora checar o que está envolvido

em ambas as suas afirmações.

Jantzen sustenta que a relação de identidade restrita que ele introduz é um caso particular da assim chamada definição de identidade de Hilbert-Bernays. Nesta abordagem à identidade, se temos uma linguagem de primeira ordem com apenas uma coleção finita de símbolos primitivos para relações, podemos simular a relação de identidade através de uma *fórmula de indistinguibilidade*, da qual as propriedades de uma relação de identidade de primeira ordem (reflexividade e lei da substituição) podem ser derivadas (esta terminologia aparece em Ketland, ver (KETLAND, 2006, pp.306-307)). Esta fórmula nos garante que enunciar a identidade de  $x$  e  $y$  significa enunciar alguma espécie de indiscernibilidade absoluta destes termos através de substituição de um pelo outro em todos os lugares das relações e predicados presentes no vocabulário. Para entendermos qual é a ideia principal, vamos supor que temos uma linguagem de primeira ordem com apenas dois predicados primitivos, um predicado unário  $P$  e uma relação binária  $Q$ . Então a fórmula de indistinguibilidade através da qual a identidade poderia ser definida seria a seguinte:

$$x = y =_{\text{def}} (P(x) \leftrightarrow P(y)) \wedge \forall z (Q(x, z) \leftrightarrow Q(y, z) \wedge Q(z, x) \leftrightarrow Q(z, y)). \quad (4.2)$$

Note que a definição é relativa a uma dada linguagem. A primeira afirmação de Jantzen é que a noção de unitário forte nos permite definir a identidade deste modo se restringirmos o quantificador universal  $\forall z$  na definição ao q-set potência de algum q-set  $X$  dado cujos elementos são todos m-átomos indistinguíveis. Sua segunda afirmação consiste em sustentar que é a presença desta noção de identidade que explica a própria possibilidade de definirmos a cardinalidade do modo alternativo.

O primeiro ponto que deve ficar claro é que, dado que  $\mathfrak{Q}$  possui apenas um número finito de predicados, poderíamos em princípio definir a identidade seguindo-se a estratégia de Hilbert e Bernays; isto, além das dificuldades usuais com esta definição, resultaria em uma teoria diferente daquela com a qual começamos. Mas a primeira afirmação de Jantzen é mais forte, ele afirma que se garantirmos que o quantificador universal estiver restrito a um q-set potência de um dado q-set cujos elementos são m-átomos indistinguíveis, podemos utilizar a noção de unitário forte para *provar* uma fórmula de indistinguibilidade relativamente àquele q-set potência. Então, se o argumento funciona, uma relação de identidade é implicada pelo próprio uso de unitários fortes, e o projeto de uma definição alternativa de cardinalidade parece fadado

ao fracasso. Mas, antes de tirarmos qualquer conclusão precipitada, vamos entrar nos detalhes do argumento. Dado um q-set  $X$  contendo apenas  $m$ -átomos indistinguíveis, a definição de identidade entre seus membros proposta por Jantzen é definida do seguinte modo:

**Definição 4.12.**  $x \sim y =_{\text{def}} x \in \langle y \rangle$

A partir desta definição, Jantzen prova que

$$x \in \langle y \rangle \leftrightarrow \forall z \in \mathcal{P}(X)((x \in z \leftrightarrow y \in z) \wedge (x \equiv y)).$$

Esta equivalência, segundo ele, é a derivação de uma fórmula de indistinguibilidade para  $\mathcal{Q}$  restrita ao q-set  $\mathcal{P}(X)$ . Mas isto é realmente assim? Bem, se ‘fórmula de indistinguibilidade’ deve ser entendida no sentido de Hilbert e Bernays (como ela deve ser se queremos que seja uma definição de identidade), deveríamos notar que a fórmula empregada por Jantzen no argumento acima não é a fórmula de indistinguibilidade para  $\mathcal{Q}$  restrita a  $\mathcal{P}(X)$ . De fato, em uma fórmula de indistinguibilidade devemos mostrar a conjunção de certas equivalências para *todos* os predicados da linguagem; a fórmula de indistinguibilidade para  $\mathcal{Q}$  restrita a  $\mathcal{P}(X)$  deveria ser a seguinte:

$$\begin{aligned} & (M(x) \leftrightarrow M(y)) \wedge (m(x) \leftrightarrow m(y)) \wedge (Z(x) \leftrightarrow Z(y)) \\ & \wedge \forall z \in \mathcal{P}(X)((x \in z \leftrightarrow y \in z) \wedge (z \in x \leftrightarrow z \in y) \wedge (x \equiv z \leftrightarrow y \equiv z) \\ & \quad \wedge (z \equiv x \leftrightarrow z \equiv y)). \end{aligned}$$

Então, a fórmula de Jantzen é apenas o enunciado de que  $m$ -átomos  $x$  e  $y$ , *sob as condições da definição*, pertencem aos mesmos q-sets, que não é a mesma coisa que uma fórmula de indistinguibilidade. Mas agora, vamos conceder que a definição 4.12 introduza algum tipo de identidade. Restrita do modo que está apresentada, o que uma tal fórmula nos mostra? Observamos primeiro que a versão *irrestrita* da fórmula não se segue da hipótese, e isto pode ser visto a partir da simples observação feita acima de que para  $m$ -átomos a relação  $\equiv$  não é compatível com  $\in$ . Então, já que tudo o que podemos garantir de  $x \in \langle y \rangle$  é que  $x \equiv y$ , e dado que já sabemos que são  $m$ -átomos, então temos certeza de que não podemos garantir que  $x \in z$  implique  $y \in z$  sem restrições, e vice versa. Então, no contexto geral, não podemos garantir nem mesmo o tipo de coextensionalidade para  $m$ -átomos que Jantzen empregou em sua fórmula, como a definição proposta exige. Ou seja, quando mergulhamos no contexto da teoria inteira, a ‘identidade e individualidade’ obtidas neste contexto restrito são vistas serem

simplesmente como uma ilusão.

Uma segunda observação que merece ser feita concerne o peso que devemos atribuir ao teorema que Jantzen provou. Apesar de questionarmos a interpretação de Jantzen, acreditamos que um resultado interessante que, de fato não introduz uma relação de identidade em  $\Omega$ , mas mesmo assim pode ser vista como formalizando uma noção de *individualidade contextual*. A individualidade contextual, conforme esta noção foi introduzida por J. Stachel, significa que alguns itens, como neste caso as partículas indiscerníveis, podem adquirir alguma forma de haecceidade do próprio contexto no qual elas se encontram (ver Stachel (STACHEL, 2005)). Por exemplo, em um experimento do tipo EPR, geralmente falamos sobre uma partícula que está indo para a direita, enquanto que a outra está indo para a esquerda. Mas para falarmos deste modo, certamente, precisaríamos utilizar uma função de onda assimétrica, um passo não autorizado pela teoria (ver a interessante análise da função de onda de EPR em Dieks e Lubberdink (DIEKS; LUBBERDINK, 2010)). Isto é, conferimos uma individualidade ‘como se’ através do contexto do qual as partículas fazem parte, mesmo que saibamos que elas de fato não são indivíduos (obviamente, não são indivíduos se formos aderentes da doutrina da Conceção Recebida). Outro exemplo interessante diz respeito às partículas aprisionadas que agora começam a aparecer também na literatura filosófica. No caso de Priscilla, o famoso positron armadilhado, por exemplo, podemos apenas ter certeza de que existe um positron no aparato da armadilha, e isto seria suficiente para lhe dar uma espécie de individualidade contextual, nós falamos do positron nos referindo a ‘este’ positron na armadilha, ou mesmo pelo seu nome ‘Priscilla’. Mas, neste caso também, esta é apenas uma individualidade *ersatz*, não podemos inferir disto que existe uma questão de fato que nos permitiria dizer, mesmo que apenas em princípio, que em uma ocasião diferente, em um experimento distinto com um positron armadilhado, nós de fato prendemos o mesmo positron ou um positron distinto (ver as discussões em Krause (KRAUSE, 2011a)). Argumentar que estas situações já pressupõem a individualidade não iria decidir a questão sobre a individualidade das partículas, mas iria antes pressupor que nós já tenhamos nos decidido quanto à solução para este problema (ver também a seção 4.8).

Agora, vamos considerar mais uma vez a observação feita acima de que quando mergulhamos os  $m$ -átomos em  $\Omega$  e consideramos seu comportamento na teoria como um todo não há nenhum sentido em se falar sobre sua identidade. Se levarmos a sério a afirmação feita por Jantzen de que a definição proposta por ele define algum tipo de

identidade local, então, a situação tem um oposto análogo na teoria de conjuntos clássica (ZFC, por exemplo). De fato, conforme já discutimos, na teoria clássica de conjuntos podemos simular alguma forma de não-individualidade ao nos restringirmos a um conjunto  $X$  dotado de uma relação de equivalência  $R$ . Trabalhando com os elementos de distintas classes de equivalência, podemos definir a indistinguibilidade como uma relação valendo entre elementos pertencendo à mesma classe de equivalência (eles podem ser vistos como sendo do mesmo *tipo*). Elementos de classes de equivalência distintas não são indistinguíveis. Ainda, usando os recursos da teoria de conjuntos de fundo podemos determinar a cardinalidade de cada uma das classes de equivalência, e então, temos itens que localmente não possuem identidade, tem uma cardinalidade quando agregados e podem ser indistinguíveis, apesar de não serem o mesmo item. Esta é basicamente uma descrição daquilo que aparece na literatura com o nome de *Estratégia de Weyl* (ver a nossa breve apresentação dela no capítulo 3, ver também (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.6)). Obviamente, este tipo argumentação pode ser visto como representando alguma forma de não-individualidade contextual. Note, todavia, que estamos sempre trabalhando dentro de uma teoria de conjuntos clássica, e portanto, como a identidade sempre faz sentido para todos os itens, esta é, como notamos, apenas uma não-individualidade contextual. De fato, devemos momentaneamente esquecer a teoria de fundo que estamos utilizando para acreditarmos que alcançamos algum tipo de não-individualidade. A estratégia de Weyl é simplesmente o oposto da estratégia proposta por Jantzen. Neste último caso, devemos nos esquecer do framework no qual estamos trabalhando para atribuímos algum tipo de identidade aos itens com os quais estamos tratando. Se olharmos bem a partir do contexto mais amplo, todavia, a definição simplesmente não funciona.

Retornando agora para a segunda afirmação de Jantzen, *viz.*, de que esta relação de identidade está implícita na definição de cardinalidade proposta por Domenech e Holik e que é ela que explica seus resultados, acreditamos que se pode seguramente duvidar dela. De fato, basta checar as definições e teoremas provados por eles e também por nós na seção 4.4 para se verificar que nenhuma relação de identidade estava envolvida. Realmente, aquelas definições funcionam sem nenhuma menção explícita ou implícita à identidade mesmo quando aplicadas aos objetos clássicos da teoria  $\Omega$ . Neste caso, mesmo que a identidade faça sentido para os objetos sendo contados, ela não é invocada durante o processo, dado que ele não faz uso nenhum dela. No caso dos  $m$ -átomos, já que não há nenhuma identidade para eles, ela não poderia ser invo-

cada nem em princípio, e mesmo que se tome a relação definida por Jantzen como algum tipo de identidade, os resultados da definição de cardinal são todos derivados sem apelarmos explícita ou implicitamente a ela. Então, a afirmação de que a identidade se introduz na definição alternativa de cardinal não se justifica.

#### 4.8 OBSERVAÇÕES ADICIONAIS

Este pode ser o momento certo para discutirmos mais uma vez a relação entre individualidade e o processo de contagem. Conforme observamos anteriormente, considerando as várias formas que uma teoria da individuação pode assumir, Lowe afirma que deveríamos entender contagem e individualidade como sendo noções independentes ((LOWE, 2003, p.77)), de modo que contar uma coleção não iria pressupor nem implicar a individualidade destes itens. A noção clássica de contagem, como nós argumentamos, não parece permitir este tipo de separação, mesmo que seja compatível com grande parte das posições existentes atualmente concernindo o problema da individuação. No que diz respeito aos não-indivíduos, por outro lado, as coisas já não são tão simples se aderirmos à visão de que a contagem pode apenas ser realizada de acordo com a noção tradicional, já que então parecerá impossível defender a possibilidade conceitual de não-indivíduos e ainda permitir que coleções deles tenham um cardinal associado.

Aqui nós apresentamos uma proposta segundo a qual a distinção entre contagem e individualidade pode ser mantida consistentemente, e apresentamos uma definição alternativa de contagem que pode funcionar em situações envolvendo objetos que consideramos como sendo não-indivíduos. A principal motivação para o procedimento de contagem apresentado aqui origina-se com a mecânica quântica ortodoxa e uma concepção metafísica que pode ser associada a ela, a assim chamada Concepção Recebida. É a nossa opinião de que devemos levar a sério esta possibilidade conceitual, que consideramos não-trivial, já que ela pode ser vista como tendo de certa forma algum suporte oriundo de uma teoria empírica de tanto sucesso. De fato, a Concepção Recebida merece ser estudada com muito cuidado e desenvolvida em seus vários aspectos, incluindo a noção de contagem, de modo que a incompatibilidade desta e outras noções relacionadas com o nosso modo tradicional de entendê-las não deve ser visto como uma razão para abandonar a Concepção Recebida, mas antes como motivação para o desenvolvimento de explicações alternativas para estas noções. Então, eliminar

tais possibilidades a partir de considerações *a priori* baseadas em uma noção particular de contagem, por exemplo, parece uma vitória ganha a custo muito baixo, de modo que deveríamos ter suspeitado antes.

Vamos insistir mais um pouco neste ponto. Conforme observamos no primeiro capítulo, a mecânica quântica é uma teoria que ficou famosa por gerar muitos paradoxos, entre eles temos o que se chama hoje em dia de *subdeterminação da metafísica pela física*, ou ainda a *segunda tese da subdeterminação*.<sup>4</sup> No caso preciso da mecânica quântica, vamos recordar, a segunda tese da subdeterminação nos diz que, baseando-nos apenas na teoria quântica não seremos capazes de decidir que tipo de metafísica está associada a ela, uma metafísica de indivíduos ou uma metafísica de não-indivíduos (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4)). Então, dada esta situação, o campo está aberto para os diversos esquemas conceituais possíveis que podem ser associados a cada uma das visões competidoras. Ao adotarmos o pacote dos não-indivíduos, como fizemos anteriormente, devemos encarar todas as dificuldades que estão no seu caminho para se tornar um framework conceitual respeitável. Uma destas dificuldades concerne a compreensão adequada de noções como contagem e cardinalidade, que agora, como argumentamos, deve ser entendida em algum sentido não padrão. Mas o ponto principal é que o aparato conceitual deve ser desenvolvido propriamente para se adaptar às linhas guias da metafísica em questão, e não que a concepção metafísica deva se adaptar a algum aparato conceitual prévio que tenhamos ou então perecer por não ser compatível com ele. Tomar este tipo de posição significaria ter quebrado a subdeterminação de início, e aceitado que o pacote metafísico dos indivíduos é o melhor. Isto é, escolher uma das alternativas nos compromete com aceitar que algumas ferramentas conceituais podem ser usadas livremente, enquanto que outras devem ser melhoradas e modificadas ou podem até mesmo se mostrar inadequadas, sendo que neste caso devem ser simplesmente deixadas de lado.

Então, o ponto que estamos tentando deixar claro é que dada uma concepção metafísica que em princípio se apresenta apenas em um nível bastante rudimentar, informalmente, não completamente articulado, como ocorre com a Concepção Recebida, o que devemos tentar fazer é articular e desenvolver um framework conceitual adequado para ela, tornando precisas suas principais noções e as relações entre seus

---

<sup>4</sup>A primeira tese de subdeterminação propõe basicamente que teorias são subdeterminadas pelos dados empíricos, isto é, diferentes teorias podem dar conta dos mesmos dados, de modo que não podemos decidir entre elas apelando apenas para as experiências.

conceitos. Algumas vezes, como ocorre com a Concepção Recebida, a articulação precisa de algumas das teses metafísicas associadas com a teoria podem demandar uma mudança no aparato lógico, uma mudança que traz consigo outras mudanças em outros conceitos fundamentais também. Nestes casos, insistir em manter os conceitos tradicionais tornaria todo o debate sem sentido, e a própria base para o desenvolvimento de uma concepção metafísica alternativa ficaria bloqueada em princípio sem nenhum julgamento adequado de seus méritos. Isto é precisamente o que ocorre com as noções de contagem e cardinalidade na mecânica quântica quando a teoria é interpretada de acordo com a Concepção Recebida. depois de reconhecermos que as noções de contagem e atribuição de cardinal em suas concepções tradicionais são bastante úteis para objetos clássicos, e também que ambas parecem pressupor a individualidade, devemos então impô-las na mecânica quântica e rejeitar a Concepção Recebida? Acreditamos que esta não seria a melhor opção, não deveríamos tentar ampliar a qualquer custo o uso daqueles conceitos para domínio de objetos quânticos, que parecem se comportar de um modo tão distinto dos objetos clássicos, mas antes deveríamos desenvolver noções alternativas para explicar o emprego não-padrão daqueles conceitos no domínio quântico. De fato, conforme o tempo passa, o ponto parece ser que aprendemos mais se empregarmos o estímulo oriundo da teoria quântica para revisarmos velhos conceitos do que se utilizarmos velhos conceitos para tentar domar a mecânica quântica.

## 5 QUANTIFICAÇÃO E NÃO-REFLEXIVIDADE

Falando informalmente, o *Princípio da Identidade*, um dos enunciados considerados como uma das principais “leis da lógica”, nos garante em uma de suas formulações mais conhecidas que todo objeto é idêntico a si mesmo. Sistemas de lógica não-reflexiva, grosso modo, são lógicas em que este princípio não é válido irrestritamente. Uma das dificuldades para estes sistemas provém do uso dos quantificadores: argumenta-se que para que os quantificadores façam sentido, devemos pressupor o conceito de identidade, e deste modo, sistemas de lógica não-reflexiva empregando quantificadores pressupõe a validade de uma forma do princípio da identidade que se desejava derrogar. Em particular, conforme já expusemos, a teoria  $\Omega$  é um sistema de lógica não-reflexiva. De fato, ela é um dos principais alvos dos argumentos contra a quantificação. Argumentaremos que podemos compreender o uso da quantificação em sistemas não-reflexivos sem pressupor a identidade.

Nossa argumentação seguirá três vias: de um ponto de vista sintático, proporemos que a identidade não é necessária quando desejamos dar um sentido operacional aos quantificadores. Podemos introduzir quantificadores em termos do famoso  $\varepsilon$  de Hilbert, cuja compreensão, argumentaremos, não pressupõe a identidade. De um ponto de vista semântico, por outro lado, argumentaremos no sentido de que uma compreensão dos quantificadores nos compromete com a identidade dos objetos quantificados se a semântica for clássica, ou seja, feita em uma teoria de conjuntos como Zermelo-Fraenkel. Vamos argumentar que uma semântica feita em um framework conceitual não-reflexivo como a teoria de conjuntos pode nos ajudar a dar sentido para sentenças quantificacionais em contextos não-reflexivos. Por fim, apresentaremos uma argumentação de caráter mais pragmático. Pode-se objetar que as lógicas não-reflexivas falham em dar sentido aos quantificadores pois não captam uma característica básica da linguagem natural, que seria justamente o fato de que esta é reflexiva. Assim, segue o argumento, na linguagem natural há uma relação entre quantificação e identidade que é destruída em sistemas não-reflexivos, e é justamente esta relação que fundamenta a compreensão dos quantificadores. Argumentaremos que apelos à linguagem natural sofrem do defeito de que esta é extremamente vaga e presta-se ao serviço de praticamente qualquer tese filosófica. Assim, longe de ser evidência contra a não-reflexividade, este argumento apenas aponta para um pretenso aspecto da linguagem natural que, assim como muitos outros, pode convenientemente

ser deixado de lado em estudos mais específicos.

## 5.1 INTRODUÇÃO

Um dos principais problemas filosóficos concernindo a mecânica quântica não-relativista diz respeito à sua ontologia: muitos filósofos e até mesmo muitos dos seus fundadores sustentam que a teoria pode ser vista como estando comprometida com objetos que não são *individuos* em nenhum sentido deste termo. De fato, este modo de se entender a ontologia da teoria é tão difundido que recebeu até mesmo um nome: a Concepção Recebida acerca da não-individualidade das partículas quânticas. Segundo a Concepção Recebida, em oposição ao que ocorre com as partículas clássicas, as partículas das quais trata a mecânica quântica não são indivíduos. Falando bastante por alto, para não entrarmos nos detalhes acerca do principal argumento conduzindo à esta posição, o problema com as partículas quânticas parece residir no fato de que podem ser consideradas como sendo absolutamente indistinguíveis. De fato, sustenta-se que nada, nenhuma medição de grandeza qualquer poderia ser suficiente para distinguir entre duas partículas quânticas do mesmo tipo (elétrons, por exemplo). Isto, claro, é tomado como refletindo a própria natureza das partículas, não limitações de nossos aparatos de medição. Assim, estas partículas são absolutamente indistinguíveis, não é possível, segundo a Concepção Recebida, distinguir entre duas partículas semelhantes, e como consequência desta indistinguíbilidade, alguns chegaram a sustentar que a própria noção de identidade deixou de fazer sentido para estas partículas (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006) para detalhes acerca de todos estes pontos).

Muitas dificuldades surgem desta posição. Como um primeiro exemplo, podemos mencionar o desafio sobre como podemos dar sentido à afirmação de que as partículas quânticas não são indivíduos? Como devemos entender a falta de sentido da relação de identidade para estas partículas? Como podemos falar delas se são absolutamente indistinguíveis? Este último ponto, juntamente com a alegada não-individualidade das partículas, levou muitos filósofos a questionar a própria “objetualidade” das partículas quando entendidas de acordo com a Concepção Recebida. De fato, alguns filósofos sustentam que, se as partículas são indistinguíveis, e se a identidade não se aplica a elas, então, não podem estar no domínio de quantificação de uma linguagem de primeira ordem, não podem ser valores de variáveis quantificadas.

Logo, segundo uma muito difundida concepção do que seja um objeto, a concepção de Frege-Quine dos objetos, as partículas quânticas não são objetos. Mas, sem objetos, alega-se, perdemos toda a capacidade de discurso, não podemos predicar, nomear, em suma, não se pode mais fazer enunciados verdadeiros ou falsos acerca das partículas (ver Saunders (SAUNDERS, 2006), Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008), Muller (MULLER, 2011), Teller (TELLER, 2001) e Ladyman e Bigaj (LADYMAN; BIGAJ, 2010) para trabalhos apontando para estas conclusões, com reações variadas).

De fato, toda esta discussão está diretamente ligada à quantificação através de um slogan de Quine muito difundido na filosofia atual, segundo o qual ser é ser o valor de uma variável. Se algo não pode estar no domínio de quantificação de uma teoria, então não pode existir segundo esta teoria. Ainda segundo outro famoso slogan de Quine, não existem entidades sem identidade, assim, se algo não possui identidade, então não pode estar no domínio de quantificação, e conseqüentemente, não pode ser considerado como uma das entidades tratadas pela teoria. Deste modo, a própria noção de entidade está relacionada com a quantificação. A consequência disto é que, partículas indiscerníveis, se forem entendidas segundo a Concepção Recebida, não serão entidades na concepção quiniiana adotada por muitos filósofos, daí sua resistência em aceitar que sejam de fato indiscerníveis e não-indivíduos. Aparentemente, a concepção Frege-Quine de objetos é atraente por ser “magra” de um ponto de vista metafísico.

Os desenvolvimentos recentes em filosofia da mecânica quântica nesta área voltam-se para o que se chama de *discernibilidade fraca*. Segundo alguns autores (ver as obras referidas de Saunders e Muller), a Concepção Recebida está equivocada, e as partículas quânticas de fato podem sim ser consideradas como objetos em seu sentido tradicional. O argumento baseia-se no fato de que mesmo que as partículas quânticas possam ser vistas como partilhando todas as suas propriedades em comum, aparentemente podemos discernir partículas de um mesmo tipo através de certo tipo de *relação*, as relações simétricas e irreflexivas. Assim, dois elétrons, por exemplo, poderiam ser distinguidos pela relação “ter spin oposto (em uma direção)”, já que nenhum elétron tem spin oposto a si mesmo. Se dois elétrons estão nesta relação, então, a relação é dita discerni-los *fracamente*. Claro, o uso de relações aqui gera imensa controvérsia, e não está nem um pouco claro como dois elétrons podem ser discernidos se não apresentam nenhuma diferença específica. Assim, pelo menos nesta linha de ataque, a controvérsia não está de modo algum resolvida. As partículas são ou não são objetos?

Estamos autorizados a sustentar que são elementos de um domínio de quantificação, que podemos quantificar com sentido sobre partículas quânticas?

Claro, sempre podemos mudar nossa concepção de objetos, podemos não estar satisfeitos com a concepção Frege-Quine (ver as discussões em Lowe (LOWE, 1997)). Podemos ir ainda mais longe e mudar de lógica. De fato, podemos flexibilizar nossa concepção tradicional de objetos e permitir que o domínio de quantificação seja um domínio não clássico em que se quantifique sobre itens para os quais a identidade não faz sentido. Assim, seria uma questão de terminologia saber se ainda temos objetos ou outro tipo de coisas, mas pelo menos aparentemente salvamos a própria noção de que se pode fazer afirmações sobre partículas quânticas, de que há discurso acerca destas entidades. De fato, lógicas deste tipo já estão disponíveis na literatura, e sua principal motivação provém exatamente da Concepção Recebida, e da busca de se dar um sentido preciso para a noção de não-indivíduos (para exemplos destes sistemas, ver da Costa e Krause (COSTA; KRAUSE, 1994), (COSTA; KRAUSE, 1997), French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.7-8)). A estratégia na formulação deste tipo de sistemas de lógica consiste justamente em se limitar a aplicação da identidade. Para alguns termos da linguagem, a relação “=” simplesmente não irá se aplicar, ela deixará de ser uma fórmula, e assim, para este tipo de termos, a identidade deixa de fazer sentido. A não-individualidade então passa a ser entendida formalmente como esta ausência de identidade. A interpretação pretendida destes termos, claro, são os não-indivíduos.

Um ponto importante a ser notado aqui é que a ausência de identidade passa a ser englobado na própria linguagem destas lógicas. De fato, passa a ser uma característica destas lógicas uma determinada restrição sintática no que diz respeito à identidade. Em particular, a lei reflexiva da identidade que nos garante que  $\forall x(x = x)$ , fica restrita. Daí vem o nome destas lógicas, as *Lógicas Não-Reflexivas*. Mais do que isso, a propriedade reflexiva da identidade é frequentemente considerada como enunciando o chamado *Princípio da Identidade* (PI), uma das chamadas três *Leis da Lógica*, juntamente com a Lei da Não-Contradição e a Lei do Terceiro Excluído. Assim, de modo geral, lógicas não-reflexivas são sistemas que violam ou restringem alguma forma do Princípio de Identidade. Mas, como estamos notando, a restrição da identidade em uma lógica não-reflexiva dá-se ao nível da sintaxe, enquanto que o principal problema das partículas quânticas e da sua objetualidade estava ligado à interpretação: partículas indiscerníveis não podem estar no domínio de quantificação de uma lógica de primeira

ordem clássica. O que dizer do domínio de quantificação de uma lógica não-reflexiva? Podemos quantificar legitimamente sobre partículas indiscerníveis simplesmente pelo fato de que a identidade não faz sentido *na linguagem* que estamos empregando? Uma restrição sintática é capaz de resultar em uma mudança correspondente na semântica?

É aqui que os dois problemas se mostram ser de fato um e o mesmo: a objetualidade das partículas e a quantificação em lógicas não-reflexivas envolvem basicamente a problemática quantificação sobre objetos indiscerníveis que não são indivíduos. Até aqui, apenas mencionamos os principais problemas: segundo alguns autores, não-indivíduos não podem estar no domínio de quantificação de uma lógica de primeira ordem. Simplesmente não podemos quantificar sobre eles, dizem. Qual é o motivo? São indiscerníveis, e não possuem identidade. Estas seriam condições para que se quantifique sobre algo (daí a busca pela discernibilidade fraca como um último recurso). Mas então, as próprias lógicas não-reflexivas, na medida em que incorporam mudanças apenas na sua sintaxe, estão aptas a cair vítimas o mesmo problema, e enfrentam a dificuldade adicional: como podemos dar sentido à quantificação nestas lógicas? Não podemos simplesmente assumir que com a mudança sintática garantimos as entidades pretendidas na semântica. Aparentemente, surge aqui um dilema para quem propõe uma lógica não-reflexiva: ou bem a quantificação não faz sentido nestas lógicas, e melhor seria abandonar este projeto juntamente com a motivação metafísica que o motiva, ou então a quantificação faz sentido, mas não quantificamos realmente sobre não-indivíduos, e novamente a motivação metafísica para lógicas não-reflexivas está em apuros. Qualquer um dos lados do dilema é insatisfatório para os defensores de uma ontologia de não-indivíduos.

Devemos notar em primeiro lugar que é tomado praticamente como um consenso que a quantificação pressupõe a identidade dos itens sobre os quais se quantifica. Este ponto não chega nem mesmo a ser mencionado algumas vezes. Neste trabalho analisaremos precisamente esta dificuldade: a quantificação pressupõe a identidade dos objetos sobre os quais se quantifica? As lógicas não-reflexivas falham em conferir sentido aos quantificadores na medida em que buscam quantificar sobre objetos sem identidade? Nossa discussão começará esclarecendo de modo geral a natureza dos sistemas não-reflexivos, quais suas peculiaridades, e como violam PI. Seguiremos depois tratando precisamente de quais são os argumentos a favor da concepção tradicional de que a quantificação pressupõe a identidade. Veremos alguns argumentos apresentados em favor desta tese, para depois avaliarmos se eles tem

sucesso em mostrar que de fato há relação entre identidade e quantificação. Como um último passo proporemos algumas estratégias para aqueles que desejam sustentar que se pode atribuir sentido aos quantificadores mesmo em situações em que a identidade não esteja envolvida para as entidades do domínio de quantificação.

## 5.2 LÓGICAS NÃO-REFLEXIVAS

Conforme mencionamos brevemente, lógicas não-reflexivas são lógicas que violam alguma forma do Princípio de Identidade. Como o princípio em questão muitas vezes vem caracterizado como a lei reflexiva da identidade, é razoável batizarmos estes sistemas de lógica como lógicas não-reflexivas. Todavia, existem diversas versões do chamado Princípio de Identidade disponíveis na literatura. Intuitivamente falando, as versões mais difundidas do princípio de identidade enunciam em geral que “todo objeto é idêntico a si mesmo”, ou ainda “todo objeto é idêntico a si mesmo, e a nada mais”, ou mais vagamente ainda, “tudo o que é, é”. Todavia, apesar de estas serem as formulações mais famosas, formalizações do princípio assumem diversas características dependendo da linguagem que se emprega, e o resultado é que nem sempre estas formalizações são equivalentes entre si (ver da Costa (COSTA, 1997, pp.114-115)). De fato, nem todas as formulações de PI são realmente diretamente relevantes para a discussão acerca da ontologia associada à mecânica quântica e a relação entre identidade e quantificação. Vejamos brevemente o motivo.

Começamos considerando o caso do cálculo proposicional, em cuja linguagem o PI pode ser formulado pelo menos das seguintes maneiras:

1.  $\alpha \rightarrow \alpha$ ;
2.  $\alpha \leftrightarrow \alpha$ ;
3.  $\forall p(p \rightarrow p)$ .

No terceiro caso, estamos supondo que introduzimos quantificadores para proposições, dando origem assim ao cálculo proposicional generalizado. Na sua versão proposicional, o PI assume em geral uma formulação eminentemente semântica, sendo lido como “uma vez verdade, sempre verdade, uma vez falso, sempre falso”, ou seja, trata de valores de verdade, não da natureza de quaisquer tipos de objetos (claro, há uma discussão acerca da objetualidade dos valores de verdade, mas não

precisamos entrar nestes detalhes aqui). Nestas condições, claro, violar PI não significa necessariamente que os objetos dos quais tratamos não possuem identidade, como queremos para as partículas quânticas na Concepção Recebida, e aparentemente não teremos as dificuldades que surgem nos casos de primeira ordem mencionados brevemente acima. Todavia, uma questão poderia ser levantada: se a dificuldade com quantificadores diz respeito à identidade dos objetos quantificados, o que dizer de quantificarmos sobre proposições? Não seriam elas objetos notoriamente problemáticos no que diz respeito à identidade? E não quantificamos usualmente com sentido sobre proposições? Estas questões a parte, temos que aparentemente estas versões proposicionais de PI poderiam ser violadas sem que se ameaçasse o sentido da quantificação (para uma lógica violando uma forma proposicional do PI, ver Sylvan e da Costa (SYLVAN; COSTA, 1988)).

Mais interessantes para os fins a que nos propomos são as versões do PI em linguagens de primeira ordem com identidade. Além das versões acima utilizando o conectivo de implicação, podemos formular o PI em linguagens com identidade das seguintes formas, que são simplesmente versões da chamada *propriedade reflexiva da identidade*:

1.  $t = t$ ;
2.  $\forall x(x = x)$ .

Claro, em lógicas de primeira ordem clássicas estas duas versões são equivalentes. Elas incorporam melhor do que as versões do cálculo proposicional a ideia usual do PI como nos informando que todo objeto é idêntico a si próprio. Aqui, como pode ficar claro, temos uma versão que se poderia chamar de sintática do PI, ele está codificado na linguagem do cálculo em questão. Esta formulação tem interesse para o estudo de ontologia, pois trata de uma lei que deveria ser obedecida por quaisquer objetos dos quais esta lógica tratar, são restrições impostas aos objetos do domínio no qual interpretamos teorias formuladas tendo esta lógica como lógica subjacente.

Como podemos entender uma lógica não-reflexiva neste caso? Se desejamos violar estas leis, o que precisamos fazer? Ora, como dissemos, estas são formulações sintáticas do PI, assim, uma violação que deve ocorrer ao nível da própria linguagem. Exemplos de lógicas não-reflexivas costumam impor restrições na própria definição de fórmula. Esta é a estratégia das chamadas lógicas de Schrödinger e da Teoria de Quase-Conjuntos. A ideia é que, para um determinado tipo de termos da linguagem (variáveis individuais e constantes individuais), a identidade simplesmente não será uma relação permitida, ou seja, não serão

*fórmulas da linguagem* seqüências de símbolos compostas pela relação de identidade e termos desta espécie. Claro, em geral estes termos tem como denotação pretendida os não-indivíduos. Esta estratégia busca captar a ideia de que a identidade “não faz sentido” para alguns tipos de objetos. Devemos notar que esta maneira de violar PI em particular não se restringe apenas a uma violação deste princípio quando este é formulado como a propriedade reflexiva da identidade, mas também impede que qualquer tipo de enunciado acerca da identidade seja feito que envolva os termos em questão (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, caps.7-8) para exposições destas lógicas).

Um ponto importante a se notar é que estas são restrições sintáticas. A princípio, a própria lógica clássica de primeira ordem *sem* identidade satisfaz as condições para ser uma lógica não-reflexiva: de fato, a propriedade reflexiva da identidade não faz sentido para seus termos, ela não pode ser enunciada. Com uma concepção ampla do que estamos entendendo por “violar” PI, temos que PI é de fato violado por estas lógicas. Todavia, como apresentamos no parágrafo anterior, a quantificação não seria problemática para este caso pois a semântica para a lógica clássica é feita em uma teoria de conjuntos usual, na qual a identidade sempre se aplica para todos os objetos sobre os quais quantificamos. Assim, apesar do fato de que a lógica clássica de primeira ordem satisfaça os requisitos para ser uma lógica não-reflexiva, ela aparentemente não apresenta nenhuma dificuldade no que diz respeito à quantificação. O que há de errado aqui? Estivemos laborando em um falso problema?

O que deve ser notado é que a não-reflexividade é em primeiro lugar uma tese de caráter metafísico. Ela trata da *natureza* de determinados objetos, e as lógicas não-reflexivas são sistemas de lógica que buscam captar formalmente aspectos destes objetos, dando ênfase para a falha da identidade. A caracterização de uma lógica não reflexiva como fizemos acima, como sendo um sistema que viola alguma forma do PI deixa algumas lacunas para que se formulem sistemas não-reflexivos que não estão necessariamente vinculados com a proposta *metafísica* que está na origem histórica das motivações para se propor sistemas não-reflexivos (ver da Costa (COSTA, 1997, pp.138-141), French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.6)). Este parece ser o caso, por exemplo, para sistemas violando a versão proposicional do PI ou sistemas que, apesar de incorporarem limitações na sintaxe, possuem uma semântica clássica, feita em uma teoria de conjuntos que respeita a propriedade reflexiva da identidade. Mais do que uma simples mudança sintática, para que uma lógica não-reflexiva esteja de acordo com

suas motivações precisamos garantir que a semântica será ela também feita de modo que os objetos do domínio de quantificação sejam eles mesmos objetos sem identidade. Apenas assim estaremos garantindo que a situação problemática entre quantificação e identidade conforme formulada acima poderia surgir.

Mas, neste caso, quais são de fato as dificuldades que poderiam surgir com relação ao sentido dos quantificadores? Vejamos agora alguns dos argumentos apresentados para se tentar mostrar que a quantificação pressupõe a identidade, de modo que as versões de lógicas não-reflexivas que buscam incorporar a sério a tese metafísica subjacente à Concepção Recebida, por exemplo, poderiam estar ameaçadas, e com elas, a própria coerência conceitual da Concepção Recebida como uma concepção acerca da natureza de determinados objetos. De fato, estes argumentos buscam atacar a Concepção Recebida e sua maneira de conceber a ontologia da mecânica quântica através de argumentos de coerência lógica: os objetos que esta ontologia propõe não poderiam existir se os quantificadores realmente pressupõem a identidade dos objetos sobre os quais se quantifica.

### 5.3 QUANTIFICAÇÃO E IDENTIDADE

Vamos agora conferir alguns dos argumentos apresentados na literatura em favor da tese de que a quantificação pressupõe a identidade. Como mencionamos acima, muitos tomam esta tese como demasiado óbvia para que se argumente em seu favor. Todavia, vamos ver os argumentos para melhor avaliarmos sua plausibilidade e sua força.

O primeiro argumento que desejamos apresentar aparece em da Costa e Bueno (COSTA; BUENO, 2009, p.192), e Bueno em (HOWARD et al., 2011, pp.238-239). Segundo este argumento, o quantificador universal “todo” é equivalente a “cada”. Por um lado, quantificar sobre todos implica quantificar sobre cada um, e “todos” implica “cada”. Por outro lado, quantificar sobre cada objeto do domínio faz com que o quantificador percorra todos os objetos, e assim, “cada” implica “todos”. Mas, o argumento segue, para quantificarmos sobre cada objeto, eles, os objetos, devem ser distinguíveis uns dos outros, caso contrário o quantificador não percorreria objetos distintos e conseqüentemente, não esgotaria o universo de discurso, ou seja, devemos garantir que o quantificador não percorre o mesmo objeto diversas vezes sem percorrer o domínio todo. Assim, como a quantificação universal pressupõe a identidade dos objetos, aparentemente não podemos conferir sentido

ao quantificador em contextos não-reflexivos, ou seja, quando desejamos que em uma lógica não-reflexiva os domínios de quantificação na interpretação pretendida contenham não-indivíduos.

Algo semelhante a este argumento parece estar por trás da afirmação de Teller de que a quantificação pressupõe a identidade dos itens sobre os quais quantificamos (ver (TELLER, 2001, p.367)). Segundo Teller, ao quantificarmos precisamos garantir que o valor da variável ligada pelo quantificador permanece constante em cada ocorrência desta variável. Permanecer constante significa que as várias ocorrências da variável denotam o mesmo referente, e isso implica que devemos pressupor que a identidade se aplique aos objetos sobre os quais quantificamos. Ao que parece, este argumento busca o mesmo efeito que o argumento apresentado acima, no qual o quantificador é visto como de certo modo percorrendo os valores do domínio. Ainda, parece pressupor que um enunciado quantificado é sempre um enunciado sobre objetos particulares, não um enunciado geral sobre nenhum objeto em particular.

O próximo argumento que parece testemunhar em favor da relação entre identidade e quantificação está relacionado com a própria semântica formal apresentada na lógica clássica para os quantificadores  $\forall$  e  $\exists$  (ver da Costa e Bueno (COSTA; BUENO, 2009, p.192-193)). Como é bem conhecido, nestes casos trabalhamos geralmente em uma metalinguagem que tomamos como sendo alguma teoria de conjuntos como ZFC, por exemplo, mesmo que mantida apenas ao nível intuitivo. Especificamos em que condições fórmulas da forma  $\forall x_i \alpha(x_i)$  e  $\exists x_i \alpha(x_i)$  são verdadeiras recorrendo à noção de *satisfação de uma fórmula* por uma sequência de objetos do domínio de interpretação. Assim, dada uma sequência  $s$  destes objetos, dizemos que  $s$  satisfaz  $\forall x_i \alpha(x_i)$  se e somente se qualquer sequência  $s'$  que *difira* de  $s$  no máximo no  $i$ -ésimo componente satisfaz  $\alpha$ ; para a fórmula  $\exists x_i \alpha(x_i)$ , dizemos que  $s$  a satisfaz se e somente se existe uma sequência  $s'$  que difere de  $s$  no máximo no  $i$ -ésimo componente e satisfaz  $\alpha$ . Ou seja, em ambos os casos devemos poder selecionar sequências  $s$  de objetos e determinar se uma sequência  $s'$  contendo todos os seus elementos iguais a  $s$  e possivelmente sendo tal que  $s(x_i) \neq s'(x_i)$ , ou seja, diferem no máximo em seu  $i$ -ésimo componente. Para isto precisamos da identidade em praticamente todos os passos. O mesmo aparentemente pode ser dito para outras noções semânticas, como por exemplo, a noção de ‘verdade’. O argumento propõe então que, como a semântica nos ajuda a compreender o sentido da quantificação para linguagens formais, segue-se que esta compreensão envolve a identidade.

Como um último argumento, podemos considerar duas formas

de inferência empregando quantificadores (ver Bueno em (HOWARD et al., 2011, p.239)). Segundo Bueno, este argumento faz uso da alegada equivalência entre “todo” e “cada” mencionada anteriormente, e diz respeito ao nosso entendimento acerca da validade de certas regras de inferência envolvendo quantificadores na lógica clássica. Para garantirmos que compreendemos a diferença entre as seguintes formas de inferência, necessitamos da identidade:

(E) se  $a$  é  $F$ , então algo é  $F$ ;

(U) se  $a$  é  $F$ , então todo objeto é  $F$ .

A primeira forma de inferência (E) é válida na lógica clássica, e a segunda é geralmente inválida, a menos que  $a$  denote um objeto arbitrário. No entanto, segundo o argumento que estamos analisando, para se verificar que estas duas formas de inferência não são ambas válidas, devemos fazer uso da relação de identidade entre os objetos do domínio sobre os quais estamos quantificando. De fato, o modo usual para argumentarmos que a segunda forma de inferência não vale consiste em se apresentar um contra-exemplo em alguma interpretação dos símbolos envolvidos. Para tanto, basta verificar que, mesmo que  $a$  possua a propriedade  $F$ , existem situações em que há algum objeto **distinto** de  $a$  que não possui  $F$ , e para tanto, precisamos da identidade valendo entre os objetos em questão. Sem isso, acabaríamos obscurecendo uma distinção importante entre os dois quantificadores. Precisamos da identidade, então, para sermos capazes de dar sentido a esta distinção importante no que diz respeito à validade das inferências que podem ser feitas de modo legítimo e ilegítimo com quantificadores, e assim, sem identidade não seríamos capazes de entender a quantificação adequadamente.

Com estes argumentos, então, deseja-se provar que a identidade é uma noção fundamental para se dar sentido aos quantificadores e assim, para a própria compreensão do significado das expressões quantificadas. Não é possível, aparentemente, *dar sentido* aos quantificadores sem que a noção de identidade valha para os objetos sobre os quais quantificamos. Mas o que exatamente estes argumentos provam? Serão eles realmente uma ameaça a qualquer projeto de lógicas não-reflexivas envolvendo quantificadores? Vamos analisar este ponto na próxima seção.

## 5.4 ANÁLISE DOS ARGUMENTOS

Vamos analisar estes argumentos com algum cuidado. O primeiro ponto a ser levado em conta é o peso que devemos atribuir ao que desejam provar os argumentos: sem identidade, não podemos fazer sentido da quantificação. Note que, se acrescentarmos que a quantificação é essencial para qualquer tipo de discurso científico e filosófico, poderíamos concluir que, já que não-indivíduos não podem estar no domínio de quantificação de qualquer tipo de lógica (como parecem querer provar os argumentos), e como a quantificação é essencial, então, a tese de que partículas quânticas, por exemplo, são não-indivíduos, deve ser abandonada. Assim, a não-individualidade, ao invés de ser um motivo para que se busque estratégias diferentes como a discernibilidade fraca para se fundamentar a objetualidade das partículas deve ser vista como banida por motivos de ordem lógico-linguística, e sequer precisamos nos preocupar com problemas como a discernibilidade fraca. Mas podemos inferir conclusões ontológicas de argumentos de ordem lógica? Talvez este seja um bom motivo para começarmos a desconfiar destes argumentos (mais sobre isso adiante).

Vamos começar considerando o argumento acima de que “todos” é equivalente a “cada”, e que este último nos dá o significado do quantificador. Devemos notar em primeiro lugar que esta leitura está sendo feita na linguagem natural. Claro, pois em princípio estamos buscando dar sentido aos quantificadores através de uma interpretação, e ao que parece, o argumento busca mostrar que o símbolo de quantificador pode ser entendido equivalentemente como “todos” e como “cada”. Mas, mesmo que nos restrinjamos a um determinado domínio sobre o qual o quantificador deve variar (segundo o argumento), será que “cada” pressupõe a identidade dos objetos sobre os quais quantificamos? O argumento nos diz que isso deve ocorrer para que o quantificador percorra todos os objetos, não apenas o mesmo objeto diversas vezes, o que quebraria a alegada equivalência (Bueno (HOWARD et al., 2011, p.239)).

O primeiro ponto a ser discutido concerne esta imagem do quantificador “passeando” pelo domínio. O sentido do quantificador deveria ser dado pela interpretação, e esta, como quer o argumento, envolve a compreensão de “cada”. Todavia, “cada” ainda envolve por sua vez uma compreensão de certo tipo de “atuação” do quantificador, que percorre o domínio e necessita que objetos sejam distinguíveis um do outro para que sejam percorridos e para que tenhamos “todos”. Ou seja, para termos “cada  $x$  é  $F$ ”  $\Rightarrow$  “todos  $x$  são  $F$ ” precisamos que o quantificador varie sobre distintos objetos, caso contrário não percorreria todo

o domínio. Claro, distinguibilidade nos dá diferença, e diferença é a negação da identidade. Mas este seria um problema de quantificação? Note que podemos sustentar que este parece antes um problema acerca da denotação de  $F$ , não de um quantificador percorrendo os objetos individualmente em um processo, como sugere o argumento. Ou seja, a questão que se coloca com a quantificação universal diante de  $F$  é sabermos se a extensão de  $F$  engloba todo o domínio, e isto não precisa pressupor a identidade dos objetos como quer o argumento, a imagem do quantificador “percorrendo” o domínio é equivocada, um adendo desnecessário que carrega uma imagem visual muito mais comprometedora do que desejamos. De fato, esta ideia do quantificador percorrendo o domínio dificilmente pode ser carregada para domínios como o conjunto dos reais, ou outros domínios que não podem ser enumerados nem facilmente visualizados mentalmente.

A volta do argumento, para inferir “todo  $x$  é  $F$ ”  $\Rightarrow$  “cada  $x$  é  $F$ ”, aparentemente contradiz nosso argumento do parágrafo anterior. Segundo Bueno *loc. cit.*, para que esta implicação seja válida, não basta que todos os objetos do domínio instanciem  $F$ , é preciso que eles instanciem cada um *individualmente*  $F$ , e isto pressupõe a identidade. Mas note, neste caso, aparentemente estamos falando de uma noção diferente de instanciar uma propriedade. Em contextos extensionais, não basta estar na extensão do predicado para o instanciar? Então, o que mais deve estar em jogo? Aparentemente, o que se está sugerindo é que alguma forma de verificação efetiva deve estar em jogo para cada predicado, mas isto não é realmente requerido nem mesmo para predicados de objetos que usualmente chamaríamos de indivíduos, pois, por exemplo, como faríamos isso para o predicado “ser um número real”? Assim, o argumento não funciona. Mais do que isso, podemos sustentar que esta imagem exigindo que cada objeto instancie o predicado é falsa em bases pragmáticas: quando se deseja provar um enunciado quantificado universalmente em matemática, por exemplo, não mostramos que vale para cada objeto individualmente, antes, tomamos um objeto arbitrário e exibimos a prova de que a propriedade em questão vale para tal objeto arbitrário.

Com isto, mostra-se fraca a ligação alegada entre “cada” e a identidade. Mais do que isso, como dissemos, aparentemente estamos falando de aspectos da linguagem natural, e podemos sugerir vários casos em que “cada” não parece pressupor a identidade dos objetos quantificados. De fato, trata-se de uma questão que pode derivar plausibilidade empírica do uso que fazemos das palavras, mas não pode ser provada *a priori* como quer o argumento. Nestas circunstâncias, parece

que o contrário é que é verdadeiro, “cada” não pressupõe a identidade dos objetos sobre os quais quantificamos. Vamos supor que estamos falando de unicórnios, como pode ser feito em contextos das linguagens naturais. Podemos dizer com sentido “Todos unicórnios possuem um só chifre”. Claro, isto pode ser equivalente a “Cada unicórnio possui um só chifre”. Mas isto nos obriga a aceitar que devemos ter identidade para os unicórnios? Mais, que cada unicórnio individualmente deve instanciar a propriedade “ter um só chifre”? O que queremos dizer com esta condição? Então, o que nos impede, por exemplo, de sustentarmos que elétrons são não-indivíduos, e afirmarmos, por exemplo no contexto de uma experiência de duas fendas em que apenas uma das fendas está aberta, que cada elétron emitido que atravessou pela fenda atingiu o anteparo? Não é óbvio que isto pressuponha a identidade dos elétrons. Mais, podemos garantir que cada elétron individualmente atingiu o anteparo, e que todos os elétrons envolvidos (que compreendem o domínio em questão) atingiram o anteparo. Mas onde entra a identidade aqui?

Mais um reparo que poderia ser feito ao argumento da equivalência entre “todo” e cada diz respeito à linguagem natural. Poderíamos questionar que a alegada equivalência realmente se dá. Realmente, ela pode valer para uma classe restrita de predicados, os chamados predicados *distributivos*, mas não para os predicados chamados *coletivizantes*. Um predicado  $P$  é distributivo quando, do fato de que vale para os particulares  $a, b, \dots, n$ , temos que vale individualmente para cada um deles. Assim, “ser mortal” é distributivo para seres humanos; dizemos “Sócrates, Platão, Aristóteles e Epicuro são mortais”, e também podemos inferir disso que “Sócrates é mortal”, “Platão é mortal”, e assim por diante. Isto pode ser feito devido a uma característica do predicado em questão. Um predicado é coletivizante quando não é distributivo. Por exemplo, “carregar o piano” é coletivizante; dizemos “Sócrates, Platão e Aristóteles carregaram o piano”, mas disso não estamos autorizados a dizer, por exemplo, que “Sócrates carregou o piano”.

Agora, em domínios restritos, podemos considerar a quantificação sobre predicados coletivizantes. Se dissermos “Todos os filósofos da universidade carregaram o piano”, não podemos dizer que “cada filósofo da universidade carregou o piano”. Assim, alegar que “todo” e “cada” são equivalentes não parece sempre correto. Mais ainda, se podemos entender o significado do quantificador universal sobre predicados coletivizantes, então somos capazes de entender “todos” mesmo que isto não seja equivalente a “cada”, ou seja, do ponto de vista do sentido da quantificação e da nossa compreensão dela, não precisamos associar as

duas expressões sempre. Deste modo, mesmo que “cada” estivesse comprometido com a identidade dos objetos sobre os quais se aplica, ainda assim a compreensão do quantificador não dependeria da compreensão desta expressão, nem da identidade.

O segundo argumento, apresentado por Teller (TELLER, 2001) é semelhante ao anterior. Segundo Teller, a quantificação pressupõe identidade pois as variáveis quantificadas devem ter sempre o mesmo referente. O ponto aqui é que uma variável quantificada não deve ter um referente, ela não denota um indivíduo do domínio. Neste caso, um quantificador seria visto como dando origem a um termo, o objeto  $x$  que... mas não é esse o caso quando se fala de quantificadores. Um argumento variante também é apresentado por Teller *loc. cit.*: se dizemos “qualquer acusado de um crime tem direito a um julgamento justo”, estamos, segundo Teller, afirmando algo como um enunciado coletivo sobre cada caso particular no domínio. Isso parece envolver como anteriormente muito mais a noção de denotação de um predicado ou propriedade complexa do que a quantificação. Parece que se está afirmando algo sobre a denotação da propriedade “os  $x$  acusados de um crime merecem um julgamento justo”, e a quantificação nos diz que estes  $x$  são tais que os objetos que caem sobre o predicado “ser acusado de um crime” também caem sobre o predicado “merecer julgamento justo”. Neste caso, não precisamos da identidade dos objetos para entender o que ocorre, nem da noção de denotação das variáveis. E de fato, o que nos impede de sustentarmos que partículas da mecânica quântica são não-indivíduos e afirmarmos, por exemplo, “qualquer elétron neste átomo de Hélio deve ser ionizado”? Onde a identidade dos elétrons é exigida para compreendermos esta instrução? E para compreendermos a afirmativa “todos os elétrons do átomo foram ionizados”?

Para dar uma resposta ao terceiro argumento, devemos levar em conta outros aspectos da discussão. Adiante, retomaremos também este argumento e mostraremos que não é necessário, como ele propõe especificamente, que a identidade esteja pressuposta para a compreensão da quantificação nem mesmo em contextos específicos da lógica clássica. Mas aqui, o que nos interessa é a afirmativa mais geral de que a identidade está pressuposta pela nossa compreensão da quantificação. O argumento que estamos discutindo agora busca mostrar que esta tese é verdadeira apelando para o modo como fazemos semântica formal para linguagens de primeira ordem. Neste caso, apontam, como a identidade é necessária para estes fins, não fica claro como os quantificadores podem ter sentido em lógicas não-reflexivas. O primeiro ponto a ser notado é muito simples. A semântica formal à qual o argumento apela não

deveria ser vista legitimamente como dando sentido aos quantificadores. De fato, se isto fosse verdade apenas aqueles que já fizeram um curso de lógica de primeira ordem clássica compreendendo a semântica destas lógicas seriam capazes de entender o significado dos quantificadores, o que parece pouco razoável. Além disso, pressupõe que a quantificação somente pode ser entendida por uma semântica conjuntista deste tipo, o que não é razoável. Assim, a semântica formal conjuntista pode ser vista como uma interpretação dos quantificadores, não como uma elucidação do significado dos quantificadores em absoluto. De fato, se uma semântica conjuntista fosse uma condição para compreendermos a quantificação, então, não precisaríamos de argumentos tão sofisticados para mostrar que a identidade ou diferença dos objetos é sempre algo que pode ser afirmado, isto se seguiria simplesmente da teoria de conjuntos subjacente.

Este é um ponto importante. A teoria de conjuntos na qual a semântica é feita pode ser dita *reflexiva*: nela, para quaisquer termos  $x$  e  $y$ , sempre temos  $x = y$  ou  $x \neq y$ . Mas isto implica que a compreensão dos quantificadores faz uso destes fatos? Aparentemente a semântica conjuntista para a lógica clássica de primeira ordem faz uso deste fato, mas esta, como estivemos argumentando, não é uma razão plausível para se sustentar que a compreensão dos quantificadores ou o sentido dos quantificadores dependa da identidade. Semânticas distintas, como veremos adiante, poderiam ser fornecidas para os quantificadores, tanto em metalinguagens não-reflexivas como reflexivas que parecem não pressupor a identidade quando se trata de quantificadores. No caso em que estamos interessados em quantificar sobre não-indivíduos, apelar para a reflexividade da metalinguagem como evidência contra esta tese, como se pode argumentar, consistiria em uma forma de petição de princípio, pois assumiria aquilo que se quer provar, ou seja, a tese da reflexividade.

Com relação ao último argumento, temos a distinção entre duas formas de inferência (E) e (U). Notemos que o argumento propõe que somente somos capazes de entender a diferença entre estas formas de inferência se apelarmos para a semântica, para uma interpretação dos termos, e esta, por sua vez, mostrará que a identidade está pressuposta. Mas vamos notar em primeiro lugar o seguinte: segundo o argumento, é a falsidade de (U) que pressupõe a identidade. A razão é simples: pode ocorrer que mesmo que  $a$  de fato tenha a propriedade  $F$ , nem todos os objetos do domínio tenham  $F$ . Mas para compreendermos que nem todos os objetos possuem a propriedade  $F$  não precisamos compreender que algum objeto distinto de  $a$  não tem  $F$ , basta compreendermos que

algum objeto não tem  $F$ . Ou seja, se estivermos em um contexto não-reflexivo ainda assim poderemos entender porque a regra (U) não é em geral correta. Se tivermos a identidade disponível para os objetos sobre os quais quantificamos *poderemos* utilizá-la para apresentar um contra-exemplo para (U), mas não é estritamente necessário, não é um pressuposto do argumento. Além disso, o próprio argumento mostrando que a regra não é correta não precisa ser levado a cabo em um contexto não-reflexivo. De fato, como se sabe, em muitas lógicas não-reflexivas existem também termos denotando objetos usuais, que podem entrar na relação de identidade. Assim, dado que um argumento utilizando estes objetos já mostra que as inferências em questão não são equivalentes, que motivos temos para querer aplicar uma regra de inferência incorreta para tratar de não-indivíduos?

Mas agora, se temos bons motivos para questionar os argumentos buscando comprometer a quantificação com a identidade, será que nenhum outro poderia ainda ser formulado que escape às objeções propostas aqui? Podemos nos certificar que a identidade não está pressuposta pela quantificação? Ofereceremos alguns argumentos para o efeito de que podemos compreender a quantificação sem apelar para a identidade dos itens sobre os quais quantificamos. O primeiro ponto a ser analisado consiste justamente na pressuposição de que a compreensão dos argumentos deve sempre recair sobre alguma forma de semântica. Vejamos na próxima seção como isto pode ser contestado.

## 5.5 SINTAXE E QUANTIFICAÇÃO

Agora, gostaríamos de analisar outro aspecto dos argumentos apresentados: parecem fazer a pressuposição de que a quantificação em sistemas de lógica apenas faz sentido se apelarmos para algum tipo de semântica. Se esta afirmação for levada muito longe, como dissemos, cairíamos no absurdo de que apenas aqueles que fizeram um curso de lógica seriam capazes de compreender a quantificação. Isso implicaria também que outros tipos de teorias acerca do funcionamento da linguagem, como por exemplo aquelas segundo as quais o significado é dado pelo uso, não teriam condições de explicar o sentido dos quantificadores. De fato, para teorias deste tipo, dependendo do filósofo que a propõe, podem ser tais que a própria busca por significados e sentido seja totalmente equivocada, mas não vamos entrar em digressões deste tipo aqui. Apenas gostaríamos de apontar para o fato de que, dada a multiplicidade de teorias do significado, um exame mais minucioso do

sentido dos quantificadores deveria abarcar também teorias que buscam elucidar a própria noção de significado que não envolvem o uso de aparato lógico, como estivemos analisando aqui. Mas e se nos restringirmos apenas aos quantificadores na lógica, será que somente os entendemos fazendo uso da semântica? Se optarmos por uma abordagem à lógica via teoria de provas, não seremos então capazes de entender o que estamos fazendo ao conduzir provas utilizando quantificadores? Assim, poderíamos sustentar que, se os argumentos ligando identidade e quantificação estivessem corretos, inferências utilizando quantificadores apenas começaram a fazer sentido depois do desenvolvimento da teoria de modelos?

Há uma forte corrente em lógica que sustenta que os símbolos lógicos adquirem seus significados, pelo menos parcialmente, através das regras sintáticas que obedecem, suas regras de introdução e eliminação. Esta corrente, claro, dá preferência à teoria da prova sobre a teoria dos modelos, e infelizmente para os defensores do argumento de que a quantificação só pode ser compreendida com a identidade, não serve como fonte de argumentos para seus propósitos. Pelo contrário, ela pode ser utilizada para se mostrar que esta ideia de que quantificadores percorrem domínios de objetos na verdade, se estiver certa, não é, ou pelo menos não precisa ser, nossa fonte primária de compreensão dos quantificadores. Antes, seguindo ideias propostas por Gentzen e desenvolvidas por Curry (ver por exemplo (CURRY, 1977), e também a exposição geral em Sundholm (SUNDHOLM, 2002)), nossa compreensão dos quantificadores provém das regras obedecidas pelos quantificadores. De fato, esta filosofia pode ser levada ainda mais longe, e dá origem a escolas propondo que não há nada além dos símbolos, apenas sua manipulação.

Mas o que mais podemos concluir deste tipo de abordagem? Aparentemente, esta abordagem ao significado das constantes lógicas pode ser utilizada para tirarmos conclusões que vão no sentido oposto ao proposto pelos argumentos acima, e contribuem para se desvincular identidade e quantificação. Um primeiro ponto que parece servir de testemunha para este tipo de afirmação diz respeito à própria relação de identidade. De fato, como é bem sabido, em linguagens de primeira ordem *sem identidade* e contendo apenas um número finito de símbolos de predicados específicos podemos introduzir a identidade como um símbolo definido, fazendo uso do aparato lógico da teoria, inclusive dos quantificadores, e dos símbolos não lógicos. Esta é a chamada identidade *à la* Hilbert-Bernays, que foi amplamente defendida e difundida por Quine, entre outros (ver Quine (QUINE, 1960), Ketland (KETLAND,

2006) também fornece uma exposição concisa). Vejamos brevemente do que se trata.

Segundo a definição de Hilbert e Bernays, em linguagens de primeira ordem com uma quantidade finita de símbolos de predicados não-lógicos (e podemos supor também que não tenham constantes individuais nem símbolos funcionais) uma relação de identidade pode ser definida. A ideia é que em tais linguagens podemos construir fórmulas que simulam precisamente o comportamento de uma relação de identidade. Estas fórmulas, que Ketland chama de *fórmulas de indiscernibilidade* ((KETLAND, 2006, pp.306-307)), funcionam para o efeito de que dois termos quaisquer devem poder ser substituíveis em qualquer lugar de qualquer símbolo de relação para que sejam ditos iguais, ou seja, a identidade será um caso extremo de indiscernibilidade pelo vocabulário da teoria em questão: diremos que  $x$  é igual a  $y$  quando qualquer relação  $R(x_1, \dots, x_n)$  é tal que, ao substituirmos  $x_i$  por  $x$  e por  $y$  temos que as fórmulas resultantes destas substituições são equivalentes, isto é  $R(x_1, \dots, x, \dots, x_n) \leftrightarrow R(x_1, \dots, y, \dots, x_n)$ . Isto deve valer, como dissemos, para todos os símbolos de relação da linguagem, e a substituição deve ocorrer em todas as  $n$  variáveis. Para ilustrar a ideia com um exemplo, vamos supor que temos uma linguagem de primeira ordem sem identidade e com dois símbolos para predicado de peso 1,  $P$  e  $Q$ , e um símbolo de relação binária  $R$ . A fórmula de indistinguibilidade para esta linguagem é

$$x = y =_{\text{def}} (P(x) \leftrightarrow P(y)) \wedge (Q(x) \leftrightarrow Q(y)) \wedge \forall z(R(x, z) \leftrightarrow R(y, z) \wedge R(z, x) \leftrightarrow R(z, y)).$$

Com esta fórmula, podemos provar que a relação ‘=’ é reflexiva e que a lei da substituição vale, ou seja, valem as propriedades usuais da identidade em primeira ordem.

Mas o que exatamente isto nos mostra? Como estamos supondo que os quantificadores aqui estão sendo entendidos apenas sintaticamente, e estamos supondo que seu sentido é conferido pelas regras que obedecem, temos que a própria identidade na linguagem pode ser vista como recebendo sentido dado que já entendemos os quantificadores. Assim, o sentido da identidade, de certo modo, pode ser visto como sendo atribuído pela sintaxe. Claro, isto só pode ser feito depois que já entendemos os termos nos quais a definição é dada, e isto envolve os quantificadores. Assim, se aceitamos que os quantificadores ganham sentido das regras sintáticas que obedecem, então a identidade pode ser entendida como dependendo dos quantificadores em casos em que o vocabulário satisfaz certas restrições. Ou seja, a relação de dependência

entre identidade e quantificação pode ser revertida, de modo que em alguns casos é a própria identidade que depende da quantificação. Claro, existem restrições semânticas com relação a esta fórmula: existem casos de interpretações nas quais esta relação não denota a diagonal do domínio de interpretação, que deveria captar a relação de identidade na estrutura. Todavia, isto ocorre também para a identidade quando tomada como uma relação primitiva na linguagem da teoria acompanhada dos axiomas da reflexividade e da lei de substituição. Nestes casos, a menos que estipulemos como uma condição na própria metalinguagem que a identidade deve ser interpretada na diagonal, teremos casos em que a interpretação da identidade não é a diagonal do domínio, mas antes uma relação de congruência sobre o domínio (para mais discussões acerca destes tópicos, ver Béziau (BEZIAU, 2004)). Ou seja, estas restrições vão acontecer de qualquer forma, e esta definição vai tão longe quanto podemos ir em linguagens de primeira ordem no que diz respeito à identidade. Além disso, o ponto que estamos estipulando aqui é que atribuímos sentido à identidade na linguagem em questão através do uso dos quantificadores.

Assim, para aqueles que desejam argumentar que o entendimento das regras para quantificação se baseia na identidade, podemos argumentar que em muitos casos é o entendimento da identidade que está baseado na quantificação, se aceitarmos a tese de que as regras sintáticas obedecidos pelos símbolos lógicos lhes conferem sentido de algum modo. Com isto temos que, ou bem entramos em um círculo vicioso, no qual a compreensão da quantificação pressupõe a identidade que por sua vez pressupõe a quantificação (o que não nos dá entendimento algum), ou então reconhecemos que há bases para se entender que a quantificação pode ter sentido sem que se utilize a noção de identidade. O próximo argumento evidencia isto ainda mais fortemente.

Novamente supondo que os símbolos lógicos de uma linguagem obtêm sentido a partir das regras que obedecem, ou dos postulados para o símbolo em questão, podemos apresentar um argumento que novamente serve para o propósito de se sustentar que a quantificação não precisa estar vinculada à identidade. Agora, trata-se de linguagens que incluem o famoso  $\varepsilon$  de Hilbert (para exposições da teoria do  $\varepsilon$ , ver Kneebone (KNEEBONE, 1963, pp.100-104), Avigad e Zach (AVIGAD; ZACH, 2011)). Como se sabe, este símbolo é uma das chamadas *v.b.t.o.*, ou seja, um operador ligando variáveis que forma termos (outro exemplo de *v.b.t.o.* famoso é o descritor  $\iota$  de Russell). Historicamente, o  $\varepsilon$  foi introduzido por Hilbert tendo em vista seu programa em fundamentos da matemática. Todavia, o  $\varepsilon$  não precisa ser apresentado apenas neste

contexto, e pode ser visto como formalizando a noção de descrição indefinida, ou seja, dada uma descrição  $F$ , buscamos captar a ideia expressa por sentenças como “um objeto  $x$  tal que  $F(x)$ ...”, ou seja, algo que instancia uma determinada descrição. O ponto fundamental é que em uma descrição definida não precisamos identificar o objeto que satisfaz a descrição, que não precisa de modo algum ser identificado ou ser único. Nestes casos, nos contentamos apenas em saber que algo satisfaz a descrição, e o  $\varepsilon$  serve para denotar um tal objeto.

Mas como isto pode nos ajudar com os quantificadores e sua alegada relação com a identidade? O ponto é que se assumirmos uma linguagem de primeira ordem, mesmo que sem identidade (ou seja, mesmo em linguagens para lógicas não-reflexivas), mas com o  $\varepsilon$ , podemos dispensar os quantificadores e introduzi-los por definição através do  $\varepsilon$ . Começamos com o axioma para o  $\varepsilon$ , o chamado *Axioma de Hilbert*:

$$F(y) \rightarrow F(\varepsilon_x F(x))$$

onde  $y$  é uma variável livre, e  $\varepsilon_x F(x)$  deve ser entendido, como já dissemos, como um *termo* denotando algum objeto que tem  $F$ . A partir daí, podemos introduzir o quantificador existencial através da seguinte fórmula:

$$\exists x F(x) =_{\text{def}} F(\varepsilon_x F(x))$$

e o quantificador universal é introduzido pela fórmula

$$\forall x F(x) =_{\text{def}} \neg F(\varepsilon_x \neg F(x)).$$

Utilizando estas definições, as fórmulas que usualmente se empregam como axiomas para os quantificadores podem ser facilmente derivadas, e assim garantimos que os operadores introduzidos possuem as mesmas propriedades que os quantificadores. Assim, como podemos dar sentido ao  $\varepsilon$  sem utilizarmos a identidade, podemos também dar sentido aos quantificadores sem identidade.

Este último ponto é interessante também de outro ponto de vista. Notemos que estamos assumindo que o sentido dos quantificadores e do  $\varepsilon$  em particular podem ser derivados dos axiomas e regras que estes símbolos obedecem, de modo puramente sintático. Todavia, alguns poderiam querer argumentar que os axiomas e as regras em questão são introduzidas buscando formalizar propriedades intuitivas destes operadores, que entendemos na linguagem natural. Mesmo nestes casos, como estamos argumentando, dado que o sentido de uma descrição indefinida pode ser compreendido sem que tenhamos que recorrer à identidade dos objetos que a satisfazem, podemos então compreender

a quantificação também sem apelar para a identidade, uma vez que os quantificadores podem ser introduzidos através da descrição indefinida representada pelo  $\varepsilon$  de Hilbert. Assim, esta é mais uma evidência em favor da tese de que podemos sim atribuir sentido aos quantificadores sem necessitar da identidade. Isto, claro, vale também para lógicas não-reflexivas, que neste aspecto então estariam livres das dificuldades propostas acima.

Poderíamos, claro, juntar os dois argumentos em uma só abordagem: assumir uma linguagem de primeira ordem sem identidade e sem quantificadores, mas com um número finito de símbolos não-lógicos e com o  $\varepsilon$ . Nesta linguagem podemos primeiramente definir os quantificadores, e depois introduzir uma relação de identidade. Assim, aparentemente, podemos entender a identidade através de fatos acerca do próprio  $\varepsilon$ , que por sua vez não precisa da identidade. Isto livraria a compreensão da identidade do aparente círculo vicioso apontado acima, no qual teríamos que a quantificação depende da identidade (como querem os argumentos apresentados na seção 5.3), e a identidade depende em determinados casos da quantificação. Claro, aparentemente a melhor opção é conceder que a quantificação não precisa da identidade para ser compreendida, conforme estamos sugerindo.

Isto é o que pode ser dito de modo breve acerca da sintaxe e sua relação com o significado. Mas e o que podemos dizer acerca da semântica? Como uma lógica não-reflexiva pode dar sentido aos quantificadores semanticamente sem utilizar a identidade? Este é o ponto que investigaremos na próxima seção.

## 5.6 SEMÂNTICA NÃO-REFLEXIVA

Conforme enunciamos na seção 5.3, alguns aspectos dos argumentos relacionando identidade e quantificadores apelam diretamente para características da semântica formal apresentada para fórmulas envolvendo quantificação. Agora mostraremos como uma semântica em linhas similares pode ser desenvolvida sem que a identidade dos objetos sobre os quais se quantifica desempenhe papel algum. Para que tenhamos de fato coleções de objetos sem identidade, utilizaremos como metalinguagem não mais uma teoria de conjuntos usual, como ZFC, que respeita a reflexividade, mas sim a teoria de quase-conjuntos  $\mathfrak{Q}$  (ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.7), (FRENCH; KRAUSE, 2010)). Este desenvolvimento está de acordo com a discussão que apresentamos mais acima acerca das lógicas não-reflexivas. Como dissemos,

o modo usual de se caracterizar uma lógica não-reflexiva é vago o suficiente para que versões aparentemente inócuas de lógicas não-reflexivas a satisfaçam, como aquelas que violam alguma fora proposicional de PI ou até mesmo a lógica clássica de primeira ordem sem identidade. Estes sistemas, como dissemos, não parecem apresentar dificuldades com relação aos quantificadores.

Mas então, o que mais exigiremos de uma lógica não-reflexiva além das restrições que esperamos a alguma versão do PI? Conforme mencionamos brevemente, esperamos que a semântica apresentada para estas lógicas seja ela mesma formulada em uma metalinguagem não-reflexiva, pois, conforme até mesmo os argumentos buscando relacionar identidade e quantificação pressupõe, a principal motivação para uma lógica não-reflexiva origina-se no desejo de podermos *quantificar* sobre entidades sem identidade. Ou seja, mais do que uma restrição na sintaxe, uma genuína lógica não-reflexiva que incorpore as motivações geralmente apresentadas para se formular este tipo de sistema de lógica (por exemplo, não-individualidade na mecânica quântica), deve incorporar alguma forma de não-reflexividade também na sua semântica.

De fato, este ponto é relevante para qualquer sistema de lógica não-clássica que busque de alguma forma derrogar algum princípio da lógica clássica. Para lógicas intuicionistas, por exemplo, pouco sentido haveria em se contestar princípios da lógica clássica como o terceiro excluído e a redução ao absurdo clássica se a semântica para estes sistemas fosse feita em uma teoria de conjuntos clássica, que está comprometida com a validade irrestrita destes mesmos princípios. Com este tipo de semântica, os princípios banidos entram novamente pela porta dos fundos, através da semântica. Do mesmo modo, para lógicas não-reflexivas; queremos uma semântica que incorpore as motivações para se adotar a tese da não-reflexividade. Claro, em ambos os casos mencionados não estamos afirmando que uma semântica baseada em uma teoria de conjuntos clássica é impossível, nem mesmo que não possa ser proveitosa para diversos propósitos, apenas que de um ponto de vista filosófico ela deixa um pouco a desejar (ver a discussão em da Costa, Bèziau e Bueno (COSTA; BÉZIAU; BUENO, 1995)). Além disso, como já mencionamos, a relação entre quantificação e identidade não precisa valer nem mesmo para o caso de semânticas para lógicas não-reflexivas feitas em metalinguagens clássicas.

Passamos agora a delinear brevemente os principais elementos da teoria de que precisaremos e que são peculiaridades de  $\mathfrak{Q}$  (para os detalhes, ver o capítulo 3. A teoria de quase-conjuntos é uma teoria de conjuntos de primeira ordem ao estilo ZFU, mas compreendendo

dois tipos de átomos: os  $m$ -átomos e os  $M$ -átomos. Os primeiros, que satisfazem o predicado unário  $m$  representam os não-indivíduos na interpretação intuitiva da teoria. Para eles, a identidade não deve valer ( $\mathfrak{Q}$  é uma lógica não-reflexiva, se aceitamos, como de fato estamos aceitando aqui, que teorias de conjuntos também contam como lógicas). Os  $M$ -átomos satisfazem o predicado  $M$ , e se comportam como os átomos usuais de ZFU. Os quase-conjuntos (ou, abreviando,  $q$ -sets) são objetos que não são átomos, denotados por um predicado  $Q$ . Alguns  $q$ -sets são especiais, eles não contêm  $m$ -átomos em seu fecho transitivo, ou seja, se investigarmos seus elementos, e os elementos de seus elementos, e assim por diante, nunca encontraremos  $m$ -átomos. A estes  $q$ -sets chamamos *conjuntos*, e eles são designados por um predicado  $Z$ . Claro, todo conjunto é em particular um quase-conjunto. Como devemos entender a identidade em  $\mathfrak{Q}$ ? A identidade é uma relação definida, valendo para  $q$ -sets que possuem os mesmos elementos ou para  $M$ -átomos que pertencem aos mesmos  $q$ -sets. Para  $m$ -átomos, no entanto, não se pode falar em identidade. Assim, temos uma violação da validade irrestrita de PI na forma  $x = x$ , pois quando  $x$  é  $m$ -átomo esta propriedade não pode nem mesmo ser expressa.

Mesmo sem a identidade para  $m$ -átomos, podemos dizer que  $m$ -átomos são indistinguíveis, pois em  $\mathfrak{Q}$  também adotamos uma relação binária ( $\equiv$ ) de indistinguibilidade. Para todos os objetos da teoria que satisfazem os predicados  $Z$  e  $M$ , indistinguibilidade e identidade coincidirão. Ou seja,  $M$ -átomos indistinguíveis são idênticos, e conjuntos indistinguíveis também. O mesmo não vale para  $m$ -átomos, que podem ser indistinguíveis, mas não idênticos. Além disso, temos uma operação  $qc$  que atribui a cada  $q$ -set um cardinal, o seu *quase-cardinal* (por motivos que não revisaremos aqui, o quase-cardinal para  $q$ -sets em geral não pode ser definido da maneira usual, seguindo-se von Neumann, por exemplo, por isso definições alternativas devem ser buscadas, ou então, como fazemos aqui, devemos introduzir esta noção como primitiva, ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.7)). Com o auxílio de quase-cardinais e indistinguibilidade podemos formular uma das principais propriedades de coleções na teoria de quase-conjuntos: *o axioma da extensionalidade fraca*. Segundo este axioma, se os  $q$ -sets  $x$  e  $y$  possuem a mesma quantidade (ou seja,  $qc$ ) de elementos indistinguíveis, então, são eles mesmos indistinguíveis, e reciprocamente, se são indistinguíveis, então possuem as mesmas quantidades de elementos indistinguíveis.

Em  $\mathfrak{Q}$  podemos formar coleções utilizando as mesmas operações conjuntistas de ZFU, como união, interseção, separação, potência, pa-

res, produtos cartesianos, entre outros. O axioma dos pares merece alguns comentários. Em  $\Omega$  ele é formulado assim: dados  $x$  e  $y$ , existe um q-set  $z$  que contém a ambos como elementos. Aplicando o axioma da separação, obtemos um q-set denotado  $[x, y]_z$  cujos elementos são todos os indistinguíveis de  $x$  ou de  $y$  em  $z$ ; este q-set pode conter mais do que apenas dois elementos, pois  $z$  pode conter diversos objetos indistinguíveis de  $x$  ou  $y$ . A próxima noção que ainda nos importa tratar é a de quase-função, ou simplesmente função, se não houver possibilidade de confusão. Uma função  $f$  entre os q-sets  $x$  e  $y$  é um q-set de pares ordenados de elementos de  $x$  e de  $y$  tal que se  $\langle w, t \rangle \in f$  e  $u \equiv w$ , então, se  $\langle u, z \rangle \in f$ , devemos necessariamente ter que  $z \equiv t$ . Ou seja, uma quase-função atribui elementos indistinguíveis a elementos indistinguíveis. Para coleções que não contenham m-átomos como elementos, o conceito de quase-função coincide com o de função em seu sentido usual.

Agora, vamos considerar como este aparato quase-conjuntista pode ser empregado para se fornecer uma semântica para uma lógica não-reflexiva de primeira ordem e ainda, fazer isto de tal modo a evitarmos as dificuldades apontadas acima na seção 5.3. A lógica não-reflexiva da qual estamos tratando aqui é a mais simples possível, e seus postulados são os postulados da lógica clássica de primeira ordem sem identidade. A interpretação é feita por uma quase-função interpretação  $I$ , que atribui aos símbolos não-lógicos da linguagem  $\mathcal{L}$  elementos convenientes do domínio, um quase-conjunto  $D$  que pode conter m-átomos como elementos. Ou seja, temos que:

1. para as constantes individuais  $a_i$  temos  $I(a_i) \in D$ ;
2. para símbolos  $R$  de relações  $n$ -árias ( $0 \leq n$ ),  $I(R) \subseteq D^n$ .

Por conveniência, estamos supondo que a linguagem não possui símbolos para funções. Assim, para interpretar a linguagem utilizamos uma estrutura  $\mathcal{A} = \langle D, I \rangle$ . Mas como  $I$  se comporta nos casos em que  $D$  contém m-átomos? Claro, para constantes individuais  $a_i$  temos pela própria definição de quase-função que  $I$  atribuirá a  $a_i$  de modo ambíguo um elemento ambíguo de  $D$ , isto é,  $a_i$  não nomeia apenas um objeto, mas pode nomear qualquer um de uma classe de elementos indistinguíveis. Para objetos usuais, como M-átomos, temos que se  $I$  atribui um destes objetos à  $a_i$ , então, esta denotação será única.

Para predicados e relações vale algo similar. Temos, por exemplo, para símbolos de predicados  $P$  que  $I(P) \subseteq D$ . Sabemos que por força dos axiomas de  $\Omega$  o q-set  $I(P)$  possui um quase-cardinal. Agora,

para qualquer q-set  $X \subseteq D$  tal que  $X \equiv I(D)$  (axioma da extensibilidade fraca), temos que  $X$  também pode fazer o papel de extensão de  $P$ . Isto reflete a ideia intuitiva de que mesmo que saibamos quantos objetos indistinguíveis como por exemplo partículas quânticas de um mesmo tipo possuem uma propriedade, não podemos saber quais exatamente possuem a propriedade, ou seja, partículas obedecem um princípio de permutação que impede que as distingamos por propriedades. A ideia básica consiste em buscar refletir uma característica das partículas quânticas conforme entendidas pela Concepção Recebida, segundo a qual mesmo que saibamos que, por exemplo, apenas uma partícula de certo tipo possui uma determinada propriedade, não podemos saber *qual* partícula deste tipo tem a dita propriedade; de fato, talvez a própria questão seja desprovida de sentido.

Uma sequência de elementos de  $D$  é uma quase-função de  $\omega$  em  $D$ . Claro, quando alguns ou todos elementos de  $D$  forem m-átomos teremos que as peculiaridades das quase-funções irão se manifestar, ou seja, o mesmo número pode estar associado com objetos que não são idênticos mas são indiscerníveis. Vejamos agora a definição de satisfação de uma fórmula por uma sequência  $s$  de elementos de  $D$ . Por conveniência, colocamos que  $s_n = s(x_n)$ , para a variável  $x_n$ , e  $s(a_i) = I(a_i)$ , para  $a_i$  constante individual. Um termo  $t_i$  é uma variável ou uma constante individual. Assim, dada uma sequência  $s$ , temos:

1. Para  $R(t_1, \dots, t_n)$  fórmula atômica,  $s$  satisfaz esta fórmula se e somente se  $\langle s(t_1), \dots, s(t_n) \rangle$  pertence a algum q-set  $X$  tal que  $X \equiv I(D)$ .
2. Para fórmulas moleculares, valem as cláusulas usuais.
3. Para fórmulas da forma  $\forall x \alpha(x)$ , temos que  $s$  satisfaz esta fórmula se para qualquer sequência  $s'$  tal que  $s(y) \equiv s'(y)$  para  $y$  distinto de  $x$  temos que  $s'$  satisfaz  $\alpha$ .

Claro, para enunciar estas cláusulas não precisamos da identidade dos objetos do domínio. No caso das fórmulas quantificadas, mesmo que  $\neg(s(x) \equiv s'(x))$ , devemos ter que  $s'$  satisfaz  $\alpha$ . As outras noções semânticas como verdade e consequência semântica podem ser definidas seguindo-se as definições usuais. Assim, não precisamos da identidade para compreender a quantificação se utilizarmos o aparato da teoria de quase-conjuntos. Com isto, os principais argumentos propostos acima podem ser vistos como apelando para características da metalinguagem na qual se faz a semântica mas que de fato podem ser dispensadas para a compreensão da interpretação dada a uma linguagem (para mais

detalhes sobre semânticas de quase-conjuntos, ver Arenhart e Krause (ARENHART; KRAUSE, 2009), French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.8)).

Podemos desenvolver ainda mais este tipo de semântica e obter alguns resultados interessantes, como por exemplo teoremas de completude (basta nos restringirmos aos casos em que o domínio de interpretação é um conjunto e a prova funciona como a usual). Não buscaremos explorar estes resultados aqui, nos interessa apenas o fato de que uma semântica quase-conjuntista é possível, e captura os fatos intuitivos do discurso sobre não-indivíduos quando estes são interpretados como partículas quânticas. Mas agora, gostaríamos de mostrar que até mesmo utilizando uma teoria de conjuntos clássica é possível fornecer semântica para quantificadores sem nos comprometermos com a identidade dos objetos sobre os quais quantificamos. Vejamos na próxima seção.

## 5.7 QUANTIFICAÇÃO GENERALIZADA

Vamos continuar considerando agora a interpretação dos quantificadores e a relação que esta interpretação possui com a metateoria. Vamos supor, como fazem os argumentos apresentados acima, que uma semântica formal nos ajuda a esclarecer o sentido dos quantificadores. O primeiro ponto a se notar é que até agora consideramos apenas os quantificadores  $\forall$  e  $\exists$  e seus correspondentes em linguagem natural “todos” e “existe”. No entanto, devemos notar que a linguagem natural possui uma gama imensa de quantificadores que nem sempre podem ser compreendidos ou definidos a partir dos dois já mencionados. Exemplos claros seriam: (i) “A maioria”, como em “A maioria dos filósofos usa óculos”, (ii) “Mais da metade”, como em “Mais da metade dos filósofos usa óculos”, (iii) “Mais”, como em “Mais filósofos do que sociólogos usam óculos” (para mais exemplos ver Peters e Westerstahl (PETERS; WESTERSTAHL, 2006), Barwise e Cooper (BARWISE; COOPER, 1981)). O estudo deste tipo de quantificadores com o uso de ferramentas lógicas da teoria de modelos constitui uma área que começou a se desenvolver recentemente, que busca investigar os chamados *quantificadores generalizados*. Este tipo de investigação busca esclarecer de modo geral mais alguns aspectos do uso dos quantificadores e de seu significado tanto em lógica quanto em linguagem natural. Notemos que um dos aspectos peculiares destes quantificadores consiste no fato de poderem ser vistos como tratando de relações entre predicados, como o tradi-

cional quantificador afirmativo universal aristotélico “Todo X é Y” e em “Mais XYZ” (Mais X do que Y são Z). Não vamos aqui entrar nos detalhes, mas vamos nos restringir apenas aos aspectos da teoria que podem nos auxiliar a compreender o significado dos quantificadores e sua alegada relação com a identidade (para uma investigação aprofundada sobre este tema, ver a obra de Peters e Westerstahl mencionada, e também Westerstahl (WESTERSTAHL, 2007)).

Conforme se nota pelos argumentos apresentados na seção 5.3, aparentemente a relação entre quantificação e identidade se insinua tanto pelo fato de que alguns aspectos do modo usual de se fazer semântica empregam a identidade quanto pelo fato de que temos a tendência de encarar a quantificação como estando diretamente relacionada com os objetos sobre os quais quantificamos. De fato, o argumento de Teller ((TELLER, 2001, p.367)) parece deixar isto bastante claro. Segundo Teller, como vimos, ao quantificarmos precisamos que o referente da variável ligada por um quantificador permaneça constante, e isto nada mais é que o mesmo que dizer que cada ocorrência da variável quantificada denote *o mesmo* referente. Daí a aparente necessidade da identidade para os objetos sobre os quais quantificamos. A primeira dúvida que pode ocorrer a quem se depare com este argumento consiste em se saber se uma variável quantificada deve denotar precisamente um objeto, e mais, um objeto único em todas suas ocorrências. Se for assim, a variável deve funcionar como uma constante, e não parece haver razão para se entender um quantificador universal como uma generalização, mas antes como uma particularização, algo completamente contrário ao que pretendemos com tal quantificador. O segundo ponto concerne precisamente a natureza da quantificação: a quantificação é mesmo uma operação realizada sobre os objetos do domínio? Aparentemente, se desejamos que a linguagem seja de primeira ordem sim, mas devemos compreender melhor o que queremos dizer com quantificação sobre objetos.

Podemos compreender os quantificadores sem fazer uso desta ideia de que eles devem percorrer o domínio de quantificação de alguma forma? É precisamente neste particular que nos interessa o aparato da quantificação generalizada. Segundo os investigadores desta área, podemos entender os quantificadores como percorrendo objetos, mas ainda assim, é totalmente razoável que eles não sejam vistos como percorrendo um domínio e fazendo afirmações acerca de objetos, mas antes, devem ser vistos como certa forma de propriedades de segunda ordem. O ponto principal é que é mais fácil entendermos os quantificadores em geral como denotando propriedades de segunda ordem (propriedades

de propriedades), não como estando relacionados com os objetos sobre os quais quantificamos diretamente, ou seja, este tipo de abordagem se generaliza mais naturalmente para tratarmos também dos outros tipos de quantificadores, não apenas os tradicionais universal e existencial que empregamos usualmente em lógica. De fato, segundo uma possível versão da história dos quantificadores, a princípio, os pioneiros como Aristóteles e até mesmo Frege (considerado um dos pais dos quantificadores em seu sentido moderno) tinham em mente quantificadores em seu sentido generalizado, e não no sentido utilizado atualmente, mas não discutiremos estes detalhes históricos aqui, mesmo que sejam extremamente interessantes (ver Peters e Westerstahl (PETERS; WESTERSTAHL, 2006), Westerstahl (WESTERSTAHL, 2007)). Vejamos primeiramente como se pode entender os quantificadores usuais da lógica de primeira ordem deste modo.

Por simplicidade, vamos considerar o caso particular de uma linguagem de primeira ordem  $\mathcal{L}$  que contenha um símbolo de predicado unário  $P$ , entre outros. Dada uma estrutura  $\mathcal{M}$  com domínio  $M$  para interpretar  $\mathcal{L}$ , sabemos que  $P^M \subseteq M$ , ou seja, o símbolo  $P$  denota uma propriedade em  $\mathcal{M}$ . Agora, pelas definições usuais da semântica ao estilo Tarski temos que

$$\mathcal{M} \models \exists xP(x) \text{ se e somente se } P^M \neq \emptyset.$$

Para o quantificador universal, também a partir das definições usuais, temos que

$$\mathcal{M} \models \forall xP(x) \text{ se e somente se } P^M = M.$$

Vamos supor agora que  $\exists^M$  denota a coleção de todos os subconjuntos não vazios de  $M$ , e que  $\forall^M$  denota a coleção  $\{M\}$ . A partir destas definições e dos fatos que acabamos de mencionar, temos também que

$$\mathcal{M} \models \exists xP(x) \text{ se e somente se } P^M \in \exists^M.$$

Também temos que

$$\mathcal{M} \models \forall xP(x) \text{ se e somente se } P^M \in \forall^M.$$

Assim, os quantificadores também são vistos como *possuindo uma denotação*, eles denotam propriedades de propriedades, não se referem mais aos objetos sobre os quais se quantifica. O ponto principal aqui não é que obtivemos um novo modo (logicamente equivalente) de se entender os quantificadores usuais, mas sim que este é um modo de se entender os quantificadores que pode ser facilmente aplicado para o estudo dos diversos tipos de quantificadores que aparecem usualmente na

linguagem natural e que não faz uso de noções que na semântica usual envolvem identidade. Podemos generalizar esta abordagem e considerar como quantificadores quaisquer coleções de coleções de  $M$ , ou ainda relações entre coleções, e assim por diante. Vejamos alguns exemplos.

Um primeiro exemplo que podemos considerar consiste no quantificador “Existem ao menos 10 objetos tais que ...”. Podemos formalizar este quantificar como denotando

$$\exists_{\geq 10}^M =_{\text{def}} \{X \subseteq M : \text{card}(X) \geq 10\}.$$

Aqui, claro,  $\text{card}(X)$  denota o cardinal de  $X$ . Podemos então acrescentar a  $\mathcal{L}$  o símbolo  $\exists_{\geq 10}$ , de modo que

$$\mathcal{M} \models \exists_{\geq 10} x P(x) \text{ se e somente se } P^M \in \exists_{\geq 10}^M.$$

Este tipo de abordagem pode ser generalizado para qualquer  $n$  natural, e pode incluir casos de quantificadores afirmando que existem precisamente  $n$  objetos, bastando para tanto substituímos a desigualdade pela igualdade na definição do quantificador, ou seja, para definirmos o quantificador “Existem exatamente 27 objetos que ...” colocamos  $\exists_{=27}^M =_{\text{def}} \{X \subseteq M : \text{card}(X) = 27\}$ . Aqui, do mesmo modo como fizemos anteriormente, introduzimos então o correspondente símbolo na linguagem, com as respectivas condições de verdade.

Para mais alguns casos, consideremos agora alguns quantificadores que não são monádicos, ou seja, que *relacionam* fórmulas. Neste caso, e em geral nos casos de quantificadores poliádicos, o que temos de um ponto de vista sintático são operadores  $Qx$  que ligam a variável  $x$  em um número  $n$  de fórmulas, dando uma fórmula  $Qx(F_1, \dots, F_n)$ . Podemos considerar como um primeiro exemplo o quantificador aristotélico afirmativo universal “Todos os  $X$  são  $Y$ ”. Introduzimos

$$\forall_A^M =_{\text{def}} \{\langle X, Y \rangle : X \subseteq Y \subseteq M\}.$$

Por abuso de linguagem introduzimos na linguagem o símbolo  $\forall_A$ , que, como dissemos antes, liga duas fórmulas  $F_1(x)$  e  $F_2(x)$  para dar a fórmula  $\forall_A x(F_1(x), F_2(x))$ , lido, claro, como “Todos os  $F_1$  são  $F_2$ ”. Temos que

$$\mathcal{M} \models \forall_A x(F_1(x), F_2(x)) \text{ se e somente se } \langle F_1^M, F_2^M \rangle \in \forall_A^M.$$

Aparentemente este quantificador reflete mais fielmente os propósitos aristotélicos do que o usual em primeira ordem  $\forall x(F_1(x) \rightarrow F_2(x))$ , mas não entraremos nestas discussões históricas (ver Peters e Westerstaahl (PETERS; WESTERSTAHL, 2006), Westerstaahl (WESTERSTAHL, 2007)).

Como último exemplo, podemos introduzir “Mais X do que Y”. Colocamos

$$\text{Mais}^M =_{\text{def}} \{ \langle X, Y \rangle : X, Y \subseteq M, \text{card}(X) > \text{card}(Y) \}.$$

Introduzindo o respectivo quantificador *Mais* na linguagem, de modo que

$$\mathcal{M} \models \text{Mais}x(F_1(x), F_2(x)) \text{ se e somente se } \langle F_1^M, F_2^M \rangle \in \text{Mais}^M.$$

Com estes exemplos e com a versão apresentada acima dos quantificadores usuais  $\forall$  e  $\exists$  esperamos ter deixado clara a ideia geral por trás dos quantificadores generalizados e deste tipo de abordagem aos quantificadores em geral. Falando por alto, além de buscar estender as linguagens de primeira ordem com quantificadores que são interessantes de um ponto de vista matemático, o principal propósito de se estudar quantificação generalizada consiste no estudo rigoroso de quantificadores que aparecem comumente na linguagem natural e em dar sentido preciso a estes quantificadores (ver Barwise e Cooper (BARWISE; COOPER, 1981), Westerstahl (WESTERSTAHL, 2007)). Este tipo de projeto está, de certo modo, associado à investigação na área da linguística, ao estudo dos significados dos quantificadores em determinados fragmentos da linguagem natural. Assim, seria natural nos voltarmos para este tipo de investigação se estamos interessados em saber se os quantificadores pressupõem ou não a identidade dos itens sobre os quais quantificamos, e também para entendermos como se pode estudar o significado dos quantificadores. Primeiramente, podemos nos restringir ao quantificador universal e existencial, já que são estes os quantificadores dos quais os argumentos acima tratam. O que podemos afirmar relativamente à relação com a identidade no caso destes quantificadores depois da breve exposição que fizemos?

O primeiro ponto a se notar é que não estamos afirmando que os estudos de quantificação generalizada nos dão “o” significado dos quantificadores, mas antes, como afirmam os pesquisadores da área, podem nos ajudar a esclarecer este significado, e que podem ser extremamente úteis em fornecer meios de estudarmos de modo rigoroso o significado dos quantificadores que ocorrem em linguagens naturais. O que veremos notar é que, se realmente este tipo de estudo pode ser utilizado para esclarecer o sentido dos quantificadores, então aparentemente não nos envolvemos nas dificuldades propostas pelos argumentos acima. De fato, a quantificação não mais é vista como nos falando algo diretamente sobre os objetos do domínio, mas sobre coleções de objetos, e em geral as condições sobre estas coleções não necessitam da identidade para serem

compreendidas. Não precisamos garantir que cada objeto particular do domínio de quantificação instancia individualmente uma determinada propriedade para entendermos o que significa dizer que é verdade que todos os objetos instanciam esta propriedade. Um argumento como o de Teller, por exemplo, que mencionamos no começo desta seção, deixa de ser problemático. De fato, o argumento em si não parece forte o suficiente para provar que a quantificação depende da identidade, mas a própria formulação dele não é mais possível se entendermos os quantificadores como propriedades de segunda ordem. Isto, todavia, não deve obscurecer o fato de que os quantificadores ainda ligam variáveis individuais, e assim, a linguagem ainda é de primeira ordem. O ponto crucial é que aparentemente, como esta é uma das maneiras de se estudar o significado dos quantificadores na linguagem natural, e não envolve a identidade dos objetos sobre os quais quantificamos conforme propõe os argumentos acima, então temos boas evidências para sustentar que não há tal vínculo. Um ponto que se poderia ainda contestar diz respeito ao próprio aparato da metalinguagem na qual estipulamos nossas definições. Não utilizamos uma teoria de conjuntos, e com isso nos comprometemos com a tese da reflexividade? Isto não seria suficiente para provar que a quantificação pressupõe a identidade, nem que seja de forma indireta, através da teoria de conjuntos na qual a semântica é formulada?

Como notamos na seção anterior, podemos sempre utilizar uma metalinguagem não-reflexiva, e assim evitarmos de re-introduzir a identidade através da metalinguagem. Com as coleções representando extensões de predicados sendo quase-conjuntos, podemos introduzir os quantificadores como propriedades de segunda ordem sem mencionar a identidade dos itens sobre os quais quantificamos. Na teoria de quase-conjuntos temos ainda uma noção de quase-cardinal, denotada por  $qc$ , de modo que para qualquer coleção  $x$ , mesmo que contenha apenas objetos indistinguíveis, podemos ter  $qc(x)$  bem definido, ou seja, podemos saber quantos elementos  $x$  possui. Assim, mesmo sem a identidade valendo para estes itens, podemos introduzir quantificadores expressando enunciados como “Existem exatamente  $n$  objetos tais que...”, e enunciados como “Existem ao menos  $n$  objetos tais que...”. Aparentemente, utilizando a teoria de quase-conjuntos e os quantificadores generalizados podemos dar conta de uma vasta gama de enunciados ocorrendo naturalmente na linguagem da física sem que para isso precisemos da identidade.

Esta última sugestão, no entanto, pode ser ainda evitada se fizermos as seguintes observações. Note que os argumentos propostos acima

vinculando identidade e quantificação tratam de ligar duas noções, identidade e quantificadores, e buscam garantir que só compreendemos o significado dos quantificadores se os objetos sobre os quais quantificamos forem tais que a identidade sempre faz sentido para eles. A própria compreensão da quantificação é que faz uso da identidade. Além de negar que possamos compreender a quantificação quando tratamos dela de um ponto de vista sintático, esta abordagem ainda trata com a noção vaga de “compreensão” de uma noção. O que exatamente queremos dizer com “compreender” o significado dos quantificadores? Como os argumentos parecem sugerir, compreender o significado parece envolver um apelo à alguma forma de semântica, que pode ser dada tanto formalmente como informalmente, e que esta semântica, quando trata dos quantificadores, faz uso necessariamente da noção de identidade. Neste caso, os quantificadores generalizados parecem fornecer evidências suficientes para a negativa de que somente compreendemos o significado dos quantificadores se houver identidade para os objetos sobre os quais quantificamos. Os objetos nem sequer entram em questão diretamente como quando utilizamos uma semântica ao estilo Tarski.

Claro, como discutimos anteriormente há dois pontos que podem ser distinguidos nesta altura da investigação: uma delas diz respeito à compreensão dos quantificadores: se isto significa prover princípios semânticos para eles, então a identidade não precisa estar envolvida, podemos fazer isto até mesmo em uma teoria de conjuntos usual sem utilizar a noção de identidade diretamente. Por outro lado, há a tese metafísica de que para objetos como as partículas quânticas a identidade não deve fazer sentido. Neste caso, como a tese metafísica é formalizada em uma lógica não-reflexiva, a semântica para os quantificadores deve ser feita em uma metalinguagem não-reflexiva, como uma teoria de quase-conjuntos. Isto deve ser assim para que, mesmo que os quantificadores não necessitem da identidade para serem compreendidos, tenhamos que a nossa metalinguagem seja consistente com as motivações propostas, que nos dizem que alguns tipos de objetos são tais que a identidade não faz sentido para eles.

## 5.8 QUANTIFICAÇÃO E LINGUAGEM NATURAL

Um último aspecto que deveria ser discutido concerne a quantificação em linguagem natural. Poderia-se argumentar (da Costa e Bueno (COSTA; BUENO, 2009, p.194)) que a linguagem natural fornece os meios de se prover uma semântica intuitiva para alguns sistemas de

lógica, como por exemplo a lógica clássica e as lógicas intuicionistas. O significado atribuído aos termos destas lógicas origina-se da linguagem natural. Como a linguagem natural é reflexiva, é difícil de ver como uma lógica não-reflexiva poderia atribuir significado aos quantificadores. Claro, ou a lógica não-reflexiva não trata com objetos sem identidade, dado que a linguagem natural é reflexiva, ou então não é possível atribuir a ela uma semântica *não-reflexiva* intuitiva, algo desejável, dado que pode ser feito para a maioria dos sistemas de lógica disponíveis.

Mas como devemos entender este argumento? As lógicas não-reflexivas não possuem realmente uma semântica intuitiva? Bem, o primeiro ponto a ser notado é que podemos nos ater à distinção apresentada mais acima de que uma lógica não-reflexiva pode violar alguma forma do PI em sua sintaxe, mas não fazer nenhuma exigência particular acerca da semântica. Assim, mesmo que a linguagem natural seja reflexiva, podemos dar uma semântica para este tipo de lógicas não-reflexivas neste contexto. Claro, não é exatamente isto que temos em mente quando propomos uma lógica não-reflexiva: a motivação para o estudo de tais lógicas, conforme expusemos mais acima, origina-se na mecânica quântica e no desejo de se formular com mais rigor uma tese de natureza metafísica associada a esta teoria. Assim, para dar conta destas características, desejamos que também a semântica seja não-reflexiva. Mas o que dizer então de uma semântica intuitiva para estas lógicas? A questão central aqui parece ser determinarmos se a linguagem natural está realmente comprometida com alguma forma de reflexividade que funcione de modo a impedir uma compreensão das lógicas não-reflexivas como tratando de objetos sem identidade.

Um aspecto das lógicas não-reflexivas ao qual não demos muito destaque anteriormente foi o fato de que mesmo quando estamos utilizando uma linguagem objeto reflexiva, podemos fornecer para ela uma semântica não-reflexiva. Ou seja, mesmo que uma linguagem possua identidade e esta relação valha entre todos os tipos de termos da linguagem (nenhuma restrição sintática de PI, portanto), podemos, por exemplo, fornecer uma semântica quase-conjuntista para esta linguagem, interpretando a relação de identidade como a relação de indistinguibilidade. Assim, ainda estaremos quantificando sobre objetos sem identidade, e o fato de expressarmos a relação de identidade *na linguagem* não nos compromete com a tese mais forte de que os objetos sobre os quais quantificamos possuem identidade. De fato, como a metateoria é  $\Omega$  eles não possuem. Este tipo de observação, acreditamos, poderá nos ajudar com a alegada afirmação de que a linguagem natural está

comprometida com alguma forma forte de reflexividade.

O que significa exatamente dizer que a linguagem natural está comprometida com a reflexividade? Para avaliarmos melhor esta questão tendo-se em vista a possibilidade que propusemos no parágrafo anterior, será útil aqui distinguir entre duas formas de reflexividade: a reflexividade linguística (RL) e a reflexividade em sentido ontológico (RO). No sentido linguístico, a reflexividade poderia ainda ser dividida em duas versões, a reflexividade linguística *forte* (RLF) e a reflexividade linguística *modesta* (RLM). A versão modesta da reflexividade linguística pode ser enunciada como sendo a tese de que para quaisquer termos  $t_1$  e  $t_2$  da linguagem em questão (aqui, a linguagem natural), sempre podemos *enunciar*  $t_1 = t_2$ . Ou seja, a versão modesta é uma tese acerca da capacidade expressiva da linguagem de que estamos tratando. Poderíamos enunciar a versão *forte* da reflexividade linguística como a tese de que além de podermos expressar que  $t_1 = t_2$ , esta sentença deve poder ser verdadeira ou falsa. A versão *ontológica* da reflexividade enuncia que há uma questão de fato, ou se preferirmos, há algo no mundo que determina que  $t_1$  é o mesmo objeto que  $t_2$  ou não. Resumidamente, temos:

**RLM** Podemos expressar que  $t_1 = t_2$ ;

**RLF** Além de podermos expressar este fato,  $t_1 = t_2$  deve ser verdadeiro ou falso;

**RO** Há uma questão de fato que determina se os objetos designados por  $t_1$  e  $t_2$  são ou não idênticos.

Esta distinção pode nos ajudar de diversas maneiras. Em primeiro lugar, RLM é uma tese que pode ser encarada como sendo desprovida de qualquer peso metafísico. Claro, o fato de podermos expressar determinadas sentenças não significa que estas sentenças impliquem na existência dos respectivos estados de coisas descritos, menos ainda que esses estados de coisas obtêm. Isto fica claro por diversas características da linguagem natural, que pode expressar enunciados acerca de objetos que não existem, pode predicar propriedades contraditórias de um mesmo objeto, etc. Assim, poderíamos dizer que a linguagem natural é compatível em um nível modesto com diversas teses que *podem* vir a ter peso metafísico: paraconsistência (ou alguma forma de meinongianismo), platonismo (compromisso com entidades abstratas), ficcionalismo (no sentido de compromisso com entidades não-existentes efetivamente), entre outras, todavia, a linguagem natural por si só não nos compromete com estas teses em suas versões metafísicas. Como

estamos dizendo, ao nível modesto podemos expressar este tipo de fatos, podemos dizer que partículas quânticas são ou não idênticas (como no caso de RLM), mas isto não implica que a tese metafísica de que partículas quânticas sejam indivíduos. Este compromisso, assim como os outros compromissos metafísicos mencionados anteriormente, deve ser assumido de antemão, não pode ser obtido da linguagem natural como uma consequência de seu funcionamento.

O primeiro passo em direção a um maior peso metafísico é dado por RLF. Se aceitarmos que a noção relevante de verdade em jogo é a verdade como correspondência, e ainda mais, se aceitarmos a alegação muito em voga atualmente de que uma verdade neste sentido é *tornada* verdadeira por um fazedor de verdade (*truth maker*), um estado de coisas existente no mundo, então se aceitarmos RLF aparentemente estamos comprometidos com alguma versão metafísica de que os objetos devem ser indivíduos. Se nos restringirmos ao caso da mecânica quântica, esta forma de RLF vai de encontro ao que propõe a Conceção Recebida. Claro, aceitar esta versão da teoria correspondentista da verdade implica determinados compromissos com formas de realismo que nem todos os filósofos estariam dispostos a aceitar hoje em dia. Outras teorias da verdade poderiam aliviar o peso deste compromisso, como a teoria da verdade pragmática, na qual, intuitivamente falando, tudo se passa como se  $t_1 = t_2$ , mas não é necessário que haja uma questão de fato que determine isto definitivamente. Apesar de interessante, não entraremos nos detalhes acerca das consequências de se utilizar as diferentes teorias da verdade para a Conceção Recebida e para a relação entre quantificação e identidade aqui.

O passo decisivo para uma versão da tese da reflexividade com peso metafísico vem apenas com RO.<sup>1</sup> Segundo esta versão da tese, é parte da própria natureza dos objetos que exista uma questão de fato quanto a sua igualdade ou diferença. Neste caso, claro, está implicada RLF em sua versão da verdade como correspondência no sentido mais forte. Note ainda que nem RO nem RLF implicam que possamos distinguir de fato os objetos de que se trata, ou seja, não implicam uma versão epistemológica da tese da reflexividade. A versão ontológica da tese pode estar associada com a mecânica quântica, é parte de uma

---

<sup>1</sup>De fato, esta afirmação merece uma qualificação. Poderíamos atribuir peso metafísico a uma tese entre RLM e RLF, de que enunciados de identidade sempre podem ser feitos mas estão ontologicamente indeterminados. Neste sentido, os objetos em questão seriam aquilo que se chama na literatura de *ontologicamente vagos*. Assim, assumir que RLM nos compromete com a individualidade dos objetos seria banir sem nenhuma discussão adicional a tese de que existem objetos vagos! Esta questão, apesar de muito interessante, não será discutida aqui.

possível ontologia de indivíduos associada com a teoria. Todavia, como estamos argumentando, RO não se segue de RLM, assim como não se segue que o mundo seja contraditório do simples fato que nossa linguagem possa enunciar propriedades contraditórias de um mesmo termo. Para fazer esta ligação, como dissemos, não basta considerarmos características do funcionamento da linguagem natural, teses de caráter metafísico devem ser assumidas também.

Assim, podemos melhor entender a dificuldade em questão se distinguirmos entre diferentes tipos de comprometimento com a tese da reflexividade. A RLM é claramente uma característica de nossa linguagem, mas como dissemos acima, ela sozinha não deve ser vista como nos comprometendo com a versão mais forte da tese, qual seja, RO. De fato, associar RO com RLM implica já ter tomado uma decisão de cunho metafísico acerca da ontologia do mundo, ou talvez de modo mais restrito, da ontologia de teorias como a mecânica quântica. Mas esta associação é uma escolha prévia que deve ser feita com base não apenas na linguagem e na teoria em questão, mas também com base em preferências de caráter metafísico. Assim, não é legítimo inferir RO de RLM, apenas podemos fazer a inferência se já estivermos comprometidos com RO por outros motivos. Deste modo, se uma semântica para lógicas não-reflexivas for feita na linguagem natural, isto não implica que estaremos nos comprometendo com a reflexividade, pois podemos razoavelmente aceitar apenas RLM.

Claro, as lógicas não-reflexivas buscam precisamente capturar na própria linguagem destas lógicas as características metafísicas oriundas de se negar RO, como sugere que se faça a *Concepção Recebida*. Este, de fato, parece ser um dos objetivos de se propor um sistema de lógica com linguagens formais: em geral, buscamos com eles especificar aspectos da linguagem natural e deixar outros de lado. Como exemplo, podemos mencionar as características da implicação. Existem diversos sistemas que formalizam diferentes versões de implicação, muitos deles buscando superar algumas das dificuldades de se entender a implicação no seu sentido material, que dá origem aos chamados “paradoxos da implicação”. Outro exemplo concerne a negação, que pode aparecer em versões clássica, intuicionista, paraconsistente, entre outras. Do mesmo modo, lógicas não-reflexivas buscam especializar a linguagem natural no que diz respeito à identidade e nos ajudar a compreender fenômenos associados à ontologia que podem se manifestar mas que deveriam estar desvinculados da identidade.

## 5.9 OBSERVAÇÕES FINAIS

Talvez este seja o momento apropriado para retornarmos à discussão com a qual começamos: as partículas quânticas são objetos? O que devemos entender pelo termo “objetos”? A objetualidade está ligada à quantificação? Nosso objetivo aqui não foi dar respostas definitivas à estas questões, mas antes mostrar que não estamos impedidos em princípio de quantificar sobre itens sem identidade. Se isto faz deles objetos, no sentido que alguns filósofos emprestam ao termo, trata-se de uma discussão com a qual não desejamos nos comprometer no decorrer deste trabalho. Para tanto, teríamos de analisar mais detalhadamente a noção Frege-Quine acerca dos objetos e as alternativas propostas a ela, algo que o espaço aqui não nos permite fazer. Todavia, podemos assinalar que este tipo de investigação contribui para que se separe os slogans quínianos, “ser é ser o valor de uma variável” e “nenhuma entidade sem identidade”. Podemos sustentar razoavelmente que há seres sem identidade (sejam eles objetos ou não).

Claro, mais argumentos seriam necessários para se desenvolver esta concepção, e até mesmo o critério de compromisso ontológico de Quine vinculado a uma linguagem e a uma lógica particular se mostrou um princípio controverso. O que buscamos fazer, por outro lado, foi mostrar que não são convincentes alguns dos argumentos a favor da visão tradicional de que objetualidade no seu sentido Frege-Quine pressupõe identidade, baseados nas alegações de que a quantificação e os aparatos de referência em geral pressupõe a identidade. Como vimos, isto não segue-se necessariamente dos modos pelos quais damos sentido aos quantificadores, e talvez trate-se antes de um problema metafísico de determinar exatamente o que devemos entender por objetos do que tentar utilizar argumentos acerca da significação de alguns termos da lógica para delimitar ou eliminar uma classe de entidades.

Uma possibilidade que esboçamos ao longo do texto e que consideramos mais razoável seria tratar os sistemas de lógica associados a metafísicas que dependerão, de certa forma, da interpretação pretendida que damos ao sistema. Como vimos, sistemas de lógica que formalmente coincidem com a lógica clássica podem receber interpretações não-reflexivas, e do mesmo modo, sistemas não-reflexivos podem receber interpretações clássicas. A interpretação a ser escolhida como mais adequada dependerá de nossos objetivos e de convicções de ordem metafísica, daquilo que desejamos expressar com tal sistema. Assim, as alegações de que a quantificação pressupõe a identidade podem ser vistas como comprometidas de antemão com ontologias que obedecem ao

Princípio da Reflexividade. Por outro lado, podemos sustentar razoavelmente que quantificamos sobre entidades sem identidade, e que esta não é uma *consequência* das lógicas não-reflexivas, mas um pressuposto de ordem metafísica que foi assumido de antemão, assim como as entidades com identidade são também por sua vez assumidas por princípio em contextos em que tratamos com a lógica clássica. Se a interpretação é ou não reflexiva é algo que dependerá de convicções prévias, não é algo que, ao nosso ver, possa ser *derivado* de um sistema de lógica.



## 6 A VERSÃO FRACA DO PII

Neste capítulo investigaremos mais profundamente o impacto para a Concepção Recebida de alguns trabalhos recentes tratando da relação entre o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) e a mecânica quântica ortodoxa. Também discutiremos mais um pouco acerca das relações entre teorias científicas e ontologias que foram introduzidas no primeiro capítulo, de modo que afirmações de alguns autores sobre a possibilidade de se *provar* o PII na mecânica quântica podem ser melhor compreendidas. Nossa análise aqui vai se focar no assim chamado Princípio de Indiscernibilidade dos Indiscerníveis fraco, bem como na afirmação de que esta versão de PII pode ser demonstrada na mecânica quântica e que ela é suficiente para se salvar PII em geral. O núcleo de nossa argumentação é que, como a validade ou invalidade de PII é uma questão metafísica, não uma questão científica, devemos deste modo empregar padrões *metafísicos* para julgar se o PII fraco possui boas chances de ser considerado como um princípio que de fato vinga as versões mais fortes do princípio e se possui motivações para ser aceito independentemente. Considerando a partir deste ponto de vista, será sustentado que não existem boas razões para se aceitar que o PII fraco de fato salva PII na mecânica quântica e que esta teoria está comprometida com a ontologia a ele associada.

### 6.1 PII E MECÂNICA QUÂNTICA

O famoso *Princípio da Identidade dos Indiscerníveis* (PII) enuncia que se os objetos  $a$  e  $b$  partilham todas as suas qualidades, então  $a = b$ . Na sua forma contrapositiva, o princípio enuncia que itens distintos devem ser qualitativamente discerníveis, e é nesta leitura específica que ele ganhou prominência hoje em dia. Formas distintas do princípio emergem dependendo de se somos liberais ou austeros em nossa compreensão da noção de “qualidades”. Realmente, pequenas mudanças aqui podem fazer toda a diferença. Para considerar dois exemplos comuns que caem no lado liberal, podemos em um primeiro caso permitir que relações contem como qualidades, e então objetos distintos podem ser discerníveis em termos das relações nas quais eles entram; podemos também desejar, em um segundo caso, permitir propriedades cujo enunciado linguístico faça referência explicitamente a outros indivíduos, de modo que a discernibilidade de alguns itens pode pressupor a disponibi-

lidade prévia daquele indivíduo em particular. Como veremos, este tipo de discussão é fundamental para a nossa compreensão dos propósitos do PII.

Agora, como ocorre com a maioria dos princípios metafísicos propostos através da história da filosofia, o PII suscitou muitas controvérsias através dos séculos. Em particular, dois pontos diretamente relacionados com estas controvérsias receberão atenção especial neste capítulo. O primeiro destes pontos concerne a relação entre identidade e discernibilidade. Dependendo da versão do princípio que estivermos considerando, ele colapsará uma determinada forma de indistinguibilidade qualitativa em identidade numérica. Ou, dizendo a mesma coisa mas agora levando em conta a versão contrapositiva do princípio, dizemos que ele nos permite explicar a diferença numérica dos itens através de alguma forma de diversidade qualitativa. O segundo ponto, geralmente ligado ao primeiro, concerne o fato de que, se PII for verdadeiro, então qualidades são tudo o que precisamos para a individuação de objetos, e até podemos de certa forma definir objetos particulares como “feixes” de qualidades. Alguns acharam ambas estas características atrativas e adotaram o PII, enquanto que outros acharam estas características indesejáveis, e começaram a buscar argumentos para atacar o PII.

Para aqueles insatisfeitos com PII, a rota óbvia para se tentar mostrar que o princípio era falso estava bem à mão: tentar encontrar um contra-exemplo para o PII, isto é, uma situação possível compreendendo dois itens (numericamente distintos, portanto) partilhando todas as suas qualidades (isto é, dois itens *numericamente* distintos mas *qualitativamente* idênticos). Alguns destes contra-exemplos já entraram para a história deste assunto. Talvez o mais famoso dentre eles seja o universo de Max Black contendo apenas duas esferas de ferro a 2 milhas de distância uma da outra (ver Black (BLACK, 1952); ver também a discussão em Adams (ADAMS, 1979)). Pelo que nos conta o exemplo, as duas esferas são absolutamente indistinguíveis, tendo o mesmo diâmetro, temperatura, cor, forma, tamanho... Ainda, é assumido que nada aparece no universo para quebrar a simetria e permitir que se faça alguma distinção entre as esferas. Obviamente, os defensores do PII não foram facilmente demovidos de sua crença, eles contra-argumentaram alegando que muitos aspectos dos alegados contra-exemplos são problemáticos, para dizer o mínimo. Então, mesmo que pudéssemos seguir para sempre discutindo se PII é necessariamente verdadeiro e se ambas as características discutidas no parágrafo anterior podem ser salvas ao se disputar a legitimidade dos contra-exemplos, a questão parecia

concernir no máximo contra-exemplos imaginários com situações acontecendo em algum mundo possível muito afastado do mundo atual, não tocando no problema da validade do princípio no mundo atual.

A história, todavia, começou a mudar logo nos primeiros anos do século XX, com o desenvolvimento da mecânica quântica. De certa forma, praticamente em paralelo às discussões eminentemente metafísicas acerca de PII que mencionamos, foi reconhecido muito cedo pelos primeiros fundadores da mecânica quântica que em muitas situações, as partículas quânticas do mesmo tipo (elétrons, por exemplo) não poderiam ser distinguidas qualitativamente pelas suas propriedades; elas eram ditas absolutamente indistinguíveis, apesar de serem numericamente distintas (para as discussões históricas relevantes, ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.3)). Então, assim pareceu, havia forte evidência empírica para se sustentar que PII é de fato falso, e ainda mais do que isso, é falso precisamente no nosso mundo e de acordo com uma das teorias empíricas de maior sucesso já formuladas. Parece então que não é necessário irmos até outro mundo possível para encontrarmos contra-exemplos para o PII. Como uma consequência adicional desta falha de PII, as partículas quânticas foram consideradas como *não-indivíduos*, elas não poderiam ser individuadas por nenhum princípio de individuação que possamos propor. A situação, conforme acabamos de a descrever, perdurou mais ou menos como um consenso até recentemente, de modo que esta visão sobre a natureza das partículas quânticas foi rotulada a Concepção Recebida sobre a não-individualidade das partículas, como já a apresentamos (ver também (FRENCH, 1998)).

Todavia, apesar de toda a grande evidência que se pode sustentar que a mecânica quântica lança sobre a falsidade de PII e em favor da validade da Concepção Recebida, estas posições começaram a ser questionadas na literatura filosófica em duas frentes. Em primeiro lugar, conforme já expusemos, começou-se a argumentar que a mecânica quântica poderia ser entendida como tratando também com indivíduos, desde que o princípio de individuação utilizado seja alguma forma de substrato lockeano ou identidade primitiva. Estes tipos de princípio também contrariam o PII ao violar a relação que o princípio propõe entre identidade e indistinguibilidade. Isto é, identidade primitiva e substratos lockeanos são princípios de individuação que mantêm a noção de indistinguibilidade qualitativa separada da identidade numérica, de modo que partículas do mesmo tipo podem ser qualitativamente indistinguíveis sem serem numericamente idênticas (para uma exposição acerca deste modo de se fundamentar a individualidade das partículas,

ver French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006, cap.4)). Em segundo lugar, como uma tentativa ainda mais ousada de se atacar as bases da Conceção Recebida, foi sustentado que PII poderia sim ser visto como válido na mecânica quântica, e que toda a confusão acerca de sua invalidade poderia ser vista como originando-se em um esquecimento de que existem de fato diversas versões do princípio, de modo que, mesmo que algumas destas versões falhem, outras podem valer (ver Saunders (SAUNDERS, 2003), (SAUNDERS, 2006), Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008), Muller e Seevinck (MULLER; SEEVINCK, 2009)).

Os defensores do PII propuseram que, mesmo que os objetos quânticos partilhem todas as suas propriedades *monádicas*,<sup>1</sup> elas podem ser discernidas por algum tipo de relação. Falando por alto, se permitirmos o tipo ‘correto’ de relações no escopo das propriedades partilhadas pelos objetos, então PII nesta versão particular pode ser visto como válido na mecânica quântica. Considere o caso, por exemplo de dois elétrons no estado singlete. Já que estamos assumindo a diversidade numérica por hipótese, para a validade de PII devemos garantir algum tipo de distinção qualitativa para os elétrons. De acordo com os defensores do PII, a relação “ter direção oposta de cada componente de spin  $a$ ” desempenha precisamente este papel no caso dos elétrons, discernindo-os quando escolhemos alguma direção, dado que nenhum elétron tem spin oposto a si mesmo. Além disso, esta forma de discernir é chamada de *discernibilidade fraca*, para contrastar com formas mais fortes de discernibilidade, como aquelas obtidas com o uso de propriedades monádicas. Então, apenas temos que garantir a existência de alguma tal relação para quaisquer duas partículas numericamente distintas para garantir a validade do PII na mecânica quântica. Isto nos daria uma versão do PII conhecida como PII *fraco*, e é esta versão que se sustenta ser válida na mecânica quântica. Obviamente, uma das importantes questões que permanece parece ser: é legítimo o uso de relações no escopo do PII? Ou, colocado de outra forma: é esta versão do PII aquilo que esperávamos quando falamos deste princípio em outros contextos? Bem, não é de se espantar que os defensores do PII responderão à estas perguntas com um ‘sim’, enquanto que seus detratores dirão ‘não’ (ver Ladyman e Bigaj (LADYMAN; BIGAJ, 2010), ver também Krause (KRAUSE, 2010)).

Neste capítulo, retomaremos a discussão precisamente a partir

---

<sup>1</sup>Algumas vezes as propriedades monádicas são descritas como aquelas que podem ser expressas em termos de um predicado de primeira ordem que *não permite* referência a outros particulares, mas na maioria das vezes esta qualificação não é nem mesmo mencionada.

deste ponto. Nossa primeira motivação vem do uso de relações em PII; este uso parece pressupor uma *hipótese metafísica* bastante forte de que as relações podem de fato ser usadas para discernir. Nossa segunda motivação origina-se com a questão já proposta por Hawley (HAWLEY, 2009): qual é a razão para nos importarmos tanto com o status de PII? Se muitos estão tão ansiosos para mostrar que o PII é de fato um princípio válido na mecânica quântica, então quais são as razões que se apresentam para se fazer isto? E o que esperamos do PII na mecânica quântica? Aqui, responderemos a estas questões analisando três aplicações metafísicas distintas do PII: em uma teoria de feixes da individuação, na contagem de coleções de objetos e no contexto de uma filosofia empirista. A controvérsia tratando do espaço concedido às relações em uma formulação do PII deverá ser examinada à luz destas aplicações, ligando as duas motivações que acabamos de propor. Note que todas as três aplicações propostas aqui estão usualmente associadas muito de perto com PII, e é dito ainda que o princípio desempenha um importante papel no entendimento que temos destas aplicações. Nossa ideia é que ao examinarmos como a versão fraca do PII busca dar conta destas aplicações precisamente no contexto da mecânica quântica, podemos ter melhores bases para julgar se a aceitação de relações em sua formulação nos garantiu qualquer grande benefício a ponto de nos fazer deixar de lado quaisquer reservas que poderíamos ter concernindo o status daquele princípio. Começamos motivando o caráter estritamente metafísico de nossa investigação e retomando alguns pontos apresentados no primeiro capítulo.

## 6.2 O STATUS DE PRINCÍPIOS METAFÍSICOS NA MQ

Vamos agora voltar para o tempo em que era ainda um consenso bastante difundido que a mecânica quântica viola o PII. A uma primeira vista, pareceu que toda a discussão concernindo a validade de PII tinha de fato melhorado muito quando nos voltamos para contra-exemplos fornecidos pela mecânica quântica. O mesmo poderia ser dito sobre a defesa da versão fraca de PII no contexto específico desta teoria. A razão para este modo de ver é que, quando estamos tratando com a teoria quântica, poderíamos argumentar, estamos envolvidos em investigações metafísicas que podem ser vistas como ‘naturalizadas’. Realmente, há uma grande tendência a se naturalizar ramos da filosofia (filosofia da matemática, epistemologia, etc), e a metafísica não ficou para trás. A metafísica naturalizada hoje em dia parece carregar

implicitamente entre os filósofos da ciência as credenciais de que seja o único tipo de metafísica respeitável (para uma defesa deste tipo de posição, ver Ladyman e Ross (LADYMAN et al., 2007); Muller e Seevinck (MULLER; SEEVINCK, 2009) também expressam sua simpatia em favor da metafísica naturalizada). Isto permanece verdadeiro mesmo que ninguém pareça estar completamente certo sobre o que realmente está envolvido em se naturalizar um ramo da filosofia. O principal ponto, ao que parece, é que é de fato mais fácil de saber aquilo de que a metafísica naturalizada *não* trata: definida negativamente, a metafísica naturalizada é simplesmente algum tipo de investigação metafísica que não se envolve em especulações controversas e se restringe ao tipo metafísico de discussões que podem ser formulados dentro do escopo de algumas teorias científicas respeitáveis.

De fato, parece seguro dizer que tanto os defensores quanto os detratores do PII na maioria das vezes se consideram como fazendo algum tipo de metafísica naturalizada, deixando para trás a discussão puramente especulativa que se conduz em âmbitos puramente abstratos. Isto é interessante já que Muller (em (MULLER, 2011)) e Muller e Saunders, por exemplo, consideram que os resultados estabelecidos em Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008) e em Muller e Seevinck (MULLER; SEEVINCK, 2009) como *provando* que a mecânica quântica vinga o PII. Considerando este ponto de vista, então, não haveria espaço para concepções metafísicas distintas serem associadas com a mecânica quântica, pois ela alegadamente incorpora uma versão do PII e tudo mais que vem com ele. Este seria um resultado notável, dado que quebraria a assim chamada *Tese da Subdeterminação da Metafísica pela Física*. Segundo esta tese, conforme já discutimos, uma teoria física como a mecânica quântica não nos compromete com nenhuma metafísica em particular, permitindo que metafísicas distintas e até mesmo incompatíveis sejam associadas com a teoria (ver também French (FRENCH, 2011)). De fato, Muller, no artigo mencionado, afirma estar fazendo precisamente isto, quebrando a subdeterminação da metafísica ao provar que o PII é válido. Por outro lado, Hawley (HAWLEY, 2009) e Ladyman e Bigaj (LADYMAN; BIGAJ, 2010) sustentaram que o PII em sua versão fraca não é suficiente para se discernir alguns tipos de objetos, incluindo partículas quânticas, de modo que estas entidades devem ser vistas como indiscerníveis. Obviamente, estes autores baseiam seus ataques no uso que Muller e Saunders fazem das relações e da discernibilidade fraca: discernir duas coisas e ainda assim não apresentar nenhuma diferença específica não é discernir de fato. Para serem discerníveis, objetos devem possuir ao menos uma propriedade

monádica discernidora.

Então, conforme mencionamos acima, as relações estão no centro da controvérsia. Alguns aceitam que elas podem discernir objetos, outros negam esta possibilidade. O que esta controvérsia mostra, de acordo com o ponto de vista geral que estamos adotando neste trabalho, é que naquilo que diz respeito à metafísica naturalizada, devemos reconhecer que neste ponto a discussão chegou ao seu limite: novamente no centro da disputa temos a velha questão *metafísica* acerca do papel das relações na formulação do PII e no princípio de individuação em geral, e parece que a mecânica quântica, quando considerada sem o auxílio de outras ferramentas (interpretação, teses metafísicas alheias ao formalismo) está muito longe de nos ajudar a decidir *esta* questão. Então, talvez seja o momento de reconhecer que nos adiantamos um pouco quando aceitamos as afirmações de que a mecânica quântica poderia resolver esta disputa, seja provando PII, seja atestando para a falsidade de alguma versão do princípio. Realmente, deveria ser reconhecido que provar uma versão do PII fraco na mecânica quântica não quebra realmente a tese da subdeterminação, mas apenas reflete a atitude de alguns autores concernindo o modo como PII deve ou pode ser propriamente entendido (de fato, uma atitude que para a maioria dos outros parece muito liberal). Parece que estamos encarando um caso clássico de uma situação para a qual Steven French chamou nossa atenção, de que tiramos tanta metafísica de uma teoria científica quanto havíamos colocado nela de início (ver a conclusão de (FRENCH, 1995)). Então, permitir relações no escopo de PII vai nos garantir uma versão deste princípio na mecânica quântica. Proibir relações, por outro lado, nos dará um resultado oposto. A mecânica quântica não pode provar definitivamente princípios metafísicos como o PII (ou ainda a necessidade de uma metafísica de substratos), mas pode ser vista como rejeitando alguns deles (pelo menos por enquanto), conforme expusemos na introdução (como por exemplo, o próprio PII na sua forma mais forte, envolvendo apenas propriedades monádicas e nenhuma hipótese interpretacional adicional, como algumas formulações da teoria envolvendo variáveis ocultas).

Então, diante destas circunstâncias, como o debate pode prosseguir a partir deste ponto? Bem, dado que a discussão sobre o status do PII já se voltou para uma arena puramente metafísica (e somos da opinião particular de que ela não pode escapar completamente desta arena, conforme Steven French já apontou), nós proporemos que se dê uma olhada nesta tentativa de se salvar o PII na mecânica quântica a partir de um ângulo mais metafísico, enquanto que mantemos ainda

assim os olhos na mecânica quântica. Dado que o PII é um princípio metafísico, proposto muito antes do nascimento da mecânica quântica com propósitos metafísicos específicos, podemos nos perguntar: como a versão fraca do princípio trata de algumas destas aplicações? Deveríamos examinar aquelas circunstâncias particulares nas quais a utilização do PII é tida como fundamental para se garantir que algum estado de coisas desejado ocorra. Ao realizarmos este tipo de investigação poderemos melhor julgar se a versão fraca do PII possui boas razões para ser sustentada como uma versão que mereça o nome de PII. Aqui, vamos trabalhar em três contextos nos quais PII é dito desempenhar algum papel essencial em algumas teses metafísicas que não são desprovidas de seus próprios méritos: i) PII é uma das ferramentas fundamentais de uma teoria de feixes; ii) PII está estritamente relacionado com a noção de contagem, de modo que é necessário para obtermos o número correto de elementos em qualquer ocasião; iii) PII é um dos princípios fundamentais de uma filosofia empirista. Agora, vamos primeiro dar uma olhada mais precisamente nas propostas para salvar PII na MQ, e depois então seremos capazes de checar se ele nos ajuda a manter algumas das características desejáveis para as quais ele é proposto.

### 6.3 VERSÕES DO PII

Então, o que precisamente devemos entender pela ‘versão fraca’ do PII? Como ele pretende salvar o PII de ser refutado na mecânica quântica? Já que a maior parte da discussão concernindo a validade do princípio na teoria quântica depende da particular maneira como estamos entendendo sua formulação e dos detalhes técnicos associados a ela, vamos começar dando uma olhada mais de perto nestes tópicos.

Aqui, vamos recordar alguma da terminologia introduzida por Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008, pp.520-521). Vamos supor que estamos trabalhando na lógica elementar com seu aparato lógico usual (variáveis, quantificadores, conectivos, sinais de pontuação). Vamos acrescentar a este aparato a relação binária de pertinência  $\in$  para que sejamos capazes de desenvolver a teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha (ZFC). Uma vez que temos ZFC, podemos estar seguros de que temos ao nosso dispor todas as ferramentas matemáticas necessárias para desenvolver o formalismo da mecânica quântica não-relativista. Também acrescentamos a este aparato variáveis distintas para sistemas físicos, para estados físicos e

também para magnitudes físicas. A mecânica quântica nos ensina a conectar estas noções, de modo que, como é usual, sistemas físicos são representados por vetores unitários em algum espaço de Hilbert, e os observáveis são representados por operadores Hermitianos naqueles espaços. Ainda, quando dizemos que um sistema físico está em um *auto-estado* de um operador, vamos significar com isto que o sistema físico em questão possui a propriedade representada pelo operador do qual estamos tratando.<sup>2</sup> Este é, basicamente, o vocabulário no qual a discussão se desenvolve.

Em primeiro lugar, vamos considerar fórmulas  $P(x)$  neste vocabulário com apenas uma variável livre. Estas fórmulas vão denotar basicamente aquilo que consideramos serem as propriedades monádicas dos sistemas. Em particular, se um sistema físico  $a$  tem alguma propriedade física, que como nós mencionamos anteriormente é encapsulado no formalismo de espaços de Hilbert pelo fato de que o vetor representando um *auto-vetor* do operador representando aquele observável, então podemos escrever este fato com uma fórmula de nossa linguagem da forma  $P(a)$ . Sistemas físicos  $a$  e  $b$  são ditos *absolutamente discerníveis* se existe uma propriedade monádica  $P$  tal que um deles possui  $P$  e o outro não, isto é, ou  $P(a)$  e  $\neg P(b)$  ou então  $\neg P(a)$  e  $P(b)$ . Abreviamos este enunciado por  $Abs(a, b)$ . Se um elemento de uma coleção  $S$  é absolutamente discernível de qualquer outro elemento de  $S$ , então ele é dito ser um *indivíduo* por Muller e Saunders (ver *op. cit.*, p. 504). Objetos que não são absolutamente discerníveis são por sua vez *absolutamente indiscerníveis*.

Agora, vamos considerar relações. Na mecânica quântica, as relações podem aparecer em duas versões distintas. Em primeiro lugar, podemos ter relações probabilísticas. Estas são relações enunciadas de na forma de probabilidades condicionais: a probabilidade de que um sistema  $a$  tem alguma propriedade desde que um sistema  $b$  tenha alguma outra propriedade. Em segundo lugar, podemos ter relações categóricas, aquelas que não dependem de probabilidades para serem enunciadas; para um exemplo, temos “ter valor oposto de spin  $a$  em uma determinada direção”. Relações de ambos os tipos são representados por fórmulas  $R(x, y)$  com duas variáveis livres. Agora, pode ocorrer que alguma relação  $R(x, y)$  pode valer entre o par de sistemas físicos  $(a, b)$  precisamente nesta ordem mas não na ordem oposta, isto é,  $\neg R(b, a)$ . Então, dizemos que  $a$  e  $b$  são *relativamente discerníveis*. Uma dificuldade pode surgir nos casos em que a relação em questão seja simétrica,

---

<sup>2</sup>Esta ideia será discutida novamente quando tratarmos da relação entre PII e empirismo.

de modo que nenhuma discernibilidade a partir da ordem dos relata pode ser obtida. O que fazer então? Bem, podemos ter uma forma ainda mais fraca de discernibilidade se a relação é irreflexiva, isto é, se ela vale entre ambos os sistemas tomados em qualquer ordem, mas não vale para cada um deles tomado consigo mesmo, de modo que  $\neg R(a, a)$  e  $\neg R(b, b)$ . Neste caso, temos uma relação simétrica e irreflexiva, e dizemos que os sistemas assim relacionados são *fracamente discerníveis*. Se  $a$  e  $b$  são relativamente discerníveis ou fracamente discerníveis, denotamos esta relação por  $Rel(a, b)$ , e dizemos que são *relacionalmente discerníveis*.

Note que objetos absolutamente discerníveis também são relacionalmente discerníveis, isto é,

$$Abs(a, b) \rightarrow Rel(a, b).$$

Realmente, se existe uma propriedade  $P$  que  $a$  possui mas que  $b$  não tem, simplesmente tomamos  $R(a, b)$  como sendo definida pela fórmula  $P(a) \wedge \neg P(b)$ . A implicação conversas, por outro lado, é muito mais controversa. Como é bem conhecido a partir da literatura, de um ponto de vista metafísico não está claro que toda relação possa ser convertida em uma propriedade monádica. Para nos mantermos com o exemplo do caso do spin, se  $a$  tem valor de spin oposto ao de  $b$  em alguma direção, então, a dificuldade é que não está claro se deste fato podemos inferir que  $a$  tem a propriedade monádica “ter spin oposto a  $b$  em alguma direção”. Ainda, operando no aparato conceitual que estamos, não é óbvio que a discernibilidade absoluta nem sempre ocorra. De fato, já que estamos conduzindo nossas discussões dentro da teoria de conjuntos ZFC, sistemas físicos são representados por conjuntos. Então, pareceria que todo sistema físico  $a$  em nossa discussão poderia ter uma propriedade distinguidora, *viz.*,  $P(x)$  definida pela fórmula  $x \in \{a\}$ . Apenas  $a$  satisfaz esta propriedade. Obviamente, esta não é uma *propriedade física*, mas é uma propriedade de qualquer modo. Apenas por questão de argumento, não vamos continuar seguindo esta linha de argumentação aqui, apesar de ser consistente com o aparato lógico-matemático no qual estamos trabalhando (ver Krause (KRAUSE, 2010) para mais discussão nesta direção).

Agora, vamos verificar como estes conceitos são ditos contribuir para a discussão de PII na mecânica quântica.

Uma primeira versão de PII, chamada de PII absoluto (PIIA) pode ser tomada como nos dizendo que objetos numericamente distintos

são absolutamente discerníveis:

$$a \neq b \rightarrow Abs(a, b).$$

Esta é a versão mais usual de PII, enunciando que objetos partilhando todas as suas propriedades absolutas são numericamente um e o mesmo objeto. Conforme iremos discutir nas próximas seções, esta formulação do PII estará no centro das objeções voltadas ao PII fraco. Realmente, quando as pessoas argumentam que PII é falso em algum contexto, em geral elas tem PIIA em mente. Isto ocorre, claro, pois se acredita que seja esta versão do princípio que tem peso metafísico. Certamente, esta parece ser a versão mais natural do PII quando desejamos reduzir questões de diferença numérica a questões de diferença qualitativa (e isto é algo para o qual PII é proposto), pois ele nos garante que todas as vezes que nos deparamos com a primeira condição (diferença numérica), existe uma diferença qualitativa que nos permite discernir os itens.

Uma versão mais fraca de PII enuncia que objetos numericamente distintos são discerníveis, absolutamente ou relacionalmente:

$$a \neq b \rightarrow Abs(a, b) \vee Rel(a, b).$$

Esta é a versão de PII que Muller, Saunders e Seevinck afirmam estar salvando (ver Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008), Muller e Seevinck (MULLER; SEEVINCK, 2009)). De fato, eles argumentam buscando mostrar que qualquer par de objetos  $a$  e  $b$  são relacionalmente discerníveis, ou seja, que  $Rel(a, b)$  é o suficiente para salvar PII. Vamos apresentar brevemente o raciocínio destes autores. Como um primeiro passo, se  $a$  e  $b$  são sistemas físicos distintos, a implicação  $Rel(a, b) \rightarrow PII$  segue-se da própria definição de PII. Por outro lado, dado que  $Abs(a, b) \rightarrow Rel(a, b)$ , como nós já vimos, teremos que  $PII \rightarrow Rel(a, b)$ , como uma simples consideração de casos mostra. Então, no final temos que

$$PII \leftrightarrow Rel(a, b).$$

Isto é, considerando esta definição, para mostrar que PII é um princípio falso devemos mostrar que objetos distintos numericamente não podem ser nem mesmo relacionalmente discerníveis. Mas, que isto fique claro desde o começo: PII conforme definido por Muller e Saunders, tomado como sendo por definição uma disjunção entre  $Abs(a, b)$  e  $Rel(a, b)$ .

Deve ser notado que Muller e Saunders também apresentam uma discussão sobre as propriedades físicas permitidas, aquelas que podem ser utilizadas legitimamente para discernir objetos. Nós não entraremos

nesta discussão aqui, apontando apenas que as propriedades e relações que se permite figurarem no escopo de PII são, de acordo com eles, apenas aquelas para as quais podemos atribuir um significado físico claro. Aparte disso, o núcleo do argumento apresentado por Muller e Saunders consiste em mostrar que na mecânica quântica os objetos podem ser relacionamente discernidos, e então (devido à discussão apresentada no parágrafo anterior), que o PII vale. De fato, eles argumentam que tanto a discernibilidade absoluta quanto a discernibilidade relativa estão fora de questão, mas que a discernibilidade fraca não é eliminada pela mecânica quântica, ela é de fato um teorema no formalismo da teoria. Então, após algumas digressões acerca do formalismo da teoria quântica e alguns desenvolvimentos matemáticos, pode-se mostrar que PII pode valer se permitirmos que relações de discernibilidade fraca façam o papel de discernir os objetos (e se definimos o PII como fazem Muller e Saunders).

Obviamente, este seria um grande resultado, não fosse pelo fato de que faz uso essencial de relações, e que isto é um assunto bastante controverso. Para a maioria dos filósofos, enunciar PII como  $a \neq b \rightarrow (Abs(a, b) \vee Rel(a, b))$  já é ir longe demais, e então, salvar o princípio enunciado desta forma não é algo que realmente se deseje salvar. Relações, afirmam estes filósofos, não deveriam ser permitidas nas formulações do PII, dado que elas não são capazes de apresentar uma característica discernidora entre os itens que devem ser distinguidos, e então, não podem explicar suas diferenças qualitativas, caso exista alguma. Além disso, relações já pressupõe os relata, de modo que também não podem ser utilizadas para fundamentar a sua individualidade. Estes argumentos, que estamos apenas esboçando aqui, colocam sérios obstáculos para qualquer concepção que queira adotar PII permitindo relações, pois como uma primeira consequência, podemos ver claramente que a versão fraca do PII terá dificuldades em algumas formas de uma teoria de individualidade através de feixes de propriedades. Isto é importante para a discussão do status do PII fraco, pois como iremos argumentar, teorias de feixes da individualidade são uma das principais motivações para se adotar o princípio. De fato, vamos discutir este tópico particular com mais cuidado na próxima seção, começando nossa investigação metafísica que propomos acima.

## 6.4 CASO 1: PII E INDIVIDUAÇÃO POR FEIXES DE PROPRIEDADES

A ideia de que um indivíduo pode ser visto como sendo um feixe de qualidades não é nova, ela foi proposta já pelo menos na Idade Média, e é sustentada mesmo hoje por alguns filósofos eminentes (para a teoria de feixes na Idade Média, ver King (KING, 2000); Bertrand Russell advoga uma teoria de feixes em (RUSSELL, 1940)). Uma teoria de individuação de feixes pode ser vista como sendo composta por três teses principais:

- indivíduos são de alguma forma compostos de itens mais simples;
- estes itens mais simples compreendem apenas qualidades;
- cada indivíduo é caracterizado de modo único por suas qualidades.

O primeiro ponto concerne a assim chamada *tese da constituição ontológica*, que garante que os indivíduos são de certo modo compostos de outro tipo de componente tomado como sendo mais simples do que o próprio indivíduo. Isto é, um indivíduo é composto de outros itens, de modo que a individualidade não é uma noção irreduzível. O segundo ponto nos garante que qualidades são tudo o que precisamos para individuar um objeto; este é o caráter de ‘feixe’ da teoria. Então, para obtermos uma versão da teoria de feixes precisamos dizer claramente aquilo que consideramos que sejam as propriedades permitidas na individuação e como elas, por assim dizer, formam o indivíduo. Esta é de fato uma receita para se fazer indivíduos. Por fim, mas não menos importante, também precisamos garantir que não haveriam dois feixes instanciando todas as mesmas qualidades, pois neste caso a teoria de feixes falharia em seu papel de individuação. É precisamente neste ponto que o PII entra em cena, e desempenha um papel crucial em se garantir a unidade dos feixes de propriedades. Além disso, é neste último aspecto que a teoria de feixes encontra suas maiores dificuldades, dado que é através de ataques ao PII que os opositores da teoria de feixes buscam denunciá-la como uma explicação insatisfatória da individualidade.

Então, no contexto de uma teoria de feixes, para garantir que dois feixes partilhando todas as mesmas qualidades devem ser um e o mesmo feixe somos levados a adotar o PII. Obtemos diferentes versões do PII ao estipularmos o escopo das ‘qualidades’ no princípio, e algumas destas versões podem ser mais adequadas para os propósitos de uma

teoria de feixes, outras nem tanto. Note que é o PII que faz a ligação entre a individuação e as qualidades individuadoras. Deste modo, se permitirmos relações no escopo de PII, então estaremos assumindo que relações também podem nos ajudar a individuar os objetos, isto é, algo é aquilo que é em parte devido às relações nas quais toma parte. De fato, conforme argumentamos, este é precisamente o núcleo das reclamações feitas em torno do status do PII, pois em geral se argumenta que as únicas qualidades que deveriam ser permitidas na individuação de algo deveriam ser as propriedades monádicas, e mais do que isso, propriedades monádicas *que não façam nenhuma referência explícita a qualquer outro objeto particular* em seus enunciados linguísticos. Estas últimas são muitas vezes chamadas de *propriedades puras*.<sup>3</sup> Então, ‘mais alto que Pedrinho’ obviamente não pode contar como uma propriedade pura, dado que ela pressupõe de modo essencial a individualidade de Pedrinho. Ainda, as assim chamadas propriedades *haecceísticas*, tais como ‘ser idêntico a *a*’ não são permitidas; elas também são impuras, pois pressupõe *a* como já dado.

A dificuldade com as propriedades impuras consiste basicamente em que elas já pressupõe a individualidade de outros particulares. Vamos supor que uma propriedade possuída por *a* mencione o particular *b*. Então, para ser consistente, um teórico de feixes deve admitir que *b* também é um feixe de propriedades. Deste modo, entre as propriedades de *b* pode haver alguma mencionando *a*. Mas isto é tudo o que precisamos para dar origem a uma espécie de circularidade, pois a individualidade de *a* é explicada em termos da individualidade de *b*, que por sua vez depende da individualidade de *a*. Então, a individuação não pode envolver propriedades impuras, ela deve ser dada apenas por propriedades puras. Basicamente a mesma linha de argumentos é apresentada contra o uso de relações para se individuar. Como um primeiro argumento, similar ao apresentado contra propriedades impuras, é dito também que relações pressupõe a individualidade dos relata, isto é, devemos ter de antemão os itens individuais a serem relacionados. De acordo com esta concepção de relações, elas não podem ser naturalmente vistas como componentes dos indivíduos, conforme mencionamos anteriormente. Mais do que isso, relações simétricas e irreflexivas parecem nos fornecer em mãos a circularidade que acabamos de mencionar. Suponha que  $aRb$  e que  $R$  seja simétrica. Então, também temos que  $bRa$ . Deste modo, a individualidade de *a* depende do fato de *a*

---

<sup>3</sup>A definição rigorosa de uma propriedade pura é algo um pouco trabalhoso e sutil, mas não precisamos nos preocupar com estas questões aqui. Ver a discussão em Adams (ADAMS, 1979).

estar relacionado por  $R$  com  $b$ , e conversamente, a individualidade de  $b$  depende de  $b$  estar relacionado por  $R$  com  $a$ . Isto, obviamente, falha como uma explicação da individualidade. Então, parece, a discernibilidade fraca falha para teorias de feixes, já que ela coloca todas suas esperanças em relações simétricas e irreflexivas.

Ainda, como um argumento adicional, relações como as irreflexivas e simétricas são ditas nos garantir apenas a diferença *numérica*, mas não uma diferença *qualitativa*. De fato, fica claro que um objeto não pode estar relacionado deste modo consigo mesmo, e então devem haver dois deles, mas isto por si só não nos fornece nenhuma distinção entre os objetos considerados. Então, aparentemente, relações não funcionam neste contexto, pois o que exigimos nestes casos é uma qualidade possuída por um dos objetos mas não pelo outro, isto é, precisamos da discernibilidade absoluta (esta é basicamente a posição de Ladyman e Bigaj (LADYMAN; BIGAJ, 2010)). Este argumento é particularmente interessante porque Muller e Saunders estabelecem como uma condição sobre as qualidades que são permitidas como fazendo o papel de discernidoras no escopo de PII a condição de que sejam fisicamente significativas. Como Ladyman e Bigaj apontam, para discernir dois itens de modo fisicamente significativo devemos apontar diferenças entre eles, algo que a discernibilidade fraca não é capaz de fazer.

De acordo com este ponto de vista, então, a definição da única versão permitida do PII para uma teoria de feixes deveria se colocada como se segue:

$$a \neq b \rightarrow Abs(a, b).$$

Esta é a versão forte de PII, mais forte do que aquela proposta por Muller e Saunders, e que chamamos acima de PIIA. Mas esta forma do princípio é exatamente aquela que iniciou todo o problema para os defensores da teoria de feixes no contexto da mecânica quântica, já que parece haver um consenso de que as partículas quânticas são absolutamente indiscerníveis, nenhuma propriedade monádica pode distinguir entre duas partículas do mesmo tipo. Mais do que isso, a defesa da versão fraca do PII não pode nem mesmo começar a sair do chão se as relações não são permitidas no escopo do PII. O fato é que, diante da indiscernibilidade absoluta das partículas quânticas, o PII fraco na versão proposta por Muller e Saunders seria equivalente a

$$a \neq b \rightarrow Rel(a, b).$$

Isto é, no contexto de uma teoria de feixes, todo o peso da individuação cairia sobre os ombros das relações. De fato, este é um modo indireto

de se chegar em algo que já havíamos enunciado anteriormente: de acordo com Muller e Saunders, PII na mecânica quântica equivale a discernibilidade relacional. Mas, conforme estamos argumentando, isto é precisamente o que os detratores do PII usualmente não aceitam se este princípio deve ser útil para uma teoria de feixes.

Mas, mesmo diante de todas estas dificuldades, o que obteríamos no caso da mecânica quântica se ainda assim sustentássemos que relações são permitidas no escopo do PII? O que aconteceria se supuséssemos que as relações não são tão problemáticas? De fato, como vimos, quando se trata de partículas quânticas, relações são tudo o que temos para discernir, já que a discernibilidade absoluta já está fora de questão. O ponto que permanece para ser discutido, conforme estamos enfatizando aqui, é se uma tal noção de discernibilidade fraca é útil para uma teoria de feixes da individualidade, dado que PII é o braço direito de uma teoria da individuação através de feixes. Infelizmente para o PII fraco, ele não parece ser de muita ajuda neste caso, como já foi previsto até mesmo pelos defensores do PII fraco. Muller e Saunders definiram indivíduos como objetos absolutamente discerníveis, isto é, aqueles tendo uma propriedade monádica distinguidora (em seu (MULLER; SAUNDERS, 2008) não se discute se as propriedades devem ser puras ou não), satisfazendo deste modo PIIA. Então, as partículas quânticas, ao que parece, devem ser um tipo de animal diferente dos indivíduos. Muller e Saunders os batizaram de *relacionais* (*op. cit.* p.504). Relacionais não são indivíduos, não podem ser indivíduos, são discernidos apenas por relações, e isto desde que aceitemos que a discernibilidade relacional seja algum tipo de discernibilidade. Mas onde isto nos deixa no contexto de uma teoria da individuação através de feixes?

Bem, parece que não se chega muito mais longe do que já havíamos chegado anteriormente. Mais do que isso, permitir relações no escopo do PII parece nos conduzir a uma situação bastante estranha no contexto de uma teoria de feixes. Seguindo Muller e Saunders temos uma versão de PII e ainda assim temos que aceitar itens que obedecem a este princípio mesmo que não sejam indivíduos. Temos indivíduos, que satisfazem PIIA, e temos relacionais, que satisfazem PII, conforme definido por Muller e Saunders. Ambos são tipos de entidades distintos, ambos satisfazem PII. Mas então, neste caso, PII e individuação são noções completamente separadas. Certamente isto não pareceria aceitável para uma teoria da individuação de feixes, pelo menos não no modo usual de se compreender esta teoria. Pois então podemos razoavelmente perguntar o que foi que ganhamos ao adotarmos PII fraco. Isto é, por que não permitimos que PII é simplesmente captado pela

versão forte PIIA e concedemos que as partículas quânticas violam o princípio? Então, podemos ainda ter relacionais, mesmo que não os apresentemos como satisfazendo PII, e toda a controvérsia acerca do status das relações não aparece.

Podemos colocar a situação do seguinte modo: do ponto de vista de um teórico dos feixes, as partículas quânticas simplesmente não são indivíduos, já que elas não satisfazem PII em sua versão forte PIIA, aquela que é útil para os teóricos dos feixes. Então, a adoção de PII fraco equivale à adoção de duas teses aparentemente incompatíveis no contexto de uma teoria de feixes: as partículas quânticas obedecem ao PII e as partículas quânticas não são indivíduos. A dificuldade com esta afirmação é que, conforme estamos argumentando, indivíduos são precisamente aqueles objetos que satisfazem ao PII. Então podemos razoavelmente perguntar se a adoção da versão fraca do princípio não equivale a uma mudança de assunto. Realmente, ao adotarmos PII no contexto de uma teoria de feixes estamos interessados em que os objetos o satisfazendo sejam indivíduos, não algo distinto como relacionais. Este ponto fica claro pela literatura do assunto, na qual toda a discussão metafísica sobre o status do princípio trata da questão de se as propriedades são ou não são suficientes para individuar, não que as propriedades de fato não individualizam, mas que PII pode permanecer de qualquer modo. Realmente, o caso das esferas de Black, por exemplo, é apresentado para mostrar que as propriedades não são suficientes para individuar porque PII falha, não que as propriedades podem falhar em individuar mesmo que PII seja válido. Então, a preocupação aqui é com o fato de se PII fraco deveria ser considerado como uma versão de PII, simplesmente isso. Conforme enunciada, a Conceção Recebida não é nem mesmo refutada pelo PII fraco, já que esta versão do princípio apenas nos mostra que as partículas quânticas são relacionais, e relacionais são não-indivíduos, conforme propõe a Conceção Recebida.

Outro aspecto no qual o PII fraco parece carecer de motivações para os teóricos de feixes concerne a economia em ontologia. Desde que uma teoria de individuação a partir de feixes é atrativa (para aqueles que pensam que ela de fato é) pela sua economia de noções (apenas propriedades são necessárias, e estas por sua vez podem ser entendidas como universais ou como tropos), adotar o PII como nossa salvação implicaria na adoção de três tipos distintos de itens particulares em nossa ontologia: indivíduos, relacionais e relacionais fracos, cada um deles com sua própria versão de PII! Parece que com isto acabamos bem distante de nossos objetivos iniciais, ou seja, podemos manter a

validade de PII apenas ao preço de que não obtemos nada daquilo que esperávamos dele no que diz respeito à individuação. Começamos perguntando se o PII era verdadeiro na mecânica quântica, e argumentando que este princípio não pode valer, de modo que as partículas quânticas não são indivíduos. Como uma salvação para PII adotamos sua versão fraca, mas no final acabamos apenas com relacionais. Então, novamente podemos perguntar: porque deveríamos aceitar que PII foi vingado na mecânica quântica? Quais são as razões que levam Muller e Seevinck (MULLER; SEEVINCK, 2009) a afirmar que Leibniz reina?

Parece que quase que toda a disputa aqui se voltou para uma controvérsia metafísica acerca do status das relações. Temos a opção de aceitar que relações são permitidas no escopo de PII ou podemos, como a maioria dos filósofos, rejeitar esta posição. No primeiro caso, se desejamos adotar uma teoria de feixes para a individuação, é necessário abandonar a companhia de Muller e Saunders e chamar os relacionais de ‘indivíduos’ também. Isto é aquilo que se espera daqueles que aceitam a versão fraca do PII em uma teoria de feixes. Neste caso, deve-se enfrentar as difíceis objeções de que as relações não individuem nada. Além disso, deve-se encarar o fato de que indivíduos virão em três versões diferentes: absolutos, relativos e relacionais, cada um deles satisfazendo sua própria versão do PII. Por outro lado, ao negarmos que relações desempenham qualquer papel no PII nos compele a aceitar que as partículas quânticas não são indivíduos, e então o PII fraco não é nem mesmo uma versão legítima do PII. Aqui não estamos buscando contribuir para a disputa concernindo o status de PII e uma teoria de feixes. Nosso ponto é simplesmente que o PII fraco não nos ajuda a formular uma versão melhor ou mais útil da teoria dos feixes para a individuação, algo que o PII realmente deveria ser capaz de fazer. Adotar ou não relações no PII continua sendo uma questão de fé metafísica nas relações, e esta fé não obtém nenhum milagre especial do formalismo da mecânica quântica.

Agora, como já explicamos, a natureza deste debate é eminentemente metafísica. De fato, toda a controvérsia em torno das relações há muito se desvinculou da metafísica naturalizada e voltou a ser a velha disputa medieval que sempre foi e que muitos filósofos da ciência afirmam estar evitando. Isto ocorre, conforme estamos argumentando, pelo fato de que a mecânica quântica não parece ser capaz de desempenhar um papel de árbitro nesta disputa. Todavia, não devemos esquecer que a mecânica quântica ainda desempenha algum tipo de papel nesta disputa: se aceitarmos que relações não são permitidas em PII, então a teoria pode nos ajudar com os argumentos buscando mostrar que as

versões fortes do PII são falsas para os objetos com os quais ela trata (desde que outras hipóteses metafísicas não sejam acrescentadas na teoria). Por outro lado, permitir relações pode ajudar PII, mas de um ponto de vista metafísico não parece ser aceitável para os propósitos de uma teoria de feixes. De qualquer modo, o debate é basicamente uma disputa metafísica, que não pode ser decidido apenas com apelos à mecânica quântica.

## 6.5 CASO 2: PII E CONTAGEM

O próximo ponto que desejamos discutir concerne a relação entre PII e a noção de contagem. Em geral, defensores do PII apontam para o princípio como fundamentando uma noção fundamental de contagem: contar uma coleção de itens consiste em correlacionar univocamente os itens com uma sequência de números ordinais (ver Lowe (LOWE, 1997, p. 626), Steiner (STEINER, 2005, p.629), Jantzen (JANTZEN, 2010)). Através deste procedimento, cada elemento da coleção obtém um único número atribuído a ele, então podemos conhecer o cardinal da coleção pela simples constatação de que ordinais finitos são também cardinais (isto não é necessariamente verdadeiro nem mesmo em teorias de conjuntos clássicas tais como Zermelo-Fraenkel, nas quais cardinais podem ser definidos de tal modo a serem totalmente dissociados dos ordinais, mas iremos ignorar definições alternativas de cardinais e ficar com a definição usual de von Neumann).

Agora, algumas vezes é dito que o próprio procedimento de se estipular a correspondência pressupõe alguma forma de PII identificando indiscernibilidade qualitativa im identidade numérica, já que se houvessem itens indistinguíveis mas não idênticos não poderíamos garantir a atribuição unívoca de ordinais para eles. Este, conforme anunciamos anteriormente, é precisamente o ponto que enfatiza Russell na citação que colocamos na página 99 com o seu Princípio de Verificação. Para contar uma coleção, devemos ser capazes de distinguir qualitativamente os objetos sendo contados, de modo que a mera estipulação de que uma situação envolve  $n$  objetos não é suficiente para determinar a quantidade de objetos que de fato existem ali.

Vamos recordar que o ponto que Russell parece estar querendo enfatizar é que o PII é uma condição para a própria possibilidade de se contar corretamente em qualquer contexto: sem o princípio, mesmo que pudéssemos realizar a contagem dos itens de uma coleção não poderíamos garantir que obtemos o resultado correto. Então, antes de

irmos adiante e tentarmos estipular o número de itens devemos garantir que PII realmente funciona. Certamente, podemos distinguir as situações seguintes: por um lado, pode ser sustentado que o PII deve estar valendo para conduzirmos a atividade de contagem corretamente, no sentido de que estamos realizando uma tarefa empírica; por outro lado, pode-se sustentar a tese mais forte de que os objetos devem obedecer PII para que o número deles seja corretamente mesmo que a própria tarefa de contagem nunca seja realizada, ou que seja impossível de ser realizada, de modo que PII aqui adquire uma importância ainda maior no sentido de que a própria possibilidade de uma variedade de objetos numericamente distintos depende de PII.

Outros autores tomando esta segunda possibilidade bastante a sério vão ainda mais longe e argumentam que sem o PII não poderíamos nem mesmo evitar uma grande multiplicação de entidades, já que sem PII, eles dizem, nada impede casos bizarros como por exemplo o de várias entidades indistinguíveis todas co-localizadas no mesmo local ocupado por aquilo que estaríamos contando normalmente como apenas um objeto (Hawley revisa este tipo de argumento em (HAWLEY, 2009, p.103)). Neste segundo tipo de cenário, por exemplo, é afirmado que sem PII não poderíamos distinguir entre uma situação na qual temos apenas uma mesa, contando como apenas um objeto, de outra situação qualitativamente indistinguível na qual aquilo que consideramos uma mesa é na verdade duas mesas indistinguíveis, ambas co-localizadas no mesmo local, cada uma delas tendo metade do peso atribuído à mesa aparecendo na primeira situação. E não há motivos para pararmos em duas mesas, podemos multiplicar a mesa em diversas mesas indistinguíveis fazendo as adaptações convenientes, e nada poderia nos ajudar a distinguir entre a situação compreendendo apenas uma mesa e uma situação compreendendo  $n$  mesas a não ser que adotemos o PII. Então, o que nos impede de obtermos o número errado de entidades? Bem, é aqui que o PII prova seu valor, ou pelo menos é dito que prova, já que o PII proibiria cenários nos quais múltiplos objetos indistinguíveis são instanciados no mesmo local. Neste caso, obtemos nossa mesa única, como desejamos, e garantimos que a contagem sempre funciona corretamente.

A dificuldade com todos estes argumentos é que além de serem bastante controversos, sua linha de ataque não melhora em nenhum sentido quando assumimos o PII fraco. Realmente, este tipo de argumento não fornece fundamentos úteis para que se argumente que a contagem dos itens em algumas circunstâncias funciona apenas se assumirmos aquela versão do PII; se este fosse o caso, o PII fraco teria

fortes razões em favor de sua adoção. Mas além de não ser motivado nestes contextos, acreditamos que a situação é ainda mais problemática do que a descrita até agora, pois o PII fraco parece pressupor que a contagem numérica esteja disponível antes mesmo que ele possa ser ‘provado’ no formalismo da mecânica quântica ortodoxa. Conforme Muller e Saunders reconhecem prontamente (*op. cit.*, p. 530), a contagem deve estar disponível de antemão se vamos querer fornecer uma descrição adequada de um sistema compreendendo várias partículas usando espaços de Hilbert. Como é bem sabido, o tratamento usual na mecânica quântica para sistemas de múltiplas partículas, digamos  $n$ , começa com a atribuição de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_i$  para cada partícula  $a_i$ , com  $i \leq n$ , e então, para o sistema todo tomamos o produto tensorial  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ . Então, dizem estes autores, sem uma noção adequada de contagem não podemos nem mesmo fornecer um modelo matemático adequado para os sistemas com os quais estamos tratando.

Este ponto tem um potencial até mesmo para prejudicar qualquer defesa que se proponha para o PII fraco. Note que para garantir que o PII fraco funciona na mecânica quântica, devemos antes ter o aparato matemático funcionando previamente, inclusive a contagem e rotulação de sistemas físicos e espaços de Hilbert, de modo que apenas então a relação fraca adequada podem ser fornecidas no formalismo quântico. Agora, estes fatos parecem nos conduzir a uma espécie de dilema: por um lado, se a contagem realmente necessita do PII, como alguns metafísicos afirmam, então o próprio PII fraco já pressupõe outra forma de PII, o que não seria aceitável; por outro lado, se o PII fraco é defensável, e a contagem pode ser realizada sem o PII, então de fato não precisamos do PII para a contagem, de modo que não deveríamos nos preocupar com ele nestes contextos. No segundo caso, parece que no que diz respeito à contagem, a vida pode prosseguir tranquilamente sem o PII, e ele não possui a relevância que algumas vezes é dito ter.

Muller e Saunders argumentam que a primeira opção (contagem pressupõe PII) não ocorre pois a possibilidade de se contar coleções finitas é demonstrada como um teorema de ZFC, nosso aparato matemático. Eles sustentam que autores como Redhead e Teller (em (REDHEAD; TELLER, 1992)) estão sendo simplesmente inconsistentes ao reclamar que o formalismo quântico, juntamente com sua necessidade de contar e rotular partículas, parece estar comprometido com alguma forma de princípio de individualidade para nos permitir atribuir os rótulos utilizados pelo procedimento de contagem (ver também as discussões no capítulo 4). De fato, Muller e Saunders desqualificam esta objeção possível ao apontar que a rotulação que ocorre através do

procedimento de contagem não desempenha nenhum papel de individualização, ele não conta como uma propriedade distinguidora (*op. cit.*, p. 526). Todavia, o próprio argumento de Muller e Saunders é que parece mal direcionado, dado que Redhead e Teller afirmam que algo como o PII ou algum outro princípio de individualidade é *pressuposto* pela contagem, não que a contagem implica uma versão do PII através do processo de rotulação.

Ainda, é interessante considerar mais um ponto estranho concernendo a posição de Muller e Saunders no que diz respeito ao aparato matemático no qual estão trabalhando. Vamos nos lembrar que quando estávamos discutindo a possibilidade de discernir  $a$  e  $b$ , de acordo com estes autores não deveríamos permitir propriedades meramente conjuntistas tais como  $x \in \{a\}$ . Isto é, propriedades como esta última não deveriam ser levadas em consideração na discussão sobre o PII por não terem um significado físico preciso (ou melhor, por não terem nenhum significado físico). Por outro lado, a contagem como um conceito puramente conjuntista (teorema de ZFC) está totalmente liberada para eles. A questão que se coloca é a seguinte: por que algumas noções eminentemente conjuntistas da teoria de conjuntos subjacente podem ser utilizadas livremente, enquanto que outras estão proibidas? Como podemos traçar uma linha distinguidora entre aqueles conceitos conjuntistas que, segundo Muller e Saunders, possuem relevância ou implicações ontológicas daqueles que não as tem? Esta parece ser uma questão crucial, que distingue a abordagem de Muller e Saunders de um lado, e de Redhead e Teller de outro, no que concerne a contagem. Então, a contagem possui peso ontológico? Para mostrar que não, argumentos devem ser fornecidos, mas aparentemente Muller e Saunders tem pouco a dizer sobre isso, estipulando que contar não possui relevância para a ontologia.

Mas agora vamos considerar com maior profundidade a segunda opção, de acordo com a qual a contagem não pressupõe PII. Esta é a rota tomada por Muller e Saunders sem muito argumento ((MULLER; SAUNDERS, 2008, p. 530)). De fato, devemos tomar cuidado neste ponto; devemos garantir que não estamos eliminando sem as devidas considerações toda uma vasta quantidade de argumentos propostos na literatura empregando a contagem para se defender alguma forma de PII. Ainda, devemos também ser cuidadosos aqui pois, como mencionamos, se a contagem não necessita de alguma versão do PII, então a versão fraca do PII também não tem nada a ver com a contagem. Neste caso, deveríamos explicar como a noção tradicional de contagem funciona mesmo sem assumir PII ou então fornecer uma explicação alter-

nativa para a contagem. Ambas as estratégias já foram tentadas, mas infelizmente para os defensores do PII fraco, nenhuma delas apresenta boas perspectivas para a defesa do princípio, pelo contrário, fornecem boas razões para mantermos a contagem e o PII como noções separadas e independentes. Vamos argumentar brevemente para justificar porque pensamos isso.

Em primeiro lugar, vamos considerar tentativas de se empregar a noção usual de contagem, entendida como uma correspondência entre os números naturais e os itens em uma coleção, mas desta vez sem assumir PII. Uma tal tentativa aparece, por exemplo, em Jantzen (JANTZEN, 2010). De acordo com Jantzen, a determinação de quantos itens existem em um contexto específico repousa em nossa compreensão usual de contagem, mesmo que este último conceito não esteja realmente ligado ao PII. Jantzen argumenta para garantir que a mera possibilidade de se estabelecer esta correspondência deve ser garantida por uma essência primitiva, no sentido proposto por Adams (ver Adams (ADAMS, 1979)). As essências primitivas garantem a unicidade no processo de rotulação, mesmo que a atribuição de rótulos não seja um procedimento que se realize na prática. Se isto fosse verdade, a contagem dependeria de uma daquelas noções ‘misteriosas’ com as quais Muller e Saunders não querem ter nada a ver. A consequência seria que, na hipótese que estamos assumindo, de que PII não é necessário para a contagem mas a contagem por sua vez é necessária para o PII fraco, acabamos por nos envolver com princípios metafísicos que a própria defesa do PII fraco buscava evitar desde o começo. Mas esta claramente não é uma alternativa tentadora para o defensor do PII.

Agora, vamos considerar uma opção alternativa, a ideia de que mesmo que a noção usual de contagem possa pressupor o PII, podemos ainda assim entender a contagem de algum modo alternativo não tendo nada do peso metafísico da noção clássica. Algumas destas propostas já foram apresentadas na literatura (ver capítulo 4, Domenech e Holik (DOMENECH; HOLIK, 2007)), e a maioria delas em contextos nos quais o PII é tomado como sendo um princípio inválido. Mas, se isto é realmente verdade, e a contagem pode ser realizada sem o PII, parece que perdemos a função atribuída ao princípio que estamos analisando aqui, que deveria ser empregado justamente para esclarecer o uso deste conceito. Então, a questão relevante agora parece ser: se somos capazes de contar objetos sem empregar o PII, por que deveríamos batalhar para estabelecer a versão fraca deste princípio? Por que não seguimos sem ele? De fato, já que necessitamos de antemão de ferramentas conceituais que nos permitam entender a contagem na ausência do PII, então

realmente não precisamos dele, e então é melhor não nos envolvermos em controvérsias como aquelas associadas ao PII fraco.

Apenas para fazer mais alguns comentários sobre este último ponto, devemos considerar que nos contextos da mecânica quântica o número de elementos dos quais um sistema é formado deve ser determinado de antemão experimentalmente, na preparação do sistema propriamente. Em outros casos, podemos vislumbrar procedimentos artificiais para contar o número de itens sem necessitarmos a identificação deles. Um caso simples de um tal procedimento consistiria em pesar o sistema todo e então dividir o peso total  $M$  pelo peso  $m$  de um único sistema do tipo que aparece no sistema total. Isto nos daria o número  $M/m$  de partículas compreendendo o sistema total. Outro de tais procedimentos, sugerido por Domenech e Holik *op. cit.* sugere que, por exemplo, para contar o número de elétrons em um átomo de Hélio podemos ionizar o átomo. Podemos fazer isto de modo a extrair os elétrons um por um, até que não haja mais elétrons para serem extraídos. Neste caso, podemos saber quantos elétrons haviam ao contar o número de vezes que o procedimento foi repetido resultando na extração de um elétron. Então, PII não precisa ser utilizado aqui.

O que estes casos parecem mostrar é que a contagem não parece fornecer boas motivações para se adotar o PII fraco, ao contrário do que ocorre em algumas situações com o PIIA. De fato, parece que no que diz respeito à contagem nós ficamos com três opções. A primeira consiste em adotarmos uma forma forte do princípio, PIIA, e retermos a noção tradicional de contagem. Esta, aparentemente, não é compatível com as entidades quânticas, de modo que teríamos problemas neste aspecto. A segunda opção propõe abandonarmos PII e retermos a noção tradicional de contagem, adotando essências primitivas para garantir que a rotulação associada ao procedimento de contagem irá funcionar. Neste caso, nos envolvemos com princípios metafísico que os defensores de PII consideram espúrios. Como uma terceira alternativa, podemos abandonar a noção tradicional de contagem e utilizar procedimentos alternativos para determinarmos o número de itens em uma coleção. Neste caso, PII também não é de utilidade alguma. Nos três casos, de fato, PII fraco não nos ajuda no procedimento de contagem, de modo que nestes contextos não obtemos nenhum benefício da afirmação de que esta versão do PII é válida para partículas quânticas, e assim, o princípio fica completamente sem motivações também neste aspecto.

## 6.6 CASO 3: PII E EMPIRISMO

A última afirmação geralmente apresentada como um motivo para se adotar o PII que queremos analisar aqui é aquela alegando que este princípio pode ser associado com alguma forma de filosofia empirista. Realmente, parece a uma primeira vista que se assumirmos que o empirismo pode ser caracterizado como a tese que nos garante que tudo o que pode ser conhecido por nós nos é dado através dos nossos sentidos como qualidades perceptuais, então seria ótimo se pudéssemos garantir que itens numericamente distintos sempre diferem qualitativamente. Então, é dito, os empiristas deveriam dar as boas-vindas ao PII como um princípio de sua filosofia (Ladyman e Bigaj (LADYMAN; BIGAJ, 2010, p.117)). Estas afirmações parecem ser verdadeiras do empirismo britânico tradicional de Locke, Berkeley e Hume, para os quais, falando por alto, os sentidos são a fonte de tudo aquilo que é possível para nós conhecermos.

Nesta forma particular de empirismo, PII seria um princípio interessante pois parece garantir que itens indiscerníveis deveriam realmente ser identificados dado que não seríamos capazes de distingui-los empiricamente. O ponto em favor da adoção do princípio é que de uma perspectiva empirista, uma possível ‘troca’ de objetos indiscerníveis não iria acarretar nenhuma diferença perceptível na prática, não iria gerar nenhum cenário empiricamente distinto, de modo que este tipo de experimento mental não deveria ser visto como dando origem a nenhum tipo de situação distinta. Neste caso, o PII serviria para se eliminar aquilo que um empirista poderia tomar como sendo apenas possibilidades metafísicas espúrias, situações sem nenhuma relevância empírica. Mas mesmo que o exemplo apresentado possa sugerir que este é de fato o caso, o argumento pode se complicar quando modificamos um pouco a situação a ser considerada e quando a versão de PII em jogo é o PII fraco. Vejamos o motivo.

Em primeiro lugar, vamos fixar nossa atenção no exemplo que foi apresentado no parágrafo anterior. Está sendo suposto que seria possível em princípio que itens indiscerníveis fossem trocados gerando cenários numericamente distintos. Mas para que a estratégia esboçada acima funcione, devemos ser capazes de identificar e fixar nossa atenção em um objeto que, por questão de argumento, supomos que tenha um ‘gêmeo indiscernível’. Neste caso, então, o argumento em favor de PII propõe que já que não haveria nenhuma diferença nas situações compreendendo o objeto original ou o seu gêmeo indiscernível, então podemos dizer que, no que concerne nossas percepções, ambos são um

e o mesmo objeto, e também as situações são as mesmas, não há nenhuma multiplicação de possibilidades que surge pela troca de objetos qualitativamente indiscerníveis mas numericamente distintos. Esta poderia ser uma consequência, então, de uma aplicação de PII, de modo que o princípio seria ótimo para os empiristas. Mas o PII é realmente necessário para evitarmos possibilidades empiricamente supérfluas?

A primeira dificuldade com este tipo de argumento, como Hawley apontou (ver Hawley, *op. cit.* pp. 115-116; o argumento do empirismo a favor de PII que estamos considerando aqui também foi exposto por ela), é que mesmo que esta seja uma afirmação empirista aparentemente em favor de PII, não é necessário adotar o princípio para obtermos os resultados desejado, *i.e.* a eliminação de cenários empiricamente supérfluos. Para entendermos a razão disto, podemos considerar o que ocorre em situações ainda mais drásticas envolvendo indiscerníveis, situações que são um pouco distintas daquelas mencionadas no parágrafo anterior, como por exemplo o cenário mencionado na seção anterior compreendendo  $n$  mesas distintas indiscerníveis localizadas em um mesmo local. O fato é que, contrariamente ao que afirmam os amigos do PII, não precisamos apelar para uma associação com o empirismo para se argumentar que é razoável supor que existe de fato apenas um objeto. Nestes caso, podemos recorrer a apelos de que devemos escolher a opção metafísica mais econômica, ou para alguma forma de *parcimônia quantitativa*, independentemente das atitudes que temos no que concerne as fontes de nosso conhecimento. A adoção de alguma forma de princípio de parcimônia quantitativa exigindo que postulamos apenas o menor número possível de entidades necessárias para se dar conta de uma situação tem prioridade sobre exigências empiristas. Isto, claro, é bastante ruim para o argumento buscando motivar a adoção de PII através do empirismo, já que as alegações de que as situações envolvendo uma multiplicação desnecessária de objetos não precisam do empirismo e de sua alegada utilização de PII para serem eliminadas.

Vamos agora modificar um pouco mais a situação apresentada acima propondo o vínculo entre PII e empirismo e ver o que obtemos neste sentido. Não vamos mais considerar o caso no qual um objeto está presente e não sabemos se ele foi trocado por um gêmeo indiscernível, mas consideraremos antes o caso em que podemos confiantemente argumentar que existem pelo menos dois itens que, pode ser argumentado, são indiscerníveis de tal modo a gerar um cenário no qual PII é possivelmente falso. Um caso paradigmático no qual este tipo de situação ocorreria é aquele apresentado pela mecânica quântica,

na qual existem determinadas situações em que itens distintos estão ambos presentes ao mesmo tempo e permutá-los não resultaria em nenhuma diferença observável. Aqui, ao que parece, uma versão forte do PII, como o PIIA, motivado por um desejo empirista de identificar cenários empiricamente indistinguíveis falharia, pois exigiria que identificássemos as duas partículas como sendo apenas uma.<sup>4</sup> Apesar de este ser um caso ruim para PIIA, o PII fraco parece ter um ponto em seu favor nestas situações: pode ser utilizado para garantir que há de fato duas partículas. Vamos recordar que o PII fraco nos garante a distinção numérica dado que itens fracamente discerníveis são aqueles satisfazendo relações irreflexivas, e por esta razão não podem ser um e o mesmo.

Mas as coisas não são tão simples assim para o defensor do PII fraco. Deixando de lado o fato de que as partículas quânticas não são diretamente observáveis, podemos conceder que estamos levando em conta apenas distinções observáveis que poderiam ser fornecidas por medições de grandezas físicas sobre aquelas partículas. Isto poderia ser aceitável para o tipo de empirista do qual estamos tratando aqui, ou pelo menos ele poderia conceder este ponto ao defensor do PII fraco por uma questão de argumento. Mas, neste caso, a adoção do PII fraco estaria motivada por necessidades empiristas? Bem, parece que a situação é precisamente a oposta. Conforme argumentamos anteriormente, mesmo que o PII fraco nos garanta que existem dois objetos, parece que ele não vai além disso. Realmente, o princípio em sua versão fraca não fornece diferenças qualitativas específicas que seriam esperadas por um empirista como sendo os fundamentos da distinção numérica.

Vamos tornar este ponto mais claro mantendo as exigências empiristas em mente. A ideia é que um empirista gostaria de fundamentar as distinções numéricas em distinções qualitativas observacionais, e uma versão do PII seria útil para ele neste sentido se permitisse que precisamente isso fosse feito. O problema é que o PII fraco não nos fornece tais distinções, e podemos até mesmo questionar se a discernibilidade relacional é discernibilidade de fato. Para um empirista, a resposta parece ser que ‘não’, discernir por relações não é de fato discernir. Este é o ponto proposto por Ladyman e Bigaj (*op. cit.*, especialmente nas pp. 129-130), concernindo não apenas contextos empíricos. Ladyman

---

<sup>4</sup>Existe uma defesa possível para o PII neste sentido afirmando que há de fato apenas um objeto disponível, mas não nos preocuparemos com ela aqui, já que nosso principal objetivo é analisar o PII fraco. Hawley discute este tipo de estratégia em (HAWLEY, 2009).

e Bigaj enfatizam que a discernibilidade empírica é aplicável apenas depois que já tenhamos os meios de identificar precisamente os itens sendo relacionados, de modo que possamos estar certos de que *a* que discerne fracamente *b* pela relação *R* porque é com *a* que *b* está relacionado por *R*. Esta afirmação está diretamente associada ao argumento clássico de que o PII envolvendo relações entra em uma forma de petição de princípio: para discernir fracamente objetos distintos devemos ser capazes de ter de antemão discernido os relata. O problema é que o argumento usual, mesmo que possa ser resistido em outros contextos, parece ter um peso ainda maior no contexto de uma filosofia empirista: se queremos fundamentar a diferença numérica na diferença qualitativa, então, os relata de uma relação fraca devem estar discernidos de antemão.

Então, visto deste ponto de vista, a adoção do PII fraco não parece ser motivada por uma filosofia empirista. Mas agora, devemos notar que como todo rótulo na filosofia carrega carrega consigo muitos sentidos diferentes, deveríamos deixar claro que ‘empirismo’ tem outros significados, e pode estar associado com outro conjunto de teses que pode de fato motivar o PII fraco. Uma tal compreensão alternativa do empirismo poderia ser o empirismo construtivo. Como é bem sabido, o empirismo construtivo não é diretamente uma tese sobre as fontes e origens do conhecimento, é mais uma forma de anti-realismo. Como tal, ele não se opõe ao racionalismo em epistemologia, como o empirismo tradicional faz, mas antes ao realismo em filosofia da ciência. Falando por alto, os realistas sustentam que as teorias científicas podem ser consideradas como buscando a *verdade* mesmo quando se trata de aspectos não observáveis do mundo (claro, existem diversas versões do realismo, estamos aqui caracterizando esta corrente de modo bem geral, e as diferenças entre as muitas formas de realismo não irão influenciar o argumento que desejamos desenvolver aqui), enquanto que um empirista construtivo exige apenas que as teorias científicas sejam *empiricamente adequadas*, isto é, verdadeiras apenas dos aspectos observáveis do mundo, devem apenas salvar os fenômenos (a exposição clássica do empirismo construtivo está em van Fraassen (FRAASSEN, 1980), na qual estamos nos baseando aqui). Vamos agora investigar se o empirismo construtivo nos fornece razões para sustentarmos o PII.

Como uma forma de compreender a ciência, o empirismo construtivo nos diz que distintos modelos de uma teoria científica nos fornecem possíveis histórias distintas sobre a maneira como o mundo poderia ser. Isto é, podemos fornecer distintas interpretações de uma teoria, e elas todas nos ensinam sobre modos como o mundo poderia ser. Mesmo

que estes modelos façam afirmações sobre entidades não-observáveis, elas também deveriam ter uma parte tratando diretamente dos aspectos observáveis do mundo, e aquela parte, chamadas de *subestruturas empíricas*, concernem aquilo que podemos confiantemente afirmar como existindo de um ponto de vista empírico. Esta é uma revisão bastante breve de alguns aspectos desta posição, mas já é o suficiente para nos ajudar a fornecer as principais ferramentas conceituais para a nossa discussão de PII em uma teoria como a mecânica quântica.

Usualmente, um empirista construtivo como van Fraassen argumentaria que a questão sobre se PII é um princípio válido ou não na mecânica quântica é uma questão de interpretação da teoria (para uma discussão aprofundada, ver van Fraassen (FRAASSEN, 1991, caps.11e12)). Existem interpretações do formalismo matemático nas quais o princípio é válido, outras nas quais ele não é válido. Em geral, para o empirista construtivo, a questão depende de aceitarmos ou não algum postulado interpretativo, e de acordo com a análise de van Fraassen, no centro desta questão em particular está aquilo que Muller e Saunders chamaram de *Postulado Forte da Propriedade* (*op.cit.*, p. 513), que enuncia que um sistema tem uma propriedade representada por um operador se e somente se seu estado é um *auto-estado* daquele operador. Aceitando este postulado, podemos fornecer interpretações da teoria que refutam PII. Todavia, a força completa do Postulado Forte não é necessária para as aplicações empíricas da mecânica quântica; para estas aplicações podemos nos confinar seguramente aquilo que Muller e Saunders chamaram de *Postula do Fraco da Propriedade*, que é a afirmação mais fraca de que *se* um sistema está em um auto-estado de um operador, *então* o sistema tem a propriedade representada por aquele operador. Independentemente de qual forma do postulado que aceitamos, se estamos preocupados apenas com as subestruturas empíricas dos modelos para a teoria podemos ter a certeza de que são equivalente, fazem as mesmas previsões empíricas em suas aplicações usuais. Isto é tomado como significando que um princípio metafísico como PII não possui conteúdo empírico, e então pode ser deixado para as discussões metafísicas, não para ser decidido pela teoria em seu aspecto empírico, e conseqüentemente, nada que possa causar dores de cabeça ao empirista construtivo.

Independente disso, Muller e Saunders argumentam que o PII fraco é uma consequência da mecânica quântica mais o Postulado Fraco da Propriedade, de modo que deve ser válido em todas as interpretações da teoria, sendo impossível fornecer uma interpretação particular da teoria para o qual ele não seja válido. Isto é, Muller e Saunders afirmam que o PII fraco não é uma questão de interpretação, ele vem junto com

o formalismo da mecânica quântica, de modo que a teoria o exige e o vinga (*op. cit.*, p. 517). Mas a dúvida aqui é basicamente a mesma que anteriormente: mesmo que sejamos capazes de fornecer uma derivação de PII fraco em alguma versão do formalismo da mecânica quântica, podemos motivar a afirmação de que ele é realmente uma versão do princípio desejado por ser necessário ao empirismo construtivo?

Parece pela argumentação acima que isto não pode ser feito nem mesmo no caso do empirismo construtivo. Vamos considerar mais uma vez o argumento de Ladyman e Bigaj proposto acima. O ponto é que o PII fraco não fornece nenhuma distinção observável entre os objetos sendo discernidos fracamente, de modo que não existe nenhuma distinção empiricamente significativa entre eles. Então, o empirista construtivo não é obrigado a aceitar o PII fraco baseado apenas em sua doutrina. Realmente, a adoção do PII fraco depende ainda de se adotar o Postulado Fraco da Propriedade, e este é um postulado interpretativo, de modo que o empirista não está errado em acreditar que a adoção ou não de PII é uma questão a ser disputada no plano da metafísica, não da ciência empírica. De fato, a questão que deve ser disputada parece ser se devemos ou não aceitar relações como distinguindo objetos e se devemos aceitar a forma forte ou fraca do Postulado da Propriedade. Estas, obviamente, não são questões empíricas, mas antes questões de caráter metafísico. Então, parece, o PII fraco não pode ser motivado pela adoção de uma concepção empirista da ciência.

## 6.7 OBSERVAÇÕES FINAIS

O Princípio da Identidade dos Indiscerníveis sempre mereceu um lugar dentre os princípios metafísicos mais controversos. Tentativas de trazer um fim às controvérsias concernindo seu status baseando-se em considerações da mecânica quântica tem seus limites: elas dependem de outras hipóteses metafísicas que por sua vez podem ser rejeitadas. Isto serve tanto para os defensores do PII quanto para os inimigos do PII. Então, o debate deve ser conduzido em um plano metafísico. De fato, isto coloca um problema não apenas para aqueles interessados no status de um princípio como o PII em uma teoria como a mecânica quântica, mas também para aqueles tentando extrair conclusões ontológicas profundas daquilo que poderíamos considerar como nossas “melhores teorias científicas”. Aqui, propusemos uma análise eminentemente metafísica da versão fraca do PII, e tentamos avançar partindo de algumas afirmações feitas em Hawley (HAWLEY, 2009) de acordo com

as quais a versão fraca do princípio não é motivada de um ponto de vista metafísico.

Para se ter uma melhor compreensão dos motivos que poderíamos ter para se adotar uma versão tão fraca de um princípio que é em outras circunstâncias tão robusto metafisicamente falando, propusemos o estudo de três visões distintas que podem usualmente ser vistas como associadas com alguma forma de PII: individualidade definida através de feixes de propriedades, a análise do procedimento de contagem dos elementos de uma coleção, e alguma forma de filosofia empirista. Todas as três teses são metafisicamente bem motivadas, mesmo que não sejam sem suas próprias controvérsias. De fato, elas são controversas por sua vez, mas parece que se PII pudesse ser visto como estando essencialmente ligado a uma destas teses, poderíamos ter mais alguns motivos para se adotar a versão fraca do PII se ela pudesse fazer algo de positivo em benefício destas visões assim como as outras versões do PII são ditas fazer. PII fraco derivaria destas doutrinas um peso metafísico e respeitabilidade com um princípio importante.

Todavia, argumentamos que nenhuma das concepções mencionadas parece funcionar bem na presença apenas de PII fraco. Todas elas pressupõem ou uma forma mais forte do princípio ou então podem passar muito bem sem nenhuma forma do princípio. De fato, o caráter relacional da forma fraca do PII parece ser na verdade um obstáculo no caminho daquelas tentativas de fazer dele um princípio útil para qualquer uma destas possíveis aplicações dele. Podemos dizer que, nos casos de uma teoria de feixes, contagem e empirismo que podem estar confiantemente associados com o PII, é uma forma forte do princípio que deve ser exigida para que se faça o trabalho necessário, de modo que a versão fraca não pode ajudar. Ainda, não devemos esquecer que é possível apresentar bons argumentos a favor de noções de contagem sem PII, e que podemos tomar o empirismo construtivo e sustentar que PII não possui relevância empírica. Em ambos os casos pode-se viver muito bem sem PII fraco, e de fato, sem qualquer forma de PII. Então, a questão que permanece é: quais as razões para se adotar o PII fraco?



## 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, estivemos preocupados com as relações entre diversas noções metafísicas e lógicas como a não-individualidade, identidade, contagem, quantificação e discernibilidade. Nossa proposta consistiu em considerar os objetos com os quais trata a mecânica quântica como exemplos paradigmáticos de entidades que podem ser consideradas como não-indivíduos. A partir deste ponto de partida, passamos a buscar compreender como diversas noções que se aplicam aos objetos que são considerados indivíduos podem ser compreendidas também no caso dos não-indivíduos, seja através de adaptações ou extensões dos conceitos originais, como no caso do conceito de contagem, seja mostrando que não nos parece justificada sua restrição apenas aos indivíduos, como no caso da quantificação. Por fim, argumentamos também que a discernibilidade fraca não pode nos forçar a admitir uma versão do PII como válida na mecânica quântica, como propõe os defensores desta noção.

Este último ponto, por certo, merece mais alguns comentários por refletir o propósito que está presente em todo este trabalho e que deve ser mantido como pano de fundo de todas as discussões aqui apresentadas: não estivemos preocupados em *provar* que a mecânica quântica nos compromete com uma ontologia de não-indivíduos. De fato, ao contrário do que propõe autores como Muller, Saunders e Seevinck (em (MULLER; SAUNDERS, 2008), (MULLER, 2011), (SAUNDERS, 2006), (MULLER; SEEVINCK, 2009)), nossa proposta consistiu desde o princípio em se assumir que uma teoria científica não pode nos forçar a adotar uma ontologia determinada. Em geral, uma mesma teoria pode ser vista como estando comprometida com diversas ontologias distintas, e a escolha entre elas dependerá de argumentos de cunho propriamente metafísico. Foi para auxiliar na compreensão deste ponto que propomos a distinção entre ontologia em sentido tradicional e ontologia em sentido naturalista. Diversas categorias ontológicas podem ser compatíveis com uma mesma teoria, e a decisão entre elas não pode ser estabelecida ao nível da teoria, mas antes ao nível da metafísica. Isto, conforme nossa proposta, torna mais claro o fenômeno da subdeterminação da metafísica pela física, a tese segundo a qual a ontologia associada à uma teoria física não pode ser determinada apenas com recursos da teoria.

Claro, esta maneira de se compreender a ontologia possui pelo menos dois aspectos importantes: o reconhecimento de que uma abor-

dagem puramente naturalista ao problema da ontologia possui seus limites, e ainda, a importância de reconhecermos como legítima a investigação puramente filosófica de pelo menos alguns aspectos da investigação ontológica. Conforme buscamos deixar claro em nosso trabalho, estes dois tipos de investigação podem ser vistos como complementares, de modo que as teorias científicas ainda podem ser mantidas como nossa fonte privilegiada de conhecimento acerca do mundo. Todavia, devemos reconhecer que, no tocante aos aspectos mais gerais daquilo que existe, apenas as teorias científicas não são suficientes, devemos recorrer a um tipo de investigação mais abstrata, propriamente do ramo da ontologia, que trata de noções que não estão de modo algum no escopo de teorias científicas, como as noções de objeto, propriedade, relação, individualidade, entre outras.

Assim, se é legítimo assumirmos uma ontologia de objetos que não são indivíduos, resta ainda desenvolver e articular este esquema ontológico de modo a torná-lo claro e forte o suficiente para que possa dar conta das principais características dos objetos tratados pela mecânica quântica. Aqui, não buscamos um tratamento exaustivo destas questões, deixando de lado ainda muitos pontos controversos da teoria e que merecem investigação futura no contexto de nosso esquema, como o fenômeno que ocorre na experiência das duas fendas e a não distributividade comum no contexto das chamadas lógicas quânticas. Como dissemos, estes são pontos que deixamos para investigação futura. O primeiro ponto importante em uma ontologia de não-indivíduos consiste em se tornar mais rigorosa a própria noção de não-indivíduo. Um primeiro e importante indício de como esta noção deve ser entendida foi fornecido pela história da mecânica quântica: durante o desenvolvimento da teoria, foi sendo aos poucos reconhecido que as entidades com as quais ela trata possuem um comportamento no mínimo estranho no que diz respeito à identidade, pois elas aparentemente não podem ser identificadas, nomeadas, rotuladas e contadas como os objetos usuais. Assim, foi aos poucos surgindo a ideia de que as partículas quânticas haviam perdido a identidade. Para captar essa noção intuitiva, o termo *não-indivíduos* foi introduzido. Um não-indivíduo, como o estamos entendendo aqui, é algo sem *condições de identidade*, ou seja, de um ponto de vista ontológico, a identidade está indeterminada para estes objetos.

Buscamos formalizar esta noção na teoria de quase-conjuntos  $\mathcal{Q}$  onde a não-individualidade é precisamente captada pelo fato de que o conceito de identidade não se aplica com sentido a estas entidades. Com isto, o primeiro aspecto importante para se desenvolver rigorosamente um esquema ontológico para não-indivíduos começa a ser desenvolvido:

a apresentação de um sistema de lógica que englobe a noção metafísica em questão. No caso da teoria de quase-conjuntos, temos um sistema da chamada *grande lógica*, forte o suficiente para se desenvolver a maior parte da matemática atual e até mesmo uma formulação não-reflexiva da mecânica quântica fazendo uso da não-individualidade dos objetos (ver (DOMENECH; HOLIK; KRAUSE, 2008), (DOMENECH et al., 2010)). Esta etapa da investigação foi designada em nosso trabalho como um dos importantes aspectos ao se desenvolver uma ontologia, ou seja, o fornecimento de um sistema de lógica que nos permita o tratamento rigoroso das noções englobadas na ontologia. Isto, é claro, não encerra a investigação, mas antes abre novos pontos a serem discutidos.

Com o aparato conceitual da teoria de quase-conjuntos foi possível tratarmos de outras questões que são cruciais para darmos maior coerência ao esquema envolvendo não-indivíduos, como as noções de contagem e de quantificação. Estas, dentre várias noções metafisicamente relevantes, são importantes por envolverem em diversos contextos as próprias noções de identidade e individualidade. De fato, são utilizadas algumas vezes para se defender que apenas quando tratamos de indivíduos é que podem ser empregadas com proveito. Nossos argumentos foram apresentados para efeitos de que podemos sim desvincular a identidade e individualidade destas noções, que podem e devem ser empregadas com sentido também para não-indivíduos. A contagem, por um lado, e a resultante noção de cardinal a ela acompanhada, pode ser vista como sendo obtida através de algum procedimento distinto daquele envolvido em nossa compreensão tradicional deste conceito. De fato, usualmente compreendemos a contagem como envolvendo o estabelecimento de uma correspondência um a um entre os objetos contados e os antecessores de um determinado ordinal, e com isto, uma atribuição direta de rótulos aos objetos contados, de modo que a identidade e individualidade destes objetos parece estar pressuposta. O procedimento que apresentamos aqui, que consistiu em uma progressiva “eliminação” dos objetos de uma coleção a ser contada busca superar estas dificuldades, de modo a garantir uma cardinalidade sem pressupor a identificação dos objetos sendo contados. Assim, podemos dar sentido às noções de contagem e de cardinalidade sem pressupor que estamos tratando de indivíduos.

Por outro lado, a quantificação parece colocar um problema ainda mais grave em nosso caminho. De fato, há uma consolidada tradição que nos garante que apenas podemos quantificar sobre objetos que possuam identidade em algum sentido. O fato aparente de que usualmente quantificamos sobre não-indivíduos e outras entidades

problemáticas neste mesmo sentido, como proposições e propriedades, seria explicado em termos de paráfrase: eliminamos a quantificação sobre estes itens em termos de outras noções (ver a discussão em Lowe (LOWE, 1998, caps.2e3)). A quantificação legítima seria apenas aquela que se faz sobre objetos com critérios de identidade. Deste modo, a quantificação sobre não-indivíduos não seria justificada. Claro, a quantificação é uma noção fundamental em qualquer esquema ontológico, queremos dar sentido a afirmações quantificadas, como o quantificador universal, existencial e outros quantificadores que aparecem na linguagem natural.

Conforme argumentamos, a hipótese de que apenas podemos quantificar sobre entidades com identidade é um pressuposto não completamente justificado. Está colocado praticamente por definição que aquilo sobre o que quantificamos deve possuir identidade, e este é em geral um fato assumido de antemão. O problema aparece quando nos esquecemos que isto foi assumido como uma hipótese metafísica e se passa a utilizar esta mesma ideia para se argumentar contra concepções alternativas. Ou seja, assumimos que as entidades sobre as quais quantificamos devem possuir identidade, uma decisão metafísica, e passamos a empregar este critério para se eliminar entidades do escopo de nossa ontologia, como se fosse uma ferramenta que nos fornece um critério inquestionável acerca de existência ou não-existência. Todavia, podemos questionar este pressuposto e mudar a decisão metafísica feita quanto ao escopo dos quantificadores. Em nosso trabalho fizemos isto apresentando semânticas na teoria de quase-conjuntos e outros argumentos sintáticos em favor da dissociação da quantificação e identidade. Além disso, os argumentos apresentados em favor desta tese não são de modo algum conclusivos, deixando espaço para desenvolvermos a quantificação sobre não-indivíduos também. O pressuposto em questão, de que a identidade e a quantificação estão estreitamente vinculadas, se mostra no fundo como um preconceito metafísico em favor da individualidade que não possui justificativa. Este é um ponto crucial pois duas noções centrais da filosofia estão geralmente ligadas aos quantificadores: a noção de existência e a noção de objetos. Vamos discutir brevemente estes problemas e indicar como a nossa pesquisa ainda pode prosseguir nestas linhas.

Com relação à existência, é bastante conhecido o *slogan* de Quine segundo o qual não há entidades sem identidade. A origem deste *slogan* está na mistura de seu critério de compromisso ontológico, envolvendo quantificação existencial, e a noção bastante difundida de que as entidades sobre as quais quantificamos devem possuir identidade. As-

sim, se a tese relacionando quantificação e identidade estivesse correta, então não-indivíduos simplesmente não seriam entidades permitidas em nenhuma ontologia. Nossos argumentos em favor da separação destas noções nos permitem superar estas dificuldades, e livrar a própria noção de existência, mais fundamental, de sua ligação com a noção de quantificação, que depende da lógica utilizada. Assim, ao contrário do que gostariam de sustentar muitos filósofos, a existência depende de posições metafísicas que tenhamos e também de certa forma, da lógica que utilizamos, que deve captar adequadamente as noções metafísicas em questão.

A noção de objeto está também estritamente vinculada à identidade e quantificação. Segundo a noção quiniã de objetos, um objeto é aquilo que pode estar no escopo de um quantificador. Ora, se aceitamos a tese de que apenas podemos quantificar sobre itens com identidade, então não-indivíduos não podem ser objetos. De fato, em um esquema quiniã eles não podem existir. Conforme estivemos argumentando os argumentos ligando identidade e quantificação são deficientes. Assim, podemos abrir espaço para a quantificação sobre itens sem identidade. Mas o que dizer da própria noção de objetos? Itens sem identidade são objetos? Aqui, poderíamos seguir a terminologia de Lowe (ver (LOWE, 1998, cap.3)), que reserva 'objetos' para itens com critérios de identidade, e chama de 'quase-objetos' itens que, como as partículas quânticas, não possuem condições de identidade mas são tais que podemos agregá-las em coleções que sempre possuem um cardinal definido. Não-indivíduos, então, seriam quase-objetos.

Esta é uma estratégia importante pois muda o foco do problema. Ao invés de estabelecer critérios lógicos para aquilo que conta como objetos (estar no escopo de um quantificador), estabelece critérios metafísicos (possuir critérios de identidade), deixando em aberto a questão lógica. Assim, estamos livres para investigar de um ponto de vista metafísico que tipo de entidades são os não-indivíduos, e então elaborar sistemas de lógica que tratem deste tipo de itens. Uma das interessantes consequências que ainda merece investigação é precisamente a possibilidade de objetos vagos. A vagueza, se entendida como indeterminação da identidade, não pode ser obtida em um esquema quiniã, pois todas as entidades que existem legitimamente ali devem possuir identidade determinada. Quase-objetos, por outro lado, podem ser vagos. Assim, a questão não é barrada na porta de entrada, ou seja, não eliminamos por definição os itens vagos, mas antes investigamos acerca de sua plausibilidade e então, em caso de obtermos uma resposta positiva, buscamos determinar que tipo de lógica poderia tratar de modo

mais adequado delas. Estas são questões que ficam em aberto, e que merecem ainda mais investigação. Por questões de espaço evitamos entrar em detalhes acerca destes problemas neste, pois a complexidade do tema demandaria praticamente um novo trabalho.

## REFERÊNCIAS

- ADAMS, R. M. Primitive thisness and primitive identity. *Journal of Philosophy*, v. 76, p. 5–26, 1979.
- ALAIRE, E. Bare particulars. *Philosophical Studies*, p. 1–8, 1963.
- ALAIRE, E. Another look at bare particulars. *Philosophical Studies*, p. 16–21, 1965.
- ARENHART, J. R. B.; KRAUSE, D. Quantifiers and the foundations of quasi-set theory. *Principia*, v. 13, n. 3, p. 251–268, 2009.
- AVIGAD, J.; ZACH, R. *The Epsilon Calculus*. 2011.  
<<http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/epsilon-calculus/>>.
- BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural languages. *Linguistics and Philosophy*, v. 4, p. 159–219, 1981.
- BEZIAU, J. Y. What is the principle of identity? (identity, congruence and logic). In: *Lógica: Teoria, aplicações e Reflexões*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. p. 163–176.
- BITBOL, M. *Mécanique Quantique: Une Introduction Philosophique*. Paris: Flammarion, 1996.
- BLACK, M. The identity of indiscernibles. *Mind*, v. 61, p. 153–164, 1952.
- BUENO, O. Models of reduction. *Principia*, v. 13, n. 3, p. 269–282, 2009.
- CHAPPEL, V. C. Particulars re-clothed. *Philosophical Studies*, v. 15, p. 60–64, 1964.
- CHATEAUBRIAND, O. Quine and ontology. *Principia*, v. 7, n. 1-2, p. 41–74, 2003.
- CLEVE, J. van. Three versions of the bundle theory. In: *Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics*. Oxford: Blackwell, 1998. p. 264–274.
- COSTA, N. C. A. da. *Logiques classiques et non classiques. Essais sur les fondements de la logique*. Paris: Masson, 1997.

- COSTA, N. C. A. da. Logic and ontology. *Principia*, v. 6, n. 2, p. 279–278, 2002.
- COSTA, N. C. A. da; BUENO, O. Lógicas não-reflexivas. *Revista Brasileira de Filosofia*, v. 232, p. 181–196, 2009.
- COSTA, N. C. A. da; BÉZIAU, J. Y.; BUENO, O. What is semantics? a brief note on a huge question. *Sorites - Eletronic Quarterly of Analytical Philosophy*, v. 3, p. 45–47, 1995.
- COSTA, N. C. A. da; KRAUSE, D. Schrödinger logics. *Studia Logica*, v. 53, n. 4, p. 533–550, 1994.
- COSTA, N. C. A. da; KRAUSE, D. An intensional schrödinger logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 38, n. 2, p. 179–194, 1997.
- COSTA, N. C. A. da; KRAUSE, D. The logic of complementarity. In: *The Age of Alternative Logics: Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today*. Berlim: Springer, 2006. p. 103–120.
- COSTA, N. C. A. da; KRAUSE, D.; BUENO, O. Paraconsistent logic and paraconsistency. In: *Philosophy of Logic*. New York: Elsevier, 2006. v. 5, p. 655–781.
- CURRY, H. B. *Foundations of Mathematical Logic*. New York: Dover, 1977.
- DIEKS, D.; LUBBERDINK, A. *How Classical Particles Emerge from the Quantum World*. 2010. Foundations of Physics. <DOI: 10.1007/s10701-010-9515-2>.
- DOMENECH, G.; HOLIK, F. A discussion on particle number and quantum indistinguishability. *Foundations of Physics*, v. 37, n. 6, p. 855–878, 2007.
- DOMENECH, G. et al. No labeling quantum mechanics of indiscernible particles. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 49, n. 12, p. 3085–3091, 2010.
- DOMENECH, G.; HOLIK, F.; KRAUSE, D. Q-spaces and the foundations of quantum mechanics. *Foundations of Physics*, v. 38, p. 969–994, 2008.
- FRAASSEN, B. van. *The Scientific Image*. Oxford: Clarendon Press, 1980.

- FRAASSEN, B. van. *Quantum Mechanics: an Empiricist View*. Oxford: Clarendon Press, 1991.
- FRAASSEN, B. van; PESCHARD, I. Identity over time: Objectively, subjectively. *The Philosophical Quarterly*, v. 58, p. 15–35, 2008.
- FRAENKEL, A. A.; BAR-HILLEL, Y.; LEVY, A. *Foundations of Set Theory*. New York: North-Holland, 1984.
- FRANCIA, G. T. di. Connotation and denotation in microphysics. In: *Recent Developments in Quantum Logic*. Mannheim: Kluwer Academic Publishers, 1985. p. 203–214.
- FRANCIA, G. T. di. A world of individual objects? In: *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*. Princeton: Princeton Un. Press, 1998. p. 21–29.
- FRENCH, S. Why the identity of indiscernibles is not contingently true either. *Synthese*, v. 78, p. 141–166, 1989.
- FRENCH, S. Hacking away at the identity of indiscernibles: Possible worlds and einstein's principle of equivalence. *Journal of Philosophy*, v. 92, n. 9, p. 455–466, 1995.
- FRENCH, S. On the withering away of physical objects. In: *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*. Princeton: Princeton Un. Press, 1998. p. 93–113.
- FRENCH, S. Metaphysical underdetermination: Why worry? *Synthese*, v. 180, n. 2, p. 205–221, 2011.
- FRENCH, S.; KRAUSE, D. *Identity in Physics: A Historical, Philosophical and Formal Analysis*. Oxford: Oxford Un Press, 2006.
- FRENCH, S.; KRAUSE, D. Remarks on the theory of quasi-sets. *Studia Logica*, v. 95, n. 1-2, p. 101–124, 2010.
- FRENCH, S.; RICKLES, D. Understanding permutation symmetry. In: *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. Cambridge: Cambridge Un Press, 2003. p. 212–238.
- HAWLEY, K. Science as a guide to metaphysics? *Synthese*, v. 149, p. 451–470, 2006.
- HAWLEY, K. Identity and indiscernibility. *Mind*, v. 118, p. 101–119, 2009.

HOLLAND, P. *The Quantum Theory of Motion*. Cambridge: Cambridge Un Press, 1993.

HOWARD, D. et al. The physics and metaphysics of identity and individuality. *Metascience*, v. 20, p. 225–251, 2011.

INWAGEN, P. van. *Metaphysics*. 2011.  
<<http://plato.stanford.edu/archives/fall2010/entries/metaphysics/>>.

JANTZEN, B. C. *No Two Entities Without Identity*. 2010. Synthese.  
<DOI: 10.1007/s11229-010-9717-3>.

KETLAND, J. Structuralism and the identity of indiscernibles. *Analysis*, v. 66, n. 4, p. 303–315, 2006.

KING, P. The problem of individuation in the middle ages. *Theoria*, v. 66, p. 159–184, 2000.

KNEEBONE, G. T. *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*. Londres: Van Nostrand, 1963.

KRAUSE, D. Structures for structural realism. *Journal of the Interested Group in Pure and Applied Logic*, v. 13, n. 1, p. 113–126, 2005.

KRAUSE, D. Logical aspects of quantum (non-)individuality. *Foundations of Science*, v. 15, n. 1, p. 79–94, 2010.

KRAUSE, D. Is priscilla, the trapped positron, an individual? quantum physics, the use of names, and individuation. *Arbor*, v. 187, n. 747, p. 61–66, 2011.

KRAUSE, D. The metaphysics of non-individuality. In: *Brazilian Studies in Philosophy and History of Science*. New York: Springer, 2011. p. 257–267.

KRAUSE, D. *Tópicos em Ontologia Analítica*. 2011.  
<<http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/TopicosOntologia.pdf>>.

KRAUSE, D.; ARENHART, J. R. B. *Structures and Models of Scientific Theories: a Discussion on Quantum Non-Individuality*. 2011. <<http://philsci-archive.pitt.edu/5564/1/LogUniv.pdf>>.

KRAUSE, D.; ARENHART, J. R. B.; MORAES, F. T. F. Axiomatization and models of scientific theories. *Foundations of Science*, v. 16, p. 363–382, 2011.

- LADYMAN, J.; BIGAJ, T. The principle of the identity of indiscernibles and quantum mechanics. *Philosophy of Science*, v. 77, p. 117–136, 2010.
- LADYMAN, J.; LINNEBO, O.; PETTIGREW, R. *Identity and Indiscernibility in Philosophy and Logic*. 2010. Pré-print online.
- LADYMAN, J. et al. *Everything Must Go: Metaphysics Naturalized*. Oxford: Oxford Un Press, 2007.
- LEIBNIZ, G. W. *Discours de Métaphysique*. Paris: J Vrin, 1994.
- LOCKE, J. *An Essay Concerning Human Understanding*. Oxford: Clarendon Press, 1975.
- LOUX, M. J. Beyond substrata and bundles: a prolegomenon to a substance ontology. In: *Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics*. [S.l.]: Blackwell, 1998.
- LOWE, E. J. Objects and identity criteria. In: *A Companion to the Philosophy of Language*. Oxford: Blackwell, 1997. p. 613–633.
- LOWE, E. J. *The Possibility of Metaphysics: Substance, Identity and Time*. Oxford: Clarendon Press, 1998.
- LOWE, E. J. Individuation. In: *The Oxford Handbook of Metaphysics*. Oxford: Oxford Un Press, 2003. p. 75–95.
- LOWE, E. J. The rationality of metaphysics. *Synthese*, v. 178, n. 1, p. 99–109, 2011.
- MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. New York: Wadsworth and Brooks, 1987.
- MORELAND, J. P. Theories of individuation: A reconsideration of bare particulars. *Pacific Philosophical Quarterly*, v. 79, p. 51–63, 1998.
- MULLER, F. A. Withering away, weakly. *Synthese*, v. 180, n. 2, p. 223–233, 2011.
- MULLER, F. A.; SAUNDERS, S. Discerning fermions. *British Journal for the Philosophy of Science*, v. 59, p. 499–548, 2008.
- MULLER, F. A.; SEEVINCK, M. P. Discerning elementary particles. *Philosophy of Science*, v. 76, n. 2, p. 179–200, 2009.
- PENROSE, R. *The Emperor's New Mind*. London: Vintage, 1989.

- PETERS, S.; WESTERSTAHL, D. *Quantifiers in Language and Logic*. Oxford: Clarendon Press, 2006.
- QUINE, W. V. O. *Word and Object*. Cambridge: MIT Press, 1960.
- QUINE, W. V. O. *From a Logical Point of View*. New York: Harper and Row, 1964.
- QUINE, W. V. O. *Ontological Relativity and Other Essays*. New York: Columbia Un Press, 1969.
- QUINE, W. V. O. Grades of discriminability. *Journal of Philosophy*, v. 73, n. 5, p. 113–116, 1976.
- QUINE, W. V. O. *Pursuit of Truth*. Cambridge: Harvard Un Press, 1992.
- READ, S. Monism: The one true logic. In: *A Logical Approach to Philosophy: Essays in Honor of Graham Solomon*. Dordrecht: Springer, 2006. p. 193–209.
- REDHEAD, M. L. G.; TELLER, P. Particles, particles labels, and quanta: The toll of unacknowledged metaphysics. *Foundations of Physics*, v. 21, n. 1, p. 43–62, 1991.
- REDHEAD, M. L. G.; TELLER, P. Quantum physics and the identity of indiscernibles. *British Journal for the Philosophy of Science*, v. 43, p. 201–218, 1992.
- ROHRLICH, F. On the ontology of qft. In: *Conceptual Foundations of Quantum Field Theory*. Cambridge: Cambridge Un Press, 1999. p. 357–367.
- RUSSELL, B. *An Inquiry Into Meaning and Truth*. London: George Allen and Unwin LTD, 1940.
- RUSSELL, B. *Human Knowledge: Its Scopes and Limits*. New York: Simon and Schuster, 1948.
- SAUNDERS, S. Physics and leibniz's principles. In: *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. Cambridge: Cambridge Un Press, 2003. p. 289–307.
- SAUNDERS, S. Are quantum particles objects? *Analysis*, v. 66, p. 52–63, 2006.

- SHOENFIELD, J. R. Axioms of set theory. In: *Handbook of Mathematical Logic*. Amsterdam: North Holland, 1977. p. 321–370.
- SMITH, N. J. J. Why sense cannot be made of vague identity. *Nous*, v. 42, n. 1, p. 1–16, 2008.
- STACHEL, J. Structural realism and contextual individuality. In: *Hilary Putnam*. Cambridge: Cambridge Un Press, 2005. p. 203–219.
- STEINER, M. Mathematics - application and applicability. In: *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford Un Press, 2005. p. 625–650.
- SUNDHOLM, G. Proof theory and meaning. In: *Handbook of Philosophical Logic*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 165–198.
- SUPPES, P. *Representation and Invariance of Scientific Structures*. Stanford: Center for the Study of Language and Information, 2002.
- SYLVAN, R.; COSTA, N. C. A. da. Cause as an implication. *Studia Logica*, v. 47, n. 4, p. 413–428, 1988.
- TELLER, P. The ins and outs of counterfactual switching. *Nous*, v. 35, n. 3, p. 365–393, 2001.
- TZOUVARAS, A. Cardinality without enumeration. *Studia Logica*, v. 80, p. 121–141, 2005.
- WESTERSTAHL, D. Quantifiers in formal and natural language. In: *Handbook of Philosophical Logic vol 14*. Netherlands: Kluwer Academic Press, 2007. p. 223–338.
- WEYL, H. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton: Princeton Un Press, 1949.



## **APÊNDICE A – Apêndice: duas teorias da individualidade**



Neste apêndice trataremos de duas das teorias da individuação que foram mencionadas durante todo o trabalho mas que não foram apresentadas com os devidos detalhes: a teoria de feixes e a teoria dos substratos. Esta parte do texto pode ser considerada como um desenvolvimento à parte do restante do trabalho, e é uma leitura opcional. Cabe ainda mencionar que estas de modo algum são as únicas teorias da individualidade disponíveis na história da filosofia; de fato existem ainda outras opções. Escolhemos aqui nos restringir a estas duas pois nossos interesses durante este trabalho recaíram principalmente sobre duas noções que estão no cerne da disputa entre estas duas abordagens: as noções de identidade e indiscernibilidade. Como veremos, o modo como tratam estas noções nos fornece um interessante meio para abordarmos as soluções propostas por estas teorias ao problema individualidade.

## A.1 INTRODUÇÃO: PROBLEMÁTICA E TERMINOLOGIA

O problema da individualidade goza de uma longa história, sendo praticamente tão antigo quanto a própria filosofia ocidental. Falando de modo geral, fornecer uma resposta ao problema consiste em identificar aquilo que é o responsável por atribuir individualidade aos itens que podem ser considerados legitimamente como indivíduos. Uma breve olhada na literatura sobre o assunto é suficiente para nos mostrar que esta é uma tarefa tão complexa, envolvendo considerações tão variadas, que torna-se impossível, em um espaço tão pequeno, dar uma noção, mesmo que apenas em linhas gerais, de todos os aspectos envolvidos na problemática. Claro, para começar estamos assumindo que existe algo que é de fato o responsável pela individuação dos indivíduos, e assim, que este não é um pseudo-problema, mas constitui uma importante via de investigação filosófica. Que a individualidade não apresenta nenhuma dificuldade ou até mesmo que não é na verdade um objeto de interesse filosófico também pode ser sustentado, e esta é uma posição legítima de um ponto de vista metafísico, podendo ser desenvolvida em pelo menos duas direções diferentes: podemos sustentar tanto que este é um pseudo-problema, mais ou menos no espírito anti-metafísico dos positivistas lógicos, ou ainda, que a individuação não necessita do desenvolvimento de nenhuma teoria para sua solução, a individualidade é tomada como um fato bruto, um dado que não pode ser analisado em termos mais simples. Apesar de interessantes, estas são duas vias que não abordaremos aqui.

Em geral, a estratégia adotada pelas diversas correntes através da história da filosofia consistiu em eleger alguma ou algumas características dos indivíduos para serem as responsáveis pela sua individuação, sendo que algumas destas escolhas mostraram-se mais promissoras do que outras na tentativa de resolver o problema em questão. Por exemplo, segundo alguns filósofos, a responsável pela individuação é uma coleção especial de propriedades dentre aquelas que são possuídas por cada indivíduo, ou seja, podemos selecionar algumas propriedades de um indivíduo que serão possuídas apenas por ele, e assim ele será individuado por elas; outros elegeram a matéria da qual o indivíduo é composto para desempenhar este papel, ou ainda, a matéria juntamente com a forma, assim, por exemplo, uma esfera de metal seria individuada pelo metal do qual é composta e pela forma esférica dada ao metal (ou, se preferirmos nos expressar deste modo, pelo fato de que este metal instancia a esfericidade). Neste apêndice, consideraremos duas possíveis respostas ao problema do princípio da individualidade, as chamadas teorias de *feixes de propriedades* e as teorias do *substratum*. Antes de entrarmos em detalhes sobre estas duas teorias, fixaremos alguma terminologia que será utilizada em nossas discussões subsequentes.

Conforme usualmente exposto (ver King (KING, 2000), Lowe (LOWE, 2003)), o problema sobre a individualidade envolve pelo menos três tipos de questões relacionadas:

- (i) o que faz de um indivíduo um indivíduo?
- (ii) o que faz com que um indivíduo seja precisamente este indivíduo, e não qualquer outro?
- (iii) o que faz com que um indivíduo seja uno?

O primeiro item mencionado é o problema da individuação propriamente, e uma resposta a esta pergunta deve explicar o que faz com que um item particular seja um indivíduo. O segundo ponto trata da identidade e diferença entre indivíduos (ver também Moreland (MORELAND, 1998), Allaire (ALAIRES, 1965)); devemos notar que não é necessário que uma resposta a este problema esteja ligada a uma resposta ao primeiro problema, mas é importante enfatizar que, em geral, algumas abordagens privilegiadas pela história da filosofia tenderam a considerar estes dois tópicos de modo relacionado. Para tornar mais claro como podemos dissociar estes dois aspectos do problema, costuma-se dizer que a individualidade envolve apenas um indivíduo, é uma espécie de relação do indivíduo consigo mesmo, enquanto que a diferença entre

indivíduos envolve pelo menos dois itens. Podemos apelar para uma experiência de pensamento: podemos imaginar um mundo possível com apenas um indivíduo; neste mundo ele não será distinto de nada (não há nada mais no mundo do que ele possa diferenciar-se), mas ainda assim será um indivíduo, e neste sentido não será necessário identificarmos os dois primeiros pontos mencionados acima. No terceiro item, temos o problema da unicidade, ou da unidade numérica que seria uma característica apenas de indivíduos, mas não de outros tipos de entidade. Neste sentido, o problema diz respeito a explicar o que faria com que um indivíduo como Sócrates apresente um tipo de unicidade que outros objetos, como por exemplo aqueles denotados por termos de massa, como água ou ouro, aparentemente não tem.

O próximo ponto importante a ser considerado diz respeito a distinguir três termos que muitas vezes são tratados como sinônimos: *item*, *objeto* e *particular*. Identificar esses termos implica uma particular posição metafísica, que não assumiremos aqui. Por *item* entendemos qualquer coisa que existe ou poderia existir, e neste sentido é sinônimo de *entidade*, a noção mais geral possível. O termo *particular* está sendo usado em oposição a *universal*, no sentido de que um particular instancia um universal ou é ele mesmo uma instância de um universal; neste caso são chamados *tropos* ou *modos*. *Objetos* são entendidos em oposição a *propriedades* ou *qualidades*, com objetos sendo os portadores de propriedades, aquilo que tem propriedades. É uma questão filosófica importante decidir se todas as entidades particulares são objetos, ou se existem entidades que podem ser particulares sem serem objetos. Essa controvérsia está associada ao fato de que em geral, objetos particulares de um certo tipo são considerados como tendo pelo menos em princípio um critério de identidade (mesmo que não o conheçamos), enquanto que entidades em geral poderiam falhar em tais critérios.

Estaremos preocupados em estudar o problema da individualidade para objetos particulares, geralmente para aqueles objetos que poderiam ser considerados *substâncias*. Este termo, substância, é um termo técnico de metafísica, e designa itens que podem ser entendidos como existindo independentemente de quaisquer outros itens. Por exemplo, sombra, onda, buraco e propriedades, em algumas acepções deste termo, não qualificariam como substâncias, enquanto que pessoas ou até mesmo artefatos sim. Assim, estamos particularmente interessados no princípio de individualidade para substâncias particulares.

Antes de analisarmos algumas das possíveis respostas para o problema da individualidade, convém distinguir este problema de um pro-

blema que muitas vezes é confundido com ele, mas que dele pode (e em muitos casos deve) ser dissociado: devemos distinguir por um lado o problema de (i) apresentar um princípio de individualidade no sentido ontológico, e de outro, o problema (ii) epistemológico de se individuar entidades. Neste último sentido, trata-se de uma capacidade cognitiva de separar algo como objeto de experiência, pensamento ou referência linguística, e esta capacidade varia de pessoa para pessoa. Assim, um biólogo é capaz, no sentido (ii) acima, de individuar vários objetos em uma região de uma floresta, enquanto que um leigo, na maioria das vezes, percebe apenas uma paisagem homogênea. Individuação no sentido epistemológico pressupõe a individuação no sentido ontológico; é preciso que o item em questão seja um indivíduo, no sentido ontológico, para que possamos individuá-lo, ou falhar em individuá-lo, no sentido epistemológico; ele tem que, de certo modo, estar dado, para que possamos voltar nosso aparato cognitivo sobre ele. O sentido inverso, claro, não vale, ou seja, mesmo que não sejamos capazes de individuar um determinado item, de selecioná-lo como objeto de experiência, pensamento ou referência linguística, não se segue daí que o item em questão não seja um indivíduo; a metafísica, pelo menos em princípio, não depende da epistemologia.

Outra noção importante que se costuma confundir tanto com o sentido ontológico quanto com o sentido epistemológico de individuação apresentado anteriormente é a de critério de identidade. Os filósofos costumam estar interessados em critérios de identidade de vários tipos, dentre os quais mencionamos os seguintes:

- (i) identidade através do tempo (diacrônica);
- (ii) identidade em um instante de tempo (sincrônica);
- (iii) identidade através de mundos possíveis (identidade trans-mundana).

No primeiro caso, trata-se de saber como podemos identificar itens em diferentes instantes temporais, que tipo de critério nos permite *saber* que um dado item **A** em  $t_1$  é o mesmo que o item **B** em um momento posterior  $t_2$ . Em geral este tipo de problema está associado com a discussão sobre a persistência das substâncias através do tempo (e conseqüentemente, à diferentes teorias metafísicas sobre o tempo). A busca por critérios de identidade em um instante de tempo trata de saber quando itens referidos por dois nomes diferentes são de fato o mesmo item; o exemplo mais simples fornecido neste caso é a extensionalidade no caso de conjuntos (em uma teoria de conjuntos extensional), ou seja, conjuntos são o mesmo quando possuem os mesmos

elementos. No caso do critério de identidade trans-mundana, buscamos fornecer um modo de identificar a mesma entidade em diferentes mundos possíveis, e este tipo de problema está associado com discussões sobre o escopo de possibilidades existentes para uma substância. Essas distinções são importantes também porque muitas vezes estamos interessados em critérios de identidade para outras categorias de entidades que não são qualificados como indivíduos, como por exemplo, eventos, ou ainda estados de coisas. Em geral, não se considera que eventos e estados de coisas existam, mas sim que *ocorram* e *obtenham*, respectivamente. Não entraremos aqui em detalhes sobre o que conta como um critério de identidade, nem como podem ser formulados (para uma discussão sobre critérios de identidade, ver Lowe (LOWE, 1998, pp. 41-47)).

Assim, devemos distinguir o problema ontológico de se fornecer um princípio de individuação para objetos particulares dos diversos problemas epistemológicos a ele usualmente relacionados. Esta distinção deve ser feita para mantermos claros os nossos objetivos, e não impedem que se misture posteriormente considerações sobre algumas dessas noções com o objetivo de se fornecer uma particular teoria sobre a individuação. Além disso, todas estas questões são importantes para uma teoria completa sobre substâncias, mas convém restringir o escopo de nosso trabalho e não abordar estes aspectos do problema aqui. Tendo feito estes esclarecimentos, agora apresentaremos duas teorias sobre a individualidade que além de possuírem defensores célebres na história da filosofia dos períodos moderno e medieval também foram debatidas e defendidas no século 20, dentro da tradição analítica: as teorias de feixes de propriedades e as teorias do substratum. Essas duas propostas costumam apresentar-se como rivais em uma espécie de disputa dialética, sendo que a defesa de uma delas em geral incluirá em sua argumentação uma tentativa de minar as pretensões da teoria rival e superar as dificuldades geradas por ela (ver Loux (LOUX, 1998), para uma introdução geral à dinâmica do debate). Começaremos com a teoria de feixes, pois em geral é conveniente de um ponto de vista expositivo ver as teorias do substrato nos fornecendo uma alternativa às principais fraquezas da teoria de feixes.

## A.2 A TEORIA DE FEIXES DE PROPRIEDADES

A teoria de feixes de propriedades remonta pelo menos a Boécio, na Idade Média (ver King (KING, 2000)), e recebeu uma de suas mais

famosas versões e defesas nas mãos de G. W. Leibniz, no final do século 17 e início do 18 (por exemplo, em Leibniz (LEIBNIZ, 1994)). No século 20, um dos famosos defensores do princípio foi Bertrand Russell em algumas fases de sua vida (por exemplo, em Russell (RUSSELL, 1940) e (RUSSELL, 1948)). Grosso modo, podemos enunciar a teoria dos feixes da seguinte maneira:

*Os objetos particulares são individuados por um conjunto de propriedades possuídas pelo objeto.*

Assim, aquilo que individua um objeto é um conjunto de propriedades possuído ou instanciado por este objeto. Algumas perguntas são importantes neste ponto, e devemos respondê-las se desejamos tornar esta teoria mais precisa: devemos esclarecer quais propriedades estão em jogo (todas, algumas, quais?) e como estamos entendendo as propriedades (são universais, ou são tropos?). Uma teoria de feixes geralmente é adotada também como uma particular teoria sobre a constituição dos objetos particulares: objetos particulares *são* feixes de propriedades. Deste ponto de vista, estamos reduzindo a noção de indivíduo à uma noção que estamos assumindo seja mais geral, a de propriedades. Assim, propriedades seriam o que há de mais geral e fundamental, enquanto que objetos individuais são derivados ou definidos a partir destes. Algumas vezes esta é chamada uma teoria sobre a constituição ontológica dos particulares, por tratar, podemos assim dizer dos “ingredientes” envolvidos na constituição dos objetos particulares. É comum associar estes dois tipos de investigação (mas nem toda investigação acerca do princípio de individualidade é uma investigação acerca da constituição ontológica dos particulares: se desejamos defender, por exemplo, que o princípio de individuação é dado pela forma e matéria dos objetos particulares, então, não estamos necessariamente comprometidos com uma tese sobre a constituição destes objetos). Assim, segundo uma teoria de feixes, estaríamos comprometidos apenas com uma categoria ontológica, a das propriedades.

Para garantirmos que uma teoria de feixes vai fazer aquilo que se espera dela, ou seja, que caracterize um indivíduo de modo único, devemos poder estabelecer de algum modo que não são possíveis dois feixes instanciando todas as mesmas propriedades, ou seja, se dois feixes instanciam todas as mesmas propriedades, então são um e o mesmo feixe (*vide* a caracterização do problema da individualidade apresentado acima). Em geral, para se garantir precisamente isso costuma-se adotar uma forma do chamado *Princípio da Identidade dos Indiscerníveis* (doravante simplesmente PII), segundo o qual, se dois indivíduos parti-

tenham todas as mesmas propriedades, então são o mesmo, ou, na forma contrapositiva, se são distintos, então há uma propriedade que os distingue, são discerníveis. Deve-se notar que uma teoria de feixes sobre a constituição ontológica dos objetos particulares parece implicar que o PII é uma verdade necessária, algo que, como veremos adiante, é uma afirmação problemática.

Em geral, costuma-se escrever o PII usando uma linguagem de segunda ordem da seguinte forma:

$$\forall x \forall y (\forall P (P(x) \leftrightarrow P(y) \rightarrow x = y)) \quad (\text{A.1})$$

onde  $P$  é variável para propriedades. Certamente, esta fórmula busca captar o sentido intuitivo do Princípio, que, conforme estamos discutindo, é um princípio metafísico, e não uma lei da lógica. Agora, se concebemos as propriedades como universais, a teoria de feixes pode adquirir pelo menos três diferentes versões, dependendo do modo como encaramos o escopo da variável  $P$  para as propriedades em PII. Temos:

(PII1)  $P$  varia por todas as propriedades e relações de  $x$  e  $y$ ;

(PII2)  $P$  varia por todas as propriedades e relações, menos as relações espaço-temporais;

(PII3)  $P$  varia apenas por propriedades monádicas de  $x$  e  $y$ .

Assim, temos três versões de PII, sendo PII1 a mais fraca e PII3 a mais forte. Devemos notar em primeiro lugar que esta classificação não pode ser estabelecida utilizando-se uma linguagem de segunda ordem, ou seja, não podemos escrever três fórmulas de segunda ordem diferentes para tentar captar com cada uma delas uma das versões do PII expressa acima. Isto ocorre simplesmente pelo fato de que estas distinções são semânticas, devem ser feitas com base no significado das propriedades e relações envolvidas, e assim, são dadas na metalinguagem.

O primeiro ponto a ser notado é que PII1 parece fraco demais. Se vamos admitir todas as propriedades e relações no escopo da variável  $P$ , então, em particular, vamos admitir que, para qualquer objeto particular  $a$ , sempre podemos utilizar a propriedade “ser idêntico a  $a$ ” no PII (estas propriedades são chamadas de *haecceities*), e assim, para qualquer objeto  $b$ , se  $b$  instancia todas as propriedades que  $a$  instancia, então, segue-se que  $b$  instancia a propriedade “ser idêntico a  $a$ ”, e assim,  $b$  é idêntico a  $a$ . No entanto, muitos filósofos tem argumentado que o uso deste tipo de propriedades para mostrar que o PII é

um princípio legítimo na verdade o tornam trivial. Neste sentido, ao invés de nos explicar em que consiste um indivíduo, a teoria de feixes já pressupõe de certo modo o indivíduo em questão e o individualiza a partir dele mesmo, algo que não seria considerado legítimo.

Outro ponto problemático tanto nesta formulação de PII quanto na descrição da haecceity diz respeito ao uso, na formulação do termo que denota a propriedade haecceística, do nome de um item particular, o próprio *a* que se deseja individualizar. Devemos notar que a formulação da propriedade haecceística é um caso particular de um problema mais geral: nada nos impede de formularmos propriedades envolvendo outros itens particulares, como por exemplo, a propriedade de ser do mesmo comprimento ou da mesma cor que um determinado indivíduo *b* ou, de estar entre os itens *b* e *c*. Como a formulação PIII não impõe restrições, estas propriedades podem ser legitimamente utilizadas no escopo de *P*. A grande dificuldade com a utilização deste tipo de propriedades e relações é que elas pressupõe que os itens mencionados estejam já individualizados e disponíveis para referência. No caso da haecceity, assumimos que *a* já esteja individualizado, e assim que já temos disponível aquilo que desejamos individualizar. No caso de propriedades envolvendo outros itens, chamemos de *b* e *c*, o problema é que, ao utilizarmos propriedades que utilizam estes itens para individualizar *a*, por exemplo, também estamos livres para utilizar *a* em propriedades que individualizam *b* e *c*, e assim, a individualidade de cada um destes itens particulares pareceria pressupor a individualidade dos outros, em uma espécie de círculo.

Este é um ponto importante e devemos introduzir uma nova terminologia neste momento. Chamaremos de *puras* aquelas propriedades e relações que, grosso modo, não envolvem outros indivíduos. Propriedades que envolvem outros indivíduos são *impuras*. Assim, a principal dificuldade com haecceities e propriedades em geral admitidas em PIII é que são impuras, e propriedades impuras, como vimos, não parecem adequadas para cumprir o papel ontológico que a teoria de feixes espera que um conjunto de propriedades cumpra. Mas o que podemos dizer de PII2 e PII3?

Com PII2 e PII3 também nos envolvemos, aparentemente, com propriedade impuras. É comum restringir o escopo de *P* em PII3 para propriedades puras, e tem-se argumentado que esta é a única forma aceitável em que PII poderia fazer o papel de auxiliar da teoria dos feixes. O argumento é que, se queremos que indivíduos sejam caracterizados unicamente por suas propriedades, então, estas devem ser propriedades puras monádicas, ou seja, relações não devem fazer parte

das propriedades individuadoras. Esta exigência está relacionada com o fato de que a individualidade de um objeto não deveria pressupor nada além das características relevantes deste objeto (no caso de uma teoria de feixes, as características relevantes seriam as propriedades do objeto), pois, pelo menos em princípio, poderíamos imaginar um mundo possível no qual apenas este objeto existisse, e assim, os outros itens pressupostos pelas propriedades impuras não estariam disponíveis para contribuir na individuação do objeto em questão.

Assim, a maioria dos ataques à teoria de feixes concentra-se nesta particular versão da teoria, segundo a qual as propriedades monádicas puras de um indivíduo é que são responsáveis pela sua individualidade, e a unicidade de cada feixe de propriedades é garantida pelo PII3 restrito à propriedades puras. Como dissemos, em geral esta teoria é também tomada como uma redução do particular ao universal, ou seja, como uma teoria sobre a constituição ontológica dos particulares. Neste caso, aparentemente, PII deveria ser necessário, pois se dois indivíduos são constituídos exatamente pelos mesmos universais, eles não deveriam ser o mesmo indivíduo? Esse é o principal ponto de discórdia entre os defensores do PII e seus detratores, que se enredaram em um conflito interessante não apenas do ponto de vista metafísico mas também de um ponto de vista lógico.

Vamos começar notando que PII tem um objetivo específico no contexto da teoria de feixes: reduzir uma noção de indiscernibilidade à noção de identidade. Se entendermos que dois objetos são indiscerníveis quando partilham todas as propriedades relevantes (vamos deixar este ponto em aberto no momento), então o que PII nos diz é que não existem objetos qualitativamente indiscerníveis mas numericamente distintos. Colocado ainda de outra forma, se dois objetos são diferentes numericamente, então eles são diferentes qualitativamente, há uma qualidade que os distingue. Assim PII deveria nos garantir a implicação: (indiscernibilidade  $\Rightarrow$  identidade). A conversa de PII, o chamado Princípio da Indiscernibilidade dos Idênticos, afirma que se dois objetos são idênticos, então eles são indiscerníveis, ou seja, nos garante a implicação: (identidade  $\Rightarrow$  indiscernibilidade). Este último princípio não costuma gerar controvérsias, e tomado com PII, nos fornece a equivalência entre indiscernibilidade e identidade. É justamente esta tese, no seu lado mais controverso, aquele garantido pelo PII, que costuma ser atacado pelos opositores da teoria dos feixes. Vejamos alguns casos.

O primeiro ataque célebre no século 20 ao PII foi apresentado como um experimento de pensamento por Max Black (ver Black (BLACK,

1952)). Black busca mostrar que é possível uma situação em que dois objetos sejam qualitativamente indiscerníveis mas não sejam numericamente idênticos através do seu famoso exemplo das duas esferas: imagine um mundo absolutamente simétrico em que existem apenas duas esferas metálicas, com o mesmo diâmetro, feitas do mesmo material, com todas as mesmas propriedades e a uma milha de distância uma da outra. Nada neste mundo permite distinguir uma esfera da outra, elas partilham todas as mesmas propriedades e todas as mesmas relações. Certamente poderíamos argumentar que só podemos nos representar tal mundo colocando uma das esferas à nossa direita e a outra à nossa esquerda, e assim elas devem ser distinguidas. Isto, no entanto, é cair em uma má compreensão do contra-exemplo; *nós* devemos conceber as esferas como estando cada uma de um lado, mas esta é uma limitação de nossa capacidade representacional, não do mundo de Black. O fato de nos imaginarmos observando as esferas introduz um terceiro elemento no mundo, um observador que quebra a simetria, e assim muda a situação do contra-exemplo.

Na mesma esteira da proposta de Black, outros contra-exemplos foram fornecidos, seja envolvendo discos vermelhos, como proposto por Allaire (ver Allaire (ALAIRE, 1963)) ou de modo mais sofisticado, envolvendo dois mundos absolutamente idênticos, que apresentam uma única diferença não-qualitativa em um momento específico do tempo, mas que em todos os aspectos qualitativos são idênticos, como em Adams (Adams (ADAMS, 1979)). O que todos estes contra-exemplos buscam mostrar é que o PII não é um princípio necessário, ou seja, não vale em todos os mundos possíveis. Neste caso, não poderia fundamentar uma teoria sobre a individualidade, que deve funcionar em todas as situações. Assim, uma questão que fica em aberto quando consideramos o tipo de situação descrita nestas experiências de pensamento é: o PII poderia então ser apenas contingentemente válido, ou seja, válido apenas em alguns dos mundos possíveis, como por exemplo o nosso?

Contra esta última possibilidade alguns tem argumentado que PII falha mesmo em nosso mundo. O cerne do argumento é que existem entidades que podem em certas situações partilhar todas as mesmas propriedades e ainda assim ser numericamente distintas. As principais candidatas apresentadas na literatura como contra-exemplos ao PII são as partículas quânticas da mecânica quântica não-relativista (ver French (FRENCH, 1989), French e Krause (FRENCH; KRAUSE, 2006)).

Como os defensores do PII reagiram a estes contra-exemplos? Analisaremos aqui uma das propostas mais debatidas atualmente, que originou-se com Quine (Quine (QUINE, 1960), (QUINE, 1976)) mas que

foi primeiramente utilizada com o propósito explícito de defender o PII por Saunders e outros no contexto da mecânica quântica (ver Saunders (SAUNDERS, 2003), (SAUNDERS, 2006), e para uma discussão geral, Ladyman *et. al.* (LADYMAN; LINNEBO; PETTIGREW, 2010), que seguiremos aqui). Antes de introduzirmos a terminologia e a discussão proposta por estes autores, convém observar que estivemos até aqui enunciando o PII em termos que poderíamos chamar de *metafísicos*: se dois **objetos** são numericamente distintos, então existe uma **propriedade** que os distingue qualitativamente. A fórmula de segunda ordem A.1 apresentada anteriormente buscava apenas captar o sentido deste princípio metafísico, que trata de objetos e propriedades, ou, se quisermos nos arriscar um pouco mais, que é enunciado ao nível do ser. Agora, seguindo Saunders (particularmente em (SAUNDERS, 2003)), podemos nos comprometer com uma forma de *universalismo semântico*, uma tese realista segundo a qual, grosso modo, nossos conceitos descritivos são adequados para descrever o mundo, ou seja, ao descrever o mundo estamos, através de nosso aparato linguístico, falando dos objetos propriamente (alguns autores esquecem de enunciar este tipo de compromisso explicitamente em outros textos nos quais o assunto é abordado). Neste sentido, podemos assumir ainda que nossas descrições são informadas pelas teorias físicas, que os conceitos que utilizamos para descrever os objetos são aqueles presentes em nossas teorias físicas interpretadas (pois elas já nascem com uma interpretação intuitiva, de acordo com Saunders (SAUNDERS, 2003, p. 290)). Assim, segundo Saunders, recaímos no campo da lógica, do cálculo de predicados, e podemos, por simplicidade, supor que estamos lidando com a lógica clássica de primeira ordem sem igualdade e com apenas um número finito de predicados, sem constantes individuais (pois nossas teorias físicas não nos apresentam nada que possa ser dito uma relação de igualdade, e nem tampouco uma quantidade infinita de predicados; a ausência de constantes individuais serve para simplificar a exposição).

Assim, vamos supor que  $\mathcal{L}$  seja uma linguagem de primeira ordem sem identidade, sem constantes individuais, com o vocabulário lógico usual (ver, por exemplo, Mendelson (MENDELSON, 1987, cap. 2)) e com uma quantidade finita de símbolos de predicados. Seja  $\mathfrak{M}$  uma estrutura na qual os símbolos não-lógicos de  $\mathcal{L}$  são interpretados,  $\phi(\mathbf{x})$  uma fórmula de  $\mathcal{L}$  com apenas uma variável livre,  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  uma fórmula de  $\mathcal{L}$  com duas variáveis livres, e  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  elementos do domínio de  $\mathfrak{M}$ . Lembrando que o objetivo de PII é nos dar a implicação (indiscernibilidade  $\Rightarrow$  identidade), se tivermos objetos diferentes, segundo os defensores desta proposta, podemos ter diversas formas de discer-

nibilidade, ou, como se costuma chamar, *graus de discernibilidade ou discriminabilidade* conforme as seguintes definições:

1.  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são intrinsecamente discerníveis em  $\mathcal{L}$  se existe  $\phi(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}$  que não contém quantificadores e

$$\mathfrak{M} \models \phi(\mathbf{a}) \text{ e } \mathfrak{M} \not\models \phi(\mathbf{b}).$$

2.  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são absolutamente discerníveis em  $\mathcal{L}$  se existe  $\phi(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}$  tal que

$$\mathfrak{M} \models \phi(\mathbf{a}) \text{ e } \mathfrak{M} \not\models \phi(\mathbf{b}).$$

3.  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são relativamente discerníveis em  $\mathcal{L}$  se existe  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}$  tal que

$$\mathfrak{M} \models \phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \text{ e } \mathfrak{M} \not\models \phi(\mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

4.  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são fracamente discerníveis se existe  $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{L}$  tal que

$$\mathfrak{M} \models \phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \text{ e } \mathfrak{M} \not\models \phi(\mathbf{a}, \mathbf{a}).$$

Intuitivamente, objetos intrinsecamente discerníveis são distinguidos quando um deles satisfaz uma fórmula com apenas uma variável livre sem quantificadores e o outro não, ou seja, há uma propriedade monádica (dada pela extensão da fórmula que descreve a propriedade) que não faz uso de nenhum outro objeto do domínio e que os distingue. Um exemplo de uma propriedade assim seria “ser verde”, ou, ainda propriedades simples expressas pelos predicados da linguagem compostos através dos conectivos, como “ser verde e ser quadrado” (em uma linguagem que contenha os predicados “ser verde” e “ser quadrado”). No caso de objetos absolutamente discerníveis, relaxamos a exigência de que a fórmula não contenha quantificadores, e assim indiretamente permitimos que outros objetos sejam mencionados no termo que nos dá a propriedade que discerne  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Um exemplo seria a propriedade dada por “ser maior que qualquer objeto do domínio”, em um domínio composto por seres humanos. Neste caso, temos a relação binária “ $x$  é maior que  $y$ ”, e estamos quantificando a segunda variável, de modo a obter uma fórmula com apenas uma variável livre “para qualquer  $y$  ( $x$  é maior que  $y$ )”. A discernibilidade relativa apela para uma relação que vale entre dois objetos em uma certa ordem mas não em outra quando se trata dos objetos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , ou seja, trata-se de uma relação assimétrica no subconjunto  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  do domínio. Um exemplo de uma relação assim seria “ser estritamente mais pesado que” em um conjunto de objetos

físicos. Dois objetos são fracamente discerníveis quando estão relacionados por uma relação irreflexiva e simétrica no subconjunto do domínio que os contém, ou seja, os objetos estão relacionados um com o outro, mas não estão relacionados consigo mesmos. Um exemplo de uma relação assim seria a relação “estar a uma milha de distância de”, já que dois objetos podem estar a uma milha de distância um do outro mas nenhum objeto pode estar a uma milha de distância de si mesmo. Note-mos que neste caso a relação pode ser simétrica, e assim, não recaímos no caso anterior, da discernibilidade relativa.

Como argumentam Ladyman *et. al.*, (ver (LADYMAN; LINNEBO; PETTIGREW, 2010)), cada um destes *graus de discernibilidade* é mais forte do que o seguinte, ou seja, discerne menos objetos que o grau seguinte. Assim objetos intrinsecamente discerníveis são absolutamente discerníveis, e estes, por sua vez, são relativamente discerníveis, e assim por diante. Cada um destes graus de discernibilidade implica a diferença numérica, ou seja, a afirmação de que os objetos são distintos, mas o mero fato de que objetos sejam distintos não nos garante que sejam discerníveis segundo algum dos graus apresentados anteriormente. Objetos que são distintos mas não são discerníveis por nenhum destes quatro graus de discernibilidade são ditos *absolutamente indiscerníveis*. Mas como os defensores do PII utilizam este aparato para mostrar que os contra-exemplos apresentados contra este princípio são de fato mal sucedidos?

Bem, o primeiro ponto a ser notado é que os defensores do PII desejam deixar claro que se vamos argumentar que objetos podem ser indiscerníveis mas não idênticos, então devemos estabelecer rigorosamente o que vamos entender por indiscernibilidade. Como existem diferentes graus de indiscernibilidade, pode muito bem ocorrer que objetos que, em certa circunstância são absolutamente ou intrinsecamente indiscerníveis, sejam relativamente ou fracamente discerníveis, e assim, PII estaria vingado. Devemos poder mostrar que todos os contra-exemplos avançados até hoje contra o PII violam apenas alguma das formas mais fortes do princípio, mas não as formas mais fracas, e assim, não há razão para se abandonar o princípio. Ou seja, se alguma forma do princípio vale, então não há razão para declarar que ele é falso.

De fato, esta é a estratégia utilizada para se defender o PII dos contra exemplos propostos até hoje. Vejamos o caso clássico das esferas de Black. Segundo os defensores do PII, podemos conceder que as esferas possuem em comum todas as propriedades, ou seja, as esferas satisfazem todas as fórmulas com apenas uma variável livre, e assim são intrinsecamente e absolutamente indiscerníveis. O que podemos dizer

das relações? Aparentemente, elas partilham todas as relações entre si, ou seja, as relações entre elas são simétricas, pelo menos a primeira vista, e assim, não podemos afirmar que são relativamente discerníveis. No entanto, a relação “estar a uma milha de distância de” é uma relação que vale entre as duas esferas, e como notamos antes, esta relação é simétrica e irreflexiva, ou seja, ela serve para discernir fracamente as duas esferas. Assim aparentemente, o PII vale no contexto das esferas de Black, e neste caso, aparentemente, não foi refutado.

O que dizer do caso das partículas quânticas? Bem, neste caso, a alegação feita pelos defensores do PII é a mesma, ou seja, eles afirmam que apesar de serem indiscerníveis intrinsecamente, absolutamente e relativamente, as partículas podem ser fracamente discernidas, e assim o PII é novamente re-estabelecido. A princípio, devemos observar que as partículas podem ser de dois tipos, bósons ou férmions. A alegação costuma ser feita de que férmions respeitam o PII, pois satisfazem o *Princípio de Exclusão de Pauli*, segundo o qual dois férmions não podem estar no mesmo estado (ver Saunders (SAUNDERS, 2003), (SAUNDERS, 2006), e Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008)). Neste caso, uma relação simétrica e irreflexiva que costuma ser apresentada como justificando esta afirmação é a de “possuir spin oposto a”, já que dois elétrons, por exemplo, não podem possuir o mesmo spin, ou seja, eles devem possuir um valor de spin oposto um ao outro (a relação é simétrica), mas nenhum elétron possui spin oposto a si mesmo (a relação é irreflexiva). Além disso, bósons também poderiam ser discernidos, mas apenas por relações probabilísticas (Muller e Saunders (MULLER; SAUNDERS, 2008)).

Mas devemos aceitar esta defesa do PII? É interessante lembrar que o PII serve como um dos pilares dando sustentação a uma teoria de feixes, que tem o objetivo de explicar a individuação de itens particulares. O que ganhamos com relação a isto sabendo que dois itens são fracamente discerníveis? O fato de sabermos que dois objetos são fracamente discerníveis nos garante, em primeiro lugar, que de fato são dois objetos, mas isto já estava pressuposto no enunciado da própria definição de discernibilidade fraca (e dos outros graus de discriminabilidade também). Além disso, como ficamos com relação a discussão anterior de propriedades puras e impuras? É nesta linha que os ataques a esta defesa do PII tem se concentrado.

Se vamos aceitar que dois objetos podem ser fracamente discerníveis sem serem intrinsecamente discerníveis, então vamos admitir que objetos podem ser diferentes sem apresentarem nenhuma diferença. Se isto salva o PII, então deveríamos de algum modo ter salvo a teoria

de feixes. O problema é que a estratégia utilizada para salvar o PII ignora completamente a motivação para se propor uma teoria de feixes. Segundo o teórico dos feixes, o que individua um objeto particular são suas propriedades monádicas puras, e a unicidade de cada feixe deve ser garantida pelo PII. Esta exigência é feita para evitar incorrerem em petição de princípio no momento de caracterizar o que confere individualidade aos itens particulares. No entanto, se a discernibilidade é fraca é tudo o que podemos fornecer, então, para garantir que uma das esferas é um indivíduo, para ficar com o caso das esferas de Black, estamos assumindo que ela está relacionada com outra esfera pela relação “estar a uma milha de distância de”, ou seja, devemos supor que temos as duas esferas individuadas, e que uma delas, a que estamos interessados, está na relação com a outra, mas não consigo mesma. No entanto, isto soa como uma petição de princípio, as esferas não deveriam ser dadas antes para depois serem individuadas pelas relações que mantêm entre si, são as relações que as individualizam. Posto de outro modo, estamos tomando uma das esferas, seja **a**, e a individuando através de suas propriedades e do fato de que **a** está relacionada com a **outra** esfera, seja **b**, pela relação “estar a uma milha de distância de”, que simbolizaremos por **R**, mas não consigo mesma. Assim, temos que **a** possui a propriedade **Rb**. Do mesmo modo, **b** possui a propriedade **Ra**. Podemos notar imediatamente que caímos no problema mencionado anteriormente, de que a individuação de uma das esferas depende da individuação da outra, e reciprocamente. Mas, podemos ir mais a fundo e perguntar, que esfera? Como podemos justificar a rotulação e a referência a esferas a menos que já estejam individuadas? Aparentemente, a discernibilidade fraca não pode nos ajudar a salvar a teoria de feixes, ela salva uma forma mais fraca de PII mas fica completamente desvinculada do contexto maior de uma teoria da individuação, ignora toda a motivação para se propor uma teoria de feixes (ver Hawley (HAWLEY, 2009) para uma discussão das dificuldades envolvidas em se tentar salvar PII apelando para a discernibilidade fraca).

Note que a teoria de feixes propõe explicar a noção de indivíduo fazendo apelo a algo que se propõe mais geral, no caso, propriedades. A proposta da discernibilidade fraca, no entanto, nos pede que individuem uma das esferas em termos da outra (assumindo que faz sentido falar de “uma” e “outra”). No entanto, uma circularidade foi apontada, uma das esferas individua a outra, e ao mesmo tempo, a outra individua a primeira, mostrando uma falha na explicação. O apelo não mais é feito a algo mais geral, mas a dois objetos que exigem individuação eles mesmos. Assim, apesar de ter gerado alguma esperança, a abordagem

da discernibilidade fraca não parece uma solução promissora.

Com estas dificuldades apontadas para uma teoria de feixes, o campo está aberto para novas propostas, e uma das alternativas é a teoria do substratum, à qual passaremos agora.

### A.3 A TEORIA DO SUBSTRATUM

A teoria do substratum, ou do substrato, pode ser encontrada em autores que remontam pelo menos a Duns Scotus, na Idade Média (ver King (KING, 2000)). No período moderno foi proposta, entre outros, por John Locke (ver Locke (LOCKE, 1975)), e no século 20 por Bergman, Allaire e mais recentemente por Moreland, entre outros (ver Allaire (ALAIRE, 1963), Moreland (MORELAND, 1998)). É comum, na literatura mais atual, fazermos referência ao substrato através do termo geral inglês *bare particular*, ou um particular nú, enfatizando assim o fato de que não possui propriedade nenhuma, como discutiremos mais adiante. Como comentamos acima, os teóricos do substrato baseiam-se na falha da teoria de feixes para fazer sua proposta e enfatizar suas virtudes: como apenas as propriedades não são suficientes, devemos, segundo eles, acrescentar um novo ingrediente à proposta feita pela teoria de feixes com relação ao princípio da individualidade, algo subjazendo às propriedades, que seja uma característica única de cada indivíduo e que seria o responsável pela individuação.

Podemos, assim, enunciar do seguinte modo a teoria em sua forma mais geral:

*O que confere individualidade é um substrato subjazendo às propriedades dos indivíduos.*

Vamos começar tentando entender o motivo pelo qual os defensores de uma teoria de substrato alegam ser necessário postular uma entidade a mais além das propriedades para garantir a individualidade, uma entidade que não é um universal. Novamente é interessante mencionar que uma teoria do substrato costuma também ser apresentada como uma teoria sobre a constituição dos objetos particulares, assim como a teoria dos feixes; neste caso, os particulares seriam constituídos pelas suas propriedades e pelo seu substrato. Aqui, também podemos ter o caso em que as propriedades em questão são universais, ou então, alternativamente, podemos ter versões da teoria do substrato em que são tropos. Neste caso, os constituintes últimos da realidade, ou as duas categorias ontológicas básicas seriam as de substrato e de propriedade;

aqui ao contrário do que ocorre com a teoria de feixes, não reduzimos o particular ao universal nem mesmo no em que caso aceitamos que as propriedades sejam universais, pois um componente particular deve entrar na composição das substâncias.

Em primeiro lugar, segundo os defensores do substrato, uma teoria de feixes falha em explicar como as propriedades que alegam constituir e individuar os objetos particulares se agregam para formar um objeto particular. Em geral, os teóricos dos feixes recorrem a uma relação de “co-presença”, ou “co-locação”, segundo a qual as propriedades relevantes que garantem a individualidade de um indivíduo (e que literalmente compõe o indivíduo) estariam todas juntas, como que atadas umas às outras, por estarem relacionadas por esta misteriosa relação de co-presença. No entanto, a co-presença não deve ser entendida como mais uma relação constituindo os objetos particulares, ela é uma relação de segunda ordem que apenas relaciona as propriedades que dão individualidade aos particulares, mas não é mais um ingrediente compondo os particulares, pois neste caso o problema de especificar o que mantém as propriedades componentes do indivíduo unidas retornaria. Como devemos entender esta relação? Em geral, tudo o que os teóricos dos feixes nos dizem sobre ela é que garante que as propriedades estão co-presentes em um determinado ponto, mas não esclarecem exatamente o que é esta relação. Alguns argumentam que ela deve ser entendida como não-analisável, tomada como primitiva. No entanto, se estamos dispostos em assumir algo como não-analisável e aceitar algo como primitivo, então aparentemente não há motivo para que não se assuma que a própria individualidade seja primitiva, pois assim se evita falar em propriedades e PII, e todas as dificuldades que são acarretadas por estes conceitos (ver van Cleve (CLEVE, 1998) para outras críticas neste sentido).

A dificuldade em esclarecer em que exatamente consiste a relação de co-presença utilizada nas teorias de feixes está na raiz de um equívoco cometido por estes filósofos, segundo os defensores da teoria do substrato. A grande dificuldade aqui está em que se confundiu um objeto com a soma de suas propriedades, e então, ficou-se sem saber como explicar exatamente como obtemos o objeto a partir de suas propriedades. Para superar esta dificuldade, devemos perceber que deve haver algo que porta ou possui as propriedades, propriedades não existem simplesmente instanciadas no vácuo, deve haver um portador de propriedades. Este portador, segundo os teóricos do substrato, é o substrato, uma entidade particular diferente das propriedades à qual as propriedades serão inerentes.

Com isto, a primeira tarefa realizada pelo substrato é a de ser o portador das propriedades, e com isto, uma das dificuldades da teoria dos feixes estaria superada, qual seja, a de explicar como os universais que caracterizam o indivíduo permanecem juntos. O segundo papel desempenhado por ele, e que mais nos interessa aqui, no entanto, é o de ser o individuador do objeto particular do qual ele é o substrato. Como vimos, se os contra-exemplos ao PII apresentados anteriormente tem sucesso em mostrar que não temos nenhuma garantia de que objetos qualitativamente indistinguíveis serão numericamente idênticos, a teoria dos feixes falha em garantir a individualidade através das propriedades dos objetos apenas. Assim, devemos explicar como é possível que, pelo menos em princípio, objetos qualitativamente indiscerníveis sejam numericamente distintos. Alguns filósofos tomam esta situação como o principal aspecto do problema da individuação mesmo, ou seja, explicar como, mesmo havendo indiscernibilidade qualitativa, podemos ter diferença numérica (*vide* Moreland (MORELAND, 1998), Allaire (ALAIRE, 1965)). É aqui que, segundo eles, entra o substrato. Cada indivíduo possui, além de suas propriedades, um substrato que lhe é único, e que garante que, mesmo havendo casos em que dois objetos possuam todas as propriedades em comum, ainda assim teremos dois objetos, pois seus substratos é que dão conta de sua diversidade numérica.

Assim, a teoria do substrato barra a implicação feita pelo PII, segundo a qual a indiscernibilidade qualitativa implica identidade numérica. Podemos reconhecer que as propriedades nos permitem distinguir objetos, quando estes são distinguíveis, mas o fardo ontológico de individuar é realizado pelo substrato. Esta característica da teoria do substrato está de acordo com uma intuição fundamental acerca do problema da individualidade: distinguibilidade envolve sempre pelo menos dois objetos, mas individualidade envolve apenas o objeto em questão, trata-se de uma relação dele consigo mesmo. Sempre podemos, como enfatizamos anteriormente, imaginar um mundo que contenha apenas o objeto em questão, e, mesmo que ele não seja distinguível de nenhum outro objeto (pois não há nada mais para ser distinguido dele), ainda assim ele será um indivíduo. Ainda, esta distinção parece colocar (corretamente) a ênfase da distinguibilidade sobre seu aspecto epistemológico: distinguimos objetos, separamos objetos como qualitativamente distintos, a partir da sua diferença qualitativa; no entanto, a individualidade, por ser garantida por um substrato inacessível epistemologicamente, está acima de nossa capacidade de individuar no sentido epistêmico.

Mas o que podemos dizer sobre o substrato, além de dizermos que é ele o responsável pela individuação e o portador das proprieda-

des? Caracterizar em que consiste exatamente um substrato tem se mostrado uma das tarefas mais complicadas para os defensores deste tipo de teoria, e é justamente neste ponto que os ataques dos opositores se concentram. Em primeiro lugar, podemos chamar a atenção para a estranheza do fato de que eles são os portadores das propriedades, mas não podem eles mesmos ter propriedades, não podem ser caracterizados por propriedades. Este último ponto, é claro, serve para evitar um regresso: se os substratos possuem propriedades, então dois ou mais substratos poderiam coincidir em todas as suas propriedades, e neste caso, seria necessário postular um substrato para individualizar os substratos. Neste caso, certamente poderíamos retomar a argumentação e perguntar se os substratos dos substratos possuem ou não propriedades, e entrar em um regresso que não termina mais. Assim, apesar de estranho, parece crucial que os substratos não tenham propriedades.

Este aspecto da teoria do substrato, no entanto, tem sido atacado por muitos filósofos (ver Moreland (MORELAND, 1998), Loux (LOUX, 1998)). O ponto é que se pode contestar que algo possa não ter nenhuma propriedade. Notemos que aparentemente, existem certas propriedades que podem ser predicadas de tudo necessariamente, como por exemplo, “ser colorido se verde”, ou “ser um número primo ou não ser um número primo”. Ainda, se nos restringirmos às explicações dos próprios teóricos do substrato, podemos afirmar que possuem propriedades elementares, como por exemplo, “não ter propriedades”, “ser particular”, “ser o individuador de um objeto particular”. Assim, é difícil sustentar ao pé da letra que os substratos não possuem propriedades, mesmo que sejam propriedades estranhas como as mencionadas aqui. Além disso, é difícil de fazer sentido da teoria do substrato se ele não tiver as propriedades de ser aquilo que confere a individualidade a um objeto particular, de ser particular, entre outras afirmações que desejamos fazer com sentido do substrato.

Para dificultar ainda mais a situação, uma segunda dificuldade é apontada. Segundo os defensores da teoria, devemos distinguir dois sentidos de “ter uma propriedade”: ter propriedades e ser o portador das propriedades. No entanto, parece difícil de se distinguir claramente o duplo sentido que “ter uma propriedade” precisa ter aqui: como podemos explicar que o substrato não tem propriedades, mas ao mesmo tempo é ele o portador das propriedades do objeto do qual ele é o substrato? Podemos dar sentido para a afirmação de que o substrato instancia o vermelho, mas não é vermelho? Pelo primeiro sentido de ter propriedades, devemos lembrar, teremos que o substrato não é um objeto, pois não tem propriedades, e não sendo um objeto, não está

claro que possa ser tampouco um indivíduo. Neste caso, como ele confere individualidade aos objetos? Se, por outro lado, for um indivíduo, o que individua o substrato? Como argumentamos anteriormente, não podem ser as suas propriedades, pois ele supostamente não as tem. Qualquer coisa que faça este papel de individuar o substrato, deve poder individuar diretamente o objeto do qual ele é o substrato, e assim, podemos dispensar o substrato. Alguns argumentam que o substrato se auto-individa, mesmo não sendo um objeto, ou seja, sua individualidade é primitiva. Neste caso, recaímos no problema de que postular um substrato parece supérfluo, pois poderíamos obter uma economia ontológica aceitando que os indivíduos se auto-individuam, sem a necessidade de substratos misteriosos.

A impressão geral de grande parte dos opositores dos substratos é a de que o substrato é apenas um mecanismo para resolver as dificuldades da individuação nas quais nos enredamos em uma teoria de feixes. Poderíamos resolver mais proveitosamente os problemas para os quais os substratos foram designados recorrendo a uma individualidade primitiva, não explicada por nada. Esta proposta estaria mais de acordo com uma filosofia de orientação empirista, para quem fundamentar a individualidade em algo mais geral pode soar metafísico demais. De fato, grande parte do programa da teoria do substrato na metade do século 20 consistiu em tornar a teoria compatível com as restrições de uma filosofia empirista, ou mostrar que estas condições não se aplicam a uma teoria do substrato. Isso se deve provavelmente à influência ainda muito em voga na época do empirismo lógico, que nutria fortíssimos sentimentos anti-metafísicos. No entanto, como estamos engajados em discussões metafísicas, buscando um princípio de individuação, talvez seja mais interessante argumentar que os princípios empiristas é que são restritos demais, mas esta linha de defesa não tem sido comumente perseguida (ver Loux (LOUX, 1998); Hawley (HAWLEY, 2009) identifica, do mesmo modo, um desejo não justificado de se defender o PII com bases em alegações de que este é um princípio **compatível** com o empirismo).

Podemos formular a objeção empirista brevemente da seguinte forma: se não temos acesso nenhum aos substratos, como podemos saber que realmente existem, e não que são uma invenção sem sentido? Allaire, um dos proponentes da teoria do substrato no século 20, em seu (ALAIRE, 1963) tenta contornar esta objeção argumentando que temos acesso aos substratos em situações em que estamos diante de objetos indiscerníveis: sabemos que há dois objetos indiscerníveis, e nosso conhecimento deste fato, de que há mais de um, nos dá conhecimento

dos substratos por familiaridade. É a diferença numérica subjazendo a identidade qualitativa que nos garante conhecimento do substrato. Notemos, no entanto, que este argumento faz muito pouco para nos esclarecer em que consistem exatamente os substratos, e não é claro que seja realmente uma resposta convincente, nem mesmo para aqueles que não adotam um ponto de vista estritamente empirista. Como podemos garantir que, estando diante de objetos que, mesmo sendo numericamente distintos são qualitativamente indistinguíveis, estamos diante de substratos, ou melhor, de particulares que fazem o papel de individuadores? O que nos garante que não são propriedades, mesmo que propriedades de um tipo muito especial, que se manifestam apenas quando estamos diante de pelo menos dois itens que podem ser contrastados, que nos garantem a diferença numérica? A princípio, apenas a presença de objetos numericamente distintos mas qualitativamente indiscerníveis não garante que aquilo que faz a diferença numérica seja um particular, e não um universal, e assim, este argumento não parece uma boa defesa para uma teoria do substrato (para esta e outras críticas, ver Chappell (CHAPPEL, 1964)).

Diante de tantas dificuldades, há algum modo de sustentarmos que a individuação é feita por algo próprio de cada indivíduo, como no caso do substrato, mas que não nos envolva com tantos problemas? Uma alternativa semelhante às teorias de substrato tem sido defendida durante o século 20, relacionada de certo modo com a proposta dos teóricos do substrato mas sem postular uma entidade particular como estes fazem. Trata-se do *haecceitismo*, que postula a existência de uma *haecceity*, ou *thisness primitiva*, ou ainda de uma *essência individual*. Segundo esta abordagem, a individuação também é feita por algo próprio a cada indivíduo, sua essência individual, mas esta não é um substrato, mas sim um universal, a propriedade de ser idêntico àquele indivíduo em questão (ver Adams (ADAMS, 1979), segundo o qual esta doutrina remonta pelo menos à Duns Scotus).

Assim, para cada indivíduo **A**, sua essência individual é a propriedade de ser “idêntico a **A**”. Certamente, esta é uma propriedade que não pode ser partilhada com nenhum outro indivíduo, pode ser possuída apenas por **A**. Além disso, pelo fato de poder ser instanciada apenas por **A**, está é uma propriedade dita *não-qualitativa*. Qualidades, como “ser redondo” ou “ser vermelho” podem ser instanciadas por diversos objetos, mas essências individuais não podem. Assim, estas últimas devem ser não-qualitativas. Para tornar este ponto mais claro, podemos colocar este ponto fazendo uso da linguagem de mundos possíveis: em diferentes mundos possíveis, a mesma essência individual pode subjazer

em situações extremamente distintas, e em mundos distintos, essências distintas podem subjazer a situações extremamente semelhantes. Assim, aquilo que é representado qualitativamente pelos mundos muda conforme as essências individuais mudam.

Essências individuais também são empregadas para dar conta da individualidade dos objetos em contextos em que alegadamente o PII falha. No caso das esferas de Black, por exemplo, apesar de serem qualitativamente indiscerníveis, as esferas possuem cada uma a sua própria essência individual, que dá conta do fato de que cada esfera é um indivíduo e de que temos duas esferas. O que diferencia as esferas é a essência não-qualitativa. Assim, por exemplo, se trocarmos as posições das esferas, apesar de não termos nenhuma diferença qualitativa, teremos situações diferentes, ou se preferirmos colocar deste modo, remetendo ao uso da linguagem de mundos possíveis feita no parágrafo anterior, teremos dois mundos possíveis distintos, mas qualitativamente indiscerníveis (essências distintas podem subjazer a situações extremamente semelhantes).

A primeira preocupação que podemos ter com relação à doutrina haecceísta diz respeito a uma aparente circularidade no próprio enunciado das haecceities: para qualquer indivíduo  $A$ , a essência individual de  $A$  é a propriedade dada por “ser idêntico a  $A$ ”. Ao enunciar este predicado, pressupomos já o indivíduo  $A$ , que deve ser individuado antes mesmo que sua essência esteja disponível. Para contornar esta dificuldade, podemos argumentar que esta é apenas uma maneira utilizada para denotar a essência individual, mas que idealmente deve haver alguma outra fórmula que faça este mesmo papel sem pressupor o indivíduo em questão; ou, podemos também argumentar que, por ser um universal, a haecceity de cada indivíduo não se deixa captar adequadamente por nenhuma linguagem que possamos apreender, de modo que devemos falar dela em nossa língua de modo improvisado e inexacto.

No entanto, assim como no caso dos substratos, as essências individuais foram acusadas de serem meras criações metafísicas utilizadas com o propósito de resolver o problema da individuação. De modo semelhante ao que ocorre com os substratos, as essências são não-qualitativas e não partilháveis, no sentido de não poderem ser tidas por mais de um objeto. Essências também não são objetos particulares, por serem universais, e não desempenham nenhum papel metafísico a não ser o de individuar objetos particulares. Assim, parece mais um acréscimo misterioso a nossa metafísica do que uma contribuição legítima que nos auxilie em compreender o problema da individuação, e

se os substratos são entidades suspeitas, as essências o são tanto quanto.