

MARCELO GAUDENZI DE FARIA

**CONTROLE DE INCLINAÇÃO BASEADO EM ESTERÇO PARA
VEÍCULO DE TRÊS RODAS DE CÂMBIO VARIÁVEL**

FLORIANÓPOLIS

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

**CONTROLE DE INCLINAÇÃO BASEADO EM ESTERÇO PARA
VEÍCULO DE TRÊS RODAS DE CANGAGEM VARIÁVEL**

Dissertação submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

MARCELO GAUDENZI DE FARIA

Florianópolis, Agosto de 2010

CONTROLE DE INCLINAÇÃO BASEADO EM ESTERÇO PARA VEÍCULO DE TRÊS RODAS DE CAMBAGEM VARIÁVEL

Marcelo Gaudenzi de Faria

'Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas, Área de Concentração em Controle, Automação e Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.'

Prof. Nestor Roqueiro, Dr. Eng.
Orientador

Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr. Eng.
Co-Orientador

Prof. José Eduardo Ribeiro Cury, Dr. Eng.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

Prof. Nestor Roqueiro, Dr. Eng.
Presidente

Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr. Eng.

Prof. Daniel Juan Pagano, Dr. Eng.

Prof. Julio Elias Normey Rico, Dr. Eng.

Prof. Rodrigo de Souza Vieira, Dr. Eng.

Agradecimentos

Eu não gostaria de ser injusto e deixar de mencionar alguém. Infelizmente, este espaço é muito pequeno para expressar toda a minha gratidão, e eu sei que vocês entenderão.

Gostaria de agradecer especialmente meu orientador, Professor Nestor Roqueiro, pela sua paciência inesgotável e sua ajuda, estando presente mesmo quando estava longe e a diferença de horários causava desencontros. Fico feliz em afirmar que levarei alguns de seus conselhos para a vida fora do meio acadêmico.

Agradeço também ao meu co-orientador, Professor Alexandre Trofino, por sua ajuda no projeto e por sempre me receber prontamente para conversar e tirar dúvidas a qualquer momento.

Também gostaria de agradecer ao Professor Enric Fossas, da Universitat Politècnica de Catalunya, que apesar da distância aceitou contribuir como participante convidado da banca de defesa de mestrado por meio de áudio e vídeo.

Não poderia deixar de mencionar os professores e funcionários do DAS, alguns conhecidos a quase oito anos quando comecei a graduação neste departamento, outros mais novos, mas todos sempre com algo a ensinar.

Eu também não poderia deixar de agradecer a todos meus amigos, antigos e novos que eu encontrei ao longo do curso. César, Francisco "Beto", Marcelo, Nardênio, Rodrigo Lange, Sigmar, Tanísia, Thiago, Vanessa e todos os colegas que compartilharam estes últimos dois anos difíceis, sempre com bom humor e encorajamento. Aos professores e colaboradores do Laboratório de inovação, colegas de trabalho e incentivadores deste trabalho, muito obrigado.

Não poderia esquecer os amigos de fora do meio acadêmico, mas que acompanharam de perto o trabalho: Babs, Carol, Denis, Jader, João Gabriel, Makko, Mari, Mila, Nanda Miranda, Nanda Parisi, Suzuki, Tina, Tony... A lista continua, mas como eu avisei, ela é muito grande para mencionar todos. A vocês, toda a minha gratidão.

Finalmente, eu gostaria de agradecer a toda a minha família, que me apoiou durante toda a minha vida. Sem vocês, nada disso seria possível.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

CONTROLE DE INCLINAÇÃO BASEADO EM ESTERÇO PARA VEÍCULO DE TRÊS RODAS DE CANGAGEM VARIÁVEL

Marcelo Gaudenzi de Faria

Agosto/2010

Orientador: Prof. Nestor Roqueiro, Dr. Ing.

Co-Orientador: Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr. Ing.

Área de Concentração: Controle, Automação e Sistemas.

Palavras-chave: Controle veicular, Triciclos inclináveis, Controle clássico, Controle não-linear.

Número de Páginas: 123

Frente aos problemas de trânsito existentes atualmente, algumas soluções estão sendo estudadas. Este documento descreve um veículo estreito de três rodas de cangagem variável, que visa a melhor utilização do espaço das vias existentes. O documento inclui um modelo dinâmico do triciclo com 9 graus de liberdade e o projeto de três controladores de inclinação: PID com compensação estática da não-linearidade, controle via *energy shaping* e controle por realimentação linearizante. Ao final, são apresentados os resultados de simulação computacional para cada controlador considerando variação de parâmetros do modelo e perturbações.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Automation and Systems Engineering.

TILTING CONTROL OF A VARIABLE CHAMBER'S THREE-WHELLED VEHICLE BY STEERING

Marcelo Gaudenzi de Faria

August/2010

Advisor: Prof. Nestor Roqueiro, Dr. Ing.

Co-Advisor: Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr. Ing.

Area of Concentration: Control, Automation and Systems.

Keywords: Vehicle control, Tilting tricycles, Classical control, Non-linear control.

Page count: 123

In face the present traffic problems, some solutions were studied. This document describes a narrow tilting tricycle, that aims for a better use of the existing roads. The document includes a dynamic model with 9 degrees of freedom for the tricycle and the design of three tilting controllers: a PID with static nonlinear compensation controller, an energy shaping controller and a feedback linearization controller. At the end, simulation results for each controller are shown, taking in account model's parameter uncertainty and system's disturbance.

Sumário

1	Introdução	1
2	Motivação	3
2.1	O desafio do transporte pessoal	3
2.2	Alternativas para o transporte pessoal	4
2.2.1	Acidentologia relevante	5
2.3	Triciclos inclináveis	6
2.4	Evolução dos veículos de três rodas inclináveis	6
2.5	Objetivos do Trabalho	8
2.5.1	Geometria do Veículo - A Pirâmide de Estabilidade	8
2.5.2	O efeito da cambagem	10
2.5.3	O desafio de Estabilidade	11
3	Fundamentação Teórica	13
3.1	Controle não-linear por realimentação linearizante entrada-saída	13
3.1.1	Realimentação linearizante	13
3.1.2	Realimentação linearizante entrada-saída	15
3.1.3	Seguimento de trajetória	16
3.2	Controle não-linear via <i>Energy Shaping</i>	17
3.2.1	Passividade	18
3.3	Conclusões	22
4	Modelagem dos sistemas	23

4.1	O veículo de três rodas de cambagem variável	23
4.1.1	Formulação das Velocidades	25
4.1.2	Energia cinética	27
4.1.3	Energia Potencial	28
4.1.4	Dissipação de energia	30
4.1.5	Forças Externas	31
4.1.6	Equações de Lagrange em forma matricial	38
4.2	Modelo simplificado de uma bicicleta	41
4.3	Semelhanças entre bicicleta e triciclo	44
4.4	Conclusões	46
5	Desenvolvimento	47
5.1	Controlador de velocidade	47
5.2	Geração de referência	48
5.3	PID com compensação estática da não-linearidade	50
5.4	Controle por realimentação linearizante entrada-saída	57
5.5	Controle por <i>Energy Shaping</i>	61
5.5.1	Controlador Proporcional-Derivativo baseado em passividade	61
5.6	Conclusões	64
6	Simulação e Resultados	65
6.1	Análise de estabilidade e robustez utilizando software AUTO	65
6.1.1	Análise dos controladores	65
6.2	Comparação entre os controladores propostos	67
6.2.1	Caso nominal, sem perturbação	70
6.2.2	Caso não-nominal, sem perturbação	83

6.2.3	Caso não-nominal, com perturbação	90
6.3	Conclusões	106
7	Conclusões e Perspectivas	109
A	Apêndice - Algoritmo computacional	113

Lista de Figuras

1	Comparação do espaço utilizado por diferentes veículos para o transporte do mesmo número de pessoas. Fonte: Hanson (n.d.).	4
2	Efeito da cambagem em um pneu de automóvel. Retirado de Reimpell et al. (2001).	10
3	Exemplo de uma função de energia potencial de um sistema, com equilíbrios em 0 e $\pm\pi$	18
4	Exemplo de função de energia desejada com um ponto de equilíbrio localizado em 0	18
5	Interconexão de sistemas em paralelo e realimentada.	21
6	Modelo tridimensional do veículo, juntamente com o sistema de coordenadas.	24
7	Definição de velocidades para o corpo 1.	25
8	Definição de velocidades para o corpo 2	26
9	Geometria dos corpos 3 e 4 no veículo.	27
10	Relação entre a deformação das molas e o ângulo de arfagem θ . Retirado de Roqueiro et al. (2010).	28
11	Ângulos das rodas frontais.	33
12	Fórmula mágica de Pacejka, associando o ângulo de escorregamento com a carga lateral (Fonte: Pacejka (2006))	33
13	Força atuantes no momento em Z (guinada).	35
14	Força atuantes no triciclo que geram a rotação no eixo X (rolamento). . .	36
15	Definição geométrica de uma bicicleta simplificada.	41
16	Comparação de inclinação entre modelos para velocidade constante. . .	45
17	Comparação de inclinação entre modelos, sem controle de velocidade. .	45

18	Evolução dos polos e zeros dos sistemas linearizados em função da velocidade.	52
19	Detalhe da evolução dos polos e zeros dos sistemas linearizados em função da velocidade.	52
20	Evolução do ganho dos sistemas linearizados em função da velocidade. .	53
21	Diagrama de polos e zeros utilizando o controlador $C(s)$ e o filtro $F(s)$ propostos.	54
22	Detalhe do diagrama de polos e zeros utilizando o controlador $C(s)$ e o filtro $F(s)$ propostos.	55
23	Estrutura do controlador PID com compensação estática da não-linearidade proposto.	56
24	Diagrama de blocos mostrando controlador por realimentação linearizante e subsistema do triciclo.	58
25	Estrutura do sistema linearizado e controlador proposto por realimentação de estados e rastreamento de referência com integrador.	59
26	Diagrama de estabilidade dos pontos de equilíbrio para o caso nominal utilizando controlador PID aplicado ao modelo da bicicleta.	67
27	Esterço de referência desejado pelo motorista utilizado para as simulações. 68	
28	Velocidade de referência desejada pelo motorista utilizadas para as simulações.	69
29	Comparação entre a velocidade desejada pelo motorista e a velocidade de referência calculada pelo gerador de trajetórias, para o caso nominal sem perturbações.	71
30	Velocidade longitudinal do veículo e velocidade de referência calculada pelo gerador de trajetória.	71
31	Resultado de simulação para a inclinação do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.	72

32	Resultado de simulação para a esterço do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.	73
33	Detalhamento da simulação entre 0 e 30 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.	73
34	Detalhamento da simulação entre 0 e 30 segundos para o esterço do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação. . .	74
35	Detalhamento do resultado de simulação entre 95 e 140 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.	75
36	Detalhamento da simulação entre 95 e 140 segundos para o esterço do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.	75
37	Resultado de simulação para a inclinação do veículo utilizando controlador por <i>energy shaping</i> para o caso nominal sem perturbação.	76
38	Resultado de simulação para a esterço do veículo utilizando controlador por <i>energy shaping</i> para o caso nominal sem perturbação.	76
39	Detalhamento do resultado de simulação entre 0 e 30 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador <i>energy shaping</i> para o caso nominal sem perturbação.	77
40	Resultado de simulação para a esterço do veículo entre 0 e 30 segundos utilizando controlador por <i>energy shaping</i> para o caso nominal sem perturbação.	78
41	Detalhamento do resultado de simulação entre 95 e 140 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador <i>energy shaping</i> para o caso nominal sem perturbação.	78
42	Resultado de simulação para a esterço do veículo entre 95 e 140 segundos utilizando controlador por <i>energy shaping</i> para o caso nominal sem perturbação.	79

43	Resultado de simulação para a inclinação do veículo utilizando controlador por realimentação linearizante para o caso nominal sem perturbação.	79
44	Resultado de simulação para esterço utilizando controlador por realimentação linearizante para o caso nominal sem perturbação.	80
45	Detalhamento da simulação entre 0 e 30 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador por Realimentação Linearizante para o caso nominal sem perturbação.	81
46	Detalhamento de simulação entre 0 e 30 segundos para esterço utilizando controlador por realimentação linearizante para o caso nominal sem perturbação.	81
47	Detalhamento da simulação entre 95 e 140 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador por Realimentação Linearizante para o caso nominal sem perturbação.	82
48	Detalhamento de simulação entre 95 e 140 segundos para esterço utilizando controlador por realimentação linearizante para o caso nominal sem perturbação.	82
49	Comparação entre o erro de seguimento de referência para os diferentes controladores, entre 0 e 30 segundos.	83
50	Comparação entre o erro de seguimento de referência para os diferentes controladores, entre 48 e 70 segundos.	84
51	Velocidade longitudinal do veículo e velocidade de referência calculada pelo gerador de trajetória - casos não nominais.	85
52	Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação da inclinação do veículo, comparando os valores de ϕ para diferentes parâmetros do sistema utilizando o controlador PID.	86
53	Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação do esterço do veículo, comparando os valores de δ para diferentes parâmetros utilizando o controlador PID.	86

54	Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação da inclinação do veículo, comparando os valores de ϕ para diferentes parâmetros do sistema utilizando o controlador por <i>energy shaping</i>	87
55	Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação do esterço do veículo, comparando os valores de δ para diferentes parâmetros utilizando o controlador <i>energy shaping</i>	88
56	Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação da inclinação do veículo, comparando os valores de ϕ para diferentes parâmetros do sistema utilizando o controlador por realimentação linearizante.	88
57	Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação da esterço do veículo, comparando os valores de δ para diferentes parâmetros do sistema utilizando o controlador por realimentação linearizante.	89
58	Velocidade do vento aplicada.	90
59	Inclinação do veículo sob ação de ventos laterais para diferentes parâmetros do sistema, com controlador PID.	91
60	Inclinação do veículo sob ação de ventos laterais para diferentes parâmetros do sistema, com controlador <i>energy shaping</i>	92
61	Inclinação do veículo sob ação de ventos laterais para diferentes parâmetros do sistema, com controlador por realimentação linearizante.	93
62	Força aplicada pelo solo na direção Z em cada uma das rodas do veículo.	94
63	Influência de perturbações no solo no ângulo de inclinação do veículo com controlador PID.	95
64	Influência de perturbações no solo no ângulo de inclinação do veículo com controlador <i>energy shaping</i>	95
65	Influência de perturbações no solo no ângulo de inclinação do veículo com controlador por realimentação linearizante.	96
66	Inclinação do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador PID.	97

67	Esterço do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador PID.	97
68	Inclinação do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador <i>energy shaping</i>	98
69	Esterço do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador <i>energy shaping</i>	98
70	Inclinação do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador por realimentação linearizante.	99
71	Esterço do veículo com parâmetros nominais, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador por realimentação linearizante.	99
72	Comparação do erro de inclinação entre os controladores para o caso nominal com perturbações, entre 0 e 30 segundos de simulação.	100
73	Comparação do erro de inclinação entre os controladores para o caso nominal com perturbações, entre 48 e 70 segundos de simulação.	101
74	Comparação da inclinação do veículo utilizando controlador PID considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.	102
75	Comparação da ação de controle do controlador PID considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.	102
76	Comparação da inclinação do veículo utilizando controlador <i>energy shaping</i> considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.	103
77	Comparação da ação de controle do controlador <i>energy shaping</i> considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.	103
78	Comparação da inclinação do veículo utilizando controlador por realimentação linearizante considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.	104

79	Comparação da ação de controle do controlador por realimentação linearizante considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.	105
80	Variação dos estados referentes às posições do veículo para controlador por realimentação linearizante.	106
81	Variação dos estados referentes às velocidades do veículo para controlador por realimentação linearizante.	107

Lista de Tabelas

1	<i>Funções de Transferência (FT's) obtidas através da linearização do modelo dinâmico do triciclo com 9 graus de liberdade, para diferentes velocidades.</i>	51
2	<i>Ganho do controlador $K_c(v_i)$ calculado para que os pólos do sistema permaneçam nos locais designados.</i>	55
3	<i>Valores nominais, máximos e mínimos considerados para as simulações de robustez utilizando o software AUTO.</i>	66
4	<i>Ângulos de curvatura para uma pista com superelevação de 4%, para um veículo com distância entre-eixos de 2,2m.</i>	69
5	<i>Erro Quadrático médio dos controladores para diferentes parâmetros, para perturbações do tipo vento lateral.</i>	93

Lista de Símbolos

e - erro do sinal

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - funções não-lineares dos vetor de estados x

q - vetor de estados do sistema

q^* - vetor de referência para os estados do sistema

r - sinal de referência do sistema

x - estados do sistema, posição do veículo ao longo do eixo X

y - sinal de saída do sistema, posição do veículo ao longo do eixo Y

z - estados do sistema transformado pela relação $z = T(x)$

z_i - deslocamento do i -ésimo corpo ao longo do eixo Z

u - sinal de controle do sistema, velocidade linear do veículo

u_r - referência de velocidade linear dada pelo motorista

u_d - referência velocidade linear de referência calculada pelo gerador de trajetória

v - sinal de controle do sistema linearizado, velocidade lateral do veículo

w - velocidade vertical do veículo

ψ - rotação do veículo em torno do eixo Z (guinada)

ϕ - rotação do veículo em torno do eixo X (rolagem)

ϕ_d - ângulo de rotação ideal para o veículo, que anula as forças laterais atuando sobre ele

θ - rotação do corpo 2 em torno de um eixo paralelo ao eixo Y (arfagem)

α - rotação do veículo em torno do eixo Y, representando aclives na pista

δ - ângulo de esterço das rodas.

δ_r - ângulo de esterço de referência aplicado pelo motorista

δ_f, δ_t - deslocamento das molas frontais e traseiras, respectivamente

ρ - grau relativo do sistema

ξ - Estados linearizáveis do sistema

η - estados não-linearizáveis do sistema

η_T - eficiência da transmissão

\mathcal{H} - função de armazenamento

\mathcal{T} - energia cinética

\mathcal{V} - energia potencial

\mathcal{F} - função de dissipação

Σ - denota um sistema na forma de variáveis de estado

F_x, F_y, F_z - Forças externas atuando nas direções x, y e z

M_ψ, M_ϕ, M_θ - Momentos externos atuando para rotações em ψ, ϕ e θ

$L_A B$ - Derivada de Lie de B em relação a A , com B e A funções diferenciáveis

1. Introdução

Este trabalho é o resultado das atividades de pesquisa desenvolvidas entre Setembro de 2008 e Julho de 2010 pelo engenheiro Marcelo Gaudenzi de Faria na área de controle no departamento de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina. Ele tem como intuito realizar o controle de inclinação de um veículo de três rodas através do esterço, visando torná-lo estável e seguro para aplicações de transporte urbano.

A saturação das vias de transporte das cidades é um fato bastante conhecido para quem mora em grandes centros urbanos. Engarrafamentos e lentidão no trânsito são cada vez mais comuns. Um dos fatores apontados como causador deste problema é o baixo número de passageiros por veículo. Veículos menores, seguros e eficientes são um desafio, e este trabalho busca dar uma pequena contribuição para este campo.

O capítulo 2 descreve a motivação deste trabalho. Apresenta o problema do transporte encontrado hoje em grandes cidades, e as limitações das alternativas existentes. O triciclo urbano é apresentado como uma alternativa viável para ajudar a resolver a questão. Um breve histórico deste tipo de veículo é apresentado, assim como os desafios para construção de um triciclo eficiente e seguro. Uma pesquisa foi realizada buscando informações sobre a tecnologia existente nesta área e os resultados são apresentados neste capítulo de forma resumida. Por fim, o objetivo do trabalho é definido.

O capítulo 3 é reservado para a fundamentação teórica que será utilizada neste trabalho, mais especificamente a teoria de controle aplicada para síntese do controlador não-linear por realimentação linearizante entrada-saída e do controlador não-linear via *Energy shaping*. Os pontos principais de cada técnica são mostrados, assim como algumas propriedades dos sistemas que devem ser atendidas.

O modelo matemático do triciclo é descrito no capítulo 4. A partir de equações de movimento de cada um dos corpos que forma o veículo, equações de energia cinética, potencial e de dissipação são formuladas, e as matrizes de dinâmica do sistema são obtidas. O vetor de forças externas atuando sobre o veículo é detalhado. Também

é descrito o modelo de uma bicicleta simplificada, que será utilizado para realizar algumas análises do comportamento dos controladores. Para isto, um paralelo entre os dois modelos é traçado, mostrando suas semelhanças e a possibilidade de realizar a comparação.

O capítulo 5 detalha os passos utilizados para a síntese dos controladores apresentados neste trabalho. O controlador PID com compensação estática da não-linearidade é calculado a partir de modelos linearizados do sistema em torno de um ponto de equilíbrio. O controlador por realimentação linearizante entrada-saída e o controlador por *energy shaping* são baseados na teoria de controle descrita no Capítulo 3.

O Capítulo 6 mostra o resultado de simulações aplicando-se os controladores propostos ao modelo do triciclo em diversas situações. As simulações são divididas em três conjuntos: simulações com parâmetros nominais, com parâmetros não-nominais e com parâmetros não-nominais e perturbações. Elas buscam verificar se os controladores são capazes de agir de forma satisfatória à diferentes situações. Os gráficos dos resultados são apresentados e comentados neste capítulo.

Por fim, o Capítulo 7 resume os resultados deste trabalho, apresentando as conclusões da pesquisa e propondo extensões e modificações futuras para a continuidade do estudo.

2. Motivação

Este capítulo apresenta os motivos que levaram ao desenvolvimento de um veículo de três rodas com cambagem variável, um pouco da história deste tipo de veículo, as características que o diferenciam dos demais automotores convencionais (motos e carros), e introduz o problema relativo a estabilidade dos triciclos, que será o foco deste trabalho.

2.1: O desafio do transporte pessoal

Em grandes centros urbanos de todo o mundo, a questão do transporte vem se tornando cada vez mais importante. Estudos do Instituto de Transporte do Texas (TTI) (TTI 2010), realizados no ano de 2009 nos Estados Unidos, mostram que as estradas não conseguem suportar o número de carros existente, e a ampliação destas não é capaz de acompanhar o aumento do número de veículos. No Brasil, entre os anos de 1999 e 2008, o número de veículos aumentou de 27 para 55 milhões, dos quais 17 milhões se encontram no estado de São Paulo (SET/SP 2009). No estado de Santa Catarina, o número de veículos subiu de 1,9 milhões em 2003 para 3,1 milhões em 2010 (*Detran Santa Catarina - Estatísticas n.d.*). Em cidades turísticas, como é o caso de Florianópolis, o problema se agrava durante determinadas épocas do ano dificultando ainda mais o trânsito.

O TTI estima que em 2003 apenas os norte americanos desperdiçaram 8,7 bilhões de litros de combustível a mais de 3 bilhões de horas de trabalho devido a congestionamentos. Uma das fontes do problema encontra-se na forma de utilização dos veículos pessoais. Nos Estados Unidos, a média de ocupação de um veículo é de 1,58 passageiros por veículo (Kockelman & Zhao 2000), enquanto em Florianópolis este índice é de 1,52 conforme Soares (2003).

A Figura 1 mostra um comparativo entre o espaço ocupado nas vias por diferentes veículos. A foto, utilizada como propaganda para o Programa de Incentivo ao uso de Bicicletas da cidade de Muenster, na Alemanha, compara o espaço necessário para o

transporte de 72 pessoas, considerando os carros com uma ocupação média de 1,2 pessoas por veículo.

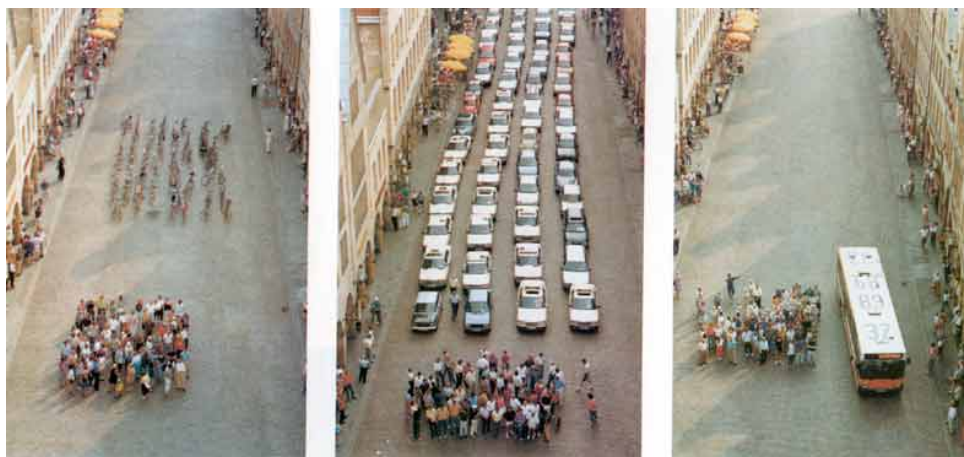


Figura 1: Comparação do espaço utilizado por diferentes veículos para o transporte do mesmo número de pessoas. Fonte: Hanson (n.d.).

A questão do trânsito vem sendo mais discutida devido a crescente preocupação com o ambiente e a qualidade de vida nas cidades. Um ponto importante levantado é que a frota de carros atuais, fonte de grande parte da poluição do ar, ocupa um grande espaço nas vias com uma relação entre carga útil e massa total do veículo muito baixa. Para um veículo médio de 800 kg e dois passageiros com uma carga leve totalizando uma massa aproximada de 200 kg (um índice de ocupação maior do que a média) a relação carga útil/massa total é de apenas 0,2.

2.2: Alternativas para o transporte pessoal

Dentre as soluções apontadas para o transporte pessoal está a utilização de veículos de maior eficiência energética como por exemplo bicicletas e motocicletas.

A bicicleta é uma solução considerada ecologicamente correta, pois não existe a queima de combustíveis fósseis e seus subprodutos. É um veículo de dimensões reduzidas, ocupando pouco espaço nas vias e produzindo pouca poluição sonora. Entre as desvantagens: o reduzido raio de alcance, dificuldades de utilização em áreas com relevo acidentado e a dependência de condições climáticas.

A motocicleta, apesar de possuir um motor, tem uma eficiência energética maior que a dos carros pois é capaz de transportar uma ou duas pessoas consumindo menos combustível. Seu alcance é relativamente alto, facilmente passando da casa das centenas de quilômetros, e o relevo possui pouca influência. Assim como a bicicleta, possui dimensões reduzidas, mas atinge maiores velocidades. Como desvantagens é possível citar a dependência de condições climáticas, a necessidade de conhecimento específico para pilotagem e o perigo de acidentes, pois o impacto é transmitido diretamente para o motorista.

2.2.1: Acidentologia relevante

Algumas pesquisas foram realizadas para verificar o envolvimento de motos em acidentes. Uma das primeiras pesquisas de abrangência na área foi realizada em 1981 para o Departamento de Trânsito dos Estados Unidos. Ela apontou que aproximadamente 20% dos acidentes com motos não envolveram nenhum outro veículo, e desta parcela aproximadamente 60% dos casos foi causado por falha do motorista sem influência de nenhum fator externo. Em acidentes envolvendo outros veículos, 65% das vezes a culpa não é do motorista da moto. Porém, mesmo a baixas velocidades, os acidentes podem causar algum ferimento, principalmente no peito, pernas e braços. Estudos mais recentes (Chapelon & Lagache 2003, *The National Highway Traffic Safety Administration - Motorcycle Safety Program 2003*) serviram para confirmar os resultados do estudo norte-americano, obtendo valores semelhantes.

Em SET/SP (2009), constatou-se que em São Paulo ocorreram 77.614 acidentes automobilístico no ano de 2008, dos quais 14.845 tiveram o envolvimento de motos. Deste número, 12.120 acidentes com vítimas, das quais 553 fatais. O alto número de vítimas (fatais e não fatais) em acidentes com motos ajuda a ilustrar os riscos deste tipo de veículo.

O motorista de motocicletas, por ter que se movimentar em um ambiente com outros veículos de maior porte, está em desvantagem no quesito segurança. Dispositivos como sistemas de controle de estabilidade são disponíveis apenas em um reduzido número de motos, geralmente de alto custo, enquanto sistemas como *air-bags* ainda estão

em desenvolvimento.

2.3: Triciclos inclináveis

Triciclos convencionais são construídos de forma a evitar o seu rolamento (rotação do veículo em torno do eixo X) e não permitem mudanças dinâmicas no ângulo de cambagem, assemelhando-se assim à veículos de quatro rodas. Este tipo de veículo é estável e seu motorista pode dirigir de maneira semelhante a um carro. Porém, pode apresentar comportamentos de risco (tombamento e capotagem) devido a área de base reduzida da sua pirâmide de estabilidade.

Triciclos inclináveis permitem rotações em torno do eixo X, aproveitando-se do ângulo de rolamento da mesma maneira que uma moto o faz ao inclinar para realizar uma curva. O triciclo mostrado neste trabalho produz este ângulo de rolamento através da variação dinâmica do ângulo de cambagem de suas rodas. Entretanto, este veículo passa a ser instável como uma moto, e quaisquer forças que tirem o sistema da posição de equilíbrio vertical fará com que este caia. Assim, a ação constante de controle é necessária para estabilizar o veículo, seja na posição vertical, seja na inclinação que permite anular forças laterais atuantes no veículo de maneira semelhante à motocicletas.

2.4: Evolução dos veículos de três rodas inclináveis

Uma linha histórica do desenvolvimento de triciclos inclináveis pode ser traçada a partir da metade do século XX, quando as primeiras ideias apareceram. Houve um aumento da pesquisa e desenvolvimento na área a partir da metade dos anos 80, estimulada pela necessidade de um veículo econômico e compacto. A seguir são apresentados alguns dos principais modelos.

- Ernst Neumann Tricycle (1945 - 1950) - Um dos primeiros veículos de 3 rodas inclinável foi desenvolvido entre 1945 e 1950: o carro de corrida de Ernst Neumann. Neumann era um conhecido fabricantes de motocicletas na Alemanha, e projetou este veículo de corridas para inclinar de acordo com o movimento do piloto.

- Ariel 3 (1970) - Este veículo de 1 passageiro foi fabricado nos anos 70 pela empresa britânica BSA/Triumph. Possuía duas rodas traseiras fixas e uma roda dianteira inclinável. A inclinação se dava devido ao movimento do motorista.
- Jephcott Tilting Trike (1980) - Desenvolvido em 1980 pelo Dr. Edmund Jephcott, este veículo era similar ao Ariel 3, com algumas modificações. As principais foram a adição de um corpo para proteger o passageiro de chuvas e acidentes, além de modificações no sistema de inclinação, agora acionado por pedais.
- GM Lean Machine (1983) - Este veículo com *cockpit* fechado para uma pessoa é um protótipo desenvolvido pela General Motors. Com mecânica bastante similar ao veículo de Jephcott, apresentava uma diferença: a inclinação por pedais se dava de maneira contrária. Ao pressionar o pedal esquerdo, o veículo inclinava para a direita, buscando criar um movimento mais natural.
- Jephcott Micro (1987) - Evolução do veículo de 1980. O sistema de controle por pedais foi substituído por um controlador hidráulico baseado em um pêndulo, visando a produção em massa. Infelizmente, o mecanismo de inclinação era muito lento, o que comprometia o desempenho do veículo.
- Mercedes F300 LifeJet (1997) - Este protótipo da Mercedes-Benz, projetado em 1997 e com chassi de alumínio, apresenta duas rodas frontais e um complexo sistema eletro-hidráulico localizado na frente do veículo, responsável por sua inclinação automática nas curvas.
- CARVER (1997) - Desenvolvido em 1997, este veículo holandês foi o primeiro a atingir produção em escala. Com um sistema de inclinação hidráulico-mecânico chamado DVC (*Dynamic Vehicle Control*), possui uma roda frontal, um *cockpit* inclinável e uma base traseira não inclinável, onde se encontram os atuadores do sistema DVC. Possui indicadores visuais e sonoros informando ao motorista quando os limites de inclinação e velocidade do veículo estão sendo alcançados.
- BMW CLEVER (2006) - Acrônimo para Compact Low Emission Vehicle for Urban Transport, este protótipo da BMW é bastante semelhante ao CARVER. Com a mesma configuração das rodas e um sistema de atuação hidráulico semelhante,

apresentou algumas falhas de projeto (Berote et al. 2008) que prejudicaram a sua evolução de protótipo para veículo comercial.

- BMW SIMPLE (2009) - Acrônimo para Sustainable and Innovative Mobility Product for Low Energy consumption, o novo projeto da BMW possui um sistema de *powertrain* híbrido com um motor a gasolina de 48 cavalos e um motor elétrico que possibilitam ao modelo alcançar a velocidade máxima de 200 km/h e um consumo de aproximadamente 50 km/l. Seu sistema de inclinação hidráulica único é o diferencial deste veículo.

O desenvolvimento de triciclos, que começou como um conceito esportivo, aos poucos foi se voltando para aplicações urbanas onde seu tamanho é vantajoso. Recentemente está sendo utilizado em carros-conceitos devido ao seu tamanho reduzido, baixo consumo e o conforto que ele proporciona aos passageiros como uma nova opção de transporte urbano para até dois passageiros.

2.5: Objetivos do Trabalho

Nesta subseção são expostas algumas informações relativas a geometria escolhida para o veículo e a formalização do problema de controle.

2.5.1: Geometria do Veículo - A Pirâmide de Estabilidade

Um dos elementos chave para a compreensão do problema é o conceito de Pirâmide de Estabilidade, descrito em Leal et al. (2008).

Pirâmide de Estabilidade é o maior volume gerado pelos pontos de contato de um corpo com o solo, tendo como vértice superior o centro de gravidade.

Um veículo não irá tombar enquanto a direção da força resultante atuante no veículo não interceptar o plano do solo fora dos limites deste volume. Para um veículo de quatro rodas, o volume é dado por uma pirâmide com base igual a bitola dos eixos traseiros e dianteiros do veículo, e o vértice superior localizado na altura do centro de gravidade h . O veículo não irá tombar enquanto a resultante de todas as forças atuantes

(força da gravidade, força centrípeta, força motriz, força de frenagem, força dos ventos, etc.) permanecer contida neste volume. Para o caso de uma moto, existe um plano de estabilidade definido pelo ponto de contato das rodas e a altura do centro de gravidade da moto.

Em um veículo de três rodas, este volume é menor do que o de um veículo de quatro rodas. Ao analisarmos as características desejadas para um veículo eficiente e seguro, este deve ser estreito o suficiente para reduzir o coeficiente aerodinâmico, mas com altura semelhante a dos veículos atuais, permitindo ao motorista uma maior visão e ao mesmo tempo permitindo ser visto por outros automóveis. A combinação destes fatores diminui ainda mais o volume da pirâmide, com um ponto crítico para a estabilidade do veículo sendo determinado pela largura do volume no plano do solo.

Um fator a ser considerado é a configuração das rodas. A utilização de duas rodas frontais ou de duas rodas traseiras influencia no comportamento final do veículo, assim como a distribuição do peso e as dimensões do veículo.

Ao utilizar duas rodas traseiras, a parte da frente do veículo se torna crítica pois a medida que a força resultante no veículo se aproxima da roda dianteira, o espaço de estabilidade diminui. Neste caso, o centro de gravidade do veículo deve ser localizado em sua parte posterior.

No caso de duas rodas dianteiras, a traseira do veículo se torna o ponto crítico e o centro de gravidade deve se localizar na parte da frente do veículo para uma maior estabilidade.

Cada estratégia possui vantagens e desvantagens quanto ao desempenho. Um dos fatores levados em conta no projeto deste veículo foi o fato de, ao considerarmos as forças atuantes, a força motriz é menor do que a força de frenagem, o que faz com que veículos com duas rodas traseiras possuam um espaço maior para garantir que durante uma frenagem brusca a força resultante continue dentro da pirâmide de estabilidade.

2.5.2: O efeito da cambagem

O ângulo de cambagem é o ângulo formado entre o plano do pneu e o plano perpendicular ao plano do solo. Ela assume um valor positivo quando a roda é inclinada para fora e negativo quando inclinado para dentro ($-\epsilon_w$), criando uma força lateral chamada *força de cambagem*. O valor desta força é dependente do ângulo de cambagem e da carga em cada pneu, conforme descrito em Jazar (2008).

Quando uma roda é submetida a uma carga constante e a um ângulo de cambagem, o pneu irá se deformar lateralmente, de forma que o contato do pneu com o solo é maior no lado onde ocorre a cambagem. Este efeito pode ser observado na Figura 2.

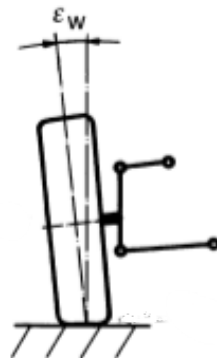


Figura 2: Efeito da cambagem em um pneu de automóvel. Retirado de Reimpell et al. (2001).

Esta deformação desigual do pneu resulta no aparecimento de tensões não-uniformes distribuídas sobre a área de contato pneu-solo, produzindo a força na direção da cambagem. Este efeito tem grande importância para motocicletas, onde grande parte da força lateral necessária para fazer as curvas é produzida pela força de cambagem. Em veículos convencionais, o efeito da cambagem decorrente do rolamento do veículo em curvas é desfavorável (Reimpell et al. 2001).

2.5.3: O desafio de Estabilidade

Mesmo com a configuração de duas rodas dianteiras, o veículo estreito ainda apresenta restrições de estabilidade em curvas. Para resolver esta questão é necessário incliná-lo da mesma maneira que uma moto, utilizando a força de cambagem produzida pela inclinação do veículo para manter a força resultante dentro do volume da pirâmide de estabilidade.

Existem duas maneiras de realizar esta tarefa em um veículo de três rodas: através do esterço (*Steering Tilt Control* - STC) ou aplicando diretamente um torque ao eixo de rolamento do veículo (*Direct Tilt Control* - DTC). O sistema DTC é reconhecidamente mais eficiente para baixas velocidades, enquanto o sistema STC é utilizado para altas velocidades (Sneel 1998, Kidane et al. 2008). Devido aos altos requisitos de torque o sistema DTC normalmente possui componentes hidráulicos, enquanto o sistema STC pode ser acionado por motores elétricos de menor tamanho e maior eficiência. Existem situações onde é interessante para o motorista que o veículo não incline, em geral em muito baixas velocidades (por exemplo, durante o estacionamento). Nestes casos, o veículo deverá se comportar como um automóvel comum.

Em veículos onde os sistemas de inclinação são controlados pelo motorista (por pedais, inclinando o corpo, etc.), é necessário que este tenha conhecimentos específicos de pilotagem para manter o triciclo estável. Além disso o motorista deveria mudar a forma com que dirige em situação de muito baixa velocidade onde não ocorre a inclinação.

Com o controle automático de inclinação, sensores medem as condições do veículo e podem atuar de acordo com a situação, atingindo um ângulo de inclinação adequado para dada velocidade e esterço. Quando ambos os sistemas STC e DTC são utilizados, é tarefa do controlador ajustar a transição entre eles para garantir a segurança e o conforto dos ocupantes do veículo. Desta maneira o sistema é transparente ao motorista, que irá dirigir o veículo da mesma forma que um carro comum sem se preocupar com mudanças na pilotagem para diferentes velocidades.

É interessante maximizar a utilização do sistema STC para reduzir o número de

componentes e, assim, diminuir o peso do veículo e aumentar sua eficiência energética. Em um sistema onde o controle STC fosse responsável pela inclinação, seria possível reduzir as dimensões do sistema DTC, utilizando-o como um sistema de apoio.

Baseando-se nas informações acima, este trabalho se propõe a desenvolver o seguinte tema:

O desenvolvimento de um sistema de controle STC eficiente que garanta a estabilidade lateral do veículo sob condições normais de operação para uma ampla faixa de velocidades, e também que garanta uma viagem confortável para os passageiros, minimizando oscilações e movimentos bruscos.

Algumas hipóteses simplificativas serão consideradas neste trabalho:

- O problema de controle de inclinação proposto é multivariável, com duas variáveis de entrada (ângulo de esterço das rodas dianteiras δ e o torque do motor T_m) e duas variáveis de saída (ângulo de rolamento do veículo ϕ e velocidade longitudinal do veículo u). Neste trabalho, as duas variáveis de saída serão tratadas de maneira independente, com controladores SISO para inclinação e velocidade longitudinal.
- Os atuadores para o ângulo de esterço não são modelados. Sua resposta dinâmica é suposta mais rápida do que as exigências de controle, e o efeito de saturação de posição e de velocidade dos atuadores foi descartado.

3. Fundamentação Teórica

Neste capítulo são expostos os fundamentos de controle utilizados para este trabalho, apresentando a teoria para as técnicas de controle não-linear por realimentação linearizante entrada-saída e controle por *energy shaping*.

3.1: Controle não-linear por realimentação linearizante entrada-saída

Nesta subseção é mostrada a teoria de controle não-linear por realimentação linearizante entrada-saída. Para isto são introduzidos alguns conceitos importantes da geometria diferencial que resultarão em um controlador que garante a estabilização e o seguimento de trajetória.

No contexto da teoria de controle, o uso de técnicas baseadas no cancelamento matemático de termos levanta questionamentos. A técnica de realimentação linearizante deve ser vista como uma propriedade estrutural de uma classe de sistemas lineares, e não como uma solução para o projeto de controle. Uma propriedade importante desta classe de sistemas não é atingir o cancelamento exato de suas não-linearidades, mas garantir que o controle mantenha as não-linearidades dentro do alcance das entradas (Spong & Vidyasagar 1989).

3.1.1: Realimentação linearizante

Considerando um sistema não linear na forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

$$y = h(x) \quad (2)$$

juntamente com uma lei de controle por realimentação da forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (3)$$

é possível transformar o sistema não-linear em um equivalente linearizado. Para tal, é necessário que o sistema possa ser escrito de acordo com a estrutura (Khalil 2002, cap. 13)

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - \alpha(x)] \quad (4)$$

com A de dimensão $n \times n$, B de dimensão $n \times p$, o par (A, B) controlável, as funções $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ definidas no domínio $D \in \mathbb{R}^n$ que contém a origem, e a matriz $\gamma(x)$ não singular para todo x . Se tais condições forem obedecidas, a lei de controle dada pela equação 3 consegue linearizar o sistema com $\beta = \gamma^{-1}$. Projetando v de forma apropriada atinge-se a estabilidade.

Caso o sistema não esteja na forma dada pela equação 4, ele pode ser levado a forma desejada se existir uma transformação de estados (equação 5) que atenda a alguns requisitos. Quando a mudança de variáveis é usada para transformar a equação de estados de coordenadas x para coordenadas z , a função T que mapeia a transformação deve possuir inversa. Adicionalmente, as funções T e T^{-1} devem ser continuamente diferenciáveis.

$$z = T(x) \quad (5)$$

Quando apenas algumas variáveis de saída são de interesse, como é geralmente o caso do problema de seguimento de referência, o modelo é descrito por equações de estado e de saída. Linearizando as equações de estado não necessariamente resulta em equações de saída linearizadas, o que pode dificultar a solução do problema de seguimento de referência. Por esta razão, pode-se observar que a linearização entrada-saída apresenta vantagens, mesmo que seja necessário manter parte das equações de estado na forma não linear. Neste caso, o sistema é dito entrada-saída linearizável.

Deve-se observar que no caso de um sistema entrada-saída linearizável, alguns estados do sistema podem ser não-observáveis a partir da saída escolhida. Assim, estes estados devem ser estáveis ou ao menos limitados. A estabilidade interna será discutida durante a etapa de simulações.

3.1.2: Realimentação linearizante entrada-saída

Considerando o sistema dado pela equação 1, com f , g e h suficientemente suaves no domínio $D \subset \mathbb{R}^n$. Os mapas $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ são chamados campos vetoriais em D . A derivada $y^{(1)}$ é dada por

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \triangleq L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (6)$$

com

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (7)$$

indicando a Derivada de Lie de h em relação a f .

Se $L_g h(x) = 0$, então $\dot{y} = L_f h(x)$ não dependerá de u . Calculando a segunda derivada de y , denotada por $y^{(2)}$, obtém-se:

$$y^{(2)} = \frac{\partial(L_f h(x))}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \quad (8)$$

Novamente, se $L_g L_f h(x) = 0$, então $y^{(2)} = L_f^2 h(x)$, independente de u . Repetindo o processo observa-se que se $h(x)$ satisfaz

$$L_g L_f^{i-1} h(x) = 0, i = 1, 2, \dots, \rho - 1; L_g L_f^{\rho-1} h(x) \neq 0 \quad (9)$$

então o sinal u não aparece nas equações de $y, \dot{y}, \dots, y^{(\rho-1)}$ e aparece na equação de $y^{(\rho)}$ com um coeficiente não nulo

$$y^{(\rho)} = L_f^\rho h(x) + L_g L_f^{\rho-1} h(x)u \quad (10)$$

Utilizando este resultado, é fácil mostrar que o sistema é entrada-saída linearizável, pois a lei de controle realimentado

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [-L_f^\rho h(x) + v] \quad (11)$$

reduz o mapa de entrada saída a

$$y^{(\rho)} = v \quad (12)$$

que é uma cadeia de ρ integradores. Neste caso, o número inteiro ρ é chamado de grau

relativo do sistema.

O grau relativo do sistema é uma propriedade importante para a linearização entrada-saída e o seguimento de trajetórias. Entretanto, a possibilidade de realizar estas tarefas depende de outras propriedades do subsistema, como descrito em Ortega et al. (1998), Sepulchre et al. (1998).

3.1.3: Seguimento de trajetória

Considerando o sistema SISO entrada-saída linearizável representado pelo sistema

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \quad (13)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \gamma(x) [u - \alpha(x)] \quad (14)$$

$$y = C_c \xi \quad (15)$$

com $\xi \in \mathbb{R}^\rho, \eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}$, (A_c, B_c, C_c) a forma canônica representando a cadeia de integradores e $f_0(0,0) = 0$. Deseja-se projetar uma lei de controle de forma que a saída y siga o sinal de referência $r(t)$. Caso o sistema possua grau relativo $\rho = n$, ele não possui dinâmicas zero não-triviais. Neste caso, as variáveis η e suas equações podem ser desconsideradas para o desenvolvimento do controlador. Assume-se também que o sinal de referência $r(t)$ e suas derivadas $r^{(p)}(t)$ são limitadas para todo $t \geq 0$ e a ρ -ésima derivada é uma função contínua por partes de t .

Assumindo

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r^{(\rho-1)} \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} \xi_1 - r \\ \vdots \\ \xi_\rho - r^{(\rho-1)} \end{bmatrix} = \xi - \mathcal{R} \quad (16)$$

a mudança de variáveis $e = \xi - \mathcal{R}$ no sistema o transforma em

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{R}) \\ \dot{e} &= A_c e + B_c \{ \gamma(x) [u - \alpha(x)] - r^{(\rho)} \} \end{aligned} \quad (17)$$

A lei de controle

$$u = \alpha(x) + \beta x[v + r^p] \quad (18)$$

reduz a equação 17 para a forma

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{R}) \\ \dot{e} &= A_c e + B_c v \end{aligned} \quad (19)$$

O objetivo de controle pode ser atingido para qualquer projeto de v que estabilize a segunda equação enquanto η for limitado. Para sistemas de fase mínima com $e(0), \eta(0)$ e $\mathcal{R}(t)$ o estado $n(t)$ é limitado, resolvendo assim o problema de estabilidade local. Para ampliar a região de atração e obter estabilidade global, é condição suficiente assegurar que o sistema $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$ possua estabilidade entrada-estado.

3.2: Controle não-linear via *Energy Shaping*

Nesta subsecção é mostrada a teoria básica de controle não linear via *energy shaping*, juntamente com alguns resultados importantes que posteriormente serão utilizados para a síntese de um controlador. Este trabalho baseia-se em uma abordagem através de equações de Euler-Lagrange. Sistemas na forma de Euler-Lagrange (sistemas EL) são definidos a partir de uma técnica de modelagem baseada na definição de funções de energia, formando a função Lagrangeana que permite derivar as equações de movimento do sistema. Ao trabalhar com passividade, sistemas na forma de EL mostram-se vantajosos, pois já fornecem funções de armazenamento e de dissipação, base para a técnica do *energy shaping*. Outra vantagem é a simplicidade com que sistemas *interconectados* podem ser representados. O conceito de interconexão é importante, pois define como a energia é transmitida entre sistemas.

A teoria de *energy shaping* trabalha com a modificação da energia de sistemas e de seus pontos de equilíbrio. A análise a partir das energias potenciais ajuda a explicar o conceito por trás da teoria. As Figuras 3 e 4 ajudam a explicar o conceito. A primeira figura ilustra a energia potencial de um pêndulo, com um ponto de máximo (equilíbrio instável) localizado em 0 e pontos de mínimo (equilíbrios estáveis) localizados em $\pm\pi$.

Através da modificação da energia potencial do sistema, deseja-se obter uma função de energia potencial desejada \mathcal{V}_d . Um exemplo de função é dado pela Figura 4, que possui apenas um ponto de mínimo.

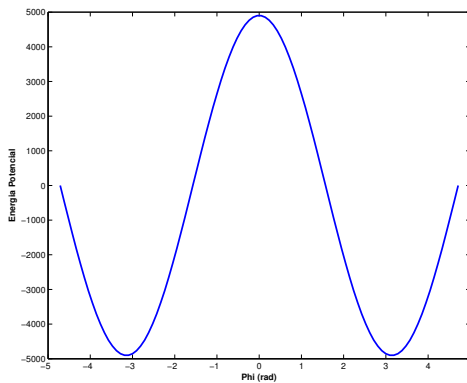


Figura 3: Exemplo de uma função de energia potencial de um sistema, com equilíbrios em 0 e $\pm\pi$

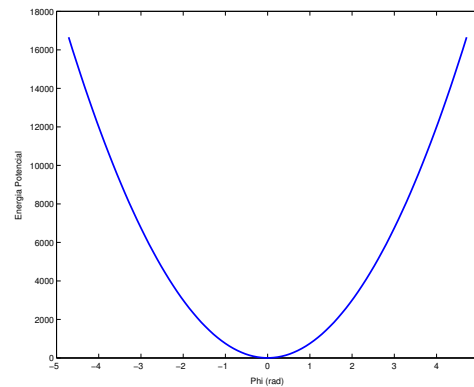


Figura 4: Exemplo de função de energia potencial desejada com um ponto de equilíbrio localizado em 0 .

De maneira semelhante, pode-se modificar a função de dissipação de um sistema, adicionando-se amortecimento e garantindo a estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio desejados.

3.2.1: Passividade

Sistemas Passivos correspondem a uma classe de sistemas dinâmicos onde a troca de energia com o ambiente desempenha um papel fundamental na formulação do problema de controle. Estes sistemas não podem armazenar mais energia do que a fornecida pelo ambiente, com o excesso de energia sendo dissipado.

A definição de passividade está intrinsecamente ligada com as propriedades físicas do sistema, de forma particular com a sua estabilidade. Dissipatividade é uma propriedade fundamental de sistemas físicos. Em sistemas elétricos, parte da energia é dissipada como calor em resistores. Em sistemas mecânicos, a fricção entre elementos causa a perda de energia. A seguir são feitas algumas definições necessárias para o conceito de passividade.

Espaços \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_{2e} : Considerando o conjunto Ξ para toda função real mensurável n dimensional $f(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definindo o conjunto

$$\mathcal{L}_2 \triangleq \{x \in \Xi \mid \|f\|_2^2 \triangleq \int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt < \infty\} \quad (20)$$

com $\|\cdot\|$ a norma euclidiana. Este conjunto forma um espaço vetorial normalizado sobre o campo dos números reais com norma $\|\cdot\|_2$. O espaço estendido \mathcal{L}_{2e} pode ser definido como

$$\mathcal{L}_{2e} \triangleq \{x \in \Xi \mid \|f\|_{2T}^2 \triangleq \int_0^T \|f(t)\|^2 dt < \infty, \forall T\} \quad (21)$$

Assim, $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_{2e}$, com o espaço estendido contendo sinais onde a norma \mathcal{L}_2 pode tender para infinito, mas apenas no tempo infinito.

Define-se produto interno (Equação 22) e o produto interno truncado (Equação 23) de duas funções y e u como

$$\langle u | y \rangle \triangleq \int_0^\infty u(t)^T y(t) dt \quad (22)$$

$$\langle u | y \rangle_T \triangleq \int_0^T u(t)^T y(t) dt \quad (23)$$

Os sistemas explorados neste trabalho, representados pelo operador Σ , possuem a forma

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (24)$$

com estados $x \in \mathbb{R}^n$, entrada $u \in \mathbb{R}^m$ e saída $y \in \mathbb{R}^m$, onde $\Sigma : \mathcal{L}_{2e} \rightarrow \mathcal{L}_{2e} : u \rightarrow y$.

Dissipatividade: A definição matemática de dissipatividade está atrelada a duas funções: a taxa de alimentação (*supply rate*), que define a taxa com que a energia é introduzida ao sistema, e a função de armazenamento (*storage function*), que indica a quantidade de energia que está armazenada no sistema. Estas funções estão relacionadas por uma inequação de dissipação.

O sistema dinâmico causal Σ é dito dissipativo com respeito a taxa de alimentação $w(u, y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ se e somente se existe uma função de armazenamento $\mathcal{H} :$

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, de maneira que:

$$\mathcal{H}(x(T)) \leq \mathcal{H}(x(0)) + \int_0^T w(u(t), y(t)) dt \quad (25)$$

para todo u , $T \geq 0$ e $x(0) \in \mathbb{R}^n$.

Passividade: Σ é passivo se ele é dissipativo com uma taxa de alimentação $w(u, y) = u^T y$. O sistema é dito Entrada Estritamente Passivo se ele é dissipativo com taxa de alimentação $w(u, y) = u^T y - \delta_i \|u\|^2$, com $\delta_i > 0$. O sistema é dito Saída Estritamente Passivo se é dissipativo com taxa de alimentação $w(u, y) = u^T y - \delta_o \|y\|^2$, com $\delta_o > 0$.

Estabilidade \mathcal{L}_2 : Σ é dito \mathcal{L}_2 -estável se existe uma constante positiva γ de forma que, para cada x_0 , existe uma constante finita $\beta(x_0)$ que satisfaz a inequação 26.

$$\|y\|_{2T} \leq \gamma \|u\|_{2T} + \beta(x_0) \quad (26)$$

Dissipatividade e estabilidade \mathcal{L}_2 estão relacionadas. Um sistema Σ é \mathcal{L}_2 estável se ele for dissipativo com uma taxa de alimentação $w(u, y) = \frac{1}{2}\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2$. Com uma função de armazenamento $\mathcal{H} \geq 0$ e $x_0 = 0$, é possível mostrar que:

$$\int_0^T \|y\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|u\|^2 dt \quad (27)$$

Se um sistema $\Sigma : u \rightarrow y$ é Saída Estritamente Passivo, então ele é \mathcal{L}_2 -estável (der Schaft 1999, Ortega et al. 1998).

Invariância de passividade: Considerando os sistemas entrada saída mostrados na Figura 5: se Σ_1 e Σ_2 são ambos passivos, então o sistema total Σ é também passivo. Isto pode ser demonstrado para o caso de interconexão de realimentação e interconexões de sistemas em paralelo.

Com sistemas Σ_1 e Σ_2 passivos, existem funções de armazenamento \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 tal que $\mathcal{H}_i(x_i(T)) - \mathcal{H}_i(x_i(0)) \leq \int_0^T u_i^T y_i dt$, com $i = 1, 2$. Definindo $x : (x_1, x_2)$ e $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_1(x_1) + \mathcal{H}_2(x_2)$, com $\mathcal{H}(x)$ positiva semi-definida.

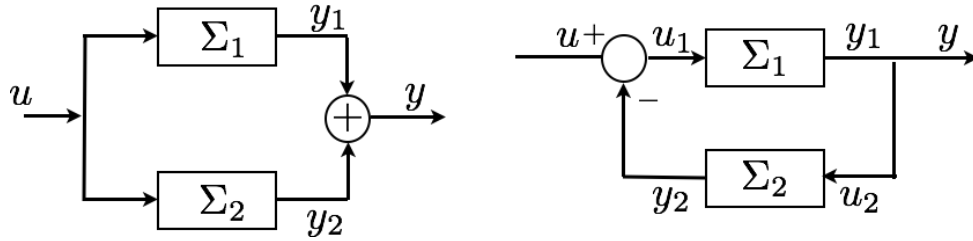


Figura 5: Interconexão de sistemas em paralelo e realimentada.

Para interconexões em paralelo a saída será $y = y_1 + y_2$, de forma que:

$$\mathcal{H}(x(T)) - \mathcal{H}(x(0)) \leq \int_0^T (u^T y_1 + u^T y_2) dt = \int_0^T u^T y dt \quad (28)$$

mostrando que a interconexão em paralelo é passiva.

Para o sistema realimentado, substituindo $u_2 = y_1$ e $u_1 = r - y_2$ obtém-se :

$$\mathcal{H}(x(T)) - \mathcal{H}(x(0)) \leq \int_0^T (r^T y_1) dt \quad (29)$$

É importante mostrar que o teorema não exige que os dois operadores sejam passivos, pois o excesso de passividade de um sistema pode compensar a falta de passividade em outro sistema.

Estabilização pela realimentação da saída - Um controlador representado pelos parâmetros $(\mathcal{T}_c(q_c, \dot{q}_c), \mathcal{V}_c(q_c, q_p), \mathcal{F}_c(\dot{q}_c))$ com \mathcal{T}_c a energia cinética do controlador, \mathcal{V}_c a energia potencial do controlador, \mathcal{F}_c a função de dissipação de energia do controlador, q_c os estados do controlador e q_p os estados do sistema que resolve o problema de estabilização global por realimentação da saída se:

- Energy shaping: $\mathcal{V}(q)$ é própria e possui um único mínimo global em $q = q_*$.
- Acréscimo de amortecimento: $\mathcal{F}_c(\dot{q}_c)$ deve satisfazer

$$\dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \dot{q}} \geq \alpha \| \dot{q}_c \|^2 \quad (30)$$

para algum $\alpha > 0$.

- Propagação da dissipação: Para toda trajetória com $q_c \equiv \text{constante}$ e $\frac{\partial \mathcal{V}'_c(q_c, q_p)}{\partial q_c} = 0$ resultam em $q_p \equiv \text{constante}$.

Estabilidade Interna e Passividade: Um sistema entrada-saída estável é também internamente estável se algumas propriedades de observabilidade são satisfeitas. Supondo que o sistema Σ seja Saída Estritamente Passivo com uma função de armazenamento $\mathcal{H} \geq 0$.

- Se Σ é zero-estado observável, então $\mathcal{H}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$
- Se $\mathcal{H}(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, $\mathcal{H}(0) = 0$ e Σ é zero-estado detectável, então $x = 0$ é um equilíbrio localmente assintoticamente estável. Se \mathcal{H} é radialmente irrestrita, então a estabilidade é global.

3.3: Conclusões

Este capítulo expõe a teoria básica para o projeto de controladores por realimentação linearizante e *energy shaping*. São feitas algumas considerações quanto ao controlador por realimentação linearizante, visto que nem todos os estados devem necessariamente ser modificados para a síntese de um controlador que atenda as especificações. Para controladores por *energy shaping* mostram-se as condições necessárias e algumas propriedades importantes, como a interconectividade, usadas posteriormente na etapa de síntese.

4. Modelagem dos sistemas

Este capítulo descreve a modelagem do veículo de três rodas de cambagem variável e de uma bicicleta simplificada, utilizados neste trabalho. O modelo do veículo possui nove graus de liberdade foi proposto inicialmente com 6 graus de liberdade em Vieira et al. (2007). Foram adicionados três graus de liberdade para incluir movimento independente das rodas (Vieira et al. (2009)), e posteriormente modificado em Roqueiro et al. (2010) para incluir perturbações (ventos laterais e rugosidades na pista). Utilizando a modelagem de energias cinéticas e potenciais dos sistemas, os modelos dinâmicos são construídos a partir de uma formulação Lagrangeana.

4.1: O veículo de três rodas de cambagem variável

O triciclo aqui representado é diferente dos triciclos convencionais, pois é dotado de um mecanismo de cambagem variável que permite o movimento de rolamento, de maneira semelhante a uma moto. Este movimento será utilizado para aumentar a estabilidade do veículo em curvas. Entretanto este mecanismo o torna instável em malha aberta, da mesma maneira que uma bicicleta: qualquer perturbação que desloque o veículo de sua posição vertical fará com que este caia. O projeto deste veículo prevê limites de inclinação como $\phi_{\max} = \pm 30$ graus, limite de esterço das rodas de $\delta_{\max} = 30$ graus e limites de velocidade de $u_{\max} = 30$ m/s e $u_{\min} = 5$ m/s. Supõe-se que todos os estados estão disponíveis para medição em tempo real, e que os atuadores são suficientemente rápidos para não sofrer saturação de velocidade.

A representação do chassi do veículo e do sistema de coordenadas fixado em sua roda traseira e adotado ao longo deste trabalhos são mostrados na Figura 6.

O veículo é representado como um conjunto de quatro massas: a roda traseira (corpo 1), uma massa central (corpo 2), a roda dianteira direita (corpo 3) e a roda dianteira esquerda (corpo 4). A origem do sistema de coordenadas é localizada no ponto de contato da roda traseira, e o sentido das rotações segue a regra da mão direita. Os nove graus de liberdade utilizados no modelo são:

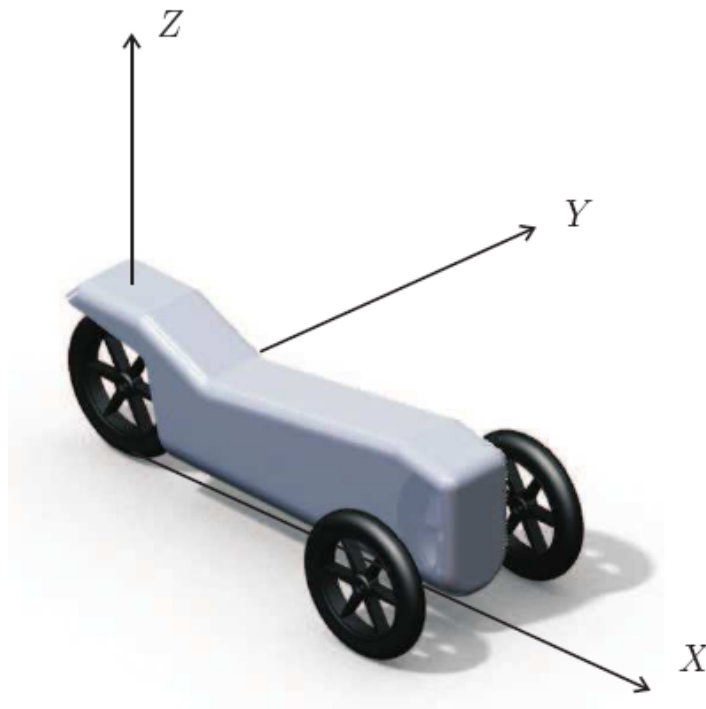


Figura 6: Modelo tridimensional do veículo, juntamente com o sistema de coordenadas.

- Movimento longitudinal (x)
- Movimento transversal (y)
- Movimento vertical da roda traseira (z_1)
- Movimento vertical do corpo central (z_2)
- Movimento vertical da roda dianteira direita (z_3)
- Movimento vertical da roda dianteira esquerda (z_4)
- Rotação em torno do eixo Z (guinada) (ψ)
- Rotação em torno do eixo X (rolagem) (ϕ)
- Rotação do corpo 2 em torno de um eixo paralelo ao eixo Y (arfagem). (θ)

A rotação do veículo em relação ao eixo Y (α), representando aclives e declives na pista, será modelada como um parâmetro variável na formulação das velocidades.

4.1.1: Formulação das Velocidades

As velocidades de cada corpo podem ser definidas através das variáveis, do sistema de coordenadas e da convenção de sinais descritas na subseção anterior. As equações das velocidades lineares e angulares da roda traseira (corpo 1, mostrado na Figura 7) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + h_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha) \\ v_1 &= v - h_1 \dot{\phi} \cos(\phi) \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= w - h_1 \dot{\phi} \sin(\phi) - h_1 \dot{\alpha} \sin(\alpha) \\ \omega_{x1} &= \dot{\phi}; \quad \omega_{y1} = \dot{\alpha}; \quad \omega_{z1} = \dot{\psi} \end{aligned} \quad (32)$$

com u_1 sua velocidade longitudinal, v_1 sua velocidade lateral, w_1 sua velocidade vertical e ω_{i1} sua velocidade de rotação em torno do i -ésimo eixo.

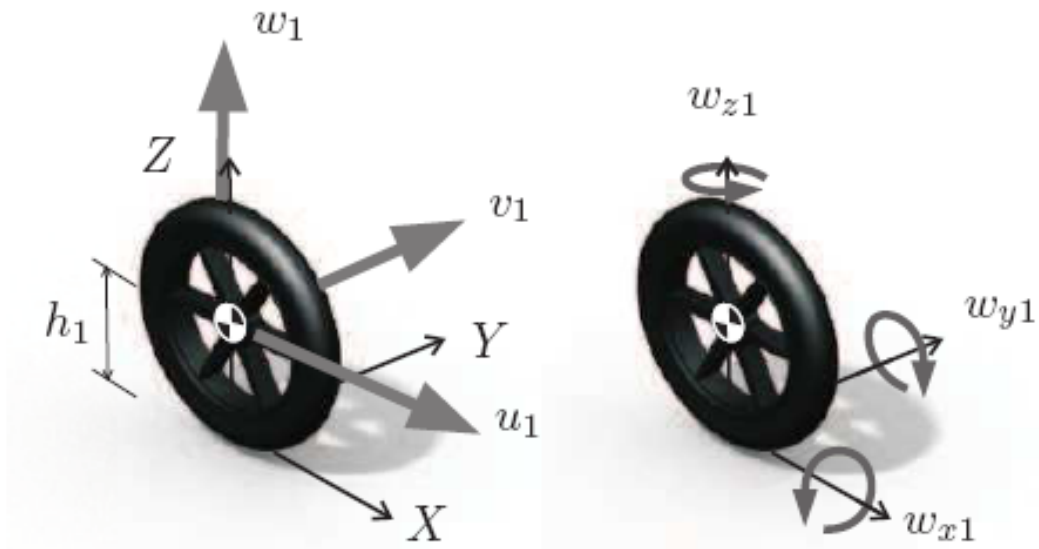


Figura 7: Definição de velocidades para o corpo 1.

A Figura 8 mostra a geometria básica do corpo 2. Neste caso, as velocidades angulares e lineares são dadas por:

$$u_2 = u + \sqrt{h_2^2 + a_2^2} \dot{\alpha} \cos(\alpha)$$

$$v_2 = v + a_2 \dot{\psi} - h_2 \dot{\phi} \cos(\phi) \quad (33)$$

$$w_2 = w - h_2 \dot{\phi} \sin(\phi) - \sqrt{h_2^2 + a_2^2} \dot{\alpha} \sin(\alpha)$$

$$\omega_{x2} = \dot{\phi}; \quad \omega_{y2} = \dot{\theta} + \dot{\alpha}; \quad \omega_{z2} = \dot{\psi} \quad (34)$$

Deve ser observado que a velocidade do veículo é considerada como sendo a velocidade do corpo 2.

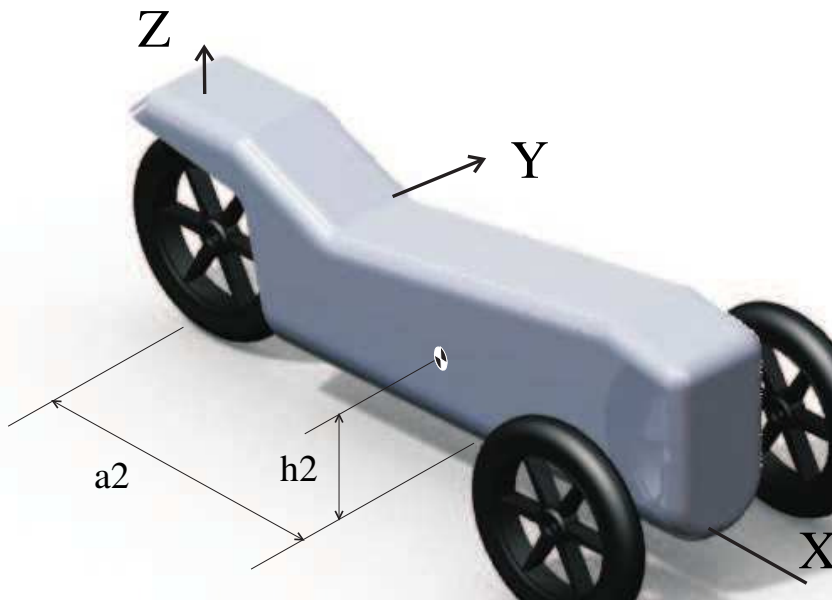


Figura 8: Definição de velocidades para o corpo 2

Para o corpo 3 existem deslocamentos com relação aos três eixos gerando componentes nas três direções produzidas pela rotação. A Figura 9 mostra a localização dos corpos 3 e 4 em relação ao resto do veículo. As velocidades lineares e angulares do corpo 3 são:

$$u_3 = u + b_3 \dot{\psi} + \sqrt{h_3^2 + a_3^2} \dot{\alpha} \cos(\alpha)$$

$$v_3 = v + a_3 \dot{\psi} - h_3 \dot{\phi} \cos(\phi) \quad (35)$$

$$w_3 = w - h_3 \dot{\phi} \sin(\phi) - \sqrt{h_3^2 + a_3^2} \dot{\alpha} \sin(\alpha)$$

$$\omega_{x3} = \dot{\phi}, \quad \omega_{y3} = \dot{\alpha}, \quad \omega_{z3} = \dot{\psi} \quad (36)$$

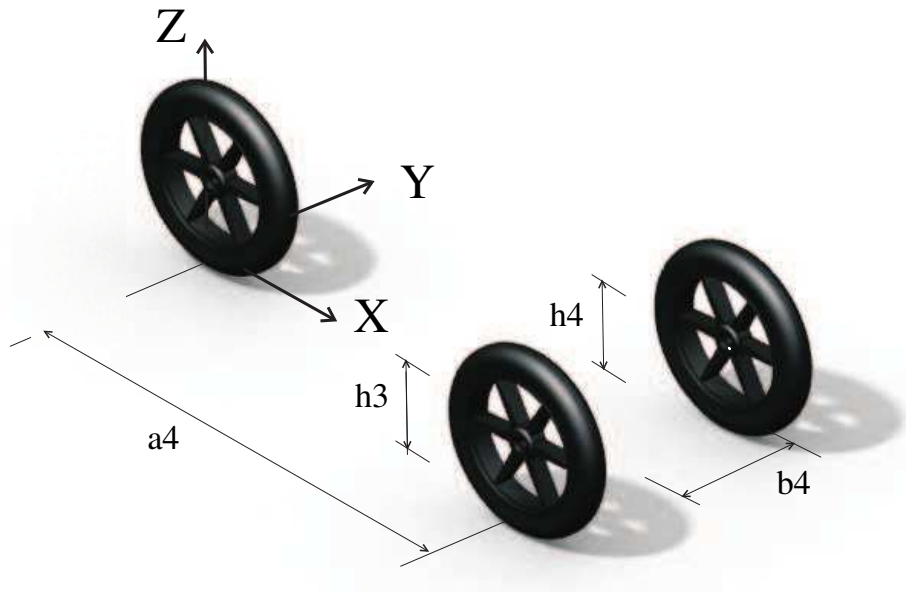


Figura 9: Geometria dos corpos 3 e 4 no veículo.

A dedução das equações do corpo 4 é feita de maneira similar:

$$\begin{aligned} u_4 &= u - b_4 \dot{\psi} + \sqrt{h_4^2 + a_4^2} \dot{\alpha} \cos(\alpha) \\ v_4 &= v + a_4 \dot{\psi} - h_4 \dot{\phi} \cos(\phi) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} w_4 &= w - h_4 \dot{\phi} \sin(\phi) - \sqrt{h_4^2 + a_4^2} \dot{\alpha} \sin(\alpha) \\ \omega_{x4} &= \dot{\phi}, \quad \omega_{y4} = \dot{\alpha}, \quad \omega_{z4} = \dot{\psi} \end{aligned} \quad (38)$$

4.1.2: Energia cinética

A energia cinética do triciclo, um sistema composto por múltiplos corpos, é definida como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 m_k (u_k^2 + v_k^2 + w_k^2) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 [(I_x \omega_x^2)_k + (I_y \omega_y^2)_k + (I_z \omega_z^2)_k] - \\ &\quad \sum_{k=1}^4 [(I_{xy} \omega_x \omega_y)_k + (I_{xz} \omega_x \omega_z)_k + (I_{yz} \omega_y \omega_z)_k] \end{aligned} \quad (39)$$

com I o momento de inércia e k o k -ésimo corpo.

É possível obter a energia cinética do veículo substituindo na Equação 39 as velocidades dadas pelas Equações 31 a 38.

4.1.3: Energia Potencial

Neste modelo supõe-se que a energia potencial é armazenada somente nas molas da suspensão, nos pneus (devido a sua elasticidade) e no movimento vertical do corpo 2. A energia armazenada nas suspensão do veículo \mathcal{V}'_s é representada por:

$$\mathcal{V}'_s = \frac{1}{2} (k_{z1}(z_2 - z_1 + \theta a_2)^2 + k_{z3}(z_2 - z_3 - \theta(l - a_2))^2 + k_{z4}(z_2 - z_4 - \theta(l - a_2))^2) \quad (40)$$

com k_{zi} a constante de rigidez de cada uma das molas da suspensão.

Na Figura 10 observa-se que as deformações nas molas estão em função da carga transferida de um eixo para o outro. É interessante relacionar a deformação na mola com o ângulo de arfagem θ , que é por sua vez uma variável do problema.

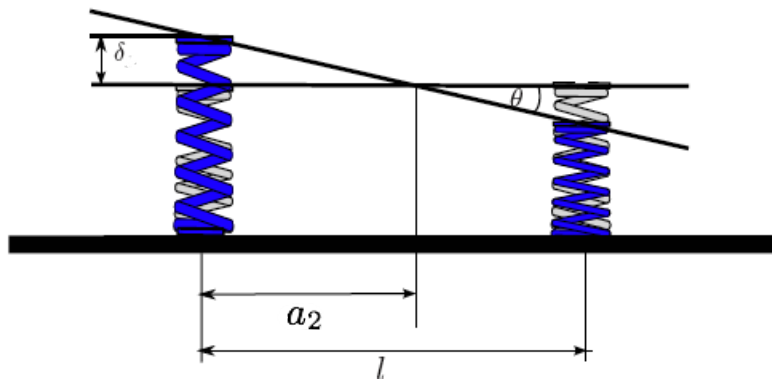


Figura 10: Relação entre a deformação das molas e o ângulo de arfagem θ . Retirado de Roqueiro et al. (2010).

Pela figura, podemos determinar a relação entre o ângulo de arfagem θ e a deformação nas molas dianteiras δ_f e traseiras δ_t :

$$\tan(\theta) = \frac{-\delta_f}{(l - a_2)} = \frac{\delta_t}{a_2} \quad (41)$$

A seguinte aproximação pode ser feita para ângulos pequenos:

$$\theta = \frac{-\delta_f}{(l - a_2)} = \frac{\delta_t}{a_2} \quad (42)$$

obtendo:

$$\delta_f = -\theta(l - a_2) \quad \text{e} \quad \delta_t = \theta a_2 \quad (43)$$

A deformação dos pneus, dada pela deformação δ_p , tem sua energia potencial \mathcal{V}_p representada pela Equação 44:

$$\mathcal{V}_p = \frac{1}{2} k_p (\delta_{p1}^2 + \delta_{p3}^2 + \delta_{p4}^2) \quad (44)$$

com k_p a constante de rigidez de mola do pneu.

Assim, a energia armazenada em sistemas elásticos é dada por:

$$\mathcal{V}_e = \mathcal{V}_s + \mathcal{V}_p \quad (45)$$

Uma vez que não há resistência à rotação em torno do eixo X, o sistema apresenta características de um pêndulo invertido, com a tendência do veículo de deslocar-se angularmente em direção ao solo. A energia potencial do veículo devido a este efeito (\mathcal{V}_g) é dada por:

$$\mathcal{V}_g = m_2(h_2 + z_2)g \cos(\alpha) \cos(\phi) \quad (46)$$

Como a massa do corpo 2 é muito maior do que a massa dos demais corpos, admite-se sua energia potencial como sendo a de todo o veículo. Desta forma, a energia potencial total do sistema será dada pela soma das energias potenciais dos elementos:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \frac{1}{2} (k_1(z_2 - z_1 + \theta a_2)^2 + k_3(z_2 - z_3 - \theta(l - a_2))^2 + k_4(z_2 - z_1 - \theta(l - a_2))^2) + \\ & \frac{1}{2} k_p (\delta_{p1}^2 + \delta_{p3}^2 + \delta_{p4}^2) + m_2(h_2 + z_2)g \cos(\alpha) \cos(\phi) \end{aligned} \quad (47)$$

4.1.4: Dissipação de energia

A forma geral da função dissipativa de Rayleigh é dada por:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (48)$$

com c_{ij} o coeficiente de amortecimento referente as derivadas temporais dos graus de liberdade q_i and q_j .

Uma vez que o vetor dos graus de liberdade é dado por:

$$\mathbf{q} = (x, y, z_1, z_2, z_3, z_4, \psi, \phi, \theta) \quad (49)$$

e exceto pelos elementos c_{33} , c_{44} , c_{55} , c_{66} e c_{99} da matriz de amortecimento que são relacionados com as variáveis que causam deslocamentos verticais, todos os outros elementos são nulos ($c_{ij} = 0$).

As velocidades que produzem dissipação de energia nos amortecedores são:

- Amortecedor da roda traseira

$$(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + \alpha_2 \dot{\theta}$$

- Amortecedor da dianteira direita

$$(\dot{z}_2 - \dot{z}_3) + (1 - \alpha_2) \dot{\theta}$$

- Amortecedor da dianteira esquerda

$$(\dot{z}_2 - \dot{z}_4) + (1 - \alpha_2) \dot{\theta}$$

Assim, a função de dissipação do sistema é dada pela Equação 50

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} c_{z1} ((\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2 + (\alpha_2 \dot{\theta})^2) + \frac{1}{2} c_{z3} ((\dot{z}_2 - \dot{z}_3)^2 + ((1 - \alpha_2) \dot{\theta})^2 + (b_3 \dot{\phi})^2) + \frac{1}{2} c_{z4} ((\dot{z}_2 - \dot{z}_4)^2 + ((1 - \alpha_2) \dot{\theta})^2 + (b_4 \dot{\phi})^2) \quad (50)$$

com c_{zk} o coeficiente de amortecimento da k -ésima roda.

4.1.5: Forças Externas

A definição das forças externas atuantes no veículo é dada pelo vetor \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}(t) = [F_x, F_y, F_{z1}, F_{z2}, F_{z3}, F_{z4}, M_\psi, M_\phi, M_\theta] \quad (51)$$

com a força F_i atuando na i -ésima direção e os momentos M_j atuam no j -ésimo eixo de rotação.

1) F_x : A força na direção X será dada pela soma das forças de tração na roda traseira, resistência aerodinâmica, resistência de rolagem dos pneus, resistência de aclive e a força de frenagem F_{fr} conforme a equação 52:

$$F_x = F_T - R_A - R_R - mg \sin(\alpha) - F_{fr} \quad (52)$$

Para um veículo qualquer, a força máxima de tração será dada pelo produto da carga normal (N) ao solo pelo coeficiente de atrito (f) na interface pneu-solo, ou seja:

$$F_{Tmax} = Nf \quad (53)$$

Adotando uma aproximação do torque motor T_m aplicado na roda em termos percentuais é possível admitir que a força de tração varia de 0 até o valor de F_{Tmax} . Desta forma, a força de tração F_T pode ser definida como:

$$F_T = \frac{2\eta_T n}{d} T_m \quad (54)$$

com n o valor da relação de transmissão, T_m representando o valor o torque disponível no motor, d o diâmetro dinâmico da roda e η_T o rendimento da transmissão. O diâmetro dinâmico difere do valor nominal d_n da roda, e pode ser escrito conforme Leal et al. (2008):

$$d = 0.9588d_n \quad (55)$$

A resistência aerodinâmica é definida segundo Jazar (2008):

$$R_A = \frac{1}{2} C_x u^2 A \rho \quad (56)$$

com C_x o coeficiente aerodinâmico do veículo, A a sua área frontal projetada, u a velocidade longitudinal e ρ a densidade do ar.

A resistência de rolamento pode ser definida como a força produzida pela deformação na interface pneu/solo atuando de forma semelhante a uma mola com uma região sendo comprimida ao entrar em contato com o solo e outra região expandindo-se ao deixar a interface. Este comportamento pode ser descrito como:

$$R_R = f_R N \quad (57)$$

para N a força normal ao solo atuando em uma roda e f_R o coeficiente de resistência de rolamento, calculado experimentalmente. Em Leal et al. (2008) recomenda-se o valor de 0.01 como uma aproximação para este coeficiente, considerando a pista como asfalto liso de boa qualidade.

Substituindo as equações 54, 56 e 57 e a força de frenagem na equação 52, é possível construir a expressão para a força na direção X:

$$F_x = \frac{2n\eta_T}{d} T_m - \frac{1}{2} C_x u^2 A \rho - f_R (N_1 + N_3 + N_4) - mg \sin(\alpha) - F_{fr} \quad (58)$$

2) F_y : Para elemento F_y deve-se analisar o que acontece com o pneu no momento em que ele começa a fazer uma trajetória com uma componente transversal. Seguindo a visão superior da roda dianteira mostrada na Figura 11 é possível perceber que três ângulos ocorrem nesta situação:

com δ o ângulo de esterço das rodas dianteiras, θ_{vf} o ângulo do vetor velocidade e α_f o ângulo de escorregamento da roda frontal, que são relacionados pela equação 59:

$$\alpha_f = \delta - \theta_{vf} \quad (59)$$

No caso do eixo traseiro, como o ângulo de esterço é nulo, tem-se:

$$\alpha_t = -\theta_{vt} \quad (60)$$



Figura 11: Ângulos das rodas frontais.

De acordo com os valores destes ângulos e as características do pneu, é possível descrever a curva característica da força lateral em função ângulo de escorregamento e do ângulo de cambagem da roda γ conforme o diagrama da fórmula mágica de Pacejka (Figura 12) mostrado em Pacejka (2006), modelo também seguido por Gohl et al. (2006), Jazar (2008), Cossalter (2006).

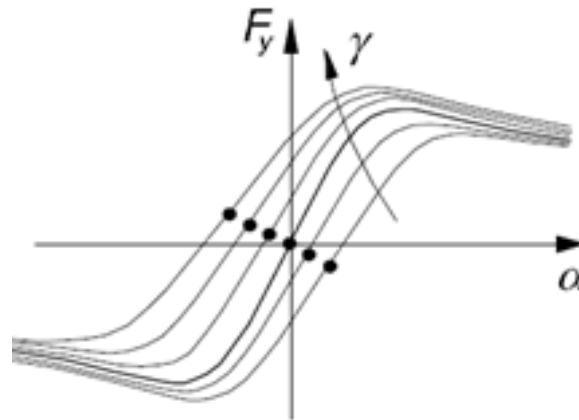


Figura 12: Fórmula mágica de Pacejka, associando o ângulo de escorregamento com a carga lateral (Fonte: Pacejka (2006))

Observa-se que o comportamento da curva pode ser considerado praticamente linear para pequenos valores de α , de forma que a relação entre ângulo de escorregamento e carga lateral pode ser descrita como:

$$F_{y\alpha} = BCD\alpha \quad (61)$$

com B, C e D coeficientes da curva característica do pneu. Este produto também é conhecido como coeficiente de Rigidez da Curva (C_α) e é o próprio coeficiente angular da reta que aproxima $\alpha = 0$. Desta forma as forças laterais atuantes podem ser reescritas como:

$$F_{y\alpha} = f(\alpha) = C_\alpha \alpha \quad (62)$$

Pacejka (2006) ainda define:

$$\alpha_{\text{dianteiro}} = \delta - \frac{v + a_d \dot{\psi}}{u} \quad (63)$$

$$\alpha_{\text{traseiro}} = -\frac{v - a_t \dot{\psi}}{u} \quad (64)$$

para a_d e a_t as distâncias longitudinais dos eixos dianteiros e traseiros ao centro de rotação, v a velocidade lateral do veículo, u sua velocidade longitudinal e $\dot{\psi}$ sua velocidade de rotação em torno do eixo Z. Isto permite redefinir a força lateral da equação 61 como:

$$F_{y\alpha d} = C_\alpha \left(\delta - \frac{v + \frac{a_4 - a_2}{2} \dot{\psi}}{u} \right) \quad (65)$$

para cada roda dianteira. Para a roda traseira, a equação 62 torna-se:

$$F_{y\alpha t} = -C_\alpha \left(\frac{v - \frac{a_2}{2} \dot{\psi}}{u} \right) \quad (66)$$

Ao considerar a presença de ventos laterais atuando sobre um veículo com área transversal A_t , coeficiente de arrasto transversal C_{xt} e velocidade do vento V_{vent} perpendicular a direção de deslocamento do veículo, a sua força em y será:

$$F_{y\text{vent}} = \frac{1}{2} \rho C_{xt} A_t \cos(\phi) V_{\text{vent}}^2 \text{sign}(V_{\text{vent}}) \quad (67)$$

A soma das forças atuantes 65, 66 e 67 compõe a força F_y .

$$F_y = 2C_\alpha \left(\delta - \frac{v + \frac{a_4 - a_2}{2} \dot{\psi}}{u} \right) - C_\alpha \left(\frac{v - \frac{a_2}{2} \dot{\psi}}{u} \right) + \frac{1}{2} \rho C_{xt} A_t \cos(\phi) V_{vent}^2 \text{sign}(V_{vent}) \quad (68)$$

3) F_{z1}, F_{z2}, F_{z3} e F_{z4} : Estes elementos, responsáveis pelo movimento independente de cada corpo em relação ao eixo Z, sofrerão influência de forças externas devido a alterações no solo de acordo com as seguintes equações:

$$F_{z1} = F_{p1} = k_p \delta_{p1} \quad (69)$$

$$F_{z2} = 0 \quad (70)$$

$$F_{z3} = F_{p3} = k_p \delta_{p3} \quad (71)$$

$$F_{z4} = F_{p4} = k_p \delta_{p4} \quad (72)$$

com F_{pi} a força aplicada pelo solo na i -ésima roda.

4) M_ψ : O sétimo elemento do vetor $F(t)$ pode ser definido a partir da análise da Figura 13:

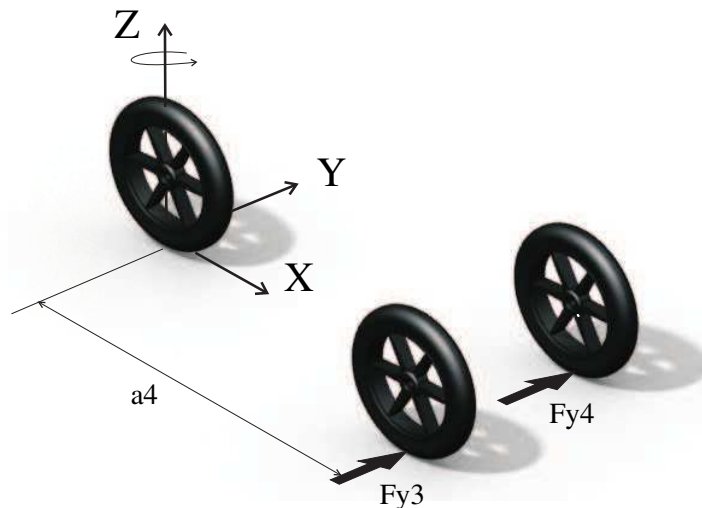


Figura 13: Força atuantes no momento em Z (guinada).

Como o veículo gira em relação ao seu centro de massa (considerado o centro de massa do corpo 2), o momento responsável pelo giro de guinada será função das forças laterais atuantes nos pneus dianteiros, definidas como F_{y3} para o pneu dianteiro direito

e F_{y4} para o esquerdo, e a força lateral no pneu traseiro F_{y1} . Como a distância entre o ponto de atuação destas forças e o eixo vertical passando pelo centro de massa é dada por $a_3 - a_2 = a_4 - a_2$ para as rodas dianteiras e a_2 para a roda traseira, o momento M_ψ definido como:

$$M_\psi = 2(a_3 - a_2)C_\alpha \left(\delta - \frac{v + \frac{a_4 - a_2}{2}\dot{\psi}}{u} \right) + a_2 C_\alpha \left(\frac{v - \frac{a_2}{2}\dot{\psi}}{u} \right); \quad (73)$$

O momento causado por ventos laterais foi desconsiderado pois seu cálculo depende do formato do veículo.

5) M_ϕ : O ponto principal para o cálculo do momento em torno do eixo X é que não existe transferência de carga entre as rodas dianteiras do veículo a medida que este inclina. Neste caso, isso se deve a suspensão do tipo "Duplo A" com braços paralelos. Isto faz com que o centro de rolamento do veículo esteja localizado no solo, e a distância h_r entre o eixo de rolamento e o centro de gravidade do veículo torna-se $h_r = h$.

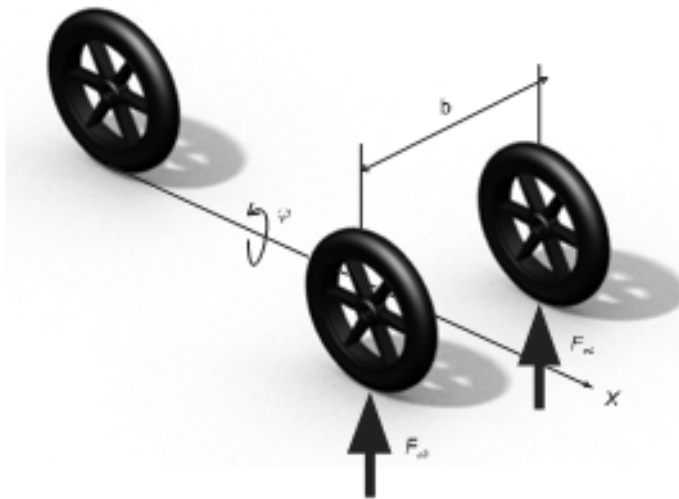


Figura 14: Força atuantes no triciclo que geram a rotação no eixo X (rolamento).

A força de inércia de curva atuando em um corpo é dada por:

$$F_c = m\dot{\psi}^2 r \quad (74)$$

com m a massa do veículo, $\dot{\psi}$ a velocidade de rotação em torno do eixo Z e r o raio da curva.

Considerando pequenos ângulos de escorregamento, as seguintes relações são obtidas da geometria do problema:

$$\dot{\psi} = \frac{u}{r} \quad (75)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\delta}{l} \quad (76)$$

Manipulando e substituindo as Equações 75 e 76 em 74 obtém-se:

$$F_c = m \left(\frac{u}{v} \right)^2 \frac{l}{\delta} = m \frac{u^2 \delta}{l} \quad (77)$$

Considerando a projeção da força F_c normal ao plano da roda e multiplicando pela altura do centro de gravidade, tem-se o valor do momento em torno do eixo X causado pela componente F_c .

O cálculo do valor do momento produzido por ventos laterais será aproximado. Uma vez que a força do vento atua no centro de pressão do veículo, e este é desconhecido pois depende da forma do veículo, o ponto de aplicação desta força será considerado como sendo o centro de gravidade do triciclo h_2 .

$$M_{\text{vento}} = -\frac{1}{2} h_2 \rho C_{xt} A_t \cos(\phi) V_{\text{vent}}^2 \text{sign}(V_{\text{vent}}) \quad (78)$$

As forças exercidas pelo solo nas rodas dianteiras produzem um momento

$$M_s = b_4 F_{z4} - b_3 F_{z3} \quad (79)$$

Combinando os elementos, temos que o momento total em torno do eixo X é dado pela Equação 80:

$$M_\phi = \frac{u^2 \delta m h_2 \cos(\phi)}{l} - \frac{1}{2} h_2 \rho C_{xt} A_t \cos(\phi) V_{\text{vent}}^2 \text{sign}(V_{\text{vent}}) + b_4 F_{z4} - b_3 F_{z3} \quad (80)$$

6) M_θ :A definição do momento M_θ pode ser obtida a partir do momentos produzidos pelas resultante das forças de frenagem F_{br} e de tração do veículo F_T , descrita na

equação 54 e resultando na Equação 81:

$$M_{\theta} = (F_{br} - \frac{2\eta_T n}{d} T_m) h_2 \quad (81)$$

4.1.6: Equações de Lagrange em forma matricial

Conforme Leal et al. (2008), um modelo dinâmico na forma matricial pode ser escrito a partir da formulação Lagrangeana como:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + C\dot{\mathbf{q}}(t) + K(\mathbf{q})\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(t) \quad (82)$$

onde $M(\mathbf{q})$, C e $K(\mathbf{q})$ são respectivamente as matrizes de inércia, amortecimento e rigidez do sistema, \mathbf{q} é o vetor contendo os graus de liberdade (Equação 49) e $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é o vetor de forças externas dados pela Equação 51. Os componentes da matriz $M(\mathbf{q})$ podem ser calculados como:

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (83)$$

e as matrizes de amortecimento e rigidez podem ser obtidas usando:

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (84)$$

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j} \quad (85)$$

O Apêndice A contém o código para o cálculo das matrizes dinâmicas do sistema.

Definição das Matrizes

Matriz M

$$m_{11} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$$

$$m_{17} = m_3 b_3 - m_4 b_4$$

$$m_{16} = (m_2 h_2 \cos(\theta))$$

$$m_{22} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$$

$$m_{27} = m_2 a_2 + m_3 a_3 + m_4 a_4$$

$$m_{28} = -\cos(\phi)(m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 + m_4 h_4)$$

$$m_{33} = m_1$$

$$m_{38} = -m_1 h_1 \sin(\phi)$$

$$m_{44} = m_1$$

$$m_{48} = -m_2 h_2 \sin(\phi)$$

$$m_{55} = m_1$$

$$m_{58} = -m_3 h_3 \sin(\phi)$$

$$m_{66} = m_1$$

$$m_{68} = -m_4 h_4 \sin(\phi)$$

$$m_{71} = m_3 b_3 - m_4 b_4$$

$$m_{72} = m_2 a_2 + m_3 a_3 + m_4 a_4$$

$$m_{77} = m_2 a_2^2 + (b_3^2 + a_3^2) m_3 + (b_4^2 + a_4^2) m_4 + I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} + I_{z4}$$

$$m_{78} = -\cos(\phi)(m_2 h_2 a_2 + m_3 h_3 a_3 + m_4 h_4 a_4) - I_{xz1} - I_{xz2} - I_{xz3} - I_{xz4}$$

$$m_{76} = -I_{yz2}$$

$$m_{82} = -\cos(\phi)(m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 + m_4 h_4)$$

$$m_{83} = -m_1 h_1 \sin(\phi)$$

$$m_{84} = -m_2 h_2 \sin(\phi)$$

$$m_{85} = -m_3 h_3 \sin(\phi)$$

$$m_{86} = -m_4 h_4 \sin(\phi)$$

$$m_{87} = -\cos(\phi)(m_2 h_2 a_2 + m_3 h_3 a_3 + m_4 h_4 a_4) - I_{xz1} - I_{xz2} - I_{xz3} - I_{xz4}$$

$$m_{88} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{x4} + h_1^2 m_1 + h_2^2 m_2 + h_3^2 m_3 + h_4^2 m_4$$

$$m_{89} = -I_{xy2}$$

$$m_{97} = -I_{yz2}$$

$$m_{98} = -I_{xy2}$$

$$m_{99} = I_{y2}$$

Matriz K

$$k_{33} = k_{z1} + k_p$$

$$k_{34} = -k_{z1}$$

$$k_{39} = -a_2 k_{z1}$$

$$k_{43} = -k_{z1}$$

$$k_{44} = k_{z1} + k_{z3} + k_{z4}$$

$$k_{45} = -k_{z3}$$

$$k_{46} = -k_{z4}$$

$$k_{48} = -gm_2 \sin(\phi) \cos(\alpha)$$

$$k_{49} = -l(k_{z3} + k_{z4}) + a_2(k_{z1} + k_{z3} + k_{z4})$$

$$k_{54} = -k_{z3}$$

$$k_{55} = k_{z3} + k_p$$

$$k_{59} = (l - a_2)k_{z3}$$

$$k_{64} = -k_{z4}$$

$$k_{66} = k_{z4} + k_p$$

$$k_{69} = (l - a_2)k_{z4}$$

$$k_{84} = -gm_2 \sin(\phi) \cos(\alpha)$$

$$k_{88} = -gm_2 \sin(\phi) \cos(\alpha)(h_2 + z_2)$$

$$k_{93} = -a_2 k_{z1}$$

$$k_{94} = -l(k_{z3} + k_{z4}) + a_2(k_{z1} + k_{z3} + k_{z4})$$

$$k_{95} = (l - a_2)k_{z3}$$

$$k_{96} = (l - a_2)k_{z4}$$

$$k_{99} = k_{z1} a_2^2 + (k_{z3} + k_{z4})(l - a_2)^2$$

Matriz C

$$c_{33} = c_{z1}$$

$$c_{34} = -c_{z1}$$

$$c_{43} = -c_{z1}$$

$$c_{44} = c_{z1} + c_{z3} + c_{z4}$$

$$c_{45} = -c_{z3}$$

$$c_{46} = -c_{z4}$$

$$c_{54} = -c_{z3}$$

$$c_{55} = c_{z3}$$

$$c_{64} = -c_{z4}$$

$$c_{66} = c_{z4}$$

$$c_{88} = b_3^2(c_{z3} + c_{z4})$$

$$c_{99} = a_2^2 c_{z1} + (l - a_2)^2 c_{z3} + (l - a_2) c_{z4}$$

4.2: Modelo simplificado de uma bicicleta

Para o modelo simplificado da bicicleta, serão considerados apenas o movimento longitudinal e de rotação em relação ao eixo X ($q = \{x, \phi\}$, mostrados na Figura 15). Para estes graus de liberdade, é fácil verificar que a energia cinética da bicicleta é dada pela equação 86:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(hm\dot{\phi}^2 + m\dot{x}^2) \quad (86)$$

com h a altura do centro de gravidade da bicicleta e m a sua massa. A primeira parcela do lado esquerdo da equação corresponde à energia de rotação em torno do eixo x de movimento, enquanto a segunda parcela corresponde à energia do movimento longitudinal do veículo.

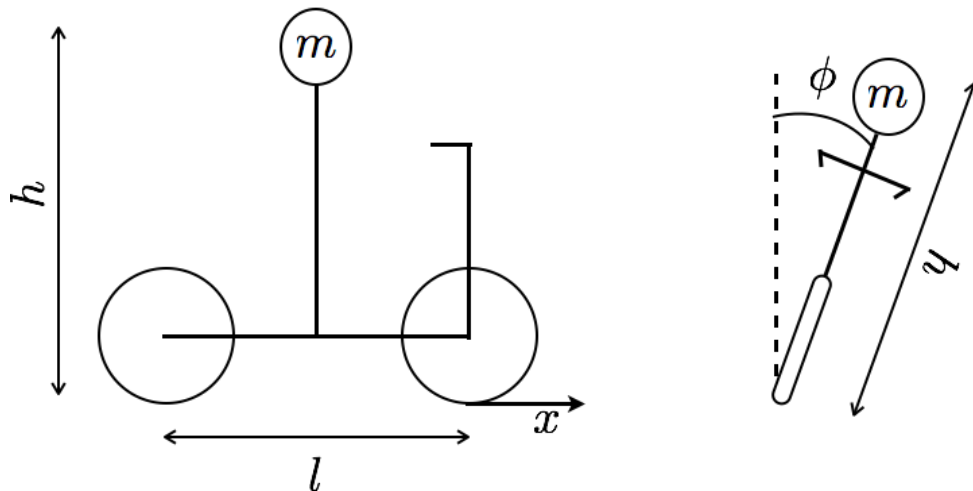


Figura 15: Definição geométrica de uma bicicleta simplificada.

A energia potencial, por sua vez, só pode ser armazenada na forma de energia potencial gravitacional, já que este modelo não conta com nenhum outro elemento armazenador. Portanto, ela é definida pela equação 87

$$\mathcal{V} = mgh\cos(\phi) \quad (87)$$

com g sendo a aceleração da gravidade.

A partir das energias potenciais e cinéticas da bicicleta é possível obter as equações diferenciais que definem a dinâmica do modelo através do cálculo do Lagrangeano

(Ortega et al. 1998). O Lagrangeano \mathcal{L} do sistema é definido pela Equação 88:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2}(hm\dot{\phi}^2 + m\dot{x}^2) - mgh\cos(\phi) \quad (88)$$

As equações dinâmicas do sistema podem ser obtidas a partir de \mathcal{L} através da relação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = F \quad (89)$$

com F representando o vetor de entradas (forças e momentos) atuando sob o sistema.

Pode-se então calcular cada um dos elementos da Equação 89, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= mh^2\dot{\phi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= mgh\sin(\phi) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= mh^2\ddot{\phi} \end{aligned} \quad (90)$$

Como resultado é obtido o modelo dinâmico dado pelas equações 91 e 92:

$$mh^2\ddot{\phi}(t) - mhg\sin(\phi(t)) = g_1(u, \delta) \quad (91)$$

$$m\dot{u}(t) = g_2(T_m, u) \quad (92)$$

A função $g_1(u, \delta)$ descreve o momento externo aplicado ao sistema, e pode ser definido de maneira semelhante a utilizada na modelagem do triciclo, pois este também depende da geometria do veículo. Assim, utilizando a Equação 77 que define o momento de rotação em ϕ multiplicada pela altura do centro de gravidade, a equação 91 passa a ser escrita como:

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{g}{h}\sin(\phi(t)) + \frac{\cos(\phi(t))}{lh}u^2(t)\delta(t) \quad (93)$$

De maneira análoga, a função $g_2(T_m, u)$ representa as forças externas atuando na direção do movimento longitudinal, e pode ser substituída pela formulação de força utilizada na modelagem do triciclo, com uma parcela responsável pela força de tração

aplicada (Equação 54) e outra indicando a força de atrito aerodinâmico (Equação ??). Desta forma, a equação 92 passa a ser:

$$\dot{u}(t) = \frac{2n\eta_T}{dm} T_m(t) - \frac{1}{2m} C_x A \rho u^2(t) \quad (94)$$

Para tornar este modelo simplificado mais próximo do modelo do triciclo, adiciona-se amortecimento ao movimento rotacional ϕ da bicicleta. Os amortecedores lineares, existentes no triciclo, podem ser aproximados por um amortecedor torcional equivalente igualando-se o trabalho realizado pelos dois mecanismos (Leal et al. 2008).

O trabalho W do amortecedor linear do triciclo quando ocorre uma inclinação ϕ é dada por:

$$W = C \dot{\phi} \phi \left(\frac{b}{2} \right)^2 \quad (95)$$

com C o coeficiente de amortecimento e $\frac{b}{2}$ a distância entre o centro de rolamento do veículo no eixo X e o amortecedor. Neste cálculo, assumiu-se que a posição do amortecedor coincide com a posição da roda para simplificar o problema. O trabalho equivalente de um amortecedor torcional é dado por:

$$W_{equiv} = C_t \dot{\phi} \phi \quad (96)$$

com C_t o amortecimento torcional equivalente. Igualando-se os trabalhos dos dois amortecedores, pode-se obter o valor do amortecedor torcional equivalente. Considerando-se os dois amortecedores existentes no triciclo, o valor do amortecimento torcional equivalente pode ser calculado como:

$$C_t = 2C \left(\frac{b}{2} \right)^2 \quad (97)$$

Adicionando amortecimento ao movimento de rotação em torno do eixo X do modelo da bicicleta, obtém-se a Equação 98, que representa a dinâmica de inclinação da bicicleta:

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{g}{h} \sin(\phi(t)) - \frac{C_t}{mh} \dot{\phi} + \frac{\cos(\phi(t))}{lh} u^2(t) \delta(t) \quad (98)$$

4.3: Semelhanças entre bicicleta e triciclo

Nesta subseção é apresentada uma comparação entre os dois modelos utilizados neste trabalho. O projeto de controladores e a análise dos sistemas em malha fechada pode ser bastante facilitado através da utilização de modelos simplificados. É claro que esta vantagem decorre do sacrifício de dinâmicas do sistema, que não serão modeladas. Duas variáveis são de maior interesse: o ângulo de inclinação ϕ e a velocidade u . Portanto, o modelo de uma bicicleta descrito pelas equações 93 e 94 foi proposto como uma simplificação do triciclo.

A comparação entre os dois modelos fornece informações sobre o seu comportamento. A seguir são apresentados os resultados obtidos. Para realizar as simulações, uma vez que os dois sistemas são instáveis em malha aberta, utilizou-se um controlador PID com compensação estática do ganho não-linear para estabilizar os sistemas. Este controlador será detalhado posteriormente em 5.3.

Para a simulação mostrada na Figura 16 considera-se uma entrada de esterço aplicado pelo motorista de $\delta_r = 0,1 \text{ rad}$ para esquerda e para a direita e uma velocidade constante $u = 10 \text{ m/s}$. A velocidade é controlada através de um controlador por modos deslizantes proposto em Roqueiro et al. (2010) e descrito na subseção 5.1. O gráfico mostra que o comportamento dinâmico dos sistemas apresenta semelhanças, com os mesmos valores de ϕ em regime. A diferença entre os comportamentos pode ser explicado pela ausência de interação entre as rodas frontais e o corpo do veículo no modelo da bicicleta .

A Figura 17 mostra a simulação do sistema em malha aberta para velocidade, considerando mudanças simultâneas de velocidade e ângulo de esterço, para testar o acoplamento entre as variáveis. A velocidade inicial dos dois modelos é 5 m/s e um torque motor constante de 100 Nm é aplicado. O esterço aplicado do motorista é de $0,1 \text{ rad}$ para cada lado. A diferença de inclinação entre os modelos é causada pela diferença de velocidade entre os sistemas, pois o modelo do triciclo (mais completo) apresenta forças de resistência que não são modeladas na bicicleta. A figura também mostra que os dois modelos apresentam semelhanças, com um aumento do ângulo de inclinação a medida que a velocidade aumenta, o que era esperado.

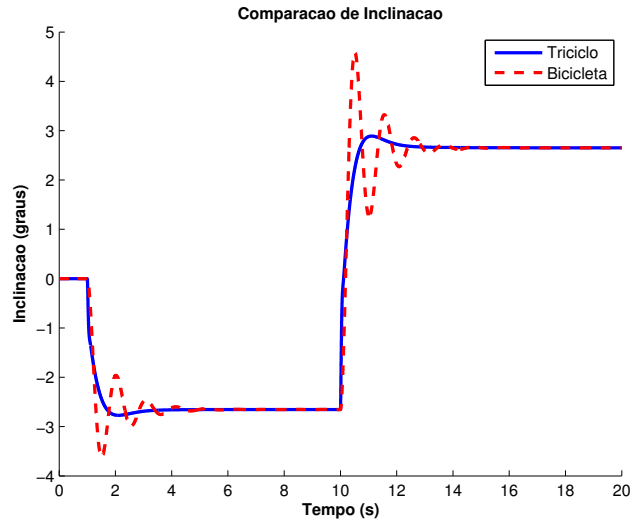


Figura 16: Comparação de inclinação entre modelos para velocidade constante.

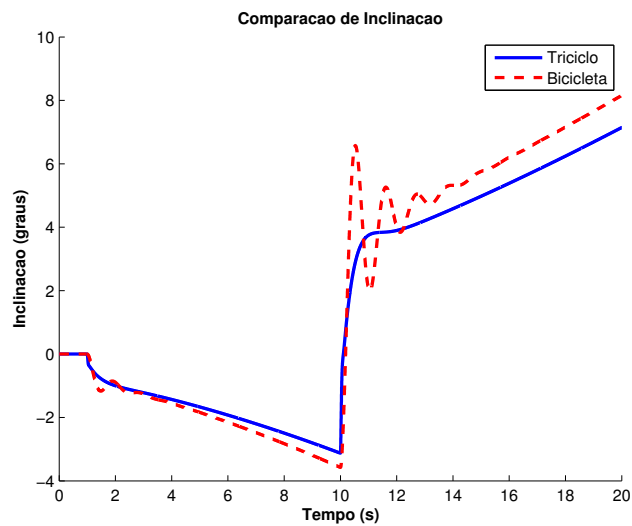


Figura 17: Comparação de inclinação entre modelos, sem controle de velocidade.

Estas simulações indicam que os dois modelos apresentam algumas semelhanças, atingindo mesmos valor de inclinação em regime, mesmo valor de esterço (ação de controle) em regime e comportamento dinâmico para a velocidade longitudinal semelhantes. Estas características indicam que as equações da bicicleta podem ser assumidas como uma simplificação do modelo completo do triciclo e, portanto, podem fornecer algumas informações para a análise de controladores.

4.4: Conclusões

Neste capítulo foi mostrada a modelagem de dois veículos: um triciclo com nove graus de liberdade e uma bicicleta simplificada com dois graus de liberdade. Os modelos foram obtidos a partir de uma formulação Lagrangeana, considerando suas energias cinéticas e potenciais. Os dois modelos são comparados por meio de simulação, verificando que o comportamento dinâmico do triciclo e da bicicleta se assemelham o suficiente para que a bicicleta seja considerado um modelo simplificado, que pode ser utilizado para a análise de controladores.

5. Desenvolvimento

Neste capítulo serão demonstrados as etapas e os cálculos para a síntese dos três controladores utilizados neste trabalho: PID com compensação estática da não-linearidade, controlador por realimentação linearizante e controle via *energy shaping*. Para este primeiro trabalho, os controles de velocidade e de inclinação compõe um problema multivariável para o caso do triciclo, mas foram tratados como dois problemas monovariáveis separados. É mostrado um controlador de velocidade baseado em modos deslizantes, retirado de Roqueiro et al. (2010), assim como um gerador de referências, encarregado de calcular o ângulo de inclinação desejado para o veículo ϕ_d que anula as forças laterais atuantes.

5.1: Controlador de velocidade

O controlador de velocidade por modos deslizantes utilizado neste trabalho foi proposto em Roqueiro et al. (2010), utilizando como variável de entrada o torque do motor T_m e como variável de saída a velocidade longitudinal do veículo u .

A partir do sistema na forma $M(q)\ddot{q} + C\dot{q} + K(q, \dot{q})q = F(q, \dot{q})$, o sistema pode ser reescrito como:

$$\ddot{q} = -M(q)^{-1}C\dot{q} - M(q)^{-1}K(q, \dot{q})q + M(q)^{-1}F(q, \dot{q}) \quad (99)$$

Através da mudança de variáveis

$$x_1 = q, x_2 = \dot{q} \quad (100)$$

o triciclo pode ser modelado como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -M(x_1)^{-1}Cx_2 - M(x_1)^{-1}K(x_1, x_2)x_2 + M(x_1)^{-1}F(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (101)$$

A saída do sistema a ser regulada é o erro de velocidade, que deve ser levado a

zero. A superfície de deslizamento para controle da velocidade pode ser definida como

$$S = u_d - u \quad (102)$$

onde a entrada T_m atua sobre S . Definindo-se a lei de controle como

$$T_m = \begin{cases} -k_1, & \text{se } S > 0, \\ +k_1, & \text{se } S < 0 \end{cases} \quad (103)$$

leva-se o sistema a erro nulo em regime, dado que k_1 seja suficientemente grande. Para aplicar a lei de controle nas simulações, foi utilizado um relê com histerese de valor 0.001, para reduzir o *shattering*, característico deste tipo de controle.

5.2: Geração de referência

Para cálculo do valor de referência de inclinação ϕ_d , foi utilizado o gerador de trajetórias proposto em Roqueiro et al. (2010) e aqui reproduzido. Este gerador calcula os valores de referência de ϕ e u , que servirão de entrada para os controladores de inclinação e velocidade, baseando-se na teoria de *flatness* aplicada ao modelo da bicicleta.

O erro de inclinação do veículo é calculado como o valor de inclinação medida ϕ e um valor de inclinação desejado ϕ_d . O valor de ϕ_d , que é o ângulo de inclinação que cancela as forças laterais atuantes no veículo, deve ser então determinado. Algumas linhas gerais orientam a solução para o problema de seguimento de trajetória:

- Durante variações de esterço desejado δ_d , deve-se tentar manter a velocidade u_d constante.
- Se o módulo do ângulo de inclinação ϕ_d é maior do que um valor máximo ϕ_{max} , deve-se alterar u_d para que δ_d seja atingido. Durante períodos transientes, o valor de δ_d deve ser mantido o mais próximo possível do valor desejado pelo motorista, evitando violar a restrição de inclinação $\|\phi_d\| < \phi_{max}$.
- Quando $\dot{u}_d = 0$ e $\dot{\delta}_d = 0$, então $\ddot{\phi} = 0$ (neste caso, ϕ , u_d e δ_d são relacionados

algebricamente). Da Equação 93, pode-se obter:

$$\tan(\phi)gl = u^2\delta \quad (104)$$

Mudanças instantâneas nas referências não podem ser realizadas em aplicações práticas. Por isto é necessário definir transições suaves para o sinal de referência, visando manter o veículo na pista.

Restrições de movimento são definidas aplicando-se a segunda lei de Newton em um ponto de massa (neste caso, a massa do veículo) movendo-se ao longo de um caminho (eixo x para movimento longitudinal) e inclinação (movimento angular ϕ). O sistema não pode se mover mais rápido do que as leis da física permitem. A solução destas duas equações diferenciais determinam os *set-points* factíveis. Outra restrição física vem dos limites do ângulo de inclinação. O objetivo de controle é mover a roda o mais próximo possível da posição definida pelo motorista, o mais rápido possível.

A partir do modelo simplificado da bicicleta (Equações 93 e 94), se o ângulo de inclinação ϕ é conhecido, $\dot{\phi}$ e $\ddot{\phi}$ podem ser calculados; conhecendo δ e usando 93, o termo u^2 pode ser calculado. Extraíndo sua raiz, e considerando apenas velocidades positivas, \dot{u} pode ser definido e, usando a Equação 94 o valor do torque T_m pode ser calculado. Assim, medindo-se ϕ e δ , é possível calcular todas as variáveis do sistema.

As condições iniciais de δ , $\dot{\delta}$ e $\ddot{\delta}$ em t_0 podem ser definidas pelos valores desejados ou por limitações físicas, enquanto ϕ , $\dot{\phi}$ e $\ddot{\phi}$ podem ser medidos no instante t_0 . Para um tempo t_1 , apenas δ e ϕ podem ser não nulas, as outras quatro variáveis devem ser obrigatoriamente zero.

Definindo-se então dois polinômios de ordem adequada para ϕ e δ que satisfaçam as condições iniciais e finais definidas anteriormente e calculando seus coeficientes, todas as variáveis do problema podem ser calculadas. Os polinômios escolhidos são mostrados a seguir.

- **Trajétoria linear para ϕ :** A trajetória para ϕ pode ser definida como uma equação linear:

$$\phi(t) = \phi(t_0) + (\phi(t_1) - \phi(t_0)) \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \quad (105)$$

Utilizando-se $u(t_0)$ e $\delta(t_0)$ define-se o valor para $\phi(t_0)$, e com $u(t_1)$ e $\delta(t_1)$ calcula-se $\phi(t_1)$ utilizando-se a equação 104. Se o valor de $\|\phi(t_1)\| > \frac{\pi}{6}$, então $\phi(t_1)$ deve ser definido como $\pm \frac{\pi}{6}$. Esta solução faz $\ddot{\phi} = 0$ para todo t .

- **Trajétoria para δ :** Para transições suaves por partes para a referência de esterço, é proposta uma equação linear similar a utilizada para o cálculo de $\phi(t)$:

$$\delta(t) = \delta(t_0) + (\delta(t_1) - \delta(t_0)) \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \quad (106)$$

- **Trajétoria para velocidade:** A função proposta pela equação 105 possui a segunda derivada nula. Desta maneira, para os cálculos da velocidade u a partir da equação 93, a segunda derivada de ϕ deve ser considerada zero. Considerando a equação em equilíbrio, pode-se determinar a referência de u utilizando-se as funções de trajetórias lineares para ϕ e δ e aplicando em

$$u(t) = \sqrt{\frac{g l \tan(\phi)}{\delta}} \quad (107)$$

Assim, obtém-se os valores de $\phi(t)$ e $u(t)$ que servirão de referência para os controladores de baixo nível.

5.3: PID com compensação estática da não-linearidade

O controlador PID com compensação estática da não-linearidade (referido neste trabalho simplesmente como PID) foi projetado para servir como um controlador para comparação, devido a ausência de artigos consolidados na literatura. De um lado, diversos artigos existentes se utilizam de diferentes modelos e apresentam poucos resultados experimentais, de outro os veículos construídos citados no Capítulo 2 possuem muito pouca informação técnica disponível.

Desta forma, escolheu-se o controlador PID para preencher esta lacuna. Devido a sua teoria estabelecida e as propriedades de análise que ele fornece, este tipo de controlador é adequado para fornecer um padrão de comparação.

Para projetar o controlador utilizaram-se modelos linearizados do triciclo. A partir da linearização do modelo em torno do ponto de equilíbrio $\phi = 0$ (veículo se deslocando

em linha reta, com valores de parâmetros nominais) foram obtidas funções de transferência para diferentes velocidades, criando um mapa relacionando a entrada (esterço aplicado δ) e a saída (ângulo de inclinação ϕ) para pequenas variações de inclinação. A Tabela 1 mostra as funções de transferência obtidas para diferentes velocidades entre 5m/s e 29m/s, juntamente com o ganho do modelo linearizado.

Tabela 1: *Funções de Transferência (FT's) obtidas através da linearização do modelo dinâmico do triciclo com 9 graus de liberdade, para diferentes velocidades.*

Velocidade (m/s)	Ganho da FT	Função de Transferência
5	583,48	$\frac{(s+0,79)}{(s+123,10)(s-2,28)(s+1,42)}$
7	717,60	$\frac{(s+0,90)}{(s+89,62)(s-2,49)(s+1,28)}$
9	896,43	$\frac{(s+0,93)}{(s+71,14)(s-2,71)(s+1,15)}$
11	1119,96	$\frac{(s+0,91)}{(s+59,49)(s-2,93)(s+1,04)}$
13	1388,20	$\frac{(s+0,87)}{(s+51,51)(s-3,14)(s+0,95)}$
15	1701,15	$\frac{(s+0,82)}{(s+45,72)(s-3,35)(s+0,87)}$
17	2058,80	$\frac{(s+0,76)}{(s+41,34)(s-3,56)(s+0,80)}$
19	2461,16	$\frac{(s+0,71)}{(s+37,93)(s-3,76)(s+0,74)}$
21	2908,23	$\frac{(s+0,67)}{(s+35,21)(s-3,95)(s+0,68)}$
23	3400,00	$\frac{(s+0,63)}{(s+32,98)(s-4,13)(s+0,64)}$
25	3936,48	$\frac{(s+0,59)}{(s+31,14)(s-4,31)(s+0,60)}$
27	4517,66	$\frac{(s+0,55)}{(s+29,58)(s-4,47)(s+0,56)}$
29	5143,56	$\frac{(s+0,52)}{(s+28,26)(s-4,63)(s+0,53)}$

A Figura 18 mostra graficamente os resultados da Tabela 1, exibindo a evolução dos polos e zeros do sistema de acordo com a velocidade do veículo. A Figura 19 detalha os polos e zeros próximos à origem.

Para o cálculo do controlador, foi utilizada a função de transferência para a velocidade de 15m/s, valor médio da faixa de velocidades esperada.

O controlador PID desejado deve estabilizar o sistema, obedecendo as seguintes

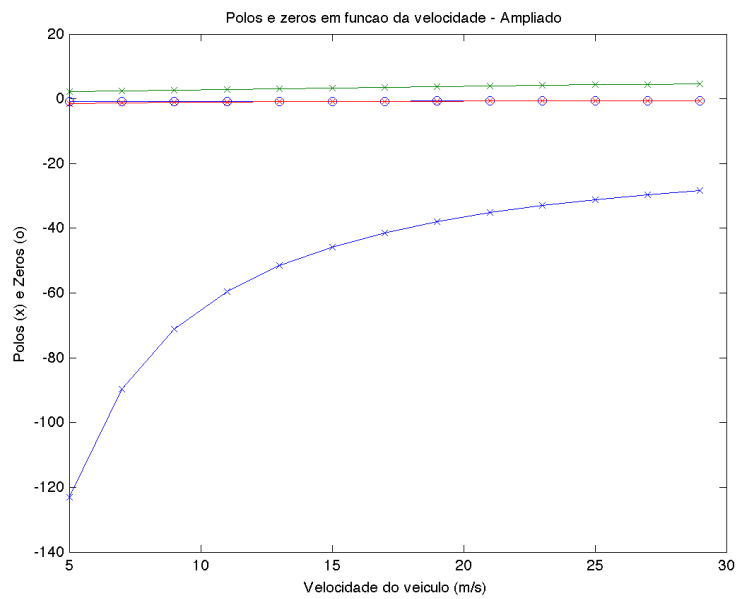


Figura 18: Evolução dos polos e zeros dos sistemas linearizados em função da velocidade.

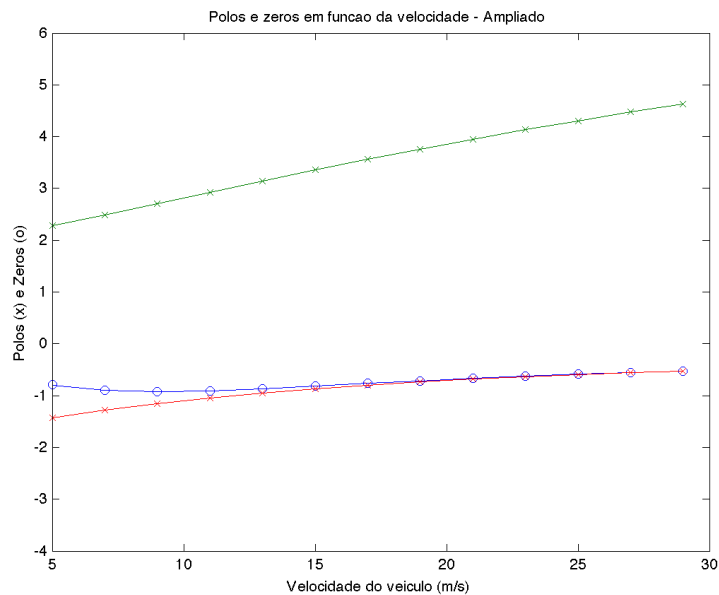


Figura 19: Detalhe da evolução dos polos e zeros dos sistemas linearizados em função da velocidade.

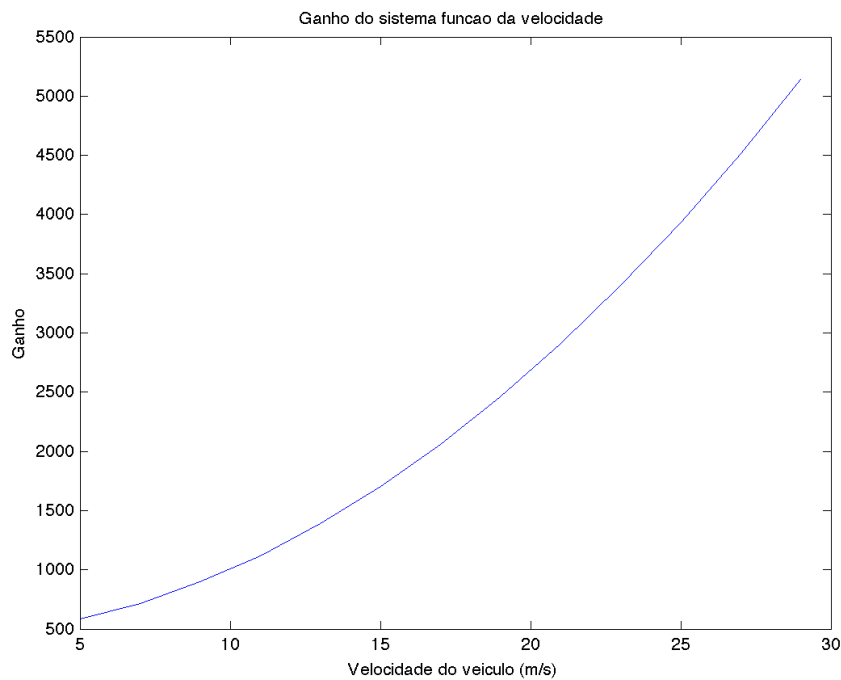


Figura 20: Evolução do ganho dos sistemas linearizados em função da velocidade.

especificações para resposta em malha fechada:

- Tempo de estabilização (5%) $\leq 1,5$ segundos;
- Sobressinal máximo $\leq 20\%$;
- Erro em regime nulo para entradas do tipo degrau.

Para atender as condições acima, o sistema em malha fechada deve ter seus polos localizados próximo ao ponto $-2 \pm 4i$. Um controlador adequado para a aplicação não deve apresentar rápidas variações no sinal de controle e no ângulo de inclinação, o que causaria desconforto para os passageiros. O sinal de entrada do controlador é a diferença entre a inclinação medida ϕ e a inclinação desejada ϕ_d , e sua saída será o ângulo de esterço aplicado pelo veículo. Para este trabalho, o controlador proposto possui dois graus de liberdade: o controlador $C(s)$ e um filtro de referência $F(s)$.

Ajustando o controlador $C(s)$ para atender as especificações, juntamente com o filtro de referência $F(s)$ para eliminar o efeito do zero dominante, o lugar das raízes

do sistema se modifica, resultando no gráfico mostrado na Figura 21, onde as linhas pretas delimitam uma área (em branco) onde os polos devem se localizar. Para detalhar o comportamento dominante do sistema, pode-se observar o diagrama de polos e zeros na Figura 22. Nela, é possível ver que o caminho percorrido pelos polos atende os requisitos. O zero dominante, localizado em aproximadamente -2 , será eliminado pelo filtro de referência, reduzindo o valor de sobressinal da resposta.

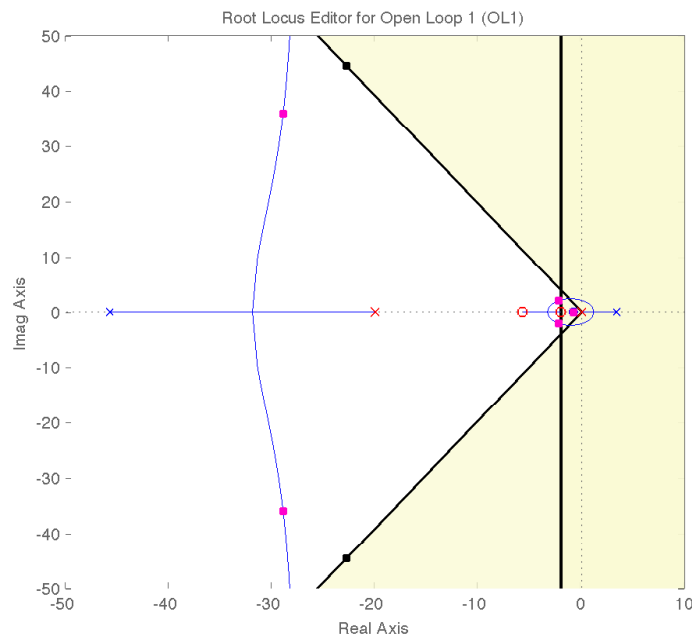


Figura 21: Diagrama de polos e zeros utilizando o controlador $C(s)$ e o filtro $F(s)$ propostos.

O controlador $C(s)$ obtido é dado pela equação 108

$$C(s) = K_c \frac{(s + 2,05)(s + 5,75)}{s(s + 20)} \quad (108)$$

e o filtro de referência $F(s)$ com ganho estático unitário é definido pela equação 109

$$F(s) = \frac{2,05}{5} \frac{(s + 5)}{(s + 2,05)} \quad (109)$$

Devido ao ganho variável do sistema, o ganho K_c do controlador não deve ser constante, mas uma função da velocidade do veículo ($K_c(u)$), para que os polos perma-

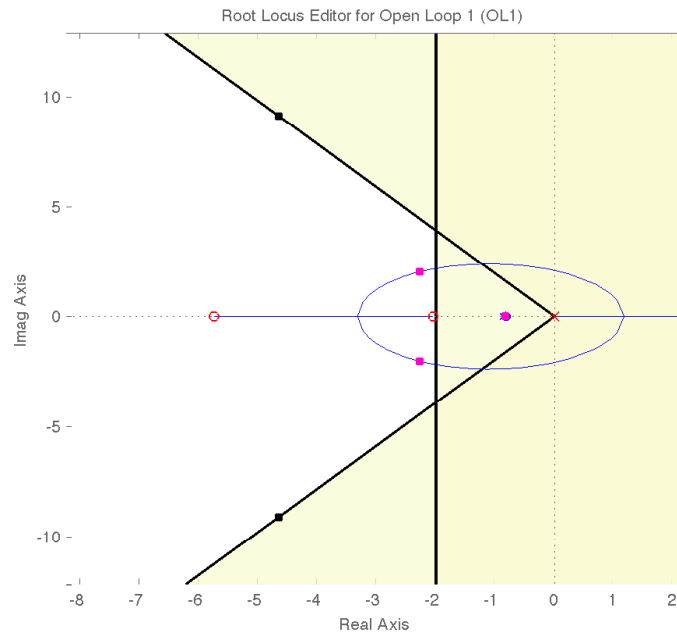


Figura 22: Detalhe do diagrama de polos e zeros utilizando o controlador $C(s)$ e o filtro $F(s)$ propostos.

neçam nos lugares designados e atendam os requisitos para toda a faixa de velocidade. Assim, o ganho variável do controlador irá compensar a mudança de ganho do sistema devido a variação de velocidade do triciclo. Este ganho será definido por uma função contínua, evitando assim efeitos indesejados que possam aparecer caso fosse utilizada uma lei de controle com descontinuidades que chaveasse diferentes ganhos de acordo com a velocidade.

A Tabela 2 mostra os valores dos ganhos do controlador $K_c(u_i)$ para as velocidades pontuais v_i que mantém os polos do sistema dentro das especificações desejadas para os modelos linearizados em diferentes velocidades.

Tabela 2: *Ganho do controlador $K_c(v_i)$ calculado para que os pólos do sistema permaneçam nos locais designados.*

u_i (m/s)	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
$K_c(u_i)$	8,5	5,14	3,45	2,37	1,61	1,16	0,91	0,71	0,57	0,46	0,36	0,318	0,267

Aplicando a transformação da equação 110, os pontos de $K_c(u_i)$ podem ser linearizados, resultando em um ganho do controlador ($K_{lc}(u_i)$).

$$K_{lc}(u_i) = \frac{1}{\sqrt{K_c(u_i)}} \quad (110)$$

Aproximando a função discretizada $K_{lc}(u_i)$ por uma reta, podemos estender a função dos pontos discretos u_i para todas as velocidades u . A função da reta que melhor descreve o ganho para os pontos obtidos é mostrada na equação 111:

$$K_{lc}(u) = -0,061352 + 0,0674u \quad (111)$$

Utilizando as equações 110 e 111 é fácil calcular o valor efetivo do ganho do controlador $K_c(u)$, resultando na equação 112

$$K_c(u) = \frac{1}{(K_{lc}(u))^2} \quad (112)$$

O diagrama de blocos do controlador PID com compensação estática da não-linearidade proposto é mostrado na Figura 23.

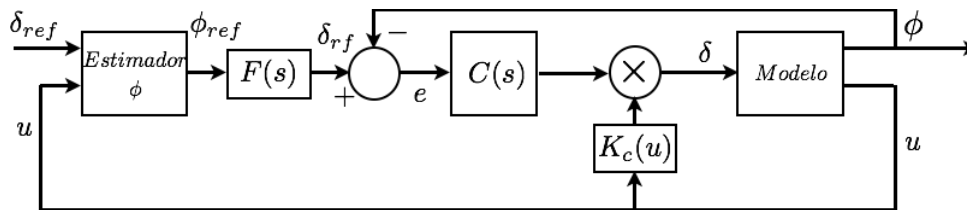


Figura 23: Estrutura do controlador PID com compensação estática da não-linearidade proposto.

Para verificar numericamente a validade da lei de controle proposta, o controlador e filtro de referência apresentados foram combinados juntamente com cada um dos treze modelos linearizados obtidos e o diagrama de polos e zeros de cada um dos sistemas resultantes foi analisado, verificando que o sistema é estável para todas as situações e que os polos do sistema se encontram nas posições desejadas.

5.4: Controle por realimentação linearizante entrada-saída

Esta subseção utiliza-se dos conceitos expostos em 3.1 para sintetizar um controlador por realimentação linearizante entrada-saída parcial, que atue no esterço do veículo de forma a estabilizar o seu ângulo de inclinação.

Primeiramente, é necessário transformar o sistema a ser controlado em uma representação de estados a partir das equações dinâmicas na forma $M(q)\ddot{q} + C\dot{q} + K(q, \dot{q})q = F(q, \dot{q})$. Isto pode ser feito pré-multiplicando o sistema pela matriz M de acordo com

$$\begin{aligned} M(q)^{-1}[M(q)\ddot{q} + C\dot{q} + K(q, \dot{q})q] &= M(q)^{-1}[F(q, \dot{q})] \\ \ddot{q} + C_a\dot{q} + K_a(q, \dot{q})q &= F_a(q, \dot{q}) \end{aligned}$$

com $C_a = M(q)^{-1}C$, $K_a = M(q)^{-1}K(q, \dot{q})$ e $F_a = M(q)^{-1}F(q, \dot{q})$. Manipulando-se o sistema é possível reescrevê-lo na forma de variáveis de estado, através de um integrador e da composição dos elementos de C_a , K_a e F_a .

Para o caso do modelo da bicicleta, a transformação é simples e se dá de maneira direta, com $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$ e $x_3 = u$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g\sin(x_1) + \frac{\cos(x_1)}{lh}x_3^2\delta(t) \\ \dot{x}_3 &= \frac{2nT_m(t)\eta T}{dm} - \frac{1}{2m}C_{xx_3^2}A\rho \end{aligned}$$

Para o modelo do triciclo, o cálculo algébrico da inversa de $M(q)$ mostrou-se complexo pois, ao contrário do modelo da bicicleta, a matriz de inércia do triciclo não é diagonal e apresenta dependências de estados do sistema. Por isto, $M(q)^{-1}$ é dado por uma expressão grande demais para ser trabalhada sem o auxílio métodos computacionais.

A representação de estados do sistema do triciclo tem como base o vetor de estados aumentado $q_a = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, z_1, \dot{z}_1, z_2, \dot{z}_2, z_3, \dot{z}_3, z_4, \dot{z}_4, \psi, \dot{\psi}, \phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta})$. O objetivo

de controlar apenas a variável ϕ faz com que a técnica de controle por linearização parcial seja estudada. Uma vez que o sistema representado por variáveis de estados já se encontra na forma adequada dada pela equação 4, deve-se provar que a função γ para o estado ϕ é inversível em todo o seu domínio. O algoritmo utilizado para verificar esta propriedade é mostrado no Apêndice A.

O subsistema que representa a dinâmica da inclinação do veículo (tanto para a bicicleta quanto para o triciclo) pode ser representado em uma forma compacta como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

com $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$, x o vetor de estados do sistema e u a entrada do sistema. A Figura 24 mostra o diagrama de bloco que representa o subsistema da dinâmica de inclinação do veículo juntamente com o controle linearizante.

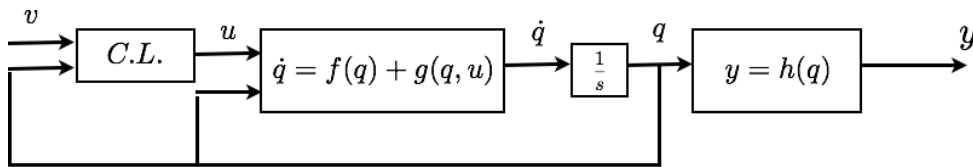


Figura 24: Diagrama de blocos mostrando controlador por realimentação linearizante e subsistema do triciclo.

Tomando-se como saída a variável $x_1 = \phi$ e calculando \dot{y} e \ddot{y} conforme a subsubseção 3.1.2, tem-se o grau relativo do sistema $\rho = 2$. Tomando-se por base a equação 8 que lineariza o sistema, tem-se:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{\rho-1} h(x)} [-L_f^\rho h(x) + v] \quad (113)$$

com

$$\begin{aligned}L_f^2 h(x) &= f(x) \\ L_g L_f h(x) &= g(x) \neq 0\end{aligned}$$

Utilizando o resultado acima e o controlador por realimentação proposto pela equação 113, consegue-se linearizar o sistema e obtém-se o mapa entrada-saída $\ddot{\phi} = v$. Garantindo-se que o sinal de referência r e suas derivadas sejam limitadas e realizando a transformação de variáveis descrita na subsubseção 3.1.3 para incluir a dinâmica do erro, pode-se projetar a lei de controle v que satisfaça os requisitos do sistema.

Deve-se escolher v de forma a tornar a dinâmica do sistema linear estável e que atenda sua resposta seja rápida e sem oscilações, características desejadas para o triciclo. Para tal, devido a presença de perturbações e de erros de modelagem, é proposto um controlador por realimentação de estados com integrador, descrito em Trofino (2009). A Figura 25 mostra o diagrama de blocos da estrutura do sistema linearizado com o controlador por realimentação de estados e integrador para rastreamento de referência.

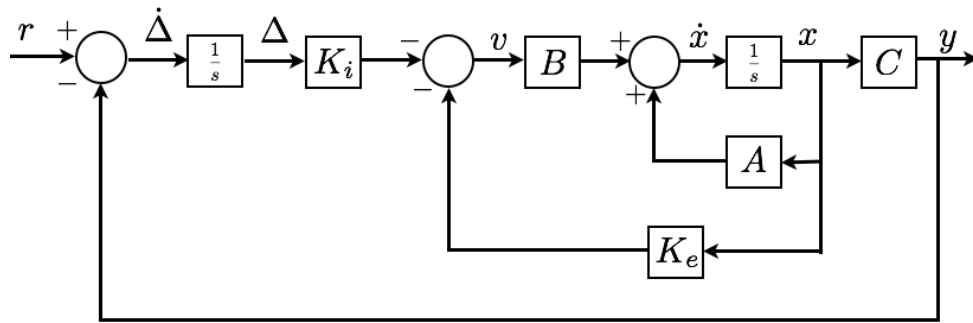


Figura 25: Estrutura do sistema linearizado e controlador proposto por realimentação de estados e rastreamento de referência com integrador.

A partir da figura e considerando x os estados do sistema, Δ os estados do integrador, K_e o ganho de realimentação dos estados e K_i o ganho de realimentação do integrador, é possível obter uma representação de estados do sistema aumentado que relaciona a entrada de referência r e a saída medida y .

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\Delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{A_a} \begin{bmatrix} x \\ \Delta \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{E_a} r, u = - \underbrace{\begin{bmatrix} K_e & K_i \end{bmatrix}}_{K_a} \begin{bmatrix} x \\ \Delta \end{bmatrix} \quad (114)$$

O problema de controle do sistema resume-se a definir os ganhos da matriz K_a tal que o sistema realimentado $\dot{x}_a = (A_x - B_a K_a)x_a + E_a r$ seja estável. Os ganhos do

vetor K_a podem ser definidos através de diversas técnicas. Neste trabalho, optou-se pela técnica conhecida como LQR. Esta técnica baseia-se na minimização de critérios quadráticos, associados a energia dos estados e da variável de controle do sistema que está sendo projetado.

Considerando-se o sistema realimentado dado pela equação 114 deseja-se minimizar uma função custo, que representa a energia do sistema, definida pela função J:

$$J = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} z(t)^T z(t) dt$$

$$z(t)^T z(t) = \begin{bmatrix} x_a(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (115)$$

com Q, R e N matrizes de ponderação para os sinais de $x_a(t)$ e $u(t)$. Os elementos da matriz Q devem ser maiores caso a prioridade seja minimizar a energia dos estados, o que acarreta em menores oscilações do sistema. O cálculo do controlador LQR resolve a equação 115, minimizando a função. É possível provar que, se existe um mínimo da função, então existe uma função de Lyapunov P definida positiva com sua derivada \dot{P} negativa, garantindo a estabilidade do sistema (Trofino 2009).

O problema de minimização de uma função custo pode ser resolvido através da equação de *Riccati*, permitindo obter os valores de K_a . Sua resolução analítica pode ser complicada, com a complexidade aumentando conforme a dimensão do problema. Entretanto, existem métodos computacionais eficientes para sua resolução. Neste trabalho foi utilizada a função *lqr()* do software *Matlab*, disponível no pacote *Control System Toolbox*. Dadas as matrizes do sistema A_a , B_a e as matrizes de ponderação Q e R, a função encontra a solução para a equação de *Riccati* se esta existir, e retorna os valores de K_a que minimizam J. É possível modificar a resposta do sistema modificando as matrizes Q e R.

Para este trabalho, os valores de Q e R foram definidos de maneira empírica, ajustando os valores das matrizes de ponderação e observando os resultados em um processo iterativo de forma a obter uma dinâmica mais rápida. Os valores obtidos foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, R = [0,001] \quad (116)$$

e os ganhos calculados para o controlador foram $K_e = [102,4 \ 46,9]$ e $K_i = [-109,54]$.

5.5: Controle por *Energy Shaping*

Esta subseção seguiu a abordagem proposta em Ortega et al. (1998) a partir da modelagem das energias cinéticas \mathcal{T} e potenciais \mathcal{V} do sistema para a síntese de um controlador baseado em *Energy Shaping* que estabiliza o sistema.

Para isto foram utilizadas as equações de energia de uma bicicleta simplificada. A bicicleta incorpora as características dinâmicas de um pêndulo invertido, problema similar ao encontrado no triciclo.

5.5.1: Controlador Proporcional-Derivativo baseado em passividade

O controlador PD baseado em passividade é composto por uma componente representando sua energia potencial $\mathcal{V}_c(q)$ e uma componente para a dissipação de energia $\mathcal{F}_c(\dot{q})$. Para que o sistema em malha fechada seja globalmente estável, é necessário que:

- A energia potencial desejada do sistema em malha fechada \mathcal{V}_d , dada pela equação:

$$\mathcal{V}_d(q) \triangleq \mathcal{V}(q) + \mathcal{V}_c(q) \quad (117)$$

tenha um único ponto de mínimo global em $q = q_*$ (constante) e seja radialmente ilimitada.

- A função de dissipação \mathcal{F}_c satisfaça:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \dot{q}}(0) = 0 \text{ e } \dot{q} \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \dot{q}} > 0, \forall \dot{q} \neq 0 \quad (118)$$

Seguindo essas considerações na escolha do controlador é possível provar que o sistema é globalmente assintoticamente estável (Ortega et al. 1998). Para o caso do triciclo e da bicicleta, apenas a questão da estabilidade do ângulo de inclinação ϕ será analisada.

Definindo a ação de controle u_c em função da energia potencial do controlador $\mathcal{V}_c(q)$ e de um elemento de dissipação do controlador $\mathcal{F}_c(\dot{q})$ de acordo com a equação 119,(Ortega et al. (1998)):

$$u_c = -\frac{\partial \mathcal{V}_c}{\partial q}(q) - \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) \quad (119)$$

temos que, a partir da escolha adequada das funções de energia potencial e de dissipação desejadas, é simples obter o controle a partir das equações 117, 118, e 119.

Na etapa seguinte, o modelo da bicicleta será utilizado para a síntese de um controlador. Para o sistema em malha aberta, os pontos de equilíbrio são encontrados derivando-se a energia potencial do sistema.

$$\frac{\partial \mathcal{V}_c(q)}{\partial q} = 0 \quad (120)$$

encontrando os pontos de equilíbrio em $\phi = i\pi, i = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Derivando-se a equação 120 novamente podemos concluir sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio, sendo o sistema instável para $\phi = 0$ e estável para $\phi = \pi$.

É necessário escolher uma função candidata para \mathcal{V}_d que modifique a estabilidade do sistema e torne o ponto de equilíbrio desejado q_* um mínimo da função. Uma função candidata é dada por

$$\mathcal{V}_d(q) = \frac{1}{2}k_p \tilde{q}^2 \quad (121)$$

com $k_p > 0$ e $\tilde{q} \triangleq q - q_*$.

De maneira semelhante é possível escolher a função de dissipação desejada do sistema que satisfaça as equações 30 e 118. A função proposta para este trabalho é dada pela equação 122:

$$\mathcal{F}_d(q) = \frac{1}{2}k_d \dot{q}^2 \quad (122)$$

com

$$\mathcal{F}_d(\dot{q}) \triangleq \mathcal{F}(\dot{q}) + \mathcal{F}_c(\dot{q}) \quad (123)$$

e $k_d > 0$. Esta escolha de funções leva a equação 117 a ser reescrita na forma:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathcal{V}(\mathbf{q}) - \mathcal{V}_d(\mathbf{q})) - \frac{\partial \mathcal{F}_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (124)$$

sendo a primeira parcela do controle é responsável pelo *energy shaping* do sistema e a segunda parcela adicionando amortecimento ao mesmo. O controle estabilizante calculado pela lei de controle proposta é obtido manipulando-se 123 e substituindo-se 87, 121, 122 em 124, o que resulta em:

$$\mathbf{u} = -k_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_*) - mgh\sin(\mathbf{q}) - k_d(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_*) \quad (125)$$

O controle proposto estabiliza o sistema, tornando-o globalmente assintoticamente estável. Porém, podem haver erros na modelagem do sistema. Neste trabalho foram considerados erros na modelagem da massa m e na altura do centro de gravidade h . Além deste efeito, perturbações atuantes no sistema geram torques que afetam seu comportamento. Nestas condições, mesmo que as propriedades entrada-saída não se alterem, o sistema não é mais considerado globalmente assintoticamente estável no ponto de equilíbrio desejado ($\mathbf{q} \neq \mathbf{q}_*$).

Adicionando um integrador ao controle é possível corrigir os desvios causados pelos erros de modelagem e pelas perturbações, fazendo com que o sistema volte a seguir a referência desejada. O integrador é o elemento passivo mais simples que pode ser feito (Sepulchre et al. 1998), e sua combinação em paralelo com o controlador PD proposto também resulta em um sistema passivo, conforme mostrado na subsubseção 3.2.1.

A lei de controle obtida para o sistema é resumida pela equação 126:

$$\mathbf{u}_T = -k_p(\mathbf{q} - \mathbf{q}_*) - mgh\sin(\mathbf{q}) - k_d(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_*) - k_i * (\mathbf{q} - \mathbf{q}_*) \quad (126)$$

com $k_p = 25000$, $k_d = 2500$, $k_i = 15000$ e $mgh = 4905$ ganhos obtidos de forma empírica, que tornam a resposta dinâmica do sistema semelhante à obtida para o controlador PID. O controle \mathbf{u}_T fornece os torques que estabilizam o sistema. Esta variável deve ser

convertida em esterço, entrada real para o sistema triciclo, através da transformação:

$$\delta = \frac{u_{\tau} l}{\cos(\phi) m h u^2} \quad (127)$$

com l o comprimento do veículo, h a altura do centro de gravidade, m a massa do veículo e u sua velocidade longitudinal. Esta função foi obtida através da equação 80, que relaciona o momento gerado pelo esterço com o ângulo δ .

5.6: Conclusões

Este capítulo demonstra os passos utilizados para sintetizar os controladores PID compensação estática da não-linearidade, realimentação linearizante e *Energy Shaping* baseados na teoria descrita no capítulo 3. Os controladores foram projetados de maneira a rejeitarem perturbações não-mensuráveis do tipo degrau. O controlador PID foi ajustado a partir da linearização do sistema nominal em torno de um ponto desejado, e propõe-se um controlador com dois graus de liberdade para atender requisitos de performance. O controlador por realimentação linearizante foi aplicado apenas em uma parte do sistema (linearização parcial), e obtendo-se linearização entrada-saída. Em seguida o sistema foi estabilizado através de realimentação de estados com integrador, com ganhos de realimentação calculados através do processo de minimização da energia (LQR). O controlador por *Energy Shaping* foi baseado na formulação lagrangeana do modelo do triciclo, modificando as energia potencial e a função de dissipação do sistema e adicionando um termo integrativo para corrigir perturbações e variações paramétricas.

6. Simulação e Resultados

Este capítulo apresenta os resultados obtidos da simulação dos controladores em malha fechada com o modelo completo do triciclo em diferentes condições de funcionamento, assim como os efeitos de perturbações sobre o sistema. Verifica-se a estabilidade dos controladores com o auxílio de métodos numéricos, e o efeito da variação de parâmetros do sistema é detalhada para cada um dos controladores.

6.1: Análise de estabilidade e robustez utilizando software AUTO

Antes de iniciar as simulações, julgou-se necessário verificar a validade das soluções obtidas e testar sua robustez frente a variações de parâmetros. O método de análise analítica por funções de Lyapunov foi descartado devido a complexidade dos sistemas e a dificuldade de encontrar funções adequadas. Por isto, optou-se por realizar esta análise através de métodos numéricos. Foi utilizado o software AUTO (Doedel 2009) juntamente com sua interface gráfica, Xppaut (*XPP-AUT - X-Windows PhasePlane plus Auto Version 5.99* 2009). Em conjunto, estas ferramentas fornecem uma maneira simples e de fácil visualização dos resultados. Entretanto, o software possui limitações.

Ao tentar configurar o software com o equacionamento completo do modelo do triciclo, os resultados não foram satisfatórios. Uma vez que o software pede que sejam dadas equações no formato de variáveis de estado, o cálculo algébrico destas terminou por aumentar demasiadamente o tamanho do problema, como descrito na subseção 5.4. Erros numéricos eram introduzidos devido a complexidade e ao número de equações, e ajustes de parâmetros de simulação não produziram resultados confiáveis. Decidiu-se aproveitar o paralelo entre o triciclo e a bicicleta e utilizar o modelo da bicicleta nas simulações da análise de estabilidade com o software AUTO.

6.1.1: Análise dos controladores

Os controladores foram analisados variando a massa m , a altura do centro de gravidade h e a velocidade u entre valores máximos e mínimos determinados pela Tabela

3. Estes valores foram obtidos a partir de definições de projeto, considerando variações esperadas de até 20% para estes parâmetros.

Tabela 3: Valores nominais, máximos e mínimos considerados para as simulações de robustez utilizando o software AUTO.

	valor mínimo	nominal	valor máximo
h (m)	0,8	1	1,2
m (kg)	400	500	600
u (m/s)	5	15	30

A análise foi feita modificando-se o valor de referência de inclinação desejado entre ± 1 rad (aproximadamente ± 57 graus). Estes limites não são realizáveis pelo veículo, que pode operar entre ± 34 graus, mas ajudam a mostrar que mesmo que a estabilidade global não seja obtida, a estabilidade local para uma área suficientemente grande garante sua robustez em condições normais de funcionamento.

Os resultados são mostrados graficamente por meio de diagramas de estabilidade. Eles indicam os pontos de equilíbrio do sistema para variações de parâmetros, bem como a estabilidade deste ponto. Este estudo tem por interesse analisar as variações do ponto de equilíbrio da inclinação do veículo ϕ para variações do ângulo de referência de inclinação ϕ_d .

Para todos os controladores testados, o diagrama de equilíbrio indicou que os pontos de equilíbrio são estáveis para toda a faixa de teste (referência de inclinação ± 1 rad), assim como para os conjuntos de parâmetros analisados. A Figura 26 mostra o exemplo do diagrama de estabilidade para o controlador PID considerando parâmetros nominais. Ela indica que os pontos de equilíbrio de inclinação do sistema em malha fechada coincidem com o ângulo de referência ($\phi = \phi_d$). O mesmo comportamento pode ser observado para os casos onde existe variação nos parâmetros do sistema, indicando que o controlador consegue rejeitar erros provocados por mudanças da massa e da altura do centro de gravidade do veículo dentro dos limites definidos

Comportamentos semelhantes são observados para os controladores por *energy shaping* e por realimentação linearizante, indicando que estes controladores também

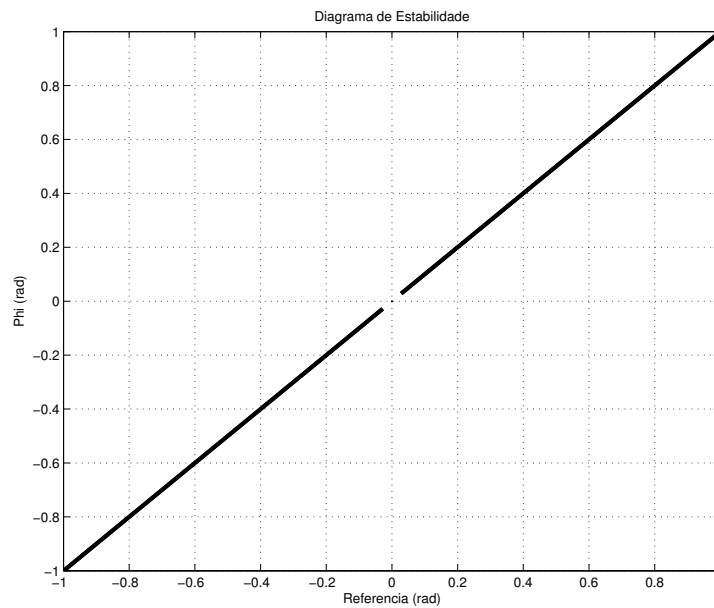


Figura 26: Diagrama de estabilidade dos pontos de equilíbrio para o caso nominal utilizando controlador PID aplicado ao modelo da bicicleta.

conseguem rejeitar variações de parâmetros do sistema com erro nulo de inclinação em regime.

Estas simulações, apesar de se utilizarem do modelo de uma bicicleta simplificada, são um indicativo de que os controladores podem apresentar robustez também quando aplicados ao modelo completo do triciclo.

6.2: Comparação entre os controladores propostos

Para comparar os controladores propostos neste trabalho foram feitas simulações utilizando os softwares *Matlab*® e *Simulink*®. O modelo do veículo completo com 9 graus de liberdade foi portado para *Simulink*, juntamente com os controladores.

Para abranger diversas condições de funcionamento, visando uma simulação realista de possíveis condições encontradas pelo veículo, a simulação é composta por uma sequência de esterços e mudanças de velocidade aplicados pelo motorista e uma sequência de perturbações externas aplicadas ao sistema.

O esterço de referência aplicado pelo motorista δ_r é definido por uma sequência de degraus de diferentes amplitudes, de acordo com a velocidade do veículo, que será definida em seguida. A Figura 27 mostra a sequência de degraus de esterço desejado pelo motorista.

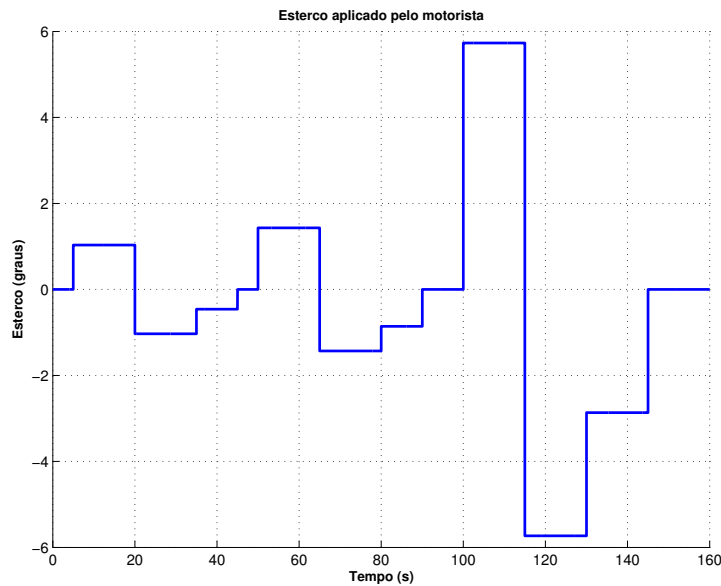


Figura 27: Esterço de referência desejado pelo motorista utilizado para as simulações.

Três valores de velocidade foram escolhidos para a comparação das simulações: 30m/s, 15m/s e 5m/s. Estes valores representam o veículo em alta, média e baixa velocidade, respectivamente. Durante a simulação, as transições entre as velocidades também serão analisadas, acompanhadas de mudanças na inclinação do veículo.

Os valores de esterço aplicados foram escolhidos baseados em Lee et al. (2000), que mostra os valores de curva utilizados para construções de rodovias no Brasil. Os valores são descritos na tabela 4, e relacionam a velocidade com os ângulos de esterço máximos para um veículo com distância entre-eixo de 2,2m realizar a curva. Como pode ser visto na Figura 27, os valores de referência utilizados excedem os valores limites indicado na tabela. Com isso, busca-se mostrar que o veículo é capaz de atender solicitações maiores do que as exigidas em operação normal.

As perturbações externas aplicadas sobre o sistema são a força lateral do vento

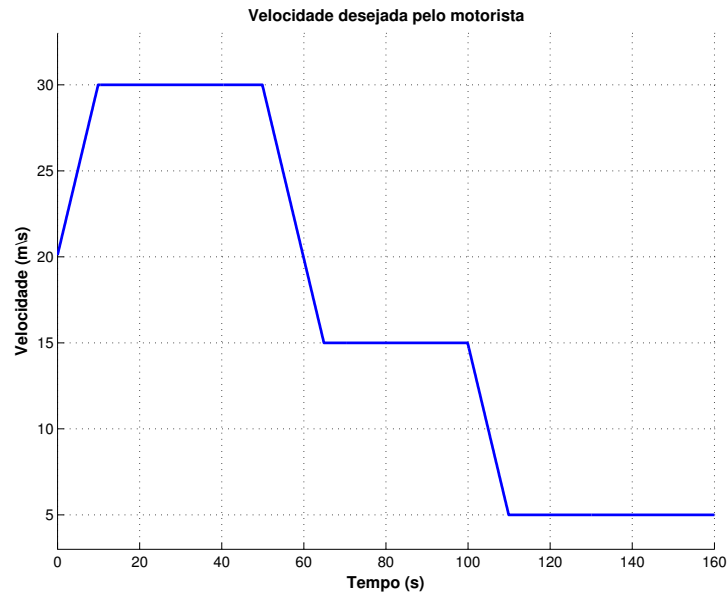


Figura 28: Velocidade de referência desejada pelo motorista utilizadas para as simulações.

Tabela 4: Ângulos de curvatura para uma pista com superelevação de 4%, para um veículo com distância entre-eixos de 2,2m.

	Velocidade de projeto(m/s)				
	8.3	16.6	22.2	27.7	30.5
$\delta(\text{deg.})$	4.19	0.84	0.45	0.27	0.16
$\delta(\text{rad})$	0.073	0.014	0.008	0.005	0.003

V_{vent} e a força do piso devido a rugosidades na pista F_{pi} atuante na i -ésima roda. Elas serão definidas na subsubseção 6.2.3, que mostra os resultados de simulação do sistema sob ação de forças externas.

Em todas as simulações, a força de frenagem não é utilizada ($F_{fr} = 0$) e o terreno é considerado plano, sem aclives ($\alpha = 0$).

6.2.1: Caso nominal, sem perturbação

Nesta subsubseção são apresentados os resultados obtidos através da simulação do modelo do triciclo com 9 graus de liberdade utilizando como entrada os sinais de referência mostrados nas Figuras 27 e 28, desconsiderando a influência de forças externas.

De acordo com a subseção 5.2, os sinais de esterço e de velocidade fornecidas pelo motorista são transformadas em referências de inclinação desejada e de velocidade realizáveis pelo sistema. Estas referências serão as entradas dos controladores de baixo nível (controlador de velocidade por *sliding mode*, descrito em Roqueiro et al. (2010) e o controlador de inclinação utilizado).

A velocidade de referência calculada pelo gerador de trajetórias a velocidade que permite o veículo se aproximar ao máximo do esterço desejado pelo motorista, limitando a inclinação e a velocidade do triciclo a valores compatíveis com os limites do projeto. Para a simulação do caso nominal sem perturbação, a velocidade de referência é dada pela Figura 29, que compara a velocidade desejada pelo motorista e a velocidade calculada para que o veículo consiga atender a trajetória desejada.

Pode-se observar que os momentos em que a velocidade desejada pelo motorista e a velocidade calculada pelo gerador de trajetória são diferentes são aqueles em que a inclinação do veículo atinge o limite de ± 30 graus (Figura 31). O gerador de referências modifica a velocidade de referência para que a inclinação desejada seja compatível com os limites físicos do triciclo. A velocidade efetiva do veículo é mostrada no gráfico 30, mostrando que o controlador de velocidade consegue seguir a referência do gerador de trajetórias com erro nulo em regime.

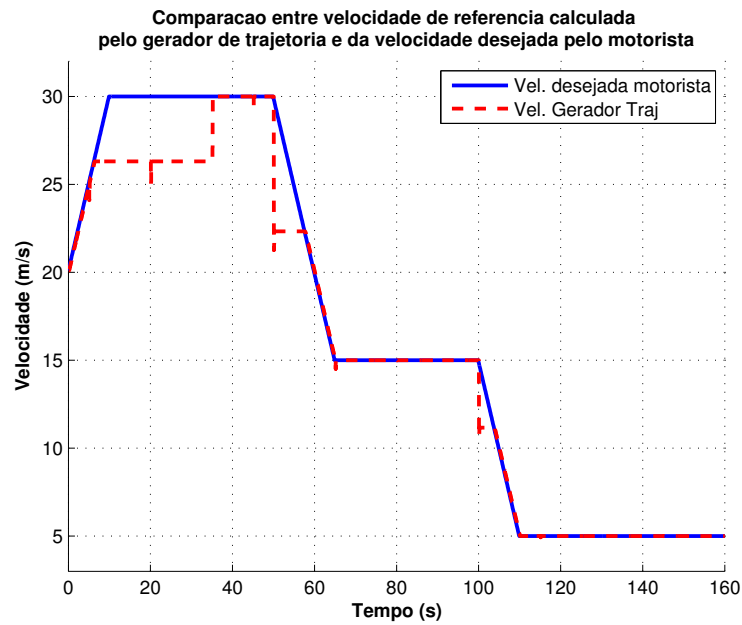


Figura 29: Comparação entre a velocidade desejada pelo motorista e a velocidade de referência calculada pelo gerador de trajetórias, para o caso nominal sem perturbações.

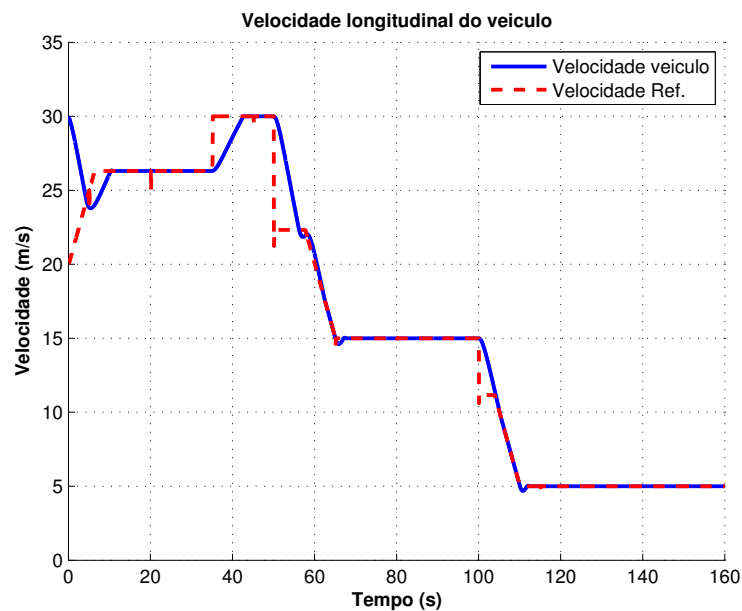


Figura 30: Velocidade longitudinal do veículo e velocidade de referência calculada pelo gerador de trajetória.

A Figura 31 mostra a inclinação do veículo utilizando o controlador PID, o sinal de referência de inclinação e o erro entre os dois sinais. O controlador estabiliza o sistema e elimina o erro para toda a faixa de velocidades, como era esperado. A referência é limitada pelo gerador de trajetórias em 30 graus, mas o veículo pode ultrapassar este limite. O erro máximo obtido com este controlador para esta configuração de simulação foi de 41,55 graus, e o erro quadrático médio foi de 2,92. A ação de controle é mostrada na Figura 32

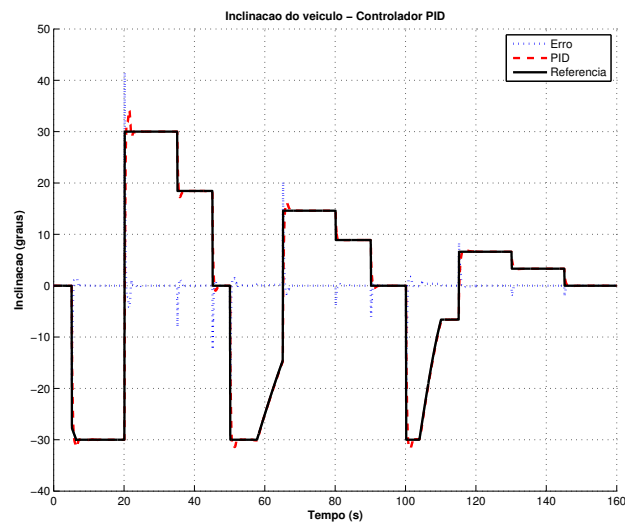


Figura 31: Resultado de simulação para a inclinação do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.

Para melhor analisar a resposta, dois momentos da simulação foram ampliados: de 0 a 30 segundos (Figura 33) e de 95 a 140 segundos (Figura 35). A Figura 33 permite analisar a resposta para altas velocidades, observando-se o comportamento um pouco oscilatório do sistema e o sobressinal existente em 7 e 22 segundos. Este sobressinal é limitado e dentro do valor especificado pelo projeto ao controlador ($< 20\%$). O ângulo de esterço aplicado é mostrado na Figura 34.

A Figura 35 ressalta o comportamento do sistema para variações de velocidade, onde entre aproximadamente 104 e 110 segundos existe uma mudança de velocidades e, portanto, uma mudança da referência de inclinação. O controlador acompanha a

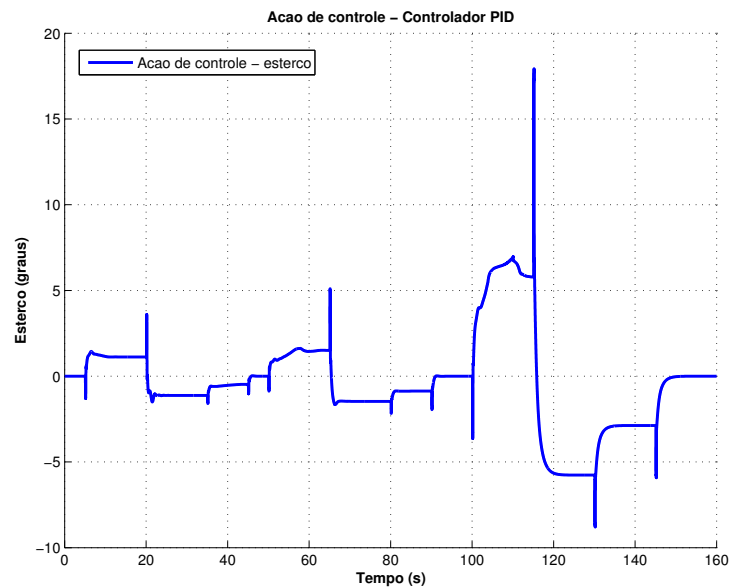


Figura 32: Resultado de simulação para a estereo do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.

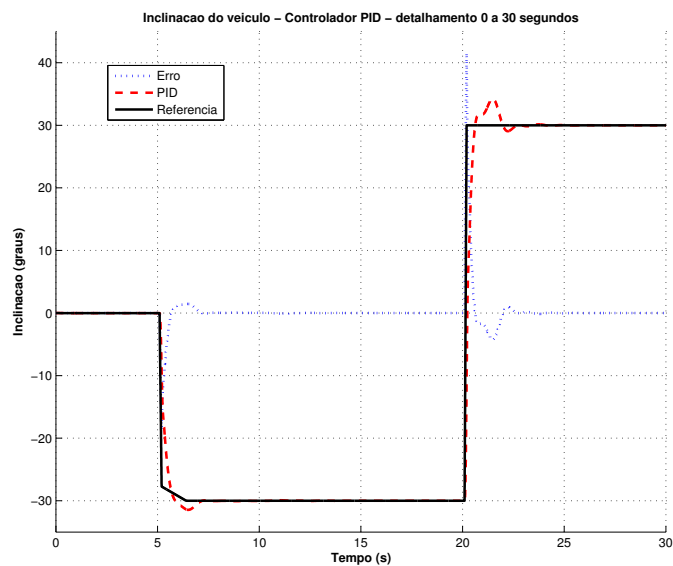


Figura 33: Detalhamento da simulação entre 0 e 30 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.

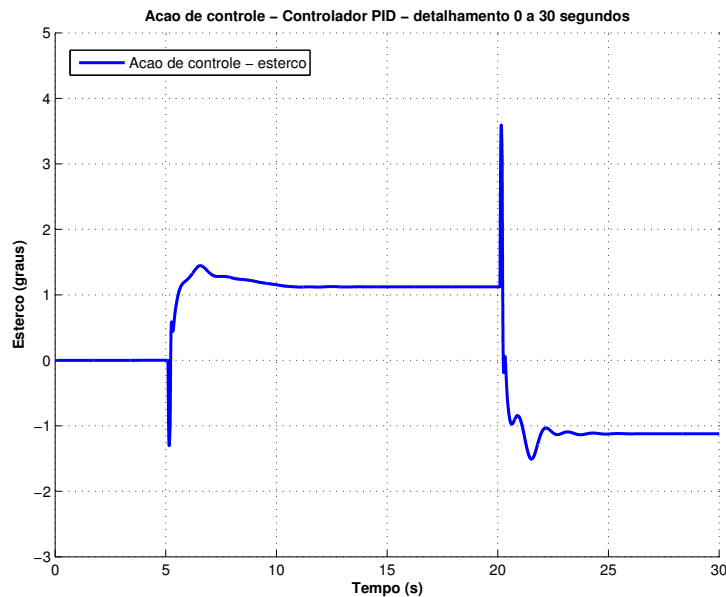


Figura 34: Detalhamento da simulação entre 0 e 30 segundos para o esterço do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.

mudanças de referência com um erro menor que 1 grau, garantindo a estabilidade do veículo. Em 115 segundos ocorre uma pequena mudança na inclinação de referência do veículo, e a inclinação apresenta uma resposta com poucas oscilações. A ação de controle é mostrada na Figura 36, onde observa-se os maiores valores de pico do esterço necessários durante a transição. Estes valores estão relacionados as dificuldades do uso de controladores STC em baixas velocidades.

Uma simulação semelhante foi feita para o controlador por *energy shaping*. Os parâmetros utilizados no controlador tornaram a dinâmica de inclinação do veículo bastante rápida, porém com um sobressinal maior que o do gerado com o controlador PID. Em regime, o sistema atende as especificações, eliminando o erro em regime para o seguimento de trajetória. O erro máximo foi de 47,29 graus, com um erro médio quadrático de 3,78. A Figura 37 mostra a ação de controle.

A Figura 39 detalha o comportamento da inclinação do veículo, onde observa-se uma dinâmica bastante rápida logo após a mudança da referência, aproximando-se rapidamente do valor desejado, mas demorando aproximadamente 5 segundos para o sistema atingir erro nulo, um dos fatores que fez seu erro quadrático médio ser maior

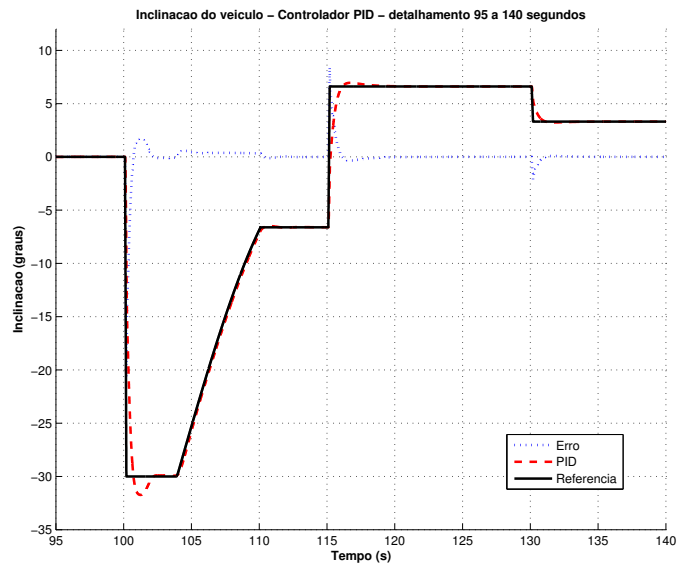


Figura 35: Detalhamento do resultado de simulação entre 95 e 140 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.

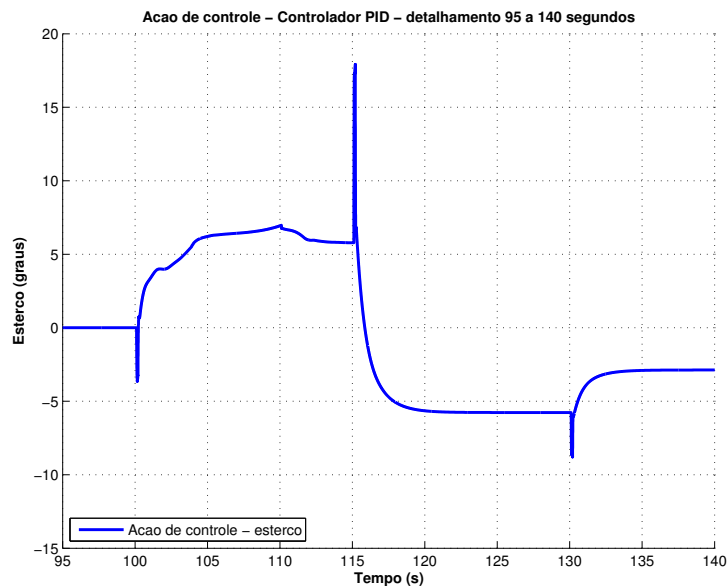


Figura 36: Detalhamento da simulação entre 95 e 140 segundos para o esterço do veículo utilizando controlador PID para o caso nominal sem perturbação.

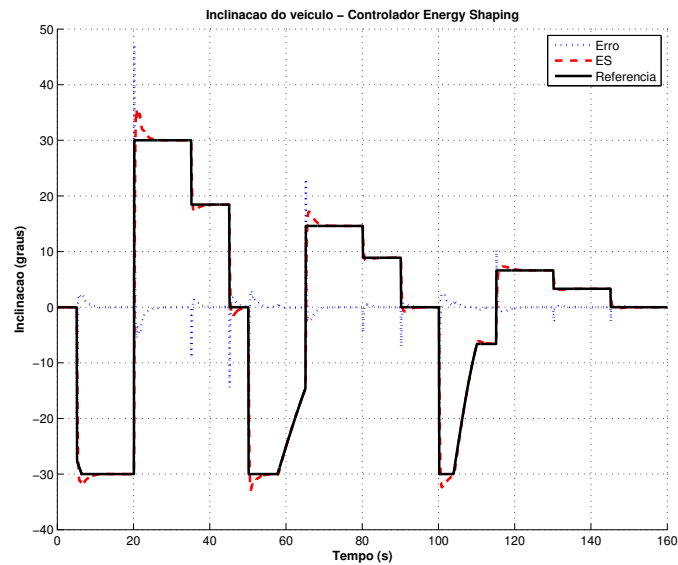


Figura 37: Resultado de simulação para a inclinação do veículo utilizando controlador por *energy shaping* para o caso nominal sem perturbação.

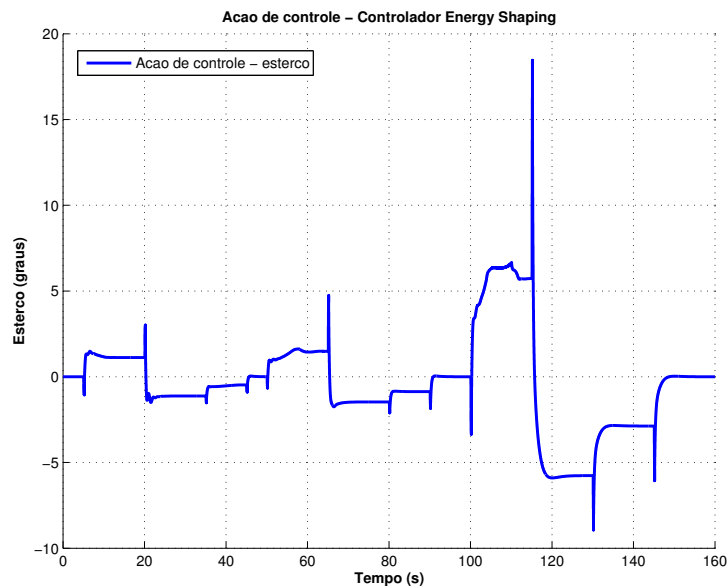


Figura 38: Resultado de simulação para a esterço do veículo utilizando controlador por *energy shaping* para o caso nominal sem perturbação.

do que o do controlador PID. O sobressinal apresenta algumas oscilações, mas dentro do valor limite de 20%. O valor da ação de controle (Figura 40) apresenta picos nas transições com valores menores do que os apresentados pelo controlador PID.

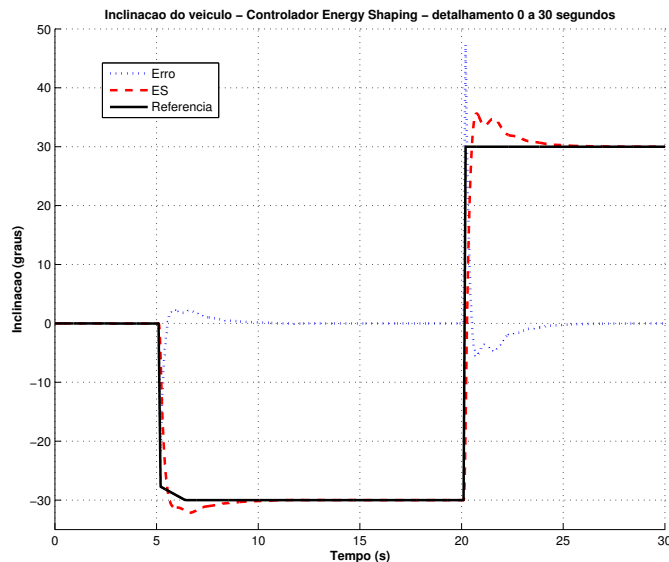


Figura 39: Detalhamento do resultado de simulação entre 0 e 30 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador *energy shaping* para o caso nominal sem perturbação.

Por último, a resposta do sistema é analisada entre 95 e 140 segundos (Figuras 41 e 42). O sistema consegue acompanhar as mudanças de referência entre 105 e 110 segundos, eliminando rapidamente o erro.

A simulação também foi realizada para o controlador por realimentação linearizante utilizando os mesmos parâmetros e sinais de entrada. As Figuras 43 e 44 mostram os resultados obtidos. Pelo gráfico de inclinação observa-se que, em regime, o controlador elimina o erro ao seguimento de referência e apresenta sobressinal menor do que o apresentado pelos controladores PID e *energy shaping*, porém com uma dinâmica mais lenta. Esta dinâmica reflete-se diretamente pelo erro quadrático médio, calculado como 33,81. O valor máximo de erro para a simulação foi de 59,77 graus.

De maneira semelhante aos controladores apresentados anteriormente, o gráfico

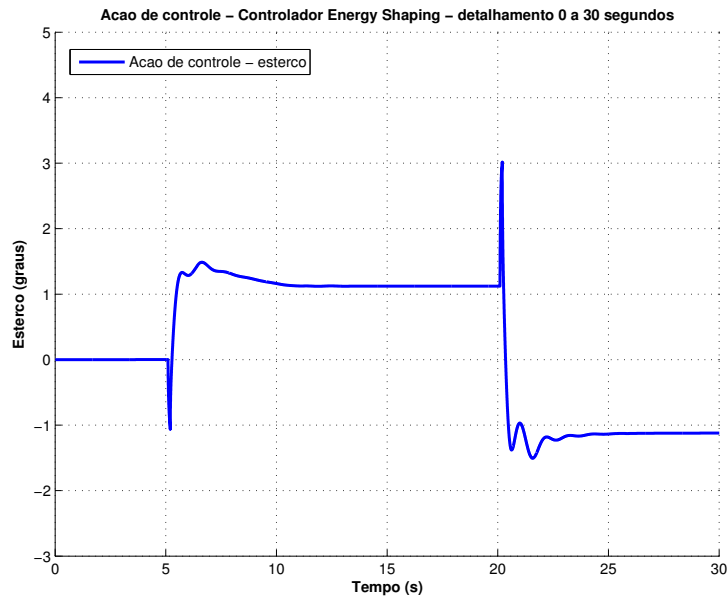


Figura 40: Resultado de simulação para a esterço do veículo entre 0 e 30 segundos utilizando controlador por *energy shaping* para o caso nominal sem perturbação.

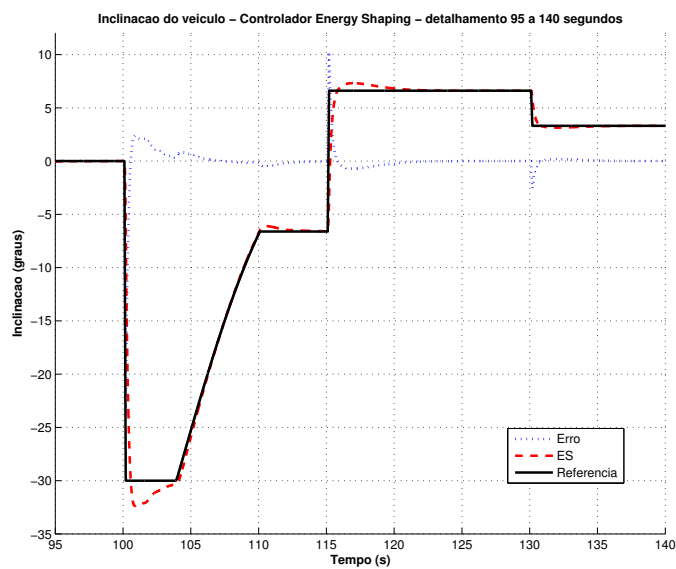


Figura 41: Detalhamento do resultado de simulação entre 95 e 140 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador *energy shaping* para o caso nominal sem perturbação.

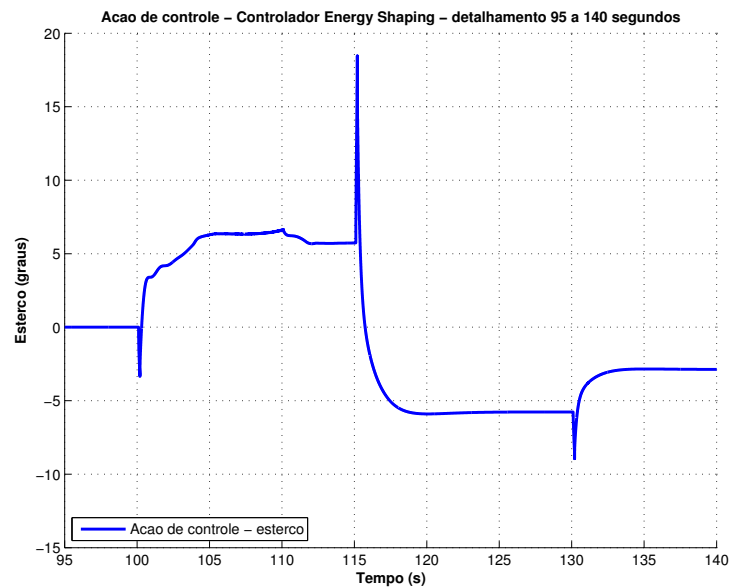


Figura 42: Resultado de simulação para a esterço do veículo entre 95 e 140 segundos utilizando controlador por *energy shaping* para o caso nominal sem perturbação.

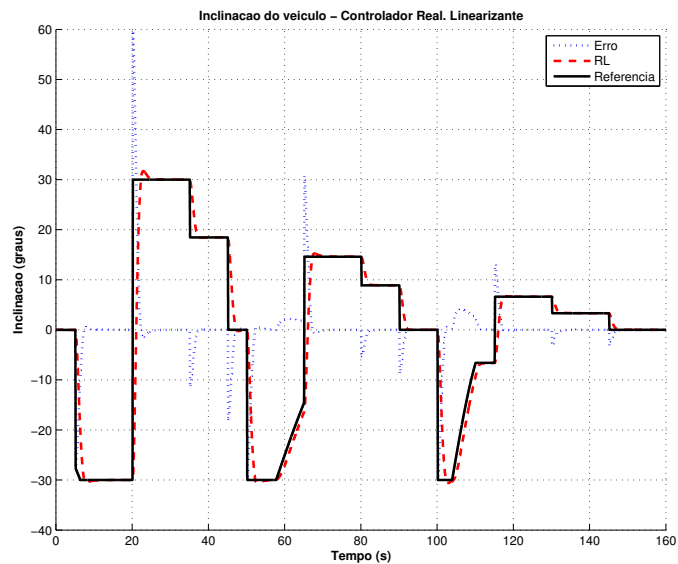


Figura 43: Resultado de simulação para a inclinação do veículo utilizando controlador por realimentação linearizante para o caso nominal sem perturbação.

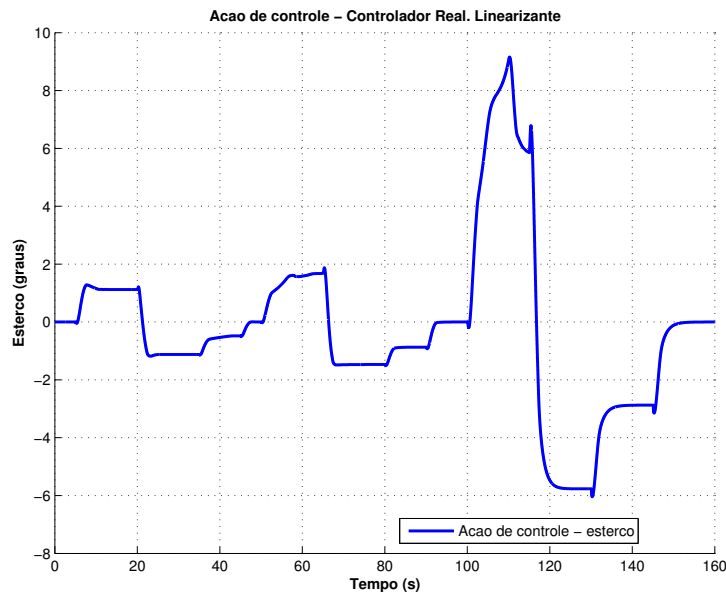


Figura 44: Resultado de simulação para esterço utilizando controlador por realimentação linearizante para o caso nominal sem perturbação.

de inclinação do controlador por realimentação linearizante foi detalhado em dois momentos. A Figura 45 mostra a inclinação do veículo entre 0 e 30 segundos. É fácil notar que a resposta possui uma dinâmica mais lenta, atingindo regime em aproximadamente 2,5 segundos, porém com sobressinal bastante reduzido. A esterço aplicado, mostrado pela Figura 46, mostra que a ação de controle é bastante reduzida.

A Figura 47 mostra detalhes do comportamento da resposta do sistema entre 95 e 140 segundos. É interessante observar que, para os valores de ganho utilizados neste controlador, este apresenta maiores valores de erro de inclinação durante transições de velocidade. Para este caso, o erro durante a transição de velocidades que causou a mudança da referência de inclinação foi de aproximadamente 4 graus.

O erro para o seguimento de trajetória é um fator importante a ser comparado. A Figura 49 mostra o erro dos três controladores entre 0 e 30 segundos. Todos os controladores atingem erro nulo em regime, mas os controladores PID e *energy shaping* possuem dinâmicas mais rápidas e um pouco mais oscilatórias, efeito mais claramente visível no tempo 20 segundos, quando ocorre uma grande transição da referência de inclinação. O maior erro ocorre no controlador por realimentação linearizante, enquanto

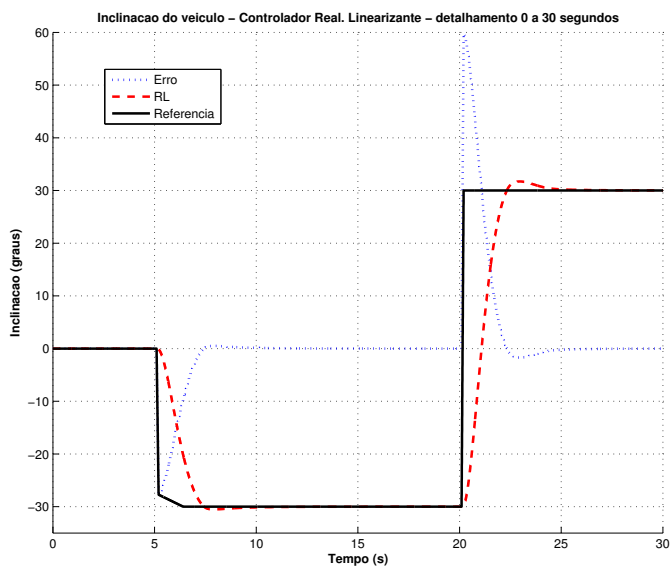


Figura 45: Detalhamento da simulação entre 0 e 30 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador por Realimentação Linearizante para o caso nominal sem perturbação.

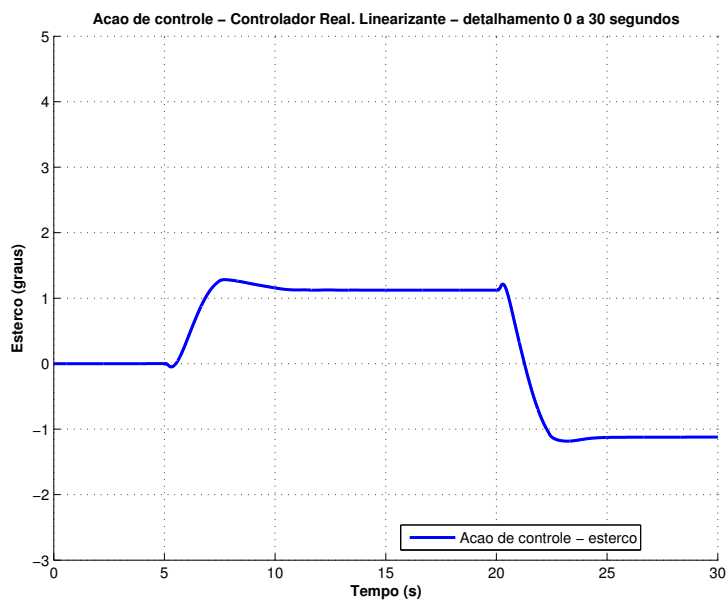


Figura 46: Detalhamento de simulação entre 0 e 30 segundos para esterço utilizando controlador por realimentação linearizante para o caso nominal sem perturbação.

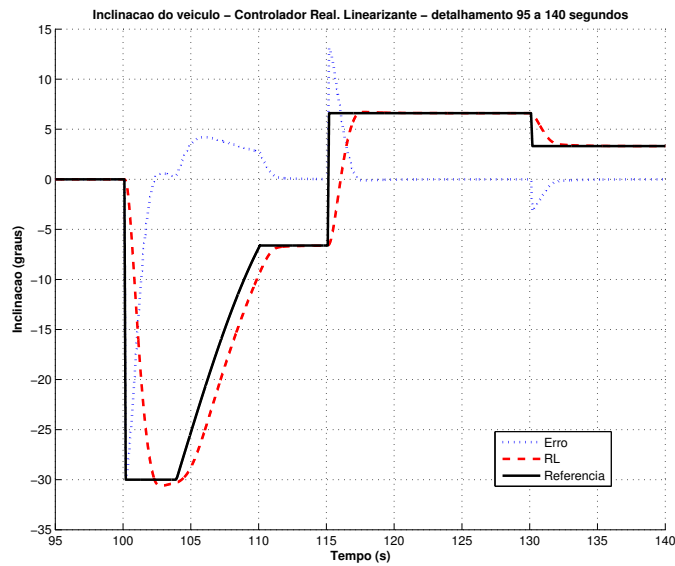


Figura 47: Detalhamento da simulação entre 95 e 140 segundos para a inclinação do veículo utilizando controlador por Realimentação Linearizante para o caso nominal sem perturbação.

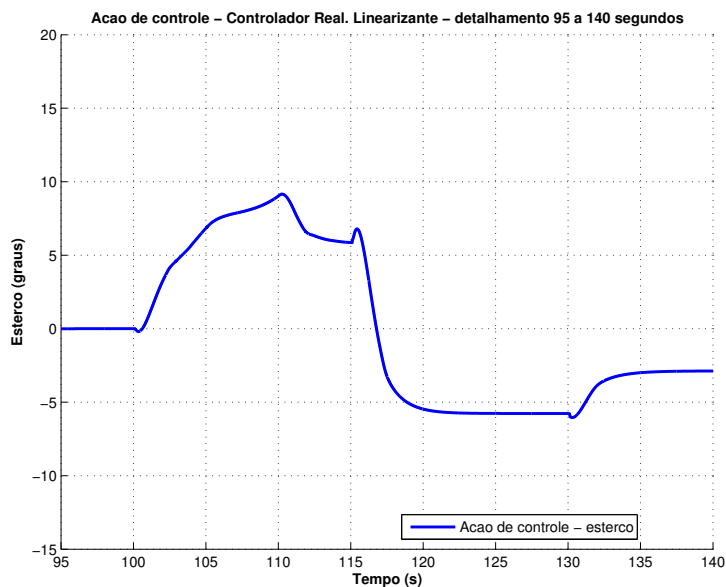


Figura 48: Detalhamento de simulação entre 95 e 140 segundos para esterço utilizando controlador por realimentação linearizante para o caso nominal sem perturbação.

o controlador PID apresenta o menor erro, de acordo com o erro quadrático médio calculado.

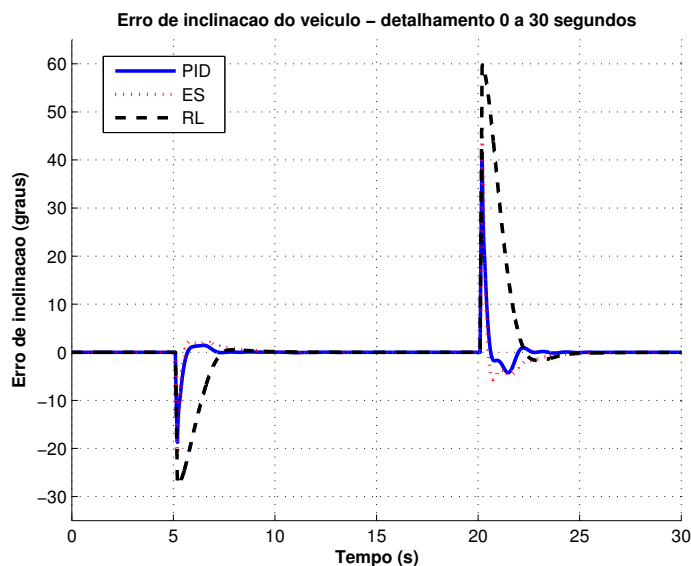


Figura 49: Comparação entre o erro de seguimento de referência para os diferentes controladores, entre 0 e 30 segundos.

Para a análise da transição de velocidade, a Figura 50 mostra o sistema entre 48 e 70 segundos. Novamente, pode-se notar que o controlador por realimentação linearizante não consegue acompanhar a mudança de referência, gerando um erro praticamente constante de aproximadamente 3 graus até 65 segundos, quando a velocidade do sistema se estabiliza.

A análise dos gráficos do erro do sistema permitem concluir que o controlador por *energy shaping* é o que apresenta o menor tempo de subida, seguido pelo controlador PID e o controlador por realimentação linearizante. Porém, o controlador PID é o que reduz o erro para seguimento de referência mais rapidamente.

6.2.2: Caso não-nominal, sem perturbação

Dando continuidade ao trabalho, foram realizadas simulações nas quais o triciclo não possui a massa do corpo central e a altura do centro de gravidade com valores

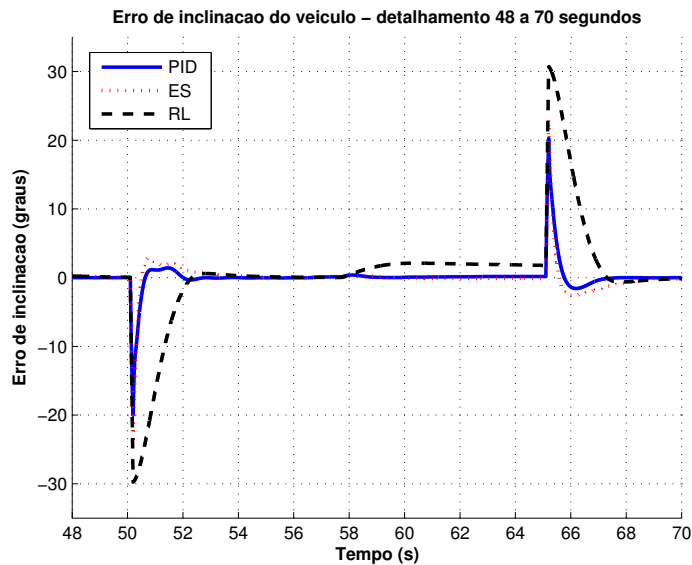


Figura 50: Comparação entre o erro de seguimento de referência para os diferentes controladores, entre 48 e 70 segundos.

nominais. Foram considerados dois conjuntos de valores. Primeiramente, os controladores foram testados para os limites superiores dos parâmetros (massa do corpo central $m_2 = 600$ kg e altura do centro de gravidade do corpo central $h_2 = 1,2$ m). Depois, os parâmetros foram modificados para representar o limite inferior da faixa de variação aceita neste trabalho ($m_2 = 400$ kg e $h_2 = 0,8$ m).

Nas simulações, a velocidade e o esterço desejados pelo motorista são os mesmos utilizados na simulação com parâmetros nominais, dados respectivamente pelas Figuras 28 e 27. A velocidade calculada pelo gerador de referências e a velocidade do veículo são dadas pela Figura 51.

Os controladores apresentaram um comportamento global bastante semelhante ao caso nominal, tanto para o aumento quanto para a redução dos parâmetros. Mesmo com a variação de 20% dos valores de massa e altura do centro de gravidade, o triciclo permanece estável em toda a faixa de velocidades.

Para melhor visualizar os resultados obtidos para as simulações, foi criado um gráfico com o ângulo de inclinação do veículo para diferentes parâmetros do sistema utilizando o mesmo controlador, comparando os efeitos da variação da massa e do centro

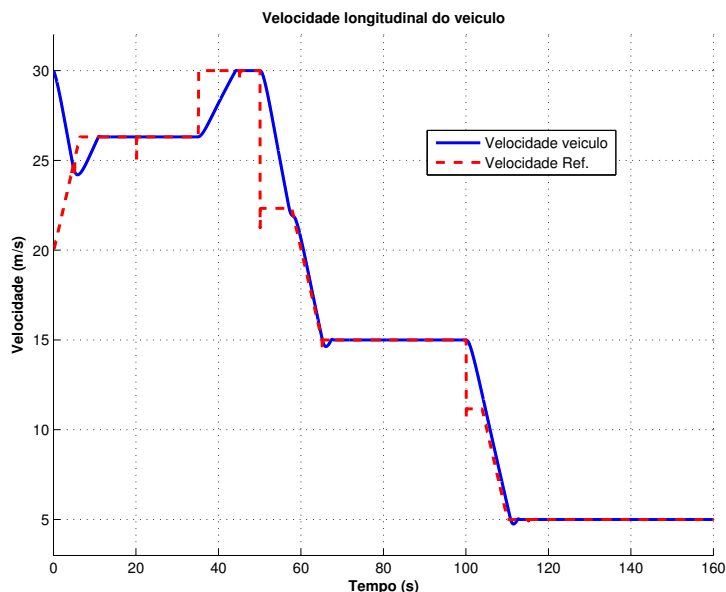


Figura 51: Velocidade longitudinal do veículo e velocidade de referência calculada pelo gerador de trajetória - casos não nominais.

de gravidade do veículo na sua inclinação.

A Figura 52 compara os resultados obtidos para o controlador PID entre 19 e 27 segundos da simulação. Para este controlador, o aumento da massa e do centro de gravidade torna o sistema mais oscilatório, com dois picos podendo ser vistos em 20,8 e 21,7 segundos. A utilização de menores valores para os parâmetros torna o sistema menos oscilatório, com um ligeiro aumento da amplitude do pico frente ao caso nominal. O gráfico da ação de controle (Figura 53) mostra que a ação de controle para o caso do veículo com menor massa e centro de gravidade mais próximo do chão apresenta um comportamento transiente mais suave.

Comparação semelhante foi feita para o controlador por *energy shaping* e mostrada na Figura 54. A sobressinal do ângulo de inclinação foi maior para $m = 600$ kg e $h = 1,2$ m. Diminuindo-se os valores dos parâmetros do sistema, reduz-se o pico de sobressinal e as oscilações. Para os três casos analisados, o erro em regime é nulo, devido ao elemento integrador adicionado no controlador. De maneira semelhante ao controlador PID, o esforço de controle (Figura 55) apresentou um comportamento menos oscilatório para o caso do veículo com menores valores de massa e altura do centro

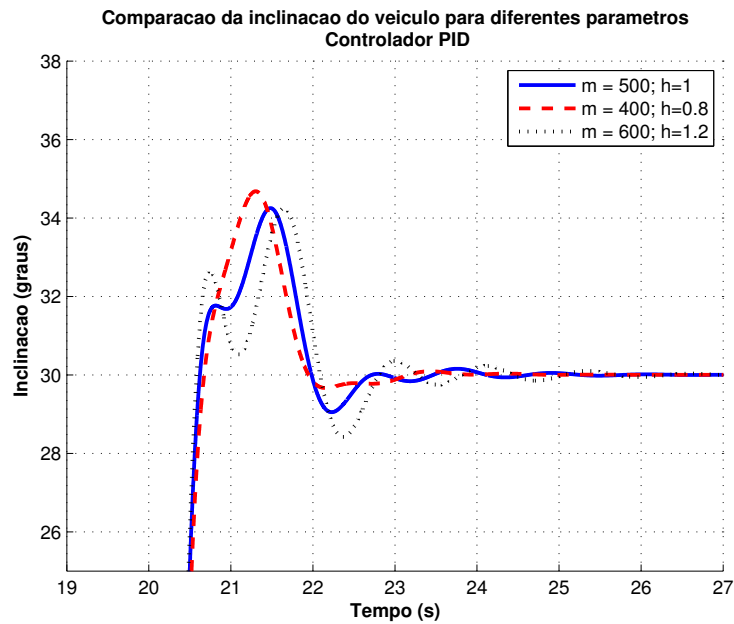


Figura 52: Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação da inclinação do veículo, comparando os valores de ϕ para diferentes parâmetros do sistema utilizando o controlador PID.

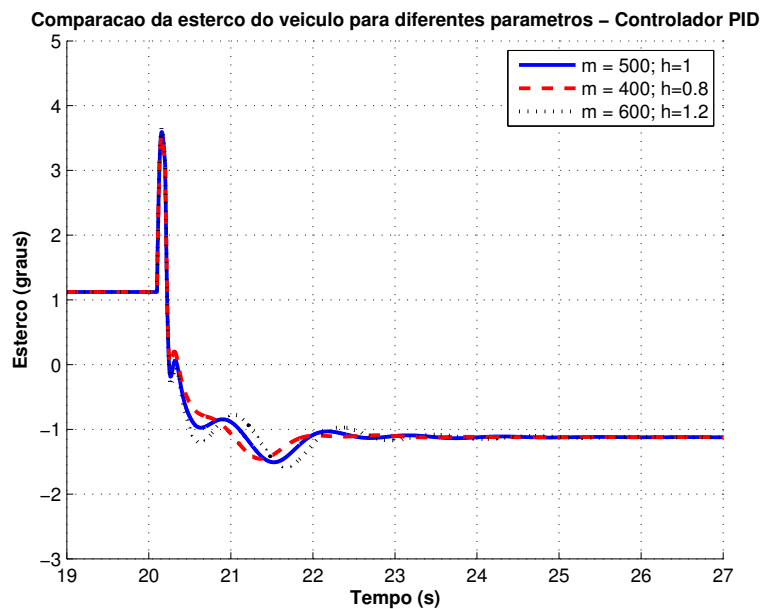


Figura 53: Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação do esterço do veículo, comparando os valores de δ para diferentes parâmetros utilizando o controlador PID.

de gravidade.

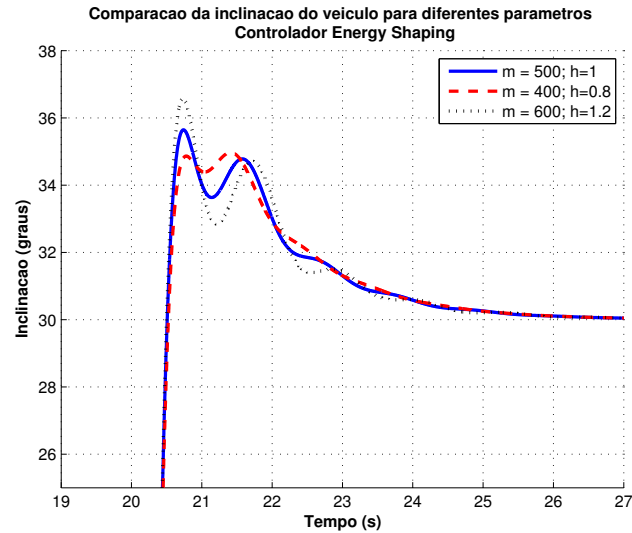


Figura 54: Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação da inclinação do veículo, comparando os valores de ϕ para diferentes parâmetros do sistema utilizando o controlador por *energy shaping*.

O controlador por realimentação linearizante tem seu comportamento mostrado na Figura 56. De maneira semelhante ao controlador PID, a redução dos parâmetros do sistema aumenta o valor do sobressinal. Entretanto, este controlador é o que apresenta os menores valores de pico para as transições de inclinação, com aproximadamente 2 graus a menos que o controlador PID e 4 graus a menos que o controlador por *energy shaping* para o caso nominal. A forma da resposta não é alterada, e o sistema não se torna mais oscilatório. O esforço de controle é bastante reduzido, como mostra a Figura 57.

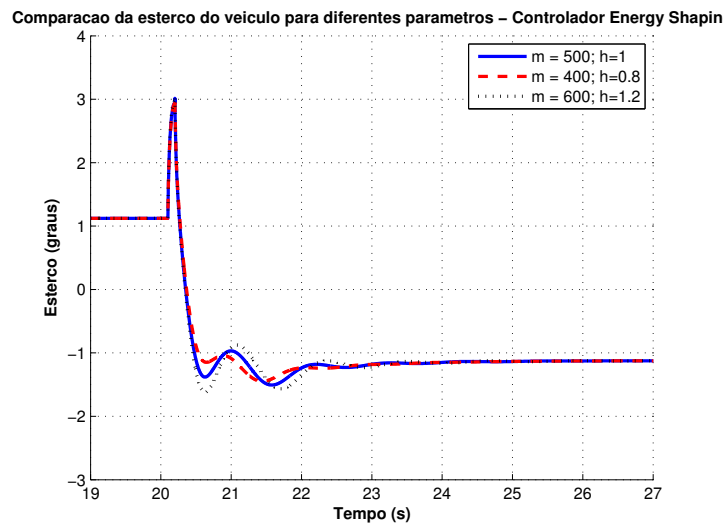


Figura 55: Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação do esterço do veículo, comparando os valores de δ para diferentes parâmetros utilizando o controlador *energy shaping*.

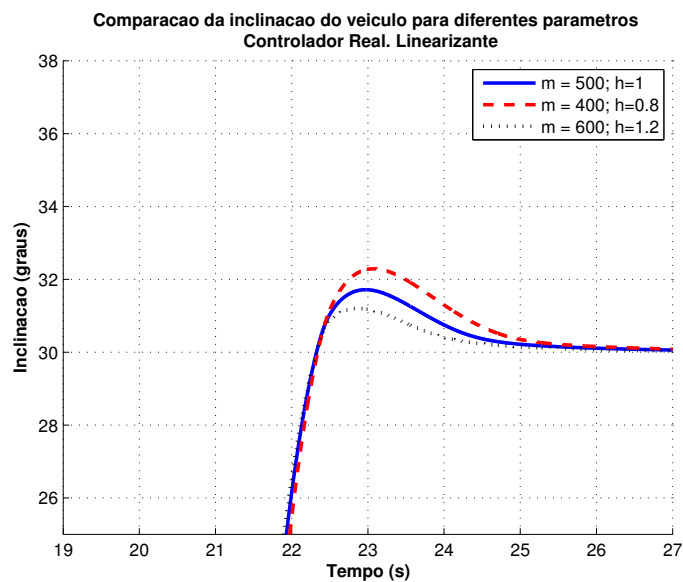


Figura 56: Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação da inclinação do veículo, comparando os valores de ϕ para diferentes parâmetros do sistema utilizando o controlador por realimentação linearizante.

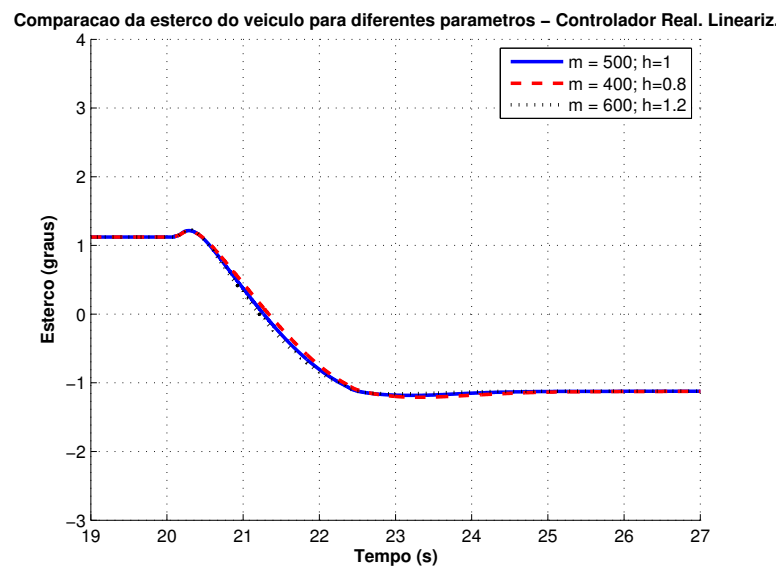


Figura 57: Detalhamento entre 19 e 27 segundos da simulação da esterço do veículo, comparando os valores de δ para diferentes parâmetros do sistema utilizando o controlador por realimentação linearizante.

6.2.3: Caso não-nominal, com perturbação

O comportamento dos controladores frente a perturbações é um fator importante a ser analisado. O sistema deve manter sua estabilidade e rejeitar as perturbações em regime, para toda a faixa de velocidade e para variações de parâmetros do sistema.

Para verificar o comportamento de cada controlador frente a perturbações, sem a influência do esterço do motorista, ensaios foram feitos considerando também variações de parâmetros do sistema. O sinal que representa o vento lateral atuando sobre o veículo tem a forma dada pela Figura 58. A velocidade do vento bem como as transições foram escolhidas de forma a ilustrar condições extremas de operação, embora algumas situações experimentadas nas simulações sejam extremamente difíceis de ocorrer em condições reais de uso.

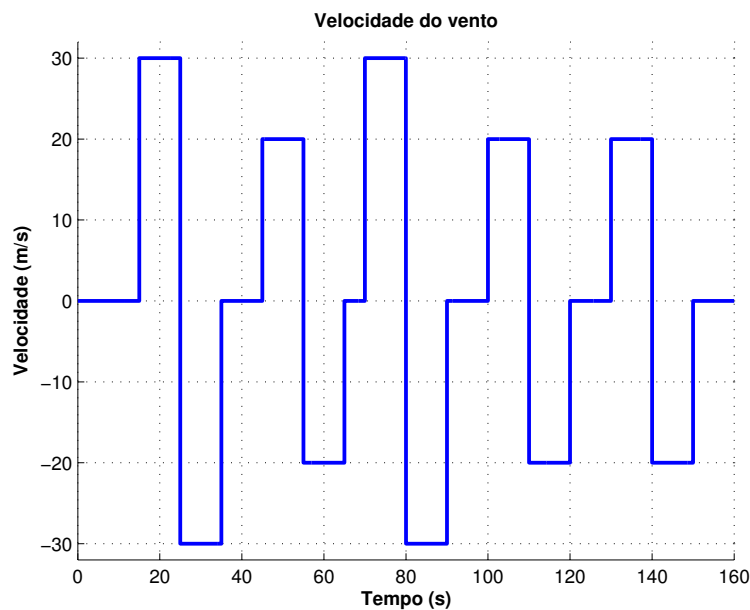


Figura 58: Velocidade do vento aplicada.

O perfil de velocidade do veículo é o mesmo utilizado nas outras simulações (Figura 28), e o esterço desejado pelo motorista é zero.

A simulação dos controladores PID, *energy shaping* e realimentação linearizante para um sistema nominal sob a ação de ventos laterais mostra que o veículo mantém sua

estabilidade e retorna para a inclinação desejada $\phi_d = 0$ para todos os controladores, em toda a faixa de velocidades.

A Figura 59 compara a inclinação do veículo com controlador PID para diferentes parâmetros do sistema. Pode-se observar que a medida que os parâmetros aumentam, o ângulo de inclinação causado pelo vento diminui. Isto pode ser explicado pela maior inércia do veículo devido ao acréscimo de massa. Para o caso nominal e o veículo deslocando-se com uma velocidade de 30 m/s como ocorre no tempo 15 segundos da figura, o desvio causado pela perturbação apresenta valor máximo de aproximadamente 3,68 graus, enquanto para os diferentes valores de parâmetros os valores são limitados entre 3,15 e 4,4 graus. No tempo 16 segundos, o ângulo de inclinação cruza a horizontal e se inclina levemente para o lado oposto, atingindo entre 0,5 e 0,75 graus de inclinação e erro nulo após 5 segundos. Em 25 segundos, ocorre uma mudança no sentido do vento, o que faz o veículo inclinar novamente, atingindo valores de inclinação entre 6,3 e 8,8 graus.

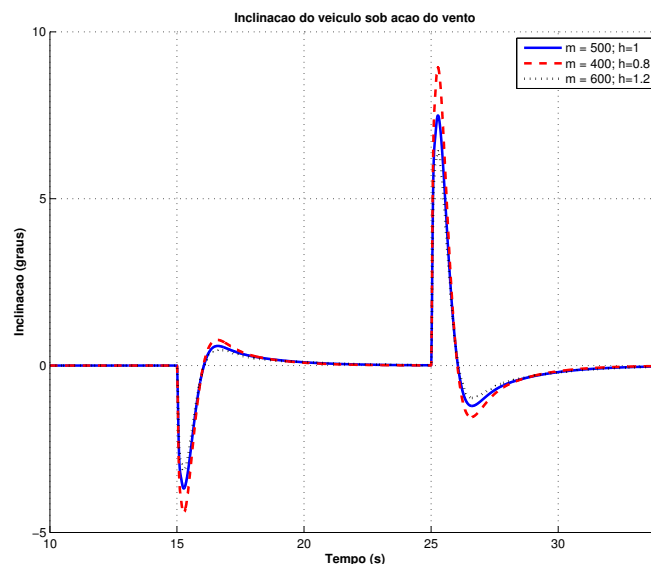


Figura 59: Inclinação do veículo sob ação de ventos laterais para diferentes parâmetros do sistema, com controlador PID.

Resultados semelhantes foram obtidos para os controladores por *energy shaping* e por realimentação linearizante, mostrados nas Figuras 60 e 61, respectivamente.

O controlador por *energy shaping* apresentou menores valores de pico de inclinação para as perturbações, com valor de 3,1 graus para o caso nominal e entre 2,7 e 3,8 para os casos de parâmetros não-nominais do sistema considerando um vento lateral de 30 m/s. A dinâmica para rejeição de perturbação é mais lenta que a do controlador PID, cruzando a horizontal no tempo 17 segundos e atingindo erro nulo no tempo 23 segundos. Para a mudança da direção do vento que acontece ao 25 segundos da simulação, o pico de resposta fica limitado entre 7,6 e 5,6 graus.

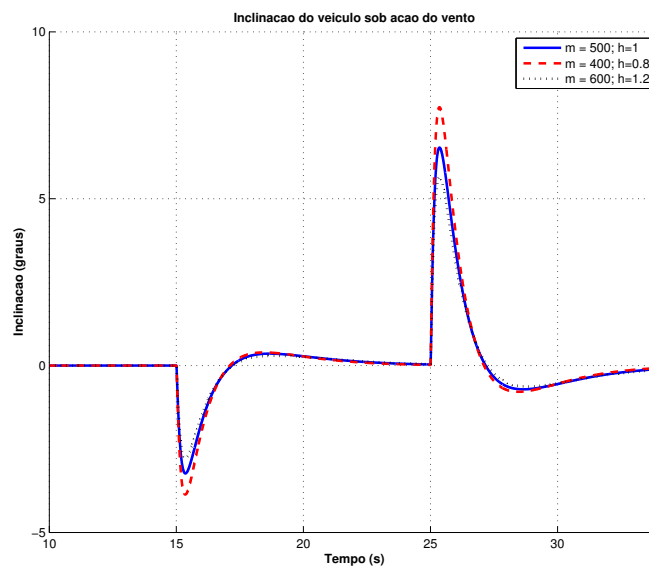


Figura 60: Inclinação do veículo sob ação de ventos laterais para diferentes parâmetros do sistema, com controlador *energy shaping*.

O controlador por realimentação linearizante foi o que apresentou maiores valores para o erro máximo, com erros entre 16,8 e 13,2 graus para o degrau de perturbação que ocorre em 15 segundos. Contrário aos outros controladores que cruzavam o plano vertical antes de convergir para erro nulo, este controlador apresentou uma resposta sem este comportamento para os parâmetros $m = 600$ kg e $h = 1,2$ m. Quando ocorre a troca no sentido do vento, os veículo atinge ângulos entre 32,7 e 26,8 graus.

A Tabela 5 compara o erro médio quadrático dos controladores sob a ação de ventos laterais, para diferentes parâmetros. Ela mostra que o controlador PID possui o menor erro para todas as situações, com valores um pouco menores do que o controla-

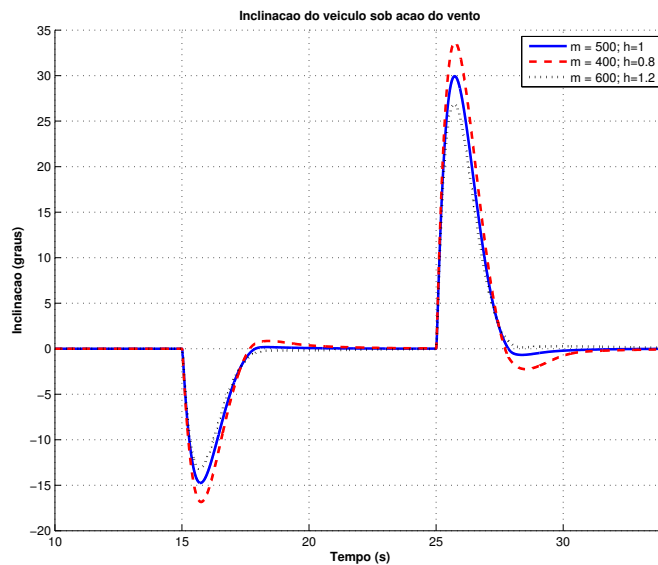


Figura 61: Inclinação do veículo sob ação de ventos laterais para diferentes parâmetros do sistema, com controlador por realimentação linearizante.

do *energy shaping*. Esta métrica também mostra que para maior massa e maior altura do centro de gravidade, o erro é reduzido para perturbações geradas por ventos laterais.

Tabela 5: Erro Quadrático médio dos controladores para diferentes parâmetros, para perturbações do tipo vento lateral.

	$m = 500\text{kg}, h = 1\text{m}$	$m = 600\text{kg}, h = 1,2\text{m}$	$m = 400\text{kg}, h = 0.8\text{m}$
Erro Quad. médio PID	0,42	0,32	0,58
Erro Quad. médio ES	0,51	0,40	0,69
Erro Quad. médio RL	23,09	19,62	28,20

A mesma análise foi realizada para forças causadas pela rugosidade do solo. A força atuante em cada roda foi modelada como um ruído gaussiano amostrado, de média nula, frequência 10Hz e variância 0,5. Este sinal é multiplicado pelo produto entre o deslocamento máximo esperado no solo 0,005 metros e a constante de rigidez do pneu (ver Apêndice A). Para estes parâmetros de simulação, o sinal obtido é mostrado na Figura 62 e é limitado entre ± 1000 N.

Uma vez que a força do solo atua paralelamente ao eixo Z, sua influência no

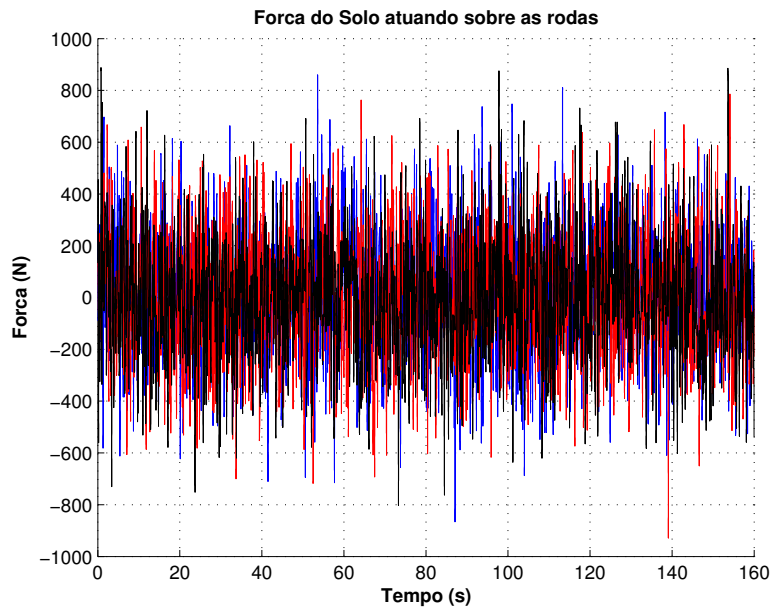


Figura 62: Força aplicada pelo solo na direção Z em cada uma das rodas do veículo.

ângulo de inclinação ϕ só ocorre quando este é diferente de zero. Por isso, foi utilizado como esterço desejado pelo motorista o sinal dado pela Figura 27 e os parâmetros nominais do sistema.

As Figura 63 e 64 mostram os gráfico da inclinação do veículo para os controladores PID e *energy shaping*. Os gráficos permitem concluir que, para estes controladores, a força do piso aplicada tem pouco efeito sobre a inclinação do veículo, mesmo para valores de ϕ próximos a 30 graus, onde a influência da perturbação seria maior. Para estes controladores, a variação de ϕ é de aproximadamente $\pm 0,1$ grau.

Contrastando com os resultados obtidos para os demais controladores, a influência da rugosidade do solo no controlador por realimentação linearizante é muito maior (Figura 65), com valores de inclinação limitados entre ± 2 graus em torno do equilíbrio desejado. Esta maior degradação do sinal é causada pela ação de controle responsável pela linearização do sistema, que depende das posições e das velocidades no eixo Z de cada uma das rodas.

Combinando velocidades e esterço desejados pelo motorista com as perturbações de vento lateral e força do piso mostradas anteriormente, um último conjunto de

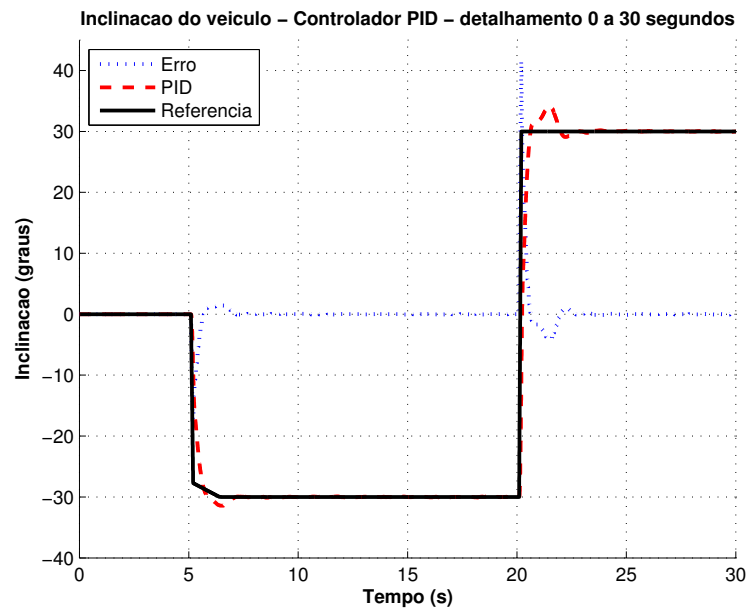


Figura 63: Influência de perturbações no solo no ângulo de inclinação do veículo com controlador PID.

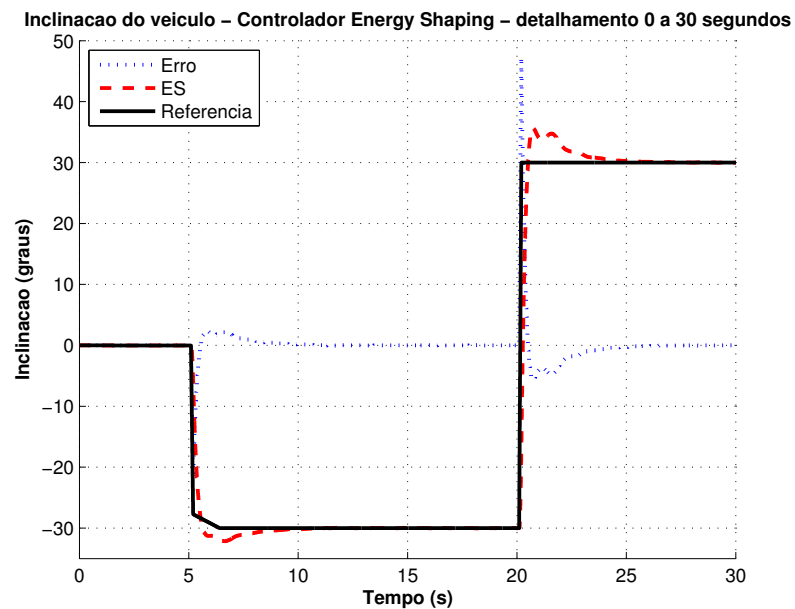


Figura 64: Influência de perturbações no solo no ângulo de inclinação do veículo com controlador *energy shaping*.

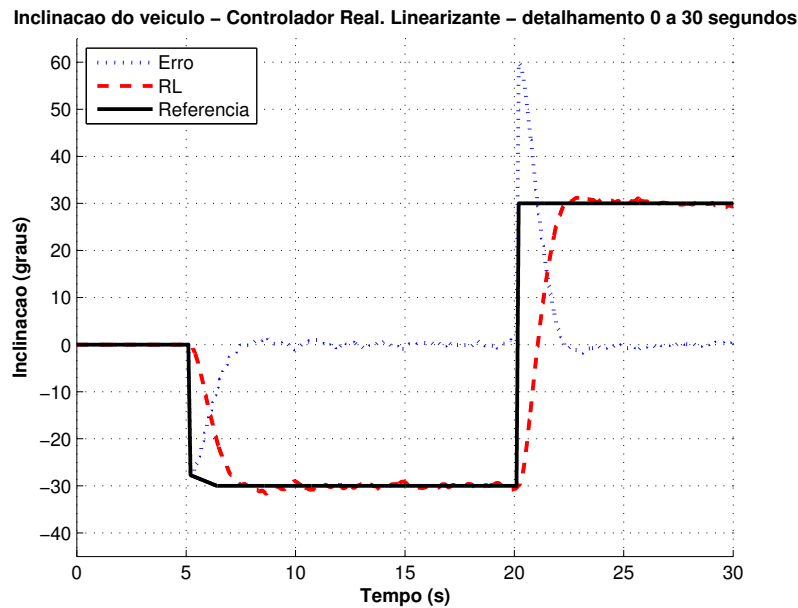


Figura 65: Influência de perturbações no solo no ângulo de inclinação do veículo com controlador por realimentação linearizante.

simulações foi realizado para cada um dos controladores, considerando variações paramétricas.

Na Figura 66 é mostrado o comportamento da inclinação do sistema com parâmetros nominais utilizando-se o controlador PID. O sistema é estável e capaz de rejeitar a combinação de perturbações obtendo erro nulo em regime, com valor de erro quadrático médio de 3,44. A ação de controle é mostrada na Figura 67.

O controlador por *energy shaping* possui uma dinâmica bastante semelhante, com erro em regime nulo para a combinação de perturbações (Figura 68). Seu erro quadrático médio é 4,27 e seu esterço é mostrado na Figura 69.

A composição das perturbações prejudicou enormemente a resposta do controlador por realimentação linearizante, como pode ser visto na Figura 70. A resposta lenta do sistema para rejeição de perturbações juntamente com a rugosidade da pista fazem com que este controlador apresente um erro quadrático médio com valor de 54,18. A ação de controle é mostrada na Figura 71.

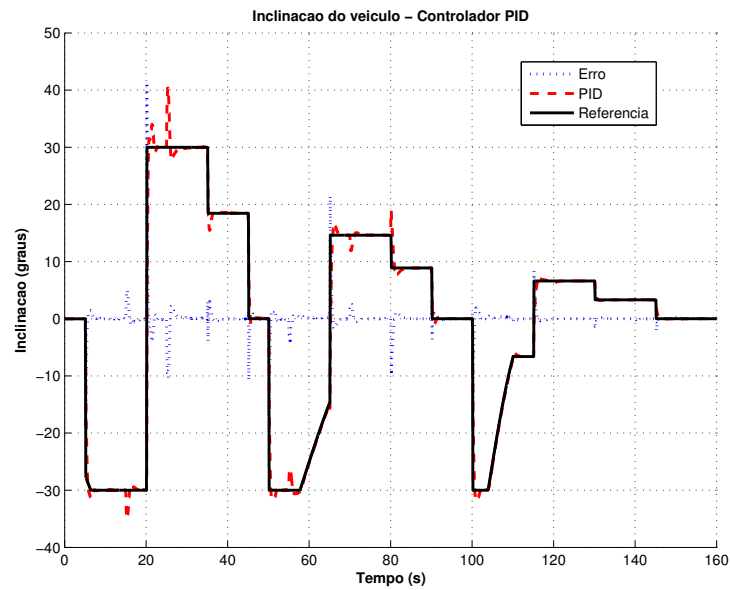


Figura 66: Inclinação do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador PID.

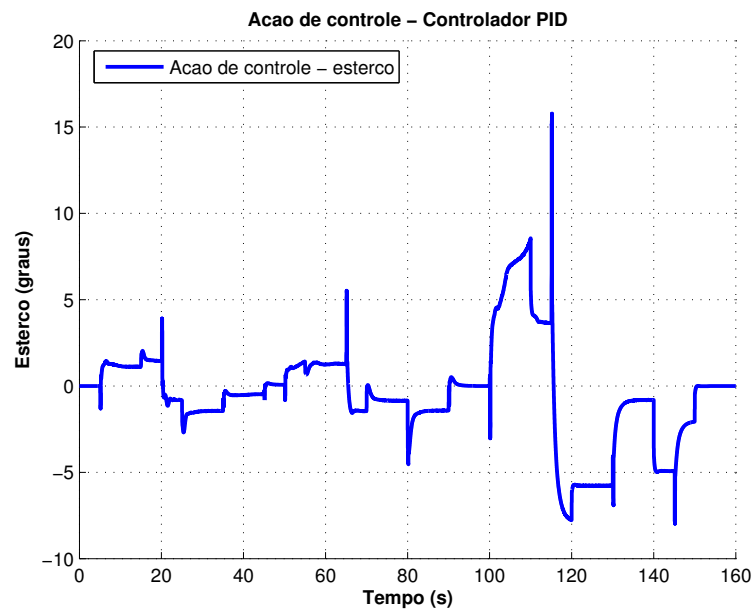


Figura 67: Esterço do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador PID.

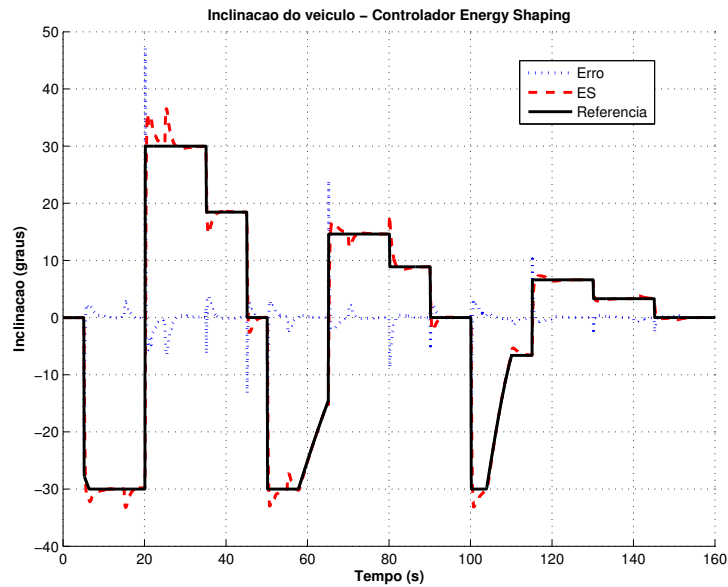


Figura 68: Inclinação do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador *energy shaping*.

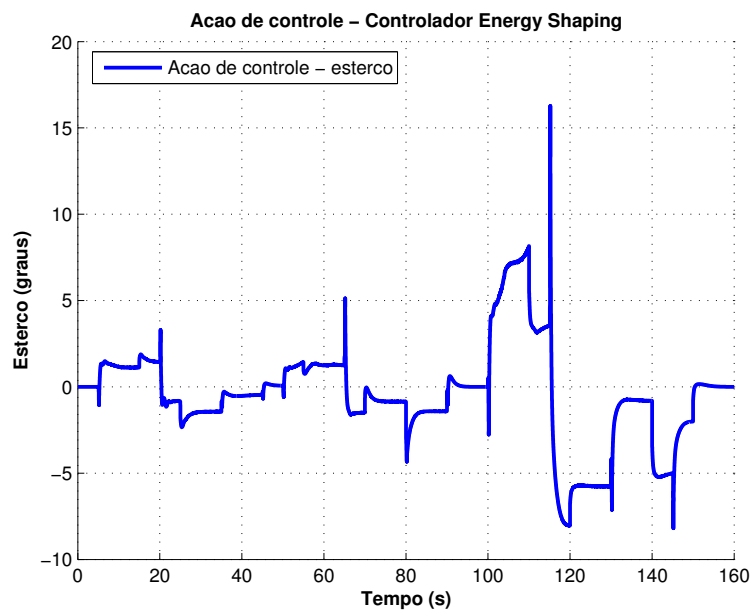


Figura 69: Esterco do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador *energy shaping*.

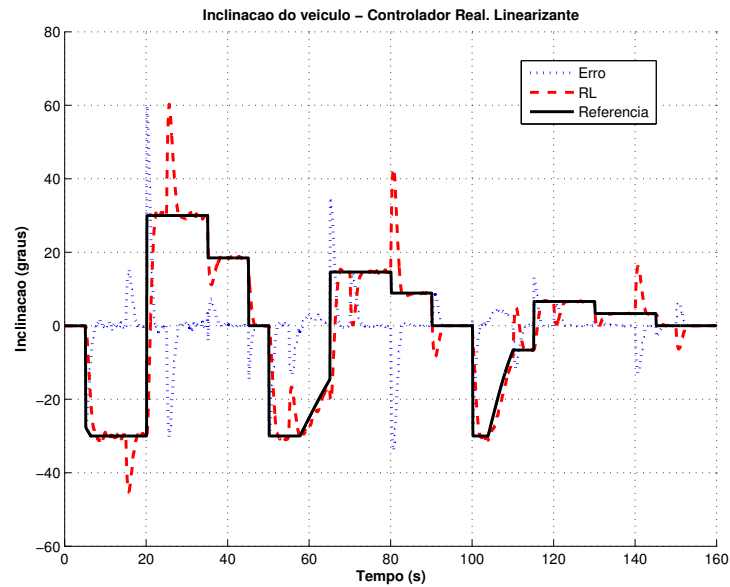


Figura 70: Inclinação do veículo para o caso nominal, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador por realimentação linearizante.

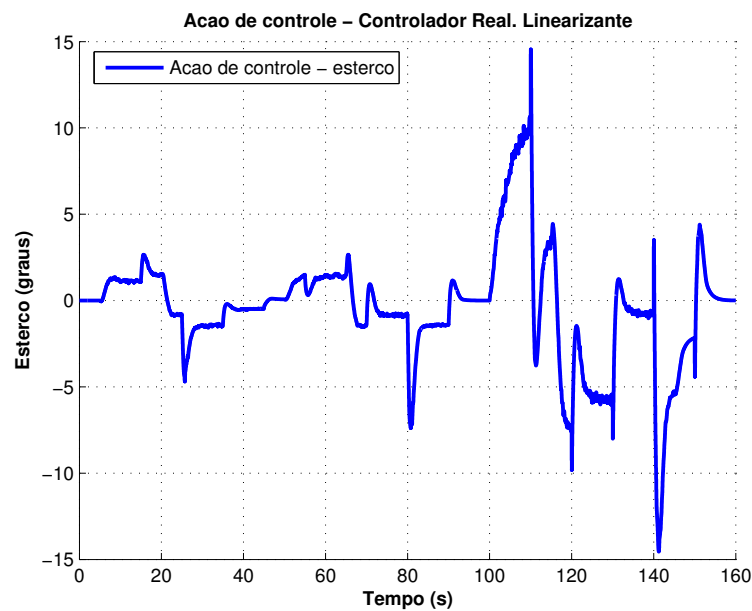


Figura 71: Esterço do veículo com parâmetros nominais, considerando perturbações de vento e solo, com o controlador por realimentação linearizante.

O erro de inclinação entre os controladores é detalhado na Figura 72, mostrando o erro dos três controladores entre 0 e 30 segundos, com mudanças no esterço do motorista nos tempos 5 e 20 segundos e degraus de vento em 15 e 25 segundos. O controlador por realimentação linearizante apresenta os maiores picos de erro tanto para transições como para perturbações. O controlador por *energy shaping*, que apresentava o menor tempo de subida para mudanças de referência, mostra uma dinâmica mais lenta para rejeição de perturbação.

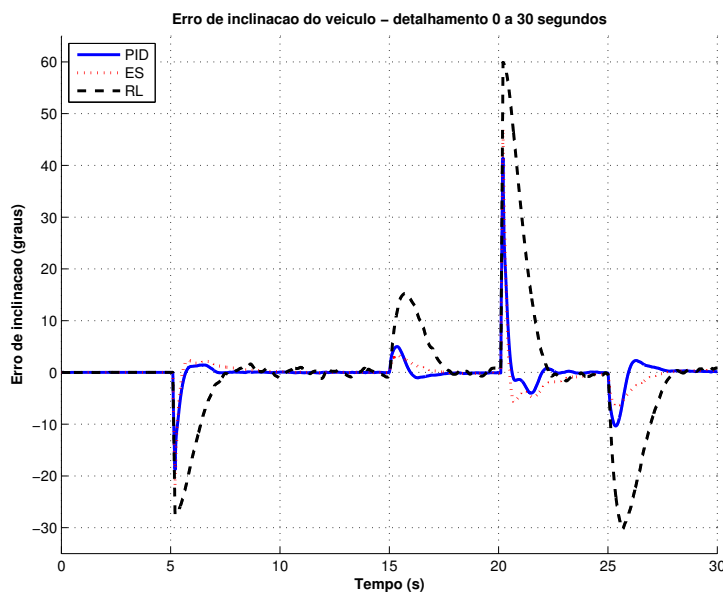


Figura 72: Comparação do erro de inclinação entre os controladores para o caso nominal com perturbações, entre 0 e 30 segundos de simulação.

A Figura 73 detalha os erros de inclinação do veículo entre 48 e 70 segundos. É interessante notar o comportamento do controlador por realimentação linearizante entre os tempos 58 e 65 segundos. A rugosidade do solo faz com que o erro para o seguimento de trajetória aumente, atingindo para o período um valor máximo de 4 graus enquanto os outros controladores conseguem rejeitar a perturbação e rastrear a referência de inclinação.

Cada controlador foi simulado para os diferentes parâmetros do sistema, a fim de analisar o comportamento. Os gráficos do ângulo de inclinação do veículo e da ação de controle entre 0 e 30 segundos são analisados.

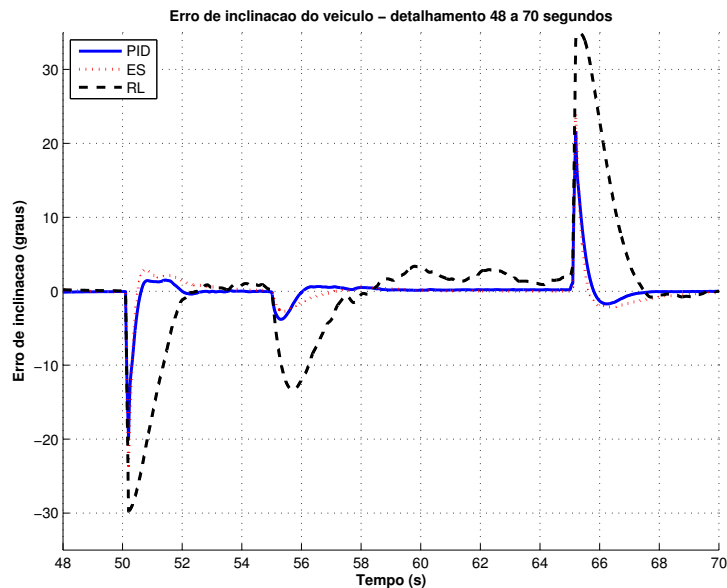


Figura 73: Comparação do erro de inclinação entre os controladores para o caso nominal com perturbações, entre 48 e 70 segundos de simulação.

O controlador PID tem o ângulo de inclinação ϕ mostrado pela Figura 74. Pode-se observar que o efeito da variação de parâmetros também é reduzido para o sinal de perturbação, mas o sistema com parâmetros de menor valor apresentando picos maiores para as transições causadas pelo vento, com valor de aproximadamente 2 graus maior do que o caso nominal.

O ângulo de esterço aplicado pelo controlador PID (Figura 75) varia na presença de ventos laterais. Percebe-se que, até 15 segundos, o valor em regime da ação de controle é o mesmo para todos os parâmetros, mas passa a ser diferente a partir do momento em que uma perturbação de vento lateral é aplicada. Os valores de pico nos momentos de transições de esterço do motorista são os mesmos, o que não ocorre quando a perturbação é aplicada. Neste caso, o sistema com parâmetros com menores valores apresenta a maior ação de controle.

Os resultados do sistema com o controlador *energy shaping* foram semelhantes (Figura 76). Os picos de resposta foram menores que os do controlador PID, porém convergindo para erro nulo mais lentamente. Diferenças entre os sinais de inclinação são mais perceptíveis para degraus de perturbação.

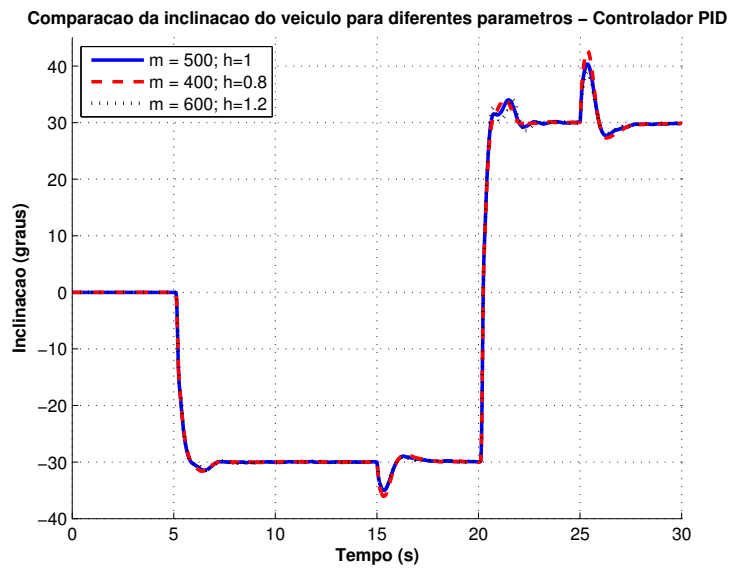


Figura 74: Comparação da inclinação do veículo utilizando controlador PID considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.

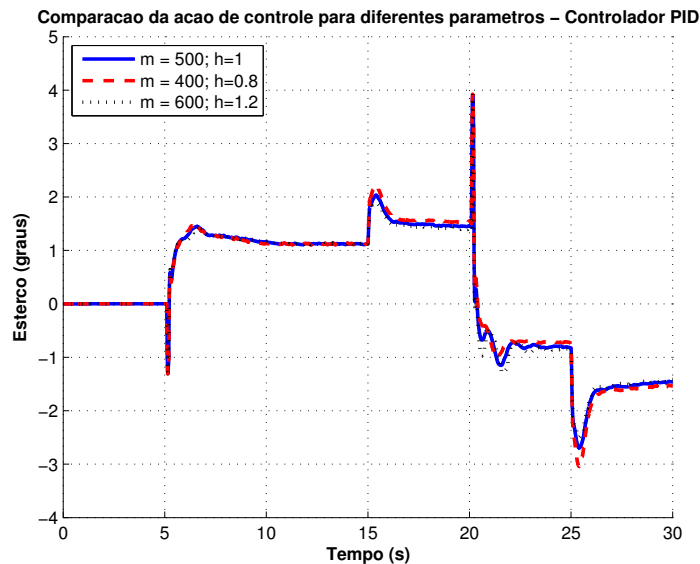


Figura 75: Comparação da ação de controle do controlador PID considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.

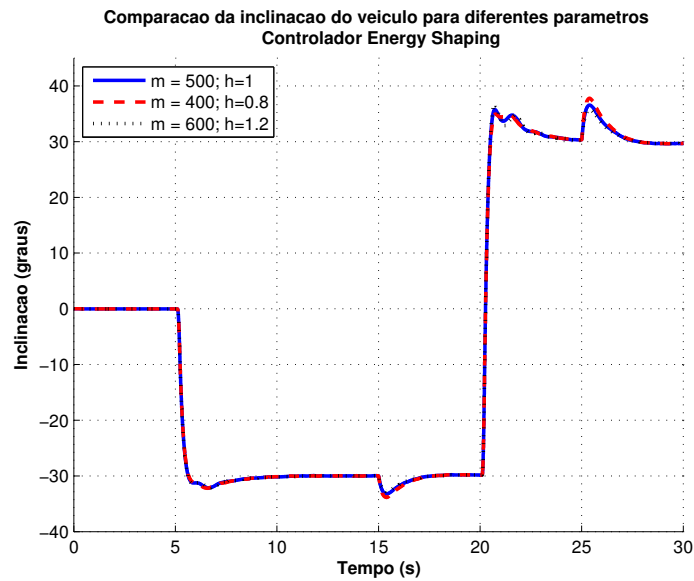


Figura 76: Comparação da inclinação do veículo utilizando controlador *energy shaping* considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.

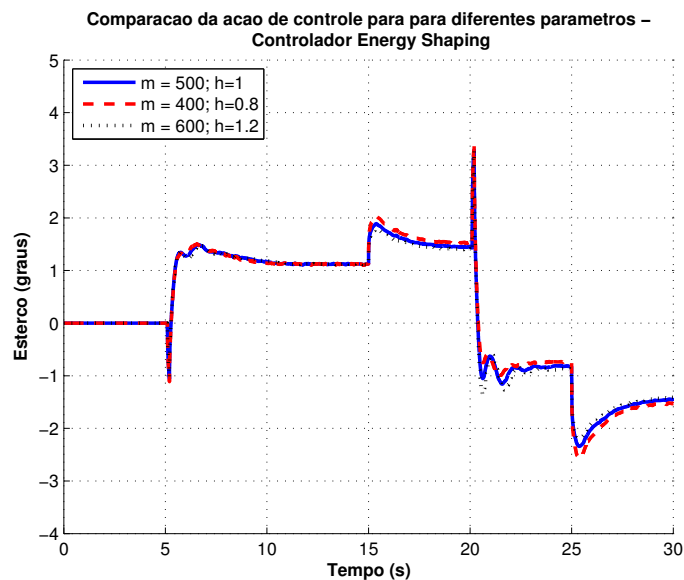


Figura 77: Comparação da ação de controle do controlador *energy shaping* considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.

O esterço aplicado para o controlador *energy shaping* é mostrado na Figura 77, e apresenta valores de pico menores que o do controlador PID. Novamente, a ação de controle apresenta um valor em regime muito próximo para as três combinações de parâmetros utilizadas quando somente variações de esterço são consideradas, com o sinal de perturbação do vento diferença do valor em regime. A ação de controle sofre pouca interferência da perturbação do piso. O contra-esterço tem um valor de pico de 1 grau para a mudança de referência de esterço do motorista no tempo 5 segundos.

O controlador por realimentação linearizante tem sua resposta de inclinação detalhada entre 0 e 30 segundos detalha na Figura 78. Observa-se mais claramente entre 7 e 15 segundos de simulação a maior influência da perturbação de solo e o grande efeito que ventos laterais tem sobre o sistema. A dinâmica do sistema é mais lenta que a obtida com os demais controladores tanto para o caso de mudanças de referência de esterço quanto para perturbações de vento lateral, porém com uma dinâmica bem menos oscilatória.

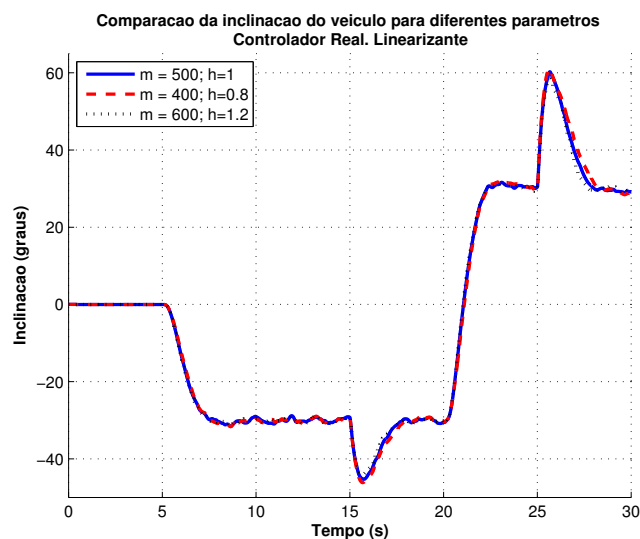


Figura 78: Comparação da inclinação do veículo utilizando controlador por realimentação linearizante considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.

O esterço de controle aplicado é mostrado na Figura 79. Pelo gráfico é possível ver o esforço do controlador para rejeitar a perturbação do solo entre 7 e 15 segundos

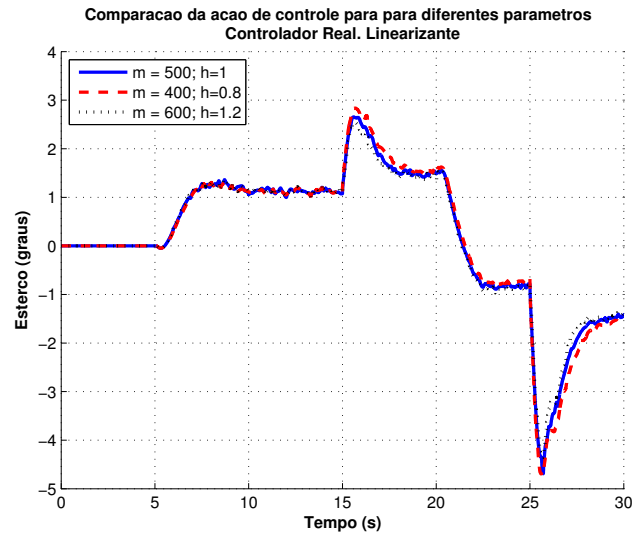


Figura 79: Comparação da ação de controle do controlador por realimentação linearizante considerando o sistema com diferentes parâmetros, juntamente com perturbações.

devido a lei de controle linearizante. Este comportamento não acontece nos outros controladores, e faz com que a inclinação do veículo oscile, como visto no parágrafo anterior. O contra esterço, que ocorre em 5 e 20 segundos, é bastante reduzido: 0,05 graus contra 1,3 graus para o controlador PID e 1 grau para o controlador *energy shaping* para a mudança de esterço do motorista no tempo 5 segundos.

Para o controlador por realimentação linearizante, a verificação da estabilidade interna do sistema foi feita por meio de simulações numéricas. Foram simulados os casos do triciclo parâmetros nominais e não-nominais sob a ação de perturbações externas. Todos os estados do veículo foram medidos, e observou-se sua estabilidade. A Figura 80 mostra os valores obtidos para os estados z_1 , z_2 , z_3 , z_4 e θ , que são limitados durante toda a simulação. Os estados x , y e ψ não são mostrados pois os dois primeiros representam o deslocamento total do veículo no respectivo eixo e o último representa a orientação do veículo. Estes valores podem crescer indefinidamente, mas isto não significa que estes estados sejam instáveis. O estados ϕ também não foi exibido, pois já foi mostrado que a inclinação do veículo é estável.

A Figura 81 mostra os estados que representam as velocidades do sistema ($v =$

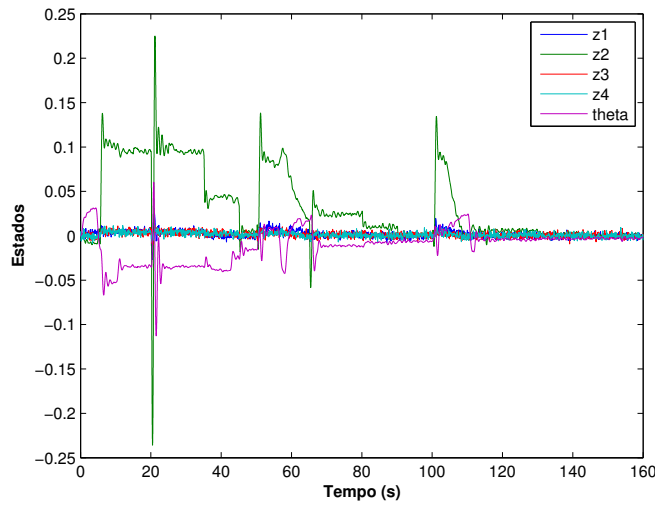


Figura 80: Variação dos estados referentes às posições do veículo para controlador por realimentação linearizante.

\dot{y} , $w_1 = \dot{z}_1$, $w_2 = \dot{z}_2$, $w_3 = \dot{z}_3$, $w_4 = \dot{z}_4$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$), que também possuem seus valores limitados durante a simulação. A variável u , que representa a velocidade linear do veículo, não foi exibido pois já mostrou-se que é estável.

6.3: Conclusões

Este capítulo apresentou os resultados da simulação que compara os controladores propostos em diferentes situações e para diferentes parâmetros do veículo. Foram consideradas três situações: veículo com parâmetros nominais sem ação de perturbações, veículo com parâmetros não-nominais sem perturbações e veículo com parâmetros não nominais sob influência de perturbações. As perturbações consideradas foram a presença de ventos laterais perpendiculares a direção do movimento do veículo e rugosidade do solo, produzindo forças que atuando em cada uma das rodas independentemente. O cálculo do ângulo de inclinação adequado para dada velocidades e esterço desejados pelo motorista foi feito através de um gerador de trajetórias, que adequava os valores dados pelo motorista com os limites construtivos estabelecidos para o veículo.

O controlador PID com compensação estática da não-linearidade apresentou óti-

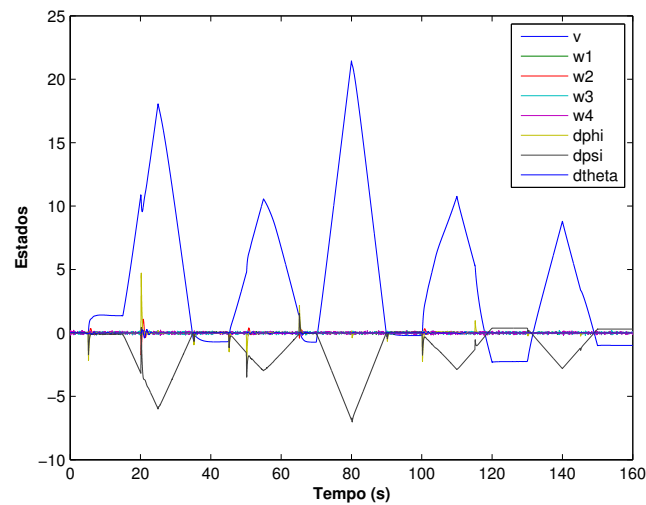


Figura 81: Variação dos estados referentes às velocidades do veículo para controlador por realimentação linearizante.

mos resultados, com o menor erro médio quadrático entre as simulações. Este controlador foi capaz de rejeitar as perturbações aplicadas mais rapidamente que os demais para os diferentes parâmetros do sistema, porém com maiores valores na ação de controle. Sua implementação é bastante simples, pois exige a medição de poucos estados do veículo, e seu ajuste pode ser feito de maneira bastante simples utilizando técnicas de controle clássico, uma vez que se tenha as funções de transferência do triciclo linearizado para as diferentes velocidades.

O controlador *energy shaping* também foi capaz de controlar a inclinação do veículo para todas as simulações, obtendo erro em regime nulo para segmento de trajetória e rejeição de perturbação. Seu erro quadrático médio apresentou valores um pouco superiores aos do controlador PID, mas seu esterço de controle apresenta picos nas transições com valores menores. O controlador apresenta o menor tempo de subida para mudanças de esterço, mas a sua dinâmica para rejeição de perturbações de vento é mais lenta.

O controlador por realimentação linearizante apresentou os maiores valores de erro quadrático médio das simulações. Isto ocorre devido a sua dinâmica mais lenta obtida com o cálculo dos ganhos controlador utilizando a técnica LQR, que busca minimizar

a energia do sistema. A inclinação do veículo é bastante suave, e a ação de controle apresenta valores de contra-esterço, necessários para a inclinação do veículo, muito menor do que os outros controladores. Uma desvantagem desta técnica é a necessidade de medição de diversas grandezas do veículo, o que pode se tornar inviável.

7. Conclusões e Perspectivas

Este trabalho foi motivado pela necessidade de melhorias no sistema de transporte das cidades. Atualmente, o crescimento do número de veículos é muito maior do que a capacidade de ampliação das vias. A substituição de veículos grandes e pesados, com sua capacidade de transporte de passageiros subutilizada, por veículos menores e mais leves é parte da solução. O triciclo proposto apresenta vantagens em relação a carros convencionais, como menor consumo de combustível e menor volume ocupado, ao mesmo tempo em que permite ao motorista e ao passageiro maior conforto e segurança que os fornecidos por motocicletas convencionais.

O desafio enfrentado por este tipo de veículo é a sua instabilidade inerente. O veículo deve ser capaz de inclinar em curvas, de forma semelhante a uma moto. O objetivo deste trabalho foi realizar, de maneira automática e transparente ao usuário, a inclinação do veículo através do esterço das rodas dianteiras, garantindo sua estabilidade em curvas sem que o condutor tenha que adquirir conhecimento específico para a pilotagem.

Apesar de não ser um conceito recente, somente nos últimos anos os triciclos inclináveis tem atraído maior atenção da mídia e de companhias automotivas. Infelizmente, existem poucos resultados experimentais disponíveis sobre este assunto. Entre os artigos disponíveis, a maior parte trata este problema de controle utilizando-se do modelo de bicicletas e motocicletas para suas simulações, e buscam resolver o problema utilizando a combinação de dois métodos diferentes: controle de inclinação por esterço e controle de inclinação por torque. Este trabalho concentrou-se somente na primeira técnica, buscando melhorar seus resultados e, assim, minimizar a necessidade do controle de inclinação por torque, técnica que atualmente requer o uso de atuadores hidráulicos.

Três controladores foram implementados: controlador PID com compensação estática da não-linearidade, controlador não-linear por realimentação linearizante entrada-saída e controlador por *energy shaping* baseado em funções de Euler-Lagrange. Um gerador de trajetória foi utilizado para fornecer as referências de inclinação e velocidade

do veículo, baseados nos valores de esterço da roda e de velocidade desejados pelo motorista.

O controlador PID apresentou o melhor resultado, com menor erro quadrático médio e rápida rejeição a perturbações. Com uma implementação simples, ele pode ser realizado medindo-se apenas a velocidade e a inclinação do veículo e as referências do motorista.

O controlador não-linear por realimentação linearizante entrada-saída apresentou o maior erro quadrático médio. Para o ajuste do controlador linear resultante, foi utilizada a técnica de LQR, que minimiza a energia do sistema. Desta maneira, o triciclo apresentou transições suaves de inclinação e esterço, porém com uma resposta dinâmica mais lenta. Para perturbações, este controlador apresentou a pior resposta, sendo muito suscetível a ventos laterais e a rugosidade do solo. Uma desvantagem deste controlador é a necessidade de medição de diversas grandezas, como deslocamento das rodas no eixo Z e a velocidade de guinada do veículo, o que pode tornar o tornar proibitivamente caro.

O controlador por *energy shaping* apresentou bons resultados, com erro quadrático médio um pouco maior do que o controlador PID. Ele apresenta erro absoluto de inclinação com picos menores que os outros controladores, porém sua resposta para perturbações de vento lateral apresentam uma dinâmica mais lenta. Sua implementação também se dá de forma simples, com a medição de poucas variáveis.

A utilização de um modelo dinâmico de triciclo para o síntese de controladores e o estudo do sistema é uma das maiores contribuições deste trabalho. A análise do efeito de variação de parâmetros, juntamente com a inclusão de perturbações, rendeu resultados importantes sobre a robustez de cada um dos controladores, uma vez que estas condições não são consideradas em grande parte dos artigos disponíveis.

Como resultado dos trabalhos realizados até o momento, um artigo foi aceito para publicação no Congresso Brasileiro de Automática 2010 e houve colaborações em artigo publicado no 11th International Workshop on Variable Structure Systems, onde um controlador por *sliding mode* foi proposto para realizar o seguimento de referência, apresentando bons resultados.

Como propostas para continuação do trabalho, pode-se destacar:

1. Validação do modelo do triciclo através de medições e ensaios com um protótipo, obtendo-se parâmetros reais do veículo, aperfeiçoando o modelo computacional e permitindo a obtenção de controladores com maior grau de confiabilidade.
2. Alterações no modelo do triciclo para inclusão da dinâmica de C_α . Isto permitiria a análise do comportamento do veículo para mudanças abruptas do atrito no solo. Em nenhum dos artigos pesquisados para este trabalho, este comportamento é analisado.
3. Estudo para melhorias dos controladores, através de modificações na estrutura. O uso de controladores *feedforward* para o esterço do veículo, combinados com controladores *feedback* pode melhorar a dinâmica da resposta do sistema em alguns casos.
4. Redução dos efeitos do vento na inclinação do veículo. Em sistemas que fazem uso do controlador DTC (*direct tilting control*), este é responsável por manter a inclinação do veículo sob ação de ventos. Um sistema semelhante poderia ser utilizado para tal, agindo somente nos casos onde a força do vento gera maiores variações na resposta e permitindo que o sistema de controle por esterço elimine o erro em regime.
5. Inclusão do motorista no modelo do triciclo, permitindo a análise do comportamento do veículo para seguimento de um caminho pré-determinado.
6. Desenvolvimento de controladores robustos. Trabalhos na área de controle por *sliding mode* estão sendo realizados, e alguns resultados obtidos já foram publicados em Roqueiro et al. (2010).
7. Desenvolvimento de controladores multivariáveis. Uma vez que o problema de estabilidade do triciclo possui duas variáveis de entrada e duas variáveis de saída com acoplamento entre os estados, um controlador que leve em conta estes efeitos apresentaria vantagens.

8. Aplicação dos controladores propostos em um protótipo, para validação dos resultados.

A. Apêndice - Algoritmo computacional

Quit[];

(* Definicao do vetor de estados q e do vetor de estados aumentado qext *)

$$q = \{x[t], y[t], z1[t], z2[t], z3[t], z4[t], \text{psi}[t], \text{phi}[t], \text{theta}[t]\};$$

$$qext = \{\{x[t]\}, \{y[t]\}, \{z1[t]\}, \{z2[t]\}, \{z3[t]\}, \{z4[t]\}, \{\text{psi}[t]\},$$

$$\{\text{phi}[t]\}, \{\text{theta}[t]\}, \{D[x[t], t]\}, \{D[y[t], t]\}, \{D[z1[t], t]\},$$

$$\{D[z2[t], t]\}, \{D[z3[t], t]\}, \{D[z4[t], t]\}, \{D[\text{psi}[t], t]\}, \{D[\text{phi}[t], t]\},$$

$$\{D[\text{theta}[t], t]\}\};$$

(* Definicao das velocidades dos corpos *)

$$u_1 = D[x[t], t] + h_1(D[\text{alpha}[t], t])\text{Cos}[\text{alpha}[t]];$$

$$v_1 = D[y[t], t] - h_1(D[\text{phi}[t], t])\text{Cos}[\text{phi}[t]];$$

$$w_1 = D[z1[t], t] - h_1 D[\text{phi}[t], t] \text{Sin}[\text{phi}[t]] - h_1 D[\text{alpha}[t], t] \text{Sin}[\text{alpha}[t]];$$

$$u_2 = D[x[t], t] + \text{Sqrt}[h_2^2 + a_2^2] (D[\text{alpha}[t], t])\text{Cos}[\text{alpha}[t]];$$

$$v_2 = D[y[t], t] + a_2 D[\text{psi}[t], t] - h_2(D[\text{phi}[t], t])\text{Cos}[\text{phi}[t]];$$

$$w_2 = D[z2[t], t] - h_2(D[\text{phi}[t], t])\text{Sin}[\text{phi}[t]] -$$

$$\text{Sqrt}[h_2^2 + a_2^2] D[\text{alpha}[t], t] \text{Sin}[\text{alpha}[t]];$$

$$u_3 = D[x[t], t] + b_3(D[\text{psi}[t], t]) +$$

$$\text{Sqrt}[h_3^2 + a_3^2] (D[\text{alpha}[t], t])\text{Cos}[\text{alpha}[t]];$$

$$v_3 = D[y[t], t] + a_3(D[\text{psi}[t], t]) - h_3(D[\text{phi}[t], t])\text{Cos}[\text{phi}[t]];$$

$$w_3 = D[z3[t], t] - h_3(D[\text{phi}[t], t])\text{Sin}[\text{phi}[t]] -$$

$$\text{Sqrt}[h_3^2 + a_3^2] (D[\text{alpha}[t], t])\text{Sin}[\text{alpha}[t]];$$

$$u_4 = D[x[t], t] - b_4(D[\text{psi}[t], t]) +$$

$$\text{Sqrt}[h_4^2 + a_4^2] (D[\text{alpha}[t], t])\text{Cos}[\text{alpha}[t]];$$

$$v_4 = D[y[t], t] + a_4(D[\text{psi}[t], t]) - h_4(D[\text{phi}[t], t])\text{Cos}[\text{phi}[t]];$$

$$w_4 = D[z4[t], t] - h_4(D[\text{phi}[t], t])\text{Sin}[\text{phi}[t]] -$$

$$\text{Sqrt}[h_4^2 + a_4^2] (D[\text{alpha}[t], t])\text{Sin}[\text{alpha}[t]];$$

$$\text{omegax}_1 = D[\text{phi}[t], t];$$

$$\text{omegay}_1 = D[\text{alpha}[t], t];$$

$$\text{omegaz}_1 = D[\text{psi}[t], t];$$

$$\text{omegax}_2 = D[\text{phi}[t], t];$$

$$\text{omegay}_2 = D[\text{theta}[t], t] + D[\text{alpha}[t], t];$$

$$\text{omegaz}_2 = D[\text{psi}[t], t];$$

$$\text{omegax}_3 = D[\text{phi}[t], t];$$

$$\text{omegay}_3 = D[\text{alpha}[t], t];$$

$$\text{omegaz}_3 = D[\text{psi}[t], t];$$

$$\text{omegax}_4 = D[\text{phi}[t], t];$$

$$\text{omegay}_4 = D[\text{alpha}[t], t];$$

$$\text{omegaz}_4 = D[\text{psi}[t], t];$$

(* Definicão das energias do sistema e da função de dissipação de Rayleigh *)

$$T1 = 1/2 \sum_{k=1}^4 m_k (u_k^2 + v_k^2 + w_k^2);$$

$$T2 = 1/2 \sum_{k=1}^4 ((\text{Inx})_k \text{omegax}_k^2 + (\text{Iny})_k \text{omegay}_k^2 + (\text{Inz})_k \text{omegaz}_k^2);$$

$$T3 =$$

$$\sum_{k=1}^4 ((\text{Inxy})_k \text{omegax}_k \text{omegay}_k + (\text{Inxz})_k \text{omegax}_k \text{omegaz}_k + (\text{Inyz})_k \text{omegay}_k \text{omegaz}_k);$$

$$T = T1 + T2 - T3;$$

$$Us = 1/2 (k_p z1[t]^2 + k_p z3[t]^2 + k_p z4[t]^2);$$

$$U2 = m_2 g \text{Cos}[\text{alpha}[t]] (h_2 + z2[t]) \text{Cos}[\text{phi}[t]];$$

$$U3 =$$

$$1/2 (k_1 (z2[t] - z1[t] + \text{theta}[t] a_2)^2 +$$

$$k_3 (z2[t] - z3[t] - \text{theta}[t] (1 - a_2))^2 +$$

$$k_4 (z2[t] - z4[t] - \text{theta}[t] (1 - a_2))^2);$$

$$U = Us + U2 + U3;$$

$$\text{Rayleigh} = 1/2 c z_1 ((D[z2[t], t] - D[z1[t], t])^2 + (a_2 D[\text{theta}[t], t])^2) +$$

$$1/2 c z_3 ((D[z2[t], t] - D[z3[t], t])^2 + ((1 - a_2) D[\text{theta}[t], t])^2 +$$

$$(b_3 D[\text{phi}[t], t])^2) +$$

$$1/2 c z_4 ((D[z2[t], t] - D[z4[t], t])^2 + ((1 - a_2) D[\text{theta}[t], t])^2 +$$

$$(b_3 D[\text{phi}[t], t])^2);$$

(* Cálculos das matrizes de dinâmica do sistema*)

MatrizM = D[T,{D[q, t],2}];

MatrizC = D[Rayleigh,{D[q, t],2}];

MatrizK = D[U,{q,2}];

(* Definicao dos parametros nominais do sistema*)

m₁ = 5;

m₂ = 500;

m₃ = 5;

m₄ = 5;

h₁ = .5;

h₂ = 1;

h₃ = .5;

h₄ = .5;

a₂ = 1.2;

b = 1;

l = 2.2;

k₁ = 9922.51;

k₃ = 3206.5;

k₄ = 3206.5;

cz₁ = 904.75;

cz₃ = 301.6;

cz₄ = 301.6;

k_p = 99225.1;

CalfaP = 10000;

A = 1;

At = 3;

rho = 1.29;

fR = .01;

g = 9.81;

Cx = 0.4;

$Cxt = 1;$
 $d = 0.55;$
 $n = 1;$
 $etaT = 1;$

$b_3 = b/2;$
 $b_4 = b_3;$
 $a_3 = l;$

(* Definicao dos momentos de inercia *)

$lnz_1 = m_1 0;$
 $lnz_2 = m_2 a_2^2;$
 $lnz_3 = m_3 (a_3^2 + b_3^2);$
 $lnz_4 = m_4 (a_4^2 + b_4^2);$

$lnx_1 = m_1 h_1^2;$
 $lnx_2 = m_2 h_2^2;$
 $lnx_3 = m_3 (h_3^2 + b_3^2);$
 $lnx_4 = m_4 (h_4^2 + b_4^2);$

$lnxz_1 = m_1 h_1 0;$
 $lnxz_2 = m_2 h_2 a_2;$
 $lnxz_3 = m_3 h_3 a_3;$
 $lnxz_4 = m_4 h_4 a_4;$
 $lny_2 = m_2 (a_2^2 + h_3^2);$
 $lnyz_2 = 0;$
 $lnxy_2 = 0;$

(* Calculo do sistema equivalente em variaveis de estado *)

$InvM = Inverse[MatrizM];$
 $CC = InvM.MatrizC;$

KK = InvM.MatrizK;

Q = {{0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {KK[[1, 1]], CC[[1, 1]], KK[[1, 2]], CC[[1, 2]], KK[[1, 3]], CC[[1, 3]],
 KK[[1, 4]], CC[[1, 4]], KK[[1, 5]], CC[[1, 5]], KK[[1, 6]], CC[[1, 6]],
 KK[[1, 7]], CC[[1, 7]], KK[[1, 8]], CC[[1, 8]], KK[[1, 9]], CC[[1, 9]]},
 {0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {KK[[2, 1]], CC[[2, 1]], KK[[2, 2]], CC[[2, 2]], KK[[2, 3]],
 CC[[2, 3]], KK[[2, 4]], CC[[2, 4]], KK[[2, 5]], CC[[2, 5]], KK[[2, 6]],
 CC[[2, 6]], KK[[2, 7]], CC[[2, 7]], KK[[2, 8]], CC[[2, 8]], KK[[2, 9]],
 CC[[2, 9]]},
 {0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {KK[[3, 1]], CC[[3, 1]], KK[[3, 2]], CC[[3, 2]], KK[[3, 3]], CC[[3, 3]],
 KK[[3, 4]], CC[[3, 4]], KK[[3, 5]], CC[[3, 5]], KK[[3, 6]], CC[[3, 6]],
 KK[[3, 7]], CC[[3, 7]], KK[[3, 8]], CC[[3, 8]], KK[[3, 9]], CC[[3, 9]]},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {KK[[4, 1]], CC[[4, 1]], KK[[4, 2]], CC[[4, 2]], KK[[4, 3]],
 CC[[4, 3]], KK[[4, 4]], CC[[4, 4]], KK[[4, 5]], CC[[4, 5]], KK[[4, 6]],
 CC[[4, 6]], KK[[4, 7]], CC[[4, 7]], KK[[4, 8]], CC[[4, 8]], KK[[4, 9]],
 CC[[4, 9]]},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {KK[[5, 1]], CC[[5, 1]], KK[[5, 2]], CC[[5, 2]], KK[[5, 3]], CC[[5, 3]],
 KK[[5, 4]], CC[[5, 4]], KK[[5, 5]], CC[[5, 5]], KK[[5, 6]], CC[[5, 6]],
 KK[[5, 7]], CC[[5, 7]], KK[[5, 8]], CC[[5, 8]], KK[[5, 9]], CC[[5, 9]]},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0},
 {KK[[6, 1]], CC[[6, 1]], KK[[6, 2]], CC[[6, 2]], KK[[6, 3]], CC[[6, 3]],
 KK[[6, 4]], CC[[6, 4]], KK[[6, 5]], CC[[6, 5]], KK[[6, 6]], CC[[6, 6]],
 KK[[6, 7]], CC[[6, 7]], KK[[6, 8]], CC[[6, 8]], KK[[6, 9]], CC[[6, 9]]},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0},
 {KK[[7, 1]], CC[[7, 1]], KK[[7, 2]], CC[[7, 2]], KK[[7, 3]], CC[[7, 3]],
 KK[[7, 4]], CC[[7, 4]], KK[[7, 5]], CC[[7, 5]], KK[[7, 6]], CC[[7, 6]],
 KK[[7, 7]], CC[[7, 7]], KK[[7, 8]], CC[[7, 8]], KK[[7, 9]], CC[[7, 9]]},

```
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0},
{KK[[8,1]],CC[[8,1]],KK[[8,2]],CC[[8,2]],KK[[8,3]],CC[[8,3]],
KK[[8,4]],CC[[8,4]],KK[[8,5]],CC[[8,5]],KK[[8,6]],CC[[8,6]],
KK[[8,7]],CC[[8,7]],KK[[8,8]],CC[[8,8]],KK[[8,9]],CC[[8,9]]},
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1},
{KK[[9,1]],CC[[9,1]],KK[[9,2]],CC[[9,2]],KK[[9,3]],CC[[9,3]],
KK[[9,4]],CC[[9,4]],KK[[9,5]],CC[[9,5]],KK[[9,6]],CC[[9,6]],
KK[[9,7]],CC[[9,7]],KK[[9,8]],CC[[9,8]],KK[[9,9]],CC[[9,9]]};
```

(* Calculo das forcas externas *)

```
F1 = (2nTmetaT/d) - (Cx D[x[t],t]^2Arho/2) -
fR ((m2gCos[alpha[t]] (l - a2) - Fbrh2)/l +
(m2gCos[alpha[t]]a2 + Fbrh2)/l) - m2gSin[alpha[t]] - Fbr;
F2 =
2CalfaP (delta[t] - (D[y[t],t]/D[x[t],t]) - (a3/2) D[psi[t],t]/D[x[t],t]) +
CalfaP (D[y[t],t] - (a4/2) D[psi[t],t])/D[x[t],t] +
rhoAtCxtVvent[t]^2 Sign[Vvent[t]]Cos[phi[t]]/2;
F3 = kpzp1;
F4 = 0;
F5 = kpzp3;
F6 = kpzp4;
F7 =
2CalfaP (a3 - a2)
(delta[t] - (D[y[t],t]/D[x[t],t]) - (a3/2) D[psi[t],t]/D[x[t],t]) +
(a4/2) CalfaP (D[y[t],t] + (a4/2) D[psi[t],t])/D[x[t],t];
F8 = (m2D[x[t],t]^2delta[t]Cos[phi[t]]h2)/l -
(rhoAtCxtSign[Vvent[t]]Vvent[t]^2Cos[phi[t]]h2)/2;
F9 = Fbrh2 - 2nTm/detaTh2;
Entradas = {Tm, Fbr, delta[t], Vvent[t]};
F11 = {(2n etaT/d), -1, 0, 0};
F22 = {0, 0, 2CalfaP, 1/2AtCxrhoCos[phi[t]]Sign[Vvent[t]]Vvent[t]};
```

$$F33 = \{0, 0, 0, 0\};$$

$$F44 = \{0, 0, 0, 0\};$$

$$F55 = \{0, 0, 0, 0\};$$

$$F66 = \{0, 0, 0, 0\};$$

$$F77 = \{0, 0, \text{CalfaP}\alpha_4, 0\};$$

$$F88 = \left\{ 0, 0, \frac{\text{Cos}[\text{phi}[t]] h_2 m_2 x'[t]^2}{l}, \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \text{AtCxrhoCos}[\text{phi}[t]] \text{Sign}[\text{Vvent}[t]] h_2 \text{Vvent}[t] \right\};$$

$$F99 = \left\{ \frac{2\text{etaTnh}_2}{d}, h_2, 0, 0 \right\};$$

$$\text{FF} = \{F11, F22, F33, F44, F55, F66, F77, F88, F99\};$$

Internosaux =

$$\left\{ \left\{ -g \text{Sin}[\text{alpha}[t]] m_2 - \frac{1}{2} \text{ACxrhox}'[t]^2 - \right. \right. \\ \left. \left. \text{fR} \left(\frac{g \text{Cos}[\text{alpha}[t]] (l - a_2) m_2}{l} + \frac{g \text{Cos}[\text{alpha}[t]] a_2 m_2}{l} \right) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{\text{CalfaP}\alpha_4 \text{psi}'[t]}{x'[t]} - \frac{\text{CalfaP} \left(\frac{1}{2} \alpha_4 \text{psi}'[t] - y'[t] \right)}{x'[t]} - \frac{2 \text{CalfaP} y'[t]}{x'[t]} \right\}, \right. \\ \left\{ k_p \text{zp1} \right\}, \{0\}, \left\{ k_p \text{zp3} \right\}, \left\{ k_p \text{zp4} \right\}, \\ \left. \left\{ -\frac{\text{CalfaP}\alpha_4^2 \text{psi}'[t]}{2x'[t]} - \frac{\text{CalfaP}\alpha_4 \left(\frac{1}{2} \alpha_4 \text{psi}'[t] - y'[t] \right)}{2x'[t]} - \frac{\text{CalfaP}\alpha_4 y'[t]}{x'[t]} \right\}, \{0\}, \{0\} \right\};$$

$$B = \text{InvM.FF}[\text{All}, 3];$$

$$\text{UU} = \{0, B[[1]], 0, B[[2]], 0, B[[3]], 0, B[[4]], 0, B[[5]], 0, B[[6]], 0, \\ B[[7]], 0, B[[8]], 0, B[[9]]\};$$

$$\text{II} = \text{InvM.Internosaux};$$

$$\text{Int} = \{0, \text{II}[[1]], 0, \text{II}[[2]], 0, \text{II}[[3]], 0, \text{II}[[4]], 0, \text{II}[[5]], 0, \\ \text{II}[[6]], 0, \text{II}[[7]], 0, \text{II}[[8]], 0, \text{II}[[9]]\};$$

$$\text{MatrizQ} = -\text{Q.qext} - \text{Int};$$

$$\text{Fx} = \text{Simplify}[\text{MatrizQ}[[16, 1]]];$$

$$\text{Gx} = \text{Simplify}[\text{UU}[[16]]];$$

(* Calcula se a inversa de Gx nao possui singularidade *)

Simplify[Gx]

$$\left(-1.844 \times 10^{19} + 2.183 \times 10^{20} \text{Cos}[\text{phi}[t]] + 2.516 \times 10^{18} \text{Cos}[\text{phi}[t]] x'[t]^2 \right) / \\ \left(3.768 \times 10^{17} + 3.323 \times 10^{16} \text{Cos}[\text{phi}[t]] + 4.026 \times 10^{16} \text{Cos}[\text{phi}[t]]^2 - 3.320 \text{Sin}[\text{phi}[t]]^2 \right)$$

FindInstance[

$$(-1.844 \cdot 10^{19} + 2.183 \cdot 10^{20} \cos[\phi[t]] + 2.516 \cdot 10^{18} \cos[\phi[t]] x'[t]^2) == 0 \&\&$$

$$0 < x'[t] < 50 \&\& -\pi/3 < \phi[t] < \pi/3, \{\phi[t], x'[t]\}$$

}

Referências

- Berote, J., van Poelgeest, A., Darling, J., Edge, K. & Plummer, A. (2008), 'The dynamics of a three-wheeled narrow-track tilting vehicle', *University of Bath*.
- Chapelon, J. & Lagache, M. (2003), Sécurité routière, la sécurité routière en france, bilan de l'année 2002, Technical report, L'Observatoire national interministériel de sécurité routière.
- Cossalter, V. (2006), *Motorcycle Dynamics*, Lulu. com.
- der Schaft, A. V. (1999), L_2 - Gain and passivity Techniques in Nonlinear Control, Springer.
- Detran Santa Catarina - Estatísticas (n.d.).
URL: <http://www.detran.sc.gov.br/estatistica/estatistica.htm>
- Doedel, E. (2009), 'Auto software for continuation and bifurcation problems in ordinary differential equations'.
URL: <http://indy.cs.concordia.ca/auto/>
- Gohl, J., Rajamani, R., Starr, P. & Alexander, L. (2006), Development of a novel tilt-controlled narrow commuter vehicle - final report, Technical report, University of Minnesota, Department of Mechanical Engineering.
- Hanson, G. N. (n.d.), 'Bicycling as a mode of transportation muenster, germany'.
URL: <http://www.geo.sunysb.edu/bicycle-muenster/index.html>
- Jazar, R. N. (2008), *Vehicle Dynamics - Theory and Application*, Springer Verlag, chapter 4.
- Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, 3rd edition edn, Prentice Hall.
- Kidane, S., Alexander, L., Rajamani, R., Starr, P. & Donath, M. (2008), 'A fundamental investigation of tilt control systems for narrow commuter vehicles', *Vehicle System Dynamics* **46**, 295–322.

- Kockelman, K. M. & Zhao, Y. (2000), Behavioral distinctions: the use of light duty trucks and passenger cars, Technical report, University of Texas at Austin.
- Leal, L. C. M., da Rosa, E. & Nicolazzi, L. C. (2008), 'Uma introdução à modelagem quase-estática de veículos automotores de rodas', Publicação interna GRANTE - Depto. de Eng. Mecânica da UFSC.
- Lee, H., Bucciano, C. & Halisky, C. (2000), 'Introdução ao projeto geométrico de rodovias parte 1', UFSC - Brazil.
- Ortega, R., Perez, J. A. L., Nichlasson, P. J. & Sira-Ramírez, H. (1998), *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*, Springer.
- Pacejka, H. (2006), *Tire and Vehicle Dynamics*, 2nd edn, SAE International.
- Reimpell, J., Stoll, H. & Betzler, J. W. (2001), *The Automotive Chassis*, Butterworth-Heinemann, chapter 3.
- Roqueiro, N., Fossas, E. & de Faria, M. G. (2010), A sliding mode controlled three wheels narrow vehicle for two passengers, *in* 'Proceedings of 11th IEEE Workshop on Variable Structure Systems', IEEE, pp. 358 – 362.
- Sepulchre, R., Jankovic, M. & Kokotovic, P. (1998), *Constructive Nonlinear Control*, Springer.
- SET/SP (2009), Balanço anual 2008, Technical report, Secretaria do Estado Dos Transportes - Governo do Estado de São Paulo (SET-SP).
- Slotine, J.-J. E. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, chapter 6.
- Sneel, A. (1998), 'An active roll-moment control strategy for narrow tilting commuter vehicles', *Vehicle System Dynamics* **29**, 277–307.
- Soares, A. G. (2003), 'Notas sobre a ocupação automobilística e a crise do transporte social urbano da cidade de Florianópolis'.

Spong, M. W. & Vidyasagar, M. (1989), *Robot Dynamics and Control*, John Wiley and Sons, chapter Chapter 10.

The National Highway Traffic Safety Administration - Motorcycle Safety Program (2003).
URL: <http://www.nhtsa.gov/Safety/Motorcycles>

Trofino, A. (2009), 'Notas de aula - módulo 9 - controle lqr', disponível em www.das.ufsc.br/trofino.

TTI (2010), 'Texas transportation institute: Urban mobility information: 2009 annual urban mobility report'.
URL: <http://mobility.tamu.edu/ums/>

Vieira, R. S., Nicolazzi, L. C. & Roqueiro, N. (2009), Modelling a tilting three-wheeled narrow vehicle with six degrees of freedom, in 'COBEM 2009, 20th International Congress of Mechanical Engineering', COBEM, Gramado, RS, Brazil.

Vieira, R. S., Nicolazzi, L. C., Roqueiro, N. & Padilha, R. (2007), Dynamic model of a leaning three-wheeled vehicle, in 'XVI Congresso e exposição internacionais da tecnologia da mobilidade', São Paulo - SP - Brazil.

XPP-AUT - X-Windows PhasePlane plus Auto Version 5.99 (2009).
URL: <http://www.math.pitt.edu/bard/xpp/xpp.html>