

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E
SISTEMAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE
PRODUÇÃO**

Hobed Rosa

**UM MODELO CONJUNTO DE LOCALIZAÇÃO E
OPERAÇÃO DE ESTOQUE EM REDES DINÂMICAS**

Florianópolis

2010

Hobed Rosa

**UM MODELO CONJUNTO DE LOCALIZAÇÃO E
OPERAÇÃO DE ESTOQUE EM REDES DINÂMICAS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Produção.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Fernando Mayerle

Florianópolis

2010

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

R788m Rosa, Hobed

Um modelo conjunto de localização e operação de estoque em redes dinâmicas / Hobed Rosa ; orientador, Sérgio Fernando Mayerle. - Florianópolis, SC, 2010.

165 p.: il.; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

Inclui bibliografia

1. Engenharia de produção. 2. Controle de estoque. 3. *p*-medianas. 4. Programação dinâmica. 5. Lote econômico de compra. I. Mayerle, Sérgio Fernando. II. Universidade Federal de Santa Catarina - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. III. Título.

CDU: 658.787

Hobed Rosa

**UM MODELO CONJUNTO DE LOCALIZAÇÃO E
OPERAÇÃO DE ESTOQUE EM REDES DINÂMICAS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de “Mestre em Engenharia de Produção”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

Florianópolis, 15 de Outubro de 2010.

Prof. Antonio Cezar Bornia, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Sérgio Fernando Mayerle, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Profª. Mirian Buss Gonçalves, Drª.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Antônio Galvão Naclério Novaes, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Antônio Sérgio Coelho, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Santa Catarina, em particular ao Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, pelo espaço disponibilizado no ORlab.

Ao CNPq pela bolsa de mestrado concedida, sem a qual não poderia me dedicar exclusivamente a este trabalho.

À Leonor Farias Abreu e a Prof^ª. Dr^ª. Mirian Buss Gonçalves pela confiança depositada ao permitir que me dedicasse ao estudo de um tema relacionada as suas pesquisas.

À banca examinadora pela disposição, comentários, críticas e sugestões realizadas.

Ao Prof. PhD. João Neiva de Figueiredo por ter me conduzido a trabalhar junto ao Prof. Mayerle.

Em especial, gostaria de agradecer a minha esposa Daynitti Ventura que pacientemente me faz ser uma pessoa cada vez melhor. Da mesma forma, gostaria de agradecer aos meus Pais por me oferecer a oportunidade única de estudar.

Por último, quero deixar o meu profundo reconhecimento ao Prof. Dr. Sérgio Fernando Mayerle. Os momentos vivenciados não serão esquecidos. Muito obrigado, Professor!

RESUMO

Neste trabalho é proposto um modelo de otimização para o problema de localização de instalações, alocação de demanda e operação de estoque em redes dinâmicas onde parte dos arcos dessa rede está sujeita a interrupções que podem ocorrer segundo probabilidades conhecidas, respeitando um processo Markoviano. O modelo é concebido com o objetivo de integrar, numa mesma abordagem, decisões estratégicas (onde localizar) e decisões operacionais (como operar) visando proporcionar a minimização dos custos do sistema, ao mesmo tempo em que se estabelece nível de serviço para atendimento à demanda. Para resolver este modelo é desenvolvida uma estratégia que utiliza programação dinâmica estocástica, simulação, o modelo clássico de lote econômico de compra e uma adaptação do algoritmo heurístico de Teitz & Bart. Tal estratégia é implementada em um programa de computador e testes computacionais são realizados com sucesso em um estudo de caso elaborado a partir de dados hipotéticos. Os resultados obtidos e as análises realizadas demonstram a factibilidade do modelo e a aplicabilidade da estratégia de solução.

Palavras-chave: Problema de localização; Redes dinâmicas; p -Medianas; Controle de estoque; Programação dinâmica; Lote econômico de compra.

ABSTRACT

In this dissertation, we develop an optimization model to address the problem of facility location, demand allocation, and inventory control and operation in a dynamic network having arcs subject to interruptions that can occur with known probabilities, accordingly to a Markovian process. The provided model aims to integrate strategic decisions (where to locate) and operational decisions (how to operate) in order to minimize the system's total cost while, at the same time, service level to satisfy demand is established. The solution procedure employs stochastic dynamic programming, simulation, the economic order quantity model and a Teitz & Bart's algorithm adaptation to solve the proposed model. This solution strategy was implemented in a computer program and computational tests were successfully performed in a case study created using hypothetical data. The results obtained and further analyses have shown the feasibility of both the model and the solution procedure.

Keywords: Facility location problem; Dynamic network; p -Median; Inventory control; Dynamic programming; Economic order quantity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Nível médio mensal do Rio Negro/Amazonas vs Precipitação média.....	28
Figura 1.2 - Volume diário verificado em um dos rios na região de Manaus.....	29
Figura 3.1 - Evolução do valor médio de acordo com o número de repetições.....	80
Figura 3.2 - Fluxograma genérico do algoritmo de Programação Dinâmica.....	84
Figura 3.3 - Processo de evolução na Programação Dinâmica Estocástica.....	87
Figura 4.1 - Representação simplificada da rede de distribuição.....	96
Figura 4.2 - Esquema simplificado para a abordagem do problema.....	99
Figura 4.3 - Representação do grafo equivalente da rede de distribuição.....	100
Figura 4.4 - Problema de operação do estoque local modelado com um PPDE.....	105
Figura 4.5 - Custos vinculados ao ressuprimento.....	108
Figura 5.1 - Representação da melhor solução obtida.....	134
Figura 5.2 - Evolução do método de Teitz & Bart adaptado.....	136
Figura 5.3 - Solução obtida com o método de Teitz & Bart.....	138

LISTA DE QUADROS

Quadro 4.1 - Exemplo de simulação da demanda equivalente.....	114
Quadro 5.1 - Constantes adotadas no estudo de caso	127
Quadro 5.2 - Exemplo de probabilidades de transição para um <i>link</i> ...	127
Quadro 5.3 - Dados referentes aos locais onde CDR's podem ser instalados	128
Quadro 5.4 - Dados referentes às localidades a serem atendidas	131
Quadro 5.5 - Parâmetros aplicados ao estudo de caso.....	132
Quadro 5.6 - Exemplo de operação ótima do estoque local	141
Quadro 5.7 - Resumo da operação ótima do estoque nos CDR's	143

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resumo da melhor solução encontrada com o método proposto.....	135
Tabela 2 - Resumo da solução obtida com o método de Teitz & Bart	139

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABREVIATURAS

unid. Unidade

SIGLAS

ADP *Approximate Dynamic Programming*

CD Centro de Distribuição

CDR Centro de Distribuição Regional

ES Estoque de Segurança

JIT *Just-in-Time*

LEC *Economic Order Quantity* ou Lote Econômico de Compra

NS Nível de Serviço

PIB Produto Interno Bruto

PIM Pólo Industrial de Manaus

PPDE Problema de Programação Dinâmica Estocástica

SCM *Supply Chain Management* ou Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos

VMI *Vendor Managed Inventory* ou Estoque Gerenciado pelo Fornecedor

LISTA DE SÍMBOLOS

\tilde{V}_{ij}	Estimativa para o custo médio esperado de alocar o vértice de demanda $x_j \in J$ ao CDR instalado no vértice $x_i \in I$.
\tilde{F}_i	Estimativa para o custo médio esperado de abertura e operação do CDR no vértice $x_i \in I$.
a_{ij}	Aresta (x_i, x_j) do grafo G .
n	Estágio (n): corresponde a um período identificado dentro do ciclo de repetição.
k	Ação (k): é a decisão acerca do tamanho do pedido a ser realizado.
u	Estado (u): é o par (e_u, s_u) .
e_u	Estoque atual em $x_j \in J$.
s_u	Condição da aresta a_{ij} (1 se Aberta, 0 se Fechada).
λ_j^n	Demanda média em $x_j \in J$ durante n .
X_j^n	Variável aleatória que representa a demanda em $x_j \in J$ durante n .
p_r^n	Probabilidade da demanda ser igual à r no vértice $x_j \in J$ durante n .
CF_i	Custo fixo de pedido x_j -CDR.
CF_1	Custo fixo de pedido x_j -CD.
CF_1'	Custo fixo de pedido CDR-CD.
c_{ij}	Custo unitário de transporte entre $x_i \in I$ e $x_j \in J$.
c_{1i}	Custo unitário de transporte entre o CD e o CDR instalado em $x_i \in I$.
h_j	Custo unitário de manutenção por período em $x_j \in J$.
φ	Taxa de mínima atratividade por período.

- γ Taxa equivalente de mínima atratividade por ciclo.
- α Nível de serviço para atendimento à demanda por período.
- Q_j^{\max} Capacidade máxima de armazenagem por estágio em $x_j \in J$.
- k_{\min} Ação viável mínima no estágio.
- \mathbf{T}_{ij} Matriz de probabilidade de transição da aresta a_{ij} .
- \mathbf{P}_{ij} Matriz de probabilidade de estado da aresta a_{ij} .
- Q_i Lote econômico de compra para o CDR instalado em $x_i \in I$.
- c_i Custo aproximado de manutenção do estoque durante um ciclo.
- C_i Valor presente para o custo de manutenção do estoque no CDR instalado em $x_i \in I$.
- f_i Custo fixo de instalação (abertura) do CDR no vértice $x_i \in I$.
- $\mathbf{V}_{|I| \times |J|}^n$ Matriz com os custos de alocações.
- X_p Conjunto dos vértices $x_i \in I$ onde um CDR dever ser aberto.
- $\sigma(X_p)$ Transmissão associada ao conjunto X_p .
- $TR^{n-1}(s_v)$ Tempo de ressuprimento para o pedido realizado em $x_j \in J$ no estágio $n-1$.
- $p_e(n, e_u, e_v, k)$ Probabilidade de o estoque passar de e_u a e_v durante n dada a ação k .
- $p_l(n, s_u, s_v)$ Probabilidade de ocorrer uma transição de s_u para s_v ao final do estágio n .
- $CM(e_u, e_v)$ Função de retorno para o custo de manutenção do estoque em $x_j \in J$ durante n .
- $CR(k, s_u)$ Função de retorno para o custo de repor k unidades de estoque em $x_j \in J$ dada a condição s_u .
- $K(n, e_u, s_u)$ Conjunto das ações viáveis no estado (n, u) .
- $D^{\max}(n, s_u)$ Demanda máxima (simulada) no estágio n em $x_j \in J$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	25
1.1	Contextualização	25
1.2	Definição do Problema	26
1.3	Importância.....	30
1.3.1	Importância Econômica.....	30
1.3.2	Importância para a Sociedade.....	31
1.3.3	Importância Acadêmica.....	32
1.4	Objetivos.....	33
1.4.1	Objetivo Geral.....	33
1.4.2	Objetivos Específicos.....	33
1.5	Limitações	34
1.6	Método.....	34
1.7	Estrutura do Trabalho	35
2	REVISÃO DA LITERATURA	37
2.1	Considerações Iniciais	37
2.2	Estoques e o Modelo Clássico de Lote Econômico	37
2.2.1	Revisão Contínua	46
2.2.2	Revisão Periódica.....	47
2.2.3	Estoque de Segurança.....	49
2.3	Modelos de Lote Econômico Sob Condições de Interrupção	52
2.4	Problemas de Localização	53
2.4.1	Problema de p -Medianas.....	57
2.4.2	Problema de p -Medianas Hierárquicas.....	60
2.4.3	Problema de p -Centros.....	62
2.4.4	Problema de Localização Generalizado	64
2.5	Problemas Combinados de Localização e Estoque.....	66
2.6	Modelos Dinâmicos.....	68
2.7	Considerações Finais	69
3	FERRAMENTAL MATEMÁTICO BÁSICO	71
3.1	Considerações Iniciais	71
3.2	Simulação	71
3.2.1	Geração de Números Pseudo-aleatórios.....	74
3.2.1.1	Método da Congruência Multiplicativa	75
3.2.1.2	Geração de Números Pseudo-aleatórios com Distribuição de Poisson	76

3.2.2	Técnicas de Simulação	77
3.2.3	Tamanho da Amostra	78
3.2.4	Recomendação	80
3.3	Programação Dinâmica	81
3.3.1	Programação Dinâmica Estocástica	86
3.3.2	Programação Dinâmica Estocástica com Desconto e Horizonte Ilimitado	88
3.4	Algoritmo de Teitz & Bart	90
3.5	Considerações Finais	93
4	MODELO PROPOSTO	95
4.1	Considerações Iniciais	95
4.2	Caracterização do Problema	95
4.2.1	Estrutura do Sistema de Distribuição	96
4.2.2	Operação do Sistema de Distribuição	97
4.2.3	O Problema de Decisão	98
4.3	Modelo de Localização dos CDR's	100
4.4	Modelo de Operação do Estoque Local e Cálculo de \tilde{V}_{ij}	102
4.4.1	Hipóteses Simplificadoras	102
4.4.2	Modelo Conceitual	104
4.4.3	Formulação do Modelo Matemático	106
4.4.3.1	Probabilidades de Transição	106
4.4.3.2	Função de Retorno	108
4.4.3.3	Função de Recorrência	110
4.4.3.4	Conjunto de Ações Viáveis	111
4.4.3.5	Formulação Completa	115
4.4.4	Técnica de Solução	116
4.4.5	Determinação da Estimativa \tilde{V}_{ij}	117
4.5	Modelo de Operação do Estoque no CDR e Cálculo de \tilde{F}_i	118
4.5.1	Desenvolvimento do Modelo	118
4.5.2	Custo da Operação do Estoque no CDR e Determinação de \tilde{F}_i	120
4.6	Estratégia de Solução para o Modelo de Localização dos CDR's	121
4.7	Considerações Finais	122
5	EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA	125
5.1	Considerações Iniciais	125
5.2	Caracterização da Experimentação e Valores Experimentados	126
5.3	Análise dos Resultados	133
5.3.1	Solução para o Problema de Localização	133
5.3.2	Solução para o Problema de Operação do Estoque Local	139
5.3.3	Operação do Estoque no CDR	142
5.4	Considerações Finais	143

6	CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....	145
6.1	Conclusões.....	145
6.2	Recomendações	147
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	149
	APÊNDICE A - Relatório de Alocação da Melhor Solução Obtida	159

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

A grande quantidade e a diversidade de trabalhos que podem ser identificados dentro da vasta classe dos problemas de localização de instalações (*Facility Location Problem*) demonstram a atenção que a comunidade científica tem dedicado a este tema desde os primeiros trabalhos publicados na década de 60. A partir de então, o interesse nos problemas de localização cresceu significativamente, com aplicações sendo verificadas em áreas bastante distintas, tais como: pesquisa operacional, economia e geografia. Esse interesse pode ser justificado, em especial, por dois fatores. O primeiro fator diz respeito à própria dificuldade inerente ao tema, a qual além de limitar a aplicação de certos modelos também contribui para estimular a pesquisa por métodos de solução mais eficientes. Já o segundo fator está associado à importância econômica e estratégica que permeia esta classe de problemas. Neste sentido, inúmeras organizações, sejam elas do setor público ou privado, enfrentam a necessidade de expandir suas atividades e, com isso, implantar novas instalações. É justamente neste processo de planejamento estratégico, onde altos investimentos normalmente estão envolvidos, que os modelos de localização se destacam.

Por serem de difícil reversão e influenciarem várias questões operacionais, as decisões de localização precisam ser tomadas de forma a poder permitir que as instalações mantenham-se operacionais e economicamente viáveis por longos períodos de tempo. Na maioria das vezes essas decisões requerem que se façam inferências quanto ao estado futuro do ambiente que circunda as instalações, não bastando ser considerado apenas o estado atual (OWEN e DASKIN, 1998).

Desta forma, dentro da otimização discreta e contínua, muitos pesquisadores têm se concentrado no desenvolvimento de melhores estratégias de localização, tanto em relação a modelos quanto aos métodos de solução. Com relação aos modelos, esses podem ser encontrados contemplando situações determinísticas, dinâmicas, estocásticas ou, ainda, utilizando análise de cenários. Muitos deles exploram características presentes nos problemas, as quais permitem a

elaboração de estratégias mais eficientes de solução (GALVÃO, 2004; REVELLE e EISELT, 2005).

Dentre os vários campos de aplicação da teoria de localização encontram-se alguns dos problemas vivenciados na logística. Frequentemente esses problemas tratam da localização de indústrias, centros de distribuição, centros de recebimento, centros de processamento, entre outros semelhantes. Em síntese, o processo de decisão em tais problemas resume-se a determinar onde localizar as instalações, ao mesmo tempo em que se aloca demanda às mesmas, levando-se (ou não) em conta os custos fixos (instalação) e os variáveis (operação), onde normalmente estão inclusos os custos relacionados ao transporte.

Neste sentido, o presente trabalho abordará um problema de localização de instalações, com aplicação à área de logística.

1.2 Definição do Problema

Os primeiros trabalhos sobre problemas de localização relatados na literatura estavam relacionados ao contexto industrial visando o abastecimento de produtos a um conjunto de pontos de demanda (GALVÃO, 2004). Eles consideravam o caso determinístico onde todos os parâmetros eram conhecidos e constantes. Com a evolução dos estudos outras suposições mais realistas foram possíveis, tornando os modelos mais aderentes à realidade. Alguns desses modelos consideravam a natureza do mundo real em que os dados e os parâmetros mudam constantemente ao longo do tempo. Em muitos casos essas mudanças seguem um comportamento aproximadamente cíclico, repetindo-se ao longo de períodos. Nesta situação, os modelos precisam levar em conta um horizonte de planejamento, dentro do qual as mudanças ocorrem, dando-se origem aos modelos de localização dinâmicos, em que as decisões de localização e alocação mudam ao longo do tempo (GALVÃO, 2004). Ratick et al. (1987) cita vários exemplos de situações onde tais modelos podem ser aplicados.

De forma semelhante, o presente trabalho abordará um problema de localização onde o comportamento dinâmico da rede segue um processo Markoviano em que parte dos arcos pode sofrer interrupções. Neste problema o objetivo é localizar centros de distribuição, alocar demanda (localidades) aos mesmos e determinar a política ótima de operação do estoque nessas localidades e também nos centros de distribuição, visando minimizar o custo total do sistema. Ao contrário

dos modelos dinâmicos de alocação encontrados na literatura, no modelo proposto as decisões de localização e alocação não se modificam ao longo do tempo, mas são “compensadas” por uma mudança na política de operação do estoque das localidades, de modo a proporcioná-las o nível de serviço requerido. Assim, o que se obtém é um modelo conjunto (ou acoplado) de localização-alocação e estoque em que as características dinâmicas da rede são tratadas no contexto do gerenciamento dos estoques.

Várias situações reais podem ser adaptadas ao modelo proposto. Uma dessas situações é a verificada em regiões da América do Norte, onde alguns rios permanecem congelados parte do ano, inviabilizando o trânsito de embarcações e forçando uma administração estratégica dos estoques (RATICK et al., 1987). Outro exemplo é a situação vivenciada na Amazônia Brasileira, mais especificamente no Estado do Amazonas. Nesta região, a maior parte dos deslocamentos (e, portanto, dos transportes) entre os municípios são realizados através da extensa malha de rios que os permeiam. Naturalmente, essa malha fluvial sofre influência direta do regime de chuvas daquela região, o qual, por sua vez, apresenta um comportamento sazonal característico. Para exemplificar, a Figura 1.1 mostra a evolução do nível médio mensal das águas do Rio Negro/Amazonas na região de Manaus em relação à precipitação média verificada na mesma área durante o período de um ano. Nota-se uma relação proporcional entre a precipitação ocorrida e o subsequente nível das águas.

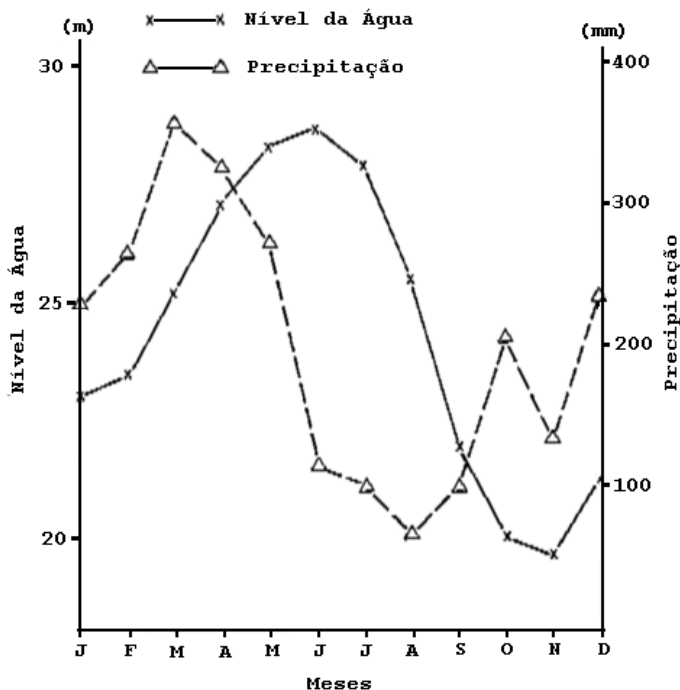


Figura 1.1 - Nível médio mensal do Rio Negro/Amazonas vs Precipitação média¹

Fonte: Adaptado de Junk e Furch, 1985, p. 5.

Além disso, dadas as dimensões daquela região, deve-se também considerar as influências pontuais ocasionadas por eventos locais, em contraste aos eventos globais que agem sobre toda a área. Segundo Junk e Furch (1985) o regime de chuvas no estado apresenta duas estações bem definidas: uma chuvosa e outra seca, as quais regem o nível dos rios. Apesar disso, ocorrências pluviométricas locais ocasionam flutuações significativas nesses níveis (JUNK e FURCH, 1985). A Figura 1.2 mostra tal efeito. Nota-se que o nível das águas do rio em questão sofre influência direta das precipitações locais. Conseqüentemente, dado este processo dinâmico e contínuo, pode-se esperar que, ao longo do ano, os rios apresentem diferentes condições de trânsito, o que dificulta (ou impede) o acesso e, portanto, o abastecimento dos municípios.

¹ Dados referentes ao período de 1975-1979.

Desta forma, ao se estudar a implantação de uma rede de distribuição em regiões semelhantes às exemplificadas, é necessário contemplar as peculiaridades que governam a mobilidade do local. O modelo deve, portanto, buscar considerar a dinâmica da rede visando estabelecer estratégias de transporte que sejam factíveis e corroborem para a racionalização dos custos do sistema. Tais custos não se restringem somente aos de transporte, mas também àqueles relacionados aos estoques.

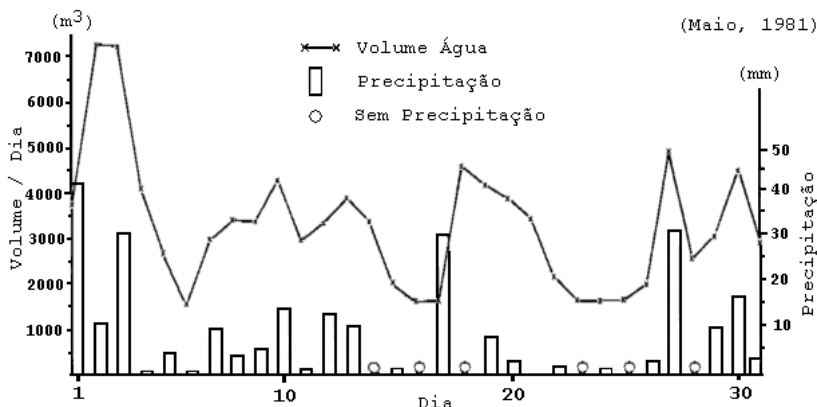


Figura 1.2 - Volume diário verificado em um dos rios na região de Manaus

Fonte: Adaptado de Junk and Furch, 1985, p. 5.

Neste sentido, e considerando a importância crescente atribuída ao tema estoques, principalmente no âmbito da cadeia de suprimentos, é que o modelo aqui desenvolvido propõe integrar decisões logísticas estratégicas e operacionais. Segundo ReVelle e Eiselt (2005), tradicionalmente os estudos sobre problemas de localização tendem a focar prioritariamente a estrutura da rede, deixando sua operação em segundo plano. Aqui, por outro lado, as decisões de localização são tomadas após conhecidas as políticas ótimas para a operação dos estoques. Assim, a longo prazo, esta abordagem deverá proporcionar significativas reduções de custo, uma vez que, conforme Mak e Shen (2009) negligenciar os efeitos do estoque neste tipo de estudo conduz ao estabelecimento de redes sub-ótimas.

Em comparação aos modelos dinâmicos existentes na literatura, o modelo proposto neste trabalho possui ainda a vantagem de eliminar o “transtorno” causado pela operação de realocação de instalações e demanda, o que é bastante interessante principalmente em regiões

geograficamente dispersas, de difícil acesso e operadas pelo poder público.

1.3 Importância

A importância deste trabalho pode ser dividida em três aspectos. O primeiro diz respeito à questão econômica. O segundo trata dos potenciais benefícios à sociedade. E, por último, o terceiro aspecto se refere à importância acadêmica. Nas seções seguintes esses aspectos serão detalhados.

1.3.1 Importância Econômica

Por natureza, os problemas de localização² possuem cunho estratégico, já que normalmente envolvem decisões que demandam elevados aportes de capital e que tendem a perdurar por um horizonte de tempo razoavelmente longo. Problemas estratégicos desse tipo estão, por exemplo, relacionados a decisões de construção de novas fábricas ou a instalação de novos centros de distribuição. Decisões desta natureza, quando tomadas de forma errônea, podem significar a inviabilidade de um projeto ou, ainda, períodos seguidos de perdas para uma organização. Owen e Daskin (1998) fornecem uma excelente discussão a este respeito.

Por outro lado, decisões que se referem ao problema de operação do estoque possuem natureza tática e operacional. Elas dizem respeito à localização dos estoques, à maneira (ou política) de administrá-los e à estratégia de distribuição dos mesmos. Apesar de menos críticas, recentemente tem-se observado o aumento da importância de temas relacionados a esta questão, principalmente dentro do estudo das cadeias de suprimento com foco na redução gradativa dos custos associados aos estoques ao longo da cadeia. Para exemplificar, no Brasil estima-se que os custos de transporte, estoque e armazenagem representem juntos 12% do PIB nacional (LIMA, 2006).

Tradicionalmente, conforme apontam Shen et al. (2003) e Mak e Shen (2009), as decisões acerca desses dois problemas são tomadas separadamente. Esta abordagem é justificada, dentre outros motivos, pela dificuldade intrínseca associada a cada um dos problemas em

² No contexto em que serão estudados neste trabalho.

particular. Entretanto, apesar de distintos esses dois problemas estão, ainda que não de maneira óbvia, diretamente relacionados. Isto é, a localização dos centros de distribuição influencia a política de operação do estoque, a qual, caso não esteja adequadamente avaliada, pode acarretar em custos mais elevados de armazenamento e/ou distribuição, onerando o sistema.

Assim, ao integrar as decisões individuais em um único problema obtêm-se, como resultado, um novo modelo, mais robusto e aderente à realidade, posto que mais fatores estão sendo contemplados simultaneamente na tomada de decisão. É plausível supor, portanto, que esta abordagem tende a proporcionar o estabelecimento de uma rede mais eficiente, com reduções de custo, ainda que, a longo prazo.

1.3.2 Importância para a Sociedade

Considere o problema de conceber, instalar e operar uma rede de distribuição que seja administrada pelo poder público e que será utilizada para prover a população com algum recurso essencial como remédios ou material escolar, por exemplo. Nesta situação, o poder público, seja ele federal, estadual ou municipal, deve atender a demanda das regiões sob sua responsabilidade independentemente das dificuldades e custos existentes para desempenhar tal tarefa.

Em particular, se as regiões a serem atendidas sofrem freqüentes restrições de acesso, as quais impedem ou dificultam a operação de abastecimento, pode-se esperar que a utilização do modelo proposto neste trabalho resultará em dois ganhos à sociedade: qualidade no serviço prestado e eficiência na aplicação dos recursos.

O primeiro deles se refere à flexibilidade de definir o nível de serviço a ser oferecido. Como será visto, tal nível pode ser função da importância ou demanda de cada região. Esta decisão é tomada como parâmetro para estabelecimento da política de estoque, a qual considera também as restrições locais de acesso.

O segundo ganho diz respeito ao fato de ambos, a concepção e a operação da rede, serem abordadas de forma integrada visando a otimização do sistema de distribuição, o que, em última análise, corrobora para o uso eficiente do recurso público.

1.3.3 Importância Acadêmica

Do ponto de vista acadêmico, o trabalho apresenta três contribuições bem definidas. A primeira delas é o desenvolvimento de um modelo em que o nível de serviço está definido para o “local” de demanda e não para o centro distribuidor, como frequentemente é encontrado na literatura. Além disso, a operação ótima do estoque não segue, necessariamente, o modelo de lote econômico de compra, mas sim uma política que se adéqua ao comportamento dinâmico da rede. Na pesquisa bibliográfica realizada não foi verificada a existência de trabalhos que abordem o problema de localização-alocação, acoplado ao de operação ótima do estoque, em uma rede com arcos cuja disponibilidade é intermitente.

A segunda contribuição diz respeito à estratégia de solução concebida. Tal estratégia apóia-se em uma abordagem heurística bastante conhecida na literatura de teoria de localização. Para verificar sua factibilidade, a estratégia é implementada em um programa de computador e uma série de testes são realizados em um conjunto de dados hipotéticos.

Por último, a terceira contribuição refere-se à revisão da literatura. Vários trabalhos recentes, notoriamente a partir de 2000, abordam o problema conjunto de localização e operação ótima do estoque, procurando acrescer ao problema clássico de localização os custos que resultam da operação do sistema de distribuição. Segundo consta na literatura, essa abordagem se mostra bastante interessante, principalmente tendo-se em vista a importância crescente que vem sendo atribuída aos custos que decorrem dos estoques.

Com relação a não trivialidade do assunto vale destacar que os problemas de localização são classificados como *NP-hard*. Adicionalmente, vários modelos para a operação ótima de estoque têm sido desenvolvidos atualmente, o que demonstra a importância do tema. Portanto, o assunto aqui abordado possui evidente relevância acadêmica e prática, possuindo relação com problemas de operação ótima do estoque em redes que sofrem falhas (aqui chamadas de interrupções), confiabilidade em redes, estratégias heurísticas para o problema de p -medianas, problemas de p -medianas hierárquicas e *network design* considerando nível de serviço.

1.4 Objetivos

Os objetivos deste trabalho podem ser divididos em geral e específicos, conforme apresentado nas seções seguintes.

1.4.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um modelo matemático de otimização que auxilie a tomada de decisão acerca da configuração, ao mínimo custo, de um sistema de distribuição em que são considerados requisitos de desempenho operacional e a disponibilidade intermitente dos arcos que formam a rede de transporte.

1.4.2 Objetivos Específicos

Quanto aos objetivos específicos deste trabalho, podem ser elencados os itens que seguem:

- 1º. Modelar a rede que representa a região, levando em consideração os aspectos dinâmicos que caracterizam a indisponibilidade dos arcos;
- 2º. Propor um modelo matemático de otimização que permita localizar Centros de Distribuição Regionais e alocar demanda (localidades) a esses centros;
- 3º. Desenvolver um modelo matemático de otimização para definir a política ótima de operação do estoque nas localidades em função da indisponibilidade dos arcos e requisitos operacionais estabelecidos;
- 4º. Definir um modelo para a operação do estoque nos centros de distribuição regionais;
- 5º. Desenvolver uma estratégia de solução capaz de resolver o problema conjunto de localização e estoque integrando os modelos anteriormente formulados e técnicas heurísticas;
- 6º. Implementar a estratégia de solução concebida em um software;
- 7º. Realizar testes computacionais em um conjunto de dados hipotéticos e avaliar a qualidade dos resultados obtidos.

1.5 Limitações

São várias as limitações que podem ser apontadas neste trabalho. Dentre elas, as principais estão descritas a seguir:

- 1°. É estudado somente o caso onde um único produto está sendo transportado. Na prática múltiplos produtos são transportados simultaneamente num sistema de distribuição, o que pode conduzir a resultados diferentes dos aqui obtidos;
- 2°. Não é considerada a possibilidade das localidades terem suas demandas atendidas por mais de um centro de distribuição regional. Em casos reais, múltiplas opções de atendimento podem estar disponíveis, resultando em redução de custo (ver, por exemplo, Ozsen et al. 2009);
- 3°. Apesar de terem sido considerados alguns dos principais custos existentes em um sistema de distribuição, alguns outros, como por exemplo, o de falta ou o de operação do centro de distribuição, não são apreciados no modelo desenvolvido;
- 4°. Os testes realizados se limitaram a um estudo de caso hipotético;
- 5°. Nenhuma consideração é feita acerca da natureza dos produtos transportados. Para produtos perecíveis, a operação aqui concebida para o estoque pode não ser a mais adequada; e
- 6°. Por fim, as próprias hipóteses simplificadoras formuladas limitam a análise às condições admitidas.

1.6 Método

Para atingir os objetivos anteriormente elencados, este trabalho segue o desenvolvimento metodológico que é descrito a seguir.

Na primeira etapa realiza-se a pesquisa bibliográfica, onde o intuito é conhecer os principais estudos, parâmetros, modelos e técnicas de solução que se relacionam ao problema deste trabalho. A pesquisa bibliográfica está centralizada em periódicos nacionais e internacionais, principalmente, na área de pesquisa operacional, programação matemática e logística.

Com base nas abordagens encontradas nos trabalhos pesquisados é proposta, na segunda etapa, uma modelagem para o problema aqui

estudado. Em seguida, procede-se a implementação computacional da estratégia de solução e a execução de testes numéricos.

1.7 Estrutura do Trabalho

Além deste capítulo de introdução, o trabalho está dividido em outros cinco. No segundo capítulo é realizada a revisão da literatura dando-se ênfase ao tema estoques, ao modelo clássico de lote econômico e ao problema de localização. Em seguida, no terceiro capítulo são apresentadas, de forma sucinta, as ferramentas matemáticas aplicadas à modelagem e a solução do problema estudado neste trabalho.

O quarto capítulo é dedicado à descrição formal deste problema e à apresentação da modelagem proposta, bem como da estratégia concebida para sua solução. Na continuação, o quinto capítulo traz os resultados e análises acerca da experimentação numérica conduzida a fim de estudar a factibilidade do modelo, a estratégia de solução e o desempenho do *software* desenvolvido.

Finalmente, o sexto capítulo apresenta as conclusões obtidas e as recomendações para estudos futuros. Encerando o trabalho estão as referências bibliográficas e o apêndice que traz o resumo dos resultados mais importantes obtidos nos testes realizados.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Considerações Iniciais

O intuito neste capítulo é fazer uma descrição da literatura básica pertinente ao escopo deste trabalho, apresentando e definindo alguns conceitos que serão utilizados *a posteriori*. O objetivo principal não é esgotar o assunto, mas sim, expor a essência dos conteúdos abordados.

O capítulo inicia com uma discussão geral sobre estoques e sua importância econômica e estratégica, tanto no âmbito da indústria quanto na logística, dando-se ênfase à cadeia de suprimentos. É apresentado o modelo clássico de lote econômico juntamente com os sistemas de revisão contínua e revisão periódica, seguidos de uma breve discussão sobre estoques de segurança. Sem ater-se ao processo formal de derivação das equações, é apresentada uma maneira de determinar o nível de estoque de segurança a ser fixado quando a demanda e o tempo de ressuprimento são tomados como variáveis aleatórias de distribuição normal.

Na continuação, é feita uma revisão sumarizada sobre a vasta área da teoria de localização. Os modelos clássicos de p -medianas e p -centros são apresentados. Complementando, são abordados os problemas de p -medianas hierárquicas e de localização generalizado.

Unindo os dois assuntos inicialmente apresentados, discute-se rapidamente a proposta dos modelos que combinam o problema de localização ao de operação do estoque. Finalizando, apresenta-se a proposta contemplada pelos modelos dinâmicos que, tentando ser mais aderentes à realidade, tomam decisões considerando um horizonte de análise.

2.2 Estoques e o Modelo Clássico de Lote Econômico

O tema estoques e sua gestão são assuntos recorrentes e não exclusivos do setor industrial. Veja, por exemplo, o caso do Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS)¹. Essa entidade possui, dentre

¹ Pessoa jurídica de direito privado, sem fins lucrativos, responsável por executar as atividades de coordenação e controle das operações de geração e transmissão de energia elétrica do

outras, a incumbência de fazer, segundo o Decreto Nº 5.081/2004, o “planejamento e a programação da operação e o despacho centralizado da geração, com vistas à otimização do Sistema Interligado Nacional”. Essas atividades pressupõem a determinação de onde (qual usina e, por conseguinte, a energia primária a ser empregada: se água, carvão, nuclear ou eólica) e o quanto deve ser produzido em cada ponto gerador, de forma que a demanda do País, juntamente com as perdas inerentes ao sistema de transmissão, sejam completamente supridas. Não o bastante, administrar tal sistema requer equilibrar de maneira estratégica a utilização dos diversos “estoques” existentes de cada uma das fontes de energia primária, antevendo períodos de escassez, bem como, a sazonalidade em suas ofertas, evitando com isso, que, ao longo do ano, grandes oscilações ocorram no preço final da energia elétrica gerada. Neste exemplo, a quantidade de carvão armazenada no pátio da usina termoelétrica ou o volume de água represado pela barragem da hidroelétrica representam os estoques que devem ser eficientemente administrados.

Da mesma maneira, do ponto de vista da Produção, a adequada administração dos estoques é um tema de significativa importância que a muito vem sendo pesquisado e discutido na literatura. Este interesse, conforme expõe Naddor (1966), cresceu preponderantemente a partir da segunda guerra mundial, com o surgimento de um número considerável de publicações que abordavam, sobretudo, seu tratamento matemático. Ainda hoje, estudos e modelos matemáticos dedicados à gestão ótima dos estoques são freqüentemente publicados em periódicos especializados, o que demonstra a continuidade da relevância do tema. Desde o modelo clássico de Ford W. Harris, em 1913, os trabalhos de Arrow, Harris e Marschak, em 1951, e de Dvorestsky, Kiefer e Wolfowitz, em 1952, marcaram o início de uma nova abordagem no estudo do gerenciamento de sistemas de estoques (NADDOR, 1966). Para Naddor (1966), tal sistema é caracterizado pela existência de três custos principais, a saber:

- a) Custo de manter o estoque;
- b) Custo de incorrer em faltas; e
- c) Custo de repor o estoque.

O primeiro deles contempla, por exemplo, os custos associados à armazenagem dos itens, ao investimento realizado, ao manuseio dos itens estocados e aos danos, furtos e perdas que venham a ocorrer. Tais

custos, conforme Buffa (1968, p. 51), “variam diretamente com o tamanho do estoque”. O segundo corresponde aos custos que se originam da ocorrência de algum tipo de escassez, isto é, uma falha no processo de reposição que atrasa a entrega de lotes. Estão contemplados os custos com eventuais horas extras, perdas de material em processo, manuseios extra de material, entre outros. Finalmente, o terceiro custo representa, por exemplo, aqueles custos vinculados à preparação ou *setup* de máquinas, ao transporte, ao pedido, à preparação de ordens e ao manuseio dos produtos acabados. Ao se referir ao custo total associado aos estoques, está-se, normalmente, referindo-se a soma dos custos (a)-(c), listados anteriormente. Shamblyn e Stevens (1974, p. 131-132) fazem uma interessante discussão acerca de cada um desses custos.

O sistema de produção é um exemplo de sistema onde todos os custos listados anteriormente se fazem presente, o que demanda o devido controle por meio de decisões apropriadas (NADDOR, 1966). Slack et al. (1997, p. 381) definem estoques “como a acumulação armazenada de recursos materiais em um sistema de transformação”. Dentre os vários tipos de estoques existentes em tal sistema podem ser citados, conforme Tubino (2000, p. 106), “os estoques de matérias-primas, de itens componentes comprados ou produzidos internamente, de produtos acabados, de produtos em processo, de ferramentas e dispositivos para as máquinas, de peças de manutenção e de materiais indiretos”. A falta de controle sobre tais estoques pode acarretar, por um lado, a imobilização de um elevado capital, que tende a ser mais ou menos significativo dependendo da área de atuação da empresa em questão. Por outro lado, esta mesma falta de controle pode também levar à custos elevados que estão relacionados a eventuais paradas do sistema produtivo. Slack (1997, p. 382) traz dados referentes à relação estoque/vendas obtidos a partir do demonstrativo de algumas empresas entre 1992-1993. Há situações em que esta relação é menor que 1%, caso da empresa British Gas, enquanto em outras se observa quase 90%, caso da Eurocopter que atua no ramo de helicópteros.

De modo geral, em ambientes produtivos onde o controle necessário não é adequadamente exercido ou naqueles em que os processos produtivos são pouco confiáveis, os diversos estoques acabam surgindo naturalmente. Em alguns casos eles funcionam como mecanismo de precaução a eventos inesperados, enquanto em outros refletem a ineficiência administrativa dos recursos materiais existentes no ambiente produtivo. Em ambos os casos, as conseqüências podem ser severas para as organizações.

No âmbito da logística os estoques desempenham papel igualmente importante, respondendo por parte significativa dos custos logísticos de uma empresa, bem como, de um país (BALLOU, 1993; CHRISTOPHER, 2007). Segundo o estudo de Lima (2006), no Brasil os custos logísticos correspondem a, aproximadamente, 12,6% do seu Produto Interno Bruto (PIB). Os diversos estoques distribuídos ao longo da cadeia de suprimentos, ainda segundo o mesmo estudo, correspondiam ao segundo fator que mais contribuía para tal desempenho, perfazendo o equivalente a 3,9% do PIB. Apesar disso, por consequência da utilização dos sistemas tradicionais de contabilidade, os custos derivados dos estoques costumam ser os menos contabilizados (CHRISTOPHER, 2007).

Conforme aponta Novaes (2004), ao se considerar a seqüência de cadeias de valor que constituem a cadeia de suprimentos, alguns custos logísticos associados diretamente aos estoques devem ser considerados:

- a) Custo de estoque do produto acabado na fábrica - corresponde à manutenção dos itens armazenados até que sejam despachados ao cliente;
- b) Custo de estoque em trânsito - corresponde ao custo incorrido pela imobilização do montante de capital representado pelos itens que estão sendo transportados. Este é um custo que, para o caso brasileiro, pode ser bastante representativo, visto nossas dimensões continentais e histórico de forte dependência do modal rodoviário como meio de escoar boa parte da produção² (NOVAES e ALVARENGA, 1994; FLEURY, 2000; NOVAES, 2004). No caso particular do Pólo Industrial de Manaus (PIM), tal custo tende a ser ainda mais significativo, dado o alto valor agregado dos bens oriundos do PIM³ e as limitações de acesso inerentes

² Novaes (2004, p. 147-148) afirma que “na distribuição interna, a esmagadora parte do transporte de produtos manufaturados é constituída pelo transporte rodoviário”, o qual corresponde, numa classificação ABC dos fluxos de carga transportados no Brasil, ao grupo A. Situação semelhante ocorre com o transporte das *commodities* como a soja, por exemplo. Vale ainda lembrar que, segundo pesquisa da Confederação Nacional dos Transportes (CNT) 2009, dos 89.552 Km de malha analisada, 69,1% estão em estado regular, ruim ou péssimo (CNT, 2009), fato que influi sobremaneira na eficiência e nos tempos de transporte do modal rodoviário.

³ Segundo dados da Superintendência da Zona Franca de Manaus (SUFRAMA) referente ao período de Janeiro à Abril de 2010, 76,16% do faturamento do PIM é proveniente dos setores eletroeletrônico (33,69%), duas rodas (20,32%), químico (12,55%) e bens de informática (9,60%), (SUFRAMA, 2010).

àquela região, as quais dificultam o escoamento da produção até os grandes centros consumidores no sudeste do País. Neste sentido, vale destacar o estudo de Fenley (2007) que aponta viabilidade, do ponto de vista das três dimensões do desenvolvimento sustentável (ambiental, econômica e social), de emprego do modal aéreo como principal meio de transporte para a região do Amazonas; e

- c) Custo de estoque no depósito do varejista - compreende os custos decorrentes à manutenção dos itens no armazém do varejista, ao espaço utilizado, aos meios empregados para manuseio destes itens, entre outros.

Dentro da cadeia de suprimento, cada integrante é responsável por um ou mais desses e outros custos logísticos. Sendo assim, atualmente tem-se buscado coordenar de forma global, dentro dos conceitos do *Supply Chain Management* ou Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos (SCM), todas as operações da cadeia. O objetivo é reduzir, em todos os níveis, os custos que emergem desde a aquisição da matéria-prima até a chegada do produto acabado ao cliente final. Conforme Novaes (2004), na moderna concepção do SCM busca-se atender simultaneamente objetivos associados à qualidade do produto e do serviço prestado, bem como, a redução sistemática dos custos ao longo da cadeia. Para tal redução, é imperativo racionalizar os diversos estoques que se formam, o que, de acordo com Lau et al. (2008), passa, obrigatoriamente, pela coordenação da cadeia de suprimentos. Como consequência à redução proporcionada nos custos logísticos, as empresas tenderão a verificar aumento em suas margens e no lucro (FLEURY, 2000).

Ainda no mesmo sentido, Novaes (2004) afirma que buscar reduções de custo nos diversos níveis da cadeia pode ser exigência mínima para atuar competitivamente em mercados globalizados. Gaither e Fraizer (2001, p. 271), ao discutirem a importância dos custos associados aos estoques argumentam que eles “podem parecer indiretos, difusos ou irrelevantes”, entretanto, apontam que sua redução pode ser crucial para competir em mercados mundiais.

Na busca pela redução dos custos associados aos estoques por meio da eficiente administração de seus níveis, algumas estratégias caracterizam-se pela tentativa de estabelecer um relacionamento cooperativo entre os integrantes da cadeia, apoiando-se na confiança, troca constante de informações e uso intensivo da tecnologia da informação. É o caso de estratégias como o *Vendor Managed Inventory*

(VMI) ou o *Efficient Consumer Response* (ECR). No VMI, “sistema no qual o fornecedor gerencia o estoque do cliente⁴” (CORRÊA e CORRÊA, 2005, p. 75), a gestão passa a ser global e o processo de reposição pode ser eficientemente coordenado a fim de empregar modos de transporte comuns para vários clientes, como num processo de *milk run*⁵. Como conseqüência, as entregas podem tornar-se mais freqüentes e as quantidades, menores. Corrêa e Corrêa (2005) fazem uma interessante discussão acerca do VMI, argumentando que tal estratégia também contribui para a redução de outros efeitos que surgem na cadeia de suprimentos como, por exemplo, o chamado *Bullwhip Effect* ou Efeito Chicote⁶.

Apesar das exigências atuais demandarem das empresas modernas a manutenção de estoques cada vez mais baixos almejando, entre outras coisas, o fluxo contínuo dos materiais (BORNIA, 2002), são facilmente encontrados na literatura argumentos que justificam a criação e a manutenção de estoques nas empresas. Dentre eles, podem ser citados os seguintes: estoques permitem economia de escala na compra e no transporte; amortecem as incertezas da demanda e do *lead time* ou tempo de ressuprimento⁷ (BALLOU, 1993); permitem uma produção uniforme (TUBINO, 2000); garantem disponibilidade (WILD, 2002); minimizam perdas com *stockout* ou rupturas de estoque (GAITHER e FRAZIER, 2001); e podem, ainda, ser usados com um viés especulativo (CORRÊA e CORRÊA, 2005). Mas, principalmente, estoques são necessários porque há, conforme Slack et al. (1997) e Bertaglia (2003),

⁴ Como o VMI ou Estoque Gerenciado pelo Fornecedor se baseia “em uma íntima cooperação entre o cliente e o fornecedor, o termo Gestão Colaborativa de Estoque provavelmente é o mais apropriado” (CHRISTOPHER, 2007, p. 208). Para Chopra e Meindl (2003, p. 251), no VMI “o fabricante ou o fornecedor são responsáveis por todas as decisões acerca de estoques de produto do varejista. Como resultado, o controle da decisão de ressuprimento transfere-se para o fabricante deixando de ser do varejista. O VMI exige que o varejista compartilhe informações sobre demanda com o fabricante (...). O VMI permite que o fabricante aumente seus lucros e os da cadeia de suprimento inteira (...)”.

⁵ *Milk run* é um tipo de transporte para entrega e coleta de produtos em que um caminhão pode tanto entregar o produto de um fornecedor para diversos varejistas como coletar de vários fornecedores e entregar a apenas um varejista. O uso de *milk runs* permite que as entregas às diversas lojas sejam agrupadas em apenas um caminhão levando à melhor utilização do veículo e à uma redução nos custos (CHOPRA e MEINDL, 2003).

⁶ Também chamado de Efeito Forrester (CHRISTOPHER, 2007, p. 198) ou, ainda, de *whiplash effect*, o efeito chicote consiste do fenômeno onde “uma pequena variação ou flutuação sazonal na demanda real do cliente pode ‘bater chicote’ para fornecedores a montante, levando-os a alternar entre situações de superprodução e de ociosidade” (DORNIER, 2000, p. 372).

⁷ *Lead Time* ou Tempo de Ressuprimento “é o espaço de tempo entre o momento em que o pedido é feito e o momento em que é recebido” (CHOPRA e MEINDL, 2003, p. 184).

uma incompatibilidade intrínseca entre as taxas de demanda e oferta. Eventos como sazonalidade, quebras de máquinas, greves, priorização de pedidos urgentes, entre outros, são exemplos de fatores que interferem nessas taxas.

Como exposto, estoques estão sempre presentes, havendo fortes justificativas para sua manutenção, bem como outras para sua contínua redução. Conforme Naddor (1966, p. 4) pondera, “os três tipos de custos que caracterizam um sistema de estoques estão fortemente relacionados”. Quando um deles decresce, um dos outros dois ou ambos crescem. Por um lado, elevados estoques se refletem em aumento nos custos de manutenção, enquanto reduz-se custo com possíveis faltas. Em contra partida, baixos níveis de estoques tendem a potencializar a ocorrência de faltas, enquanto custos associados aos pedidos podem, também, se elevar. Portanto, o custo total pode ser sensivelmente afetado por decisões adequadamente tomadas (NADDOR, 1966).

Buscando administrar de maneira ótima esta relação de *trade off* que se configura, é que surge o modelo clássico de lote econômico. A primeira análise conhecida de um sistema de estoque foi realizada, segundo Raymond (1931 apud NADDOR, 1966), por Ford Whitman Harris, a quem é também atribuída a primeira derivação e publicação do modelo clássico de operação ótima do estoque (NADDOR, 1966; BUFFA, 1968).

Segundo Buffa (1968, p. 52), “o objetivo do modelo clássico de estoque é determinar o tamanho (Q) do lote sobre condições bastante idealizadas”. Desprezando o custo associado à ocorrência de faltas e admitindo-se conhecidos a demanda (D) por unidade de tempo, o custo fixo (k) de fabricação ou pedido, a taxa (i) de encargos sobre os itens por unidade de tempo e o custo unitário (C) do produto, pode-se escrever o custo total (CT), por unidade de tempo, como sendo a soma dos custos de manutenção e pedido conforme (2.1).

$$CT = \frac{Q}{2}iC + k \frac{D}{Q} \quad (2.1)$$

O primeiro termo de (2.1) leva em consideração o custo incorrido em manter, em média, $Q/2$ unidades em estoque. Já o segundo termo computa o custo de se realizar D/Q pedidos ao longo do período em análise. Derivando a equação (2.1) em relação à Q e igualando seu resultado à zero, chega-se a conhecida relação do Lote Econômico de Compra (LEC) ou, como conhecida na literatura internacional, *Economic Order Quantity*, (HARRIS, 1913):

$$Q^* = \sqrt{\frac{2kD}{iC}}. \quad (2.2)$$

Em (2.2) Q^* é a quantidade ótima a ser produzida ou solicitada, para a qual o custo total de manutenção e colocação de pedidos é mínimo. Implicitamente, está-se assumindo um processo que ocorre continuamente, com tempo de ressurgimento nulo, sendo desconsideradas restrições de armazenagem.

Substituindo na equação (2.1) o resultado encontrado em (2.2), obtêm-se o custo (CT^*) incorrido, por unidade de tempo, devido à realização de pedidos com tamanho dado pela quantidade ótima. Portanto, CT^* é o mínimo custo (custo ótimo) para operar o sistema (NADDOR, 1966). Isto é:

$$CT^* = \sqrt{2ikDC}. \quad (2.3)$$

Recomenda-se aos interessados em uma discussão mais detalhada sobre a derivação destas e outras relações básicas acerca do LEC a leitura do capítulo 3 do trabalho de Buffa (1968).

O sistema para o qual a equação (2.2) vale é um sistema muito específico. As condições, bastante idealizadas, devem ser asseguradas. Caso contrário, o custo mínimo poderá não ser obtido (NADDOR, 1966). Dado tais restrições, inúmeras variações ao modelo clássico foram apresentadas por diversos autores. Algumas extensões imediatas são obtidas quando se relaxa a condição de não existência de faltas, ou quando há desconto sobre a quantidade comprada ou, ainda, quando a taxa de produção não é infinitamente maior que a taxa de consumo. Ver, por exemplo, Buffa (1968) para mais detalhes sobre estas e outras extensões ao modelo clássico.

Aparte das questões relacionadas à autoria e originalidade do modelo proposto por F. W. Harris, conforme discutido em Roach (2005), críticas ao modelo do LEC são bastante comuns e facilmente encontradas na literatura relacionada. Wild (2002, p. 146), analisando na perspectiva de sua utilização prática, argumenta que o modelo “geralmente conduz a um estoque muito elevado, devendo ser utilizado somente quando não há outra alternativa”. Schonberger (1992, p. 16) diz que “o custo de manter o estoque e preparar o equipamento constituem apenas despesas óbvias”, devendo também ser considerados outros fatores, tais como a qualidade dos produtos, a motivação dos trabalhadores e os refugos, pois todos esses são influenciados pelo tamanho do lote fabricado. Discutindo sobre as características das empresas modernas, Bornia (2002, p. 27) aponta que a “conseqüência

perversa” da adoção de lotes econômicos é “gerar acomodamento com o processo produtivo”, restringindo tentativas de melhoria. Outros autores argumentam que o LEC enfoca exclusivamente a redução de custos e não a redução do nível de estoque, como almejado na filosofia *Just-in-Time* (JIT). A esse respeito, não existe um consenso entre os vários autores.

Fazel et al. (1998) propõem um modelo matemático para comparar o custo total de um sistema de estoque submetido ao LEC e ao JIT, tentando definir quando se torna vantajoso optar por uma ou outra estratégia. Ao revisar tal modelo, contemplando as reduções de custo anuais proporcionada pelo JIT (reduções, por exemplo, com eliminação de espaço, produto em processo, produto acabado), Schniederjans e Cao (2000) verificaram que na maioria das vezes é preferível utilizar o JIT.

Independente às críticas e ao fato de outras técnicas (ou filosofias) como o JIT terem se consolidado e, atualmente, subsidiarem grande partes das ações voltadas à eliminação dos desperdícios, entre eles, o de estoque (SHINGO, 1996), é inegável a contribuição que a abordagem do LEC trouxe às discussões, no campo teórico e prático, acerca do gerenciamento do *trade off* existente nos estoques. Ainda hoje, apesar de suas limitações, o modelo clássico continua sendo utilizado. Sua simplicidade de aplicação é um importante fator que contribui para esta prática. Ainda, como coloca Tubino (2000, p. 107), deve-se levar em consideração que “algumas etapas do processo produtivo só permitem a produção ou a movimentação econômica de lotes maiores do que a necessidade de consumo imediata, gerando um excedente que precisa ser administrado”.

Essa situação ocorre, por exemplo, em transporte de longa distância (quando só há viabilidade se uma grande quantidade for transportada) ou em máquinas com elevado tempo de *setup* (obrigando a produção em lotes grandes a fim de absorver os diversos custos), (TUBINO, 2000). Nestes casos a aplicação do LEC pode ser uma estratégia interessante para minimização dos custos.

Ao adotar o modelo de lote econômico como estratégia de compra/produção, dois sistemas (ou políticas) relacionados com a maneira de controlar os itens em estoque são normalmente discutidos na literatura. O primeiro consiste do sistema de revisão contínua e o segundo do sistema de revisão periódica. A seguir, uma breve revisão desses sistemas é apresentada.

2.2.1 Revisão Contínua

O sistema de revisão contínua dos estoques é encontrado sob várias denominações na literatura internacional: *continuous review model*, *reorder point policy*, *order quantity system*, (Q, r) ⁸ *model*, *fixed order quantity system*, *two-bin system*, entre outros. Tal sistema de revisão se baseia, em suma, na determinação de um nível fixo de reposição (r) para o estoque que, ao ser atingido, dispara a emissão de um novo pedido de tamanho (Q) pré-definido (BUFFA, 1968). O nível r também é chamado de Ponto de Pedido. Como coloca Tubino (2000, p. 125), a adoção do sistema de revisão contínua “não está vinculada ao uso do lote econômico”. O valor Q pode ser escolhido, de acordo com Buffa (1968), segundo algum critério de interesse baseado na experiência prática ou aplicando-se o modelo de lote econômico apropriado para a situação em questão. Porém, torna-se evidentemente conveniente repor os estoques em quantidades econômicas.

Na revisão contínua o intervalo entre cada pedido normalmente é variável, podendo-se definir o momento de colocar o pedido junto ao fornecedor por (WU, 2000):

$$r = D_t t_r + Q_s \quad (2.4)$$

onde:

D_t é a demanda média por unidade de tempo;

t_r é o tempo médio de ressuprimento; e

Q_s é o estoque de segurança.

Buffa (1968) argumenta que para casos onde o t_r é longo e a quantidade solicitada é somente suficiente para cobrir a demanda durante um tempo menor que t_r , o ponto r deve levar em consideração o estoque corrente (o saldo atual em estoque) e o estoque pendente (aquele solicitado, mas ainda não entregue). Desta maneira, um novo pedido somente é emitido quando o saldo (corrente mais pendente) atingir r . Quando o tempo médio de ressuprimento é curto esta necessidade acaba sendo mascarada, visto que os pedidos são quase que prontamente atendidos.

Uma desvantagem do sistema de revisão contínua é que sua adoção implica monitorar continuamente o nível do estoque (BUFFA, 1968), verificando a chegada ao ponto r . Dado esta exigência, Novaes e

⁸ *Fixed replenishment quantity (Q) / Fixed replenishment point (r).*

Alvarenga (1994, p. 184) ressaltam que tal monitoramento “pode ser custoso, quando existir uma quantidade muito grande de itens a controlar”, fazendo com que, na prática, a maioria das empresas adote o sistema de revisão periódica. No entanto, conforme será apresentado na seção 2.2.2, o sistema de revisão contínua requer um menor nível de estoque de segurança quando comparado ao sistema de revisão periódica.

Um procedimento prático alternativo para a renovação dos estoques, seguindo a idéia de revisão contínua, é apresentado em Novaes e Alvarenga (1994). Neste procedimento a quantidade solicitada continua fixa e igual ao LEC. Admitindo-se que no início do processo exista um estoque inicial suficiente para manter a operação do sistema até a chegada do primeiro pedido, o procedimento opera conforme segue:

- a) Considere o estoque inicial S_0 e uma quantidade ideal a ser pedida igual à Q^* . Faça um pedido inicial de tamanho Q^* e defina o nível de reposição $r \leftarrow S_0 - Q^*$;
- b) Quando o estoque corrente S atingir a condição $S \leq r$, realize um novo pedido Q^* e faça $r \leftarrow r - Q^*$;
- c) Ao chegar um pedido, atualize o nível do estoque corrente e o nível de reposição fazendo: $S \leftarrow S + Q^*$ e $r \leftarrow r + Q^*$.

Utilizando o procedimento (a)-(c) o valor r não será necessariamente fixo, podendo flutuar de acordo com as quantidades que vão sendo solicitadas e recebidas. Este critério possui ainda a característica de poder ser igualmente utilizado mesmo se o tempo de ressuprimento for longo ou bem reduzido.

2.2.2 Revisão Periódica

O sistema de revisão periódica também é encontrado com vários nomes na literatura internacional: *periodic review model*, *periodic order quantity*, *replenishment interval policy*, $(R, T)^9$ *model*, *fixed reorder cycle system*, entre outros. Conforme Buffa (1968, p. 93), a principal diferença entre este sistema e o sistema de revisão contínua é que os

⁹ *Optimal target inventory position (R) / Optimal review period length (T)*.

pedidos são “disparados periodicamente e não a partir de um ponto de pedido”. Além disso, a quantidade solicitada a cada novo pedido “varia, dependendo do consumo ocorrido no período anterior” (Buffa, 1968, p. 93).

A principal vantagem do sistema de revisão periódica é a flexibilidade para determinar a periodicidade a ser empregada. De acordo com Novaes e Alvarenga (1994), as revisões são feitas a intervalos fixos eliminando a necessidade de controle contínuo sobre o nível atual dos estoques. Por esta razão, o intervalo pode ser convenientemente escolhido “de forma a coincidir, numa mesma data, as emissões dos pedidos de vários produtos” (NOVAES e ALVARENGA, 1994, p. 185), facilitando o processo de aquisição e aproveitando eventuais descontos no preço do transporte de lotes maiores (NOVAES e ALVARENGA, 1994; TUBINO, 2000). Esta característica faz com que a revisão periódica seja, segundo Novaes e Alvarenga (1994), mais empregada pelas empresas. Contudo, a escolha do intervalo mais conveniente pode seguir outro critério de interesse.

Naturalmente, a determinação do intervalo pode também ser feita de maneira a obter-se o intervalo ótimo (I_p) que resulta do emprego de algum dos modelos de lote econômico (BUFFA, 1968). Esse intervalo ótimo entre cada pedido (ou intervalo econômico de pedido) pode ser escrito, para o caso do modelo clássico, como (GAITHER e FRAZIER, 2001):

$$I_p = \sqrt{\frac{2k}{iDC}} \quad (2.5)$$

ou, equivalentemente, por:

$$I_p = \frac{Q^*}{D_t} \quad (2.6)$$

A quantidade (Q) a ser solicitada a cada novo pedido deve conduzir o estoque a um nível predeterminado (R). Conforme Slack et al. (1997, p. 400), “esse nível é calculado para cobrir a demanda entre os pedidos de reabastecimento sendo feitos e o pedido de reabastecimento chegando”. Tal nível alvo máximo do estoque pode, então, ser escrito como segue:

$$R = D_t(t_r + I_p) + Q_s \quad (2.7)$$

A quantidade (Q) que levará o estoque ao nível R , deve ainda levar em conta o saldo atual em estoque (Q_f). Portanto, define-se $Q = R - Q_f$.

De acordo com Tubino (2000), para casos em que $I_p < t_r$, haverá quantidades solicitadas pendentes (Q_p) que deverão ser consideradas. Ainda, se demandas reprimidas (Q_r) devem ser atendidas assim que possível, então é possível escrever Q como (TUBINO, 2000):

$$Q = D_t(t_r + I_p) - Q_f - Q_p + Q_r + Q_s. \quad (2.8)$$

Novaes e Alvarenga (1994) apontam que uma desvantagem da revisão periódica é sua condução a um nível de estoque médio ligeiramente superior ao requerido pelo sistema de revisão contínua. De maneira semelhante, Lau et al. (2008), realizando simulações do efeito de quatro políticas de controle de estoque sob a operação de uma cadeia de suprimentos composta por um fornecedor e quatro varejistas, constatou que o emprego da política de revisão contínua associada a outras práticas (como compartilhamento de informações, por exemplo) propiciou o menor custo para toda a cadeia.

2.2.3 Estoque de Segurança

Estoque isolador, estoque de reserva, *buffer stock* e *safety stock* são denominações que podem ser encontradas para se referir ao Estoque de Segurança (ES). Conforme Buffà (1968), o ES desempenha papel importante em um sistema de estoques. No caso geral, tanto a demanda quanto o processo de ressuprimento comportam-se como variáveis aleatórias, assim o ES atua no sentido de absorver flutuações de ambos os processos, evitando ou minimizando a ocorrência de rupturas no estoque. Ainda, conforme destaca Wild (2002), o ES atua nos momentos de falha no ressuprimento, no transporte, na comunicação, na produção, entre outros. Para Chopra e Meindl (2003, p. 182) “o estoque de segurança existe porque as previsões de demanda são inexatas e pode haver falta de produto caso a demanda real ultrapasse o volume previsto”.

Naturalmente, a manutenção de um elevado nível de ES representa imobilização de capital. Esse capital tende, por sua vez, a ser diretamente proporcional ao custo que a falta do item em questão

acarretará ao sistema. Neste sentido e por entender que o custo devido ao ES é um tipo de desperdício que deve ser combatido, as modernas filosofias de produção propõem, conforme Tubino (2000, p. 139), “a redução da segurança entre os processos como forma de identificação dos problemas que devem ser solucionados para obtenção da eficiência produtiva”. Assim, dá-se ênfase à identificação e prevenção dos erros existentes no processo, evitando que os mesmos sejam mascarados por elevados níveis de ES.

Entretanto, nem todo processo pode aplicar tais filosofias, eliminando ou descuidando-se da manutenção de algum nível de ES. Considere, por exemplo, o caso de um produtor que possui importantes fornecedores instalados em outros continentes, os quais utilizam navios no atendimento a seus pedidos. Nessa circunstância é plausível admitir que o tempo de ressurgimento seja razoavelmente elevado, e que problemas no processo de reposição deverão ocorrer naturalmente. Se, para o produtor, incorrer em faltas representa um custo excessivamente elevado e não havendo outros fornecedores disponíveis, ele certamente manterá um estoque de reserva para as eventuais falhas que ocorrerem no processo de reposição.

De acordo com Chopra e Meindl (2003), a determinação da quantidade adequada de ES a ser mantida está vinculada à incerteza da demanda/suprimento e ao Nível de Serviço¹⁰ (NS) mínimo que se deseja oferecer ao cliente. Esse nível de serviço pode ser estabelecido pela empresa ou, em alguns casos, pelo próprio mercado, dado o tamanho da concorrência existente.

Admitindo que a demanda comporta-se como uma variável aleatória de distribuição normal, o ES pode ser determinado por (TUBINO, 2000):

$$Q_s = m \cdot \sigma \quad (2.9)$$

onde:

m é o número de desvios padrões em relação à média, dado em função do NS desejado; e

σ é o desvio padrão da demanda durante o tempo de ressurgimento.

¹⁰ Conforme Novaes e Alvarenga (1994, p. 9), denomina-se “de nível de serviço o conjunto de variáveis que traduzem o desempenho logístico”, sendo comum medi-lo através do prazo de entrega do produto, porcentagem de avarias, número e tipo de reclamações, etc.. Para Chopra e Meindl (2003, p. 226), nível de serviço ou nível de disponibilidade “mede a fração da demanda do cliente que é satisfeita com o estoque disponível”. Neste texto, entretanto, a expressão nível de serviço “refere-se à probabilidade de que uma ruptura de estoque não ocorrerá durante o tempo de ressurgimento” (Gaither e Fraizer, 2001, p. 285) mais o período entre cada revisão.

Sendo ambos, a demanda e o processo de ressuprimento, variáveis aleatórias, o valor σ pode ser obtido, conforme Novaes e Alvarenga (1994), por:

$$\sigma = \sqrt{t_r \sigma_d^2 + D_t^2 \sigma_r^2} \quad (2.10)$$

onde:

σ_d representa o desvio padrão da demanda por unidade de tempo; e

σ_r representa o desvio padrão do tempo médio de ressuprimento.

A equação (2.9), com σ dado por (2.10), pode ser aplicada como forma de compensar as flutuações aleatórias da demanda e do tempo t_r , quando o sistema de controle adotado for a revisão contínua. Para a revisão periódica, além dessas variações, deve-se, ainda, considerar a demanda e sua variação aleatória no período entre um pedido qualquer e seu subsequente. Assim, de acordo com Foote et al. (1988) e Novaes e Alvarenga (1994), pode-se estimar σ por:

$$\sigma = \sqrt{(t_r + I_p) \sigma_d^2 + D_t^2 \sigma_r^2} \quad (2.11)$$

Analisando as relações (2.10) e (2.11), notoriamente a parcela $(t_r + I_p)$ de (2.11), observa-se que para um mesmo nível de segurança o sistema de revisão contínua requer, conforme afirmam Novaes e Alvarenga (1994), um ES menor do que aquele requerido pela revisão periódica. Apesar de intuitiva, Rosa et al. (2010) verificaram, por meio de simulação, que tal vantagem da revisão contínua tende a ser insignificante a medida que a dispersão do tempo de ressuprimento aumenta.

A obtenção e aplicação das relações (2.9)-(2.11) assumem, implicitamente, um processo aleatório com distribuição normal¹¹. A obtenção de relações matemáticas exatas para situações em que a demanda e o processo de ressuprimento segue distribuições mais gerais, consiste em um problema de tratamento matemático razoavelmente mais complexo. Segundo Buffa (1968), uma estratégia válida para contornar tal dificuldade e ainda se obter boas estimativas para as variáveis de interesse é utilizar-se de métodos de simulação de Monte Carlo.

¹¹ De fato, essas equações são decorrentes do trabalho de Robert G. Brown acerca de problemas relacionados à previsão da demanda. Ver Howe (1974) para mais detalhes.

2.3 Modelos de Lote Econômico Sob Condições de Interrupção

O modelo clássico de lote econômico apresentado na seção 2.2 está fundamentado na suposição de parâmetros constantes no tempo (Weiss e Rosenthal, 1992). Da mesma forma, a operação ótima do estoque segundo aquele modelo pressupõe que será sempre possível receber os pedidos colocados junto ao fornecedor, uma vez que a ligação entre o ponto (ou os pontos) de demanda e oferta é permanente. No entanto, há situações em que ocorrem interrupções nessa ligação, o que impede o abastecimento e invalida parte das suposições adotadas no LEC.

Na literatura atual há vários trabalhos que tratam do problema de administrar os estoques de forma ótima sob condições de interrupção no ressurgimento. Tal interrupção pode se referir a problemas de transporte e/ou a falhas na produção. Ambas as abordagens são encontradas.

Weiss e Rosenthal (1992) apresentam um modelo ótimo de pedido para situações em que, num instante futuro conhecido, há uma probabilidade de interrupção, a qual perdurará por um período de comprimento aleatório. Um exemplo de tal situação ocorre durante greves. Parlar e Berkin (1991) fornecem um modelo mais geral, onde o ressurgimento está disponível no chamado *wet period* e, em um instante aleatório futuro, passa a estar indisponível durante o *dry period*. Ambos os períodos duram intervalos aleatórios de tempo e respeitam certa distribuição de probabilidade. Mais tarde, Berk e Arreola-Risa (1994) verificaram que a função de custo de Parlar e Berkin (1991) estava errada e forneceram uma expressão alternativa. Parlar e Perry (1996) consideraram a situação onde múltiplos fornecedores estão disponíveis, podendo alternativamente atender a demanda caso algum deles não o possa fazer por consequência de uma interrupção. Ross et al. (2008) apresentam e comparam as vantagens de vários modelos estacionários e não-estacionários para lidar com rupturas no ressurgimento. Parlar e Perry (1995), Parlar et al. (1995) e Li et al. (2004) também estudam o problema de operar otimamente o estoque quando o ressurgimento sofre interrupções. Alguns dessas referências citadas desenvolvem modelos de revisão contínua, enquanto outras estudam modelos de revisão periódica.

Apesar das várias denominações às condições de disponibilidade e indisponibilidade no abastecimento (*wet period* - *dry period*; *On* - *Off*; *Up* - *Down*), de modo geral os trabalhos anteriores objetivam derivar um modelo semelhante ao LEC que minimize o custo total incorrido com a manutenção, ruptura de estoque e ressurgimento, onde o *lead time* é

assumido nulo. Alguns desses trabalhos consideram que pedidos são disparados somente quando o estoque atinge nível nulo. Outros consideram que o estoque é repostado a um nível fixo pré-definido. Frequentemente é assumido que outras opções de abastecimento não estão disponíveis quando há interrupção no abastecimento regular.

Devido às dificuldades matemáticas inerentes ao desenvolvimento desses modelos, frequentemente não são obtidas equações de fácil tratamento algébrico. Normalmente, as equações se limitam a casos onde alguma distribuição de probabilidade para as interrupções é presumida, o que facilita a análise. Aos interessados, recomenda-se consultar os trabalhos citados para uma discussão detalhada acerca dos vários modelos.

De maneira semelhante aos trabalhos anteriores, aqui será concebido um modelo para a operação do estoque sob condições de ocorrência de falhas no abastecimento, ocasionadas pela indisponibilidade de arcos que formam a rede de transporte. Em particular, as falhas se referem a interrupções no canal entre o ponto de oferta e demanda. O modelo concebido, ao contrário dos anteriormente referenciados, não estabelece um tamanho ótimo de pedido, mas sim adéqua a quantidade a ser pedida às interrupções que podem ocorrer no canal de menor custo de ressurgimento procurando, com isso, evitar abastecimentos a custos mais elevados. Também de forma distinta aos trabalhos citados, o modelo considera nível de serviço para atendimento à demanda e o *lead time* no abastecimento dos pontos de demanda.

2.4 Problemas de Localização

Problemas de localização possuem uma longa história dentro da literatura. Tais problemas são de fundamental interesse e importância estratégico-financeira, tanto para a iniciativa privada quanto para a administração pública. Seja com vistas à determinação de onde localizar novos centros de distribuição, novas fábricas, estações de metrô, centros para recebimento de materiais recicláveis, novos hospitais, entre muitas outras instalações semelhantes, os modelos de localização são comumente empregados, desempenhando papel fundamental no processo de tomada de decisão estratégica em vários problemas reais (OWEN e DASKIN, 1998; REVELLE et al., 2008; NOVAES et al., 2009). Current et al. (2002) fornece uma lista com diversas aplicações de modelos de localização e seus respectivos autores.

A decisão de implantar uma das instalações citadas anteriormente está quase sempre vinculada ao investimento de grandes quantidades de capital. Decisões tomadas erroneamente podem, de forma muito veloz, tornar inviável o investimento realizado. Noutros casos, as alterações no ambiente em que se está inserido (variações de demanda, população, concorrência, ações do governo, etc.) podem também prejudicar a atratividade do investimento caso medidas corretivas não forem adequadamente tomadas. Assim, os problemas de localização estão naturalmente imersos em um contexto bastante desafiador e complexo, possuindo importantes aplicações em problemas da área de transporte e logística (OWEN e DASKIN, 1998; NOVAES, 2007; ARENALES et al., 2007).

As primeiras abordagens ao problema de localização foram voltadas ao contexto industrial. O desafio residia em abastecer, com um único produto, vários clientes, cuja localização e demanda (normalmente determinística) eram conhecidas, a partir de um conjunto de locais viáveis para implantar a instalação. Desejava-se localizar a instalação (ou as instalações) e determinar os fluxos de abastecimento, minimizando a soma dos custos fixo (implantação) e variável (operação), (GALVÃO, 2004).

Atualmente, os desafios aumentaram e o problema de localização ganhou objetivos mais abrangentes. A demanda pode ser tratada como determinística ou estocástica. O horizonte de tempo pode ser estático ou dinâmico. Parâmetros associados a fatores ambientais são expressos em função de suas distribuições de probabilidade ou, em alguns casos, por análise de cenário. A função objetivo pode ser expressa como a minimização da soma (*minisum*) ou a minimização do pior caso (*minimax*), entre outros. Podem ainda considerar relações de hierarquia entre os diversos centros de distribuição. Ou, então, serem incorporados a modelos de equilíbrio em mercados competitivos. Eiselt e Laporte (1995) apresentam uma interessante discussão acerca da evolução e os vários tipos de objetivos encontrados em modelos de localização.

Apesar dos inúmeros objetivos que podem ser formulados e dos vários contextos em que os modelos de localização podem ser aplicados, as principais características dos problemas se mantêm as mesmas: um espaço (região) de estudo com alguma métrica associada (usualmente representada por tempo ou distância tomada da forma Euclidiana ou Manhattan); clientes (demandas) cuja localização no espaço é conhecida; e instalações a serem localizadas conforme uma dada função objetivo a otimizar. Na maioria das vezes, o problema abstraído pelo modelo que contém esta função possui natureza geométrica e

combinatória, sendo freqüentemente classificado como NP-*hard*¹², o que limita drasticamente a obtenção de sua solução ótima em tempo computacional hábil (DREZNER, 1995; OWEN e DASKIN, 1998; GALVÃO, 2004; REVELLE e EISELT, 2005; REVELLE et al., 2008). É importante observar também que problemas de localização e problemas de *layout* possuem a mesma natureza. Porém, como destacam ReVelle e Eiselt (2005), no primeiro caso o tamanho das instalações é muito inferior ao espaço em estudo, podendo ou não haver interações entre elas. Em contraste, nos problemas de *layout* as instalações são consideravelmente grandes em relação ao espaço em questão, sendo que interações entre as mesmas normalmente ocorrem. Para mais detalhes sobre problemas de *layout* e localização, consultar Francis e White (1974).

A bibliografia sobre modelos de localização é vasta e facilmente se encontram trabalhos que revisam o assunto e propõem algum tipo de classificação para esses modelos. ReVelle et al. (2008), por exemplo, falam em quatro categorias principais:

- a) Modelos analíticos (*Analytic models*): são modelos nos quais se fazem um grande número de simplificações. Apesar de fornecerem bons resultados sobre o comportamento das principais variáveis do problema, suas aplicações acabam sendo limitadas;
- b) Modelos contínuos (*Continuous models*): tais modelos normalmente assumem que as instalações podem ser localizadas em qualquer lugar na região estudada, enquanto as demandas podem ocorrer em locais discretos. Localização de câmeras de vídeo ou sensores de poluição para monitoramento de uma área são algumas aplicações;
- c) Modelos de rede (*Network models*): assumem que o problema está embutido em uma rede composta de arcos e nós. As demandas podem ocorrer em ambos os locais. O problema de localizar um posto de emergência em uma estrada é um exemplo desta situação; e

¹² Define-se a classe dos problemas de decisão P como sendo aquela que admite um algoritmo polinomial para sua solução. A classe NP corresponde àqueles que não podem ser resolvidos em tempo polinomial. Por definição todo problema NP-*hard* (NP-árduo ou NP-difícil) é pelo menos tão difícil quanto o mais *hard* problema de NP. Alguns outros problemas de decisão são ainda classificados como NP-*complete* (NP-completo), correspondendo a uma classe particular de problemas de grande dificuldade (GAREY e JOHNSON, 1979; CAMPELLO e MACULAN, 1994).

- d) Modelos discretos (*Discrete location models*): estes modelos são freqüentemente utilizados em problemas práticos. Assumem que existe um conjunto de pontos de demanda (clientes) e outro de potenciais locais para a instalação. São normalmente formulados como um problema de programação inteira ou inteira-mista.

Os problemas de localização podem, ainda, ser separados em problemas estáticos ou dinâmicos. No primeiro caso, as variáveis são tomadas como conhecidas, ou comportam-se segundo alguma distribuição, sendo as soluções válidas para aquelas condições e “instante” de tempo. Nos modelos dinâmicos o fator tempo é o elemento principal. Tenta-se capturar o seu efeito sobre as variáveis de interesse e estudar o problema sobre algum horizonte de análise.

Problemas de localização combinados ao de roteirização¹³ de veículos também são estudados em alguns trabalhos. Nestes problemas, o objetivo é localizar instalações e estabelecer rotas que atendam as diversas demandas. Naturalmente, esta classe de problema é considerada bastante difícil, uma vez que aborda simultaneamente os problemas de localização e roteirização (BERMAN et al., 1995).

Quando aplicados à economia, os modelos de localização são freqüentemente admitidos sob a hipótese da existência de algum tipo de equilíbrio (como, por exemplo, equilíbrio de Nash). Nestes casos normalmente deseja-se localizar a instalação e determinar o preço que se deve praticar no mercado. Na solução ótima, nenhum dos competidores vê incentivo em fazer qualquer alteração em sua política de atuação no mercado. Ver Miller et al. (1996) para discussões sobre modelos neste sentido ou Serra e ReVelle (1995) para uma visão sumarizada do assunto.

Na seqüência serão apresentados os modelos clássicos de p -medianas e p -centros, bem como uma breve revisão dos problemas de localização de p -medianas hierárquicas e de localização generalizado. Neste texto, serão considerados apenas os modelos sem restrição de capacidade (*uncapacitated*). Para uma revisão dos principais trabalhos recentes sobre localização de p -medianas, p -centros e de localização generalizado, sugere-se consultar o texto de ReVelle et al. (2008).

¹³ Segundo Arenales et al. (2007, p.195) “o termo roteirização de veículos, embora não encontrado nos dicionários da língua portuguesa, tem sido usado como equivalente à palavra inglesa *routing* (ou *routeing*). O termo roteamento de veículos também é utilizado alternativamente por alguns autores brasileiros”.

Normalmente, estes problemas são estudados sob a estrutura de um grafo. Christofides (1975) define um grafo $G = (X, A)$ como um conjunto X de vértices ou nós (x_1, x_2, \dots, x_n) e um conjunto A de arcos ou arestas (a_1, a_2, \dots, a_n) que representam ligações entre dois vértices de X . Quando as ligações possuem sentido, tem-se um grafo direcionado, e as ligações são chamadas de arcos. Caso contrário, as ligações são chamadas de arestas, e o grafo é dito não direcionado. Goldbarg e Luna (2000, p. 571) definem um grafo como sendo “uma estrutura de abstração que representa um conjunto de elementos denominados nós e suas relações de interdependência ou arestas”¹⁴. Christofides (1975) apresenta uma abordagem detalhada sobre teoria de grafos com foco em aspectos computacionais.

2.4.1 Problema de p -Medianas

O problema de localização ótima de instalações, tais como: fábricas, centros de distribuição, escolas, entre outros, é freqüentemente enfrentado na prática. Este problema consiste, basicamente, em determinar onde localizar a instalação de forma a otimizar uma função objetivo de interesse como, por exemplo, a minimização do custo de transporte ou a maximização do número de clientes atendidos com o produto/serviço a ser oferecido (DREZNER, 1995; CURRENT, 2002).

Quando o interesse se volta à localização de uma única instalação o local em questão é chamado de mediana do grafo (CHRISTOFIDES, 1975). Boaventura (2006, p. 58) define “mediana ou centróide de um grafo” como o “vértice para o qual a soma das distâncias aos demais vértices é mínima”. Dada esta característica, o problema também é identificado como Problema de Localização de Mínima Soma (*Minisum Location Problem*).

Admitindo um grafo $G = (X, A)$, definem-se duas transmissões associadas a cada um dos vértices $x_i \in X$, dadas por:

¹⁴ Dentre as diversas aplicabilidades da teoria de grafos estão a representação de redes de distribuição (onde os vértices são os clientes, fábricas, centros de distribuição, etc., e as arestas indicam os caminhos entre esses elementos) e a utilização em teoria de grupos (onde peças a serem fabricadas são os vértices e as arestas que conectam estes vértices representam o grau de similaridade existente nas operações de manufatura entre peças distintas).

$$\sigma_o(x_i) = \sum_{x_j \in X} v_j d(x_i, x_j) \quad \text{e} \quad \sigma_t(x_i) = \sum_{x_j \in X} v_j d(x_j, x_i). \quad (2.12)$$

Em (2.12) o número $\sigma_o(x_i)$ é chamado de *out*-transmissão e $\sigma_t(x_i)$ de *in*-transmissão, podendo ser interpretados como uma medida de “custo” associado ao deslocamento entre os vértices x_j e o vértice x_i . Além disso, v_j representa o peso associado ao vértice x_j estabelecido em função de algum critério de importância relevante ao problema em questão, e $d(x_i, x_j)$ é a distância mínima entre os vértices x_i e x_j , a qual pode ser obtida por algum algoritmo de caminho mínimo¹⁵.

O vértice x_o^* para o qual $\sigma_o(x_i)$ é mínimo é chamado de *out*-mediana e, de maneira análoga, o vértice x_t^* para o qual $\sigma_t(x_i)$ é mínimo, chama-se *in*-mediana. Isto é:

$$\sigma_o(x_o^*) = \min_{x_i \in X} [\sigma_o(x_i)] \quad \text{e} \quad \sigma_t(x_t^*) = \min_{x_i \in X} [\sigma_t(x_i)]. \quad (2.13)$$

Se não é relevante ao problema o sentido em que se toma a distância entre os vértices x_i e x_j , tem-se que o vértice $x^* \in X$ que satisfaz:

$$\sigma(x^*) = \text{Min}_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} v_j d(x_i, x_j) \quad (2.14)$$

é a mediana do grafo, isto é, o vértice ótimo para a localização da instalação que minimiza a função objetivo de interesse. Hakimi (1964, 1965 apud OWEN e DASKIN, 1998 e Arenales et al., 2007) mostra que tal local ótimo existe e está, necessariamente, em um dos vértices de G . Este resultado é de fundamental importância, uma vez que simplifica a formulação e o processo de busca da solução ótima do problema.

De forma análoga, se o requerido agora é a determinação da localização ótima de mais de uma instalação, tem-se o problema de localizar p -Medianas em um grafo. Neste caso, o objetivo é localizar p -medianas de forma que a soma das menores distâncias dos vértices de G até a mediana mais próxima seja mínima (CHRISTOFIDES, 1975; SENNE et al., 2005). Ou, equivalentemente, conforme Arenales et al.

¹⁵ São exemplos de algoritmos de caminho mínimo os desenvolvidos por Dijkstra e Floyd, os quais podem ser encontrados em Christofides (1975) ou Goldberg e Luna (2000).

(2007) e ReVelle et al. (2008), pode-se definir o objetivo como decidir onde localizar as p medianas e qual mediana deve atender os vértices de demanda, de modo que a soma da distância ponderada (transmissão) entre medianas e respectivos vértices de demanda seja minimizada.

Seja, portanto, X_p um subconjunto de X contendo p medianas a serem localizadas. Pode-se definir $\sigma_o(X_p)$ e $\sigma_i(X_p)$ como, respectivamente, a *out*-transmissão e a *in*-transmissão associadas ao conjunto X_p de forma semelhante a equação (2.12). Ou seja:

$$\sigma_o(X_p) = \sum_{x_j \in X} v_j d(X_p, x_j) \quad \text{e} \quad \sigma_i(X_p) = \sum_{x_j \in X} v_j d(x_j, X_p) \quad (2.15)$$

onde a distância $d(x_j, X_p)$ a ser considerada entre o vértice x_j e o conjunto X_p é a mínima distância entre x_j e $\forall x_i \in X_p$. Isto é:

$$d(x_j, X_p) = \min_{x_i \in X_p} [d(x_j, x_i)] \quad \text{e} \quad d(X_p, x_j) = \min_{x_i \in X_p} [d(x_i, x_j)]. \quad (2.16)$$

Ao encontrar o vértice $x'_i \in X_p$, tal que a distância até x_j é a mínima, diz-se que x_j está alocado à x'_i (CHRISTOFIDES, 1975).

Desta maneira, o objetivo do problema de p -medianas pode ser escrito como encontrar o subconjunto $X_p^* \subseteq X$ de forma que a transmissão associada a este subconjunto seja a mínima. Ou equivalentemente:

$$\sigma(X_p^*) = \text{Min}_{\substack{X_p \subseteq X \\ |X_p| = p}} \sum_{x_j \in X} v_j d(X_p, x_j). \quad (2.17)$$

O problema clássico de localizar p -medianas em um dado grafo é admitido ser NP-hard (OWEN e DASKIN, 1998; REVELLE e EISELT, 2005; SENNE et al., 2005). Sendo a cardinalidade do conjunto X igual à n , isto é $|X| = n$, o problema é usualmente formulado como um problema de programação linear inteira conforme segue (CHRISTOFIDES, 1975; ARENALES et al., 2007):

$$\text{Minimizar} \quad z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \delta_{ij} \quad (2.18)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^n \delta_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.19)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ii} = p \quad (2.20)$$

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \leq n\delta_{ii} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.21)$$

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\} \quad (2.22)$$

onde d_{ij} é a distância entre os vértices $x_i \in \mathbf{X}$ e $x_j \in \mathbf{X}$ multiplicada pelo peso v_j . A equação (2.19) assegura que cada vértice estará alocado a uma e, somente, uma mediana. A equação (2.20) força a localização de exatamente p medianas, enquanto que a equação (2.21) restringe a alocação somente aos vértices que são medianas. Por último, δ_{ij} é uma variável de decisão que será igual a 1 (um) se o vértice x_j está alocado ao vértice x_i , e 0 (zero) em caso contrário.

Em algumas formulações para este problema, como, por exemplo, em ReVelle et al. (2008), admiti-se que a demanda dos vértices seja atendida por mais de uma mediana. Neste caso, cada mediana supre uma fração da demanda do vértice. Tal situação ocorre, por exemplo, quando se considera que há restrições que limitam a capacidade de atendimento das medianas.

Apesar da existência de métodos exatos para a solução do modelo (2.18)-(2.22) sob certas condições (ver, por exemplo, Senne et al., 2005), dada a ordem de complexidade do problema tais métodos estão, normalmente, limitados a pequenas e médias instâncias de problema. Desta forma, vários métodos heurísticos têm sido desenvolvidos para resolver o problema de p -medianas. Um dos primeiros e mais conhecidos é o método de Teitz & Bart, o qual será apresentado na seção 3.4.

2.4.2 Problema de p -Medianas Hierárquicas

O problema de p -medianas tem sido normalmente associado ao estudo de localização de centro de distribuições, fábricas e similares. De modo geral, considera-se que as p instalações são do mesmo tipo, isto é, oferecem ou desempenham o mesmo serviço/função (NUNES, 2002). Contudo, em muitos problemas reais esta não é uma consideração

válida, existindo k ($k \geq 2$) tipos diferentes de instalações que desempenham serviços distintos. Na literatura pertinente, são freqüentemente citados dois exemplos de problema de localização onde esta situação ocorre.

O primeiro exemplo se refere ao sistema de atendimento de saúde, onde normalmente existem postos de saúde, no primeiro nível, hospitais, no segundo nível, e grandes centros médicos, no terceiro nível (nível mais alto). No nível mais baixo são oferecidos os serviços essenciais. No segundo, além dos essenciais, outros serviços mais especializados estão também disponíveis. No último nível, serviços mais avançados e caros são oferecidos juntamente com todos àqueles prestados em níveis anteriores. Assim, um cliente que busca um atendimento neste sistema deve, teoricamente, caminhar na direção de níveis mais elevados, respeitando as hierarquias.

O segundo exemplo trata do processo hierárquico natural que ocorre em sistemas de manufatura. Depois de extraída, a matéria prima segue para a fábrica onde é processada. Em seguida, o produto acabado é transportado ao depósito, posteriormente ao local de venda e, por último, entregue ao consumidor final (GALVÃO, 2004; REVELLE e EISELT, 2005). Outras aplicações, como coleta de lixo, coleta de materiais recicláveis e localização de estações de rádio para serviço emergencial de busca e resgate, também são relatadas na literatura.

Portanto, um sistema hierárquico consiste de $k \geq 2$ distintos tipos de instalações que oferecem coletivamente produtos ou serviços. Neste caso, tem-se um sistema com k -hierarquias (NUNES, 2002; GALVÃO, 2004). Conforme ReVelle e Eiselt (2005) destacam, o desafio reside em definir como servir ou cobrir a maior quantidade possível de clientes respeitando as restrições (de tempo, recursos, etc.) impostas.

Narula foi um dos primeiros pesquisadores a trabalhar o assunto e propor uma classificação para problemas com k -hierarquias (ver Narula, 1984). Eitan et al. (1991) estabelece o objetivo de um problema de localização-alocação com k -hierarquias como sendo o de localizar p_i ($i=1,2,\dots,k$) tipos de instalação entre n possíveis pontos de localização e alocar demanda a essas instalações, de forma que algum critério seja otimizado. Os critérios, de acordo com Church e Eaton (1987), têm sido formulados para minimizar a distância ponderada, o custo, maximizar a cobertura, a utilização, ou alguma combinação destes e outros objetivos.

Segundo Nunes (2002, p. 6), “se as instalações são de um único tipo e o critério *minisum* é utilizado, o problema de localização-alocação

com k -hierarquias se reduz ao problema de p -medianas, mas se o critério *minimax* for adotado, o problema se reduz ao problema de p -centros” (ver seção 2.4.3).

Şahin e Süral (2007) fornecem uma revisão atualizada que contempla os principais trabalhos sobre problemas de hierarquias, abordando a classificação, as formulações e os métodos de solução.

Vale destacar ainda que apesar do problema estudado neste trabalho possuir características similares a de um problema com hierarquias, optou-se por não estudar o problema utilizando esta abordagem.

2.4.3 Problema de p -Centros

O problema de localização ótima de um hospital, uma central de polícia ou outra instalação semelhante em que o tempo decorrido entre a solicitação e o início propriamente dito do serviço deve ser o mínimo possível, são normalmente citados como exemplos de situações onde o modelo de localização de p -centros deve ser aplicado. Nestes casos, o importante é garantir que o maior tempo, distância, ou outro critério de interesse seja o menor possível. Isto é, deseja-se minimizar o pior caso para o atendimento da demanda. Dada tal característica, costuma-se referir ao problema de p -centros como *Minimax Location Problem* (CHRISTOFIDES, 1975; OWEN e DASKIN, 1998).

Ao contrário do problema de p -medianas, onde se mostra que a localização ótima está contida em um subconjunto de vértices do grafo, o problema de p -centros frequentemente não tem a solução ótima sob os vértices (REVELLE e EISELT, 2005). Desta maneira, o problema de p -centros pode ser tratado de duas formas distintas. Conforme Owen e Daskin (1998) e Arenales et al. (2007), o problema de p -centros-vértices (*vertex-center problem*) restringe as localizações aos vértices, enquanto o problema de p -centros-absolutos (*absolute-center problem*) permite que os centros sejam localizados em qualquer ponto (vértice ou arco) do grafo. Ainda segundo Owen e Daskin (1998), a solução do problema de p -centros-absolutos normalmente resulta num menor valor para a função objetivo quando comparado ao problema de p -centros-vértices.

Do modo mais geral (p -centros-absolutos), o problema pode ser definido como encontrar os locais ótimos no grafo para localizar p instalações de forma que o critério de interesse seja minimizado para o vértice mais remoto, visto que este será atendido pela instalação mais

próxima (CHRISTOFIDES, 1975). Ou ainda, conforme Arenales et al. (2007), o problema envolve a localização de p instalações e a designação de clientes a essas instalações, de modo a minimizar a distância máxima de clientes a instalações.

Admitindo o grafo $G = (X, A)$ e o subconjunto X_p ($X_p \subseteq X$) contendo p vértices, pode-se definir $d(X_p, x_j)$ como sendo a mínima distância entre um vértice $x_i \in X_p$ e o vértice x_j . Isto é:

$$d(X_p, x_j) = \min_{x_i \in X_p} [d(x_i, x_j)] \quad \text{e} \quad d(x_j, X_p) = \min_{x_i \in X_p} [d(x_j, x_i)]. \quad (2.23)$$

Definem-se, ainda, dois números de separação, para cada conjunto $X_p \subseteq X$, conforme segue:

$$s_o(X_p) = \max_{x_j \in X} [v_j d(X_p, x_j)] \quad \text{e} \quad s_t(X_p) = \max_{x_j \in X} [v_j d(x_j, X_p)] \quad (2.24)$$

onde $s_o(X_p)$ e $s_t(X_p)$ são chamados, respectivamente, de *out-separação* e *in-separação* em relação ao subconjunto X_p , e v_j representa algum peso associado ao vértice x_j .

Se for considerado um grafo não direcionado e admitindo-se que a localização da instalação pode ocorrer em qualquer ponto y do grafo, então a solução ótima do problema pode ser escrita como encontrar o conjunto Y_p , contendo p pontos quaisquer de G , de maneira que (CHRISTOFIDES, 1975):

$$s(Y_p^*) = \min_{Y_p \in G} [s(Y_p)]. \quad (2.25)$$

Uma maneira possível de formular o problema de encontrar os p locais ótimos de instalação para o problema de p -centros-vértices é apresentado a seguir (ARENALES et al., 2007):

$$\text{Minimizar } r \quad (2.26)$$

$$\text{s.a. } r \geq \sum_{i=1}^n d_{ij} \delta_{ij} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ii} = p \quad (2.29)$$

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \leq n\delta_{ii} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.30)$$

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\} \quad (2.31)$$

onde r é a distância máxima de um vértice j quando alocado ao respectivo vértice i . A função objetivo (2.26) minimiza a distância máxima entre os vértices $j \subseteq X$ e seus respectivos centros, enquanto que a equação (2.27) expressa o valor de r como um limite superior para essa distância. As demais variáveis e restrições são equivalentes ao discutido na seção 2.4.1, modelo (2.18)-(2.22). ReVelle et al. (2008) apresenta algumas outras formulações possíveis para problemas relacionados ao modelo anterior.

De acordo com Christophides (1975), há um segundo problema bastante relacionado ao problema de p -centros-absolutos que pode ser resolvido pelo mesmo método utilizado para resolver este último. O problema pode ser posto da seguinte forma: dada uma distância crítica, encontrar o menor número de centros e os correspondentes pontos de instalação, de tal maneira que todos os vértices distem, no máximo, desta distância crítica de pelo menos um centro (problema de cobertura de conjuntos, Owen e Daskin, 1998).

Christophides (1975, p. 79-105) discute alguns algoritmos para resolver os problemas de p -centros-vértices e p -centros-absolutos. Notoriamente, encontrar a solução ótima para um desses problemas, especialmente, este último, é uma tarefa tão ou mais árdua que encontrar a solução ótima do problema de p -medianas. Em geral problemas de p -centros são classificados como NP-complete (OWEN e DASKIN, 1998).

2.4.4 Problema de Localização Generalizado

Os problemas clássicos de p -Medianas e p -Centros não consideram em suas funções objetivo o custo associado à localização da instalação, assumindo implicitamente que tal custo é nulo ou igual para todos os locais. Frequentemente, esta suposição não é verificada em aplicações práticas. Quando tais custos precisam ser considerados, tem-se o problema de localização generalizado. Por ser mais geral, este problema possui maior aplicabilidade, sendo também bastante explorado na literatura. Alguns termos são normalmente utilizados ao se referir ao problema de Localização Generalizado, entre eles: *Facility Location and*

allocation, (Uncapacitated) Facility Location Problem e Plant Location Problem (CHRISTOFIDES, 1975; REVELLE e EISELT, 2005; REVELLE et al., 2008).

No problema de localização generalizado associa-se a cada vértice $x_i \in X$ um custo fixo f_i que pode representar, por exemplo, o custo de construção ou de operação anual da instalação no vértice x_i . Apesar de tal custo também poder ser admitido no modelo de p -centros, normalmente essa variação não é relevante aos problemas em que o modelo de p -centros se aplica. Assim, o problema de localização generalizado é, usualmente, tratado como uma extensão do problema de p -medianas.

Desta forma, admitindo o grafo $G = (X, A)$, o objetivo é encontrar o subconjunto ótimo $X_p^* \subseteq X$ que minimiza o custo fixo de localização das p medianas mais a transmissão (*in* ou *out*) associada (CHRISTOFIDES, 1975). Ou, conforme coloca Arenales et al. (2007), o problema envolve a localização de instalações e a designação de clientes a instalações, de modo a minimizar o custo fixo de implantação de instalações e o custo variável de atendimento das demandas. Deseja-se, portanto, minimizar uma função z dada por:

$$z = \sum_{x_i \in X_p} f_i + \sigma(X_p). \quad (2.32)$$

Assim, o modelo de localização generalizado pode ser formulado como segue:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^n f_i \delta_{ii} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \delta_{ij} \quad (2.33)$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^n \delta_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \leq n \delta_{ii} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.35)$$

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\} \quad (2.36)$$

No modelo (2.33)-(2.36), a função objetivo minimiza os custos de instalação das p medianas e de atendimento dos vértices x_j . As demais restrições são equivalentes, respectivamente, às condições (2.19), (2.21) e (2.22) do modelo de p -medianas.

Como não poderia deixar de ser, resolver o modelo anterior é um problema que possui dificuldades inerentes a encontrar a solução ótima do problema clássico de p -medianas (CHRISTOFIDES, 1975). Galvão (2004) faz uma apresentação de algumas estratégias para solução de ambos os problemas, considerando somente sua versão não-capacitada.

Como será visto mais adiante, o problema tratado neste trabalho é modelado como um problema de localização generalizado.

2.5 Problemas Combinados de Localização e Estoque

Os problemas de localização tratados até aqui somente levam em conta os custos associados à localização e ao transporte. No entanto, ao se considerar a operação do sistema de distribuição outros custos importantes também emergem, devendo ser igualmente considerados nas análises. São exemplos de tais custos: custo de manutenção do estoque corrente¹⁶, custo de manutenção do estoque de segurança no Centro de Distribuição (CD) e custo associado à ocorrência de rupturas de estoque. Ao negligenciar tais custos está-se, de fato, assumindo que a operação do estoque não é relevante para o problema, importando apenas o valor da demanda média que precisa ser atendida.

Por outro lado, uma vez que a rede está configurada, isto é, os vários CD's estão localizados, outro problema a ser resolvido diz respeito à operacionalização do estoque. Neste sentido, podem ser encontrados trabalhos que consideram a operação ocorrendo segundo uma política de LEC (conforme apresentado na seção 2.2), enquanto outros consideram que rupturas na rede podem ocorrer. Neste último caso, encontram-se os trabalhos citados na seção 2.3.

Assim, de forma similar ao verificado nas formulações que abordam o problema de localização acoplado ao de roteirização, os modelos combinados de localização e estoque tentam contemplar dois problemas em apenas um. Portanto, os problemas combinados de localização e estoque buscam, simultaneamente, fazer localizações e alocações considerando, para isso, também os custos incorridos com a operação ótima do estoque no sistema de distribuição. Normalmente, esses modelos se limitam a “contabilizar” a operação somente nos CD's, isto é, são considerados o custo de reposição fábrica-CD, o custo da falta

¹⁶ A expressão “estoque corrente” será utilizada para designar o estoque mantido para suprir a demanda que é regularmente atendida (*working inventory*).

no CD, e o custo da manutenção do estoque corrente e do ES no CD. Além disso, a operação ótima decorre da utilização do LEC.

Nesta direção está o trabalho de Daskin et al. (2002) que trata de um sistema de distribuição constituído por fornecedores, CD's e varejistas. O objetivo do modelo proposto pelos autores é determinar a localização e o número ótimo de CD's, ao mesmo tempo em que se aloca varejistas aos CD's e determina-se a política ótima de operação do estoque para cada um dos CD's. Em particular, a política ótima se refere a definir a quantidade que deverá ser solicitada ao fornecedor de forma a minimizar os custos nos centros de distribuição, os quais empregam o sistema de revisão contínua (seção 2.2.1). Admitindo uma distribuição normal para a demanda dos varejistas, são estabelecidos o ponto de pedido e o ES.

Daskin et al. (2002) não consideram a operação do estoque no varejista e, por conseqüência, seus custos. Presumindo a utilização do modelo de revisão contínua é proposta uma relação similar à equação (2.3) para quantificar o custo resultante de transportar (do fornecedor até o CD) e manter o estoque nos CD's. Esta mesma formulação é utilizada, com pequenas variações, nos trabalhos de Shen et al. (2003), Snyder et al. (2007) e Ghezavati et al. (2009).

Nos trabalhos citados nos dois parágrafos anteriores, a função objetivo minimiza o somatório do custo fixo das instalações, de transporte entre os CD's e varejistas e entre o fornecedor e os CD's, além dos custos de manutenção do estoque corrente e do ES nos centros de distribuição. O NS é modelado pela manutenção de certa quantidade de estoque de segurança nos CD's. Com relação aos varejistas, estes mantêm estoque para suprir somente sua demanda regular.

Mak e Shen (2009) apresentam o problema de estabelecer uma rede para peças de reposição onde, simultaneamente, determina-se o número ótimo de CD's, suas localizações, a alocação de clientes aos CD's e o nível de estoque a ser mantido nesses CD's e no fornecedor. São considerados os mesmos custos citados anteriormente, sendo que o modelo é formulado como um sistema de filas.

Na pesquisa bibliográfica realizada não foi identificado nenhum trabalho que aborde o problema combinado de localização-alocação e estoque em redes sujeitas a interrupções. No caso específico deste trabalho, essas interrupções ocorrem em arcos intermitentes, respeitando um processo Markoviano. Desenvolve-se, a partir daí, uma operação ótima do estoque que não é dada pela política do LEC. O modelo é formulado de maneira a garantir certo nível de serviço no ponto de

demanda e não, somente, no centro de distribuição. É neste sentido que o presente trabalho se diferencia dos demais encontrados na literatura.

Ressalta-se, no entanto, que são vários os trabalhos que estudam o problema de confiabilidade em rede (*Reliable Network Design*). Nesses trabalhos os arcos também são suscetíveis a falhas (ou interrupções) que ocorrem segundo probabilidades conhecidas. O problema consiste em definir a rede de forma a manter sua conectividade em momentos de falha, garantindo atendimento à demanda. Tais trabalhos estão normalmente associados a problemas de segurança em redes de computador, sistemas de telecomunicações, movimentação de material militar e tropas, entre outros. São exemplos os trabalhos de Berman et al. (2003), Santiváñez et al. (2009) e Desai e Sen (2010). O trabalho tratado aqui, diferentemente desses últimos, está focado em um problema logístico em que as interrupções seguem um padrão cíclico conhecido.

2.6 Modelos Dinâmicos

Os modelos discutidos até o momento possuem a deficiência de não levarem em consideração uma importante característica do mundo real, qual seja: a variação dos parâmetros ao longo do tempo. Na prática, não se possui certeza quanto ao comportamento dos principais parâmetros que envolvem o problema quando longos períodos de tempo precisam ser considerados. Em alguns casos, presume-se alguma distribuição para tais parâmetros, em outros as condições futuras são tomadas como incertas.

Os modelos que não assumem essas variações e incertezas ao longo de um horizonte de planejamento são ditos serem estáticos, e as decisões são válidas para aquele instante de tempo no qual as condições são verificadas. Por outro lado, outros modelos, ditos dinâmicos, tentam incorporar tais variações e incertezas ao longo do tempo quando da tomada da decisão. Isto se justifica em face de que as decisões de localização devem manter-se viáveis ao longo de um horizonte razoavelmente longo, visto o montante de capital normalmente investido.

De acordo com Owen e Daskin (1998), alguns desses modelos fazem uso de programação dinâmica para determinar, ao longo do período de análise, a melhor estratégia de localização, alocação ou realocação. Em outros casos, conforme Galvão (2004), a instalação é alternadamente aberta e fechada em função do período, com subsequente rearranjo das alocações. Para Ratick et al. (1987), em

modelos de localização dinâmica as variáveis são indexadas por tempo, assim diferentes soluções podem ser obtidas para cada período em resposta às mudanças dos parâmetros. Portanto, os modelos dinâmicos pressupõem mudanças freqüentes na configuração da rede de abastecimento ao longo do tempo.

Outra estratégia utilizada para avaliar os efeitos da mudança dos parâmetros é aplicar análise de cenários. Cada cenário representa um possível comportamento futuro para os principais parâmetros do problema. Assim, o objetivo se resume a determinar a localização ótima que minimiza o critério de interesse sobre todos os cenários. Ver Snyder et al. (2007) ou Ghezavati et al. (2009) para exemplos dessa abordagem aplicada a problemas de localização considerando custos de estoque.

Para os interessados, uma discussão bastante detalhada sobre modelos estáticos e dinâmicos pode ser encontrada em Owen e Daskin (1998).

2.7 Considerações Finais

Neste capítulo foram revisadas duas áreas bastante distintas. A primeira delas trata do assunto estoques e sua administração. Procurou-se expor a importância do assunto, ressaltando o impacto econômico que sua administração inadequada pode trazer às empresas e ao país. O modelo de lote econômico de compra e os sistemas de revisão contínua e periódica dos estoques foram apresentados. Na seqüência, são abordados alguns trabalhos que tratam de modelos para operação ótima do estoque sob condições de interrupção no fornecimento.

A segunda área diz respeito aos problemas de localização. Por ser bastante ampla, foram sintetizados apenas os principais aspectos referentes ao assunto explorando, principalmente, os pontos que serão relevantes em capítulos futuros.

Ao final, visto a importância dos estoques, os esforços para sua redução, bem como, o volume de capital por eles imobilizado, foram apresentados, resumidamente, trabalhos que unem essas duas áreas por meio de modelos que acoplam decisões de estoque ao problema de localização. Desta forma, dada a característica estratégica inerente aos problemas de localização e a importância econômica dos estoques, os modelos que simultaneamente consideram esses dois aspectos passam a apresentar maior aplicabilidade no processo de tomada de decisão em problemas complexos reais nos quais ambas as áreas precisam ser consideradas.

Posto isto, abre-se caminho para a apresentação do problema propriamente dito de que trata este trabalho. Para melhor compreensão da estratégia de solução adotada para resolvê-lo, o capítulo seguinte apresenta, sucintamente, as ferramentas matemáticas básicas empregadas na elaboração desta estratégia.

3 FERRAMENTAL MATEMÁTICO BÁSICO

3.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo não se propõe fazer uma revisão, propriamente dita, das ferramentas matemáticas básicas aplicadas à resolução do problema abordado neste trabalho. Ao invés disso, pretende-se simplesmente apresentá-las, explorando, quando necessário, algumas das propriedades relevantes ao processo de solução do problema. Esta apresentação se faz necessária como forma de facilitar o acompanhamento e a descrição da estratégia de resolução adotada.

Inicia-se com uma apresentação sucinta da técnica de simulação, focando a geração de números pseudo-aleatórios, bem como alguns aspectos importantes que devem ser observados ao aplicar esta técnica. Vale destacar que a leitura da seção 3.2.1 torna-se optativa para aqueles leitores que já possuem familiaridade com o assunto lá abordado, sem que isso traga prejuízos ao entendimento do trabalho.

Em seguida, é dada atenção à técnica de programação dinâmica. Concentra-se atenção à sua aplicação na resolução de problemas de otimização com características estocásticas em que o horizonte de tempo pode ser tomado como sendo infinito.

Por fim, descreve-se sucintamente o método de trocas sucessivas proposto no algoritmo de Teitz & Bart (ver Christofides, 1975), freqüentemente aplicado à resolução do problema de localização de p -medianas.

Referências são fornecidas em locais oportunos. Aqueles que desejarem aprofundar-se em algum dos assuntos abordados devem reportar-se às mesmas.

3.2 Simulação

Muitos problemas reais possuem variáveis que comportam-se conforme variáveis aleatórias. A distribuição de probabilidade que rege o comportamento dessas variáveis nem sempre é conhecida ou, quando é, raramente admite fácil tratamento algébrico. Em muitas situações, a variável de interesse é resultado da interação dessas várias variáveis,

cada qual com sua distribuição, de tal maneira que obter uma expressão analítica fechada para prever o comportamento da variável resultante do problema normalmente constitui tarefa de razoável dificuldade matemática (LEE, 1966; SHAMBLIN e STEVENS, 1974).

Há ainda situações em que a complexidade do problema força a construção de algum modelo físico que possibilite o estudo do comportamento da solução (ou parte dela) sob condições específicas. São exemplos de tais situações: os testes em aviões e carros usando túnel de vento a fim de verificar o desempenho aerodinâmico; e a construção de réplicas em escala de prédios para avaliar seu comportamento quando submetidos a fortes ventos ou terremotos. (SHAMBLIN e STEVENS, 1974; ROBINSON, 2004).

Nestas e em outras situações em que o problema (ou seu modelo) é por demais complexo, o uso de simulação, seja ela com auxílio de algum modelo físico ou apenas por meios computacionais, normalmente apresenta-se como uma estratégia viável e interessante de contornar as dificuldades que surgem para obtenção de uma solução satisfatória para o problema em questão (SHAMBLIN e STEVENS, 1974). Simulação, portanto, pode ser aplicada em inúmeras situações. Banks et al. (1999, p. 6) lista alguns exemplos: sistemas de manufatura, construção, sistema de saúde, na área militar, no setor de transporte, na indústria de entretenimento, entre muitas outras.

Para Robinson (2004, p. 2) simulação, do modo mais amplo, pode ser definida como “uma imitação de um sistema”. Simular a ocorrência de eventos específicos em tal sistema, ao invés de buscar uma modelagem matemática ou realizar experimentos no sistema real (quando este existe), possui algumas vantagens, dentre elas pode-se citar: menor custo, menor tempo, e a possibilidade de controlar variáveis. Por outro lado, também é preciso ter em mente que há desvantagens: *softwares* de simulação normalmente são caros, algumas simulações podem levar horas ou dias; e frequentemente há necessidade de quantidades significativas de dados (ROBINSON, 2004). Deve-se ainda lembrar que os resultados obtidos são, na maioria das vezes, válidos somente aos casos simulados, sendo normalmente difícil prever o comportamento do sistema quando este é submetido a outras condições.

Na grande maioria dos casos a aplicação de métodos de simulação requer várias repetições da simulação em questão. A cada simulação obtém-se uma estimativa para a solução do problema. Provavelmente, nenhuma dessas simulações vai retornar o valor exato da solução. Porém, uma estimativa mais próxima quanto ao seu valor

real pode ser conseguida tomando-se a média dos valores obtidos nas várias repetições.

Com foco na pesquisa operacional, Goldberg e Luna (2000, p. 21) argumentam que “nas condições em que o ideal de otimização se torna praticamente pouco razoável, outras abordagens se apresentam bastante competitivas”. Dentre elas destacam-se a Simulação e a Inteligência Artificial¹. Para esses autores,

A abordagem de simulação aplica-se quando situações de incerteza ou a própria complexidade do sistema dificulta o esforço de compreensão para o exato equacionamento do sistema, ou quando a magnitude do modelo de otimização o torna computacionalmente inviável. Os modelos de simulação contornam estas dificuldades com um uso mais intensivo de dados estatísticos e com um maior esforço de validação do modelo. A desvantagem dessa abordagem é a necessidade de um esforço maior dos especialistas na identificação de soluções não examinadas pelo modelo (GOLDBARG e LUNA, 2000, p. 22).

Apesar de constituir-se em um método bastante dispendioso, historicamente o uso de simulações tem se mostrado uma importante ferramenta dentro da área de pesquisa operacional, principalmente após o advento dos computadores (HILLIER e LIEBERMAN, 1967). Conforme coloca Lee (1966), para ser possível a utilização de computadores é necessário que exista meios de gerar números aleatórios, bem como amostras de uma dada distribuição. Desta maneira, nas seções que seguem, é apresentada uma forma de gerar números aleatórios, em especial números aleatórios com distribuição de Poisson. Apesar de outras distribuições igualmente importantes também poderem ser geradas artificialmente, dar-se-á atenção exclusiva à distribuição de Poisson, visto sua aplicação, no decorrer deste trabalho, para representar a ocorrência de demandas.

Para uma discussão formal e completa sobre a técnica de simulação, sugere-se consultar o texto de Banks et al. (1999) ou Robinson (2004).

¹ Para Goldberg e Luna (2000, p. 22), “a Inteligência Artificial é o ramo da informática que concerne à automação do comportamento inteligente”.

3.2.1 Geração de Números Pseudo-aleatórios

A geração de números aleatórios, em especial, com distribuição uniforme é uma atividade útil e importante em várias aplicações. São alguns exemplos: simulação, amostragem, análise numérica, programação de computadores e tomada de decisão (Knuth, 1969).

Conforme Shamblin e Stevens (1974) existem vários tipos de simulação. Em particular, se a simulação em questão envolve um modelo matemático para descrição de algum sistema real em que devem ser realizadas amostragens aleatórias de uma distribuição probabilística, o método passa a se chamar de Simulação de Monte Carlo.

Segundo Shamblin e Stevens (1974, p. 176) a “simulação de Monte Carlos requer que números aleatórios sejam gerados para que seja possível obter amostras aleatórias de certa distribuição de probabilidade”. Para os referidos autores, um número aleatório é um número que, numa seqüência de números, sua probabilidade de ocorrência é a mesma de qualquer outro número desta seqüência. Nesta definição, implicitamente está-se assumindo números uniformemente distribuídos. Para Robinson (2004, p. 26) “números aleatórios são uma seqüência de números que aparecem em uma ordem aleatória”, onde duas propriedades importantes devem ser observadas, a saber: uniformidade, isto é, existe a mesma probabilidade de qualquer número aparecer em qualquer ponto da seqüência; e independência, ou seja, o fato de um número aparecer na seqüência não afeta a probabilidade dele ou de qualquer outro aparecer novamente.

Números aleatórios podem ser obtidos de forma manual, com uso de tabelas ou de computadores. Para fins computacionais o meio mais comum de obter esses números é gerar os chamados números pseudo-aleatórios. De acordo com Robinson (2004), por natureza, os computadores não se comportam de forma aleatória, de modo que não são, portanto, aptos a gerar números realmente aleatórios. Entretanto, existem algoritmos que podem ser implementados em computadores e que são utilizados para produzir números aparentemente aleatórios (ditos pseudo-aleatórios), mas que na verdade são obtidos de maneira totalmente previsível (ROBINSON, 2004). Conforme destaca Shamblin e Stevens (1974) uma seqüência de números pseudo-aleatórios não é totalmente aleatória, pois os números da seqüência são gerados usando um processo matemático completamente determinístico.

Mesmo assim, os números gerados a partir de algum desses algoritmos são tratados como aleatórios desde que sejam aprovados em certos testes estatísticos de aleatoriedade que verificam as propriedades

de uniformidade e independência, tais como: teste de frequência, teste de auto-correlação, *gap test*, entre outros (ver BANKS, 1999). Eventualmente, uma seqüência pseudo-aleatória poderá se repetir em ciclos. Porém, se tais ciclos forem longos o suficiente, tais repetições não trarão conseqüências indesejáveis à simulação (SHAMBLIN e STEVENS, 1974).

Para geração de números pseudo-aleatórios em computador dois métodos são comumente apresentados. O primeiro, segundo Knuth (1969), proposto por John Von Neumann por volta de 1946, é o método do quadrado do meio. Em tal método o número aleatório imediatamente anterior é elevado ao quadrado e, do número resultante, tomam-se os dígitos do meio como sendo o próximo número aleatório da seqüência. O segundo é o método das técnicas de congruências (SHAMBLIN e STEVENS, 1974). É sobre este último método que trata a seção seguinte.

3.2.1.1 Método da Congruência Multiplicativa

Segundo Shamblin e Stevens (1974) as técnicas de congruência fazem uso de alguma equação recursiva. Dentre elas está o método da Congruência Multiplicativa, proposto por D. H. Lehmer em 1948 (LEE, 1966; KNUTH, 1969). Este método parte de um número aleatório inicial, ao qual dá-se o nome de semente e , usando uma equação recursiva, determina-se os próximos elementos da seqüência pseudo-aleatória. A equação (3.1), apresentada em Lee (1966) e em Shamblin e Stevens (1974), pode ser usada para gerar seqüências pseudo-aleatórias.

$$X_{n+1} = kX_n \text{ mod } m \quad (3.1)$$

Em (3.1) k e m são inteiros positivos, com $k < m$. Cada número pseudo-aleatório é, então, tomado como sendo o resto da divisão de kX_n por m .

Shamblin e Stevens (1974, p. 177) apresentam o seguinte exemplo para ilustrar a aplicação deste método. Sejam $k = 8$, $m = 10$ e $X_0 = 2$. Da aplicação de (3.1) resulta que:

$$X_0 = 2$$

$$X_1 = 8 \cdot 2 \text{ mod } 10 = 6$$

$$X_2 = 8 \cdot 6 \text{ mod } 10 = 8$$

$$X_3 = 8 \cdot 8 \text{ mod } 10 = 4$$

e a seqüência pseudo-aleatória é formada por: 2, 6, 8 e 4.

Outra forma bastante conhecida, indicada em Knuth (1969) e Robinson (2004), é apresentada na equação (3.2), onde a é uma constante multiplicativa e c , uma constante aditiva.

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m \quad (3.2)$$

Ainda várias outras formas equivalentes estão disponíveis na literatura. Aos interessados sugere-se consultar as discussões apresentadas em Knuth (1969, p. 25).

Independente da forma escolhida para gerar a seqüência aleatória, deve-se ter atenção quanto aos valores das constantes utilizadas nas equações. Esses valores devem ser adequadamente selecionados de maneira a produzir ciclos suficientemente longos de repetição. Knuth (1969, p. 15) apresenta uma discussão acerca da escolha correta desses valores. Na prática, valores bastante altos para m são adotados (ROBINSON, 2004).

Banks et al. (1999, cap. 8) fornecem uma discussão sobre as técnicas de geração de números aleatórios e os respectivos testes de uniformidade e independência.

3.2.1.2 Geração de Números Pseudo-aleatórios com Distribuição de Poisson

A importância de gerar seqüências aleatórias (ou pseudo-aleatórias) reside na necessidade de se obter amostras também aleatórias de certas distribuições de probabilidade.

Em várias aplicações práticas verifica-se que os principais parâmetros de interesse seguem ou se comportam, aproximadamente, de acordo com distribuições bastante conhecidas. Notoriamente, pode-se citar as distribuições Normais, Exponenciais, de Poisson e a de Erlang. Assim, ao simular certo evento que é regido por uma distribuição específica, é necessário gerar artificialmente números aleatórios que sigam tal distribuição. Em particular, neste trabalho é considerada uma distribuição de Poisson para descrever a ocorrência de demandas.

Uma forma possível de gerar números aleatórios com distribuição de Poisson é apresentada por Knuth (1969, p. 117). Outras maneiras também podem ser encontradas em Ahrens e Dieter (1982). Sendo μ a média da distribuição de Poisson, o algoritmo de Knuth pode ser descrito conforme segue:

- Passo 1:** Faça $p \leftarrow e^{-\mu}$, $N \leftarrow 0$ e $q \leftarrow 1$;
- Passo 2:** Gere uma variável aleatória u uniformemente distribuída ente 0 e 1;
- Passo 3:** Faça $q \leftarrow q \cdot u$;
- Passo 4:** Se $q \geq p$ então faça $N \leftarrow N + 1$ e retorne ao Passo 2. Caso contrário o algoritmo termina retornando o valor N .

3.2.2 Técnicas de Simulação

Duas abordagens podem ser caracterizadas quanto à forma de tratar a evolução do tempo durante a simulação. A primeira trata esta evolução como sendo discreta, enquanto a outra, como contínua.

Conforme Banks et al. (1999), os sistemas propriamente ditos podem ser separados em discretos ou contínuos. Nos discretos, o estado das variáveis muda somente em um conjunto discreto de instantes no tempo. Nos sistemas contínuos o estado muda continuamente ao longo do tempo.

Para exemplificar, considere eventos que ocorrem de forma discreta no tempo, como no caso da ocorrência de chamadas em um *call center*. Se chamadas chegam a uma taxa determinística de 1 a cada 2 minutos e, também de forma determinística, é gasto 5 minutos para atender cada chamada, torna-se suficiente, quando simulada a operação deste sistema, que o incremento de tempo seja de 1 em 1 minuto. Isto é, o passo adotado será de 1 minuto (Robinson, 2004). Na realidade em processos desta natureza, o que importa são os eventos que ocorrem em instantes bem definidos no tempo, por assim dizer, discretos. Assim, simular apenas os instantes em que ocorrem esses eventos torna-se suficiente para avaliar o comportamento do sistema. Caso seja procedida uma simulação mais detalhada, isto é, com passos menores, não haverá ocorrência de eventos em grande parte dos instantes simulados e o esforço computacional despendidos será, em grande parte, desperdiçado (Robinson, 2004).

Em contrapartida há situações em que o processo evolui continuamente no tempo. Robinson (2004, p. 24) fornece alguns exemplos: o processo de escoamento de fluidos, processos químicos, de refinamento de óleo, entre outros. Nestas situações, continuamente há variação nas quantidades em questão. Conforme Robinson (2004),

sistemas que envolvem um grande volume de itens que se movimentam rapidamente podem ser tratados como contínuos.

Em tais processos, em geral, não é adequado tratar os eventos de maneira discreta, devendo-se adotar uma estratégia de evolução contínua do tempo. Entretanto, dada a natureza dos computadores digitais, não é possível simular o tempo de maneira realmente contínua. Assim, o que efetivamente se realiza é uma aproximação, tomando passos bem pequenos em relação ao período simulado, de tal forma que as variações que ocorrem em cada passo tornam-se bem reduzidas. Segundo Robinson (2004), esta abordagem de simulação é amplamente aplicada na engenharia, na economia e na biologia.

Há ainda situações em que as duas abordagens devem ser consideradas conjuntamente. Por exemplo, a simulação de falhas (evento discreto) num processo químico (evento contínuo). Ver Robinson (2004, p. 13-25) para discussões sobre este tema.

Neste trabalho os eventos serão simulados utilizando a abordagem discreta.

3.2.3 Tamanho da Amostra

Como já ressaltado, dada a característica de aleatoriedade, cada repetição de uma simulação normalmente retorna valores diferentes para as variáveis em estudo. Desta forma, torna-se interessante, e bastante pertinente, determinar *a priori* o tamanho da amostra que deve ser considerada de modo a garantir alguma segurança quanto aos resultados obtidos. Este é um elemento crítico ao se trabalhar com simulação. Determinar empiricamente o tamanho da amostra e tomar os resultados da simulação como sendo válidos pode ser uma estratégia bastante inapropriada. Uma saída alternativa é fazer uso de alguma análise estatística a fim de definir o tamanho mínimo da amostra (HILLIER e LIEBERMAN, 1967; SHAMBLIN e STEVENS, 1974).

Entretanto, conforme Shamblin e Stevens (1975), para realizar tal análise estatística normalmente é preciso que se tenha informações referentes à média e ao desvio padrão da variável estudada, o que, usualmente, não é conhecido. Assim, alguns testes prévios são necessários para que se possa ter uma estimativa da quantidade de amostras necessárias.

Considerando a realização desses testes e o teorema do Limite Central, as várias observações obtidas tenderão a assumir uma distribuição normal. Assim, a estratégia empregada para definir o

tamanho da amostra é, em suma, a de estabelecer um intervalo de confiança no qual pode-se esperar encontrar o valor médio da variável estudada.

Como indicado em Shamblin e Stevens (1975), assumindo que a condição de normalidade é válida, e sendo conhecidos o desvio padrão σ da população, a diferença d entre a média amostral e a verdadeira, e ainda o desvio normal $Z_{\alpha/2}$ correspondente a um nível de confiança $1 - \alpha$ que a média verdadeira estará entre $\alpha/2$ e $1 - \alpha/2$, o tamanho mínimo n da amostra pode ser dado por:

$$n = \frac{\sigma^2 (Z_{\alpha/2})^2}{d^2}. \quad (3.3)$$

Shamblin e Stevens (1975, p. 177-180) apresentam uma discussão detalhada sobre este tema, fornecendo uma relação equivalente à equação (3.3) para o caso do desvio padrão σ não ser previamente conhecido.

Ainda, conforme discutido em Shamblin e Stevens (1975, p. 179), uma estratégia alternativa para contornar a ausência de conhecimento sobre o comportamento da variável é calcular seu valor médio após cada série de repetição da simulação, até que certo limite tolerável para o erro seja atingido. Isto é, se após uma série de repetições a diferença entre o valor médio obtido com as repetições anteriores e o valor médio atual for menor ou igual a um erro máximo aceitável, a simulação é interrompida. Assim, elimina-se o inconveniente de definir *a priori* o tamanho mínimo da amostra. A Figura 3.1 ilustra o processo genérico de evolução desta estratégia.

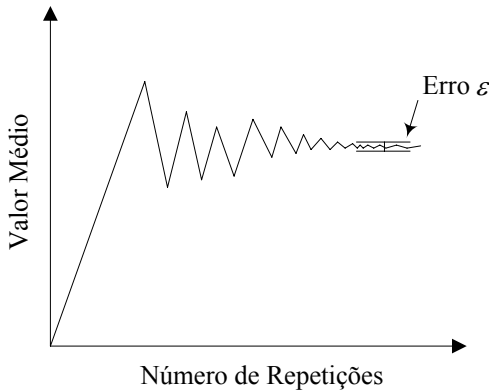


Figura 3.1 - Evolução do valor médio de acordo com o número de repetições

Fonte: Adaptado de Shamblin e Stevens, 1975, p. 180.

Outras discussões acerca do tamanho adequado da amostra podem ser encontradas em Hillier e Lieberman (1967, p. 465-469). Sugere-se consultar tal referência para mais detalhes.

3.2.4 Recomendação

De modo geral, ao se realizar simulações algumas considerações devem ser observadas para que seja possível garantir validade aos resultados obtidos.

A primeira delas diz respeito às condições iniciais e ao período transiente. Em algumas simulações as condições iniciais do sistema não são adequadas, fazendo com que um período de transição seja verificado até que o sistema entre em regime permanente. Em geral, o período transiente não é de interesse prático. Por este motivo, tal período deve ser excluído das análises. Simulações de sistema de estoque e de filas são exemplos deste tipo de situação (SHAMBLIN e STEVENS, 1974).

Entretanto, definir, antes de qualquer simulação, o ponto a partir do qual se atinge o regime permanente pode não ser uma tarefa óbvia. Assim, duas estratégias podem ser aplicadas: realizar simulações prévias para determinar quando o regime é atingido; ou tentar iniciar o sistema a partir da condição mais próxima possível do estado permanente vislumbrado na estratégia anterior (SHAMBLIN e STEVENS, 1974).

A segunda consideração a ser feita refere-se a tentar garantir que as várias observações realizadas possuam alguma independência entre si, visando tornar válidos os testes estatísticos eventualmente aplicados. Conforme Hillier e Lieberman (1967), dois métodos podem ser empregados visando este objetivo. O primeiro sugere realizar uma seqüência de simulações separadas e independentes, tomando-se em cada simulação uma observação para constituir a amostra. Como cada observação é tomada de simulações diferentes, tende-se a garantir a obtenção de uma seqüência independente. O ponto negativo desta prática é que parte do esforço computacional realizado é perdido a cada nova simulação com a exclusão do período transiente.

O segundo método contorna este inconveniente fazendo as simulações ocorrerem de forma consecutiva. Isto é possível fazendo a condição final de uma simulação ser o início da simulação seguinte. Esta prática pode, no entanto, produzir seqüências que não sejam realmente independentes. Mas, se a cada nova simulação é considerado um período suficientemente longo sobre o qual é tomada a observação, então há uma tendência de tornar a correlação entre as observações insignificante o bastante para garantir a validação dos dados obtidos (HILLIER e LIEBERMAN, 1967).

Robinson (2004) apresenta no capítulo 9 de seu texto uma discussão bastante completa acerca de boas práticas que devem ser observadas quando adota-se simulação como estratégia de estudo de algum problema.

3.3 Programação Dinâmica

Programação dinâmica é uma técnica matemática que pode ser empregada na resolução de problemas de otimização linear, não-linear, contínua ou discreta, com funções diferenciáveis ou não-diferenciáveis, em que o problema é decomposto em uma série de etapas seqüenciais de decisão (BRONSON, 1985; GOLDBARG e LUNA, 2000 e ARENALES et al., 2007). Para Hillier e Lieberman (1967) programação dinâmica é uma técnica matemática frequentemente utilizada para definir uma seqüência de decisões inter-relacionadas. Uma particularidade interessante desta técnica é a ausência de uma formulação matemática padrão. Para cada problema é necessário verificar a viabilidade de sua aplicação à formulação específica (Shamblin e Stevens, 1974).

A principal característica da programação dinâmica, conforme Arenales et al. (2007, p. 375), é a “decomposição do problema original em uma seqüência de problemas menores e mais simples de serem resolvidos”. Em vários problemas reais é bastante conveniente admitir que o sistema abstraído pelo modelo de otimização pode ser representado por uma seqüência adequada de etapas e decisões a serem tomadas. Desta forma, a cada uma das etapas é resolvido um desses problemas menores, sendo que o sistema evolui gradativamente de etapa em etapa.

Formalmente, um problema de otimização quando formulado como um problema de programação dinâmica é desdobrado em certo número de estágios. Cada estágio, por sua vez, possui uma quantidade associada de estados possíveis para os quais o sistema pode evoluir. A cada estágio toma-se uma decisão que pode ou não alterar o estado do sistema, mas que, obrigatoriamente, representa uma transição entre o estado corrente e o estado futuro do sistema (GOLDBARG e LUNA, 2000).

É possível, então, segundo Hastings (1973, p. 3-4), definir os seguintes termos relacionados à programação dinâmica:

Estágio: é um passo singular, e corresponde à transição do sistema de um estado para o próximo adjacente;

Estado: é a condição do sistema dentro de cada estágio. Cada estágio possui um número associado de estados. Ao conjunto de estados possíveis dá-se o nome de Espaço de Estados;

Ação: a cada estado existe um conjunto de ações viáveis, das quais uma deverá ser escolhida e executada. Ao decidir sobre a ação a executar, o sistema evoluirá do estado corrente, no estágio presente, para o estado adjacente, no estágio seguinte, incorrendo num retorno associado;

Plano: é um conjunto de ações definidas, no qual para cada estado está especificada uma ação. Um plano ótimo é o melhor conjunto de ações seqüenciais coerentes considerando o objetivo fixado;

Retorno: é algo que o sistema gera. Pode ser representado por distância, lucro, custo, etc.; e

Valor de Estado: é uma função dos retornos gerados quando o sistema evolui de um estado inicial para um estado final através de um plano dado. O valor de um estado sob um plano ótimo é o valor ótimo.

Os problemas de programação dinâmica podem ser estudados sob a forma determinística ou estocástica, considerando-se um horizonte de tempo limitado ou ilimitado. O problema de programação é dito ser determinístico se “o resultado da decisão é unicamente determinado pela decisão” tomada (BELLMAN, 1957, p. 83). Neste caso, é perfeitamente possível prever o estado para o qual o sistema evoluirá. Já nos problemas de programação dinâmica estocástica não se tem certeza quanto ao resultado que retornará da decisão tomada.

A garantia de otimalidade ao se resolver um problema de programação dinâmica está fundamentada no princípio da otimalidade enunciado por Richard Ernest Bellman, considerado, segundo Arenales et al. (2007), o pai da programação dinâmica, tendo publicado uma série de artigos, bem como, o primeiro livro sobre o assunto nos anos 50. Seu princípio diz que: “Uma política ótima possui a propriedade de que, qualquer que seja o estado inicial e a decisão inicial, as decisões subsequêntes devem formar uma política ótima em relação ao estado resultante da primeira decisão” (BELLMAN, 1957, p. 83, tradução nossa).

Em linhas gerais, todo problema de programação dinâmica pode ser resolvido aplicando-se o mesmo algoritmo básico que segue o enunciado de Bellman, onde o valor de cada estado e a correspondente ação ótima devem ser armazenados após cada decisão. Conforme Goldbarg e Luna (2000, p. 232):

Para implementar-se o princípio de Bellman, na prática parte-se do último estágio de um processo com n estágios e se determina a melhor política para se deixar aquele estágio e completar o processo. Desloca-se, então, do fim para o início do processo, estágio após estágio, repetindo-se o raciocínio. Em cada estágio, determina-se a melhor política para deixar o estágio e completar o processo, supondo-se sempre que os estágios anteriores foram completados de forma ótima. Os cálculos são sempre aproveitados de um estágio para o outro. Os elementos correspondentes ao último estágio do processo são, geralmente, obtidos diretamente. Os demais elementos são calculados de forma recursiva. A expressão de

recorrência depende do problema e deve ser obtida para cada tipo de processo multiestágio².

A Figura 3.2 apresenta um fluxograma genérico do algoritmo que implementa o princípio da otimalidade de Bellman.

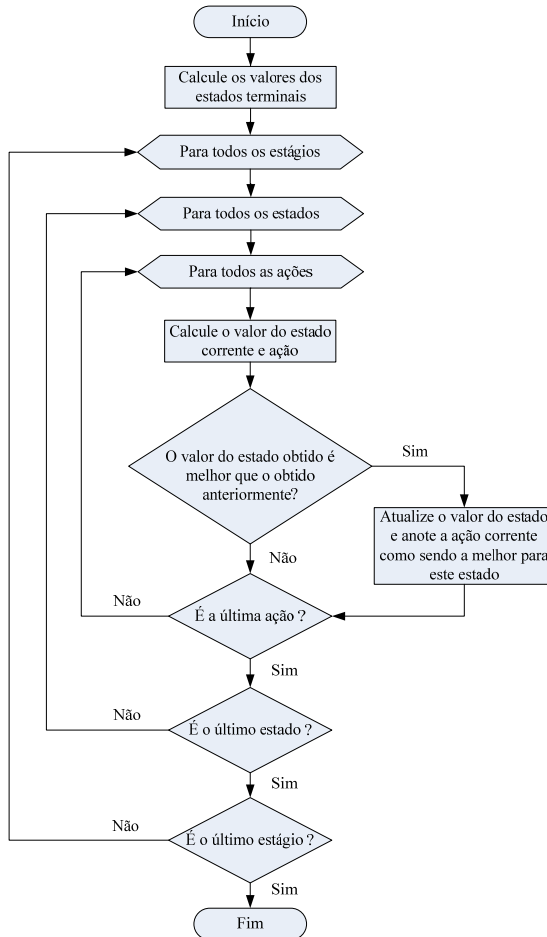


Figura 3.2 - Fluxograma genérico do algoritmo de Programação Dinâmica

Fonte: Adaptado Hastings, 1973, p. 12.

² Goldberg e Luna (2000, p. 230) denominam “um processo de decisão multiestágios aquele que pode ser desdobrado segundo um certo número de etapas sequenciais ou estágios”.

Analisando o algoritmo representado pelo fluxograma da Figura 3.2, fica evidente que o problema de dimensionalidade (denominado, segundo Arenales et al. (2007), por Bellman de maldição da dimensionalidade ou “*curse of dimensionality*”) deve ser observado, principalmente quando da aplicação do método à resolução de problemas de grande porte. Em tais problemas, a quantidade de estágios, estados e ações a serem considerados no sistema pode, facilmente, chegar “a valores intratáveis na prática, mesmo levando em conta a grande capacidade computacional disponível atualmente” (ARENALES et al., 2007, p. 402), o que acaba limitando ou até inviabilizando a aplicação do método.

Segundo Arenales et al. (2007, p. 402), uma alternativa para tratar este problema “é relaxar parte do espaço de estados usando multiplicadores de Lagrange e aplicar procedimentos do tipo otimização do subgradiente”. Uma segunda alternativa é utilizar *Approximate Dynamic Programming* (ADP). Nesta técnica, parte-se do primeiro estágio em direção ao último, tomando decisões acerca da evolução do sistema com base em amostras aleatórias da distribuição de probabilidade que rege o processo em questão. Desta maneira, a técnica não analisa todo o espaço de estados, mas somente os estados mais prováveis para os quais o sistema pode evoluir. Naturalmente, o resultado obtido com a técnica é aproximado, visto que a solução ótima pode incluir um estado nunca amostrado e, portanto, não analisado. Powell (2007) fornece um texto bastante completo a respeito de ADP. Contudo, a programação dinâmica possui vantagens consideráveis em relação a um processo de enumeração explícita das combinações de estágios, estados e ações. Shamblin e Stevens (1974, p. 388-389) também discutem alguns aspectos relacionados às dificuldades de aplicação da programação dinâmica.

Conforme ponderam Arenales et al. (2007), a programação dinâmica tem sido aplicada em problemas originários das mais diversas áreas, dentre as quais podem ser citadas: planejamento da produção, gestão de estoques, problemas de corte e empacotamento, expansão de usinas geradoras de energia elétrica, expansão de terminais portuários, manutenção e reposição de equipamentos, entre muitas outras. Neste trabalho, programação dinâmica é aplicada para determinação de uma política ótima de operação de um sistema de estoque sob condições de risco, bem como para estimar o custo vinculado à operação de tal sistema.

Mais especificamente, é aplicada programação dinâmica estocástica considerando um horizonte de tempo ilimitado, razão pela qual, na seção seguinte será abordado este tema.

Para uma discussão mais detalhada sobre a técnica de programação dinâmica sugere-se consultar o trabalho de Bellman (1957) ou o trabalho de Bellman e Dreyfus (1962) para discussões a respeito de aplicações.

3.3.1 Programação Dinâmica Estocástica

A principal característica da programação dinâmica estocástica é a ausência de certeza absoluta quanto à evolução do sistema quando uma ação é executada. Em outras palavras, não se tem domínio completo sobre para qual estado o sistema evoluirá no estágio seguinte após a ação. Para Bronson (1985, p. 229), “um processo de decisão de multiestágios é estocástico, se o resultado com ao menos uma decisão do processo é aleatório”. Portanto, nesta situação, a evolução do sistema não depende inequivocamente do processo de tomada de decisão.

Assim, conforme Hastings (1973), quando executada uma ação, eventos aleatórios, sob os quais não se tem controle, atuam sobre o sistema, modificando sua trajetória original. Embora não se tenha controle sobre a mudança de trajetória do sistema, normalmente se conhece a distribuição de probabilidade com a qual esses eventos aleatórios atuam sobre o sistema. Portanto, a evolução para o estado resultante é parcialmente regida pela ação de uma variável aleatória com certa distribuição de probabilidade.

O processo de evolução do sistema pode, então, ser entendido como se ocorresse em duas “etapas”, conforme representado na Figura 3.3. Na primeira etapa, o sistema evolui parcialmente e de forma controlada, segundo a decisão tomada. Em seguida, na segunda etapa, eventos aleatórios atuam determinando, definitivamente, para qual estado o sistema evoluirá.

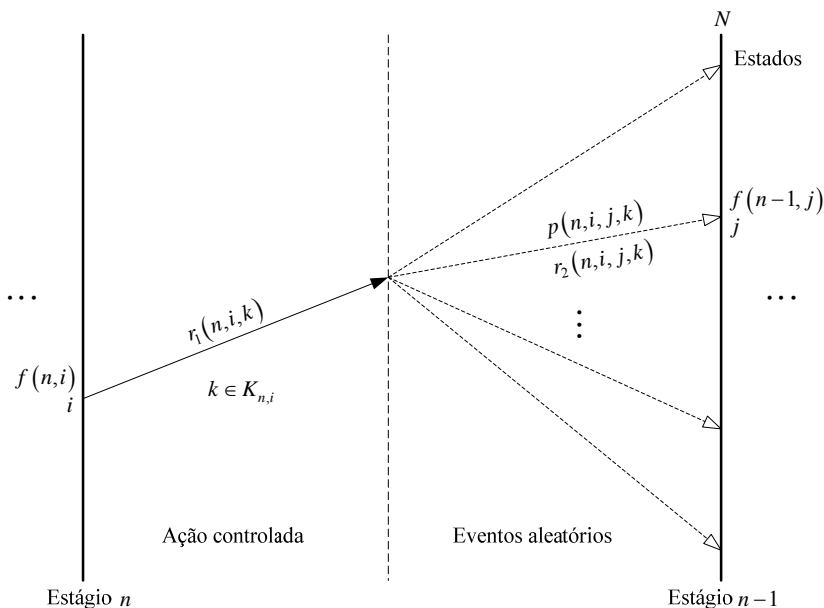


Figura 3.3 - Processo de evolução na Programação Dinâmica Estocástica

Fonte: Adaptado de Mayerle, 2009.

Nesta situação, conforme Arenales et al. (2007, p. 407), o que deve ser otimizado não é o retorno propriamente dito, mas sim “o retorno esperado nos diversos estágios do problema, levando-se em conta a ordem em que as decisões são tomadas”. Desta maneira, admita um problema de programação dinâmica estocástica que possui n estágios, com N estados por estágios, conforme Figura 3.3. Genericamente, denota-se o i -ésimo estado do estágio n pelo par (n, i) . A cada estado (n, i) está disponível um conjunto $K_{n,i}$ de ações viáveis, no qual uma ação k deverá ser escolhida e executada, incorrendo num retorno associado $r_1(n, i, k)$. Ainda conforme Figura 3.3, seja $p(n, i, j, k)$ a probabilidade de ocorrer a transição para o estado $(n-1, j)$, considerando a ação $k \in K_{n,i}$, dado que se está no estado (n, i) . Uma vez executada esta ação e ao atuarem os elementos

aleatórios, outros retornos $r_2(n, i, j, k)$, definidos em função do estado (n, i) , poderão surgir (HASTINGS, 1973).

Embora não seja possível prever qual o valor de $r_2(n, i, j, k)$, já que esta função depende da evolução do sistema, pode-se, dado a distribuição de probabilidade associada aos elementos aleatórios, determinar o valor esperado destes retornos. Conforme Hastings (1973), ao transcorrer o estágio o sistema passará para o estado $(n-1, j)$, no qual a equação (3.4) fornece o valor esperado do estado (n, i) , posto uma ação k específica.

$$f(n, i) = r_1(n, i, k) + \sum_{j=1}^N p(n, i, j, k) [r_2(n, i, j, k) + f(n-1, j)] \quad (3.4)$$

Assumindo que o objetivo seja a maximização dos retornos, a equação anterior passa a ser escrita conforme a equação (3.5), onde a cada estado (n, i) deve-se guardar a ação k que maximiza o valor esperado de $f(n, i)$.

$$f(n, i) = \text{Max}_{k \in K_{n,i}} \left\{ r_1(n, i, k) + \sum_{j=1}^N p(n, i, j, k) [r_2(n, i, j, k) + f(n-1, j)] \right\} \quad (3.5)$$

No caso da programação dinâmica determinística, ao final da resolução do problema é possível recompor a trajetória obtida a partir do plano ótimo. Para o caso estocástico, por outro lado, isto não é possível, posto que sempre haverá a intervenção de um elemento aleatório, impossibilitando definir *a priori* para onde o sistema evoluirá. Assim, o que se obtém após a resolução do problema estocástico é uma política ou estratégia ótima, que define, para cada estado, a melhor ação a ser executada (ver Arduino, 1972, p. 73).

3.3.2 Programação Dinâmica Estocástica com Desconto e Horizonte Ilimitado

Ao tratar um problema de programação dinâmica sobre um horizonte de tempo, a primeira consideração a ser feita, diz respeito a garantir que os valores dos retornos obtidos estejam representados em seu valor presente para que seja possível tratar igualmente valores obtidos em instantes de tempos distintos. Além disso, é indispensável

observar que tais valores sejam finitos. Isto é, para problemas de minimização, a função que expressa o retorno deve estar limitada inferiormente, enquanto que para problemas de maximização deve haver um limitante superior (ARDUINO, 1972; ARENALES et al., 2007).

Segundo Arduino (1972, p. 88), existem duas formas de conseguir uma convergência quando se considera um horizonte de análise ilimitado. A primeira é introduzir uma taxa de desconto, enquanto a segunda vale-se do conceito de valor médio por período. Neste texto, dar-se-á atenção à primeira forma, que se resume a corrigir, por um fator, o valor do estado a fim de refletir seu verdadeiro valor no instante de tempo em questão (ARENALES et al., 2007). Portanto, a equação (3.5) pode ser reescrita conforme (3.6), onde β ($0 < \beta < 1$) é o fator de correção definido por $\beta = 1/(1 + \theta)$, em que θ ($\theta > 0$) é a taxa considerada na unidade de tempo adequada. Ver Hastings (1973, p. 87-91).

$$f(n, i) = \text{Max}_{k \in K_{n,i}} \left\{ r_1(n, i, k) + \beta \sum_{j=1}^N p(n, i, j, k) [r_2(n, i, j, k) + f(n-1, j)] \right\} \quad (3.6)$$

De acordo com Arenales et al. (2007), problemas de programação dinâmica estocástica em que o número de estágio (isto é, o horizonte de planejamento) é muito grande, podendo ser considerado infinito, são chamados de Processos Markovianos de Decisão³. O termo markoviano está associado à idéia de dependência dos dados/decisões somente ao período imediatamente anterior. Na programação dinâmica estocástica esta premissa é válida.

Assim, admitindo um processo estacionário, isto é, um processo homogêneo no tempo, onde o conjunto de estados e o conjunto de ações possíveis são os mesmos em todos os períodos (ou estágios), o que se deseja é encontrar a política ou estratégia ótima para este processo. O Teorema das Políticas Estacionárias garante a existência de tal política ótima, a qual se pode chamar de política estacionária (ver Arduino, 1972, p. 89-90). Políticas estacionárias são aquelas em que, dado um estado i , a mesma ação é tomada independente do período em questão (ARDUINO, 1972; ARENALES et al., 2007).

³ Um processo Markoviano de decisão é um processo estocástico no qual o estado futuro do sistema, conhecendo-se os estados do sistema em todos os passos anteriores, é a mesma que a probabilidade condicional conhecendo-se apenas o estado em um passo imediatamente anterior. Em outras palavras, o estado futuro do processo depende apenas do estado presente e da decisão tomada (CLARKE e DISNEY, 1979).

A obtenção de tais políticas pode ser feita, conforme Arduino (1972), por dois métodos iterativos recursivos baseados no princípio da otimalidade. O primeiro é o método das Aproximações no Espaço dos Critérios, enquanto o segundo é o das Aproximações no Espaço das Políticas. Em suma, o que esses métodos fazem é iniciarem valores para os estados do último estágio e recursivamente calcular o valor dos estados para os estágios seguintes até que ocorra uma convergência. A convergência é obtida quando entre um estado e seu adjacente não existir diferença entre os valores de estado das políticas (ou ações) a serem executadas.

Esse processo iterativo pode ser implementado seguindo o algoritmo apresentado na Figura 3.2, incluindo, no entanto, um laço de repetição mais externo que realize a verificação da igualdade entre os estados de dois estágios adjacentes. Uma política ótima obtida desta maneira permanecerá ótima enquanto a suposição de estacionariedade permanecer válida (ARDUINO, 1972).

3.4 Algoritmo de Teitz & Bart

Como comentado na seção 2.4.1, a resolução do problema de p -medianas não é uma tarefa de baixa complexidade, principalmente para grandes instâncias de problema. Apesar do modelo (2.18)-(2.22) apresentado na seção 2.4.1 poder ser resolvido de maneira exata, por exemplo, pelo método simplex, o tempo computacional para desempenhar tal tarefa pode ser proibitivamente elevado.

Por esta razão, vários métodos alternativos que fazem uso de heurísticas⁴, meta-heurísticas⁵, relaxação lagrangeana⁶, entre outros, têm

⁴ Heurísticas são métodos de resolução de problemas de otimização discreta que não garantem a obtenção de uma solução factível ou ótima. Nicholson, em 1971, propôs uma definição que expressa muito bem as características de uma heurística: é um procedimento para resolver problemas por meio de um enfoque “intuitivo”, em geral racional, no qual a estrutura do problema possa ser interpretada e explorada inteligentemente para se obter uma solução razoável. Dentre os vários tipos de heurísticas, estão as Heurísticas Construtivas (que constrói uma solução, factível ou não, adicionando, em cada passo, um elemento da solução), Heurísticas de Busca Local (que tenta melhorar, com operações chamadas de movimento, uma solução inicialmente construída, por exemplo, com uma heurística de construção) e Meta-Heurísticas (ARENALES et al, 2007, p. 269-270). Para Goldbarge e Luna (2000, p. 244) uma heurística “refere-se a um método de busca de soluções em que não existe qualquer garantia de sucesso”. Os autores definem o termo da seguinte forma: “Uma heurística é uma técnica que busca alcançar uma boa solução utilizando um esforço computacional considerado razoável, sendo capaz de garantir a viabilidade ou a otimalidade da solução encontrada ou, ainda, em

sido desenvolvidos como estratégia de resolução (não necessariamente ótima) do problema de localização de p -medianas (GALVÃO, 2004).

Segundo Galvão (2004) e ReVelle e Eiselt (2005) o primeiro método heurístico para solução do problema de p -medianas foi o algoritmo de Maranzana, em 1964. Em seguida, um dos mais tradicionais e conhecido método baseado na técnica de substituição de vértice foi apresentado, em 1968, por Teitz e Bart. O algoritmo de Teitz & Bart, conforme ReVelle e Eiselt (2005), é uma das primeiras heurísticas conhecidas a realizar 1-opt, fazendo trocas sucessivas entre os elementos num processo de melhoria gradual.

Naturalmente, o método não conduz necessariamente à solução ótima do problema (CRISTOFIDES, 1975), porém, para a maioria dos problemas ele proporciona uma solução satisfatória (isto é, próxima à ótima) em tempo computacional razoavelmente reduzido. Algumas variações ao método originalmente proposto por Teitz e Bart, como, por exemplo, o método modificado de Teitz & Bart, foram desenvolvidas. A utilização de outras heurísticas ou meta-heurísticas à resolução do problema também é reportada na literatura. Entre esta última estão o Algoritmo Genético⁷ (ver, por exemplo, Bozkaya et al., 2002 ou Alp et al., 2003) e o *Simulated Annealing*⁸ (ver, por exemplo, Chiyoshi e Galvão, 2000).

Dado que o espaço da solução para o problema de p -medianas não é necessariamente convexo (REVELLE e EISELT, 2005), o método de Teitz & Bart pode, principalmente para problemas de grande porte,

muitos casos, ambas, especialmente nas ocasiões em que essa busca partir de uma solução viável próxima ao ótimo.”

⁵ Segundo Arenales et al. (2007, p. 271-272), “são técnicas que guiam e modificam heurísticas de forma a produzir soluções além daquelas geradas por heurísticas de busca local. Dentre as meta-heurísticas existentes, destacam-se: algoritmo genético, busca tabu, *simulated annealing*, *scatter search*, colônia de formigas e GRASP (*greedy randomized adaptive search procedure*)”.

⁶ É possível encontrar na literatura brasileira autores que usam a expressão “lagrangeana”, enquanto outros utilizam “lagrangiana”. Ver, por exemplo, Goldberg e Luna (2000) e Arenales et al. (2007).

⁷ Segundo Goldberg e Luna (2000, p. 415) “os Algoritmos Genéticos constituem métodos de busca baseados em mecanismos de seleção e evolução natural. Os primeiros trabalhos nessa linha são originários de John Holland” em 1962 e 1970, “e objetivavam replicar os processos utilizados pelos sistemas auto-adaptativos em um contexto computacional”.

⁸ *Simulated Annealing* é um método baseado em um processo análogo ao de recozimento ou têmpera em metais. Pode ser descrito como o processo no qual primeiro se “eleva” adequadamente a temperatura do sistema que está sendo otimizado. Em seguida, lentamente se “diminui” a temperatura até que o sistema “congele” e não ocorram mais mudanças. Seu objetivo é encontrar uma configuração ou estado para o qual uma certa função de custo assume seu mínimo valor (ROBUSTÉ et al., 1990).

não conduzir a uma solução próxima à ótima ou demandar um tempo bastante excessivo para sua execução. Assim, alguns autores propõem estratégias alternativas para solucionar este tipo de problema. Consultar, por exemplo, Pizzolato (1994) para uma aplicação ao problema de localização de escola. Noutros casos, leves modificações ao método original de Teitz & Bart são propostas, tornando-o útil para várias situações. Consultar De Figueiredo e Mayerle (2008) para um exemplo de modificação do método de Teitz & Bart aplicado ao problema de localização de centros para recebimento de material reciclável.

Em sua versão original o algoritmo de Teitz & Bart parte de uma solução inicial contendo p vértices tomados de forma aleatória. Em seguida, utilizando um processo de melhoria sucessiva, baseado num critério de distância (ponderada) entre os vértices, o algoritmo faz repetidas trocas entre estes até que nenhuma troca que produza ganho possa ser realizada.

Sendo X o conjunto que contém os vértices do grafo G , o algoritmo de Teitz & Bart pode ser descrito conforme segue (CHRISTOFIDES, 1975, p. 116-117):

Passo 1: Selecione um conjunto S contendo p vértices para formar a aproximação inicial para as p -medianas de G . Rotule todos os vértices $x_j \notin S$ de “*untried*”.

Passo 2: Selecione algum vértice “*untried*” $x_j \notin S$ e para todos os vértices $x_i \in S$ calcule a “redução” Δ_{ij} para o caso de x_j ser substituído por x_i , isto é, calcule: $\Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{x_j\} - \{x_i\})$.

Passo 3: Encontre $\Delta'_{ij} = \max_{x_i \in S} [\Delta_{ij}]$. Se $\Delta'_{ij} \leq 0$, então rotule x_i de “*tried*” e vá ao Passo 2. Caso contrário, se $\Delta'_{ij} > 0$, então faça $S \leftarrow S \cup \{x_j\} - \{x_i\}$ e rotule x_j de “*tried*” e vá ao Passo 2.

Passo 4: Repita os Passos 2 e 3 até que todos os vértices do conjunto $X - S$ tiverem sido testados. Isto é chamado de ciclo. Se, durante o último ciclo, nenhuma substituição foi feita no Passo 3, então vá ao Passo 5. Caso contrário, se alguma substituição

tenha sido efetuada, rotule todos os vértices como “*untried*” e retorne ao Passo 2.

Passo 5: Pare. O conjunto S atual é a aproximação requerida para a solução ótima.

3.5 Considerações Finais

Algumas ferramentas bastante úteis dentro da área de pesquisa operacional foram vistas neste capítulo.

A simulação, como expõe Hillier e Lieberman (1967), apesar de caracterizar-se como sendo um método razoavelmente dispendioso para se tratar um problema, possui a vantagem de ser bastante útil e flexível, principalmente em situações onde a intratabilidade do problema inviabiliza a aplicação de métodos exatos. Várias situações de interesse prático podem ser estudadas com o emprego de simulação. No entanto, as conclusões obtidas normalmente não descrevem a relação formal entre as diversas variáveis do problema, mas sim indicam seu comportamento frente às situações consideradas nas simulações.

Programação dinâmica, por outro lado, é uma técnica de programação bastante versátil, podendo ser aplicada em uma vasta classe de problemas reais. Foi mostrado que tal técnica se apóia em um princípio bastante sutil e que garante a otimalidade da solução encontrada. Para alguns problemas, entretanto, a programação dinâmica pode não ser a melhor estratégia de solução. A explosão combinatória de estágios, estados e ações pode inviabilizar a obtenção da solução em tempo computacional hábil. Assim, deve-se ter algum cuidado em sua aplicação.

Por fim, foi abordado o algoritmo de Teitz & Bart. Este algoritmo é uma clássica e importante estratégia para a resolução do problema de localizar p -medianas em um grafo. Apesar da não garantia de otimalidade, alguns estudos na literatura relatam a obtenção de resultados satisfatórios com a aplicação do algoritmo. Ainda, executando o método repetidas vezes é possível amenizar os efeitos da aleatoriedade intrínseca ao método, e obter distintas soluções para o problema, das quais a melhor pode ser tomada como a solução desejada.

Vistas tais ferramentas e uma vez formalizados os conceitos pertinentes no capítulo anterior, o problema de que trata este trabalho pode, agora, ser formalmente descrito juntamente com sua estratégia de solução. O capítulo seguinte presta-se a tais atividades.

4 MODELO PROPOSTO

4.1 Considerações Iniciais

No presente capítulo serão formalmente descritos o problema abordado neste trabalho e a estratégia desenvolvida para resolvê-lo.

O capítulo inicia com a caracterização do problema e a definição de seus objetivos. Será visto que o problema em questão pode ser formulado como um modelo de localização generalizado, no qual os parâmetros não podem ser obtidos de maneira trivial. Por este motivo, procede-se ao desenvolvimento de dois outros modelos que conduzem à obtenção de tais parâmetros.

O primeiro deles, um modelo de programação dinâmica estocástica, permite obter a política ótima de operação do estoque nas localidades (pontos de demanda) a serem atendidas, bem como o custo resultante dessa operação. O segundo, um modelo de lote econômico, define a operação ótima do estoque nos centros de distribuição regional. A partir desse modelo, obtêm-se o custo incorrido com a manutenção do estoque nesses centros.

Ao final, para resolver o modelo de localização inicialmente formulado, propõe-se uma adaptação ao algoritmo de Teitz & Bart, a qual conduzirá à determinação da localização adequada, mas não garantidamente ótima, dos centros de distribuição regional, bem como a alocação dos pontos de demanda à esses centros.

4.2 Caracterização do Problema

Para facilitar a descrição do problema, esta seção é dividida da seguinte maneira: primeiramente, a estrutura do sistema de distribuição é descrita juntamente com as características da região hipotética sob estudo. Em seguida, apresenta-se a forma de operação deste sistema. Por último, define-se o problema de decisão propriamente dito.

4.2.1 Estrutura do Sistema de Distribuição

Considere uma certa região de estudo onde localidades, geograficamente dispersas, devam ser abastecidas a partir de um centro de distribuição. Tais localidades correspondem à sub-regiões inseridas nesta região de estudo. Com a finalidade de reduzir os custos operacionais e oferecer melhor atendimento às localidades, Centros de Distribuição Regionais (CDR's) são empregados para atender à demanda dessas localidades.

Dentro desta região de estudo podem ser identificados três tipos diferentes de *links* conectando elementos lá inseridos. O primeiro deles, *link* Tipo 1, conecta as localidades aos respectivos CDR's. O segundo, *link* Tipo 2, conecta os CDR's ao CD. Por último, o *link* Tipo 3, faz a conexão direta entre o CD e as localidades. A Figura 4.1 representa simplificada a rede do sistema de distribuição que está sendo considerado.

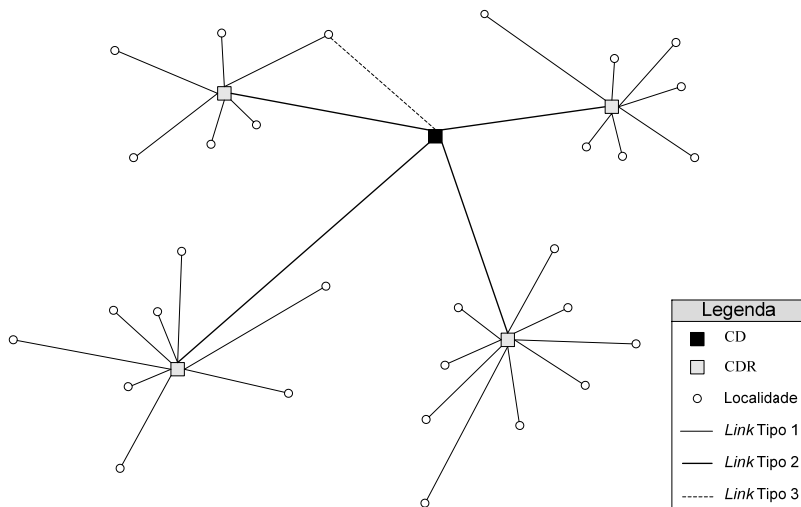


Figura 4.1 - Representação simplificada da rede de distribuição

Fonte: Autor.

Devido a características que são inerentes à região e/ou sub-regiões, esses *links* apresentam comportamentos distintos ao longo do tempo. O *link* Tipo 1 caracteriza-se por ser intermitente, isto é, alterna momentos de disponibilidade e não disponibilidade para ser percorrido.

Tal comportamento é consequência de perturbações causadas por fatores endógenos à região, os quais não podem ser controlados e influenciam significativamente o estado (ou condição) deste tipo de *link*, chegando, inclusive, a interromper o trânsito através dos mesmos. O *link* Tipo 2, por outro lado, não sofre qualquer perturbação, caracterizando-se por ser permanente ao longo do tempo. Já o *link* Tipo 3, apesar de também estar permanentemente disponível, caracteriza-se por ser uma opção alternativa de acesso às localidades quando o *link* Tipo 1 não está disponível.

De fato, o *link* Tipo 3, ao contrário dos demais, não se constitui em uma conexão física propriamente dita, mas sim uma conexão realizada por meio de algum modal de transporte significativamente mais custoso do que o empregado quando o *link* Tipo 1 encontra-se disponível. As fortes restrições de acesso causadas às localidades quando da indisponibilidade do *link* Tipo 1 torna a utilização desse modal a única opção viável para acessá-las.

O comportamento intermitente do *link* Tipo 1 confere à rede ilustrada na Figura 4.1 uma característica dinâmica, na qual a condição de seus *links* varia ao longo do tempo. Os fatores que proporcionam a ocorrência das perturbações e, por consequência, o comportamento intermitente em questão não são propriamente relevantes para este estudo. No entanto, observa-se que elas se repetem ciclicamente, em maior ou menor grau e de maneira distinta em cada sub-região.

4.2.2 Operação do Sistema de Distribuição

Por causa da característica dinâmica encontrada na região sob estudo, as localidades mantêm individualmente um estoque regulador que visa suprir a demanda das respectivas sub-regiões. O abastecimento desse estoque pode dar-se de duas maneiras. A primeira delas ocorre se o *link* Tipo 1 encontra-se disponível. Neste caso, procurando reduzir o custo unitário de transporte, os CDR's utilizam algum meio de transporte de grande capacidade para atender a demanda das localidades a eles associadas. Balsas, navios ou carretas, são exemplos de tais meios.

A segunda maneira diz respeito a abastecimentos quando esse mesmo *link* está indisponível. Neste caso, as restrições de acesso impedem os CDR's de realizarem abastecimentos utilizando um dos meios exemplificados anteriormente. Para realizar tal tarefa é necessário empregar outros meios menos eficientes, os quais, devido ao custo que

representam, somente estão disponíveis no CD. Esta forma de abastecimento é representada pelo *link* Tipo 3 (ver Figura 4.1).

Para os CDR's, os abastecimentos ocorrem exclusivamente a partir do CD. Como os *links* Tipo 2 são permanentes, tais abastecimentos possuem um comportamento regular ao longo do tempo, sendo também realizados por meios mais eficientes de transporte.

4.2.3 O Problema de Decisão

Considere que o provedor do bem demandado deseje estabelecer uma rede de distribuição conforme apresentado na seção 4.2.1, a qual operará segundo a descrição feita na seção anterior. Tal provedor, representado por seu CD, pode ser, por exemplo, uma fábrica, um grande centro distribuidor de algum fabricante ou, ainda, um grande armazém pertencente ao poder público responsável por abastecer as localidades com algum recurso essencial. Este provedor, único na região, deseja satisfazer as demandas de todas as sub-regiões.

Desta forma, o problema de decisão, propriamente dito, consiste da determinação dos locais onde serão instalados os centros de distribuição regionais e as localidades a serem atendidas por cada um desses centros.

Em especial, se o provedor deseja oferecer certo nível de serviço¹ para atendimento à demanda das localidades, torna-se necessário, dado a característica dinâmica da rede, que políticas adequadas de abastecimento sejam definidas para cada CDR e respectivas localidades. Em particular, tais políticas devem assegurar dois aspectos com respeito às localidades:

- 1º. Baixo risco de ocorrência de faltas (ruptura de estoque); e
- 2º. Mínima utilização de links Tipo 3.

Naturalmente, a definição das políticas de abastecimento está intimamente relacionada à solução do problema de localização. Assim, se tanto o problema de localização quanto o de operação do estoque devem ser resolvidos com vistas a proporcionar o menor custo total ao sistema de distribuição, então o que se obtém é um problema conjunto de localização e operação de estoque em uma rede dinâmica.

São admitidos para cômputo do custo total desse sistema os seguintes elementos: custo de transporte nos *links*; custo de

¹ Aqui, nível de serviço se refere à probabilidade de não ocorrer uma ruptura de estoque durante o período entre revisões sucessivas do estoque acrescido do tempo de ressuprimento.

armazenagem nos CDR's e localidades; e, por último, custo de instalação dos CDR's.

Para resolver o problema de decisão considerando a operação ótima dos estoques, nas seções seguintes serão apresentados três modelos, conforme indicado na Figura 4.2. Apesar de dependentes entre si, cada um desses modelos resolverá individualmente uma parte específica do problema de decisão.

Seguindo o esquema mostrado na Figura 4.2, o problema conjunto de localização e operação de estoque será formulado como um modelo de localização generalizado. Para obter os parâmetros necessários à solução deste modelo, isto é, \tilde{V}_{ij} e \tilde{F}_i , outros dois modelos são apresentados. O primeiro deles, um modelo de programação dinâmica estocástica, define a operação do estoque nas localidades. Já o segundo, um modelo de lote econômico de compra, define a operação do estoque nos CDR's. Por fim, os resultados advindos desses dois últimos modelos são aplicados a uma adaptação da heurística de Teitz & Bart, a qual é empregada para resolver o modelo inicialmente formulado e, por conseguinte, também o problema conjunto de localização e operação de estoque de que trata este trabalho.

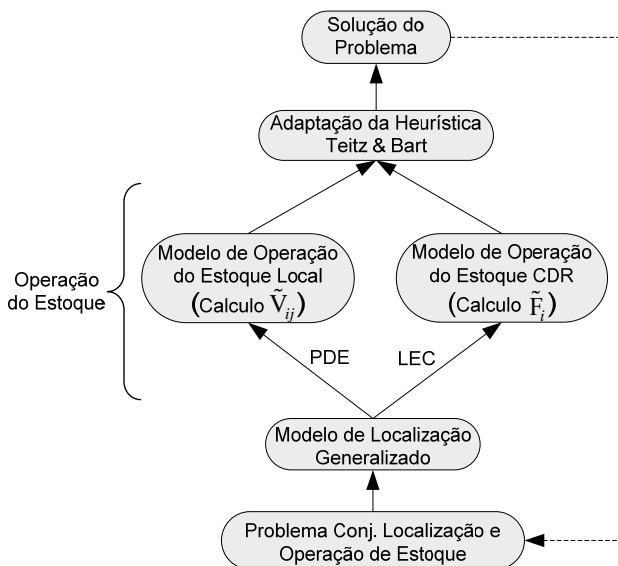


Figura 4.2 - Esquema simplificado para a abordagem do problema

Fonte: Autor.

4.3 Modelo de Localização dos CDR's

O problema de decisão descrito anteriormente trata de um modelo acoplado de localização-alocação e operação de estoque. De fato, aparte do problema que concerne à definição da política mais apropriada para operar localmente (isto é, nas localidades) o estoque, o problema de decisão pode ser visto como um Problema de Localização Generalizado, conforme apresentado na seção 2.4.4.

Desta maneira, admita que a rede de distribuição em estudo possa ser representada pelo grafo não direcionado $G = (\mathbf{X}, \mathbf{A})$. Nesse grafo, o subconjunto $I \subset \mathbf{X}$ contém os vértices onde CDR's podem ser instalados e o subconjunto $J \subset \mathbf{X}$ contém os vértices que indicam localidades. Sem perda de generalidade, admita também que o vértice 1 identifique o CD. O conjunto \mathbf{A} contém as arestas que correspondem aos *links* Tipo 1, 2 e 3. Cada elemento $a = (x_i, x_j) \in \mathbf{A}$ será, simplificarmente, representado por a_{ij} , onde $x_i, x_j \in \mathbf{X}$. A Figura 4.3 representa o grafo equivalente da rede em questão.

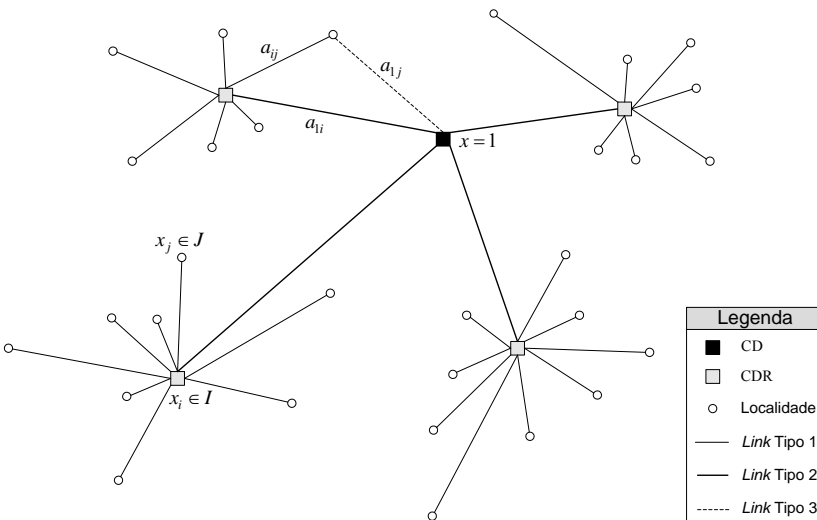


Figura 4.3 - Representação do grafo equivalente da rede de distribuição

Fonte: Autor.

Sendo $|J|=m$, o modelo de localização generalizado que corresponde ao problema de decisão anteriormente definido pode ser formulado como segue:

$$\text{Minimizar } z = \sum_{x_i \in I} \sum_{x_j \in J} \tilde{V}_{ij} \delta_{ij} + \sum_{x_i \in I} \tilde{F}_i \theta_i \quad (4.1)$$

$$\text{s.a. } \sum_{x_i \in I} \delta_{ij} = 1 \quad \forall x_j \in J \quad (4.2)$$

$$\sum_{x_j \in J} \delta_{ij} \leq m\theta_i \quad \forall x_i \in I \quad (4.3)$$

$$\delta_{ij}, \theta_i \in \{0,1\} \quad \forall x_i \in I, \forall x_j \in J \quad (4.4)$$

No modelo (4.1)-(4.4), \tilde{V}_{ij} é uma estimativa para o custo médio esperado de alocar o vértice de demanda $x_j \in J$ ao CDR instalado no vértice $x_i \in I$. Representa-se esta estimativa por seu valor médio uma vez que o custo pode variar de acordo com os abastecimentos e utilização dos *links* Tipo 1 e Tipo 3. O parâmetro \tilde{F}_i fornece a estimativa para o custo médio de abertura e operação do CDR no vértice $x_i \in I$. Da mesma forma, diferentes demandas e utilização do *link* Tipo 2 farão \tilde{F}_i variar ao longo do tempo. A variável de decisão δ_{ij} será igual a 1 (um) se o vértice $x_j \in J$ é alocado ao vértice $x_i \in I$ e 0 (zero) em caso contrário. Já a variável θ_i será igual a 1 se um CDR é para ser aberto em $x_i \in I$ e 0 em caso contrário.

A equação (4.1) minimiza a soma dos custos estimados sobre todo G . A restrição (4.2) garante a alocação de cada vértice de demanda a somente um CDR. A restrição (4.3) garante que os elementos de J somente poderão ser alocados a vértices x_i que possuírem um CDR aberto. Por último, (4.4) indica restrições de integralidade.

Conforme exposto na seção 2.4.4, a solução exata dessa classe de problema não é uma tarefa trivial. No caso particular do modelo (4.1)-(4.4), a obtenção dos parâmetros \tilde{V}_{ij} e \tilde{F}_i constitui dificuldade extra ao problema. Isto porque diferentes configurações para o sistema de distribuição resultarão em diferentes políticas locais de operação do estoque e, conseqüentemente, diferentes custos operacionais para todo esse sistema. Portanto, a solução mais adequada é aquela que otimiza a relação de *trade-off* entre os custos de transporte, de manutenção dos

estoques e de abertura dos CDR's, considerando a característica dinâmica da rede.

Assim, para solucionar o modelo anterior deve-se proceder à construção de estratégias que permitam: calcular \tilde{V}_{ij} e \tilde{F}_i resultantes da operação ótima dos estoques nas localidades e CDR's; e definir os locais mais convenientes para, de acordo com os objetivos formulados, instalar os CDR's. As seções seguintes se dedicam a descrever tais estratégias.

4.4 Modelo de Operação do Estoque Local e Cálculo de \tilde{V}_{ij}

As suposições que fundamentam o modelo tradicional de lote econômico não são válidas a este estudo². Dado a característica dinâmica da rede, torna-se razoável admitir que a operação do estoque nas localidades seja realizada segundo algum modelo que leve o comportamento intermitente do *link* Tipo 1 em consideração, se adequando a períodos de indisponibilidade da alternativa menos custosa de abastecimento.

Para resolver este problema é desenvolvido um modelo de programação dinâmica estocástica que contempla a dinâmica da rede e cuja solução resulta na determinação da política ótima de operação do estoque local e do valor \tilde{V}_{ij} requerido na formulação (4.1)-(4.4). O modelo desenvolvido adéqua o tamanho dos pedidos ao comportamento do *link* Tipo 1, procurando manter disponibilidade de bens na localidade e utilizar minimamente o *link* Tipo 3. A política resultante para a operação do estoque local contempla nível de serviço para atendimento à demanda das localidades e *lead time* na entrega dos pedidos realizados pelas mesmas.

Para tal, são formuladas hipóteses simplificadoras sob as quais o modelo de programação dinâmica será concebido e o modelo de localização resolvido.

4.4.1 Hipóteses Simplificadoras

Admita que as perturbações na região de estudo sejam cíclicas e que o comportamento intermitente dos *links* Tipo 1 possa ser tomado

² Ver discussões da seção 2.3.

como sendo um evento aleatório que pode ser influenciado, com maior ou menor intensidade, pela condição observada no *link* em instantes anteriores. Assim, ao decorrer de cada ciclo, a condição dos *links* Tipo 1 vai se alterando de acordo com as perturbações ocorridas, num processo que pode ser visto como Markoviano³. Por este motivo, não é possível saber ao certo a condição futura desses *links*. No entanto, com base em dados históricos de seu comportamento, é possível conhecer a probabilidade de transição do *link* Tipo 1 para uma condição futura, dada sua condição atualmente observada, obtendo-se, assim, uma matriz de transição entre as condições.

Estas considerações implicam, portanto, em assumir que as perturbações em questão possam não ser totalmente inesperadas, isto é, causadas por eventos repentinos, como é o caso dos ciclones, tornados ou terremotos. Ao invés disso, essas perturbações ocorrem regularmente, podendo estar influenciadas por eventos de longo prazo como, por exemplo, em períodos de estiagem ou chuvas prolongadas. Assume-se que em cada sub-região as perturbações comportam-se de maneira previsível e com periodicidade característica a de eventos sazonais. No entanto, mesmo os eventos repentinos podem ser tratados pelo modelo a seguir, desde que conhecida sua probabilidade de ocorrência.

Sendo as perturbações regulares, ao longo do ciclo podem ser estabelecidos (ou identificados) períodos. Cada período é convenientemente estabelecido para que as seguintes hipóteses simplificadoras adicionais sejam válidas:

- 1º. Durante cada período os *links* Tipo 1 assumem somente duas condições possíveis e bem definidas que caracterizam o seu comportamento intermitente: *Aberto* ou *Fechado*. Na primeira condição o *link* está disponível para ser percorrido, enquanto na segunda ele encontra-se indisponível devido a uma interrupção;
- 2º. Não há mudança de condição durante o período. Isto é, as transições entre condições ocorrem somente ao final (ou início) dos períodos;
- 3º. Em função do ciclo repetitivo é possível obter para cada período e *link* Tipo 1 a matriz de probabilidade de transição entre as condições *Aberto* e *Fechado*; e

³ Ver seção 3.3.2.

- 4°. Em cada localidade e período, a demanda é uma variável aleatória independente regida por uma distribuição de Poisson⁴.

É importante notar também que no modelo que será desenvolvido, o CD possui capacidade ilimitada de abastecimento. A decisão quanto à revisão do estoque nas localidades é tomada somente no início do período, sendo que os pedidos são integralmente recebidos após o tempo de ressurgimento, admitido determinístico. As demandas locais eventualmente não atendidas são consideradas perdidas. Por último, admite-se que a condição dos *links* é observável a qualquer instante.

Deve-se observar também que as matrizes de probabilidade de transição dos *links* são consideradas estatisticamente independentes, isto é, a condição de um *link* não afeta o estado dos demais⁵.

4.4.2 Modelo Conceitual

O modelo que estabelece a política ótima de operação do estoque local será concebido como um Problema de Programação Dinâmica Estocástica (PPDE), onde os estágios, estados e ações são definidos em função da característica dinâmica da rede, conforme segue:

Estágio (n): corresponde a um período identificado dentro do ciclo de repetição;

Estado (u): é o par (e_u, s_u) , onde e_u é o estoque atual do vértice $x_j \in J$ e s_u é uma variável binária que identifica a condição da aresta a_{ij} , sendo igual à 1 se a mesma encontra-se aberta e 0 em caso contrário; e

Ação (k): é a decisão acerca do tamanho do pedido a ser realizado.

Definidos tais elementos, a evolução dos acontecimentos que se relacionam à operação do estoque em um vértice $x_j \in J$ durante cada estágio n ($n = 1, 2, \dots, N$, onde N determina a periodicidade dos ciclos) pode ser representada, simplificada, pelo esquema da Figura 4.4.

⁴ Consultar Page (1972, p. 15) ou Novaes (1975, p. 6-7) para discussões sobre esta distribuição.

⁵ Para casos práticos onde há dependência entre os eventos que determinam as probabilidades de transição, deve-se verificar a validade do modelo que está sendo proposto neste trabalho.

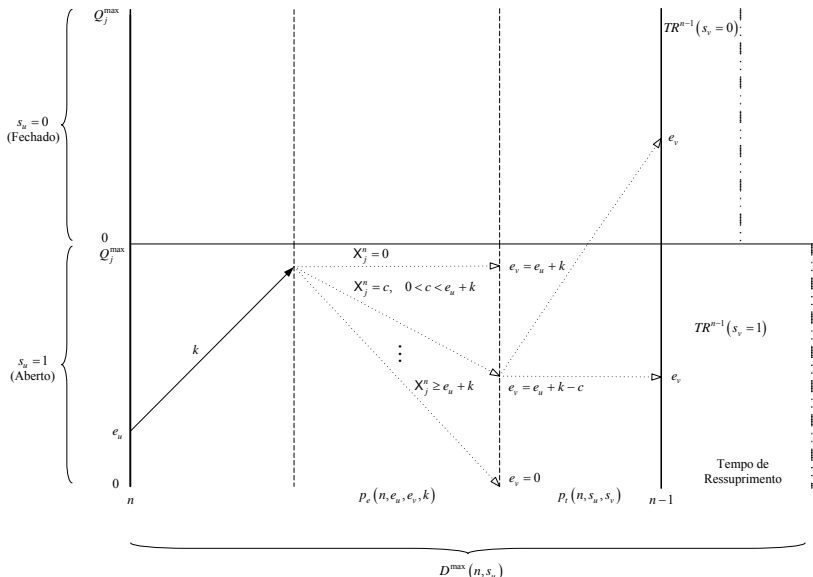


Figura 4.4 - Problema de operação do estoque local modelado com um PPDE

Fonte: Autor.

Na Figura 4.4, são identificadas três “fases” distintas dentro do estágio. A primeira fase corresponde à ação (determinística) k , realizada no início do estágio n . As demais fases correspondem aos eventos não determinísticos associados, respectivamente, à demanda ocorrida durante n e à transição de condição da aresta a_{ij} , a qual definirá a nova condição s_v para o estágio $n - 1$.

Em cada estado (n, u) , a ação k é tomada em função de três fatores, a saber: condição da aresta a_{ij} em estar aberta ou fechada; estoque atualmente observado em $x_j \in J$; e nível de serviço desejado, o qual pode ser individualmente fixado para cada localidade. Em particular, no modelo desenvolvido admite-se que todas as localidades estão sujeitas ao mesmo NS.

A condição s_v do estado $(n - 1, v)$ para o qual o sistema evolui após decorrido o estágio n determinará a origem do abastecimento e , por conseguinte, o tempo de ressuprimento $TR^{n-1}(s_v)$ do pedido realizado no início do estágio $n - 1$. Assim, tem-se $TR^{n-1}(0)$ quando o

pedido é atendido pelo CD e $TR^{n-1}(1)$ quando o atendimento dá-se a partir do CDR. Na Figura 4.4, o tempo de ressurgimento está indicado somente após o início do estágio $n - 1$.

Em cada estágio, o tempo de ressurgimento é representado como uma fração do comprimento do respectivo período. Como exemplo, considere que o período representado por um estágio n qualquer estende-se por 90 dias. Se $TR^n(1) = 0,1$ e $TR^n(0) = 0,015$, então o tempo de ressurgimento será de 9 dias para pedidos realizados ao CDR e de 1,35 dias quando solicitado ao CD. Esta formulação para o tempo de ressurgimento é flexível o bastante para permitir representar, a cada período, diferentes tempos para o ressurgimento a partir do CD e do CDR de acordo com as perturbações ocorridas nas sub-regiões e meios de transporte empregados.

4.4.3 Formulação do Modelo Matemático

Definido o que é estágio, estado e ação, procede-se agora a concepção do modelo de programação dinâmica estocástica, propriamente dito.

4.4.3.1 Probabilidades de Transição

Conforme representado na Figura 4.4, dois eventos aleatórios regem a evolução da operação do estoque no vértice de demanda $x_j \in J$ que está alocado ao CDR instalado em $x_i \in I$.

O primeiro evento diz respeito à demanda ocorrida durante o estágio. Em cada estágio, a demanda segue uma distribuição de Poisson, onde o parâmetro λ_j^n corresponde à demanda média do vértice $x_j \in J$ durante n . Tal demanda pode estar representada em alguma unidade padrão como, por exemplo, toneladas, metros cúbicos, caixas, entre outras. Embora pouco comum na literatura, Ghezavati et al. (2009) também adota a distribuição de Poisson para modelar a demanda em seu modelo de localização. Entretanto, outras distribuições, como a Normal, por exemplo, poderiam ser aplicadas a esse estudo.

Desta forma, seja X_j^n , onde $X_j^n = 0, 1, 2, \dots$, a variável aleatória que representa a demanda em x_j durante n . Pode-se, então, escrever a probabilidade da demanda ser igual à r no vértice $x_j \in J$ durante o estágio n como sendo dada por (4.5).

$$p_r^n = \Pr[X_j^n = r] = \frac{e^{-\lambda_j^n} (\lambda_j^n)^r}{r!} \quad (4.5)$$

Naturalmente, para qualquer estágio n que se considere as relações (4.6)-(4.8) serão válidas.

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_r^n = 1 \quad (4.6)$$

$$0 \leq \Pr[X_j^n] \leq 1 \quad (4.7)$$

$$\Pr[X_j^n \leq r] = \sum_{k=0}^r p_k^n \quad (4.8)$$

Como a demanda não é determinística, a cada estágio o sistema passará, segundo uma dada probabilidade, do estoque inicial e_u , no estágio n , para o estoque final e_v , no estágio subsequente. Definindo-se $p_e(n, e_u, e_v, k)$ como a probabilidade de, no estágio n , o estoque passar de e_u a e_v , posto que a ação k foi executada, pode-se escrever tal probabilidade como:

$$p_e(n, e_u, e_v, k) = \begin{cases} \Pr[X_j^n = e_u + k - e_v], & \text{se } 0 < e_v \leq e_u + k \\ \Pr[X_j^n \geq e_u + k], & \text{se } e_v = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

onde $\Pr[X_j^n \geq e_u + k] = 1 - \sum_{r=0}^{e_u+k-1} p_r^n$. Note que qualquer demanda superior à $e_u + k$ (estoque atual + quantidade solicitada) durante o estágio n fará o estoque atingir o nível zero (ver Figura 4.4). Como postergar a demanda não é permitido, estados com $e_v < 0$ deixam de ser importantes na elaboração da estratégia de busca da política ótima de pedidos.

O segundo evento aleatório que age sobre o sistema é a transição da condição s_u para s_v na aresta a_{ij} . A probabilidade deste evento é

dada pela matriz de probabilidade de transição que caracteriza o comportamento do *link* Tipo 1 no período em questão. Representa-se tal probabilidade por $p_t(n, s_u, s_v)$, a qual é definida como a probabilidade de, ao final do estágio n , a aresta passar da condição s_u , no estado (n, u) , para a condição s_v , no estado $(n-1, v)$.

Somente após decorridos os dois eventos aleatórios anteriormente discutidos é que estará totalmente definido o par (e_v, s_v) que caracteriza o estado $(n-1, v)$ do estágio subsequente na evolução do sistema, conforme indicado na Figura 4.4.

4.4.3.2 Função de Retorno

A função de retorno que define o custo de uma decisão é composta por duas parcelas. A primeira parcela refere-se ao custo de abastecer o vértice de demanda $x_j \in J$, enquanto a segunda considera o custo incorrido com a manutenção do estoque nesse mesmo vértice durante o estágio. Na Figura 4.5 estão indicados os custos existentes para abastecer os vértices de demanda.

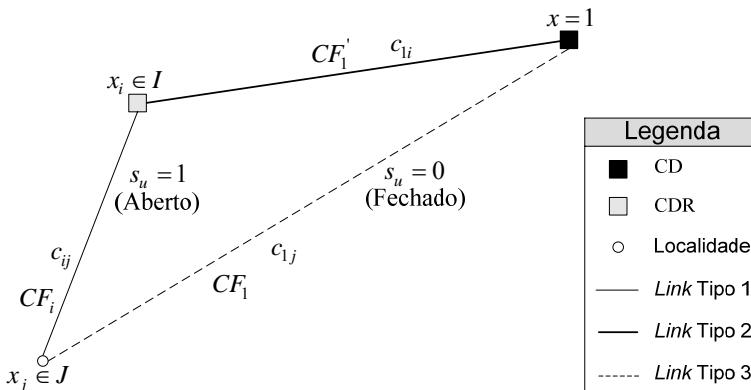


Figura 4.5 - Custos vinculados ao ressuprimento

Fonte: Autor.

Conforme Figura 4.5, associados à aresta a_{ij} estão os custos: CF_i - custo fixo de fazer um pedido ao CDR instalado no vértice $x_i \in I$; e c_{ij} - custo unitário de transporte entre $x_i \in I$ e $x_j \in J$. Associados à aresta a_{1j} estão os custos: CF_1 - custo fixo de pedido ao CD; e c_{1j} - custo unitário de transporte entre o CD e o vértice de demanda x_j . Por último, associa-se à aresta a_{1i} os seguintes custos: CF_1' - custo fixo de pedido CDR-CD; e c_{1i} - custo unitário de transporte entre o CD e o CDR instalado em x_i .

Em cada estado, ao se executar uma ação k , incorrer-se num custo de reposição CR . Tal custo é uma função do próprio tamanho do pedido e da condição s_u verificada na aresta a_{ij} no instante em que o pedido é realizado, podendo ser escrito conforme (4.10).

$$CR(k, s_u) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0 \\ CF_1 + kc_{1j}, & \forall k > 0 \text{ e } s_u = 0 \\ CF_i + k(c_{ij} + c_{1i}), & \forall k > 0 \text{ e } s_u = 1 \end{cases} \quad (4.10)$$

Nota-se que em (4.10) os custos de transporte nas arestas a_{ij} e a_{1i} estão sendo computados conjuntamente quando o pedido é atendido a partir do CDR.

A segunda parcela da função de retorno é dada pelo custo CM , que representa o custo incorrido em $x_j \in J$ com a manutenção do estoque durante o estágio n . Tal custo pode ser aproximado pela relação (4.11). Nesta relação, e_u é o estoque no estado inicial (n, u) e e_v é o estoque resultante da evolução do sistema, dado que a ação k foi executada e verificou-se a demanda X_j^n durante o estágio n .

$$CM(e_u, e_v) = \frac{h_j}{2}(e_u + e_v) \quad (4.11)$$

Em (4.11), $e_v = e_u + k - X_j^n$ e h_j é o custo unitário de manutenção do estoque por período em x_j .

4.4.3.3 Função de Recorrência

Seguindo a representação feita na Figura 4.4, a cada estado (n, u) é necessário determinar a melhor ação k para o par (e_u, s_u) de forma que o custo ao longo dos N estágios seja minimizado. Como os estágios representam instantes de tempo distintos é introduzida uma taxa de desconto β ($0 < \beta \leq 1$) que conduz o valor dos estados já analisados ao seu valor presente. Define-se β como (4.12), onde φ é a taxa de mínima atratividade por período.

$$\beta = \frac{1}{1 + \varphi} \quad (4.12)$$

Portanto, a equação recursiva que avalia o valor de cada estado pode ser escrita de forma análoga à equação (3.6). Ou seja, dado um par $x_i \in I$ e $x_j \in J$ tem-se o seguinte modelo:

$$f_{ij}(n, e_u, s_u) = \underset{k \in K(n, e_u, s_u)}{\text{Min}} \left\{ CR(k, s_u) + \beta \sum_{e_v=0}^{e_u+k} p_e(n, e_u, e_v, k) \cdot \left(CM(e_u, e_v) + \sum_{s_v=0}^1 p_t(n, s_u, s_v) f_{ij}(n-1, e_v, s_v) \right) \right\} \quad (4.13)$$

Na equação (4.13), nota-se que o custo $CM(e_u, e_v)$ é considerado estar sendo realizado no final do estágio n , enquanto que $CR(k, s_u)$ é tido como realizado no início desse mesmo estágio. Esta suposição é razoável à medida que o transporte pode estar sendo realizado por um agente terceirizado que cobra no momento da contratação, enquanto a manutenção do estoque fica sob encargo do CDR, que somente considera o custo ao final do período.

Em (4.13), $K(n, e_u, s_u)$ é o conjunto das ações viáveis no estado (n, u) . Desse conjunto, a ação k que minimiza os custos de reposição, de armazenagem e garante o NS desejado no vértice $x_j \in J$, deve ser executada. O item a seguir descreve como definir o conjunto $K(n, e_u, s_u)$ e escolher a ação ótima.

4.4.3.4 Conjunto de Ações Viáveis

Com vistas à redução do risco de ruptura de estoque nas localidades a serem abastecidas é estabelecido um nível de serviço (α) para atendimento da demanda dessas localidades. Deste modo, $1 - \alpha$ representa a taxa de falha deste atendimento. Tal NS pode ser estabelecido em cumprimento a alguma obrigação legal ou apenas como uma meta operacional a ser atingida.

O nível de serviço é, aqui, definido como a probabilidade de atender a demanda durante o estágio e seu subsequente tempo de ressuprimento, conforme indicado na Figura 4.4. Usualmente, NS remete à manutenção de estoque de segurança, o qual pode ser quantificado aplicando-se as equações (2.9) e (2.10) ou (2.9) e (2.11), apresentadas na seção 2.2.3. No entanto, os pressupostos para utilização dessas equações não são verificados neste trabalho. Para a situação aqui estudada, a obtenção de uma relação algébrica que permita quantificar o ES, para cada período, é uma tarefa de razoável complexidade matemática que vai além dos objetivos pretendidos neste trabalho.

Uma forma de contornar esta dificuldade é fazer uso de simulação. Assim, seja $D^{\max}(n, s_u)$ o limite superior para a demanda que deverá ocorrer, com probabilidade não inferior a α , no período de tempo que compreende o estágio n e seu subsequente $TR^{n-1}(s_u)$. Para que uma ação k seja considerada pertencente ao conjunto de ações viáveis ela deverá conduzir o saldo em estoque ($e_u + k$) a um patamar que garanta atendimento à, pelo menos, $D^{\max}(n, s_u)$ unidades de demanda.

Desta maneira, ações que conduzem o saldo em estoque a valores menores que $D^{\max}(n, s_u)$ deixam de ser viáveis, uma vez que não garantirão o nível α desejado. Logo, tais ações não precisam ser analisadas na estratégia de solução. Esta observação reduz o “campo de busca” da ação ótima, e também o número de operações computacionais a serem realizadas por estado. Como exemplo, considere $e_u = 1$ e que $D^{\max}(3, 0) = 10$. Para este estágio e condição, a menor, ou mínima ação viável é fazer $k = 9$, posto que a capacidade de armazenagem no vértice de demanda considerado seja, pelo menos, igual a 10 unidades.

Pode-se, então, escrever o conjunto $K(n, e_u, s_u)$ como sendo formado pelas seguintes ações:

$$K(n, e_u, s_u) = \left\{ k \mid k_{\min} \leq k \leq Q_j^{\max} - e_u \right\} \quad (4.14)$$

onde Q_j^{\max} designa a capacidade máxima de armazenagem por estágio no vértice $x_j \in J$ e k_{\min} é a ação viável mínima, dada por (4.15).

$$k_{\min} = \max(0, D^{\max}(n, s_u) - e_u), \text{ com } Q_j^{\max} \geq D^{\max}(n, s_u) \quad \forall s_u \quad (4.15)$$

Utilizando (4.14) e (4.15) apenas as ações que conduzem a estados que possuem estoque maior ou igual à demanda máxima são considerados viáveis para calcular a ação ótima que minimiza (4.13).

Voltando ao exemplo anterior, considere que $Q_j^{\max} = 12$.

Portanto, $k_{\min} = \max(0, 10 - 1) = 9$ e o conjunto $K(3, 1, 0) = \{k \mid 9 \leq k \leq 12 - 1\} = \{k \mid 9 \leq k \leq 11\}$. Assim, qualquer ação $k \in K(n, e_u, s_u)$ deverá satisfazer a demanda com segurança α . De fato, o que esta formulação está fazendo é, implicitamente, determinar o estoque a ser mantido considerando a demanda em n e a demanda durante $TR^{n-1}(s_u)$, sem, para isto, separar o estoque corrente do estoque de segurança, o que se torna bastante conveniente para a situação sob estudo.

No entanto, como $D^{\max}(n, s_u)$ depende de $TR^{n-1}(s_u)$, devem ser considerados dois casos separadamente: $D^{\max}(n, s_u = 1)$ e $D^{\max}(n, s_u = 0)$. Em cada um desses casos o processo de ocorrência de demanda pode ser visto como se acontecesse da seguinte maneira: primeiro, há a demanda do estágio n ; em seguida, a aresta passa à nova condição s_v ; por último, definida a condição s_v , ocorre a demanda no $TR^{n-1}(s_v)$. A demanda equivalente, isto é, a soma das demandas ocorridas durante n e durante $TR^{n-1}(s_v)$, deverá ser atendida pelo saldo em estoque $(e_u + k)$, que foi definido no início do estágio n .

Seguindo este processo, considere a condição inicial s_u , o vetor \hat{D} de simulações e a precisão ε desejada. O algoritmo a seguir sintetiza a estratégia de simulação adotada:

Passo 1: Faça $k \leftarrow 0$ e $Med_k \leftarrow +\infty$;

- Passo 2:** Faça $k \leftarrow k + 1$ e simule uma série contendo M repetições da demanda em n e em $TR^{n-1}(s_v)$, conforme o algoritmo de geração das demandas;
- Passo 3:** Calcule a média (Med_k) da série k e faça Med_{k-1} receber a média das demandas considerando todas as repetições anteriores;
- Passo 4:** Se $|Med_{k-1} - Med_k| \leq \varepsilon$, então vá ao Passo 5. Caso contrário, retorne ao Passo 2.
- Passo 5:** Ordene de forma crescente o vetor \widehat{D} que contém todas as simulações realizadas e tome o elemento na posição $\alpha(k \cdot M)$ como sendo a aproximação requerida para $D^{\max}(n, s_u)$.

Por sua vez, cada simulação da demanda equivalente pode ser resumida pelo seguinte algoritmo de geração das demandas:

- Passo 1:** Gere a demanda durante o estágio n utilizando, por exemplo, o algoritmo de Knuth descrito na seção 3.2.1.2, onde $\mu = \lambda_j^n$;
- Passo 2:** Faça rnd receber um número pseudo-aleatório com distribuição uniforme obtido, por exemplo, a partir do método descrito na seção 3.2.1.1.
- Passo 3:** Se $rnd \geq p_t(n, s_u, 1)$, então gere a demanda durante $TR^{n-1}(1)$. Caso contrário, gere a demanda durante $TR^{n-1}(0)$.
- Passo 4:** Armazene em \widehat{D} a soma das demandas geradas no Passo 1 e no Passo 3 como sendo a demanda equivalente desta repetição.

Como a demanda em $TR^{n-1}(s_v)$ também segue uma distribuição de Poisson, pode-se escrever $TR^{n-1}(s_v) \cdot \lambda_j^{n-1}$ com sendo o parâmetro que caracteriza a distribuição da demanda durante o tempo de

ressuprimento⁶ e, assim, também utilizar o algoritmo de Knuth com $\mu = TR^{n-1}(s_v) \cdot \lambda_j^{n-1}$.

O Quadro 4.1 apresenta um exemplo simplificado de aplicação da estratégia de simulação descrita anteriormente, onde as 100.000 simulações realizadas já se encontram ordenadas. Supondo que o nível de serviço desejado é de 98,5% ($\alpha = 0.985$) e que as simulações se referem à situação ($n=3, s_u=0$), toma-se o elemento na posição 98.500 como sendo a aproximação requerida para a demanda máxima, isto é, $D^{\max}(3,0)=11$.

Simulação	Demanda em n	rnd	$TR^{n-1}(s_v)$	Demanda em $TR^{n-1}(s_v)$	Demanda Equivalente
1	3	0,2356	0,3	0	3
2	3	0,3452	0,3	1	4
3	4	0,7452	0,08	1	5
...
98.500	8	0,4154	0,08	3	11
...
99.999	9	0,6526	0,08	5	14
100.000	8	0,3567	0,3	7	15

Quadro 4.1 - Exemplo de simulação da demanda equivalente

Fonte: Autor.

Nota-se que o cômputo de $D^{\max}(n, s_u)$ precisa ser realizado somente duas vezes a cada estágio, isto é, uma para a condição $D^{\max}(n, s_u=1)$ e outra para $D^{\max}(n, s_u=0)$.

⁶ Ver Clarke e Disney, 1979, p. 172-173.

4.4.3.5 Formulação Completa

Para um vértice de demanda $x_j \in J$ que é atendido por um CDR instalado no vértice $x_i \in I$, a resolução do seguinte modelo de programação dinâmica estocástica fornece a política ótima de operação do estoque no vértice de demanda, bem como, os valores de estado $f_{ij}(n, e_u, s_u)$ fornecem o custo desta operação.

$$f_{ij}(n, e_u, s_u) = \underset{k \in K(n, e_u, s_u)}{\text{Min}} \left\{ CR(k, s_u) + \beta \sum_{e_v=0}^{e_u+k} p_e(n, e_u, e_v, k) \cdot \left(CM(e_u, e_v) + \sum_{s_v=0}^1 p_t(n, s_u, s_v) f_{ij}(n-1, e_v, s_v) \right) \right\} \quad (4.16)$$

onde:

$$K(n, e_u, s_u) = \left\{ k \mid k_{\min} \leq k \leq Q_j^{\max} - e_u \right\}, \quad (4.17)$$

$$k_{\min} = \max(0, D^{\max}(n, s_u) - e_u)$$

$$CR(k, s_u) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0 \\ CF_1 + kc_{1j}, & \forall k > 0 \text{ e } s_u = 0 \\ CF_i + k(c_{ij} + c_{li}), & \forall k > 0 \text{ e } s_u = 1 \end{cases} \quad (4.18)$$

$$CM(e_u, e_v) = \frac{h_j}{2}(e_u + e_v) \quad (4.19)$$

$$p_e(n, e_u, e_v, k) = \begin{cases} \Pr[X_j^n = e_u + k - e_v], & \text{se } 0 < e_v \leq e_u + k \\ \Pr[X_j^n \geq e_u + k], & \text{se } e_v = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

$$p_t(n, s_u, s_v) \text{ é dado pela matriz de transição.} \quad (4.21)$$

A equação (4.16) minimiza o valor do estado sobre o conjunto de ações viáveis, considerando custo de reposição, custo de armazenagem, a demanda como sendo estocástica e a probabilidade de transição da aresta a_{ij} . A equação (4.17) fornece o conjunto de ações viáveis do estado (n, u) em função de $D^{\max}(n, s_u)$. A equação (4.18) define o custo de reposição em função do tamanho do pedido e da condição da

aresta a_{ij} . A equação (4.19) fornece o custo de manutenção do estoque no vértice de demanda. As equações (4.20) e (4.21) fornecem as probabilidades de transição.

4.4.4 Técnica de Solução

De fato, o modelo (4.16)-(4.21) constitui um modelo de programação dinâmica estocástica com desconto. Esse modelo foi concebido segundo a operação de um sistema de distribuição ainda a ser implantado. Desta forma, por causa do grande montante de capital normalmente investido na implantação de uma rede de distribuição pode-se assumir que a operação desta rede se estenderá por um prazo bastante longo, por assim dizer, ilimitado.

Aceita tal suposição, a solução do modelo (4.16)-(4.21) pode ser alcançada seguindo uma das estratégias discutidas na seção 3.3.2. Em particular, dado o comportamento cíclico identificado na região, a solução se resume a obter uma política estacionária para os estados (n, u) .

Para tanto, inicialmente os estados referentes ao último estágio têm seu valor de estado arbitrado nulo. Em seguida, aplicando de forma recorrente o algoritmo representado na Figura 3.2, calcula-se recursivamente os valores de estado dos N estágios, até que, entre duas repetições sucessivas não seja verificada diferença entre os valores de estado do último e do primeiro estágio. Esta condição caracteriza a obtenção da política estacionária desejada.

Uma vez solucionado o modelo (4.16)-(4.21), duas informações são obtidas. A primeira é a política, propriamente dita, de operação do estoque local, a qual é definida pela ação (k) ótima na condição de estacionariedade. A segunda informação diz respeito ao valor $f_{ij}(n, e_u, s_u)$ dos estados. Esse valor representa o Valor Presente para o custo de alocar $x_j \in J$ ao CDR instalado em $x_i \in I$ a partir do estado (n, u) com nível de estoque e_u e condição s_u .

4.4.5 Determinação da Estimativa \tilde{V}_{ij}

A implantação de um sistema de distribuição é, de fato, um projeto de longo prazo, onde a data para início da operação pode ser definida ainda durante a fase de projeto. Para o caso particular da rede em estudo, esse instante de início pode ser convenientemente escolhido de forma a coincidir com um dos estágios do PPDE anteriormente formulado. Por outro lado, a característica dinâmica da rede impede o prévio conhecimento do estado no qual o sistema se encontrará naquele estágio, já que a condição s_u das arestas a_{ij} não é conhecida antes do instante de início propriamente dito. Entretanto, é possível determinar a probabilidade dessas arestas estarem em uma dada condição durante o estágio de início. Assim, como o nível e_u para o estoque inicial é previamente definido, pode-se conhecer a probabilidade do estado inicial e, desta forma, também conhecer o custo esperado desse estado.

Para cada aresta a_{ij} a probabilidade da condição s_u ser observada em um estágio n qualquer é dada pela matriz de probabilidade de estado, a qual pode ser obtida a partir da matriz de probabilidade de transição entre as condições de Aberto e Fechado.

Assim, seja \mathbf{T}_{ij} a matriz que contém as probabilidades de transição entre as condições de Aberto e Fechado da aresta a_{ij} em todos os períodos. Logo, \mathbf{T}_{ij} possui dimensão $2N \times 2N$. A matriz \mathbf{P}_{ij} de probabilidade de estado é obtida multiplicando-se sucessivamente a matriz \mathbf{T}_{ij} por ela mesma até que seja alcançada a estacionariedade, conforme (4.22)⁷.

$$\mathbf{P}_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{T}_{ij}^m \quad (4.22)$$

Uma vez definidos o estágio n e o nível e_u de início, a estimativa \tilde{V}_{ij} para o custo esperado de alocar o vértice de demanda $x_j \in J$ ao CDR instalado em $x_i \in I$ pode ser escrita conforme segue:

$$\tilde{V}_{ij} = \sum_{s_u} p_{s_u}^n f_{ij}(n, e_u, s_u) \quad (4.23)$$

⁷ Ver discussões em Clarke e Disney, 1979, cap. 8.

onde $p_{s_u}^n$ é a probabilidade de estado da condição s_u no estágio n , dada pela matriz \mathbf{P}_{ij} .

A diferença entre os custos $f_{ij}(n, e_u, 0)$ e $f_{ij}(n, e_u, 1)$ será tanto maior quanto for a diferença entre os custos associados às arestas, conforme indicado na Figura 4.5. Portanto, a formulação (4.23) define o custo esperado da alocação em função da probabilidade do estado inicial. Implicitamente, essa formulação admite que haverá estoque nos CDR's no instante inicial.

4.5 Modelo de Operação do Estoque no CDR e Cálculo de \tilde{F}_i

O modelo (4.16)-(4.21) não estabelece a política de operação para o estoque dos CDR's, nem considera o custo de manutenção desse mesmo estoque. Por esse motivo, esta seção se presta a definir a estratégia de operação dos CDR's, a partir da qual se obterá o parâmetro \tilde{F}_i do modelo (4.1)-(4.4).

4.5.1 Desenvolvimento do Modelo

Conforme descrito na seção 4.2.1, os *links* que unem os CDR's ao CD estão permanentemente disponíveis, viabilizando o abastecimento dos CDR's a qualquer instante que seja necessário. Além disso, ao considerar que os custos CF_1' e c_{ij} (ver Figura 4.5) são constantes, torna-se razoável admitir que a operação do estoque no CDR seja realizada segundo um modelo tradicional de lote econômico. Algumas outras observações corroboram para tal suposição: o *lead time* para atender o CDR é assumido nulo; o horizonte de operação é considerado infinito; as demandas nos vértices $x_j \in J$ são independentes; e, cada CDR atende um conjunto de localidades que possuem demandas aleatórias. Assim, do ponto de vista do CDR, a demanda observada tende a ser aproximadamente uniforme em cada período do ciclo, o que reforça a adoção da política de lote econômico de compra.

Na literatura recente, vários trabalhos que tratam do problema de localização acoplado ao de operação dos estoques assumem que os pedidos são realizados segundo um modelo de lote econômico.

Freqüentemente consideram o modelo (Q, r) e uma demanda normalmente distribuída. Cita-se como exemplo os trabalhos de Shen et al. (2003), Daskin et al. (2002), Snyder et al. (2007) e Ghezavati et al. (2009). Deste modo, aqui também será empregado o modelo de revisão contínua baseado em lote econômico, conforme apresentado na seção 2.2.1.

No desenvolvimento a seguir, a notação $x_j \rightarrow x_i$ é utilizada para designar que o vértice de demanda $x_j \in J$ está alocado ao vértice $x_i \in I$. Para um CDR instalado em x_i , a demanda média que está alocada, por ciclo, a este vértice pode ser aproximada por (4.24).

$$\bar{\lambda}_i = \sum_{x_j \rightarrow x_i} \sum_n \lambda_j^n \quad (4.24)$$

Apesar das parcelas λ_j^n se referirem a uma distribuição de Poisson, a soma das mesmas tende a uma distribuição normal à medida que o número de vértices alocados ao CDR aumenta. Assim, (4.24) pode ser tomada como uma aproximação para a demanda que um CDR observará em cada um dos ciclos.

Sendo h_i o custo de manutenção, por ciclo e por unidade em estoque no CDR aberto em $x_i \in I$, a equação (4.25) fornece a quantidade ótima (Q_i) a ser solicitada por aquele CDR.

$$Q_i = \sqrt{\frac{2CF_1' \bar{\lambda}_i}{h_i}} \quad (4.25)$$

Nota-se que a quantidade Q_i independe do estágio n em questão, o que possibilita ao CDR fazer solicitações de acordo com o modelo de estoque adotado. Assim, de fato, para o CDR a operação do estoque se dá de maneira independente aos períodos e localidades a ele associadas.

Naturalmente, (4.25) fornece um valor aproximado posto que não se esta levando em conta a demanda que é atendida diretamente a partir do CD quando da ocorrência de interrupções. Mesmo assim, essa formulação continua válida à medida que abastecimentos a partir do CD tendem a ser menos freqüentes, visto seu custo mais elevado quando comparado ao do CDR.

4.5.2 Custo da Operação do Estoque no CDR e Determinação de \tilde{F}_i

Admitindo que cada CDR operará seu estoque seguindo a política LEC, pode-se utilizar a equação (2.3) para aproximar o custo incorrido, a cada ciclo, com a manutenção do estoque. Desta forma, a equação (4.26) fornece o custo aproximado de manutenção deste estoque durante um único ciclo.

$$c_i = \sqrt{2CF_1' h_i \bar{\lambda}_i} \quad (4.26)$$

Como a operação da rede de distribuição tende a se estender indefinidamente, obter-se-á, a cada novo ciclo, um custo aproximadamente igual à c_i , o que resultará em uma série uniforme infinita de valores c_i . Tal série pode ser equivalentemente representada por seu valor presente aplicando-se a equação (4.27).

$$C_i = c_i / \gamma \quad (4.27)$$

Em (4.27), γ é a taxa de mínima atratividade por ciclo, isto é:

$$\gamma = (1 + \varphi)^N - 1. \quad (4.28)$$

Logo, aplicando-se (4.28) é possível re-escrever (4.27) conforme (4.29), que fornece o valor presente para o custo de manutenção do estoque no CDR instalado em $x_i \in I$.

$$C_i = \sqrt{2CF_1' h_i \bar{\lambda}_i} / \left((1 + \varphi)^N - 1 \right) \quad (4.29)$$

Ainda, se a cada vértice $x_i \in I$ associa-se um custo fixo (f_i) que decorre da instalação (abertura) do CDR naquele vértice, pode-se escrever a estimativa \tilde{F}_i conforme segue:

$$\tilde{F}_i = f_i + C_i \quad (4.30)$$

ou, de forma equivalente, por (4.31).

$$\tilde{F}_i = f_i + \sqrt{2CF_1' h_i \bar{\lambda}_i} / \gamma^2 \quad (4.31)$$

A equação (4.31) fornece, portanto, a estimativa requerida para o custo médio que decorre da abertura e operação do CDR no vértice $x_i \in I$. É importante observar que na formulação anterior esta-se, implicitamente, considerando que o investimento f_i dá-se instantaneamente se comparado ao período total de operação da rede.

4.6 Estratégia de Solução para o Modelo de Localização dos CDR's

Definidos os modelos que conduzem à obtenção de \tilde{V}_{ij} e \tilde{F}_i , bem como da política ótima de operação do estoque nas localidades e CDR's, passa-se, nesta seção, à descrição da estratégia de solução do modelo (4.1)-(4.4). Por causa das dificuldades inerentes à solução desse tipo de modelo, principalmente para grandes instâncias do problema, é adotada uma estratégia heurística que utiliza o algoritmo de Teitz & Bart.

Para tanto, considere a matriz $\mathbf{V}_{|I| \times |J|}^n$ que contém as estimativas \tilde{V}_{ij} calculadas para cada um dos pares de vértices $x_i \in I$ e $x_j \in J$, onde n indica o estágio escolhido para início da operação. Em particular, essa matriz é calculada admitindo-se certo nível para o estoque inicial das localidades. Considere também o subconjunto $X_p \subset I$ que contém os vértices x_i nos quais um CDR é para ser aberto. Logo, a cardinalidade de X_p designa a quantidade de CDR's a serem instalados.

Para cada $x_j \in J$ existe uma alocação ótima que é dada pela associação de mínimo custo na matriz $\mathbf{V}_{|I| \times |J|}^n$, isto é, $V(X_p, x_j) = \min_{x_i \in X_p} [\tilde{V}(x_i, x_j)]$, onde $\tilde{V}(x_i, x_j)$ designa o elemento \tilde{V}_{ij} . Assim, a transmissão associada à X_p pode ser escrita conforme (4.32).

$$\sigma(X_p) = \sum_{x_i \in X_p} f_i + \sum_{x_j \in J} V(X_p, x_j) + \sum_{x_i \in X_p} \sqrt{2CF_1 h_i \bar{\lambda}_i / \gamma^2} \quad (4.32)$$

A primeira parcela de (4.32) fornece o custo total para a abertura dos CDR's. A segunda parcela computa o custo total das alocações de menor custo no estágio em questão. Por último, a terceira parcela fornece o custo de manutenção do estoque nos CDR's abertos, dado que as alocações "ótimas" (de menor custo) foram realizadas. Deve-se observar que a soma apresentada na equação (4.32) somente é possível porque todos os elementos estão representados em seu valor presente.

O problema, agora, se resume a encontrar o subconjunto ótimo X_p^* que proporciona o menor valor de transmissão possível, isto é, o menor custo para o estabelecimento do sistema de distribuição. Para

resolver este problema pode-se empregar o algoritmo de Teitz & Bart⁸, fazendo, para isso, a transmissão ser calculada conforme (4.32). Deste procedimento resultam os locais ótimos para abertura dos CDR's e as alocações ótimas das localidades, o que resolve o modelo (4.1)-(4.4). Nota-se que nesta estratégia de solução há necessidade de recalcular a primeira e a última parcela de (4.32) cada vez que uma nova aproximação para X_p^* é obtida, enquanto a matriz $\mathbf{V}_{|I|,|J|}^n$ é calculada uma única vez.

Para atenuar o efeito da aleatoriedade existente no método de Teitz & Bart, pode-se executar o procedimento descrito anteriormente repetidas vezes, sempre tomando soluções iniciais escolhidas ao acaso. Pode-se então, a partir daí, tomar a melhor solução obtida como sendo a solução do problema de localização.

Uma questão pertinente a ser considerada é a seguinte: qual o número de CDR's a serem abertos de modo a proporcionar o menor custo para todo o sistema. A resolução a essa questão foge ao escopo deste trabalho. No entanto, De Figueiredo e Mayerle (2008) fornecem uma estratégia, baseada na série de Fibonacci, que pode ser aplicada para determinar o tamanho ótimo do subconjunto X_p .

4.7 Considerações Finais

Neste capítulo foi apresentado um modelo conjunto de localização e estoque que trata do problema de estabelecer um sistema de distribuição em uma região onde os *links* apresentam comportamento dinâmico. Por causa deste comportamento, as localidades a serem atendidas mantêm individualmente um estoque regulador para satisfazer sua demanda local.

Para estabelecer o sistema de distribuição, o provedor do bem demandado deseja determinar a localização ótima para um conjunto de centros de distribuição regional, bem como a política ótima de operação do estoque nesses CDR's e nas várias localidades. O modelo desenvolvido assume uma política de lote econômico para a operação dos CDR's. Já para as localidades foi desenvolvido um modelo de programação dinâmica estocástica cuja solução resulta na política ótima de pedidos. Essa política, a qual é diferente para cada vértice $x_j \in J$, é,

⁸ Ver a descrição deste algoritmo na seção 3.4.

em suma, uma revisão periódica, onde a periodicidade dos pedidos é definida pelos estágios e a quantidade a ser solicitada depende do estoque atual, da condição observada no *link* e do nível de serviço a ser mantido nas localidades.

Para solucionar o modelo de localização concebido foi proposta uma adaptação à heurística de Teitz & Bart. A partir desta adaptação, a qual considera os custos de abertura dos CDR's, de manutenção e de operação do estoque, são definidas as localizações dos CDR's, bem como as respectivas associações.

Por se tratar de uma adaptação que está baseada no algoritmo de Teitz & Bart, a heurística proposta não garante a obtenção da solução ótima do problema. Entretanto, alguns trabalhos na literatura relatam a aplicação satisfatória do referido algoritmo, especialmente quando o número de vértices a serem verificados cresce. Ainda sim, uma vez calculada a matriz de custos $\mathbf{V}_{|I| \times |J|}^n$, repetições sucessivas do algoritmo podem ser realizadas tomando-se, a cada vez, uma aproximação inicial aleatória para o subconjunto X_p . Deste procedimento, a solução de menor custo pode ser tomada como sendo a solução desejada.

No capítulo seguinte será relatada a experimentação numérica desenvolvida para a estratégia de solução do problema aqui tratado.

5 EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

5.1 Considerações Iniciais

Este capítulo é dedicado à descrição da experimentação numérica do modelo desenvolvido no capítulo anterior. Tal experimentação consiste da realização de testes computacionais em um “estudo de caso” teórico elaborado a partir de dados hipotéticos.

Por se tratar de um modelo que apresenta uma abordagem diferenciada das encontradas na literatura, optou-se pela elaboração desse estudo de caso teórico, o qual se caracteriza por ser um problema mais simples, concebido com vistas à validar o método que está sendo proposto no presente trabalho. Da mesma forma, devido à ausência, pelo menos ao conhecimento deste autor, de outros trabalhos que adotam a mesma abordagem, comparações (ou validação) quanto aos resultados obtidos não são possíveis.

Por estes motivos, os testes conduzidos visaram, prioritariamente, averiguar a factibilidade do modelo aqui proposto, bem como a coerência dos resultados obtidos. Quanto à qualidade da solução, isto é, sua otimalidade, será visto que o modelo dificulta uma análise precisa a este respeito. Procurou-se, por este motivo, adotar uma estratégia de comparar a solução alcançada com o modelo proposto com àquela resultante da aplicação direta do método (tradicional) de Teitz & Bart, conforme descrito no Capítulo 3.

Todos os testes foram conduzidos em um microcomputador desktop Pentium IV, 3.20 GHz e 500 MB de memória RAM, sendo que o modelo apresentado no capítulo anterior foi implementado em um programa de computador desenvolvido em Delphi-7.

Com relação à estrutura do capítulo, este é dividido da seguinte maneira: primeiramente caracteriza-se a experimentação e seus dados. Em seguida, a melhor solução obtida com o modelo proposto é detalhada, isto é, analisa-se, individualmente, a solução para o problema de localização-alocação, para o problema de operação do estoque local e, finalmente, para o problema de operação do estoque no CDR. Por último, algumas considerações finais são postas.

5.2 Caracterização da Experimentação e Valores Experimentados

Na literatura é possível encontrar dados de referência para vários problemas de localização. Muitos desses problemas relacionam-se em mais de um aspecto com assuntos abordados neste trabalho. Apesar dessa estreita relação, as pesquisas bibliográficas realizadas não apontaram nenhum trabalho que estude o problema acoplado de localização e estoque considerando a situação e os elementos aqui tratados. Por esse motivo, não se encontrou dados de referência para realização de uma análise comparativa.

Assim, com o objetivo de avaliar o modelo e a estratégia de solução, bem como a funcionalidade do *software* desenvolvido, foram gerados dados hipotéticos sob os quais um estudo de caso foi elaborado. Neste estudo de caso é admitido que a periodicidade N equivale a 1 (um) ano e que 4 (quatro) períodos podem ser identificados dentro deste ciclo. O estudo foi conduzido sob uma região hipotética contendo 25 locais viáveis à instalação de um CDR e 100 localidades a serem abastecidas, ou seja, $|I|=25$ e $|J|=100$, respectivamente. Do conjunto I , 8 (oito) vértices devem ser eleitos para abrigar um CDR. A decisão sobre o tamanho do conjunto X_p é tomada como sendo exógena ao problema e pode, por exemplo, ter sido definida em função de alguma decisão estratégica ou política de ação estabelecida pelo provedor do bem a ser distribuído.

Para cada período e *link* Tipo 1 da região sob estudo, assumiu-se que as probabilidades de transição entre as condições de Aberto e Fechado são proporcionais à distância entre o par de vértices $x_i \in I$ e $x_j \in J$ considerado. Tais probabilidades são obtidas por meio da relação (5.1). Nessa relação, d_{ij} designa a distância euclidiana entre o par de vértices, a qual é expressa em alguma métrica adequada, e $C_n^{s_u, s_v}$ é uma constante arbitrada. Esta constante possui a finalidade de sumarizar o efeito da sazonalidade nos *links* Tipo 1 ao longo do ciclo, fazendo com que se obtenha, para cada período, diferentes probabilidades para a condição desses *links*.

$$p_t(n, s_u, s_v) = \min(d_{ij}/100; 0.99) \cdot C_n^{s_u, s_v} \quad (5.1)$$

Na aplicação realizada, adotaram-se os valores de $C_n^{s_u, s_v}$ indicados no Quadro 5.1. Desta forma, $C_4^{0,0} = 0,75$, $C_4^{1,0} = 0,50$ e assim por diante. Vale destacar que outros valores diferentes dos indicados no Quadro 5.1 poderiam ter sido utilizados.

		$s_v = 0$			
		$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$	$n = 1$
$s_u = 0$		0,75	0,50	0,80	1,00
$s_u = 1$		0,50	0,75	0,75	0,90

Quadro 5.1 - Constantes adotadas no estudo de caso

Fonte: Autor.

Para ilustrar a utilização de (5.1), considere o caso em que a distância entre um par de vértices $x_i \in I$ e $x_j \in J$ qualquer seja igual a 62,88 unidades de comprimento. Logo, aplicando (5.1), obtêm-se que $p_t(4,0,0) \approx 0,47$, enquanto $p_t(4,1,0) \approx 0,31$. Naturalmente, as probabilidades $p_t(4,0,1)$ e $p_t(4,1,1)$ são complementares às anteriormente citadas. Isto é, $p_t(4,0,1) = 1 - p_t(4,0,0) = 0,53$ e $p_t(4,1,1) = 1 - p_t(4,1,0) = 0,69$. Análise semelhante é válida para os demais estágios do ciclo. O Quadro 5.2 resume o valor das probabilidades de transição para este exemplo.

		$s_v = 0$			
		$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$	$n = 1$
$s_u = 0$		0,47	0,31	0,50	0,63
$s_u = 1$		0,31	0,47	0,47	0,57

Quadro 5.2 - Exemplo de probabilidades de transição para um link

Fonte: Autor.

Os dados referentes aos vértices $x_i \in I$ são apresentados no Quadro 5.3. Neste quadro, x e y indicam as coordenadas do local onde a instalação de um CDR é viável, enquanto os demais parâmetros foram identificados no capítulo anterior. Nota-se, que os CDR's estão associados a diferentes custos de pedido, manutenção de estoque e de

instalação. Os diferentes custos de pedido e manutenção de estoque podem ser justificados pelas características individuais e geográficas dos locais. Por outro lado, o custo f_i pode contemplar, por exemplo, o aluguel/compra do terreno e/ou equipamentos, contratação de mão-de-obra e encargos administrativos associados àquele vértice.

i	x	y	CF_i	h_i	f_i
00	87,2	81,9	36,0	7,5	16.000
01	76,1	32,3	20,0	4,0	14.000
02	20,0	66,2	35,0	6,5	14.500
03	09,3	10,8	28,0	3,5	15.000
04	15,3	25,4	30,0	4,0	13.000
05	53,1	13,2	21,0	4,0	15.000
06	26,7	52,5	30,0	6,0	17.000
07	72,6	72,7	22,0	5,5	12.000
08	37,4	79,5	38,0	8,0	14.000
09	15,9	73,6	37,0	6,5	20.000
10	26,0	08,9	27,0	5,0	18.000
11	57,7	22,6	25,0	5,5	21.000
12	67,2	42,0	25,0	6,0	20.000
13	47,6	56,2	29,0	7,0	25.000
14	14,7	83,6	40,0	9,0	11.000
15	85,0	45,8	25,0	6,5	13.500
16	83,1	17,2	23,0	5,0	15.000
17	30,2	36,8	26,0	5,5	20.000
18	88,1	29,5	20,0	3,0	12.000
19	65,9	82,2	36,0	8,0	15.000
20	10,5	46,2	32,0	5,0	14.000
21	55,0	75,2	37,0	5,0	15.000
22	74,7	57,2	25,0	5,0	15.500
23	33,0	17,2	37,0	4,5	17.000
24	34,2	69,2	27,0	5,5	18.000

Quadro 5.3 - Dados referentes aos locais onde CDR's podem ser instalados

Fonte: Autor.

Já o Quadro 5.4, por sua vez, traz os dados que concernem às localidades a serem atendidas. Da mesma forma, x e y indicam as coordenadas da localidade e λ_j^n é o parâmetro que caracteriza a distribuição da demanda no respectivo estágio n . Para simplificar o estudo, admitiu-se que o custo unitário de manutenção do estoque por período (h_j) é igual a 1,0 (um) em todos os $x_j \in J$ e que a capacidade

máxima de armazenagem nessas localidades (Q_j^{\max}) é igual a 12 unidades de demanda.

j	x	y	$\lambda_j^{n=4}$	$\lambda_j^{n=3}$	$\lambda_j^{n=2}$	$\lambda_j^{n=1}$
00	04,3	40,5	1,9	2,8	2,0	1,8
01	14,8	90,4	2,2	2,4	1,6	1,9
02	68,7	08,8	3,3	2,9	3,1	2,4
03	29,2	62,4	3,1	2,7	1,8	1,6
04	11,5	72,3	2,9	3,5	3,5	3,4
05	85,0	01,4	3,4	3,0	3,1	3,2
06	23,1	00,0	2,0	2,9	2,7	2,6
07	73,9	95,7	1,7	1,5	2,0	1,5
08	13,2	30,3	1,8	2,4	2,4	2,7
09	57,6	35,5	3,3	3,5	3,2	3,3
10	33,6	41,0	1,8	1,5	1,7	2,0
11	91,4	89,1	1,9	1,5	1,8	2,0
12	77,6	69,0	2,6	1,7	1,6	2,0
13	99,6	65,3	3,2	2,8	2,5	2,2
14	66,1	16,1	1,8	1,5	1,5	2,0
15	94,7	11,9	1,9	1,5	2,3	2,2
16	27,0	89,5	2,4	3,3	3,5	2,8
17	03,8	76,4	3,5	2,6	2,8	2,4
18	60,1	27,3	3,4	2,5	1,8	2,7
19	92,8	24,1	1,6	1,7	1,9	2,6
20	37,5	89,8	2,5	2,2	1,5	1,5
21	22,8	12,9	1,8	1,5	2,2	1,8
22	46,3	18,0	3,1	3,2	2,3	1,9
23	16,8	28,9	2,7	3,3	3,3	3,4
24	81,8	47,8	2,9	3,1	2,6	1,8
25	50,0	13,7	3,2	3,3	3,3	3,5
26	71,9	49,1	2,9	3,1	3,5	3,5
27	57,8	06,3	3,2	3,0	3,0	3,3
28	50,6	78,7	3,3	2,7	3,0	2,7
29	71,6	55,7	1,9	2,1	3,1	3,4
30	83,2	13,6	1,6	1,7	2,6	2,0
31	73,3	35,9	2,8	2,5	1,9	2,0
32	53,7	60,1	2,8	2,2	1,5	2,3
33	23,7	26,4	2,2	2,6	2,4	2,0
34	42,6	60,1	2,2	1,6	2,5	2,7
35	23,0	69,4	2,9	3,3	3,1	3,0
36	82,4	95,5	2,9	3,0	3,0	2,6
37	14,7	80,9	2,8	3,0	3,3	3,5

38	07,4	50,6	3,2	3,1	3,0	2,3
39	53,3	24,0	3,4	3,0	3,5	3,5
40	43,6	70,2	2,1	2,4	2,5	2,0
41	29,3	79,4	2,6	3,4	2,8	3,0
42	29,3	20,9	3,1	2,4	1,8	2,6
43	06,0	64,9	2,9	3,0	2,7	2,0
44	20,6	58,5	1,7	1,9	2,1	2,1
45	88,7	66,4	3,0	2,5	2,9	2,7
46	37,1	23,2	2,9	3,0	3,4	3,5
47	02,5	80,1	3,4	2,7	1,9	2,4
48	84,4	84,2	2,8	2,2	2,3	1,6
49	21,5	07,6	1,6	2,4	3,3	3,1
50	81,4	42,1	2,9	2,1	2,4	3,1
51	71,3	77,3	1,6	1,8	1,6	2,0
52	06,5	20,6	3,0	2,2	2,2	3,0
53	68,0	31,9	2,1	3,0	2,2	2,5
54	54,3	79,7	2,1	2,1	1,9	2,8
55	25,3	73,4	2,9	2,7	1,8	2,0
56	82,6	07,1	2,5	3,0	2,8	3,0
57	57,0	25,4	3,3	3,0	3,1	2,9
58	90,0	56,0	3,3	3,0	2,8	2,5
59	45,3	25,8	3,3	2,5	1,5	1,8
60	27,9	46,1	1,6	1,5	1,6	2,0
61	69,1	62,0	2,7	2,4	2,1	1,5
62	61,4	98,4	2,0	1,7	1,5	1,9
63	20,5	13,4	2,7	2,3	2,4	2,0
64	60,3	11,5	3,4	3,0	3,4	3,0
65	35,8	12,5	1,7	1,8	1,5	1,8
66	22,8	81,2	3,0	3,0	2,8	3,3
67	67,0	74,5	1,7	2,2	1,7	2,0
68	45,1	06,8	2,5	3,1	3,0	3,4
69	41,4	54,8	2,6	1,7	2,5	3,4
70	71,7	39,1	2,0	2,0	2,9	2,0
71	99,7	41,5	3,2	2,5	2,5	1,6
72	95,2	45,1	3,2	3,0	3,1	2,7
73	53,6	93,8	2,8	2,0	1,9	1,9
74	90,2	05,9	2,9	3,1	3,0	2,8
75	30,4	10,8	1,8	1,9	2,5	3,4
76	13,2	42,8	2,9	2,8	2,9	2,4
77	48,3	45,2	3,2	2,3	2,5	2,7
78	42,1	82,0	2,0	2,4	2,2	2,7
79	67,7	80,5	3,4	2,9	2,0	1,7
80	92,8	41,2	3,4	3,0	3,0	3,0
81	32,9	31,7	2,4	3,0	3,1	2,4

82	60,2	56,0	2,2	2,2	1,6	1,9
83	02,7	12,9	2,0	2,0	2,0	2,3
84	38,5	37,4	2,6	2,7	3,1	3,4
85	33,9	05,1	1,6	1,9	1,7	1,6
86	03,6	87,7	1,9	1,8	1,6	1,5
87	90,0	51,8	2,8	3,0	2,7	2,8
88	09,5	95,4	2,4	2,0	2,1	2,4
89	28,6	31,6	2,8	2,3	2,9	2,5
90	66,5	22,0	2,5	1,6	2,0	2,4
91	48,6	51,6	1,6	1,7	1,7	1,9
92	62,0	17,6	2,8	3,0	2,0	2,4
93	75,7	15,4	2,4	3,2	2,5	3,3
94	81,3	27,3	1,5	1,9	1,8	1,8
95	97,3	29,8	2,7	2,4	2,2	1,7
96	08,9	00,7	2,8	2,1	2,0	2,1
97	89,2	34,0	1,7	2,0	2,0	2,2
98	36,6	73,3	2,9	3,5	3,0	3,5
99	59,5	72,0	2,0	1,6	1,7	2,5

Quadro 5.4 - Dados referentes às localidades a serem atendidas

Fonte: Autor.

Os valores de x e y , nos dois quadros, e λ_j^n , neste último, são obtidos aleatoriamente segundo uma distribuição uniforme. Os demais são valores arbitrados. Com relação aos tempos de ressuprimento $TR^{n-1}(s_v)$ para atender as localidades a partir do CDR admitiu-se, conforme exposto na seção 4.4.1, que os mesmos são determinísticos e diferentes entre os estágios. Esses valores são dados por uma fração da distância entre o par de vértices em questão, segundo a relação (5.2). Já para o atendimento às localidades a partir do CD, admitiu-se $TR^{n-1}(s_v)$ como sendo constante entre os períodos. De fato, essa diferença de tratamento quanto a origem do abastecimento tem a finalidade de refletir as variações que afetam (somente) o *link* Tipo 1, ao mesmo tempo em que contempla os diferentes meios de transporte empregados em cada *link* (ver seção 4.2.2).

$$TR^{n-1}(s_v) = \begin{cases} (d_{ij}/500) \cdot P_t(n, s_u, s_v), & \text{se } s_v = 1 \\ d_{ij}/1000, & \text{se } s_v = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

No estudo de caso formulado admite-se que o CD está localizado na coordenada $x=55,0$ e $y=40,0$, sendo que o sistema de distribuição deve iniciar sua operação no quarto período ($n=4$). O

Quadro 5.5 resume os demais parâmetros aplicados ao estudo de caso. Comparando o valor de CF_1' , neste quadro, com os valores de CF_i , no Quadro 5.3, nota-se que, do ponto de vista do vértice x_j , realizar pedidos ao CDR é significativamente menos custoso do que ao CD. Tal diferença também visa representar a natureza “especial” dos abastecimentos às localidades a partir do CD.

Já os custos unitários de transporte são dados, conforme Quadro 5.5, pela própria distância entre os vértices em questão. Entretanto, em decorrência dos diferentes meios de transporte empregados em cada um dos *links*, essas distâncias são ponderadas pelos fatores indicados no Quadro 5.5. Assim, *links* nos quais meios mais eficientes de transporte podem ser utilizados verifica-se menor custo unitário de transporte. Tal suposição é razoável visto que esses custos tornam-se proporcionais à posição relativa do par origem-destino das quantidades transportadas.

Parâmetros Gerais do Estudo de Caso	
CF_1'	50,0
CF_1	200,0
c_{ij}	$0,50 \cdot (\text{distância entre os vértices } x_i \in I \text{ e } x_j \in J)$
c_{1i}	$0,25 \cdot (\text{distância entre o vértice 1 e } x_i \in I)$
c_{1j}	$1,00 \cdot (\text{distância entre o vértice 1 e } x_j \in J)$
α	0,98
φ	0,02

Quadro 5.5 - Parâmetros aplicados ao estudo de caso

Fonte: Autor.

Ainda segundo o Quadro 5.5, para as operações do estoque local foi admitido 98% de nível de serviço para atendimento à demanda das localidades. Da mesma forma, a taxa (φ) de mínima atratividade considerada foi igual a 2% ao período, resultando em $\beta = 1/(1 + 0,02) \approx 0,9804$ e $\gamma = (1 + 0,02)^4 - 1 \approx 0,0824$.

5.3 Análise dos Resultados

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos e análises acerca do estudo de caso desenvolvido. Primeiramente, será apresentada a configuração da solução para o problema de localização-alocação obtida por meio do modelo proposto. Devido à dificuldade de se ponderar sobre a qualidade desta solução encontrada, o mesmo problema é resolvido aplicando-se somente o método (tradicional) de Teitz & Bart, isto é, sem levar em consideração os custos e a operação “ótima” dos estoques.

Em seguida, discute-se a solução para o problema de operação do estoque local e, por final, a solução para o problema de operação no CDR. Em ambos os casos, exemplos são fornecidos.

5.3.1 Solução para o Problema de Localização

A melhor solução obtida para os dados e parâmetros apresentados na seção 5.2 está ilustrada na Figura 5.1. Esta solução foi obtida após cálculo da matriz $\mathbf{V}_{|I| \times |J|}^n$, com $n = 4$, e posterior aplicação do algoritmo adaptado de Teitz & Bart, conforme discutido na seção 4.6.

Ao analisar essa solução, nota-se que, de maneira geral, a estratégia desenvolvida resultou na escolha uniforme de vértices onde um CDR deve ser aberto. Da mesma forma, uma vez conhecidos esses vértices, a alocação dos vértices de demanda aos CDR's foi coerente com que se poderia esperar intuitivamente. Isto é, as localidades foram alocadas aos CDR's aproximadamente mais próximos. Verifica-se também que os CDR's selecionados não foram necessariamente aqueles com menor custo f_i , mas sim aqueles que proporcionaram melhor *trade off* para o conjunto de custos considerados.

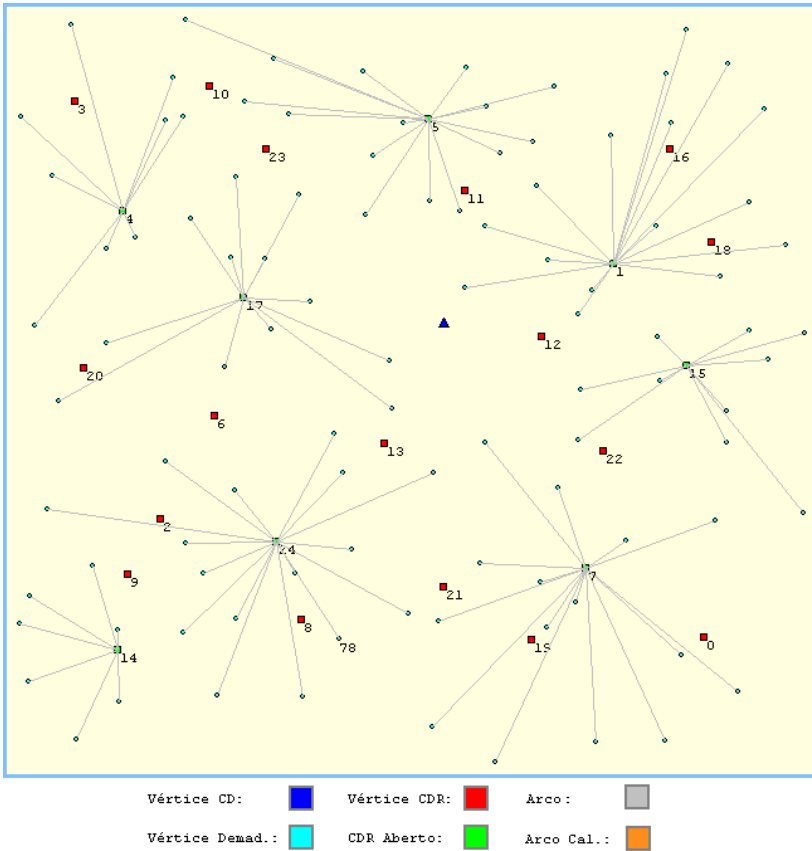


Figura 5.1- Representação da melhor solução obtida

Fonte: Autor.

A Tabela 1, a seguir, traz o resumo da melhor solução obtida. Neste quadro, a terceira coluna indica os vértices associados a cada um dos CDR's abertos. A quarta coluna apresenta o custo total ($\tilde{V}_{ij} + \tilde{F}_i$) que está associado ao CDR. Finalmente, a última coluna traz o percentual do custo total que incorre em cada CDR.

Observa-se que os CDR's 01 e 24 são os que atendem mais localidades. Em contra partida, o CDR 14 é o que atende menos localidades. Com relação ao custo associado a cada CDR, nota-se que este é proporcional ao número de localidades atendidas. O Apêndice A apresenta o relatório de alocação contendo as estimativas \tilde{V}_{ij} para cada

associação, bem como a estimativa \tilde{F}_i para a operação dos CDR's a serem abertos.

CDR Selecionado	Número Localidades Alocadas	Localidades Alocadas	Custo Associado	% Custo
01	16	05, 09, 15, 18, 19, 30, 31, 53, 56, 70, 74, 90, 93, 94, 95, 97	65.828,49	14,19
04	09	00, 08, 21, 23, 49, 52, 63, 83, 96	45.978,59	9,91
05	15	02, 06, 14, 22, 25, 27, 39, 57, 59, 64, 65, 68, 75, 85, 92	62.591,08	13,49
07	15	07, 11, 12, 36, 45, 48, 51, 54, 61, 62, 67, 73, 79, 82, 99	61.048,26	13,16
14	07	01, 04, 17, 37, 47, 86, 88	43.093,54	9,29
15	10	13, 24, 26, 29, 50, 58, 71, 72, 80, 87	49.193,72	10,60
17	12	10, 33, 38, 42, 46, 60, 76, 77, 81, 84, 89, 91	57.825,68	12,46
24	16	03, 16, 20, 28, 32, 34, 35, 40, 41, 43, 44, 55, 66, 69, 78, 98	78.394,04	16,90
Custo da Melhor Solução Encontrada			463.953,40	100,00

Tabela 1 - Resumo da melhor solução encontrada com o método proposto

Fonte: Autor.

Visto que o resultado sumarizado na Tabela 1 é obtido de maneira heurística, procurou-se executar o *software* desenvolvido repetidas vezes com o intuito de atenuar o efeito da aleatoriedade inerente ao método. A Figura 5.2 apresenta, para uma dessas execuções, o comportamento do algoritmo adaptado de Teitz & Bart a cada nova aproximação encontrada para o conjunto X_p^* . Verifica-se que as sucessivas trocas de vértices efetuadas resultaram na melhoria significativa (aproximadamente 9%) no valor da função objetivo, quando comparado à aproximação inicial.

Da mesma forma, como o tempo computacional requerido para execução desse algoritmo é bastante reduzido (se comparado ao tempo despendido para obtenção da matriz $\mathbf{V}_{|I||X|}^n$), nas repetidas execuções da

heurística tomou-se, a cada vez, diferentes aproximações iniciais para o conjunto X_p^* , cada uma delas escolhidas ao acaso. Deste procedimento a melhor aproximação final foi assumida como sendo a solução requerida (ótima) para o problema de localização-alocação. A Figura 5.2 apresenta, como exemplo, somente a execução que resultou na melhor aproximação final.

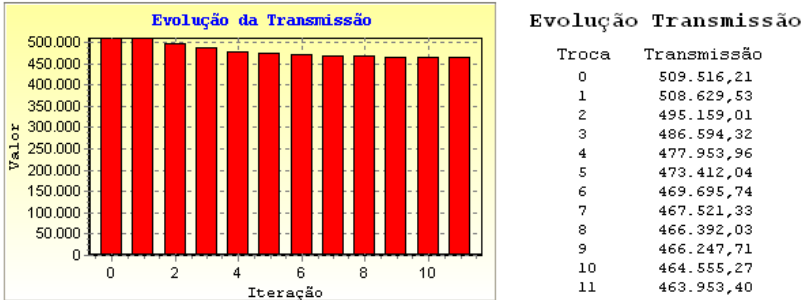


Figura 5.2 - Evolução do método de Teitz & Bart adaptado

Fonte: Autor.

Apesar dos resultados anteriores mostrarem uma distribuição uniforme dos CDR's selecionados, o que, de fato, poderia ser esperado por conta da natureza dos dados, resta, no entanto, uma questão a ser ponderada, qual seja: a de avaliar a acuracidade da solução obtida. Neste sentido, vários fatores dificultam uma análise precisa quanto à otimalidade (ou, pelo menos, quanto à qualidade) da solução alcançada com o modelo proposto, entre eles pode-se citar: ausência de estudos com abordagem e escopo semelhantes; ausência de uma rede física real que opere segundo as suposições adotadas; e inexistência (pelo menos, ao conhecimento deste autor) de dados reais que possam ser aplicáveis a um estudo de caso prático. Além de tais fatores, deve-se observar também que a formulação aqui proposta restringe consideravelmente a aplicação de relaxação langrangeana.

No entanto, uma estratégia alternativa para avaliar a qualidade da solução do modelo proposto é resolver o problema de localização utilizando alguma ferramenta diferente daquela concebida neste trabalho. Naturalmente, neste caso, a operação ótima do estoque local concebida pelo modelo de otimização (4.16)-(4.21) não será considerada para obter a solução do problema. Nestas condições, uma opção razoável para resolver o problema é aplicar o próprio algoritmo de Teitz

& Bart, considerando apenas a distância como único fator revelante ao problema, negligenciando, portanto, os custos que decorrem dos estoques, bem como sua política de operação. Esta abordagem é justificada por dois aspectos, quais sejam: os relatos, disponíveis na literatura, atribuindo bons resultados à heurística de Teitz & Bart; e a importância que normalmente é conferida aos custos de transporte em estudos desta natureza em detrimento aos custos de operação dos estoques.

Assumindo este ponto de vista, o problema de localização-alocação abordado neste trabalho foi resolvido como sendo um problema tradicional de localização generalizado (ver seção 2.4.4), onde apenas as distâncias e o custo fixo f_i são conhecidos. Em particular, f_i foi assumido ser o mesmo para todos os vértices $x_i \in I$. A Figura 5.3 apresenta o resultado da aplicação da heurística para o mesmo conjunto de dados da seção anterior¹.

Naturalmente, esta solução apresenta uma nova localização “ótima” para os CDR’s que devem ser abertos, além de diferentes alocações para os vértices de demanda. Em relação à solução originalmente obtida com o modelo proposto, esta nova solução contém 3 CDR’s (abertos) e 26 alocações de vértices de demanda em comum. Na Tabela 2 estão indicadas as localidades associadas aos respectivos CDR’s abertos, bem como o custo equivalente que resultaria desta solução caso a mesma fosse adotada e as operações de estoque nas localidades e CDR’s ainda ocorressem de modo ótimo segundo os modelos desenvolvidos para a otimização da operação dos estoques.

No entanto, ao negligenciar tais políticas, esses estoques não serão operados de maneira ótima, fazendo os custos reais serem, de fato, superiores àqueles considerados. Entretanto, posto que a operação da rede de distribuição tende a perdurar por um horizonte bastante longo (virtualmente infinito), torna-se razoável supor que a operação do estoque evolua gradativamente ao longo dos anos, como num processo evolutivo decorrente do conhecimento (empírico ou não) adquirido com o passar do tempo. Sendo desta forma, a rede deverá experimentar desempenhos constantemente mais eficientes ao longo do tempo, de tal sorte que, a longo prazo, a operação e, portanto, os custos se

¹ Ressalta-se que a solução apresentada na Figura 5.3 não contempla os custos com a operação do estoque. Desta forma, nenhuma consideração acerca da política de operação dos estoques está sendo realizada.

mínimos, o que poderá representar significativos ganhos operacionais e econômicos ao provedor do bem a ser distribuído.

Em relação à solução alcançada com o método proposto, a solução da Figura 5.3 resulta, conforme Tabela 2, em 4,86% de acréscimo no custo total anual. Tal resultado demonstra, ainda que não de forma inequívoca, a factibilidade do modelo proposto no que tange à obtenção de uma solução viável e de razoável qualidade para o problema aqui tratado.

CDR Selecionado	Número Localidades Alocadas	Localidades Alocadas	Custo Associado	% Custo
10	12	06, 21, 42, 49, 52, 63, 65, 68, 75, 83, 85, 96	58.935,73	12,09
11	13	09, 14, 18, 22, 25, 27, 39, 53, 57, 59, 64, 90, 92	55.631,97	11,40
13	09	03, 32, 34, 40, 69, 77, 82, 91, 98	49.775,59	10,21
14	14	01, 04, 16, 17, 20, 35, 37, 41, 43, 47, 55, 66, 86, 88	79.855,80	16,38
15	14	13, 24, 26, 29, 31, 45, 50, 58, 70, 71, 72, 80, 87, 97	61.961,66	12,71
16	10	02, 05, 15, 19, 30, 56, 74, 93, 94, 95	48.747,24	9,99
17	13	00, 08, 10, 23, 33, 38, 44, 46, 60, 76, 81, 84, 89	62.636,70	12,85
19	15	07, 11, 12, 28, 36, 48, 51, 54, 61, 62, 67, 73, 78, 79, 99	70.092,22	14,37
Custo da Solução			487.636,91	100,00

Tabela 2 - Resumo da solução obtida com o método de Teitz & Bart

Fonte: Autor.

5.3.2 Solução para o Problema de Operação do Estoque Local

Para demonstrar o resultado decorrente da aplicação do modelo (4.16)-(4.21) à obtenção da política ótima de operação do estoque nas localidades, toma-se, como exemplo, o vértice 78 que está alocado ao CDR aberto no vértice 24, conforme indicado na Figura 5.1.

O Quadro 5.6 traz o resumo da operação ótima do estoque naquela localidade. Nota-se que, conforme esperado, tal operação ótima depende da condição da aresta que liga os vértices, do nível de estoque atual na localidade e, naturalmente, do período em questão. Para exemplificar essa operação considere, primeiramente, o caso em que o estoque atual é nulo. Se o *link* que liga os vértices em questão encontra-se Aberto, então a melhor ação (tamanho de pedido) é solicitar 12 unidades de demanda ao CDR, independentemente do período (ou estágio). Em contra partida, se o mesmo *link* encontra-se Fechado o tamanho do pedido ótimo passa a variar de acordo com os períodos. Isto é, deve-se solicitar, neste caso, ao CD, 07 unid. no 1º período, 06 unid. no 2º e 3º períodos e somente 5 unid. no 4º período. Agora, se o estoque atual é de 07 unidades, pedidos somente serão realizados se o estado do *link* for Aberto, ainda sim, apenas no 2º e 3º períodos. Para a condição de *link* Fechado, 7 unidades em estoque mantêm, ao nível de serviço desejado, o atendimento à demanda, não sendo necessário, portanto, realizar um ressuprimento a um custo mais elevado. Assim, a decisão quanto à necessidade deste ressuprimento é postergada para o período seguinte, onde o mesmo *link* já poderá ter passado à condição de Aberto.

Desta maneira, as diferenças nas políticas de operação são, de fato, reflexo dos diferentes custos de ressuprimento a partir do CD e do CDR. Em particular, analisando o Quadro 5.6, nota-se que as solicitações ao CDR ocorrem em quantidades superiores às realizadas ao CD. Da mesma forma, para níveis iguais de estoque, a quantidade solicitada pode variar entre os períodos em resposta às diferentes probabilidades do *link* encontrar-se Aberto ou Fechado nos períodos seguintes. Esses resultados são intuitivos e coerentes com o que se poderia esperar. Isto é, dado os custos menos elevados dos abastecimentos que ocorrem a partir do CDR, estes são realizados em quantidades maiores com vistas a atender dois objetivos principais: manter o nível de serviço requerido; e utilizar minimamente o *link* Tipo 3. Já do ponto de vista do CD, os pedidos buscam garantir somente o atendimento à demanda durante o período em questão e não formar estoque de reserva, já que o custo unitário de reposição é consideravelmente mais elevado.

Para níveis elevados de estoque atual, notoriamente, 9 unid. quando o *link* esta Aberto e 7 unid. quando o *link* esta Fechado, constata-se que não é necessário fazer novas solicitações, uma vez que a quantidade em estoque supre, ao nível de segurança desejado, a demanda esperada até o próximo ressuprimento se realizar.

Exemplo de Operação Ótima do Estoque na Localidade					
Condição da aresta $a = (24, 78)$	Nível de Estoque Atual	Ação Ótima (k)			
		$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$	$n = 1$
Fechado	12 ($= Q_j^{\max}$)	--	--	--	--
	11	--	--	--	--
	10	--	--	--	--
	09	--	--	--	--
	08	--	--	--	--
	07	--	--	--	--
	06	--	--	--	01
	05	--	01	01	02
	04	01	02	02	03
	03	02	03	03	04
	02	03	04	04	05
	01	04	05	05	06
00	05	06	06	07	
Aberto	12	--	--	--	--
	11	--	--	--	--
	10	--	--	--	--
	09	--	--	--	--
	08	--	--	04	--
	07	--	05	05	--
	06	--	06	06	06
	05	07	07	07	07
	04	08	08	08	08
	03	09	09	09	09
	02	10	10	10	10
	01	11	11	11	11
00	12	12	12	12	

Quadro 5.6 - Exemplo de operação ótima estoque local

Fonte: Autor.

É importante observar que apesar do resultado apresentado no quadro anterior ser decorrente de um modelo de otimização exato, o mesmo pode apresentar pequenas variações entre diferentes execuções do *software* desenvolvido. Tal fato se explica pela aleatoriedade existente na estratégia de simulação do estoque que está imbutida no modelo proposto. Assim, torna-se natural que tais variações sejam observadas. Entretanto, as sucessivas execuções do *software* mostraram

que as variações, quando ocorrem, não são percentualmente significativas, deixando a política de operação do estoque inalterada.

Uma vantagem do modelo proposto é sua flexibilidade a variações dos parâmetros. Isto é, suponha que a rede de distribuição encontre-se instalada e que alterações significativas ocorram em alguns dos parâmetros do problema como, por exemplo, nas probabilidades de transição dos *links* que unem os vértices de demanda aos CDR's. Neste caso, o modelo de programação dinâmica formulado pode ser individualmente aplicado nos pares de vértices que sofreram alterações, obtendo-se, assim, a nova política ótima para a operação do estoque local.

5.3.3 Operação do Estoque no CDR

Conforme descrito no capítulo anterior, os CDR's operam seu estoque segundo o modelo clássico de lote econômico. Tal operação dá-se de forma independente à operação do estoque nas localidades. Para exemplificar a operação dos CDR's, toma-se novamente como exemplo o vértice 24, onde um CDR deve ser instalado.

Alocados ao vértice 24 estão 16 vértices de demanda, conforme indicado na Tabela 1. Aplicando a equação (4.24) verifica-se que a demanda esperada a cada ciclo naquele CDR é $\bar{\lambda}_i = 163,80$ unidades. Sendo o custo fixo de pedido $CF_1' = 50,0$ (Quadro 5.5) e o custo de manutenção $h_i = 5,5$, obtém-se, aplicando (4.25), que a quantidade ótima de pedido naquele CDR é dada por (5.3).

$$Q_{i=24} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50,0 \cdot 163,80}{5,5}} \approx 55 \text{ unidades} \quad (5.3)$$

Realizando pedidos com tamanho dado por (5.3) ao CD, o CDR em questão incorrerá, anualmente, num custo de manutenção de estoque dado por (5.4), conforme aplicação imediata da equação (4.26).

$$c_{i=24} = \sqrt{2 \cdot 50,0 \cdot 5,5 \cdot 163,80} \approx 300,15 \quad (5.4)$$

Representando o valor anteriormente calculado em seu valor presente, tem-se:

$$C_{i=24} = 300,15 / 0,082432 \approx 3.641,17. \quad (5.5)$$

A partir do resultado (5.5) é possível calcular o valor da estimativa \tilde{F}_i aplicando-se diretamente (4.30).

$$\tilde{F}_{i=24} = f_i + C_i = 21.641,17 \quad (5.6)$$

Naturalmente, cada CDR verificará uma quantidade ótima de pedido, a qual depende dos parâmetros em questão e da solução, propriamente dita, para o problema de localização-alocação. Assim, cada CDR faz solicitações independentes e diferentes ao CD, conforme indicado no Quadro 5.7.

CDR (Vértice x_i)	Q_i (unidades de demanda)
01	62,0
04	46,0
05	63,0
07	48,0
14	28,0
15	42,0
17	47,0
24	55,0

Quadro 5.7 - Resumo da operação ótima do estoque nos CDR's

Fonte: Autor.

5.4 Considerações Finais

Neste capítulo foi descrita a experimentação numérica para o modelo proposto no capítulo anterior. Devido à especificidade dos dados requeridos e a questões relativas à disponibilidade de tempo hábil para desenvolver este trabalho no prazo requerido, optou-se por utilizar um conjunto de dados hipotéticos que representasse a região de estudo. Apesar da artificialidade dos dados e do método utilizado para gerá-los, procurou-se elaborar um estudo de caso que contemplasse as características admitidas na formulação do modelo.

Uma vez adotados os dados apresentados na seção 5.2 procurou-se analisar a solução obtida com vistas a verificar sua coerência. Quanto à otimalidade desta solução, a modelagem proposta dificulta uma análise mais rigorosa. Ainda sim, a solução resultante do modelo aqui proposto foi confrontada com a solução proporcionada pelo método de Teitz & Bart. Constatou-se, deste procedimento, que o modelo proposto apresenta vantagens e fornece uma solução de boa qualidade, consistente com os objetivos do estudo.

Em seguida foi exemplificada a operação ótima do estoque local, a qual caracteriza-se por ser uma política ótima de ações que variam em função das condições existentes no momento da realização do pedido. Por fim, demonstra-se a operação ótima do estoque de um CDR. Vale ainda destacar que devido à natureza heurística dos procedimentos adotados, procedeu-se repetidas execuções do *software* desenvolvido, donde a melhor solução foi adotada como sendo a “solução ótima” do problema. Apesar disso, essas mesmas repetições mostraram que o modelo se manteve robusto, uma vez que as diferenças obtidas foram percentualmente insignificantes.

6 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

6.1 Conclusões

Como apresentado no decorrer deste trabalho, a literatura técnica internacional tem experimentado, desde 1960, uma série de trabalhos voltados ao estudo de problemas relacionados à teoria de localização. Mais recentemente, alguns desses trabalhos procuraram abordar simultaneamente o problema de localização e o de operação do estoque, concentrando especial atenção à incorporação dos custos que permeiam este último ao processo de decisão estratégica que caracteriza o primeiro problema. De fato, esta abordagem não é exatamente recente, já tendo sido tratada em, por exemplo, Ratick et al. (1987), embora em um contexto razoavelmente diferente do adotado neste trabalho.

Desde então, com o acirramento da competição no mercado as organizações têm sido forçadas a atenderem certas exigências para manterem-se competitivas, dentre elas pode-se citar: busca constante por desempenhos cada vez melhores, reduções contínuas de custo e níveis de serviço gradativamente mais elevados. Essas exigências podem ser notadas (ainda que com diferentes intensidades) tanto na iniciativa privada, onde a concorrência é fator determinante para impulsionar tais mudanças, quanto no setor público que, por sua vez, é instigado a reduzir seus custos e, ao mesmo, oferecer melhores serviços à sociedade.

Alinhados a essas tendências, alguns trabalhos recentes, notoriamente Daskin et al. (2002), Shen et al. (2003), Snyder et al. (2007) e Ghezavati et al. (2009) discutem abordagens para resolver o problema estratégico de localização contemplando não somente os tradicionais custos de transporte e operação dos CD's, mas também aqueles que concernem aos estoques, quais sejam: custo de manutenção, de pedido e da falta. Tal abordagem também justifica-se visto a importância que vem sendo atribuída a esses custos dentro dos preceitos do SCM. Assim, esses trabalhos propõem formulações que contemplam a operação do estoque supondo que a mesma dá-se de maneira ótima, segundo o modelo clássico de lote econômico ou alguma variação do mesmo. Consideram também a manutenção de certo nível de estoque de

segurança como forma de garantir o nível de serviço frente às variações estocásticas da demanda e do tempo de ressurgimento.

Embora pertinente, as formulações contidas nesses últimos trabalhos citados não contemplam adequadamente algumas características que são relevantes ao estudo do problema de localização em regiões que apresentam restrições de acesso semelhantes às aqui admitidas. Dentre essas limitações, pode-se citar: a não flexibilidade para operar o estoque de acordo com a característica dinâmica da rede; e a consideração de NS somente no segundo nível de operação da rede, neste caso, o CDR. Assim, ao aplicar tais modelos à situação aqui estudada obtém-se uma solução que desconsidera o comportamento dinâmico que é intrínscico à região.

Em contra partida, o modelo apresentado neste trabalho se diferencia dos demais à medida que propõe uma formulação mais aderente à realidade e às características de regiões que possuem restrições intermitentes de acesso. Como foi visto, tal modelo pode ser entendido como um modelo conjunto de localização-alocação e operação de estoque. Essas operações de estoque são convenientemente definidas de modo a “compensar” o comportamento dinâmico da rede e, assim, evitar mudanças na estrutura do sistema de distribuição estabelecido. Parte da operação do estoque ocorre segundo o modelo clássico de lote econômico, enquanto a parte restante dá-se por meio de um modelo de programação dinâmica estocástica que define o tamanho ótimo do pedido em função de requisitos operacionais estabelecidos (NS) e da indisponibilidade intermitente dos arcos da rede modelada. Como resultado dessa estratégia que define as operações de estoque, a qual também contempla os custos de transporte, obtém-se as estimativas de custo necessárias à solução do modelo de otimização inicialmente formulado para definir a localização ótima dos CDR's e a alocação dos vértices de demanda. Por fim, com a aplicação do procedimento heurístico adaptado de Teitz & Bart soluciona-se esse modelo, integrando os resultados dos modelos anteriormente formulados, conforme objetivos propostos.

Apesar de não se poder afirmar quanto à otimalidade da solução encontrada com o modelo aqui desenvolvido, a análise comparativa realizada mostrou que esse modelo é capaz de fornecer (para a situação estudada) resultados superiores àqueles obtidos com a aplicação direta do modelo (tradicional) de Teitz & Bart. Da mesma forma, o modelo de operação do estoque local se mostrou satisfatório ao passo que fornece uma política diferenciada para cada uma das localidades. Além disso, o modelo para operar o estoque apresenta a vantagem de ser flexível às

variações que ocorram após a rede ter sido estabelecida. Isto é, as políticas podem ser individualmente revistas considerando (ou não) a estrutura atual da rede.

Com relação à operação do estoque nos CDR's, não é levado em consideração a demanda suprida diretamente a partir do CD. No entanto, deve-se observar que esse atendimento tende a ser menos freqüente, visto a estratégia de adotar NS ao modelo que define a operação do estoque local.

Frente aos motivos anteriormente colocados parece razoável supor que, se adotado, o modelo proposto culminará com o estabelecimento de uma rede que tende a oferecer satisfatórios níveis de desempenho ao mesmo tempo em que apresenta menores custos para sua operação. A longo prazo, esses fatores poderão representar ao provedor do bem uma vantagem competitiva que poderá ser determinante para sua consolidação no mercado.

De forma mais ampla, o objetivo do estudo apresentado neste trabalho foi contribuir para a vasta área da teoria de localização disponibilizando um modelo e uma ferramenta que auxilia a tomada de decisão em um setor que tradicionalmente envolve elevados aportes de capital. Ambos, o modelo e a ferramenta, podem ser adaptados para serem aplicados na definição de estratégias públicas para abastecimentos de áreas que apresentam restrições de acesso.

6.2 Recomendações

Existem várias recomendações que podem ser elencadas para considerações em trabalhos vindouros.

A primeira delas diz respeito ao estudo de caso hipotético realizado. Para que se torne possível ponderar de forma mais efetiva acerca da factibilidade do modelo aqui proposto, seria interessante que um próximo trabalho considere a aplicação de dados reais ao estudo de caso. Da mesma forma, deveria-se estudar a aplicação de uma distribuição Normal para representar a demanda nas localidades.

Com relação ao transporte, uma possibilidade é o estabelecimento de uma estratégia semelhante ao *milk run*, onde mais de uma localidade é abastecida simultaneamente em cada deslocamento. Esta estratégia, de certa forma, é equivalente a considerar ganho de escala no transporte, uma vez que os custos fixos se diluiriam pelo número de localidades atendidas em cada abastecimento. Naturalmente, a estratégia pressupõe a existência (ou criação) de um sistema de informação que disponibilize

aos CDR's a posição do estoque nas localidades, como ocorre no VMI, por exemplo.

Ainda na operação, foi admitido que os CDR's experimentam tempo de ressuprimento constante e bastante reduzido, mitigando, assim, a necessidade de manutenção de estoque de segurança. No entanto, uma consideração mais realista é admitir que a operação de reabastecimento não seja instantânea fazendo com que algum nível de estoque de segurança deva ser mantido nos CDR's a fim de atender as localidades com o NS desejado. Formulações nesse sentido podem ser encontradas nos trabalhos apontados nas referências bibliográficas.

Com relação à estratégia para determinar $D^{\max}(n, s_u)$, nota-se que variações em seu valor podem ser observadas por conta do procedimento de simulação adotado. Apesar de pequenas, tais variações são indesejadas. Assim, outras estratégias poderiam ser estudadas a fim de se obter o valor $D^{\max}(n, s_u)$. De forma semelhante, outra possível extensão a este trabalho é estudar uma maneira mais apropriada para avaliar a otimalidade da solução.

Como a solução do modelo de programação dinâmica estocástica formulado demanda um esforço computacional considerável pode-se estudar, conforme apresentado em Hastings (1973, Cap. 4), a utilização de técnicas que aplicam equações lineares à solução de modelos semelhantes ao aqui proposto.

Outra possibilidade diz respeito à definição do tamanho ótimo para o conjunto X_p , a qual é tomada como sendo uma decisão exógena ao problema. No entanto, um procedimento mais interessante seria definir (de forma endógena) qual a quantidade mais adequada de CDR's que devem ser instalados para minimizar os custos envolvidos. Estratégia nesse sentido pode ser verificada, com detalhes, em De Figueiredo e Mayerle (2008).

Por último, o modelo concebido pode ser totalmente reformulado se admitido que alguns dos CDR's podem prover abastecimento "emergencial" à localidades outras que não àquelas a eles alocadas, desempenhando, assim, papel equivalente ao do CD. Esta consideração equivale a supor que esses CDR's podem atingir localidades próximas, utilizando-se de meios especiais, quando estas encontram-se com restrição de acesso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHRENS, J. H.; DIETER, U. Computer Generation of Poisson Deviates from Modified Normal Distributions. **ACM Transactions on Mathematical Software**. v. 8, n. 2, p. 163-179, 1982.

ALP, O.; ERKUT, E.; DREZNER, Z. An Efficient Genetic Algorithm for the p -Median Problem. **Annals of Operations Research**. v. 122, n. 1, p. 21-42, 2003.

ARDUINO, A. **Programação Dinâmica**. Rio de Janeiro: UFRJ, COPPE, 1972.

ARENALES, M. et al. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

BALLOU, R. H. **Logística empresarial: transportes, administração de materiais e distribuição física**. São Paulo: Atlas, 1993.

BANKS, J.; CARSON, J. S.; NELSON, B. L. **Discrete-Event System Simulation**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1999.

BELLMAN, R. E. **Dynamic Programming**. New Jersey: Princeton University Press, 1957.

BELLMAN, R. E.; DREYFUS, S. E. **Applied Dynamic Programming**. New Jersey: Princeton University Press, 1962.

BERK, E.; ARREOLA-RISA, A. Note on "Future Supply Uncertainty in EOQ Models". **Naval Research Logistics**. v. 41, n. 1, p. 129-132, 1994.

BERMAN, O.; Drezner, Z.; WESOLOWSKY, G. O. Locating Service Facilities Whose Reliability is Distance Dependent. **Computers & Operations Research**. v. 30, n. 11, p. 1683-1695, 2003.

BERMAN, O.; JAILLET, P.; SIMCHI-LEVI, D. Location-Routing Problems with Uncertainty. In: _____. **Facility Location: A survey of Applications and Methods**. New York: Springer-Verlag, 1995. cap. 18, p. 427-452.

BERTAGLIA, P. R. Administrando os estoques na cadeia de abastecimento. In: _____. **Logística e Gerenciamento da Cadeia de Abastecimento**. São Paulo: Saraiva, 2003. cap. 8, p. 312-352.

BOAVENTURA, P. O. Distância, localização, caminhos. In: _____. **Grafos: teoria, modelos, algoritmos**. São Paulo: E. Blücher, 2006. cap. 4, p. 55-80.

BORNIA, A. C. A Empresa Moderna. In: _____. **Análise Gerencial de Custos em Empresa Modernas**. Porto Alegre: Bookman, 2002. cap. 1, p. 25-33.

BOZKAYA, B.; ZHANG, J.; ERKUT, E. An Efficient Genetic Algorithm for the p -Median Problem. In: DREZNER, Z.; HAMACHER, H. W. (Org.). **Facility Location: applications and theory**. Berlin: Springer-Verlag, 2002. cap. 6, p. 179-206.

BRASIL. Decreto nº 5.081, de 14 de maio de 2004. **Diário Oficial [da] Republica Federativa do Brasil**, Poder Executivo, Brasília, DF, 17 mai. 2004. Seção 1, p. 1.

BRONSON, R. **Pesquisa Operacional**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1985.

BUFFA, E. S. **Production - Inventory Systems: planning and control**. Illinois: Richard D. Irwin, Inc., 1968.

CAMPELLO, R. E.; MACULAN, N. **Algoritmos e Heurísticas: desenvolvimento e avaliação de performance**. Niterói: EDUFF, 1994.

CHIYOSHI, F. Y.; GALVÃO, R. D. A Statistical Analysis of Simulated Annealing Applied to the p -median Problem. **Annals of Operations Research**. v. 96, n. 1, p. 61-74, 2000.

CHOPRA, S.; MEINDL, P. **Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos: estratégia, planejamento e operação**. São Paulo: Prentice Hall, 2003.

CHRISTOFIDES, N. **Graph Theory: an algorithmic approach**. London: Academic Press, 1975.

CHRISTOPHER, M. **Logística e Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos: criando redes que agregam valor**. São Paulo: Thomson, 2007.

CHURCH, R.; EATON, D. J. Hierarchical Location Analysis Using Covering Objectives. In: GHOSH, A.; RUSHTON, G. (Org.). **Spatial Analysis and Location-Allocation Models**. New York: Van N. Reinhold, 1987. cap. 7, p. 163-185.

CLARKE, A. B.; DISNEY, R. L. **Probabilidade e Processos Estocásticos**. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

CONFEDERAÇÃO NACIONAL DO TRANSPORTE (CNT). **Pesquisa CNT de Rodovias 2009: relatório gerencial**. Brasília: CNT : SEST : SENAT. 152 p, 2009. Disponível em: <<http://www.cnt.org.br>>. Acesso em: 10 dez. 2009.

CORRÊA, H. L.; CORRÊA, C. A. **Administração de Produção e de Operações: manufatura e serviços: uma abordagem estratégica**. São Paulo: Atlas, 2005.

CURRENT, J.; DASKIN, M.; SCHILLING, D. Discrete Network Location Models. In: DREZNER, Z.; HAMACHER, H. W. (Org.). **Facility Location: applications and theory**. Berlin: Springer-Verlag, 2002. cap. 3, p. 81-118.

DASKIN, M.; COULLARD, C. R.; SHEN, Z. M. An Inventory-Location Model: Formulation, Solution Algorithm and Computational Results. **Annals of Operations Research**. v. 110, n. 1, p. 83-106, 2002.

DESAI, J.; SEN, S. A Global Optimization Algorithm for Reliable Network Design. **European Journal of Operation Research**. v. 200, n. 1, p. 1-8, 2010.

DE FIGUEIREDO, J. N.; MAYERLE, S. F. Designing Minimum-Cost Recycling Collection Networks with Required Throughput. **Transportation Research Part E**. v. 44, n. 5, p. 731-752, 2008.

DORNIER, P. et al. Gestão da Cadeia de Suprimentos Global. In: _____. **Logística e Operações Globais: texto e casos**. São Paulo: Atlas, 2000. cap. 7, p. 369-420.

DREZNER, Z. Replacing Discrete Demand with Continuous Demand. In: DREZNER, Z. (Org.). **Facility Location: A survey of Applications and Methods**. New York: Springer-Verlag, 1995. cap. 2, p. 33-42.

EISELT, H. A.; LAPORTE, G. Objectives in Location Problems. In: DREZNER, Z. (Org.). **Facility Location: A survey of Applications and Methods**. New York: Springer-Verlag, 1995. cap. 8, p. 151-180.

EITAN, Y.; NARULA, S. C.; TIEN, J. M. A Generalized Approach to Modeling the Hierarchical Location-Allocation Problem. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**. v. 21, n. 1, p. 39-46, 1991.

FAZEL, F.; FISCHER, K. P.; GILBERT, E. W. JIT purchasing vs. EOQ with a price discount: An analytical comparison of inventory costs. **International Journal of Production Economics**. v. 54, n. 1, p. 101-109, 1998.

FENLEY, C. A. **Aviação e desenvolvimento sustentável do Amazonas**. 2007. 146 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

FLEURY, P. F. Conceito de logística integrada e supply chain management. In: _____. **Logística empresarial: a perspectiva brasileira**. São Paulo: Atlas, 2000. cap. 2, p. 27-48.

FOOTE, B.; KEBRIAIEI, N.; KUMIN, H. Heuristic policies for inventory ordering problems with long and randomly varying lead time. **Journal of Operational Management**. v. 7, n. 4, p. 115-124, 1988.

FRANCIS, R. L.; WHITE, J. A. **Facility Layout and Location: an analytical approach**. New Jersey: Prentice-Hall, 1974.

GAITHER, N.; FRAZIER, G. Sistemas de estoques com demanda independente. In: _____. **Administração da produção e Operações**. São Paulo: Pioneira, 2001. cap. 9, p. 268-307.

GALVÃO, R. D. Uncapacitated Facility Location Problems: contributions. **Pesquisa Operacional**. v. 24, n. 1, p. 7-38, 2004.

GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and Intractability: a guide to the theory of NP-completeness**. New York: W. H. Freeman, 1979.

GHEZAVATI, V. R.; JADAL-AMELI, M. S.; MAKUI, A. A New Heuristic Method for Distribution Networks Considering Service Level Constraints and Coverage Radius. **Expert Systems with Applications**. v. 36, n. 3, p. 5620-5629, 2009.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear: modelos e algoritmos**. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

HASTINGS, N. A. J. **Dynamic Programming with Management Applications**. London: Butterworths, 1973.

HAKIMI, S. L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. **Operations Research**. v. 12, n. 3, p. 450-459, 1964.

HAKIMI, S. L. Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems. **Operations Research**. v. 13, n. 3, p. 462-475, 1965.

HARRIS, F. W. How many parts to make at once. **Factory, The Magazine of Management**, v. 10, n. 2, p. 135-136, 1913.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introduction to Operations Research**. São Francisco: Holden-Day, 1967.

HOWE, W. G.; A New Look at Brown's Dynamic Inventory System. **Operations Research**. v. 22, n. 4, p. 848-857, 1974.

JUNK, W. J.; FURCH, K. The Physical and Chemical Properties of Amazonian Waters and their Relationships with the Biota. In: PRANCE, G. T.; LOVEJOY, T. E. (Org.). **Key Environments Amazonia**. New York: Pergamon Press Inc., 1985. cap. 1, p. 3-17.

KNUTH, D. E. Random Numbers. In: _____. **The Art of Computer Programming**. California: Addison-wesley, 1969. cap. 3, p. 1-160.

LAU, R. S. M.; XIE, J.; ZHAO, X.; Effects of inventory policy on supply chain performance - a simulation study of critical decision parameters. **Computers & Industrial Engineering**. v. 55, n. 3, p. 620-633, 2008.

LEE, A. M. Simulation Techniques. In: _____. **Applied Queuing Theory**. London: MacMillan, 1966. cap. 6, p. 69-80.

LI, Z.; XU, H. S.; HAYYA, J. A Periodic-Review Inventory System with Supply Interruptions. **Probability in the Engineering and Informational Sciences**. v. 18, n. 1, p. 33-53, 2004.

LIMA, P. M. Custos Logísticos na Economia Brasileira. **Revista Tecnológica**, ano XI, nº. 122, p. 64-69, 2006.

MAK, H. Y.; SHEN, Z. M. A Two-Echelon Inventory-Location Problem with Service Considerations. **Naval Research Logistics**. v. 56, n. 8, p. 730-744, 2009.

MAYERLE, S. F. **Notas de Aula sobre Programação Dinâmica**. PPGEP, 2009.

MILLER, T. C.; FRIESZ, T. L.; TOBIN, R. L. **Equilibrium Facility Location on Networks**. Berlin: Springer, 1996.

NADDOR, E. **Inventory Systems**. New York: John Wiley, 1966.

NARULA, S. C. Hierarchical location-allocation problems: A classification scheme. **European Journal of Operational Research**. v. 15, n. 1, p. 93-99, 1984.

NOVAES, A. G.; SOUZA DE CURSI, J. E.; DA SILVA, A. C. L.; SOUZA, J. C. Solving continuous location-districting problems with

Voronoi diagrams. **Computers & Operations Research**. v. 36, n. 1, p. 40-59, 2009.

NOVAES, A. G. Resolução de Problemas de Transporte com Diagramas de Voronoi. **Transporte em Transformação XII: trabalhos vencedores do prêmio CNT de produção acadêmica**. Brasília: Positiva, 2007.

NOVAES, A. G. **Logística e Gerenciamento da Cadeia de Distribuição: estratégia, operação e avaliação**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2004.

NOVAES, A. G.; ALVARENGA, A. C. Armazenagem de produtos. In: _____. **Logística Aplicada: suprimento e distribuição física**. São Paulo: Pioneira, 1994. cap. 8, p. 183-213.

NOVAES, A. G. **Pesquisa Operacional e Transportes: modelos probabilísticos**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975.

NUNES, L. F. **Um algoritmo Heurístico para Solução de Problemas de Grande Escala de Localização de Instalações com Hierarquias**. 2002. 174 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis.

OZSEN, L.; DASKIN, M. S.; COULLARD, C. R. Facility Location Modeling and Inventory Management with Multisourcing. **Transportation Science**. v. 43, n. 4, p. 455-472, 2009.

OWEN, S. H.; DASKIN, M. S. Strategic Facility Location: a review. **European Journal of Operational Research**. v. 111, n. 3, p. 423-447, 1998.

PAGE, E. **Queueing Theory in OR**. London: Butterworths, 1972.

PARLAR, M.; BERKIN, D. Future Supply Uncertainty in EOQ Models. **Naval Research Logistics**. v. 38, n. 1, p. 107-121, 1991.

PARLAR, M.; PERRY, D. Analysis of a (Q, r, T) Inventory Policy with Deterministic and Random Yields when Future Supply is

Uncertain. **European Journal of Operations Research**. v. 84, n. 2, p. 431-443, 1995.

PARLAR, M.; WANG, Y.; GERCHAK, Y. A Periodic Review Inventory Model with Markovian Supply Availability. **International Journal of Production Economics**. v. 42, n. 2, p. 131-136, 1995.

PARLAR, M.; PERRY, D. Inventory Models of Future Supply Uncertainty with Single and Multiple Suppliers. **Naval Research Logistics**. v. 43, n. 2, p. 191-210, 1996.

PIZZOLATO, N. D. A Heuristic for Large Size p -Median Location Problems with Application to School Location. **Annals of Operations Research**. v. 50, n. 1, p. 473-485, 1994.

POWELL, W. B. **Approximate Dynamic Programming - solving the curses of dimensionality**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2007.

RATICK, S. J.; OSLEEB, J. P.; KUBY, M.; LEE, K. Interperiod Network Storage Location-Allocation (INSLA) Models. In: GHOSH, A.; RUSHTON, G. (Org.). **Spatial Analysis and Location-Allocation Models**. New York: Van N. Reinhold, 1987. cap. 10, p. 269-301.

RAYMOND, F. E. **Quantity and Economy in Manufacturing**. New York: McGraw-Hill, 1931.

REVELLE, C. S.; EISELT, H. A. Location Analysis: a synthesis and survey. **European Journal of Operational Research**. v. 165, n. 1, p. 1-19, 2005.

REVELLE, C. S.; EISELT, H. A.; DASKIN, M. S. A Bibliography for Some Fundamental Problem Categories in Discrete Location Science. **European Journal of Operational Research**. v. 184, n. 3, p. 817-848, 2008.

ROACH, B. Origin of the economic order quantity formula; transcription or transformation? **Management Decision**, v. 43, n. 9, p. 1262-1268, 2005.

ROBINSON, S. www.simulation: What, Why and When?. In: _____. **Simulation: the practice of model development and use**. England: John Wiley & Sons, 2004. cap. 1, p. 1-12.

ROBUSTÉ, F.; DAGANZO, C. F. SOULEYRETTE II, R. R. Implementing Vehicle Routing Models. **Transportation Research Part B**. v. 24, n. 4, p. 263-286, 1990.

ROSA, H.; MAYERLE, S. F.; GONÇALVES, M. B. Controle de Estoque por Revisão Contínua e Revisão Periódica: uma análise comparativa utilizando simulação. **Produção**. Artigo aprovado para publicação, 2010.

ROSS, A. M.; RONG, Y.; SNYDER, L. V. Supply Disruptions with Time-Dependent Parameters. **Computers & Operations Research**. v. 35, n. 11, p. 3504-3529, 2008.

SANTIVÁÑEZ, J.; MELACHRINOUDIS, E.; HELANDER, M. E. Network Location of a Reliable Center Using the Most Reliable Route Policy. **Computers & Operations Research**. v. 36, n. 5, p. 1437-1460, 2009.

ŞAHİN, G.; SÜRAL, H. A Review of Hierarchical Facility Location Models. **Computers & Operations Research**. v. 34, n. 8, p. 2310-2331, 2007.

SCHNIEDERJANS, M. J.; CAO, Q. A note on JIT purchasing vs. EOQ with a price discount - An expansion of inventory costs. **International Journal of Production Economics**. v. 65, n. 3, p. 289-294, 2000.

SCHONBERGER, R. J. A produção Just-in-Time com o controle da qualidade total. In: _____. **Técnicas industriais japonesas: nove lições ocultas sobre a simplicidade**. São Paulo: Pioneira, 1992. cap. 2, p. 13-37.

SENNE, E. L. F.; LORENA, L. A. N; PEREIRA, M. A. A Branch-and-Price Approach to p -Median Location Problems. **Computers & Operations Research**. v. 32, n. 6, p. 1655-1664, 2005.

SERRA, D.; REVELLE, C. Competitive Location in Discrete Space. In: DREZNER, Z. (Org.). **Facility Location: A survey of Applications and Methods**. New York: Springer-Verlag, 1995. cap. 16, p. 367-386.

SHAMBLIN, J. E.; STEVENS Jr., G. T. **Operations Research: a fundamental approach**. New York: McGraw-Hill, 1974.

SHEN, Z. M.; COULLARD, C. DASKIN, M. S. A Joint Location-Inventory Model. **Transportation Science**. v. 37, n. 1, p. 40-55, 2003.

SHINGO, S. **Sistemas de Produção com Estoque Zero: o sistema Shingo para melhorias contínuas**. Porto Alegre: Bookman, 1996.

SLACK, N. et al. Planejamento e Controle de Estoques. In: _____. **Administração da Produção**. São Paulo: Atlas, 1997. cap. 12, p. 380-409.

SNYDER, L. V.; DASKIN, M. S.; TEO, C. The Stochastic Location Model with Risk Pooling. **European Journal of Operational Research**. v. 179, n. 3, p. 1221-1238, 2007.

SUPERINTENDÊNCIA DA ZONA FRANCA DE MANAUS (SUFRAMA). **Indicadores de Desempenho do Pólo Industrial de Manaus 2005-2010**. Disponível em: <<http://www.suframa.go.v.br>>. Acesso em: 17 jun. 2010.

TUBINO, D. F. Administração dos estoques. In: _____. **Manual de planejamento e controle da produção**. São Paulo: Atlas, 2000. cap. 5, p. 103-145.

WEISS, H. J.; ROSENTHAL, E. C. Optimal Ordering Policies When Anticipating a Disruption in Supply or Demand. **European Journal of Operational Research**. v. 59, n. 3, p. 370-382, 1992.

WILD, T. **Best practice in inventory management**. Oxford: Elsevier, 2002.

WU, K. (Q, r) inventory model with variable lead time when de amount received is uncertain. **Information and Management Sciences**. v. 11, n. 3, p. 81-94, 2000.

APÊNDICE A - Relatório de Alocação da Melhor Solução Obtida

Relatório de alocação da melhor solução obtida com o modelo proposto:

Número de Vértices de Demanda...	100
Número de Possíveis Medianas.....	25
Número de Medianas Abertas.....	8
Transmissão Associada.....	463.953,40

1º CDR

Vértice $x_i = 01$

Nº Vért. Alocados: 16

LEC = 62 unid.

$\bar{\lambda}_i = 154,80$ unid.

$\tilde{F}_i = 17.018,69$

Vértices Alocados e Estimativas de Custo					
Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}	Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}
1º	05	5.789,37	9º	56	4.364,31
2º	09	3.852,52	10º	70	1.957,09
3º	15	3.172,36	11º	74	5.039,22
4º	18	3.034,67	12º	90	2.346,33
5º	19	2.502,58	13º	93	3.400,77
6º	30	2.622,00	14º	94	1.567,14
7º	31	1.722,69	15º	95	3.122,20
8º	53	2.155,85	16º	97	2.160,66

2º CDRVértice $x_i = 04$

Nº Vért. Alocados: 09

LEC = 46 unid.

 $\bar{\lambda}_i = 85,30$ unid. $\tilde{F}_i = 15.240,82$

Vértices Alocados e Estimativas de Custo					
Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}	Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}
1º	00	3.466,31	6º	52	3.442,20
2º	08	2.613,70	7º	63	3.354,78
3º	21	2.727,08	8º	83	3.306,26
4º	23	3.256,78	9º	96	4.313,85
5º	49	4.256,81			

3º CDRVértice $x_i = 05$

Nº Vért. Alocados: 15

LEC = 63 unid.

 $\bar{\lambda}_i = 158,00$ unid. $\tilde{F}_i = 18.049,73$

Vértices Alocados e Estimativas de Custo					
Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}	Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}
1º	02	3.658,44	9º	59	2.678,14
2º	06	4.711,68	10º	64	2.932,89
3º	14	2.015,41	11º	65	2.254,63
4º	22	2.479,49	12º	68	3.074,12
5º	25	2.435,01	13º	75	3.546,18
6º	27	2.937,95	14º	85	2.483,60
7º	39	3.425,25	15º	92	2.561,84
8º	57	3.346,72			

4º CDRVértice $x_i = 07$

Nº Vért. Alocados: 15

LEC = 48 unid.

 $\bar{\lambda}_i = 126,90$ unid. $\tilde{F}_i = 15.204,91$

Vértices Alocados e Estimativas de Custo					
Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}	Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}
1º	07	2.824,51	9º	61	2.674,91
2º	11	3.113,95	10º	62	3.310,41
3º	12	2.096,27	11º	67	1.989,01
4º	36	4.999,28	12º	73	3.968,56
5º	45	4.007,06	13º	79	2.882,06
6º	48	3.212,40	14º	82	3.015,51
7º	51	1.793,37	15º	99	2.544,38
8º	58	3.411,67			

5º CDRVértice $x_i = 14$

Nº Vért. Alocados: 07

LEC = 28 unid.

 $\bar{\lambda}_i = 71,40$ unid. $\tilde{F}_i = 14.075,20$

Vértices Alocados e Estimativas de Custo					
Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}	Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}
1º	01	3.056,50	5º	47	4.531,43
2º	04	5.578,05	6º	86	2.944,61
3º	17	4.938,93	7º	88	3.871,92
4º	37	4.096,90			

6º CDRVértice $x_i = 15$

Nº Vért. Alocados: 10

LEC = 42 unid.

 $\bar{\lambda}_i = 112,20$ unid. $\tilde{F}_i = 16.776,09$

Vértices Alocados e Estimativas de Custo					
Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}	Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}
1º	13	4.411,00	6º	58	3.319,11
2º	24	2.201,22	7º	71	3.189,71
3º	26	3.901,04	8º	72	3.324,89
4º	29	3.488,75	9º	80	3.320,08
5º	50	2.391,28	10º	87	2.870,55

7º CDRVértice $x_i = 17$

Nº Vért. Alocados: 12

LEC = 47 unid.

 $\bar{\lambda}_i = 119,00$ unid. $\tilde{F}_i = 23.103,55$

Vértices Alocados e Estimativas de Custo					
Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}	Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}
1º	10	1.567,63	7º	76	3.709,45
2º	33	2.577,44	8º	77	3.404,11
3º	38	4.807,12	9º	81	2.307,51
4º	42	3.063,50	10º	84	2.774,65
5º	46	3.915,01	11º	89	2.244,67
6º	60	1.790,40	12º	91	2.560,64

8º CDRVértice $x_i = 24$

Nº Vért. Alocados: 16

LEC = 55 unid.

 $\bar{\lambda}_i = 163,80$ unid. $\tilde{F}_i = 21.641,18$

Vértices Alocados e Estimativas de Custo					
Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}	Vértice	x_j	\tilde{V}_{ij}
1º	03	2.632,46	9º	41	3.669,07
2º	16	5.031,98	10º	43	5.024,68
3º	20	3.125,60	11º	44	2.893,02
4º	28	4.498,27	12º	55	2.809,24
5º	32	3.442,92	13º	66	4.451,12
6º	34	2.887,38	14º	69	3.524,33
7º	35	3.784,39	15º	78	3.233,31
8º	40	2.633,29	16º	98	3.111,80