

**AGUSTINHO PLUCENIO**

**DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS  
DE CONTROLE NÃO LINEAR PARA  
ELEVAÇÃO DE FLUIDOS  
MULTIFÁSICOS**

**FLORIANÓPOLIS  
2010**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
SANTA CATARINA PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
DE AUTOMAÇÃO  
E SISTEMAS**

**DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS  
DE CONTROLE NÃO LINEAR PARA  
ELEVAÇÃO DE FLUIDOS  
MULTIFÁSICOS**

Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Automação  
e Sistemas.

**Agustinho Plucenio**

Florianópolis, Maio de 2010.

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária  
da  
Universidade Federal de Santa Catarina

P733d Plucenio, Agostinho

Desenvolvimento de técnicas de controle não linear para elevação de fluidos multifásicos [tese] / Agostinho Plucenio ; orientador, Daniel Juan Pagano. - Florianópolis, SC, 2010.

275 p.: il., grafs., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de sistemas. 2. Controle preditivo para sistemas não lineares. 3. Elevação por injeção contínua de gás. I. Pagano, Daniel Juan. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. III. Título.

CDU 621.3-231.2(021)

# DESENVOLVIMENTO DE TÉCNICAS DE CONTROLE NÃO LINEAR PARA ELEVAÇÃO DE FLUIDOS MULTIFÁSICOS

Agustinho Plucenio

‘Esta Tese foi julgada adequada, servindo como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas, e aprovado em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.’

---

Daniel J. Pagano, Dr.  
Orientador

---

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas

Banca Examinadora:

---

Daniel J. Pagano, Dr.  
Presidente

---

Adhemar de Barros Fontes, Dr.

---

Mario C. Massa de Campos, Dr.

---

Pedro Garcia Gil, Dr.

---

Julio Elias Normey Rico, Dr.

---

Eduardo Camponogara, Dr.



## *Dedicatória*

*A memória de meus queridos pais José e Celina Aurélia  
Plucenio.*





## *Agradecimentos*

*Agradeço a minha esposa Márcia e aos meus filhos Daniel, Renata e Guilherme pelo incondicional carinho e apoio.*



Resumo da tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

# **Desenvolvimento de Técnicas de Controle Não Linear para Elevação de Fluidos Multifásicos**

**Agustinho Plucenio**

Maio/2010.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Juan Pagano

Área de Concentração: Controle e Automação

Palavras-chave: Controle Preditivo para Sistemas Não Lineares, Elevação por Injeção Contínua de Gás

Número de Páginas: 341

O ambiente no fundo de poços de petróleo é hostil. Altas pressões e temperaturas freqüentemente combinadas com a presença de fluidos ácidos são um desafio para a instalação de instrumentação de fundo de poço. Além das condições do ambiente, há a dificuldade de prover alimentação de energia para esses instrumentos e meios de comunicação com a superfície. Não menos importante é o desafio tecnológico da medição das vazões de água, óleo e gás em escoamento multifásico com técnicas não intrusivas e com baixa perda de pressão. Para completações em águas profundas e especialmente com a cabeça do poço instalada no fundo do mar (árvore de Natal molhada), uma operação para a troca de um instrumento de fundo de poço pode significar custos da ordem de até dezenas de milhões de dólares. Esta situação inibiu por muito tempo o desenvolvimento de instrumentação para fundo de poço e possivelmente foi um dos fatores que influenciou o baixo nível de

pesquisa em modelos e técnicas de controle e automação da produção já que para controlar deve-se medir. Felizmente, nos últimos 10 anos, tem havido um grande desenvolvimento de instrumentos de medição e atuação para uso no fundo de poços. Paralelamente ao esforço na área de instrumentação tem havido avanços no desenvolvimento de técnicas de controle e automação para a produção de petróleo protagonizados pelas grandes empresas operadoras. As soluções propostas por cada empresa recebem diferentes denominações como Campo Inteligente, Poço Inteligente, Gerenciamento digital e integrado da produção, etc, mas, independente da denominação, consistem na aplicação de técnicas de controle, automação e otimização para o desenvolvimento de um campo de petróleo. Frequentemente as soluções propostas são incipientes e utilizam heurísticas nas tomadas de decisões frente a falta de modelos representativos dos processos e da ausência de medição de todas as variáveis necessárias. Em alguns projetos recentes de desenvolvimento de campos de petróleo torna-se evidente que o avanço da tecnologia de instrumentação de fundo de poço atropelou o desenvolvimento de modelos e algoritmos de controle que não estão preparados para utilizar as novas medições e capacidade de atuação para a melhoria do controle dos processos de exploração. Nesses casos a empresa operadora depara-se com o problema de ter mais informação do que pode utilizar. Em algumas instalações modernas a quantidade de informação é tanta que a dificuldade é determinar quais dados armazenar e em que taxa de amostragem uma vez que existe uma percepção de que essas informações não estão sendo utilizadas em toda sua plenitude.

O algoritmo de controle preditivo para sistemas não lineares desenvolvido neste trabalho pode utilizar praticamente qualquer tipo de modelo do processo já que obtém a representação linearizada do sistema de forma numérica. Esta característica deve permitir sua utilização no controle e otimização da exploração de reservatórios utilizando simulador de reservatório como modelo do processo. A dinâmica lenta das principais variáveis e parâmetros do reservatório permite tempos de amostragem tão grande como dias ou até meses o que facilitaria a aplicação do algoritmo.

Um dos primeiros instrumentos de medição desenvolvidos para instalação em fundo de poço foram os sensores para a medição de pressão e temperatura (PDG) que hoje são instalados em praticamente todos os novos poços marítimos no Brasil.

O trabalho trata do desenvolvimento de modelos e técnicas de controle para elevação de fluido multifásicos abordando a elevação artificial por injeção contínua de gás (GLC) e a elevação de fluido em

*riser* submarino. A elevação por GLC é um dos métodos de elevação artificial mais utilizados no Brasil respondendo por mais de 70 % da produção do petróleo nacional. Os desenvolvimentos pressupõem que os poços operando via GLC disponham da medição da pressão e temperatura de fundo dos poços, da medição da vazão de injeção de gás e da existência de *chokes* de injeção de gás com atuação automática.

As contribuições do trabalho são

- o desenvolvimento de modelos para utilização na descrição fenomenológica, otimização e controle do processo de elevação por GLC,
- desenvolvimento de um algoritmo de controle MPC distribuído,
- desenvolvimento de um algoritmo MPC prático para sistemas não lineares,
- aplicação de otimização e controle a um grupo de poços operando via GLC e
- a aplicação de controle na operação de um *riser* submarino.



Abstract of the Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Automation and System Engineering.

# Development of Non Linear Control Techniques for the lifting of Multiphase Fluids

Agustinho Plucenio

May/2010.

Advisor: Prof. Dr. Daniel Juan Pagano

Area of Concentration: Controle e Automação

Keywords: Model Based Predictive Control for Non Linear Systems, Gas-Lift

Number of pages: 341

The environment at the bottom of oil wells is hostile. High pressures and temperatures combined with the presence of acid fluids are a challenge for the installation of downhole instruments. Besides the environment conditions, there is a difficulty to provide power for the instruments and means of communication to the surface. Not less important is the technological challenge for measuring the flow-rates of oil, water and gas in multiphase flow with non intrusive techniques with low pressure losses. For deep water completions and specially with the well production head at the sea bottom (wet xmas-tree completion), an operation to replace a faulty downhole instrument may cost up to tens of million dollars. For a long time this situation inhibited the development of downhole instruments and it is likely the cause for the low level of research on models and techniques for the control and automation of oil production since to control it is necessary to measure. Fortunately in the last 10 years there has been a big development of instrumentation for measuring and actuation for downhole wells. Parallel to the effort in the area of instrumentation there has been advances in developing techniques of control and automation for the oil production

under the leadership of the major operating companies. The solutions proposed by these companies receive different names as Intelligent Field Technology, Smar Well Technology, Digital and Integrated Oilfield Management, etc, but, regardless of denomination, are the implementation of control techniques, automation and optimization to develop an oil field.

Quite often the proposed solutions are only incipient and use heuristics in making decisions due to the lack of representative process models and complete measurements of all variables.

In some modern oilfield development projects it becomes evident that advances in downhole instrumentation technology ran over the development of models and control algorithms that are not ready to use the new measurements and actuation capacity to improve the exploitation process. In this case the operating oil company faces the problem of having more information than it can use. In some modern facilities the amount of information is such that often the difficulty is determining what data to store and what sampling rate to adopt, as there is a perception that this information is not being used in all its fullness.

The model based predictive control algorithm for nonlinear systems developed in this work can use practically any kind of process model since it derives a linearized representation of the system numerically. This characteristic should allow its application in controlling and optimizing the exploitation of reservoirs using a reservoir simulator as the system model. The slow dynamics of the main reservoir variables and parameters allows sampling times as big as days or even months which would facilitate the implementation of the algorithm.

One of the first downhole instruments developed were the temperature and pressure downhole gages (PDG) that are being installed today in nearly all new offshore wells in Brasil. This work deals with the development of models and control techniques for multiphase flow lift approaching the gas-lift method and the fluid elevation in submarine risers. More than 70% of the oil production in Brazil is realized using continuous gas-lift (GLC) as the artificial lift method. The developments assume that the wells operating with gas-lift have downhole pressure and temperature measurements, gas injection flow-rate measurements and automated injection chokes.

The contributions of this work are

- development of gas-lift models for the phenomenological description of the process, optimization and process control,
- development of an algorithm for distributed MPC,



- development of an algorithm MPC for nonlinear systems,
- application of control and optimization for a group of wells operating with gas-lift,
- application of control for the operation of a submarine riser.



# Glossário

Árvore de Natal - Conjunto de equipamentos como válvulas e conexões instalados na cabeça do poço cuja função principal é possibilitar o escoamento para fora ou para dentro do poço.

*BSW - Basic sediments and water.*

Cabeça do poço - O sistema de conexões, válvulas e adaptadores variados que proporcionam o controle da pressão de um poço de produção.

Canhoneados - Região do revestimento onde foi realizado operação de canhoneio visando estabelecer comunicação hidráulica entre o poço e a formação.

*Choke* - Dispositivo que incorpora um orifício, utilizado para ajustar vazão ou pressão.

Completação - Conjunto de operações realizadas depois da perfuração do poço que visam colocar o poço em produção.

Depletado - Reservatório cuja pressão caiu abaixo da pressão original devido a produção de fluidos.

Exploração - Exploração econômica de um campo petrolífero.

Exploração - Fase inicial das operações de petróleo que incluem a geração de um prospecto e a perfuração de um poço exploratório.

Fluido subsaturado - Fluido que na pressão e temperatura em que se encontra é 100% líquido.

*Gas lift manifold* - Seção de duto que recebe gás da unidade de compressão e de onde saem dutos que alimentam os poços operando via *gas lift* contínuo.

*GOR - Gas Oil Ratio.*

*Packer* - Elemento instalado dentro do poço revestido que permite isolar o espaço anular revestimento-tubo de produção do tubo de produção.

Perfilagem - Conjunto de registros de dados da formação obtidos por meio de ferramentas descidas no interior do poço.

Revestimento ou *casing* - Tubos de aço de em seções de aproximadamente 12 metros utilizados para fazer o isolamento do poço com a formação.

*Slick line* - Operação onde ferramentas são descidas dentro do poço na extremidade de um cabo de aço para realizar operações como assentamento de válvulas de *gas-lift*, movimentar *sliding-sleeves*, etc.

*Sliding Sleeve* - Luva deslizante que permite bloquear ou abrir para fluxo uma zona do poço.

Tubos de produção ou *tubing* - Tubos de aço instalados no interior dos poços revestidos por onde fluem os fluidos produzidos ou injetados.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos do Trabalho . . . . .	6
1.2	Organização do Trabalho . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Elevação Artificial via Injeção Contínua de Gás</b>	<b>9</b>
2.1	O Processo de Elevação por Injeção Contínua de Gás - GLC . . . . .	10
2.2	Modelagem do Processo de Elevação por Injeção Con- tínua de Gás . . . . .	14
2.2.1	Um modelo fenomenológico a parâmetros con- centrados . . . . .	18
2.2.2	Um modelo empírico para otimização da elevação por GLC . . . . .	45
2.2.3	Um modelo dinâmico para controle e otimização	78
2.3	Conclusões e desenvolvimentos futuros . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Controle MPC Distribuído</b>	<b>83</b>
3.1	Desenvolvimento de agentes para controle de processos .	85
3.2	MPC distribuído . . . . .	87
3.2.1	Decomposição da Formulação MPC sem restrição	88
3.2.2	Aplicação da técnica para um problema <i>benchmark</i>	94
3.2.3	Comparação entre o algoritmo MPC Centralizado e Distribuído . . . . .	97
3.2.4	Desempenho do algoritmo MPC distribuído . . .	99
3.3	Convergência do Algoritmo MPC distribuído . . . . .	101
3.4	MPC distribuído na presença de restrições . . . . .	103

3.4.1	Restrições sobre $\Delta u$ . . . . .	105
3.4.2	Restrições sobre $\mathbf{u}$ . . . . .	109
3.4.3	Restrições sobre $y$ . . . . .	112
3.5	Conclusões e desenvolvimentos futuros . . . . .	120
<b>4</b>	<b>MPC Prático para sistemas não lineares - PNMPC</b> . . . . .	<b>121</b>
4.1	Introdução . . . . .	121
4.2	Metodologias de MPC para Processos Não Lineares . . . . .	123
4.2.1	MPC com modelos de predição não-linear na Função Objetivo . . . . .	123
4.2.2	Métodos baseados em modelos particulares . . . . .	124
4.2.3	Métodos baseados em linearizações . . . . .	124
4.3	Desenvolvimento da técnica PNMPC . . . . .	127
4.3.1	A obtenção de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}_{PNMPC}$ . . . . .	137
4.3.2	Obtenção da ação de controle . . . . .	138
4.3.3	Exemplo 1 . . . . .	138
4.4	Erro de predição, ruído e perturbações . . . . .	141
4.4.1	Exemplo 2 . . . . .	144
4.5	Aplicação em processos multivariáveis . . . . .	148
4.5.1	Exemplo 3 - PNMPC aplicado no controle de uma Planta com 6 Tanques Esféricos . . . . .	148
4.6	PNMPC com Gradiente Ponderado . . . . .	155
4.6.1	Exemplo 4 - PNMPC aplicado no controle da reação Van Der Vussen . . . . .	159
4.7	Estabilidade . . . . .	168
4.7.1	Desenvolvendo uma condição suficiente para es- tabilidade . . . . .	168
4.7.2	Introduzindo a condição para estabilidade na for- mulação MPC com PQ . . . . .	170
4.7.3	Aplicação da técnica . . . . .	172
4.7.4	Método iterativo para a restrição quadrática so- bre $\Delta \mathbf{u}$ . . . . .	174
4.8	Conclusão e desenvolvimentos futuros . . . . .	192

<b>5</b>	<b>Controle aplicado a poços operando via GLC</b>	<b>195</b>
5.1	Introdução . . . . .	196
5.1.1	Elf 1990 . . . . .	197
5.1.2	Suez Oil Co. 1995 . . . . .	198
5.1.3	Shell 1998 . . . . .	199
5.1.4	Texaco 1999 . . . . .	203
5.1.5	TotalFinaElf 2002 . . . . .	204
5.1.6	Dubai Petroleum Company 2006 . . . . .	205
5.1.7	Petrobras 2006 . . . . .	206
5.2	Um sistema de Controle automático com ênfase na otimização da produção . . . . .	208
5.2.1	Obtenção da vazão de gás disponível para injeção nos poços . . . . .	209
5.2.2	Controlador PI com ação Feed-Forward considerando a dinâmica da válvula . . . . .	217
5.2.3	Síntese dos parâmetros de um Controlador Robusto com ação FF . . . . .	221
5.2.4	Resultados obtidos com simulação na síntese do controlador robusto . . . . .	222
5.2.5	Implementação da Proposta para Automação de um Grupo de Poços . . . . .	227
5.2.6	Um estudo de caso para operação com restrição .	230
5.3	Um sistema de Controle automático utilizando a técnica de controle preditivo baseado em modelo PNMPC . . .	237
5.3.1	A formulação NMPC . . . . .	238
5.3.2	A função custo para o algoritmo PNMPC . . . . .	239
5.3.3	Sintonia do algoritmo PNMPC . . . . .	246
5.3.4	Resultados obtidos . . . . .	248
5.4	Conclusões e desenvolvimentos futuros . . . . .	252
<b>6</b>	<b>Controle de escoamento em risers</b>	<b>255</b>
6.1	Introdução . . . . .	255
6.2	Revisitando a estratégia PI para suprimir <i>slug-flow</i> . . .	259
6.3	Estratégia Slug SMC . . . . .	261
6.4	Uma estratégia slug SMC modificada . . . . .	264
6.5	Controle <i>Slug Washout SMC</i> . . . . .	268
6.6	Conclusões . . . . .	271

<b>7</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>275</b>
----------	--	------------

**A Introdução ao Controle Preditivo Baseado em Modelo** **281**

A.1	Introdução . . . . .	281
-----	----------------------	-----

A.2	Conceitos Básicos de MPC . . . . .	285
-----	------------------------------------	-----

A.2.1	Tipos de Controle Preditivo para Sistemas Lineares	288
-------	--	-----

A.2.2	DMC - Dynamic Matrix Control . . . . .	289
-------	--	-----



# Lista de Figuras

2.1	Elevação por Injeção Contínua de Gás . . . . .	11
2.2	Curva Típica da Vazão de Líquido e Pressão na frente dos Canhoneados x Vazão Mássica de Gás de Injeção . . . . .	12
2.3	Poço operando com Gas-lift . . . . .	20
2.4	Fração mássica de gás . . . . .	24
2.5	Alguns resultados para regime permanente . . . . .	38
2.6	Alguns resultados de simulação dinâmica I . . . . .	39
2.7	Alguns resultados de simulação dinâmica II . . . . .	40
2.8	Resultados com o simulador OLGA2000 <sup>MR</sup> I . . . . .	41
2.9	Resultados com o simulador OLGA2000 <sup>MR</sup> II . . . . .	42
2.10	Comportamento tipo órbita fechada . . . . .	42
2.11	Equilíbrios com modelo desenvolvido . . . . .	43
2.12	Equilíbrios com OLGA2000 <sup>MR</sup> . . . . .	43
2.13	Simulação dinâmica p/ $P_r = 11$ MPa com $q_{gf} = 0.55$ kg/s . . . . .	44
2.14	Modelo de influxo . . . . .	47
2.15	IPR linear + Vogel . . . . .	56
2.16	$p_{wf} = f(q_{inj})$ para poços UFSC-1 a 4 . . . . .	66
2.17	$p_{wf} = f(q_{inj})$ para poços UFSC-5 a 8 . . . . .	66
2.18	$p_{wf} = f(q_{inj})$ para poço UFSC-15 . . . . .	68
2.19	$p_{wf} = f(q_{inj})$ para poço UFSC-17 . . . . .	70
2.20	$p_{wf} = f(q_{inj})$ para poço UFSC-20 . . . . .	71
2.21	$p_{wf} = f(q_{inj})$ para poço UFSC-21 . . . . .	73
2.22	$p_{wf} = f(q_{inj})$ para poço UFSC-23 . . . . .	74
2.23	$p_{wf} = f(q_{inj})$ para poço UFSC-75 . . . . .	76

2.24	$p_{wf} = f(q_{inj})$ para poço exemplo com $P_r = 11.0$ MPa	77
2.25	Estrutura do Modelo dinâmico baseado em Hammerstein	79
2.26	Parâmetros identificados . . . . .	80
3.1	Estrutura de Controle com Agentes . . . . .	86
3.2	Diagrama esquemático da coluna de destilação . . . . .	95
3.3	Controle via agentes . . . . .	97
3.4	Resposta com DMC distribuído . . . . .	98
3.5	Resposta com DMC centralizado . . . . .	99
3.6	Comparação entre o número de iterações e o erro de seguimento de referência . . . . .	100
3.7	Resposta do MPC Distribuído com restrição $\Delta \mathbf{u}_1 \leq 0.05$	107
3.8	Resposta do MPC Centralizado com restrição $\Delta \mathbf{u}_1 \leq 0.05$	108
3.9	Resposta do MPC Distribuído com restrição $\Delta \mathbf{u}_1 \geq -0.05$	109
3.10	Resposta do MPC Centralizado com restrição $\Delta \mathbf{u}_1 \geq -0.05$ . . . . .	110
3.11	Resposta do MPC Distribuído com restrição $u_1 \leq 0.35$ .	112
3.12	Resposta do MPC Centralizado com restrição $u_1 \leq 0.35$	113
3.13	Resposta utilizando MPC centralizado com restrição em $y_2, y_2 \leq 0.26$ . . . . .	118
3.14	Resposta utilizando MPC distribuído com 35 trocas de informação e restrição em $y_2, y_2 \leq 0.26$ . . . . .	118
3.15	Resposta com MPC distribuído com 50 trocas de informação e restrição em $y_2, y_2 \leq 0.26$ . . . . .	119
4.1	Resultados de seguimento de referência com PN MPC . .	139
4.2	Resultados de seguimento de referência com NEPSAC .	139
4.3	Resultados de seguimento de referência com PN MPC . .	140
4.4	Resultados de seguimento de referência com NEPSAC .	140
4.5	Diagrama de Blocos para o tratamento de erro de modelagem e ruído . . . . .	142
4.6	Resposta à perturbação na saída . . . . .	145
4.7	Resposta à perturbação na saída com ruído e $a = 0$ . . .	146
4.8	Resposta à perturbação na saída com ruído e $a = 0.7$ . .	147
4.9	Planta com 6 Tanques Esféricos . . . . .	150
4.10	Respostas em Malha Aberta . . . . .	152

4.11	Respostas de h3 e h6 em Malha Fechada . . . . .	152
4.12	Ação de Controle em Malha Fechada . . . . .	153
4.13	Respostas de h1, h2, h4 e h5 em Malha Fechada . . . . .	154
4.14	Comparação entre as predições com o modelo e com o algoritmo PNMPC em T=40.05 min. . . . .	154
4.15	Interpretação gráfica do gradiente ponderado . . . . .	156
4.16	Comparação entre predição com modelo não linear e modelo linearizado com Gradiente Ponderado . . . . .	158
4.17	Comparação entre predição com modelo não linear e modelo linearizado com Gradiente Ponderado Simplificado . . . . .	158
4.18	Relação entre $c_B$ e $u$ em Regime Permanente (Curva de equilíbrios do sistema) . . . . .	160
4.19	Respostas em malha aberta . . . . .	161
4.20	Controle de $c_b$ com PNMPC . . . . .	163
4.21	Controle de $c_b$ com PNMPC-Controle de erros . . . . .	163
4.22	Comparação entre Predição com o modelo e com PNMPC	164
4.23	Teste de Seguimento de Referência em torno de $P_1$ . . . . .	165
4.24	Teste de Seguimento de Referência em torno de $P_1$ para $u_{ss} < 15$ . . . . .	167
4.25	Simulação para erro de atraso =5 . . . . .	174
4.26	Simulação sem erro no atraso . . . . .	175
4.27	Derivada da função de Lyapunov para erro de atraso=5	176
4.28	Desempenho do método com algoritmo iterativo . . . . .	177
4.29	Sistema de aquecimento de água em linha . . . . .	178
4.30	Aplicação de PNMPC não robusto . . . . .	184
4.31	Aplicação de PNMPC não robusto com $\alpha_2 = 0,2$ . . . . .	185
4.32	Aplicação de PNMPC robusto . . . . .	187
4.33	Aplicação de PNMPC robusto-variáveis auxiliares . . . . .	188
4.34	Resposta com aplicação da técnica robusta . . . . .	190
4.35	Variáveis auxiliares obtidas com a simulação . . . . .	190
4.36	Desempenho do algoritmo com diferentes pesos $\mathbf{P}$ . . . . .	191
4.37	Resultado da simulação sem aplicação da técnica robusta	193
4.38	Variáveis auxiliares na simulação sem a técnica robusta	193
5.1	Estratégia de Controle Dynacon . . . . .	202

5.2	Gas lift manifold . . . . .	209
5.3	Controle da pressão no <i>Gas Lift Manifold</i> - GLM . . . . .	210
5.4	Estratégia de controle da pressão no GLM . . . . .	212
5.5	Modelo simplificado do <i>gas-lift manifold</i> . . . . .	213
5.6	Estrutura de controle simplificada da pressão do <i>gas-lift manifold</i> . . . . .	214
5.7	Estrutura de controle para análise da resposta à perturbação . . . . .	215
5.8	Perturbação tipo rampa . . . . .	216
5.9	Estrutura de controle incluindo dinâmica do <i>choke</i> de injeção . . . . .	218
5.10	Estrutura de controle com ação <i>feed-forward</i> . . . . .	218
5.11	Efeito da perturbação rampa na vazão de entrada sobre a pressão do <i>gas-lift manifold</i> . . . . .	223
5.12	Efeito da perturbação rampa na vazão de entrada sobre a pressão do <i>gas-lift manifold</i> utilizando ação <i>feed-forward</i> . . . . .	223
5.13	Diagrama de Nyquist mostrando o conceito de pico de sensibilidade . . . . .	225
5.14	Resultados do projeto do PI Robusto utilizando Margem de Ganho=2 . . . . .	225
5.15	Resultados do projeto do PI Robusto utilizando Pico de sensibilidade igual a 3.2 . . . . .	226
5.16	Sistema de Controle de Poços alimentados por um manifold comum . . . . .	228
5.17	Estrutura do Controlador PC2 . . . . .	230
5.18	Carta de alocação de <i>gas-lift</i> . . . . .	231
5.19	Vazão mássica de gás entrando e saindo do GLM. . . . .	232
5.20	Pressão no GLM com controle utilizando ação <i>Feed Forward</i> . . . . .	233
5.21	Pressão no GLM com controle não utilizando ação <i>Feed Forward</i> . . . . .	234
5.22	$P_{wf}$ de todos os poços . . . . .	235
5.23	Porcentagem de gás utilizada por cada poço . . . . .	235
5.24	Produção de óleo por poço . . . . .	236
5.25	Gas-lift manifold-GLM . . . . .	238
5.26	Vazão de gás normalizada entrando no GLM . . . . .	249

5.27	Pressão no GLM e no fundo dos poços $\times$ vazões saindo do GLM . . . . .	250
5.28	Vazão de produção de óleo de todos os poços . . . . .	251
5.29	Vazão de produção de óleo de cada poço . . . . .	251
6.1	Instalação do <i>riser</i> simulado no OLGA. . . . .	256
6.2	Abertura do <i>choke</i> como parâmetro de bifurcação - Um ciclo limite estável desenvolve-se a partir de uma Bifurcação <i>Hopf</i> Supercrítica ( $HB_{sup}$ ). . . . .	257
6.3	Diagrama de bifurcação no plano $(u(t), P_1)$ . . . . .	258
6.4	Diagrama de Bifurcação no plano $(P_1, P_2)$ . . . . .	258
6.5	Resposta do sistema controlado pelo <i>PI</i> para perturbações na vazão de entrada ( $5Kg.s^{-1}$ para $3.5Kg.s^{-1}$ ) .	260
6.6	Resposta do sistema controlado pelo <i>PI</i> para perturbações na vazão de entrada ( $5Kg.s^{-1}$ para $3Kg.s^{-1}$ ) . .	261
6.7	Bifurcação <i>Grazing-sliding</i> induzida no sistema . . . . .	262
6.8	Resposta do sistema no tempo com a estratégia de controle SMC (Malha aberta e com controle realimentado aplicado). a) abertura do <i>choke</i> ; b) estados do sistema .	265
6.9	Diagrama de espaço de estados no plano $(P_1, P_2)$ . . . . .	265
6.10	Respostas de controle e saída com a lei de controle modificada (6.8) para uma perturbação na entrada . . . . .	267
6.11	Diagrama de espaço de estados para o sistema com a lei de controle modificada (6.8) . . . . .	267
6.12	Resposta de controle e saídas do sistema com o <i>slug washout SMC</i> para perturbação na vazão de entrada do <i>riser</i> . . . . .	270
6.13	Diagrama de espaço de estados do sistema com <i>slug washout SMC</i> . . . . .	271
A.1	Diagrama de Blocos do Algoritmo de Controle Preditivo Baseado em Modelo . . . . .	284



# Lista de Tabelas

2.1	Variáveis e parâmetros utilizados no modelo . . . . .	21
2.2	Subscritos utilizados no modelo . . . . .	22
2.3	Parâmetros do poço de teste . . . . .	37
2.4	Parâmetros utilizados nos testes realizados com o simulador Marlim . . . . .	65
2.5	Dados do Poço UFSC-15 . . . . .	68
2.6	Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-15	68
2.7	Dados do Poço UFSC-17 . . . . .	69
2.8	Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-17	69
2.9	Dados do Poço UFSC-20 . . . . .	71
2.10	Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-20	71
2.11	Dados do Poço UFSC-21 . . . . .	72
2.12	Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-21	72
2.13	Dados do Poço UFSC-23 . . . . .	74
2.14	Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-23	74
2.15	Dados do Poço UFSC-75 . . . . .	75
2.16	Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-75	76
2.17	Parâmetros identificados para os dados do exemplo [1] .	78
3.1	Parâmetros de sintonia do algoritmo MPC . . . . .	98
3.2	Parâmetros de sintonia do algoritmo MPC . . . . .	104
4.1	Parâmetros e variáveis do processo . . . . .	179
4.2	Parâmetros do processo de aquecimento . . . . .	181
4.3	Parâmetros de sintonia do algoritmo PNMPC sem utilização da técnica robusta . . . . .	183

4.4	Parâmetros de sintonia do algoritmo PNMPC com a utilização da técnica robusta . . . . .	186
4.5	Parâmetros do modelo discreto . . . . .	187
4.6	Parâmetros de sintonia do algoritmo PNMPC com a utilização da técnica robusta p/ o controle do reator de oxido de etileno . . . . .	189
5.1	Nomenclatura . . . . .	240
5.2	Dados dos poços . . . . .	247
5.3	Sintonia dos parâmetros do Algoritmo PNMPC . . . . .	248
6.1	Parâmetros utilizados na simulação do <i>riser</i> . . . . .	256
6.2	Parâmetros da lei de controle . . . . .	266



# Capítulo 1

## Introdução

O ambiente no fundo de poços de petróleo é hostil. Altas pressões e temperaturas frequentemente combinadas com a presença de fluidos ácidos são um desafio para a instalação de instrumentação de fundo de poço. Além das condições do ambiente, há a dificuldade de prover alimentação de energia para esses instrumentos e meios de comunicação com a superfície. O desenvolvimento de sensores de pressão, temperatura, vazão e aceleração baseados na tecnologia de fibra ótica permite a utilização de instrumentos que não necessitam de energia elétrica para seu funcionamento. Tanto os sensores como a transmissão da informação funciona com um feixe de luz viajando no interior da fibra e dos sensores. Esta tecnologia permite a aquisição de medições imunes ao ruído eletromagnético e oferece segurança intrínseca de forma natural. Infelizmente a dificuldade de se fabricar sistemas de conexão e desconexão de fibras-ópticas em águas profundas tem inibido a utilização desta tecnologia neste ambiente.

Não menos importante é o desafio tecnológico da medição das vazões de água, óleo e gás em escoamento multifásico com técnicas não intrusivas e com baixa perda de pressão. A ocupação de um duto pelas frações de água, óleo e gás e as velocidades dessas frações variam conforme o padrão de escoamento, fazendo da medição das vazões individuais um problema complexo quando se quer garantir passagem plena no duto. Válvulas para fundo de poço com acionamento na superfície estão sendo instaladas em novos poços e podem trazer grandes benefícios na implementação

de estratégias de produção em completação de poços com múltiplas zonas produtoras. O método convencional utilizado para o controle da produção individual de cada zona exigia em alguns casos a realização de perfilagens para a determinação das vazões produzidas por cada zona seguida de operações corretivas. Essas operações corretivas podiam ser operações de *slit-line* para atuar válvulas do tipo *sliding-sleeve* ou intervenção no poço com sonda para isolamento permanente de uma zona. Mesmo assim as soluções eram do tipo *on-off* enquanto atualmente, a disponibilidade de medição e atuação permite o controle contínuo das vazões produzidas por cada zona produtora do poço.

Poços injetores em múltiplas zonas podem também se beneficiar com o controle em tempo real da vazão de injeção por zona. Na ausência dessas válvulas perfis de injeção tem de ser realizados periodicamente e dependendo da avaliação do perfil de injeção pode se decidir por reequipar o poço com novos *chokes* a fim de estabelecer a distribuição de injeção desejada. Isto requer a operação com sondas com custos proibitivos em ambiente de águas profundas.

Para completações em águas profundas e especialmente com a cabeça do poço instalada no fundo do mar (árvore de Natal molhada), uma operação para a troca de um instrumento de fundo de poço pode significar custos da ordem de até dezenas de milhões de dólares. Esta situação inibiu por muito tempo o desenvolvimento de instrumentação para fundo de poço e possivelmente, foi um dos fatores que influenciou o baixo nível de pesquisa em modelos e técnicas de controle e automação da produção, já que para controlar deve-se medir. Felizmente, nos últimos 10 anos, tem havido um grande desenvolvimento de instrumentos de medição e atuação para uso no fundo de poços. Paralelamente ao esforço na área de instrumentação tem havido avanços no desenvolvimento de técnicas de controle e automação para a produção de petróleo protagonizados pelas grandes empresas operadoras. As soluções propostas por cada empresa recebem diferentes denominações tais como Campo Inteligente, Poço Inteligente, Gerenciamento Digital e Integrado da Produção, etc, mas, independente da denominação, consistem na aplicação de técnicas de controle, automação e otimização para o desenvolvimento de um campo de petróleo, [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10].

Freqüentemente as soluções propostas são incipientes e utilizam

heurísticas nas tomadas de decisões frente a falta de modelos representativos dos processos e da ausência de medição de todas as variáveis necessárias. Em alguns projetos recentes de desenvolvimento de campos de petróleo torna-se evidente que o avanço da tecnologia de instrumentação de fundo de poço atropelou o desenvolvimento de modelos e algoritmos de controle que não estão preparados para utilizar as novas medições e capacidade de atuação para a melhoria do controle dos processos de exploração. Não é incomum nesses casos acontecer a situação onde as empresas operadoras depararam-se com o problema de ter mais informações do que podem utilizar. Em algumas instalações modernas a quantidade de informação é tanta que a dificuldade é determinar quais dados armazenar e em que taxa de amostragem. Existe uma percepção de que essas informações não estão sendo utilizadas em toda sua plenitude. Há de se observar entretanto que a maioria dos poços existentes seguem funcionando com o mínimo de instrumentação na superfície e nenhuma instrumentação de fundo de poço. Os custos para a instalação da instrumentação nesses poços, principalmente em águas profundas é elevadíssimo. Mesmo a instalação de instrumentos de superfície pode tornar-se inviável devido a necessidade de parada da produção do poço, o que exige uma estratégia de agendamento em função de uma eventual parada do poço para serviço de manutenção.

Como acontece em muitos processos, a exploração de um campo de petróleo não pode ser feita de forma eficiente em malha aberta. No caso do processo de produção de petróleo tem-se um incentivo ainda maior para a aplicação de controle pois o processo está em constante mudança.

Por maiores que tenham sido os avanços nas técnicas de modelagem de reservatórios baseados em aquisição, tratamento e interpretação de dados de sísmica, perfilagens, testes de formação, etc, não se conhece totalmente o campo de petróleo que se explora. O conhecimento vai se aprimorando na medida em que novos poços são perfurados e colocados em produção. Ainda assim, seja qual for o modelo considerado, poços são perfurados e sua operação tem de ser ótima dentro deste cenário. O conceito de malha lenta e rápida expressa bem a situação [2]. A malha lenta é onde se modela o reservatório, decide-se pela locação de novos poços, faz-se análise de risco de investimentos, etc. A malha rápida é a malha da automação dos métodos de elevação artificial, da completação inteligente, da otimização da produção, etc.

Espera-se que a troca de informações entre as duas malhas seja a chave para uma exploração otimizada do reservatório. Para isto se faz necessário uma melhoria considerável na conectividade, disponibilidade de informações e desenvolvimento de metodologias que possam refinar os modelos dos reservatórios em função da entrada de novos dados. As tomadas de decisões estarão relacionadas principalmente com vazões de água, óleo e gás e muito frequentemente em escoamento multifásico. O controle de escoamento multifásico pode contribuir, por exemplo, na produção de petróleo em *risers* submarinos ou na operação de poços com elevação por injeção contínua de gás (GLC), um dos métodos de elevação artificial de petróleo mais utilizados no Brasil.

Na medida em que as novas descobertas de campos petrolíferos no Brasil se deslocam para longe da costa, como é o caso dos campos do pré-sal, fica cada vez mais importante o desenvolvimento de técnicas de controle e otimização que contribuam para o desenvolvimento de um sistema de operação remota das unidades de produção que, na contingência de uma falha de comunicação, possa operar a unidade de forma segura, ótima e autônoma por algum tempo. A literatura sobre controle e otimização da operação de poços operando com elevação via GLC é vasta mas os problemas tratados diferem em função das características dos poços sendo considerados. No Brasil mais de 70% da produção de petróleo é proveniente de águas profundas e realizada com elevação por GLC. Neste ambiente os custos de perfuração, completação e operação dos poços é muito elevado fazendo com que somente aqueles poços com considerável produção sejam completados. Todos os esforços são feitos no sentido de garantir que os insumos necessários para a operação ótima dos poços estejam disponíveis incluindo a compressão e tratamento de gás para utilização nos poços operando via GLC. Os poços atuais não dispõem de *choke* de produção com acionamento automático e somente nos últimos anos iniciou-se um esforço para instalar *chokes* de injeção automáticos nos poços operando via GLC. Nos últimos dez anos tem havido também um esforço na instalação de medidores de pressão e temperatura de fundo de poço (Permanent Down-hole Gage). Muito mais recentemente tem havido a completação de alguns poços com completação inteligente onde são instalados medidores de pressão, temperatura e vazão além de válvulas com acionamento hidráulico ou elétrico a partir da superfície.

O cenário sobre o qual desenvolve-se este trabalho consiste de

poços com *choke* de produção manual mas com *choke* de injeção de gás automático e com medição da pressão e temperatura de fundo.

Este trabalho procura contribuir em duas áreas distintas; i) desenvolvimento de modelos para utilização no controle e otimização de poços operando via GLC e ii) desenvolvimento de técnicas de controle para aplicação em unidades de produção de petróleo.

Com relação à primeira contribuição procura-se desenvolver modelos fenomenológicos mais simples do que aqueles utilizados por simuladores comerciais para determinar os diferentes comportamentos dinâmicos do poço em função de suas principais características. Desenvolve-se também modelos de regime permanente para utilização na otimização da distribuição de gás disponível e por último um modelo para utilização em controle baseado na representação Hammerstein que preserva a relação de regime permanente e introduz um comportamento dinâmico aproximado.

As contribuições no desenvolvimento de técnicas de controle são duas: i) desenvolve-se uma técnica para a aplicação de controle preditivo distribuído que permite o tratamento de restrições em entradas e saídas. A ideia é poder implementar o controle de poços de forma distribuída em trabalhos futuros. ii) Propõe-se um algoritmo prático de controle preditivo baseado em modelo para sistemas não lineares (PNMPC). O algoritmo desenvolvido pode utilizar praticamente qualquer forma de modelo já que a representação linearizada das previsões é obtida de forma numérica. Esta característica deve permitir sua utilização no controle e otimização da exploração de reservatórios utilizando simulador de reservatório como modelo do processo. A natureza lenta da evolução das principais variáveis e parâmetros do reservatório permite tempos de amostragem tão grande como dias ou até meses o que facilitaria a aplicação do algoritmo. O trabalho contribui também com a aplicação de técnicas de controle e otimização sobre um sistema constituído de um *manifold* de *gas lift* e poços operando via injeção contínua de gás. Uma primeira abordagem mostra a aplicação de controle com o objetivo de otimizar a produção e estabilizar a pressão no *manifold* de *gas lift* sem atuar na estabilização da dinâmica dos poços. Uma segunda abordagem apresentada consiste na aplicação do algoritmo PNMPC a um *manifold* de *gas lift* e um grupo de poços com o objetivo de otimizar a produção, estabilizar a pressão no *manifold* e minimizar as os-

cilações na vazão de produção no fundo dos poços. Para finalizar aplicam-se técnicas de controle de estrutura variável na produção de petróleo e gás em um *riser* submarino com o objetivo de estabilizar a produção com o mínimo de queda de pressão no *choke* de superfície.

## 1.1 Objetivos do Trabalho

O objetivo deste trabalho é contribuir com o desenvolvimento de modelos e técnicas de controle e automação para a elevação de fluido multifásicos. A ênfase principal é na automação e controle de poços operando por Injeção Contínua de Gás (GLC) e na estabilização do escoamento em *risers* submarinos de produção.

## 1.2 Organização do Trabalho

No capítulo 2 apresenta-se o método de elevação artificial via injeção contínua de gás, GLC e três diferentes abordagens para a modelagem do processo.

No capítulo 3 apresenta-se uma técnica para a aplicação de controle preditivo baseado em modelo de forma distribuída onde existe um agente para cada ação de controle. Esses agentes executam um mesmo tipo de algoritmo cuja instanciação depende dos relacionamentos com os agentes vizinhos o que é dependente do tipo de acoplamento existente no processo sendo controlado. As ações de controle são obtidas depois de um determinado número de troca de informações entre os agentes. O sistema desenvolvido é capaz de tratar as restrições típicas como limitações nas variações da ação de controle entre tempos de amostragem, nos valores máximo e mínimo das ações de controle e nos valores máximo e mínimo das saídas.

O capítulo 4 descreve o desenvolvimento do algoritmo de controle MPC Prático para sistemas não lineares. Apresenta-se inicialmente uma forma geral de representar as predições de forma linearizada que serve tanto para sistema lineares como não lineares. Na seqüência desenvolve-se um método que visa melhorar a predição utilizando-se um procedimento de dois passos que obtém uma linearização com qualidade próxima a uma linearização por

Taylor de segunda ordem. Desenvolve-se ainda um método para tratar erros de modelagem e ruído e uma forma de introduzir a demanda por estabilidade na função objetivo. O método é aplicado com sucesso a alguns sistemas apresentados na literatura.

No capítulo 5 discute-se a aplicação de técnicas de controle e otimização da produção de poços operando via GLC. Uma primeira abordagem desconsidera a dinâmica dos poços e propõe uma técnica que estabiliza a pressão no *manifold* de *gas lift* e, utilizando os desenvolvimentos de modelos apresentados no capítulo 2 garante a operação dos poços ocorrendo de forma ótima sob uma determinada métrica. Uma segunda abordagem utiliza a modelagem desenvolvida no capítulo 2 e aplica a técnica de controle preditivo para sistemas não lineares desenvolvida no capítulo 4 a um sistema constituído de um *manifold* de *gas lift* e 4 poços. O objetivo de controle é estabilizar a pressão no *manifold*, minimizar as oscilações na vazão de produção do fundo dos poços e otimizar a produção para a vazão de gás disponível.

No capítulo 6 discute-se o Controle de escoamento em *risers* submarinos. A elevação de fluido multifásico em *risers* submarino pode ser afetada por um fenômeno conhecido como golfada severa induzida pelo terreno. Este fenômeno pode acontecer em determinadas geometrias do *riser* e vazões de líquido e gás. Para uma determinada geometria de *riser* consistindo de uma parte horizontal no fundo do mar e de uma parte vertical ou inclinada, pode acontecer uma acumulação de líquido na região de transição horizontal-vertical. Esta acumulação provoca uma restrição a subida do gás que se acumula aumentando a pressão neste ponto. Quando esta pressão atinge um determinado valor o gás acumulado desloca o fluido a jusante e o *riser* é dominado por gás baixando a pressão de fundo. O líquido começa novamente a se acumular e um novo processo se inicia. Na superfície tem-se a produção na forma de golfadas alternadas dominadas por líquido ou gás. Este tipo de escoamento prejudica o processo de separação além de contribuir para a fadiga do próprio *riser*. O trabalho propõe algumas técnicas de controle para estabilizar o escoamento.

Apresenta-se no final de cada capítulo uma seção com conclusões e desenvolvimentos futuros e no capítulo 7 uma discussão geral sobre as contribuições e possíveis desenvolvimentos.





## Capítulo 2

# Elevação Artificial via Injeção Contínua de Gás

Este capítulo apresenta o processo de produção de petróleo utilizando Elevação Artificial do Tipo Injeção Contínua de Gás (GLC). Faz uma revisão bibliográfica sobre os trabalhos na área de modelagem do processo, apresenta algumas abordagens para a modelagem do processo e apresenta comparações com resultados obtidos com o software OLGA2000<sup>MR</sup>.

Elevação Artificial é a denominação para as técnicas que auxiliam a elevação de fluido do interior de poços de petróleo. A Elevação Artificial é normalmente adotada quando a pressão do reservatório não é mais suficiente para elevar o fluido produzido pela formação até a superfície. Entretanto estratégias modernas de exploração podem empregar métodos de elevação artificial antes que este estágio de depletação do reservatório seja alcançado. Existem diversos métodos de elevação artificial sendo que os mais comuns são:

- Bombeio Mecânico com Bomba de Haste Flexível (BM)
- Bombeio Mecânico com Bomba de Cavidade Progressiva (BCP)
- Bombeio com Bomba Elétrica Centrífuga Submersa (BCS)
- Injeção Contínua de Gás (GLC)

– Injeção Intermitente de Gás (GLI)

A maioria desses métodos são apresentados em [11]. Nesta tese abordaremos somente a elevação por injeção contínua de gás, GLC.

## 2.1 O Processo de Elevação por Injeção Contínua de Gás - GLC

A Elevação por Injeção Contínua de Gás (GLC) ou *gas lift* utiliza a injeção de gás em um ponto mais baixo da coluna de produção de forma que a mistura gás-líquido presente na coluna de produção exerça um pressão na frente dos canhoneados inferior à pressão do reservatório. Desta forma a mistura gás-líquido é produzida na superfície e direcionada a um separador água-óleo-gás. O gás produzido (ou parte do gás dependendo do poço) é tratado e recomprimido para reutilização no processo de elevação. A figura 2.1 mostra o princípio de funcionamento do método de Elevação por GLC. A vazão de gás injetado, controlada pela Válvula de Injeção de Gás na superfície, desce pelo espaço anular revestimento-tubo de produção e entra no tubo de produção pela válvula operadora de *gas lift* tipicamente alojada em um tubo especial chamado mandril de *gas lift*. Depois de passar pela válvula de *gas lift* o gás sobe no interior do tubo de produção e ao gaseificar o líquido no seu interior diminui a pressão exercida na frente dos canhoneados. A diferença de pressão entre a pressão de formação e a pressão exercida pelo peso da coluna de líquido gaseificado permite a produção da mistura. Os poços completados para operação com injeção contínua de gás são em geral equipados com uma série de válvulas de *gas lift* distribuídas ao longo da coluna de produção. Exceto pela válvula localizada no fundo, as demais válvulas são utilizadas para a partida do poço ou *kick-off*. Estas válvulas permitem que o tubo de produção seja gaseificado sequencialmente através da abertura sequencial das válvulas de cima para baixo. No final do processo de partida a única válvula que permite a entrada de gás no interior do tubo de produção é a válvula localizada mais profundamente também conhecida como válvula operadora. Além da válvula operadora, uma válvula de controle da injeção de gás e um *choke* instalados na linha de injeção e produção respectivamente são também parte

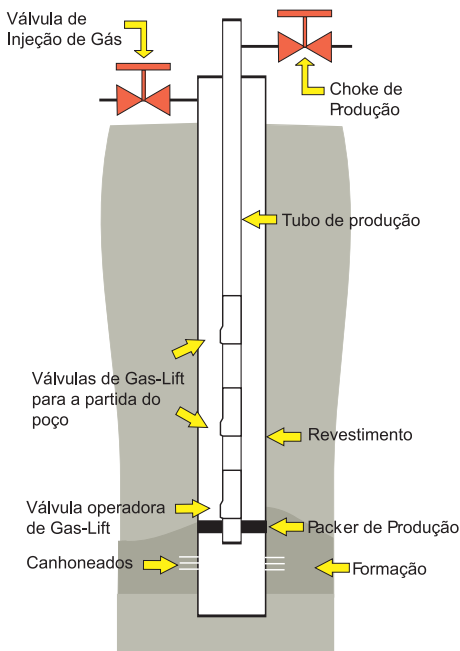


Figura 2.1: Elevação por Injeção Contínua de Gás

do sistema de controle do poço. As válvulas de *gas lift* são construções mecânicas normalmente instaladas dentro de um tubo de produção especial chamado mandril de *gas lift*. Na maioria dos casos estas válvulas são projetadas de forma a permitirem sua retirada do mandril de *gas lift* para manutenção através de uma operação de *slick line*.

Devido ao custo muito alto na intervenção dos poços completados com cabeça de poço instaladas no fundo do mar, alguns poços são equipados sem as válvulas de descarga já que estas poderiam falhar. Nestes casos a única válvula presente é a válvula operadora.

Um gráfico do relacionamento em regime permanente típico entre a vazão mássica de gás de injeção  $Q_i$ , a vazão de líquido produzido  $Q_l$  e a pressão na frente dos canhoneados  $P_{wf}$  é mostrado na figura 2.2. Observa-se que as curvas tem uma inclinação pronunciada para pequenas vazões de injeção de gás devido a predominância

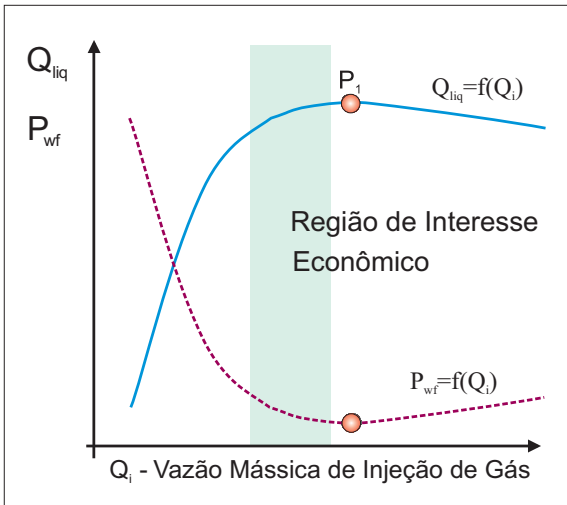


Figura 2.2: Curva Típica da Vazão de Líquido e Pressão na frente dos Canhoneados x Vazão Mássica de Gás de Injeção

do efeito da gravidade na queda de pressão no tubo de produção. Conforme a vazão de injeção de gás aumenta, cresce a queda de pressão no tubo de produção devido ao atrito e a inclinação da curva diminui até atingir-se o ponto  $P_1$ . Neste ponto qualquer aumento na vazão do gás injetado causará um aumento na queda de pressão devido ao atrito maior do que o decréscimo devido a diminuição do peso da mistura gás-líquido resultante. O gráfico da pressão ( $P_{wf} = g(Q_I)$ ) na frente da zona canhoneada exhibe uma curva que é quase uma imagem espelho da curva da vazão de líquido produzido com o mínimo ocorrendo para o mesmo valor da vazão de injeção de gás. O controle de um poço operando via Injeção Contínua de Gás é normalmente realizado de acordo com uma estratégia de otimização. Embora o gás utilizado para a injeção não seja perdido, existe um custo para sua compressão desde a pressão do separador até a pressão de injeção. As frações de óleo, água e gás produzidas por cada poço tem diferente impacto econômico no processo de produção. A água produzida é normalmente tratada antes do descarte, o gás e o óleo produzido pela formação tem diferentes valores de mercado. Os recursos disponíveis podem também impor restrições como limites na ca-

pacidade de separação, transporte e compressão e terão um impacto na distribuição de gás comprimido para um grupo de poços. Diversos trabalhos tem tratado este problema com diferentes técnicas de otimização como em [12], [13], [14], [15] e [16]. Do ponto de vista do controle estas técnicas visam a operação do poço dentro de uma região definida da curva  $Q_{liq.} = f(Q_{inj})$  denominada de Região de Interesse Econômico. As considerações feitas dizem respeito ao comportamento estático do sistema. Do ponto de vista dinâmico diversos aspectos devem ser analisados.

A vazão de um poço operando por GLC pode tornar-se bastante oscilatória ao mudar-se a vazão de injeção de gás ou quando ocorrem mudanças na pressão da cabeça do poço devido a perturbações causadas pelos processos a jusante do poço. Este comportamento oscilatório é mais forte quando a queda de pressão no Tubo de Produção é dominada pelo termo devido a gravidade e tende a diminuir quando o termo devido ao atrito torna-se comparável. Isto explica a razão para os operadores aumentarem a vazão de injeção de gás como um último recurso para estabilizar um poço operando por GLC. Na maioria dos casos esta solução não é ótima. Ao contrário, dependendo da disponibilidade de gás comprimido, da produção do poço, dos custos envolvidos, o ponto de operação ótimo pode situar-se bem a esquerda do ponto  $P_1$  da figura 2.2. Além disso a operação dos poços com oscilações sustentadas reduz a produção dos poços em relação a operação sem oscilações. Sem mencionar os problemas causados pelas oscilações nos processos de separação. Isto justifica um estudo de modelos dinâmicos que permitam realizar um controle mais eficiente sistema aumentando a produtividade e diminuindo as oscilações.

A modelagem do processo de elevação por GLC apresenta diversas dificuldades. A principal é o fato de que o fenômeno de transporte de fluido multifásico só pode ser descrito com rigor por um conjunto de equações diferenciais parciais e algébricas para frações muito pequenas do tubo onde ocorre o escoamento, vide [17] e [18]. Existem diversos estudos para descrever os diferentes padrões de escoamentos como tipo bolhas, misturado, golfada, anular, etc., que podem ocorrer na elevação por GLC conforme [19]. Em geral busca-se determinar em que condições se desenvolvem esses tipos de escoamento e quando ocorre a mudança de um tipo de escoamento para outro, o que torna a descrição do processo ainda mais complexa.

A aplicação da mecânica clássica juntamente com estudos experi-

mentais sobre as condições para o formação dos diferentes padrões de escoamentos tem sido utilizada para o desenvolvimento de simuladores para processos que envolvem escoamentos multifásicos incluindo a elevação por GLC, vide [20].

Uma dificuldade adicional para a modelagem do processo de elevação por GLC é a indisponibilidade da medição das principais variáveis do processo como as vazões dos diferentes fluidos em determinados pontos do processo.

## 2.2 Modelagem do Processo de Elevação por Injeção Contínua de Gás

Diversos trabalhos sobre a modelagem e controle de poços operando por GLC tem sido publicados nos últimos anos [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30]. Em [21] discute-se o comportamento dinâmico obtido com um simulador do processo de elevação por GLC que contempla o fenômeno heading.

Em [24] e [31] obtém-se um modelo simplificado, a parâmetros concentrados, do sistema de elevação por GLC utilizando-se equações de conservação de massa nos diferentes compartimentos do poço. O modelo proposto é representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -w_{gc}(x) + w_{iv}(x, u_1) \\ \dot{x}_2 &= w_{iv}(x) - w_{pg}(x, u_2) \\ \dot{x}_3 &= w_r(x) - w_{po}(x, u_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde

$x_1$  = Massa de gás no anular

$x_2$  = Massa de gás no Tubo de Produção

$x_3$  = Massa de óleo no Tubo de Produção

$w_{gc}$  = Vazão de gás através da válvula operadora de *gas lift*

*lift*

$w_{iv}$  = Vazão de gás através da válvula de injeção

$w_{pg}$  = Vazão de gás através do *choke* de produção

$w_{po}$  = Vazão de óleo através do *choke* de produção

$w_r(x)$  = Influxo de óleo do reservatório

$u_1$  = Abertura da válvula de Injeção de Gás

$u_2$  = Abertura do *choke* de produção.

Os problemas com este modelo são diversos. A massa total nos compartimentos não pode ser medida. O modelo não leva em conta a componente devido ao atrito no cálculo da pressão de fundo. Além disso os estados não apresentam uma relação direta com as variáveis comumente medidas na prática que são as pressões na superfície e de fundo em alguns casos. Apesar disso o modelo é interessante pela simplicidade e parece um candidato natural para o sistema.

Os trabalhos [25], [26], [27], contribuições do autor desta tese, são propostas onde o controle da dinâmica do poço é realizado somente com a manipulação da vazão de injeção de gás. Supõe-se que a produção é entregue a um separador mantido a uma pressão constante. A proposta não considera a manipulação do *choke* de produção de forma deliberada já que na maioria dos poços em operação não se dispõe de *chokes* automatizados. Além disso qualquer queda de pressão no *choke* de produção significa aumento da pressão de fundo e diminuição da produção.

Diversos modelos lineares relacionando a vazão mássica na cabeça do poço com a vazão mássica de gás injetado são obtidos em diferentes pontos de operação do sistema. Utilizando estes modelos projeta-se um controlador robusto para o controle do processo dentro da região de interesse econômico. Infelizmente, por razões de seu alto custo, a medição da vazão mássica na cabeça do poço ainda não é utilizada inviabilizando a implementação desta técnica com a tecnologia de medição de escoamento multifásico atual.

Em [28] apresenta-se uma proposta de modelagem do processo muito interessante e inovadora. Define-se as constantes:

$R$  = Constante do Gás Ideal

$T$  = Temperatura do poço

$PI$  = Índice de Produtividade do Poço

$P_r$  = Pressão do Reservatório

$P_o$  = Pressão do Separador

$g$  = Aceleração devido a gravidade

$L$  = Comprimento do Tubo de Produção.

Definem-se as variáveis:

$z$  = Distância vertical medida da superfície em direção ao fundo do poço.

$r_k(t, z)$  = Fração volumétrica de gás, se  $k = g$  ou líquido, se  $k = l$ .

$x(t, z)$  = Fração mássica de gás.

$P(t, z)$  = Pressão em algum ponto no interior do poço.

$x^L(t)$  = Fração mássica de gás em  $z = L$ .

$P_L(t)$  = Pressão em  $z = L$ .

$\rho_k(t, z)$  = Densidade do gás, se  $k = g$  ou do líquido, se  $k = l$ .

$\rho_m$  = Densidade da mistura líquido e gás.

$q_k(t, z)$  = Fluxo mássico de líquido, se  $k = l$  ou gás se  $k = g$ .

$V_k$  = Velocidade do líquido, se  $k = l$  ou do gás, se  $k = g$ .

Modela-se a pressão de fundo (na frente dos canhoneados) como

$$P(t, z) = P_o + \int_0^z \rho_m(t, \zeta) g d\zeta. \quad (2.2)$$

Assume-se

$$\begin{aligned} \rho_m &= x\rho_g + (1-x)\rho_l, \\ \rho_m &= \rho_l + x(\rho_g - \rho_l). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Assume-se também que a temperatura  $T$  seja constante, o gradiente de pressão constante igual a  $\frac{P_r - P_o}{L}$  e o comportamento ideal do gás frente a Pressão e Temperatura. Substituindo (2.3) em (2.2)

$$P(t, z) = P_o + \rho_l g z + \int_0^z x(t, \zeta) g (\rho(\zeta) - \rho_l) d\zeta, \quad (2.4)$$

$$P(t, z) = P_o + \rho_l g z + \int_0^z x(t, \zeta) g \left( \frac{(L - \zeta) P_o + \zeta P_r}{LRT} - \rho_l \right) d\zeta.$$

Um resultado interessante é a obtenção da expressão de  $x(t, z)$ . Partindo-se da equação da mecânica clássica para a conservação da massa aplicada a um fluido de densidade  $\rho$  com velocidade  $v$ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$



pode-se escrever para a fração de gás e líquido (considerando não existir troca de massa entre as fases),

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho_g r_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g r_g V_g)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_l r_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l r_l V_l)}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Define-se a fração mássica de gás  $x$  como

$$x = \frac{r_g \rho_g}{r_g \rho_g + r_l \rho_l}\tag{2.7}$$

e adota-se um modelo de relacionamento entre  $V_g$  e  $V_l$ , onde  $V_\infty$  é a velocidade que adquire uma bolha de gás em uma coluna de líquido,

$$V_g - V_l = \frac{V_\infty}{r_l}.\tag{2.8}$$

Pode-se combinar as equações (2.6), (2.7) e (2.8) para obter

$$\frac{\partial x}{\partial t} + V_g \frac{\partial x}{\partial z} = 0\tag{2.9}$$

Os autores propõem a seguinte solução para a equação (2.9)

$$x(t, z) = x^L\left(t - \frac{L - z}{V_g}\right).\tag{2.10}$$

O significado da expressão (2.10) é que a fração de gás ao longo do tubo de produção é igual ao valor que ocorreu no fundo do poço  $\theta = \frac{L-z}{V_g}$  segundos atrás. Para  $z = L$ ,  $x(t, L) = x^L(t)$ .

A expressão para  $P(t, L)$  dada pela equação (2.4) é trabalhada para eliminar a dependência de  $z$  escrevendo-se

$$P(t, L) = P_L(t) = P_o + \rho_l g L + \int_{t-\delta}^t k(t - \tau) x^L(\tau) d\tau\tag{2.11}$$

onde

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{L}{V_g} \\ k(t) &= V_g g \left( \frac{tP_o + (\delta - t)P_r}{\delta RT} - \rho_l \right) \text{ e} \\ &t \in [0, \delta].\end{aligned}\tag{2.12}$$

Neste trabalho utiliza-se a o modelo da pressão de fundo para formular uma lei de controle. A lei de Controle obtida é muito similar a um controle Proporcional e depende do cálculo de um valor para  $X_{ref}$  que depende do valor de  $P_{ref}$ . Os resultados obtidos com simulação são promissores mas o ajuste do controlador não parece simples além de não dispor de ação integral e por isso dificilmente garantirá erro nulo em regime permanente. Por outro lado o modelo obtido para a pressão de fundo, apesar de não incorporar o termo devido ao atrito é um resultado interessante.

$$\begin{aligned}P_L(t) &= P_o + \rho_l g L + \int_0^t x(t - \tau) g \left( \frac{tP_o + (\delta - t)P_r}{\delta RT} - \rho_l \right) V_g d\tau \\ &\text{para} \\ &t \in [0, \delta] \text{ e } \delta = \frac{L}{V_g}\end{aligned}\tag{2.13}$$

### 2.2.1 Um modelo fenomenológico a parâmetros concentrados

Nesta seção desenvolve-se um modelo fenomenológico para poços operando por GLC com baixo custo computacional. Utiliza-se o desenvolvimento realizado por [24], [31] e [28] para obter-se um modelo que exhibe o comportamento dinâmico do poço para toda a faixa de vazão de injeção. Diferentemente dos trabalhos citados, considera-se aqui o atrito no tubo de produção. Existem dois fenômenos que geram instabilidade em poços operando com *gas lift*. O fenômeno mais conhecido é o *heading* que resulta da interação entre o escoamento no espaço anular e no tubo de produção quando a válvula operadora de *gas lift* opera em regime não

crítico. Escoamento crítico é aquele onde a velocidade do fluido é superior a velocidade da propagação do som nas condições do escoamento. Mantida essa condição, as perturbações na pressão em um ponto do escoamento não se propagam na direção contrária a direção do escoamento e a vazão depende somente da pressão a montante. O escoamento de gás através de um orifício passa a ser crítico quando a razão entre a pressão a jusante do orifício e a pressão a montante do orifício é menor que  $r_{crit}$ ,

$$r_{crit} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \text{onde } k = \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.14)$$

Na equação 2.14  $c_p$  e  $c_v$  são respectivamente o calor específico do gás a pressão constante e a volume constante. Para metano e etano o valor de  $k$  é respectivamente 1,31 e 1,20. Para os gases utilizados no processo de elevação do tipo GLC  $r_{crit}$  tem um valor da ordem de 0,55. Na prática se diz que o escoamento é crítico quando a pressão a jusante é igual ou menor do que a metade da pressão a montante embora isto seja uma aproximação.

O escoamento em válvulas operadoras de *gas lift* do tipo orifício irá apresentar escoamento crítico se a razão entre a pressão no tubo de produção a jusante da válvula e a pressão no anular a montante da válvula for menor que  $r_{crit}$ . Neste caso não haverá o fenômeno *heading* pois elimina-se a interação entre o escoamento no tubo de produção e o escoamento no espaço anular.

Manter um escoamento onde a pressão a montante seja aproximadamente o dobro da pressão a jusante torna-se custoso pois a demanda de potência depende do produto entre a pressão e vazão. Além disso existem problemas técnicos relacionados com a alta pressão a que se submeterão os equipamentos do poço.

O desenvolvimento de válvulas operadoras do tipo Venturi permitiu escoamento supersônico com perda de pressão muito baixa. Existem válvulas no mercado que fornecem escoamento crítico com pressão a montante apenas 10% maiores do que a pressão a jusante da válvula. Apesar da utilização de válvulas operadoras de *gas lift* do tipo Venturi observou-se ainda fenômenos oscilatórios em determinados poços e em certas condições de operação. Estas oscilações se devem ao fenômeno denominado *density-wave*. Neste fenômeno, mesmo com a vazão mássica de gás constante na saída da válvula operadora, desencadeia-se uma os-

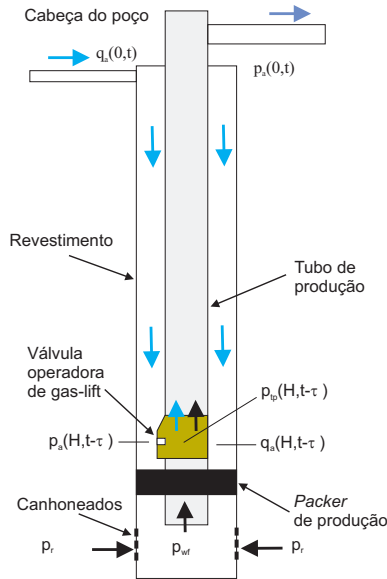


Figura 2.3: Poço operando com Gas-lift

cilação na pressão de fundo.

Um esquema de um poço operando por elevação tipo GLC é apresentado na figura 2.3.

As equações que descrevem o escoamento no tubo de produção são obtidas com a aplicação da conservação da massa e da quantidade de movimento, [1]. Estas equações descrevem o escoamento em um elemento de tubo  $dz$ . Modelando-se tanto o espaço anular como o tubo de produção, o comportamento do reservatório e utilizando-se as equações de estado para os fluidos envolvidos pode-se aplicar técnicas de integração para obter-se o comportamento do poço.

Apresenta-se na sequência um modelo simplificado do processo que permita uma análise mais rápida do comportamento dinâmico do sistema. O trabalho utiliza algumas das idéias desenvolvidas em [32], [24], [31] e [33].

Para a descrição deste modelo define-se as variáveis e parâmetros apresentados na tabela 2.1 e os subscritos mais utilizados na tabela 2.2.

Tabela 2.1: Variáveis e parâmetros utilizados no modelo

Símbolo	descrição
$z$	distância vertical a partir do fundo
$A$	Área do tubo de produção (TP)
$M$	Massa de gás ou líquido
$q$	Vazão mássica de gás ou líquido
$x$	Fração mássica de gás
$r$	Fração área do TP ocup. por gás ou líquido
$V_{\infty}$	Veloc. terminal de uma bolha de gás
$V$	Veloc. da fração gás ou líquido
$u_{sl} = \frac{q_l}{\rho_l A}$	Velocidade superficial de líquido
$u_{sg} = \frac{q_g}{\rho_g A}$	Velocidade superficial de gás
$\rho$	Densidade do gás/líquido
$f$	Fator de atrito
$D$	Diâmetro do tubo de produção
$L$	Distância entre sup. e fundo do poço
$g$	Aceleração da gravidade
$M$	Peso molecular do gás
$Z$	Compressibilidade do gás
$R$	Constante universal do gás ideal
$T$	Temperatura
$T_c$	Temperatura na cabeça ou fundo
$P_r$	Pressão estática do reservatório
$p_{wf}$	Pressão na frente dos canhoneados
$p_{wh}$	Pressão na cabeça do poço
$P_s$	Pressão no separador
$PI$	Índice de produção
$C$	Constante do <i>choke</i> de produção
$\sigma$	Constante de tempo

Tabela 2.2: Subscritos utilizados no modelo

Símbolo	descrição
<i>g</i>	gás
<i>l</i>	líquido
<i>f</i>	no fundo do poço
<i>c</i>	na cabeça do poço
<i>lf</i>	líquido no fundo
<i>gf</i>	gás no fundo
<i>lc</i>	líquido na cabeça
<i>gc</i>	gás na cabeça
<i>s</i>	separador
<i>wh</i>	well head
<i>sl</i>	superficial de líquido
<i>sg</i>	superficial de gás

O modelo proposto é apresentado na equação 2.15.

$$\begin{aligned}\dot{M}_g &= q_{gf} - q_{gc} \\ \dot{M}_l &= q_{lf} - q_{lc} \\ q_{lf} &= \frac{1}{\sigma} [-q_{lf} + PI(P_r - p_{wf})]\end{aligned}\quad (2.15)$$

O modelo proposto na equação 2.15 baseia-se em três equações diferenciais ordinárias. As duas primeiras representam o balanço de massa de gás e de líquido no interior do tubo de produção. A terceira equação descreve uma dinâmica de primeira ordem para a entrada de líquido no fundo do poço. Esta é uma dinâmica simplificada e inspirada no trabalho de Fetkovich na descrição do mecanismo de influxo de água em reservatórios de óleo subsaturado, [34].

A fim de simplificar a modelagem, a distância entre a válvula de *gas lift* e a zona canhoneada é desprezada e a pressão na frente da frente da válvula de *gas lift* é considerada igual a  $p_{wf}$ . Além disso considera-se um poço vertical. Considera-se a vazão de gás entrando diretamente no tubo de produção através da válvula operadora. Esta consideração representa de certo modo o que acontece quando se tem escoamento crítico. Nenhuma dessas simplificações comprometem a generalização do modelo proposto mas facilitam a apresentação do mesmo. Pode-se incorporar ao modelo proposto a equação para a conservação da massa de gás no anular e o modelo da válvula operadora para obter-se uma representação mais geral do processo GLC visando um estudo tanto do fenômeno *heading* como do *density wave*.

Uma variável chave para a modelagem do fenômeno *density wave* é a fração mássica de gás,  $x$ , apresentada na equação 2.7 e que representa a relação entre a massa ocupada pela fração da seção transversal do duto contendo gás pela massa total ocupada pelo duto.

$$x = \frac{r_g \rho_g}{r_g \rho_g + r_l \rho_l}, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\text{onde } r_g &= \frac{A_g}{A}, \\ r_l &= \frac{A_l}{A}, \text{ e} \\ A &= A_g + A_l.\end{aligned}\quad (2.17)$$

$A_g$  e  $A_l$  são respectivamente as frações da área da seção transversal do duto ocupada pelo gás e pelo líquido.

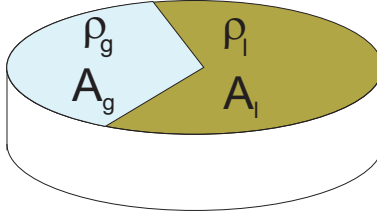


Figura 2.4: Fração mássica de gás

As frações  $r_g$  e  $r_l$  podem ser utilizadas na equação da conservação da massa para a fase gás e líquido fluindo no tubo de produção, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_g r_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g r_g v_g}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_l r_l}{\partial t} + \frac{\partial \rho_l r_l v_l}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Um importante resultado de [33] foi utilizar o modelo de velocidade entre  $V_g$  e  $V_l$  apresentado na equação 2.19 e as equações 2.7 e 2.18 para encontrar a dinâmica de  $x$  mostrada pela equação diferencial parcial 2.20.

$$V_g = V_l + \frac{V_\infty}{r_l} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} + V_g \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \quad (2.20)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace na equação 2.20 obtém-se

$$s x(z, s) - x(z, 0) + V_g \frac{\partial x(z, s)}{\partial z} = 0. \quad (2.21)$$

Para simplificar o cálculo supõe-se, sem perda de generalidade, que no no tempo  $t = 0$ ,  $x(z, 0) = 0$  e tem-se

$$\frac{\partial x(z, s)}{\partial z} = -\frac{s}{V_g} x(z, s) \quad (2.22)$$



Assumindo a origem de  $z = 0$  como o ponto do tubo de produção na frente da válvula de *gas lift* e  $z = L$  como o ponto no tubo de produção igual a superfície, pode-se integrar a equação 2.22,

$$\int_{z=0}^{z=L} \frac{\partial x(z, s)}{x(z, s)} = - \int_{z=0}^{z=L} \frac{s}{V_g} \partial z \quad (2.23)$$

Como  $\int dy/y = \ln y$ , obtém-se,

$$\begin{aligned} \ln x(z, s) \Big|_0^L &= -\frac{L}{V_g} s, \\ \ln \left( \frac{x(L, s)}{x(0, s)} \right) &= -\frac{L}{V_g} s, \\ x(L, s) &= x(0, s) e^{-\frac{L}{V_g} s}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

que no domínio do tempo pode ser escrita como

$$x_{sup}(t) = x_{fundo}(t - \frac{L}{V_g}). \quad (2.25)$$

A equação 2.25 expressa o fato que  $x$  (*gas mass quality*) viaja com a velocidade  $V_g$ . Isto significa que o valor de  $x$  na superfície no instante  $t$  é o mesmo que o valor de  $x$  do fundo no instante  $t - \tau$  sendo que  $\tau$  é o tempo que levou para esta propriedade chegar até a superfície. Para uma velocidade constante do gás, temos que  $\tau = \frac{L}{V_g}$ .

A estratégia para modelar o comportamento do escoamento no tubo de produção consiste em descrever as variáveis pressão, fração volumétrica de gás e líquido, vazão de gás e líquido, densidade do gás no fundo e na superfície. A variável que vai permitir a conexão entre estes dois pontos de observação é a fração mássica de gás  $x$ . Assume-se que o sistema parte de um regime permanente estável com valores definidos para  $P_{wf}$ ,  $\rho_{gf}$ ,  $r_{gf}$ ,  $x_f$ ,  $V_{gf}$ ,  $V_{lf}$ ,  $p_{wh}$ ,  $\rho_{gc}$ ,  $r_{gc}$ ,  $V_{gc}$ ,  $V_{lc}$ , etc.

### Estratégia para a implementação do modelo

As variáveis, parâmetros e constantes utilizados na modelagem são apresentados na tabela 2.1. A implementação do modelo desenvolvido foi realizada com um pequeno programa que divide-se em 3 partes. Na primeira parte calcula-se a relação em regime

permanente entre  $P_{wf}$  e  $q_{gf}$ . Nesta parte do programa determina-se também, como será explicado na sequência, a relação entre a pressão na cabeça do poço e os estados  $M_g$  e  $M_l$ .

No segundo estágio o usuário escolhe uma vazão de injeção  $q_{gf}$  que caracteriza o funcionamento do poço em regime permanente. O programa desenvolvido calcula então todas as condições iniciais que serão utilizadas na simulação. No terceiro estágio aplica-se uma vazão de injeção  $q_{gf}$  desejada e o programa calcula a evolução das variáveis de interesse ao longo do tempo futuro definido pelo usuário.

Uma das dificuldades do modelo proposto é a determinação dos valores em regime permanente para  $M_g$  e  $M_l$ , respectivamente a massa de gás e a massa de líquido no tubo de produção. A estratégia utilizada para encontrar uma solução numérica que atende todas as relações em regime permanente para uma determinada vazão de injeção de gás  $q_{gf}$  constante é explicada na sequência. Inicia-se o processo com um valor inicial para a pressão de fundo, por exemplo  $P_{wf} = .95P_r$ . Com este valor calcula-se todas as variáveis do fundo de poço,

$$\begin{aligned}
 q_{lf} &= PI(P_r - P_{wf}) \\
 \rho_{gf} &= p_{wf} \frac{M}{RT} \\
 V_{gf} &= V_{lf} + \frac{v_\infty}{r_{lf}} \\
 V_l &= \frac{q_{lf}}{\rho_l A_{lf}}, \\
 A_{lf} &= r_{lf} A, \\
 V_{gf} &= \frac{q_{lf}}{\rho_l r_{lf} A} + \frac{V_\infty}{r_{lf}}, \\
 V_{gf} &= \frac{1}{r_{lf}} \left( \frac{q_{lf}}{\rho_l A} + V_\infty \right). \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Utilizou-se a seguinte expressão para  $V_\infty$ , [35]

$$V_\infty = 0.35 \sqrt{\frac{gD(\rho_l - \rho_{gf})}{\rho_l}} \tag{2.27}$$

Também necessita-se de uma expressão para  $r_{lf}$ , que obtém-se a

partir de

$$\begin{aligned}
 q_{gf} &= \rho_{gf} V_{gf} r_{gf} A, \\
 r_{gf} &= 1 - r_{lf}, \\
 q_{gf} &= \rho_{gf} V_{gf} (1 - r_{lf}) A, \\
 r_{lf} &= \left(1 - \frac{q_{gf}}{\rho_{gf} V_{gf} A}\right).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Combinando as equações 2.26 e 2.28,

$$\begin{aligned}
 V_{gf} &= \left(1 - \frac{q_{gf}}{\rho_{gf} V_{gf} A}\right)^{-1} \left(\frac{q_{lf}}{\rho_l A} + V_\infty\right), \\
 V_{gf} &= \frac{q_{lf}}{\rho_l A} + \frac{q_{gf}}{\rho_{gf} A} + V_\infty.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

De acordo com a equação 2.29 a velocidade do gás no fundo é igual a soma da velocidade superficial do líquido no fundo ( $u_{slf} = \frac{q_{lf}}{\rho_l A}$ ), da velocidade superficial do gás no fundo ( $u_{sgf} = \frac{q_{gf}}{\rho_{gf} A}$ ) e da velocidade terminal da bolha de gás,  $V_\infty$ ,

$$V_{gf} = u_{slf} + u_{sgf} + V_\infty. \tag{2.30}$$

O valor de  $r_{gf}$  pode ser calculado como

$$r_{gf} = \frac{q_{gf}}{V_{gf} \rho_{gf} A} \tag{2.31}$$

Com  $r_l = 1 - r_{gf}$  o valor de  $x_f$  pode ser calculado utilizando a equação 2.7 e  $V_{lf}$  pode ser obtido com a equação 2.19.

Para a determinação das variáveis na cabeça do poço, utiliza-se o fato de que as vazões mássicas  $q_k$ ,  $k = l$  ou  $g$  são iguais aquelas do fundo em regime permanente já que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r_k \rho_k}{\partial t} + \frac{\partial r_k \rho_k V_k}{\partial z} &= 0, \text{ em regime permanente,} \\
 \frac{\partial r_k \rho_k}{\partial t} &= 0, \\
 \frac{\partial r_k \rho_k V_k}{\partial z} &= 0 \text{ ou, como } A \text{ é constante,} \\
 \frac{\partial A r_k \rho_k V_k}{\partial z} &= \frac{\partial q_k}{\partial z} = 0
 \end{aligned}$$

Além disso  $x$  na cabeça do poço é igual ao valor no fundo do poço em regime permanente, já que  $x_c = x_f(t - \sigma)$  e  $x_f(t)$  é considerado constante em regime permanente, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} + V_g \frac{\partial x}{\partial z} &= 0, \text{ mas em regime permanente,} \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial z} &= 0, \\ x_c &= x_f \\ q_c &= q_f \end{aligned}$$

Utiliza-se a expressão da vazão no *choke* de produção,

$$q_c = C \sqrt{\bar{\rho}_c (p_{wh} - P_s)}, \quad (2.32)$$

onde  $\bar{\rho}_c$  representa a densidade média da mistura gás-líquido na cabeça do poço que pode ser calculada pela equação 2.33,

$$\bar{\rho}_c = \frac{1}{\frac{x_c}{\rho_{gc}} + \frac{(1-x_c)}{\rho_l}}, \quad (2.33)$$

onde

$$\rho_{gc} = \frac{P_{wh} M}{RT_c}. \quad (2.34)$$

Combinando-se as equações 2.32, 2.33 e 2.34 pode-se obter o valor de  $p_{wh}$  e determinar as demais variáveis na cabeça do poço. O valor de  $\rho_{gc}$  é calculado utilizando-se a equação 2.34. Utilizando-se o resultado obtido com a equação 2.30 pode-se escrever por indução que

$$V_{gc} = u_{sgc} + u_{slc} + V_\infty. \quad (2.35)$$

Novamente, como as vazões mássicas de gás e líquido são iguais as do fundo,

$$V_{gc} = q_{gf}/A\rho_{gc} + q_{lf}/A\rho_l + V_\infty. \quad (2.36)$$

O valor de  $r_{gc}$  é calculado como

$$r_{gc} = \frac{q_{gf}}{A\rho_{gc}V_{gc}}. \quad (2.37)$$

O valor de  $V_{lc}$  pode ser calculado como,

$$V_{lc} = \frac{q_{lf}}{(1 - r_{gc})A\rho_l}. \quad (2.38)$$

Tendo definido as densidades, velocidades e as frações da área do tubo de produção ocupadas pelo gás e pelo líquido, além da pressão na cabeça de produção pode-se calcular um novo valor para a pressão de fundo. Uma expressão simplificada para a pressão de fundo consiste em considerar somente o termo devido à gravidade e ao atrito.

$$p_{wf-novo} = p_{wh} + (M_g + M_l)\frac{g}{A} + \Delta p_{atrito}. \quad (2.39)$$

Para calcular as massas de gás e líquido considera-se o eixo vertical com a origem no fundo do poço ( $z = 0$ ) e com ( $z = L$ ) na cabeça. As expressões para  $M_g$  e  $M_l$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned} M_g &= \int_0^L A_g(z)\rho_g(z)dz = A \int_0^L r_g(z)\rho_g(z)dz \\ M_l &= A \int_0^L (1 - r_g(z))\rho_l dz \end{aligned} \quad (2.40)$$

Necessita-se de expressões para  $r_g(z)$  e  $\rho_g(z)$ . Baseado no conhecimento do sistema optou-se por expressões exponenciais como

$$\begin{aligned} \rho_g(z) &= \rho_{gf}e^{k_\rho z} \\ r_g(z) &= r_{gf}e^{k_r z}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } k_\rho &= \frac{1}{L} \ln\left(\frac{\rho_{gc}}{\rho_{gf}}\right), \\ k_r &= \frac{1}{L} \ln\left(\frac{r_{gc}}{r_{gf}}\right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Substituindo as expressões para  $\rho_g(z)$  e  $r_g(z)$  da equação 2.41 na

equação 2.40 e resolvendo, obtém-se

$$\begin{aligned} M_g &= \left( \frac{\rho_{gf} A r_{gf}}{(k_r + k_\rho)} \right) (e^{((k_r + k_\rho)L)} - 1), \\ M_l &= \rho_l A (L - \left( \frac{r_{gf}}{k_r} \right) (e^{(k_r L)} - 1)). \end{aligned} \quad (2.43)$$

É interessante observar que utilizando-se também uma expressão exponencial para  $V_g(z)$  do tipo

$$\begin{aligned} V_g(z) &= V_{gf} e^{k_v z}, \text{ com} \\ k_v &= \frac{1}{L} \ln\left(\frac{V_{gc}}{V_{gf}}\right), \end{aligned} \quad (2.44)$$

obtém-se em regime permanente

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_g(z) \rho_g(z) V_g(z)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial r_g(z) \rho_g(z) V_g(z)}{\partial z} &= (k_r + k_\rho + k_v) r_{gf} \rho_{gf} V_{gf} e^{(k_r + k_\rho + k_v)z} = 0 \\ k_r + k_\rho + k_v &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

A constatação de que  $k_r + k_\rho + k_v = 0$  assegura que a solução obedece a lei da continuidade para escoamento onde não há conversão gás-líquido e vice-versa. Para o cálculo da perda de pressão por atrito preferiu-se utilizar uma expressão linear para a evolução da densidade média e da velocidade média da mistura. Este procedimento será utilizado também na simulação dinâmica onde não se conhece a distribuição espacial dessas variáveis e uma aproximação linear é um bom compromisso. Definindo-se as densidades médias no fundo  $\bar{\rho}_f$  e na cabeça do poço  $\bar{\rho}_c$ , tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_f &= r_{gf} \rho_{gf} + (1 - r_{gf}) \rho_l, \\ \bar{\rho}_c &= r_{gc} \rho_{gc} + (1 - r_{gc}) \rho_l. \end{aligned} \quad (2.46)$$

A distribuição de densidade para o cálculo da queda de pressão por atrito ao longo do eixo  $z$  já definido é escrita como

$$\bar{\rho}(z) = \bar{\rho}_f + \frac{\bar{\rho}_c - \bar{\rho}_f}{L} z. \quad (2.47)$$

As velocidades da mistura são definidas como em [1],

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_f &= u_{sgf} + u_{slf} \\
 \bar{u}_c &= u_{sgc} + u_{slc} \\
 \text{onde } u_{sgf} &= \frac{q_{gf}}{\rho_{gf}A}, \\
 u_{slf} &= \frac{q_{lf}}{\rho_l A}, \\
 u_{sgc} &= \frac{q_{gc}}{\rho_{gc}A}, \\
 u_{slc} &= \frac{q_{lc}}{\rho_l A}.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

A equação para a velocidade da mistura ao longo do eixo  $z$  é escrita como

$$\bar{u}(z) = \bar{u}_f + \frac{\bar{u}_c - \bar{u}_f}{L}z. \tag{2.49}$$

A taxa de queda de pressão por atrito pode ser escrita como

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{f}{2D}\bar{\rho}(z)\bar{u}(z)^2, \text{ ou} \tag{2.50}$$

$$\Delta p_{\text{atrito}} = \frac{f}{2D} \int_0^L \bar{\rho}(z)\bar{u}(z)^2 dz \tag{2.51}$$

Substituindo as equações 2.47 e na equação 2.51,

$$\Delta p_{\text{atrito}} = \frac{f}{2D} \int_0^L \left( \bar{\rho}_f + \frac{\bar{\rho}_c - \bar{\rho}_f}{L}z \right) \left( \bar{u}_f + \frac{\bar{u}_c - \bar{u}_f}{L}z \right)^2 dz \tag{2.52}$$

A solução da equação 2.52 fornece

$$\begin{aligned}
 \Delta p_{\text{atrito}} &= \frac{fL}{2D} \left( \frac{2}{12}\bar{\rho}_f\bar{u}_f\bar{u}_c \right) + \frac{1}{12}\bar{\rho}_c\bar{u}_f^2 + \frac{3}{12}\bar{\rho}_f\bar{u}_f^2 + \frac{1}{12}\bar{\rho}_f\bar{u}_c^2 + \\
 &\frac{2}{12}\bar{\rho}_c\bar{u}_c\bar{u}_f + \frac{3}{12}\bar{\rho}_c\bar{u}_c^2
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Tendo obtido um novo valor para a pressão de fundo,  $p_{wf-novo}$ , pode-se calcular o erro

$$\text{erro}_{\text{atual}} = p_{wf-novo} - p_{wf}. \tag{2.54}$$

A correção no valor de  $p_{wf}$  foi realizada utilizando a aplicação

de um algoritmo de controle Proporcional Integral (PI) na forma discreta. O novo valor é calculado como

$$p_{wf} = p_{wf} + Corr, \quad (2.55)$$

e o valor da correção é calculado como

$$Corr = Corr_{anterior} + (k_p + k_i)erro_{atual} - k_p erro_{anterior}. \quad (2.56)$$

O algoritmo é interrompido quando atinge-se um erro com valor absoluto menor do que um valor admissível,  $e_{admissivel}$ . Na fase de regime permanente calcula-se a solução para toda a faixa de valores de vazão de injeção de gás de interesse. Este procedimento permite determinar uma expressão para a pressão na cabeça do poço em função dos estados  $M_g$  e  $M_l$ .

Uma variável chave para a descrição matemática do processo é a pressão na cabeça do poço. Em [33] calcula-se a pressão na cabeça com a equação 2.57,

$$p_{whp} = \frac{M_g}{AL - \frac{M_l}{\rho_l}} \frac{RT_c}{M}, \quad (2.57)$$

Esta expressão foi proposta para um modelo bastante simplificado. Considerando o fator de compressibilidade do gás igual a 1, a expressão seria válida se a massa de gás  $M_g$  estive toda submetida a mesma pressão. No caso em que o tubo de produção está todo ocupado por gás  $\frac{M_g}{M_g + M_o} \rightarrow 1$  a expressão se aproxima da realidade ao se desprezar o efeito do peso do gás. Já, para poços não surgentes e, considerando que não há velocidade descendente de fluido, quando o tubo de produção está todo ocupado por líquido,  $\frac{M_g}{M_g + M_o} \rightarrow 0$ , a pressão na cabeça tende a pressão do separador,  $P_s$ . Diante disso uma proposta é a utilização da expressão

$$\begin{aligned} p_{whp} &= \frac{M_g}{AL - \frac{M_l}{\rho_l}} \frac{RT_c}{M} \\ p_{wh} &= \beta p_{whp} + (1 - \beta)P_s \end{aligned} \quad (2.58)$$

Obviamente deve-se também obter uma expressão para  $\beta$ . Pelo exposto é natural buscar uma expressão para  $\beta$  como função de  $I_g = \frac{M_g}{M_g + M_o}$ . Como para cada valor de vazão de injeção  $q_{gf}$  obtém-se valores para  $M_g$ ,  $M_l$ ,  $p_{wh}$  e  $p_{whp}$  obtém-se suficiente



informação para ajustar uma função para  $\beta$  como função de  $I_g$ . A cada um dos  $n$  valores de  $q_{gf}$  calcula-se

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{p_{wh} - P_s}{p_{whp} - P_s}, \\ I_g &= \frac{M_g}{M_g + M_o}.\end{aligned}\quad (2.59)$$

Ajusta-se então os parâmetros do polinômio

$$\beta_{estimado} = k_1 + k_2 I_g + k_3 I_g^2 + k_4 I_g^3 + k_5 I_g^4 + k_6 I_g^5 \quad (2.60)$$

### O modelo dinâmico

O modelo descrito pela equação 2.15 é discretizado com um tempo de amostragem  $T_s$ . A derivada de qualquer dos três estados é aproximada pela expressão de Euler. Na modelagem dinâmica não se pode contar com algumas simplificações possíveis para o modelo de regime permanente. A vazão mássica, por exemplo, não é necessariamente igual ao longo do eixo vertical  $z$  e tampouco o valor de  $x$  no instante  $kT_s$  é igual na cabeça e no fundo do poço. Sabe-se que se a velocidade do gás fosse constante então, de acordo com a equação 2.25,

$$x_c(t) = x_f(t - \tau), \text{ com} \quad (2.61)$$

$$\tau = \frac{L}{V_g} \quad (2.62)$$

O procedimento adotado para a obtenção de  $x_c(kT_s)$  consiste em manter uma matriz  $H$  com  $N_h$  linhas e três colunas. Uma coluna para o valor de  $V_{gc}$ , outra para  $V_{gf}$  e outra para  $x_f$ . Em regime permanente todas as linhas são iguais.

Na medida em que se inicia a simulação dinâmica, passado o tempo  $T_s$  todas as linhas, exceto a primeira são deslocadas para uma posição mais abaixo e a última linha é descartada. A primeira linha recebe os valores atualizados de  $V_{gc}(T_s)$ ,  $V_{gf}(T_s)$  e  $x_f(T_s)$ . O valor de  $x_c(kT_s)$  será igual a  $x_f((k + d)T_s)$  sendo que para encontrar o valor de  $d$  o seguinte procedimento é adotado.

Deve-se observar que para cada instante de tempo, no lugar de uma única velocidade, temos a velocidade no fundo do poço,  $V_{gf}$  e na cabeça do poço,  $V_{gc}$ . Assim no instante  $kT_s$  podemos calcular

a distância percorrida pelo gás como  $\Delta L_1 = V_{gc}(kT_s)T_s$ . Isso nos levaria para a segunda linha em um ponto  $L_1$  abaixo da cabeça do poço. A velocidade do gás na distância  $L_1$  abaixo da cabeça no instante  $(k-1)T_s$  pode ser obtida através de uma interpolação considerando uma distribuição de velocidade linear entre  $V_{gf}((k-1)T_s)$  e  $V_{gc}((k-1)T_s)$  cujos valores estão na segunda linha da matriz  $H$ . Ou seja, a seguinte relação é válida,

$$\frac{V_g(L_1, (k-1)T_s) - V_{gf}((k-1)T_s)}{L - L_1} = \frac{V_{gc}((k-1)T_s) - V_{gf}((k-1)T_s)}{L}, \text{ e} \quad (2.63)$$

$$V_g(L_1, (k-1)T_s) = V_{gf}((k-1)T_s) + \frac{L - L_1}{L} (V_{gc}((k-1)T_s) - V_{gf}((k-1)T_s)). \quad (2.64)$$

Com o valor de  $V_g(L_1, (k-1)T_s)$  pode-se calcular o novo deslocamento,  $L_2$ ,

$$L_2 = L_1 + V_g(L_1, (k-1)T_s)T_s \quad (2.65)$$

O procedimento é continuado até que o valor calculado de  $L_d$  iguale  $L$ . Neste ponto,

$$x_c(kT_s) = x_f((k-d)T_s). \quad (2.66)$$

Utilizando os dados da matriz  $H$  com  $V_{gc}$  na coluna 1,  $V_{gf}$  na coluna 2 e  $x_f$  na coluna 3, o seguinte pseudo código permite

determinar o valor de  $x_c(kT_s)$ .

```

Le = 0;
i = 0;
while Le < L
i = i + 1;
Vgz = H(i, 2) + (L - Le) * (H(i, 1) - H(i, 2)) / L;
Le = Le + Vgz * Ts;
end
T = i;
xc = H(T, 3);

```

O valor de  $p_{wh}$  é calculado utilizando-se a equação 2.57 com  $\beta$  obtido com os coeficientes previamente calculados na fase de simulação de regimes permanente. Com  $p_{wh}$  pode-se calcular  $\rho_{gc}$  e com  $x_c$  obtido com o procedimento previamente descrito pode-se calcular a densidade média na cabeça do poço,  $\bar{\rho}_c$  utilizando-se a equação 2.33. Como  $\bar{\rho}_c = r_{gc}\rho_{gc} + (1 - r_{gc}\rho_l)$ , obtém-se  $r_{gc}$  como

$$r_{gc} = \frac{(\rho_l - \bar{\rho}_c)}{(\rho_l - \rho_{gc})}. \quad (2.67)$$

Calcula-se na sequência a vazão mássica total na cabeça do poço para a condição de abertura total do *choke* de produção,  $u = 1$ .

$$q_c = Cu\sqrt{\bar{\rho}_c(p_{wh} - P_s)} \quad (2.68)$$

Supõe-se que  $q_c \geq 0$ . No caso em que  $r_{gc} = 1$ , a vazão mássica na cabeça do poço é igual a vazão de gás e

$$\begin{aligned}
q_{gc} &= q_c, \\
u_{sgc} &= \frac{q_{gc}}{\rho_{gc}A}, \\
V_{gc} &= u_{sgc}, \\
u_{slc} &= 0, \\
V_{lc} &= 0.
\end{aligned} \quad (2.69)$$

Para valores de  $r_{gc} < 1$ , utiliza-se as seguintes relações

$$\begin{aligned}
 u_{sgc} &= \frac{q_{gc}}{\rho_{gc}A}, \\
 u_{slc} &= \frac{q_{lc}}{\rho_l A}, \\
 V_{gc} &= u_{sgc} + u_{slc} + V_{\infty}, \\
 q_{gc} + q_{lc} &= q_c, \\
 q_{gc} &= r_{gc}A\rho_{gc}V_{gc},
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

para obter-se

$$V_{gc} = \frac{q_c + V_{\infty}\rho_l A}{\bar{\rho}_c A}. \tag{2.71}$$

Nota-se a vazão mássica virtual  $V_{\infty}\rho_l A$  na equação 2.71. A velocidade  $V_{lc}$  é calculada utilizando-se a equação 2.19 e as vazões mássicas de gás e líquido na cabeça do poço são calculadas,

$$\begin{aligned}
 q_{gc} &= r_{gc}A\rho_{gc}V_{gc}, \\
 q_{lc} &= (1 - r_{gc})A\rho_l V_{lc}.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

A pressão de fundo é recalculada a cada instante de tempo utilizando-se a equação 2.39.

## Aplicação do modelo

A fim de verificar a qualidade do modelo desenvolvido aplicou-se ao poço também modelado por [1] com os parâmetros definidos na tabela 2.3.

A figura 2.5 mostra alguns resultados obtidos na fase regime permanente para o poço com os parâmetros da tabela 2.3. A figura 2.5-a mostra a relação Pressão de fundo versus vazão de injeção de gás. A figura 2.5-b mostra a pressão na cabeça do poço e seu valor estimado com o polinômio descrito pela equação 2.60. A figura 2.5-c mostra a distribuição da fração de vazão,  $r_g$ , ao longo do eixo vertical para uma vazão de injeção de gás de 1.0 kg/s. Nota-se que a curva é muito semelhante aquela apresentada em [1] para o poço com os mesmos parâmetros e vazão de injeção e utilizando uma modelagem baseada na solução das equações diferenciais parciais que regem o fenômeno. A figura 2.5-d mostra que  $x$  tem uma relação praticamente linear em relação a vazão de

Tabela 2.3: Parâmetros do poço de teste

Símbolo	Descrição	Unidade
$T$	Temp. na cabeça e fundo do poço	[300 K]
$M$	Massa molar do gás	[0.0289 Kg/mol]
$L$	Dist. da cabeça-fundo do poço	[2500 m]
$D$	Diâm. interno tubo de produção	[0.125 m]
$f$	Fator de atrito	[0.015]
$C$	Constante do <i>choke</i> de produção	[0.0058 m <sup>2</sup> ]
$PI$	Índice de Produtividade do poço	[4 × 10 <sup>-6</sup> Kg/sPa]
$\rho_{ol}$	Densidade do líquido produzido	[1000 Kg/m <sup>3</sup> ]
$P_r$	Pressão estática da formação	[18 × 10 <sup>6</sup> Pa]
$P_s$	Pressão do separador	[1 × 10 <sup>6</sup> Pa]
$\tau$	Const. Tempo vazão da formação	[600s]

injeção de gás.

A figura 2.6 apresenta o comportamento da pressão de fundo  $p_{wf}$  e da vazão de líquido na cabeça do poço  $q_{lc}$  para a vazão de injeção de gás,  $q_{gf}$ , com valor inicial de 2.0 kg/s que cai para 1.0 kg/s no tempo igual a 2 horas e cai novamente para 0.1 kg/s no tempo igual a 6 horas.

O comportamento da pressão de fundo para a primeira mudança na vazão de injeção acontece dentro do esperado com uma reação do tipo resposta inversa e pouca oscilação. Quando a vazão cai para 0.1 kg/s ocorre o fenômeno *density-wave* caracterizado pelo comportamento com oscilações sustentadas da pressão de fundo e consequente vazão de produção de líquido na cabeça do poço na forma de golfadas.

A figura 2.7 mostra o comportamento das variáveis  $M_g$ ,  $M_l$ ,  $r_{gc}$ ,  $r_{gf}$ ,  $P_{wh}$  e  $x_f$ . Observa-se que todas as variáveis desenvolvem oscilações sustentadas após a mudança na vazão de injeção de gás no tempo igual a 6 horas.

As figuras 2.8 e 2.9 apresentam os resultados obtidos com a simulação do poço teste instanciado no simulador OLGA2000<sup>MR</sup>. Nota-se na figura 2.8 que a mudança da vazão de injeção no tempo  $t = 6$  horas foi para um valor maior do que o valor utilizado com o modelo desenvolvido. Isto foi feito propositadamente para que ocorresse o fenômeno *density-wave* e se pudesse comparar quali-

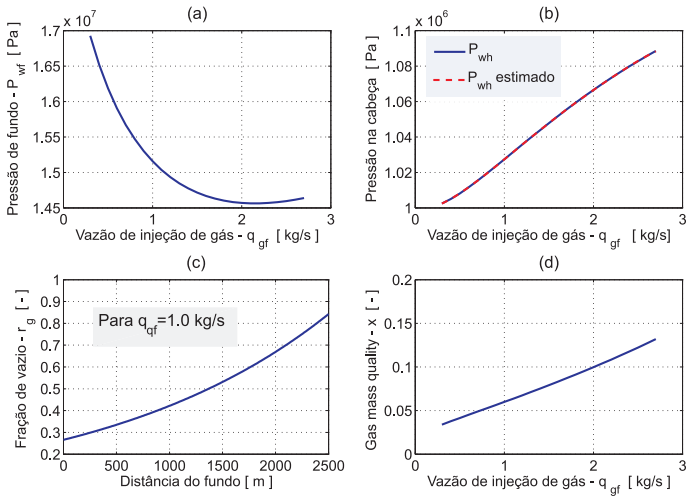


Figura 2.5: Alguns resultados para regime permanente

tativamente as respostas das variáveis de interesse.

A figura 2.8 mostra no topo a vazão de injeção de gás seguida da pressão de fundo  $p_{wf}$  logo e da vazão de produção de líquido na cabeça do poço  $q_{lc}$ . Nota-se uma semelhança muito forte com os resultados obtidos com o simulador desenvolvido e apresentados na figura 2.6.

A figura 2.9 apresenta no topo as frações de gás no fundo,  $r_{gf}$  e na cabeça do poço,  $r_{gc}$  seguida do gráfico da pressão na cabeça do poço,  $p_{wh}$  e da fração mássica de gás do fundo do poço,  $x_f$ . Percebe-se que qualitativamente existe uma semelhança no comportamento das mesmas variáveis obtidas com o simulador desenvolvido e apresentadas na figura 2.7.

A figura 2.10 mostra o mapa dos estados  $q_{lf}$ ,  $M_g$  e  $M_l$ . Nota-se que a trajetória da curva atinge um ponto fixo na mudança da vazão de injeção para  $1.0$  kg/s mas entra em uma órbita fechada (ciclo-limite estável) na mudança para  $0.1$  kg/s.

Utilizou-se o poço com os parâmetros da tabela 2.3 para realizar um estudo sobre a estabilidade do poço quando se varia a pressão estática da formação. Utilizando-se o modelo desenvolvido diminuiu-se a vazão de injeção até o ponto onde o poço

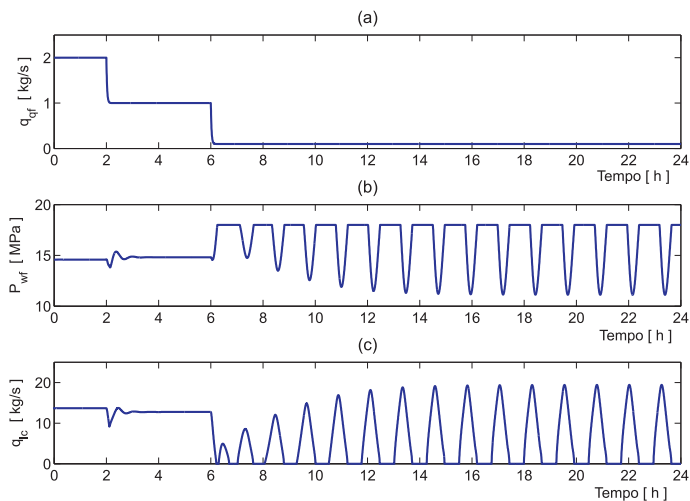


Figura 2.6: Alguns resultados de simulação dinâmica I

desenvolve oscilações sustentadas ou um ciclo-limite. O resultado é apresentado na figura 2.11. Nota-se que na medida em que a pressão estática da formação aproxima-se de um valor que induziria surgência do poço diminui a vazão mássica de injeção de gás necessária para levar o poço a instabilidade. O modelo corrobora as observações em [1] de que não ocorre o fenômeno *density-wave* em poços surgentes.

Nota-se que as vazões máximas que geram ciclo-limites estáveis são menores que aquelas encontradas com o modelo mais completo de [1] para o mesmo poço.

Entretanto, os valores de vazão de injeção máxima que geram oscilações sustentadas para diferentes valores de pressão estática de formação estão muito próximos aos valores encontrados com as simulações mostradas em [1] utilizando o simulador OLGA2000<sup>MR</sup> e apresentadas aqui na figura 2.12.

O conhecimento do valor da vazão de injeção de gás que gera o comportamento *density-wave* é muito importante para uma boa estratégia de controle e otimização da produção de um grupo de poços. No momento da restrição da vazão de gás disponível será necessário diminuir a vazão de injeção de gás dos poços. Para cada poço deverá ser respeitada uma regra que estabelece

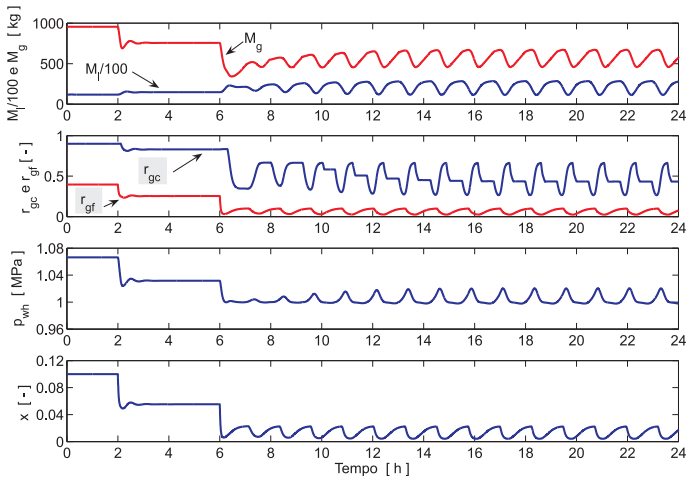


Figura 2.7: Alguns resultados de simulação dinâmica II

uma vazão de injeção mínima de gás a fim de que o poço não desenvolva o fenômeno *density-wave*. Esta vazão mínima deverá ser igual ao valor da vazão de injeção que leva o poço a desenvolver oscilações sustentadas acrescido de um fator de segurança. No caso de haver uma incerteza muito grande no valor mínimo correto este fator de segurança pode ser muito grande o que vai prejudicar a distribuição ótima de gás dentre os poços nos momentos de restrição.

A figura 2.13 mostra uma simulação para o poço exemplo com a pressão do reservatório igual a 11.0 MPa quando se faz uma mudança na vazão de injeção de gás de 2.0  $kg/s$  para 0.55  $kg/s$ . Nota-se claramente o desenvolvimento de um ciclo limite. Simulações com vazões ligeiramente maiores do que 0.55  $kg/s$  dão origem a comportamento semelhante mas as oscilações apresentam uma tendência de queda de amplitude. O ponto  $q_{gf} = 0.55$ ,  $P_r = 11.0 MPa$  é mostrado na figura 2.11.

Um procedimento adequado para a determinação dos tipos de equilíbrios seria analisar os autovalores da matriz Jacobiana  $J$  do modelo dinâmico descrito pela equação 2.73 com os valores



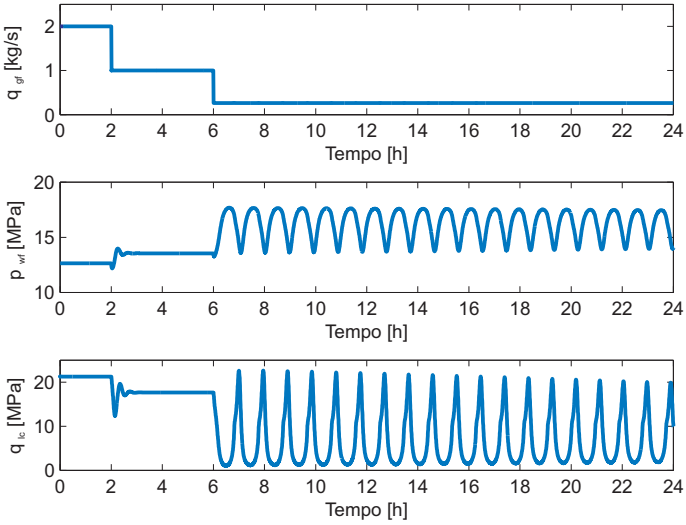


Figura 2.8: Resultados com o simulador OLGA2000<sup>MR</sup> I

encontrados nos equilíbrios.

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \dot{M}_g = q_{gf} - q_{gc} \\
 f_2 &= \dot{M}_l = q_{lf} - q_{lc} \\
 f_3 &= q_{lf} = \frac{1}{\tau} [-q_{lf} + PI(P_r - p_{wf})]
 \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial M_g} & \frac{\partial f_1}{\partial M_l} & \frac{\partial f_1}{\partial q_{lf}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial M_g} & \frac{\partial f_2}{\partial M_l} & \frac{\partial f_2}{\partial q_{lf}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial M_g} & \frac{\partial f_3}{\partial M_l} & \frac{\partial f_3}{\partial q_{lf}} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Dada a complexidade do modelo, uma alternativa seria obter a matriz Jacobiana de forma numérica, onde

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_j}{\partial M_g^{eq.}} &= \frac{f_j(M_g^{eq.} + \epsilon)}{\epsilon} \\
 \frac{\partial f_j}{\partial M_l^{eq.}} &= \frac{f_j(M_l^{eq.} + \epsilon)}{\epsilon} \\
 \frac{\partial f_j}{\partial q_{lf}^{eq.}} &= \frac{f_j(q_{lf}^{eq.} + \epsilon)}{\epsilon}
 \end{aligned} \quad (2.75)$$

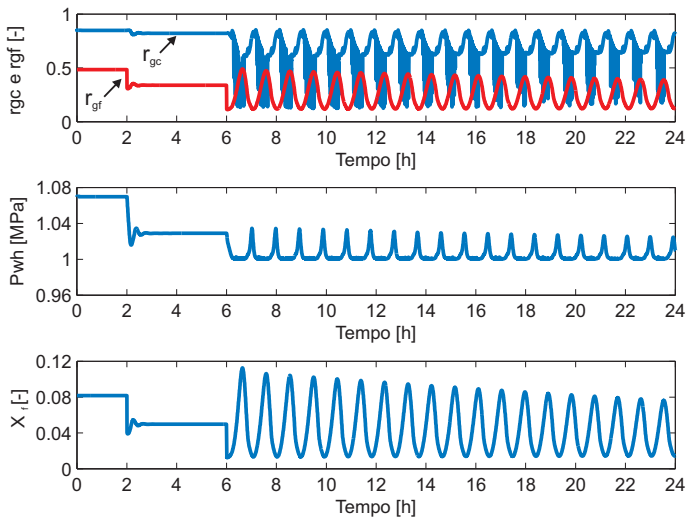
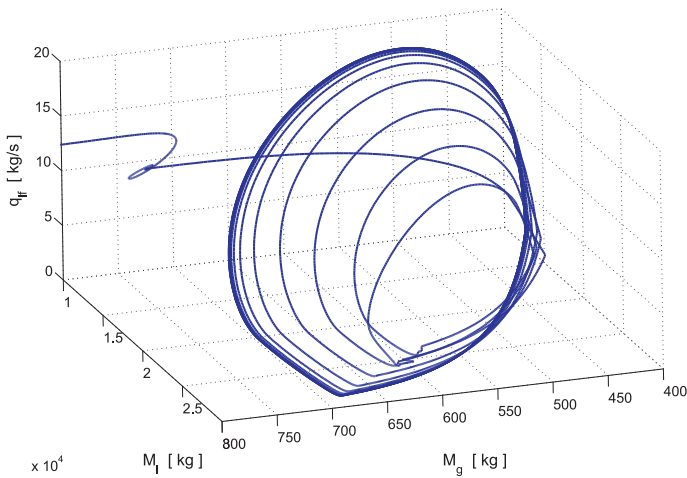
Figura 2.9: Resultados com o simulador OLGA2000<sup>MR</sup> II

Figura 2.10: Comportamento tipo órbita fechada

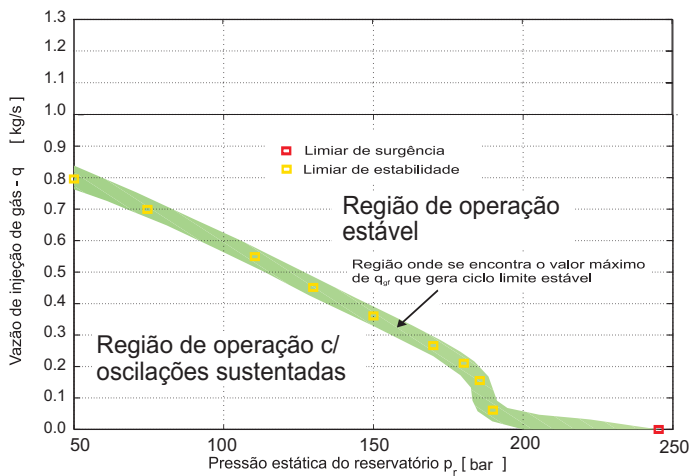
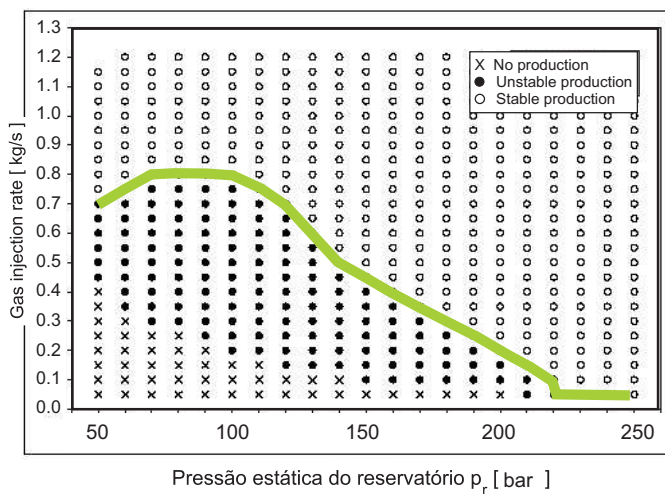


Figura 2.11: Equilíbrios com modelo desenvolvido

Figura 2.12: Equilíbrios com OLGA2000<sup>MR</sup>

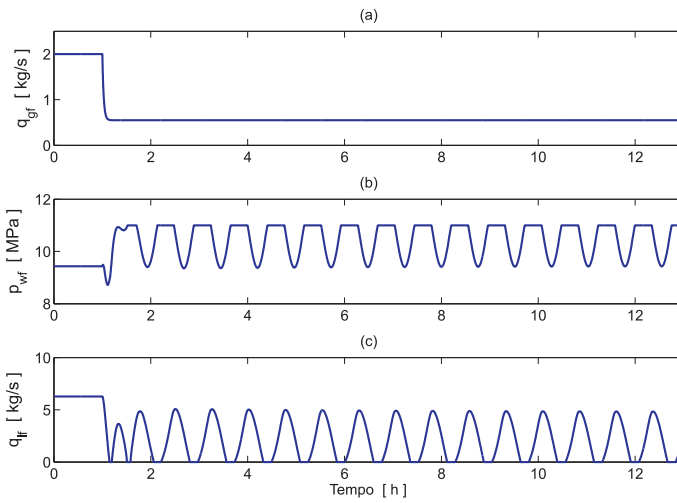


Figura 2.13: Simulação dinâmica  $p/P_r = 11$  MPa com  $q_{gf} = 0.55$  kg/s

## 2.2.2 Um modelo empírico para otimização da elevação por GLC <sup>1</sup>

A disponibilidade da medição das vazões de água, óleo e gás produzidas por cada poço em tempo real ainda não é uma realidade. Como alternativa busca-se estimar estas vazões da melhor forma possível. Com o aumento do uso de medidores de pressão e temperatura de fundo, surge uma oportunidade para melhorar a otimização da produção dos poços operando por GLC.

A otimização da operação de um grupo de poços depende fundamentalmente do conhecimento das relações entre as vazões de óleo, água e gás produzidas pelos poços em função da vazão de injeção de gás (*Curvas WPC-Well Performance Curve*). Estas relações mudam ao longo do tempo causando a necessidade de desenvolver-se uma técnica para sua atualização. Os desenvolvimentos apresentados nesta seção baseiam-se em um novo cenário para poços sendo completados atualmente. Neste cenário

- os poços são equipados com medição de pressão de fundo.
- Todos os poços recebem gás para injeção de um mesmo *manifold*.
- Todos os poços são equipados com medidores de vazão mássica de gás na linha de injeção.
- Todos os poços são equipados com válvula de controle na linha de injeção de gás.
- Todos os poços podem ter sua produção direcionada para um separador de teste.

O objetivo é encontrar uma forma de predizer as vazões de água, óleo e gás ou, no jargão da indústria, determinar as curvas *WPC*. A estratégia que vai se adotar consiste em

- buscar uma função que estime a pressão de fundo  $p_{wf}$  em regime permanente em função da vazão de injeção de gás  $q_{inj}$ ,
- utilizar a curva *IPR* do poço,
- estabelecer uma estratégia de atualização do modelo  $p_{wf} = f(q_{inj})$ .

---

<sup>1</sup>Parte deste trabalho foi publicado em [36] e também faz parte do projeto de pesquisa **Desenvolvimento de Algoritmos de Controle para Métodos de Elevação Artificial** realizado em parceria com a Petrobras.

Deve-se observar que mesmo tendo-se medições de superfície das vazões seria necessário conhecer também o modelo que relaciona essas vazões com a vazão de injeção de gás pois, principalmente no momento de restrição na disponibilidade de gás necessita-se de modelos para otimizar a distribuição de gás que maximize uma função objetivo como a máxima produção de óleo, por exemplo. Antes de apresentar o desenvolvimento do modelo  $p_{wf} = f(q_{inj})$  faz-se uma introdução à relação IPR na subseção seguinte.

### **A curva IPR-*Inflow Performance Relationship***

Desde o início da exploração de petróleo buscou-se uma relação, em regime permanente, entre a vazão de produção e a pressão de fundo na frente dos canhoneados. Para a razão entre a variação da vazão  $\Delta Q$  e a variação na pressão de fundo  $\Delta p_{wf}$ ,  $\frac{\Delta Q}{\Delta p_{wf}}$  deu-se a denominação de *Índice de Produtividade*. M. Muskat, em 1942 já apontava que as propriedades do petróleo e a distribuição da permeabilidade relativa e saturação variam de acordo com a queda de pressão observada dentro do reservatório em direção ao poço produtor. Assim, esperava que a relação entre a vazão e a pressão de fundo fosse mais complexa que linear, principalmente em reservatórios produzindo com pressão abaixo do ponto de bolha.

Uma introdução à representação da produção de poços de petróleo utilizando a curva IPR deve passar necessariamente por sua obtenção analítica, ainda que seja para condições muito especiais. Mostra-se aqui a obtenção da relação IPR para um escoamento de líquido subsaturado (sempre a pressão acima do ponto de bolha).

O escoamento em meio poroso é descrito pela conhecida fórmula de Darcy,

$$q = \frac{kA}{\mu} \frac{dP}{dr}, \quad (2.76)$$

onde

- $q$  é a vazão  $\left[ \frac{m^3}{s} \right]$
- $k$  é a permeabilidade  $[m^2]$ ,
- $A$  é a seção transversal ao escoamento ou área de drenagem  $[m^2]$ ,

- $P$  é a Pressão [ $Pa$ ]
- $r$  é a distância na direção do fluxo [ $m$ ],
- $\mu$  é a viscosidade do fluido [ $\frac{Kg}{m.s}$ ].

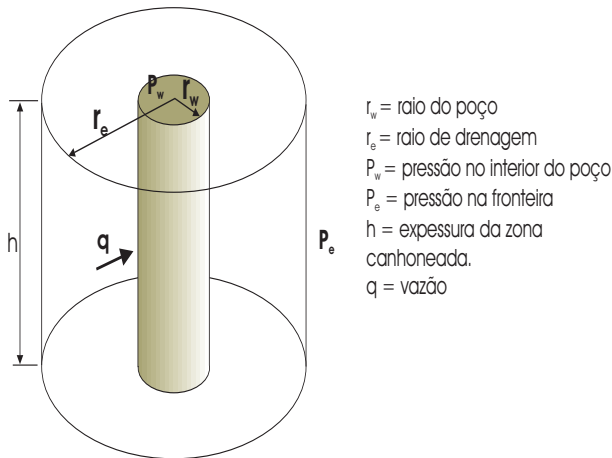


Figura 2.14: Modelo de influxo

A figura 2.14 mostra o modelo utilizado na obtenção analítica da curva de influxo. Diversas premissas são assumidas como

- a formação é homogênea,
- a formação é isotrópica,
- o fluido tem viscosidade constante,
- o fluido tem compressibilidade baixa e constante,
- o fluxo é isotérmico e laminar,
- os efeitos da gravidade são desprezados,
- a espessura do reservatório é constante com camadas impermeáveis acima e abaixo da zona permeável,
- o fluxo no reservatório é de fase única.

A obtenção da expressão para o influxo é obtida com a solução da equação da difusão,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (2.77)$$

onde

- $P$  é a pressão,
- $r$  é a distância radial ao centro do poço,
- $\phi$  é a porosidade da formação,
- $\mu$  é a viscosidade do fluido,
- $k$  é a permeabilidade da formação,
- $c_t$  é a compressibilidade total formação-fluido.

As seguintes condições iniciais e de fronteira são utilizadas, para  $r = r_w$ , utilizando-se a equação de Darcy (equação 2.76),

$$\begin{aligned} q &= \frac{kA}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \frac{dP}{\partial r} &= \frac{q\mu}{kA} \\ A &= 2\pi r_w h \\ \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_w} &= \frac{q\mu}{k2\pi r_w h} \end{aligned} \quad (2.78)$$

A condição de fronteira em  $r = r_w$  é

$$\lim_{r \rightarrow r_w} r \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{q\mu}{k2\pi h} \quad (2.79)$$

Para a fronteira externa três tipos são consideradas:

- Reservatório com ação infinita. No início da exploração do reservatório a movimentação de fluido ainda não atingiu suas fronteiras e o perfil de pressão é uma função do tempo. A condição é então escrita como

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(r, t) = P_i. \quad (2.80)$$

- Fronteira com fluxo nulo. O segundo tipo de fronteira é o de fluxo zero na fronteira ou

$$\left. \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_e} = 0. \quad (2.81)$$



- Fronteira com pressão constante. Assume que a pressão na fronteira mantém-se constante,

$$P(r_e, t) = P_r. \quad (2.82)$$

Na expressão (2.80),  $P_i$  significa a pressão inicial do reservatório. A solução da equação da difusão (2.77) para as três diferentes condições de fronteira gera as seguintes expressões:

- Fluxo transiente

$$p_{wf} = P_i - \frac{162.6q\mu B}{kh} \left[ \log(t) + \log\left(\frac{k}{\phi\mu c_t r_w^2}\right) - 3.23 \right] \quad (2.83)$$

- Fluxo em pseudo regime permanente

$$p_{wf} = \bar{P} - \frac{q\mu B}{0.00708kh} \left[ \log\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - 3.4 \right] \quad (2.84)$$

- Fluxo em regime permanente

$$p_{wf} = P_r - \frac{q\mu B}{0.00708kh} \log\left(\frac{r_e}{r_w}\right) \quad (2.85)$$

Nas expressões (2.83) a (2.85) as seguintes variáveis foram introduzidas:

- $P_i$ =Pressão inicial do reservatório (psia)
- $\bar{P}$ =Pressão média do reservatório (psia)
- $p_{wf}$ =Pressão na frente dos canhoneados com o poço fluindo
- $q$ =Vazão de óleo cru (STB/dia)
- $k$ =Permeabilidade (miliDarcy)
- $h$ =espessura da zona canhoneada (ft)
- $B$ =Fator volume de formação (fração)
- $\mu$ =Viscosidade do fluido (cP)
- $r_e$ =Raio de drenagem (ft)
- $r_w$ =Raio do poço (ft)

As expressões obtidas para o poço vertical produzindo óleo de um reservatório homogêneo e demais condições citadas fornece uma

relação linear entre a vazão e a diferença de pressão  $\bar{P} - p_{wf}$ . Na prática a relação IPR mais conhecida e utilizada para fluidos subsaturados está de acordo com a solução analítica obtida pela equação (2.84).

$$Q_o = J(\bar{P} - p_{wf}). \quad (2.86)$$

O índice de produtividade  $J$  leva em conta a permeabilidade relativa do óleo cru e o fator de skin que responde pela influência de danos na formação vizinha ao poço.

$$J = \frac{\alpha kh}{2\pi \left[ \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - 3.4 + s \right]} \frac{k_r}{\mu B}. \quad (2.87)$$

### Pequeno Histórico da Relação IPR

A primeira apresentação do conceito de curva IPR foi feita por Rawlins e Schellhardt em 1935, [37]. M. Muskat, em 1942, [38] já apontava que as propriedades do petróleo e a distribuição da permeabilidade relativa e saturação variam de acordo com a queda de pressão observada dentro do reservatório em direção ao poço produtor. Assim, esperava que a relação entre a vazão e a pressão de fundo fosse mais complexa que linear, principalmente em reservatórios produzindo com pressão abaixo do ponto de bolha. Uma fórmula sugerida para o índice de produtividade foi

$$J(p_{wf}) = - \frac{\partial Q(p_{wf})}{\partial p_{wf}}. \quad (2.88)$$

Como o índice de produtividade dependeria da pressão, Muskat sugeriu uma expressão para o índice de produtividade para um decréscimo de pressão na frente dos canhoneados perto de zero a fim de estabelecer uma referência,

$$J_0 = J(p_{wf}) = - \frac{\partial Q(p_{wf})}{\partial p_{wf}} \Big|_{\bar{P}} = \frac{\alpha kh}{2\pi \left[ \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - 3.4 + s \right]} \frac{k_r}{\mu B} \Big|_{\bar{P}}. \quad (2.89)$$

Em 1954, Gilbert, [39] introduziu o conceito de IPR na otimização da vazão de produção e pressão de fundo. Em 1968 J. V. Vogel trabalhou na busca de expressões para a vazão de óleo cru versus pressão de fundo para poços produzindo por mecanismos de gás dissolvido (*solution gas drive*) em diferentes estágios de de-

pleção e diferentes características de permeabilidade relativa, característica do óleo produzido. Ele observou um comportamento adimensional muito similar para a maioria dos casos investigados e estabeleceu uma equação prática que melhor se adequava.

$$\frac{q}{q_{max}} = 1 - 0.2 \left( \frac{p_{wf}}{P_r} \right) - 0.8 \left( \frac{p_{wf}}{P_r} \right)^2. \quad (2.90)$$

Esta equação era uma melhor ferramenta para analisar o comportamento de poços em reservatórios com mecanismo de produção do tipo gás em solução do que a equação linear.

Em 1973 M. J. Fetkovich propôs outra forma de IPR onde assumia que a mobilidade  $\left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)$  era uma simples função linear da pressão. ( $k_{ro}$  é a permeabilidade relativa para a fase óleo função da saturação de óleo,  $S_o$ ,  $\mu_o$  é a viscosidade do óleo e  $B_o$  é o fator de formação do óleo.) Fetkovich propôs que

$$\frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} = aP. \quad (2.91)$$

A forma da função IPR de Fetkovich é

$$\frac{q_o}{q_{o_{max}}} = \left( 1 - \frac{p_{wf}^2}{P^2} \right)^n \quad (2.92)$$

Estudos mais recentes como o de Raghavan, [40] partem da expressão

$$\frac{q_o}{q_{o_{max}}} = \frac{\int_{p_{wf}}^{\bar{P}} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} dP}{\int_0^{\bar{P}} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} dP} \quad (2.93)$$

e utilizam a suposição da relação linear entre a mobilidade e a

pressão para obter

$$\begin{aligned} \frac{q_o}{q_{o_m a x}} &= \frac{\int_{p_{wf}}^{\bar{P}} a p d p}{\int_0^{\bar{P}} a P d P} & (2.94) \\ \frac{q_o}{q_{o_m a x}} &= \frac{(a \bar{P}^2 - a p_{wf}^2)}{a \bar{P}^2} \\ \frac{q_o}{q_{o_m a x}} &= \left( 1 - \frac{p_{wf}^2}{\bar{P}^2} \right) \end{aligned}$$

Uma outra forma de IPR é uma pequena alteração na equação de Vogel proposta por Richardson and Shaw, [41], que permite uma maior flexibilidade de ajuste.

$$\frac{q_o}{q_{o_m a x}} = 1 - \nu \frac{p_{wf}}{\bar{P}} - (1 - \nu) \frac{p_{wf}^2}{\bar{P}^2} \quad (2.95)$$

Se a relação linear da mobilidade com a pressão é modificada para incorporar um termo constante, mostra-se em [42] que existe uma dependência de  $\nu$  com os valores da mobilidade.

$$\frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} = a + 2bP. \quad (2.96)$$

Mostra-se que o parâmetro  $\nu$  na equação (2.95) torna-se

$$\nu = \frac{2 \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{\bar{P}=0}}{\left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{\bar{P}=0} + \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{\bar{P}}}. \quad (2.97)$$

Trabalhos na busca de expressões IPR analíticas têm investido em pesquisas sobre o efeito das mudanças na mobilidade ao longo da vida produtiva do reservatório. Em [43] apresenta-se um procedimento para a obtenção analítica de IPR considerando o conhecimento da mobilidade e de suas derivadas em relação a pressão média do reservatório. Considerando o caso da fase óleo, por

exemplo, obtém-se a expressão da vazão como

$$q_o = J^\circ \int_{p_{wf}}^{\bar{P}} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} dP, \text{ onde} \quad (2.98)$$

$$J^\circ = \frac{2\pi kh}{\ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) - \frac{3}{4} + S}$$

Para um raio genérico de poço pode-se considerar  $p_{wf} = P$ . Para maior simplicidade faz-se uma troca de variáveis,

$$P = \bar{P} - \Delta P \quad (2.99)$$

$$dP = -d\Delta P.$$

Os limites de integração são mudados e a equação para a vazão  $q_o$  pode ser reescrita como

$$q_o = J^\circ \int_0^{\Delta P} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} d\Delta P. \quad (2.100)$$

Normaliza-se a expressão multiplicando-se e dividindo-se por  $\bar{P}$ .

$$q_o = J^\circ \bar{P} \int_0^{\frac{\Delta P}{\bar{P}}} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} d\left(\frac{\Delta P}{\bar{P}}\right). \quad (2.101)$$

Para facilitar a notação define-se  $x = \frac{\Delta P}{\bar{P}}$ . Neste caso a equação (2.101) torna-se

$$q_o = J^\circ \bar{P} \int_0^x \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o}(x) dx. \quad (2.102)$$

A expressão para  $q_o$  na equação (2.102) pode ser aproximada por uma série de Taylor.

$$q_o = q_o|_{(x=0)} + \sum_{i=1}^{i=N} \frac{d^i}{dx^i} q_o(x) \Big|_{x=0} \frac{1}{i!} (x)^i \quad (2.103)$$

Avaliando-se os termos da equação (2.102):

$$\begin{aligned}
q_o|_{x=0} &= 0 & (2.104) \\
\left. \frac{d}{dx} q_o(x) \right|_{x=0} &= J^\circ \bar{P} \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{(x=0)} \\
\left. \frac{d^2}{dx^2} q_o(x) \right|_{x=0} &= J^\circ \bar{P} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{(x=0)} \\
\left. \frac{d^3}{dx^3} q_o(x) \right|_{x=0} &= J^\circ \bar{P} \frac{1}{3!} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{(x=0)} \\
&\vdots \\
\left. \frac{d^n}{dx^n} q_o(x) \right|_{x=0} &= J^\circ \bar{P} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{(x=0)}
\end{aligned}$$

Escrito em uma forma compacta

$$q_o = J^\circ \bar{P} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{(x=0)} x^{n-1} \quad (2.105)$$

Um resultado muito importante é obtido quando se calcula a vazão máxima com o objetivo de obter-se uma expressão normalizada, do tipo apresentada por Vogel. A vazão máxima será aquela onde  $P = 0$  ou  $x = \frac{\Delta P}{\bar{P}} = \frac{\bar{P} - P}{\bar{P}} = 1$ , isto é,

$$q_{o\max} = J^\circ \bar{P} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{(x=0)}. \quad (2.106)$$

Obtém-se assim

$$\frac{q_o}{q_{o\max}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{(x=0)} x^{n-1}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right)_{(x=0)}}. \quad (2.107)$$

O resultado obtido com a equação (2.107) mostra que a relação entre a vazão para uma determinada pressão de fundo de poço e a vazão máxima não depende dos parâmetros geométricos do poço/reservatório confirmando a ideia de Vogel. Para uma aproximação da série de Taylor até a terceira derivada obtém-se a

seguinte expressão:

$$\frac{q_o}{q_{o\max}} = 1 + \frac{N_1}{D} \left(\frac{P}{\bar{P}}\right) + \frac{N_2}{D} \left(\frac{P}{\bar{P}}\right)^2 + \frac{N_3}{D} \left(\frac{P}{\bar{P}}\right)^3 + \frac{N_4}{D} \left(\frac{P}{\bar{P}}\right)^4, \text{ onde} \quad (2.108)$$

$$N_4 = \left[ \frac{1}{24} \frac{d^3}{dx^3} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} \right] \quad (2.109)$$

$$N_3 = - \left[ \frac{1}{6} \frac{d^2}{dx^2} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} + \frac{1}{6} \frac{d^3}{dx^3} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} \right]$$

$$N_2 = \left[ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} + \frac{1}{4} \frac{d^3}{dx^3} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} \right]$$

$$N_1 = - \left[ \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} + \frac{d}{dx} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \right) \Big|_{x=0} + \frac{1}{6} \frac{d^3}{dx^3} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} \right]$$

$$D = \left[ \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} + \frac{1}{6} \frac{d^2}{dx^2} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} + \frac{1}{24} \frac{d^3}{dx^3} \frac{k_{ro}(S_o)}{\mu_o B_o} \Big|_{x=0} \right] \quad (2.110)$$

Estas expressões servem para validar as aproximações polinomiais para as vazões de óleo do tipo

$$q_o(p_{wf}) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \left( \frac{p_{wf}}{\bar{P}} \right)^{i-1} \quad (2.111)$$

### Relação IPR utilizada neste trabalho

A relação IPR utilizada neste trabalho considera a existência de uma parte da curva sendo descrita pela relação linear para fluido subsaturado e outra parte para fluido saturado onde a pressão e temperatura de fundo caracteriza um ponto de operação abaixo do ponto de bolha. Definem-se as seguintes variáveis:

- $p_{sat}$ , Pressão de saturação.
- $q_{sat}$ , Vazão de líquido para pressão de fundo igual a pressão de saturação.

- $q_{max}$ , Vazão máxima de líquido para pressão de fundo igual a zero.
- $p_{wf}$ , Pressão na frente da zona canhoneada (*Pressure well flowing*).

A equação (2.112) mostra a relação IPR utilizada. A expressão é uma combinação de uma relação linear para fluido subsaturado e a expressão de Vogel. Note-se que para  $p_{wf} = p_{sat}$  tem-se a vazão igual a  $q_{sat}$  e para  $p_{wf} = 0$  obtém-se a vazão máxima  $Q_{max}$ .

$$q = q_{sat} + (q_{max} - q_{sat}) \left[ 1 - 0.2 \frac{p_{wf}}{p_{sat}} - 0.8 \left( \frac{p_{wf}}{p_{sat}} \right)^2 \right] \quad (2.112)$$

A figura 2.15 mostra um gráfico típico para este tipo de representação.

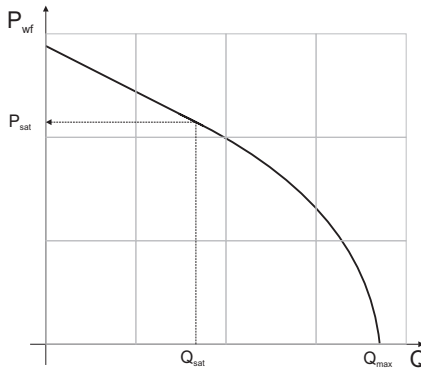


Figura 2.15: IPR linear + Vogel

### Estratégia para a obtenção da relação atual $q_o$ , $q_a$ e $q_g \times q_{inj}$

Com a disponibilidade da medição da pressão de fundo torna-se possível conceber um sistema automático para a determinação da relação em regime permanente entre a *Pressão de Fundo* e a *Vazão de injeção de gás* para cada poço. Este procedimento deve ser realizado mantendo-se a mesma condição na cabeça do



poço. Esta condição é tipicamente a abertura total do *choke* de produção e a manutenção da pressão no separador.

A atualização da relação  $q_o$ ,  $q_a$  e  $q_g$  x Vazão de Injeção de gás deve ser realizada para que nos momentos de restrição na disponibilidade de gás para injeção se possa levar os poços a operarem em pontos de operação que se traduzam em uma operação ótima sob algum ponto de vista econômico. Testes de produção que necessitam da redução da produção dos poços não são bem vistos pelo setor de operações pois se traduzem em altos custos.

Com a existência da medição da pressão de fundo e sua disponibilização em um sistema de controle via rede pode-se conceber estratégias simples para a manutenção da operação em pontos ótimos para situações em que não ocorram restrições. Uma ideia é realizar a aquisição em regime permanente de alguns pontos (Vazão de injeção, Pressão de Fundo) e levar o poço a operar em um ponto onde a taxa de variação da pressão de fundo em relação a vazão de injeção seja zero ( $\frac{\partial p_{wf}}{\partial q_{inj}} = 0$ ). Este ponto corresponde ao ponto  $P_1$  da figura 2.2 onde se mostra uma curva típica relacionando tanto a vazão de produção de óleo como a pressão de fundo em função da vazão de injeção de gás.

Este procedimento pode ser suficiente quando não existe restrição no fornecimento de gás e deseja-se otimizar a produção de óleo sem levar em conta nenhum custo associado. Entretanto, para o caso em que ocorra uma restrição na disponibilidade de gás para injeção a alocação de gás para cada poço necessita do conhecimento da relação entre a vazão de produção de óleo e a vazão de injeção de gás para cada poço.

A mesma necessidade existe caso se adote uma função objetivo que leva em conta o valor diferenciado da produção de óleo e gás, o custo de tratamento de água e o custo da compressão do gás. Neste caso mesmo havendo disponibilidade total de gás o ponto ótimo estará um pouco à esquerda do ponto  $P_1$  da figura 2.2. A ideia é obter a relação entre a Pressão de Fundo  $p_{wf}$  e a Vazão de Injeção  $q_{inj}$ ,  $p_{wf} = f(q_{inj})$  e então utilizar o conhecimento dos parâmetros da curva IPR, BSW e RGO para calcular as vazões de óleo, água e gás em função de  $q_{inj}$  conforme mostra a equação

(2.113).

$$\begin{aligned}
 p_{wf} &= f(q_{inj}) \\
 q_{inj}^{min} &\leq q_{inj} \leq q_{inj}^{max} \\
 q_{liq} &= q_{sat} + (q_{max} - q_{sat}) \left[ 1 - 0.2 \frac{p_{wf}}{p_{sat}} - 0.8 \left( \frac{p_{wf}}{p_{sat}} \right)^2 \right] \\
 q_o &= (1 - BSW) q_{liq} \\
 q_g &= RGO(1 - BSW) q_{liq} \\
 q_a &= BSW q_{liq}
 \end{aligned} \tag{2.113}$$

As vazões expressas pela equação (2.113) estão em unidades de volume por unidade de tempo em condições padrão de temperatura e pressão e podem ser convertidas facilmente para unidades de massa por tempo. O procedimento descrito pela equação (2.113) é de amplo conhecimento da indústria do petróleo mas sua aplicação torna-se factível com a medição da pressão de fundo. Para automatizar o procedimento de identificação da relação  $p_{wf} = f(q_{inj})$  e diminuir a perda de produção elaborou-se a seguinte estratégia. A estratégia proposta consiste nas seguintes etapas:

- 1 Aplicação de um procedimento de busca do ponto de pressão de fundo mínima ( $p_{wf}^*$  e a vazão de injeção correspondente  $q_{inj}^*$  tal que  $\frac{\partial p_{wf}}{\partial q_{inj}} |_{(p_{wf}^*, q_{inj}^*)} = 0$ ).
- 2 Procedimento de aquisição de pontos ( $p_{wf}, q_{inj}$ ) nas proximidades do ponto ( $p_{wf}^*, q_{inj}^*$ ). A idéia é fazer a aquisição de pontos de forma que o valor de  $p_{wf}$  não se afaste demasiado de  $p_{wf}^*$ .
- 3 Obtenção da curva estendida  $p_{wf} = f(q_{inj})$  com os pontos obtidos. A curva estendida visa extrapolar a relação  $p_{wf} = f(q_{inj})$  e cobrir todos os pontos operacionais ( $q_{inj}^{min.} < q_{inj} < q_{inj}^{max.}$ ).
- 4 Obtenção da curva WPC a partir da curva estendida  $p_{wf} = f(q_{inj})$  e dos parâmetros IPR, BSW e RGO conforme equação (2.113).

É importante que as condições de superfície sejam mantidas durante os testes para a aquisição dos pontos ( $p_{wf}, q_{inj}$ ).

Para o item 1 da estratégia propõe-se um procedimento automatizado no controle da vazão de injeção para a aquisição do par

(Pressão de Fundo, Vazão de Injeção) em regime permanente. Para tornar o procedimento mais eficiente e melhorar a qualidade dos dados obtidos a proposta é estabelecer uma janela de tempo onde os valores médios das duas variáveis e suas variâncias são calculadas. O valor médio aceito para o teste é aquele onde a variância estabilizou-se.

A atualização dos parâmetros da relação IPR, BSW e RGO continuam necessitando do direcionamento da produção do poço para um separador de teste. Para minimizar a perda de produção poderia ser interessante alternar testes onde o poço é operado somente no ponto  $(p_{wf}^*, q_{inj}^*)$  e testes com a operação em pelo menos dois pontos onde o segundo ponto seria aquele com a maior pressão de fundo atingida no teste para identificação de  $p_{wf} = f(q_{inj})$ .

A partir do resultado dos testes pode-se atualizar os valores de BSW, RGO e reavaliar os parâmetros da curva IPR.

Considerando-se que a pressão de saturação,  $p_{sat}$ , mantenha-se constante busca-se a atualização de dois parâmetros da curva IPR  $q_{sat}$  e  $q_{max}$ . É claro que os dois parâmetros seriam melhor avaliados com a colocação do poço em funcionamento em dois ou mais pontos de pressão de fundo diferentes. Entretanto uma alternativa é utilizar somente o teste de produção para a pressão de fundo mínima (máxima produção) o que evitaria qualquer perda de produção. Como são dois parâmetros a serem determinados precisaria-se de testes com pelo menos duas pressões de fundo diferentes para sua determinação. Uma alternativa é considerar que a relação entre  $q_{max}$  e  $q_{sat}$  se mantenha, isto é,  $\frac{q_{max2}}{q_{sat2}} = \frac{q_{max1}}{q_{sat1}} = k$ . Neste caso pode-se determinar os valores atualizados de  $q_{max}$  e  $q_{sat}$  sem perda de produção.

A estratégia para a atualização dos parâmetros IPR, BSW e RGO pode considerar testes com 1 ponto alternados com testes de 2 pontos sendo que cada vez se faria também o levantamento dos pontos  $(p_{wf}, q_{inj})$  para a obtenção da relação estendida  $p_{wf} = f(q_{inj})$ .

### O Modelo Matemático $p_{wf} = f(q_{inj})$

A busca por uma função matemática que possa descrever o comportamento da pressão de fundo em função da vazão de injeção de gás é orientada pelas seguintes observações:

- Busca-se uma função que possa ser utilizada para extrapolar valores de pressão de fundo.
- O ajuste da curva deverá ser feito com poucos pontos.
- Seria desejável que a técnica de ajuste permitisse a inserção de conhecimento sobre o processo.

Diversas funções foram testadas como funções polinomiais, trigonométricas e exponenciais. Finalmente a seguinte função mostrou-se capaz de absorver a relação para uma diferente gama de condições:

$$\begin{aligned}
 y_e &= \frac{p_{wf}}{p_{wf}^*} \\
 u &= \frac{q_{inj}}{q_{inj}^*} \\
 y_e &= \Theta_1 e^{-f(u, \Theta_2)} + \Theta_2 + \Theta_3 u^2, \quad (2.114)
 \end{aligned}$$

onde  $p_{wf}^*$  e  $q_{inj}^*$  são respectivamente os valores de  $p_{wf}$  e  $q_{inj}$  onde  $\frac{\partial p_{wf}}{\partial q_{inj}} = 0$ ,  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_3$  e  $\Theta_4$  são parâmetros ajustáveis como será visto a seguir.

A função combina uma exponencial com uma função quadrática. A exponencial decrescente somada a função quadrática vai apresentar um ponto de mínimo como acontece com a função desejada. Além disso, tanto a função exponencial como a função quadrática tem a capacidade de extrapolação muito boa quando comparadas, por exemplo, com expressões polinomiais de ordem maior que 2. Além disso a soma das duas funções busca uma representação onde predomine o decaimento para valores baixos de  $u$  e que a partir de um valor predomine o crescimento representando assim a diminuição devido a gravidade sendo dominada depois pelo crescimento devido ao atrito. Diversas funções expoentes  $f(u)$  foram testadas desde a mais simples como  $f(u) = u$ ,  $f(u) = \Theta_2 u$ , etc., mas um bom ajuste só pode ser obtido com a função  $f(u) = \Theta_2 u^m$ . O modelo final proposto torna-se então

$$\begin{aligned}
 y_e &= \frac{p_{wf}}{p_{wf}^*} \\
 u &= \frac{q_{inj}}{q_{inj}^*} \\
 y_e &= \Theta_1 e^{-\Theta_2 u^m} + \Theta_3 + \Theta_4 u^2, \quad (2.115)
 \end{aligned}$$

onde  $m$  realiza uma forma de transformação sobre a variável vazão de injeção e depende das características de cada poço como será apresentado na sequência.

## O ajuste dos parâmetros do modelo

O ajuste dos parâmetros do modelo foi colocado como um problema de programação quadrática sequencial. Inicialmente a matriz com  $n$  pares  $(p_{wf}, q_{inj})$  foi normalizada dividindo-se todas as pressões pela pressão  $p_{wf}^*$  e todas as vazões por  $q_{inj}^*$  onde  $(p_{wf}^*, q_{inj}^*)$  é o ponto onde  $\frac{\partial p_{wf}}{\partial q_{inj}} = 0$ . Este procedimento visa evitar problemas numéricos. Partindo-se de um conjunto de parâmetros iniciais  $\Theta = [ \Theta_1 \ \Theta_2 \ \Theta_3 \ \Theta_4 ]$  e dos  $n$  elementos de entrada  $u_i$ , ( $i = 1 : n$ ), calcula-se o vetor com os valores estimados  $\mathbf{Y}_e$ . A diferença entre os valores reais  $\mathbf{Y}$  e os valores estimados  $\mathbf{Y}_e$  é definida como o vetor de erros  $\mathbf{E} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_e$ ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} y_1 - y_{e1} \\ y_2 - y_{e2} \\ \vdots \\ y_n - y_{en} \end{bmatrix}. \quad (2.116)$$

A cada iteração calcula-se a variação ótima do vetor de parâmetros  $\Delta\Theta$  que somada ao vetor  $\Theta$  irá anular uma fração  $\beta$  do vetor erro  $\mathbf{E}$ . Ou seja, a cada iteração minimiza-se a seguinte função objetivo

$$J = (\beta\mathbf{E} - \mathbf{H}\Delta\Theta)^T(\beta\mathbf{E} - \mathbf{H}\Delta\Theta). \quad (2.117)$$

Nesta expressão  $\beta$  é um escalar entre 0.01 e 0.05 e corresponde a fração do erro a ser anulado a cada iteração.  $\mathbf{H}$  é o Jacobiano onde cada linha é o gradiente da saída em relação aos parâmetros  $\Theta$ .

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_1} |_{u=u_1} & \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_2} |_{u=u_1} & \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_3} |_{u=u_1} & \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_4} |_{u=u_1} \\ \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_1} |_{u=u_2} & \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_2} |_{u=u_2} & \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_3} |_{u=u_2} & \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_4} |_{u=u_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_1} |_{u=u_n} & \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_2} |_{u=u_n} & \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_3} |_{u=u_n} & \frac{\partial p_{wf}}{\partial \Theta_4} |_{u=u_n} \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

Os elementos do gradiente são calculados a cada iteração como

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial y_e}{\partial \Theta_1} \right|_{u=u_1} &= e^{-\Theta_2 u_1^m} \\
 \left. \frac{\partial y_e}{\partial \Theta_2} \right|_{u=u_1} &= -\Theta_1 u_1^m e^{-\Theta_2 u_1^m} \\
 \left. \frac{\partial y_e}{\partial \Theta_3} \right|_{u=u_1} &= 1 \\
 \left. \frac{\partial y_e}{\partial \Theta_4} \right|_{u=u_1} &= u_1^2
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

A função objetivo expressa pela equação (2.118) pode ser reescrita como

$$J = \Delta \Theta^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \Delta \Theta - 2\beta \mathbf{E}^T \mathbf{H} \Delta \Theta + \beta^2 \mathbf{E}^T \mathbf{E} \tag{2.120}$$

Desprezando-se o termo  $\beta^2 \mathbf{E}^T \mathbf{E}$  que não apresenta relação com  $\Delta \Theta$ , pode-se expressar a função objetivo como um problema clássico de programação quadrática a ser resolvido a cada iteração,

$$\begin{aligned}
 \Delta \Theta &= \arg \min J \\
 & \text{s. a.} \\
 J &= \frac{1}{2} \Delta \Theta^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \Delta \Theta - \beta \mathbf{E}^T \mathbf{H} \Delta \Theta \\
 & \Theta_{min} \leq \Theta_{ant} + \Delta \Theta \leq \Theta_{max}
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

A vantagem da utilização da formulação em programação quadrática ficará evidente na sequência da exposição deste trabalho.

## Utilização do Conhecimento das Características do Poço

Um parâmetro importante para o ajuste do modelo é a pressão estática da formação,  $P_{est.}$ . Existe normalmente um conhecimento aproximado de seu valor. Este valor pode ser modelado como sendo igual a um valor nominal,  $P_{est-N}$ , acrescido de uma incerteza,  $\pm \epsilon P_{est-N}$ . O valor de  $P_{est}$  pode então ser expresso pela equação (2.122),

$$P_{est-N}(1 - \epsilon) \leq P_{est} \leq P_{est-N}(1 + \epsilon). \tag{2.122}$$

Para poços não surgentes este conhecimento pode ser incorporado

ao problema de ajuste na formulação da programação quadrática seqüencial na forma de uma restrição. Para isso obtém-se o valor da equação (2.115) para  $u = 0$  que corresponde à pressão de fundo para vazão de injeção nula. É importante mencionar que a relação  $pwf \times q_{inj}$  em regime permanente não contempla todos os pontos existentes entre  $q_{inj} = q_{inj}^*$  até  $q_{inj} = 0$ . Existem valores de vazão de injeção de gás que não são realizáveis pois existe um limite mínimo para a vazão de injeção que possibilita a elevação de fluido. Mesmo antes deste limite o comportamento dinâmico das vazões torna-se muito oscilatório e seria necessário a aplicação de controle ativo para a manutenção da operação. Entretanto, para um poço não surgente, pode-se imaginar que a curva de regime permanente teria a tendência de chegar a pressão de fundo igual a pressão estática para vazão de injeção nula. Assim, para valores de vazão de injeção de gás bem maiores do que a vazão que leva o poço a oscilações sustentadas este procedimento é razoável.

Desta forma a equação (2.115) para  $u = 0$  torna-se

$$y(0) = \Theta_1 + \Theta_3 = P_{est}. \quad (2.123)$$

Combinando-se a equação (2.122) com a equação (2.123) obtém-se

$$\begin{aligned} P_{est-N}(1 - \epsilon) &\leq \Theta_1 + \Theta_3 \leq P_{est-N}(1 + \epsilon) \\ \text{como} \\ \Theta_1 &= \Theta_{1ant} + \Delta\Theta_1 \\ \Theta_3 &= \Theta_{3ant} + \Delta\Theta_3 \\ P_{est-N}(1 - \epsilon) &\leq \Theta_{1ant} + \Delta\Theta_1 + \Theta_{3ant} + \Delta\Theta_3 \\ P_{est-N}(1 + \epsilon) &\geq \Theta_{1ant} + \Delta\Theta_1 + \Theta_{3ant} + \Delta\Theta_3 \end{aligned} \quad (2.124)$$

Para colocar no formato adequado para o algoritmo de programação quadrática seqüencial, introduz-se a desigualdade expressa pela equação (2.124) como uma restrição na formulação do problema de otimização

$$\Delta\Theta = \arg \min J$$

s. a.

$$J = \frac{1}{2} \Delta\Theta^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \Delta\Theta - \beta \mathbf{E}^T \mathbf{H} \Delta\Theta$$

$$\begin{aligned} \Delta\Theta_1 + \Delta\Theta_3 &\leq P_{est-N}(1 + \epsilon) - \Theta_{1ant} - \Theta_{3ant} \\ -\Delta\Theta_1 - \Delta\Theta_3 &\leq -P_{est-N}(1 - \epsilon) + \Theta_{1ant} + \Theta_{3ant} \end{aligned} \quad (2.125)$$

Com este procedimento pode-se incorporar ao algoritmo de ajuste dos parâmetros as informações disponíveis na seguinte formulação do problema:

*Ajuste os parâmetros da função expressa pela equação (2.115) para o conjunto de pontos adquiridos em regime permanente do poço não surgente  $i$  que apresenta um BSW aproximado de  $BSW_i$ , um RGO em torno de  $RGO_i$  e uma pressão estática nominal de  $P_{est.Ni}$  com uma incerteza de  $\epsilon 100\%$ .*

Nos casos de poços surgentes não se aplicam as restrições mas pode-se igualmente encontrar os parâmetros do modelo.

## Resultados Obtidos

Para o estudo realizado na busca de uma metodologia para a obtenção do expoente  $m$  da equação (2.115) utilizaram-se todos os pares  $(p_{wf}, q_{inj})$  gerados com o simulador de poços para GLC em regime permanente Marlim. Inicialmente um poço foi instanciado com características representativas de poços reais e variou-se os parâmetros BSW e RGO em 8 diferentes combinações. Para cada caso obteve-se valores de vazão de produção e água óleo e gás e pressão de fundo para diferentes valores de vazão de injeção de gás. A tabela 2.4 mostra os cenários utilizados para a geração dos dados utilizados neste estudo.

O valor de  $m$  utilizado foi obtido de forma iterativa, buscando-se o valor que fornecia o melhor ajuste final. Já para o ajuste dos demais parâmetros excluiu-se do conjunto de pontos aqueles com pressão de fundo maior do que 1% do valor de  $p_{wf}^*$  que é a pressão que corresponde ao ponto onde  $\frac{\partial p_{wf}}{\partial q_{inj}} = 0$ . Para a



Tabela 2.4: Parâmetros utilizados nos testes realizados com o simulador Marlim

Teste	<i>BSW</i> [%]	<i>RGO</i>
1	15	79
2	45	79
3	58	79
4	75	79
5	85	79
6	58	50
7	58	80
8	58	105

avaliação da qualidade do ajuste, entretanto, utilizou-se todos os pontos disponíveis buscando assim determinar a capacidade de extrapolação da função identificada com poucos pontos.

Para avaliar a qualidade do ajuste utilizou-se o fator  $R$  definido como

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y(i) - y_e(i))^2}{\sum_{i=1}^N (y(i) - \bar{y})^2}}, \quad (2.126)$$

onde  $N$  é o número de pontos utilizados na identificação,  $\bar{y}$  representa o valor médio dos  $N$  valores das pressões  $y$  e  $y_e$  é o valor estimado da pressão de fundo obtido com o modelo. As figuras 2.16 e 2.17 mostram o ajuste obtido para os dados dos poços 1 a 4 e 5 a 8 respectivamente. Mais uma vez é importante observar que a curva foi ajustada com os pontos mostrados em círculos pretos. Estes pontos foram selecionados de forma que a pressão máxima não atingisse mais do que 1% do valor ótimo irrestrito (pressão mínima no fundo). Os pontos mostrados em círculos claros não foram utilizados para a identificação dos parâmetros dos modelos. Observa-se que a curva ajustada consegue extrapolar muito bem passando muito próximo a estes pontos.

A fim de melhor avaliar o modelo proposto foi gerado dados de um grupo de poços com configurações completamente diferentes

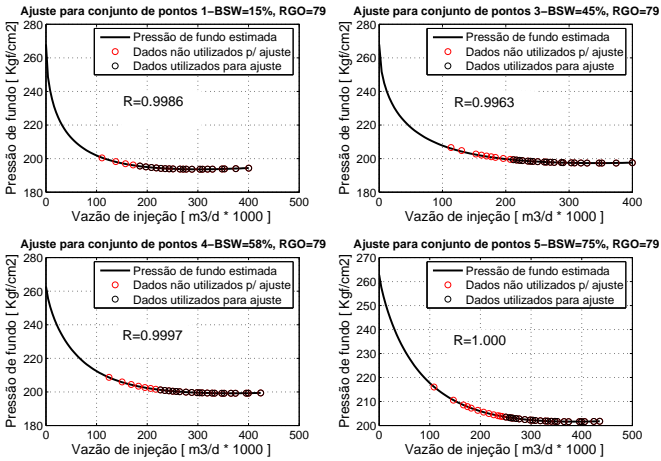


Figura 2.16:  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para poços UFSC-1 a 4

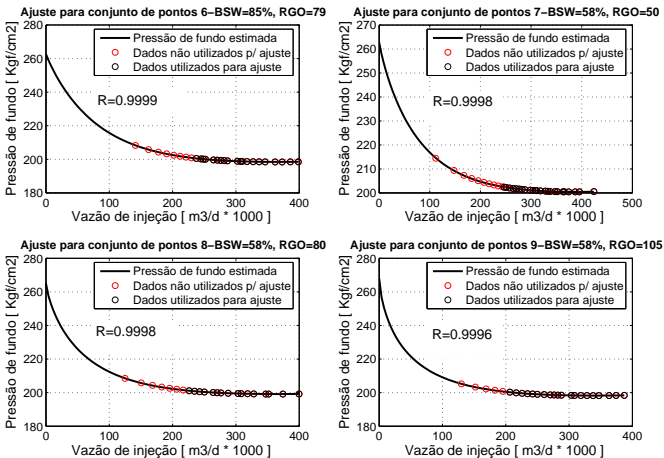


Figura 2.17:  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para poços UFSC-5 a 8

entre si. Os dados de simulação disponibilizados são Pressão de revestimento, Vazão de Líquido produzido e Vazão de Injeção de

Gás. Com estes dados deve-se obter a pressão de fundo  $p_{wf}$ . Para isso deve-se utiliza-se a expressão para IPR combinada,

$$q_{liq} = IP(P_{est.} - p_{wf}) \text{ para } p_{wf} \geq p_{sat}, \text{ e} \quad (2.127)$$

$$q_{liq} = q_{sat} + (q_{max} - q_{sat}) \left[ 1 - 0.2 \left( \frac{p_{wf}}{p_{sat}} \right) - 0.8 \left( \frac{p_{wf}}{p_{sat}} \right)^2 \right],$$

para  $p_{wf} \leq P_{sat}$ .

Para os casos onde a pressão estática é menor que a pressão de saturação o poço vai operar sempre em regime saturado e a expressão para Vogel pode ser utilizada diretamente.

– Poço UFSC-15

Características do Poço UFSC-15

- Poço direcional
- Pressão estática:  $246.0 \frac{Kgf}{cm^2}$
- Pressão de saturação:  $224.8 \frac{Kgf}{cm^2}$
- Pressão de Teste:  $245.0 \frac{Kgf}{cm^2}$
- Vazão de Teste:  $76.0 m_3/d$
- RGO:  $100.0 m^3/m^3$
- °API: 24.7
- BSW: 60.3 %
- Densidade relativa da água produzida: 1.06
- Densidade relativa do gás de formação: 0.619
- Densidade relativa do gás de injeção: 0.780
- Pressão na superfície:  $14.0 \frac{Kgf}{cm^2}$

A tabela 2.5 apresenta os dados obtidos com a simulação do Poço UFSC-15

A tabela 2.6 apresenta os parâmetros identificados para o ajuste dos dados do poço UFSC-15:

– Poço UFSC-17

Características do Poço UFSC-17

- Poço vertical

Tabela 2.5: Dados do Poço UFSC-15

Pressão Revest. $\frac{Kgf}{cm^2}$	$Q_{liq.} \frac{m^3}{d}$	$q_{inj} \frac{m^3}{d}$
128	883.9	37716.5
133	901.7	53726.3
143	909.2	73368.3
158	917.6	107736.7
173	916.1	174140.5
188	893.5	211629.6
203	870.1	240490.5
233	827.9	284198.2
263	793.5	316652
293	765.8	342311.8
323	742.2	364269.3

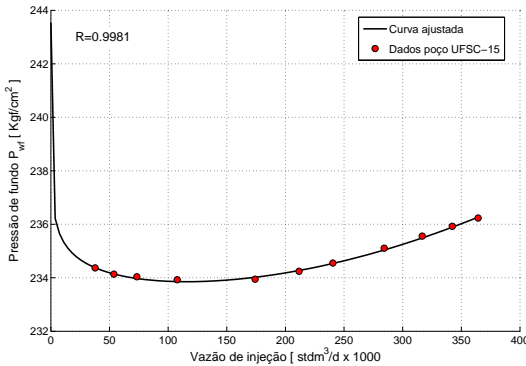
Figura 2.18:  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para poço UFSC-15

Tabela 2.6: Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-15

$\Theta_1$	$\Theta_2$	$\Theta_3$	$\Theta_4$	m
0.0539	1.5710	0.9872	0.0013	0.175

- Pressão estática:  $199.0 \frac{Kgf}{cm^2}$
- Pressão de saturação:  $242.1 \frac{Kgf}{cm^2}$

- RGO:100.0  $m^3/m^3$
- °API:29.0
- BSW:67.6 %
- Densidade relativa da água produzida:1.06
- Densidade relativa do gás de formação:0.790
- Densidade relativa do gás de injeção:0.780
- Pressão na superfície:16.5  $\frac{Kgf}{cm^2}$

A tabela 2.7 apresenta os dados obtidos com a simulação do Poço UFSC-17

Tabela 2.7: Dados do Poço UFSC-17

Pressão Revest. $\frac{Kgf}{cm^2}$	$q_{liq.} \frac{m^3}{d}$	$q_{inj} \frac{m^3}{d}$
132.81	708.6	35068
140.81	881.8	62482.6
148.81	929.2	77396.4
156.81	941.6	185925.1
173.81	934.7	214444.4
188.81	927	234465.9
198.81	921.5	246217.3
223.81	907.3	271690.1
248.81	893.7	293446.1
298.81	867.5	332277.5
348.81	841.7	367381.9

A tabela 2.8 apresenta os parâmetros identificados para o ajuste dos dados do poço UFSC-17:

Tabela 2.8: Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-17

$\Theta_1$	$\Theta_2$	$\Theta_3$	$\Theta_4$	m
0.0729	7.5665	0.9966	0.0030	1.1100

- Poço UFSC-20

Características do poço UFSC-20

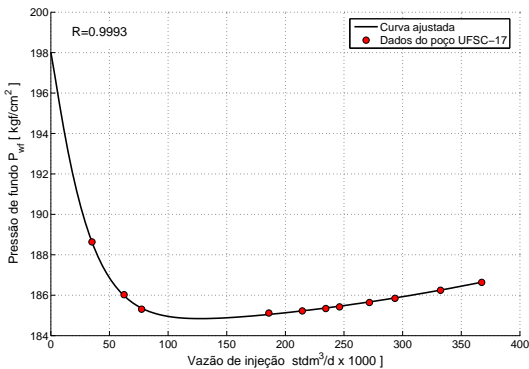


Figura 2.19:  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para poço UFSC-17

- Poço direcional
- Pressão estática:  $197.0 \frac{Kgf}{cm^2}$
- Pressão de saturação:  $247.1 \frac{Kgf}{cm^2}$
- RGO:  $100.0 m^3/m^3$
- °API: 27.5
- BSW: 79.7 %
- Densidade relativa da água produzida: 1.06
- Densidade relativa do gás de formação: 0.770
- Densidade relativa do gás de injeção: 0.780
- Pressão na superfície:  $12.8 \frac{Kgf}{cm^2}$

A tabela 2.9 apresenta os dados obtidos com a simulação do Poço UFSC-20

A tabela 2.10 apresenta os parâmetros identificados para o ajuste dos dados do poço UFSC-20:

- Poço UFSC-21

Características do poço UFSC-21

- Poço direcional
- Pressão estática:  $203.7 \frac{Kgf}{cm^2}$

Tabela 2.9: Dados do Poço UFSC-20

Pressão Revest. $\frac{Kgf}{cm^2}$	$q_{liq.} \frac{m^3}{d}$	$q_{inj} \frac{m^3}{d}$
115.54	451.9	36540.3
130.54	500	73096.5
140.54	458.2	176527.4
145.54	453.8	186109.9
155.54	444.7	203169.2
160.54	440.6	210367
165.54	436.6	217520.1
175.54	429.1	230555.3
190.54	419	247669.4
215.54	404.5	272181.1
265.54	380.3	314010.8

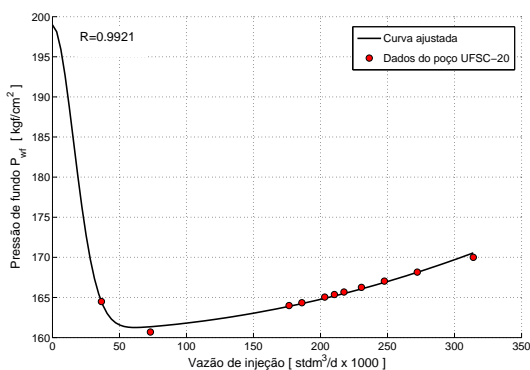
Figura 2.20:  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para poço UFSC-20

Tabela 2.10: Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-20

$\Theta_1$	$\Theta_2$	$\Theta_3$	$\Theta_4$	m
0.2374	8.8801	1.0008	0.0033	1.9000

– Pressão de saturação:  $251.0 \frac{Kgf}{cm^2}$

- IP:  $7.7 \frac{m^3/d}{kgf/cm^2}$
- $c=0.2$
- RGO:  $113.0 m^3/m^3$
- $^\circ$ API: 27.5
- BSW: 34.1 %
- Densidade relativa da água produzida: 1.06
- Densidade relativa do gás de formação: 0.760
- Densidade relativa do gás de injeção: 0.770
- Pressão na superfície:  $13.0 \frac{Kgf}{cm^2}$

A tabela 2.11 apresenta os dados obtidos com a simulação do Poço UFSC-21

Tabela 2.11: Dados do Poço UFSC-21

Pressão Revest. $\frac{Kgf}{cm^2}$	$q_{liq.} \frac{m^3}{d}$	$q_{inj} \frac{m^3}{d}$
97.4	557.3	50875.1
107.4	567.4	67173.1
117.4	572.5	78600.6
122.4	574	83308.3
137.4	567.8	187204.6
147.4	566.6	199916.1
172.4	562.8	228684.3
197.4	556.7	254373.1
247.4	540.9	299280.9
297.4	526.2	338377.9
322.4	519.3	356386.6

A tabela 2.12 apresenta os parâmetros identificados para o ajuste dos dados do poço UFSC-21:

Tabela 2.12: Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-21

$\Theta_1$	$\Theta_2$	$\Theta_3$	$\Theta_4$	m
0.9038	3.5017	0.9666	0.0075	0.5600



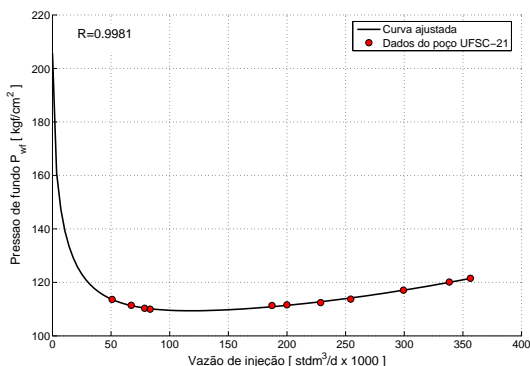


Figura 2.21:  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para poço UFSC-21

– Poço UFSC-23

#### Características do poço UFSC-23

- Poço direcional
- Pressão estática:  $205.0 \frac{Kgf}{cm^2}$
- Pressão de saturação:  $242.1 \frac{Kgf}{cm^2}$
- IP:  $16.0 \frac{m^3/d}{kgf/cm^2}$
- $c=0.2$
- RGO:  $100.0 m^3/m^3$
- °API: 26.1
- BSW: 48.8 %
- Densidade relativa da água produzida: 1.06
- Densidade relativa do gás de formação: 0.750
- Densidade relativa do gás de injeção: 0.780
- Pressão na superfície:  $13.1 \frac{Kgf}{cm^2}$

A tabela 2.13 mostra os dados obtidos com a simulação do Poço UFSC-23

A tabela 2.14 apresenta os parâmetros identificados para o ajuste dos dados do poço UFSC-23:

Tabela 2.13: Dados do Poço UFSC-23

Pressão Revest. $\frac{Kgf}{cm^2}$	$q_{iq} \frac{m^3}{d}$	$q_{inj} \frac{m^3}{d}$
110	784.1	51304.7
120	801.8	68982.2
135	811.9	86840.5
150	817.7	99786.2
160	783.8	206224.5
185	766.6	239616.6
210	755.4	263522.4
240	743.9	289697.4
260	735.4	305919.2
305	716.4	339712.9
335	704.5	360586.4

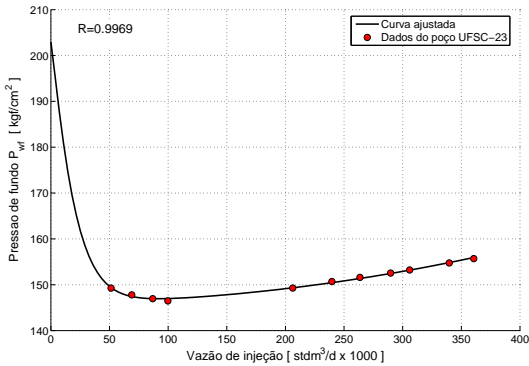
Figura 2.22:  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para poço UFSC-23

Tabela 2.14: Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-23

$\Theta_1$	$\Theta_2$	$\Theta_3$	$\Theta_4$	m
0.3886	5.8173	0.9971	0.0052	1.0400

## Características do poço UFSC-75

- Poço vertical
- Pressão estática:  $217.2 \frac{Kgf}{cm^2}$
- Pressão de saturação:  $197.7 \frac{Kgf}{cm^2}$
- IP:  $42.9 \frac{m^3/d}{kgf/cm^2}$
- $c=0.2$
- RGO:  $100.0 m^3/m^3$
- °API: 29.7
- BSW: 3 %
- Densidade relativa da água produzida: 1.07
- Densidade relativa do gás de formação: 0.860
- Densidade relativa do gás de injeção: 0.780
- Pressão na superfície:  $15.6 \frac{Kgf}{cm^2}$

A tabela 2.15 mostra os dados obtidos com a simulação do Poço UFSC-75. A tabela 2.16 apresenta os parâmetros identificados

Tabela 2.15: Dados do Poço UFSC-75

Pressão Revest. $\frac{Kgf}{cm^2}$	$q_{liq.} \frac{m^3}{d}$	$q_{inj} \frac{m^3}{d}$
134.11	1424.9	112379.1
144.11	1447	226058.7
159.11	1448.5	266148.8
174.11	1444.7	297014.5
184.11	1440.9	314410.8
209.11	1429.7	350476.4
234.11	1417.7	379901.1
259.11	1405.5	405699.7
284.11	1392.9	429936
334.11	1366.8	474798.1
359.11	1353.6	495788.5

para o ajuste dos dados do poço UFSC-75:

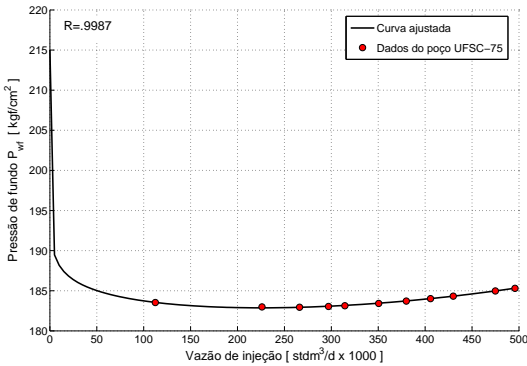


Figura 2.23:  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para poço UFSC-75

Tabela 2.16: Parâmetros identificados para os dados do Poço UFSC-75

$\Theta_1$	$\Theta_2$	$\Theta_3$	$\Theta_4$	m
0.4005	0.6138	0.7748	0.0083	0.0900

### Adaptação do modelo para poços altamente depletados

Para poços não surgentes o modelo desenvolvido considera a pressão de fundo igual a pressão estática correspondendo à vazão de injeção de gás nula na obtenção da função  $p_{wf} = f(q_{inj})$  em regime permanente. Na prática isto é razoável para poços onde a pressão estática encontra-se pouco abaixo do limiar de surgência. De acordo com os resultados obtidos na seção 2.2.1 e apresentados na figura 2.11, ao diminuir-se a vazão de injeção atinge-se um valor onde o método GLC não consegue estabelecer uma pressão de fundo menor do que a pressão estática em regime permanente.

Para poços com pressão estática ainda alta (talvez para valores maior do que 80% do limiar de surgência) parece razoável associar a pressão estática à vazão de injeção igual a zero. Para poços mais depletados deve-se associar a pressão estática ao valor da vazão mínima que fornece ponto de equilíbrio como mostrado na figura 2.11 da seção 2.2.1. Tomando como exemplo o poço apresentado na seção 2.2.1, percebe-se que para uma pressão estática igual a

11 MPa tem-se uma vazão mínima igual a 0.41 kg/s. Definindo  $q_{inj}^{mr}$  como a mínima vazão de injeção realizável com GLC, tem-se para o poço exemplo,  $q_{inj}^{mr} = 0.41$  kg/s com  $P_r = 11$  MPa. Nestes casos, antes de iniciar o procedimento de identificação efetua-se uma primeira transformação nas vazões de injeção a serem utilizadas na obtenção do modelo subtraindo  $q_{inj}^{mr}$  dos valores de vazão obtidos para obter  $q_{inj}^n$ ,

$$q_{inj}^n = q_{inj} - q_{inj}^{mr} \quad (2.128)$$

A partir deste ponto utiliza-se todos os procedimentos já descritos. Isto é, obtém os valores que correspondem ao ponto de mínimo  $p_{wf}$ , agora com os valores de vazão de injeção já diminuídos de  $q_{inj}^{mr}$ ,  $(q_{inj}^n, p_{wf}^*)$ . A normalização das vazões e da pressão de fundo é feita com  $(q_{inj}^{n*}$  e  $p_{wf}^*)$ , respectivamente.

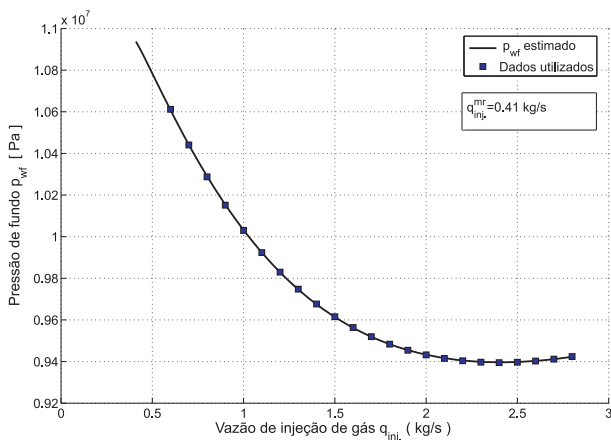


Figura 2.24:  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para poço exemplo com  $P_r = 11.0$  MPa

A figura 2.24 apresenta a identificação da curva  $p_{wf} = f(q_{inj})$  para os valores obtidos com o simulador desenvolvido e apresentado na seção 2.2.1 para o poço exemplo apresentado naquela seção com a pressão de reservatório igual a  $P_r = 11.0$  MPa. Nota-se um ajuste com  $R = 1.0000$ . Utilizou-se  $m = 1.0$  e os parâmetros identificados foram:

Tabela 2.17: Parâmetros identificados para os dados do exemplo [1]

$\Theta_1$	$\Theta_2$	$\Theta_3$	$\Theta_4$	m
0.2281	2.1125	0.9430	0.0293	1.0

### 2.2.3 Um modelo dinâmico para controle e otimização

Os modelos matemáticos servem a diferentes objetivos. O modelo fenomenológico é importante para se conhecer o processo em profundidade e permitir uma análise paramétrica com o objetivo de melhorar o seu desempenho, por exemplo. O modelo em regime permanente é muito utilizado em algoritmos de otimização, principalmente para processos estáveis e que operam neste regime a maior parte do tempo. Para finalizar a discussão de modelos para processos GLC, propõe-se nesta seção um modelo dinâmico que utiliza o desenvolvimento realizado na seção anterior mas que acrescenta um comportamento dinâmico. O objetivo deste modelo é ser o mais preciso possível em regime permanente para permitir a utilização do modelo em uma estratégia de controle preditivo que visa otimizar a distribuição de gás enquanto atenua as oscilações causadas por variações na disponibilidade de gás.

O modelo aqui descrito é muito semelhante aquele apresentado em [44], exceto pela consideração de poços altamente depletados discutidos na seção anterior.

A ideia é utilizar um modelo Hammerstein [45] modificado conforme a estrutura apresentada na figura 2.25

O bloco A subtrai da vazão de injeção o valor  $q_{inj}^{mr}$  que corresponde ao valor da vazão mínima realizável para o funcionamento do poço em GLC. Para este valor de vazão de injeção a pressão de fundo em regime permanente seria muito próxima da pressão estática do reservatório  $P_r$ . Este valor pode ser considerado nulo para valores de pressão de reservatório próximos ao limiar do valor de surgência. O bloco B normaliza o valor da vazão de injeção (em relação a  $q_{inj}^{n*}$ ). O bloco C aplica a função desenvolvida na seção anterior para regime permanente que calcula a pressão de fundo em função da vazão de injeção. O bloco D aplica uma função de transferência de 2a. ordem com o zero, o fator de atenuação e a

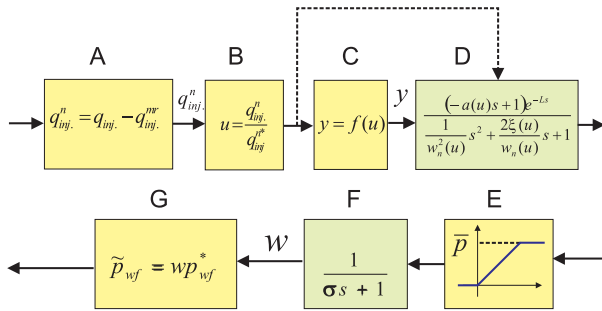


Figura 2.25: Estrutura do Modelo dinâmico baseado em Hammerstein

frequência natural sendo funções da vazão de injeção normalizada,  $u$ . A saída do bloco D é a pressão de fundo normalizada. O bloco E limita a pressão de fundo normalizada a pressão estática normalizada. O bloco F filtra a aplicação da saturação feita pelo bloco E. Finalmente o bloco D recupera a pressão de fundo ao multiplicar a pressão normalizada por  $p_{wf}^*$ .

A figura 2.26 apresenta o resultado de um estudo realizado para o poço modelo apresentado na seção 2.2.1 para a pressão de reservatório de 20 MPa. Para este caso considerou-se  $q_{inj}^{mr} = 0$ . Utilizando o modelo fenomenológico desenvolvido na seção 2.2.1 determinou-se a dependência dos parâmetros  $a$ ,  $\xi$  e  $w_n$  em relação a vazão de injeção normalizada  $u$ . A figura 2.26-a mostra os valores da vazão de injeção e da pressão de fundo utilizados na obtenção da vazão de injeção normalizada  $u$ . A figura 2.26-b apresenta alguns valores encontrados para o zero da função de transferência de segunda ordem do modelo proposto em função da vazão de injeção normalizada. No mesmo gráfico apresenta-se

a função ajustada para os pontos obtidos,  $a(u)$ .

$$\begin{aligned}
 a(u) &= \frac{p_1 u^3 + p_2 u^2 + p_3 u + p_4}{u^2 + q_1 u + q_2} \\
 p_1 &= -972,1 \\
 p_2 &= 1294 \\
 p_3 &= -502,3 \\
 p_4 &= 33,8 \\
 q_1 &= -1,476 \\
 q_2 &= 0,5679
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

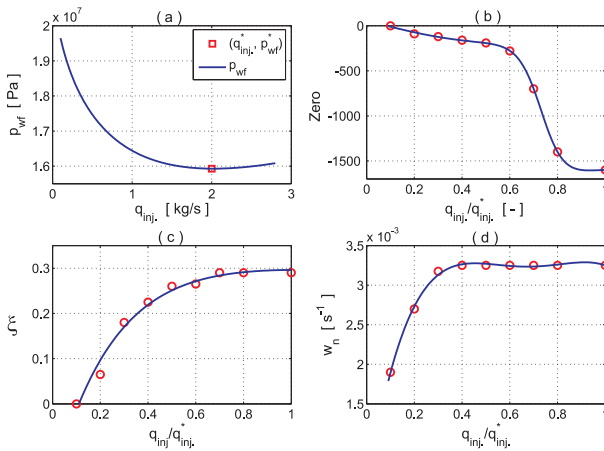


Figura 2.26: Parâmetros identificados

A figura 2.26-c apresenta os valores encontrados para  $\xi$  e a função ajustada para os mesmos.

$$\xi(u) = 0.3488e^{-0.1266u} - 0.5265e^{-3.855u} \tag{2.130}$$

A figura 2.26-d mostra os valores encontrados para a frequência natural  $w_n$  e a função ajustada para os mesmos.



$$w_n(u) = -0,01713u^4 + 0,04658u^3 - 0,04569u^2 + 0,01909u + 0,0003956 \quad (2.131)$$

## 2.3 Conclusões e desenvolvimentos futuros

Neste capítulo foram apresentadas três abordagens na modelagem da elevação por GLC, i) uma modelagem fenomenológica baseada na propagação da fração mássica de gás, ii) uma modelagem para a relação em regime permanente entre a pressão de fundo e a vazão de injeção de gás e iii) um modelo baseado na representação tipo Hammerstein modificada que preserva o modelo estático desenvolvido e acrescenta uma dinâmica aproximada em função da vazão de injeção de gás. A modelagem fenomenológica desenvolvida apresenta bom desempenho dinâmico exibindo os fenômenos de fase não mínima e o comportamento com sub-amortecimento progressivo conforme se diminui a vazão de injeção até atingir-se oscilações sustentadas para uma determinada vazão suficientemente baixa. Um mapa desta vazão para diferentes valores de pressão estática da formação mostrou uma semelhança muito grande com os resultados obtidos para um poço equivalente simulado no OLGA2000<sup>MR</sup>. O comportamento em regime permanente, por outro lado, exibe uma diferença muito grande e exige mais desenvolvimento. Essas características do modelo o tornam um candidato para utilização em predição quando se pode medir a pressão de fundo em tempo real já que é possível aplicar os métodos de correção como o que foi apresentado neste trabalho. Um trabalho importante é a utilização do modelo fenomenológico desenvolvido para a modelagem do fenômeno *heading*. Isto poderia ser relativamente simples já que o que falta seria uma modelagem do escoamento de gás no anular e na válvula operadora de gás-lift.

O modelo da relação em regime permanente mostrou-se capaz de ajustar-se aos dados de simuladores fenomenológicos de regime permanente para diferentes casos. Possíveis melhorias poderiam ser obtidas desenvolvendo-se técnicas para a obtenção dos parâmetros em função das características dos poços utilizando-se por

exemplo técnicas Monte Carlo de ajuste. Isto permitiria partir-se de sintonias de modelo com uma qualidade mínima inicial semelhante a qualidade da representação do simulador fenomenológico. Há de se considerar que o custo para a obtenção de dados reais para a sintonia de modelo é custosa pois passa invariavelmente pela necessidade de variar o regime de funcionamento do poço e assim operá-lo de forma sub-ótima pelo tempo de aquisição.

O modelo baseado na representação Hammerstein modificado é um esforço no sentido de preservar uma relação de regime permanente de qualidade no modelo dinâmico. Isto pode ser interessante em determinadas formulações de controle preditivo como a apresentada na seção 5.3 do capítulo 5 onde não se define os valores referência para as pressões de fundo na função objetivo. A função objetivo é formulada visando principalmente atingir um certo desempenho econômico e um determinado comportamento dinâmico dos poços e do *manifold* de *gas lift*, para diferentes disponibilidades de gás comprimido. Neste sentido, o modelo desenvolvido mostra-se bastante interessante pois ao incorporar um bom modelo de regime permanente pode atender o objetivo principal de controle. Desenvolver modelos fenomenológicos simples que preservem uma relação de regime permanente de qualidade suficiente para otimização em problemas de escoamento multifásico é um desafio muito grande. O comportamento dinâmico do modelo é aproximado mas pode atender ao objetivo de controle por tratar-se de fenômeno com dinâmica lenta e que não requer atuação agressiva de controle em malha fechada o que permite operar com erros de modelagem razoáveis. Já a sintonia dos parâmetros do modelo dinâmico precisa ser simplificada havendo aí um grande espaço para melhoras.

## Capítulo 3

# Controle MPC Distribuído

A maioria dos sistemas dinâmicos com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) encontrados na indústria apresentam interações entre as variáveis controladas frente as variáveis manipuladas. De forma que raramente uma variável é controlada pela manipulação de uma única ação de controle. O controle de processos que apresentam interações utilizando estratégias do tipo uma entrada uma saída (SISO) ainda que possível em alguns casos, faz com que a operação se desenvolva muito longe dos limites impostos pelas restrições do problema. A fim de evitar a violação das restrições devido ao comportamento dinâmico ocasionado pelas interações, o sistema é operado a uma distância muito grande da restrição. Isto diminui o desempenho da planta.

O controle de plantas complexas é tipicamente dividido em níveis hierárquicos. No nível básico estão os controladores locais utilizados para implementar ações como vazão, velocidade de uma esteira, temperatura de uma solução, concentração de um produto, etc. Estas ações fazem parte de uma estratégia de controle cuja referência é fornecida pelo nível de controle imediatamente superior que é o controle avançado. Em termos de velocidade da dinâmica, os controladores locais trabalham com taxas de amostragem de segundos ou fração de segundo enquanto que o controle avançado trabalha com variáveis amostradas em intervalos de tempo algumas dezenas de vezes maiores. Acima do controle avançado pode

existir algoritmos de otimização em tempo real (RTO-Real Time Optimizer) que resolvem problemas de otimização tipicamente para a solução em regime permanente do sistema e fornecem os *set-points* para o sistema de controle avançado. Estes algoritmos de otimização recebem informação da camada de planejamento sobre a disponibilidade de recursos disponíveis e sobre as demandas futuras.

Atualmente os controladores locais de muitas instalações como refinarias, por exemplo, utilizam controle via redes de campo. Dentre as redes de campo a rede Foundation Fieldbus tem se destacado pois permite que estratégias de controle sejam implementadas nos próprios instrumentos de campo através da utilização de algoritmos encapsulados em blocos funcionais que são interligados para executar as tarefas de medição, cálculo da ação de controle e atuação. Os instrumentos Foundation Fieldbus são ligados a um barramento comum que é utilizado para a troca de informação além de, opcionalmente, suprir a energia elétrica para seu funcionamento. As tarefas de controle são executadas de forma determinística dentro de um tempo fixo chamado de macrociclo. Além do tempo assegurado para as tarefas de controle existe um tempo extra destinado à troca de informações com o sistema de controle avançado e supervisão.

É um consenso entre pesquisadores e praticantes que a técnica de controle avançado mais utilizada na indústria é o Controle Preditivo Baseado em Modelo. Uma estatística recente e interessante sobre aplicações de controle avançado na indústria química do Japão é apresentada em [46].

Uma das características mais apreciadas na técnica de controle preditivo é sua capacidade de tratar as restrições sobre as entradas e saídas de forma simples e elegante. Este tratamento de restrições permite, por exemplo, a diminuição do “*give away*” em processos onde o produto deve manter uma determinada característica dentro de uma faixa de valores sob pena de multa, por exemplo. Em geral a aplicação de Controle Preditivo baseado em modelo permite operar mais próximo das restrições sem violá-las.

Apesar das inúmeras vantagens da aplicação de controle preditivo existem alguns aspectos relacionados com sua implementação e utilização que poderiam ser melhorados:

- O MPC demanda um longo tempo para ajuste dos modelos e parâmetros do controlador.

- A manutenção do algoritmo de controle exige o trabalho de especialistas.
- Alterações na planta exigem a revisão de todo o sistema de controle.
- As soluções de controle avançado são caras para pequenas empresas.

Uma proposta no sentido de responder a algumas das dificuldades citadas é a utilização de agentes para o controle de sistemas. Toma-se aqui o nome de agente para definir um objeto matemático que comunicando-se com outros objetos matemáticos similares, recebendo os valores das variáveis do processo e também das referências, fornece o valor de uma das ações de controle. A idéia é desenvolver um algoritmo de controle preditivo que será calculado através da troca de informações entre os agentes de forma iterativa. A cada instante de amostragem cada agente recebe os valores calculados pelos demais agentes e recalcula sua ação de controle. Isto é repetido por um determinado número de instantes de amostragem até que os valores calculados por cada agente não mudem mais que um certo percentual em relação aos valores calculados anteriormente.

A figura 3.1 mostra uma possível configuração do sistema. Cada agente poderia ainda ter módulos de supervisão, otimização, identificação de modelo, etc. Do ponto de vista da implementação em redes de comunicação para controle esta técnica é plenamente viável já que o tempo de amostragem do controle avançado é tipicamente uma ordem de grandeza maior que o tempo de amostragem do controle local.

### 3.1 Desenvolvimento de agentes para controle de processos

Um agente tal como definido na introdução poderá eventualmente resolver parte das dificuldades existentes no controle de processos. Entretanto, além de resolver o problema de controle preditivo de forma distribuída seria desejável que o agente

- diminuísse o número de horas gastas com a identificação de modelos do processo,

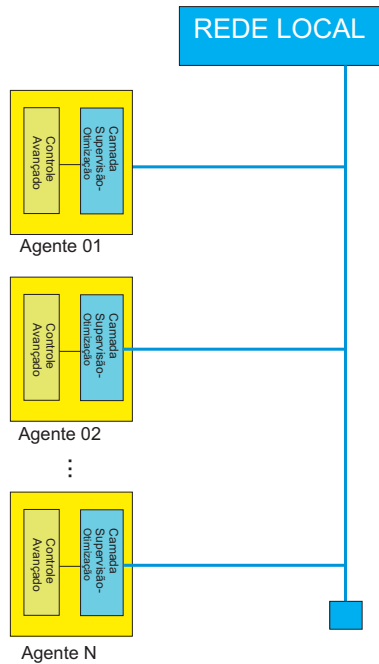


Figura 3.1: Estrutura de Controle com Agentes

- utilizasse o acesso as informações para melhorar continuamente a qualidade do modelo do processo,
- respondesse a situações de falha de medição e/ou atuação de forma segura.
- tornasse o controle avançado disponível para usuários da tecnologia fieldbus.

O controle de processos moderno é realizado na medição e atuação em intervalos de tempo fixo chamados de tempo de amostragem. Tanto na malha de controle local como na de controle avançado, uma ação de controle deve ser produzida a cada instante de tempo. Por isso, e considerando que o controle preditivo baseado em modelo tem se mostrado uma das técnicas de controle mais bem aceitas na indústria, desenvolve-se neste capítulo uma proposta de agente que visa inicialmente resolver o problema de controle de forma distribuída.

A expectativa é incorporar neste agente básico outras funcionalidades que irão fazer com que o agente atenda todos os requisitos acima mencionados.

### 3.2 MPC distribuído

O objetivo desta seção é apresentar uma decomposição do problema de controle preditivo de forma que o problema possa ser resolvido por agentes. Estes agentes serão tantos quantas forem as ações de controle do problema. Para simplificar a apresentação da técnica apresenta-se inicialmente a decomposição do algoritmo para formulações sem restrições. A maioria das ideias apresentadas neste trabalho foram também publicadas em [47]. Depois da apresentação do algoritmo MPC distribuído sem restrições apresenta-se um algoritmo baseado em projeções vetoriais que resolve o problema MPC com restrições.

Supondo que possamos representar as relações entrada-saída de uma planta na forma linear, então poderia se esperar que a relação entrada saída na forma de matriz função de transferência fosse escrita em Laplace como

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \\ y_4(s) \\ \vdots \\ y_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & H_{13}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{22}(s) & H_{23}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_{32}(s) & H_{33}(s) & H_{34}(s) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & H_{43}(s) & H_{44}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & H_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \\ u_4(s) \\ \vdots \\ u_n(s) \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

onde  $H_{ij}(s)$  são funções de transferência que relaciona a saída  $i$  com a entrada  $j$  em um sistema de  $N_i$  entradas e  $N_o$  saídas. A equação 3.1 mostra que tipicamente não há acoplamento entre todas as variáveis. Ou seja, mudanças nas ações de controle afetam um grupo de variáveis de saída mas não todas. A matriz função de transferência esperada para a maioria dos grandes sistemas é esparsa e poderia ser escrita para apresentar uma estrutura

n-diagonal com  $n$  variável. É claro que no caso em que não houvesse nenhum acoplamento a matriz seria diagonal e cada agente resolveria um problema de controle do tipo SISO (*Single Input-Single Output*). O fato de que a matriz função de transferência típica é dispersa favorece a utilização de agentes pois tipicamente cada agente necessita comunicar-se com poucos outros agentes.

### 3.2.1 Decomposição da Formulação MPC sem restrição

A maioria dos algoritmos de controle preditivo baseado em modelo determinam o vetor incremento de ação de controle  $\Delta \mathbf{u}$  minimizando a seguinte função objetivo:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad & J \\ J = \quad & (\mathbf{W} - \tilde{\mathbf{Y}})^T \mathbf{R} (\mathbf{W} - \tilde{\mathbf{Y}}) + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde

- $\mathbf{W}$  é o vetor com as referências futuras
- $\tilde{\mathbf{Y}}$  é o vetor com as predições das variáveis controladas
- $\mathbf{R}$  é uma matriz diagonal com pesos para o seguimento de referências
- $\Delta \mathbf{u}$  é o vetor com as futuras mudanças nas ações de controle
- $\mathbf{Q}$  é um matriz diagonal com pesos sobre as mudanças nas ações de controle



Para  $N_o$  saídas e  $N_i$  entradas,  $\mathbf{W}$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\Delta \mathbf{u}$  e  $\mathbf{Q}$  são composições de vetores e matrizes,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{N_o} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_1 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{N_o} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{R}_{N_o} \end{bmatrix}, \\
 \Delta \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{N_i} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Q}_{N_i} \end{bmatrix}. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

A função custo  $J$  pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 J &= (\mathbf{W}_1 - \tilde{\mathbf{Y}}_1)^T \mathbf{R}_1 (\mathbf{W}_1 - \tilde{\mathbf{Y}}_1) + \\
 &(\mathbf{W}_2 - \tilde{\mathbf{Y}}_2)^T \mathbf{R}_2 (\mathbf{W}_2 - \tilde{\mathbf{Y}}_2) + \\
 &\dots + \\
 &(\mathbf{W}_{N_o} - \tilde{\mathbf{Y}}_{N_o})^T \mathbf{R}_{N_o} (\mathbf{W}_{N_o} - \tilde{\mathbf{Y}}_{N_o}) + \\
 &\Delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{Q}_1 \Delta \mathbf{u}_1 + \\
 &\Delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{Q}_2 \Delta \mathbf{u}_2 + \\
 &\dots + \\
 &\Delta \mathbf{u}_{N_i}^T \mathbf{Q}_{N_i} \Delta \mathbf{u}_{N_i} \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

As predições são calculadas na forma de resposta livre somada ao efeito das futuras mudanças na ação de controle corrente conforme se faz no algoritmo DMC e GPC, [48].

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{F} + \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}, \tag{3.5}$$

$\mathbf{F}$  é o vetor com a resposta livre de todas as variáveis controladas, isto é, a resposta quando não há mudança nas entradas ou  $\Delta \mathbf{u} = 0$ .  $\mathbf{G}$  é a matriz dinâmica no algoritmo DMC obtida com a resposta ao degrau de cada saída para cada entrada. A matriz  $\mathbf{G}$  é também utilizada no algoritmo GPC onde é frequentemente obtida resolvendo-se a equação diofântica. Em [49] e [50] demonstra-se que a matriz  $\mathbf{G}$  é a matriz Jacobiana das predições em função dos incrementos de controle  $\mathbf{G} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{Y}}}{\partial \Delta \mathbf{u}}$ .

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{N_o} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \cdots & \mathbf{G}_{1N_i} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \cdots & \mathbf{G}_{2N_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{N_o1} & \mathbf{G}_{N_o2} & \cdots & \mathbf{G}_{N_oN_i} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Substituindo as equações 3.5, 3.6 e 3.7 na equação 3.4, e definindo  $\mathbf{WF}_1 = \mathbf{W}_1 - \mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{WF}_2 = \mathbf{W}_2 - \mathbf{F}_2$  e assim por diante, tem-se que

$$\begin{aligned} J &= (\mathbf{WF}_1 - \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{1i} \Delta \mathbf{u}_i)^T \mathbf{R}_1 (\mathbf{WF}_1 - \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{1i} \Delta \mathbf{u}_i) \\ &+ (\mathbf{WF}_2 - \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{2i} \Delta \mathbf{u}_i)^T \mathbf{R}_2 (\mathbf{WF}_2 - \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{2i} \Delta \mathbf{u}_i) \\ &+ \dots \\ &+ (\mathbf{WF}_{N_o} - \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{N_o i} \Delta \mathbf{u}_i)^T \mathbf{R}_{N_o} (\mathbf{WF}_{N_o} - \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{N_o i} \Delta \mathbf{u}_i) \\ &+ \Delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{Q}_1 \Delta \mathbf{u}_1 \\ &+ \Delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{Q}_2 \Delta \mathbf{u}_2 \\ &+ \dots \\ &+ \Delta \mathbf{u}_{N_i}^T \mathbf{Q}_{N_i} \Delta \mathbf{u}_{N_i} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Desenvolvendo a equação (3.8) e multiplicando  $J$  por  $1/2$ ,

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_i} \Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{G}_{1i}^T \mathbf{R}_1 \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{1i} \Delta \mathbf{u}_i + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_i} \Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{G}_{2i}^T \mathbf{R}_2 \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{2i} \Delta \mathbf{u}_i + \\
 & \dots + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_i} \Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{G}_{N_o i}^T \mathbf{R}_{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{N_o i} \Delta \mathbf{u}_i \\
 & - \sum_{i=1}^{N_i} \Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{G}_{1i}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{W} \mathbf{F}_1 \\
 & - \sum_{i=1}^{N_i} \Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{G}_{2i}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{W} \mathbf{F}_2 \\
 & - \dots \\
 & - \sum_{i=1}^{N_i} \Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{G}_{N_o i}^T \mathbf{R}_{N_o} \mathbf{W} \mathbf{F}_{N_o} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_i} \Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{Q}_i \Delta \mathbf{u}_i \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_o} \mathbf{W} \mathbf{F}_j^T \mathbf{R}_j \mathbf{W} \mathbf{F}_j, \text{ com}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\tag{3.10}$$

$i = 1, \dots, N_i, j = 1, \dots, N_o$ .

Os algoritmos de controle preditivo para sistemas lineares DMC e GPC aplicados a problemas sem restrições calculam o vetor  $\Delta \mathbf{u}$  que faz  $\frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}} = \mathbf{0}$ . A ideia aqui é buscar  $\Delta \mathbf{u}_1, \Delta \mathbf{u}_2, \dots, \Delta \mathbf{u}_{N_i}$  que faz o gradiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}_1} \\ \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}_{N_i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Obviamente isto equivale a  $\frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}} = 0$ .

Para qualquer  $g = 1, \dots, N_i$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}_g} &= \mathbf{G}_{1g}^T \mathbf{R}_1 \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{1i} \Delta \mathbf{u}_i & (3.12) \\
 &+ \mathbf{G}_{2g}^T \mathbf{R}_2 \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{2i} \Delta \mathbf{u}_i \\
 &+ \dots + \\
 &+ \mathbf{G}_{N_o g}^T \mathbf{R}_{N_o} \sum_{i=1}^{N_i} \mathbf{G}_{N_o i} \Delta \mathbf{u}_i \\
 &- \mathbf{G}_{1g}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{W} \mathbf{F}_1 \\
 &- \mathbf{G}_{2g}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{W} \mathbf{F}_2 \\
 &- \dots \\
 &- \mathbf{G}_{N_o g}^T \mathbf{R}_{N_o} \mathbf{W} \mathbf{F}_{N_o} \\
 &+ \mathbf{Q}_g \Delta \mathbf{u}_g
 \end{aligned}$$

Agrupando os termos com  $\Delta \mathbf{u}_g$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}_g} &= \left( \sum_{j=1}^{N_o} \mathbf{G}_{jg}^T \mathbf{R}_j \mathbf{G}_{jg} + \mathbf{Q}_g \right) \Delta \mathbf{u}_g + & (3.13) \\
 &\sum_{j=1}^{N_o} \mathbf{G}_{jg}^T \mathbf{R}_j \left( \sum_{i=1, i \neq g}^{N_i} \mathbf{G}_{ji} \Delta \mathbf{u}_i - (\mathbf{W}_j - \mathbf{F}_j) \right)
 \end{aligned}$$

Antes de escrever uma expressão para  $\Delta \mathbf{u}_g$  deve-se observar que um algoritmo MPC é normalmente utilizado em sistemas de controle amostrados. Como já mencionado, estes algoritmos normalmente entregam ações de controle em períodos de tempo fixo chamados tempo de amostragem. O valor do tempo de amostragem depende da natureza do processo sendo controlado mas é tipicamente muito maior do que o tempo de amostragem utilizado no controle local ou também chamado controle regulatório. Uma figura típica é o macrociclo do nível H1 de uma rede Foundation Fieldbus [51] que varia de 200 a 1000 ms, enquanto um tempo

de amostragem do algoritmo MPC pode ser medido em minutos em muitas aplicações na indústria do refino e petroquímica, por exemplo.

Poderia-se imaginar um sistema de controle MPC distribuído rodando no nível H1 de uma rede Foundation Fieldbus. Neste caso o valor final de cada ação de controle  $\Delta \mathbf{u}_g$  calculada pelo controle MPC distribuído seria disponibilizado somente após um alto número de macrociclos. Supondo que a função de cada agente seja encapsulada em um bloco funcional Foundation Fieldbus, a cada macrociclo todos os  $N_i$  blocos funcionais do tipo agentes MPC calculariam o valor  $\Delta \mathbf{u}_g$  em uma forma iterativa. Depois de um determinado número de macrociclos os valores de  $\Delta \mathbf{u}_g$  calculados por cada agente teriam evoluído para o valor final e seriam disponibilizados para o controle local tipicamente na forma de um *set-point*. Obviamente esta não é a única forma de implementar o controle MPC distribuído mas é uma forma simples de se explicar seu funcionamento.

Para a formulação sem restrições a expressão para cada  $\Delta \mathbf{u}_g$  no tempo de amostragem  $t$  e na iteração  $k$  pode ser escrita como

$$\Delta \mathbf{u}_g|_t^k = -\Phi_g^{-1} \Theta_g^k, \tag{3.14}$$

onde

$$\Phi_g = \left( \sum_{j=1}^{N_o} \mathbf{G}_{jg}^T \mathbf{R}_j \mathbf{G}_{jg} + \mathbf{Q}_g \right) \text{ e}$$

$$\Theta_g^k = \sum_{j=1}^{N_o} \mathbf{G}_{jg}^T \mathbf{R}_j \left( \mathbf{W}_j(t) - \mathbf{F}_j(t) - \sum_{i=1, i \neq g}^{N_i} \mathbf{G}_{ji} \Delta \mathbf{u}_i^{k-1}(t) \right).$$

Na equação (3.14)

- $\mathbf{W}_j(t)$  é o vetor  $p \times 1$  com as referências futuras da saída  $j$  no instante de amostragem  $t$ ,
- $\mathbf{F}_j(t)$  é o vetor  $p \times 1$  com as respostas livres da saída  $j$  no instante de amostragem  $t$ ,
- $\Delta \mathbf{u}_i^{k-1}(t)$  é o vetor  $m \times 1$  com os incrementos de controle da entrada  $i$  na iteração  $k - 1$  do instante de amostragem  $t$ ,
- $p$  é o horizonte de predição e
- $m$  é o horizonte de controle

Deve-se ressaltar que a dificuldade computacional para obter-se  $\Delta \mathbf{u}_g$  é muito menor do que aquela para obter o vetor  $\Delta \mathbf{u}$  completo. Conforme já discutido, nesta abordagem distribuída, o vetor  $\Delta \mathbf{u}$  é determinado por agentes utilizando uma combinação de cálculos repetidos de  $\Delta \mathbf{u}_g$  e troca de informações. Cada agente  $g$  inicia o tempo de amostragem  $t$  montando um valor inicial para  $\Delta \mathbf{u}_g|_t^1$  utilizando os valores finais obtidos no tempo de amostragem  $t - 1$  depois de  $N$  iterações,

$$\Delta \mathbf{u}_g|_t^1 = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_g|_{t-1}^N(2) \\ \Delta \mathbf{u}_g|_{t-1}^N(3) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

O valor inicial utilizado para  $\Delta \mathbf{u}_g|_t^1$  é consistente com a filosofia dos algoritmos MPC que assumem como nulo o valor do incremento de controle no instante seguinte ao horizonte de controle, isto é,  $\Delta \mathbf{u}(m + 1) = 0$ . No instante de amostragem  $t$ , calcula-se o vetor incremento da ação de controle  $\Delta \mathbf{u}_g|_t$  utilizando-se um filtro conforme será explicado posteriormente. Na equação 3.16 o índice  $k$  refere-se ao número do cálculo de  $\Delta \mathbf{u}_g|_t$  realizado pelo agente  $g$  no instante de amostragem  $t$ .

$$\Delta \mathbf{u}_g|_t^k = (1 - \alpha)\Delta \mathbf{u}_g|_t^k + \alpha\Delta \mathbf{u}_g|_t^{k-1}. \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Aplicação da técnica para um problema *benchmark*

Apresenta-se nesta seção a aplicação da técnica de controle MPC distribuído ao problema *Shell Heavy Oil Fractionator* descrito em [48]. Um diagrama esquemático da coluna é apresentado na figura 3.2. A aplicação do Controle preditivo distribuído torna-se mais apropriada em situações onde não existe acoplamento de todas as entradas com todas as saídas que é uma situação esperada em grandes processos. Para a análise do desempenho do algoritmo proposto, entretanto, quanto maior o acoplamento maior sera a dificuldade imposta ao algoritmo. Por esse motivo utiliza-se esse processo para demonstrar a aplicação do método. A dinâmica do processo é descrita por um modelo baseado em função de transferência em Laplace que é discretizada utilizando o tempo de amostragem de 4 minutos. As variáveis controladas

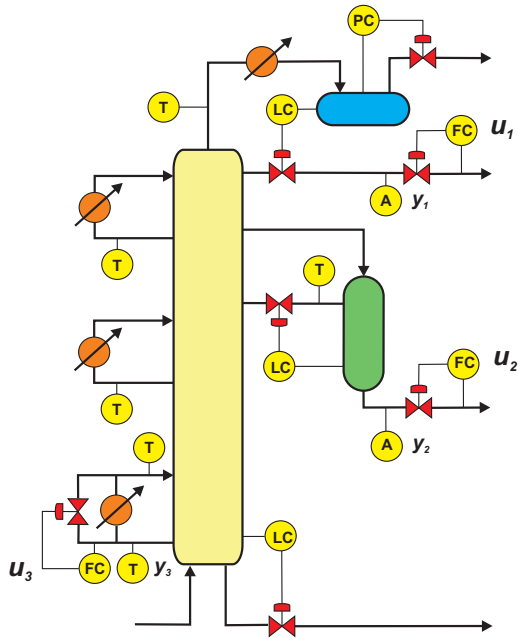


Figura 3.2: Diagrama esquemático da coluna de destilação

são a composição de topo  $y_1$ , composição da saída lateral  $y_2$  e a temperatura de refluxo de fundo  $y_3$ . As variáveis manipuladas são a vazão de saída de topo  $u_1$ , a vazão de saída lateral  $u_2$  e a vazão de recirculação de fundo  $u_3$ . Deve-se observar que as variáveis manipuladas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  calculadas pelo controle avançado em um sistema com taxa de amostragem igual a 4 minutos (240 segundos) serão implementadas por controladores PID que receberão estes valores como *set-points* e calcularão a abertura dos posicionadores das válvulas de controle que implementarão estas vazões na rede de controle local. Esta rede de controle local trabalha com tempo de amostragem da ordem de 1 segundo. Isto significa que se o controle local fosse implementado em uma rede Foundation Fieldbus, então os agentes que implementam o controle MPC distribuído poderiam trocar informação até 240 vezes aproximadamente (dependendo do macrociclo da rede) antes de disponibilizarem as ações de controle como referência para os controladores locais de vazão. Isto dá uma idéia da factibilidade da

técnica já que normalmente pode-se obter convergência com um número muito menor de iterações ou troca de informações entre agentes. O modelo baseado em Função de Transferência no domínio Laplace é dado pela equação (3.17).

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4.05e^{-27s}}{1+50s} & \frac{1.77e^{-28s}}{1+60s} & \frac{5.88e^{-27s}}{1+50s} \\ \frac{5.39e^{-18s}}{1+50s} & \frac{5.72e^{-14s}}{1+60s} & \frac{6.9e^{-15s}}{1+40s} \\ \frac{4.38e^{-20s}}{1+33s} & \frac{4.42e^{-22s}}{1+44s} & \frac{7.2}{1+19s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

As saídas  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  estão sujeitas à perturbações. Dentre estas perturbações estão aquelas devido a variações nas vazões de refluxo de topo. As funções de transferência relacionando a perturbação nas saídas  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$  e as variações nas vazões de refluxo de topo são apresentadas pela equação (3.18).

$$\begin{bmatrix} y_{p1}(s) \\ y_{p2}(s) \\ y_{p3}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.44e^{-27s}}{1+40s} \\ \frac{1.83e^{-15s}}{1+20s} \\ \frac{1.26}{1+32s} \end{bmatrix} u_p(s) \quad (3.18)$$

A figura 3.3 apresenta uma proposta de controle para a coluna Shell utilizando 3 agentes. Um agente para cada ação de controle. Como já mencionado, se o controle regulatório da coluna fosse implementado via Foundation Fieldbus (FF), então as ações de controle seriam implementadas por controladores do tipo PID instanciados como blocos funcionais em posicionadores de válvulas de controle FF. Os agentes seriam blocos funcionais e poderiam estar igualmente instanciados nos posicionadores. Desta forma a referência para os controladores PID que efetivamente implementam as vazões passariam dos agentes para os blocos funcionais PID sem sequer utilizar o barramento.

Nas seções seguintes apresenta-se diversas simulações utilizando a formulação centralizada e distribuída do algoritmo MPC DMC. Deve-se ressaltar que não há nenhum impedimento na utilização de outras técnicas de controle MPC como o GPC, por exemplo, na forma distribuída. Em geral qualquer técnica que represente



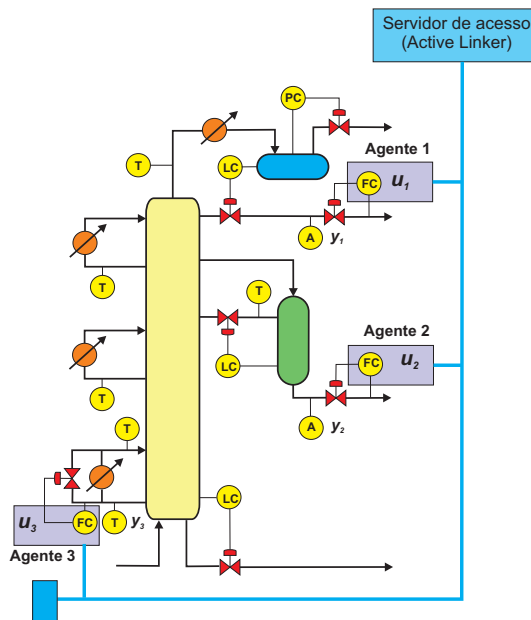


Figura 3.3: Controle via agentes

as predições de forma semelhante ao algoritmo DMC podem ser convertidas para a formulação distribuída.

### 3.2.3 Comparação entre o algoritmo MPC Centralizado e Distribuído

A fim de comparar a resposta entre o algoritmo MPC centralizado e o algoritmo distribuído, utilizou-se o algoritmo MPC DMC (Dynamic Matrix Control) com os parâmetros apresentados na tabela 3.1. Os pesos utilizados para a função custo MPC não são o foco deste trabalho. A escolha dos valores seguiu o usual compromisso entre desempenho e robustez. A resposta com o algoritmo distribuído mostrado na figura 3.4 foi obtida usando um numero de troca de informações entre agentes igual a 20. O critério de parada utilizado foi o número de iterações (igual a 20) mas existem outras possibilidades. Uma idéia é fixar um número máximo de iterações mas dar a possibilidade para a iteração parar mais cedo baseado

Tabela 3.1: Parâmetros de sintonia do algoritmo MPC

Símbolo	descrição	valor
$p$	Horizonte de predição	15
$m$	Horizonte de controle	3
$\mathbf{R}_1$	Peso seg. de referência p/ $y_1$	$\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{R}_2$	Peso seg. de referência p/ $y_2$	$\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{R}_3$	Peso seg. de referência p/ $y_3$	$\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{Q}_1$	Peso esf. de controle $\Delta \mathbf{u}_1$	$0.2\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{Q}_2$	Peso esf. de controle $\Delta \mathbf{u}_2$	$0.2\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{Q}_3$	Peso esf. de controle $\Delta \mathbf{u}_3$	$0.1\mathbf{I}_{p \times p}$
$\psi$	Filtro de referência	0.7
$\alpha$	$\Delta \mathbf{u}$ Filtro p/ MPC distribuído	0.35

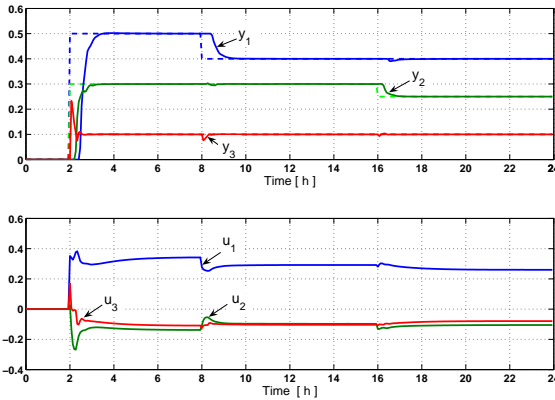


Figura 3.4: Resposta com DMC distribuído

em algum critério como um valor percentual da mudança do valor calculado entre duas iterações sucessivas, por exemplo. É notável a resposta mais suave obtida com o algoritmo distribuído. Além disso, parece que os parâmetros de sintonia para o algoritmo distribuído não necessitam ser exatamente iguais aqueles utilizados para a versão centralizada. A resposta obtida utilizando o algoritmo centralizado é mostrada na figura 3.5.

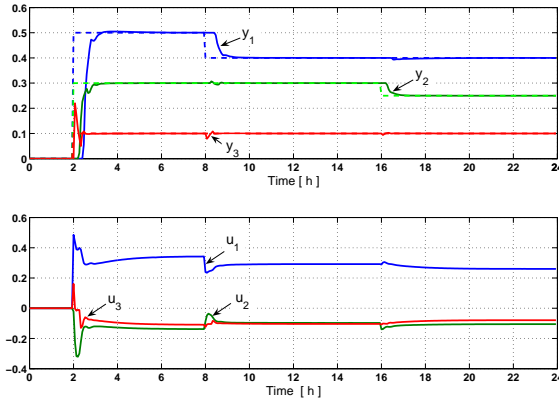


Figura 3.5: Resposta com DMC centralizado

### 3.2.4 Desempenho do algoritmo MPC distribuído

Para se ter uma idéia do número de troca de informações entre agentes necessária para um certo desempenho, uma análise foi feita baseada no erro entre as saídas e as referências. Para cada saída  $Y^j$  a cada tempo de amostragem  $t$  o erro relativo  $e_j^t$  foi calculado como

$$e_j^t = \frac{(Y_j^t - W_j^t)}{W_j^t}, \quad j = 1 \dots 3, \quad t = 1 \dots N \quad (3.19)$$

Assim,  $e_j^t = 1$  significa um erro de 100%. Uma média do erro absoluto foi calculada para cada saída bem como a média das 3 saídas,

$$e_{abs}(j) = \frac{\sum_{t=1}^N |e_j(t)|}{N}, \quad (3.20a)$$

$$e_{abs} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\sum_{t=1}^N |e_j(t)|}{N} \right). \quad (3.20b)$$

Um valor de  $e_{abs} = .01$  significa um erro médio de 1%. A figura 3.6 apresenta a percentagem com que o erro utilizando o algoritmo distribuído é maior do que o erro utilizando o algoritmo centralizado. É evidente que os erros relativos tendem a zero na media em que no número de troca de informações entre os agentes aumenta. A equação utilizada para calcular cada erro percentual da saída é

$$e_{\%} = \left( \frac{e_{dist}}{e_{cent}} - 1 \right) * 100 \quad (3.21)$$

Nota-se que para esta aplicação, obtém-se erros aceitáveis para

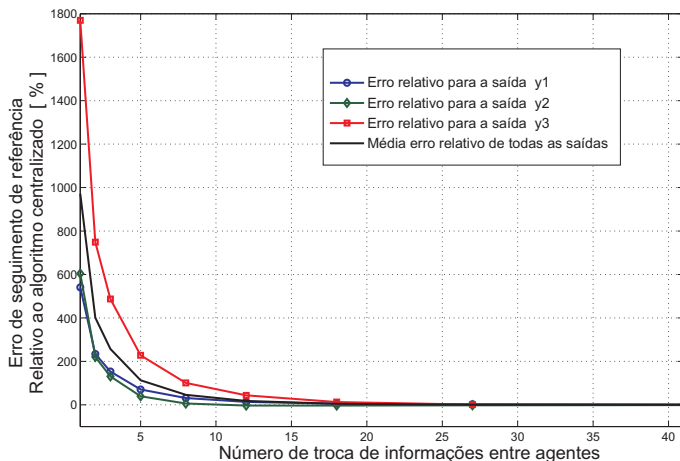


Figura 3.6: Comparação entre o número de iterações e o erro de seguimento de referência

um número de troca de informações maior do que 18. A velocidade com que o erro vai a zero depende do filtro *alfa* utilizado. Em geral diminuindo-se o valor do filtro *alfa* utilizado na equação 3.16 consegue-se diminuir o número de trocas de informação para um mesmo desempenho. Entretanto a garantia da convergência depende também de *alfa* como será discutido na seção seguinte.

### 3.3 Convergência do Algoritmo MPC distribuído

A convergência do vetor  $\Delta \mathbf{u}_i$  para seu valor verdadeiro (aquele que minimiza a função objetivo) tem de ser garantida para uma aplicação segura. Para uma aplicação sem restrições os desenvolvimentos feitos na área da computação distribuída podem ser utilizados abstraindo-se da problemática da comunicação entre agentes. A técnica *Jacobi overrelaxation*, [52], é adotada aqui para recalculer  $\Delta \mathbf{u}_g$  como uma combinação linear dos valores calculados pela equação (3.14) e o valor obtido na iteração anterior,

$$\Delta \mathbf{u}_g|_t^k = (1 - \alpha)\Delta \mathbf{u}_g|_t^{k-1} + \alpha\Delta \mathbf{u}_g|_t^k. \quad (3.22)$$

Para entender como o filtro  $\alpha$  pode garantir estabilidade ou convergência do algoritmo é importante observar que a equação (3.14) mostra que  $\Delta \mathbf{u}_g$ ,  $g = 1 : N_i$ , depende de todos os demais vetores  $\Delta \mathbf{u}_i$ , exceto do vetor  $\Delta \mathbf{u}_g$ . Ao se agrupar as expressões para todos os  $\Delta \mathbf{u}_i$  pode-se utilizar a equação (3.14) para obter-se a equação 3.23

$$\Delta \mathbf{u}_i|_t^k = \sum_{i=1, i \neq g}^{N_i} \mathbf{A}_{ij} \Delta \mathbf{u}_i|_t^{k-1} + \mathbf{B}_i, \quad (3.23)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}_{ij}$  terão dimensão  $m \times m$  e o vetor  $\mathbf{B}_i$  dimensão  $m \times 1$ . A matriz  $\mathbf{A}_{ii}$  é nula. As matrizes  $\mathbf{A}_{ij}$  podem ser facilmente obtidas com a equação 3.14. Escrevendo uma expressão centralizada para  $\Delta \mathbf{u} = [ \Delta \mathbf{u}_1 \quad \Delta \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}_{N_i} ]^T$  utilizando

a equação (3.23),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{N_i} \end{bmatrix}^k &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1N_i} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{2N_i} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathbf{A}_{N_i1} & \mathbf{A}_{N_i-11} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{N_i} \end{bmatrix}^{k-1} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{N_i} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

que, numa forma compacta se torna

$$\Delta \mathbf{u}^k = \mathbf{A} \Delta \mathbf{u}^{k-1} + \mathbf{B}. \quad (3.25)$$

Aplicando o filtro de acordo com a equação (3.22),

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}^k &= \mathbf{A}_F \Delta \mathbf{u}^{k-1} + (1 - \alpha) \mathbf{B}, \\ \mathbf{A}_F &= (1 - \alpha) \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nota-se que a ação do filtro é introduzir elementos na diagonal da matriz  $\mathbf{A}_F$ . No limite, para  $\alpha = 1$ , teríamos  $\mathbf{A}_F$  igual a matriz identidade. É óbvio que a convergência será obtida se os autovalores  $\lambda_r$  de  $((1 - \alpha) \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I})$  satisfazem

$$\|\lambda_r\|_2 < 1. \quad (3.27)$$

Esta é a condição necessária e suficiente para que o processo iterativo expresso pela equação (3.26) chegue a um valor final. Calcular o parâmetro  $\alpha$  que induz estabilidade do algoritmo e uma taxa de convergência ótima parece ser um problema difícil que necessita de investigação mais profunda. Existem diversas possibilidades na aplicação do filtro como por exemplo a utilização de filtros diferentes para cada agente.

### 3.4 MPC distribuído na presença de restrições

Em geral os algoritmos MPC utilizados na indústria utilizam o algoritmo de Programação Quadrática na determinação das ações de controle. Tipicamente o algoritmo de Programação Quadrática resolve o seguinte problema a cada instante de amostragem:

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta \mathbf{u}} && J \\ & \text{s. a} && \\ & J = && \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Phi \Delta \mathbf{u} + \Theta^T \Delta \mathbf{u} \\ & \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} \leq && \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Na equação (3.28) a restrição expressa por  $\mathbf{A} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{B}$  representa uma família de restrições que normalmente incluem.

- Restrição sobre os valores dos incrementos de controle  $\Delta \mathbf{u}$ , isto é,  $\Delta \mathbf{u}_{min.}(j) \leq \Delta \mathbf{u}(j) \leq \Delta \mathbf{u}_{max.}(j)$ .
- Restrição sobre os valores das ações de controle  $\mathbf{u}$ , isto é,  $\mathbf{u}_{min.}(j) \leq \mathbf{u}(j) \leq \mathbf{u}_{max.}(j)$ .
- Restrição sobre os valores das saídas  $\mathbf{y}$ , isto é,  $\mathbf{y}_{min.}(j) \leq \mathbf{y}(j) \leq \mathbf{y}_{max.}(j)$ .

Essa família de restrições responde pela maioria das necessidades da indústria de processos. As restrições sobre os valores admissíveis para  $\Delta \mathbf{u}$  refletem a capacidade limitada da mudança de valores que os atuadores podem fornecer. Uma válvula de controle, por exemplo, exige um tempo determinado para variar sua abertura desde 0% até 100%. Para um determinado tempo de amostragem fixo, isto estabelece um máximo valor de incremento e de decremento de abertura realizável a cada instante de amostragem. Esta limitação é também chamada de *slew rate*.

As restrições sobre os valores das ações de controle, por outro lado, refletem os limites da capacidade do atuador. A mesma válvula mencionada anteriormente, por exemplo, só pode ter sua abertura entre os valores 0% e 100%.

As restrições sobre os valores das variáveis de saída permitem exigir que algumas variáveis de interesse não ultrapassem algum valor determinado. O cumprimento destas restrições é valioso quando se deseja garantir que uma determinada concentração de

uma substância, por exemplo, não seja menor ou maior que um determinado valor. Em um processo produtivo esta possibilidade é muito importante pois estes valores muitas vezes tem de ser assegurados devido a necessidade de se garantir a especificação do produto sendo produzido sob pena de se perder a produção quando estas especificações não são atendidas.

A introdução dessas restrições na formulação de controle melhora o desempenho do sistema. Há de se considerar que o algoritmo de otimização resolve um problema numérico e, se não informado, não considera nenhuma limitação sobre o valor calculado de uma ação de controle, como 100% para a abertura de uma válvula de controle, por exemplo. Ao introduzir as restrições conhecidas do problema obtém-se uma ação de controle de melhor qualidade que efetivamente realiza o que se pretende com a função objetivo. Em [48] apresenta-se em detalhes a colocação de todas essas restrições na forma  $\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} \leq \mathbf{N}$ .

A fim de introduzir restrições na formulação distribuída reescreve-se o problema de Programação Quadrática colocando-se as restrições dentro da função custo utilizando-se multiplicadores de Lagrange, [53]. A maioria dos resultados que serão apresentados a seguir também fazem parte de um artigo apresentado em [54] e partes do trabalho estão em outro artigo submetido ao Congresso Brasileiro de Automática 2010. As simulações realizadas nas subseções seguintes tanto para o algoritmo centralizado como para o distribuído utilizaram os parâmetros de sintonia apresentados na tabela 3.2.

Tabela 3.2: Parâmetros de sintonia do algoritmo MPC

Símbolo	descrição	valor
$p$	Horizonte de predição	15
$m$	Horizonte de controle	3
$\mathbf{R}_1$	Peso seg. referência p/ $y_1$	$\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{R}_2$	Peso seg. referência p/ $y_2$	$0.2\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{R}_3$	Peso seg. referência p/ $y_3$	$3\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{Q}_1$	Peso esf. de controle $\Delta\mathbf{u}_1$	$0.1\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{Q}_2$	Peso esf. de controle $\Delta\mathbf{u}_2$	$0.2\mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{Q}_3$	Peso esf. de controle $\Delta\mathbf{u}_3$	$0.15\mathbf{I}_{p \times p}$
$\psi$	Filtro de referência	0.4
$\alpha$	$\Delta\mathbf{u}$ Filtro p/ MPC distribuído	0.375



### 3.4.1 Restrições sobre $\Delta u$

Para restrições em  $\Delta \mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}$  não há dificuldades pois a restrição é local. Para o caso de restrição em  $\Delta \mathbf{u}$  a matriz  $\mathbf{A}$  da equação (3.28) é a matriz identidade de dimensão  $m \times m$  e o vetor  $\mathbf{B}$  para o caso de limite superior seria escrito como  $\mathbf{B} = \Delta u_s^{max} \mathbf{1}$  onde o vetor  $\mathbf{1}$  é um vetor de uns de dimensão  $m \times 1$ . Para este caso pode-se reescrever a função objetivo como

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad & L \\ \text{s. a.} \quad & \\ L = \quad & \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Phi \Delta \mathbf{u} + \Theta^T \Delta \mathbf{u} + \Lambda_s^T (\mathbf{I} \Delta \mathbf{u}_s - \Delta u_s^{max} \mathbf{1}) \\ \Lambda_s^T \geq \quad & \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Para todos os agentes  $g = 1 : N_i$ , exceto o agente  $g = s$ , calcula-se a ação de controle conforme a equação (3.14) aqui repetida,

$$\Delta \mathbf{u}_{g|t}^k = -\Phi_g^{-1} \Theta_g^k \tag{3.30}$$

Para o agente  $s$ , a solução ótima exige que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{u}_s} &= \Phi_s \Delta \mathbf{u}_s + \Theta_s + \Lambda_s = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Lambda_s} &= \mathbf{I} \Delta \mathbf{u}_s - \Delta u_s^{max} \mathbf{1} = 0 \\ \Lambda_s &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Define-se o erro ao atendimento à restrição  $\Sigma$ ,

$$\Sigma = \mathbf{I} \Delta \mathbf{u}_s - \Delta u_s^{max} \mathbf{1}. \tag{3.32}$$

Existem diversas formas de implementar um sistema iterativo com as equações 3.31 e 3.32 que resultem na solução ótima de 3.30. Uma idéia é utilizar o erro ao atendimento da restrição,  $\Sigma$ , para modificar o vetor com os multiplicadores de Lagrange  $\Lambda_s$  de forma a modificar  $\Delta \mathbf{u}_s$  e levar ao cumprimento da restrição ( $\Sigma = \mathbf{0}$ ). Deve-se ter em mente que a equação 3.31 é válida somente na ocorrência da restrição. De qualquer forma quando  $\Lambda_s$  é nulo a solução é a mesma obtida pela equação 3.30.

A forma adotada para transformar o erro  $\Sigma$  em mudanças no valor de  $\Lambda_s$  utiliza o fato de que manipulando-se as equações 3.31 e 3.32 obtém-se

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \Sigma} = -\Phi_s. \quad (3.33)$$

Assim, para um incremento de erro  $\Delta \Sigma_{un.} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$  deve-se modificar o vetor  $\Lambda_s$  na direção do vetor unitário  $\Lambda_d$ ,

$$\Lambda_d = \frac{1}{\|\Phi_s \Delta \Sigma\|} \Phi_s \Delta \Sigma_{un.} \quad (3.34)$$

De forma que, para um determinado vetor erro  $\Sigma$ , calcula-se o incremento do vetor  $\Delta \Lambda$  como a projeção de  $\Sigma$  no vetor unitário  $\Lambda_d$ ,

$$\begin{aligned} \Delta \Lambda &= (\Sigma \cdot \Lambda_d) \Lambda_d, \text{ ou} \\ \Lambda_s^k &= \Lambda_s^{k-1} + (\Sigma \cdot \Lambda_d) \Lambda_d \end{aligned} \quad (3.35)$$

Finalmente pode-se escrever o processo iterativo proposto para obtenção da ação de controle obedecendo a restrição em  $\Delta \mathbf{u}$ . A ação de controle para o agente  $s$  pode ser calculada de forma iterativa inicializando o vetor  $\Lambda_s$  de dimensão  $m \times 1$  com zeros. Define-se o erro ao atendimento da restrição na iteração  $k$  como

$$\Sigma_s^k = \mathbf{I} \Delta \mathbf{u}_s^{k-1} - \Delta u_s^{max} \mathbf{1} \quad (3.36)$$

Na sequência atualiza-se o vetor  $\Lambda_s^k$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda_s^k &= \Lambda_s^{k-1} + (\Sigma_s^k \cdot \Lambda_d) \Lambda_d, \\ \Lambda_s^k(j) &\geq 0 \text{ para } j=1:m \end{aligned} \quad (3.37)$$

e calcula-se a ação de controle

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_s^k &= -\Phi_s^{-1} (\Theta_s^k + \Lambda_s^k), \\ \Delta \mathbf{u}_s^k &= (1 - \alpha) \Delta \mathbf{u}_s^k + \alpha \Delta \mathbf{u}_s^{k-1}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

As expressões para  $\Phi_s$  e  $\Theta_s^k$  são apresentadas na equação (3.14).

As figuras 3.7 e 3.8 apresentam uma comparação do desempenho do algoritmo MPC DMC centralizado e Distribuído para o problema *Shell Heavy Oil Fractionator*. Os parâmetros de sintonia são os mesmos utilizados anteriormente. Para o MPC dis-

tribuído utilizou-se 35 trocas de informações a cada instante de amostragem. Foi exigido uma restrição no incremento da ação de controle  $\Delta u_1$  na forma  $\Delta u_1 \leq 0.05$ .

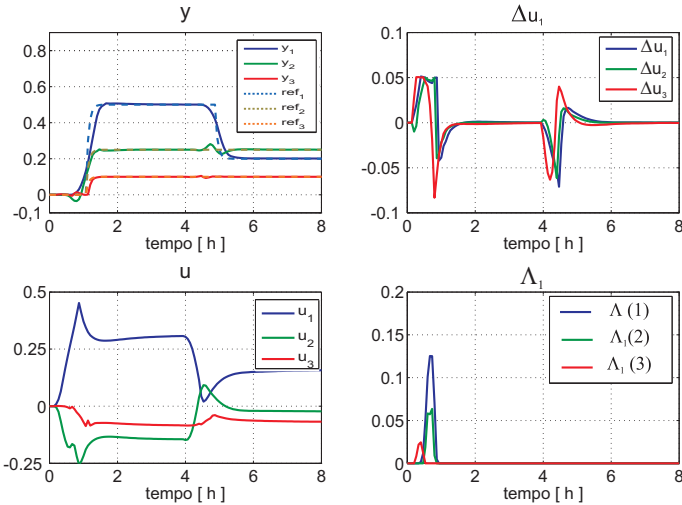


Figura 3.7: Resposta do MPC Distribuído com restrição  $\Delta u_1 \leq 0.05$

A figura 3.7 apresenta os resultados obtidos com o algoritmo MPC distribuído proposto. Observa-se que como o horizonte de controle é igual a 3, há também 3 multiplicadores de Lagrange para restrição nos incrementos de uma ação de controle. Esses multiplicadores assumem valores que otimizam a função objetivo atendendo a restrição.

A figura 3.8 apresenta os resultados obtidos com o algoritmo MPC centralizado. Foi utilizado o MPC DMC com o algoritmo de programação quadrática *quadprog* do Matlab. A fim de fazer uma melhor comparação extraíram-se os multiplicadores de Lagrange utilizados pelo algoritmo *quadprog* do Matlab. Nota-se a grande semelhança entre os valores dos multiplicadores de Lagrange obtidos na forma distribuída e centralizada dos algoritmos. Observando os valores das saídas para a versão distribuída e centralizada percebe-se um comportamento ligeiramente mais próximo das referências para o caso distribuído. Com ambas as técnicas as restrições são obedecidas. Não se conhece em profundidade

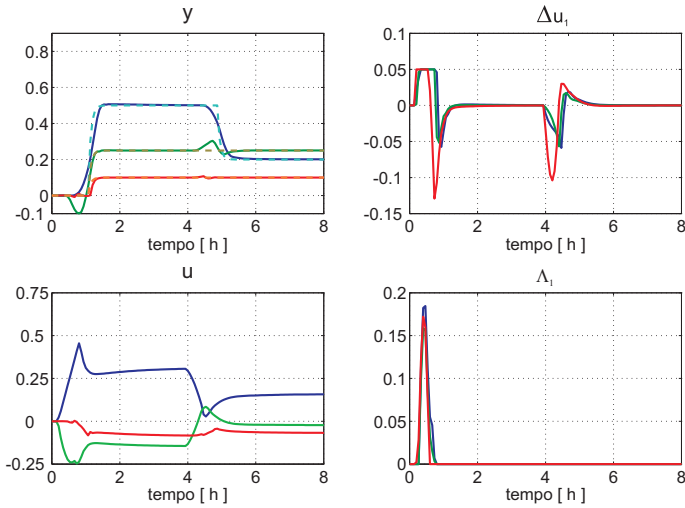


Figura 3.8: Resposta do MPC Centralizado com restrição  $\Delta \mathbf{u}_1 \leq 0.05$

a técnica utilizada pelo otimizador *quadprog* no tratamento das restrições e por enquanto pode-se afirmar que o resultado obtido com o MPC distribuído não é pior do que aquele obtido com a técnica centralizada, pelo menos para esta aplicação.

Para restrições do tipo  $\Delta u \geq \Delta u^{min}$  transforma-se a restrição fazendo

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &\geq \Delta u_s^{min} \mathbf{1} \text{ equivale a} \\ -\Delta \mathbf{u} &\leq -\Delta u_s^{min} \mathbf{1} \end{aligned} \tag{3.39}$$

A equação (3.29) deve ser reescrita como

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad & L \\ \text{s. a} \quad & \\ L = \quad & \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Phi \Delta \mathbf{u} + \Theta^T \Delta \mathbf{u} + \Lambda_s^T (-\mathbf{I} \Delta \mathbf{u}_s + \Delta u_s^{max} \mathbf{1}), \\ \Lambda_s^T \geq \quad & \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.40}$$

Neste caso para o agente  $s$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{u}_s} &= \Phi_s \Delta \mathbf{u}_s + \Theta_s - \Lambda_s = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Lambda_s} &= \Sigma = -\mathbf{I} \Delta \mathbf{u}_s + \Delta u_s^{max} \mathbf{1} = 0 \\ \Lambda_s &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.41}$$

As figuras 3.9 e 3.10 mostram os resultados de simulação para

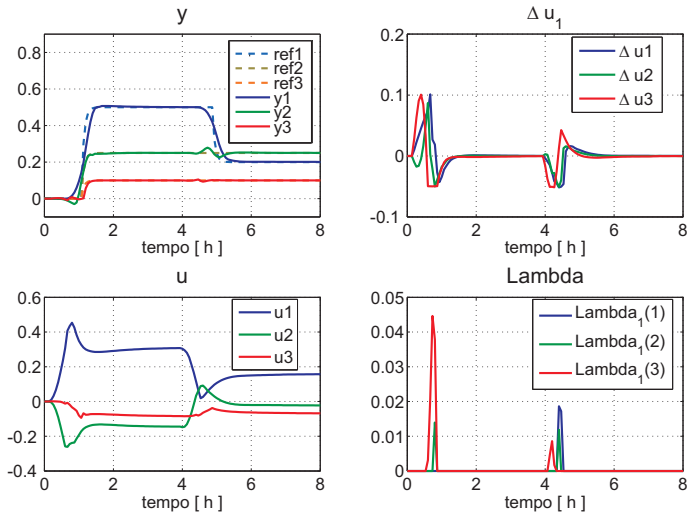


Figura 3.9: Resposta do MPC Distribuído com restrição  $\Delta \mathbf{u}_1 \geq -0.05$

a restrição  $\Delta u_1 \geq -0.05$ . A figura 3.9 mostra a resposta com o MPC distribuído utilizando 50 trocas de dados entre os 3 agentes enquanto que a figura 3.10 apresenta os resultados com o MPC centralizado utilizando o otimizador *quadprog* do Matlab. Em geral as respostas são bem semelhantes.

### 3.4.2 Restrições sobre $\mathbf{u}$

As restrições sobre  $\mathbf{u}$  podem ser tratadas de forma semelhante ao que foi feito com aquelas sobre os incrementos de controle  $\Delta \mathbf{u}$ . Deve-se ressaltar que qualquer ação de controle  $s$  pode ser escrita

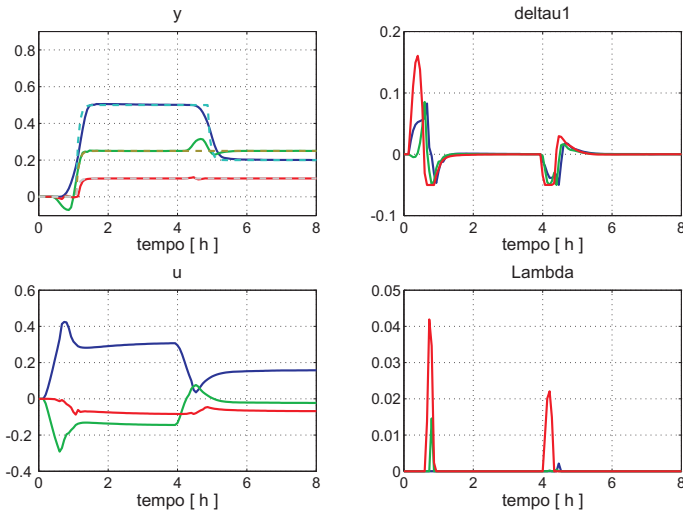


Figura 3.10: Resposta do MPC Centralizado com restrição  $\Delta \mathbf{u}_1 \geq -0.05$

como

$$\mathbf{u}_s = u_s^{t-1} \mathbf{1} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}_s, \text{ onde}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

O vetor  $u_s^{t-1} \mathbf{1}$  de dimensão  $m \times 1$  é composto pelos valores da ação de controle  $u_s$  implementada no instante de amostragem anterior. Para o caso de restrição no valor máximo de uma determinada ação de controle  $s$ ,  $u_s^{max}$ , a função custo aumentada com

os operadores de Lagrange seria escrita como

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad L \\
 & \text{s. a} \\
 & L = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Phi \Delta \mathbf{u} + \Theta^T \Delta \mathbf{u} + \Lambda_s^T (\mathbf{D} \Delta \mathbf{u}_s + u_s^{t-1} \mathbf{1} - u_s^{max} \mathbf{1}) \\
 & \Lambda_s^T \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Para os agentes diferentes de  $s$ ,

$$\Delta \mathbf{u}_g|_t^k = -\Phi_g^{-1} \Theta_g^k \tag{3.44}$$

Para o agente  $s$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{u}_s} &= \Phi_s \Delta \mathbf{u}_s + \Theta_s + \mathbf{D}^T \Lambda_s = 0 \\
 \frac{\partial L}{\partial \Lambda_s} &= \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}_s + u_s^{t-1} \mathbf{1} - u_s^{max} \mathbf{1} = 0 \\
 \Lambda_s &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Neste caso define-se o erro ao atendimento da restrição como

$$\Sigma = \Delta \mathbf{u}_s + \mathbf{D}^{-1} (u_s^{t-1} \mathbf{1} - u_s^{max} \mathbf{1}). \tag{3.46}$$

A partir da equação (3.46) e (3.45) pode-se obter

$$\frac{\partial \Lambda_s}{\partial \Sigma} = \mathbf{G} = -(\mathbf{D}^T)^{-1} \Phi_s \mathbf{D}^{-1} \tag{3.47}$$

A equação (3.47) mostra o gradiente de  $\Lambda_s$  em relação ao vetor  $\Sigma$ ,  $\mathbf{G}$ . Para um vetor com um incremento unitário nos componentes de  $\Sigma = \Sigma_{un}$  pode-se obter o vetor unitário que mostra a direção do ajuste de  $\Lambda_s$ ,

$$\Lambda_d = \frac{-\mathbf{G} \Delta \Sigma_{un}}{\|-\mathbf{G} \Delta \Sigma_{un}\|}. \tag{3.48}$$

Como já feito anteriormente, para um determinado vetor erro  $\Sigma$  pode-se calcular o incremento do vetor  $\Delta \Lambda_s$  como a projeção de  $\Sigma$  no vetor unitário  $\Lambda_d$ ,

$$\begin{aligned}
 \Delta \Lambda &= (\Sigma \cdot \Lambda_d) \Lambda_d, \text{ ou} \\
 \Lambda_s^k &= \Lambda_s^{k-1} + (\Sigma \cdot \Lambda_d) \Lambda_d \\
 \Lambda_s^k &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

O processo iterativo é semelhante ao que já foi explicado para a restrição em  $\Delta u$ . As figuras 3.11 e 3.12 mostram a comparação entre a aplicação do algoritmo distribuído e centralizado para o caso de uma restrição em  $u_1$ ,  $u_1 \leq 0.35$ . A figura 3.11 mostra a resposta obtida com o MPC distribuído utilizando 35 trocas de informação entre os 3 agentes utilizados. A figura 3.12 mostra a resposta obtida com o algoritmo MPC centralizado. Observa-se que as respostas são muito semelhantes e ambas as técnicas obedecem a restrição.

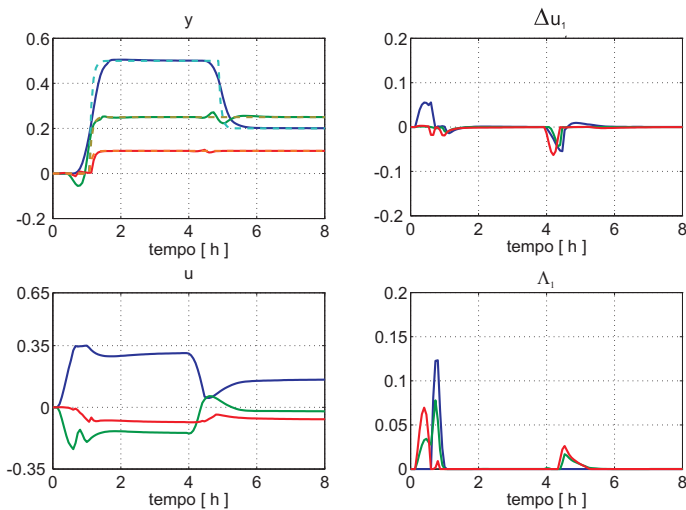


Figura 3.11: Resposta do MPC Distribuído com restrição  $u_1 \leq 0.35$

### 3.4.3 Restrições sobre $y$

Este é o principal desafio para a aplicação de controle preditivo na forma distribuída. A introdução de restrições sobre uma determinada saída afeta um grupo de agentes responsáveis pelo comportamento desta saída tornando o problema mais complexo do que foi para as restrições sobre  $\Delta u$  e  $u$ . Sem perda de generalidade discute-se aqui o tratamento para a restrição em uma das saídas, saída  $j$ , do tipo  $y_j \leq y_j^{max}$ . Como já feito anteriormente há de se restringir o valor de  $y_j$  ao longo de todo o horizonte de previsão



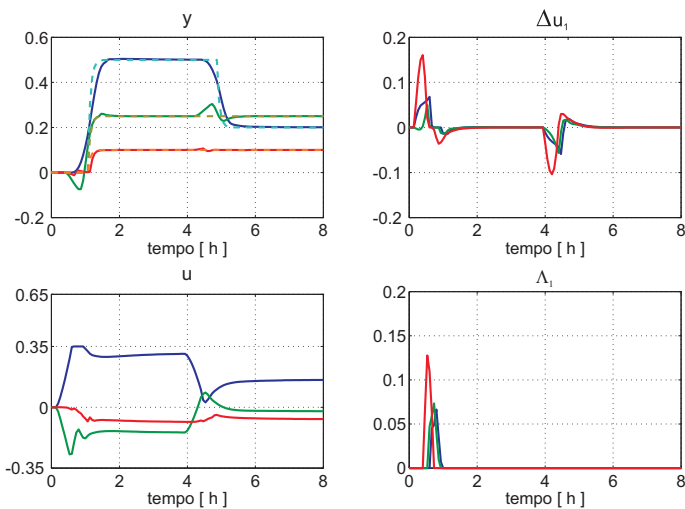


Figura 3.12: Resposta do MPC Centralizado com restrição  $u_1 \leq 0.35$

neste caso. Assim, do ponto de vista do controle MPC, equivale a dizer

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{y}}_j &\leq y_j^{max} \mathbf{1}_{p \times 1} \quad \text{ou} \\ \mathbf{G}_{j1} \Delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{G}_{j2} \Delta \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{G}_{jn} \Delta \mathbf{u}_n + \mathbf{F}_j &\leq y_j^{max} \mathbf{1}_{p \times 1} \end{aligned} \quad (3.150)$$

A formulação do problema de Programação Quadrática que determina a ação de controle na formulação centralizada é

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad & J \\ \text{s. a} \quad & \\ & J = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Phi \Delta \mathbf{u} + \Theta^T \Delta \mathbf{u} \\ & \mathbf{A} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{B} \\ & \mathbf{A} = [ \mathbf{G}_{j1} \quad \mathbf{G}_{j2} \quad \dots \quad \mathbf{G}_{jn} ] \\ & \mathbf{B} = y_j^{max} \mathbf{1}_{p \times 1} - \mathbf{F}_j \\ & \Delta \mathbf{u} = [ \Delta \mathbf{u}_1 \quad \Delta \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}_n ]^T. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Antes de iniciar o procedimento de introduzir a restrição em uma função custo aumentada incorporando os multiplicadores de La-

grange, vamos supor que tanto a resposta livre  $\mathbf{F}_j$  como a restrição  $y_j \leq y_j^{max}$  possam ser divididas em tantas partes quantas forem as ações de controle,  $n$ . Assim, no lugar de 1 restrição, teremos  $n$  restrições. Esta suposição é apenas um artifício matemático como será demonstrado na sequência,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j &= \mathbf{F}_{j1} + \mathbf{F}_{j2} + \cdots + \mathbf{F}_{jn} \\ y_j^{max} &= y_{j1}^{max} + y_{j2}^{max} + \cdots + y_{jn}^{max} \end{aligned} \quad (3.52)$$

A formulação do problema descrito pela equação (3.51) seria modificada para

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad & J \\ \text{s. a} \quad & \\ J &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Phi \Delta \mathbf{u} + \Theta^T \Delta \mathbf{u} \\ \mathbf{G}_{j1} \Delta \mathbf{u}_1 &\leq y_{j1}^{max} - \mathbf{F}_{j1} \\ \mathbf{G}_{j2} \Delta \mathbf{u}_2 &\leq y_{j2}^{max} - \mathbf{F}_{j2} \\ &\vdots \\ \mathbf{G}_{jn} \Delta \mathbf{u}_n &\leq y_{jn}^{max} - \mathbf{F}_{jn}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Agora pode-se propor uma função custo aumentada introduzindo-se as restrições com os multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{aligned} \min_{\Delta \mathbf{u}} \quad & L \\ \text{s. a} \quad & \\ L &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Phi \Delta \mathbf{u} + \Theta^T \Delta \mathbf{u} + \\ &\Lambda_1^T (\mathbf{G}_{j1} \Delta \mathbf{u}_1 - y_{j1}^{max} + \mathbf{F}_{j1}) + \\ &\Lambda_2^T (\mathbf{G}_{j2} \Delta \mathbf{u}_2 - y_{j2}^{max} + \mathbf{F}_{j2}) + \\ &\cdots + \\ &\Lambda_n^T (\mathbf{G}_{jn} \Delta \mathbf{u}_n - y_{jn}^{max} + \mathbf{F}_{jn}) \\ \Lambda_1 &\geq \mathbf{0}_{p \times 1} \\ \Lambda_2 &\geq \mathbf{0}_{p \times 1} \\ &\vdots \\ \Lambda_n &\geq \mathbf{0}_{p \times 1} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Seguindo com a estratégia de se buscar

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{u}_1} \quad \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{u}_2} \quad \dots \quad \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{u}_n} \right]^T = \left[ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T, \quad (3.55)$$

aplica-se as condições para minimização da equação (3.54),

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{u}_1} &= \Phi_1 \Delta \mathbf{u}_1 + \Theta_1 + \mathbf{G}_{j1}^T \Lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{u}_2} &= \Phi_2 \Delta \mathbf{u}_2 + \Theta_2 + \mathbf{G}_{j2}^T \Lambda_2 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \Delta \mathbf{u}_n} &= \Phi_n \Delta \mathbf{u}_n + \Theta_n + \mathbf{G}_{jn}^T \Lambda_n = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Lambda_1} &= \Sigma_1 = \mathbf{G}_{j1} \Delta \mathbf{u}_1 - y_{j1}^{max} + \mathbf{F}_{j1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \Lambda_2} &= \Sigma_2 = \mathbf{G}_{j2} \Delta \mathbf{u}_2 - y_{j2}^{max} + \mathbf{F}_{j2} = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial \Lambda_n} &= \Sigma_n = \mathbf{G}_{jn} \Delta \mathbf{u}_n - y_{jn}^{max} + \mathbf{F}_{jn} = 0 \\ \Lambda_1 &\geq \mathbf{0}_{p \times 1} \\ \Lambda_2 &\geq \mathbf{0}_{p \times 1} \\ &\vdots \\ \Lambda_n &\geq \mathbf{0}_{p \times 1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Deve-se encontrar os vetores  $\Delta \mathbf{u}_g$ ,  $g = 1 : n$ , que satisfaçam a equação (3.56). É interessante observar que ao somar as expressões para  $\Sigma_i$ , recupera-se a restrição original.

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_n, \text{ ou} \\ \Sigma &= \mathbf{G}_{j1} \Delta \mathbf{u}_1 - y_{j1}^{max} + \mathbf{F}_{j1} + \\ &\quad \mathbf{G}_{j2} \Delta \mathbf{u}_2 - y_{j2}^{max} + \mathbf{F}_{j2} + \\ &\quad \vdots + \\ &\quad \mathbf{G}_{jn} \Delta \mathbf{u}_n - y_{jn}^{max} + \mathbf{F}_{jn} \end{aligned} \quad (3.57)$$

O grande desafio é determinar os vetores  $\Lambda_g$ ,  $g = 1 : n$ , pois cada agente calcula sua ação de controle como

$$\Delta \mathbf{u}_g = -\Phi_g^{-1} (\Theta_g + G_{jg}^T \Lambda_g) \quad (3.58)$$

Trabalhando-se com as equações 3.56 e 3.57 as seguintes relações são obtidas,

$$\frac{\partial \Lambda_i}{\partial \Sigma} = - \left( \mathbf{G}_{ji} \Phi_i^{-1} \mathbf{G}_{ji}^T \right)^{-1}. \quad (3.59)$$

A equação 3.59 sugere que uma pequena violação na restrição para  $y_j$ ,  $\Delta \Sigma$ , poderia ser eliminada mudando cada  $\Lambda_i$  pelo valor apresentado na equação 3.60,

$$\Delta \Lambda_i = \left( \mathbf{G}_{ji} \Phi_i^{-1} \mathbf{G}_{ji}^T \right)^{-1} \Delta \Sigma. \quad (3.60)$$

Entretanto a inversão da matriz apresentada na equação 3.60 não é realizável para sistemas com atraso de transporte que irão exibir um determinado número de linhas com zeros para  $\mathbf{G}_{ji}$ . Diante disso buscou-se uma forma heurística que mostrou bom resultados. Um vetor  $V_{ji}$  é montado conforme equação 3.61,

$$\mathbf{V}_{ji} = \left( \mathbf{G}_{ji} \Phi_i^{-1} \mathbf{G}_{ji}^T \right) \mathbf{1}, \quad (3.61)$$

em seguida, cada elemento não nulo de  $\mathbf{V}_{ji}$  é invertido e o vetor resultante é normalizado resultando no vetor  $\mathbf{V}_{ji}^{norm}$ . Para cada agente  $g$ , ( $g \in 1 : N$ ), o seguinte pseudo-código é executado a cada instante de amostragem  $t$ ,

- Todos os vetores  $\Lambda_i$  são inicializados com zeros.
- Os vetores  $\mathbf{V}_{ji}^{norm}$  são computados *offline*,
- Cada agente  $g$  calcula  $\Sigma^k$ , o erro ao atendimento a restrição,

$$\Sigma^k = \sum_i^N \mathbf{G}_{ji} \Delta \mathbf{u}_i^{k-1} + \mathbf{F}_j - y_j^{max} \mathbf{1} \quad (3.62)$$

- $\Lambda_g^k$  é atualizado como

$$\Lambda_g^k = \Lambda_g^{k-1} + \left( \Sigma^k \cdot \mathbf{V}_{jg}^{norm} \right) \mathbf{V}_{jg}^{norm} \quad (3.63)$$

- Qualquer elemento negativo de  $\Lambda_g^k$  é forçado a zero.
- $\Delta \mathbf{u}_g^k$  é calculado de acordo com a equação 3.58.

- Aplica-se o filtro em  $\Delta \mathbf{u}_g^k$

$$\Delta \mathbf{u}_g^k = (1 - \alpha)\Delta \mathbf{u}_g^k + \alpha \Delta \mathbf{u}_g^{k-1} \quad (3.64)$$

O processo é iterativo e aquelas ações de controle que não afetam a restrição acabam tendo um operador de Lagrange nulo devido a restrição  $\Lambda_1^k \geq \mathbf{0}$ . Deve-se observar que o procedimento iterativo permite que os valores positivos de  $\Lambda_1^k$  aumentem ou diminuam para atender a restrição sempre se mantendo não negativos. As figuras 3.13, 3.14e 3.15 mostram a resposta obtida com controle MPC DMC centralizado e distribuído para uma restrição em  $y_2$ ,  $y_2 \leq 0.26$ . Em todas as figuras apresenta-se na coluna à esquerda as saídas no topo e as ações de controle na base. Na coluna da direita apresenta-se uma ampliação na região onde a restrição está ativa no topo, e os operadores de Lagrange na base.

A figura 3.13 mostra o resultado de simulação para o MPC centralizado com uma restrição em  $y_2$ ,  $y_2 \leq 0.26$ . Neste caso são utilizados somente 15 multiplicadores de Lagrange,  $p = 15$ . A figura 3.14 mostra a resposta obtida com a aplicação do controle MPC distribuído proposto usando 35 trocas de informação entre os agentes enquanto que a figura 3.15 apresenta a resposta quando o número de troca de informações utilizado foi 50. Fica evidente que o aumento do número de troca de informações melhora a resposta. O resultado obtido com 35 trocas de informação é similar aquele obtido com o MPC centralizado enquanto que a resposta resultante da aplicação do algoritmo distribuído com 50 trocas de informação apresenta um comportamento melhor. Percebe-se que a resposta com o algoritmo distribuído, além de atender a restrição, segue melhor a referência e apresenta uma perturbação menor na saída  $y_2$ .

Uma possível razão para esse resultado é que o algoritmo distribuído utiliza um número de multiplicadores de Lagrange muito maior do que o algoritmo *quadpro* do Matlab. A técnica de calcular um vetor com os multiplicadores de Lagrange para cada agente a fim de anular o erro projetado resulta em um número muito grande de multiplicadores de Lagrange o que acaba resultando em uma melhor resposta.

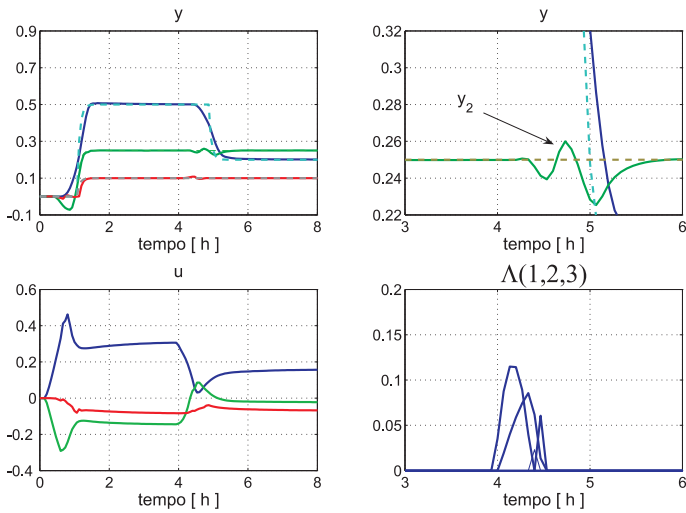


Figura 3.13: Resposta utilizando MPC centralizado com restrição em  $y_2, y_2 \leq 0.26$

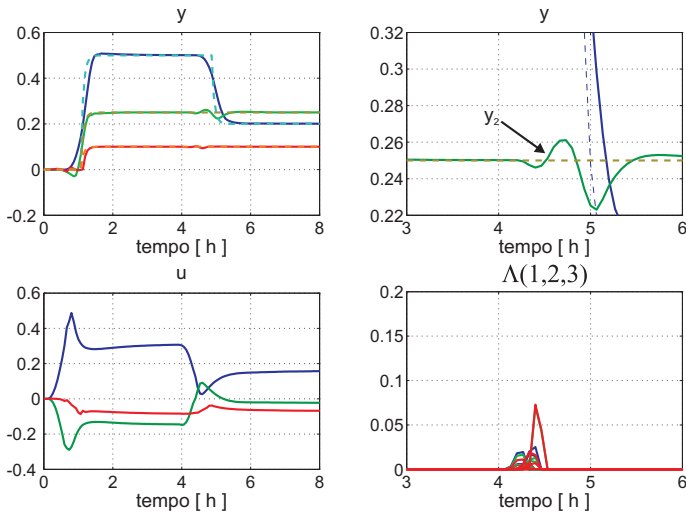


Figura 3.14: Resposta utilizando MPC distribuído com 35 trocas de informação e restrição em  $y_2, y_2 \leq 0.26$

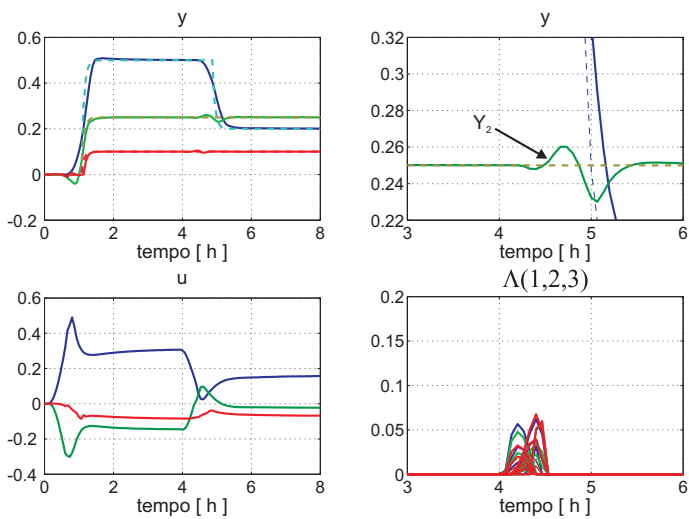


Figura 3.15: Resposta com MPC distribuído com 50 trocas de informação e restrição em  $y_2$ ,  $y_2 \leq 0.26$

### 3.5 Conclusões e desenvolvimentos futuros

A metodologia apresentada buscou resolver o problema de controle MPC multivariável de forma distribuída frente as restrições tipicamente tratadas na indústria. Acredita-se que esta técnica permitirá a utilização de controle preditivo de forma mais intensa principalmente onde já se utilizam sistemas de controle via redes fieldbus, por exemplo. Em uma rede Foundation Fieldbus, por exemplo, um bloco funcional poderia ser oferecido que, quando instanciado em diferentes instrumentos permitiria a obtenção da lei de controle do MPC através da troca de informações no barramento H1 da rede. Uma solução MPC desse tipo permitiria uma adaptação do algoritmo à um aumento da planta de forma relativamente simples já que novos blocos poderiam ser instanciados com comunicações com outros blocos conforme a natureza da solução. Para o caso sem restrições apresentou-se as condições necessárias para a estabilidade do algoritmo. Existem entretanto diversos aspectos que precisam ser estudados com mais profundidade. Na sequência do trabalho pretende-se

- desenvolver técnicas que incorporem garantia de estabilidade para a solução obtida com o processo iterativo dos agentes,
- aplicar as técnicas desenvolvidas no capítulo 4 para o tratamento de erro de modelagem e acrescentar técnicas de identificação em malha fechada que permitam a aplicação da técnica em plantas com pouco conhecimento dos modelos dinâmicos. Os agentes teriam a capacidade de identificar novos modelos na medida em que determinassem índices de desempenho com potencial para melhorias com os modelos atuais,
- estudar o comportamento do sistema frente a falhas de comunicação, falhas nos atuadores da camada regulatória, etc,
- desenvolver técnicas para diminuir o número de troca de informações. Estudar a influência do número de troca de informações frente a perturbações, seguimento de referência, etc,
- estudar a formulação para aplicação de NMPC (Nonlinear MPC).



# Capítulo 4

## MPC Prático para sistemas não lineares - PNMPC

### 4.1 Introdução

Desde seu surgimento a técnica de controle preditivo para sistemas lineares vem se tornando cada dia mais popular na indústria, principalmente depois do surgimento do Controle Preditivo DMC. A aplicação de Controle Preditivo requer a determinação de um modelo do processo. Como a maioria dos processos são efetivamente não lineares recorre-se a técnicas de linearização para a obtenção do modelo. Para muitos processos este procedimento é aceitável, seja pelo nível de não linearidade do processo ser pequeno ou pelo fato da planta operar sempre em uma região muito próxima do ponto de operação utilizado na linearização do modelo. Seja um processo sem acoplamento direto entrada-saída descrito por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $\mathbf{x}$  é um vetor com os estados do processo e  $\mathbf{y}$  um vetor com as saídas. Os pontos de equilíbrio do processo são obtidos fazendo-se  $\dot{\mathbf{x}} = 0$ , ou  $f(\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}) = 0$  e  $\mathbf{y}_{eq} = h(\mathbf{x}_{eq})$ , onde  $\mathbf{y}_{eq}$ ,  $\mathbf{x}_{eq}$ ,  $\mathbf{u}_{eq}$  são respectivamente as saídas, os estados e as entradas nos pontos de equilíbrio do sistema. Para um ponto de equilíbrio na origem, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}} \\ \mathbf{B} &= \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}} \\ \mathbf{C} &= \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_{eq}, \mathbf{u}_{eq}}\end{aligned}\tag{4.3}$$

Na equação 4.3 a matriz  $\mathbf{A}$  é conhecida como o Jacobiano de  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Seus autovalores definem a estabilidade dos pontos de equilíbrio  $\mathbf{x}_{eq}$ ,  $\mathbf{u}_{eq}$ .

O modelo representado na forma de equações de estado contínua pela equação 4.2 pode ser convertido na forma de equações de estado discreta ou na forma de função de transferência.

A linearização pode também ser realizada utilizando-se o conceito de variável desvio onde se aplica uma mudança de variáveis para levar o equilíbrio à origem.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\delta &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq}, \\ \mathbf{u}_\delta &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{eq}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Neste caso pode-se igualmente descrever o sistema pela equação de estado para pontos de equilíbrio não triviais,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_\delta &= \mathbf{A}\mathbf{x}_\delta + \mathbf{B}\mathbf{u}_\delta, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_{eq} + \mathbf{C}\mathbf{x}_\delta.\end{aligned}\tag{4.5}$$

A técnica de linearização em pontos de equilíbrio do sistema tem sido aplicada principalmente de duas formas. A forma tradicional considera o modelo linearizado invariante e utiliza-o para fazer as predições. Uma forma mais elaborada consiste em atualizar o

modelo a cada instante de amostragem e considerá-lo invariante ao longo do horizonte de predição.

## 4.2 Metodologias de MPC para Processos Não Lineares

Existe uma grande quantidade de técnicas MPC que direta ou indiretamente tratam sistemas não-lineares [55]. Uma possível classificação destas técnicas as divide em 3 grupos: (a) as que utilizam diretamente um modelo não linear genérico e um algoritmo de otimização não linear de propósito geral; (b) as que utilizam modelos não lineares particulares e métodos de otimização específicos para o modelo escolhido; (c) as que utilizam um ou vários modelos lineares para representar o processo e algoritmos de otimização lineares. Evidentemente as vantagens de uma ou outra alternativa estão diretamente relacionadas ao compromisso desempenho-custo computacional. Nesta seção discute-se, com uma visão prática, as vantagens e desvantagens de algumas destas técnicas, para fornecer subsídios ao projetista na hora de escolher uma ou outra metodologia.

### 4.2.1 MPC com modelos de predição não-linear na Função Objetivo

Uma abordagem natural é a utilização das predições na função objetivo empregando o modelo não-linear. A minimização da função objetivo é realizada com programas de otimização especializados na solução de funções não-lineares como Programação Não Linear ou *Sequential Quadratic Programming* (SQP), etc. São preservadas as características de horizonte deslizante e a repetição da otimização a cada período de amostragem. O problema de otimização a ser resolvido pode em geral ser colocado como

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \arg \min \quad & f(\mathbf{W}, \overleftarrow{\mathbf{Y}}, \overleftarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \\ \text{Sujeito a :} \quad & \\ & h(\mathbf{u}) = 0, \\ & g(\mathbf{u}) \leq 0, \text{ onde} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$\mathbf{W}$  é o vetor com as referências futuras,  $\overleftarrow{\mathbf{Y}}$  é o vetor com as saídas presentes e passadas,  $\overleftarrow{\mathbf{u}}$  é o vetor com as entradas passadas e  $\mathbf{u}$  é o vetor com as entradas presente e futuras. Além disso,  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  e  $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$  são funções contínuas e diferenciáveis.

Do ponto de vista prático a principal vantagem deste método reside no uso de um modelo não linear, que permite em geral, obter previsões muito próximas as saídas reais da planta. Como desvantagens devem citar-se as questões iterativas dos métodos de otimização, a incerteza no tempo que levam para entregar uma resposta, a convergência, as soluções em mínimos locais, etc. que fazem com que sua utilização para controle em tempo real seja ainda pouco difundida. Alguns deste pontos são discutidos em [56].

### 4.2.2 Métodos baseados em modelos particulares

Uma forma de obter uma solução mais simples que a correspondente ao modelo não linear genérico consiste em utilizar modelos não lineares particulares como por exemplo Séries de Volterra ou modelos de Hammerstein [57, 58]. Estas alternativas são interessantes na prática quando o caso estudado enquadra-se bem na aproximação selecionada. O compromisso entre complexidade de cálculo e desempenho é novamente o fator determinante da escolha. A otimização nestes casos pode ser mais simples que no caso geral. Do ponto de vista prático é importante notar que o uso de um modelo mais complexo que represente melhor a dinâmica do processo real somente será vantajoso quando o erro de modelagem for pequeno. Em outros casos a des-sintonia do controlador necessária para manter a robustez pode eliminar a vantagem do uso de um melhor modelo.

### 4.2.3 Métodos baseados em linearizações

A terceira abordagem consiste em utilizar uma versão linearizada do modelo para a síntese do controlador. Normalmente as formulações LMPC incorporam procedimentos de linearização em vários pontos de operação e uma técnica de tratamento de erro de modelagem introduzido. Entretanto a perda no desempenho do sistema

controlado será proporcional as diferenças entre o modelo e o processo. Diversas abordagens baseadas em simplificações, linearizações e LMPC tem sido propostas. Algumas delas são analisadas no que segue.

## Ponderação de múltiplos modelos lineares

Para um determinado modelo não linear representado por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (4.7)$$

podem-se obter modelos lineares nos equilíbrios do sistema. Estes equilíbrios são definidos pelo conjunto de pontos  $\mathbf{P} = \{(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \text{ s. a } \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = 0\}$ . Um modelo linear pode ser obtido ao redor de um equilíbrio  $(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i) \in \mathbf{P}$  como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^i(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i) + \mathbf{B}^i(\mathbf{u} - \mathbf{u}^i) \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x}^i) + \mathbf{C}^i(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i), \text{ onde}\end{aligned}\quad (4.8)$$

$\mathbf{A}^i = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i)}$ ,  $\mathbf{B}^i = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i)}$  e  $\mathbf{C}^i = \frac{\partial h(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i)}$ . Os modelos contínuos obtidos tem um equivalente discreto com matizes  $\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d$ . Em algumas condições, o modelo não linear da planta pode ser recuperado pela combinação de  $N$  modelos politópicos

$$[\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d] = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i [\mathbf{A}_d^i, \mathbf{B}_d^i], \text{ onde } \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i = 1 \quad (4.9)$$

Esta ideia pode ser explorada no contexto de controle MPC robusto, MPC adaptativo ou MPC escalonado. Em [59], [60] e [61] discute-se a utilização de múltiplos modelos lineares com enfoque na proposta de controle MPC robusto. Em [62] discute-se a utilização de múltiplos modelos em uma proposta de MPC escalonado. Em [63] um esquema adaptativo utilizando MPC DMC é apresentado para um sistema de uma entrada e uma saída. O custo computacional e o desempenho destes métodos está diretamente relacionado ao número de modelos necessários e aos procedimentos de ponderação, que em geral não são simples de generalizar.

## Método min-max

Este método foi desenvolvido para sistemas lineares que apresentam comportamentos dependentes de parâmetros variáveis no tempo ou perturbações e pode ser usado para processos não lineares quando estes são representados aproximadamente por um conjunto de modelos lineares. A filosofia utilizada na técnica min-max é determinar a ação de controle que minimiza uma função objetivo para o cenário em que o conjunto de perturbações e incertezas a maximizam. A função objetivo penaliza o desvio do comportamento predito pelo modelo e aquele desejado. Considerando o conjunto de variáveis incertas ou perturbáveis como  $\Theta$ , pode-se escrever o problema da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \arg \min J'(\mathbf{W}, \overleftarrow{\mathbf{Y}}, \overleftarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) \\ J' &= \arg \max J(\mathbf{W}, \overleftarrow{\mathbf{Y}}, \overleftarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \Theta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

sujeito às restrições nas variáveis de controle e de processo. Esta técnica é considerada custosa computacionalmente pois, dependendo do número de variáveis incertas e dos horizontes de predição e controle pode haver uma explosão de combinações a serem investigadas para a determinação do máximo. A técnica de otimização min-max surgiu de pesquisas na área da teoria dos jogos dinâmicos. Em [64], [65], [66] e [67] propõe-se a utilização da otimização min-max em MPC utilizando modelos baseados na resposta ao impulso. Outros autores desenvolveram algoritmos MPC utilizando a técnica de otimização min-max para sistemas representados por equações de estados. Em um trabalho recente nesta área, [68] propõe-se uma técnica MPC baseada em otimização min-max mas que sugere uma forma de diminuir o custo computacional. No lugar de buscar o máximo da função custo considerando todas as combinações possíveis para o conjunto de incertezas e o horizonte de predição, os autores mostram uma técnica onde se determina um limite superior (*upper bound*) para a maximização da função custo que será então minimizada.

Assim, esta abordagem não se apresenta interessante do ponto de vista prático dado que não se mostra computacionalmente mais atrativa que a de NMPC.

## Linearizações a cada instante de amostragem

Muitas pesquisas nesta área visam a resolução, por métodos alternativos, do problema de otimização não linear. Em alguns casos, como em [69], estende-se a ideia de resposta livre  $y_l$  e forçada  $y_f$  usando um modelo não linear para o cálculo de  $y_l$  e um modelo linear para  $y_f$  supondo que esta última pode convergir a zero num procedimento iterativo. Desta forma o problema de otimização não linear pode ser transformado numa sequência de problemas de otimização linear. Esta metodologia pode funcionar adequadamente em alguns casos práticos sem necessidade de muitas iterações mas não garante a obtenção do ótimo nem a convergência do processo iterativo [70]. Em outros casos utilizam-se linearizações sucessivas em torno ao ponto de operação transformando o modelo num sistema variante no tempo, mas que permite utilizar algoritmos mais simples para minimizar  $J$  [71, 72].

Em todos os casos anteriores onde são usadas aproximações trata-se de compensar as perdas no desempenho com a maior velocidade de processamento e simplicidade dos algoritmos. Assim, pode-se considerar como melhor aquele algoritmo que consiga o melhor compromisso desempenho-simplicidade-velocidade. Como se verá na próxima seção, este objetivo pode ser atingido com uma abordagem prática e simples de NMPC.

## 4.3 Desenvolvimento da técnica PNMPC

Conforme discutido no apêndice A, os algoritmos de controle preditivo para sistemas lineares como o DMC e o GPC utilizam a representação do vetor de predições ao longo do horizonte  $p$ ,  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , como uma função do vetor com  $m$  mudanças na ação de controle  $\Delta \mathbf{u}$ ,

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{F} + \mathbf{G}\Delta \mathbf{u}, \quad (4.11)$$

embora o vetor de resposta livre  $\mathbf{F}$  e a matriz  $\mathbf{G}$  sejam obtidas por meios diferentes em cada algoritmo. Os modelos lineares dos processos permitem esta forma simples de calcular  $\tilde{\mathbf{Y}}$  utilizando o princípio da superposição. Para sistemas representados por modelos não lineares este princípio não pode ser aplicado mas uma aproximação de  $\tilde{\mathbf{Y}}$  pode ser obtida utilizando uma nova interpretação da equação 4.11 como é explicado na sequência.

A técnica proposta neste trabalho difere das propostas anteriores principalmente pelo fato de utilizar modelos linearizados independentes dos pontos de equilíbrio do sistema. Deve-se perceber que ao se calcular as previsões, para um sistema linear ou não linear, os únicos elementos que podem mudar os valores das previsões são os elementos do vetor incremento de controle  $\Delta \mathbf{u}$ .

Busca-se uma forma de descrever a evolução dos estados do sistema ao longo do horizonte de previsão utilizando uma representação linear dos estados em relação aos incrementos de controle futuros. Para isto não se utiliza o conceito de ponto de equilíbrio. Assume-se que as previsões  $\mathbf{Y}_p$  dependem das entradas passadas  $\overleftarrow{\mathbf{u}}$ , dos estados presentes e passados  $\overleftarrow{\mathbf{y}}$  e dos incrementos de entradas futuros  $\Delta \mathbf{u}$ ,

$$\mathbf{Y}_p = f(\overleftarrow{\mathbf{y}}, \overleftarrow{\mathbf{u}}, \Delta \mathbf{u}). \quad (4.12)$$

O Vetor com as previsões é reescrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_p &= \mathbf{F} + \mathbf{G}_{\text{PNMPC}} \Delta \mathbf{u}, & (4.13) \\ \text{onde} \\ \mathbf{F} &= f(\overleftarrow{\mathbf{y}}, \overleftarrow{\mathbf{u}}), \\ \mathbf{G}_{\text{PNMPC}} &= \frac{\partial \mathbf{Y}_p}{\partial \Delta \mathbf{u}} \end{aligned}$$

A matriz  $\mathbf{G}_{\text{PNMPC}}$  é o Jacobiano de  $\mathbf{Y}_p$ .

Desenvolve-se aqui uma forma de representação das previsões que pode ser utilizada tanto para sistemas representados por modelos lineares como para aqueles representados por modelos não lineares desde que os estados sejam contínuos e diferenciáveis em relação as entradas.

Seja  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  e  $\mathbf{w}$  um vetor de funções contínuas e diferenciáveis de  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ w_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ w_p(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

é um vetor  $p \times 1$  das funções de  $m$  variáveis do vetor

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m]^T. \quad (4.15)$$



Para pequenas variações de  $\mathbf{x}$  igual a  $\Delta\mathbf{x}$  em torno de  $\mathbf{x}_o$ ,

$$\Delta\mathbf{x} = [ \Delta x_1 \quad \Delta x_2 \quad \dots \quad \Delta x_m ]^T, \quad (4.16)$$

pode-se obter uma aproximação de  $\mathbf{w}(\mathbf{x}_o + \Delta\mathbf{x})$  utilizando-se a série de Taylor onde os termos de ordem maiores do que 1 são desprezados.

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_o + \Delta\mathbf{x}) \cong \mathbf{w}(\mathbf{x}_o) + \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{x}_o)\Delta\mathbf{x}, \quad (4.17)$$

onde  $\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{x}}$  é o gradiente de  $\mathbf{w}$  relativo a  $\mathbf{x}$  calculado em  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o$ .

$$\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial w_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial w_p}{\partial x_1} & \frac{\partial w_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial w_p}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_o} \quad (4.18)$$

Seja o sistema dinâmico não linear contínuo e diferenciável com uma entrada e uma saída representado pela equação (4.19):

$$\begin{aligned} y(k) &= f(y(k - n_a), y(k - n_a + 1), \dots, y(k - 1), \\ &\quad u(k - n_u), u(k - n_u + 1), \dots, u(k - 1)), \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde  $n_a$  e  $n_b$  são os maiores atrasos de  $y$  e  $u$  respectivamente. Assume-se que as entradas ocorrerão em um horizonte de controle  $m$ . Neste horizonte aparecem as seguintes entradas

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k - 1) + \Delta u(k) \\ u(k + 1) &= u(k) + \Delta u(k + 1) = u(k - 1) + \Delta u(k) \\ &\quad + \Delta u(k + 1) \\ &\quad \vdots \\ u(k + m - 1) &= u(k - 1) + \Delta u(k) + \Delta u(k + 1) \\ &\quad + \dots + \Delta u(k + m - 1). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Assume-se que as entradas nos instantes posteriores a  $k + m - 1$  sejam iguais a  $u(k + m - 1)$ . Calculando-se as previsões em um horizonte de previsão  $p$  a partir do modelo dado pela equação (4.19) têm-se

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(k+1) &= f(y(k-n_a+1), \dots, y(k), u(k-n_u+1), \dots, u(k)) \\
&\quad (4.21) \\
\tilde{y}(k+2) &= f(y(k-n_a+2), \dots, \tilde{y}(k+1), u(k-n_u+2), \dots, u(k+1)) \\
&\quad \vdots \\
\tilde{y}(k+p) &= f(\tilde{y}(k-n_a+p), \dots, \tilde{y}(k+p-1), u(k-n_u+1), \dots, u(k+m-1))
\end{aligned}$$

Considerando as equações 4.20, o conjunto de equações 4.21 pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(k+1) &= f(y(k-n_a+1), \dots, y(k), u(k-n_u+1), \dots, u(k-1), \Delta u(k)) \\
\tilde{y}(k+2) &= f(y(k-n_a+2), \dots, \tilde{y}(k+1), u(k-n_u+2), \dots, u(k-1), \\
&\quad \Delta u(k), \Delta u(k+1)) \\
&\quad \vdots \\
\tilde{y}(k+p) &= f(\tilde{y}(k-n_a+p), \dots, \tilde{y}(k+p-1), u(k-n_u+1), \dots, u(k-1), \\
&\quad \Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+m-1)) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Observa-se que as predições são funções de  $\Delta u(k)$ ,  $\Delta u(k+1)$ , ...,  $\Delta u(k+m-1)$ , das entradas passadas e das saídas presentes e passadas. Se denominarmos o conjunto de entradas passadas de  $y_{passado}$  e as entradas atuais e passadas de  $y_{passado}$  então as predições podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(k+1) &= f(y_{passado}, u_{passado}, \Delta u(k)) \quad (4.23) \\
\tilde{y}(k+2) &= f(y_{passado}, u_{passado}, \Delta u(k), \Delta u(k+1)) \\
&\quad \vdots \\
\tilde{y}(k+p) &= f(y_{passado}, u_{passado}, \Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+m-1))
\end{aligned}$$

Nota-se claramente que os únicos elementos com poder de variar as saídas futuras são os incrementos da ação de controle  $\Delta u(k)$ ,  $\Delta u(k+1)$ , ..., e  $\Delta u(k+m-1)$ .

Definindo-se

$$\begin{aligned}
 \overleftarrow{\mathbf{Y}} &= \text{Conjunto de valores passados e presente de } y. \\
 \overleftarrow{\mathbf{U}} &= \text{Conjunto de valores passados de } u \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u} \\
 \mathbf{u}_0 &= u(k-1)\mathbf{1} \\
 \delta \mathbf{u} &= \mathbf{D}\Delta \mathbf{u} \\
 \Delta \mathbf{u} &= \left[ \Delta u(k) \quad \Delta u(k+1) \quad \dots \quad \Delta u(k+m-1) \right]^T,
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde,  $\mathbf{1}$  é um vetor de dimensão  $m \times 1$  com todos elementos iguais a um e  $\mathbf{D}$  é uma matriz triangular inferior  $m \times m$  com todos elementos não nulos iguais a um. As predições podem ser escritas como

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\overleftarrow{\mathbf{Y}}, \overleftarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{u}). \tag{4.25}$$

Utilizando o mesmo procedimento que na equação 4.17,

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\overleftarrow{\mathbf{Y}}, \overleftarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} \delta \mathbf{u} \tag{4.26}$$

Usando as equações 4.24:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{Y}}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{Y}}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \tag{4.27}$$

Nomeando  $\mathbf{F} = \mathbf{f}(\overleftarrow{\mathbf{Y}}, \overleftarrow{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_0)$  e  $\mathbf{G}_{\text{PNMPC}} = \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{Y}}}{\partial \Delta \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0}$ , onde  $\mathbf{F}$  é o vetor de predições que seria obtido para  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{G}_{\text{PNMPC}}$  é o gradiente das saídas previstas com relação ao vetor dos incrementos de controle  $\Delta \mathbf{u}$  calculado para  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ , a seguinte representação compacta é obtida

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{F} + \mathbf{G}_{\text{PNMPC}} \Delta \mathbf{u}. \tag{4.28}$$

$\mathbf{G}_{\text{PNMPC}}$  é a matriz dinâmica generalizada que pode ser utilizada para sistemas lineares e para sistemas não lineares contínuos e

diferenciáveis.

$$\mathbf{G}_{\text{PNMPC}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{y}_{k+1}}{\partial \Delta u_k} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \tilde{y}_{k+2}}{\partial \Delta u_k} & \frac{\partial \tilde{y}_{k+2}}{\partial \Delta u_{k+1}} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \tilde{y}_{k+p}}{\partial \Delta u_k} & \frac{\partial \tilde{y}_{k+p}}{\partial \Delta u_{k+1}} & \dots & \frac{\partial \tilde{y}_{k+p}}{\partial \Delta u_{k+m-1}} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

A expressão 4.28 pode ser escrita para um sistema de uma entrada e uma saída como

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(k+1) \\ \tilde{y}(k+2) \\ \vdots \\ \tilde{y}(k+p) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f_1(y, u)_{\text{passado}} \\ f_2(y, u)_{\text{passado}} \\ \vdots \\ f_p(y, u)_{\text{passado}} \end{bmatrix} + \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{y}(k+1)}{\partial \Delta u(k)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \tilde{y}(k+2)}{\partial \Delta u(k)} & \frac{\partial \tilde{y}(k+2)}{\partial \Delta u(k+1)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{y}(k+p)}{\partial \Delta u(k)} & \frac{\partial \tilde{y}(k+p)}{\partial \Delta u(k+1)} & \dots & \frac{\partial \tilde{y}(k+p)}{\partial \Delta u(k+m-1)} \end{bmatrix}_{\Delta \mathbf{u}=0} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix}$$

Nota-se neste caso a forma triangular inferior da matriz Jacobiano devido a causalidade do sistema, ou seja

$$\frac{\partial \tilde{y}(k+j)}{\partial \Delta u(k+i)} = 0 \quad \text{para } i \geq j \quad (4.31)$$

A expressão 4.30 representa a equação 4.28 de forma mais detalhada onde

- $\tilde{\mathbf{Y}}$  é o vetor  $p \times 1$  contendo as predições no horizonte de predição  $p$ .
- $\mathbf{F}$  é o vetor  $p \times 1$  contendo as saídas preditas supondo que as ações de controle no horizonte de controle  $m$  são mantidas iguais a ação de controle no instante  $k-1$ , ou  $u(k) = u(k+1) = \dots = u(k+m-1) = u(k-1)$ .
- $\mathbf{G}_{\text{PNMPC}}$  é a versão não linear da matriz dinâmica utilizada no Controle Preditivo DMC ou a versão generalizada válida para sistemas lineares ou não lineares (p/ sistemas contínuos e diferenciáveis). Sua dimensão é  $p \times m$ .

- $\Delta \mathbf{u}$  é o vetor  $m \times 1$  contendo os incrementos nas ações de controle no horizonte de controle  $m$ .

É importante observar que para um sistema linear causal invariante no tempo e sem acoplamento direto entrada saída, a matriz dinâmica utilizada no Controle Preditivo DMC ou GPC é igual aquela obtida com a matriz Gradiente definida na equação (4.30).

A matriz dinâmica do algoritmo DMC ou GPC é normalmente obtida com os elementos da resposta a um degrau unitário aplicado no instante  $k$  a um sistema com condições iniciais nulas. Ou seja

$$\begin{aligned} y(k+j) &= 0 \text{ para } j \leq 0 \\ u(k+j) &= 1 \text{ para } j \geq 0, \text{ ou} \\ \Delta u(k+j) &= 1 \text{ para } j = 0 \\ \Delta u(k+j) &= 0 \text{ para } j \neq 0 \end{aligned}$$

Seja uma predição  $\tilde{y}_{k+j}$ .

$$\tilde{y}_{k+j} = f(\tilde{y}(k+j-1), \dots, \tilde{y}(k+1), u(k)) \quad (4.32)$$

A derivada parcial  $\frac{\partial \tilde{y}_{k+j}}{\partial \Delta u_k}$  é definida como

$$\frac{\partial \tilde{y}_{k+j}}{\partial \Delta u_k} = \lim_{\Delta u_k \rightarrow 0} \frac{\tilde{y}_{k+j}(u_{k-1} + \Delta u_k) - \tilde{y}_{k+j}(u_{k-1})}{\Delta u_k} \quad (4.33)$$

Como  $\tilde{y}_{k+j}$  é uma função linear de  $u(k)$  e portanto de  $u(k-1)$  e  $\Delta u(k)$ , então  $\tilde{y}_{k+j}(u_{k-1} + \Delta u_k) = \tilde{y}_{k+j}(u_{k-1}) + \tilde{y}_{k+j}(\Delta u_k)$  e a derivada pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \tilde{y}_{k+j}}{\partial \Delta u_k} = \lim_{\Delta u_k \rightarrow 0} \frac{\tilde{y}_{k+j}(\Delta u_k)}{\Delta u_k} \quad (4.34)$$

Ainda devido a relação linear entre  $\tilde{y}_{k+j}$  e  $\Delta u_k$  haveria uma indeterminação na expressão  $\frac{\tilde{y}_{k+j}(\Delta u_k)}{\Delta u_k}$  do tipo  $\frac{0}{0}$ . A solução do cálculo do limite poderia ser obtida aplicando a regra de l'Hôpital: Se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow c} g(x) &= 0, \text{ então} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (4.35)$$

se existente. Neste caso devido ao numerador e denominador serem funções lineares de  $\Delta u(k)$  isto equivale numericamente a se tomar o limite para  $\Delta u_k \rightarrow 1$ . Assim

$$\frac{\partial \tilde{y}_{k+j}}{\partial \Delta u_k} = \frac{\tilde{y}_{k+j}(\Delta u_k = 1)}{1} \quad (4.36)$$

A expressão 4.36 representa a resposta do sistema no instante  $(k+j)$  ao degrau unitário no instante  $k$  que é por definição o valor do elemento  $\mathbf{G}(j, 1)$  da matriz dinâmica do algoritmo DMC.

Como para um sistema linear e invariante no tempo a resposta ao degrau unitário aplicado no instante  $k+j$  observado no instante  $k+j+1$  é igual à resposta do sistema a um degrau aplicado no instante  $k+j+1$  observado no instante  $k+j+2$ , a matriz Gradiente para sistemas lineares tem seus elementos da primeira coluna repetidos nas diagonais. Isto é, para uma matriz  $\mathbf{G}$  com  $p > m$ ,  $\mathbf{G}(1, 1) = \mathbf{G}(2, 2) = \dots = \mathbf{G}(m, m)$ ,  $G(2, 1) = G(3, 2) = \dots = \mathbf{G}(m+1, m)$ , etc.

Outra maneira mais simples de demonstrar que a matriz Jacobiano  $\mathbf{G}_{PNMPC}$  equivale a matriz dinâmica  $\mathbf{G}$  do algoritmo DMC ou GPC para sistemas lineares é utilizar a equação 4.37 apresentada no apêndice A.

Nesta equação as predições são calculadas através da convolução entre as respostas ao degrau unitário e os incrementos de entrada.

$$\tilde{y}(k+j/k) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(k+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(k+j-i) + \tilde{\eta}(k+j/k) \quad (4.37)$$

Nota-se claramente que o segundo termo depois do sinal de igualdade corresponde ao efeito das variações de controle para instantes anteriores ao instante  $k$ . Considerando as condições iniciais nulas e uma entrada igual a um degrau unitário no instante

$k$  as predições se resumem em

$$\tilde{y}(k + j/k) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(k + j - i) + \tilde{\eta}(k + j/k),$$

ou

$$\tilde{y}(k + 1) = g_1 \Delta u(k)$$

$$\tilde{y}(k + 2) = g_1 \Delta u(k + 1) + g_2 \Delta u(k)$$

$\vdots$

$$\tilde{y}(k + j) = g_1 \Delta u(k + j - 1) + g_2 \Delta u(k + j - 2) + \dots + g_j \Delta u(k)$$

Fica evidente que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{y}(k + 1)}{\partial \Delta u(k)} &= g_1, \\ \frac{\partial \tilde{y}(k + 2)}{\partial \Delta u(k)} &= g_2, \\ \frac{\partial \tilde{y}(k + 2)}{\partial \Delta u(k + 1)} &= g_1, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \tilde{y}(k + j)}{\partial \Delta u(k)} &= g_j. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Seja o sistema dinâmico representado pela equação a diferenças

$$y(k) = ay(k - 1) + bu(k - 1) \quad (4.39)$$

Para este sistema pretende-se determinar a matriz  $\mathbf{G}$  utilizada pelo algoritmo DMC e GPC e compará-la com a matriz obtida pelo método generalizado proposto. Para isso avalia-se a resposta do sistema a um degrau unitário no instante  $k$ .

Um degrau unitário em  $k$  produz as seguintes entradas no horizonte de controle  $m$ ,  $u(k) = 1, u(k + 1) = 1, \dots, u(k + m - 1) = 1$  e  $\Delta u(k) = 1, \Delta u(k + 1) = 0, \dots, \Delta u(k + m - 1) = 0$ . A predição da resposta do sistema ao degrau unitário no instante  $k$  para

condição inicial nula ( $y(k) = 0$ ) é

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}(k+1) &= ay(k) + bu(k) = b & (4.40) \\
 \tilde{y}(k+2) &= ay(k+1) + bu(k+1) = ab + b \\
 \tilde{y}(k+3) &= ay(k+2) + bu(k+2) = a(ab + b) + b = a^2b + ab + b \\
 &\vdots \\
 \tilde{y}(k+p) &= a^{k+p-1}b + a^{k+p-2}b + \dots + ab + b
 \end{aligned}$$

Reescrevendo-se as previsões de forma algébrica para  $k = k + 1$  até  $k = k + p$  e supondo  $m = p$  para simplificar, têm-se:

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}(k+1) &= bu(k) = b(u(k-1) + \Delta u(k)) & (4.41) \\
 &= b\Delta u(k) \\
 \tilde{y}(k+2) &= a\tilde{y}(k+1) + bu(k+1) \\
 &= ab\Delta u(k) + b(u(k) + \Delta u(k+1)) \\
 &= ab\Delta u(k) + b\Delta u(k) + b\Delta u(k+1) \\
 &= (ab + b)\Delta u(k) + b\Delta u(k+1) \\
 \tilde{y}(k+3) &= a\tilde{y}(k+2) + bu(k+2) \\
 &= a(ab + b)\Delta u(k) + ab\Delta u(k+1) + b\Delta u(k) \\
 &\quad + b\Delta u(k+1) + b\Delta u(k+2) \\
 &= (a^2b + ab + b)\Delta u(k) + (ab + b)\Delta u(k+1) + b\Delta u(k+2) \\
 &\vdots \\
 \tilde{y}(k+p) &= (a^{p-1}b + a^{p-2}b + \dots + ab + b)\Delta u(k) + \dots \\
 &\quad + (ab + b)\Delta u(k+m-2) + b\Delta u(k+m-1)
 \end{aligned}$$

Utilizando-se a resposta ao degrau para a montagem da matriz  $\mathbf{G}$  do Controle Preditivo DMC temos

$$\mathbf{G}_{DMC} = \begin{bmatrix}
 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & ab + b & b & 0 & 0 & 0 \\
 & a^2b + ab + b & ab + b & b & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 a^{p-1}b + a^{p-2}b + \dots + ab + b & \dots & a^2b + ab + b & ab + b & b &
 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$



É evidente que utilizando-se a expressão do Gradiente dado pela equação (4.30) sobre as predições apresentadas pela equação (4.41) conclui-se que  $\mathbf{G}_{PNMPC} = \mathbf{G}_{DMC}$  para o exemplo de sistema linear apresentado.

### 4.3.1 A obtenção de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}_{PNMPC}$

A técnica de controle preditivo baseado em modelo pressupõe a disponibilidade de um modelo matemático do processo. Neste trabalho estuda-se a aplicação de controle preditivo a sistemas amostrados a uma taxa de amostragem  $T_s$ . Devido a grande variedade de estruturas para representação de processos como redes neurais, modelos NARMAX, equações a diferenças não lineares, etc., torna-se pouco prático propor uma solução de controle baseado em expressões matemáticas para  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}_{PNMPC}$ . Preferiu-se a sua obtenção de forma numérica. Para isso pressupõe-se simplesmente que pode-se obter um algoritmo que calcule o vetor com as  $p$  predições,  $\mathbf{Y}_p$  quando se fornece os valores das entradas e saídas passadas e o vetor com os  $m$  incrementos de entrada futura  $\Delta\mathbf{u}$  para o caso de um sistema com uma entrada e uma saída, por exemplo. A cada iteração executa-se o seguinte procedimento:

- Obtém-se o vetor  $p \times 1$   $\mathbf{Y}_p^0$  executando o modelo com as entradas e saídas passadas e com  $\Delta\mathbf{u} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ .  $\mathbf{F} = \mathbf{Y}_p^0$ .
- Calcula-se a primeira coluna da matriz  $\mathbf{G}_{PNMPC}$ . Obtém-se o vetor  $p \times 1$   $\mathbf{Y}_p^1$  executando o modelo com as entradas e saídas passadas e com  $\Delta\mathbf{u} = [\epsilon \ 0 \ \dots \ 0]$ , onde  $\epsilon$  é um valor muito pequeno,  $\frac{u_{k-1}}{1000}$ , por exemplo.  

$$\mathbf{G}_{PNMPC}(:, 1) = \frac{\mathbf{Y}_p^1 - \mathbf{Y}_p^0}{\epsilon}$$
- Calcula-se a segunda coluna da matriz  $\mathbf{G}_{PNMPC}$ . Obtém-se o vetor  $p \times 1$   $\mathbf{Y}_p^2$  executando o modelo com as entradas e saídas passadas e com  $\Delta\mathbf{u} = [0 \ \epsilon \ \dots \ 0]$ .  $\mathbf{G}_{PNMPC}(:, 2) = \frac{\mathbf{Y}_p^2 - \mathbf{Y}_p^0}{\epsilon}$ .
- Prossegue-se com o cálculo das demais colunas da matriz  $\mathbf{G}_{PNMPC}$  até a última coluna onde obtém-se o vetor  $\mathbf{Y}_p^m$  executando o modelo com as entradas e saídas passadas e com  $\Delta\mathbf{u} = [0 \ 0 \ \dots \ \epsilon]$ .  $\mathbf{G}_{PNMPC}(:, m) = \frac{\mathbf{Y}_p^m - \mathbf{Y}_p^0}{\epsilon}$ .

### 4.3.2 Obtenção da ação de controle

O vetor com as  $p$  previsões,  $\mathbf{Y}_p$  é representado na forma

$$\mathbf{Y}_p = \mathbf{F} + \mathbf{G}_{\text{PNMPC}}\Delta\mathbf{u}. \quad (4.43)$$

Cada elemento do vetor resposta livre  $\mathbf{F}$  é calculado utilizando-se o modelo de previsão e assumindo  $\Delta\mathbf{u} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$  e recebe o acréscimo do valor de  $\eta(k)$  conforme mostra a figura 4.5. A obtenção da ação de controle é realizada utilizando as técnicas já conhecidas e descritas no apêndice A.

### 4.3.3 Exemplo 1

Alguns dos resultados apresentados nesta seção foram também apresentados em [73] e [49]. O modelo não linear com uma entrada e uma saída mostrado na equação 4.44 é apresentado em [74] onde é controlado com uma técnica de controle MPC iterativa denominada NEPSAC. A figura 4.1 mostra o resultado da aplicação de controle utilizando a técnica PNMPC. Foi aplicado um horizonte de previsão igual a 3 e um horizonte de controle igual a 2. Com estes mesmos parâmetros foi realizado o controle utilizando a técnica iterativa NEPSAC que adota a montagem da matriz  $\mathbf{G}$  utilizando resposta ao degrau. Nota-se que para este modelo e para as referências utilizadas ambas as técnicas funcionaram bem com resultados muito semelhantes.

Para mostrar a diferença entre os dois métodos, além da necessidade de iterações no método NEPSAC, muda-se a referência para um sinal senoidal com amplitude e frequência variantes no tempo.

$$y(k) = \frac{2.5y(k-1)y(k-2)}{(1+y(k-1)^2+y(k-2)^2)} + 0.3\cos(.5(y(k-1) + y(k-2))) + 1.2u(k-1) \quad (4.44)$$

Os resultados são apresentados nas figuras 4.3 e 4.4. Nota-se que o algoritmo PNMPC consegue fazer o seguimento da referência com sucesso enquanto o algoritmo NEPSAC falha logo após o início da variação no sinal de referência. Como mencionado o algoritmo NEPSAC utiliza a resposta ao degrau para realizar as previsões. Este procedimento é uma aproximação muito grosseira

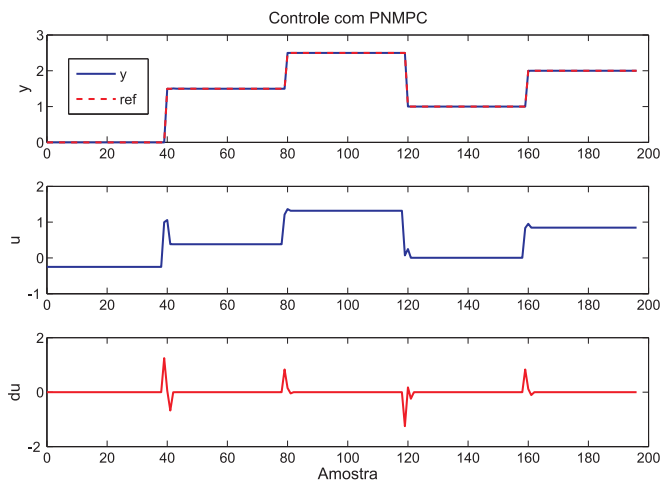


Figura 4.1: Resultados de seguimento de referência com PNMPC

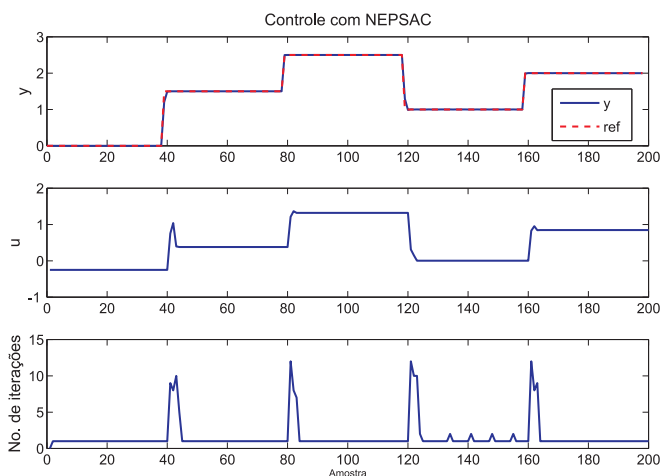


Figura 4.2: Resultados de seguimento de referência com NEPSAC

para a maioria dos sistemas não lineares. Como demonstrado na seção 4.3, os elementos da matriz dinâmica  $\mathbf{G}$  somente são iguais a resposta ao degrau para sistemas lineares. Mesmo que o algoritmo NEPSAC utilize um processo iterativo para a determi-

nação de  $\Delta \mathbf{u}$ , este procedimento baseia-se em uma representação baseada na resposta ao degrau que não se justifica como uma representação de um sistema não linear.

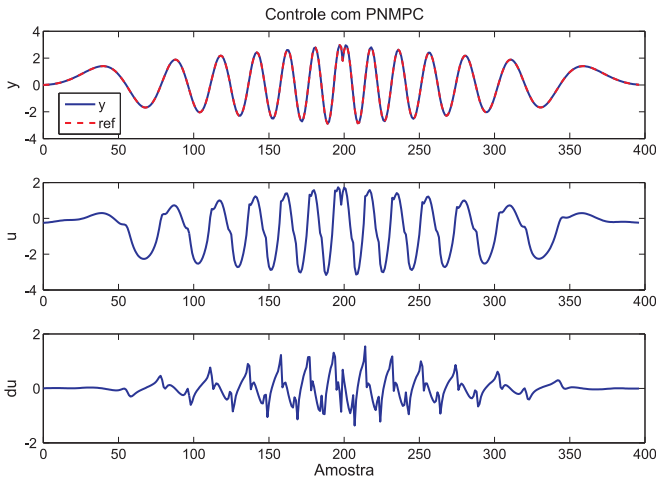


Figura 4.3: Resultados de seguimento de referência com PNMPC

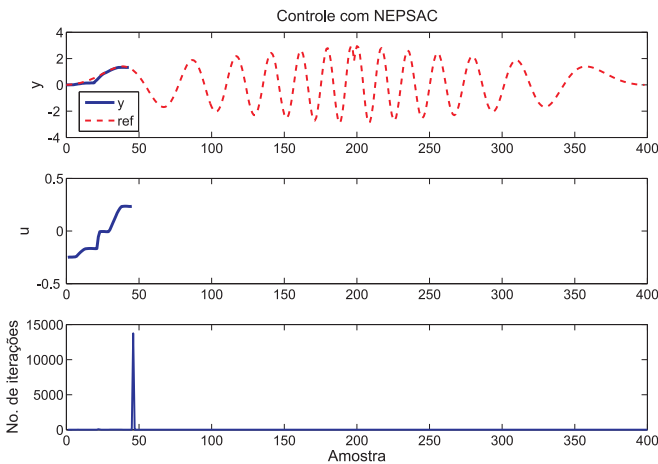


Figura 4.4: Resultados de seguimento de referência com NEPSAC

## 4.4 Erro de predição, ruído e perturbações

Os algoritmos de controle preditivo como DMC e GPC utilizam um mecanismo para corrigir as predições. A técnica de Controle DMC corrige as predições com o erro entre o valor medido da variável controlada e seu valor predito com o modelo no instante  $k$ . Esta técnica aplicada a sistemas lineares garante erro nulo em regime já que o incremento do esforço de controle necessário para a correção do erro no instante  $k$  será o mesmo nos instantes futuros devido a relação linear entre entrada e saída, isto é, o ganho é constante. A aplicação deste mesmo procedimento para a técnica PN MPC aplicada a sistemas não lineares não garante erro nulo em regime já que o ganho varia com o ponto de operação do sistema. O mecanismo de correção das predições adotado neste trabalho é uma versão explícita daquele utilizado pelo algoritmo GPC. Soma-se a cada predição a integral do erro de predição filtrado.

A figura 4.5 mostra o diagrama de blocos da técnica proposta para a correção das predições utilizando-se o algoritmo PN MPC. A cada instante de amostragem calcula-se o erro entre a saída que o preditor calcula que a variável teria no instante  $k$ ,  $\tilde{y}(k/k-1)$  e a saída real da variável no instante  $k$ . O valor de  $\tilde{y}(k/k-1)$  é o primeiro elemento do vetor de predições obtido no instante  $k-1$ . Na discussão a seguir será utilizado o operador atraso/avanço  $q^i$  onde  $i \in \mathbf{Z}$  tal que  $q^{-1}f(k) = f(k-1)$  e  $q^1f(k) = f(k+1)$  conforme [75]. Define-se

$\tilde{y}_{sc}$  = valor predito da saída sem correção,

$y$  = valor real da saída,

$\eta$  = valor da correção a ser somada à saída sem correção,

$e = y - \tilde{y}$  erro entre a saída real  $y$  e a saída predita  $\tilde{y}$ ,

$\epsilon = y - \tilde{y}_{sc}$  erro entre a saída real e a saída sem correção.

Deseja-se que a primeira saída predita  $\tilde{y}(k+1)$  seja tão próxima quanto possível de  $y(k+1)$ . Entretanto pode-se recuar um instante de tempo e montar o problema de controle expresso pela figura 4.5 onde deseja-se encontrar os parâmetros do filtro e a constante de integração  $k_i$  que anulem o erro  $e(k)$ . Observem que

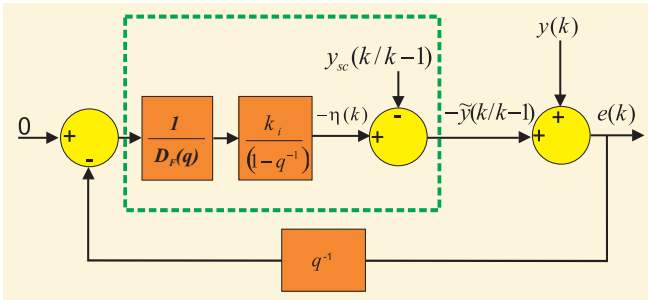


Figura 4.5: Diagrama de Blocos para o tratamento de erro de modelagem e ruído

para isso utilizou-se o erro no instante de amostragem anterior  $e(k-1)$  para obter a correção  $\eta(k)$ .

O erro entre a saída do processo no instante atual e a saída do modelo é filtrado por um filtro passa-baixa  $F = \frac{1}{D_F(q)}$ , integrado e somado à saída prevista pelo modelo no instante seguinte. A técnica PNMP supõe que a integral do erro filtrado é mantida constante durante as previsões calculadas no instante  $k$ . Assumindo que  $\Delta = 1 - q^{-1}$  tem-se

$$y(k) - \tilde{y}(k/k-1) = e(k) \quad (4.45)$$

$$y(q) - (q^{-1}e(q) \frac{k_i}{\Delta} F + \tilde{y}_{sc}(q)) = e(q)$$

$$y(q) - \tilde{y}_{sc}(q) = e(q) \left(1 + q^{-1} \frac{k_i}{1 - q^{-1}} F\right)$$

$$F(q) = \frac{1}{D_F(q)}$$

$$e(q) = \frac{D_F(q)\Delta}{(D_F(q)\Delta + q^{-1}k_i)} (y(q) - \tilde{y}_{sc}(q))$$

Supondo que o sistema em malha fechada seja estável então na vizinhança de um ponto de operação pode-se substituir o operador  $q$  por  $z$  e aplicar o Teorema do valor final.

$$\begin{aligned}
 e(z) &= \frac{D_F(z)\Delta}{(D_F(z)\Delta + z^{-1}k_i)}(y(z) - \tilde{y}_{sc}(z)), \text{ supondo} \\
 y(z) - \tilde{y}_{sc}(z) &= \frac{\delta}{1 - z^{-1}} \\
 e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{D_F(z)\Delta}{(D_F(z)\Delta + z^{-1}k_i)} \frac{\delta}{1 - z^{-1}} \\
 e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{D_F(z)(1 - z^{-1})}{(D_F(z)\Delta + z^{-1}k_i)} \delta = 0 \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

Pode-se perceber que a presença de  $(1 - z^{-1})$  no numerador da equação (4.46) garante erro nulo em regime permanente para uma entrada degrau de valor finito de  $y(1) - \tilde{y}_{sc}(1)$  igual a  $\frac{\delta}{1 - z^{-1}}$ . Além de garantir erro nulo em regime, o tratamento do erro de modelagem deve garantir que a dinâmica do erro apresente um tempo de resposta desejado. Esta característica depende dos polos de  $h(z) = \frac{e(z)}{y(k) - \tilde{y}_{sc}(k)}$  ou das raízes do denominador de  $h(z)$ . Definindo-se  $\varepsilon(k) = y(k) - \tilde{y}_{sc}(k)$  e considerando-se pequenas diferenças entre o modelo e o processo real pode-se escrever a função de transferência entre o erro de modelagem e o erro depois da correção como

$$\begin{aligned}
 h(z) &= \frac{e(z)}{\varepsilon(z)} \quad (4.47) \\
 h(z) &= \frac{D_F(z)(1 - z^{-1})}{D_F(z)(1 - z^{-1}) + z^{-1}k_i}
 \end{aligned}$$

O tratamento do erro de modelagem depende assim da escolha do denominador do filtro  $F$  e do ganho integral  $k_i$ . Um filtro candidato é

$$F(z) = \frac{1}{1 - f_d z^{-1}}, \quad (4.48)$$

que fornece a seguinte função de transferência  $h(z)$ ,

$$h(z) = \frac{z^2 - (1 + f_d)z + f_d}{z^2 - (1 + f_d - k_i)z + f_d} \quad (4.49)$$

Um projeto simples para  $k_i$  e  $f_d$  consiste em comparar o polinômio denominador de  $h(z)$  com um polinômio desejado  $p_d(z)$ . Supondo

um polinômio desejado de segunda ordem criticamente amortecido,

$$\begin{aligned} p_d(z) &= (z - a)^2, \\ p_d(z) &= z^2 - 2az + a^2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Comparando o polinômio denominador de  $h(z)$  da equação 4.49 com o polinômio desejado da equação 4.50, obtém-se as igualdades,

$$\begin{aligned} 1 + f_d - k_i &= 2a \\ f_d &= a^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

O projeto do filtro do preditor consiste em escolher o valor de  $a$  e então determinar  $f_d$  e  $k_i$ .

$$\begin{aligned} f_d &= a^2 \\ k_i &= 1 + a^2 - 2a \end{aligned} \quad (4.52)$$

A escolha de  $a$  tem um impacto na velocidade com que o erro responde à uma perturbação. Quanto menor  $a$  mais rapidamente o erro tende a zero para uma perturbação do tipo degrau. Entretanto há de se considerar o nível de ruído na escolha de  $a$  como será discutido na sequência. O fator de correção  $\eta(k)$ , calculado no instante de amostragem  $k$  para ser utilizado na predição  $k + 1$  até  $k + p$  é obtido como

$$\begin{aligned} \eta(z^{-1}) &= \frac{1}{1 - f_d z^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} e(z^{-1}), \text{ ou} \\ \eta(k) &= \eta(k - 1)(1 + f_d) - f_d \eta(k - 2) + e(k)k_i \end{aligned} \quad (4.53)$$

O tratamento do erro de predição utiliza um filtro e um integrador. O ganho do filtro é unitário somente para  $a = 0$ , quando  $f_d = 0$  e  $k_i = 1$ .

#### 4.4.1 Exemplo 2

A fim de avaliar o desempenho da estratégia proposta para o tratamento de ruídos e erros de modelagem aplica-se a técnica proposta para o exemplo 1 apresentado na subseção 4.3.3. Inicialmente avalia-se a resposta do controle PNMPC a entrada de um



sinal degrau na saída do processo para um sistema sem ruído na medição. A figura 4.6 apresenta a resposta obtida com a aplicação

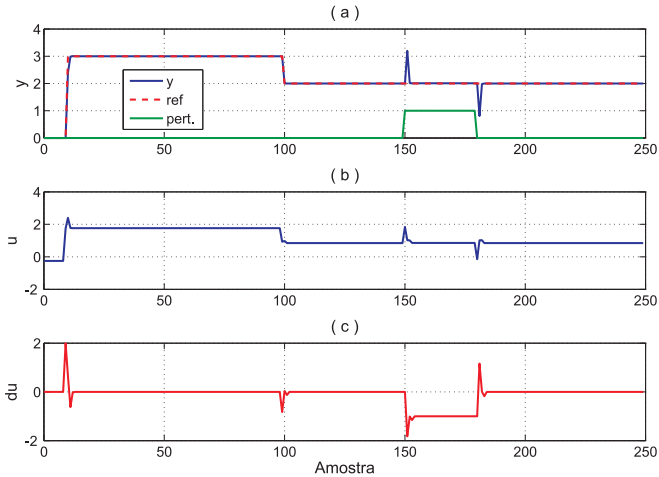


Figura 4.6: Resposta à perturbação na saída

do algoritmo PN MPC utilizando-se os seguintes parâmetros:

- horizonte de predição igual a 3
- horizonte de controle igual a 3
- ponderação no esforço de controle,  $\lambda = 0.01$
- fator  $a = 0$

De acordo com a equação 4.52 a escolha de  $a = 0$  equivale a

$$\begin{aligned} f_d &= a^2 = 0, \text{ e} \\ k_i &= 1 + a^2 - 2a = 1. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ou seja, a utilização de  $a = 0$  significa integrar o erro,  $k_i = 1$ , sem a aplicação de nenhum filtro,  $f_d = 0$ . Observa-se que o efeito da perturbação na saída aparece em um instante de amostragem e é eliminado no instante seguinte. Este seria um ajuste ideal na ausência de ruído. A figura 4.7 apresenta a resposta do sistema sendo controlado com o algoritmo PN MPC utilizando os mesmos ajustes mas com a adição de ruído branco na saída além da perturbação degrau. A figura 4.7-a mostra a perturbação degrau e o

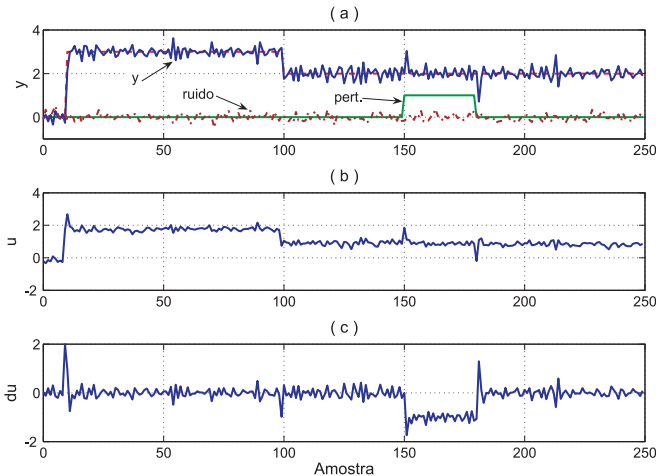
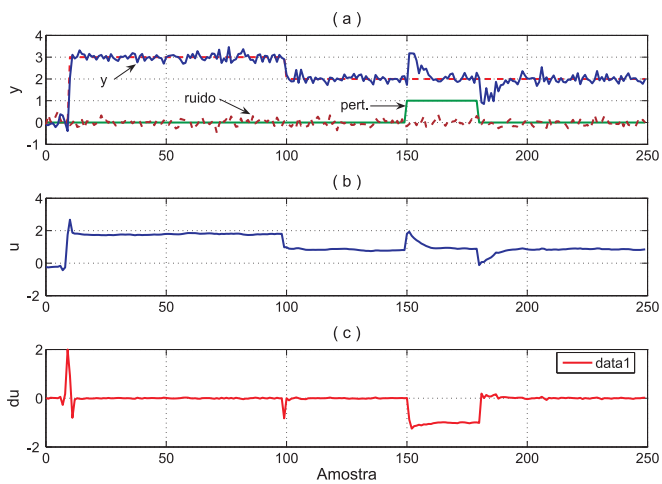


Figura 4.7: Resposta à perturbação na saída com ruído e  $a = 0$

ruído que foi somado a saída do sistema. Nota-se que o sinal de saída apresenta um nível de ruído um pouco maior do que o ruído acrescentado, muito provavelmente pela também notável variação no sinal de controle  $u$  como mostra a figura 4.7-b. Este ruído na ação de controle é indesejável pois prejudica o elemento final de controle como uma válvula de controle, por exemplo. Neste caso pode-se escolher um valor de  $a$  maior do que zero e obter assim uma filtragem sobre o ruído. O aspecto negativo disso é que a perturbação não será eliminada tão rapidamente como quando  $a = 0$ . A figura 4.8 mostra a resposta obtida com  $a = 0.7$ . Nota-se claramente que o sinal de controle apresenta-se bastante menos ruidoso e que o ruído na saída é semelhante ao ruído acrescentado (não houve multiplicação significativa de ruído). De forma geral a conclusão é que com a escolha de um só parâmetro,  $a$ , pode-se obter uma resposta mais ou menos rápida às perturbações. Para variáveis do processo com presença de ruído existe um compromisso entre a rapidez na resposta à perturbação e a contaminação de ruído na ação de controle.

Figura 4.8: Resposta à perturbação na saída com ruído e  $a = 0.7$

## 4.5 Aplicação em processos multivariáveis

Apesar da apresentação da técnica PNMPC ter sido realizada para sistemas de uma entrada e uma saída, não há nenhuma restrição na aplicação da técnica para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (Sistemas MIMO). Em realidade não há praticamente nenhuma diferença já que havendo mais de uma entrada e mais de uma saída basta montar os vetores de predição e incrementos de ação de controle aumentados. Assim, para um sistema de  $n_e$  entradas e  $n_s$  saídas teríamos os seguintes vetores,

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_p &= [\mathbf{Y}_{p1} \quad \mathbf{Y}_{p2} \quad \dots \quad \mathbf{Y}_{pn_s}]^T \\ \Delta \mathbf{u} &= [\Delta \mathbf{u}_1 \quad \Delta \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \Delta \mathbf{u}_{n_e}]^T \end{aligned} \quad (4.55)$$

A obtenção de  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{G}_{\text{PNMPC}}$  acontece da mesma forma como descrito para o caso de uma entrada e uma saída. A diferença é que agora a matriz  $\mathbf{G}_{\text{PNMPC}}$  tem  $mn_e$  colunas que serão obtidas calculando-se a derivada parcial de forma numérica calculando-se o vetor de predição  $\mathbf{Y}_p$  com  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  e o vetor de predição obtido ao utilizar-se  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  acrescido de  $\epsilon$  em cada um dos elementos de  $\Delta \mathbf{u}$ . Assim, para um sistema com 3 entradas e com horizonte de controle igual a 2 teríamos  $\mathbf{G}_{\text{PNMPC}}$  com 6 colunas. A coluna 5, por exemplo, seria obtida como

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{PNMPC}}(:, 5) &= \frac{\mathbf{Y}_p^5 - \mathbf{Y}_p^0}{\epsilon} \\ \mathbf{Y}_p^0 &= \mathbf{Y}_p(\Delta \mathbf{u} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T) \\ \mathbf{Y}_p^5 &= \mathbf{Y}_p(\Delta \mathbf{u} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \epsilon \quad 0]^T) \end{aligned} \quad (4.56)$$

### 4.5.1 Exemplo 3 - PNMPC aplicado no controle de uma Planta com 6 Tanques Esféricos

A figura 4.9 mostra um sistema desenvolvido na UFRGS e citado em [76]. A partir de um reservatório bombeia-se água com uma única bomba para seis tanques através de dois ramos diferentes com vazões controladas por abertura de válvulas. O modelo

dinâmico do sistema é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 A_1 \frac{dh_1}{dt} &= x_1 F_1 - R_1 \sqrt{h_1} & (4.57) \\
 A_2 \frac{dh_2}{dt} &= R_1 \sqrt{h_1} - R_2 \sqrt{h_2} \\
 A_3 \frac{dh_3}{dt} &= (1 - x_2) F_2 + R_2 \sqrt{h_2} - R_3 \sqrt{h_3} \\
 A_4 \frac{dh_4}{dt} &= x_2 F_2 - R_4 \sqrt{h_4} \\
 A_5 \frac{dh_5}{dt} &= R_4 \sqrt{h_4} - R_5 \sqrt{h_5} \\
 A_6 \frac{dh_6}{dt} &= (1 - x_1) F_1 + R_5 \sqrt{h_5} - R_6 \sqrt{h_6}
 \end{aligned}$$

onde

- $A_i$ , ( $i = 1 : 6$ ), é a área da seção de cada tanque em função do nível de fluido no mesmo ( $h_i$ ) e do diâmetro para o nível ( $D_i$ ).
- $R_i$ , ( $i = 1 : 6$ ), é a resistência a passagem do fluido pelo orifício no fundo de cada esfera.
- $h_i$ , ( $i = 1 : 6$ ), é o nível do fluido em cada um dos seis tanques esféricos.
- $x_1$  é fração da vazão de fluido  $F_1$  que flui para o tanque 1.
- $h_i$ , ( $i = 1 : 6$ ), é o nível do fluido em cada um dos seis tanques esféricos.
- $x_2$  é fração da vazão de fluido  $F_2$  que flui para o tanque 4.

Nas equações 4.57

$$\begin{aligned}
 A_i &= \pi(D_i h_i - h_i^2) & (4.58) \\
 R_i &= a_i \sqrt{2g}
 \end{aligned}$$

As equações 4.57 são discretizadas utilizando-se a aproximação de Euler com um Tempo de amostragem de 3 segundos. O processo multivariável é representado pelas saídas  $h_3$  e  $h_6$  e as entradas  $F_1$

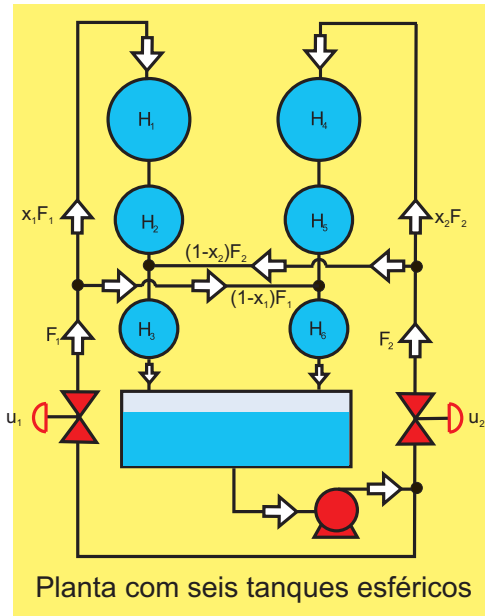


Figura 4.9: Planta com 6 Tanques Esféricos

e  $F_2$ .

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}_3 \\ \tilde{\mathbf{H}}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_3 \\ \tilde{\mathbf{F}}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}_1 \\ \Delta \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

O objetivo de controle é levar os níveis  $h_3$  e  $h_6$  para valores desejados. As saídas  $h_3$  e  $h_6$  apresentam dinâmicas rápidas ou lentas dependendo dos pontos de operação. Isto demanda um horizonte de predição muito longo devido a necessidade de se utilizar um tempo de amostragem pequeno. Para evitar trabalhar-se com matrizes de dimensões muito elevadas adota-se a técnica de se utilizar uma predição a cada  $N$  instantes de amostragem futuro. Este procedimento é uma generalização da proposta apresentada em [77] que sugere a utilização de pontos de coincidência da trajetória de referência no lugar da utilização de todos os pontos. Este esquema é de fácil implementação com a técnica *PNMPC* proposta. Utilizou-se um horizonte de controle de 3 para cada entrada e um número de predição de 210 para cada saída. Este

horizonte de predição foi reduzido para 31,  $(210/7+1)$ , tomando-se a primeira predição e depois uma a cada 7. Desta forma o vetor  $\mathbf{F}$  tem dimensão  $62 \times 1$  e a matriz  $\mathbf{G}_{\text{PNMPC}}$  tem dimensão  $62 \times 6$ . O horizonte de predição ainda leva em conta a necessidade de se cobrir a dinâmica das saídas por um tempo suficiente maior que o tempo em que as saídas apresentam resposta inversa devido o comportamento de fase não-mínima. O processo Seis Tanques Esféricos apresenta um comportamento entrada-saída não linear, comportamento de fase não-mínima e um pequeno atraso de transporte. As saídas são representadas em  $[cm]$  e as entradas em  $[cm^3/min]$ . Isto faz com que os valores dos sinais de entrada sejam muito maiores que os das saídas. As matrizes de ponderação  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  são inicialmente normalizadas levando em consideração os valores máximos de ambas as grandezas. Além disso faz-se uma estimativa dos tempos de atraso e da duração do efeito de fase não-mínima predominante para diminuir os valores correspondentes na matriz de ponderação  $\mathbf{R}$ . Este procedimento tem o efeito de priorizar a dinâmica de fase mínima das saídas e acredita-se que melhora a estabilidade numérica do algoritmo. O algoritmo PNMPC opera com os estados do sistema. Assim se fez necessário utilizar as medições de todos os 6 estados do sistema apesar do controle ser realizado apenas sobre as saídas correspondentes aos estados  $h_3$  e  $h_6$ . As medições de todos os estados são relevantes para a aplicação do algoritmo de tratamento de erro de predição já que os estados  $h_3$  e  $h_6$  dependem dos demais estados.

A figura 4.10 mostra o resultado de alguns testes de simulação do sistema em malha aberta. As figuras 4.11, 4.13 e 4.12 mostram os resultados obtidos com a aplicação da técnica *PNMPC* para uma série de mudanças de referência propostas em [76]. Deve-se mencionar que na simulação supõe-se que as referências futuras não são conhecidas mas são consideradas como iguais a referência atual.

Na figura 4.11 têm-se o comportamento das saídas  $h_3$  e  $h_6$  em comparação com as referências estabelecidas. A figura 4.13 mostra o comportamento dos níveis  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_4$  e  $h_5$ . Diferentemente das referências propostas em [76] para o controle do mesmo processo, preferiu-se utilizar referências que exijam mais desempenho do sistema de controle.

No tempo igual a 25 minutos requer-se que o nível 3 suba enquanto o nível 6 diminua, por exemplo. No tempo igual a 60

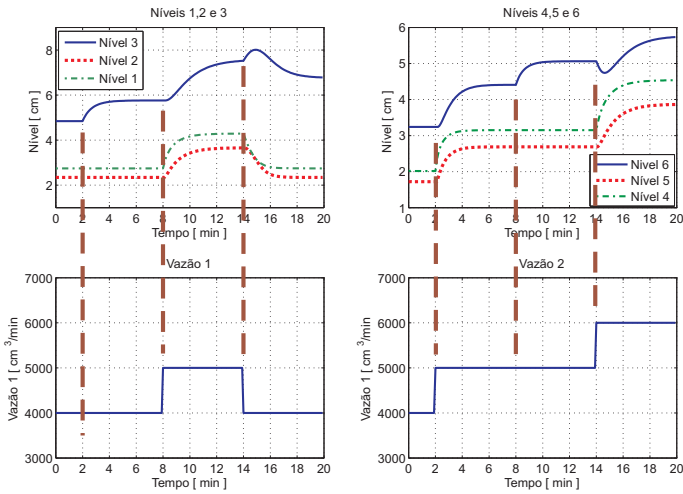
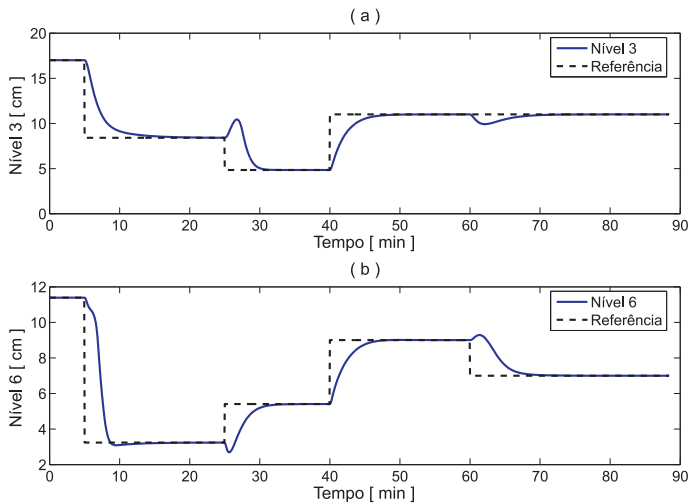


Figura 4.10: Respostas em Malha Aberta

minutos muda-se a referência do nível 6 e pode-se perceber a perturbação causada no nível 3.

Figura 4.11: Respostas de  $h_3$  e  $h_6$  em Malha Fechada



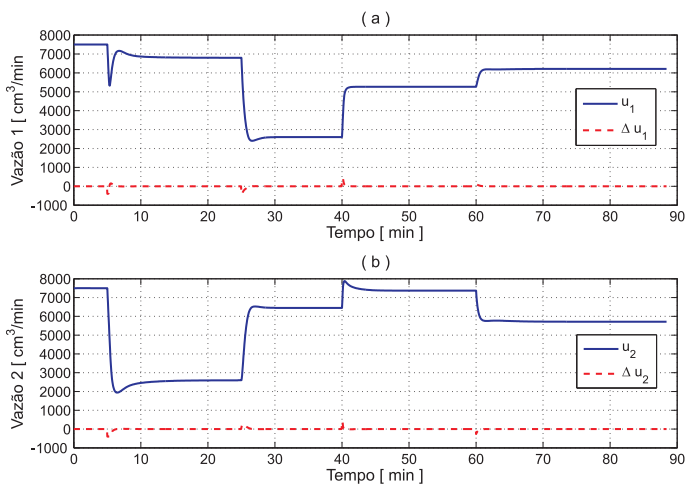


Figura 4.12: Ação de Controle em Malha Fechada

Observa-se que a técnica PNMPC proposta permite um ótimo seguimento de referência com exceção do comportamento de fase não mínima que mantém-se em malha fechada como esperado.

Para avaliar a capacidade do algoritmo PNMPC em representar as predições utilizando-se a expressão  $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{F} + \mathbf{G}_{\text{PNMPC}}\Delta\mathbf{u}$  compara-se as predições obtidas com esta expressão com as predições obtidas diretamente do modelo não linear. A comparação foi realizada no instante de amostragem 801 que corresponde ao tempo  $t = 40.05 \text{ min}$ .

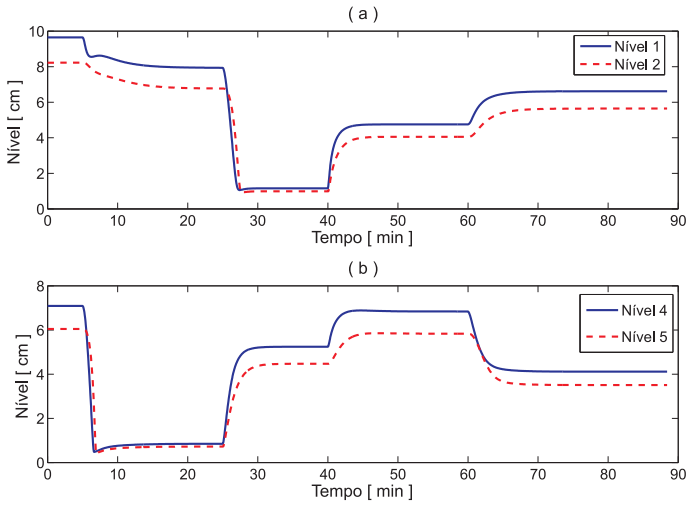


Figura 4.13: Respostas de  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_4$  e  $h_5$  em Malha Fechada

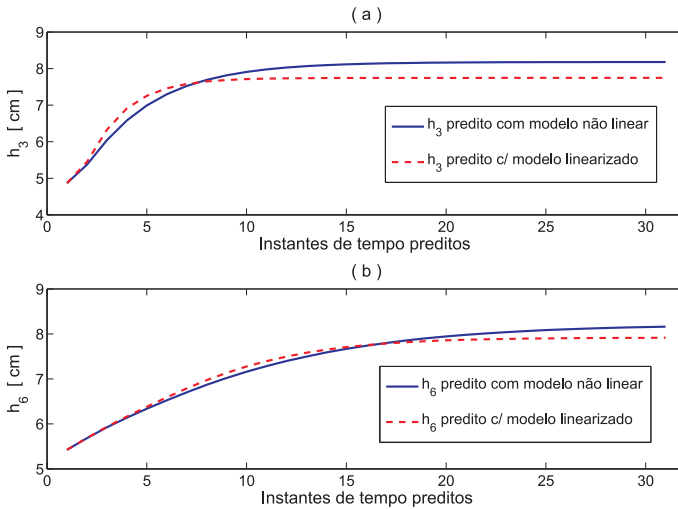


Figura 4.14: Comparação entre as previsões com o modelo e com o algoritmo PNMPC em  $T=40.05$  min.

## 4.6 PNMPC com Gradiente Ponderado

A técnica PNMPC proposta utiliza a matriz  $\mathbf{G}$  igual ao gradiente  $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \Delta \mathbf{u}}$  calculada para  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ . O gradiente é obtido a cada instante de amostragem através de um procedimento numérico como descrito na seção 4.3. Dependendo do grau da não linearidade do sistema pode ser interessante obter uma nova matriz  $\mathbf{G}$  somente a cada  $N$  instantes de amostragem ou, ao contrário, pode ser desejável melhorar o modelo de predição. Sistemas altamente não lineares e com comportamento de resposta inversa exigem bons modelos de predição principalmente quando se deseja um desempenho rápido do sistema sendo controlado.

Nesta seção apresenta-se um procedimento que visa melhorar o modelo de predição. Como já mencionado a matriz gradiente  $\mathbf{G}$  é calculada a cada instante de amostragem para  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Entretanto, devido a não linearidade do modelo e processo, o gradiente varia em função do incremento de controle aplicado. Um procedimento que visa melhorar o cálculo do gradiente consiste em calculá-lo em dois passos:

- Passo 1: Calcula-se o gradiente  $\mathbf{G}_1$  como já descrito na seção 4.3 utilizando-se  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- Passo 2: Utilizando o gradiente  $\mathbf{G}_1$  calcula-se o incremento da ação de controle intermediário  $\Delta \mathbf{u}_1$  e com ele o gradiente  $\mathbf{G}_2$ . O gradiente que será utilizado para o cálculo da ação de controle definitiva é  $\mathbf{G} = 0.5\mathbf{G}_1 + 0.5\mathbf{G}_2$

Uma interpretação gráfica do procedimento é mostrada na figura 4.15 para o caso de uma função  $y = f(x)$ . Pode-se observar na figura 4.15 que o primeiro valor de  $\Delta x = \Delta x^i$  é diferente do valor que seria necessário para que a função atingisse o valor desejado  $y_d = y(x + \Delta x)$ . Utilizando-se o valor de  $\Delta x^i$  obtido com o primeiro gradiente calculado em  $x$ , calcula-se o gradiente intermediário  $\frac{\partial y(x + \Delta x^i)}{\partial x}$ . Em seguida calcula-se o gradiente ponderado que é a média entre o gradiente em  $y(x)$  e em  $y(x + \Delta x^i)$ . A utilização do gradiente ponderado irá fornecer um valor de  $\Delta x = \Delta x^p$  que é muito mais próximo do valor correto para que a função atinja  $y_d = y(x + \Delta x)$ . Este procedimento é uma tentativa de atingir uma aproximação de Taylor de segunda ordem, onde

$$y(x + \Delta x) \cong f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \Delta x^2. \quad (4.60)$$

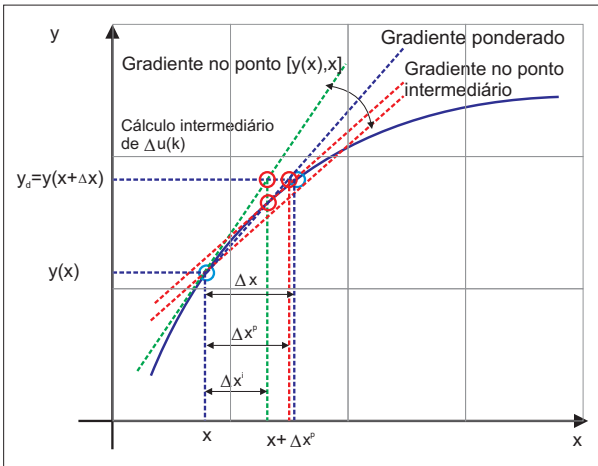


Figura 4.15: Interpretação gráfica do gradiente ponderado

Obtendo-se

$$\Delta x^i = \frac{y_d - y(x)}{\frac{\partial f(x)}{\partial x}}, \text{ pode-se calcular} \quad (4.61)$$

$\frac{\partial f(x + \Delta x^i)}{\partial x}$  e fazer a seguinte aproximação

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \cong \frac{\frac{\partial f(x + \Delta x^i)}{\partial x} - \frac{\partial f(x)}{\partial x}}{\Delta x^i}$$

Assim, a Eq. (4.60) pode ser reescrita como

$$y(x + \Delta x) \cong f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \left[ \frac{\frac{\partial f(x + \Delta x^i)}{\partial x} - \frac{\partial f(x)}{\partial x}}{\Delta x^i} \right] \Delta x^2. \quad (4.62)$$

Pode-se dizer que  $\Delta x^i = \Delta x(1 - \delta)$ , onde  $\delta$  é um valor que depende da curvatura da função, sendo positivo para função côncava e negativa para função convexa. Introduzindo esta relação na Eq. (4.62), tem-se

$$y(x + \Delta x) \cong f(x) + \left[ \left(1 - \frac{1}{2(1 - \delta)}\right) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \frac{1}{2(1 - \delta)} \frac{\partial f(x + \Delta x^i)}{\partial x} \right] \Delta x. \quad (4.63)$$

O cálculo de  $\delta$  iria necessitar da avaliação da derivada segunda de  $f(x)$  que deseja-se evitar. Assim o melhor compromisso é considerar  $\delta = 0$  e

$$y(x + \Delta x) \cong f(x) + \left[ 0.5 \frac{\partial f(x)}{\partial x} + 0.5 \frac{\partial f(x + \Delta x^i)}{\partial x} \right] \Delta x. \quad (4.64)$$

O resultado do caso escalar pode ser estendido para a Matriz Gradiente Ponderada.

O procedimento descrito acima requer duas avaliações da Matriz Gradiente. A fim de se diminuir a carga computacional do algoritmo propõe-se uma versão de Matriz Gradiente Ponderada simplificada onde o cálculo do incremento da ação de controle intermediário  $\Delta \mathbf{u}_i$  é realizado utilizando-se a matriz  $\mathbf{G}$  obtida no instante de amostragem anterior.

A figura 4.16 mostra a comparação entre a predição calculada com o modelo não linear e com o modelo linearizado utilizando a Matriz Gradiente Ponderada para o instante de tempo igual a  $t = 40.05 \text{ min}$ . Comparando a resposta obtida com a versão linearizada que utiliza a Matriz Gradiente calculada para  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  apresentada na figura 4.14, percebe-se uma melhora muito significativa. A figura 4.17 mostra o resultado obtido utilizando-se a Matriz Gradiente Ponderada Simplificada. O resultado é muito similar ao obtido com a Matriz Gradiente que utiliza dois cálculos de Gradiente a cada instante de amostragem.

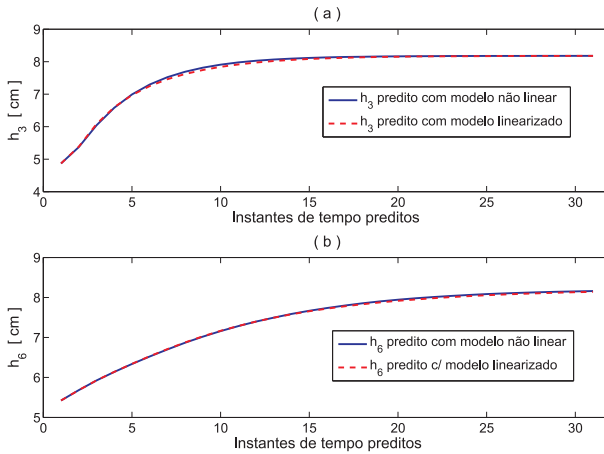


Figura 4.16: Comparação entre predição com modelo não linear e modelo linearizado com Gradiente Ponderado

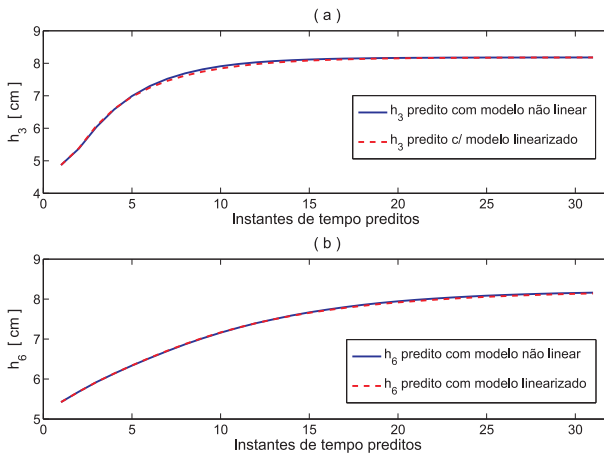
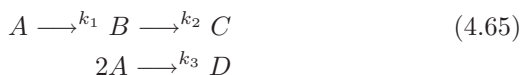


Figura 4.17: Comparação entre predição com modelo não linear e modelo linearizado com Gradiente Ponderado Simplificado

### 4.6.1 Exemplo 4 - PNMPC aplicado no controle da reação Van Der Vussen

O Controle da Reação Van Der Vussen é um problema *benchmark* para o desenvolvimento de algoritmos de controle de processos não lineares como pode ser visto em [78], [79], [80], [81], [82]. A reação Van Der Vussen é um processo contínuo que acontece em um reator do tipo tanque agitado isotérmico. A reação consiste do seguinte esquema



A é o produto que entra no reator, B é o produto desejado e C e D são subprodutos indesejados. Utiliza-se neste exemplo o modelo do processo apresentado em [82]:

$$\begin{aligned} \dot{c}_a &= -k_a c_a - k_3 c_a^2 + (c_{Ain} - c_a)u \\ \dot{c}_b &= k_1 c_a - k_2 c_b - c_b u. \\ y &= c_b \end{aligned} \quad (4.66)$$

Neste modelo

- $c_a$  é a concentração do produto A.
- $y = c_b$  é a concentração do componente B e a variável controlada.
- $u = \frac{F_{ent}}{V_R}$  é o inverso do tempo de residência e a variável manipulada sendo  $F_{ent}$  a vazão de entrada e  $V_R$  o volume do tanque.
- $k_1 = k_2 = 15.0345$  são constantes de reação dadas pela equação de Arrhenius.
- $k_3 = 2.324$  é outra constante de reação.
- $c_{Ain} = 5.1$  é a concentração de entrada de A.

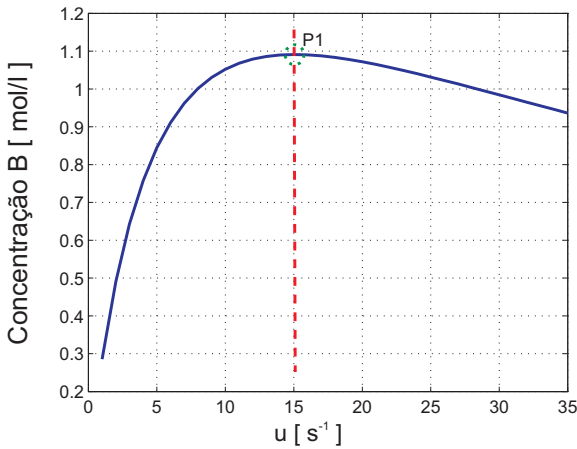


Figura 4.18: Relação entre  $c_B$  e  $u$  em Regime Permanente (Curva de equilíbrios do sistema)

Os estados estacionários ou equilíbrios do sistema são obtidos fazendo-se  $\dot{c}_a = \dot{c}_b = 0$ . A figura 4.18 mostra a curva de equilíbrios do sistema. Nota-se que existe um ponto  $P_1$  onde ocorre o valor máximo de saída. Além disso este processo apresenta um comportamento de fase não-mínima para operações à esquerda do ponto  $P_1$ . A figura 4.19 mostra o comportamento da concentração do produto B ( $c_B$ ) em malha aberta quando submetido a degraus na entrada. A figura 4.19-a mostra a resposta para um degrau positivo enquanto que a figura 4.19-b mostra o comportamento da saída para um degrau negativo. As entradas correspondem a valores na região do lado esquerdo de  $P_1$  da figura 4.18. Nota-se claramente o comportamento do tipo resposta inversa ou fase não mínima em ambos os casos.

O modelo contínuo representado pela equação (4.66) foi discretizado com um tempo de amostragem de 18 segundos (0.005 horas) utilizando-se uma aproximação de Euler ( $\dot{c} = \frac{c(k) - c(k-1)}{T_s}$ ).



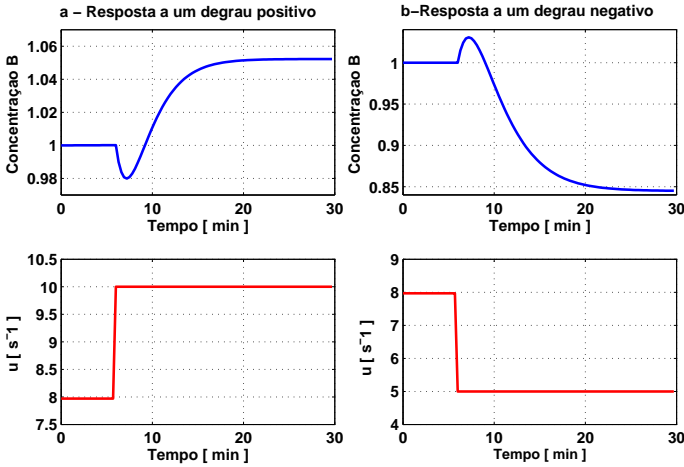


Figura 4.19: Respostas em malha aberta

$$\begin{aligned}
 c_a(k) &= c_a(k-1) - T_s k_1 c_a(k-1) - T_s k_3 c_a(k-1)^2 \\
 &\quad + T_s (c_{ae} - c_a(k-1)) u(k-1) \\
 c_b(k) &= c_b(k-1) + T_s k_1 c_a(k-1) - T_s k_2 c_b(k-1) \\
 &\quad - T_s c_b(k-1) u(k-1) \\
 y(k) &= c_b(k)
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

A variável que se deseja controlar é  $c_b$ . Entretanto, apesar de não se controlar a variável  $c_a$ , supõe-se que dispõe-se de sua medição. Para a aplicação da técnica PNMPC se faz necessário manter o modelo não linear de  $c_a$  corrigido em função das medições. Para isso, a cada iteração, o algoritmo determina o erro entre o valor das variáveis  $c_a$  e  $c_b$  medidas e os valores obtidos utilizando-se a representação linearizada com a técnica do gradiente ponderado. Com este procedimento garante-se erro nulo em regime permanente na presença de erros de modelagem e perturbações utilizando a técnica discutida na seção 4.4. Para os resultados de simulação que serão apresentados na sequência foram utilizados os seguintes parâmetros de sintonia do controlador PNMPC:

- Horizonte de predição igual a 30
- Horizonte de controle igual a 3
- Ponderação no esforço de controle com  $\lambda = 0.0025$
- Parâmetro controle do erro de modelagem  $a = 0$

Não se aplicou nenhum filtro nas mudanças de referência. Para instantes de tempo maiores que 90 minutos aplicou-se uma mudança nos parâmetros da planta simulada.

$$\begin{aligned} k_1 &= k_2 = 1.1k_{1-nom}. \\ k_3 &= 0.9k_{3-nom}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Utilizou-se o algoritmo de programação quadrática para obtenção das ações de controle. As restrições utilizadas foram relativamente brandas nesta simulação:

$$\begin{aligned} u_{max.} &= 35 \\ u_{min.} &= 0 \\ \Delta u_{max.} &= 20 \\ \Delta u_{min.} &= 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

As figuras 4.20 e 4.21 mostram o resultado da aplicação da técnica PNMPC no controle de  $c_B$  aplicando-se mudanças de referência para valores na faixa à esquerda de  $P_1$  da figura 4.18.

A figura 4.20-a mostra que o algoritmo PNMPC consegue efetuar um bom seguimento de referência. Além disso reage bem à variação no modelo da planta em relação ao modelo utilizado para predição ao levar a saída para a referência desejada em um tempo pequeno e com um desvio máximo razoável. A figura 4.20-b mostra a ação de controle e o incremento da ação de controle e a forma como reagem à variação dos parâmetros da planta para  $t > 90 \text{ min.}$ .

Na figura 4.21-a apresenta-se os erros entre os valores medidos e preditos de  $c_a$  e  $c_b$  e os valores de  $\eta_{c_a}$  e  $\eta_{c_b}$ , respectivamente a integral do erro filtrado entre os valores preditos de  $c_a$  e  $c_b$  em seus valores medidos. Nota-se claramente que o modelo de predição absorve a mudança de parâmetros entre o modelo utilizado para simular a planta e o modelo de predição através de  $\eta_{c_a}$  e  $\eta_{c_b}$  levando o erro de modelagem para zero em regime permanente.

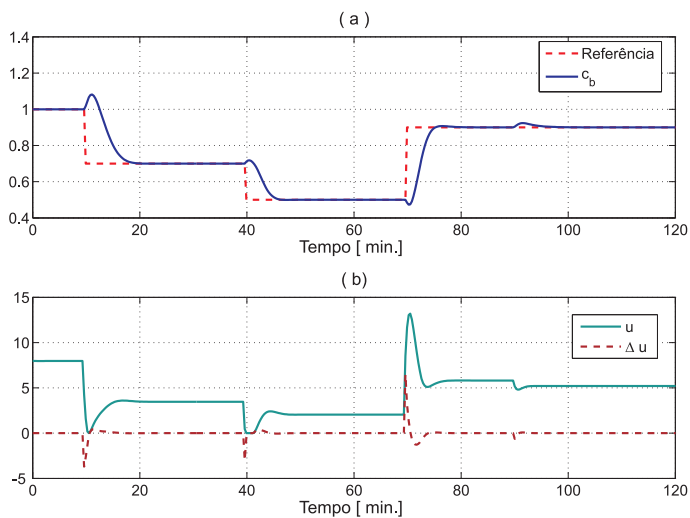


Figura 4.20: Controle de  $c_b$  com PNMPC

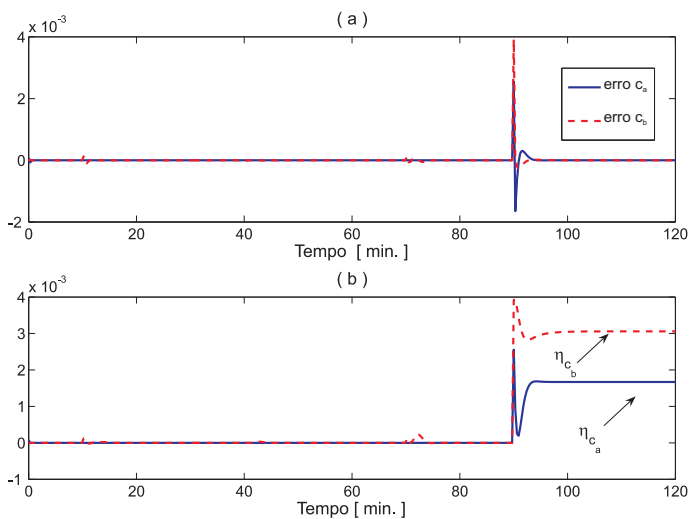


Figura 4.21: Controle de  $c_b$  com PNMPC - Controle de erros

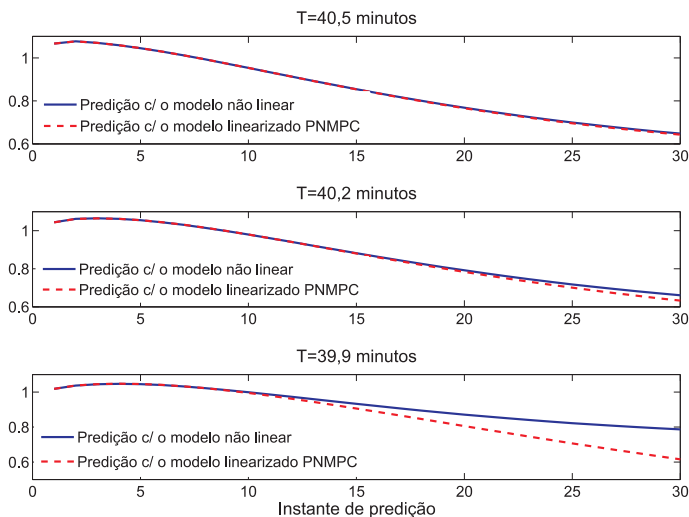


Figura 4.22: Comparação entre Predição com o modelo e com PNMPC

O desempenho do algoritmo PNMPC depende fundamentalmente de sua capacidade de representar as predições de forma linear utilizando a técnica do gradiente ponderado. Observando a figura 4.21-b pode-se perceber que o erro de modelagem a cada instante de amostragem é mantido em valores baixos mesmo nos momentos de mudança de referência. Entretanto uma amostra das predições ao longo do horizonte de predição  $p$  mostra que no momento da mudança de referência, mesmo para modelos de predição iguais ao da planta, acontece a maior diferença. Essa diferença é máxima no momento da mudança de referência e diminui rapidamente nos instantes de amostragem seguintes como mostra a figura 4.22. No instante  $t = 39,9 \text{ min.}$  há uma mudança significativa na referência e na ação de controle resultando em uma diferença grande na predição feita com o modelo não linear e o modelo linearizado enquanto que nos dois instantes de amostragem seguintes,  $t = 40,2 \text{ min.}$  e  $t = 40,5 \text{ min.}$  a diferença diminui significativamente. São nos instantes de mudança de referência ou entrada de perturbações que é importante dispor de uma boa técnica para obter as predições.

Uma das dificuldades esperadas de um controlador baseado em um modelo linear seria a operação do processo no ponto  $P_1$  da relação  $c_b \times u$  em regime permanente apresentada na figura 4.18 já que neste ponto o ganho do modelo linear seria zero. Em [82] propõe-se um algoritmo MPC não linear iterativo para o controle deste processo para uma sequência de referências visando mostrar a capacidade da técnica proposta em controlar o processo ao redor do ponto  $P_1$ . A figura 4.23 mostra os resultados obtidos com

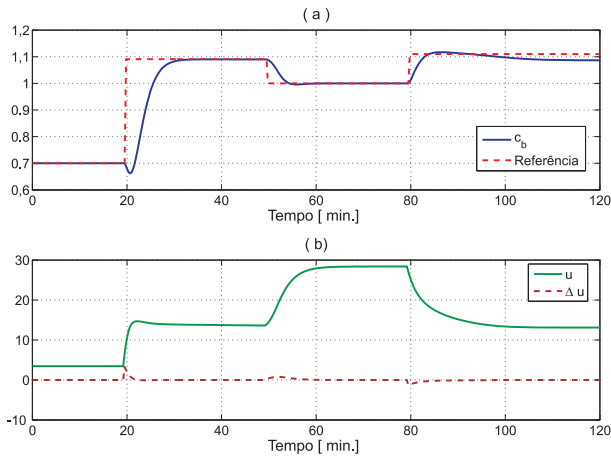


Figura 4.23: Teste de Seguimento de Referência em torno de  $P_1$

a aplicação da técnica PNMPC para a sequência de referências sugeridas em [82]. Utilizou-se um horizonte de predição igual a 30, horizonte de controle igual a 3, ponderação do esforço de controle,  $\lambda = 0,01$  e o parâmetro de controle de erro  $a = 0$ . Para evitar a influência do comportamento tipo resposta inversa ou fase não mínima optou-se por fazer os primeiros 10 elementos da matriz de ponderação do seguimento de referência igual a zero. Nota-se que a técnica PNMPC leva o sistema às referências desejadas exceto para o valor 1,11 que não pertence ao conjunto de pontos realizáveis da relação em regime permanente  $c_b \times u$ . Nota-se entretanto que o sistema leva  $c_b$  ao valor mais próximo possível,  $c_b = 1,09$ . Um ponto interessante a ser observado é que há dois valores de entrada  $u$  que levam o sistema até  $c_b = 1,0$  como pode ser visto na relação de regime permanente  $c_b \times u$ .

Como a função custo cresce com o quadrado da diferença entre referência e resposta e a trajetória até  $c_b$  igual a 1,0 pelo lado direito de  $c_b \times u$  apresenta comportamento de fase não mínima o sistema de controle chegou a  $c_b = 1,0$  pelo lado direito que apresenta comportamento de fase mínima e menor custo.

Uma forma de forçar o sistema a permanecer no lado esquerdo da relação em regime permanente  $c_b \times u$  é modificar a função objetivo para introduzir um termo que penaliza afastamentos do valor de regime permanente da entrada conforme proposto em [83]. Para isso calcula-se o valor de regime permanente para cada valor da referência  $u_{ss}(y_{ref}(k))$  e escreve-se a seguinte função custo:

$$\begin{aligned}
 J &= (\mathbf{Y}_p - \mathbf{W})^T \mathbf{R} (\mathbf{Y}_p - \mathbf{W}) + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_1 \Delta \mathbf{u} \\
 &+ (\mathbf{U} - \mathbf{U}_{ss})^T \mathbf{Q}_2 (\mathbf{U} - \mathbf{U}_{ss}),
 \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{U} = u_{k-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}$$

$$\mathbf{U}_{ss} = u_{ss}(y_{ref}(k)) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \quad (4.70)$$

Os parâmetros utilizados no ajuste do algoritmo foram

- horizonte de predição  $p = 30$ ;
- horizonte de controle  $m = 3$ ;
- $\mathbf{Q}_1 = 0.01 \mathbf{I}_{m \times m}$ ;
- $\mathbf{Q}_2 = 0.001 \mathbf{I}_{m \times m}$ ;
- parâmetro para o controle de erro de modelagem  $a = 0$

Devido a presença de comportamento de resposta inversa os primeiros 10 elementos da matriz de ponderação de seguimento de referência  $\mathbf{R}$  foram zerados. Os resultados da aplicação do controle PNMPC são apresentados na figura 4.24. Pode-se perceber pela ação de controle e pelo comportamento de resposta inversa que a variável  $c_b$  vai de 1.09 até 1.0 com valores de entrada pertencente ao lado esquerdo de  $P_1$  na figura 4.18.

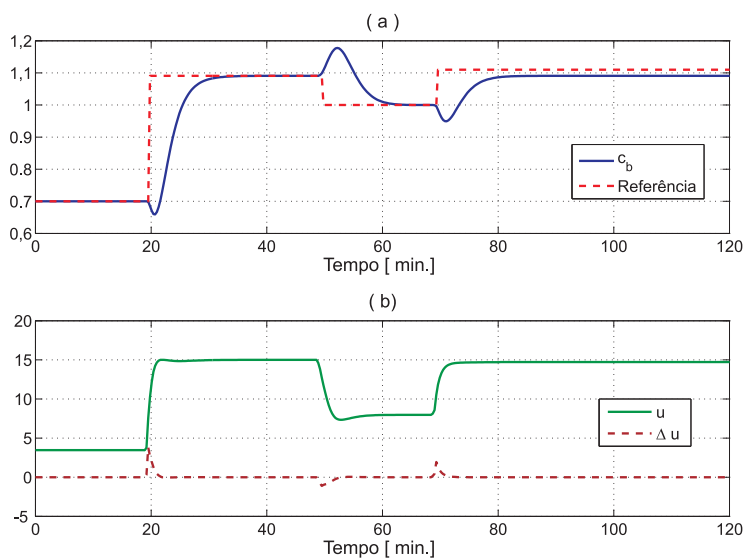


Figura 4.24: Teste de Seguimento de Referência em torno de  $P_1$  para  $u_{ss} < 15$

## 4.7 Estabilidade

Na seção 4.4 discutiu-se uma técnica para manter nulo o erro de modelagem em regime permanente e garantir uma dinâmica tão rápida quanto possível para sua trajetória até zero. Entretanto, sabe-se que alguns erros de modelagem podem desestabilizar o sistema sob controle. Especialmente aqueles erros de sincronização temporal entre o comportamento da planta e o do modelo. Neste sentido erros no atraso de transporte podem ter um impacto grande na estabilidade do sistema. Uma das alternativas para conviver com este problema é penalizar os incrementos de controle na função objetivo obtendo assim uma resposta lenta em malha fechada mas garantindo a estabilidade do sistema. Para sistemas lineares uma solução que funcione para um valor de referência vai funcionar para todas as outras. Já para sistemas não lineares a situação é diferente. Esta seção apresenta uma técnica para garantir que a ação de controle obtida a cada instante de amostragem com o algoritmo de controle PNMPC mantenha o sistema estável. Parte deste trabalho foi apresentado em [84].

### 4.7.1 Desenvolvendo uma condição suficiente para estabilidade

A proposta esta baseada nas ideias de Lyapunov sobre funções do tipo energia decrescente no tempo. [85]. Considere a seguinte função de Lyapunov

$$\begin{aligned} V &= \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}, \text{ onde} \\ \tilde{\mathbf{e}} &= \mathbf{Y}_p - \mathbf{W} \mathbf{e} \\ \mathbf{Y}_p &= \mathbf{F} + \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

O vetor  $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{Y}_p - \mathbf{W} \mathbf{e}$  contém os erros entre as predições e as referências no horizonte de predição  $p$ . Na equação 4.71  $\mathbf{F}$  é a resposta livre do sistema e  $\mathbf{G}$  é a matriz Gradiente ponderado simplificada já discutida nas seções anteriores.  $\mathbf{W}$  é o vetor com as referências no horizonte de predição e  $\mathbf{P}$  é uma matriz com elementos positivos somente na diagonal e serve para ponderar a ênfase na estabilidade conforme será discutido na sequência. Se



a cada instante de amostragem garantir-se que

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leq 0, \quad (4.72)$$

o sistema será estável. Deve-se observar que

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(0) &= 0 \quad \text{e} \\ \mathbf{V} &> 0 \quad \text{para } \mathbf{e} \neq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

O desafio é desenvolver uma expressão para  $\frac{\partial V}{\partial t}$  e assegurar-se que seu valor continue negativo a cada instante de amostragem com um custo computacional mínimo. Para isso desenvolve-se a expressão para  $V$  na equação 4.71. Observa-se que  $V$  depende de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{W}$  e  $\Delta \mathbf{u}$ ,

$$\begin{aligned} V &= f(\mathbf{F}, \mathbf{W}, \Delta \mathbf{u}), \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial \mathbf{F}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{W}} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \Delta \mathbf{u}} \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Desenvolvendo a equação 4.71,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{F}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P}), \\ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{W}} &= -(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P}), \\ \frac{\partial V}{\partial \Delta \mathbf{u}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{G} + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G}), \quad \text{onde} \\ \mathbf{A}^T &= \mathbf{F}^T - \mathbf{W}^T. \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$(4.76)$$

As derivadas parciais  $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial t}$  são obtidas utilizando uma matriz Toeplitz [83] modificada, equivalente ao operador derivada discreta  $\Delta = 1 - z^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} &= \mathbf{T}_p \mathbf{F}, \\ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} &= \mathbf{T}_p \mathbf{W}, \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial t} &= \mathbf{T}_m \Delta \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Ao calcular as derivadas a divisão por  $T_s$ , o tempo de amostragem, é omitida uma vez que o resultado continua proporcional. Para

o caso de um sistema com uma entrada e uma saída (Sistema SISO-Single Input Single Output), por exemplo,  $\mathbf{T}_p$  e  $\mathbf{T}_m$  são respectivamente matrizes  $p \times p$  e  $m \times m$ , com  $p$  e  $m$  sendo os horizontes de predição e de controle respectivamente.

$$\mathbf{T}_{m,p} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

A utilização dessas matrizes limitam a aplicação da técnica para  $m > 1$ . A matriz Toeplitz  $\mathbf{T}$  pode ser utilizada para calcular a derivada do vector  $\mathbf{V}$  como  $\mathbf{TV}$ . Em sua forma original a primeira linha de  $\mathbf{T}$  é  $[1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]$ , o que é equivalente a assumir que o elemento que precede  $\mathbf{V}(1)$  é zero. Para esta aplicação o oposto é válido. Isto é, a matriz Toeplitz será aplicada ao vector com a diferença entre a resposta livre e a referência,  $\mathbf{A} = \mathbf{F} - \mathbf{W}$  e ao vector incremento de controle  $\Delta\mathbf{u}$ . Neste caso é mais natural assumir que  $\Delta\mathbf{u}_{m+1} = 0$  e que  $(\mathbf{F} - \mathbf{W})_{p+1} = 0$ . Ou seja, em MPC assume-se que o incremento de controle depois do horizonte de controle é zero e, na maioria das vezes, que no instante seguinte ao horizonte de predição atingiu-se o valor de referência. Isto justifica a utilização da matriz Toeplitz modificada.

Combinando as equações 4.74, 4.77 e 4.78, chega-se a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \mathbf{A}^T \mathbf{T}_p^T \mathbf{P} \mathbf{A} + (\mathbf{A}^T \mathbf{T}_p^T \mathbf{P} \mathbf{G} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{T}_m) \Delta\mathbf{u} \\ &\quad + \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{T}_m \Delta\mathbf{u} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

### 4.7.2 Introduzindo a condição para estabilidade na formulação MPC com PQ

Tendo desenvolvido a condição suficiente para a estabilidade do sistema o desafio é aplicá-la com o mínimo esforço computacional. Uma vez que Programação Quadrática (PQ) é o algoritmo de otimização mais utilizado para minimização de funções custo em técnicas MPC, é natural fazer um esforço em introduzir a restrição  $\frac{\partial V}{\partial t} < 0$  na formulação PQ. Para isso a primeira escolha é acres-

centar a expressão  $\frac{\partial V}{\partial t} < 0$  dada pela equação 4.79 na função objetivo a ser minimizada. A minimização da função custo contendo esta expressão pode tornar  $\frac{\partial V}{\partial t}$  negativa mas isto não garante que será sempre negativa. Para isso se faz necessário acrescentar uma restrição na formulação PQ.

A introdução da restrição  $\frac{\partial V}{\partial t} < 0$  na formulação QP apresenta uma dificuldade. A expressão 4.79 tem um elemento quadrático em  $\Delta \mathbf{u}$  e a maioria dos algoritmos de PQ não admitem restrições não lineares. Uma solução exata requer a utilização de algoritmos de programação não linear mas uma solução aproximada pode ser obtida montando-se uma expressão para um dos vetores  $\Delta \mathbf{u}$  da expressão 4.79. Isto é feito utilizando-se a cauda (*tail*) do vector  $\Delta \mathbf{u}$  calculado no instante de amostragem anterior,  $k-1$ , com seus elementos deslocados uma posição para cima e acrescentando um zero no último elemento como mostra a equação 4.80 para um sistema SISO,

$$\Delta \mathbf{u}_{tail} = \left[ \Delta \mathbf{u}_{(2:m)}^{k-1}; 0 \right]. \quad (4.80)$$

Com esta aproximação a nova formulação do problema de Programação Quadrática pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \arg \min J \\ s. t. \\ \mathbf{M} \Delta \mathbf{u} &\leq \mathbf{N}, \text{ onde} \\ J &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Phi \Delta \mathbf{u} + \Theta^T \Delta \mathbf{u} \text{ com} \\ \Phi &= \mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{G} + \mathbf{Q} + \Phi_1 \\ \Phi_1 &= \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{T}_m \\ \Theta &= \mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{A} + \Theta_1^T \\ \Theta_1^T &= \mathbf{A}^T \mathbf{T}_p^T \mathbf{P} \mathbf{G} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{T}_m \end{aligned} \quad (4.81)$$

Na equação 4.81 a expressão  $\mathbf{M} \Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{N}$  agrupa todas as restrições e será explicada na sequência.

Na mesma classe das matrizes  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  para ponderar o seguimento de referência e o esforço de controle respectivamente,  $\mathbf{P}$  é a matriz para impor mais ou menos robustez. A restrição que assegura  $\frac{\partial V}{\partial t} < 0$  deve também impor um limite inferior pois uma solução com um valor negativo muito grande para  $\frac{\partial V}{\partial t}$  pode comprometer os outros termos da função custo como seguimento de referência

por exemplo.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_2 &< \mathbf{M}\Delta\mathbf{u} < \mathbf{N}_1 \text{ ou} \\
 \mathbf{M}\Delta\mathbf{u} &< \mathbf{N}_1 \\
 -\mathbf{M}\Delta\mathbf{u} &< -\mathbf{N}_2 \text{ com} \\
 \mathbf{N}_1 &= -\mathbf{A}^T \mathbf{T}_p^T \mathbf{P} \mathbf{A} \\
 \mathbf{N}_2 &= \mathbf{A}^T \mathbf{T}_p^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \varepsilon \\
 \mathbf{M} &= \mathbf{A}^T \mathbf{T}_p^T \mathbf{P} \mathbf{G} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{T}_m + \\
 \Delta\mathbf{u}_{approx.}^T &\mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} \mathbf{T}_m
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

A equação 4.82 é a restrição que assegura que

$$-\varepsilon < \frac{\partial V}{\partial t} < 0. \tag{4.83}$$

Há dois parâmetros importantes a serem sintonizados,  $\mathbf{P}$  e  $\varepsilon$ , embora nas aplicações feitas até agora uma boa escolha para  $\mathbf{P}$  parece evitar que  $\frac{\partial V}{\partial t}$  atinja o limite  $-\varepsilon$ . Aparentemente, para as aplicações feitas, um valor muito negativo para  $-\varepsilon$  afeta o seguimento de referência de forma que naturalmente um compromisso é estabelecido e a restrição não foi alcançada.

O fato de haver três matrizes,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{P}$  para serem sintonizadas oferece mais flexibilidade mas aumenta a complexidade da sintonia. Alguns experimentos mostraram que em caso de forte erros de modelagem obteve-se bons resultados diminuindo os primeiros elementos de  $\mathbf{R}$  embora seja difícil estabelecer uma regra geral.

### 4.7.3 Aplicação da técnica

A fim de verificar o desempenho obtido com a técnica proposta e suas limitações, aplica-se a mesma a alguns problemas citados na literatura.

### Exemplo 5

Retomamos o processo utilizado no exemplo 2 na subsecção 4.3.3.

$$y(k) = \frac{2.5y(k-1)y(k-2)}{(1+y(k-1)^2+y(k-2)^2)} + 0.3\cos(.5(y(k-1) + y(k-2))) + 1.2u(k-1-d) \quad (4.84)$$

A planta será simulada com o modelo mostrado na equação (4.84) incluindo um atraso de transporte  $d$  enquanto que no modelo utilizado para obter as predições considera-se  $d = 0$ . A fim de comparar o desempenho do sistema de controle PNMPC utilizando a técnica de introdução de robustez proposta apresenta-se inicialmente o resultado obtido quando se aplica o procedimento convencional de aumentar a ponderação do esforço de controle aumentando o valor dos elementos da diagonal da matriz  $\mathbf{Q}$ . Na sequência apresenta-se o resultado com a técnica proposta.

Os seguintes parâmetros foram utilizados nas simulações:

- $p=10$
- $m=3$
- Peso na ponderação do esforço de controle utilizando a solução convencional:  $\mathbf{Q} = 60\mathbf{I}(m, m)$
- Peso na ponderação do esforço de controle utilizando a solução robusta proposta: 0.0
- Peso na ponderação da robustez:  $\mathbf{P} = 0.03\mathbf{I}(p, p)$
- Limite inferior de  $\frac{dV}{dt}$ :  $\varepsilon = -0.01$

Além disso, aplicou-se uma perturbação na saída igual a 0.25 no instante de amostragem igual a 275 com duração de 4 amostras.

A coluna esquerda da figura 4.25 mostra o resultado da aplicação da técnica PNMPC utilizando a ponderação no esforço de controle para um erro de atraso de transporte entre modelo e planta igual a 5. A coluna da direita da mesma figura mostra o resultado com a aplicação da técnica robusta proposta para o mesmo caso. Neste caso não se utilizou nenhuma ponderação no esforço de controle para deixar evidente o efeito da técnica. Nota-se que o resultado obtido com ambas as técnicas é muito similar. O resultado com a técnica robusta apresenta um sobressinal maior do que no caso convencional mas parece reagir melhor a perturbação.

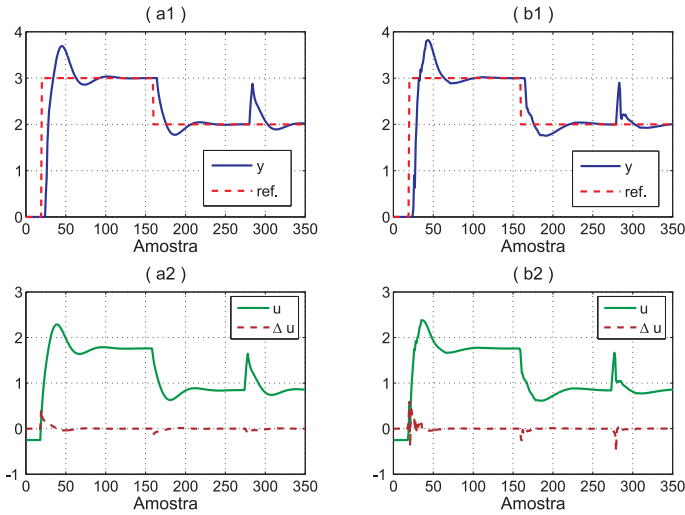


Figura 4.25: Simulação para erro de atraso = 5

A diferença entre as duas técnicas se faz evidente com os resultados da figura 4.26 para o caso onde não há erro entre modelagem e planta. Neste caso fica evidente que a técnica robusta proposta oferece uma resposta muito mais rápida. Resumindo, significa que desconhecendo-se o erro no atraso a utilização da técnica robusta proposta deve oferecer uma resposta mais rápida sempre quando o erro entre a planta e o modelo adotado for pequeno enquanto que a técnica convencional de ponderar o esforço de controle vai penalizar sistematicamente o desempenho da resposta.

A figura 4.27 mostra a derivada da função de Lyapunov ao longo da simulação com erro de atraso igual a 5 amostras. Praticamente todos os valores são menores ou iguais a zero como previsto.

#### 4.7.4 Método iterativo para a restrição quadrática sobre $\Delta u$

Os resultados apresentados nas figuras 4.25, 4.26 e 4.27 utilizam o algoritmo robusto proposto com uma aproximação para um dos vetores  $\Delta u$  da expressão quadrática que aparece na restrição relacionada com a derivada da função de Lyapunov na equação

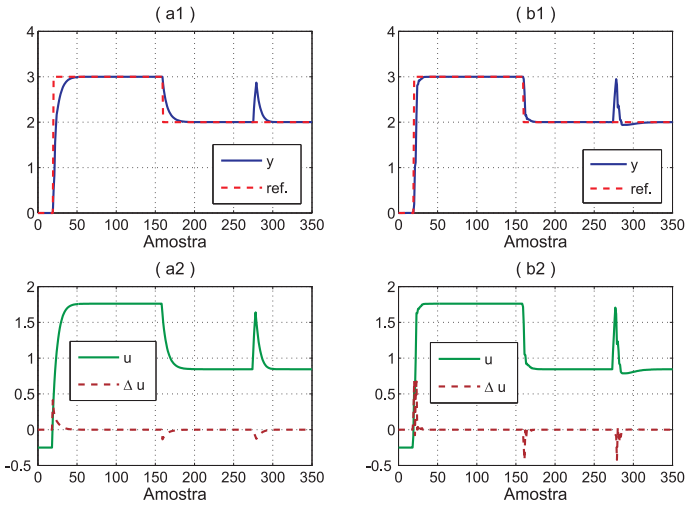


Figura 4.26: Simulação sem erro no atraso

4.79.

Na solução iterativa o vetor  $\Delta \mathbf{u}$  utilizado na primeira iteração é obtido com a aproximação  $\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_{tail}$  como já explicado. Nas iterações seguintes o vetor  $\Delta \mathbf{u}_{tail}$  é atualizado com a contribuição do vetor obtido com a minimização,

$$\Delta \mathbf{u}_{tail}(k) = \alpha \Delta \mathbf{u}_{k-1} + (1 - \alpha) \Delta \mathbf{u}_{tail}(k - 1). \quad (4.85)$$

O processo iterativo termina quando  $(\Delta \mathbf{u}_{tail}(k) - \Delta \mathbf{u}_k)^T (\Delta \mathbf{u}_{tail}(k) - \Delta \mathbf{u}_k)$  é menor que um determinado valor próximo de zero ou quando o número de iterações atinge um valor limite.

A figura 4.28 apresenta os resultados obtidos com o algoritmo iterativo para a minimização da função objetivo. As figuras da coluna esquerda apresentam os resultados para o caso em que há um erro no atraso de transporte entre o modelo da planta e o modelo de previsão igual a 5 instantes de amostragem. Na coluna da direita estão os resultados para o caso em que não há erro de modelagem. Em ambas as colunas apresenta-se a saída no gráfico do topo, a ação de controle e o incremento de controle no gráfico do meio e a derivada da função de Lyapunov no gráfico da base. O objetivo não é propor um método para resolver problemas de

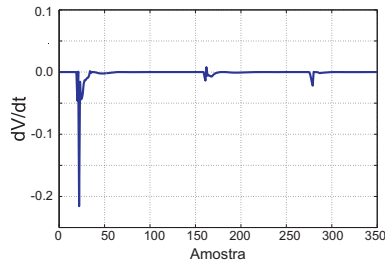


Figura 4.27: Derivada da função de Lyapunov para erro de atraso=5

Programação quadrática com restrições não lineares mas avaliar o desempenho da proposta NMPC robusta. O algoritmo iterativo mostrou-se bastante eficiente para este caso o que era de se esperar pois o valor inicial de  $\Delta \mathbf{u}_{tail}$  é muito bom já que se nada mudar na referência ou se não houver perturbações seu valor seria exato. Para sistemas adequadamente amostrados não se espera grandes mudanças entre iterações sucessivas. Os resultados obtidos e apresentados na figura 4.28 mostram um comportamento da ação de controle mais suave e que o valor da derivada da função de Lyapunov se manteve sempre negativa. O efeito da perturbação na saída foi também menor do que o obtido com o algoritmo aproximado.



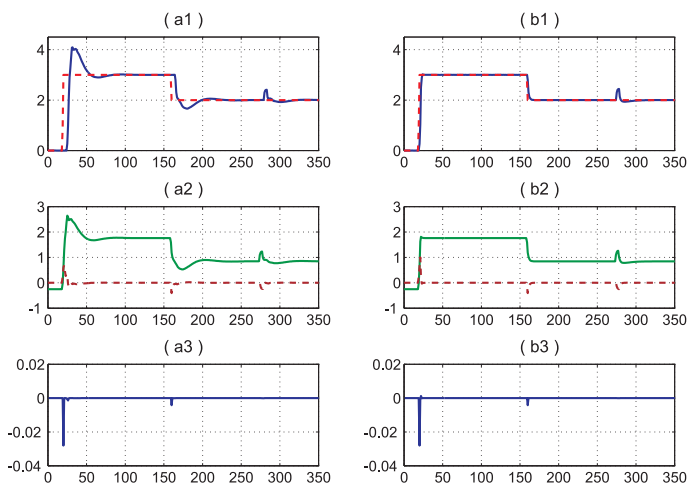


Figura 4.28: Desempenho do método com algoritmo iterativo

### Exemplo 6

A figura 4.29 mostra o diagrama de processo de um aquecedor de água em linha. O objetivo do processo é manter a temperatura e a vazão na saída do duto em valores desejados. Para mostrar a vantagem da técnica robusta proposta supõe-se que a medição da temperatura é realizada a uma distância  $L_t$  do aquecedor. O

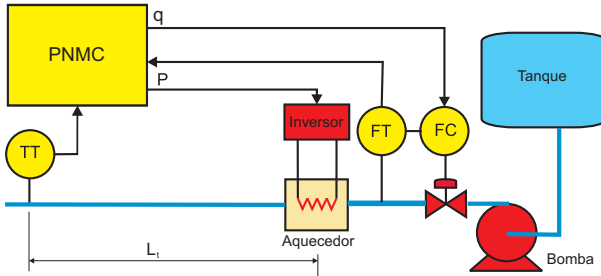


Figura 4.29: Sistema de aquecimento de água em linha

modelo do processo pode ser realizado utilizando-se um balanço de energia no volume do aquecedor. A variação da energia no interior do aquecedor  $\Delta E_{interna}$  é igual a diferença entre a energia que entra  $E_{entra}$  e a energia que sai,  $E_{sai}$ .

$$E_{entra} - E_{sai} = \Delta E_{interna} \quad (4.86)$$

Os parâmetros e variáveis do processo utilizados na simulação são apresentados na tabela 4.1. Assumindo perdas nulas para simplificar,

$$\begin{aligned} E_{entra} &= \rho_a q \Delta t c_a T_e + P \Delta t, \\ E_{sai} &= \rho_a q \Delta t c_a T_i, \\ \Delta E_{interna} &= \rho_a A_a L_a c_a \Delta T_i, \text{ ou} \\ \rho_a A_a L_a c_a \Delta T_i &= \rho_a q \Delta t c_a T_e + P \Delta t - \rho_a q \Delta t c_a T_i \end{aligned} \quad (4.87)$$

Dividindo a última linha do conjunto de equações 4.87 por  $\rho_a A_a L_a c_a \Delta t$ , obtém-se

$$\frac{\Delta T_i}{\Delta t} = -\frac{q}{A_a L_a} T_i + \frac{q}{A_a L_a} T_e + \frac{1}{\rho_a c_a A_a L_a} P, \quad (4.88)$$

Tabela 4.1: Parâmetros e variáveis do processo

Símbolo	Descrição	Valor
$T_e$	Temp. água entrando no aquecedor	[ $K$ ]
$T_i$	Temp. água interior do aquecedor	[ $K$ ]
$q$	Vazão na linha	[ $m^3/s$ ]
$P$	Potência forn. ao aquecedor	[ $W$ ]
$c_a$	Calor específico da água	[ $4168 J/KgK$ ]
$L_a$	Comprimento do aquecedor	[ $0,3m$ ]
$D_a$	Diâmetro do aquecedor	[ $1,5 \times 0,0254 m$ ]
$D_t$	Diâmetro do duto	[ $0,5 \times 0,0254 m$ ]
$L_t$	Dist. aquecedor-transm. temp.	[ $1,25 m$ ]

no limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\frac{dT_i}{dt} = -\frac{q}{A_a L_a} T_i + \frac{q}{A_a L_a} T_e + \frac{1}{\rho_a c_a A_a L_a} P. \quad (4.89)$$

A fim de utilizar a vazão em unidades *litros/hora* multiplica-se a vazão por  $k_q = 1/1000 \times 3600$  e obtém-se

$$\frac{dT_i}{dt} = -\frac{k_q q}{A_a L_a} T_i + \frac{k_q q}{A_a L_a} T_e + \frac{1}{\rho_a c_a A_a L_a} P. \quad (4.90)$$

Supõe-se que a temperatura de saída do aquecedor é igual a temperatura interna  $T_i$ . Utilizando a aproximação de Euler para a derivada pode-se reescrever a equação 4.90 na forma discreta como,

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{T_i(k) - T_i(k-1)}{T_s}, \quad (4.91)$$

$$T_i(k) = T_i(k-1) - T_s \frac{k_q q (k-1)}{A_a L_a} T_i(k-1) + T_s \frac{k_q q (k-1)}{A_a L_a} T_e + T_s \frac{1}{\rho_a c_a A_a L_a} P(k-1).$$

Definindo-se

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{T_s k_q}{A_a L_a}, \text{ e} \\ k_2 &= \frac{T_s}{\rho_a c_a A_a L_a}, \end{aligned} \quad (4.92)$$

pode-se escrever

$$T_i(k) = T_i(k-1) - k_1 q(k-1) T_i(k-1) + k_1 q(k-1) T_e + k_2 P(k-1). \quad (4.93)$$

A medição da temperatura é realizada a uma distância  $L_t$  na direção do fluxo. Nesta posição, desprezando perdas, a temperatura medida no instante  $k$ ,  $T(k)$  é igual a temperatura que aconteceu  $d$  instantes de tempo igual ao período de amostragem  $T_s$  atrás na saída do aquecedor. Na forma de equação contínua o atraso  $\sigma$  deveria satisfazer a equação

$$\begin{aligned} L_t &= \int_{T_0}^{T_0 - \sigma} v(t) dt, \\ v(t) &= \frac{q(t)}{A_t} \end{aligned} \quad (4.94)$$

e o atraso  $d$  seria calculado como o valor inteiro mais próximo de  $\frac{\sigma}{T_s}$ . Uma outra forma é buscar  $d$  que satisfaz

$$\begin{aligned} d &\in \mathbf{Z} \\ L_t &= \sum_{i=d}^{i=0} v(k-i) T_s \\ v(k-i) &= \frac{q(k-i)}{A_t} \end{aligned} \quad (4.95)$$

De forma que a temperatura  $T$ , medida na posição  $L_t$  distante do aquecedor, pode ser escrita como

$$T(k) = T_i(k-d). \quad (4.96)$$

Se colocarmos um atraso  $d$  em todas as variáveis da equação 4.93,

$$\begin{aligned} T_i(k-d) &= T_i(k-1-d) - k_1 q(k-1-d) T_i(k-1-d) + \\ & k_1 q(k-1-d) T_e + k_2 P(k-1-d). \end{aligned} \quad (4.97)$$

Utilizando a equação 4.96 em 4.97,

$$\begin{aligned}
 T(k) &= T(k-1) - k_1 q(k-1-d)T(k-1) + k_1 q(k-1-d)T_e \\
 &+ k_2 P(k-1-d).
 \end{aligned}
 \tag{4.98}$$

A equação 4.98 relaciona a temperatura medida  $T(k)$  com a vazão  $q(k-1-d)$  e com a potência elétrica aplicada  $P(k-1-d)$  no aquecedor de forma não linear. Não se aplicou o atraso na temperatura de entrada já que supõe-se que a mesma não está sendo medida.

Para mostrar o desempenho da técnica PNMPC robusta proposta simula-se a aplicação de controle utilizando o algoritmo PNMPC com e sem a aplicação da técnica proposta para lidar com erro de modelagem de forma robusta. O objetivo do controle é levar a temperatura no ponto de medição para determinados valores desejados enquanto se mantém a vazão o mais próximo possível de um valor desejado. A tabela 4.2 apresenta os valores dos parâmetros do processo utilizados na simulação: Trata-se de um

Tabela 4.2: Parâmetros do processo de aquecimento

Variável	Valor	Unidade
$q_{des.}$	500	l/h
$T_{des.}$	diversas	K
$T_e$	293	K
$P_{max.}$	10000	W
$P_{min.}$	0	W
$q_{max.}$	2000	l/h
$q_{min.}$	250	l/h

problema MPC com dois objetivos. Além disso é também um problema com duas entradas e duas saídas. A função custo utilizada consiste em ponderar com pesos diferentes

- o seguimento da temperatura de referência, (peso  $\mathbf{R}_1$ ),
- o desvio da vazão desejada, (peso  $\mathbf{R}_2$ ),
- os elementos do vetor  $\Delta \mathbf{u}$  relacionados com a Potência elétrica, (peso  $\mathbf{S}_1$ ),
- os elementos do vetor  $\Delta \mathbf{u}$  relacionados com a Vazão, (peso  $\mathbf{S}_2$ ).

Definindo  $\mathbf{I}_m$  como a matriz identidade  $m \times m$ ,  $\mathbf{I}_p$  como a matriz identidade  $p \times p$ ,  $\mathbf{0}_m$  como a matriz de zeros  $m \times m$ , e

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{m \times m} \\
 \mathbf{1}_m &= [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{m \times 1}^T \\
 \mathbf{1}_p &= [1 \ 1 \ \dots \ 1]_{p \times 1}^T \\
 \mathbf{0} &= [0 \ 0 \ \dots \ 0]_{m \times 1}^T
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_1 &= \alpha_1 \mathbf{I}_p \\
 \mathbf{R}_{2b} &= \alpha_2 \mathbf{I}_m \\
 \mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{R}_{2b} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{S}_1 &= \lambda_1 \mathbf{I}_m \\
 \mathbf{S}_2 &= \lambda_2 \mathbf{I}_m \\
 \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ q_{k-1} \mathbf{1}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\
 \mathbf{Q}_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ q_{des} \mathbf{1}_m \end{bmatrix} \\
 \mathbf{W} &= T_{des} \mathbf{1}_p
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

Com essas definições pode-se escrever o problema de encontrar o vetor incremento de controle  $\Delta \mathbf{u}$  como a minimização da seguinte

função objetivo com restrições,

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Delta \mathbf{u}} J \\
 & \text{s. a.} \\
 & J = \left( \tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{W} \right)^T \mathbf{R}_1 \left( \tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{W} \right) + \left( \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_d \right)^T \mathbf{R}_2 \left( \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_d \right) \\
 & + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{S} \Delta \mathbf{u} \\
 & \begin{bmatrix} P_{k-1} \mathbf{1}_m \\ q_{k-1} \mathbf{1}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} P_{max} \mathbf{1}_m \\ q_{max} \mathbf{1}_m \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} P_{k-1} \mathbf{1}_m \\ q_{k-1} \mathbf{1}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} > \begin{bmatrix} P_{min} \mathbf{1}_m \\ q_{min} \mathbf{1}_m \end{bmatrix}, \quad (4.101)
 \end{aligned}$$

onde  $\tilde{\mathbf{Y}}$  é o vetor com as predições no horizonte de predição  $p$  obtido com a técnica PNMPC na forma  $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{F} + \mathbf{G} \Delta \mathbf{u}$ . Os parâmetros de sintonia utilizados na aplicação do algoritmo PNMPC sem a técnica robusta são apresentados na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros de sintonia do algoritmo PNMPC sem utilização da técnica robusta

Parâmetro	Descrição	Valor
$p$	Horizonte de predição	100
$m$	Horizonte de controle	3
$\alpha_1$	Pond. p/ refer. Temperatura	1
$\alpha_2$	Pond. p/ refer. Vazão	0,00025
$\lambda_1$	Pond. incremento Pot. Elétrica	0,01
$\lambda_2$	Pond. incremento Vazão	5

As simulações com ou sem a utilização da técnica robusta utilizam o mesmo modelo para predição com um atraso fixo igual a 4 tempos de amostragem que é em geral menor do que o tempo de atraso que depende da vazão. A figura 4.30 mostra o resultado obtido com a aplicação do algoritmo PNMPC sem a utilização da técnica que introduz robustez proposta. Este é um dos resultados possíveis a depender do ajuste dos parâmetros  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  se considerarmos fixos os valores de  $\alpha_1$ ,  $p$  e  $m$ . Nota-se que a temperatura apresenta um comportamento lento mas segue a referência desejada. Nesta simulação foi necessário a utilização de um valor muito grande para  $\alpha_2$  que pondera a variação nos incrementos de vazão,  $\Delta \mathbf{q}$ , a fim de garantir a estabilidade. Isto comprometeu

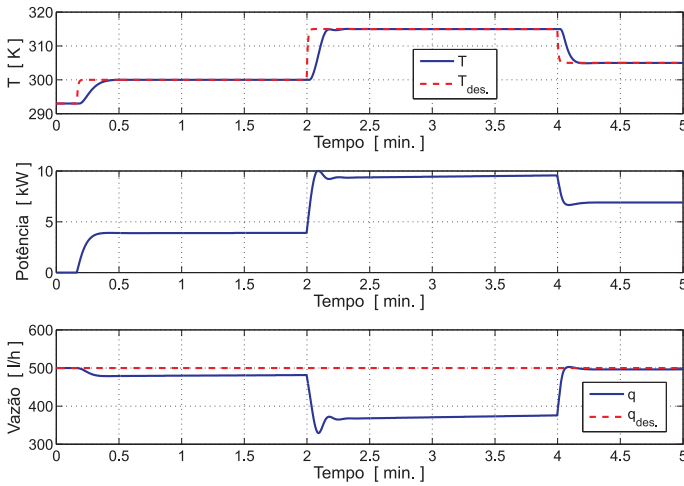


Figura 4.30: Aplicação de PNMPC não robusto

a capacidade do controle de levar a vazão para valores próximos do valor desejado. A evolução da vazão quando a referência para a temperatura passa a  $315\text{ K}$  é tão lenta que a vazão se mantém tão baixa a ponto de não utilizar toda a potência elétrica disponível para o aquecimento. O comportamento normal seria a vazão crescer até o ponto em que a potência atingisse o valor máximo  $P_{max.} = 10000\text{ W}$ . A figura 4.31 mostra que o sistema instabiliza quando se diminui a ponderação sobre a variação nos incrementos de vazão  $\Delta q$  utilizando a mesma ponderação que no algoritmo PNMPC robusto. Para a simulação com o algoritmo robusto utilizou-se os parâmetros apresentados na tabela 4.4.

Os resultados da aplicação do algoritmo robusto são apresentados nas figuras 4.32 e 4.33. Utilizou-se a versão iterativa do algoritmo PNMPC robusto onde o vetor  $\Delta \mathbf{u}$  é obtido com um método iterativo conforme já descrito anteriormente. Observa-se neste caso que a temperatura atinge a referência de forma mais rápida do que no caso não robusto e, além disso, a vazão é tão próxima do valor desejado quanto é possível pela saturação da potência em seu valor máximo. Isto é, na ausência de saturação da potência elétrica a vazão atinge a vazão desejada. No caso da saturação da potência elétrica para a temperatura de referência igual a  $315$  a vazão fica limitada ao valor máximo que, com a potência



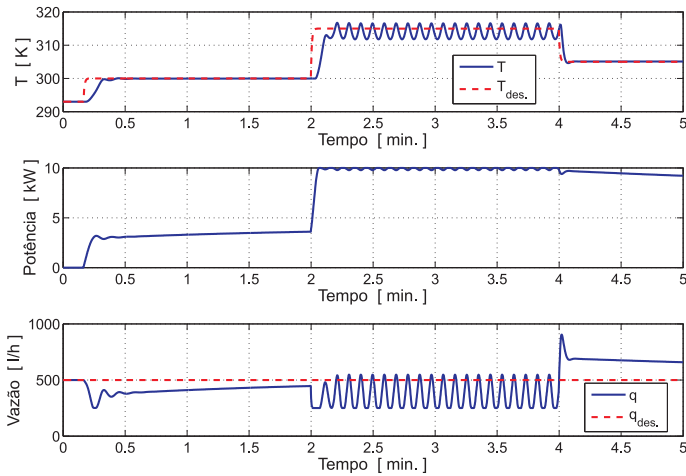


Figura 4.31: Aplicação de PNMPC não robusto com  $\alpha_2 = 0,2$

disponível fornece a temperatura desejada. A figura 4.33 mostra algumas variáveis auxiliares obtidas com a simulação. A figura 4.33-a mostra o valor da derivada da função de Lyapunov a cada instante de tempo e nota-se que é sempre menor ou igual a zero e maior que o valor mínimo estipulado. A figura 4.33-b mostra o valor do atraso real do processo durante a simulação onde observa-se que atinge um valor máximo igual a 23 tempos de amostragem que é muito maior do que o valor igual a 4 utilizado no modelo de predição. A figura 4.33-c mostra o número de vezes que o algoritmo de programação quadrática foi acionado para determinar  $\Delta \mathbf{u}$ . Nota-se que em regime permanente o número é igual a 1 o que significa que não houve iterações e a aproximação de um dos vetores  $\Delta \mathbf{u}$  utilizando a cola ou *tail* do vetor calculado no instante de amostragem anterior é um ótimo valor inicial para o método iterativo. Nota-se também que o número de iterações utilizado foi relativamente pequeno. A figura 4.33-d mostra o erro de predição e o fator de correção  $\eta$ . Como o erro simulado é somente de atraso nota-se que o fator de correção vai a zero em regime permanente. Nos momentos de mudança de referência tem-se valores não nulos como era de se esperar.

Tabela 4.4: Parâmetros de sintonia do algoritmo PNMPC com a utilização da técnica robusta

Parâmetro	Descrição	Valor
$p$	Horizonte de predição	100
$m$	Horizonte de controle	3
$\alpha_1$	Pond.p/ refer. Temperatura	1
$\alpha_2$	Pond. p/ refer. Vazão	0,00025
$\lambda_1$	Pond. incremento Pot. Elétrica	0,0003
$\lambda_2$	Pond. incremento Vazão	0,2
$\mathbf{P}$	Pond. esforço de robustez	$0,01\mathbf{I}_p$
$\epsilon$	Valor mínimo para a $\frac{dL}{dt}$	-0,5

### Exemplo 7

Em [86] apresenta-se uma técnica de controle MPC robusta e sua aplicação a um reator de oxido de etileno. O sistema é modelado através de uma matriz função de transferência na forma contínua mostrada na equação 4.102 e na forma discreta equivalente (utilizando uma tempo de amostragem de 1 segundo) na equação 4.103.

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.19}{s} & \frac{-nc_{12}}{dc_{12}s+1} \\ \frac{nc_{21}}{dc_{21}s+1} & \frac{0.235}{s} \end{bmatrix} \quad (4.102)$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{-0.19}{z-1} & \frac{nd_{12}}{z-dd_{12}} \\ \frac{nd_{21}}{z-dd_{21}} & \frac{0.235}{z-1} \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Os valores de  $nd_{12}$ ,  $nd_{21}$ ,  $dd_{12}$  e  $dd_{21}$  utilizados na simulação da planta são apresentados na tabela 4.5. Para testar a robustez do algoritmo de controle concebeu-se 4 modelos de predição numerados de 1 a 4 com variações nos valores dos parâmetros. O desafio é controlar o sistema utilizando os modelos de predição com ganhos menores e constantes de tempo maiores do que a planta. A técnica utilizando MPC com equações de estado denominada *Cost Contracting Technique* para sistemas integradores é apresentada em [86] e controla o sistema. Apresenta-se aqui uma versão do algoritmo PNMPC para sistemas lineares mas incorporando a técnica robusta proposta. Uma das questões sobre a utilização da técnica robusta proposta diz respeito a factibilidade da solução.

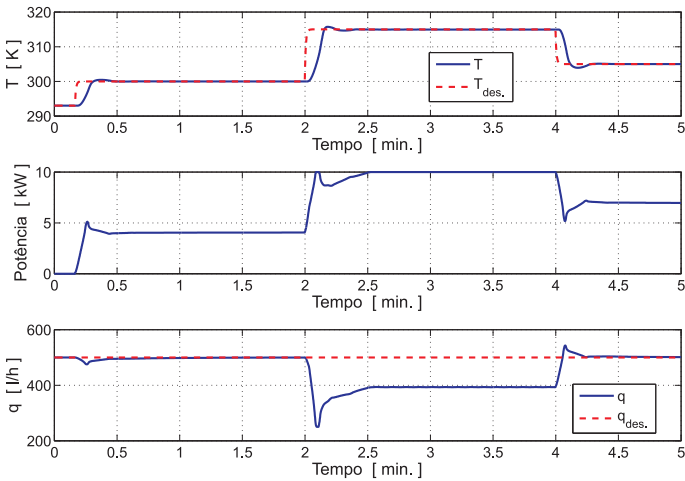


Figura 4.32: Aplicação de PNMPC robusto

Tabela 4.5: Parâmetros do modelo discreto

<i>Mod.</i>	$nd_{12}$	$dd_{12}$	$nd_{21}$	$dd_{21}$
<i>True</i>	-0.5677	0.8787	-0.2178	0.8963
1	-0.1226	0.9738	-0.0044	0.9448
2	-0.0125	0.9262	-0.0143	0.9932
3	-0.0045	0.9738	-0.0005	0.969
4	-0.0850	0.9500	-0.0236	0.8963

Ou seja, existe a solução e o algoritmo proposto tem condições de encontrá-la? Para este problema resolveu-se mostrar que

- a matriz Hessiana da função objetivo é positiva definida. Isto é verificado mostrando que o determinante de todas as matrizes menores principais, (*leading minors*) da matriz Hessiana são maiores do que zero.
- O Número de condição da matriz Hessiana apresenta valores pequenos. A matriz Hessiana não é singular nem tampouco se aproxima da singularidade.
- O método iterativo utilizado para tratar da restrição quadrática em  $\Delta \mathbf{u}$  converge em poucas iterações. O método é muito semelhante ao consagrado método *simplex*, [87], utilizado na

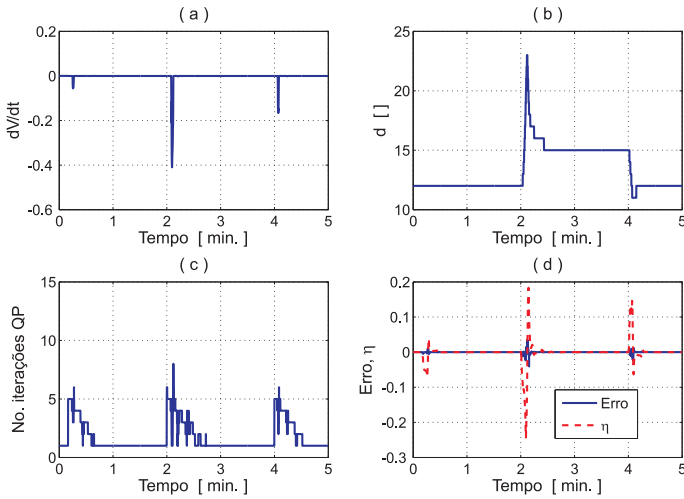


Figura 4.33: Aplicação de PNMPC robusto-variáveis auxiliares

solução de equações lineares onde parte-se de um bom valor inicial e o sistema converge para o valor correto. Neste caso a natureza do problema fornece naturalmente um ótimo valor inicial que é a cola ou *tail* do vetor  $\Delta \mathbf{u}$  obtido no instante de amostragem anterior.

- O sistema controlado com a técnica robusta proposta é estável com uma ampla faixa de valores de ponderação na diagonal da matriz  $\mathbf{P}$ . Isto será mostrado variando-se o valor da diagonal da matriz  $\mathbf{P}$  entre 1% e 100% do seu valor nominal.

Para demonstrar o desempenho da técnica PNMPC robusta aplicada neste exemplo a planta foi simulada com o modelo real mostrado na tabela 4.5. O modelo utilizado para as previsões inicia com o modelo 4 que é substituído pelo modelo número 3 no tempo igual a 100 s, pelo modelo número 2 no tempo igual a 130 s e pelo modelo 1 a partir do tempo igual a 160 s. Os parâmetros utilizados para a sintonia do algoritmo PNMPC robusto são apresentados na tabela 4.6.

As restrições utilizadas são as mesmas adotadas em [86]. A escolha dos parâmetros de sintonia como  $p$ ,  $m$  e as ponderações

Tabela 4.6: Parâmetros de sintonia do algoritmo PNMPC com a utilização da técnica robusta p/ o controle do reator de oxido de etileno

Parâmetro	Descrição	Valor
$p$	Horizonte de predição	6
$m$	Horizonte de controle	3
$\mathbf{R}_1$	Pond.p/ referência saída 1	$1, \mathbf{1I}_{p,p}$
$\mathbf{R}_2$	Pond. p/ referência saída 2	$1, \mathbf{1I}_{p,p}$
$\mathbf{Q}_1$	Pond. incr. controle p/ entrada 1	$\mathbf{I}_{m,m}$
$\mathbf{Q}_2$	Pond. incr. controle p/ entrada 2	$1, 65\mathbf{I}_{m,m}$
$a$	Const. p/ filtragem erro de predição	$a = 0.8$
$\mathbf{P}_1$	Peso para robustez erro 1	$0.06\mathbf{I}_{p,p}$
$\mathbf{P}_2$	Peso para robustez erro 2	$0.22\mathbf{I}_{p,p}$
$\epsilon$	Mín. p/ a derivada da função de Lyapunov	-2.0
$u_1^{max}$	Valor máximo para entrada 1	0,75
$u_2^{max}$	Valor máximo para entrada 2	0,75
$u_1^{min}$	Valor mín. para entrada 1	-0,75
$u_2^{min}$	Valor mín. para entrada 2	-0,75
$\Delta u_1^{max}$	Valor máximo p/ incr. entrada 1	0,5
$\Delta u_2^{min}$	Valor mínimo p/ incr. entrada 2	-0,5

utilizadas seguem a critério tradicional de balancear desempenho e robustez e exceto pela matriz  $\mathbf{P}$  não serão discutidas.

A figura apresenta as variáveis controladas e manipuladas aplicando a sintonia descrita. Nota-se que as variáveis atingem o valor de referência sem oscilações e as ações de controle seguem as restrições impostas. A figura 4.35 mostra diversas variáveis de interesse. As figuras 4.35-a e 4.35-b mostram o erro de modelagem e a integral do erro filtrado para a variável 1 e 2 respectivamente. Nota-se que a utilização de  $a = 0,8$  no algoritmo de tratamento do erro de modelagem resulta em uma integral do erro filtrado bastante suave. A figura 4.35-c mostra a evolução da derivada da função de Lyapunov. Como exigido cada vez que se calcula a ação de controle ela é mantida sempre menor ou igual a zero e obedece o limite inferior igual a  $-2$ . Como o problema de encontrar o vetor  $\Delta \mathbf{u}$  significa encontrar o mínimo de uma função quadrática,

$$J = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Phi \Delta \mathbf{u} + \Theta^T \Delta \mathbf{u}, \quad (4.104)$$

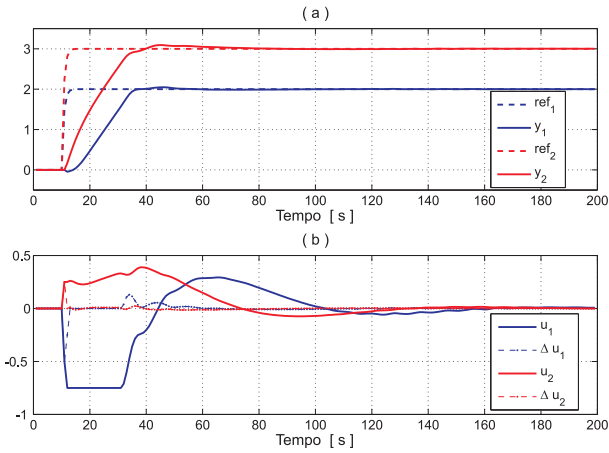


Figura 4.34: Resposta com aplicação da técnica robusta

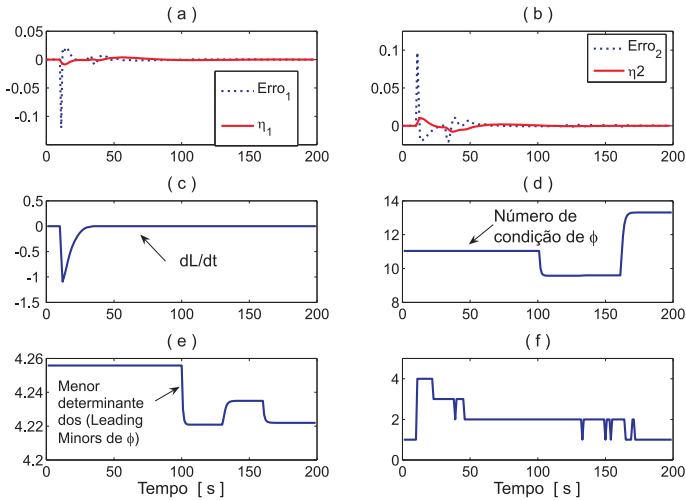


Figura 4.35: Variáveis auxiliares obtidas com a simulação

então é importante garantir que a matriz  $\Phi$  seja inversível e também positiva definida. A figura 4.35-d mostra o número de condição da matriz  $\Phi$  e a figura 4.35-e mostra o valor do menor

determinante dentre os *leading minors* da matriz  $\Phi = \frac{\partial^2 J}{\partial \Delta \mathbf{u}^2}$ . Observa-se que o número de condição é pequeno indicando que a matriz é inversível e está longe da singularidade. O fato do menor valor dentre os determinantes dos *leading minors* da matriz  $\Phi$  ser positivo indica que a matriz é positiva definida e a matriz apresenta um mínimo global na ausência de restrições. A figura 4.35-f apresenta o número de vezes que se utilizou o algoritmo de programação quadrática no processo iterativo devido a restrição quadrática. Nota-se que atingiu-se o erro aceitável com no máximo 3 iterações e que em regime permanente, depois das mudanças de modelo, não se fez necessário iterações extras devido a utilização do valor inicial de  $\Delta \mathbf{u}_{esp}$ , igual a cola de  $\Delta \mathbf{u}$  utilizado no instante de amostragem anterior.

A fim de mostrar a robustez da solução robusta proposta simulou-se a aplicação do algoritmo PNMPC robusto com valores de  $\mathbf{P}$  variando desde 1 % até 110 % do valor nominal utilizado. Os resultados são apresentados na figura 4.36.

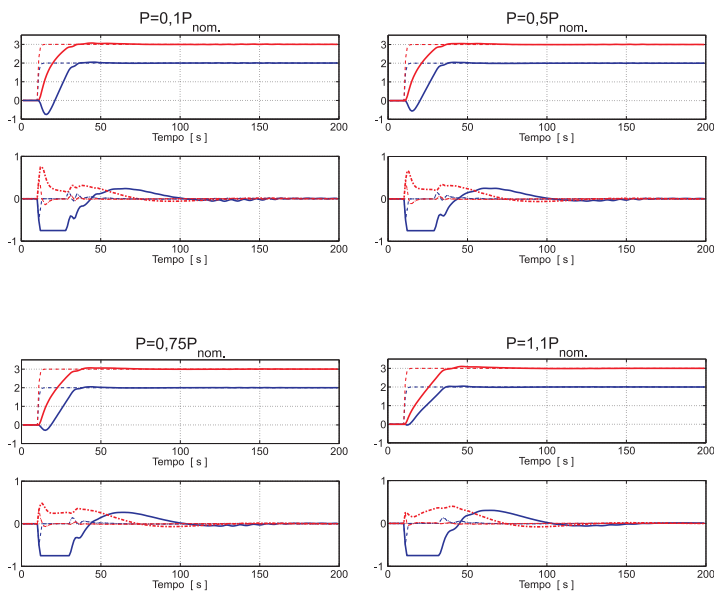


Figura 4.36: Desempenho do algoritmo com diferentes pesos  $\mathbf{P}$

Percebe-se que todas as escolhas da matriz de ponderação  $\mathbf{P}$  fornecem uma resposta estável das saídas apesar de um comportamento dinâmico diferente na mudança de referência mostrando que não seria difícil encontrar uma ponderação  $\mathbf{P}$  que estabilize o sistema. A figura 4.37 mostra a resposta obtida sem a utilização da técnica robusta mas com todos os demais parâmetros de sintonia do algoritmo PNMPC robusto utilizados anteriormente. Observa-se que o algoritmo PNMPC sem a técnica robusta consegue estabilizar o sistema até o tempo igual a 100 segundos quando o modelo de predição é o de número 4. Para os modelos número 3 e 2 utilizados a partir do tempo igual a 100 segundos o sistema instabiliza e só não cresce indefinidamente devido a restrição nos incrementos e nas ações de controle. A instabilidade fica também evidente pelos valores positivos da derivada da função de Lyapunov mostrada na figura 4.38-c. O comportamento dos erros de modelagem e fatores de correção mostrados nas figuras 4.38-a e 4.38-b também mostram o comportamento oscilatório durante o tempo em que o modelo de predição utilizado foi o número 3 e 2. O comportamento do sistema com o modelo número 1, a partir do tempo igual a 160 segundos, apresenta uma oscilação moderada e as ações de controle não atingiram seus valores de saturação. O sistema parece a beira da instabilidade e simulações com a introdução de ruído mostram que o sistema instabiliza para todos os modelos de predição 4, 3, 2 e 1. Verificou-se também que a utilização do tratamento do erro de modelagem com  $a = 0$  instabiliza o sistema para todos os modelos de 1 a 4. Já a utilização de  $a = 0,9$  estabiliza o sistema para os modelos 4 e 1 mas não para os modelos 3 e 2.

## 4.8 Conclusão e desenvolvimentos futuros

Apresentou-se neste capítulo a proposta de um algoritmo MPC para aplicação em sistemas não lineares com comportamento dos estados contínuos e diferenciáveis em relação as entradas. A técnica proposta, denominada de MPC Não linear prático-PNMPC, propõe uma forma generalizada de representação do vetor de predições válida para sistemas lineares ou não lineares (sistemas com estados contínuos e diferenciáveis em relação as entradas). A representação linear das predições é realizada utilizando-se um pro-



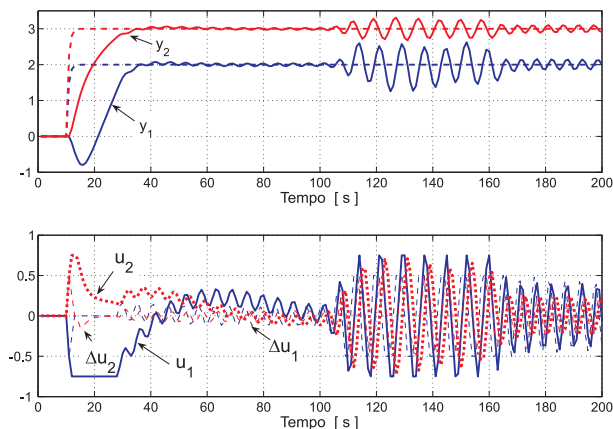


Figura 4.37: Resultado da simulação sem aplicação da técnica robusta

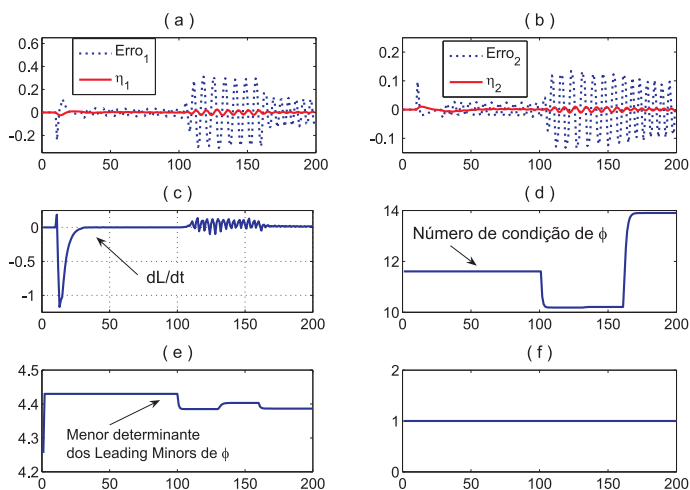


Figura 4.38: Variáveis auxiliares na simulação sem a técnica robusta

cedimento numérico e por isso o algoritmo pode ser aplicado as mais diversas formas de representação de sistemas não lineares como redes neurais, modelos NARMAX, etc.

Com o intuito de obter melhores previsões, desenvolve-se um

procedimento numérico de dois passos que obtém uma aproximação linear com qualidade próxima a representação Taylor de 2a. ordem. A técnica proposta incorpora uma metodologia para o tratamento de erros de modelagem baseada na escolha de um único parâmetro que pondera o requisito de filtragem de ruído e velocidade de resposta.

A estabilidade do algoritmo é fortemente melhorada com a incorporação de uma técnica que coloca o requisito de estabilidade na função objetivo. Isto é realizado exigindo-se que a derivada de uma função de Lyapunov mantenha-se negativa no horizonte de predição.

A implementação deste requisito no algoritmo de Programação Quadrática enfrenta a dificuldade do surgimento de uma restrição quadrática no vetor incremento de controle  $\Delta \mathbf{u}$ .

Uma solução inicial para este problema é apresentada e consiste na transformação da restrição quadrática sobre  $\Delta \mathbf{u}$  em linear ao se aproximar um dos vetores  $\Delta \mathbf{u}$  como a cola do vetor obtido no instante de amostragem anterior,  $\Delta \mathbf{u}_{tail}$ .

Na sequência desenvolve-se um processo iterativo onde a restrição é transformada em linear ao se estimar um valor inicial do vetor incremento de controle baseado na cola do vetor  $\Delta \mathbf{u}$  anterior,  $\Delta \mathbf{u}_{tail}$  somente na primeira iteração. Este vetor é corrigido com parte do novo vetor obtido a cada iteração em um processo iterativo que é interrompido quando o erro entre este e o vetor  $\Delta \mathbf{u}$  atual obtido torna-se suficientemente pequeno.

A solução do problema de Programação Quadrática com restrição quadrática não é o objetivo principal deste trabalho mas deve ser investigada na continuação da pesquisa com o objetivo de aprimorar o algoritmo e estabelecer as condições de operação segura do mesmo.

Não é demais voltar a salientar que o algoritmo desenvolvido aplica-se a sistemas contínuos em relação as entradas e que sejam amostrados seguindo as melhores técnicas de amostragem de sistemas. O algoritmo é aplicado aos estados do sistema e este trabalho não pretende oferecer nenhuma novidade na questão relacionamentos estado-saída de sistemas.

## Capítulo 5

# Controle aplicado a poços operando via GLC

Nos últimos 10 anos algumas empresas atuando na exploração e produção de petróleo começaram a introduzir técnicas de controle e automação na operação de poços de petróleo. Essas iniciativas resultaram em técnicas com nomes como *smart wells*, *intelligent wells*, *smart fields* ou Gerenciamento Digital Integrado da Produção-GEIDG na Petrobras, [88]. A introdução da tecnologia da informação no sistema de produção de petróleo é lento principalmente devido ao custo proibitivo da intervenção em poços para a instalação dos sensores e atuadores necessários. Além disso os equipamentos a serem instalados no fundo dos poços tem de suportar as condições adversas causadas por alta pressão, temperatura e vibrações. Neste capítulo apresenta-se uma breve revisão do desenvolvimento de técnicas de controle, otimização e automação da operação de poços utilizando elevação do tipo GLC. Na sequência são apresentados duas abordagens para a automação da operação.

## 5.1 Introdução

O desenvolvimento de técnicas de controle para poços operando via GLC tem sido intenso no meio acadêmico e industrial como em [22], [89], [23], [24], [31], [25], [26], [27], [28], [29], [30],[44]. A otimização da produção de poços operando via GLC tem recebido também a atenção de diversos pesquisadores com os primeiros trabalhos publicados na década de 70. Em [90], o termo curva de desempenho (*well performance curve* ou WPC) foi introduzido e utilizado para modelar a relação entre gás de injeção e taxa de produção. O método *equal-slope* foi proposto em [91]. A distribuição do gás de injeção é obtida computando a inclinação (*slope*) das tangentes das curvas de desempenho que satisfazem as condições de otimalidade de primeira ordem (*Karush-Kuhn-Tucker Conditions*) [52].

Uma abordagem mais flexível para o problema de alocação de gás de injeção foi proposta em [92, 93]. Nishikiori *et al.* desenvolveram um método, baseado no método quasi-Newton e projeção de gradiente, capaz de tratar limites de injeção nos poços além da restrição de disponibilidade de gás de injeção. Um procedimento heurístico foi também desenvolvido para encontrar uma estimativa inicial que esteja dentro da região de convergência do algoritmo quasi-Newton.

Em [94], um método com convergência global foi proposto para encontrar a alocação ótima de gás de injeção que maximiza a produção de óleo. Este método pode ser visto como uma extensão do método proposto em [92, 93], o qual utiliza um algoritmo de programação quadrática seqüencial (PQS) [95] no lugar do método quasi-Newton. Em [96, 97], um modelo linear por partes alternativo é proposto para o problema de alocação de gás de injeção, para cenários com restrição na disponibilidade de gás, limites inferiores e superiores para injeção em cada poço e tratamento de curvas de desempenho não-côncavas. Este trabalho traz grande aprofundamento teórico, através do estudo poliédrico do espaço de restrições, e a concepção de cortes baseados na noção de cobertura em problemas da mochila [98, 99]. Estes desenvolvimentos levam a algoritmos tipo *cut-and-branch* eficazes, capazes de resolver problemas de alocação de grande porte e obter uma solução comprovadamente ótima.

Na seqüência é apresentado um resumo de alguns projetos de

controle da operação de poços com elevação do tipo GLC implementados por companhias operadoras.

### 5.1.1 Elf 1990

Diversos trabalhos sobre a otimização da elevação por gas lift tem sido publicados como [100] e [91] mas possivelmente o primeiro trabalho apresentado em Congresso descrevendo a automação da operação de poços operando via gas lift foi o de P. Letemayer e P. M. Miret para o campo de Gonelle no Gabão [101]. Neste trabalho os autores descrevem os benefícios atingidos com a aplicação de uma técnica de controle e automação dos poços do campo de Gonelle, Gabão em Março de 1990. Sem dúvida os principais benefícios foram um aumento da produção de cerca de 20% com uma redução da taxa de injeção de gás também em cerca de 20%. Algumas características da solução adotada são:

- Inferência da vazão de produção baseado na medição da Temperatura do fluido produzido na cabeça do poço.
- Sistema de Controle Local mas conectado a um sistema supervisório, isto é, PLC situado junto a cada poço mas trocando informação com a sala de comando.
- Controle da Vazão de Injeção de Gás é o ajuste principal.
- Medição das pressões na cabeça do poço no tubo de produção, THP, no revestimento, CHP, temperatura no topo do tubo de produção, THT e vazão de injeção de gás, IGR.
- Atuação no *choke* de produção é utilizada para controle de partida e re-partida do poço.

É importante observar que defende-se neste trabalho o controle da vazão de injeção de gás em malha fechada, ”.. Effectively, as a slight plugging occurs, the system detects an IGR decrease and immediately corrects *choke* opening. Plugging tendency is therefore eliminated.”

Neste projeto utiliza-se a atuação no *choke* de produção na estratégia de controle do poço. Sabe-se que a queda de pressão no *choke* de produção transfere-se para um aumento na pressão de fundo. Isto é justificado pelos autores pela necessidade de limitar-se o valor instantâneo da queda de pressão formação-poço

(drawdown) já que a formação é pouco consolidada e exige cuidados especiais.

O trabalho não apresenta maiores detalhes sobre a técnica de otimização utilizada na alocação de gás e tampouco descreve os algoritmos de controle.

Desde a publicação do trabalho de P. Letemayer e P. M. Miret no campo de Gonelle muitos outros trabalhos tem sido publicados sobre o tema.

### 5.1.2 Suez Oil Co. 1995

Em [102] discute-se a utilização de um modelo completo do sistema de produção via *gas-lift* do campo Ras Budran no Golfo de Suez para utilização na otimização do processo.

O ênfase é dado para a distribuição ótima de gás de injeção em cenários de disponibilidade limitada de gás. Os poços produzem fortemente sub saturados o que permite a consideração de uma relação linear para a curva IPR. Todas as perdas de pressão são modeladas utilizando correlações disponíveis na literatura. Para o escoamento multifásico vertical utilizou-se correlações de Orkisevski Hagedorn e Brown e Mukherjee e Brill conforme a avaliação do erro em relação a testes de pressão efetuados. O trabalho apresenta de forma sucinta o método utilizado para a alocação de gás. Trata-se do método equal slope. Um modelo matemático é obtido para cada poço relacionando a vazão de injeção  $x$  de um poço  $j$ ,  $(x^j)$  com sua vazão de líquido total  $f_j(x)$ .

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^n b_{j,i} x^i \quad (5.1)$$

Os coeficientes  $b_{ji}$  são determinados pelo método dos mínimos quadrados.

Encontra-se para cada poço  $j$  a vazão de injeção  $(x^*)$  que fornece o ponto onde o gradiente da vazão de produção de líquido é zero:

$$\frac{\partial f_j(x)}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

No caso em que a capacidade dos compressores não possa fornecer a vazão total exigida pelos poços para funcionarem nos seus pon-

tos ótimos resolve-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \max & (f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_m(x_m)) & (5.3) \\ \text{sujeito a} & \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq X \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

O problema de otimização pode tornar-se mais complexo se outras restrições são introduzidas como limites para as vazões de injeção mínimas e restrições nos equipamentos a juzante do poço como linhas de fluxo e separadores. O artigo conclui que

- a atualização do modelo desenvolvido com novas medições é essencial para sua utilização como uma ferramenta para a otimização do processo.
- Os erros obtidos ficaram entre os modelos desenvolvidos e as medições ficaram entre 1 e 1.5%.
- 11 poços foram melhor modelados com a correlação de Orkiszewski, 4 com a correlação de Hagedorn e Brown e 1 com a de Mukherjee e Brill.

### 5.1.3 Shell 1998

Em [103] discute-se aspectos de otimização de gas lift sob o ponto de vista da tecnologia desenvolvida pela empresa Shell. O artigo mostra técnicas para a obtenção das vazões de produção e sua utilização na otimização do uso do gás disponível para injeção. Nota-se a aplicação de controle tanto no *choke* de injeção como no *choke* de produção. Apresenta-se ainda diversas técnicas desenvolvidas pela empresa Shell como:

- WellDone - WellDone é o nome do algoritmo de otimização para teste de poço que analisa medições de separadores de teste em tempo real. Otimiza o tempo de teste. Trata-se de um sistema automatizado para testes de poços. O sistema de teste inclui a cabeça do poço, as linhas de fluxo entre a cabeça do poço e o separador, o separador de teste e sua instrumentação.

- DeltaP - É um método para calcular a produção de líquido baseado na queda de pressão em um orifício instalado na linha de fluxo perto do separador.
- IGUF - Incremental Gas Utilization Factor. Determina a resposta da produção do poço para incrementos em sua vazão de injeção de gás.
- DynaCon - usa a manipulação do *choke* de produção para estabilizar poços que exibem comportamento instável.
- SGAS - Shell usa um pacote de software para tempo real chamado SGAS para monitoramento do sistema de gas-lift e seus poços associados. Realiza uma distribuição automática de gás para os poços para manter uma pressão estável no sistema de gas-lift e uma distribuição ótima e estável para os poços. SGAS monitora a pressão na cabeça dos poços (THP e CHP - Tubing Head Pressure e Casing Head Pressure) e utiliza estas informações para identificar poços instáveis.
- GLUE - A alocação de gás é baseada nas curvas de desempenho de gas-lift de todos os poços. As curvas de desempenho são obtidas com um programa de análise de gas-lift chamado GLUE (Gas Lift Users Environment).

Shell utiliza a medição da queda de pressão em um orifício para calcular a vazão de óleo. Este é o método DeltaP.

$$\Delta P = f(k, Q_{liq.}, Q_{gt.Lc}) \quad (5.4)$$

O valor de  $k$  está associado com a abertura do orifício,  $Q_{liq.}$  representa a vazão de líquido produzida e  $Q_{gt.Lc}$  representa a vazão total de gás nas condições da linha.

$$Q_{gt.sc} = Q_{gi.sc} + FGOR(1 - BSW)Q_{liq.} \quad (5.5)$$

FGOR e BSW representam o GOR (*Gas Oil Ratio*) da formação e a saturação de água respectivamente.  $Q_{gt.sc}$  e  $Q_{gi.sc}$  são a vazão total de gás e a vazão de injeção de gás, respectivamente em condição padrão. A vazão de óleo pode ser calculada combinando-se as equações 5.4 e 5.5:

$$Q_{oil} = f(k, Q_{gi.sc}, FLP, \Delta P, FGOR, BSW) \quad (5.6)$$

FLP (Fow Line Pressure) é usada para converter a vazão de gás da condição de linha para a condição padrão. O fator de cali-



bração (depende do diâmetro do orifício), o FGOR e BSW são determinados durante um teste de poço. Assume-se que estes parâmetros mantenham-se constantes entre os testes de poços. O diâmetro do orifício utilizado é selecionado de forma a inserir uma queda de pressão muito pequena, da ordem de 7 psi. Testes de campo realizados em 9 poços *offshore* mostraram que em 90% das medições realizadas com a técnica DeltaP obteve-se um erro menor ou igual a 10%.

Dynacon é a técnica de controle utilizada para estabilizar e minimizar a Pressão no topo do revestimento (CHP). Assume-se que a vazão de injeção seja implementada de forma independente, isto é, não se manipula a vazão de injeção para efeito de controle da dinâmica. A estratégia de controle adota uma configuração de dois PIDs em cascata. A malha interna utiliza a medição da pressão no topo do revestimento (CHP) para obter uma ação de controle que é a abertura do *choke* de produção. O valor de referência para a malha interna é fornecido por uma malha que utiliza a medição da abertura do *choke* de produção e tem como referência uma abertura desejada. O *choke* de produção deveria estar sempre aberto para obter-se a máxima produção. Entretanto, a fim de garantir uma certa margem de controle para estabilizar-se a pressão de revestimento, deve-se mantê-lo com uma abertura ligeiramente menor que 100%. Assim a referência para a abertura do *choke* na malha PID externa é calculada em função da vazão de injeção. A figura 5.1 mostra a estratégia de controle Dynacon proposta neste trabalho. Supõe-se que a velocidade de resposta da malha externa seja bem menor do que a malha interna a fim de que a malha interna possa atuar na estabilização da pressão do revestimento e que a longo prazo a abertura do *choke* de produção atinja a abertura de referência desejada suavemente. O fato da abertura de referência do *choke* de produção ser uma função da vazão de injeção parece normal nesta estratégia uma vez que necessita-se de uma margem de atuação do *choke* maior para valores de injeção menores pois a dinâmica do sistema tem uma atenuação menor para taxas de injeção menores.

O controle da pressão no topo do revestimento pela malha interna é na verdade uma forma indireta de controlar a pressão de fundo. Deve-se observar que para uma vazão constante de injeção a pressão no tubo de produção na altura do ponto de injeção de gás (válvula operadora) difere da pressão no topo do revestimento pela queda de pressão na válvula operadora (constante para uma

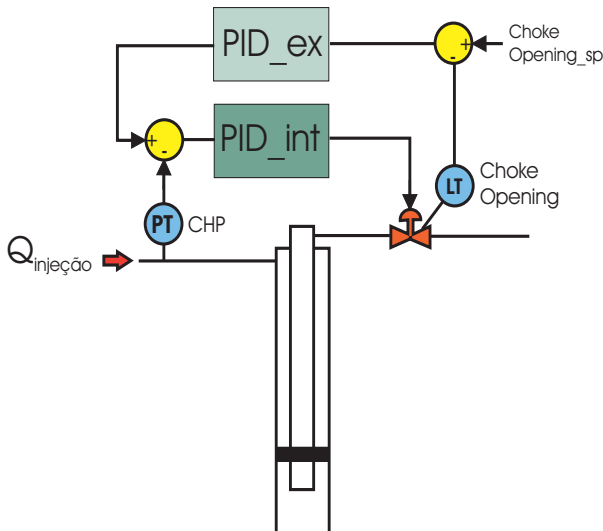


Figura 5.1: Estratégia de Controle Dynacon

vazão constante) e da queda de pressão no anular (pequena). Assim, controlar a pressão no topo do revestimento para uma vazão de injeção constante equivale a controlar a pressão no tubo de produção no ponto de injeção de gás. Por outro lado a diferença da pressão neste ponto do tubo de produção para a pressão na frente dos canhoneados deve-se praticamente a queda de pressão exercida pela coluna de fluido produzido pela formação no intervalo entre a profundidade dos canhoneados e a válvula operadora. Desprezando-se o atrito, este valor seria constante e dependeria da densidade média do fluido produzido.

O artigo defende uma estratégia de fechamento do *choke* de produção para aumentar a produção em relação aquela que seria obtida com o *choke* 100% aberto para poços operando em região instável. A justificativa é que com o *choke* 100% aberto o comportamento do tipo *slug-flow* resulta em uma produção média pequena comparada com a que se pode obter com o poço controlado através do fechamento do *choke*. A idéia seria utilizar o método DeltaP para buscar uma abertura de *choke* que maximize a produção. Esta parte do trabalho não está bem clara pois ao mesmo tempo defende-se uma estratégia para estabilizar o poço

utilizando-se o Dynacon.

#### 5.1.4 Texaco 1999

Em [104] o trabalho desenvolvido pela Texaco Exploration and Production descreve um programa de automação de poços operando por gas lift com exemplos do Lake Barre Field e Gulf of México. Este trabalho defende a consideração do custo da taxa de injeção de gás na obtenção do ponto ótimo assim como outros autores. Defende também a consideração do custo da água produzida e o valor associado diferente para o gás produzido pelo poço. De acordo com os autores estas considerações irão colocar o ponto ótimo sem restrição um pouco à esquerda do ótimo que considerava apenas a produção total de petróleo. O objetivo principal do sistema é controlar a injeção de gás para cada poço de forma que este receberá sua taxa de injeção ótima. As taxas são mantidas constantes mesmo quando a pressão de suprimento varia.

As características dos poços são obtidas com testes do tipo *step rate well test*. Com estes testes, curvas que relacionam a vazão de produção com a taxa de injeção de gás são obtidas. Utilizando as saídas do compressor (possivelmente pressão de descarga e recirculação) é possível determinar a quantidade de gás disponível para injeção. Com estas informações uma tabela de alocação de gás pode ser obtida para cada poço. Esta tabela relaciona a vazão ótima de injeção para cada pressão de suprimento de gás (possivelmente a pressão a montante do *manifold de gas lift*).

Os autores defendem o *step rate well test* e a utilização da representação da relação  $Q_o \times Q_i$  na forma de polinômio. Os coeficientes dos fatores polinomiais seriam obtidos por um método de ajuste de curva utilizando mínimos quadrados.

Assim como em outros artigos os autores ressaltam que as oscilações devido a operações em malha aberta atuam no sentido de diminuir a produção diária efetiva.

O artigo não mostra nenhum algoritmo ou técnica de controle implementada. O método de otimização utilizado não é claro. Normalmente um método como o do *equal-slope* irá requerer uma pequena alteração para todos os poços. É verdade que a maior alteração será para aqueles poços que apresentam uma região quase plana perto do ótimo global. Para estes poços a colocação da operação em um gradiente ligeiramente maior que zero equivale a

uma grande mudança na vazão de injeção sem uma perda significativa de produção. Este resultado pode ser contra intuitivo já que poderia se imaginar que a quantidade de gás a ser diminuída deveria ser reduzida do poço com menor índice de produtividade.

Concluem que uma injeção de gás feita com o auxílio de controladores de vazão fornecendo uma vazão constante garantem uma melhoria na produção ao eliminar as oscilações devido a flutuações na pressão de suprimento de gás. Mostram ainda a utilização das medições para a detecção de início de entupimento devido a hidratos. No momento da detecção, o *choke* é atuado rapidamente para remover o depósito.

O artigo é um pouco superficial mas é importante observar que defendem o controle da vazão de injeção como uma forma de garantir uma produção mais estável e maior.

### 5.1.5 TotalFinaElf 2002

Em [105] o trabalho apresentado por engenheiros da Elf-Congo e TotalFinaElf incluindo P. Letemayer fala das vantagens da aplicação de automação na operação de poços maduros operando via gas-lift no campo Sendji offshore Congo. Sem fornecer detalhes das soluções adotadas o artigo descreve apenas algumas características da solução e os objetivos atingidos. Fica clara a preocupação com o controle da dinâmica do poço e defende-se a atuação simultânea do *choke* de injeção e de produção na estabilização do poço. O Algoritmo de Controle é baseado em sequência sem utilizar cálculos.

A melhoria na produção foi maior que 1300 bopd comparada com o esperado de 1000 bopd.

O custo da implementação do sistema foi de 4 milhões de dólares ou 66 Mil dólares por poço. A solução de controle é do tipo distribuída para evitar problemas com conexão. A solução de controle inclui a repartida controlada dos poços. Não fica claro qual o método utilizado para alocação de gás. O ênfase foi dado na eliminação das oscilações que causam diversos problemas operacionais além da diminuição da produção efetiva de até 50% em alguns casos. O artigo não fala da alocação ótima de gás e concentra-se em controlar a dinâmica dos poços inclusive na repartida. Ainda assim os resultados obtidos são impressionantes. Não mostra o algoritmo de controle utilizado afirmando apenas que atua tanto

no *choke* de injeção como no *choke* de produção. Fica a impressão de que as taxas de injeção de cada poço são selecionadas pelos operadores.

### 5.1.6 Dubai Petroleum Company 2006

Em [106] descreve-se um modelo de otimização para um sistema de produção offshore Dubai operando com gas-lift pela companhia Dubai Petroleum Company.

O modelo de otimização contempla todo o sistema: configuração de fundo de poço, o sistema de escoamento da produção, a rede de dutos para alimentação de gás para injeção, separadores, compressores e bombas.

A solução do processo de otimização fornece valores recomendados para a taxa de injeção de cada poço, pressão de separadores, pressão de descarga dos compressores e utilização de compressores.

O projeto foi dividido em 3 fases. O sistema não está automatizado.

Principais conclusões:

- 1 - Os resultados obtidos no processo de otimização do sistema indicaram que a realocação de gás de injeção para todos os poços a fim de manter estável a pressão do *manifold de gaslift* resulta em menos perda de produção. O artigo reconhece que o gradiente entre a vazão de produção e a taxa de injeção de gás é muito pequeno perto do ótimo global (a curva é plana naquela região) e isto possibilita uma diminuição considerável da taxa de injeção de gás com uma perda de produção muito pequena. Quando isto é feito para todos os poços é possível operar com muito menos gás e com uma perda de produção muito pequena.
- 2 - Devido as diferenças consideráveis de temperatura entre verão e inverno, a capacidade de compressão varia para a potência instalada. No verão ocorre uma falta de gás e o processo de otimização da alocação de gás permitiu trabalhar com os compressores existentes e até mesmo desligar compressores no inverno.
- 3 - Na fase 1 o campo de Falah obteve um aumento de 11% na produção com uma redução de 14% na taxa de injeção

de gás. Na fase 2 outros campos obtiveram melhorias um pouco menos expressivas.

- 4 - Os modelos são atualizados a cada 3 meses e o processo de otimização permite a criação (offline) de tabelas contemplando diferentes cenários de disponibilidade de gás para injeção.

No caso de falta de gás já não se utiliza a política anterior de fechar poços. A política atual consiste em fazer uma redução de 0,5 MMscf/D por poço para um grupo de poços (20) selecionados pelo algoritmo de otimização. Isto fornece uma economia de gas de 10 MMscf/D. Caso a indisponibilidade seja maior do que 10 MMscf/D então a redução de 0.5 MMscf/D é aplicada a um novo grupo de poços (podem incluir alguns do primeiro grupo). Se a indisponibilidade for maior do que 20 MMscf/D então o sistema passa para o terceiro grupo, e assim por diante. Estão sendo feitos esforços para a implementação de uma solução de controle do tipo SCADA.

O Projeto acontece em um sistema não automatizado e, por isso, estabelece um sistema *off-line* de otimização. Ainda assim é um sistema muito interessante pois leva em conta todos os processos envolvidos como linhas de fluxo, compressores, separadores, poços, etc. O modelo é atualizado conforme ocorrem modificações no sistema e as estratégias são reavaliadas a cada 3 meses quando se faz a realocação de gás. A grande dificuldade que esta solução encontrará na prática ao longo do tempo é sua dependência do fator humano. Como os procedimentos não são automatizados, algumas tarefas podem não acontecer como se esperava ou na época em que se esperava que acontecesse. Além disso a realocação de gás somente a cada 3 meses parece deixar margem para melhoras já que neste período pode ter havido mudanças que justificassem atualizações. É claro que isto depende muito das características dos reservatórios e eventualmente pode ser suficiente para este caso mas não parece ser uma solução aplicável para todas as situações. O artigo não fornece nenhuma informação sobre os modelos adotados e sobre os algoritmos utilizados.

### 5.1.7 Petrobras 2006

Em [88] discute-se a visão da Petrobras do Gerenciamento Digital Integrado da Produção. Neste trabalho apresenta-se algumas

ações da Petrobras sobre a automação de poços de petróleo. Com relação a elevação por *gaslift* contínuo os seguintes trabalhos são apresentados:

- Descreve-se uma investigação sobre a sensibilidade da temperatura medida na cabeça de produção da plataforma à variações na taxa de produção medida em um separador de teste. O artigo conclui que apesar de comprovar-se a relação sua sensibilidade não é suficiente para utilização na otimização do processo. A correlação da dinâmica das variáveis mostra-se interessante para a identificação de regime permanente em testes de produção.
- apresenta-se o desenvolvimento de uma estratégia de inferência da vazão de produção em um escoamento multifásico de poços com alto GOR e óleo leve no campo de Urucu. Uma rede neural utiliza medições de temperatura e deltaP em uma estrutura com duas placas de orifícios e infere a vazão. O fato dos poços produzirem com alto GOR e operarem com *choke* atuado para estabilização justificam a estratégia já que nenhuma pressão indesejável é adicionada na pressão de fundo pelo sistema de medição. As medições inferidas são utilizadas nos algoritmos de controle do poço.
- Descreve-se uma aplicação de controle realizada no campo Riacho da Forquilha pertencente a unidade de negócios Rio Grande do Norte. O sistema é monitorado e operado remotamente, por uma conexão de rádio, pelos analistas de poços trabalhando em Natal, 250 km do poço. O sistema de controle consiste de um CLP instalado junto a cabeça do poço contendo o algoritmo de otimização. A estratégia baseia-se na medição da pressão de fundo como variável controlada e na utilização da pressão no revestimento como variável manipulada. Um PID atua na vazão de injeção controlando a abertura de uma válvula de controle na linha de injeção de gás. A metodologia é considerada eficiente para determinar novas taxas de injeção devido a mudanças na produção do poço relacionados com GOR, BSW, garantia de escoamento, ou restrições externas como instabilidade de compressores. Devido o grande número de poços neste campo maduro, a atualização da taxa de injeção baseada em testes de produção não garantiria que a mudança ocorresse no momento adequado (*wrong time decision*).

Na sequência serão apresentadas duas abordagens para a operação automática de um grupo de poços utilizando elevação do tipo GLC. Para ambas propostas considera-se instalações com as seguintes características:

- Os poços são equipados com medição de pressão de fundo.
- Todos os poços recebem gás para injeção de um mesmo *manifold*.
- Todos os poços são equipados com medidores de vazão mássica de gás na linha de injeção.
- Todos os poços são equipados com válvula de controle na linha de injeção de gás.
- Todos os poços podem ter sua produção direcionada para um separador de teste.

## 5.2 Um sistema de Controle automático com ênfase na otimização da produção

<sup>1</sup> Nesta seção apresenta-se um algoritmo de controle para a operação de um grupo de poços equipados com sensores de fundo de poço medindo pressão e temperatura. A medição contínua da pressão e temperatura de fundo não são interessantes somente para o controle das operações mas são informações valiosas para o gerenciamento da recuperação de óleo de todo o campo. Além disso, cada poço é equipado com medição de vazão de injeção e um *choke* de injeção com controle automático. Este é um cenário realístico no Brasil para os poços sendo completados atualmente para elevação por GLC. Um controlador local atuando sobre um *choke* de injeção determina a vazão de gás sendo injetada em cada poço a partir de um *gas lift manifold* (GLM) comum conforme mostrado na figura 5.2. O sistema de automação deve operar os poços de forma ótima sob condições de alta disponibilidade de gás enquanto garante a operação estável durante períodos de baixa disponibilidade de gás.

---

<sup>1</sup>Parte deste trabalho foi publicado em [36] e também faz parte do projeto de pesquisa **Desenvolvimento de Algoritmos de Controle para Métodos de Elevação Artificial** realizado em parceria com a Petrobras.



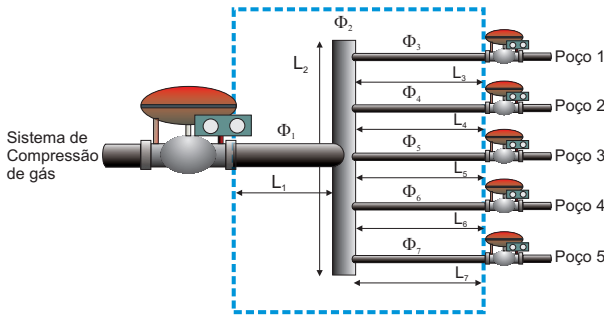


Figura 5.2: Gas lift manifold

### 5.2.1 Obtenção da vazão de gás disponível para injeção nos poços

Uma das dificuldades na distribuição do gás procedente do sistema de compressão é garantir que o mesmo seja utilizado de forma ótima enquanto se estabiliza a pressão no *gas lift manifold*-GLM. Propõe-se uma estratégia que estabiliza a pressão no GLM e otimiza a distribuição de gás comprimido disponível entre os poços conforme mostra a figura 5.2. Gas do sistema de compressão entra no GLM a uma pressão igual a pressão nominal de descarga do último compressor. Durante operações normais, o sistema de controle do sistema de compressão fornece uma vazão de gás suficiente para manter a pressão no GLM alta o bastante para manter a vazão de injeção de gás sem restrição para cada poço. Se por qualquer motivo a vazão de gás entrando no GLM diminui, a pressão no GLM irá cair se as vazões de injeção de gás para cada poço forem mantidas em seus valores sem restrição. Eventualmente as vazões sem restrição não poderão ser implementadas mesmo com a abertura total dos *chokes* de injeção. Torna-se necessário uma estratégia que:

- Estabilize a pressão no GLM em um valor próximo a pressão de descarga nominal do compressor no caso do evento de uma diminuição na vazão de injeção entrando no GLM; e
- Determine a vazão total de gás disponível para injeção nos poços conectados ao GLM.

O *gas lift manifold*-GLM conecta o subsistema de compressão e o subsistema de poços: Sua interação define a quantidade de gás de injeção disponibilizada para os poços. Para que os poços possam operar nos seus pontos ótimos irrestritos a pressão no GLM deve exceder a maior pressão de revestimento dentre todos os poços como mostrado na figura 5.3. Isto permite uma queda de pressão na linha conectando o GLM ao anular dos poços. Assume-se que uma estratégia de controle seja implementada no subsistema de compressão de gás para manter a pressão no GLM na região verde (operação normal). Tal estratégia depende da estrutura montada no sistema de produção (clientes para o gás e prioridades do operador do sistema). Um sistema de controle supervísório monitora a pressão no GLM e atualiza seu estado para (1) normal (range verde), (2) normal mas testes não permitidos (range amarelo) e (3) operação com restrição na disponibilidade de gás (range vermelho). Testes não deveriam ser permitidos na região amarela já que existe uma grande possibilidade do sistema entrar na região de operação com restrição. Apesar da existência do sistema de controle que visa manter a pressão na região verde (operação normal) é possível que falhas no subsistema de compressão não permitam a implementação da vazão de gás necessária para manter todos os poços operando em seus valores de injeção irrestritos. Neste caso a pressão no GLM iria cair ao ponto de tornar-se impossível estabelecer uma vazão de gás do GLM ao anular dos poços. Obviamente uma ação tem de ser tomada antes que isso aconteça. A solução proposta imple-

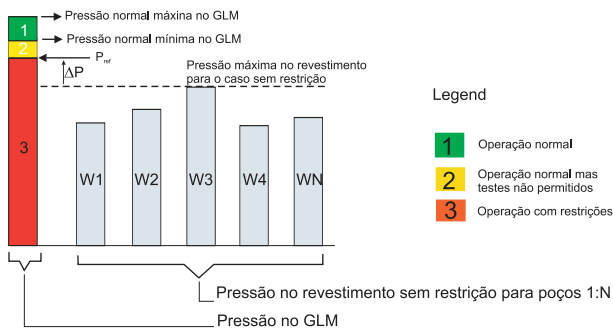


Figura 5.3: Controle da pressão no *Gas Lift Manifold* - GLM

menta um segundo controlador de pressão do GLM (Controlador

de Pressão do GLM-Poços), PC2 na figura 5.4, que disputa o controle da pressão do GLM com o subsistema de compressão: enquanto o controlador do subsistema de compressão, PC1, atua no gás entrando no GLM, o segundo controlador, PC2, manipula a vazão de gás saindo do GLM quando o subsistema de compressão falha e a pressão no GLM cai abaixo da região verde e assume um valor menor do que o valor de referência do segundo controlador. O valor de referência ( $P_{ref}$ ) do segundo controlador é alto o suficiente para a operação irrestrita dos poços mas ligeiramente menor do que a pressão nominal de descarga do subsistema de compressão conforme mostra a figura 5.3.

A saída do controlador PC2 é limitada a um valor igual a soma das vazões de injeção ótimas irrestritas de todos os poços. Assim, enquanto a pressão do GLM for maior do que o ( $P_{ref}$ ) do controlador PC2, a ação de controle deste será constante e igual a soma das vazões de injeção ótimas irrestritas de todos os poços. A vazão calculada pelo controlador PC2 é implementada pelos controladores FC1, Fc2, ..., FCn.

A vazão calculada pelo controlador PC2 é informada a cada controlador local da vazão de cada poço que dispõem de uma tabela de alocação, *look-up table*. Esta tabela relaciona a vazão a ser implementada por cada poço em função da vazão de saída fornecida pelo controlador PC2. Um algoritmo de otimização é responsável por gerar as tabelas de alocações para cada poço calculando *offline* a vazão de injeção de gás a ser implementada por cada poço em função da vazão de gás disponível. Cada poço possui um valor de injeção mínimo de forma a evitar a operação na região de ciclo limite devido aos fenômenos *heading* ou *density wave*. Assim, a vazão total mínima a ser implementada corresponde ao somatório da vazão mínima de todos os poços. O controlador PC2 implementa uma estratégia *anti wind-up*.

Enquanto a pressão no GLM for normal, e portanto maior do que ( $P_{ref}$ ), a saída do controlador PC2 cresce e é limitada a um valor igual a soma das vazões de injeção ótimas irrestritas de todos os poços. Esta vazão é implementada através da ação dos controladores locais que recebem a ação de controle de PC2 e obtêm seus valores de referência através de uma tabela de alocação. Quando ocorre uma falha no subsistema de compressão que diminui a vazão de entrada no GLM, a pressão começa a cair. Quando a pressão no GLM atinge valores menores do que ( $P_{ref}$ ) a ação

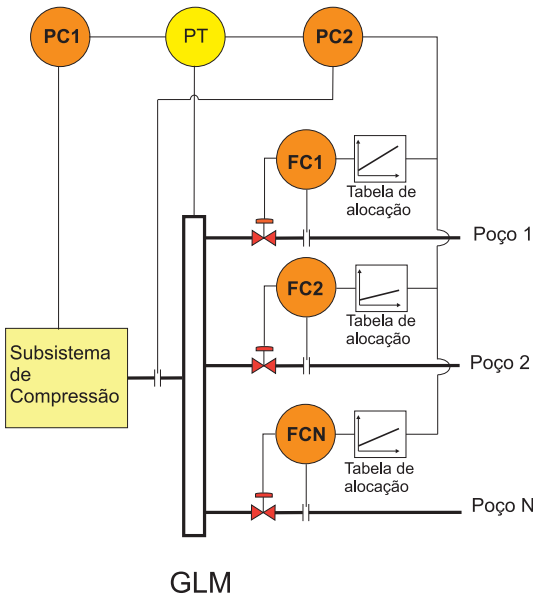


Figura 5.4: Estratégia de controle da pressão no GLM

de controle de PC2 age no sentido de manter a pressão no valor ( $P_{ref}$ ). Ao fazer isso a vazão calculada por PC2 se iguala à vazão de entrada. Esta vazão é informada a cada controlador local que através da tabela de alocação implementam as vazões ótimas que estabilizam a pressão no GLM. No momento em que a vazão de gás entrando no GLM cresce a pressão no GLM também cresce e eventualmente ao atingir valores maiores que ( $P_{ref}$ ) fazem com que a vazão calculada por PC2 retorne ao valor igual a soma das vazões de injeção ótimas irrestritas de todos os poços.

A figura 5.2 mostra um *gas-lift manifold* para a distribuição de gás a um grupo de poços operando por Injeção Contínua de Gás. Supõe-se que o duto que traz o gás até o ponto de distribuição e o duto de distribuição tem o mesmo diâmetro  $\Phi_1 = \Phi_2$  e que os dutos fornecendo gás para cada poço tem o mesmo diâmetro  $\Phi_3$ . Na busca de um modelo para o comportamento da pressão no duto de distribuição de gás procura-se uma metodologia para representar o sistema como um volume total concentrado como mostrado na figura 5.5. Para isso calcula-se o volume de todos

os elementos entre a válvula de entrada e as válvulas de saída conforme indicado pela linha tracejada na figura 5.2. A soma de todos os volumes dentro destes limites vão compor um único volume, representado na figura 5.5 que será utilizado na modelagem da dinâmica do *gas-lift manifold*.

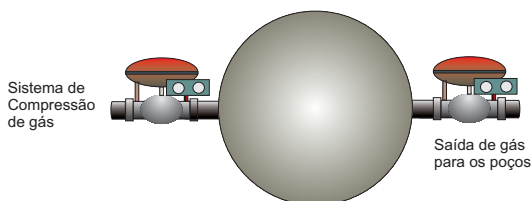


Figura 5.5: Modelo simplificado do *gas-lift manifold*

Para a configuração mostrada na figura 5.2 o volume total seria obtido como

$$V = \frac{\pi}{4}(\Phi_1^2 L_1 + \Phi_2^2 L_2 + \sum_{i=1}^5 \Phi_{i+2}^2 L_{i+2}). \quad (5.7)$$

De forma geral para este tipo de configuração, considerando que os dutos de gás para cada poço podem ter diâmetros ( $\Phi_p$ ) e comprimentos ( $L_p$ ) diferentes, teríamos

$$V = \frac{\pi}{4}(\Phi_1^2 L_1 + \Phi_2^2 L_2 + \sum_{i=1}^N \Phi_{pi}^2 L_{pi}). \quad (5.8)$$

O comportamento da pressão no volume concentrado pode ser descrito aplicando-se a lei da conservação da massa,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{RT}{MV}(Q_e - Q_s), \text{ onde} \quad (5.9)$$

- $P$  - Pressão, Pa
- $R$  - Constante universal dos gases, 8,3144126 Pam<sup>3</sup>mol/K
- $T$  - Temperatura, K
- $M$  - Peso molecular do gás, Kg/mol
- $V$  - Volume, m<sup>3</sup>
- $Q_e$  - Vazão mássica de gás de injeção entrando no volume, Kg/s

- $Q_s$  - Vazão mássica de gás de injeção saindo do volume, Kg/s.

Definindo  $k_p = \frac{RT}{MV}$ , e aplicando a transformada de Laplace na equação 5.9, obtém-se

$$P(s) = \frac{-k_p}{s}(Q_e(s) - Q_s(s)) \quad (5.10)$$

O controle da pressão no *gas-lift manifold* pode ser realizado por uma estrutura de controle do tipo PI (Controle Proporcional Integral). A estrutura de controle deve ter ação *anti-windup* incorporada já que em condições normais o controlador operará saturado. Para simplificar a análise da resposta do sistema de controle pode-se desconsiderar a estrutura *anti-windup* já que esta função é inoperante no momento da restrição na disponibilidade de gás.

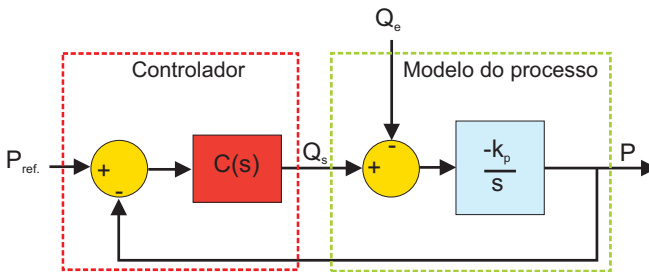


Figura 5.6: Estrutura de controle simplificada da pressão do *gas-lift manifold*

A figura 5.6 mostra a estrutura de controle que será utilizada para a síntese do controlador. É interessante mencionar que o principal objetivo de controle é manter a pressão em seu valor de referência  $P_{ref}$ . diante de perturbações na vazão de entrada  $Q_e$ . Diante disso parte-se para a obtenção da função de transferência em malha fechada entre a variação de pressão na saída  $\Delta P$  e a variação na vazão de injeção de entrada  $\Delta Q_e$ . A figura 5.7 mostra a estrutura de controle que será utilizada para análise da resposta à perturbação. Considera-se o sistema em equilíbrio e analisa-se a resposta à uma variação na vazão de entrada,  $\Delta Q_e$ .

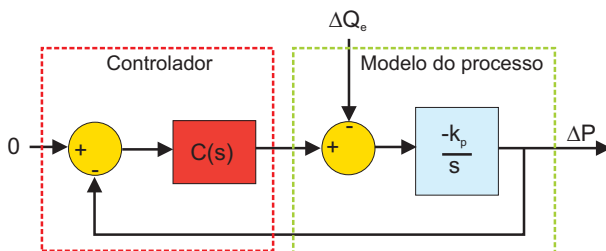


Figura 5.7: Estrutura de controle para análise da resposta à perturbação

Escrevendo-se a relação entre  $\Delta P(s)$  e  $\Delta Q_e(s)$  obtém-se:

$$\begin{aligned} (-\Delta P(s)C(s) - \Delta Q_e(s)) \frac{-k_p}{s} &= \Delta P(s) \\ \Delta Q_e(s) \frac{k_p}{s} &= \Delta P(s) (1 - C(s) \frac{k_p}{s}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pretende-se ajustar os parâmetros  $K$  e  $T_i$  do controlador PI

$$C(s) = \frac{-K(T_i s + 1)}{T_i s}. \quad (5.12)$$

Substituindo 5.12 em 5.11,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P(s)}{\Delta Q_e(s)} &= \frac{k_p T_i s}{T_i s^2 + K k_p T_i s + K k_p}, \text{ ou} \\ \frac{\Delta P(s)}{\Delta Q_e(s)} &= \frac{k_p s}{s^2 + K k_p s + \frac{K k_p}{T_i}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Uma análise preliminar da equação (5.13) permite verificar que o efeito de uma perturbação degrau é eliminada em regime permanente já que

$$\Delta P(s) = \frac{k_p s}{s^2 + K k_p s + \frac{K k_p}{T_i}} \frac{\delta q_e}{s}. \quad (5.14)$$

Aplicando-se o Teorema do Valor Final na equação (5.14),

$$\begin{aligned} \Delta P(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_p s}{s^2 + K k_p s + \frac{K k_p}{T_i}} \frac{\delta q_e}{s}, \\ \Delta P(\infty) &= 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

A perturbação mais provável para a vazão de injeção talvez seja do tipo rampa como mostrada na figura 5.8. Este tipo de sinal

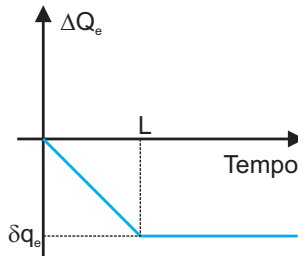


Figura 5.8: Perturbação tipo rampa

representa uma diminuição da vazão de entrada de gás do tipo rampa com uma duração igual a  $L$  numa taxa igual a  $\frac{-\delta q_e}{L}$ . No domínio Laplace este tipo de perturbação pode ser modelado como

$$\Delta Q_e(s) = \frac{-\delta q_e}{L} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-Ls}) \tag{5.16}$$

A aplicação deste sinal na equação (5.13) fornece a seguinte perturbação na pressão de saída.

$$\Delta P(s) = - \frac{k_p s}{s^2 + K k_p s + \frac{K k_p}{T_i}} \frac{\delta q_e}{L} \frac{1}{s^2} (1 - e^{-Ls}) \tag{5.17}$$

A aplicação do Teorema do Valor Final ao sinal expresso pela equação (5.17) também resulta em valor igual a zero indicando que este tipo de perturbação também é rejeitado em regime permanente.

Para analisar o efeito na pressão durante a perturbação do tipo rampa, assume-se um sinal do tipo rampa de duração infinita e



aplica-se o Teorema do valor final,

$$\begin{aligned}\Delta P(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} -s \frac{k_p s}{s^2 + K k_p s + \frac{K k_p}{T_i}} \frac{\delta q_e}{L} \frac{1}{s^2} \\ \Delta P(\infty) &= -\frac{T_i}{K} \frac{\delta q_e}{L}\end{aligned}\quad (5.18)$$

A expressão (5.18) mostra a diminuição da pressão durante uma perturbação do tipo rampa. É importante verificar que o efeito da perturbação rampa na pressão de saída depende dos parâmetros do controlador  $\frac{T_i}{K}$ . Ou seja a diminuição da pressão na saída vai ser menor para um tempo de integração  $T_i$  menor e um ganho  $K$  maior. Como visto na análise da resposta para regime permanente verifica-se que a perturbação é anulada se o sinal é uma rampa de duração finita como a figura 5.8.

## 5.2.2 Controlador PI com ação Feed-Forward considerando a dinâmica da válvula

Em geral uma válvula não responde imediatamente ao comando de abertura. Em alguns casos a modelagem considerando um atraso  $\Theta$  na resposta é suficiente. Em realidade o que se pretende modelar é a relação em malha fechada do sistema de controle de vazão que incorpora a dinâmica do *choke* de injeção. A equação (5.19) mostra a função de transferência que será utilizada para considerar a dinâmica do *choke* de produção. O comportamento dinâmico do *choke* de injeção foi modelado como um sistema de primeira ordem com um atraso.

$$FTMF_{choke_{inj.}} = \frac{e^{-\Theta s}}{\sigma_v s + 1} \quad (5.19)$$

O estudo da resposta do sistema ao controlador PI mostra que sua aplicação rejeita, em regime permanente, perturbações do tipo degrau. Para perturbações do tipo rampa, têm-se uma queda de pressão durante a ocorrência da mesma em um valor que depende da taxa da própria rampa e da relação  $\frac{T_i}{K}$  do controlador. No momento que a vazão de entrada se estabiliza a pressão volta ao seu valor de referência. Se desejarmos evitar uma queda de pressão muito grande devemos diminuir o tempo de integração do controlador,  $T_i$  e aumentar seu ganho,  $K$  conforme mostra a

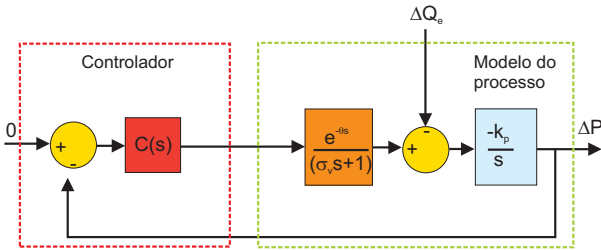


Figura 5.9: Estrutura de controle incluindo dinâmica do *choke* de injeção

equação 5.18. Sob o ponto de vista da robustez do sistema isto não é uma boa opção já que, havendo erros de modelagem, não se pode diminuir a relação  $\frac{T_i}{K}$  demasiado sob pena de instabilizar a resposta do sistema. Uma alternativa é a utilização de uma estrutura de controle *feed-forward* em combinação com o controle realimentado conforme mostra a figura 5.10.

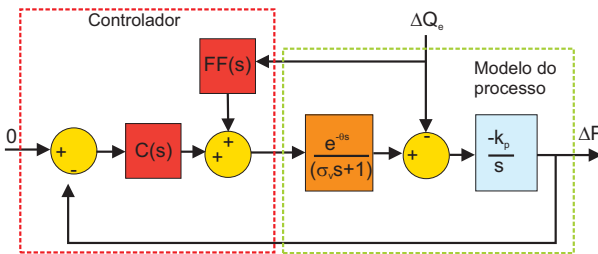


Figura 5.10: Estrutura de controle com ação *feed-forward*

Procura-se a aplicação de uma ação *feed-forward*  $FF(s)$  que aplicada no sinal da vazão de entrada e somada à ação de controle garanta erro próximo a zero durante a ocorrência da perturbação do tipo rampa.

Na obtenção do sinal a ser aplicado procede-se com a determinação de  $\frac{\Delta P(s)}{\Delta Q_e(s)}$  em função de  $FF(s)$ . Uma vez obtida a função de transferência, obtém-se a expressão para  $\Delta P(s)$  supondo uma perturbação  $\Delta Q_e(s) = -\frac{\delta}{s^2}$ , isto é, uma rampa com taxa  $-\delta$ .

Finalmente determina-se a expressão para  $FF(s)$  que pratica-

mente elimina o erro em regime permanente para a rampa.

$$[-\Delta P(s)C(s) + \Delta Q_e(s)(FF(s) - 1)] \frac{-k_p e^{-(\Theta s)}}{s(\sigma_v s + 1)} = \Delta P(s), \quad (5.20)$$

$$C(s) = -K \frac{T_i s + 1}{T_i s},$$

$$\frac{e^{-\Theta s}}{(\sigma_v s + 1)} \cong e^{-(\Theta + \sigma_v)s} \cong 1 - (\Theta + \sigma_v)s = 1 - \Theta_T s, \text{ e}$$

$$-\Delta Q_e(s)(FF(s) - 1) \frac{k_p(1 - \Theta_T s)}{s} =$$

$$\Delta P(s) \left[ 1 + \frac{K k_p (T_i s + 1)(1 - \Theta_T s)}{T_i s^2} \right]. \quad (5.21)$$

Manipulando-se a equação 5.21 obtém-se

$$\frac{\Delta P(s)}{\Delta Q_e(s)} = - \frac{\frac{T_i}{K} s (FF(s) - 1)(1 - \Theta_T s)}{\left( \frac{T_i}{K k_p} - T_i \Theta_T \right) s^2 + (T_i - \Theta_T) s + 1}. \quad (5.22)$$

Assumindo uma perturbação do tipo rampa,  $\Delta Q_e(s) = -\frac{\delta}{s^2}$  e aplicando na função de transferência expressa na equação 5.22, tem-se

$$\Delta P(s) = \frac{\frac{T_i}{K} s (FF(s) - 1)(1 - \Theta_T s)}{\left( \frac{T_i}{K k_p} - T_i \Theta_T \right) s^2 + (T_i - \Theta_T) s + 1} \frac{\delta}{s^2},$$

$$\Delta P(s) = \frac{\frac{T_i}{K} (FF(s) - 1)(1 - \Theta_T s)}{\left( \frac{T_i}{K k_p} - T_i \Theta_T \right) s^2 + (T_i - \Theta_T) s + 1} \frac{\delta}{s}. \quad (5.23)$$

Aplicando-se o Teorema do valor final à  $\Delta P(s)$  fornecido pela equação 5.23,

$$\begin{aligned} \Delta P(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{T_i}{K}(FF(s) - 1)(1 - \Theta_T s)}{\left(\frac{T_i}{Kk_p} - T_i \Theta_T\right)s^2 + (T_i - \Theta_T)s + 1} \delta, \\ \Delta P(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{T_i}{K}(FF(s) - 1)(1 - \Theta_T s)}{\left(\frac{T_i}{Kk_p} - T_i \Theta_T\right)s^2 + (T_i - \Theta_T)s + 1} \delta, \\ \Delta P(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_i}{K}(FF(s) - 1)\delta \end{aligned} \quad (5.24)$$

De acordo com a equação (5.24) o efeito da perturbação do tipo rampa na pressão será nulo em regime se

$$\begin{aligned} FF(s) - 1 &= 0 \text{ para } s = 0, \text{ ou} \\ FF(0) &= 1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Uma função que atende a equação (5.25) é

$$FF(s) = \frac{k_d s + 1}{\alpha s + 1}. \quad (5.26)$$

A escolha desta função além de atender o objetivo de eliminar o efeito de uma perturbação do tipo rampa atende a recomendação clássica de filtro *feed-forward* que é a de buscar inverter o efeito da planta. Ou seja, a vazão de entrada não é controlada pela válvula como a vazão de saída. A vazão de saída calculada pela ação *feed-forward* é implementada pela válvula cuja dinâmica foi modelada por um atraso e uma função de transferência de primeira ordem. Não se pode inverter a função atraso mas pode-se buscar um numerador do filtro *feed-forward* que cancele em parte o efeito da função de transferência de primeira ordem da válvula. Diante disso o filtro *feed-forward* proposto é

$$FF(s) = \frac{\sigma_v s + 1}{\alpha s + 1}. \quad (5.27)$$

Como a ação derivativa pode amplificar ruídos eventualmente presentes no sinal de medição da vazão de entrada, utiliza-se um filtro  $\alpha = \frac{\sigma_v}{N}$ . O valor de  $N$  normalmente utilizado varia de 5 a 20 e é selecionado em função do nível do ruído presente.

### 5.2.3 Síntese dos parâmetros de um Controlador Robusto com ação FF

A técnica utilizada na síntese dos parâmetros do controlador PI nas seções anteriores é em geral considerada agressiva e pode ser justificada para este processo quando a estrutura de controle não utiliza ação *feed-forward*. Em realidade na ausência de ação *feed-forward* seria recomendável buscar um ajuste que de um lado minimize o efeito causado pela perturbação rampa e de outro ofereça robustez para erros de modelagem. O efeito da rampa na pressão é igual a  $\frac{T_i}{K}\delta$ , onde  $T_i$  e  $K$  são respectivamente o Tempo de integração e o ganho do controlador e  $\delta$  é a taxa da perturbação rampa. Sabe-se que ao buscar um ajuste dos parâmetros do controlador  $T_i$  e  $K$  que aumentem a robustez do sistema em malha fechada, a razão  $\frac{T_i}{K}$  seria aumentada, aumentando assim o efeito da perturbação na pressão do *gas-lift manifold*. Contudo no caso de se utilizar a ação *feed-forward* na solução de controle, elimina-se a perturbação em regime para uma perturbação do tipo rampa. Neste caso pode-se lançar mão de técnicas de ajuste do controlador PID mais conservadoras que garantam uma maior robustez na solução.

Uma técnica interessante para o ajuste dos parâmetros do controlador que considera o aspecto de robustez é aquela proposta por Sigurd Skogestad, [107]. Neste trabalho demonstra-se uma técnica de ajuste simples que é refinada com considerações sobre robustez. Além disso mostra-se a utilização da técnica para diferentes funções de transferência. A planta foi modelada como  $\frac{-k_p}{s} \frac{e^{-\Theta s}}{(\sigma_v s + 1)}$ . De acordo com a técnica proposta em [107] o controlador poderia ser um PID completo (com ação integral) ou um controlador PI no caso em que  $\sigma_v$  seja pequeno e possa-se representar o sistema como

$$\begin{aligned} G(s) &= k_p \frac{e^{-\Theta_T s}}{s}, \text{ com} \\ \Theta_T &= \sigma_v + \Theta. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Como  $\sigma_v$  esperado é pequeno pois representa a dinâmica do controle da vazão pelo *choke* de injeção, adota-se a representação do sistema pela função de transferência da equação (5.28). Para o sistema assim representado o ajuste recomendado para um con-

trolador PI é dado pela equação (5.29),

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{k_p(\tau_c + \Theta_T)}, \\ T_i &= 4(\tau_c + \Theta_T). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Na equação 5.29  $\tau_c$  representa a constante de tempo desejada para o sistema em malha fechada. O procedimento pode ser então baseado na proposta de um tempo de estabilização desejado  $T_{est.}$  que vai fornecer  $\tau_c = \frac{T_{est.}}{5}$ . A partir de um modelo nominal do processo, ( $k_p$ ) e  $\Theta_T$  pode-se buscar o menor valor de  $T_{est.}$  que garanta uma determinada margem de ganho e margem de fase para determinadas incertezas nos parâmetros.

### 5.2.4 Resultados obtidos com simulação na síntese do controlador robusto

Para analisar a proposta de controle discute-se nesta subseção sua aplicação a um cenário mostrado na figura 5.2 onde 5 poços são alimentados com gás a partir de um gas-lift manifold com as seguintes características

- Volume equivalente= 1 m<sup>3</sup>
- Vazão nominal de entrada= 33.2 Kg/s
- Pressão nominal do *gas-lift manifold*= 24 MPa
- Peso molecular do gás= 0.028 Kg/mol
- Temperatura do gás= 300 K

A figura 5.11 mostra o efeito de uma perturbação rampa na vazão de entrada de gás no manifold sobre a pressão no mesmo utilizando a estrutura de controle mostrada na figura 5.2.2. O Controlador PI utilizado tem os parâmetros  $K = -1.1419e - 006$  e  $T_i = 40.68$ . A simulação mostra o efeito de uma queda na vazão de injeção a uma taxa de 0.05 Kg/s/s no intervalo de tempo entre 600s e 900s. A queda de pressão resultante pode ser calculada pela equação 5.18,

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{T_i}{K} \frac{\delta}{L} = 1.7816e + 006 \text{ Pa, ou} \\ &= 18.16 \text{ Kgf/cm}^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

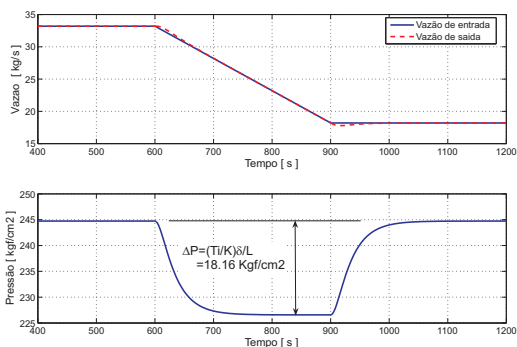


Figura 5.11: Efeito da perturbação rampa na vazão de entrada sobre a pressão do *gas-lift manifold*

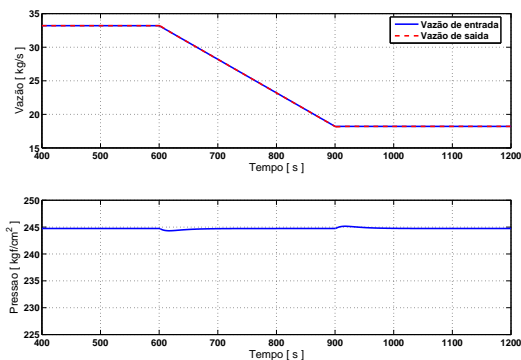


Figura 5.12: Efeito da perturbação rampa na vazão de entrada sobre a pressão do *gas-lift manifold* utilizando ação *feed-forward*

A figura 5.12 mostra a redução da variação da pressão no *gas-lift manifold* quando utiliza-se ação *feed-forward*. Utilizou-se o controlador PI com os mesmos parâmetros e também a mesma perturbação rampa com taxa de  $0.05 \text{ kg/s/s}$ . A ação *feed-forward* utilizada é a vazão de entrada depois de aplicado o filtro mostrado na equação (5.26). Utilizou-se  $\sigma_v = 2$  e  $\alpha = 0.1$ . Como já mencionado, a utilização da ação *feed-forward* permite a utilização de um controlador mais robusto às incertezas de modelagem en-

quanto diminui consideravelmente a variação no valor da pressão do manifold como pode ser visto na figura 5.12.

### Síntese do controlador robusto

Nos desenvolvimentos a seguir considerou-se os parâmetros do modelo do *choke* como  $\Theta = 1$  e  $\tau_v = 2$ . A equação (5.29) mostra que ao aumentar-se o valor de  $\tau_c$  aumenta-se o valor de  $T_i$  e diminui-se o valor de  $K$ . Isto significa em geral menor ganho do sistema de controle e maior robustez. Considerando que  $\tau_c$  é a constante de tempo do sistema em malha fechada, pode-se escrever  $\tau_c$  em função do tempo de estabilização,  $\tau_c = \frac{T_{est.}}{5}$ . Desta forma pode-se fazer a análise da robustez do sistema em malha fechada em função do tempo de estabilização desejado.

A síntese dos parâmetros  $K$  e  $T_i$  pode então ser realizada da seguinte forma:

Encontrar o tempo de estabilização que fornece uma margem de ganho igual a  $MG$  considerando que existe erros nos parâmetros do modelo que minimizam a margem de ganho do sistema. Observando o modelo completo pode-se perceber que a margem de ganho é minimizada quando todos os parâmetros são maiores do que o nominal. Ou seja, o caso onde o ganho do sistema  $k_p$  é maior do que o ganho nominal  $k_{pN}$ , o atraso é maior do que o atraso nominal  $\Theta_{vN}$  e a constante de tempo  $\tau_v$  é maior do que  $\tau_{vN}$  é a combinação que mais desestabiliza o sistema em malha fechada. Pode-se então definir um erro máximo esperado para cada parâmetro e buscar o Tempo de estabilização que garante uma determinada margem de ganho  $MG$ . A partir do Tempo de estabilização determinado calcula-se, utilizando-se também os parâmetros nominais do processo,  $k_{pN}$ ,  $\Theta_{vN}$  e  $\tau_{vN}$  os parâmetros do controlador PI,  $K$  e  $T_i$ .

Procedimento similar pode ser feito estabelecendo-se um pico de sensibilidade desejado

$$M_s = \frac{1}{|1 + C(jw)H(jw)|}. \quad (5.31)$$

A figura 5.13 mostra o conceito utilizado. A idéia é garantir uma distância segura entre a curva de Nyquist  $C(jw)H(jw)$  do ponto  $-1+j0$  no caso em que os parâmetros do processo sejam diferentes



daqueles considerados no projeto do controlador. Esta distância é definida como  $r$  na figura 5.13, onde  $r = \frac{1}{M_s}$ .

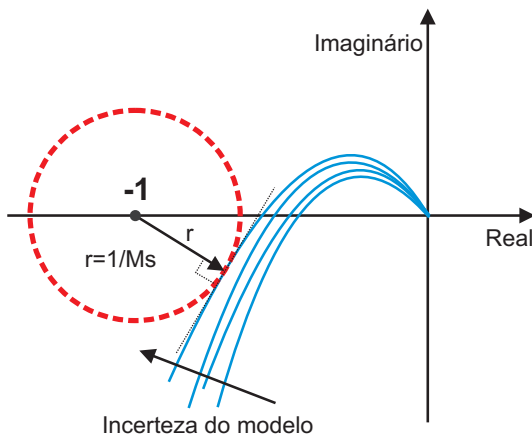


Figura 5.13: Diagrama de Nyquist mostrando o conceito de pico de sensibilidade

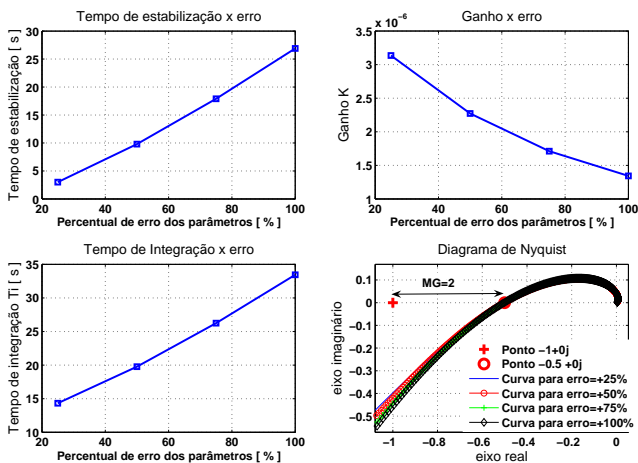


Figura 5.14: Resultados do projeto do PI Robusto utilizando Margem de Ganho=2

A figura 5.14 mostra os resultados obtidos com o projeto dos

parâmetros  $K$  e  $T_i$  do controlador PI quando se estabeleceu uma margem de ganho igual a 2 para erros de modelagem de  $k_p$ ,  $\Theta_v$  e  $\tau_v$  desde 25% até 100% de seus valores nominais. A idéia é mostrar que uma vez determinado o nível de incerteza nos valores destes parâmetros, pode-se obter os parâmetros do controlador ainda com uma margem de ganho. Nota-se que na medida que se supõe uma incerteza maior, menor é o ganho e maior é o tempo integral necessário para garantir a margem de ganho desejada.

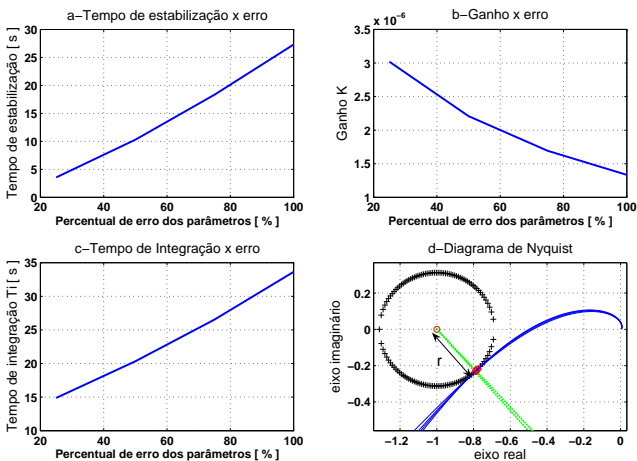


Figura 5.15: Resultados do projeto do PI Robusto utilizando Pico de sensibilidade igual a 3.2

A figura 5.15 mostra o resultado obtido utilizando um procedimento similar mas baseado no pico de sensibilidade desejado. Para efeito de comparação estipulou-se um valor de pico de sensibilidade desejado de 3.2 que, para este processo resulta em uma margem de ganho de aproximadamente 2. A utilização do pico de sensibilidade pode se mostrar mais interessante do que a margem de ganho pois garante de forma global uma determinada distância do ponto  $-1 + 0j$ . A utilização da margem de fase junto com a margem de ganho pode oferecer um critério semelhante ao do pico de sensibilidade. Deve-se observar que o procedimento desenvolvido não introduz nenhum conservadorismo já que a função  $C(j\omega)H(j\omega)$  foi avaliada para a faixa de frequência de interesse para cada valor de erro nos parâmetros.

A figura 5.15-d mostra o Diagrama de Nyquist para cada  $L_i = C_i(j\omega)H_i(j\omega)$ , onde  $i$  é o índice que representa o erro considerado que vai de 25% até 100% em passos de 25%. Conforme o valor do erro esperado, o controlador é ajustado para manter o valor do pico de sensibilidade desejado.

### 5.2.5 Implementação da Proposta para Automação de um Grupo de Poços

A figura 5.16 mostra um sistema de controle para um grupo de poços operando com elevação artificial por *gas-lift* proposto. Um *gas-lift manifold* recebe gás do sistema de compressão e deve distribuí-lo para um número de poços de forma a maximizar uma determinada função objetivo enquanto estabiliza a pressão no *manifold*. Isto deve ser feito tanto no caso em que há disponibilidade para a operação no ponto ótimo da curva  $P_{wf} = f(Q_{inj.})$  de cada poço, como também nos casos em que ocorram diminuições na vazão de gás sendo entregue ao *gas-lift manifold*. A estrutura de controle mostrada na figura 5.16 é uma representação em diagrama de blocos do sistema de controle em desenvolvimento. Percebe-se na figura diferentes elementos como

- *Controlador da Pressão PC2* no *manifold* de *gas-lift*. Este controlador cuja síntese foi discutida na subseção anterior estabiliza a pressão no *manifold* ao calcular a vazão total de saída a ser implementada pelos controladores locais de vazão de injeção de cada poço. Sua estrutura final é mostrada na figura 5.17.
- *Controladores locais de vazão de injeção* de cada poço, *FC*. Estes controladores recebem a tabela de alocação do *Bloco Algoritmo de Otimização* sempre que ocorre uma nova geração de tabelas. Recebem também constantemente o valor da vazão total disponível do *Controlador da Pressão no Manifold PC2*. Com essas duas informações o controlador *FC* determina o valor da vazão de injeção a ser implementada (referência do controlador local).
- *Bloco Controle Supervisório*. Este bloco é responsável por coordenar a integração de todos os elementos que participam do sistema de controle. Com base na leitura da pressão do *manifold* de *gas-lift*, por exemplo, determina se os poços podem entrar em regime de teste ou não. Além disso, baseado

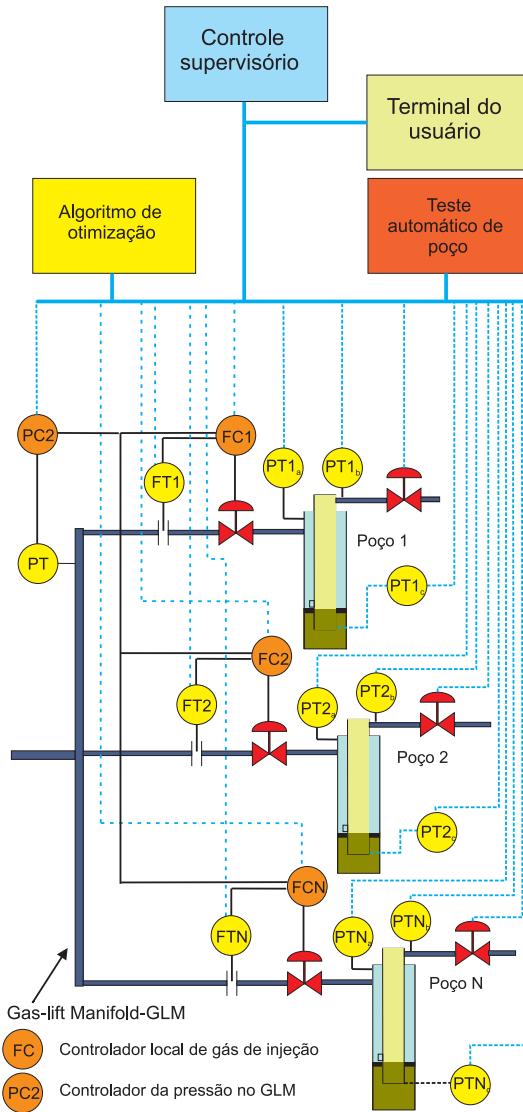


Figura 5.16: Sistema de Controle de Poços alimentados por um manifold comum

em uma estratégia pré-definida podem sugerir ao operador a realização de um teste de poço para atualização da curva  $P_{wf} \times Q_{inj}$ .

- *Bloco Teste Automático de Poços.* Este bloco é responsável por realizar o teste de poço quando autorizado pelo terminal do operador. Os testes são realizados de forma a minimizar o tempo de ensaio ao mesmo tempo que garantem a qualidade dos dados conforme será discutido neste capítulo.
- *Bloco Algoritmo de Otimização.* Este bloco é responsável por calcular as tabelas de alocação de todos os poços sempre que recebe uma nova informação que impacta a alocação ótima de gás. A principal informação é uma nova curva  $P_{wf} \times Q_{inj}$  de um determinado poço recebida do bloco *Teste Automático de Poços*. Dependendo da função objetivo selecionada, atualizações sobre os custos de compressão, tratamento de água, valores atuais do óleo e gás produzido poderiam também iniciar o cálculo de novas tabelas de alocação. Neste capítulo discute-se a implementação deste bloco.
- *Terminal do Usuário.* Este terminal pode em realidade ser dividido em mais de um tipo de forma a atender diferentes objetivos. Um tipo de terminal seria aquele para utilização do operador. Este terminal poderia permitir um diálogo de alto nível entre o operador e o sistema automático de controle onde o operador poderia aceitar ou recusar ações propostas pelo sistema. O operador poderia, por exemplo, aceitar ou não a sugestão do sistema em realizar um novo teste de um poço. Poderia ainda aceitar o resultado do teste ou exigir a repetição parcial ou total do mesmo, aceitar a sugestão do sistema em fazer a repartida de um poço que foi fechado, etc. Um outro nível de terminal de usuário poderia permitir a visualização das principais variáveis do processo como pressão no *manifold* de *gas-lift*, vazão de injeção de gás de cada poço, etc. mas sem a possibilidade de intervenção do usuário.

A estratégia de controle proposta teve o cuidado de priorizar a continuidade das operações. Para isso foi proposto a utilização de controladores locais para a pressão no *manifold* de *gas-lift* e para a vazão de injeção de gás de cada poço. Isto permite que mesmo havendo uma falha na rede local, haverá a possibilidade de controlar os poços em caso de restrição na disponibilidade de gás.

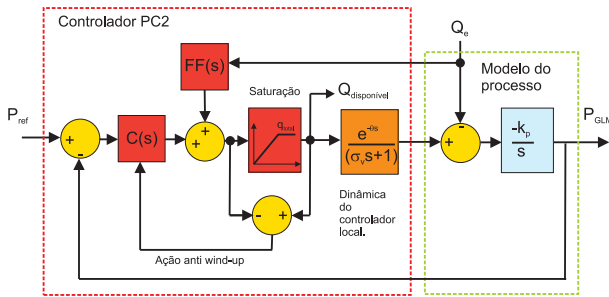


Figura 5.17: Estrutura do Controlador PC2

Isto é possível pois os controladores locais teriam as informações necessárias para a tomada de decisão sobre a vazão ótima a ser implementada em cada poço ou seja, a vazão total disponível informada pelo controlador local da pressão no *manifold* e a última tabela de alocação. Desta forma o sistema poderia manter-se operando por um longo tempo sem a necessidade da rede de controle. É claro que é o sistema de controle via rede que permite a atualização dos modelos e a geração de novas tabelas de alocação mas do ponto de vista operacional uma falha de comunicação da rede não impede o funcionamento do sistema.

### 5.2.6 Um estudo de caso para operação com restrição

Esta subseção descreve a aplicação dos algoritmos de otimização e controle desenvolvidos para um estudo de caso com modelos de poços derivados do simulador de escoamento multifásico OLGA<sup>MR</sup>.

O cenário é aquele representado pela figura 5.2 no início desta seção, onde 8 poços recebem gás de um único GLM (*Gas Lift Manifold*).

Algumas características do cenário simulado são:

- Volume equivalente: 1.0 m<sup>3</sup>
- Pressão nominal do GLM: 225.4 Kgf/cm<sup>2</sup>
- Pressão de referência do GLM sob restrição: 224.4 Kgf/cm<sup>2</sup>

O estudo de caso considera somente a restrição na capacidade de compressão do sistema.

Cada poço possui um modelo de regime permanente relacionando sua vazão de injeção de gás com a vazão de óleo produzido.

A figura 5.18 mostra a alocação de gás obtida com os modelos e a aplicação do algoritmo de otimização para todo o range de disponibilidade de gás.

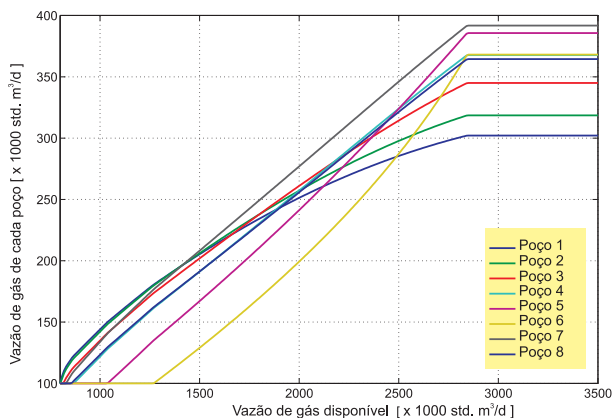


Figura 5.18: Carta de alocação de *gas-lift*

O objetivo da simulação é mostrar o desempenho completo do sistema de automação e otimização durante uma queda na disponibilidade de gás para injeção utilizando a estrutura de automação mostrada na figura 5.16. Para isso a dinâmica do GLM, dos *chokes* e dos poços foram modelados e implementados.

A figura 5.19 mostra a vazão de gás para injeção entrando e saindo do GLM. Como pode ser observado na figura, a estratégia de controle consegue distribuir a vazão de gás saindo do GLM em um valor praticamente igual aquela que entra. A figura 5.20 mostra a pressão no GLM.

Conforme estabelecido pela estratégia de controle, durante operação com restrição no fornecimento de gás a pressão no GLM é mantida em um valor de referência ligeiramente menor do que a pressão normal do GLM. Para este estudo de caso a pressão normal adotada foi  $225.4 \text{ Kgf/cm}^2$  e para operação com restrição o valor escolhido foi  $224.4 \text{ Kgf/cm}^2$ . Pode-se observar que não

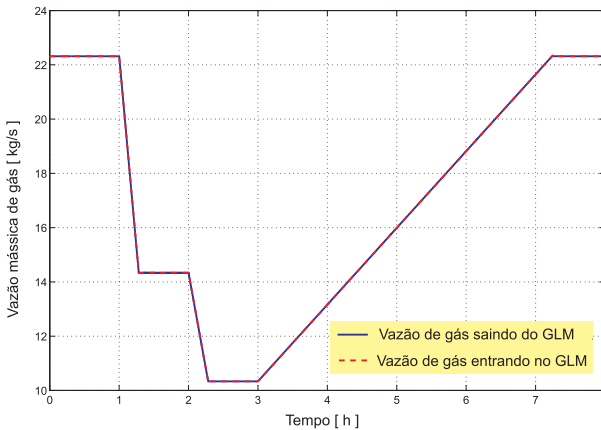


Figura 5.19: Vazão mássica de gás entrando e saindo do GLM.

há praticamente nenhuma variação na pressão do GLM para as diferentes disponibilidades de vazão de gás entrando no GLM.

A fim de mostrar a vantagem na utilização da ação *Feed-Forward* no controle da pressão do GLM, a figura 5.21 mostra a pressão no GLM quando utiliza-se o controlador sem ação *Feed Forward*.

Conforme discutido anteriormente, variações na vazão de entrada do GLM do tipo rampa podem causar grandes variações na pressão do GLM com amplitudes dependentes dos parâmetros do controlador e da taxa de variação da rampa. É muito importante manter a pressão no GLM tão perto quanto possível do seu valor de referência durante as operações com restrição na disponibilidade de gás a fim de não permitir o acionamento do controlador utilizado para operação normal. A idéia é manter a pressão no GLM em um valor ligeiramente menor do que o normal durante as operações com restrição de forma que o subsistema compressor continuará tentando aumentar a vazão de gás entregue ao GLM a fim de recuperar o controle da pressão para o valor normal. Assim que o subsistema compressor entregue uma vazão maior do que a vazão de saturação do controlador PC2, a pressão no GLM crescerá e será mantida no seu valor normal. Isto pode ser observado nas figuras 5.20 e 5.19. A sequência de eventos simulada no estudo de caso acontece conforme abaixo. O sistema está operando normalmente com o GLM na pressão normal de  $225.4 \text{ Kgf/cm}^2$ .



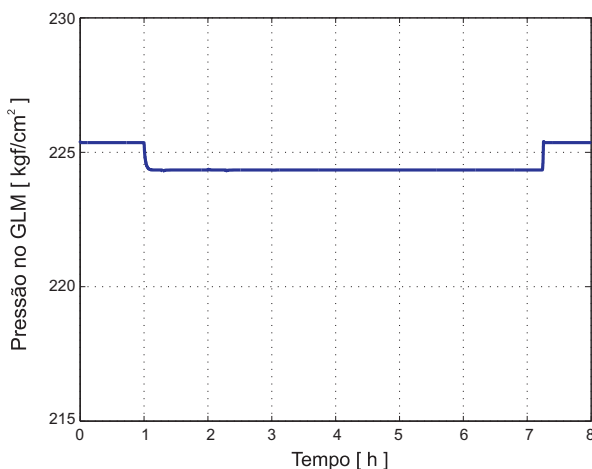


Figura 5.20: Pressão no GLM com controle utilizando ação *Feed Forward*

Uma hora mais tarde acontece uma diminuição da vazão de entrada no GLM tipo rampa. O controlador PC2 reage e calcula a vazão a ser implementada (vazão de gás disponível) para manter a pressão no GLM em sua nova referência de  $224,4 \text{ Kgf/cm}^2$ . A vazão calculada pelo controlador PC2 é passada para os controladores locais de cada poço que possuem uma tabela de alocação pré calculada e apresentada na figura 5.18. A ação simultânea dos controladores locais de cada poço implementam a vazão calculada que estabiliza a pressão no GLM e maximiza a produção de óleo para aquela disponibilidade de vazão de gás. Sete horas e um quarto mais tarde o subsistema compressor consegue entregar a vazão de entrada no GLM elevando sua pressão para o valor normal.

A figura 5.22 mostra o comportamento da pressão de fundo de todos os poços conforme a vazão de gás de injeção varia durante o estudo de caso. As pressões sobem conforme o esperado durante as operações com restrição na disponibilidade de gás para injeção.

A figura 5.23 mostra a porcentagem do total de gás disponível utilizado por cada poço e a figura 5.24 mostra a vazão de óleo produzida por cada poço durante a operação com restrição.

O comportamento dinâmico da vazão de óleo apresentada na

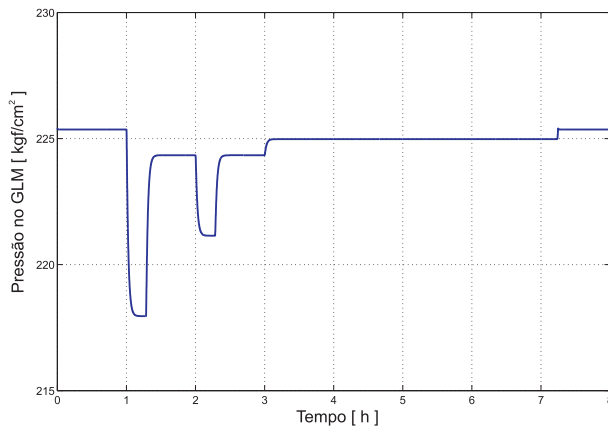


Figura 5.21: Pressão no GLM com controle não utilizando ação *Feed Forward*.

figura 5.24 é uma aproximação do que acontece na frente dos canhoneados. Os valores em regime permanente são mais representativos.

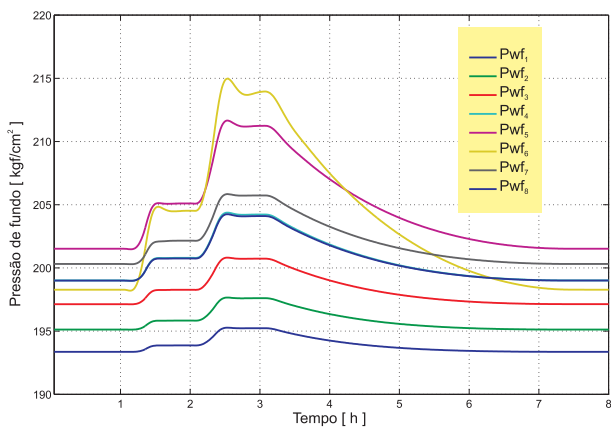


Figura 5.22:  $P_{wf}$  de todos os poços

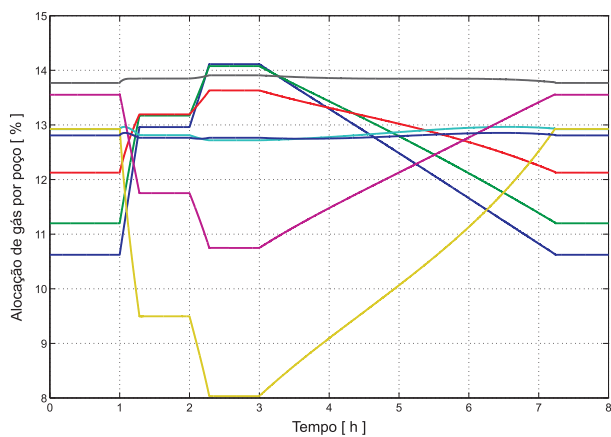


Figura 5.23: Porcentagem de gás utilizada por cada poço

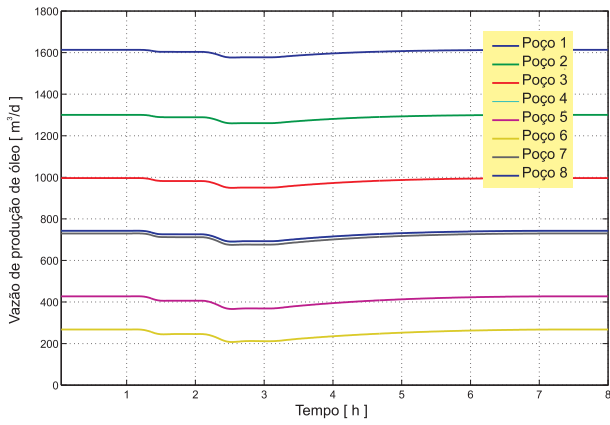


Figura 5.24: Produção de óleo por poço

### 5.3 Um sistema de Controle automático utilizando a técnica de controle preditivo baseado em modelo PNMPC

Na seção 5.2 apresentou-se uma técnica para a automação de um grupo de poços operando com elevação por GLC com o objetivo de garantir a distribuição ótima de gás dentre os poços. Nenhuma ação de controle foi projetada para agir no sentido de modificar o comportamento dinâmico dos poços. O algoritmo de otimização garante que a vazão mínima implementada em cada poço seja superior ao valor que leva o poço ao comportamento com oscilações sustentadas típicos dos fenômenos *heading* ou *density-wave*. As motivações para este tipo de solução são diversas:

- A grande maioria dos poços operando via GLC não dispõem de *choke* de produção com atuação automática dificultando a aplicação de técnicas de controle avançadas.
- A operação de poços com baixa vazão de injeção acarreta em significativas perdas de produção e por isso, a maioria das instalações estão bem equipadas com compressores reserva para evitar essas situações.
- Existem sistemas de superfície preparados para mitigar os efeitos das oscilações causadas por eventual diminuição na vazão de injeção de gás como os *slug-catcher*, por exemplo.
- A utilização de válvulas do tipo Venturi praticamente eliminam a ocorrência do fenômeno *heading*. Por outro lado o fenômeno *density-wave* não ocorre para poços surgentes e acontece para vazões de injeção muito baixas para poços operando em reservatórios com baixo nível de depleção conforme mostrado no capítulo 2.2. A utilização de sistemas de recuperação via injeção de água em poços injetores contribui para a manutenção da pressão de fundo dos poços.

Nesta subseção apresenta-se a utilização da técnica de controle preditivo não linear desenvolvida no capítulo 4 no controle de um grupo de poços. A ideia é melhorar o sistema de controle proposto na seção 5.2 e permitir que além da distribuição ótima de gás, o sistema de controle possa diminuir as oscilações causadas pela variação na vazão de injeção dos poços nos momentos de restrição na disponibilidade de gás para injeção além de estabilizar

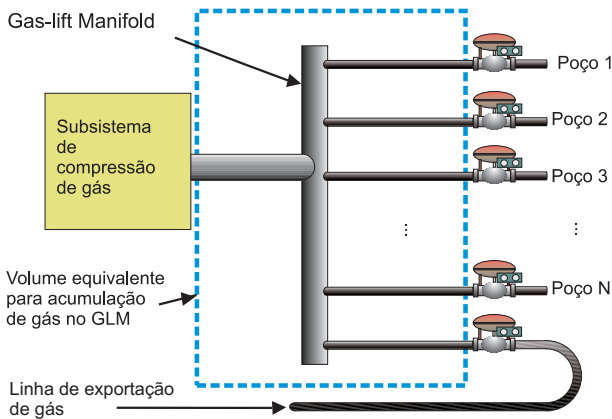


Figura 5.25: Gas-lift manifold-GLM

a pressão no GLM. A maior parte desta trabalho foi apresentada em [44] e [54].

### 5.3.1 A formulação NMPC

Como já mencionado, considera-se um conjunto de  $N$  poços operando via GLC com medição de pressão de fundo e equipados com medição e controle via *choke* da vazão de injeção de gás. Todos os poços recebem gás de um GLM comum que nesta proposta de controle possui, além das saídas para todos os poços, uma saída extra para o queimador ou para recirculação conforme a instalação. Esta saída é um mecanismo que permite ao gás ser descarregado em casos onde a vazão de gás entrando no GLM é maior do que o necessário para operar os poços em seus pontos ótimos irrestritos. A vazão dessa saída será referida como a vazão de excesso.

Para tal sistema mostrado na figura 5.25 desejamos

- manter a pressão no GLM próximo ao seu valor de referência projetado de acordo com as necessidades dos poços,
- distribuir a vazão de gás disponibilizada pelo subsistema compressor entre os poços de forma a maximizar um objetivo econômico e

- minimizar as oscilações na produção causadas pelas mudanças nas vazões de injeção de gás. Essas oscilações causam problemas aos processos de separação.

Algumas restrições devem ser consideradas.

- Manter a vazão de injeção de gás de cada poço maior do que um valor mínimo.
- Manter a pressão no GLM entre um limite inferior e superior.

A tabela 5.1 apresenta a nomenclatura utilizada.

### 5.3.2 A função custo para o algoritmo PNMPC

A formulação da função objetivo a ser utilizada no algoritmo MPC Não Linear deve ser tal que sua minimização forneça os objetivos propostos. Os objetivos são o econômico e o de comportamento dinâmico desejado.

Existem diversos objetivos econômicos que podem ser introduzidos como aqueles que consideram o valor diferenciado da produção de óleo e gás e o custo do tratamento da água produzida. Neste trabalho utiliza-se o objetivo econômico que considera o ganho devido a produção de óleo e o custo de compressão de gás para injeção. Para isso define-se a função custo econômico

$$L = \sum_{i=1}^N [P_o (q_{o_{max}}^i - q_{inj}^i) + C_c q_{inj}^i], \quad (5.32)$$

onde

- $N$  é o número total de poços,
- $P_o$  é o preço do óleo,
- $C_c$  é o custo de compressão de gás.

As vazões de injeção  $q_{inj}^i$  que minimizam o custo  $L$ , no caso de não haver restrição na disponibilidade de gás, podem ser obtidas calculando-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_{inj}^1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_{inj}^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_{inj}^N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Tabela 5.1: Nomenclatura

Simb.	Descrição da variável	Unidade
$qo^i$	Vazão de óleo do poço $i$	$stdm^3.d^{-1}$
$qliq^i$	Vazão de líquido do poço $i$	$stdm^3.d^{-1}$
$qw^i$	Vazão de água do poço $i$	$stdm^3.d^{-1}$
$qg^i$	Vazão de gás do poço $i$	$stdm^3.d^{-1}$
$p_{wf}^i$	Pressão de fundo do poço do poço $i$	$kgf.cm^{-2}$
$\bar{p}$	Pressão média do reservatório	$kgf.cm^{-2}$
$p_{sat}^i$	Pressão de saturação do óleo do poço $i$	$kgf.cm^{-2}$
$q_{sat}^i$	Vazão de líquido do poço $i$ para $p_{wf}^i = p_{sat}^i$	$stdm^3.d^{-1}$
$q_{max}^i$	Vazão máxima de líquido do poço $i$ ( $p_{wf} = 0$ )	$stdm^3.d^{-1}$
$qo_{max}^i$	Vazão máxima de óleo do poço $i$	$stdm^3.d^{-1}$
$q_{inj}^i$	Vazão de injeção de gás do poço $i$	$stdm^3.d^{-1}$
$q_{exc}$	Vazão de excesso do GLM (queim. or recirc.)	$stdm^3.d^{-1}$
$p_{GLM}$	Pressão no <i>GLM-Gas Lift Manifold</i>	$kgf.cm^{-2}$
$p_{GLM}^{sp}$	Pressão de referência do GLM	$kgf.cm^{-2}$
$p_{wf}^{i*}$	Valor de $p_{wf}$ utilizado na normalização poço $i$	$kgf.cm^{-2}$
$q_{inj}^{i*}$	Valor de $q_{inj}$ para $p_{wf}^i = p_{wf}^{i*}$	$stdm^3.d^{-1}$
$q_{GLM}^{out}$	Vazão mássica de gás saindo do GLM	$kgs^{-1}$
$q_{GLM}^{in}$	Vazão mássica de gás entrando no GLM	$kgs^{-1}$
$q_{GLM}^{in*}$	Somatório de $q_{inj}^{i*}$ de todos o poços	$kgs^{-1}$
$\hat{w}$	Valor predito da variável $w$	

Símb..	Constante	Unidade
$V$	Volume equivalente do GLM	$m^3$
$R$	Contante Universal dos gases , 8.314472	$Pa.m^3/Kmol$
$M$	Peso molecular do gás	$kg.mol^{-1}$
$BSW$	Saturação de água	-
$GOR$	Razão Gás-óleo	-

Isto resulta em



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial qo^1(q_{inj}^1)}{\partial q_{inj}^1} \\ \frac{\partial qo^2(q_{inj}^2)}{\partial q_{inj}^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial qo^N(q_{inj}^N)}{\partial q_{inj}^N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_c}{P_o} \\ \frac{C_c}{P_o} \\ \vdots \\ \frac{C_c}{P_o} \end{bmatrix}, \tag{5.34}$$

que é o mesmo resultado obtido pelo método *equal-slope*. O conjunto de vazões implementadas é tal que qualquer ganho econômico com um aumento da vazão de injeção de gás em qualquer poço é superado pelo custo de compressão de gás. Para o caso sem restrição na disponibilidade de gás isto equivale a operar todos os poços no ponto da curva  $qo^i = f(q_{inj}^i)$  onde a inclinação seja igual a razão entre o Custo de Compressão por unidade de vazão de gás e o preço por vazão de óleo,  $\frac{C_c}{P_o}$ . No caso de haver restrição na disponibilidade de gás para injeção o problema pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \min_{[q_{inj}^1 \quad q_{inj}^2 \quad \dots \quad q_{inj}^N]} L \\ & \text{s. a} \\ & L = \sum_{i=1}^N [(qo_{max}^i - qo^i(q_{inj}^i)) + kq_{inj}^i] \\ & k = \frac{C_c}{P_o} \\ & \sum_{i=1}^N q_{inj}^i \leq q_{inj}^{disp} \end{aligned} \tag{5.35}$$

A solução do problema expresso pela equação 5.35 pode ser obtida reescrevendo-se o problema utilizando-se o multiplicador de Lagrange  $\lambda$  para inserir a restrição na equação.

$$\begin{aligned} & \min_{[q_{inj}^1 \quad q_{inj}^2 \quad \dots \quad q_{inj}^N \quad \lambda]} L \\ & \text{s. a} \\ & L = \sum_{i=1}^N [(qo_{max}^i - qo^i(q_{inj}^i)) + kq_{inj}^i + \lambda (\sum_{i=1}^N q_{inj}^i - q_{inj}^{disp})] \\ & k = \frac{C_c}{P_o} \end{aligned} \tag{5.36}$$

Devido a natureza convexa do problema a solução ótima global

pode ser obtida calculando o vetor  $[ q_{inj}^1 \quad q_{inj}^2 \quad \dots \quad q_{inj}^N \quad \lambda ]$  que satisfaz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_{inj}^1} \\ \frac{\partial L}{\partial q_{inj}^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_{inj}^N} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.37}$$

Aplicando-se 5.37 em 5.36 obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial qo^1(q_{inj}^1)}{\partial q_{inj}^1} &= k + \lambda \\ \frac{\partial qo^2(q_{inj}^2)}{\partial q_{inj}^2} &= k + \lambda \\ &\vdots \\ \frac{\partial qo^N(q_{inj}^N)}{\partial q_{inj}^N} &= k + \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^N q_{inj}^i - q_{inj}^{disp} = 0 \end{aligned} \tag{5.38}$$

A equação 5.38 representa o método *equal slope* com restrição na disponibilidade de gás. Na sequência define-se os elementos necessários para a formulação da função objetivo econômica a ser utilizada no algoritmo de controle preditivo PNMPCC. Como a função objetivo será minimizada ao longo do horizonte de predição para as vazões de óleo que são função da pressão de fundo e das vazões de injeção ao longo do horizonte de controle há a necessidade de se compensar os diferentes intervalos de tempo preditos. Além disso as predições são realizadas em função dos incrementos de vazão de injeção  $\Delta q_{inj}^i$  para cada poço. Define-se o vetor com os incrementos de vazão de injeção de cada poço  $i$ ,  $\Delta Q_{inj}^i$  como

$$\Delta Q_{inj}^i = [ \Delta q_{inj}^i(k) \quad \Delta q_{inj}^i(k+1) \quad \dots \quad \Delta q_{inj}^i(k+m-1) ]^T. \tag{5.39}$$

O vetor com os incrementos da vazão de gás na linha de excesso é descrita como

$$\Delta \mathbf{Q}_{exc} = [ \Delta q_{exc}(k) \quad \Delta q_{exc}(k+1) \quad \cdots \quad \Delta q_{exc}(k+m-1) ]^T. \quad (5.40)$$

O vetor com todos os incrementos de vazão saindo do GLM é escrito como

$$\Delta \mathbf{Q}_{out}^{GLM} = [ (\Delta \mathbf{Q}_{inj}^1)^T \quad (\Delta \mathbf{Q}_{inj}^2)^T \quad \cdots \quad (\Delta \mathbf{Q}_{inj}^N)^T \quad (\Delta \mathbf{Q}_{exc})^T ]^T. \quad (5.41)$$

A perda de faturamento devido a operação abaixo da vazão ótima pode ser escrita como

$$L_P = P_o \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p (qo_{max}^i - qo^i(q_{inj}^i)(k+j)) T_s. \quad (5.42)$$

Já a perda de faturamento devido o custo de compressão pode ser expresso como

$$L_C = P_o \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{p-1} (q_{inj}^i(k+j)) T_s. \quad (5.43)$$

O problema da otimização da produção pode ser colocado na função objetivo do algoritmo PNMPC como

$$\begin{aligned} & \min && L_1 & (5.44) \\ & [ (\Delta \mathbf{Q}_{inj}^1)^T \quad (\Delta \mathbf{Q}_{inj}^2)^T \quad \cdots \quad (\Delta \mathbf{Q}_{inj}^N)^T \quad (\Delta \mathbf{Q}_{exc})^T ]^T \\ \text{s. a} & && & \\ & L_1 = \sum_{i=1}^N [ \sum_{j=1}^p (qo_{max}^i - qo^i(q_{inj}^i)(k+j)) T_s \\ & + \frac{pC_c}{mP_o} \sum_{j=0}^{m-1} (q_{inj}^i(k+j)) T_s ] \end{aligned}$$

O fator  $\frac{p}{m}$  compensa o fato de que a perda de produção acumulada é calculada no intervalo de tempo  $pT_s$  enquanto que o custo da compressão de gás é calculada no intervalo de tempo  $mT_s$ .

Para implementar a função custo na forma matricial define-se para cada poço  $i$  a perda de produção  $qo_L^i$ ,

$$qo_L^i = qo_{max}^i - \tilde{qo}^i(p_{wf}^i), \quad (5.45)$$

onde  $\tilde{qo}^i(p_{wf}^i)$  é a vazão de óleo calculada em função do valor predito de  $p_{wf}^i$ . Com o intuito de escrever a função custo na forma

matricial monta-se o vetor  $\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{o}}_L$  com as perdas de produção de todos os  $i$  poços no horizonte de predição  $p$ .

$$\mathbf{Q}\tilde{\mathbf{o}}_L = [ qo_L^1(1) \quad \cdots \quad qo_L^1(p) \quad \cdots \quad qo_L^N(1) \quad \cdots \quad qo_L^N(p) ]^T \tag{5.46}$$

A fim de minimizar as oscilações nas vazões de produção coloca-se na função objetivo um termo igual ao somatório do quadrado da derivada das perdas de produção de todos os poços ao longo do horizonte de predição.

$$L_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^p \left( \frac{dqo_L^i(k+j)}{dt} \right)^2 \tag{5.47}$$

A derivada da vazão de todos os poços ao longo do horizonte de predição pode ser obtida de forma matricial utilizando a matriz  $T$  equivalente ao operador  $\Delta = 1 - z^{-1}$ . Em sua forma original a matriz Toeplitz equivalente ao operador  $\Delta = 1 - z^{-1}$  é escrita como

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.48}$$

A utilização dessa matriz pressupõe que o elemento que antecede o vetor ao qual ela seria aplicada tem valor nulo. Para a utilização pretendida neste trabalho é mais natural supor que no final do horizonte de predição a derivada da perda de produção sera muito pequena. Assim, utiliza-se uma matriz Toeplitz modificada,  $\mathbf{T}$  que considera a última derivada nula.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

Finalmente pode-se apresentar o problema de otimização a ser

resolvido pelo algoritmo PNMPC,

$$\begin{aligned}
 & \min \\
 & [ (\Delta \mathbf{Q}_{inj}^1)^T \quad (\Delta \mathbf{Q}_{inj}^2)^T \quad \dots \quad (\Delta \mathbf{Q}_{inj}^N)^T \quad (\Delta \mathbf{Q}_{exc})^T ]^T J \quad (5.50) \\
 & \text{s. a} \\
 & J = \mathbf{W}_1 \mathbf{Q}_{oL}^{\tilde{}} + \mathbf{W}_2 \mathbf{Q}_{GLM}^{out} + \\
 & (\mathbf{P}_{GLM}^{sp} - \tilde{\mathbf{P}}_{GLM})^T \mathbf{W}_3 (\mathbf{P}_{GLM}^{sp} - \tilde{\mathbf{P}}_{GLM}) \\
 & + \left( \mathbf{T} \mathbf{Q}_{oL}^{\tilde{}} \right)^T \mathbf{W}_4 \left( \mathbf{T} \mathbf{Q}_{oL}^{\tilde{}} \right) + (\Delta \mathbf{Q}_{GLM}^{out})^T \mathbf{W}_5 \Delta \mathbf{Q}_{GLM}^{out}, \\
 & \mathbf{Q}_{GLM}^{out} \geq \mathbf{Q}_{GLM}^{min} \\
 & \tilde{\mathbf{P}}_{GLM} \leq \tilde{\mathbf{P}}_{GLM}^{max} \\
 & \tilde{\mathbf{P}}_{GLM} \geq \tilde{\mathbf{P}}_{GLM}^{min}
 \end{aligned}$$

Os primeiros dois termos da função custo implementam o objetivo econômico, o terceiro termo força a pressão no GLM para seu valor de referência, o quarto termo minimiza as oscilações na perda de produção o que tem o mesmo efeito que minimizar as variações na produção de óleo. O quinto termo minimiza as mudanças nas vazões de injeção dos poços e da linha de excesso. Os vetores  $\mathbf{W}_1$  e  $\mathbf{W}_2$  podem ser ajustados para implementar o objetivo econômico e ponderar os custos de compressão e faturamento com a produção de óleo. As matrizes  $\mathbf{W}_3$ ,  $\mathbf{W}_4$  e  $\mathbf{W}_5$  devem ser ajustadas para a obtenção do comportamento dinâmico desejado frente ao objetivo principal que é o econômico.

Obviamente que uma ponderação excessiva nestas matrizes pode resultar em um resultado econômico pior durante o comportamento transiente no momento de uma restrição na disponibilidade de gás para compressão. Mas, quando bem ajustadas, pode-se obter um comportamento dinâmico mais suave das vazões de óleo e uma produção igual ou maior do que a que seria obtida sem a aplicação de controle. Deve-se observar que em regime permanente os termos 3, 4 e 5 vão a zero e atinge-se o resultado econômico de regime permanente.

Aplicou-se restrição nos valores admissíveis para as vazões saindo do GLM e para a pressão no GLM. As vazões de injeção de todos os poços recebem restrição para valores mínimos correspondentes a valores ligeiramente acima (110 %) do valor de injeção que leva ao comportamento com oscilações sustentadas (ciclo limite) devido o fenômeno *density wave*. Para a vazão na linha de excesso utilizou-se um valor mínimo igual a zero.

Não se aplicou restrições nos valores máximos das vazões saindo do GLM mas poderia ser feito sem dificuldades. As vazões de injeção nos poços poderiam ser limitadas a um valor ligeiramente maior do que a vazão que induz a maior produção de óleo. Isto seria uma garantia a mais que não se operaria de forma muito ineficiente no caso de alguma falha e deixaria uma margem para utilização no controle das oscilações.

Aplica-se também restrição na pressão do GLM. Apesar do algoritmo de controle ser normalmente capaz de manter a pressão no GLM muito próxima do valor de referência, optou-se por introduzir uma restrição em seu valor mínimo e máximo correspondendo a uma faixa de 5 % para baixo e para cima respectivamente do valor de referência. A pressão no GLM é vital para que se possa realizar as vazões de injeção.

O modelo utilizado para predição da pressão de fundo utilizado é descrito no capítulo 2.2, seção 2.2.3. Este modelo fornece uma relação pressão de fundo-vazão de injeção em regime permanente de alta qualidade. Este modelo de regime permanente foi utilizado em uma representação Hammerstein modificada onde o comportamento dinâmico é dependente da vazão de injeção. Para a pressão no GLM utilizou-se o modelo apresentado no capítulo 2.2, seção 2.2.2.

### 5.3.3 Sintonia do algoritmo PNMPC

Para testar a aplicação do algoritmo PNMPC no controle de um grupo de poços, um total de 4 poços foram modelados. Esses poços foram primeiramente modelados e simulados em um software da Petrobras desenvolvidos para a simulação de poços operando via GLC em regime permanente. Os dados obtidos com este simulador foram utilizados para ajustar a relação  $p_{wf} \times q_{inj}$  em regime permanente descrita no capítulo 2.2, seção 2.2.2. Os parâmetros que definem o comportamento em regime permanente dos poços são descritos na tabela 5.2. Em seguida um modelo dinâmico hipotético foi acrescentado a cada poço na formulação Hammerstein descrita no capítulo 2.2, seção 2.2.3.

Uma forma de sintonizar os parâmetros da função objetivo do algoritmo PNMPC é iniciar com as ponderações para os dois primeiros termos que representam o objetivo econômico. Em seguida as ponderações dos demais termos são ajustadas para

Tabela 5.2: Dados dos poços

Parâmetro	Poço 1	Poço 2	Poço 3	Poço 4
$qmax[\frac{m^3}{d}]$	871.38	7.739e+003	5.177e+003	1.558e+003
$BSW$	0.341	0.676	0.03	0.488
$p_{wf}^*[kgf/cm^2]$	110.0	185.1	182.9	146.5
$q_{inj}^*[m^3/d]$	8.33e+4	1.859e+5	2.661e+5	9.98e+4
$\bar{p}[kgf/cm^2]$	203.7	199	217.2	205
$a_1$	.9038	0.067	0.4003	0.3885
$a_2$	3.5039	8.0042	0.6133	5.8235
$a_3$	0.9666	0.9972	0.7751	0.9972
$a_4$	0.0075	0.0026	0.0082	0.0052
$m$	0.56	1.11	0.09	1.04

balançar os objetivos atenuação de oscilações contra o objetivo econômico. Os parâmetros de sintonia utilizados são mostrados na tabela 5.3.

Controlar o sistema composto pelo GLM e poços tem uma grande vantagem de eliminar a restrição na disponibilidade de gás do problema de alocação já que todo o gás distribuído é aquele que mantém a pressão no GLM em equilíbrio e portanto é a vazão disponível a cada momento. Muitos estudos sobre a otimização de poços operando por GLC consideram a a disponibilidade de gás como uma restrição mas não indicam como esta informação seria disponibilizada. Uma outra vantagem desta técnica é a possibilidade de aplicar otimização mesmo durante os transientes que podem ser mais ou menos frequentes dependendo das instalações e características dos poços. O comportamento dinâmico da pressão no GLM é altamente dependente do volume interno dos dutos associados e é normalmente mais rápido do que as pressões de fundo dos poços. No caso de utilizar-se um tempo de amostragem único para todas as variáveis há de se considerar a dinâmica da pressão no GLM para a escolha. Para evitar horizontes de predição muito grandes para a variável  $q_{oL}$  decidiu-se montar o vetor de predições com valores a cada 3 instantes de amostragem o que resultou em um horizonte  $p$  igual a 150.

Tabela 5.3: Sintonia dos parâmetros do Algoritmo PNMPC

Símbolo.	Descrição da variável	Valor
$T_s$	Tempo de amostragem	5 s
$m$	Horizonte de controle	3
$p$	Horizonte de predição para $q_{oL}$	150
$p_1$	Horizonte de predição para $P_{GLM}$	18
$w_1$	Elementos do vetor $\mathbf{W}_1$ $1 \times 4p$	0,020
$w_2$	Elementos do vetor $\mathbf{W}_2$ $1 \times 5m$	5e-4
$w_3$	Elementos da diagonal da matriz $\mathbf{W}_3$ $p_1 \times p_1$	(1)
$w_4$	Elementos da diagonal da matriz $\mathbf{W}_4$ $4p \times 4p$	(2)
$w_5$	Elementos da diagonal da matriz $\mathbf{W}_5$ $5m \times 5m$	(3)

- $w_3(i)$  varia linearmente de 1 to 10 para  $i = 1 : 18$
- $w_4(i)$  é função linear da vazão mássica de gás normalizada (em relação a  $q_{GLM}^{in*}$ ) entrando no GLM. 1 para  $q_{GLM}^{in-norm} = 1$  e 12 para  $q_{GLM}^{in-norm} = 0.25$
- $w_5(i) = 1 \times 10^{-5}$  para  $i=1:12$ . Para  $i=13:15$  utilizou-se uma função linear da vazão mássica de gás normalizada entrando no GLM,  $q_{GLM}^{in-norm}$ .  $\mathbf{W}_5(i, i)$  varia de  $1 \times 10^{-5}$  para  $q_{GLM}^{in-norm} = 1, 0$  a  $15 \times 10^{-5}$  para  $q_{GLM}^{in-norm} = 0.25$ .

### 5.3.4 Resultados obtidos

A fim de testar a estratégia proposta simulou-se uma operação de 24 horas cobrindo diferentes disponibilidades de gás para injeção. Assumiu-se um volume equivalente do GLM (soma de todos os volumes internos dos dutos associados ao GLM) igual a  $1 \text{ m}^3$ . Cada poço possui um valor de injeção de gás que corresponde aproximadamente ao valor que induz a maior produção de óleo. Os valores da pressão de fundo e vazão de injeção correspondente a este ponto recebem o sobrescrito \*. As pressões e vazões de cada poço são normalizadas com relação a esses valores.

A vazão inicial de gás entrando no GLM é igual a soma das vazões de normalização de cada poço. Este valor foi considerado como a vazão de entrada nominal do GLM. Na seqüência a vazão entrando no GLM mudou para 50%, 25% e 110% do valor nominal como mostrado na figura 5.26.



A figura 5.27 topo mostra a pressão de fundo de todos os poços (valores normalizados) e a pressão no GLM (normalizada em relação ao valor de referência). Pode-se observar que as pressões variam suavemente devido a ação do controle. A pressão no GLM apresenta uma pequena mudança em relação à referência nos momentos de mudança na vazão de entrada no GLM do tipo rampa mas não ultrapassa os valores da restrição. A figura 5.27-base

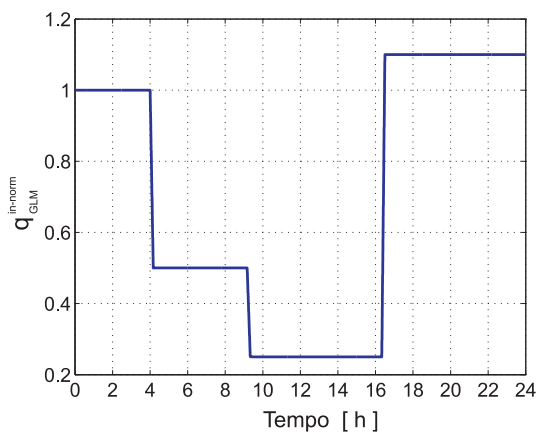


Figura 5.26: Vazão de gás normalizada entrando no GLM

mostra as vazões de gás de todos os poços e a vazão de excesso de gás. É interessante observar que quando a vazão de gás entrando no GLM vai a 110% do seu valor nominal a vazão de excesso cresce para manter a pressão no GLM em seu valor de referência e para evitar perda de produção. Quando a vazão de gás entrando no GLM decresce de 50 % para 25 % de seu valor nominal, a vazão na linha de excesso ajuda a evitar mudanças bruscas na vazão de injeção dos poços que causariam uma oscilação excessiva na vazão de produção de óleo. Este comportamento pode ser ajustado através da sintonia dos parâmetros da função custo.

A figura 5.28 apresenta a evolução da produção total de óleo durante o período de 24 horas simulado. Observa-se que a disponibilidade de 100 % e 110 % da vazão nominal de gás entrando no GLM resultam em uma mesma vazão de produção total de óleo. A vazão de injeção não utilizada para injeção nos poços flui pela linha de excesso conforme mostrado na figura 5.27. A vazão de

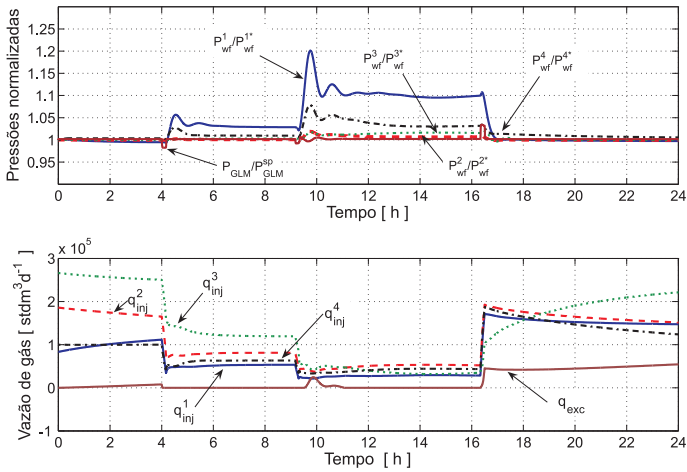


Figura 5.27: Pressão no GLM e no fundo dos poços  $\times$  vazões saindo do GLM

produção de óleo de todos os poços é mostrada na figura 5.29. As curvas com as linhas sólidas foram obtidas com a simulação utilizando o controle de oscilações enquanto que as curvas com linhas tracejadas são resultados da simulação sem aplicação de controle de oscilação. O poço 3 é o principal produtor. É interessante notar que a queda na produção não é muito afetada pela diminuição na vazão de gás entrando no GLM devido a alocação apropriada feita pelo algoritmo PNMPC. Apesar de haver pouco grau de liberdade para aplicação de controle (somente manipulação nas vazões de saída do GLM) todos os objetivos de controle foram atingidos: 1) distribuição ótima de gás, 2) controle da pressão no GLM e 3) atenuação das oscilações na produção de óleo.

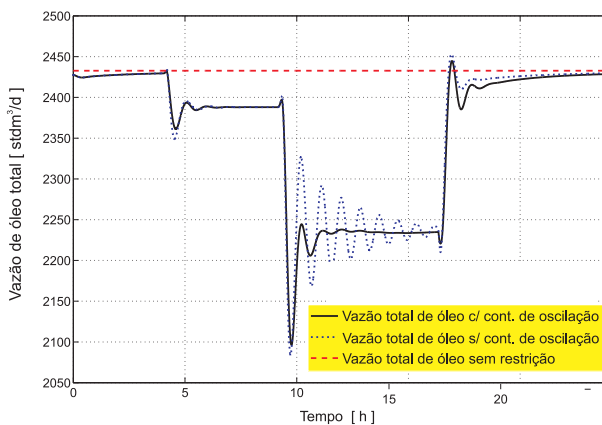


Figura 5.28: Vazão de produção de óleo de todos os poços

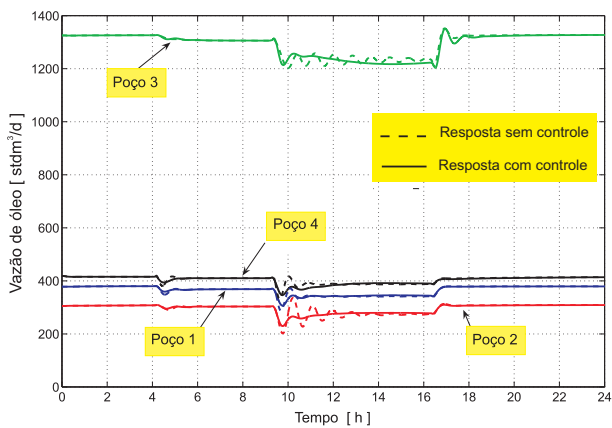


Figura 5.29: Vazão de produção de óleo de cada poço

## 5.4 Conclusões e desenvolvimentos futuros

O monitoramento permanente de pressão e temperatura de fundo de poço está se tornando uma realidade para novos poços. Além disso a maioria dos novos poços é também equipada com *chokes* de injeção com controle automatizado. Neste capítulo apresentou-se duas abordagens para o controle de um grupo de poços operando via GLC. A primeira abordagem ignora o comportamento dinâmico dos poços e pode ser utilizada sempre quando a disponibilidade de gás comprimido para injeção permite o funcionamento dos poços com vazões de injeção bem maiores do que a vazão que leva o poço ao funcionamento com oscilações sustentadas. A técnica de controle preditivo PNMPC apresentada e aplicada no controle de um grupo de poços operando via GLC contempla a operação dos poços para grandes restrições na disponibilidade de gás comprimido para injeção. Nesses casos os poços exibem um comportamento bastante oscilatório da pressão de fundo que se traduz em produção também oscilatória. Ainda que essas oscilações tendam a desaparecer com o tempo se as vazões de injeção de gás forem mantidas constantes, nos momentos das mudanças elas podem prejudicar bastante o processo de separação das fases água, óleo e gás. A solução de controle utilizando o algoritmo PNMPC é mais geral e poderá ser implementada em futuros poços propiciando operações mais rentáveis e seguras. Alguns desenvolvimentos futuro nesta área são

- a incorporação de requisitos de desempenho do processo de separação água, óleo e gás na função objetivo do algoritmo de controle não linear PNMPC apresentado. No lugar de minimizar as oscilações nas vazões de produção com a expectativa de melhorar o processo de separação, poderia-se minimizar diretamente as variações nas variáveis dos separadores como interface de água-óleo, nível de óleo e pressão do separador,
- desenvolver estratégias para a manutenção da operação dos poços mesmo quando a vazão de gás para injeção é menor do que o somatório das vazões operacionais mínimas de cada poço. Vazão operacional mínima sendo a vazão que leva cada poço a desenvolver oscilações sustentadas devido ao fenômeno *heading* ou *density-wave*. Uma abordagem seria

o desenvolvimento de técnicas de controle chaveado semelhantes a utilizadas no capítulo 6 para eliminar as oscilações para vazões de injeção menores do que as vazões operacionais mínimas. Um sistema supervisorio poderia comutar o sistema de controle do poço entre o controle individual baseado em controle chaveado e controle PNMPCC em função da disponibilidade de gás disponível. Obviamente mesmo com a utilização de controle chaveado a operação do poço será possível para uma determinada faixa de vazão média de gás, abaixo da qual o poço teria de ser fechado. A aplicação da técnica poderia garantir o funcionamento do poço para menores disponibilidades de gás em relação a estratégia de fechar o poço para vazões disponíveis próximas a vazão operacional mínima.



# Capítulo 6

## Controle de escoamento em *risers*

### 6.1 Introdução

O Transporte de fluido multifásico (óleo, água e gás) é um procedimento importante na indústria do petróleo. Atualmente há uma tendência em aumentar o número de poços atendidos por uma mesma plataforma ou sistema de produção assim como o comprimento dos *risers* entre o conjunto de poços e o sistema de produção. O escoamento simultâneo de líquido e gás em dutos pode apresentar um fenômeno chamado *slug-flow* que é caracterizado pela distribuição intermitente de gás e líquido ocupando grande parte do duto. As oscilações nos níveis de pressão e vazão durante o fenômeno *slug-flow* podem provocar efeitos indesejáveis nos dutos e equipamentos de superfície. Essas oscilações podem causar problemas sérios na entrada dos separadores multifásicos, por exemplo, deteriorando a qualidade da separação assim como transbordamento, [108]. Técnicas de controle automático realimentado podem ser utilizadas para a supressão deste tipo de oscilação. Como resultado obtém-se vazões estáveis nos *risers* e minimiza-se o problema nos separadores multifásicos. Ao mesmo tempo pode-se operar com menos custo energético e uma melhor utilização da capacidade dos equipamentos instalados aumentando a produção.

Um diagrama esquemático de um riser utilizado em um sistema de produção offshore é mostrado na figura 6.1 com os parâmetros utilizados apresentados na tabela 6.1. A operação deste sistema foi simulado no OLGA<sup>1</sup>. Na figura 6.1 as pressões no fundo e no

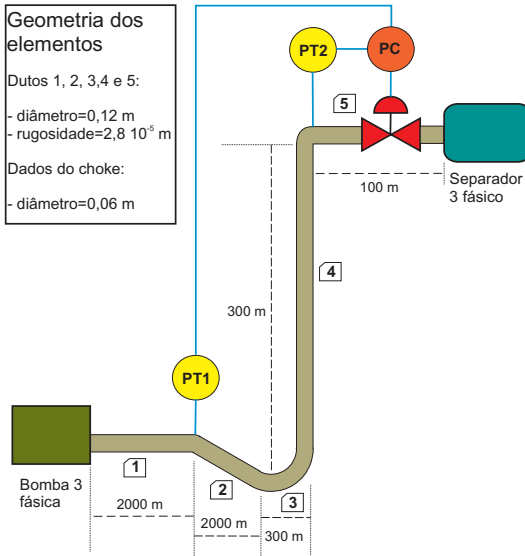


Figura 6.1: Instalação do riser simulado no OLGA.

Tabela 6.1: Parâmetros utilizados na simulação do riser

Parâmetro	valor	unidade
Vazão mássica entrando no riser	5	$Kg.s^{-1}$
Pressão no separador	$5.10^6$	$Pa$
Fração de vazio	5	%
Temperatura na saída do riser	22	$^{\circ}C$
Temperatura na entrada do riser	62	$^{\circ}C$

topo do riser, respectivamente  $P_1$  e  $P_2$ , são medidas e utilizadas para calcular uma ação de controle que é aplicada no choke. A

<sup>1</sup>Software para simulação de escoamento multifásico comercializado pela Scand-power



modelagem deste sistema é bastante complexa. Um procedimento usual consiste em utilizar equações diferenciais parciais que expressam as leis de conservação de massa, energia e movimento para os fluidos presentes e modelos matemáticos de elementos como o *choke*, por exemplo. Um modelo simplificado baseado em um sistema com 3 equações diferenciais ordinárias e 3 estados pode ser encontrado em [109], [110].

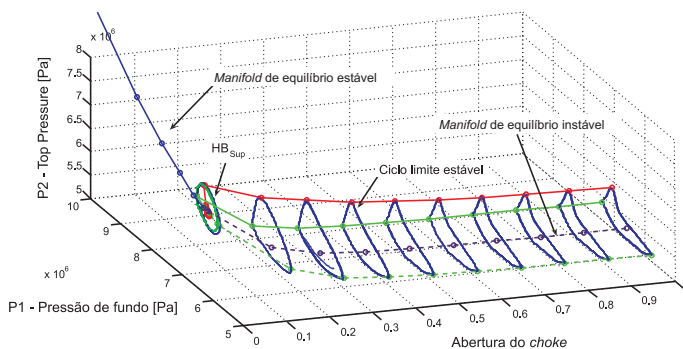


Figura 6.2: Abertura do *choke* como parâmetro de bifurcação - Um ciclo limite estável desenvolve-se a partir de uma Bifurcação Hopf Supercrítica ( $HB_{sup}$ ).

O diagrama de bifurcação considerando a abertura do *choke* como o parâmetro de bifurcação é apresentado na figura 6.2 e foi obtido com os resultados da simulação do sistema de *riser* apresentado na figura 6.1 no simulador OLGA2000. Nesta simulação utilizou-se uma vazão mássica na entrada do *riser* de  $5Kg.s^{-1}$  e considerou-se uma pressão no separador de  $5.10^6 Pa$ . O diagrama de bifurcação da figura 6.2 é qualitativamente similar ao diagrama mostrado em [109].

A variedade de equilíbrios estáveis e instáveis é apresentada na figura 6.3. Nesta figura mostra-se também as curvas correspondendo aos valores máximos e mínimos do ciclo limite. A projeção dos ciclos limite para diferente aberturas de *choke* no plano  $(P_1, P_2)$  é apresentada na figura 6.4. Pode-se observar nesta figura que a relação entre as pressões  $P_1$  e  $P_2$  no *manifold* de equilíbrio estável pode ser aproximada por uma reta.

Como pode ser visto nas figuras 6.2-6.4, uma Bifurcação Hopf

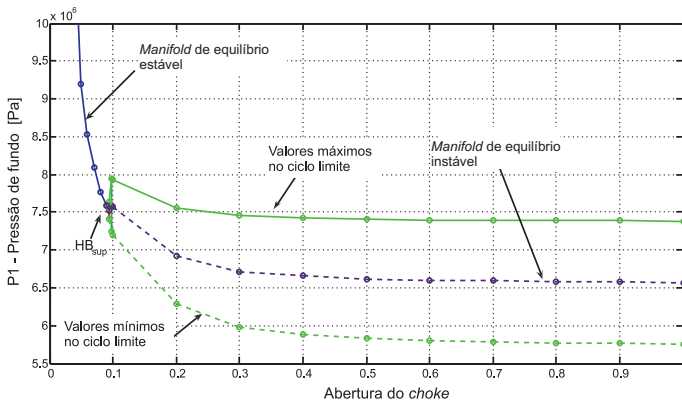


Figura 6.3: Diagrama de bifurcação no plano  $(u(t), P_1)$

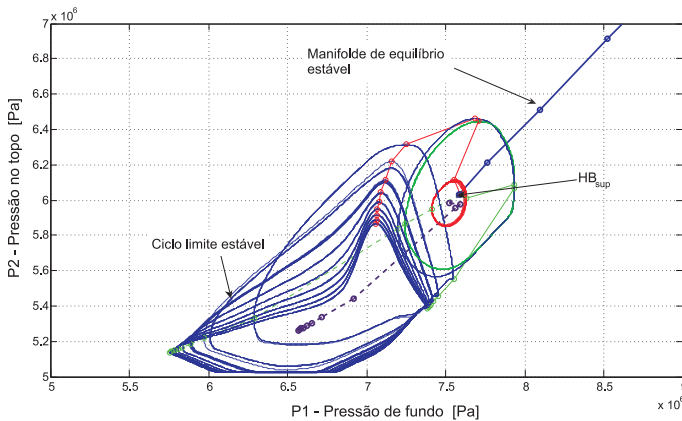


Figura 6.4: Diagrama de Bifurcação no plano  $(P_1, P_2)$

supercrítica desenvolve-se no ponto  $HB_{sup}$  dos diagramas dando origem a um ciclo limite estável.

Observa-se que sem a aplicação de controle ativo é necessário operar o sistema com uma abertura do *choke* abaixo de 10% de seu valor nominal para evitar oscilações na saída do sistema. A queda de pressão no *choke* cresce para baixas aberturas aumentando a pressão na base do *riser*.

Maior pressão para uma mesma vazão mássica significa maior consumo de energia necessária para o bombeamento do fluido. Por outro lado, *risers* conectados diretamente a poços poderiam aumentar a pressão na frente da zona produtora causando a diminuição na produção de óleo. Qualquer que seja o caso é desejável operar o *riser* com uma vazão não oscilatória e com uma queda de pressão mínima no *choke* de superfície.

Diversas leis de controle lineares tem sido propostas para prevenir oscilações devido ao fenômeno *slug-flow* em *risers* submarinos como em [110] e [108].

Esses controladores lineares são soluções válidas para uma faixa de operação muito estreita e pode-se dizer que são soluções locais para um problema não linear complexo. Propõe-se neste trabalho uma solução alternativa baseada na Teoria de Controle de Modos Deslizantes (*Sliding Mode Control*) de sistemas não lineares.

Este capítulo é organizado como segue. Na seção 6.2 a lei de controle Proporcional Integral (PI) é revisitada mostrando que não é robusta para perturbações na vazão de entrada do *riser*. Nas seções 6.3 e 6.4 propõe-se diferentes estratégias SMC para controlar as oscilações devido o fenômeno *slug-flow*. A estratégia SMC *washout* é apresentada na seção 6.5. No final discute-se algumas limitações do método de controle proposto e propõe-se melhoramentos futuros.

## 6.2 Revisitando a estratégia PI para suprimir *slug-flow*

Nesta seção mostra-se através de simulações que a lei de controle PI não é robusta para perturbações na vazão de entrada do *riser*. Uma simulação foi realizada para avaliar a eficiência da lei de controle PI dada por

$$u(t) = k_c[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau],$$

onde  $k_c = -7.92 \cdot 10^{-6} Pa^{-1}$ ,  $T_i = 49.5s$ ,  $e(t)$  é o erro e a variável do processo é a pressão  $P_1$ . A versão discreta do controlador PI

implementada é dada por

$$u(k) = u(k - 1) + s_0e(k) + s_1e(k - 1)$$

onde  $s_0 = k_c(1 + \frac{T_s}{T_i})$ ,  $s_1 = -k_c$ ,  $T_s = 1s$  é o tempo de amostragem e  $T_i$  é o tempo de integração. A sintonia do controlador PI foi realizada utilizando regras simples de ajuste uma vez que não se dispõe de um modelo matemático de baixa ordem do processo.

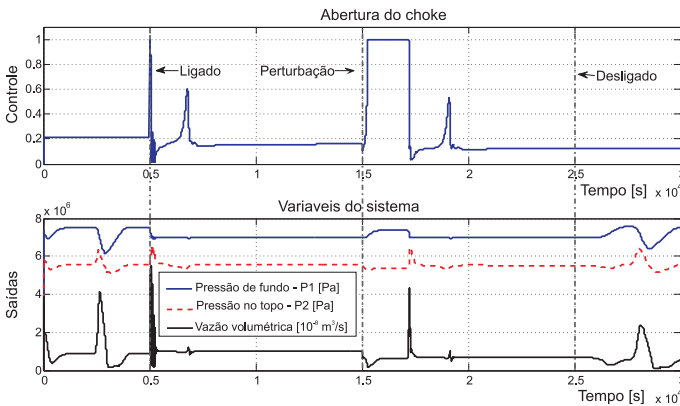


Figura 6.5: Resposta do sistema controlado pelo PI para perturbações na vazão de entrada ( $5Kg.s^{-1}$  para  $3.5Kg.s^{-1}$ )

A simulação foi realizada com as seguintes características:

1. a abertura do *choke* foi fixada em 20% e o ponto de operação calculado a partir da curva do *manifold* de equilíbrio é caracterizado por  $(P_1^*, P_2^*) = (6.93 \cdot 10^6 [Pa], 5.56 \cdot 10^6 [Pa])$ ;
2. em  $5000s$  o controle é ligado;
3. uma perturbação na entrada do *riser* é aplicada em  $15000s$ ;
4. o controle é desligado em  $25000s$ .

As perturbações na vazão de entrada foram definidas da seguinte forma: (i) de  $5Kg.s^{-1}$  para  $3.5Kg.s^{-1}$  e (ii) de  $5Kg.s^{-1}$  para  $3Kg.s^{-1}$ . A mesma estrutura de simulação foi utilizada para analisar e comparar os resultados com a aplicação de diferentes estratégias de controle de *slug*. Os resultados de simulação utilizando o controle PI são mostrados na figura Fig.6.5 para a

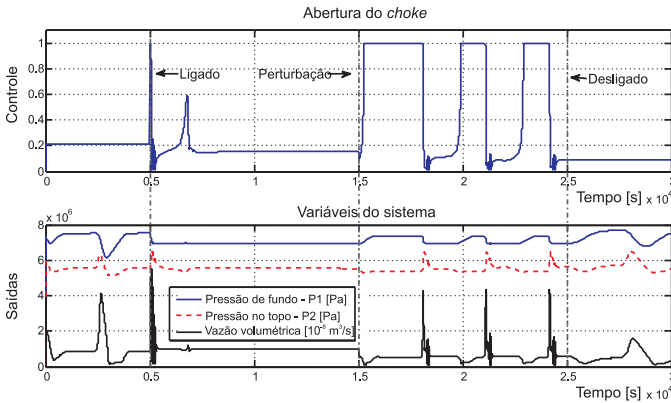


Figura 6.6: Resposta do sistema controlado pelo  $PI$  para perturbações na vazão de entrada ( $5Kg.s^{-1}$  para  $3Kg.s^{-1}$ )

primeira perturbação e na figura Fig.6.6 para a segunda perturbação. Como pode ser observado, o controle  $PI$  rejeita a primeira perturbação mas não é robusto o suficiente para a segunda perturbação. A fim de atacar a dificuldade causada por grandes variações de vazão na entrada do riser, propõe-se três diferentes estratégias de controle baseadas em Controle de modos deslizante (*Sliding Mode Control-SMC*) nas seções seguintes.

### 6.3 Estratégia Slug SMC

A ideia principal é projetar uma lei de controle de modos deslizante (SMC) que induz uma bifurcação *grazing-sliding* no sistema, [111], mudando sua dinâmica e, desta forma, controlando a amplitude do ciclo limite. Este tipo de bifurcação não suave introduz movimento deslizante parcial ao longo da superfície deslizante, reduzindo ou suprimindo a amplitude do ciclo limite não desejado. Para explicar essas ideias, considere um sistema geral definido por

$$\dot{x} = F(x, u(x)) \tag{6.1}$$

onde  $x \in R^n$  é um vetor de estados de dimensão  $n$ , e  $u(x) \in R$  é

o sinal de controle. A função  $F(x) = (F_1, F_2, \dots, F_n) : R^n \rightarrow R^n$ , representa um sistema contínuo não suave. Assume-se que como resultado de uma Bifurcação Hopf (contínua ou não, [112]), o sistema exibe um comportamento oscilatório em regime permanente, onde um ciclo limite estável é a solução da equação 6.1.

A bifurcação *grazing-sliding* para suprimir um ciclo limite ocorre quando o ciclo limite é atravessado por uma superfície deslizando que gera uma transição não suave *grazing-sliding* onde parte da trajetória do ciclo limite permanece na superfície deslizando como mostrado na figura 6.7.

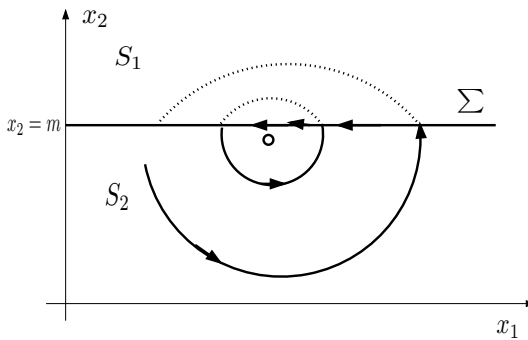


Figura 6.7: Bifurcação Grazing-sliding induzida no sistema

Por exemplo, em um sistema com dimensão 2, considere-se a região  $S_1$  da forma

$$S_1 := \{x = (x_1, x_2) : x_2 > m\}$$

para um  $m$  arbitrário, sendo

$$\Sigma := \sigma(x) = \{x = (x_1, x_2) : x_2 = m\}$$

e

$$S_2 := \{x = (x_1, x_2) : x_2 < m\}.$$

Com a variação de  $m$ , acontece uma bifurcação *grazing-sliding* e a amplitude do ciclo limite é reduzida ou mesmo eliminada. Assim, o controle de modo deslizando sugerido é

$$u = u_0 + \Delta u \operatorname{sgn}(\sigma(x)) \quad (6.2)$$

onde  $\sigma(x) = 0$  é a superfície deslizante, uma função dos estados do sistema que permite a mudança de sua dinâmica;  $u_0$  é o valor da variável de controle no ponto de operação e  $\Delta u$  é o valor máximo que a variável de controle pode assumir a partir de  $u_0$ . A função  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  pode ser definida como

$$\operatorname{sgn}(\sigma(x)) = \begin{cases} -1, & \text{se } \sigma(x) < 0; \\ 1, & \text{se } \sigma(x) > 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

ou

$$\operatorname{sgn}(\sigma(x)) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sigma(x) < 0; \\ 1, & \text{se } \sigma(x) > 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Aplicando as equações acima, propõe-se a seguinte lei de controle dada por

$$u = u_0 + \Delta u \operatorname{sgn}(\sigma), \quad (6.5)$$

$$\sigma(P_1, P_2) = P_2 - P_1 + \beta, \quad (6.6)$$

onde  $\beta = P_1^* - P_2^*$ ;  $\Delta u = u_0 - u_{min}$ ;  $u_0$  é a abertura desejada para o *choke* e  $u_{min}$  é o valor da ação de controle no ponto de Bifurcação de Hopf. A superfície de chaveamento é definida como  $P_2 = P_1 - \beta$  e define-se  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  para fechar o *choke* sempre que  $\sigma > 0$ . O *bias* da abertura do *choke*  $u_0$  é definido no ponto de operação desejado. Neste ponto  $P_1^*$ ,  $P_2^*$  são definidos na curva do *manifold* de equilíbrios para uma dada vazão mássica de entrada no *riser* como mostrado na figura 6.3.

A escolha do valor *bias* da abertura do *choke* de superfície deve considerar dois fatores. Por um lado o valor deveria ser grande o suficiente a fim de garantir uma queda de pressão mínima no *choke*. Por outro lado o *bias* não deveria estar muito longe dos valores que podem causar quedas de pressão significativas no *choke* a fim de poder responder rapidamente às perturbações. A abertura do *choke* perto de 100% causa uma queda de pressão mínima mas dependendo das características do *choke* uma queda de pressão significativa no *choke* pode ser obtida somente para valores menores de 10%. A estratégia de controle pode ser interpretada como um mecanismo que força um escoamento hipotético em regime permanente que seria obtido sem o comportamento *slug-flow*. Para uma vazão mássica de entrada de gás e líquido constante a pressão  $P_1$  pode ser expressa como  $P_1 = P_2 + \beta$  onde

$\beta$  levaria em conta os termos devido a gravidade e atrito para um pseudo escoamento estável. Para um modelo homogêneo simplificado de escoamento no *riser* pode-se escrever

$$P_1 - P_2 = \frac{m_{gr} + m_{lr}}{A} g + \frac{f \bar{\rho} \bar{v}^2}{2d_r} h, \quad (6.7)$$

onde  $A$  é a seção do duto;  $m_{gr}$  e  $m_{lr}$  são a massa do gás e a massa do líquido no *riser*;  $\bar{\rho}$  é a densidade média do fluido;  $\bar{v}$  é a velocidade média do fluido no *riser*;  $h$  é a comprimento do *riser*;  $f$  é o fator de atrito;  $d_r$  é o diâmetro do *riser*. Na equação 6.7 o primeiro termo corresponde a contribuição da gravidade e o segundo ao do atrito. A qualquer momento em que o relacionamento entre  $P_1$  e  $P_2$  dado pela equação 6.7 é violado, uma ação é tomada na abertura do choke para forçar o relacionamento  $P_1, P_2$  desejado. Obviamente isto é feito de uma forma que forneça uma abertura de *choke* desejada que minimiza  $P_1$  e consequentemente a energia utilizada para elevar o gás e o líquido entrando no *riser*. A resposta temporal em malha aberta é apresentada na figura 6.8. Em  $t = 5000s$  o sistema de controle proposto é ligado. Em  $t = 15000s$  uma perturbação na vazão de entrada (de  $5Kg.s^{-1}$  a  $3.5Kg.s^{-1}$ ) foi aplicada. Pode-se observar na figura 6.8 e 6.9 que a amplitude das oscilações é diminuída em torno do ponto de operação quando o controle é ligado.

Como pode ser observado na figura 6.8, após o desligamento do controle, em  $t = 25000s$ , as oscilações retornam ao sistema. O diagrama de espaço de estados, no plano  $(P_1, P_2)$ , é apresentado na figura 6.9.

A técnica de controle SMC proposta opera bem para pequenas perturbações na vazão de entrada do *riser* mas a ação de controle chaveia permanentemente para manter o equilíbrio no ponto de operação.

## 6.4 Uma estratégia slug SMC modificada

O desenvolvimento da estratégia SMC na seção 6.3 não é eficiente para suprimir as oscilações de pressão e vazão no *riser* já que a ação de controle chaveia permanentemente a fim de manter o equilíbrio no ponto de operação. Isto seria muito prejudicial para a



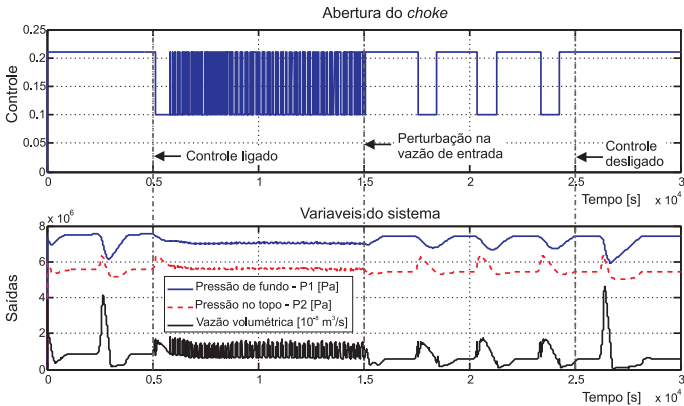


Figura 6.8: Resposta do sistema no tempo com a estratégia de controle SMC (Malha aberta e com controle realimentado aplicado). a) abertura do *choke*; b) estados do sistema

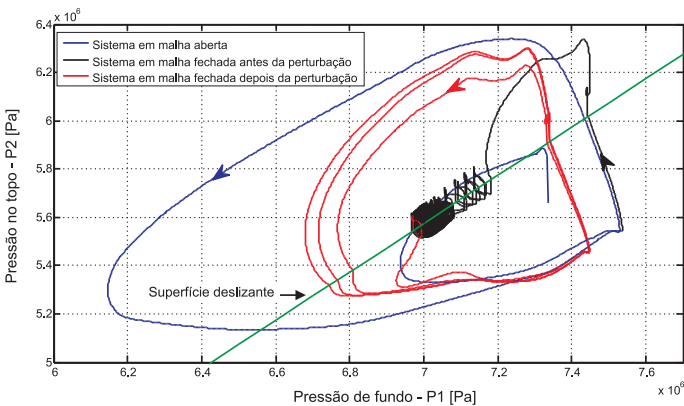


Figura 6.9: Diagrama de espaço de estados no plano  $(P_1, P_2)$

integridade do *choke*. Uma outra característica de controle desejada é manter a abertura do *choke* próxima a 100% enquanto as oscilações são suprimidas. Isto representa uma redução significativa na potência necessária para bombear o fluido multifásico para a superfície. Nesta seção propõe-se uma mudança no algoritmo de controle para minimizar o chaveamento no sinal de controle.

A ideia é combinar duas leis de controle (i) o controle utilizado na seção 6.3 e (ii) uma forma discreta da lei de controle PI conforme apresentada na seção 6.2 por meio de uma função convexa como

$$u(t) = \mu u_{SMC} + (1 - \mu) u_{PI}, \quad (6.8)$$

$$u_{SMC} = u_0 + \Delta u \operatorname{sgn}(\sigma), \quad (6.9)$$

onde

$$\sigma = P_2 - P_1 + \beta.$$

$$u_{PI}(k) = u_{PI}(k - 1) + s_0 e(k) + s_1 e(k - 1), \quad (6.10)$$

onde  $u_{SMC}$  é a lei de controle de chaveamento dada por 6.9 e  $u_{PI}$  é o controle PI 6.10, com  $e(k) = P_1^*(k) - P_1(k)$ .

O parâmetro  $\mu = \mu(P_1, P_2)$  fornece uma transição suave entre as leis de controle de tal forma que se as trajetórias estão longe do ponto de equilíbrio então  $\mu$  tende a 1; de outra forma  $\mu$  se aproxima de 0. O parâmetro  $\mu$  é definido como

$$\mu = \frac{1}{1 + e^{\gamma(\lambda - \delta)}} \quad (6.11)$$

$$\lambda(P_1, P_2) = \left(\frac{P_1}{P_1^*} - 1\right)^2 + \left(\frac{P_2}{P_2^*} - 1\right)^2$$

onde  $P_1^*$  é o ponto de operação para a pressão de fundo e  $P_2^*$  é o valor desejado para a pressão na entrada do *choke* de superfície. Os valores dos parâmetros para os controladores definidos pelas equações 6.9, 6.10 e 6.11 são apresentados na Tabela 6.2. O parâmetro  $\beta$  é definido como  $\beta = P_1^* - P_2^*$ . A resposta do

Tabela 6.2: Parâmetros da lei de controle

Parâmetro	Valor	Unidade
$u_0$	0.2	
$\Delta u$	0.12	
$s_0$	$-8.08 \cdot 10^{-6}$	$Pa^{-1}$
$s_1$	$7.92 \cdot 10^{-6}$	$Pa-1$
$\gamma$	$8/\delta$	
$\delta$	0.008	

sistema com a lei de controle proposta para uma perturbação na vazão mássica de entrada no *riser* é mostrada na figura 6.10 e o

diagrama de espaço de estados é apresentado na figura 6.11. O tempo de amostragem adotado foi  $T_a = 1s$ . Em  $t = 15000s$ , a

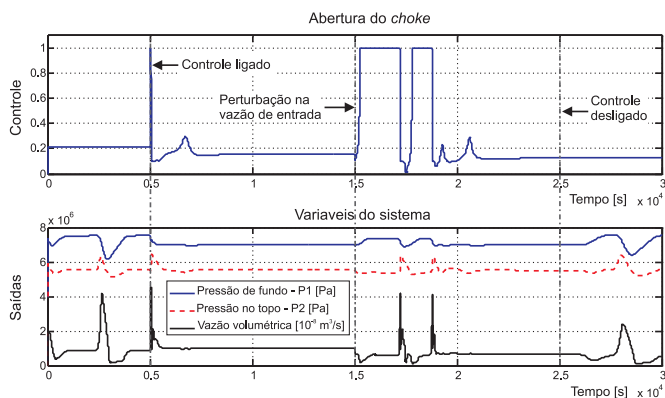


Figura 6.10: Respostas de controle e saída com a lei de controle modificada (6.8) para uma perturbação na entrada

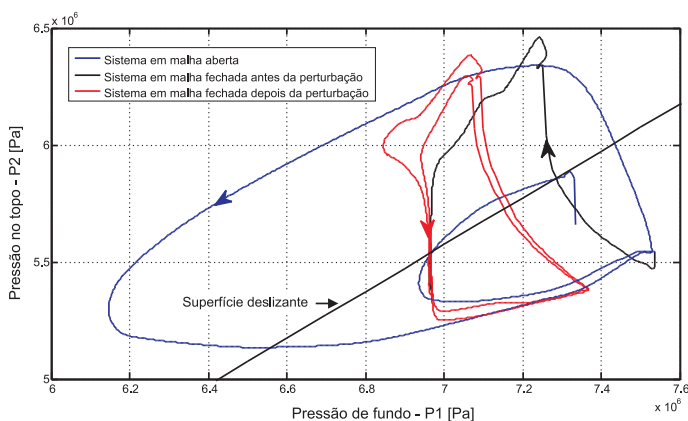


Figura 6.11: Diagrama de espaço de estados para o sistema com a lei de controle modificada (6.8)

vazão mássica de entrada no *riser* é reduzida de  $5kg/s$  to  $3.5kg/s$ .

Esta perturbação muda as condições de operação do processo. A estratégia de controle SMC proposta controla o sistema reduzindo a amplitude das oscilações.

Em  $t = 25000s$ , o controle é desligado e o sistema começa a exibir oscilações de pressão e vazão novamente. Isto acontece porque o valor de abertura de *choke* encontra-se na região de instabilidade.

Uma desvantagem de usar o algoritmo SMC discutido nesta Seção é que não é possível estabilizar o sistema para grandes perturbações na vazão.

## 6.5 Controle *Slug Washout SMC*

Todas as técnicas apresentadas anteriormente para o controle de golfadas utilizam referências para obter a lei de controle. Essas estratégias tem um problema quando ocorrem mudanças na vazão mássica entrando no *riser*. Mesmo um escoamento estabilizado irá exibir valores diferentes para  $P_1$  e  $P_2$  frente a diferentes vazões mássicas de gás já que os termos devido a gravidade e atrito na expressão para a queda de pressão no *riser* bem como a queda de pressão no *choke* crescem com o aumento da vazão.

Para a técnica de controle de modos deslizante a manutenção da referência frente a mudanças na vazão mássica entrando no *riser* significam requerer que o sistema opere em um ciclo limite não suficientemente colapsado ou exigir o estabelecimento de um escoamento inactível.

Visto que o objetivo prático é estabilizar a vazão mantendo o *choke* com uma queda de pressão mínima, a idéia de referência de pressão perde significado. Poderia-se dizer que o problema de controle é bem resolvido se as pressões e vazões enquanto o *choke* de superfície é mantido aberto bem acima do valor que caracteriza o início do ciclo limite. A ideia é desenvolver um estratégia de controle que suprime as oscilações enquanto mantém a abertura do *choke* operando em torno de um valor desejado. Se as oscilações são suprimidas as pressões resultantes serão uma consequência da vazão mássica de entrada, características do fluido e geometria do sistema.

A fim de atender as restrições propõe-se neste Seção uma nova estratégia SMC para rejeitar perturbações na vazão de entrada

do *riser* baseada em filtros *washout*. Os filtros *washout* são usados intensivamente para controlar sistemas caóticos por meio de técnicas baseadas na teoria de bifurcações [113] e em sistemas de controle de vôo [114]. Recentemente, filtros *washout* foram aplicados em inversores de eletrônica de potência em conjunto com controladores SMC a fim de rejeitar perturbações de carga [115]. Um filtro *washout* é um filtro passa alta linear que elimina a componente de regime permanente da entrada enquanto permite a passagem da componente transiente. A utilização de filtros *washout* assegura que todos os pontos de equilíbrio do sistema original sejam preservados no sistema controlado, i. e., sua localização permanece inalterada.

A função de transferência de um filtro *washout* típico é dada por

$$G_F(s) = \frac{s}{s+w} = 1 - \frac{w}{s+w},$$

onde  $w$  denota a recíproca da constante de tempo do filtro que é positiva para filtros estaveis. Assume-se que seja possível filtrar a variável  $x$  para obter um novo sinal  $x_F$  e definir uma variável auxiliar  $z$  de forma a satisfazer a seguinte equação

$$x_F = x - z.$$

Então o efeito do filtro *washout* pode ser representado por meio de uma equação diferencial adicional,

$$\frac{dz}{dt} = w(x - z). \quad (6.12)$$

Dois filtros *washout* são utilizados, um para  $P_1$  e outro para  $P_2$  de tal forma que

$$\dot{z}_1 = w_1(P_1 - z) = w_1\tilde{p}_1$$

$$\dot{z}_2 = w_2(P_2 - z) = w_2\tilde{p}_2$$

onde  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$  são as pressões filtradas no fundo e na superfície,  $w_1 = \frac{2\pi}{5}f_1$  e  $w_2 = \frac{2\pi}{5}f_2$  são constantes do filtro *washout* projetadas a partir das frequências  $f_1, f_2$  medidas a partir dos resultados de simulação.

$$u_{WSMC} = u_0 + \Delta u \operatorname{sgn}(\sigma), \quad (6.13)$$

onde

$$\sigma(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2) = \tilde{P}_2 - \tilde{P}_1. \quad (6.14)$$

Note que 6.14 é similar a 6.6 mas agora o parâmetro  $\beta$  é nulo. A superfície de deslizamento é agora definida como  $\tilde{P}_2 = -\tilde{P}_1$  e ela não depende do ponto de operação.

Em  $t = 10000s$  o controle automático é ligado e em  $t = 30000s$  vazão de entrada no riser é reduzida de  $5kg/s$  para  $3kg/s$ .

Em  $t = 50000s$  o controle é novamente desligado e o sistema retorna ao comportamento oscilatório. Os resultados de simulação são apresentados na figura 6.12.

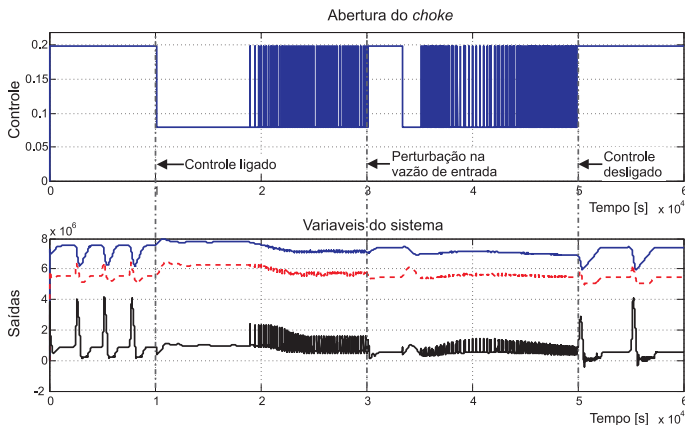


Figura 6.12: Resposta de controle e saídas do sistema com o slug washout SMC para perturbação na vazão de entrada do riser

O diagrama de espaço de estados no plano  $(P_1 - P_2)$  é mostrado na figura 6.13. Como pode ser visto, a lei de controle proposta estabiliza o processo e ao mesmo tempo permite operar com aberturas do choke em toda a faixa de operação. Uma desvantagem de utilizar a lei de controle proposta é a presença de componentes de alta frequência na ação de controle devido ao chaveamento (*chattering*).

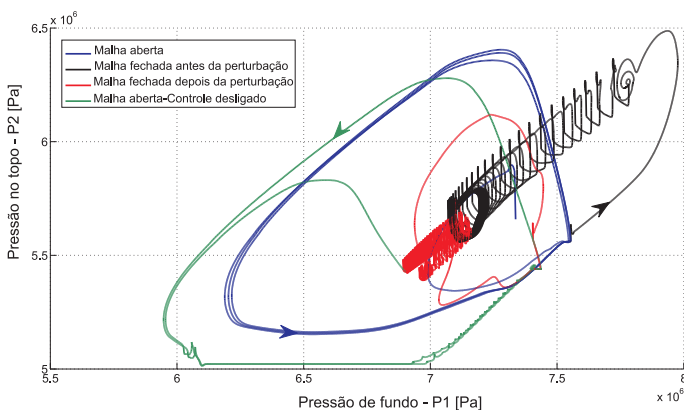


Figura 6.13: Diagrama de espaço de estados do sistema com *slug washout SMC*

## 6.6 Conclusões

A falta de robustez no controle de oscilações devido ao fenômeno *slug-flow* em *risers* submarinos utilizando o sistema de controle clássico PI foi abordada neste trabalho aplicando técnicas SMC. Três controladores SMC diferentes foram propostos para suprimir as oscilações devido o fenômeno *slug-flow* em *risers*. Resultados de simulação foram obtidos utilizando o software OLGA a fim de comparar as diferentes estratégias SMC sujeitas a perturbações na vazão mássica na entrada do riser de  $5Kg.s^{-1}$  to  $3Kg.s^{-1}$ . A técnica SMC revela-se uma forma robusta de suprimir os ciclo limites quando o modelo matemático do processo não é disponível na prática. A dinâmica do sistema *riser* apresentando o comportamento *slug-flow* em malha aberta com ponto de operação desconhecido foi tratado neste trabalho utilizando filtros *washout*. Esta situação se manifesta na presença de perturbações na vazão mássica de entrada no *riser*. Um obstáculo prático para a aplicação da técnica SMC padrão no campo é a componente de alta frequência no sinal de controle produzido conhecida como *chattering*. Este problema pode levar ao desgaste prematuro de elementos do *choke*. A presença do efeito *chattering* na ação de controle poderá ser eliminada com futuros trabalhos utilizando-se controladores de modos deslizante de alta ordem (*High Order*

---

*Sliding Mode - HOSM controllers*) ou ajustando a função  $\text{sign}()$  por uma função suave contínua, mantendo dentro do possível as condições de atratividade do sistema comutado.







# Capítulo 7

## Conclusões e desenvolvimentos futuros

Este trabalho apresentou as seguintes contribuições:

- Modelagem da operação de elevação de petróleo via injeção contínua de gás (GLC),
- desenvolvimento de um algoritmo de controle MPC distribuído,
- desenvolvimento de uma técnica de controle MPC para sistemas não lineares
- aplicação de 2 técnicas de controle para um sistema constituído por um *manifold* de *gas-lift* e um grupo de poços
- aplicação de controle na estabilização do escoamento em um *riser* submarino.

Alguns desenvolvimentos futuros do trabalho são:

- Estudar um mecanismo para que o modelo fenomenológico da elevação por *gas-lift* forneça uma relação em regime permanente de melhor qualidade.

- Para o modelo da relação  $p_{wf} = f(q_{inj})$  em regime permanente desenvolver uma metodologia baseada na utilização de um simulador de fenomenológico de regime permanente e técnicas do tipo Montecarlo que permita obter seus parâmetros em função das características do poço.
- Desenvolver um método numérico robusto para resolver o problema de programação quadrática com restrição quadrática para a técnica PNMPC com requisito de estabilidade na função objetivo.
- Para a aplicação da técnica PNMPC no controle de um grupo de poços e *manifold* de *gas-lift*, testar a inclusão de requisitos para o controle do separador água-óleo e gás no lugar de minimizar as oscilações das vazões de produção.
- Estudar a aplicação de controladores de modos deslizante de alta ordem (*High Order Sliding Mode - HOSM controllers*) ou substituição da função *sign()* por uma função suave contínua para diminuir ao máximo a presença do efeito *chattering* na ação de controle dos *risers* submarinos.
- A técnica de controle preditivo baseado em modelo para sistemas não lineares desenvolvida obtém a representação linearizada do sistema de forma numérica a cada instante de amostragem e por isso pode fazer uso das mais diversas formas de representação do sistema a ser controlado. Por outro lado existe um desenvolvimento tecnológico muito grande na produção de simuladores numéricos de reservatórios que são utilizados para representar o comportamento dos mesmos. Um trabalho futuro interessante é aplicar a técnica de controle preditivo desenvolvida no controle da produção de um reservatório utilizando como modelo do sistema um simulador numérico de reservatório. Acredita-se que o tempo de amostragem nesta aplicação seria muito grande comparado com os tempos necessários para a obtenção da representação linearizada do sistema o que facilitaria a implementação da técnica.

Publicações realizadas:

Em Revistas brasileiras de divulgação:

- A. Plucenio e D. J. Pagano, Tendências do controle e automação no setor upstream da indústria do petróleo, *Revista Petro&Química-Editora Valete*, pag. 84-90, Setembro de 2005.
- M. P. Castro and E. Camponogara and A. Plucenio, Escalonamento de compressores em campos de petróleo operados por gas-lift: uma formulação em programação matemática, *Revista Petro&Química-Editora Valete*, pag.63-70, Setembro de 2007.

#### Em Revistas Internacionais

- Eduardo Camponogara, Agustinho Plucenio, Alex F. Teixeira, and Sthener R.V. Campos. An automation system for gas-lifted oil wells: Model identification, control, and optimization. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 70(3-4):157–167, 2010.
- Eduardo Camponogara, Melissa Pereira de Castro, Agustinho Plucenio and Daniel J. Pagano, Compressor scheduling in oil fields: Piecewise-linear formulation, valid inequalities, and computational analysis, *Optimization and Engineering*, October 2009.

#### Em Congressos Nacionais

- A. Plucenio, D. J. Pagano e J. E. Normey-Rico, Controle robusto aplicado a produção de petróleo por elevação artificial tipo gas-lift, *Congresso Brasileiro de Automática*, 2004;
- R. Oenning, A. Plucenio, Desenvolvimento de uma unidade experimental: Micro-poço de petróleo com elevação por injeção contínua de gás, *3 Congresso Brasileiro de Petróleo de P&D em Petróleo e Gás (PDPetro)*, 2005-Salvador-BA.
- L. F. Pozas, A. Plucenio, Melhoria da convergência de algoritmo genético utilizado em alocação de poços, *3 Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás (PDPetro)*, 2005, Salvador-BA;
- S. G. Boff, D. J. Pagano and A. Plucenio e R. Alves, Aplicação de um SCADA a uma unidade experimental de coluna de destilação, *3o. Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás (PDPetro)*, 2005, Salvador-BA;

- A. Plucenio, D. J. Pagano, G. A. Mafrá e A. H. Bruciapaglia, Uma extensão do controle preditivo MPC para sistemas não lineares, *Congresso Brasileiro de Automática*, 2006;
- D. J. Pagano, A. Plucenio e P.K. Salvato, Controle de oscilações utilizando sistemas comutados, *Congresso Brasileiro de Automática*, 2006;
- A. Plucenio, J. E. Normey-Rico, D. J. Pagano e A. H. Bruciapaglia, Controle Preditivo na indústria do Petróleo e Gás, 4o. *Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás (PDPetro)*, Outubro de 2007, Campinas-SP;
- A. Plucenio e E. Camponogara, Automação da elevação artificial com injeção contínua de gás-Tendências industriais e acadêmicas, 4o. *Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás (PDPetro)*, Outubro de 2007, Campinas-SP;
- M. P. de Castro, E. Camponogara e A. Plucenio, Escalonamento de compressores em campos de petróleo operados por gas-lift: formulação linear por partes, 4o. *Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás (PDPetro)*, Outubro de 2007, Campinas-SP;
- A. Plucenio, D. J. Pagano, J.E. Normey-Rico, J. Pavei e C. Moya, Including Robustness in the MPC Cost Function, *Congresso Brasileiro de Automática*, 2008, Juiz de Fora-MG.
- A. Plucenio, D. J. Pagano, E. Camponogara, H. F. Scherer e M. Lima, A simple distributed MPC algorithm, *Congresso Brasileiro de Automática*, 2008, Juiz de Fora-MG.
- D. J. Pagano, A. Plucenio e C. A. Gonzaga, Controlling oscillations and re-starting operations in gas-lift wells, *Congresso Brasileiro de Automática*, 2008, Juiz de Fora-MG.
- L. B. Resende, A. Plucenio e D. J. Pagano, CFD com controle aplicado na modelagem de um separador gás-líquido em linha, 5o *Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás (PDPetro)*, Outubro de 2009, Fortaleza-CE;
- A. Plucenio, Sistema de múltiplos agentes no controle de processos de refino, 5o *Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás (PDPetro)*, Outubro de 2009, Fortaleza-CE.

- A. Plucenio, D. J. Pagano e Cleber A. Ganzaroli, Dinâmica do fenômeno *density wave* em poços com elevação por *gas-lift*, *Congresso Brasileiro de Automática*, 2010, Bonito-MS.
- A. Plucenio, A simple distributed MPC algorithm II, *Congresso Brasileiro de Automática*, 2010, Bonito-MS.
- A. Plucenio, D. J. Pagano, C. Ganzaroli, Modelos Dinâmicos de Poços operando via Gas-Lift Contínuo, *Rio Oil & Gas Expo and Conference 2010*.

Em Congressos Internacionais:

- A. Plucenio, G. A. Mafra and D. J. Pagano, A control strategy for an oil well operating via gas-lift, ADCHEM 2006, Proceedings of the *IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, 2006, volume II, Gramado, RS;
- D. J. Pagano, V. Dallagnol Filho, A. Plucenio, Identification of polynomial NARMAX models for an oil well operating by continuous gas lift, ADCHEM 2006, Proceedings of the *IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, 2006, volume II, Gramado, RS;
- E. Camponogara, M. P. Castro, A. Plucenio, The facility location problem: model algorithm and application to compressor allocation, ADCHEM 2006, Proceedings of the *IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, 2006, volume I, pag. 247-252, Gramado, RS;
- A. Plucenio, D. J. Pagano, A. H. Bruciapaglia, J. E. Normey-Rico, A practical approach to predictive control of nonlinear processes, Proceedings of the NOLCOS 2007-7<sup>th</sup>, *IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, Pretória-South Africa;
- E. Camponogara, M. P. de Castro, A. Plucenio, Compressor Scheduling in Oilfields: A Piecewise-Linear Formulation, *Automation Science and Engineering, 2007. Case 2007. IEEE International Conference*, Pages: 426-441, September 2007;
- E. Camponogara, A. Plucenio, Lift-gas allocation under precedence constraints: 1-configuration inequalities, *Systems, Man and Cybernetic, 2007, IEEE International Conference*, Pages:2727-2732, October 2007;

- A. Plucenio, D. J. Pagano, E. Camponogara, A. Truple, Gas-lift Optimization and Control with Nonlinear MPC, ADCHEM 2009, *IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, July 12-15, 2009 Koç University, Istanbul, Turkey;
- H. Scherer, E. Camponogara and A. Plucenio, Distributed Optimization for Predictive Control of a Distillation Column with Output,Control-Input Constraints, ADCHEM 2009, *IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, July 12-15, 2009 Koç University, Istanbul, Turkey;
- D. J. Pagano, A. Plucenio and A. Truple, Slug-flow Control in Submarine Oil-risers using SMC Strategies, ADCHEM 2009, *IFAC International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, July 12-15, 2009 Koç University, Istanbul, Turkey;



# Apêndice A

## Introdução ao Controle Preditivo Baseado em Modelo

### A.1 Introdução

Uma introdução às técnicas de Controle Preditivo baseado em Modelo pode ser encontrada em [116], [77], etc. A idéia da predição para o cálculo da ação de controle não é nova. A ação derivativa do clássico Controle PID utiliza uma forma de predição através da ação derivativa expressa pelo termo  $k_d \frac{dy}{dt}$ . O Preditor de Smith [117] já utilizava uma forma de predição para a compensação do tempo morto. A idéia é simples e intuitiva. Conhecendo o comportamento do sistema (modelo entrada-saída) determinar a sequência de ações de controle a serem tomadas no futuro de forma a seguir uma trajetória desejada também conhecida com o mínimo de esforço. Aplicar a primeira ação da sequência e no instante seguinte repetir o processo.

Um bom exemplo da aplicação de controle preditivo para não especialistas é aquele praticado pelo motorista de um automóvel. Conhecendo o veículo que dirige o motorista observa a pista desde o trecho que está logo a sua frente como aquele que está mais afastado e toma as ações necessárias para seguir sua trajetória. Se olhasse somente para o trecho logo a sua frente teria de fazer

seguidos movimentos na direção corrigindo a trajetória do veículo. Olhando somente para o trecho mais afastado poderia deixar de fazer um seguimento correto e andar até mesmo na contramão. É olhando um trecho que vai desde os primeiros metros a frente do veículo e alguma distância mais a frente que o motorista consegue seguir a trajetória com pequenos movimentos corretivos na direção e na aceleração. O comprimento da pista ou o a distância a ser percorrida sob análise representa aqui o horizonte de predição.

Em geral as técnicas de controle preditivo baseado em modelo têm em comum a minimização de uma função custo.

Suponha que deseje-se fazer uma viagem de automóvel de forma segura, confortável, rápida e econômica. Para isto se enumeram os seguintes objetivos:

- seguir na pista da direita,
- terminar a viagem em tempo mínimo,
- seguir as práticas seguras e regras de trânsito obedecendo os limites de velocidade,
- fazer uma viagem confortável.
- gastar o mínimo de combustível.

Se o veículo fosse dotado de sensores e acionadores adequados poderia ser conduzido por um processador que minimizasse uma função objetivo na forma de uma expressão matemática. Mesmo atuando de forma manual o motorista age como se minimizasse uma função custo pois minimiza os desvios da trajetória mantendo-se na pista da direita. Minimiza o afastamento da velocidade ideal respeitando as restrições impostas pela sinalização e distância mínima do veículo a sua frente. Minimiza o desconforto adaptando a velocidade as condições da pista. Minimiza o gasto de combustível selecionando a marcha ideal para a velocidade do veículo e posição do pedal do acelerador.

Assim ao vislumbrar um buraco na estrada o motorista cria um modelo do comportamento do carro para este cenário. Ele então faz uma ponderação dos objetivos que deve seguir. Como a variável de maior importância é a trajetória (não pode dirigir na contra-mão) não desvia do buraco mas diminui a velocidade abaixo da ideal para minimizar os solavancos. No final como o seguimento da trajetória tem mais peso que o seguimento da

velocidade ideal e há um peso para o nível de solavancos, a minimização da função objetivo resulta na viagem com as características desejadas.

Para finalizar deve-se mencionar a necessidade do constante ajuste do modelo frente as observações ou medições das variáveis do processo. No exemplo da viagem do carro isto se manifesta, por exemplo, quando o motorista detecta que o veículo sacoleja mais ou menos do que o previsto. Isto é observado pelo motorista e será levado em consideração nas suas predições futuras.

O controle preditivo baseado em modelo (MPC) é uma das técnicas de controle moderno mais potentes e provavelmente a que teve mais êxito em aplicações industriais [118] principalmente na indústria do petróleo. As principais causas deste êxito devem-se a que as estratégias de MPC podem ser aplicadas tanto a sistemas monovariáveis como multivariáveis lineares ou não lineares, as restrições nas saídas e nas ações de controle podem ser consideradas no projeto da lei de controle em tempo real e, pela própria definição dos algoritmos, podem ser usadas para controlar processos com atrasos [119].

O MPC não é uma estratégia de controle específica, mas é o nome dado a um conjunto muito grande de métodos de controle que foram desenvolvidos considerando algumas ideias comuns baseadas no conceito de predição. Na figura A.1 mostra-se a estrutura geral de um MPC onde pode ser observado o funcionamento do algoritmo: com o controle e o erro atuais e um modelo calcula-se primeiro a predição da saída futura do processo; com estas informações um módulo de otimização calcula o sinal de controle a ser aplicado ao processo no próximo passo considerando a minimização de um determinado índice de desempenho e as restrições nas variáveis de processo e/ou de controle [48].

A maioria dos sistemas reais têm dinâmica não linear, porém quando o processo opera numa pequena faixa então a sua dinâmica pode ser aproximada satisfatoriamente através de modelos lineares. Isto tem motivado a que muitas técnicas de MPC foram abordadas utilizando modelos lineares: Matriz Dinâmica de Controle (DYNAMIC MATRIX CONTROL-DMC), [120]; Controle Algorítmico Baseado em Modelo (MODEL ALGORITHM CONTROL-MAC), [121]; Controle Preditivo Generalizado (GENERALIZED PREDICTIVE CONTROL-GPC), [122]; Controle Preditivo Adaptativo (EXTENDED PREDICTIVE SELF ADAPTIVE CONTROL-EPSAC), [123].

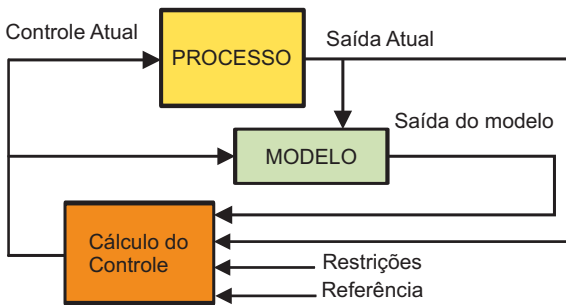


Figura A.1: Diagrama de Blocos do Algoritmo de Controle Preditivo Baseado em Modelo

São muitas as aplicações de controle baseadas em softwares comerciais que implementam LMPC nas refinarias de petróleo no Brasil e no mundo [48].

As principais vantagens do LMPC estão vinculadas as facilidades de obtenção de modelos lineares, se comparados aos não lineares, e as menores dificuldades para se resolver os problemas de otimização associados. Porém, quando os processos têm dinâmica muito não linear ou quando a faixa de operação é variável, então necessariamente deverá ser tomado em conta o modelo não linear no projeto do controle, de forma que permita manter o desempenho desejado para o sistema em malha fechada.

Do ponto de vista conceitual o MPC não linear (NMPC) não apresenta dificuldades. Considerando a mesma função objetivo ( $J$ ) que no caso linear e um modelo não linear para o cálculo das predições o objetivo consiste novamente em encontrar o controle que minimize a função objetivo num algoritmo de horizonte deslizante. Já do ponto de vista prático são várias as dificuldades encontradas neste problema (se comparado ao caso linear): (a) a determinação do modelo do processo quando deve ser obtido por identificação, (b) a obtenção do sinal de controle requer, em geral, a solução de um problema otimização não convexo e (c) a análise de estabilidade e robustez da solução. Por estes motivos o NMPC é um campo aberto para pesquisas tanto na área de determinação de modelos como nos procedimentos e algoritmos de otimização para o cálculo do controle [48, 124].

## A.2 Conceitos Básicos de MPC

Os algoritmos MPC possuem algumas características comuns [48]: (a) usam um modelo explícito do processo e das perturbações para prever a saída do mesmo num determinado horizonte finito; (b) calculam as ações de controle para todo o horizonte a partir da minimização de uma determinada função objetivo; (c) o horizonte é deslizante, pelo que para cada período de amostragem o horizonte é deslocado um passo para frente, aplica-se unicamente a ação de controle de aquele instante e desconsidera-se o resto dos controles dentro do horizonte.

As diferenças entre os diversos algoritmos existentes devem-se basicamente à forma de escolher os modelos para o processo e as perturbações, ao tipo de função objetivo e ao procedimento para manipular as restrições e o cálculo do controle [125].

O modelo de predição é provavelmente o elemento mais importante dentro do controlador dado que ele deve ser capaz de representar adequadamente a dinâmica do processo para permitir o cálculo das predições da sua saída, ser intuitivo e ao mesmo tempo permitir uma análise teórica do sistema. As diferentes estratégias de MPC utilizam diferentes formas para representar as relações entre entradas manipuladas, perturbações e saídas do processo. Em geral o modelo é separado em duas partes: no modelo do processo propriamente dito e no modelo das perturbações; ambos necessários para o cálculo das predições. Os modelos lineares são os mais usados na prática para representar o processo e podem ser de entrada saída (resposta impulsiva, resposta ao degrau e função de transferência) ou de variáveis de estado.

Os modelos de resposta impulsiva ou ao degrau são bastante utilizados na prática por oferecem as seguintes vantagens: (a) são intuitivos e podem ser usados em plantas multivariáveis sem acrescentar complexidade; (b) quando identificados não precisam de conhecimento a-priori do processo e (c) descrevem de maneira simples efeitos mais complexos da dinâmica do processo como atrasos e comportamentos de fase não mínima. Por outro lado apresentam alguns inconvenientes: (a) não podem ser usados com plantas instáveis e (b) necessitam utilizar um grande número de parâmetros para descrever o modelo, sobre tudo se o processo tiver um atraso grande.

O modelo de função de transferência tem como vantagens prin-

cipais que pode ser usado para plantas instáveis e que precisa, em geral, de poucos parâmetros para descrever o comportamento do sistema (o atraso, por exemplo, pode ser descrito apenas com um parâmetro). Já seu principal inconveniente é a necessidade de conhecer a priori a ordem dos polinômios numerador e denominador quando o modelo deve ser identificado a partir de dados experimentais.

Os modelos de espaço de estados podem ser usados diretamente para processos multivariáveis e não lineares. Como inconvenientes cabe mencionar que em geral os estados não tem significado físico e que na maioria das vezes é necessário o uso de observadores, aumentando assim a complexidade de cálculo do controle.

Os modelos não lineares são geralmente usados para descrever a dinâmica do processo quando os modelos lineares não geram bons resultados. Modelos fenomenológicos [126], empíricos [127], redes neurais [128] ou lógica nebulosa [129] podem ser usados em algumas aplicações para determinar o modelo de predição. O inconveniente no uso destes modelos é a maior complexidade tanto no procedimento de obtenção do modelo do processo quanto no cálculo da lei de controle.

A escolha de um modelo para as perturbações é tão importante quanto a do processo. O modelo mais utilizado para a descrição de perturbações determinísticas e estocásticas é o conhecido como modelo autoregressivo integrado de média móvel (Auto-Regressive and Integrated Moving Average, ARIMA) [122]. Este modelo permite representar mudanças aleatórias, "off-sets" e outros fenômenos normalmente encontrados no meio industrial.

A função objetivo a ser minimizada pode ter diferentes formas mas a mais utilizada é do tipo quadrática contendo o somatório do quadrado do erro entre uma trajetória desejada e a trajetória obtida ao longo de um horizonte de predição e o somatório do quadrado dos incrementos de ação de controle em um horizonte de controle [125].

Seja

- $J$  uma função custo;
- $k$  a denominação do instante de tempo ou amostra atual,  $k - 1$  o instante anterior e  $k + j$  o instante  $j$  depois do atual;
- $p$  o horizonte de predição ou número de amostras depois da amostra atual onde as predições e trajetórias futuras são

consideradas;

- $m$  o horizonte de controle ou número de amostras onde as entradas são manipuladas para minimizar a função custo;
- $\tilde{y}(k + j/k)$  a saída  $y$  no instante  $j$  depois do instante atual  $k$  calculada com o modelo do sistema;
- $\Delta u(k + i)$  a variação na ação de controle no instante  $(k + i)$  com relação a ação de controle no instante anterior  $u(k + i - 1)$ . Ou seja  $\Delta u(k + i) = u(k + i) - u(k + i - 1)$ .

Uma função custo genérica é dada pela equação (A.1) onde o termo  $J_{seg. ref.}$  leva em conta o seguimento de referência e o termo  $J_{esf. cont.}$  o esforço de controle.

$$J = J_{seg. ref.} + J_{esf. cont.} \quad (A.1)$$

Para um sistema com uma entrada e uma saída (*SISO - Single Input Single Output*) uma função custo típica é a apresentada na equação (A.2).

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_1+p-1} \gamma_j (\tilde{y}(k + j) - r(k + j))^2 + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i \Delta u(k + i)^2. \quad (A.2)$$

Na equação (A.2)  $\gamma_j$  e  $\lambda_j$  são as ponderações, respectivamente sobre o seguimento de referência e o esforço de controle. Em muitos casos as ponderações para o caso SISO são constantes.  $N_1$  é o número de amostras que determina o início do horizonte de predição. O problema a ser resolvido é obter o vetor  $\Delta \mathbf{u} = [\Delta u(k) \quad \Delta u(k + 1) \quad \cdots \quad \Delta u(k + m - 1)]^T$  que minimiza a função Custo  $J$  sujeito a restrições sobre os incrementos de controle  $\Delta \mathbf{u}$ , as ações de controle  $\mathbf{u} = [u(k) \quad u(k + 1) \quad \cdots \quad u(k + m - 1)]^T$  e a saída predita

$$\tilde{\mathbf{y}}(k + j) = [\tilde{y}(k + 1) \quad \tilde{y}(k + 2) \quad \cdots \quad \tilde{y}(k + p)]^T.$$

Para sistemas lineares as predições podem ser facilmente escritas em função das ações de controle futuras de forma linear. Isto dá origem a um problema de minimização de uma função Custo Quadrática. As diferentes técnicas de Controle Preditivo Baseado em Modelo para sistemas lineares diferenciam-se principalmente pela forma como os seguintes elementos são representados:

- Modelo dinâmico do sistema

- Modelo da perturbação
- Função Custo
- Forma de obtenção da Lei de Controle

Para sistemas dinâmicos representados por modelos entrada-saída lineares os modelos dinâmicos mais comuns são:

- Representação por Resposta ao Impulso
- Representação por Resposta ao degrau
- Representação por Função de Transferência

### A.2.1 Tipos de Controle Preditivo para Sistemas Lineares

Os tipos de controle preditivo mais conhecidos são:

- *Model Predictive Heuristic Control ou Model Algorithmic Control (MAC)* - Utiliza o modelo do sistema baseado na resposta ao impulso. Por basear-se na resposta ao impulso é um método de controle preditivo válido para sistemas estáveis. A trajetória é desejada tem uma dinâmica de primeira ordem que evolui desde a saída atual até a referência desejada. Os horizontes de predição e controle são iguais.
- *Dynamic Matrix Control* - Utiliza o modelo do sistema baseado na resposta ao degrau.
- *Predictive Functional Control (PFC)* - Utiliza modelo do tipo equação de estados e é aplicável a processos lineares e não lineares, estáveis e instáveis. No lugar de buscar o seguimento de referência ao longo do horizonte de predição, este método busca a coincidência das predições com alguns pontos da trajetória desejada. A ação de controle consiste em uma combinação de funções base pré-selecionadas.
- *Extended Prediction Self Adaptive Control* - Utiliza modelo baseado em Função de Transferência. Uma característica marcante deste método é que o horizonte de controle é igual a 1.
- *Generalized Predictive Control (GPC)* - Método proposto por Clarke *et al.* [130]. Utiliza o modelo CARIMA para as predições. Um aspecto importante do algoritmo GPC é a forma como trata o erro de modelagem. As predições incorporam a integral do erro filtrado.



## A.2.2 DMC - Dynamic Matrix Control

Desenvolvido nos anos setenta por Cutler e Ramaker da empresa Shell, a técnica de Controle Preditivo DMC é uma das mais utilizadas na indústria, principalmente em petroquímicas [116]. A técnica de controle preditivo DMC (*Dynamic Matrix Control*) utiliza a representação do modelo da planta na forma não paramétrica. As saídas da planta são calculadas baseadas na resposta ao degrau unitário de cada entrada. Para um sistema de uma entrada e uma saída estável e linear pode-se escrever

$$y(k) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(k-i) + \eta(k), \quad (\text{A.3})$$

onde  $g_i$  são os elementos do vetor resposta ao degrau unitário na entrada. Utilizando-se a equação (A.3) para escrever-se a predição da saída  $y$  em um instante  $j$  unidades de tempo de amostragem futuros têm-se

$$\tilde{y}(k+j/k) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(k+j-i) + \tilde{\eta}(k+j/k) \quad (\text{A.4})$$

A equação (A.4) pode ser reescrita dividindo-se o tempo entre  $1:j$  e  $(j+1):\infty$ .

$$\tilde{y}(k+j/k) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(k+j-i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(k+j-i) + \tilde{\eta}(k+j/k) \quad (\text{A.5})$$

Deve-se observar que se substituirmos os limites do somatório do primeiro termo à direita da equação (A.5) verifica-se que este termo representa a contribuição das entradas  $[\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+j-1)]$  na saída do processo enquanto que o segundo termo representa o efeito de todas as entradas desde  $(k-1)$  até  $(k+j-\infty)$  ou  $(-\infty)$ . Ou seja, o primeiro termo representa a mudança do processo devido as mudanças nas ações de controle futuras enquanto o segundo termo representa a saída do processo no instante  $(k+j)$  devido as entradas que ocorreram até o momento  $(k-1)$ . A técnica DMC supõe que os erros de modelagem ou perturbações futuras  $\tilde{\eta}(k+j/k)$  são todas iguais a que ocorreu no

instante  $k$ , ou  $\eta(k)$ . Então

$$\tilde{\eta}(k + j/k) = y_m(k) - \tilde{y}(k/k), \quad (\text{A.6})$$

onde  $y_m(k)$  é o valor da saída real no instante  $k$ , mas

$$\tilde{\eta}(k + j/k) = y_m(k) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(k - i) \quad (\text{A.7})$$

substituindo-se (A.7) em (A.5) têm-se

$$\tilde{y}(k + j/k) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(k + j - i) + \sum_{i=j+1}^{\infty} g_i \Delta u(k + j - i) + y_m(k) - \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(k - i). \quad (\text{A.8})$$

Os três últimos termos da equação (A.8) podem ser combinados e têm-se

$$\tilde{y}(k + j/k) = \sum_{i=1}^j g_i \Delta u(k + j - i) + f(k + j) \quad (\text{A.9})$$

onde

$$f(k + j) = y_m(k) + \sum_{i=1}^{\infty} (g_{j+i} - g_i) \Delta u(k - i) \quad (\text{A.10})$$

Entretanto como os elementos  $g_i$  da resposta ao degrau unitário de um sistema estável convergem em um determinado número de amostras  $N$  pode-se truncar o somatório da equação (A.10) em  $N$  já que  $\exists N$  tal que  $g_{N+1} \cong g_N$ . Com esta consideração a equação (A.10) é reescrita como

$$f(k + j) = y_m(k) + \sum_{i=1}^N (g_{j+i} - g_i) \Delta u(k - i) \quad (\text{A.11})$$

A equação (A.9) dá a entender que seriam necessárias a mesma quantidade de entradas futuras para descrever as predições. Na prática sabe-se que se as entradas futuras forem convenientemente manipuladas pode-se obter um seguimento de trajetória com um número bem menor de entradas. Ou seja, para um determinado seguimento de referência os últimos incrementos de controle  $\Delta u(k + m) : \Delta u(k + j - 1)$  serão nulos se os primeiros forem

bem manipulados. Daí surge a ideia do horizonte de controle  $m$ . Pode-se perceber que se o o horizonte de controle for muito pequeno estaremos tirando graus de liberdade da ação de controle e as ações de controle tendem a tornar-se mais ativas. Horizontes de Controle menores facilitam o cálculo da ação de controle. Já o horizonte de predição determina o intervalo de tempo futuro sobre o qual se quer ter controle. Escrevendo-se a expressão (A.9) expandida considerando-se o horizonte de controle  $m$  e o horizonte de predição  $p$  têm-se

$$\begin{aligned}\tilde{y}(k+1/k) &= g_1\Delta u(k) + f(k+1) \\ \tilde{y}(k+2/k) &= g_2\Delta u(k) + g_1\Delta u(k+1) + f(k+2) \\ \tilde{y}(k+3/k) &= g_3\Delta u(k) + g_2\Delta u(k+1) + g_1\Delta u(k+2) + f(k+3) \\ &\vdots \\ \tilde{y}(k+p/k) &= g_p\Delta u(k) + g_{p-1}\Delta u(k+1) + \dots + g_{p-m+1}\Delta u(k+m-1)\end{aligned}$$

O conjunto de equações (A.12) pode ser reescrito em uma forma compacta pela equação (refdmccom).

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{F} + \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}, \quad (\text{A.13})$$

onde  $\mathbf{G}$  é a Matriz Dinâmica definida pela equação (A.15).

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ g_m & g_{m-1} & \dots & g_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_p & g_{p-1} & \dots & g_{p-m+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \tilde{y}(k+1/k) \\ \tilde{y}(k+2/k) \\ \vdots \\ \tilde{y}(k+p/k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} f(k+1) \\ f(k+2) \\ \vdots \\ f(k+p) \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+m-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Utilizando-se a forma de expressar as predições com a equação (A.13) pode-se também reescrever a função objetivo dada pela equação (A.2) em uma forma mais compacta como

$$J = (\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{W})^T \mathbf{R} (\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{W}) + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{u}, \quad (\text{A.18})$$

ou

$$J = (\mathbf{F} + \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{W})^T \mathbf{R} (\mathbf{F} + \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{W}) + \Delta \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{u}$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz diagonal contendo as ponderações sobre o seguimento de referência ao longo do horizonte de predição,  $\mathbf{W}$  é o vetor contendo as trajetórias futuras desejadas no horizonte de predição e  $\mathbf{Q}$  é uma matriz diagonal contendo as ponderações sobre o esforço de controle. A expressão (A.1) é válida para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (Sistemas MIMO-*Multiple Inputs Multiple Output*) como também para sistemas com uma entrada e uma saída (Sistemas SISO-*Single Input Single Output*). Para os sistemas com uma entrada e uma saída é comum considerar  $\mathbf{R}$  como a matriz identidade e a matriz  $\mathbf{Q} = \lambda \mathbf{I}_{m \times m}$ . Neste caso a expressão (A.1) transforma-se em

$$J = (\mathbf{F} + \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{W})^T (\mathbf{F} + \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} - \mathbf{W}) + \lambda \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u}. \quad (\text{A.19})$$

No caso de sistemas MIMO com  $N_e$  entradas e  $N_s$  saídas, a matriz  $\mathbf{G}$  será composta por  $N_e N_s$  submatrizes, o vetor  $\mathbf{F}$  será composto de  $N_s$  vetores e o vetor  $\Delta \mathbf{u}$  por  $N_e$  vetores. Como exemplo, para um sistema com 2 entradas e 2 saídas têm-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_1 \\ \tilde{\mathbf{Y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1 \\ \Delta \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

A minimização da função custo para o caso sem restrições pode ser obtida igualando-se a zero o gradiente da função Custo dada pela equação (A.1),  $\frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}} = 0$ .

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta \mathbf{u}} = 2\mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{G} \Delta \mathbf{u} + 2\mathbf{G}_T \mathbf{R} \mathbf{F} - 2\mathbf{G}_T \mathbf{R} \mathbf{W} + 2\mathbf{Q} \Delta \mathbf{u} \quad (\text{A.21})$$

Isolando-se  $\Delta \mathbf{u}$  obtém-se ;

$$\Delta \mathbf{u} = (\mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{G} + \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{R} (\mathbf{W} - \mathbf{F}) \quad (\text{A.22})$$

Como  $\frac{\partial^2 J}{\partial \Delta \mathbf{u}^2} = 2(\mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{G} + \mathbf{Q})$  e  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{Q}$  são matrizes diagonais com elementos positivos, então  $\frac{\partial^2 J}{\partial \Delta \mathbf{u}^2}$  é definida positiva e o mínimo encontrado é um mínimo global.

Na presença de restrições sobre a ação de controle ou sobre a própria saída a minimização da função Custo é obtida com a aplicação de algoritmos de Programação Quadrática. Estes algoritmos resolvem problemas do tipo

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \Phi \mathbf{x} + \Theta^T \mathbf{x} & \quad (\text{A.23}) \\ \text{sujeito à} & \\ A\mathbf{x} \leq b & \end{aligned}$$

Manipulando-se a função Custo definida na equação (A.1) pode-se colocá-la no formato da equação (A.23) fazendo-se

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{G} + \mathbf{Q}, & (\text{A.24}) \\ &e \\ \Theta &= \mathbf{G}^T \mathbf{R}^T (\mathbf{F} - \mathbf{W}). \end{aligned}$$

As restrições podem ser aplicadas tanto sobre as entradas como sobre as saídas. Sobre as entradas pode-se aplicar restrições tanto na taxa de mudança da ação de controle como em seus valores máximos e mínimos. Para denotar a restrição de que as variações máximas da ação de controle em um intervalo de tempo igual a um período de amostragem sejam aquelas que o elemento atuador pode fornecer,  $(\Delta u_{min} \leq \Delta u \leq \Delta u_{max})$ , escreve-se para o caso

*SISO*

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\Delta\mathbf{u} &\leq \Delta u_{max}\mathbf{1} \\ -\mathbf{I}\Delta\mathbf{u} &\leq -\Delta u_{min}\mathbf{1}, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de dimensão  $m \times m$  e  $\mathbf{1}$  é um vetor de dimensão  $m \times 1$  com todos elementos iguais a 1.

Para a aplicação de restrições sobre  $\mathbf{u}$  escreve-se

$$\mathbf{u} = u(k-1)\mathbf{1} + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u}, \quad (\text{A.26})$$

onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz triangular inferior  $m \times m$  com todos os elementos não nulos iguais a 1. Para expressar que  $u_{min.} \leq u \leq u_{max.}$  escreve-se

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\Delta\mathbf{u} &\leq (u_{max} - u(k-1))\mathbf{1} \\ -\mathbf{D}\Delta\mathbf{u} &\leq (-u_{min} + u(k-1))\mathbf{1}, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Para introduzir restrições sobre a saída do tipo  $y_{min.} \leq y \leq y_{max.}$ , escreve-se  $\mathbf{Y} = \mathbf{F} + \mathbf{G}\Delta\mathbf{u}$  e

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} &\leq y_{max}\mathbf{1} - \mathbf{F} \\ -\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} &\leq -y_{min}\mathbf{1} + \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Todas as restrições podem ser expressas montando-se uma matriz  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  tal que  $\mathbf{A}\Delta\mathbf{u} \leq \mathbf{B}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \\ \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} \\ \mathbf{G} \\ -\mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Delta u_{max} \mathbf{1} \\ -\Delta u_{min} \mathbf{1} \\ (u_{max} - u(k-1)) \mathbf{1} \\ (-u_{min} + u(k-1)) \mathbf{1} \\ y_{max} \mathbf{1} - \mathbf{F} \\ -y_{min} \mathbf{1} + \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Para o caso de múltiplas entradas e múltiplas saídas pode-se igualmente montar matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  de forma a expressar as restrições sobre todas as entradas e saídas. Por exemplo, para o caso de 2 entradas  $u_1$  e  $u_2$  e 2 saídas  $y_1$  e  $y_2$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0}_{m \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times m} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \\ -\mathbf{G}_{11} & -\mathbf{G}_{12} \\ -\mathbf{G}_{21} & -\mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \Delta u_{max}^1 \mathbf{1}_{m \times 1} \\ \Delta u_{max}^2 \mathbf{1}_{m \times 1} \\ -\Delta u_{min}^1 \mathbf{1}_{m \times 1} \\ -\Delta u_{min}^2 \mathbf{1}_{m \times 1} \\ (u_{max}^1 - u^1(k-1)) \mathbf{1}_{m \times 1} \\ (u_{max}^2 - u^2(k-1)) \mathbf{1}_{m \times 1} \\ (-u_{min}^1 + u^1(k-1)) \mathbf{1}_{m \times 1} \\ (-u_{min}^2 + u^2(k-1)) \mathbf{1}_{m \times 1} \\ y_{max}^1 \mathbf{1}_{p \times 1} - \mathbf{F}^1_{p \times 1} \\ y_{max}^2 \mathbf{1}_{p \times 1} - \mathbf{F}^2_{p \times 1} \\ -y_{min}^1 \mathbf{1}_{p \times 1} + \mathbf{F}^1_{p \times 1} \\ -y_{min}^2 \mathbf{1}_{p \times 1} + \mathbf{F}^2_{p \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

onde  $\mathbf{0}$  é uma matriz de zeros,  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade  $m \times m$ ,  $\mathbf{D}$  é uma matriz triangular inferior  $m \times m$  com todos elementos não nulos iguais a 1 e  $\mathbf{G}_{ij}$  é uma das submatrizes que compõem

a matriz  $\mathbf{G}$  e que relaciona a saída  $i$  com a entrada  $j$ .

A facilidade com que as restrições são introduzidas no cálculo da ação de controle quando utiliza-se Controle Preditivo, a facilidade com que os problemas multivariáveis são tratados faz com que a cada dia aumente-se a utilização desta técnica no controle de Processos. Dentre as diversas formulações, produtos baseados na técnica DMC ainda são os mais utilizados no setor *downstream* da indústria do petróleo.



# Referências Bibliográficas

- [1] Bin Hu. Characterizing gas-lift instabilities. Master's thesis, Department of Petroleum Engineering and Applied Geophysics, Norwegian University of Science and Technology University, Trondheim, Norway, 2004.
- [2] S.R.V. Campos et al. Spe99956 right-time decision of artificial-lift management for fast loop control. *2006 SPE Intelligent Energy Conference and Exhibition*, 2006.
- [3] W. S. Going et al. Spe99834 intelligent-well technology: Are we ready for closed-loop control? *2006 SPE Intelligent Energy Conference and Exhibition*, 2006.
- [4] L.A. Saputelli et al. Spe83798 promoting real time optimization of hydrocarbon-producing system. *2003 Offshore Europe Conference*, September, 2003.
- [5] M. McCelvey et al. Spe88506 intelligent well system with hydraulic adjustable chokes and permanent monitoring improves conventional esp completion for an operator in ecuador. *2004 Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition*, October, 2004.
- [6] C. Oberwinker et al. Spe96645 real time information to the engineer's desktop-how murphy e&p improved production management. *2005 Offshore Europe Conference*, September, 2005.
- [7] L. J. Durlofsky P. Sarma and K. Aziz. Spe94241 efficient closed-loop production optimization under uncer-

- tainty. *2005 SPE Europe/EAGE Annual Conference*, June, 2005.
- [8] D. B. Silin et al. Spe95685 waterflood surveillance and control: Incorporating hall plot and slope analysis. *2005 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, October, 2005.
- [9] M. Hauser T. Unneland. Spe96390 real time management:from vision to engagement-an operator's experience. *2005 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, October, 2005.
- [10] M. F. Silva Jr. et al. Spe95917 technologies trials of intelligent field implementation in carmópolis field. *2005 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, October, 2005.
- [11] M. J. Economides, A. D. Hill, and C. E. Economides. *Petroleum Production Systems*. Prentice Hall, Inc., 1994.
- [12] Camponogara E. Nakashima P. Otimização da alocação de gás de injeção para um conjunto de poços operando via gas-lift. *XV Congresso Brasileiro de Automática-CBA 2004*, 2004.
- [13] P. Nakashima P. and E. Camponogara. Alocação ótima de taxas de injeção de gas-lift utilizando programação linear inteira mista. *Petro & Química 263*, 2004.
- [14] E. Camponogara and A. Deconto. Gas-lift allocation under precedence constraints:piecewise-linear formulation and k-covers. *44 IEEE Conference on Decision and Control, and The European Control Conference*, 2005.
- [15] P. Nakashima and E. Camponogara. Optimization of lift-gas allocation using dynamic programming. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A*, 2005, 2005.
- [16] Alarcón G.A., Torres C. F., and Gómez E. Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear programming. *Journal of Energy Resources Technology*, 124 : 262 – 268, December-2002.

- [17] Y. Tang. Transient dynamic characteristics of gas-lift unloading. Master's thesis, University Tulsa, Tulsa, USA, 1998.
- [18] N. Petalas and K. Aziz. A mechanistic model for multiphase flow in pipes. *49 Annual Technical Meeting of the Petroleum Society of the Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum*, 1998.
- [19] Y. Chen. Modeling gas-liquid flow in pipes: flow pattern transitions and drift-flux modeling. Master's thesis, University of Stanford, Stanford, USA, 2001.
- [20] Scandpower Petroleum Technologies. *Olga 2000 v. 4.10 User Manual*. Scandpower P. T., Kjeller, Norway, 2003.
- [21] G. Defaye L. Caralp and C. Vidal. Dynamic behaviour of a gas-lift simulator. *European Symposium on Computer Aided Process Engineering-2*, 2002.
- [22] B. Jansen et al. Automatic control of unstable gas lift wells. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Outubro 1999.
- [23] Gisle Otto Eikrem, Bjarne Foss, Lars Imsland, Bin Hu, and Michael Golan. Stabilization of gas lifted wells. *Proceedings of the IFAC 15th World Congress, Barcelona*, 2002.
- [24] Lars Imsland, Gisle Otto Eikrem, and Bjarne Foss. State feedback control of a class of positive systems: Application to gas lift control. *ECC'03, Cambridge*, 2003.
- [25] A. Plucenio. Automação da produção de poços de petróleo operando com elevação artificial por injeção contínua de gás. Master's thesis, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.
- [26] A. Plucenio, D. J. Pagano, and J. Normey-Rico. Automação de um grupo de poços de petróleo operando com elevação contínua de gás. *II Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás*, 2003.

- [27] A. Plucenio, D. J. Pagano, and J. Normey-Rico. Controle robusto aplicado à produção de petróleo por elevação artificial tipo *Gas-Lift*. *XV Congresso Brasileiro de Automática-CBA 2004*, 2004.
- [28] L. Sinègre et al. Distributed model for density wave dynamics in gas-lifted wells. *44 IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference*, Dec. 2005.
- [29] D. J. Pagano, V. D. Filho, and A. Plucenio. Identification of polynomial narmax models for an oil well operating by continuous gas-lift. *International Symposium on Advanced Control of Chemical Process-ADCHEM 2006*, pages 1113–1118, 2006.
- [30] A. Plucenio, D. J. Pagano, and G. A. Mafra. A control strategy for an oil well operating via gas lift. *International Symposium on Advanced Control of Chemical Process-ADCHEM 2006*, pages 1081–1086, 2006.
- [31] Gisle Otto Eikrem, Bjarne Foss, and Lars Imsland. Stabilization of gas lifted wells based on state estimation. *IFAC ADCHEM 2003, Hong Kong*, 2004.
- [32] L. S. Imsland, B. A. Foss, and G. O. Eikrem. State feedback control of a class of positive systems: Application to gas lift stabilization. Cambridge, United Kingdom, 2003.
- [33] L. Sinègre. Etude des instabilités dans les puits activés par gas-lift. Master’s thesis, Ecole des Mines de Paris, Paris, France, 2006.
- [34] Adalberto J. Rosa and Renato de S. Carvalho. *Previsão de comportamento de reservatórios de petróleo*. Editora Interciência Ltda., 2002.
- [35] A.R. Hasan, C.S. Kabir, and M. Sayarpour. A basic approach to wellbore two-phase flow modeling. pages 384–389, Anaheim-California-U.S.A., 2007.
- [36] E. Camponogara, A. Plucenio, A. F. Teixeira, and S. R. V. Campos. An automation system for gas-lifted oil wells: Model identification, control, and optimization. *Journal of Petroleum Science and Technology*, 2009.

- [37] E.L. Rawlins and M.A. Schellhardt. Backpressure Data on Natural Gas Wells and Their Application to Production Practices. In *Monograph Series-USBM*, 1935.
- [38] H.H. Evinger and M. Muskat. Calculation of Theoretical Productivity Factor. In *Proc. Trans. AIME*, 1942.
- [39] W.E. Gilbert. Flowing and Gas-Lift Well Performance. In *Drilling and Production Practice, API*, 1954.
- [40] R. Raghavan. Well Test Analysis. In *Petroleum Engineering Series*, Englewood Cliffs, New Jersey-USA, 1993.
- [41] J.M. Richardson and A.H. Shaw. Two-Rate IPR Testing-A Practical Production Tool. In *JCPT*, March-April 1982.
- [42] Y.D.C. Maravi. NEW INFLOW PERFORMANCE RELATIONSHIPS FOR GAS CONDENSATE RESERVOIRS. Master's thesis, Texas A and M University, 2003.
- [43] J.R.C. Torrico. Desenvolvimento analítico das curvas IPR a partir de um simulador de reservatórios. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, 1995.
- [44] A. Plucenio, D. J. Pagano, E. Camponogara, A. Traple, and A. Teixeira. Gas-lift optimization and control with nonlinear mpc. *International Symposium on Advanced Control of Chemical Process-ADCHEM 2009*, 2009.
- [45] F. Giri, F.Z. Chaoui, M. Haloua, Y. Rochdi, and A. Naitali. Hammerstein model identification. *10<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation - MED2002*, July-2002.
- [46] Manabu Kano and Morimasa Ogawa. The state of the art in advanced chemical process control in japan. In *AD-CHEM'09: Proceedings of the International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, pages Part I,11–26, 2009.
- [47] A. Plucenio, D. J. Pagano, E. Camponogara, H. F. Scherer, and M. Lima. A simple distributed mpc algorithm. *XVII Congresso Brasileiro de Automática*, 2008.
- [48] E.F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer, Berlin, 2004.

- [49] A. Plucenio, D. J. Pagano, A. H. Bruciapaglia, and J. E. Normey-Rico. A practical approach to predictive control for nonlinear processes. *NOLCOS 2007 - 7<sup>th</sup> IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2007.
- [50] A. Plucenio, J. E. Normey-Rico, and A. H. Bruciapaglia. Controle preditivo não linear na indústria do petróleo e gás. *4<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de P e D em Petróleo e Gás*, 2007.
- [51] Jonas Berge. *Fieldbus for Process Control: Engineering, Operation, and Maintenance*. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC, USA, 2001.
- [52] D. P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 1995.
- [53] Dimitri P. Bertsekas. *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods (Optimization and Neural Computation Series)*. Athena Scientific, 1 edition, 1996.
- [54] A. Plucenio. Sistema de múltiplos agentes no controle de processos de refino. *5o. Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás*, Outubro-2009.
- [55] R. Findeisen and F. Allgöwer. An introduction to nonlinear model predictive control. *21<sup>st</sup> Benelux Meeting on Systems and Control*, pages 229–237, 2002.
- [56] Mark Cannon. Efficient nonlinear model predictive control algorithms. *Annual Reviews in Control*, 28:229–237, 2004.
- [58] J.E.S. Santos. *Controle Preditivo não Linear para Sistemas de Hammerstein*. Tese de doutorado. UFSC., 2005.
- [57] H.H.J. Bloemen, T.J.J. van den Boom, and H.B. Verbruggen. Model-based predictive control for hammerstein systems. In *Proceedings of the 39<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, Australia*, 2000.
- [59] V. Balakrishnan M.V. Kothare and M. Morari. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32:1361–1379, 1996.

- [60] J.Y. Choi W.K. Son and O.K. Kwon. Robust predictive control of uncertain nonlinear systemv with constrained input. *Transaction on Control, Automation and Systems Engineering*, 4:289–295, 2002.
- [61] V. Sakizlis A.M. Manthanwar and E.N. Pistikopoulos. Robust parametric predictive control design for polytopically uncertain systems. *American Control Conference*, 2005.
- [62] Y.Lu and Y.Arkunl. A scheduling quasi-minmax mpc for lpv systems. *American Control Conference*, pages 2272–2276, 1999.
- [63] Y.Lu and Y.Arkunl. A practical multiple model adaptive strategy for single-loop mpc. *Control Engineering Practice*, 11:141–159, 2003.
- [64] P.J. Campo and M. Morari. Robust model predictive control. *1987 American Control Conference*, pages 1021–1026, 1987.
- [65] E. Zafiriou. Robust model predictive control of processes with hard constraints. *Comp. Chem. Eng.*, 14(4/5):359–371, 1990.
- [66] H. Genceli and M. Nikolaou. Design of robust constrained model predictive controllers with volterra series. *AIChE Journal*, 41(9):2098–2107, 1995.
- [67] Z.H. Zheng and M. Morari. Robust stability of constrained model predictive control. *American Control Conference*, pages 379–383, 1993.
- [68] D.R.Ramirez, T. Alamo, E.F. Camacho, and M. de la Penha. Min-max mpc based on a computationally efficient upper bound of worst case cost. *Journal of Process Control*, 16:511–519, 2006.
- [69] R.M.C. De Keyser. A gentle introduction to model based predictive control. In *PADI2 International Conference on Control Engineering and Signal Processing, Piura, Peru*, 1998.
- [70] M. J. Pomar Garcia č. *Controle Preditivo Não Linear com Aplicação à Eletrônica de Potência*, school=Universidade

- Federal de Santa Catarina, Florianopolis, SC C., Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.* PhD thesis, 2005.
- [72] F. Kunhe. *Controle Preditivo aplicado a Robótica Móvel.* Diss. de Mestrado, UFRGS, 2005.
- [71] B. Kouvaritakis, M. Cannon, and J.A. Rossiter. Non-linear model based predictive control. *International Journal of Control*, 72(10):919–928, 1999.
- [73] A. Plucenio, D.J. Pagano, G. A. Mafra, and A. H. Bruciapaglia. Uma extensão do controle preditivo DMC para sistemas não lineares. *XVI Congresso Brasileiro de Automação*, 1:2644–2649, 2006.
- [74] Mircea Lazar. Nonlinear controller based on the epsac approach. Master’s thesis, University of Ghent, Department of Control Engineering and Automation, Flanders, Belgium, 2001.
- [75] K.J. Åström and B. Wittenmark. *Computer Controlled Systems-Theory and Design.* Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1997.
- [76] M. Escobar and J.O. Trierweiler. Multimodel approach to multivariable low order structured-controller design. *International Symposium on Advanced Control of Chemical Process*, pages 1021–1026, 2006.
- [77] J.M. Maciejowski. *Predictive Control with Constraints.* Prentice Hall, Edinburgh Gate, Harlow, Essex, CM202JE, England, 2002.
- [78] J.O. Trierweiler and A. R. Secchi. Exploring the potentiality of using multiple model approach in nonlinear model predictive control. *Progress in Systems and Control Theory*, 26:191–203, 2000.
- [79] A. Kremling H. Chen and F. Allgower. Nonlinear predictive control of a benchmark cstr. *Proc. of 3rd ECC*, pages 3247–3252, 1995.
- [80] S. Engell and K.-U. Klat. Nonlinear control of a non-minimum-phase cstr. *Proc. of American Control Conference*, pages 2041–2045, 1993.



- [81] J.O. Trierweiler and S. Engell. Controllability analysis via the rpn for a cstr with van de vusse reaction. *Proc. of European Control Conference*, 1997.
- [82] P. B. Fernandes S. Koch, R. G. Duraiski and J.O. Trierweiler. Nmpc with state-space models obtained through linearization on equilibrium manifold. *International Symposium on Advanced Control of Chemical Process*, pages 1015–1020, 2006.
- [83] J. A. Rossiter. *Model-Based Predictive Control-A practical Approach*. CRC PRESS, Boca Raton, Florida, USA, 2003.
- [84] A. Plucenio, D. J. Pagano, J. E. Normey-Rico, J. Pavei, and C. Moya. Including robustness in the mpc cost function. *XVII Congresso Brasileiro de Automática*, 2008.
- [85] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey-USA, 1995.
- [86] D. Odloak A. H. Gonzáles, J.L. Marchetti. Extended robust model predictive control for integrating systems. *International Symposium on Advanced Control of Chemical Process*, I:129–134, 2006.
- [87] Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, and Hanif D. Sher-ali. *Linear Programming and Network Flows*. Wiley-Interscience, 2004.
- [88] Sthener R. V. Campos, Manoel F. Silva Junior, José F. Correa, Edson Bolonhini, and Durval F. Filho. Right time decision of artificial lift management for fast loop control. In *Proc. of the SPE Intelligent Energy Conference and Exhibition*, Amsterdam, Netherlands, 2006.
- [89] G.O. Eikrem L. S. Imsland, B. A. Foss. State feedback control of a class of positive systems: application to gas lift stabilization. In *submitted to ECC'03*, Trondheim, Norway.
- [90] J. D. Redden, T. A. G. Sherman, and J. R. Blann. Optimizing gas-lift systems. In *Proceedings of the 49<sup>th</sup> Annual Fall Meeting of Petroleum Engineers of AIME*, Houston, USA, October 1974. Paper SPE 5150.

- [91] E. P. Kanu, J. Mach, and K. E. Brown. Economic approach to oil production and gas allocation in continuous gas lift. *Journal of Petroleum Technology*, 33:1887–1892, October 1981. Paper SPE 9084.
- [93] N. Nishikiori, R. A. Redner, D. R. Doty, and Z. Schmidt. An improved method for gas lift allocation optimization. *ASME Journal of Energy Resources Technology*, 117:87–92, 1995.
- [92] N. Nishikiori, R. A. Redner, D. R. Doty, and Z. Schmidt. An improved method for gas lift allocation optimization. In *Proceedings of the SPE 64<sup>th</sup> Annual Technical Conference and Exhibition*, San Antonio, USA, October 1989. Paper SPE 19711.
- [94] G. A. Alarcón, C. F. Torres, and L. E. Gómez. Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear constrained programming. *ASME Journal of Energy Resources Technology*, 124(4):262–268, December 2002.
- [95] P. T. Boggs and J. W. Tolle. Sequential quadratic programming. *Acta Num.*, 4:1–52, September 1995.
- [97] P. H. R. Nakashima. Otimização de processos de produção de petróleo via injeção contínua de gás. Ph.D. Thesis Proposal, Graduate Program in Electrical Engineering, Federal University of Santa Catarina, April 2004.
- [96] E. Camponogara and P. H. R. Nakashima. Optimizing gas-lift production of oil wells: Piecewise linear formulation and computational analysis. *IIE Transactions*, 38(2):173–182, 2006.
- [99] E. Balas and E. Zemel. Facets of the knapsack polytope from minimal covers. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 34:119–148, 1978.
- [98] L. A. Wolsey. *Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1998.
- [100] T.D. Mayhill. Simplified method for gas-lift well problem identification and diagnosis. In *Proc. 49<sup>th</sup> Annual Fall*

- Meeting of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston-Texas, USA, 1974. Paper SPE 5151.*
- [101] P. Lemetayer and P. M. Miret. Tool of the 90's to optimize gas lift efficiency in the gonelle field, gabon. In *Proc. SPE Offshore Europe Conference, Aberdeen,, September 1991. Paper SPE 23089.*
- [102] Y. A. W. El-Massry and A. D. Price. Development of a network and gas lift allocation model for production optimization in the ras budran field. In *Proc. SPE Middle East Oil Show, Bahrain,, March 1995. Paper SPE 29782.*
- [103] C.L. Dunham and H.N.J. Poulisse. Real-time artificial lift optimization. In *Proc. 8<sup>th</sup> Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, Abu Dhabi,, October 1998. Paper SPE 49463.*
- [104] Terry Bergeron, Andrew Cooksey, and J.Scott Reppel. New automated continuous gas-lift control system improves operational efficiency. In *Proc. SPE Mid-Continent Operations Symposium, Oklahoma City-Oklahoma, USA, March 1999. Paper SPE 521123.*
- [105] O. Boisard, B. Makaya, A. Nzossi, J.C. Hamon, and P. Lemetayer. Automated well control increases performance of mature gas-lifted fields, sendji case. In *Proc. 10<sup>th</sup> Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, Abu Dhabi,, October 2002. Paper SPE 78590.*
- [106] M.S.Nadar, T.S Schneider, K.L. Jackson, C.J.N. McKie, and J. Hamid. Implementation of a total system production optimization model in a complex gas-lifted offshore operation. In *Proc. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio-Texas, USA, September 2006. Paper SPE 103670.*
- [107] S. Skogestad. Probably the best simple pid tuning rules in the world. *submitted to the Journal of Process Control, 2001.*
- [108] J. Godhavn, M. P. Fard, and P. H. Fuchs. New slug control strategies, tuning rules and experiments results. *Journal of Process Control, 15:547–557, 2005.*

- [109] E. Storkaas and S. Skogestad. Cascade control of unstable systems with application to stabilization of slug flow. *IFAC Symposium ADCHEM 2003*, January 2004.
- [110] E. Storkaas. *Stabilizing control and controllability. Control solutions to avoid slug flow in pipeline-riser systems*. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology, Norwegian, 2005.
- [111] F. Angulo, M. di Bernardo, E. Fossas, and G. Olivar. Feedback control of limit cycle: a switching control strategy based on nonsmooth bifurcation theory. *IEEE Transactions on Circuit and Systems-I*, 52(2):366–378, February 2005a.
- [112] A. R. Champneys M. di Bernardo, C. Budd and P.S. Kowalczyk. *Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*. Applied Mathematical Sciences 163. Springer, 2008.
- [113] H. Wang and E. H. Abed. Bifurcation control of a chaotic system. *Automatica*, 31:1213–1226, 1995.
- [114] H. C. Lee and E. H. Abed. Washout filter in the bifurcation control of high alpha flight dynamics. In *Proc. of the American Control Conference*, pages 206–211, Boston, MA, 1991.
- [115] F. B. Cunha and D. J. Pagano. DC-DC step-up converter controlling by SMC and with an auxiliary washout filter. In *Proc. of Congresso Brasileiro de Automatica, CBA2002*, 2002. (in portuguese).
- [116] E.F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer, London, 1999.
- [117] O. J. M. Smith. Close control of loops with deadtime. *Chemical Engineering Progress*, 53:217, 1957.
- [118] H. Takatsu, T. Itoh, and M. Araki. Future needs for the control theory in industries-report and topics of the control technology survey in the japanese industry. *Journal of Process Control*, 8(5-6):369–374, 1998.
- [119] J.E. Normey-Rico and E.F. Camacho. *Control of Dead-time Processes*. Spinger, Berlin, 2007.

- [120] C.R. Cutler and B.L. Ramaker. Dynamic matrix control - A computer control algorithm. In *AIChE 86th National Meeting*, Houston, TX, 1988.
- [121] J. Richalet, A. Rault, J.L. Testud, and J. Papon. Algorithm control for industrial processes. In *Proc. 4th IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*, Tbilisi, USSR, 1976.
- [122] D.W. Clarke, C. Mothadi, and P.S. Tuffs. Generalized predictive control. Part I: The basic algorithm. Part II: Extensions and interpretations. *Automatica*, 23(2):137–160, 1987.
- [123] R. De Keyser. A gentle approach to predictive control. In Eolss Publishers Co. Ltd., editor, *Encyclopedia of Life Support Systems (EoLSS)*, Oxford, April 2003.
- [124] c D. Limon. *Control Predictivo de Sistemas No Lineales Sujetos a Restricciones: Estabilidad y Robustez*. PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2002.
- [125] J.A. Rossiter. *Model-Based Predictive Control: A practical Approach*. CRC Press, 2003.
- [126] M. Pomar, J.E. Normey-Rico, and E. Camponogara. Non linear model based predictive controller of a buck boost converter. In *Proc. of the XVI IFAC World Congress, Prague*, 2005.
- [127] O. Nelles. *Nonlinear System Identification*. Springer, Berlin, 2001.
- [128] Y. Tan and R. De Keyser. *Advances in Model-Based Predictive Control*, chapter Neural Network Based Predictive Control. Oxford University Press, 1994.
- [129] I. Skrjanc and D. Matko. *Advances in Model-Based Predictive Control*, chapter Fuzzy Predictive Controller with Adaptive Gain. Oxford University Press, 1994.
- [130] C. Mohtadi D. W. Clarke and P.S. Tuffs. Generalized predictive control-part i-the basic algorithm. *Automatica*, 23(2):137–148, 1987.