

**LUCAS BARCELOS DE OLIVEIRA**

**OTIMIZAÇÃO E CONTROLE DISTRIBUÍDO DE  
FRAÇÕES DE VERDE EM MALHAS VIÁRIAS  
URBANAS**

**FLORIANÓPOLIS  
2008**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**OTIMIZAÇÃO E CONTROLE DISTRIBUÍDO DE  
FRAÇÕES DE VERDE EM MALHAS VIÁRIAS  
URBANAS**

Dissertação submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

**LUCAS BARCELOS DE OLIVEIRA**

Florianópolis, Setembro de 2008.



# OTIMIZAÇÃO E CONTROLE DISTRIBUÍDO DE FRAÇÕES DE VERDE EM MALHAS VIÁRIAS URBANAS

Lucas Barcelos de Oliveira

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Controle, Automação e Informática Industrial*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’

---

Eduardo Camponogara, Ph.D.  
Orientador

---

Kátia Campos de Almeida, Dra.  
Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

---

Eduardo Camponogara, Ph.D.  
Presidente

---

Amit Bhaya, Ph.D.

---

Julio Elias Normey Rico, Dr.Ing.

---

Werner Kraus Junior, Ph.D.



*Aos meus pais.*



## AGRADECIMENTOS

Especiais agradecimentos ao meu orientador Eduardo Camponogara, não apenas pelo comprometimento e dedicação a esse trabalho, como pelo exemplo de caráter e profissionalismo que me proporcionaram ensinamentos muito mais valiosos que qualquer conhecimento técnico. Sem seu apoio esse trabalho não se tornaria realidade.

Ao meu pai Gilson, pelas primeiras lições de matemática, pelo exemplo de superação, pela confiança em mim depositada e pela segurança de saber que você está sempre presente.

À minha mãe Sinelma, pelas inúmeras vezes as quais relegou sua vontade por minha causa, pelos conselhos nas horas inoportunas e principalmente pelo exemplo de alegria e otimismo com que encara as dificuldades da vida.

À minha querida Vanessa, pelo carinho, compreensão e companhia. Por acreditar e incentivar que eu seja sempre melhor e por me fazer sentir em casa com um simples abraço.

Às minhas irmãs Luísa e Marina, por me ensinarem, cada uma a seu tempo, a alegria de compartilhar.

Aos amigos de longa data: Alda, Braulio, Felipe, Roberto, Vinícius e Vítor. Direta ou indiretamente vocês estiveram sempre presentes e me ajudaram a chegar até aqui.

Ao pessoal do “Sindicato do LCMF”, pelos dois anos de amizade, conquistas e amadurecimento que tivemos juntos.



Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

# OTIMIZAÇÃO E CONTROLE DISTRIBUÍDO DE FRAÇÕES DE VERDE EM MALHAS VIÁRIAS URBANAS

Lucas Barcelos de Oliveira

Setembro/2008

Orientador: Eduardo Camponogara, Dr.

Área de Concentração: Controle, Automação e Informática Industrial

Palavras-chave: Controle de Tráfego Urbano, Controle de Frações de Verde, Controle Preditivo Baseado em Modelo, Otimização Distribuída

Número de Páginas: xxii + 80

O congestionamento urbano tem crescido notoriamente e os impactos negativos causados são os mais diversos, transitando do aumento de tempo de jornada a questões de saúde e ambientais. Uma alternativa no combate a esse efeito se dá através do aumento da eficiência das malhas viárias urbanas. Diversas estratégias de controle em tempo-real existem com esse intuito, sendo a *Traffic-responsive Urban Control*, ou TUC, de especial interesse por apresentar bons resultados práticos e estar consolidando-se em grandes centros. Essa, porém, efetua o controle de frações de verde de forma heurística, através de um regulador quadrático-linear de dois estágios. Propõe-se um novo módulo de controle para este fim utilizando a teoria de controle preditivo, o qual considera as restrições intrínsecas do modelo de redes viárias explicitamente, garantindo a otimalidade do sinal de controle calculado para o horizonte de tempo observado. Posteriormente modifica-se o módulo de controle para que opere de forma distribuída, estabelecendo condições de convergência à solução ótima. Resultados numéricos e de simulação da aplicação do método a duas malhas viárias modelos são apresentados e demonstram um desempenho ora equivalente, ora superior ao regulador original da estratégia TUC.



Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

# **DISTRIBUTED OPTIMIZATION AND SPLIT CONTROL IN URBAN TRAFFIC NETWORKS**

**Lucas Barcelos de Oliveira**

September/2008

Advisor: Eduardo Camponogara, Dr.

Area of Concentration: Control, Automation and Industrial Informatics

Key words: Urban Traffic Control, Split Control, Model Predictive Control, Distributed Optimization

Number of Pages: xxii + 80

Urban congestion has grown notoriously and the negative impacts range from increased journey times to health and environmental issues. A way to cope with this effect is to increase urban network efficiency. For this purpose several real-time control strategies have been developed, one being the Traffic-responsive Urban Control, or simply TUC. This approach has consolidated itself among the representative real-time control strategies and is of particular interest for its good performance in practical implementations. Nevertheless, TUC uses a heuristic two-stage linear-quadratic regulator to perform split control. A new split control module is proposed to replace the original sub-optimal one. Based on model predictive control, this new strategy can handle the intrinsic constraints of the urban network model explicitly, therefore ensuring optimality of the solution found for the given prediction horizon. A distributed version of the proposed control is developed, along with conditions for its convergence to the centralized optimal solution. Numerical results and simulations from the application of the methods to two urban networks show that the predictive control strategies usually produce a performance better than or at least comparable to the baseline TUC regulator.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Histórico do Controle de Tráfego . . . . .	2
1.2	Definição do Problema Abordado . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Malhas Viárias Urbanas</b>	<b>7</b>
2.1	Conceitos Básicos . . . . .	7
2.2	Modelagem . . . . .	10
2.3	Sumário . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Controle Centralizado de Frações de Verde</b>	<b>15</b>
3.1	Regulador Linear Quadrático . . . . .	15
3.2	Controle LQR de Frações de Verde . . . . .	16
3.3	Controle Preditivo Baseado em Modelo . . . . .	18
3.3.1	Formulação MPC Linear . . . . .	20
3.4	Controle MPC de Frações de Verde . . . . .	23
3.5	Sumário . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Controle Distribuído de Frações de Verde</b>	<b>27</b>
4.1	Formulação do Problema . . . . .	27
4.2	Controle DMPC de Frações de Verde . . . . .	32
4.2.1	Decomposição do Problema Centralizado . . . . .	32

4.2.2	Algoritmo Distribuído de Otimização . . . . .	36
4.2.3	Aplicação do Método ao Controle de Tráfego Urbano . . . . .	42
4.3	Sumário . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Resultados Experimentais</b>	<b>45</b>
5.1	Malha Viária Urbana de Duas Interseções . . . . .	46
5.1.1	Experimentos Numéricos . . . . .	47
5.1.2	Simulações . . . . .	50
5.2	Malha Viária Urbana de Seis Interseções . . . . .	55
5.2.1	Experimentos Numéricos . . . . .	57
5.2.2	Simulações . . . . .	61
5.3	Sumário . . . . .	65
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Propriedades estruturais de sistemas de controle lineares</b>	<b>71</b>
A.1	Controlabilidade . . . . .	71
A.2	Estabilizabilidade . . . . .	72
A.3	Observabilidade . . . . .	72
A.4	Detectabilidade . . . . .	72
<b>B</b>	<b>Método de Webster para Temporização Semafórica</b>	<b>73</b>
B.1	Cálculo do Tempo de Ciclo . . . . .	73
B.2	Cálculo dos Tempos de Verde . . . . .	74
B.3	Exemplo de Aplicação do Método . . . . .	74

# Lista de Abreviaturas

ALINEA	<i>Asservissement Linéaire d'Entrée Autoroutière</i>
API	Interface de Programação de Aplicativos ( <i>Application Programming Interface</i> )
CRONOS	<i>Control of Networks by Optimization of Switchovers</i>
DMPC	Controle Preditivo Distribuído Baseado em Modelo ( <i>Distributed Model Predictive Control</i> )
GPL	Licença Pública Geral ( <i>General Public License</i> )
HMI	Interfac Homem Máquina ( <i>Human-Machine Interface</i> )
IN-TUC	<i>Integrated Traffic-responsive Urban Control</i>
ITS	Sistemas Inteligentes de Transporte ( <i>Intelligent Traffic Systems</i> )
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
LMPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo Linear ( <i>Linear Model Predictive Control</i> )
LP	Programação Linear ( <i>Linear Programming</i> )
LQR	Regulador Quadrático Linear (Linear-quadratic Regulator)
MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo ( <i>Model Predictive Control</i> )
MUV	Malha Viária Urbana
OPAC	<i>Optimized Policies for Adaptive Control</i>
PSFL	Licença da Fundação do Programa Python ( <i>Python Software Foundation License</i> )
QP	Programação Quadrática ( <i>Quadratic Programming</i> )
RHODES	<i>Real-Time Hierarchical Optimized Distributed Effective System</i>
SCATS	<i>Sydney Co-ordinated Adaptive Traffic System</i>
SCOOT	<i>Split Cycle Offset Technique</i>
TUC	<i>Traffic-responsive Urban Control</i>
UTOPIA	<i>Urban Traffic Integration by Integrated Automation</i>
VMS	<i>Variable Message Signs</i>



# Lista de Símbolos

## Notação

$A$	letras maiúsculas denotam conjuntos.
$\mathbf{A}$	letras maiúsculas em negrito denotam matrizes.
$\mathbf{a}$	letras minúsculas em negrito denotam vetores.
$A, a$	letras em itálico denotam variáveis.
$a(k + 1   k)$	representa o valor predito de $a(k + 1)$ no instante $k$ .
$a^N$	representa o valor nominal da variável.
$\mathbf{0}$	números em negrito representam matrizes ou vetores de dimensão apropriada com estes elementos.

## Índices

$z$	índice de vias
$w$	índice de vias
$j$	índice de interseções
$f$	índice de fases de interseções
$k$	índice de tempo discreto
$m$	índice dos sub-sistemas do controle DMPC
$n, i$	índices auxiliares

## Conjuntos

$Z$	conjunto de vias
$J$	conjunto de interseções
$F_j$	conjunto de fases da interseção $j$
$V_{j,z}$	subconjunto de $F_j$ indicando as fases em que a via possui direito de passagem
$I_j$	conjunto de vias de chegada da interseção $j$

$O_j$	conjunto de vias de saída da interseção $j$
$M$	conjunto de sub-sistemas
$I(m)$	conjunto de vizinhos de entrada do sub-sistema $m$
$O(m)$	conjunto de vizinhos de saída do sub-sistema $m$
$N(m)$	vizinhança do sub-sistema $m$

## Variáveis Específicas de Vias

$x_z$	número de veículos da via $z$ (veí)
$x_z^{max}$	capacidade máxima de veículos da via $z$ (veí)
$t_{z,0}$	taxa de saída da via $z$
$t_{z,w}$	taxa de conversão da via $z$ para a $w$
$S_z$	fluxo de saturação da via $z$ (veí/h)
$q_z$	fluxo de entrada da via $z$ (veí/h)
$p_z$	fluxo de saída da via $z$ (veí/h)
$s_z$	fluxo de saída interno da via $z$ (veí/h)
$d_z$	demanda interna da via $z$ (veí/h)
$\Delta d_z$	denota a operação $d_z - d_z^N$ (veí/h)

## Variáveis Específicas de Interseções

$C_j$	tempo de ciclo da interseção $j$ (s)
$L_j$	tempo perdido total da interseção $j$ (s)
$u_{j,i}$	representa o valor do tempo de verde da fase $i$ da interseção $j$ (s)
$\Delta u_{j,i}$	denota a operação $u_{j,i} - u_{j,i}^N$ (s)

## Variáveis e Parâmetros de Controladores

$C_j$	tempo de ciclo da interseção $j$ (s)
$L_j$	tempo perdido total da interseção $j$ (s)
$u_{j,i}$	representa o valor do tempo de verde da fase $i$ da interseção $j$ (s)
$\Delta u_{j,i}$	denota a operação $u_{j,i} - u_{j,i}^N$ (s)
$u_{j,i}^{min}$	tempo de verde mínimo permitido para a fase $i$ da interseção $j$ (s)
$u_{j,i}^{max}$	tempo de verde máximo permitido para a fase $i$ da interseção $j$ (s)

# Lista de Figuras

1.1	Esquema típico de controle de sistemas ITS [36]. . . . .	4
2.1	Conceitos básicos de uma interseção urbana. . . . .	8
2.2	Em tracejado o modelo de fluxo <i>store-and-forward</i> e em linha cheia o modelo com variáveis binárias. . . . .	9
2.3	Uma via urbana. . . . .	12
3.1	Solução ótima de uma interseção de duas fases. . . . .	24
4.1	Malha viária urbana exemplo composta por $M = 6$ subsistemas (interseções). . . . .	29
4.2	Grafo de acoplamento para a rede exemplo. . . . .	29
5.1	Malha viária urbana exemplo de duas interseções. . . . .	46
5.2	Fluxograma do processo de simulação numérica. . . . .	48
5.3	Fluxo de entrada médio especificado para a MVU de 2 interseções. . . . .	50
5.4	Evolução dos estados – $x_1$ em linha traço ponto, $x_2$ em linha pontilhada, $x_3$ em linha tracejada, $x_4$ em linha sólida – e sinais de controle LQR – $u_{1,1}$ em linha traço ponto, $u_{1,2}$ em linha pontilhada, $u_{2,1}$ em linha tracejada, $u_{2,2}$ em linha sólida – ao longo da simulação. . . . .	51
5.5	Evolução dos estados – $x_1$ em linha traço ponto, $x_2$ em linha pontilhada, $x_3$ em linha tracejada, $x_4$ em linha sólida – e sinais de controle MPC – $u_{1,1}$ em linha traço ponto, $u_{1,2}$ em linha pontilhada, $u_{2,1}$ em linha tracejada, $u_{2,2}$ em linha sólida – ao longo da simulação. . . . .	51
5.6	Custo do esforço de controle ao longo do tempo – plano a tempos fixos em linha pontilhada, controle LQR em linha tracejada e controle MPC em linha sólida. . . . .	52

5.7	Modelo de simulação da malha viária urbana de duas interseções. . . . .	54
5.8	Malha viária urbana exemplo de seis interseções. . . . .	55
5.9	Custo acumulado médio ao longo de 40 passos de simulação para o conjunto de 10 condições iniciais distintas classificado de acordo com o horizonte de predição.	62
5.10	Modelo de simulação da malha viária urbana de seis interseções. . . . .	63

# Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros nominais da MVU de duas interseções. . . . .	47
5.2	Taxas de conversão nominais para a MVU de duas interseções. . . . .	47
5.3	Valor acumulado da função custo em 60 passos de simulação. . . . .	49
5.4	Resultados de simulação da malha viária urbana de duas interseções. . . . .	54
5.5	Parâmetros nominais do cenário com ciclos distintos. . . . .	56
5.6	Parâmetros nominais do cenário com ciclos iguais. . . . .	57
5.7	Parâmetros nominais do cenário com ciclos iguais e simulação de acidente. . .	58
5.8	Taxas de conversão nominais para a MVU de seis interseções. . . . .	58
5.9	Conjunto aleatoriamente gerado de condições iniciais para os experimentos. .	59
5.10	Resultados computacionais para o conjunto de 10 condições iniciais distintas e margem de tolerância de 1%. . . . .	60
5.11	Resultados computacionais para o conjunto de 10 condições iniciais distintas e margem de tolerância de 0.1%. . . . .	60
5.12	Resultados de simulação da malha viária urbana de seis interseções para a matriz de ponderação $\mathbf{R}_1 = 0.003\mathbf{I}$ . . . . .	64
5.13	Resultados de simulação da malha viária urbana de seis interseções para a matriz de ponderação $\mathbf{R}_2 = \mathbf{I}$ . . . . .	64



# Capítulo 1

## Introdução

*The car has become an article of dress without which we feel uncertain, unclad, and incomplete.*

*Marshall McLuhan*

Nos últimos anos a motorização tem apresentado uma tendência mundial de crescimento a taxas constantemente maiores. Na Índia, por exemplo, o número de veículos registrados dobrou em um período de apenas sete anos, de 33 milhões em 1996 para aproximadamente 67 milhões em 2003. O país vizinho, a China, é o mercado de veículos que mais cresce atualmente. No primeiro semestre a do ano de 2006 a venda de veículos apresentou a assustadora taxa de 50% de crescimento em relação ao mesmo semestre no ano anterior, alcançando a marca de 1,8 milhões de novas unidades vendidas [37].

No Brasil, com o controle da inflação e redução na taxa de juros, o mercado automobilístico também apresenta crescimento considerável. Em nosso país a frota de veículos passou de 17,6 milhões em 1997 a 24 milhões no ano de 2006, contabilizando um aumento de aproximadamente 36% em menos de uma década. Essa taxa ficou bastante próxima àquela contabilizada globalmente que, no mesmo período, teve crescimento de 37%, passando de uma frota de 696 milhões a 954 milhões [11].

As conseqüências desse aumento na frota de veículos são as mais diversas, tendo impacto em várias áreas da sociedade. No âmbito social pode-se citar, por exemplo, o vínculo existente entre a motorização da população e o aumento do número de obesos [2], no âmbito ecológico tem-se o aumento da emissão de gases de efeito estufa [31], além disso o aumento no fluxo de veículos aumenta o número de acidentes, bem como a ocorrência de congestionamentos.

As malhas viárias também seguem a tendência de expansão, no entanto essas têm elevado custo de construção e manutenção. Como exposto em [23], a renda per capita é

fator determinante do tamanho da frota veicular e ambas crescem a taxas muito similares. Surpreendentemente a malha viária pavimentada a nível nacional, as auto-estradas, cresce também à mesma taxa. No entanto ao considerar-se toda a malha viária o crescimento é a taxas muito inferiores a da renda per capita. Isso indica que, enquanto a nível nacional infra-estrutura e número de veículos crescem concomitantemente, nas áreas urbanas existe uma larga disparidade entre o crescimento da frota veicular e da rede viária. Em suma, o congestionamento urbano cresce com o aumento de capital ao longo do tempo. Impulsionado ainda pela urbanização e crescimento populacional o congestionamento urbano já é um fenômeno globalizado. Dentre os diversos problemas causados por este fenômeno podemos citar: a diminuição da eficiência da infra-estrutura de transporte; prolongação tempo de jornada; aumento da poluição do ar; e maior consumo de combustível.

A solução para esse fenômeno parte do reconhecimento de que o mesmo não advém exclusivamente de uma infra-estrutura deficitária, e sim de um problema maior, de cunho social. Como tal, o mesmo só será contornado através de uma radical mudança de valores e a incorporação de transportes públicos eficientes. Contudo, existem formas de dirimir a crescente influência do congestionamento urbano, como por exemplo aumentando a eficiência das malhas viária existentes. Com esse intuito existem hoje diversos sistemas inteligentes de transporte, abreviados ITS.

Idealmente não existiriam semáforos nas malhas viárias, pois não haveriam cruzamentos. Todos seriam substituídos por elevados, viadutos, túneis, etc. Os mesmos só existem para permitir que pontos de conflito, os cruzamentos, sejam superados com segurança. Todavia, em meados do século XX percebeu-se que os semáforos influenciavam na eficiência das redes de trânsito. Fundamentados nessa descoberta os sistemas ITS atuais, ou seja, sistemas que utilizam tecnologia de informação e comunicação, visam não só incrementar a segurança, mas também a coordenação eficiência dos diversos componentes de uma infra-estrutura rodoviária, dentre eles os veículos e pedestres.

## 1.1 Histórico do Controle de Tráfego

O controle de tráfego urbano em seus moldes atuais tem raízes recentes, sendo concebido no final do século XX. Antes de 1920, e conseqüente popularização do automóvel, a demanda das rodovias não justificava a aplicação de métodos de controle sofisticados, de sorte que a primeira forma de controle de tráfego, e ainda hoje utilizada, tratava-se da sinalização manual, conduzida por guardas de trânsito. A partir desta data, com o advento do Fordismo, países industrializados como os Estados Unidos experimentaram uma grande onda de motorização e urbanização, levando a uma migração da população de áreas rurais parcamente habitadas aos centros urbanos de alta densidade demográfica, surge então a necessidade de novos métodos de controle de trânsito [39].

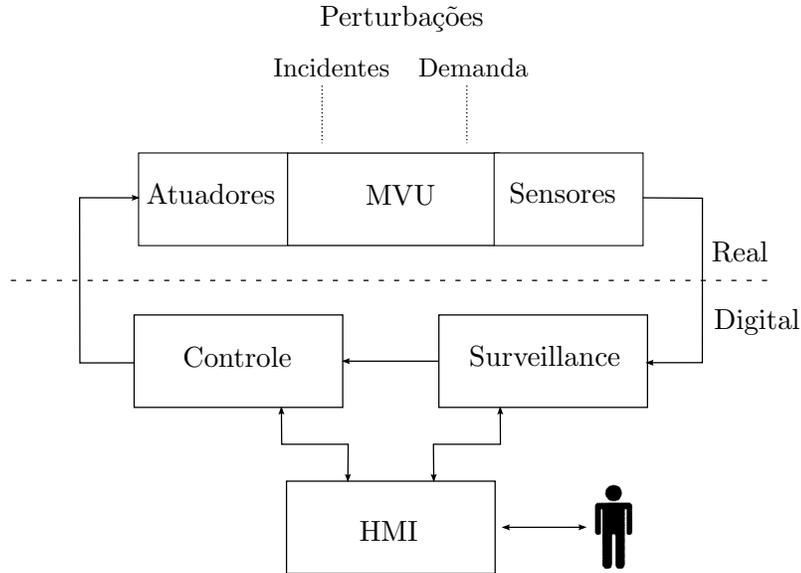
A essa época atribuí-se o surgimento dos primeiros semáforos automáticos, apesar do primeiro semáforo, inventado por J. P. Knight, datar do ano de 1868 quando foi instalado na interseção entre as ruas George e Bridge em Londres. Em 1910 surge o primeiro relato de um semáforo automático, criado por Earnest Serrine, em Chicago, que utilizava as palavras *stop* e *proceed*, sem distinção de cor. No ano de 1920 surge o primeiro semáforo baseado em três cores, criado por William Potts, em Detroit. Nessa época surgem as primeiras tentativas de descrição do tráfego através de expressões matemáticas, coletando dados e realizando aproximações a curvas lineares ou de outros tipos [20]. Essas estimativas eram utilizadas na determinação da capacidade das rodovias e ainda na determinação dos melhores parâmetros de seqüenciamento de fases, determinação de ciclos e tempos de verde, bem como sincronismo entre fases consecutivas. Apenas em 1950 surgem as primeiras tentativas de modelar-se teoricamente o tráfego urbano e modelos de seguimento de veículos e com estes a possibilidade de buscarem-se melhorias nos sistemas de controle existentes na época. Inicia-se então a era de controladores automáticos baseados em medições e predições, necessitando, para tal, computadores especiais destinados unicamente a esse fim [20]. Apesar da inserção de diversas novas tecnologias de aferição e controle, o arcabouço dos sistemas ITS modernos ainda segue esta mesma estrutura, ilustrada na Fig. 1.1. Pode-se observar que o comportamento da rede de tráfego depende de dois fatores distintos:

**Entradas de Controle:** Diretamente relacionadas aos atuadores do sistema, como por exemplo semáforos e mensagens VMS. Essas entradas podem ser restritas a uma região de operação desejável.

**Perturbações:** Variáveis sem possibilidade de manipulação, podem, no entanto, ser medidas, detectadas ou estimadas ao longo de um horizonte de tempo.

A avaliação de uma dada estratégia de controle é feita então através de indicadores, tais como tempo total despendido por todos os veículos da rede ao longo de um horizonte de tempo [36]. O âmago do sistema é a estratégia de controle, responsável por interpretar as informações captadas através dos sensores e predições e convertê-las em ações de controle que visem otimizar um determinado objetivo, usualmente um ou mais indicadores. Caso essa função seja desempenhada por um operador humano, configura-se um sistema de controle manual. Caso contrário trata-se de um sistema de controle automático.

As primeiras estratégias de controle de tráfego urbano *traffic-responsive*, aquelas que respondem as variações do tráfego em tempo real, foram apresentadas nos anos 80, com as primeiras implementações em campo do sistema de controle inglês SCOOT [22] e australiano SCATS [29]. SCOOT e SCATS visam um controle coordenado abrangendo toda a malha viária, sendo que a estratégia SCATS adota uma política com dois níveis hierárquicos onde o nível superior seleciona um plano de controle pré-especificado enquanto o nível inferior, de forma descentralizada, modifica os tempos de verde dentro de limites especificados. Apesar



**Figura 1.1:** Esquema típico de controle de sistemas ITS [36].

de aplicáveis a grandes redes, SCOOT e SCATS foram julgados ineficazes para variações rápidas nas condições de tráfego, como aquelas ocorridas em horários de pico e em caso de acidentes [16].

Diversas outras estratégias de controle baseado em modelo surgiram no decorrer dos anos, tais como OPAC [18], RHODES [33], PRODYN [17], CRONOS [4] e UTOPIA [32]. Essas não consideram de maneira explícita os valores de tempo de verde, defasagens e ciclos, formulando o controle de tráfego como um problema combinatório de otimização, e, excluindo CRONOS, utilizam algoritmos de complexidade exponencial na busca do mínimo global. Por essa razão, apesar de conceitualmente aplicáveis, essas estratégias não são capazes de controlar malhas viárias nem ao menos de pequeno porte. Para tal essas utilizam então heurísticas de controle em níveis hierárquicos superiores no intuito de realizar a coordenação entre os nós da rede viária. Por outro lado, CRONOS utiliza uma heurística global de otimização com complexidade polinomial, permitindo a consideração simultânea de diversas interseções ao custo de encontrar um mínimo apenas local. Outra importante deficiência das estratégias supracitadas é a inabilidade apresentada na resposta a condições saturadas de tráfego [15].

Por esses motivos há ainda uma deficiência em controles genuinamente coordenados e eficientes, operando em tempo-real e aplicáveis a grandes redes veiculares. Uma alternativa promissora foi apresentada em [14]. A estratégia apresentada, denominada IN-TUC, utiliza o modelo *store-and-forward* [21] descrevendo o fluxo de veículos sem a inclusão de variáveis binárias, o que por sua vez permite o uso de algoritmos de otimização altamente eficientes e métodos de controle com complexidade polinomial para o controle coordenado de grandes malhas viárias.

## 1.2 Definição do Problema Abordado

A estratégia IN-TUC é composta por diversos módulos integrados, cada um responsável por parte do problema de controle global. Dentre os módulos existentes pode-se citar: o TUC, responsável pelo controle de tempos de verde de semáforos urbanos; o ALINEA, para controle de entrada às rodovias; e um módulo para controle de rota via mensagens VMS [13].

O módulo de controle urbano, TUC, utiliza um regulador quadrático linear na obtenção de sinais de controle que visam à homogeneização da capacidade da rede urbana. Apesar de eficiente essa lei de controle considera restrições de ciclo e amplitude do sinal de controle de forma implícita, fazendo uso de uma etapa posterior de otimização no cálculo do tempo de verde restrito de cada fase, dessa maneira comprometendo a otimalidade do controle calculado.

O objetivo dessa dissertação é a formulação de um novo módulo de controle, baseado na formulação TUC existente, porém utilizando a teoria de controle baseado em modelo a fim de computar-se de forma distribuída um sinal de controle cujas restrições sejam consideradas de forma explícita, garantindo a otimalidade global do sinal de controle calculado dentro do horizonte de predição abordado. Uma solução distribuída circunda uma das principais dificuldades da estratégia IN-TUC, a centralização. Em sua forma original a inserção de um novo ponto de controle, ou até mesmo a modificação de parâmetros de um nó já controlado, incorre na reformulação de todo o problema de controle e uma grande monta de trabalho manual. Quando computado de forma distribuída, o controle de um nó impacta apenas sua vizinhança, facilitando a inserção de novos nós à rede e a atualização de seus parâmetros.

O foco do trabalho está centrado na solução distribuída do controle de tempos de verde e em sua comparação ao controle LQR centralizado. Dessa forma, para que a comparação seja feita de forma justa, diversos aspectos do controle MPC serão negligenciados. Dentre os desconsiderados o de maior importância é o modelo de perturbações. Apesar de fundamentais em uma aplicação prática de controle preditivo as perturbações não serão tomadas em conta no controle proposto, basicamente por não serem essas consideradas no controle TUC original. O documento está organizado da seguinte forma:

**Capítulo 2:** Fundamentam-se os conceitos do controle de tráfego urbano e do modelo de fluxo de veículos utilizado apresentando-se a modelagem de uma malha viária urbana segundo a abordagem TUC.

**Capítulo 3:** Descreve-se o problema de controle de frações de verde realizado de forma centralizada. Nesse capítulo apresenta-se de maneira criteriosa a estratégia de controle original do módulo TUC, fundamentada em um controlador LQR e formula-se o controle de porcentagens de verde baseado nas premissas do controle MPC.

**Capítulo 4:** Apresenta-se a formulação do controle distribuído baseado em modelo para o problema de controle de frações de verde. A teoria é construída a partir de premissas básicas do controle MPC centralizado e estendida ao caso de agentes distribuídos de controle. Ainda nesse capítulo prova-se a convergência ao valor ótimo da abordagem proposta.

**Capítulo 5:** Nesse capítulo apresentam-se os resultados de simulação obtidos. Duas malhas viárias urbanas são utilizadas nos experimentos, uma contendo duas interseções e outra incorporando seis cruzamentos. Os experimentos foram divididos em duas etapas, uma abordagem numérica preliminar e simulação em software especializado em modelagem de malhas viárias.

**Capítulo 6:** A dissertação é apresentada de maneira sucinta e suas principais contribuições apontadas. Conclusões gerais sobre o trabalho são formuladas e os resultados experimentais são discutidos. Finalmente algumas propostas de trabalho futuro são apresentadas.

## Capítulo 2

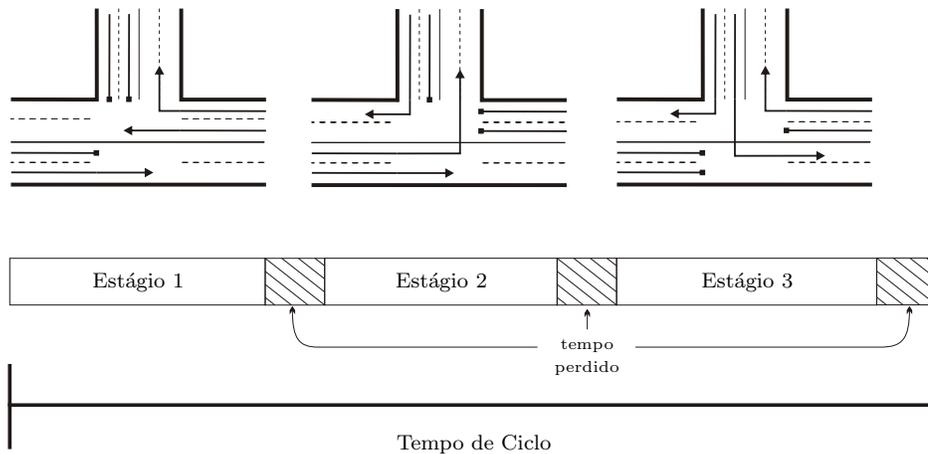
# Malhas Viárias Urbanas

Neste capítulo abordam-se os conceitos básicos da modelagem de redes de tráfego veicular. Primeiramente trata-se dos conceitos fundamentais atrelados a elas. Em seguida o processo de modelagem de uma malha viária urbana de acordo com a abordagem *store-and-forward* é descrito em detalhes. Inicialmente proposta por Gazis e Potts esta tem sido usada em diversos trabalhos [27, 28, 35, 40, 42, 43, 44], principalmente na área de controle de tráfego. Sua principal característica é a capacidade de descrever o fluxo de veículos sem a inclusão de variáveis inteiras, usualmente utilizadas para indicar quando esses possuem direito de passagem. Isto possibilita o uso de estratégias de controle em tempo-real de larga escala, uma vez que a complexidade do problema de cálculo de frações de verde reduz-se a polinomial e algoritmos eficientes de otimização podem ser utilizados.

### 2.1 Conceitos Básicos

Denomina-se uma MVU aquela que agrupa diversas *interseções* de um mesmo perímetro urbano, as quais são conectadas através de *vias*. Cada interseção, por sua vez, é formada por um conjunto de *aproximações* e uma *área de cruzamento* comum a elas. Uma aproximação consiste em parte de uma via, contendo uma ou mais pistas da mesma, a qual possibilita que os veículos nela presentes atravessem concomitantemente a interseção cuja ela se encerra. É portanto possível que uma única via possua duas ou mais aproximações, uma vez que as pistas de uma rua podem ter direito de passagem em momentos diferentes. Além disso, o tráfego de uma interseção é dividido em *fluxos*, os quais são compostos por todos os veículos que a cruzam partindo de uma mesma aproximação. Dois fluxos são ditos *compatíveis* quando podem atravessar simultaneamente uma interseção, caso contrário estes são ditos *incompatíveis* ou *conflitantes*.

Estes conceitos são mais bem compreendidos ao considerarmos a Fig. 2.1. Esta representa uma interseção entre duas ruas, cada uma contendo quatro pistas. Elegendo como



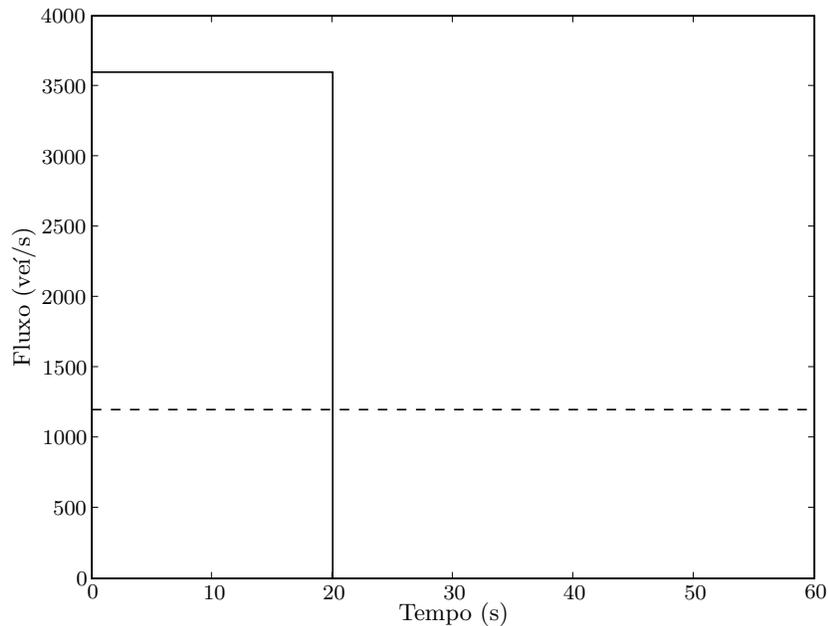
**Figura 2.1:** Conceitos básicos de uma interseção urbana.

referência a via horizontal no sentido oeste-leste, verifica-se a existência de duas aproximações, uma agrupando os veículos que desejam continuar na via horizontal, e outra referente aos veículos que desejam realizar a conversão à via vertical. Ainda na figura o conceito de fluxo é ilustrado, sendo representado por cada uma das setas na mesma.

Essas definições formam a base para a representação tanto de pequenas redes de trânsito quanto de grandes centros urbanos, no entanto alguns conceitos adicionais são necessários para formalizar um modelo apropriado de controle. Define-se a *capacidade* de uma interseção como o número máximo de veículos capaz de cruzá-la durante um intervalo de tempo, usualmente em veículos por hora. Por *fluxo de saturação* entenderemos o fluxo cruzando a faixa de parada de uma interseção quando este tem o direito de passagem (*r.o.w.*), a fila a montante é suficientemente grande e a via a jusante não está obstruída. Assim como a capacidade de uma interseção, as medidas de fluxo são usualmente expressas em veículos por hora. Um *ciclo* compreende a repetição da seqüência de indicações semafóricas de uma interseção, sendo o intervalo de repetição conhecido como *tempo de ciclo*, usualmente medido em segundos. Entende-se por *estágio*, ou *fase*, o período em que um conjunto de indicações semafóricas de uma interseção permanece constante. Intervalos constantes de alguns segundos, denominados *tempo perdido*, são inseridos entre os diversos estágios para evitar interferência entre fluxos conflitantes. Ainda na Figura 2.1 são ilustrados alguns destes conceitos

O princípio *store-and-forward* é ilustrado na Fig. 2.2. A linha cheia representa o fluxo de veículos através de variáveis inteiras, onde esse assume o valor do fluxo de saturação no período em que tem direito de passagem, e cai à zero no restante do ciclo. Enquanto isso, em tracejado está representado o mesmo fluxo de veículos, porém como modelado por Gazis e Potts. O modelo *store-and-forward* é portanto o fluxo médio ao longo do ciclo de uma interseção, e dessa forma, para que seja válido, o intervalo de controle utilizado deve ser maior que qualquer ciclo da MVU em questão.

Os principais atuadores em redes urbanas são os semáforos. Inicialmente projetados



**Figura 2.2:** Em tracejado o modelo de fluxo *store-and-forward* e em linha cheia o modelo com variáveis binárias.

para possibilitar o cruzamento seguro de pedestres e fluxos incompatíveis de veículos, os semáforos tiveram sua importância salientada pelo aumento constante no fluxo urbano. Com o aumento em demanda surgem os congestionamentos, o que induz a estimativa de um novo parâmetro em redes de trânsito, a *eficiência* da rede, expressa em termos do tempo total despendido por todos os veículos nela presentes. Nesse momento percebe-se então que esquemas de controle igualmente seguros propiciavam diferentes valores de eficiência, indicando a existência de um esquema ótimo de controle que induz a melhor eficiência da MVU.

Segundo [34], a influência exercida por semáforos às condições de tráfego é determinada por quatro propriedades:

**Especificação dos Estágios:** Apesar da possibilidade de calculá-los *offline*, a especificação ótima dos estágios para interseções complexas, com diversos fluxos conflitantes, é não trivial e pode causar grande impacto na capacidade e eficiência de uma interseção.

**Porcentagem de Verde (*Split*):** É a porcentagem do tempo efetivo de verde destinada a cada estágio, deve ser otimizada de acordo com a demanda dos fluxos envolvidos.

**Offset:** É a diferença temporal entre ciclos de interseções consecutivas, que uma vez bem coordenado pode ocasionar uma onda verde na arterial.

**Tempo de Ciclo:** Tempos maiores de ciclo tendem a aumentar a capacidade das interseções, uma vez que o tempo perdido torna-se proporcionalmente menor, porém acarreta atra-

os maiores em interseções não saturadas, devido ao tempo de espera durante a fase vermelha.

Além disso, pode-se classificar as diversas estratégias de controle segundo as seguintes características [13, 34]:

- *isoladas* quando aplicáveis a apenas uma interseção ou *coordenadas*, quando compreendem diversas interseções;
- certas estratégias caracterizam-se por serem válidas apenas para tráfego *não saturado*, outras são também válidas para tráfego *saturado*, com filas crescentes e que podem bloquear vias a montante; e
- de *tempo-fixo*, quando especificam, *offline*, um plano de controle baseado em dados históricos, ou *traffic-responsive*, quando utilizam medidas em tempo-real a fim de especificar, também em tempo-real, o plano de controle.

O caso de tráfego saturado é de extrema importância e pode provocar intensa degradação no desempenho da rede. Uma fila crescente pode, ocasionalmente, atingir uma interseção anterior. Neste caso todos os veículos que desejam utilizar a via congestionada permaneceriam parados, mesmo quando tiverem direito de passagem, acrescentando às filas em sua correspondente via. Isto, por sua vez, poderá bloquear novas interseções a montante desta acarretando em um efeito avalanche e levando o sistema a um estado de *gridlock*, cujo efeito é desastroso à eficiência da rede.

## 2.2 Modelagem

Uma MVU modelada de acordo com a estratégia TUC [15] baseia-se em um conceito totalmente oposto ao das estratégias mais comuns de controle. Ao invés de preocupar-se com as dinâmicas rápidas do sistema, como a aceleração dos veículos e tempo de reação dos motoristas, a estratégia é atuar no sistema baseado em informações de dinâmica mais lenta, como o fluxo médio de veículos em cada via. Isso se reflete na diferença entre os ciclos de controle de estratégias comuns como a Transyt, com ciclos de 4 s, e o ciclo da estratégia TUC, usualmente maiores que 60 s.

Para tanto representa-se a MVU como um grafo direcionado com vias  $z \in Z$  e interseções  $j \in J$ . Conjuntos  $I_j$  e  $O_j$  denotam, respectivamente, as vias de chegada e saída da interseção  $j$ . Os parâmetros tempo de ciclo  $C_j$ , tempo total perdido  $L_j$  e fluxos de saturação  $S_z$ ,  $z \in I_j$  são modelados como constantes e conhecidos.

Outro parâmetro conhecido e constante é a taxa de conversão entre todas as vias. Essas—representadas  $t_{z,w}$ ,  $z \in I_j$ ,  $w \in O_j$ —indicam a taxa de veículos que, ao saírem da via  $z$ , se dirigem a via  $w$ . Outra abordagem para a definição de rotas é a utilização de matrizes dinâmicas de origem e destino, conhecidas como O/D. Essa abordagem adaptativa, no entanto, incrementaria a complexidade de cálculo do controle e necessita de análise criteriosa antes de sua utilização, a qual não foi contemplada nesse trabalho.

Pode-se ainda assumir valores constantes de *offset* caso não haja coordenação semafórica. Finalmente, assume-se que o controle da interseção  $j$  possui um número fixo de estágios, pertencentes ao conjunto  $F_j$ , cujo subconjunto  $V_{j,z} \subseteq F_j$  representa aqueles em que a via  $z$  possui direito de passagem. A variável  $u_{j,i}$  denota o tempo de verde alocado ao estágio  $i$  da interseção  $j$ .

Como visto anteriormente, a definição dos ciclos de uma malha viária exerce importante influencia em sua eficiência, bem como na sincronização entre interseções. Desta maneira torna-se interessante que o controle de porcentagens de verde não altere os ciclos nominais da rede em que atua. Por este motivo define-se que em uma MVU todas as interseções estão sujeitas a duas restrições, a seguir enumeradas:

**Restrição 1:**  $\sum_{i \in F_j} u_{j,i} + L_j = C_j$ , ou seja a soma do tempo de verde das fases e do tempo perdido entre elas deve ser igual ao ciclo da interseção a qual pertencem; e

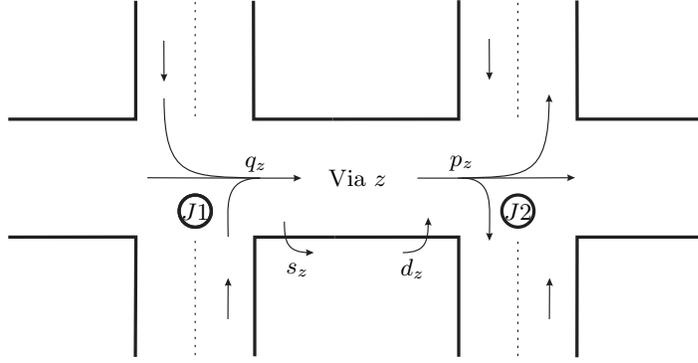
**Restrição 2:**  $u_{j,i} \in [u_{j,i}^{\min}, u_{j,i}^{\max}]$ , sendo  $u_{j,i}^{\min}$  e  $u_{j,i}^{\max}$  os respectivos tempos máximo e mínimo de verde de cada estágio.

Considere uma via  $z$  ligando duas interseções  $J1$  e  $J2$  tal que  $z \in O_{J1}$  e  $z \in I_{J2}$  como ilustrado na Figura 2.3. Podemos expressar a dinâmica em tempo discreto da via  $z$  pela seguinte equação:

$$x_z(k+1) = x_z(k) + T[q_z(k) + d_z(k) - p_z(k) - s_z(k)], \quad (2.1)$$

onde  $x_z$  representa o número de veículos na via  $z$ ;  $q_z$  e  $p_z$  são respectivamente os fluxos de entrada e saída da via  $z$  durante o período  $[kT, (k+1)T]$ , sendo  $k = 1, 2, \dots$  um índice de tempo discreto e  $T$  o intervalo de controle;  $d_z$  a demanda de entrada; e  $s_z$  a demanda de saída.

Uma vez conhecidas as taxas de saída da via—ou seja, assumindo que uma proporção, constante, dos veículos que adentram uma via abandonam a rede durante o intervalo de um ciclo de controle, estacionando, por exemplo— pode-se substituir a demanda de saída pela seguinte igualdade  $s_z(k) = t_{z,0}q_z(k)$ . Além disso, pode-se formular o fluxo de entrada da via  $z$  como  $q_z(k) = \sum_{w \in I_{J1}} t_{w,z}p_w(k)$ , onde  $t_{w,z}$ , são as taxas de conversão à via  $z$  partindo das vias  $w$  pertencentes a  $I_{J1}$ .



**Figura 2.3:** Uma via urbana.

A seguir elimina-se as dinâmicas rápidas do fluxo de veículos, assumindo que os fluxos de saída das vias são iguais ao seu fluxo de saturação ponderados pela razão entre o tempo de ciclo e o tempo de verde no qual estas possuem direito de passagem, *i.e.*

$$p_z(k) = S_z \frac{\sum_{i \in V_{j,z}} u_{j,i}(k)}{C_j},$$

para toda a interseção  $j$  para qual  $z$  pertença a  $I_j$ . Substituindo essas aproximações em (2.1) e assumindo, por simplicidade, que  $C = C_j$  para todas as interseções  $j \in J$ , obtém-se a seguinte equação de estado,

$$\begin{aligned} x_z(k+1) = x_z(k) + T \left[ d_z(k) - \frac{S_z}{C} \sum_{i \in V_{J_2,z}} u_{J_2,i}(k) \right. \\ \left. + (1 - t_{z,0}) \sum_{w \in I_{J_1}} \frac{t_{w,z} S_w}{C} \sum_{i \in V_{J_1,w}} u_{J_1,i}(k) \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde  $x_z(k)$  representa o número de veículos na via  $z$  no instante  $k$ ; e os termos  $u_{J_2,i}(k)$  e  $u_{J_1,i}(k)$  representam respectivamente os tempos de verde em que veículos tem direito de passagem saindo e entrando na via, *i.e.* os sinais de controle no instante  $k$ .

Caso tempos de verde nominais  $u_{j,i}^N$  estejam disponíveis, pode-se calcular uma demanda de entrada  $d_z^N$  que leva a um regime permanente de filas, com efeito,

$$(1 - t_{z,0})q_z^N + d_z^N - p_z^N = 0, \quad (2.3)$$

onde  $q_z^N$ ,  $p_z^N$  são os fluxos nominais de regime permanente. Assim, pode-se equacionar a

seguinte equação de estado:

$$x_z(k+1) = x_z(k) + T \left[ \Delta d_z(k) - \frac{S_z \left( \sum_{i \in V_{J2,z}} \Delta u_{J2,i}(k) \right)}{C} + (1 - t_{z,0}) \sum_{w \in I_{J1}} \frac{t_{w,z} S_w \left( \sum_{i \in V_{J1,w}} \Delta u_{J1,i}(k) \right)}{C} \right], \quad (2.4)$$

onde  $\Delta u_{j,i} = u_{j,i} - u_{j,i}^N$  é a variação do sinal de controle e  $\Delta d_z = d_z - d_z^N$  é a variação de demanda, sendo esta caracterizada como uma perturbação ao sistema.

Generalizando a equação (2.2) a todas as vias  $z \in Z$  da rede chega-se a seguinte equação em notação matricial:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{T}\mathbf{d}(k), \quad (2.5)$$

onde  $\mathbf{x}(k)$  é o vetor de estados;  $\mathbf{u}(k)$  é o vetor de controle contendo os sinais  $u_{j,i}$ , para todo  $j \in J$ , para todo  $i \in F_j$ ;  $\mathbf{d}(k)$  é o vetor contendo as demandas de entrada  $d_z$ , para todo  $z \in Z$ ; e  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{T}$  são respectivamente as matrizes de estado, entrada e perturbação do sistema. Ou ainda quando derivada de (2.4), em sua formulação incremental, a equação pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{T}\mathbf{d}(k). \quad (2.6)$$

Note que independentemente da formulação utilizada, *i.e.* absoluta ou incremental, as matrizes do sistema permanecem iguais, uma vez que as matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{T}$  dependem unicamente da topologia da rede, especificação dos estágios, tempos de ciclo, fluxos de saturação e taxas de conversão. Ademais, uma vez que os estados na formulação acima representam o número de veículos em uma via, em contraste a outras aplicações do modelo *store-and-forward* onde estes representavam o comprimento da fila [19], evita a necessidade de inserir-se atrasos temporais ao modelo.

## 2.3 Sumário

Nesse capítulo descreveram-se os conceitos básicos envolvidos na modelagem de uma malha viária urbana e apresentou-se o conceito *store-and-forward* de modelagem do fluxo de veículos de veículos. Esses tópicos forneceram a base necessária para que o a modelagem de malhas viárias segundo a estratégia TUC fosse abordada. Pontos importantes sobre o controle de tráfego foram abordados, como a influência dos semáforos na progressão veicular e classificações das estratégias de controle. Finalmente chegamos a duas equações de estados representando o modelo TUC de controle de frações de verde de forma absoluta e incremental.



## Capítulo 3

# Controle Centralizado de Frações de Verde

*All stable processes we shall predict. All unstable processes we shall control.*

*John von Neumann*

No capítulo anterior apresentou-se a metodologia necessária para modelar-se malhas viárias urbanas. Partindo dessa representação matemática da rede veicular torna-se possível formular o problema de controle de frações de verde visando otimizar algum critério desejado. Neste capítulo detalham-se duas estratégias de controle de frações de verde de atuação centralizada, ou seja aquelas em que o cálculo dos sinais de controle da MVU são feitos por uma única unidade de processamento, com acesso a todas as medidas da rede. A primeira destas faz uso de um modelo irrestrito de MVU a fim de calcular uma matriz eficiente de realimentação de estados através da teoria do regulador linear quadrático, aplicando as restrições de forma *ad-hoc*, posteriormente. A segunda, por sua vez, formula o controle de porcentagens de verde como um problema de controle preditivo baseado em modelo, no qual as restrições da rede são consideradas explicitamente, porém à custa de maior esforço computacional.

### 3.1 Regulador Linear Quadrático

Desde sua concepção, no início dos anos 60, o problema de controle por regulador linear quadrático, comumente conhecido como LQR, tem sido alvo de vários estudos. Uma poderosa ferramenta de desenvolvimento, a abordagem LQR é ainda a predecessora de várias estratégias modernas de controle, como controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  [26, Cap. 39].

Em sua essência o problema LQR é a solução de um problema de otimização de mínimos quadrados convexo com algumas propriedades especiais: garante a estabilidade em malha fechada do sistema, provê níveis de robustez—na ausência de incerteza—e é de fácil cômputo. A definição do problema, sua solução e as hipóteses necessárias para sua obtenção são apresentados a seguir.

**Teorema 3.1** (LQR em Regime Permanente). *Dada a dinâmica discreta do sistema*

$$\dot{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ , juntamente com o índice de desempenho a ser minimizado

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k),$$

sendo  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$ . Define-se uma função custo quadrática

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{y}(k)' \mathbf{y}(k) + \mathbf{u}(k)' \mathbf{R}\mathbf{u}(k)] \quad (3.2)$$

onde, sem perda de generalidade, apenas o esforço de controle é ponderado através da matriz  $\mathbf{R}$ . Assume-se que:

**Hipótese 3.1.** *Todos os estados do sistema estão disponíveis.*

**Hipótese 3.2.** *O par  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  é controlável e o par  $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$  detectável (Apêndice A).*

**Hipótese 3.3.**  *$\mathbf{R}$  é positiva definida.*

Então o controle linear quadrático é único e ótimo, sendo a lei de controle que minimiza  $J$  dada por:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{S} \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a solução única, simétrica e positiva definida da equação de Ricatti

$$\mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{S} + \mathbf{C}'\mathbf{C} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{S} = 0. \quad (3.4)$$

## 3.2 Controle LQR de Frações de Verde

A teoria do regulador LQR pode ser aplicada ao controle de frações de verde, de fato essa é a estratégia de controle originalmente proposta pela abordagem TUC de controle de tráfego urbano [15]. O conceito básico da estratégia é obter de uma matriz de realimentação de estados eficiente. Entretanto, como visto na seção 3.1, as perturbações do sistema, representadas nesse caso como variações de demanda, não são consideradas, ou seja assume-se

$\Delta \mathbf{d}(k) = 0$ . Uma vez que o intuito do procedimento resume-se a obter uma matriz de ganhos adequada ante otimizar um critério físico, a suposição de perturbações nulas é válida. Além disso, como tal metodologia não admite a consideração de restrições, calcula-se o sinal de controle restrito através de um processo de otimização *ad-hoc*. Dessa forma chega-se a seguinte representação do sistema para o cálculo do controle LQR:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k). \quad (3.5)$$

Visando minimizar o risco de saturação das vias, ocasionando bloqueios nas interseções, tenta-se minimizar e balancear a ocupação proporcional das vias, *i.e.*  $x_z/x_z^{max}$ , onde  $x_z^{max}$  é a capacidade de veículos que a via  $z \in Z$  pode suportar. Um critério quadrático para este fim pode ser representado por

$$J_{LQR} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\|\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\Delta \mathbf{u}(k)\|_{\mathbf{R}}^2), \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz positiva semidefinida de ponderação dos estados e  $\mathbf{R}$  uma matriz positiva definida de ponderação dos sinais de controle.

Segundo a teoria de controle ótimo, utiliza-se um horizonte de tempo infinito em (3.6) a fim de obter-se uma lei de controle invariante no tempo. Uma vez que a matriz  $\mathbf{Q}$  determina o peso dado aos estados, *i.e.* número de veículos nas vias, o intuito de minimizar a ocupação é obtido definindo os elementos de sua diagonal principal como  $1/(x_z^{max})^2$ , para cada  $z \in Z$ . A matriz  $\mathbf{R}$  reflete a penalidade imposta às variações de controle, usualmente definida como  $\mathbf{R} = r\mathbf{I}$ , sendo  $r$  definido de forma experimental. A minimização do critério (3.6) leva à lei de controle

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}^N - \mathbf{L}\mathbf{x}(k), \quad (3.7)$$

onde  $\mathbf{u}(k)$  é o vetor de tempos de verde  $u_{j,i}$ , para todo  $j \in J$ , para todo  $i \in F_j$ , e  $\mathbf{L}$  é a matriz de ganhos resultante, dependente de  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , apesar de pouco suscetível a variações das mesmas [15]. Alternativamente, pode-se utilizar uma lei de controle incremental, que não necessita valores nominais

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) - \mathbf{L}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)], \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{u}(k-1)$  deve ser um valor factível de controle. Mesmo para grandes redes esta estratégia não seria proibitiva, pois apesar do significativo aumento no custo computacional do cálculo da matriz  $\mathbf{L}$ , ela precisa ser calculada apenas uma única vez, *offline*.

Como as restrições de controle não são consideradas no problema quadrático linear, estas são impostas após a aplicação de (3.7), através da solução do problema de otimização

a seguir, a cada ciclo e para cada interseção  $j \in J$ :

$$P_{LQR} : \quad \min_{U_{j,i}} \sum_{i \in F_j} (u_{j,i} - U_{j,i})^2 \quad (3.9a)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in F_j} U_{j,i} + L_j = C \quad (3.9b)$$

$$U_{j,i} \in [u_{j,i}^{min}, u_{j,i}^{max}], \text{ para todo } i \in F_j \quad (3.9c)$$

onde  $U_{j,i}$  é o tempo de verde factível com a menor distância Euclidiana do sinal de controle irrestrito  $u_{j,i}$  calculado pela realimentação de estados.

Este problema é resolvido em tempo real para cada interseção  $j$ , porém possui algoritmos eficientes [13] com convergência garantida em um número de passos menor ou igual ao número de estágios  $|F_j|$  de cada interseção.

O regulador multivariável apresentado necessita da realimentação de todos os estados do sistema e, uma vez que não faz uso de predições, comporta-se de maneira puramente reativa, respondendo de forma indireta às perturbações desconhecidas. Além disso, a estrutura da matriz de controle  $\mathbf{L}$  faz com que o regulador possua um efeito de *gating*, *i.e.* evite que as vias a montante fiquem demasiadamente saturadas, prevenindo *gridlocks*.

### 3.3 Controle Preditivo Baseado em Modelo

Desenvolvido no início dos anos 70, o MPC é uma tecnologia ainda em desenvolvimento. Desde o princípio obteve grande aceitação no meio industrial devido ao bom desempenho prático, mesmo que sem garantias de robustez e estabilidade. Nos últimos anos a distância entre as vertentes de cunho prático e teórico vêm se estreitando, uma vez que a aceitação por parte da indústria impulsionou a pesquisa acadêmica na busca de provas de estabilidade e robustez, bem como em novas propostas de modelagem e utilização de observadores de estados, por exemplo. Ademais, a aumento no poder de processamento dos computadores e o desenvolvimento de eficientes algoritmos de otimização hoje possibilitam que o MPC seja aplicado em sistemas de dimensões elevadas ou de dinâmica rápida.

A principal vantagem dessa estratégia de controle consiste em possibilitar que restrições, tanto nos estados do sistema quanto nos sinais de controle, sejam explicitamente consideradas na minimização de um critério especificado. O cálculo da seqüência de controle que minimiza este critério ao longo de um horizonte finito de predição é realizado *online*, a cada instante de amostragem, através da resolução de um problema de otimização, usando o estado corrente da planta como condição inicial. Ou seja diferentemente do controle LQR apresentado, não há solução analítica geral para o problema de controle MPC. Dessa forma obtém-se uma

seqüência ótima de controle no intervalo de predição utilizado, sendo apenas o primeiro elemento desta seqüência aplicado no processo. O horizonte de predição é então transladado e uma nova seqüência de controle calculada, processo este conhecido como horizonte deslizante (*receding horizon*), caracterizando uma lei de controle de malha fechada.

Uma analogia ao MPC pode ser feita com dirigir-se um automóvel [5]. Baseado no estado da estrada o motorista conhece o caminho que quer seguir, ou seja a trajetória de referência desejada para um horizonte finito: seu campo de visão. As ações tomadas pelo motorista são decididas de acordo com as características do veículo que este dirige, ou melhor do *modelo* mental que ele possui do automóvel, e de possíveis obstáculos, como buracos, cruzamentos e outros carros. Com estas informações o condutor decide alterar ou manter sua velocidade e trajetória no intervalo de tempo subsequente, após o qual suas decisões são reavaliadas de acordo com seu campo de visão atualizado.

Diversas formulações de MPC são encontradas na literatura, no entanto todas possuem elementos básicos comuns, escolhidos conforme as necessidades e aplicação do controle [5]:

**Modelo de Predição:** O modelo do processo é a pedra fundamental do MPC. Este é usado na predição dos estados do sistema, necessárias para o cômputo do sinal ótimo de controle. Diferentes estratégias de controle preditivo podem utilizar diferentes tipos de modelos para representar a relação entre as entradas de controle e as saídas do sistema, como modelos por resposta ao impulso, resposta ao degrau, função de transferência e espaço de estados. Em situações realistas geralmente existem diferenças entre o processo e seu modelo, fazendo-se assim necessária também a criação de um modelo para incertezas e perturbações.

**Função Custo:** Especifica o critério de desempenho com relação ao qual será feita a otimização da lei de controle. As várias formulações de MPC utilizam diferentes tipos de função de custo. A idéia predominante é que esta função custo seja composta por uma soma ponderada dos estados ou saídas do sistema e esforço de controle ao longo do horizonte de predição. Um valor de referência para as variáveis de estado e controle pode ser fornecido, de forma que a minimização da função resulte na minimização do erro destas. Além disso a função custo pode incluir outros termos, como penalizações na variação do esforço de controle e custo terminal dos estados.

**Obtenção da Lei de Controle:** Para obter-se uma seqüência de valores ótimos para as variáveis de decisão dentro do horizonte de predição realiza-se a minimização da função custo, usando para tanto o modelo de predição no cálculo dos valores futuros dos estados. No caso geral não existe uma solução analítica para esta minimização sendo ela calculada através de um problema de otimização sujeito às restrições do sistema. Usualmente as variáveis de decisão do problema de minimização são as entradas de controle e

os estados do sistema, sendo a lei de controle dada implicitamente pelo primeiro termo da seqüência calculada.

**Horizonte Deslizante:** Até a obtenção da lei de controle, o MPC funciona essencialmente como um método de controle em malha aberta: calcula-se uma lei de controle para o estado atual da planta através da minimização da função custo. Entretanto, em sua totalidade, trata-se de um controle em malha fechada. Isto ocorre pois a aplicação do controle calculado a cada instante de amostragem altera as variáveis de estado do sistema e dessa forma um novo processo de otimização deve ser realizado, agora com o instante de amostragem deslocado em uma unidade para o futuro, caracterizando o horizonte deslizante.

Alguns pontos fortes bastante evidentes do MPC com relação a outras técnicas de controle podem ser citadas [5]:

- os conceitos são intuitivos;
- restrições e limites do sistema podem ser levados em consideração durante o cálculo da lei de controle de forma direta;
- aplicável a uma ampla gama de processos, como por exemplo, sistemas multivariáveis, sistemas de fase não-mínima, com longos atrasos de tempo, com referência futura conhecida ou instáveis em malha aberta; e
- vários tipos de modelos podem ser utilizados, como: espaço de estados, função de transferência, resposta ao impulso.

Entretanto existem também alguns pontos fracos, a saber:

- necessidade de um modelo preciso do sistema para a predição dos valores futuros dos estados;
- alto custo computacional; e
- dificuldade em lidar com problemas não lineares, onde o problema de otimização é não convexo.

### 3.3.1 Formulação MPC Linear

Caso o modelo do sistema a ser controlado seja linear e com restrições lineares pode-se formular o problema MPC de forma linear. Assim, considerando as entradas de controle como as variáveis de decisão e tendo-se uma função custo quadrática, pode-se transformar

o problema de minimização em um problema de programação quadrática, para o qual algoritmos numéricos robustos e eficientes existem [25]. Problemas de otimização deste tipo têm a vantagem de serem convexos, de forma que todo o mínimo local seja também um mínimo global.

Toma-se como ponto de partida a (2.5), referente ao modelo dinâmico do sistema, porém desconsiderando-se a influência de perturbações:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (3.10)$$

Pode-se prever o estado do sistema para um instante de amostragem no futuro através da aplicação recursiva da expressão (3.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1 | k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k | k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k | k) \\ \mathbf{x}(k+2 | k) &= \mathbf{A}^2\mathbf{x}(k | k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k | k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1 | k) \\ \mathbf{x}(k+3 | k) &= \mathbf{A}^3\mathbf{x}(k | k) + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u}(k | k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+1 | k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+2 | k) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k+n | k) &= \mathbf{A}^n\mathbf{x}(k | k) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-i}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+i | k). \end{aligned}$$

Como função custo utiliza-se:

$$J_{LMPC} = \sum_{n=N_1}^{N_2} \|\mathbf{x}(k+n | k)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{n=1}^{N_u} \|\mathbf{u}(k+n-1 | k)\|_{\mathbf{R}}^2, \quad (3.11)$$

onde  $N_2$  e  $N_1$  representam o horizonte de predição e  $N_u$  o horizonte de controle; e  $\mathbf{Q} \geq 0$  e  $\mathbf{R} > 0$ , assim como em (3.6), são matrizes de ponderação penalizando o erro dos estados e esforço de controle, respectivamente.

Sem perda de generalidade e a fim de simplificar a formulação matemática, escolhe-se, na expressão (3.11),  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = N$  e  $N_u = N$ , chegando-se a seguinte função custo:

$$J_{LMPC} = \sum_{n=1}^N [\mathbf{x}'(k+n | k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k+n | k) + \mathbf{u}'(k+n-1 | k)\mathbf{R}\mathbf{u}(k+n-1 | k)], \quad (3.12)$$

Uma vez definidos os vetores de estado e controle

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1 | k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1 | k) \\ \mathbf{x}(k+2 | k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+N | k) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}}(k | k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k | k) \\ \mathbf{u}(k+1 | k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+N-1 | k) \end{bmatrix}$$

juntamente com as matrizes de ponderação  $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}_{N \times N} \otimes \mathbf{Q}^1$  e  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{I}_{N \times N} \otimes \mathbf{R}$  e matrizes de transferência

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{N-1} \\ \mathbf{A}^N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-4}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-3}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

é possível reescrever-se a função custo (3.12) de forma compacta

$$J_{LMPC} = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{x}}'(k+1 | k) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(k+1 | k) + \bar{\mathbf{u}}^T(k | k) \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{u}}(k | k)]. \quad (3.13)$$

Apesar de compacta, a equação acima pode ainda ser melhor desenvolvida. Note que as variáveis de estado não são controláveis, e como tal não é interessante tratar-las explicitamente no problema de otimização. Como  $\bar{\mathbf{x}}(k+1 | k) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k | k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k | k)$ , a equação (3.13) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} J_{LMPC} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{x}(k | k)' \bar{\mathbf{A}}' + \mathbf{u}(k | k)' \bar{\mathbf{B}}') \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k | k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k | k)) \\ &\quad + \mathbf{u}'(k | k) \bar{\mathbf{R}} \mathbf{u}(k | k)] \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_0' \bar{\mathbf{A}}' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}_0' \bar{\mathbf{A}}' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k | k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}(k | k)' \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{u}(k | k)' \bar{\mathbf{B}}' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}(k | k) + \frac{1}{2} \mathbf{u}'(k | k) \bar{\mathbf{R}} \mathbf{u}(k | k), \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(k | k)$ . Simplificando os termos quadráticos e lineares da equação anterior temos

$$J_{LMPC} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'(k | k) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{u}}(k | k) + \mathbf{f}' \bar{\mathbf{u}}(k | k) + \mathbf{g}$$

sendo:

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{B}}' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{g} = \bar{\mathbf{x}}_0' \bar{\mathbf{A}}' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (3.14b)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{B}}' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{R}} \quad (3.14c)$$

Como o termo  $\mathbf{g}$  é independente da variável de decisão do problema de otimização,

---

<sup>1</sup>Produto de Kronecker: seja  $\mathbf{A}$  uma matriz  $m \times n$  e  $\mathbf{B}$  uma matriz  $p \times q$ , então o produto resulta na matriz em bloco  $mp \times nq$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

$\bar{\mathbf{u}}(k | k)$ , o mesmo não influi na minimização de  $\mathcal{J}_{LMPC}$ , sendo desconsiderado. Finalmente, chega-se a função custo na forma quadrática padrão

$$\mathcal{J}_{LMPC} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'(k | k) \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{u}}(k | k) + \mathbf{f}' \bar{\mathbf{u}}(k | k), \quad (3.15)$$

e utilizando a (3.15) podemos enunciar o problema de controle LMPC como:

$$P_{LMPC} : \quad \min J_{LMPC} \quad (3.16a)$$

sujeito a:

$$\mathbf{C}\mathbf{u}(k+n | k) \geq \mathbf{c}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.16b)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{u}(k+n | k) = \mathbf{d}, \quad n \geq 0, \dots, N-1 \quad (3.16c)$$

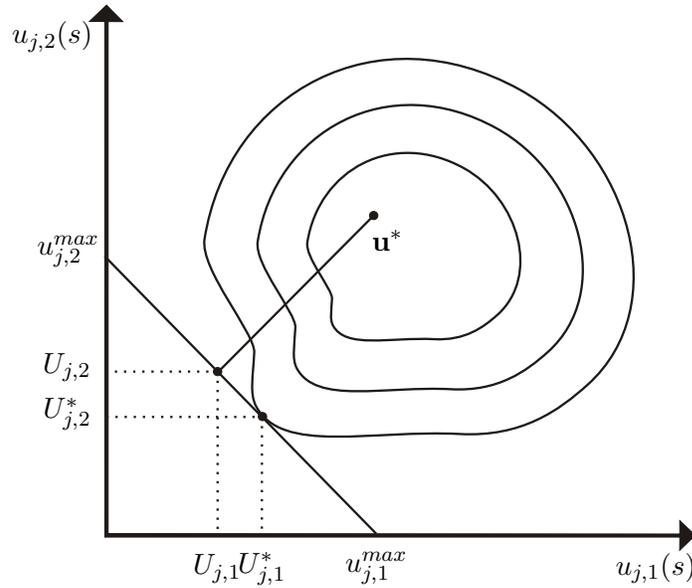
onde  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  são matrizes e vetores de dimensões apropriados.

### 3.4 Controle MPC de Frações de Verde

O controle LQR de frações de verde, apesar de eficiente, não garante a otimalidade da resposta calculada. Considere a Figura 3.1. Nela as curvas de nível representam o valor de uma função custo hipotética, a qual possui custo maior quanto mais afastada a curva se encontra do ponto de mínimo  $\mathbf{u}^*$ . Os eixos representam os tempos de verde das fases  $u_{j,1}$  e  $u_{j,2}$  de uma interseção bifásica  $j$  em um instante qualquer. Sabemos de (3.9b) que a soma dos tempos de verde com o tempo perdido total deve ser igual ao tempo de ciclo. Por simplicidade, vamos adotar a restrição  $U_{j,i} \in [u_{j,i}^{min}, u_{j,i}^{max}]$ , para todo  $i \in F_j$  como  $U_{j,i} > 0$ , para todo  $i \in F_j$ , sendo seu limite máximo o próprio ciclo da interseção. Dessa forma, os pontos contidos na reta unindo os dois eixos na Figura 3.1 formam o conjunto de sinais de controle factíveis. Note então, que o valor ótimo para o sinal de controle no instante atual é o ponto  $(U_{j,1}^*, U_{j,2}^*)$ , que não coincide com o ponto  $(U_{j,1}, U_{j,2})$ , solução de  $P_{LQR}$ .

Trabalhos recentes [1, 12, 38] apontam através de experimentos numéricos o controle preditivo baseado em modelo como uma alternativa capaz de contornar essas adversidades, pois esse permite considerar-se explicitamente as restrições do sistema, garantindo a otimalidade da solução encontrada para a iteração atual. Na aplicação às redes veiculares podemos utilizar a formulação MPC linear, apresentada na seção 3.3.1. Para tal usamos a equação de estados (2.5) como modelo de predição e, assumindo a não existência de informações, a variação da demanda futura constante a cada cálculo do sinal de controle é desconsiderada.

O sinal de controle é então computado pela solução, a cada tempo de ciclo, do seguinte



**Figura 3.1:** Solução ótima de uma interseção de duas fases.

problema de otimização:

$$P_{MPC} : \min_{\mathbf{u}} \sum_{n=1}^N [\mathbf{x}'(k+n|k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k+n|k) + \mathbf{u}'(k+n-1|k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k+n-1|k)] \quad (3.17a)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in F_j} u_{j,i}(n) + L_j = C_j, \quad n = 1, \dots, N \quad (3.17b)$$

$$u_{j,i}(n) \in [u_{j,i}^{min}, u_{j,i}^{max}], \quad \text{para todo } i \in F_j \text{ e } n = 1, \dots, N \quad (3.17c)$$

$$\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}_0 \quad (3.17d)$$

$$\mathbf{x}(k+n|k) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k+n-1|k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k+n-1|k), \quad n = 1, \dots, N \quad (3.17e)$$

onde por simplicidade e sem perda de generalidade adotamos  $N_2 = N_u = N$  e  $N_1 = 1$ . Note que as Equações (3.17b) e (3.17c) referem-se às restrições do modelo TUC, enquanto as Equações (3.17d) e (3.17e) garantem que a dinâmica do sistema seja respeitada.

### 3.5 Sumário

Nesse capítulo abordou-se o controle centralizado de porcentagens de verde e suas variantes. Inicialmente rememoramos a teoria do regulador linear quadrático, para, em seguida, ilustramos o funcionamento do módulo de controle de tráfego urbano da estratégia IN-TUC, o qual se baseia nesse tipo de controle. Pudemos entender o motivo pelo qual o sinal de controle obtido por esse controlador pode ser melhorado e vislumbramos uma alternativa para fazê-lo. A alternativa apresentada foi o controle MPC de frações de verde. Depois de

---

recapitulados os fundamentos do controle preditivo uma transformação para problemas lineares com restrições quadráticas foi apresentada. Nela o problema de otimização do controle MPC é convertido em um problema de programação quadrática, facilmente tratável. Então, com a aplicação dessa transformação, formulou-se uma estratégia MPC considerando explicitamente as restrições intrínsecas do modelo TUC para o cálculo dos percentuais de verde em malhas viárias urbanas.



## Capítulo 4

# Controle Distribuído de Frações de Verde

*Life is too short for traffic.*

*Dan Bellack*

Inicialmente, apresenta-se neste capítulo uma formulação MPC para a solução de redes modeladas por um grafo direto onde os nós representam subsistemas e os arcos acoplamentos dinâmicos entre os mesmos. O estado local de um subsistema evolui de acordo com uma dinâmica linear discreta que depende do próprio estado local, sinais de controle locais e sinais de controle de subsistemas de entrada. O controle de frações de verde de uma MVU insere-se diretamente nesse contexto ao observarmos que uma malha viária pode ser tratada como diversos subsistemas conectados, sendo cada um composto por uma interseção. A solução do problema MPC quadrático,  $P$ , é então decomposta em uma série de subproblemas menores resolvidos iterativamente por uma rede de agentes. Propõe-se ainda um algoritmo baseado no método de direções factíveis para o cômputo das iterações entre os agentes. Finalmente, comprova-se o relativo baixo esforço requerido pelas iterações locais e, apesar da alta comunicação entre os subsistemas e menor velocidade, sua convergência à solução de  $P$ .

### 4.1 Formulação do Problema

O problema consiste em um sistema de  $M$  subsistemas interligados, ao qual chamamos de rede, onde cada subsistema  $m$  possui um vetor de estados local  $\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{n_m}$  e um vetor de controle local  $\mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^{p_m}$ . Os acoplamentos entre os subsistemas são modelados através de um grafo direcionado  $G = (V, E)$  onde o conjunto de vértices  $V = \{1, \dots, M\}$  representa

os subsistemas e o conjunto de arcos  $E \subseteq V \times V$  representa os acoplamentos: um arco  $(i, j) \in E$  indica que os sinais de controle do subsistema  $i$  influenciam o estado do subsistema  $j$  diretamente. O modelo em tempo discreto para o subsistema  $m$  é descrito por:

$$\mathbf{x}_m(k+1) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(k) + \sum_{i \in I(m)} \mathbf{B}_{mi} \mathbf{u}_i(k) \quad (4.1)$$

onde  $I(m) = \{m\} \cup \{i : (i, m) \in E\}$  é o conjunto dos *vizinhos de entrada* do subsistema  $m$ , incluindo o próprio, ou seja, os subsistemas que afetam o estado de  $m$ .

Para o caso de redes urbanas o vetor de estados  $\mathbf{x}_m$  representa o número de veículos nas aproximações da interseção  $j = m$  enquanto o vetor de controle  $\mathbf{u}_m$  engloba os tempos de verde da mesma. Como exemplo considere a MVU representada na Fig. 4.1, composta por 13 vias de mão única e 6 interseções. O vetor de estados do subsistema 3 é  $\mathbf{x}_3 = (x_6, x_7)$  e estima o número de veículos nas vias 6 e 7, já o vetor de sinais de controle,  $\mathbf{u}_3 = (u_6, u_7)$ , indica como o tempo de verde da interseção 3 é dividido entre cada via.

O grafo de acoplamento  $G$  é apresentado na Fig. 4.2. Percebe-se então que o conjunto de vizinhos de entrada do subsistema 3 é  $I(3) = \{1, 3, 4\}$ . Dessa forma, segundo o modelo apresentado em (4.1), esse subsistema seria composto por três matrizes de controle, relacionando a influência das interseções vizinhas e da própria. A matriz  $\mathbf{B}_{33}$  expressa a dinâmica de descarga dos veículos representados por  $\mathbf{x}_3$  em função dos tempos de verde  $\mathbf{u}_3$ , enquanto as matrizes  $\mathbf{B}_{31}$  e  $\mathbf{B}_{34}$  indicam como esses veículos incrementam os estados  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_4$  respectivamente. Mais especificamente,

$$\mathbf{B}_{33} = T \begin{bmatrix} -\frac{S_6}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{S_7}{C} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{31} = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t_{8,7} \frac{S_8}{C} & t_{9,7} \frac{S_9}{C} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{34} = T \begin{bmatrix} t_{1,6} \frac{S_1}{C} & t_{2,6} \frac{S_2}{C} & t_{3,6} \frac{S_3}{C} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $T$  é o intervalo de discretização em segundos,  $S_z$  é o fluxo de saturação da via  $z$  em veículos por segundo,  $C$  é o tempo de ciclo também em segundos e  $t_{z,w}$  indica a taxa de veículos provenientes de  $z$  em direção a  $w$ .

As matrizes de controle agregam informações relevantes. Através delas podemos concluir que apenas os tempos de verde  $u_6$  e  $u_7$  influenciam a descarga de veículos relativos ao subsistema 3, o qual abrange as vias 6 e 7. Outra importante constatação se dá ao percebermos que veículos deixando a interseção 1 crescem o estado 6, mas não 7, assim como veículos partindo da interseção 4 podem apenas influenciar o tráfego na via 7 e não em 6.

O problema MPC global minimiza uma função custo quadrática sujeita as restrições e

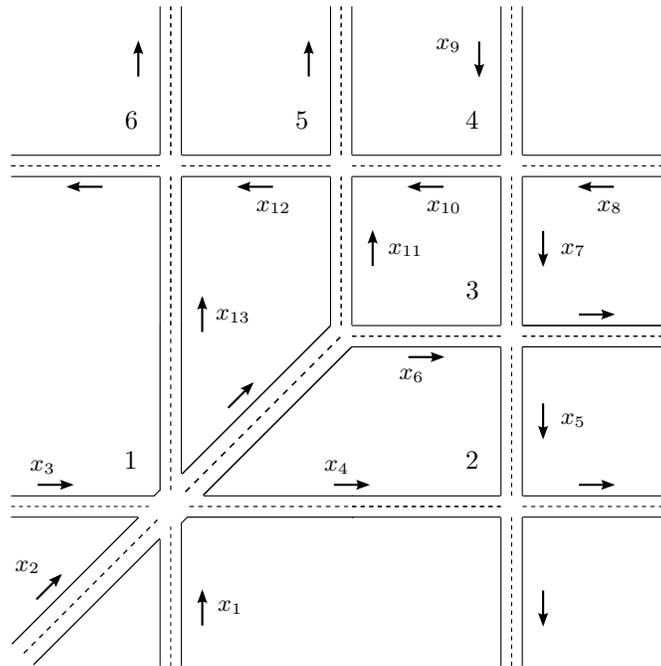


Figura 4.1: Malha viária urbana exemplo composta por  $M = 6$  subsistemas (interseções).

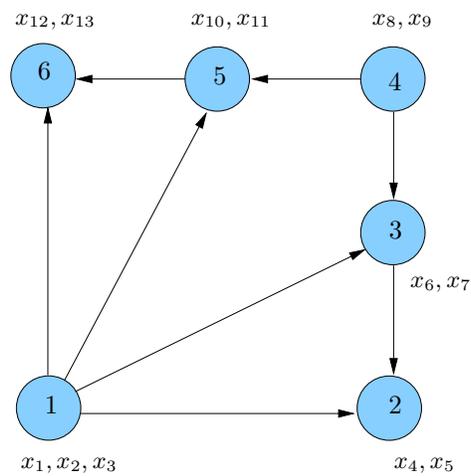


Figura 4.2: Grafo de acoplamento para a rede exemplo.

dinâmica do sistema. Dado o estado atual da rede,  $\mathbf{x}_0$ , esse problema é escrito como:

$$P : \quad \min \sum_{m=1}^M J_m(k) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [\mathbf{x}_m(k+n | k)' \mathbf{Q}_m \mathbf{x}_m(k+n | k) + \mathbf{u}_m(k+n-1 | k)' \mathbf{R}_m \mathbf{u}_m(k+n-1 | k)] \quad (4.2a)$$

sujeito a:

$$\mathbf{x}(k | k) = \mathbf{x}_0 \quad (4.2b)$$

$$\mathbf{x}_m(k+n | k) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(k+n-1 | k) + \sum_{i \in \mathcal{I}(m)} \mathbf{B}_{mi} \mathbf{u}_i(k+n-1 | k) \quad (4.2c)$$

$$\mathbf{C}_m \mathbf{u}_m(k+n | k) \geq \mathbf{c}_m, \quad m \in M, \quad n \in N \quad (4.2d)$$

$$\mathbf{D}_m \mathbf{u}_m(k+n | k) = \mathbf{d}_m, \quad m \in M, \quad n \in N \quad (4.2e)$$

onde:  $\mathbf{x}_m(k+n | k)$  é o estado previsto no instante  $k$  do subsistema  $m$  para o instante  $k+n$  e  $\mathbf{u}_m(k+n | k)$  sua entrada de controle prevista para o mesmo instante;  $\mathbf{Q}_m$  é positiva semi-definida e  $\mathbf{R}_m$  positiva definida;  $\mathbf{C}_m$  e  $\mathbf{c}_m$  definem as restrições de desigualdade<sup>1</sup>, utilizadas nas restrições de tempo de verde mínimo;  $\mathbf{D}_m$  e  $\mathbf{d}_m$  definem as restrições de igualdade, as quais permitem a imposição de tempo de ciclo fixo;  $N = \{1, \dots, N\}$  define os horizontes de predição e controle, iguais por simplicidade; e  $M = \{1, \dots, M\}$  é o conjunto contendo os índices dos subsistemas.

Assim como no controle MPC centralizado de tempos de verde o problema de otimização  $P$  pode ser simplificado através da eliminação das variáveis de estado. Podemos perceber que o estado do subsistema  $m$  no instante  $k$  é função do estado inicial e dos sinais de controle anteriores a esse instante, isto é,

$$\mathbf{x}_m(k) = \mathbf{A}_m^k \mathbf{x}_m(0) + \sum_{l=1}^k \sum_{i \in \mathcal{I}(m)} \mathbf{A}_m^{k-l} \mathbf{B}_{mi} \mathbf{u}_i(k-l),$$

e utilizando esta relação podemos agrupar as previsões futuras dos estados no vetor  $\bar{\mathbf{x}}_m$  e os valores futuros do sinal de controle no vetor  $\bar{\mathbf{u}}_m$ , como segue:

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(k+1 | k) \\ \mathbf{x}_m(k+2 | k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m(k+N | k) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{u}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_m(k | k) \\ \mathbf{u}_m(k+1 | k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m(k+N-1 | k) \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>A restrição de tempo de verde máximo é desconsiderada nesse modelo. Basta percebermos que ao impormos um ciclo fixo e limites mínimos ao tempo de verde de cada uma das fases o tempo de verde máximo permissível das mesmas fica automaticamente estipulado.

e definindo as matrizes:

$$\bar{\mathbf{A}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_m \\ \mathbf{A}_m^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m^{N-1} \\ \mathbf{A}_m^N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{B}}_{mi} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_m \mathbf{B}_{mi} & \mathbf{B}_{mi} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_m^{N-2} \mathbf{B}_{mi} & \mathbf{A}_m^{N-3} \mathbf{B}_{mi} & \mathbf{A}_m^{N-4} \mathbf{B}_{mi} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_m^{N-1} \mathbf{B}_{mi} & \mathbf{A}_m^{N-2} \mathbf{B}_{mi} & \mathbf{A}_m^{N-3} \mathbf{B}_{mi} & \dots & \mathbf{B}_{mi} \end{bmatrix}$$

pode-se então verificar que os valores futuros estimados dos estados podem ser obtidos através da relação

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \bar{\mathbf{A}}_m \mathbf{x}_m(k | k) + \sum_{i \in I(m)} \bar{\mathbf{B}}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i \quad (4.3)$$

e sendo as matrizes  $\bar{\mathbf{Q}}_m = I_{N \times N} \otimes \mathbf{Q}_m$  e  $\bar{\mathbf{R}}_m = I_{N \times N} \otimes \mathbf{R}_m$  a função objetivo  $J_m$  é expressa como:

$$\begin{aligned} J_m(k) &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}_m' \bar{\mathbf{Q}}_m \bar{\mathbf{x}}_m + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' \bar{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{u}}_m \\ &= \frac{1}{2} \left[ \bar{\mathbf{A}}_m \mathbf{x}_{m0} + \sum_{i \in I(m)} \bar{\mathbf{B}}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i \right]' \bar{\mathbf{Q}}_m \left[ \bar{\mathbf{A}}_m \mathbf{x}_{m0} + \sum_{i \in I(m)} \bar{\mathbf{B}}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i \right] + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' \bar{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{u}}_m \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{m0}' \bar{\mathbf{A}}_m' \bar{\mathbf{Q}}_m \bar{\mathbf{A}}_m \mathbf{x}_{m0} + \sum_{i \in I(m)} \mathbf{x}_{m0}' \bar{\mathbf{A}}_m' \bar{\mathbf{Q}}_m \bar{\mathbf{B}}_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i \in I(m)} \sum_{j \in I(m)} \bar{\mathbf{u}}_i' \bar{\mathbf{B}}_{mi}' \bar{\mathbf{Q}}_m \bar{\mathbf{B}}_{mj} \bar{\mathbf{u}}_j + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}_m' \bar{\mathbf{R}}_m \bar{\mathbf{u}}_m \end{aligned} \quad (4.4)$$

de forma que os termos de  $J_m$  dependem exclusivamente das variáveis de controle e da condição inicial  $\mathbf{x}_{m0} = \mathbf{x}(k | k)$ . Podemos ainda perceber que o primeiro termo de (4.4) é constante e pode ser desconsiderado no processo de otimização.

O problema  $P$  pode então ser escrito em termos de  $\bar{\mathbf{u}}_m$  ao representarmos  $J_m$  pela equação (4.4), utilizarmos a relação (4.3) e realizar as seguintes substituições:

$$\mathbf{g}_{mi} = \bar{\mathbf{B}}_{mi}' \bar{\mathbf{Q}}_m \bar{\mathbf{A}}_m \mathbf{x}_{m0} \quad \text{para } i \in I(m) \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{H}_{mij} = \bar{\mathbf{B}}_{mi}' \bar{\mathbf{Q}}_m \bar{\mathbf{B}}_{mj} \quad \text{para } i, j \in I(m), \text{ sendo } i \neq m \text{ ou } j \neq m \quad (4.5b)$$

$$\mathbf{H}_{mmm} = \bar{\mathbf{B}}_{mm}' \bar{\mathbf{Q}}_m \bar{\mathbf{B}}_{mm} + \bar{\mathbf{R}}_m \quad (4.5c)$$

Chegamos então a seguinte formulação, equivalente ao problema  $P$ , porém mais propícia

para a solução numérica:

$$\hat{P} : \quad \min f(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \sum_{m \in M} \sum_{i \in I(m)} \sum_{j \in I(m)} \bar{\mathbf{u}}_i' \mathbf{H}_{mij} \bar{\mathbf{u}}_j + \sum_{m \in M} \sum_{i \in I(m)} \mathbf{g}'_{mi} \bar{\mathbf{u}}_i \quad (4.6a)$$

sujeito a:

$$\bar{\mathbf{C}}_m \bar{\mathbf{u}}_m \geq \bar{\mathbf{c}}_m, \quad m \in M \quad (4.6b)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_m \bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{d}}_m, \quad m \in M \quad (4.6c)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_M)$  agrupa as variáveis de controle dos subsistemas ao longo do horizonte; e ainda:

$$\bar{\mathbf{C}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_m & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_m \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_m & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_m \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{c}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_m \\ \mathbf{c}_m \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{d}}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_m \\ \mathbf{d}_m \\ \vdots \\ \mathbf{d}_m \end{bmatrix}$$

de forma que a matriz  $\bar{\mathbf{C}}_m$  e o vetor  $\bar{\mathbf{c}}_m$  definem as restrições de desigualdade ao longo de todo o horizonte de controle—ou os limites mínimos de tempos de verde para cada fase, onde  $\mathbf{C}_m$  e  $\mathbf{c}_m$  são definidos de maneira análoga ao caso de controle MPC centralizado—e a matriz  $\bar{\mathbf{D}}_m$  e o vetor  $\bar{\mathbf{d}}_m$  definem as restrições de igualdade durante o mesmo intervalo—ou seja, a imposição de tempo de ciclo fixo, sendo também  $\mathbf{D}_m$  e  $\mathbf{d}_m$  definidos de maneira equivalente ao caso anterior.

## 4.2 Controle DMPC de Frações de Verde

Nesta seção discorre-se sobre a solução do problema  $\hat{P}$  por uma rede de agentes distribuídos onde cada agente  $m$  se responsabiliza pelo sinal de controle  $\bar{\mathbf{u}}_m$  de controle do subsistema  $m$  em contrapartida a um controle centralizado [7]. Para tanto precisamos primeiro decompor o problema  $\hat{P}$  em uma rede de subproblemas acoplados  $\{\hat{P}_m\}$ . Uma vez estabelecida a decomposição o algoritmo iterativo distribuído para a solução do problema é então ilustrado.

### 4.2.1 Decomposição do Problema Centralizado

Para uma decomposição perfeita do problema  $\hat{P}$ , o problema de otimização local resolvido pelo agente  $m$  deve abranger todos os termos de  $f$  e restrições que dependam de  $\bar{\mathbf{u}}_m$ . Antes disso, considere as definições a seguir:

- o conjunto  $O(m) = \{i : m \in I(i), i \neq m\}$  define os *vizinhos de saída* do subsistema  $m$ ;

- $C(m) = \{(i, j) \in I(m) \times I(m) : \text{sendo } i = m \text{ ou } j = m\}$  agrupa os pares de subsistemas cujos termos quadráticos em  $J_m$  envolvem o controle  $\bar{\mathbf{u}}_m$ ;
- $C(m, k) = \{(i, j) \in I(k) \times I(k) : \text{sendo } i = m \text{ ou } j = m\}$  agrupa os pares de subsistemas cujos termos quadráticos em  $J_k$ , sendo que  $k \in O_m$  envolvem o controle  $\bar{\mathbf{u}}_m$ .

Para ilustrá-las vamos tomar como exemplo a rede de tráfego ilustrada na Fig. 4.1. Temos que  $I(1) = \{1\}$ ,  $O(1) = \{2, 3, 5, 6\}$ ,  $C(1) = \{(1, 1)\}$  e  $C(1, 3) = \{(1, 3), (1, 4), (1, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ . É importante ainda percebermos que  $\bar{\mathbf{u}}_m$  aparece nos subsistemas  $i$  que compõem o conjunto  $I_m \cup O_m$ , mas também pode estar acoplado a outros subsistemas que não estejam listados nesse conjunto—por exemplo, o subsistema 1 é acoplado ao subsistema 4 através do sistema 3, sendo que o subsistema 4 não pertence ao conjunto  $I_1 \cup O_1$ . Essa interdependência entre os subsistemas será mais bem estabelecida pela noção de vizinhança. De acordo essa noção as variáveis de controle são divididas em grupos relativos à perspectiva do agente  $m$ :

**Variáveis Locais:** Todas as variáveis do vetor  $\bar{\mathbf{u}}_m$ ;

**Variáveis Vizinhas:** São as variáveis do vetor  $\bar{\mathbf{y}}_m = (\bar{\mathbf{u}}_i : i \in N(m))$ , onde  $N(m) = I(m) \cup \{i : (i, j) \in C(m, k), k \in O(m)\} - \{m\}$  é a vizinhança do agente  $m$ , note que  $O(m) \subseteq N(m)$ , ou seja  $N(m)$  abrange vizinhos de entrada e saída.

**Variáveis Exógenas:** As outras variáveis, que compõem o vetor  $\bar{\mathbf{z}}_m = (\bar{\mathbf{u}}_i : i \notin N(m) \cup \{m\})$ .

Para uma decomposição perfeita o problema  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m)$  deve ser obtido a partir de  $\hat{P}$  i) descartando da função objetivo  $f$  os termos que não envolvem  $\bar{\mathbf{u}}_m$  e ii) desconsiderando as restrições não associadas ao agente  $m$ . Formalmente o problema local do agente  $m$  é:

$$\begin{aligned} \hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m) : \quad \min \quad f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{y}}_m) = & \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in C(m)} \bar{\mathbf{u}}_i' \mathbf{H}_{mij} \bar{\mathbf{u}}_j + \mathbf{g}'_{mm} \bar{\mathbf{u}}_m \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \in O(m)} \sum_{(i,j) \in C(m,k)} \bar{\mathbf{u}}_i' \mathbf{H}_{kij} \bar{\mathbf{u}}_j + \sum_{i \in O(m)} \mathbf{g}'_{im} \bar{\mathbf{u}}_m \end{aligned} \quad (4.7a)$$

sujeito a:

$$\bar{\mathbf{C}}_m \bar{\mathbf{u}}_m \geq \bar{\mathbf{c}}_m \quad (4.7b)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_m \bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{d}}_m \quad (4.7c)$$

Definindo as expressões

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_m &= \frac{1}{2} \sum_{(i,m) \in C(m): i \neq m} (\mathbf{H}'_{mim} + \mathbf{H}_{mmi}) \bar{\mathbf{u}}_i + \mathbf{g}_{mm} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in O(m)} \sum_{(i,m) \in C(m): i \neq m} (\mathbf{H}'_{kim} + \mathbf{H}_{kmi}) \bar{\mathbf{u}}_i + \sum_{k \in O(m)} \mathbf{g}_{km} \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H}_{mmm} + \sum_{k \in O(m)} \mathbf{H}_{kmm} \quad (4.8b)$$

e substituindo (4.8a) e (4.8b) em  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m)$  chegamos à seguinte formulação, mais simplificada,

$$\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m) : \quad \min f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{y}}_m) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}'_i \mathbf{H}_m \bar{\mathbf{u}}_j + \mathbf{g}'_m \bar{\mathbf{u}}_m \quad (4.9a)$$

sujeito a:

$$\bar{\mathbf{C}}_m \bar{\mathbf{u}}_m \geq \bar{\mathbf{c}}_m \quad (4.9b)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_m \bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{d}}_m \quad (4.9c)$$

Em essência, a decomposição perfeita implica que para qualquer agente  $m$  existe uma função  $\bar{f}_m(\bar{\mathbf{y}}_m, \bar{\mathbf{z}}_m)$ , tal que:

$$f(\bar{\mathbf{u}}) = f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{y}}_m) + \bar{f}_m(\bar{\mathbf{y}}_m, \bar{\mathbf{z}}_m)$$

Vejamos agora alguns resultados, encontrados em [6], relacionando  $\hat{P}$  ao conjunto  $\{P_m(\bar{\mathbf{y}}_m)\}$ , ou seja os subproblemas  $m$  pertencentes a  $M$ .

**Proposição 4.1.** *A solução  $\bar{\mathbf{u}}$  satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem Karush-Kuhn-Tucker para  $\hat{P}$  se, e somente se,  $(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{y}}_m)$  satisfaz as condições KKT para  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m)$  para todo  $m \in M$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\bar{\mathbf{u}}$  satisfaça as condições KKT para  $\hat{P}$ , então existem vetores de multiplicadores Lagrangeanos  $\lambda_m^=$  e  $\lambda_m^>$  para todo  $m \in M$ , tal que as seguintes equações são satisfeitas:

$$\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{D}}'_m \lambda_m^= - \bar{\mathbf{C}}'_m \lambda_m^> \quad (4.10)$$

$$\bar{\mathbf{C}}'_m \bar{\mathbf{u}}_m - \bar{\mathbf{c}}_m \geq 0 \quad (4.11)$$

$$\bar{\mathbf{D}}'_m \bar{\mathbf{u}}_m - \bar{\mathbf{d}}_m = 0 \quad (4.12)$$

$$\lambda_m^> \geq 0 \quad (4.13)$$

$$(\bar{\mathbf{C}}'_m \bar{\mathbf{u}}_m)' \lambda_m^> = 0 \quad (4.14)$$

e ainda que  $\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f(\bar{\mathbf{u}}) = \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} (f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{y}}_m) + \bar{f}_m(\bar{\mathbf{y}}_m, \bar{\mathbf{z}}_m)) = \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{y}}_m)$ , portanto:

$$\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m, \bar{\mathbf{y}}_m) = \bar{\mathbf{D}}'_m \lambda_m^= - \bar{\mathbf{C}}'_m \lambda_m^{\geq} \quad (4.15)$$

A equação (4.15), juntamente com as equações (4.11) e (4.14) são precisamente as condições KKT para  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m)$ . A outra direção pode ser argüida da mesma maneira.  $\square$

**Definição 4.1** (Espaços Factíveis). *Os conjuntos a seguir definem os espaços factíveis:*

- $U_m = \{\bar{\mathbf{u}}_m : \bar{\mathbf{C}}_m \bar{\mathbf{u}}_m \geq \bar{\mathbf{c}}_m, \bar{\mathbf{D}}_m \bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{d}}_m\}$  é o espaço factível de  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m)$ ;
- $U = U_1 \times \dots \times U_M$  é o espaço factível de  $P$ ; e
- $Y_m = \times_{i \in N(m)} U_i$  é o espaço factível para as variáveis vizinhas do agente  $m$ .

**Hipótese 4.1** (Compacidade). *O espaço factível  $U$  é um conjunto compacto.*

**Hipótese 4.2** (Factibilidade Estrita). *Existe  $\bar{\mathbf{u}} \in U$  tal que  $\bar{\mathbf{C}}_m \bar{\mathbf{u}}_m > \bar{\mathbf{c}}_m$  e  $\bar{\mathbf{D}}_m \bar{\mathbf{u}}_m = \bar{\mathbf{d}}_m$  para todo  $m \in M$ .*

A hipótese de compacidade é plausível, uma vez que sinais de controle são, invariavelmente, limitados. Da mesma forma a hipótese de factibilidade estrita: se o interior de  $U$  é vazio, então algumas inequações são na verdade igualdades e devem ser consideradas como tal.

**Proposição 4.2.** *O problema  $\hat{P}$  é convexo.*

*Demonstração.* O problema  $\hat{P}$  possui um espaço factível convexo, dado pelo poliedro induzido pelas constantes (4.6b) e (4.6c). Seja  $f_P$  a função objetivo de  $P$  podemos representá-la como  $f_P = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}}' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{u}}$  para matrizes apropriadas  $\bar{\mathbf{Q}}$  e  $\bar{\mathbf{R}}$ , onde  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_1, \dots, \bar{\mathbf{x}}_M)$  e  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{\mathbf{u}}_1, \dots, \bar{\mathbf{u}}_M)$ . A relação (4.3) é representada por  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{z}}$  para uma matriz apropriada  $\bar{\mathbf{Z}}$  e um vetor  $\bar{\mathbf{z}}$ . Claramente,  $f_P = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{z}})' \bar{\mathbf{Q}} (\bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{z}}) + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}' \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}' (\bar{\mathbf{Z}}' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Z}} + \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{g}}' \bar{\mathbf{u}} + c$  para algum  $\bar{\mathbf{g}}$  e  $c$ . Sabemos que a função  $f_P$  é estritamente convexa pois a matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  é semidefinida positiva, bem como a matriz  $\bar{\mathbf{R}}$  definida positiva. Dessa forma,  $\hat{P}$  é convexa, pois sua função objetivo  $f$  equivale a  $f_P - c$ .  $\square$

**Corolário 4.1.** *O subproblema  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m)$  é convexo.*

**Proposição 4.3** (Condições de Otimalidade). *Como  $f$  é uma função convexa e  $U$  um conjunto convexo,  $\bar{\mathbf{u}}^*$  é um mínimo local para  $f$  em  $U$  se, e somente se [3]:*

$$\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^*)' (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}^*) \geq 0, \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in U \quad (4.16)$$

Um ponto  $\bar{\mathbf{u}}^*$  que satisfaça a condição (4.16) é chamado *ponto estacionário*.

**Corolário 4.2** (Condições de Otimalidade Local).  $\bar{\mathbf{u}}^*$  é um mínimo local para  $\hat{P}$  se, e somente se,  $(\bar{\mathbf{u}}_m^*, \bar{\mathbf{y}}_m^*)$  é um mínimo local para  $P_m(\bar{\mathbf{y}}_m^*)$  para todo  $m \in M$ .

*Demonstração.* Suponha que  $\bar{\mathbf{u}}^*$  é um mínimo local para  $\hat{P}$  tal que  $(\bar{\mathbf{u}}_m^*, \bar{\mathbf{y}}_m^*)$  não seja um mínimo local de  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^*)$ . Então  $\nabla_{\hat{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^*, \bar{\mathbf{y}}_m^*)'(\hat{\mathbf{u}}_m - \bar{\mathbf{u}}_m^*) < 0$  para algum  $\hat{\mathbf{u}}_m \in U_m$ . Sabemos que  $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{\mathbf{u}}_1^*, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{m-1}^*, \hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\mathbf{u}}_{m+1}^*, \dots, \hat{\mathbf{u}}_M^*) \in U$ . E ainda que  $\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^*)'(\hat{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}^*) = \sum_{i \in M} \nabla_{\hat{\mathbf{u}}_i} f(\bar{\mathbf{u}}^*)'(\hat{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i^*) = \sum_{i \in M} \nabla_{\hat{\mathbf{u}}_i} f_i(\bar{\mathbf{u}}_i^*, \bar{\mathbf{y}}_i^*)'(\hat{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_i^*) = \nabla_{\hat{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^*, \bar{\mathbf{y}}_m^*)'(\hat{\mathbf{u}}_m - \bar{\mathbf{u}}_m^*) < 0$ . Então  $\bar{\mathbf{u}}^*$  não é um mínimo local de  $\hat{P}$ , contradizendo a hipótese. A prova no sentido oposto é imediata.  $\square$

#### 4.2.2 Algoritmo Distribuído de Otimização

A decomposição do problema  $\hat{P}$  nos permite resolver o conjunto de subproblemas  $\{P_m\}$  através de uma rede de agentes distribuídos, onde cada agente é responsável por um subproblema  $m$ , em detrimento a solução centralizada de  $\hat{P}$ . No decorrer dessa seção apresenta-se um algoritmo distribuído para a convergência dessa rede de agentes a uma solução estacionária. Os agentes utilizam um protocolo iterativo de solução onde  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)} = (\bar{\mathbf{u}}_1^{(r)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}_M^{(r)})$  denota a solução na iteração  $r$ . Partindo de um vetor de controle factível  $\bar{\mathbf{u}}^{(0)}$ , os agentes trocam informações localmente, sincronizam seus cálculos a fim de evitar que agentes acoplados atuem simultaneamente e iteram até a convergência à solução ótima.

**Hipótese 4.3** (Trabalho Síncrono). *Se um agente  $m$  atualiza a sua decisão na iteração  $r$ , então:*

- (i) *o agente  $m$  usa  $\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)} = (\bar{\mathbf{u}}_i^{(r)} : i \in N(m))$  para obter uma solução aproximada para  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$ , que se torna  $\bar{\mathbf{u}}_m^{(r+1)}$ ;*
- (ii) *todos os agentes na vizinhança do agente  $m$  mantêm suas decisões durante a iteração  $r$ , isto é,  $\bar{\mathbf{u}}_i^{(r+1)} = \bar{\mathbf{u}}_i^{(r)}$  para todo  $i \in N(m)$ .*

**Hipótese 4.4** (Trabalho Contínuo). *Se  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  não é um ponto estacionário para todos os subproblemas em  $\{\hat{P}_m\}$ , então ao menos um agente  $m$  atualiza suas decisões de  $\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}$  para  $\bar{\mathbf{u}}_m^{(r+1)}$  através da solução aproximada do problema  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  tal que  $\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}$  não é um ponto estacionário de  $\hat{P}_m$ .*

A condição (ii) da Hipótese 4.3 e a Hipótese 4.4 são garantidas se os agentes iteram em uma seqüência apropriada  $\langle S_1, \dots, S_l \rangle$  onde  $S_i \subseteq M$ ,  $\cup_{i=1}^l S_i = M$ , e todos os pares distintos  $m, n \in S_i$  são não vizinhos para todo  $i$ . Um exemplo de tal seqüência para a malha viária exemplo é  $\langle S_1, S_2, S_3 \rangle$ , sendo  $S_1 = \{2, 4, 6\}$ ,  $S_2 = \{3, 5\}$  e  $S_3 = \{1\}$ . Seqüências variantes no tempo e protocolos de sincronização são uma alternativa, porém essas não serão abordadas.

Um ponto fundamental na solução distribuída é como um agente  $m$  calcula uma solução aproximada de  $\hat{P}_m$ , proposta na condição (i) da Hipótese 4.3, de forma que  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  convirja para um ponto estacionário de  $\{\hat{P}_m\}$ . Com esta finalidade focaremos nossa atenção durante o restante dessa seção em um algoritmo baseado no método de direção factível, desenvolvido em [6]. Trabalhos relacionados e algoritmos para outras configurações aparecem em outros trabalhos de Camponogara et al., como [8, 9].

### Método de Direções Factíveis

Na iteração atual  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ , o método computa uma direção de descenso factível  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)} = \hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  resolvendo o problema de programação linear que minimiza a função objetivo  $\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})' \hat{\mathbf{u}}^{(r)}$ , sujeito às suas restrições originais. O novo iterando  $\bar{\mathbf{u}}^{(r+1)} = \bar{\mathbf{u}}^{(r)} + \alpha^{(r)} \bar{\mathbf{d}}^{(r)}$  é encontrado a partir do passo  $\alpha^{(r)}$  que satisfaz a *Regra de Armijo*. O método de direções factíveis distribuído é detalhado a seguir.

**Definição 4.2** (Direção Factível de Descenso). *Seja  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)} \in \mathbf{U}$  o valor atual do vetor de controle,  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)} \neq \mathbf{0}$ , é uma direção factível em  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  se  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)} + \alpha \bar{\mathbf{d}}^{(r)} \in \mathbf{U}$  para todo  $\alpha > 0$  suficientemente pequeno. Uma direção factível  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$  em um ponto não estacionário  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  é uma direção de descenso se  $\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})' \bar{\mathbf{d}}^{(r)} < 0$ .*

**Definição 4.3** (Direção Factível de Descenso Local). *Dado que  $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}) \in \mathbf{U}_m \times \mathbf{Y}_m$ ,  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} \neq \mathbf{0}$ , é uma direção factível local em  $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  se  $\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)} + \alpha_m \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} \in \mathbf{U}_m$  para todo  $\alpha_m > 0$  arbitrariamente pequeno. Uma direção factível local  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}$  em um ponto não estacionário  $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  é uma direção de descenso local se  $\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})' \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} < 0$ .*

A partir deste ponto, direções de descenso, locais ou não, denotarão direções de descenso factíveis.

**Proposição 4.4.** *Dado que  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)} = (\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{z}}_m^{(r)}) \in \mathbf{U}$ , uma direção de descenso local  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}$  para o par  $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  induz uma direção de descenso  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)} = (\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  em  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ .*

*Demonstração.* Como  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}$  é localmente factível,  $\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)} + \alpha_m \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} \in \mathbf{U}_m$  para todo  $\alpha_m > 0$  suficientemente pequeno, então  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)} + \alpha (\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \in \mathbf{U}_m \times \mathbf{Y}_m \times \mathbf{Z}_m$  para todo  $\alpha > 0$  suficientemente pequeno, logo  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$  é uma direção factível em  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ . Como  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}$  é uma direção de descenso local,  $\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})' \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} < 0$  implica

$$(\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}), \nabla_{\bar{\mathbf{y}}_m} f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)}), \nabla_{\bar{\mathbf{z}}_m} \bar{f}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{z}}_m^{(r)}))' (\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) < 0,$$

que por sua vez implica em  $\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^k)' \bar{\mathbf{d}}^{(r)} < 0$ , logo  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$  é uma direção de descenso em  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ .  $\square$

Ou seja, a proposição 4.4 garante que uma direção de descenso local é necessariamente uma direção de descenso global. Existe uma maneira equivalente de definição de direções de

descenso factíveis para problemas convexos que simplifica o desenvolvimento do algoritmo. Os detalhes expostos considerarão direções para o problema global, porém são facilmente deduzidos para direções locais. As direções factíveis  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$  em  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  são vetores da forma:

$$\bar{\mathbf{d}}^{(r)} = \gamma(\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}), \quad \gamma > 0$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}^{(r)} \in U$  é um ponto factível diferente de  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ . O seguinte processo é usado na geração dos iterandos:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(r+1)} = \bar{\mathbf{u}}^{(r)} + \alpha^{(r)}(\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}) \quad (4.17)$$

onde  $\alpha^{(r)} \in (0, 1)$ ,  $\hat{\mathbf{u}}^{(r)} \in U$ , e se  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  é não estacionário:

$$\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'(\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}) < 0$$

O próximo iterando  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)} + \alpha^{(r)}(\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}) \in U$  para todo  $\alpha^{(r)} \in (0, 1)$  uma vez que  $U$  é convexo e  $\hat{\mathbf{u}}^{(r)}, \bar{\mathbf{u}}^{(r)} \in U$ . Dessa forma, todos os iterandos da seqüência  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  são factíveis. Se  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  é não estacionário, existe  $\hat{\mathbf{u}}^{(r)} \in U$  que induz uma direção de descenso, ou então  $\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}) \geq 0, \forall \bar{\mathbf{u}} \in U$ .

Além do cômputo das direções de descenso, as quais são normalmente dependentes da configuração do problema e serão discutidas a fundo mais tarde, a seleção do tamanho do passo é crítica para a convergência a um ponto estacionário. Dentre as possíveis regras existentes para a seleção do tamanho do passo a elegida foi a *Regra de Armijo* devido a sua simplicidade. Essa regra fixa parâmetros escalares  $\beta, \sigma \in (0, 1)$  e define o tamanho do passo como  $\alpha^{(r)} = \beta^{s_k}$  onde  $s_k$  é o menor inteiro não negativo  $s$  para o qual:

$$f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)} + \beta^s(\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)})) \leq f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)}) + \sigma\beta^s\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'(\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}) \quad (4.18)$$

A regra afirma que a redução em  $f$  deve ser proporcional tanto ao tamanho do passo  $\beta^s$ , quanto à derivada  $\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(k)})'\bar{\mathbf{d}}^{(k)}$  da direção de descenso  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)} = \hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ . O procedimento de rastreamento—*backtracking*—se inicia com um passo suficientemente grande,  $\beta^0 = 1$ , possibilitando o descarte de uma segunda condição sobre a curvatura de  $f$ , a qual impediria pequenos passos de satisfazerem a condição de Armijo.

Um ponto de fundamental importância é sabermos se cada ponto limite da seqüência  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  gerada pelo método de direções factíveis é um ponto estacionário. Realizando a expansão de Taylor de primeira ordem temos que  $f(\bar{\mathbf{u}}^{(r+1)}) = f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)}) + \alpha^{(r)}\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$ . Se a inclinação de  $f$  em  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  na direção  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$ , que é dada por  $\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$ , tem *magnitude substancial*, a taxa de convergência do método também o é. No entanto, caso as direções  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$  se tornem assintoticamente ortogonais à direção do gradiente à medida que  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  se aproxima de um ponto não-estacionário, então a inclinação  $\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$  tenderá a zero e o método pode

permanecer *preso* próximo àquele ponto.

Portanto certas condições devem ser impostas às direções  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$  a fim de evitar tal comportamento indesejável. Essas condições assumem que  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)}$  é função do seu iterando correspondente  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$  e, tipicamente, são satisfeitas ou facilmente impostas pelos algoritmos. Uma dessas condições é o conceito de *seqüência relacionada pelo gradiente*<sup>2</sup> [3] definido a seguir.

**Definição 4.4** (Seqüência Relacionada pelo Gradiente). *Seja  $\{\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\}$  a seqüência de direções e  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  a seqüência de soluções geradas pelo método de direções factíveis (4.17). A seqüência  $\{\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\}$  é relacionada pelo gradiente a  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  se para qualquer subsequência  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}_{r \in \mathbb{R}}$  que convirja a um ponto não-estacionário, a correspondente subsequência  $\{\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\}_{r \in \mathbb{R}}$  é limitada e satisfaz:*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty, r \in \mathbb{R}} \nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})' \bar{\mathbf{d}}^{(r)} < 0$$

Para uma seqüência relacionada pelo gradiente  $\{\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\}$  qualquer e dada uma subsequência  $\{\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})\}_{r \in \mathbb{R}}$  que tende a um vetor não nulo, temos que a direção  $\{\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\}_{r \in \mathbb{R}}$  é limitada e não tende a ortogonalidade com  $\nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})$ . Uma seqüência relacionada pelo gradiente é obtida pela imposição de certas condições no cômputo da direção. Considere inicialmente a proposição a seguir apresentada por Bertsekas em [3, Sec. 2.2.1].

**Proposição 4.5** (Estacionariedade dos Pontos Limites). *Seja  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  a seqüência obtida pelo método de direção factível (4.17). Suponha que  $\{\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\}$  é relacionada pelo gradiente a  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  e que  $\alpha^{(r)}$  é obtido através da regra de Armijo. Então todo o ponto limite de  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  é um ponto estacionário para  $\hat{P}$ .*

**Corolário 4.3** (Estacionariedade dos Pontos Limites para o Método Distribuído). *Suponha que:*

- (i) a seqüência  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  tenha sido gerada por agentes distribuídos segundo as Hipóteses 4.3 e 4.4;
- (ii) a solução aproximada  $\bar{\mathbf{u}}_m^{(r+1)}$  de  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  tenha sido calculada pelo agente  $m$  através do método de direções factíveis:

$$\bar{\mathbf{u}}_m^{(r+1)} = \bar{\mathbf{u}}_m^{(r)} + \alpha_m^{(r)} (\hat{\mathbf{u}}_m^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}) \quad (4.19a)$$

onde a direção de descenso local é  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} = \hat{\mathbf{u}}_m^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}$ , para o ponto  $\hat{\mathbf{u}}_m^{(r)} \in \mathbb{U}_m$ , e o tamanho do passo  $\alpha_m^{(r)} \in (0, 1)$  satisfaz a regra de Armijo, isto é,  $\alpha_m^{(r)} = \beta_m^{s_{mk}}$  para

<sup>2</sup>Tradução livre do termo em inglês *gradient-related sequence*

algum  $\beta_m, \sigma_m \in (0, 1)$  onde  $s_{mk}$  é o menor inteiro não negativo  $s_m$  para o qual:

$$f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)} + \beta_m^{s_{mk}} \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}) \leq f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}) + \sigma_m \beta_m^{s_{mk}} \nabla f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})' \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} \quad (4.19b)$$

(iii) a seqüência  $\{\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\}$  é relacionada pelo gradiente a  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$ .

Então todo o ponto limite de  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  é um ponto estacionário de  $\hat{P}$ .

*Demonstração.* Dada uma decomposição perfeita, segundo as equações (4.9a)–(4.9c), e respeitada a Hipótese 4.3, garante-se que apenas um dos agentes atualiza sua decisão na iteração  $r$ , digamos o agente  $m$ . Supondo ainda o cumprimento da Hipótese 4.4, garantindo o cálculo de um novo iterando  $\bar{\mathbf{u}}_m^{(r+1)}$  no ponto não estacionário  $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$ , solução de  $\hat{P}_m$ .

De acordo com a Hipótese 4.4, a direção de descenso local  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}$  para  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  em  $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  é também uma direção de descenso para  $\hat{P}$  em  $\bar{\mathbf{u}}^{(r)}$ . E uma vez que o agente  $m$  satisfaz a regra de Armijo (4.19b):

$$\begin{aligned} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)} + \beta_m^{s_{mk}} \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}) &\leq f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}) + \sigma_m \beta_m^{s_{mk}} \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})' \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} \\ &\Rightarrow \\ f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)} + \beta_m^{s_{mk}} \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}) + \bar{f}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{z}}_m^{(r)}) &\leq f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}) + \bar{f}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{z}}_m^{(r)}) \\ + \sigma_m \beta_m^{s_{mk}} (\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}), \nabla_{\bar{\mathbf{y}}_m} \bar{f}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{z}}_m^{(r)}))' &(\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \\ &\Rightarrow \\ f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)} + \beta_m^{s_{mk}} \bar{\mathbf{d}}^{(r)}) &\leq f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)}) + \sigma_m \beta_m^{s_{mk}} \nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})' \bar{\mathbf{d}}^{(r)} \end{aligned}$$

onde  $\bar{\mathbf{d}}^{(r)} = (\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ , implicando no cumprimento da regra de Armijo (4.18). De acordo com a condição (iii) desse corolário, a seqüência de direções de descenso  $\{\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\} = \{(\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\}$  é relacionada pelo gradiente a seqüência  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\} = \{(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{z}}_m^{(r)})\}$  de soluções computadas pelos agentes distribuídos. Então, a Proposição 4.5 garante que todo o ponto limite de  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  é um ponto estacionário de  $\hat{P}$ .  $\square$

A condição (iii) do Corolário 4.3 é garantida pelo cálculo apropriado da direção factível de descenso, a qual é o tópico do remanescente dessa seção.

### Cálculo da Direção de Descenso

O cálculo da direção de descenso relacionada pelo gradiente  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}$  para o problema  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  em  $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  é aqui discutida. Com efeito, a direção  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} = \hat{\mathbf{u}}_m^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}$  é induzida

pela solução ótima  $\hat{\mathbf{u}}_m^{(r)}$  do seguinte problema de minimização:

$$\hat{D}_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}) : \quad \min \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})'(\hat{\mathbf{u}}_m^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}) \quad (4.20a)$$

sujeito a:

$$\bar{\mathbf{C}}_m \tilde{\mathbf{u}}_m^{(r)} \geq \bar{\mathbf{c}}_m \quad (4.20b)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_m \tilde{\mathbf{u}}_m^{(r)} = \bar{\mathbf{d}}_m \quad (4.20c)$$

que possui o vetor  $\tilde{\mathbf{u}}_m^{(r)}$  como variável de decisão. Note que  $\hat{D}_m$  é um problema linear e portanto passível de solução via algoritmos de programação linear padrões. Caso a solução ótima de  $\hat{D}_m$  possua um objetivo não negativo, então  $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  é um ótimo local para  $\hat{P}_m$ :  $\nabla_{\bar{\mathbf{u}}_m} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})'(\hat{\mathbf{u}}_m^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}) \geq 0$  para todo  $\tilde{\mathbf{u}}_m^{(r)} \in U_m$ . Caso contrário,  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} = \hat{\mathbf{u}}_m^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}$  é uma direção de descenso.

Resta provar que o conjunto de direções  $\{\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\} = \{(\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\}$  obtido através da solução de  $\hat{D}_m$  é relacionada pelo gradiente ao conjunto  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$ . Suponha que  $\{\bar{\mathbf{u}}^{(r)}\}$  converge para um ponto não estacionário  $\tilde{\mathbf{u}}$  para a subsequência R. Precisa-se então mostrar que:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty, r \in R} \|\bar{\mathbf{d}}^{(r)}\| = \limsup_{r \rightarrow \infty, r \in R} \|\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}\| < \infty \quad (4.21a)$$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty, r \in R} \nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})' \bar{\mathbf{d}}^{(r)} = \limsup_{r \rightarrow \infty, r \in R} \nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'(\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}) < 0 \quad (4.21b)$$

Sem perda de generalidade assuma que na iteração  $r$  apenas um agente atualize suas decisões, digamos o agente  $m(r)$ , então  $\|\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}\| = \|\hat{\mathbf{u}}_{m(r)}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}_{m(r)}^{(r)}\|$ . A condição (4.21a) é satisfeita, pois  $\hat{\mathbf{u}}_{m(r)}^{(r)}, \bar{\mathbf{u}}_{m(r)}^{(r)} \in U_{m(r)}$  e  $U_{m(r)}$  é compacto (Hipótese 4.1). Segue da otimalidade de  $\hat{\mathbf{u}}_{m(r)}^{(r)}$  com respeito à  $\hat{D}_m$  que:

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'(\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}) &= \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_{m(r)}} f_{m(r)}(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'(\hat{\mathbf{u}}_{m(r)}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}_{m(r)}^{(r)}) \\ &\leq \nabla_{\bar{\mathbf{u}}_{m(r)}} f_{m(r)}(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'(\bar{\mathbf{u}}_{m(r)} - \bar{\mathbf{u}}_{m(r)}^{(r)}), \text{ para todo } \bar{\mathbf{u}}_{m(r)} \in U_{m(r)} \end{aligned}$$

E aplicando o limite superior chega-se a:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty, r \in R} \nabla f(\bar{\mathbf{u}}^{(r)})'(\hat{\mathbf{u}}^{(r)} - \bar{\mathbf{u}}^{(r)}) \leq \min_{\bar{\mathbf{u}}_m \in U_m} \nabla f_m(\bar{\mathbf{u}})'(\bar{\mathbf{u}}_m - \tilde{\mathbf{u}}_m), \text{ para algum } m < 0$$

o que prova a condição (4.21b), sendo a última inequação advinda do Corolário 4.2—se  $\tilde{\mathbf{u}}$  é não estacionário para  $\hat{P}$ , então  $(\tilde{\mathbf{u}}_m, \tilde{\mathbf{y}}_m)$  é não estacionário para  $\hat{P}_m(\tilde{\mathbf{y}}_m)$  e algum  $m$ —e da Hipótese 4.4—referente ao trabalho contínuo dos agentes, obrigando ao menos um deles a iterar.

### 4.2.3 Aplicação do Método ao Controle de Tráfego Urbano

O foco dessa seção está centrado em um tipo particular do problema  $\hat{P}$  no qual  $\mathbf{C}_m$  é uma matriz identidade,  $\mathbf{c}_m = \mathbf{0}$ ,  $D_m = \mathbf{1}'$  um vetor linha unitário e  $\mathbf{d}_m = d_m$  um escalar para todo o  $m \in M$ . Essa configuração representa o problema de controle de tempos de verde no tráfego urbano, onde—supondo que para cada interseção  $j$  e fase  $i$  o tempo máximo de verde  $u_{j,i}^{max}$  é dado por  $C_j - L_j - \sum_{i \in F_j} u_{j,i}^{min}$ —as restrições (4.2d) e (4.2e) podem ser escritas como:

$$\mathbf{u}_m(k) \geq \mathbf{0}, \quad \forall m \in M, k \in T \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{u}_m(k) = d_m, \quad \forall m \in M, k \in T \quad (4.22b)$$

Nessa situação as variáveis  $\mathbf{u}_m(k)$  representam o tempo de verde *extra* direcionado às fases além do mínimo no instante de tempo  $k$ . Essa estrutura de restrições simplifica o cálculo da direção de descenso  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}$  para  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  em  $(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$ .

Seja  $\bar{\mathbf{u}}_m = (\bar{u}_m(k), \dots, \bar{u}_m(k+N-1))$  e  $\bar{\mathbf{u}}_m(k) = (u_{m1}(k), \dots, u_{mp(m)}(k))$  onde  $p(m)$  é a dimensão de  $\bar{\mathbf{u}}_m(k)$ . Uma *base* para o problema LP  $\hat{D}_m$  possui então apenas uma variável não nula  $\hat{u}_{mi}^{(r)}(k+n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, a solução ótima de  $\hat{P}_m(\bar{\mathbf{y}}_m^{(r)})$  é obtida analiticamente por:

$$i^*(k+n) = \arg \min_{1 \leq i \leq l(m)} \frac{\partial}{\partial u_{mi}(t)} f_m(\bar{\mathbf{u}}_m^{(r)}, \bar{\mathbf{y}}_m^{(r)}) \quad (4.23a)$$

$$d_{mi}^{(r)}(k+n) = \begin{cases} 0, & i \neq i^*(k+n) \\ d_m, & i = i^*(k+n) \end{cases} \quad (4.23b)$$

onde  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}(k) = (d_{m1}^{(r)}(k), \dots, d_{ml(m)}^{(r)}(k))$  e  $\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)} = (\bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}(k), \dots, \bar{\mathbf{d}}_m^{(r)}(k+N-1))$ .

Apesar de sua relativa simplicidade de implementação, os agentes não são restritos a utilização do método de direção factível delineado anteriormente. Esses podem utilizar qualquer algoritmo de programação quadrática que satisfaça a regra de Armijo ou encontre a resposta ótima do respectivo subproblema. Métodos de conjuntos ativos e de projeção de gradiente [3]—por exemplo—são candidatos na substituição do algoritmo de direção factível.

## 4.3 Sumário

Inicialmente vimos como o problema centralizado de controle de tráfego urbano pode ser representado por um grafo direto de subsistemas conectados, problema denominado  $P$ . Em uma segunda etapa  $P$  foi convertido em um problema de programação quadrática  $\hat{P}$ , mais tratável numericamente. Posteriormente um procedimento para a decomposição de

---

$\hat{P}$  em uma série de subproblemas  $\{\hat{P}_m\}$  foi apresentada. Abordou-se então a solução do problema  $\hat{P}$  por uma rede de  $M$  agentes operando de maneira distribuída, onde cada um é responsável pela solução de um subproblema  $\hat{P}_m$ . Provas de que a solução ótima para os subproblemas induzem uma solução ótima para o problema global foram apresentadas, bem como da convexidade desses problemas. Finalmente apresentou-se um algoritmo baseado no método de direções de descenso para a solução dos problemas  $\hat{P}_m$  e sua aplicação a sistemas de controle de tráfego urbano, bem como as condições para que os agentes iterassem de forma a atingir a solução ótima de  $P$ .



## Capítulo 5

# Resultados Experimentais

*Die schönste Erfahrung, die wir machen können, ist die Erfahrung des  
Unbegreiflichen.*

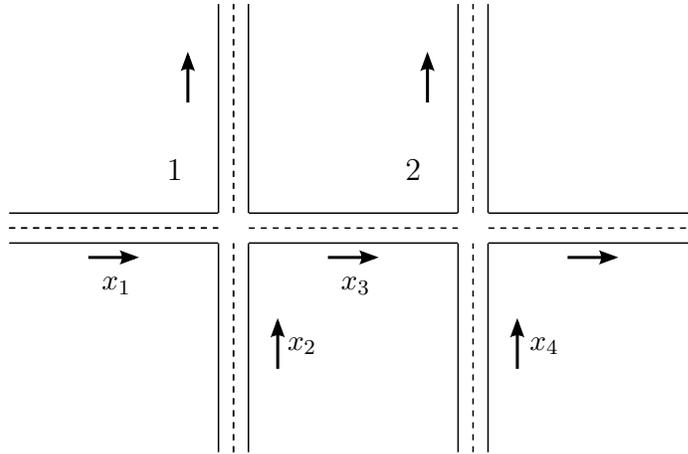
*(A mais bela experiência que podemos ter é a do mistério.)*

*Albert Einstein*

Nos capítulos precedentes foi possível verificar como o controle preditivo—em suas variantes—pode ser aplicado ao controle de porcentagens de verde em redes veiculares. Este capítulo tem como objetivo comprovar a eficiência dessa abordagem através de experimentos numéricos e simulações. Para tanto dois modelos de malhas viárias urbanas foram criados. O primeiro, mais simples, contém duas interseções e quatro fluxos controlados—variáveis de estado—já o segundo envolve seis cruzamentos e treze variáveis de estado. Os resultados apresentados foram classificados de acordo com sua MVU modelo.

Em um primeiro momento, a qualidade dos controladores LQR e MPC de frações de verde atuando de maneira centralizada é comparada, sob métricas específicas, por simulações numéricas baseadas nos modelos ideais das redes. Ainda sob essa ótica, porém sem perda de generalidade, ilustra-se a convergência da solução baseada em controle preditivo distribuído àquela obtida pela solução centralizada. Na etapa seguinte uma nova comparação entre os controladores é conduzida, porém através de simulações realizadas em ferramenta profissional de modelagem de redes urbanas.

O capítulo é particionado em duas seções, a primeira referente a MVU de menores proporções abrangendo 2 cruzamentos controlados, e a segunda tratando da MVU mais complexa englobando 6 interseções. No princípio de cada seção caracteriza-se a rede urbana utilizada na obtenção dos resultados experimentais, apresentando-se todos os parâmetros necessários para a reprodução dos mesmos. Note no entanto que certas variáveis variam ao longo dos



**Figura 5.1:** Malha viária urbana exemplo de duas interseções.

experimentos. Neste caso os valores apresentados referem-se ao seu estado nominal sendo sua dinâmica indicada no decorrer do texto.

A ferramenta utilizada para o cálculo dos valores nominais de ciclo e porcentagens de verde foi o procedimento de Webster [10]. As equações básicas bem como um exemplo de aplicação deste método são apresentados no Anexo B.

## 5.1 Malha Viária Urbana de Duas Interseções

Inicialmente optou-se pela utilização de uma rede experimental de pequena escala, apresentada na Fig. 5.1, com intuito de validar a política MPC de controle de tempos de verde e sua efetividade. Como indicado na ilustração essa rede possui duas interseções,  $\{1, 2\}$ , e quatro variáveis de estado,  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Note que a rede proposta é composta apenas por vias de mão única. Essa escolha é justificada pelo fato de termos interesse unicamente no controle de frações de verde da malha viária. Redes exclusivamente de mão única simplificam a implementação, determinação da quantidade e do seqüenciamento de fases. Assim, os efeitos proveniente desse fator de controle são minimizados, reduzindo um possível viés nos resultados experimentais. Além disso, essa medida não tem influência significativa no problema específico de percentuais de verde.

Algumas variáveis adicionais necessitam ser definidas para a completa caracterização da malha viária em questão. Especificamente os fluxos de saturação e de entrada, ciclos e tempos de verde nominais, apresentados na Tabela 5.1, e as taxas de conversão e de saída, apresentadas na Tabela 5.2. Em aplicações práticas é comum dispormos de valores nominais de ciclo e tempo de verde para todas as interseções e fases da rede. No caso atual no entanto, por se tratar de uma rede fictícia, esses parâmetros foram obtidos através do procedimento de Webster. Um fator positivo apresentado especificamente por essa rede é o fato de ambas

Via ( $z$ )	Controle $u_{j,z}$	Saturação $S_z$ (veí/h)	Entrada Nominal $q_z$ (veí/h)	Tempo de Verde Nominal $u_{j,z}^N$ (s)	Ciclo (s)
$x_1$	$u_{1,1}$	1800	700	42	60
$x_2$	$u_{1,2}$	1800	400	17	
$x_3$	$u_{2,1}$	1800	—	43	60
$x_4$	$u_{2,2}$	1800	150	6	

**Tabela 5.1:** Parâmetros nominais da MVU de duas interseções.

$t$ linha, coluna	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_0$
$x_1$	—	—	0.8	—	0.05
$x_2$	—	—	0.4	—	0.05
$x_3$	—	—	—	—	0.05
$x_4$	—	—	—	—	0.05

**Tabela 5.2:** Taxas de conversão nominais para a MVU de duas interseções.

interseções apresentarem resultados iguais no cálculo dos ciclos. Quando iguais ou múltiplos, os tempos de ciclo promovem na MVU um comportamento harmônico, favorecendo o sincronismo entre seus nós. Durante os experimentos subsequentes nenhum controle de sincronismo entre os semáforos é adotado, assumindo defasagem nula e constante entre esses.

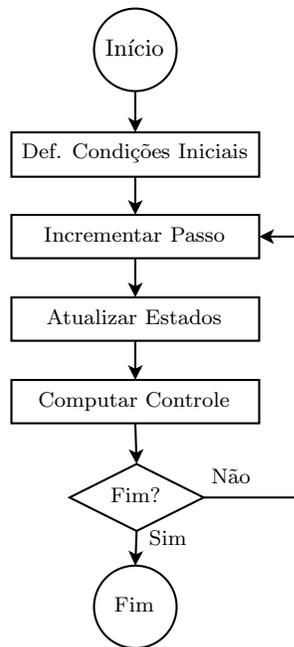
As taxas de conversão estipuladas para essa rede são apresentadas na Tabela 5.2. A primeira coluna dessa determina a via de origem da conversão, sendo a via de destino definida pelas colunas restantes. O conteúdo da célula indica o valor absoluto da taxa de conversão em questão. Note que a via  $x_0$  é fictícia, indicando na realidade a taxa de saída associada a cada variável de estado. Outro ponto digno de nota é a constatação de que a soma das linhas nessa tabela nem sempre terá como resultado a unidade. Isso se deve ao fato de as conversões realizadas para vias não controladas não serem computadas. Definidos estes parâmetros, as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $T$  da rede podem ser calculadas segundo os passos da seção 2.2.

### 5.1.1 Experimentos Numéricos

A primeira validação da política de controle MPC deu-se através de experimentos numéricos utilizando uma equação a diferenças como modelo do sistema. Fazendo uso de programas de computação científica, como Scilab ou Matlab<sup>®</sup>, ou até mesmo linguagens computacionais, e.g. Python ou C, implementa-se um laço iterativo no qual o estado da rede a cada intervalo discreto é calculado com base na condição inicial do sistema e seus estados anteriores. A seguinte equação em tempo discreto foi utilizada como modelo de simulação:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{f}(k) \quad (5.1)$$

onde o vetor  $\mathbf{f}(k)$  indica o fluxo de entrada de veículos na rede.



**Figura 5.2:** Fluxograma do processo de simulação numérica.

Note que o experimento representa de maneira apenas aproximada o comportamento do sistema real de trânsito. Fato visível ao observarmos, por exemplo, não há possibilidade de um veículo atravessar duas interseções em um único intervalo de tempo. Isso ocorre pois, segundo o modelo, as filas de cada via são compostas necessariamente pelos veículos que deixaram as aproximações anteriores. De fato um veículo pode atravessar mais de um cruzamento, mas apenas de forma indireta, ou seja, quando os fluxos  $p_z(k)$  e  $s_z(k)$  são maiores que o estado inicial, a fila, da via  $z$  no instante  $k$ . Dessa forma, no computo geral, parte do fluxo de entrada  $q_z(k)$ , advindo de uma via a montante, também será transmitido as vias a jusante.

Outro ponto fraco do modelo atual fica evidente quando um estado, digamos  $x_z$ , com valor muito baixo, ou até mesmo nulo, *alimenta* um outro estado  $x_w$ , sendo  $w \in O_z$ . Isso ocorre pois a todo o instante de tempo o modelo assume que o valor dos estados em todas as vias é tal que a quantidade de veículos por ele representada é suficiente para aproximarmos o fluxo de saída dessas vias por seu fluxo de saturação. Dessa forma o fluxo de saída é considerado constante e igual ao de saturação durante todo o período em que as vias têm direito de passagem. Um fluxograma do processo iterativo é apresentado na Fig. 5.2.

No restante dessa seção os resultados da aplicação desse experimento à rede de duas interseções serão apresentados. Três estratégias de controle distintas foram avaliadas: plano a tempos fixos, controle LQR e controle MPC de porcentagens de verde. O cenário escolhido possui uma hora de duração, com intervalo de controle  $T = 60s$ , e utiliza os parâmetros nominais apresentados na Tabela 5.1. Definiu-se ainda os fluxos de entrada como funções Gaussianas, com valor inicial igual ao valor do fluxo nominal da via, pico igual a duas vezes

Tipo de Controle	Custo Acumulado
Tempos Fixos	$8,67 \cdot 10^4$
TUC-LQR	$4,53 \cdot 10^4$
TUC-MPC	$4,09 \cdot 10^4$

**Tabela 5.3:** Valor acumulado da função custo em 60 passos de simulação.

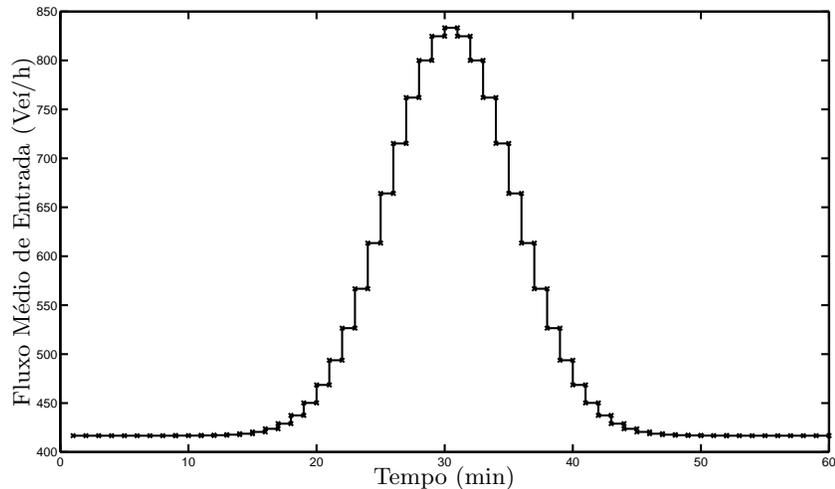
este e centradas em metade do tempo de simulação, como visto na Figura 5.3. Espera-se desta forma simular o comportamento do trânsito em horário de pico, ou seja com grande fluxo de veículos em horário e intervalo específicos de tempo, situação na qual o controle semafórico tem papel fundamental na prevenção do surgimento de filas extensivas.

Nas Figuras 5.4 e 5.5 a progressão dos estados e dos sinais de controle para a metodologia LQR e MPC centralizadas são respectivamente apresentadas. Podemos perceber que os estados partem de uma condição inicial aleatoriamente estipulada e, posteriormente, atingem valores negativos. De fato, apesar de fisicamente impossível, o modelo utilizado, bem como o laço de simulação, permitem a representação de uma quantidade negativa de veículos aguardando passagem. Como não há distinção entre a simulação do processo, equação 5.1, e o modelo 2.5 esse problema não se evidencia nesse experimento. Sua influência é notada, no entanto, quando utilizada uma representação mais fiel do processo, fato discutido mais adiante.

Não sendo esta a ferramenta ideal para a representação do tráfego de veículos, optou-se por utilizar como métrica comparativa o custo ao longo do tempo e valor acumulado da função objetivo, apresentada na seqüência.

$$J_{exp} = \mathbf{x}'(k)\mathbf{Q}\mathbf{x}(k) + \Delta\mathbf{u}'(k)\mathbf{R}\Delta\mathbf{u}(k) \quad (5.2)$$

onde os sinais de controle se apresentam na forma  $\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}^N(k) - \mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{R} = 0.003\mathbf{I}$ . O valor adotado como ponderação dos sinais de controle é usual na metodologia TUC além de logicamente razoável. Basta considerarmos que na equação (5.2) não existe um *custo efetivo* de controle—*i.e.* maior dispêndio de energia ou incremento no esforço dos atuadores do sistema—e sim uma racionalização de tempo. Ao aumentarmos a penalidade imposta ao sinal de controle estamos na verdade restringindo o quão distante o controle *calculado* pode estar do *nominal*. Embora esse comportamento possa ser extremamente desejável—uma vez que mantém o sincronismo entre semáforos consecutivos e, principalmente, a sinergia entre o controle semafórico e os motoristas a ele habituados—no caso em questão ele torna-se irrelevante, pois por características próprias o modelo desconsidera o sincronismo entre interseções, *obrigando* cada veículo a ao menos uma parada em cada cruzamento. Outro importante parâmetro estipulado para o controle MPC de frações de verde foi o horizonte de controle e predição de dois passos, constatando-se que qualquer ampliação desses não incorre em redução de custo para o caso em questão.

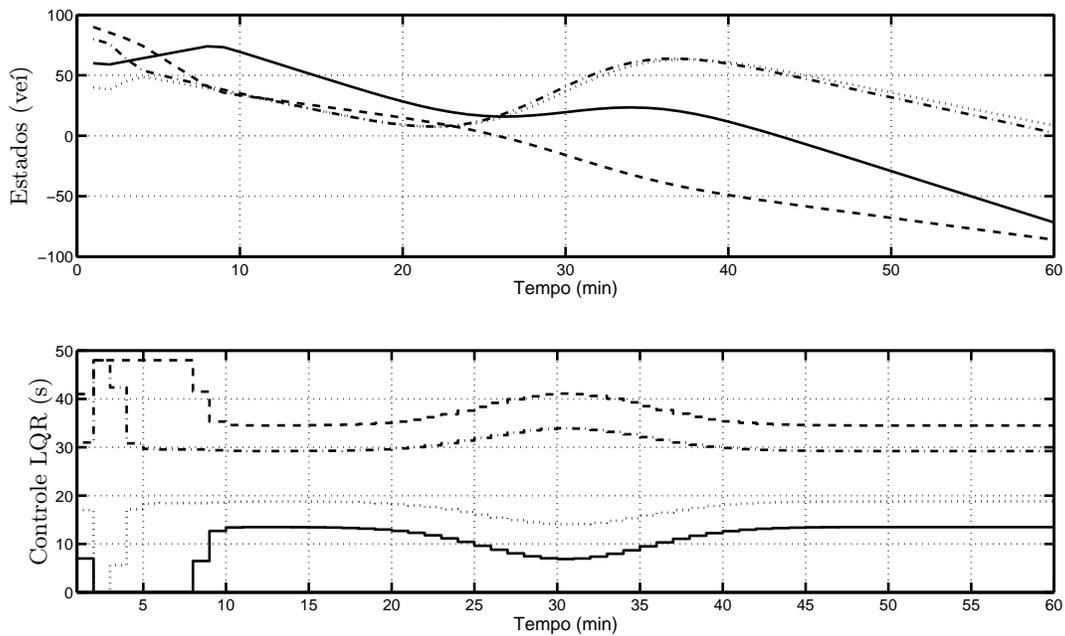


**Figura 5.3:** Fluxo de entrada médio especificado para a MVU de 2 interseções.

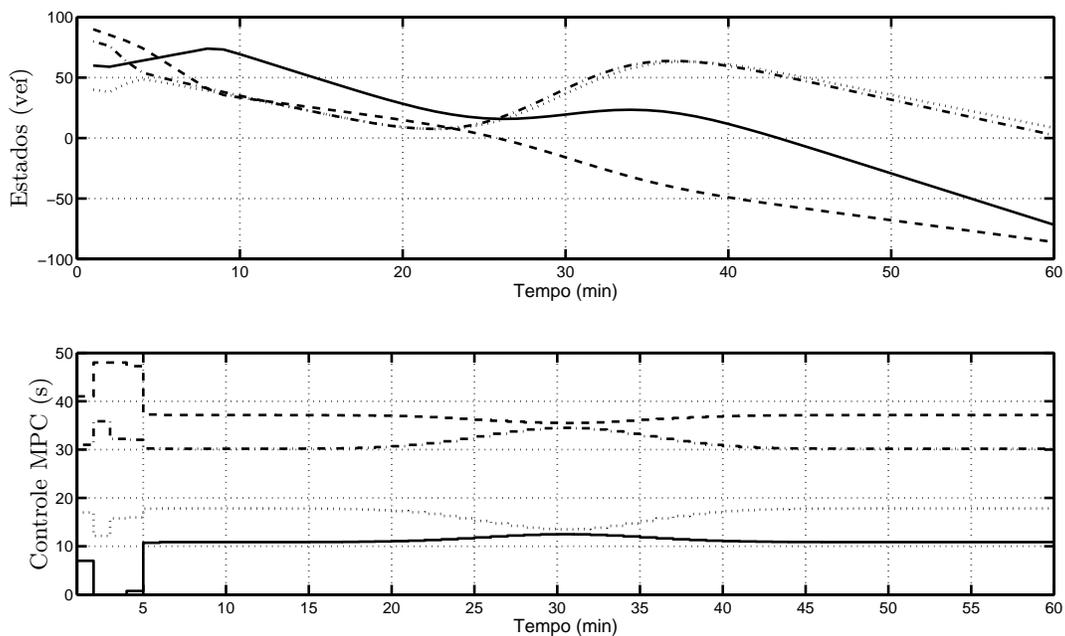
A Fig. 5.6 ilustra a evolução do custo associado a função objetivo a cada instante de simulação. É visível a superioridade das estratégias de controle atuadas ante o controle a tempos fixos. Algumas observações são no entanto dignas de nota. Podemos perceber duas mudanças de tendência na curva em questão. A primeira ocorre devido ao perfil Gaussiano dos fluxos de entrada, os quais apresentam um valor de pico no intervalo médio da simulação. O segundo no entanto é provocado pela deficiência do modelo em permitir valores negativos aos estados. Dessa forma, como eles apresentam valores progressivamente menores, tornam-se a partir de certo ponto negativos e acabam acrescentando o custo da função objetivo, já que possuem contribuição quadrática à mesma. Então, a vantagem obtida com o uso do controle preditivo—que já é clara, pois o custo apresentado é menor durante toda a simulação—seria ainda mais acentuada não fosse a contribuição negativa dos estados ao custo. As diferenças ficam mais acentuadas ao considerarmos o custo acumulado ao longo da simulação para cada estratégia de controle, apresentado na Tabela 5.3, e corrobora a eficácia da estratégia MPC para o controle de tempos de verde.

### 5.1.2 Simulações

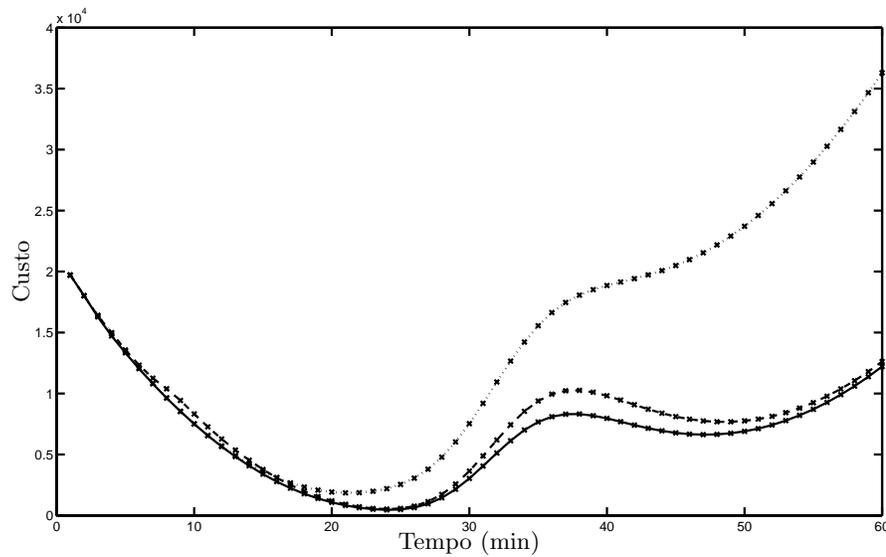
Como visto o experimento numérico realizado, apesar de importante para uma análise preliminar, baseia-se em um modelo aproximado e não representa fielmente o comportamento do trânsito. Com o propósito de avaliar com maior precisão esse comportamento sob o controle MPC em sistemas reais realizou-se então um conjunto de simulações numéricas em software profissional, sendo o Aimsun<sup>®</sup> 6 o programa escolhido. Esse *software* oferece um poderoso micro-simulador para aplicações de trânsito e permite que redes complexas sejam modeladas com exatidão, desde períodos transitórios e tempos de reação a VMS e definição de rotas. A ferramenta disponibiliza ainda um módulo API extremamente útil, provendo a capacidade



**Figura 5.4:** Evolução dos estados –  $x_1$  em linha traço ponto,  $x_2$  em linha pontilhada,  $x_3$  em linha tracejada,  $x_4$  em linha sólida – e sinais de controle LQR –  $u_{1,1}$  em linha traço ponto,  $u_{1,2}$  em linha pontilhada,  $u_{2,1}$  em linha tracejada,  $u_{2,2}$  em linha sólida – ao longo da simulação.



**Figura 5.5:** Evolução dos estados –  $x_1$  em linha traço ponto,  $x_2$  em linha pontilhada,  $x_3$  em linha tracejada,  $x_4$  em linha sólida – e sinais de controle MPC –  $u_{1,1}$  em linha traço ponto,  $u_{1,2}$  em linha pontilhada,  $u_{2,1}$  em linha tracejada,  $u_{2,2}$  em linha sólida – ao longo da simulação.



**Figura 5.6:** Custo do esforço de controle ao longo do tempo – plano a tempos fixos em linha pontilhada, controle LQR em linha tracejada e controle MPC em linha sólida.

de interação, através de rotinas escritas em Python ou C++, com praticamente qualquer programa que necessite acesso aos dados internos do simulador durante a simulação.

Novamente utiliza-se a equação (5.2) como função custo, tanto para o controle LQR, onde a função custo é utilizada na determinação da matriz  $\mathbf{L}$ , quanto no controle MPC, onde a mesma é utilizada diretamente. Nesse caso no entanto tanto a matriz  $\mathbf{Q}$  quanto a matriz  $\mathbf{R}$  são iguais à unitária. Rememorando a discussão anterior sobre a ponderação de controle, essa escolha indica que estamos priorizando o valor nominal de controle da MVU, sendo desejável que não haja muita variação no controle calculado. Esse escolha é interessante neste caso por minimizar a influência do sincronismo nos resultados obtidos, afinal procuramos mantê-lo inalterado *independentemente* de sua qualidade. Para a solução dos problemas de otimização, requeridos tanto pela solução LQR usual como pela estratégia MPC, as seguintes ferramentas foram utilizadas: a linguagem de programação Python 2.5, com licença PSFL; o pacote numérico *Open Source* para Python, NumPy; o pacote de otimização CVXOPT, de licença GPL, para a mesma linguagem; e o *solver* comercial MOSEK<sup>©</sup>. A linguagem Python acrescida do pacote numérico NumPy permite o tratamento simplificado de vetores e matrizes, facilitando a modelagem do problema de otimização. No entanto essa não possui algoritmos eficientes para solucionar tais problemas. O papel desempenhado pelo pacote CVXOPT é realizar a interface entre a formulação em Python e o *solver* MOSEK<sup>©</sup>, utilizado na solução dos problemas de programação quadrática.

Novas métricas para a avaliação são fornecidas pelo simulador, sendo algumas utilizadas na comparação entre as estratégias de controle, são estas: tempo de jornada, em segundos por quilômetro; e densidade, dada em veículos por quilômetro. Optou-se por esses fatores por considerá-los os mais representativos entre os outros parâmetros possíveis, tais como tempo

de atraso, velocidade harmônica média, velocidade média, fluxo médio, número de paradas e distância percorrida. A importância dos parâmetros escolhidos se comprova no fato que muitos dos últimos parâmetros podem ser deles derivados. Em contraste ao experimento numérico realizado, no processo de simulação apenas duas estratégias de controle serão avaliadas: o controle LQR e MPC de porcentagens de verde. Além disso os fluxos de entrada utilizados são agora constantes, seguindo os valores apresentados na Tabela 5.1. Note que apesar da utilização de fluxos constantes em média, o padrão de inserção de veículos segue um modelo exponencial provido pelo simulador. Novamente definiu-se um cenário com uma hora de duração e intervalo de controle  $T = 60s$ , sendo agora o horizonte de controle e previsão de um passo para o controle MPC. As taxas de conversão ainda seguem as apresentadas na Tabela 5.2, porém nesse caso as taxas de saída foram consideradas nulas.

Diferentemente dos experimentos anteriores, onde o modelo e rotinas experimentais são implementados no mesmo software, na simulação atual os estados não estão prontamente disponíveis, sendo necessário medi-los indiretamente através de sensores. Para cada um dos fluxos de veículos controlados alocam-se dois sensores, o primeiro deles inserido na parte inicial da via—ponto de entrada dos veículos do fluxo que deseja-se medir—e o segundo na porção final da aproximação—local de saída dos veículos do fluxo. Dessa forma o valor dos estados é estimado a cada ciclo de simulação pela contagem do número de veículos que entram em determinada via e são detectados pelo sensor de entrada subtraída do número de veículos que a deixam, estes computados pelo sensor de saída. Em aplicações reais implementações mais eficientes quanto ao número de sensores são possíveis, porém aumentam sensivelmente a complexidade de implementação do modelo de simulação e, por isso, não serão utilizadas.

O modelo de simulação da rede é apresentado na Figura 5.7. Um conjunto de 10 replicações com *seeds* aleatórios e distintos foi gerado e utilizada na simulação de cada estratégia de controle. Os resultados obtidos foram então ponderados e são apresentados na Tabela 5.4. Podemos perceber que o controle MPC apresentou uma performance consideravelmente melhor que o controle LQR nessa situação. O ganho percentual em tempo médio de jornada por exemplo é da ordem de 15%, sendo que este ganho é potencializado com o decorrer do tempo, pois previne a formação de filas e o efeito *wind up*—*i.e.* o efeito cumulativo onde uma fila crescente aumenta o tempo de médio de jornada, ocasionando filas ainda maiores. Outra constatação é que no mesmo critério o controle MPC demonstrou-se muito mais robusto, apresentando menor variabilidade para as diversas condições iniciais utilizadas. Vale, no entanto, salientar que esses resultados foram obtidos com um horizonte de controle de um único passo. Esse fato a princípio poderia caracterizar uma vantagem, indicando que um aumento no horizonte de previsão poderia ocasionar resultados ainda melhores. No entanto, constatou-se que esse incremento no horizonte degrada a qualidade do controle calculado, além de aumentar o esforço computacional. Supõe-se que isso ocorra devido à imprecisão do modelo de previsão utilizado, suscetível ainda às mesmas vulnerabilidades citadas na seção anterior, como por exemplo possibilitar a existência de estados negativos.

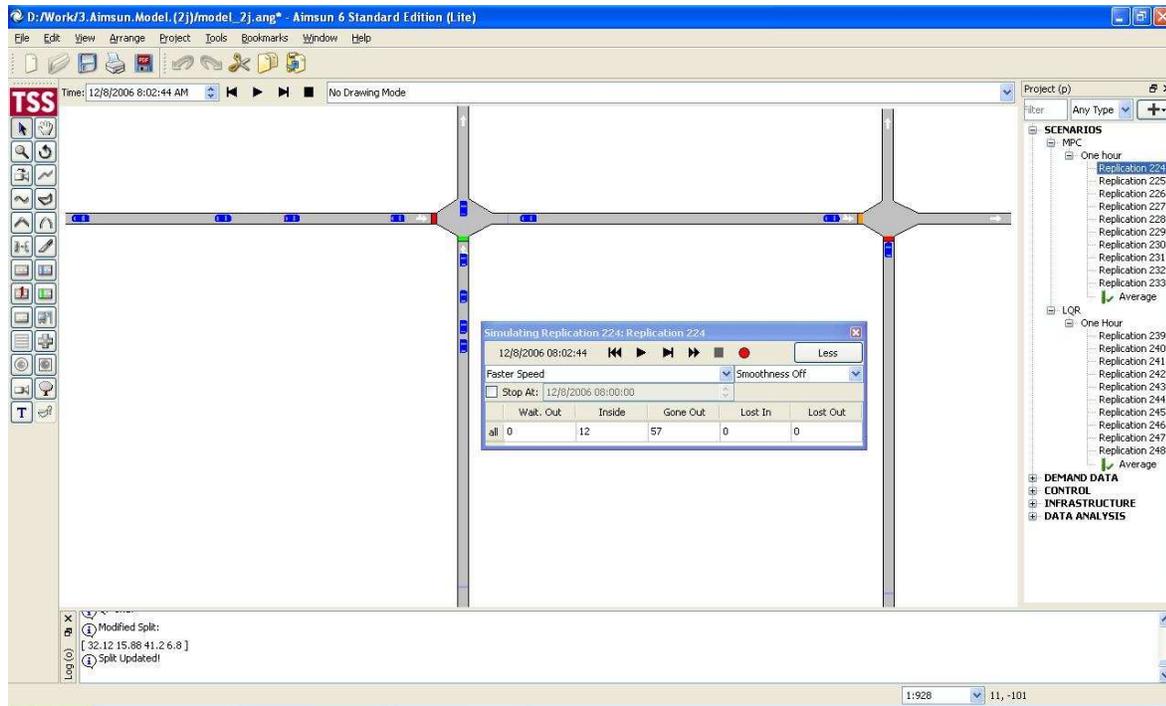


Figura 5.7: Modelo de simulação da malha viária urbana de duas interseções.

Tipo de Controle	Tempo de Jornada (s/km)		Densidade (veí/km)	
	Média	Desvio	Média	Desvio
TUC-LQR	174,20	6,06	22,66	0,93
TUC-MPC	147,55	1,12	20,10	0,60

Tabela 5.4: Resultados de simulação da malha viária urbana de duas interseções.

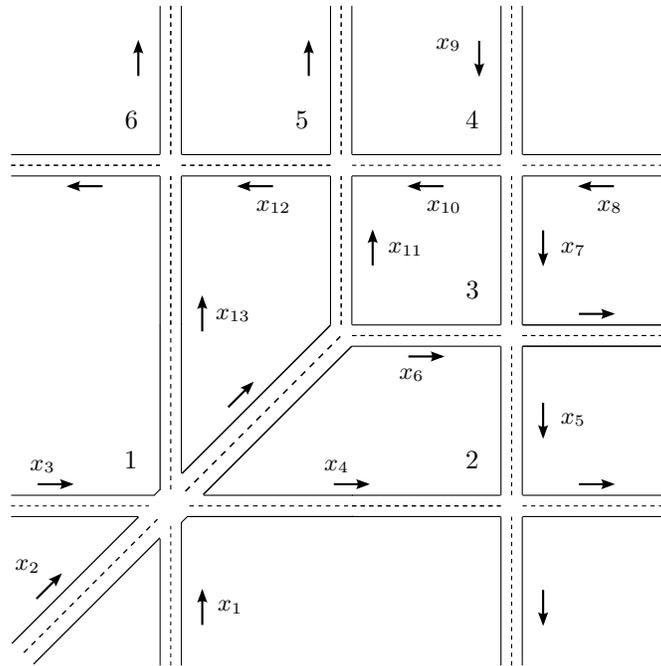


Figura 5.8: Malha viária urbana exemplo de seis interseções.

## 5.2 Malha Viária Urbana de Seis Interseções

Apesar de válidos, os experimentos realizados com a rede de duas interseções definida anteriormente não são apropriados para explorarmos as complexidades das relações entre subsistemas no caso de uma abordagem distribuída de controle. Por essa razão uma malha viária de maiores proporções se faz necessária. Formulou-se então a malha viária já apresentada no Capítulo 4 e ilustrada novamente na Fig. 5.8. Essa rede é composta por treze variáveis de estado,  $\{x_1, \dots, x_{13}\}$ , interligadas por seis interseções controladas. Trata-se de uma rede fortemente conexa, com objetivo de representar um perímetro urbano cortado por avenidas de alto fluxo de veículos, cenário conveniente para avaliação do efeito das frações de verde, bem como do comportamento da estratégia distribuída de controle. No entanto, a maior complexidade dessa rede potencializa também o efeito de outras variáveis capazes de promover um viés nos resultados experimentais, como por exemplo a definição de fases, o sincronismo e *offset* entre os semáforos.

Com intuito de simplificar a especificação das fases a rede é composta unicamente por vias de mão simples. Nas experiências realizadas não há controle de sincronismo entre interseções e o *offset* adotado entre as mesmas é nulo. Além disso, uma estratégia para harmonizar o fluxo interno da rede é estipular ciclos de igual duração ou múltiplos entre si, criando uma progressão pulsante dos veículos. Para tanto dividiu-se os experimentos nesta rede em três cenários:

Via ( $z$ )	Controle $u_{j,z}$	Saturação $S_z$ (veí/h)	Entrada Nominal $q_z$ (veí/h)	Tempo de Verde Nominal $u_{j,z}^N$ (s)	Ciclo (s)
$x_1$	$u_{1,1}$	3600	1000	58.0	192.0
$x_2$	$u_{1,2}$	3600	1100	63.8	
$x_3$	$u_{1,3}$	3600	900	52.2	
$x_4$	$u_{2,1}$	3600	—	46.7	132.6
$x_5$	$u_{2,2}$	3600	—	73.9	
$x_6$	$u_{3,1}$	1800	—	26.3	81.9
$x_7$	$u_{3,2}$	3600	—	43.6	
$x_8$	$u_{4,1}$	3600	1800	89.2	165.6
$x_9$	$u_{4,2}$	3600	1300	64.4	
$x_{10}$	$u_{5,1}$	3600	—	50.9	91.7
$x_{11}$	$u_{5,2}$	1800	—	28.8	
$x_{12}$	$u_{6,1}$	3600	—	75.6	131.3
$x_{13}$	$u_{6,2}$	3600	—	43.7	

**Tabela 5.5:** Parâmetros nominais do cenário com ciclos distintos.

**Ciclos Distintos ( $C \neq$ ):** Nesse cenário os ciclos e porcentagens de verde foram calculados através do procedimento Webster, passível de aplicação à rede em questão, uma vez que seu grafo de acoplamentos é acíclico (Anexo B). Para tanto é necessário seguir uma seqüência topológica no cálculo desses valores. Considere, por exemplo, a interseção 2. Uma vez que o fluxo nominal da via 4,  $q_4$ , não é conhecido à priori, não é possível calcular-se o tempo de ciclo dessa interseção sem primeiramente calcular-se o ciclo da interseção 1. A partir daí pode-se então determinar o fluxo nominal da via 4, e conseqüentemente o ciclo do segundo cruzamento. Observada esta seqüência, podemos determinar todos os ciclos e frações de verde da malha viária, sendo esses mostrados na Tabela 5.5.

Vale salientar que os valores obtidos por este método são ótimos para as interseções operando de forma isolada, pois não considera o efeito do sincronismo entre elas. Dessa forma os ciclos utilizados nesse cenário possuem valores distintos, causando uma progressão veicular um tanto errática. O cenário possui ainda fluxos de entrada elevados, concentrados nas avenidas principais,  $x_2$  e  $x_8$ , também dificultando a progressão veicular.

**Ciclos Iguais ( $C =$ ):** Nesse cenário o tempo de ciclo foi arbitrariamente estipulado em 120 segundos. Dessa forma obtém-se o efeito pulsante do fluxo de veículos, harmonizando a progressão dos mesmos e minimizando o efeito do sincronismo entre as interseções. Outra medida para dirimir esse efeito foi a utilização de fluxos de entradas mais balanceados, evitando grandes oscilações na vazão de veículos. Com os ciclos definidos, calculou-se os percentuais de verde segundo o procedimento de Webster. Estes valores são apresentados na Tabela 5.6.

Via ( $z$ )	Controle $u_{j,z}$	Saturação $S_z$ (veí/h)	Entrada Nominal $q_z$ (veí/h)	Tempo de Verde Nominal $u_{j,z}^N$ (s)	Ciclo (s)
$x_1$	$u_{1,1}$	3600	800	28,8	120
$x_2$	$u_{1,2}$	3600	1300	46,8	
$x_3$	$u_{1,3}$	3600	900	32,4	
$x_4$	$u_{2,1}$	3600	—	72,5	120
$x_5$	$u_{2,2}$	3600	—	39,5	
$x_6$	$u_{3,1}$	1800	—	54,9	120
$x_7$	$u_{3,2}$	3600	—	57,1	
$x_8$	$u_{4,1}$	3600	900	63,0	120
$x_9$	$u_{4,2}$	3600	700	49,0	
$x_{10}$	$u_{5,1}$	3600	—	59,8	120
$x_{11}$	$u_{5,2}$	1800	—	52,2	
$x_{12}$	$u_{6,1}$	3600	—	54,7	120
$x_{13}$	$u_{6,2}$	3600	—	57,3	

**Tabela 5.6:** Parâmetros nominais do cenário com ciclos iguais.

**Ciclos Iguais e Simulação de Acidente ( $C = /$  acidente):** Esse cenário tem as mesmas características do segundo cenário, porém com a inclusão de um acidente na via  $x_3$  durante o experimento. Essa ocorrência acontece aos 15 minutos de simulação, quando a via permanece completamente bloqueada por um intervalo de 15 minutos. Conseguisse esse efeito durante a simulação reduzindo o fluxo de entrada da via  $x_3$  a zero. Após esse intervalo, portanto aos 30 minutos de simulação, ocorre o desbloqueio da via e, por conta do incidente e do suposto acúmulo de veículos provocado, supomos um incremento no fluxo médio de entrada de veículos advindos dessa via a um valor maior que o nominal pelos 30 minutos restantes de simulação. A Tabela 5.7 apresenta os valores referentes a esse cenário.

As taxas de conversão estipuladas são iguais para todos os cenários e são apresentadas na Tabela 5.8. Assim como no caso da rede de duas interseções, a primeira coluna dessa tabela indica a via de origem da conversão, sendo a via de destino determinada pelas colunas restantes e o conteúdo das células os valores absolutos de taxa de conversão. Nessa tabela, no entanto, fica omitida a coluna referente às taxas de saída,  $t_{z,0}$ , uma vez que estas foram consideradas nulas para todas as vias da rede. Uma vez definidos estes parâmetros as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $T$  da rede podem ser calculadas segundo os passos da seção 2.2.

### 5.2.1 Experimentos Numéricos

Nessa seção os resultados obtidos através de experimentos numéricos realizados com a malha viária em questão são apresentados. O cenário utilizado é o referente ao caso de ciclos distintos, sendo o modelo de simulação (5.1) novamente aplicado, ou seja não há diferenças

Via ( $z$ )	Controle $u_{j,z}$	Saturação $S_z$ (veí/h)	Entrada Nominal $q_z$ (veí/h)	Tempo de Verde Nominal $u_{j,z}^N$ (s)	Ciclo (s)
$x_1$	$u_{1,1}$	3600	800	28,8	120
$x_2$	$u_{1,2}$	3600	1300	46,8	
$x_3$	$u_{1,3}$	3600	900/0/1500	32,4	
$x_4$	$u_{2,1}$	3600	—	72,5	120
$x_5$	$u_{2,2}$	3600	—	39,5	
$x_6$	$u_{3,1}$	1800	—	54,9	120
$x_7$	$u_{3,2}$	3600	—	57,1	
$x_8$	$u_{4,1}$	3600	900	63,0	120
$x_9$	$u_{4,2}$	3600	700	49,0	
$x_{10}$	$u_{5,1}$	3600	—	59,8	120
$x_{11}$	$u_{5,2}$	1800	—	52,2	
$x_{12}$	$u_{6,1}$	3600	—	54,7	120
$x_{13}$	$u_{6,2}$	3600	—	57,3	

**Tabela 5.7:** Parâmetros nominais do cenário com ciclos iguais e simulação de acidente.

$t_{1,c}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
$x_1$	—	—	—	0.20	—	0.05	—	—	—	—	0.05	—	0.70
$x_2$	—	—	—	0.25	—	0.30	—	—	—	—	0.30	—	0.15
$x_3$	—	—	—	0.65	—	0.05	—	—	—	—	0.05	—	0.15
$x_4$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$x_5$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$x_6$	—	—	—	—	0.50	—	—	—	—	—	—	—	—
$x_7$	—	—	—	—	0.80	—	—	—	—	—	—	—	—
$x_8$	—	—	—	—	—	—	0.40	—	—	0.60	—	—	—
$x_9$	—	—	—	—	—	—	0.60	—	—	0.40	—	—	—
$x_{10}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.80	—
$x_{11}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.50	—
$x_{12}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$x_{13}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

**Tabela 5.8:** Taxas de conversão nominais para a MVU de seis interseções.

CI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1$	475,06	99,36	336,07	151,38	330,11	347,28	5,88	216,45	29,59	106,98
$x_2$	115,57	301,90	419,06	270,84	170,98	310,66	446,95	112,97	301,43	321,75
$x_3$	303,42	136,09	9,82	75,44	144,86	397,41	99,57	289,90	25,13	160,02
$x_4$	242,99	99,41	340,64	348,95	170,60	478,42	149,36	380,18	207,69	480,05
$x_5$	445,65	7,64	189,74	189,19	267,04	261,30	330,72	264,91	152,50	363,32
$x_6$	381,05	373,39	415,90	430,01	363,56	440,07	142,20	320,26	437,18	205,98
$x_7$	228,23	222,55	251,41	426,83	154,64	86,48	234,61	104,53	7,50	372,28
$x_8$	9,25	465,91	354,74	296,78	419,25	489,87	32,39	189,91	383,98	133,97
$x_9$	410,70	233,00	214,45	248,28	284,04	135,72	494,17	391,66	485,42	219,96
$x_{10}$	222,35	209,33	152,31	449,88	185,21	126,16	291,40	340,42	495,04	466,69
$x_{11}$	307,72	423,11	94,83	410,81	351,37	437,87	211,75	230,55	394,43	341,67
$x_{12}$	395,97	262,58	96,72	322,46	273,28	368,65	257,76	283,91	219,33	106,28
$x_{13}$	460,91	101,32	341,11	408,99	222,44	68,26	166,98	397,10	249,16	419,62

**Tabela 5.9:** Conjunto aleatoriamente gerado de condições iniciais para os experimentos.

entre modelo e processo. Seguindo a mesma direção do experimento numérico anterior os fluxos de entrada no contexto atual também possuem forma exponencial de características—centradas em metade do tempo de simulação, com valor inicial igual ao fluxo nominal e com pico equivalente ao dobro desses valores. Como esclarecido na subseção anterior, esse modelo numérico apresenta algumas dificuldades, dentre elas o fato de lidar apenas com a média dos fluxos de veículos, dessa forma ignorando o sincronismo entre as interseções. Logo a realização dos experimentos para os outros cenários propostos torna-se irrelevante.

A maior complexidade da MVU em questão permite o uso de quatro estratégias de controle distintas: plano a tempos fixos, controle LQR, controle MPC e controle DMPC de porcentagens de verde. Para a realização dos experimentos precisa-se suplementar o cenário escolhido com alguns parâmetros. Definiu-se uma duração aproximada de duas horas, especificamente 40 passos de simulação com intervalo de controle  $T = 200s$ . O impacto de diversos horizontes de controle e predição no controle MPC e DMPC de frações de verde foi analisado, especificamente de 1 a 5 passos. Ademais, um conjunto de 10 condições iniciais aleatórias foi gerado visando aumentar a confiabilidade dos resultados. Os estados dessas condições iniciais possuem amplitude entre 0 e 500 veículos e o conjunto resultante é apresentado na Tabela 5.9. Sendo o modelo de simulação o mesmo previamente utilizado, os problemas citados no experimento anterior continuam presentes e portanto podemos novamente usar a equação (5.2) como métrica comparativa, adotando  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{R} = 0.003\mathbf{I}$ .

Um fator de suma importância no método de controle distribuído de porcentagens de verde é o tempo de convergência desse a uma tolerância especificada da solução ótima, validando ou impossibilitando sua implementação prática. Com o objetivo de avaliar tal propriedade solucionou-se o *primeiro passo* do problema de simulação com cada uma das condições iniciais já apresentadas e utilizando dois algoritmos: o método de direção factível apresentado na Seção 4.2.2 e um algoritmo de programação quadrática padrão<sup>1</sup>. Como critério de pa-

<sup>1</sup>Para o caso do método de direção factível, experimentos demonstraram que os parâmetros  $\sigma = 0.3$  e

	Programação Quadrática				Direção Factível			
	Processamento (ms)		Iterações		Processamento (s)		Iterações	
	Médio	Máx	Médio	Máx	Médio	Máx	Médio	Máx
Agente 1	21,9	93,8	1,6	3	0,35	0,78	13,4	30
Agente 2	9,4	31,2	1,1	2	0,24	0,45	10,2	20
Agente 3	1,6	15,6	1,7	4	0,24	0,53	9,5	20
Agente 4	7,8	46,9	1,6	3	0,22	0,28	14,4	24
Agente 5	3,1	15,6	1,5	3	0,26	0,55	10,0	20
Agente 6	3,1	15,6	0,8	2	0,20	0,48	8,3	20
Distribuído	46,9	125,0	8,3	14	1,55	3,08	63,7	130
Centralizado	26,6	46,9	3,9	7	0,40	1,94	12,0	58

**Tabela 5.10:** Resultados computacionais para o conjunto de 10 condições iniciais distintas e margem de tolerância de 1%.

	Programação Quadrática				Direção Factível			
	Processamento (ms)		Iterações		Processamento (s)		Iterações	
	Médio	Máx	Médio	Máx	Médio	Máx	Médio	Máx
Agente 1	21,9	46,9	3,3	7	2,16	8,12	76	290
Agente 2	15,6	46,9	2,1	4	1,98	8,20	72	290
Agente 3	10,9	46,9	2,8	8	1,85	7,59	69	280
Agente 4	14,1	31,2	3,0	6	1,85	7,50	76	294
Agente 5	1,6	15,6	2,4	5	1,83	7,70	69	280
Agente 6	6,3	46,9	1,2	2	1,81	7,67	67	280
Distribuído	75,0	156,2	14,8	25	11,58	47,16	425	1710
Centralizado	26,6	46,9	3,9	7	13,59	48,09	370,9	1299

**Tabela 5.11:** Resultados computacionais para o conjunto de 10 condições iniciais distintas e margem de tolerância de 0.1%.

rada dos algoritmos de direção factível, bem como no algoritmo QP para o caso distribuído, utiliza-se a diferença percentual à solução ótima,  $J_{exp}^*$ . Para fins práticos  $J_{exp}^*$  é calculada pelo algoritmo QP aplicado ao controle MPC centralizado. O teste é feito a cada iteração, atualizando o valor da função objetivo e comparando-a ao valor ótimo. Sendo o número de iterações até a convergência demasiadamente importante para fins práticos, as restrições quanto a qualidade da solução são muitas vezes relaxadas em busca de um compromisso entre velocidade e qualidade. Por este motivo realizou-se o experimento utilizando duas margens de erro em relação à solução ótima. Os resultados apresentados na Tabela 5.10 garantem uma solução a uma margem de 1% de erro em relação ao ótimo, enquanto na Tabela 5.11 os resultados apresentados estão a uma margem de 0.1% do ótimo. Para critério de comparação a solução centralizada foi também computada e é apresentada nos resultados.

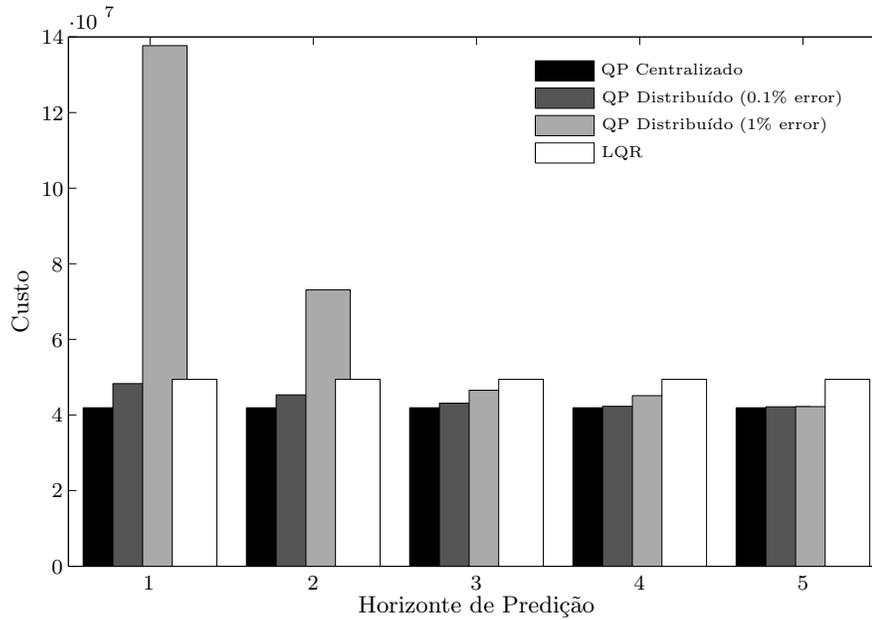
Em uma implementação prática, no entanto, não haveria sentido em calcularmos uma  $\beta = 0.3$  induzem a melhor taxa de convergência para o cenário proposto. Note que a solução via algoritmo QP também satisfaz as regras de Armijo locais.

solução centralizada para que sirva de referência a um critério de parada para o algoritmo de direções factíveis ou QP distribuído. Dessa forma um segundo experimento numérico foi realizado, no qual uma lógica relativa foi usada como critério de parada. Essa lógica utiliza parâmetros fixos de tolerância relativa para determinar o ponto a partir do qual o decréscimo na função objetivo deixa de ser significativo. Ou seja, o critério calcula o valor absoluto  $\|J_{exp}^{(r+1)} - J_{exp}^{(r)}\|/\|J_{exp}^{(r+1)}\|$  e o compara ao parâmetro de tolerância estipulado, iterando até que o primeiro seja menor que o segundo. Utilizando esse algoritmo modificado realizou-se agora a simulação para os 40 passos de controle do cenário proposto. Ao contrário do experimento numérico com a MVU de duas interseções um gráfico apresentando todos os estados do experimento atual tornaria-se ilegível, agregando pouca informação. Por esse motivo apresenta-se, na Figura 5.9, apenas o custo acumulado ao longo da simulação para cada estratégia de controle e horizonte de predição. Nessa ilustração fica novamente comprovada a eficiência numérica da estratégia de controle MPC de tempos de verde, com um ganho de aproximadamente 10% em relação às outras estratégias quando utilizado um horizonte de predição de 5 passos. No entanto, para horizontes menores, podemos perceber uma alta discrepância entre o controle distribuído e centralizado baseado em modelo, principalmente quando a margem de erro tolerada é mais alta. Esse desvio advém da fragilidade do critério de parada implementado, a qual é contornada com a utilização de horizontes de predição e controle mais significativos, a ponto de torná-la desprezível. Isso porque horizontes maiores tornam as mudanças no sinal de controle mais suaves, fazendo com que o valor da função objetivo diminua de maneira gradual. Para controles mais bruscos interseções com grande influência na rede, como por exemplo a interseção 1 na MVU adotada, provocam grande redução no custo ao atualizarem suas decisões. Ao calcular então a redução proveniente da atualização de decisões de uma interseção menos influente o critério de parada interpreta que o ganho por iteração já não é mais significativo, assumindo como solução um controle muito distante do ótimo.

### 5.2.2 Simulações

Assim como ocorrido com a rede de duas interseções o experimento numérico realizado, apesar de comprovar a corretude e convergência da estratégia DMPC de controle de tempos de verde, não apresenta resultados conclusivos por basear-se em um modelo aproximado para o fluxo de veículos. Dessa forma uma simulação mais criteriosa se faz necessária para uma análise apropriada das estratégias de controle. Com esse propósito realizou-se então um conjunto de simulações numéricas com o software Aimsun<sup>©</sup> 6 já descrito anteriormente, sendo o mesmo conjunto de ferramentas de apoio das simulações da malha viária de duas interseções utilizadas.

Avaliaremos novamente duas estratégias de controle: LQR e MPC. A equação (5.2) é novamente adotada como função custo, tanto na determinação da matriz  $\mathbf{L}$  do controle LQR

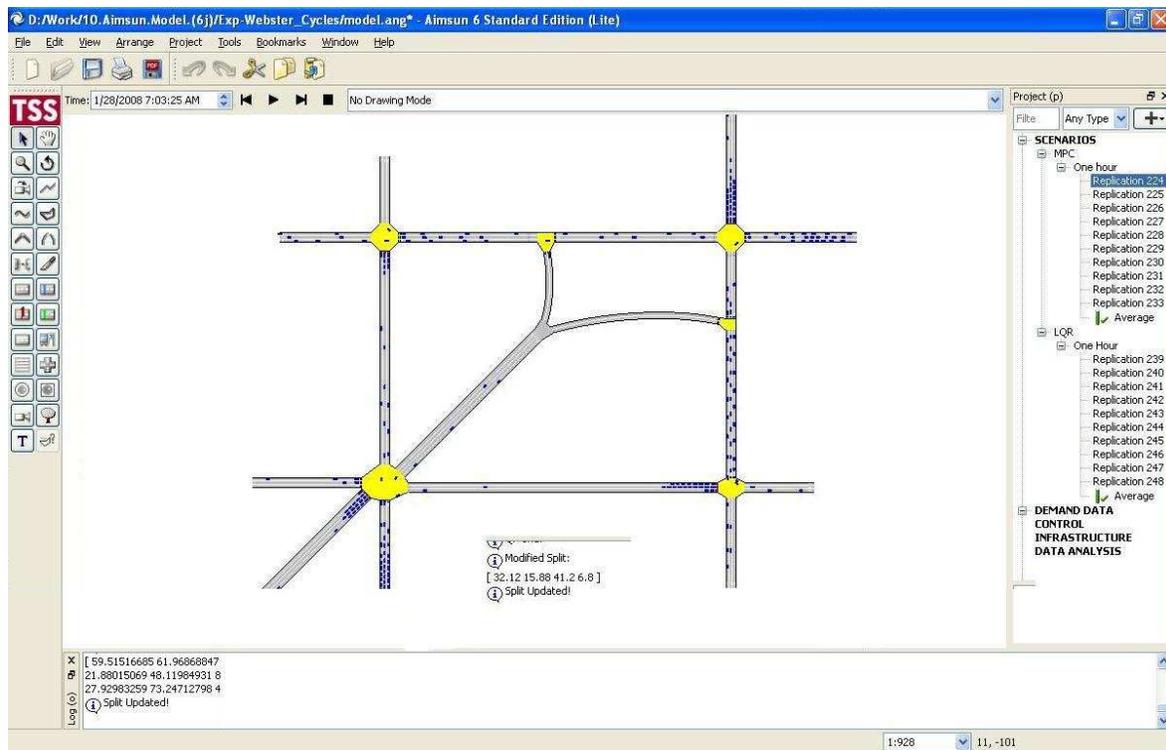


**Figura 5.9:** Custo acumulado médio ao longo de 40 passos de simulação para o conjunto de 10 condições iniciais distintas classificado de acordo com o horizonte de predição.

quanto no controle MPC onde é utilizada diretamente. Quanto às ponderações de controle e estado, optou-se por uma matriz  $\mathbf{Q}$  igual à identidade e pela avaliação de duas matrizes  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_1 = 0.003\mathbf{I}$  e  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{I}$ . Todos os cenários avaliados possuem uma hora de duração, com intervalo de controle comum de  $T = 200s$ .

Além disso, para o caso do controle MPC, horizontes de predição e controle iguais foram utilizados e, visando avaliar a influência desses, dois valores abordados—um e três passos de simulação. Em um primeiro momento esses valores podem parecer pequenos, afinal é usual a utilização de horizontes de maior amplitude, porém vale ressaltar que a escolha desses deve respeito principalmente a dinâmica do processo. Dessa forma, ao avaliarmos a magnitude do passo de controle, onde cada passo possui mais que três minutos de duração, um horizonte abrangendo um a três passos tornam-se razoáveis, uma vez que a dinâmica de interesse é bastante lenta. Além disso horizontes maiores imputariam uma dificuldade computacional ainda maior, talvez proibitiva, ao processo de simulação.

Assim como na simulação para a malha viária anterior os estados não estão prontamente disponíveis, sendo necessário medi-los indiretamente através de sensores alocados na parte inicial da via—ponto de entrada dos veículos do fluxo que deseja-se medir—e na porção final da aproximação—local de saída dos veículos do fluxo. Dessa forma o valor do estado de uma via é estimado a cada ciclo de simulação pela contagem líquida de veículos que a adentraram ou deixaram. Como a MVU possui treze variáveis de estado independentes, vinte e seis sensores são necessários para esta aferição. Implementações mais eficientes em



**Figura 5.10:** Modelo de simulação da malha viária urbana de seis interseções.

relação ao número de sensores são possíveis, porém aumentam sensivelmente a complexidade do software de controle, sendo justificadas apenas em implementações reais.

A implementação do modelo de simulação da malha viária é apresentado na Figura 5.10. O primeiro cenário simulado foi o de ciclos distintos, utilizando um conjunto de dez replicações com *seeds* distintos e aleatórios. Esse mesmo conjunto de replicações, ou seja, replicações com as mesmas sementes, foi posteriormente utilizado na simulação dos cenários com ciclos iguais—tanto sem o incidente, quanto com este. Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 5.12 e 5.13, respectivamente para as matrizes de ponderação de controle  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$ .

Ao analisarmos os resultados apresentados na Tabela 5.12, referentes a matriz de controle  $\mathbf{R}_1$ , podemos perceber que a estratégia de controle LQR e MPC com horizonte unitário tiveram desempenho bastante similar, equiparando-se em relação a densidade média de veículos nas vias e sendo o controle MPC ligeiramente superior em termos de tempo médio de jornada. Nota-se ainda que na ocorrência do acidente o desempenho do controle MPC demonstra nova melhoria em relação ao LQR, sendo esse padrão também é verificado na Tabela 5.13.

É evidente, no entanto, a baixa performance do controle MPC com um horizonte de 3 passos, sendo ainda constatado que os resultados tornam-se ainda piores com horizontes maiores. Esse fato abre espaço para especulações quanto à representatividade do modelo usado como predição de valores futuros de estado e controle, indicando que predições muito

	Cenário	Tempo de Jornada (s/km)		Densidade (veí/km)	
		Média	Desvio	Média	Desvio
LQR	$C \neq$	241,23	3,15	29,51	0,67
	$C =$	189,89	0,75	18,57	0,23
	$C =$ (acidente)	193,06	2,72	19,14	2,74
MPC $N = 1$	$C \neq$	240,42	6,43	29,59	0,97
	$C =$	189,85	0,96	18,57	0,09
	$C =$ (acidente)	192,09	1,80	19,06	2,44
MPC $N = 3$	$C \neq$	465,66	55,38	53,57	4,74
	$C =$	208,21	2,68	20,30	0,27
	$C =$ (acidente)	205,77	18,83	20,55	3,86

**Tabela 5.12:** Resultados de simulação da malha viária urbana de seis interseções para a matriz de ponderação  $\mathbf{R}_1 = 0.003\mathbf{I}$ .

	Cenário	Tempo de Jornada (s/km)		Densidade (veí/km)	
		Média	Desvio	Média	Desvio
LQR	$C \neq$	240,87	2,73	29,63	0,56
	$C =$	189,03	0,59	18,46	0,24
	$C = /$ acidente	192,38	2,70	18,97	2,64
MPC $N = 1$	$C \neq$	237,82	3,03	29,35	0,37
	$C =$	188,74	0,80	18,47	0,06
	$C = /$ acidente	191,60	2,47	19,05	2,53
MPC $N = 3$	$C \neq$	311,64	31,32	37,56	3,24
	$C =$	199,04	2,36	19,40	0,21
	$C = /$ acidente	202,22	6,45	20,07	0,29

**Tabela 5.13:** Resultados de simulação da malha viária urbana de seis interseções para a matriz de ponderação  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{I}$ .

imprecisas estejam degradando a performance do controle. Essa argumentação pode ser fundamentada nos resultados apresentados pelos experimentos numéricos, onde o acréscimo no horizonte de predição, apesar de não provocar significativa melhora na performance do controle, não acarretou degradação aos resultados.

Apesar disso, uma situação favorável ao controle MPC ocorre nos resultados referentes ao cenário de ciclos distintos adotando a matriz de controle  $\mathbf{R}_2$ , onde houve uma diferença maior que 3 segundos por quilômetro de tempo médio de jornada entre as estratégias. Estudando com mais atenção essa tabela percebemos que de maneira geral a diferença entre as estratégias foi ligeiramente maior que nos primeiros resultados. Ainda assim, a diferença de performance não pode ser considerada significativa, mesmo quando considerado que esse ganho é potencializado com o decorrer do tempo ao prevenir o efeito *wind up*—*i.e.* o efeito cumulativo onde uma fila crescente aumenta o tempo de médio de jornada, ocasionando filas ainda maiores.

### 5.3 Sumário

Nesse capítulo verificamos a aplicação do controle MPC e DMPC a malhas viárias urbanas através de experimentos numéricos e simulações. Primeiramente formulou-se uma rede composta por duas interseções e quatro variáveis de estado. Sob essa rede uma bateria de experimentos numéricos, baseados no modelo *idealizado* do tráfego, foram realizados comparando a performance das estratégias de controle a tempos fixos, LQR e MPC. Após discutidos os resultados numéricos, partiu-se para a simulação da mesma rede em um programa especializado, chamado Aimsun. Sob a ótica desse *software* profissional apenas as estratégias de controle LQR e MPC foram comparadas e seus resultados discutidos.

Com intento de avaliar desempenho da versão distribuída do controle preditivo apresentou-se, em uma segunda etapa, uma nova malha viária, composta por seis interseções e treze variáveis de estado. Novos experimentos numéricos baseados no modelo idealizado do fluxo de veículos foram realizados, avaliando não apenas a performance de controle das estratégias LQR, MPC e DMPC para diversos horizontes de controle e predição, como também suas taxas de convergência para a solução de um único passo do problema de controle. Da mesma maneira a rede foi então implementada no programa de simulação profissional Aimsun, onde novamente apenas a estratégia original da abordagem TUC e a proposta baseada em controle preditivo foram aplicadas. Para essa rede no entanto dois horizontes distintos foram considerados durante as simulações, um e três passos de controle. Finalmente os resultados obtidos durante essa simulação foram apresentados e sua performance discutida.



## Capítulo 6

# Conclusão

O controle de frações de verde tem se revelado um problema de grande interesse por parte de diversas frentes de pesquisa, entidades governamentais e empresas especializadas ao redor do mundo. Além de tratar-se de um interessante tema de pesquisa, com aplicações práticas diretas, esse interesse é também motivado pela oportunidade comercial que esse tema propicia, uma vez que o constante aumento da frota mundial de veículos e a incapacidade da infra-estrutura viária existente demandam uma operação de forma cada vez mais eficiente.

Como exposto no Capítulo 1 as malhas viárias apresentarem uma tendência mundial de expansão, porém dependem de elevado investimento para sua construção. Apesar desse elevado custo a frota de veículos e a extensão das auto-estradas a nível mundial cresce de maneira concomitante, indexadas pelo crescimento da renda per capita mundial. No entanto existe uma grande defasagem entre o crescimento do número de veículos e a expansão da malha viária total, indicando que apesar do crescimento concomitante desses índices a nível nacional, nas áreas urbanas existe uma larga disparidade entre eles. Essa constatação aliada ainda aos efeitos da urbanização e aumento da população tornam o congestionamento urbano um fenômeno de proporção mundial. O controle de frações de verde se insere nesse cenário como uma alternativa economicamente viável para o aumento da capacidade das redes e diminuição dos congestionamentos.

Essa dissertação tem como um de seus propósitos contribuir para o desenvolvimento acerca desse tema, inserindo-se em um recente contexto de pesquisas sobre a mobilidade urbana no Brasil, onde podemos citar como exemplo o Projeto SINCMobil—Sistema de Informação e Controle para Mobilidade Urbana—da Universidade Federal de Santa Catarina. Partindo de estudos sobre o estado da arte e outros trabalhos acerca da mobilidade urbana, delimitou-se o tema abordado e o objetivo dessa dissertação: propor um módulo alternativo, capaz de tratar explicitamente as restrições referentes às malhas viárias urbanas, para o controle de frações de verde da estratégia IN-TUC de controle integrado de tráfego.

Tendo como ponto de partida a teoria fundamental da modelagem de malhas viárias urbanas e do conceito *store-and-forward* de representação do fluxo de veículos, ilustrados no Capítulo 2, apresentou-se no capítulo subsequente o funcionamento do módulo de controle urbano TUC, baseado em um controle LQR de dois estágios, e uma estratégia de controle preditivo capaz de substituir esse regulador. No Capítulo 4 o problema de controle foi reformulado e convertido em uma rede de subproblemas, cada qual atrelado a um agente. Comprovou-se então que através da solução desses subproblemas, consideravelmente mais simples, pode-se encontrar a solução para o problema de controle global. Um algoritmo simples para o cômputo da solução dos problemas locais foi desenvolvido e apresentado. Como contrapartida dessa configuração temos a necessidade de um maior intercâmbio de mensagens e uma menor taxa de convergência.

A proposta de controle foi então validada através de experimento numéricos e simulações no decorrer do Capítulo 5. Seu desempenho foi avaliado em comparação ao módulo LQR padrão para duas malhas viárias bastantes distintas. De maneira geral os resultados dos experimentos numéricos foram bastantes promissores trazendo benefícios substanciais e apresentando taxas de convergência passíveis de aplicação prática, tanto para o caso centralizado, quanto distribuído. Os resultados de simulação para a rede de duas interseções também tiveram resultados positivos, com redução média do tempo de jornada na ordem de 15%. No entanto, as simulações realizadas utilizando a malha viária de seis interseções não apresentaram ganhos significativos de performance. Algumas hipóteses podem ser levantadas sobre esse ponto:

- (i) é sabido que o controle de frações de verde está inserido em um contexto mais abrangente de controle, envolvendo fatores como sincronismo e cálculo de defasagem. Esses fatores estão invariavelmente presentes e influenciam os índices medidos. Por tratar-se de uma rede mais complexa, acredita-se que para o caso da malha viária de seis interseções a influência exercida por estes agentes externos ao controle de porcentagens de verde se façam mais presentes;
- (ii) discussões recentes encontradas no fórum do simulador Aimsun indicam que o passo de simulação deve ser tratado com um parâmetro integrante do experimento e, portanto, devidamente calibrado. Relatos indicam reduções consideráveis com a calibração do passo, chegando a atrasos até 50% menores. Por tratar-se de um tópico muito atual, essa informação era desconhecida no período no qual as simulações foram realizadas, de tal sorte que a influência do passo de simulação não foi avaliada;
- (iii) outro ponto importante, e que também pode ser estendido à rede de duas interseções, é a influência do modelo de predição. Como citado na seção referente ao controle preditivo baseado em modelo um dos pontos fracos dessa abordagem é a necessidade de um modelo de predição preciso. Essa não é a realidade do modelo usado no controle

MPC de *split*, onde o tráfego é representado de maneira simplificada, com fluxos internos aproximados pelo fluxo de saturação, progressão intermitente de veículos—*i.e.* não existe a possibilidade explícita de um veículo atravessar duas ou mais interseções em um ciclo de controle, apenas indiretamente—e principalmente a possibilidade oferecida pelo modelo da existência de estados negativos, os quais não apresentam sentido prático.

Apesar de não apresentar tempos de jornada significativamente menores em alguns casos de simulação o controle MPC de frações de verde foi consistentemente melhor que aquele baseado em regulador LQR. Além disso a abordagem distribuída oferece diversos benefícios os quais podem ser melhor explorados. Dentre eles podemos citar o uso de hardwares mais simples devido à simplificação do cálculo dos controles locais e a facilidade de expansão da rede, onde a inserção de novos nós afetaria apenas a vizinhança dos mesmos.

Com o propósito de continuidade das pesquisas sobre o tema algumas sugestões para trabalhos futuros são propostas:

- (i) remetendo as imperfeições do modelo utilizado na representação do tráfego de veículos, mais especificamente ao discutido anteriormente no tópico (iii), um dos principais problemas enfrentados é a possibilidade de estados com valores negativos influenciarem as decisões de controle. Uma maneira de contornar essa situação seria a inclusão de restrições nos estados, fazendo com que estes fossem obrigatoriamente positivos;
- (ii) seguindo a mesma linha de raciocínio, outro estudo importante seria a inclusão de limites máximos de veículos nas vias. Essa medida evitaria o bloqueio de interseções, prevenindo a ocorrência do efeito *wind-up*. Como descrito em [15], a estratégia TUC apresenta esse comportamento intrinsecamente, porém não existem estudos relativos a esse aspecto quando utilizada a estratégia de controle preditivo de frações de verde;
- (iii) outro ponto interessante de pesquisa consistiria na avaliação conjunta do controle DMPC de frações de verde aliado com um módulo de controle de sincronismo e defasagem. Do ponto de vista teórico esse agrupamento apresentaria resultados significativamente melhores. Uma alternativa simples seria particionar o controle em dois estágios, onde o primeiro seria responsável pelo cálculo das frações de verde e o segundo definiria o *offset* entre os nós. Alternativamente poder-se-ia avaliar a inclusão do controle de defasagem no problema do cálculo *split* através da inclusão de restrições e variáveis adicionais.

A implementação e estudo da influência desses tópicos no comportamento do sistema de mobilidade urbana, além de trabalhos inovadores, renderiam importantes conclusões e agregariam considerável conhecimento a esse tema de pesquisa.



## Apêndice A

# Propriedades estruturais de sistemas de controle lineares

Dentre as propriedades de um sistema linear de malha aberta, duas delas merecem destaque: controlabilidade e observabilidade. A primeira está associada ao número e localização dos atuadores do sistema enquanto a segunda ao número e localização dos sensores. Quando a estrutura do sistema apresenta essas propriedades temos garantia de poder projetar um controlador de tal forma que os pólos da malha fechada possam ser escolhidos de forma arbitrária pelo projetista. Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman em 1960 [24].

### A.1 Controlabilidade

Um sistema é controlável num instante  $t_0$  se for possível, por meio de um vetor de controle sem restrições em seus elementos, transferir-lo de qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outro estado em um intervalo finito de tempo. A controlabilidade do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

pode ser testada verificando se o posto da matriz de controlabilidade

$$M_c = [BAB \dots A^{n-1}B]$$

é igual à dimensão do vetor de estado do sistema [24]. Quando a matriz de controlabilidade possui posto  $r$ , inferior ao número de variáveis de estado, então existe uma transformação de

similaridade  $T$  tal que

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT^{-1}, \quad \tilde{D} = D$$

onde  $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e o par  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  é controlável [30].

## A.2 Estabilizabilidade

O sistema é dito estabilizável quando os autovalores não controláveis são estáveis, isto é os autovalores de  $\tilde{A}_{22}$  possuem parte real negativa.

## A.3 Observabilidade

O sistema A.1 é observável se todo estado inicial  $x(t_0)$  puder ser determinado a partir do conhecimento de  $y(t)$ ,  $u(t)$  durante um intervalo de tempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . A observabilidade pode ser testada verificando se o posto da matriz de controlabilidade

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

é igual à dimensão do vetor de estado do sistema [24]. Quando a matriz de observabilidade possui posto  $r$ , inferior ao número de variáveis de estado, então existe uma transformação de similaridade  $T$  tal que

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT^{-1}, \quad \tilde{D} = D$$

onde  $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e o par  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  é observável [30].

## A.4 Detectabilidade

O sistema é dito detectável quando os autovalores não observáveis são estáveis, isto é os autovalores de  $\tilde{A}_{22}$  possuem parte real negativa.

## Apêndice B

# Método de Webster para Temporização Semafórica

O método de Webster permite determinar a temporização ótima de um plano a tempo fixo para uma interseção isolada do ponto de vista de minimização do atraso veicular. Uma fórmula para o cálculo aproximado do atraso veicular foi desenvolvida utilizando-se de ferramentas teóricas e de resultados empíricos. Detalhes do desenvolvimento do método não serão abordados aqui, podendo ser encontrados em [41]. Delineia-se nesse apêndice apenas um procedimento ilustrando a aplicação do método à malha viária urbana de duas interseções apresentada no Capítulo 5.

### B.1 Cálculo do Tempo de Ciclo

Segundo Webster, o tempo de ciclo ótimo para o controle a tempo fixo de uma interseção sob demanda nominal pode ser calculado como:

$$C_j = \frac{1.5L_j + 5}{1 - \sum_{i \in I_j} q_i^N / S_i} \quad (\text{B.1})$$

onde, reiterando o Capítulo 2,  $C_j$  é o tempo de ciclo da interseção  $j$ ;  $L_j$  representa o tempo perdido com a indicação amarela durante todo o ciclo da mesma interseção;  $q_i^N$  é o fluxo nominal de entrada da via  $i$ , em veículos por hora;  $S_i$  é o fluxo de saturação da mesma via; e  $I_j$  é o conjunto de vias de entrada da interseção de controle  $j$ .

## B.2 Cálculo dos Tempos de Verde

O problema do cálculo ótimo dos tempos de verde para o controle a tempos fixos de verde sobre demanda nominal e dado por:

$$u_{j,i} = \frac{(q_i^N/S_i)(C_j - L_j)}{\sum_{i \in I_j} q_i^N/S_i}, \text{ para todo } i \in F_j \quad (\text{B.2})$$

onde além dos parâmetros anteriores temos o tempo de verde alocado para a fase  $i$  da interseção  $j$ ,  $u_{j,i}$  e o conjunto  $F_j$  de estágios, ou fases, da interseção  $j$ .

## B.3 Exemplo de Aplicação do Método

A rede de duas interseções apresentada no capítulo 5 será utilizada como exemplo para a ilustração da aplicação do procedimento de Webster. Os valores nominais aqui utilizados podem ser encontrados nas Tabelas 5.1 e 5.2. O primeiro passo é a determinação do tempo de ciclo das interseções possíveis, para o caso do cruzamento número 1, temos:

$$C_1 = \frac{1.5L_1 + 5}{1 - \sum_{i \in I_1} q_i^N/S_i}$$

$$C_1 = \frac{1.5(6 + 6) + 5}{1 - 700/1800 - 400/1800} = 59,14s \approx 60s$$

pode-se perceber que nesse momento não é possível calcularmos o tempo de ciclo da interseção 2, uma vez que o fluxo nominal  $q_3^N$  não está disponível. Para determiná-lo precisamos definir as frações de verde de todas as interseções pertencentes a  $I_3$ , no caso apenas a interseção 1.

$$u_{1,1} = \frac{(q_1^N/S_1)(C_1 - L_1)}{\sum_{i \in I_1} q_i^N/S_i}, \text{ para todo } i \in F_1$$

$$u_{1,1} = \frac{(700/1800)(60 - 12)}{700/1800 + 400/1800} = 30,54s \approx 31s$$

o valor de  $u_{1,2}$  pode ser encontrado da mesma maneira, ou alternativamente pela seguinte igualdade

$$C_1 = L_1 + u_{1,1} + u_{1,2}$$

$$u_{1,2} = C_1 - L_1 + u_{1,1} = 17s$$

Com esses valores podemos determinar o valor do fluxo nominal da via 3 utilizando a

relação a seguir:

$$q_3^N = \sum_{j \in I_3} \sum_{i \in F_j} \frac{t_{i,3} u_{j,i} q_i^N}{C_j}$$

$$q_3^N = \frac{t_{1,3} S_1 u_{1,1} + t_{2,3} S_2 u_{1,2}}{C_1 - L_1} = \frac{0,8 \cdot 1800 \cdot 31 + 0,4 \cdot 1800 \cdot 17}{60}$$

$$q_3^N = 948 \text{ veí/h}$$

e dessa forma podemos calcular o tempo de ciclo da interseção 2 de maneira similar àquele computado para a primeira interseção, ou seja,

$$C_2 = \frac{1.5L_2 + 5}{1 - \sum_{i \in I_2} q_i^N / S_i}$$

$$C_2 = \frac{1.5(6 + 6) + 5}{1 - 948/1800 - 150/1800} = 58,97s \approx 60s$$

Somos agora capazes de calcular os valores das frações de verde da segunda interseção usando a mesma relação já apresentada.

$$u_{2,1} = \frac{(q_3^N / S_3) (C_2 - L_2)}{\sum_{i \in I_2} q_i^N / S_i}, \text{ para todo } i \in F_2$$

$$u_{2,1} = \frac{(948/1800) (60 - 12)}{948/1800 + 150/1800} = 41,44s \approx 41s$$

$$\Rightarrow u_{2,2} = C_2 - L_2 - u_{2,1} = 7s$$

Através desse exemplo fica evidente a necessidade de uma seqüência lógica na determinação dos ciclos e frações de verde pelo procedimento Webster. Mais especificamente, deve-se seguir uma ordem topológica em um grafo acíclico, o que torna o método altamente dependente da topologia da rede. Caso o grafo apresente ciclos, pode-se utilizar programas como Transyt<sup>©</sup> na definição não apenas dos percentuais de verde e tempo de ciclo, mas também de defasagens.

Certas estruturas podem levar a situações de indefinição onde não há garantia de solução. Apesar disso tal procedimento é muito popular devido a sua qualidade e simplicidade.



# Referências Bibliográficas

- [1] K. Aboudolas, M. Papageorgiou, e E. Kosmatopoulos. Control and optimization methods for traffic signal control in large-scale congested urban road networks. Em *Proceedings of the American Control Conference*, páginas 3132–3138, Nova York, EUA, Julho 2007.
- [2] A. Bell, K. Ge, e B. Popkin. The road to obesity or the path to prevention: Motorized transportation and obesity in china. *Obesity Research*, 10:277–283, 2002.
- [3] D. P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, EUA, 1995.
- [4] F. Boillot, J. M. Blosseville, J. B. Lesort, V. Motyka, M. Papageorgiou, e S. Sellam. Optimal signal control of urban traffic networks. Em *Proceedings of the sixth IEE international conference on road traffic monitoring and control*, páginas 75–79, Londres, Inglaterra, 1992.
- [5] E. F. Camacho e C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer-Verlag, 2004.
- [6] E. Camponogara e L. B. de Oliveira. Distributed optimization for model predictive control of linear dynamic networks. Technical report, UFSC, Florianópolis, 2007. URL <http://www.das.ufsc.br/~camponog/papers/dmpc-tuc.pdf>.
- [7] E. Camponogara e S. N. Talukdar. Designing communication networks to decompose network control problems. *INFORMS Journal on Computing*, 17(2):207–223, 2005.
- [8] E. Camponogara e S. N. Talukdar. Distributed model predictive control: synchronous and asynchronous computation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A*, 37(5):732–745, Setembro 2007.
- [9] E. Camponogara, D. Jia, B. H. Krogh, e S. N. Talukdar. Distributed model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, 22(1):44–52, Fevereiro 2002.
- [10] R. C. Carlson. Aplicação de maximização de largura de banda no controle de tráfego urbano em tempo-real. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, UFSC, Florianópolis, 2006.

- [11] Centro de Documentação da Indústria Automobilística, editor. *Anuário da Indústria Automobilística Brasileira*. ANFAVEA, São Paulo, Janeiro 2008. URL <http://www.anfavea.com.br/anuario.html>.
- [12] L. B. de Oliveira e E. Camponogara. Predictive control for urban traffic networks: initial evaluation. Em *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Foz do Iguaçu, Brasil, Outubro 2007.
- [13] C. Diakaki. *Integrated Control of Traffic Flow in Corridor Networks*. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Produção e Gerenciamento, Universidade Técnica de Creta, 1999.
- [14] C. Diakaki, M. Papageorgiou, e partners of the project TABASCO. Urban integrated traffic control implementation strategies. Technical Report Project TABASCO (TR1054), Transport Telematics Office, Bruxelas, Belgium, Setembro 1997.
- [15] C. Diakaki, M. Papageorgiou, e K. Aboudolas. A multivariable regulator approach to traffic-responsive network-wide signal control. *Control Engineering Practice*, 10:183–195, 2002.
- [16] C. Diakaki, V. Dinopoulou, K. Aboudolas, M. Papageorgiou, E. Ben-Shabat, E. Seider, e A. Leibov. Extensions and new applications of the traffic signal control strategy *tuc*. *transportation Research Board*, 1856:202–211, 2003.
- [17] J. L. Farges, J. J. Henry, e J. Tufal. The prodyn real-time traffic algorithm. Em *Proceedings of the fourth IFAC symposium on transportation systems*, páginas 307–312, Baden-Baden, Alemanha, 1983.
- [18] N. H. Gartner. Opac: a demand-responsive strategy for traffic signal control. *Transportation Research Record*, 906:75–84, 1983.
- [19] D. C. Gazis. Traffic control: From hand signals to computers. *IEEE Proceedings*, 59(7): 1090 – 1099, 1971.
- [20] D. C. Gazis e L. C. Edie. Traffic flow theory. *IEEE Proceedings*, 56(4):458 – 471, 1968.
- [21] D. C. Gazis e R. B. Potts. The oversaturated intersection. Em *Proceedings of the Second International Symposium on Traffic Theory*, páginas 221–237, Londres, Inglaterra, 1963.
- [22] P. B. Hunt, D. I. Robertson, R. D. Bretherton, e R. I. Winton. SCOOT – a traffic-responsive method of coordinating signals. Technical report, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, Inglaterra, 1981.
- [23] G. Ingram e Z. Liu. Determinants of motorization and road provision. Technical report, World Bank, 1999. URL <http://ssrn.com/abstract=569257>.

- [24] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Nova Jersey, EUA, 1980.
- [25] F. Kühne. Controle preditivo de robôs móveis não holonômicos. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, UFRGS, Porto alegre, 2005.
- [26] W. S. Levine. *The Control Handbook*. CRC Press, 1996. ISBN 0849385709.
- [27] H. K. Lo. A novel traffic signal control formulation. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 33(6):433–448, aug 1999.
- [28] H. K. Lo, E. Chang, e Y. C. Chan. Dynamic network traffic control. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 35(8):721–744, sep 2001.
- [29] P. R. Lowrie. Scats: The Sydney co-ordinated adaptive traffic system — principles, methodology, algorithms. Em *Proceedings of the IEEE international conference on road traffic signalling*, páginas 67–70, 1982.
- [30] U. Mackenroth. *Robust control systems : theory & case studies*. Springer, Junho 2004.
- [31] G. Martin. Global motorization, social ecology and china. *Area*, 39(1):66–73, 2007.
- [32] V. Mauro e C. Di Taranto. Utopia. Em *Proceedings of the sixth IFAC/IFIP/IFORS symposium on control, computers, communications on transportation*, páginas 245–252, 1989.
- [33] P. Mirchandani e L. Head. A real-time traffic signal control system: architecture, algorithms, and analysis. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 9(6): 415–432, 2001.
- [34] M. Papageorgiou. *Traffic Control*, chapter 8, páginas 243–277. Springer, 2003.
- [35] M. Papageorgiou. An integrated control approach for traffic corridors. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 3(1):19–30, feb 1995.
- [36] M. Papageorgiou, C. Diakaki, V. Dinopoulou, A. Kotsialos, e Y. Wang. Review of road traffic control strategies. *IEEE Proceedings*, 91(12):2043–2067, 2003.
- [37] R. Pendyala e R. Kitamura. The rapid motorization of Asia: implications for the future. *Transportation*, 34(3):275–279, 2007.
- [38] A. Popov, A. Hegyi, R. Babuška, e H. Werner. Dynamic speed link control against shock waves on freeways using a distributed controller design approach. Em *Transportation Research Board Annual Meeting*, 2007.
- [39] R. Rebeiro. *Traffic Theory and Control*, chapter 13, páginas 432–469. J. Belzer, 1979.

- 
- [40] Y. Wakasa, K. Hanaoka, T. Iwasa, e K. Tanaka. Modeling for control of traffic signal systems. *Control Applications, 2005. CCA 2005. Proceedings of 2005 IEEE Conference on*, páginas 1594–1599, August 2005.
- [41] F. V. Webster. Traffic signal settings. Technical Report 39, Department of Scientific and Industrial Research, Road Research Laboratory, Londres, Inglaterra, 1969.
- [42] B.-W. Wie, R. L. Tobin, D. Bernstein, e T. L. Friesz. A comparison of system optimum and user equilibrium dynamic traffic assignments with schedule delays. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 3(6):389–411, dec 1995.
- [43] X.-H. Yu e W. W. Recker. Stochastic adaptive control model for traffic signal systems. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 14(4):263–282, August 2006.
- [44] C. Yuan, X. Yang, e F. Shen. Fixed cycle strategy in oversaturated network traffic control. *Intelligent Control and Automation, 2006. WCICA 2006. The Sixth World Congress on*, 2:8674–8678, June 2006.