

**Universidade Federal de Santa Catarina**  
**Curso de Pós-Graduação em Matemática e**  
**Computação Científica**

**Estabilidade exponencial de modelos dissipativos**  
**via teoria de semigrupos**

**Daiane Cristina Zanatta**

**Orientador: Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão**

**Florianópolis**

**Agosto de 2008**

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

Estabilidade exponencial de modelos dissipativos  
via teoria de semigrupos

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais.

Daiane Cristina Zanatta

Florianópolis

Agosto de 2008

# **Estabilidade exponencial de modelos dissipativos via teoria de semigrupos**

por

**Daiane Cristina Zanatta**

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre” em Matemática ,  
Área de Concentração em Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma  
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica.

---

Clóvis Caesar Gonzaga

Coordenador da Pós-Graduação em Matemática

Comissão Examinadora

---

**Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (Orientador-UFSC)**

---

**Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira  
(Co-orientador-UFSC)**

---

**Prof. Dr. Luis Antonio Cortés Vega  
(Universidade de Antofagasta - Chile)**

---

**Prof. Dr. Milton dos Santos Braitt (UFSC)**

**Florianópolis, Agosto de 2008.**

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força e saúde para superar os obstáculos.

À minha família que me apoiou nestes anos de estudo e que não mediram esforços para que se concluisse esta importante fase de minha vida.

Ao meu namorado Rodrigo que sempre esteve presente.

Meus agradecimentos sinceros, ao professor Dr. Ruy Coimbra Charão e ao professor Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira que não somente orientaram este trabalho, mas se mostraram grandes profissionais e pessoas de boa índole.

Também, aos amigos que fiz no curso, pois foram muitos os momentos felizes e horas de estudos que compartilhamos.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro durante o período de 05/2007 e 08/2008.

# Resumo

Neste trabalho estudamos via teoria de semigrupos a existência e a unicidade de soluções do problema de valor inicial e de contorno associado com uma equação viscoelástica unidimensional com dissipação distribuída de modo uniforme sobre o domínio. Também estudamos o mesmo problema para a equação da onda unidimensional com dissipação localmente distribuída em parte do domínio e o sistema linear termoelástico unidimensional. Finalmente, consideramos a equação da onda bidimensional com uma dissipação localmente distribuída em parte de um domínio retangular. Usando o Teorema de Gearhart se obtém a estabilidade exponencial para esses modelos.

# Abstract

In this work we study, using semigroups theory, the existence and uniqueness of solutions for the initial boundary value problem associated with the viscoelastic equation with a dissipative term on a bounded interval of  $\mathbb{R}$ . We also study the same problem for the wave equation with a locally distributed damping and the linear one-dimensional thermoelastic system. Finally, we consider the two-dimensional wave equation in a bounded rectangular domain. Using the Gearhart theorem one obtains the exponential stability for these models.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Resultados preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Análise funcional . . . . .	4
1.2 Espaços de Sobolev . . . . .	7
<b>2 Teoria de semigrupos</b>	<b>9</b>
2.1 Propriedades dos semigrupos de classe $C_0$ . . . . .	10
2.2 Caracterização dos geradores infinitesimais de semigrupos de classe $C_0$ .	18
<b>3 Estabilidade exponencial de semigrupos</b>	<b>21</b>
3.1 O Teorema de Gearhart . . . . .	21
<b>4 Aplicações</b>	<b>30</b>
4.1 Sistema linear viscoelástico . . . . .	30
4.1.1 Existência e unicidade . . . . .	31
4.1.2 Estabilidade exponencial . . . . .	34
4.2 Equação da onda unidimensional com dissipação localmente distribuída	38
4.2.1 Existência e unicidade . . . . .	39
4.2.2 Estabilidade exponencial . . . . .	43
4.3 Sistema linear termoelástico . . . . .	50
4.3.1 Existência e unicidade . . . . .	50
4.3.2 Estabilidade exponencial . . . . .	56
4.4 Equação da onda bidimensional com dissipação localmente distribuída .	63

4.4.1	Existência e unicidade . . . . .	64
4.4.2	Estabilidade exponencial . . . . .	68
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>75</b>



# Introdução

Neste trabalho estudamos via teoria de semigrupos a existência, unicidade e a estabilidade exponencial de soluções do sistema linear viscoelástico unidimensional com dissipação distribuída de modo uniforme em todo o domínio. Também estudamos o mesmo problema para a equação da onda unidimensional com a dissipação localmente distribuída em parte do domínio. O sistema linear termoelástico unidimensional e a equação da onda em um domínio bidimensional retangular com dissipação localmente distribuída também são estudados. A estabilidade exponencial é obtida como aplicação do Teorema de Gearhart.

No primeiro capítulo, apresentamos algumas definições e teoremas relativos à Análise Funcional e espaços de Sobolev, conceitos que serão usados nos capítulos subsequentes. No segundo capítulo, apresentamos algumas definições e propriedades importantes de semigrupos de classe  $C_0$  em um espaço de Banach, como por exemplo, a diferenciabilidade de um semigrupo, bem como os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips que tratam da caracterização de um semigrupo de classe  $C_0$ . No terceiro capítulo, estudamos o Teorema de Gearhart que estabelece as condições necessárias e suficientes para um semigrupo de classe  $C_0$  ser exponencialmente estável. Por fim, no quarto capítulo, demonstramos a existência, unicidade e o decaimento exponencial da solução dos sistemas dissipativos mencionados acima. Para obtermos a existência e unicidade de solução para os modelos dissipativos que estudamos, reescrevemos os modelos como problemas de primeira ordem no tempo, a saber:

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

sendo  $A$  um operador linear associado com o modelo em consideração. Em seguida, mostramos que  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Assim, usando as propriedades dos semigrupos de classe  $C_0$  em um espaço de Banach, mostramos que  $U(t) = S(t)U_0$  é a única solução do problema considerado. Provamos a estabilidade exponencial do semigrupo de contrações de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , associado aos sistemas dissipativos usando o Teorema de Gearhart. A demonstração da estabilidade exponencial é feita por contradição.

# Capítulo 1

## Resultados preliminares

### 1.1 Análise funcional

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos sobre o resolvente e o espectro de um operador linear e alguns teoremas que serão usados nos capítulos 2, 3 e 4.

**Definição 1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Um operador linear é uma aplicação linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ , com  $D(A)$  o domínio de  $A$ . Diz-se que o operador linear é limitado se existe uma constante  $C \geq 0$  tal que*

$$\|Au\|_Y \leq C \|u\|_X, \text{ para todo } u \in D(A).$$

Neste caso, se o domínio de  $A$  é denso em  $X$  então  $A$  pode ser estendido a todo  $X$ .

Representa-se por  $B(X, Y)$  a família  $A : X \rightarrow Y$  dos operadores lineares limitados de  $X$  em  $Y$ . A função real  $\|\cdot\|$  definida por

$$\|A\|_{B(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Ax\|_Y < \infty,$$

é uma norma sobre  $B(X, Y)$ .

Tem-se que  $B(X, Y)$  com a norma acima é um espaço de Banach e  $B(X)$  representa o conjunto dos operadores lineares limitados de  $X$  em  $X$ .

No próximo capítulo, para iniciarmos o estudo das propriedades dos semi-grupos de classe  $C_0$  em um espaço de Banach  $X$ , precisaremos do seguinte teorema:

**Teorema 1** (Teorema da Limitação Uniforme). *Sejam  $X$  espaço de Banach e  $Y$  espaço vetorial normado. Seja  $(T_n)_{n \in I}$  uma família em  $B(X, Y)$ , com  $I$  conjunto de índices qualquer. Supor que para cada  $x \in X$ , o conjunto  $\{T_n x\}_{n \in I}$  é limitado em  $Y$ . Então,  $\{T_n\}_{n \in I}$  é limitada em  $B(X, Y)$ , isto é, existe  $M > 0$  tal que  $\|T_n\| \leq M$ , para todo  $n \in I$ , com  $M$  independente de  $n$ .*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Groetsch [4], pg. 51.

**Definição 2.** *Seja  $X$  um espaço de Banach e seja  $A$  um operador linear em  $X$ .*

(i) *O conjunto dos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que o operador  $\lambda I - A$  é inversível, seu inverso é limitado e tem domínio denso em  $X$  é o conjunto resolvente de  $A$ .*

(ii) *O conjunto  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  é o espectro de  $A$ .*

**Notação 1.** *Denotamos por  $\rho(A)$  o conjunto resolvente e por  $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$  o operador resolvente de  $A$ .*

**Teorema 2.** *Seja  $X$  um espaço de Banach e seja  $A$  um operador linear e contínuo, então  $\sigma(A)$  é um conjunto fechado e  $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq \|A\|\}$ .*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Rivera [7], pg. 107.

**Definição 3.** *Seja  $A$  um operador linear e contínuo num espaço de Banach. Diz-se que*

$$r_\sigma(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

*é o raio espectral de  $A$ .*

**Teorema 3.** *Seja  $A$  um operador linear e contínuo, então*

$$r_\sigma(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

A demonstração pode ser encontrada em Rivera [7], pg. 107.

**Teorema 4.** *Seja  $X$  um espaço de Banach e seja  $A$  um operador linear e contínuo de  $X$ . Se  $\|A\| < 1$ , então  $(I - A)$  é inversível, seu inverso é um operador limitado em todo  $X$  e*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j = I + A + A^2 + A^3 + \dots$$

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Kreyszig [5], pg. 375.

**Definição 4.** *i) Diz-se que uma forma bilinear  $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua se existe  $c > 0$  tal que*

$$|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|, \text{ para todo } u, v \in H.$$

*ii) Uma forma bilinear  $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  é dita coerciva se existe  $k > 0$  tal que*

$$a(u, u) \geq k\|u\|^2, \text{ para todo } u \in H.$$

**Teorema 5** (Lax-Milgram). *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $a(u, v)$  uma forma bilinear contínua e coerciva sobre  $H$ . Seja  $f \in H'$ . Então, existe único  $u \in H$  tal que  $a(u, v) = (f, v)$ , para todo  $v \in H$ .*

A demonstração pode ser encontrada em Brezis [6], pg. 84.

**Teorema 6.** *Seja  $X$  um espaço normado e seja  $A : X \rightarrow X$  um operador linear compacto. Então, se  $\lambda \neq 0$  a equação*

$$Ax - \lambda x = y \tag{1.1}$$

*possui uma solução  $x$  para cada  $y \in X$  se, e somente se, a equação*

$$Ax - \lambda x = 0$$

*admite apenas a solução trivial  $x = 0$ . Neste caso, a solução da equação (1.1) é única e  $A - \lambda I$  tem inversa limitada.*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Kreyszig [5], pg. 443.

## 1.2 Espaços de Sobolev

Nesta seção, apresentamos alguns resultados da teoria dos espaços de Sobolev que são necessários neste trabalho, como a Desigualdade de Poincaré e um Teorema de Regularidade Elíptica.

**Definição 5.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $m \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p < \infty$ . O espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  é o espaço das funções  $f \in L^p(\Omega)$  tal que qualquer derivada distribucional de  $f$ , até ordem  $m$ , é uma função de  $L^p(\Omega)$ . Isto é,*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, e |\alpha| \leq m\}.$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach com respeito a norma

$$\|f\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando  $p = \infty$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach com respeito a norma

$$\sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)| = \inf_{M > 0} \{M > 0; |u(x)| \leq M \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

**Notação 2.** *Quando  $p=2$ , escreve-se  $H^m(\Omega)$  ao invés de  $W^{m,2}(\Omega)$ .*

O espaço  $H^m(\Omega)$  munido com o produto interno

$$(f, g)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)}$$

é um espaço de Hilbert.

**Definição 6.** *Seja  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ . O espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$  é definido como o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $W^{m,p}(\Omega)$ . Analogamente,  $H_0^m(\Omega)$  é o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  em  $H^m(\Omega)$ .*

**Teorema 7** (Desigualdade de Poincaré). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto limitado e  $1 \leq p < \infty$ . Então, existe uma constante  $C$ , que depende de  $\Omega$  e  $p$ , tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Teorema 8** (Regularidade Elíptica). *Seja  $L$  um operador diferencial elíptico de ordem  $2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , definido em um aberto regular  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $u \in D'(\Omega)$ , sendo  $D'(\Omega)$  o espaço das distribuições. Seja  $u$  solução de  $Lu=f$ , no sentido distribucional, com  $f \in L^2(\Omega)$ . Então,  $u \in H^{2m}$ .*

Este teorema é bem conhecido e sua demonstração pode ser vista na referência [10].

# Capítulo 2

## Teoria de semigrupos

Neste capítulo, apresentamos a definição de semigrupo de classe  $C_0$ , algumas propriedades dos semigrupos de classe  $C_0$  em um espaço de Banach  $X$ , bem como a caracterização dos geradores infinitesimais de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe  $C_0$ .

**Definição 7.** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Uma família  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo em  $B(X)$  se:*

- i)  $S(0)=I$ , com  $I$  operador identidade de  $X$ ;*
- ii)  $S(t+s)=S(t)S(s)$ , para todo  $t$  e  $s \in [0, \infty)$ .*

**Definição 8.** *O semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é de classe  $C_0$  se*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \text{ para todo } x \in X.$$

Um exemplo de semigrupo de classe  $C_0$  é a função exponencial  $S(t) = e^{At}$  que pode ser definida quando  $A$  for um operador linear limitado de um espaço de Banach  $X$ . No caso em que  $A$  é um operador linear não limitado, com certas propriedades boas, pode-se também definir  $e^{At}$ . Isso é feito pela teoria de semigrupos (Gomes [1], Pazy [3]).



## 2.1 Propriedades dos semigrupos de classe $C_0$

**Proposição 1.** *Se  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo de classe  $C_0$ , então  $\|S(t)\|$  é uma função limitada em todo intervalo limitado  $[0, T]$ .*

Demonstração:

**Afirmção:** Existem  $\delta > 0$  e  $M \geq 1$ , tal que  $\|S(t)\| \leq M$ , para todo  $t \in [0, \delta]$ . Se isso não acontecesse, haveria uma seqüência  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $t_n \rightarrow 0^+$  tal que  $\|S(t_n)\| \geq n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então, pelo teorema 1,  $\|S(t_n)x\|$  não seria limitado para algum  $x \in X$ , o que entraria em contradição com a definição 8.

Além disso, temos que  $M \geq 1$ , pois pela condição a) da definição de semigrupo de classe  $C_0$ ,  $\|S(0)\| = 1$ .

Seja  $t \in [0, T]$ . Então, para algum inteiro não negativo  $n$  e algum  $r \in \mathbb{R}$ , com  $0 \leq r < \delta$  temos que  $t = n\delta + r$ . Logo,

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|S(n\delta + r)\| \\ &= \|S(\delta)^n S(r)\| \leq \|S(\delta)^n\| \|S(r)\| \leq M^n M = M^{n+1} \end{aligned}$$

o que mostra que  $\|S(t)\|$  é uma função limitada em  $[0, T]$ .

□

**Corolário 1.** *Todo semigrupo de classe  $C_0$  é fortemente contínuo em  $\mathbb{R}^+$ , ou seja, se  $t \in \mathbb{R}^+$  então*

$$\lim_{s \rightarrow t} S(s)x = S(t)x, \text{ para todo } x \in X.$$

Demonstração:

Consideremos  $t \geq 0$ . Para cada  $x \in X$  e  $h > 0$ , segue que

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| = \|S(t)[S(h) - I]x\| \leq \|S(t)\| \|[S(h) - I]x\| \rightarrow 0$$

quando  $h \rightarrow 0$ , pois  $\|S(t)\|$  é limitada e  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \|[S(h) - I]x\| = 0$ , para todo  $x \in X$ .

Também para  $x \in X$  e para os valores de  $h$  tais que  $0 < h < t$  resulta

$$\|S(t-h)x - S(t)x\| = \|S(t-h)[I - S(h)]x\| \leq \|S(t-h)\| \|[I - S(h)]x\| \rightarrow 0$$

quando  $h \rightarrow 0^+$ .

Assim,  $\lim_{s \rightarrow t} S(s)x = S(t)x$ , para todo  $x \in X$ .

□

**Observação 1.** *Seja  $A$  é um operador linear e limitado de  $X$ . Então,*

$$\|e^{tA}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

*Se  $w \geq \|A\|$ , então  $\|e^{tA}\| \leq e^{tw}$ , para todo  $t \geq 0$ . Existe uma propriedade semelhante a esta para os semigrupos, que será mostrada na próxima proposição.*

**Definição 9.** *Uma função  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $X$  é um espaço vetorial real, é subaditiva se satisfaz  $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$ , para todo  $t, s \in X$ .*

**Lema 1.** *Seja  $p$  uma função subaditiva em  $\mathbb{R}^+$  e limitada superiormente em todo intervalo limitado. Então,  $\frac{p(t)}{t}$  tem limite quando  $t \rightarrow \infty$  e*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}. \quad (2.1)$$

Demonstração:

Defina  $w_0 = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}$ , sendo  $-\infty \leq w_0 < \infty$ . A demonstração será dividida em dois casos.

**Caso 1:**  $w_0 > -\infty$ .

Seja  $\epsilon > 0$ . Da definição de ínfimo, existe  $T > 0$  tal que  $\frac{p(T)}{T} \leq w_0 + \epsilon$ .

Sejam  $t > T$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $r$  real com  $0 \leq r < T$  tal que  $t = nT + r$ .

Considerando que  $p$  é subaditiva, resulta da definição de  $w_0$  que

$$w_0 \leq \frac{p(t)}{t} \leq \frac{np(T) + p(r)}{t} = \frac{nTp(T)}{Tt} + \frac{p(r)}{t} \leq \frac{nT(w_0 + \epsilon)}{t} + \frac{p(r)}{t}.$$

Também do fato que  $p$  é limitada superiormente em  $[0, T)$ , passando limite quando  $t \rightarrow \infty$  na desigualdade acima, obtemos

$$w_0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \leq w_0 + \epsilon$$

Como  $\epsilon$  é arbitrário, está provado (2.1) para  $w_0 > -\infty$ .

**Caso 2:**  $w_0 = -\infty$ .

Para cada real  $w$  existe  $T > 0$  tal que  $\frac{p(T)}{T} \leq w$ . De maneira análoga ao caso anterior, obtém-se  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \leq w$ .

Como  $w$  é arbitrário, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} = -\infty.$$

Isso conclui a prova do lema. □

**Proposição 2.** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$ . Então,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log \|S(t)\|}{t} = w_0 \quad (2.2)$$

e para cada  $w > w_0$ , existe uma constante  $M \geq 1$  tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt}, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (2.3)$$

Demonstração:

A função  $\log \|S(t)\|$  é subaditiva. De fato,

$$\begin{aligned} \log \|S(t+s)\| &= \log \|S(t)S(s)\| \\ &\leq \log (\|S(t)\| \|S(s)\|) \\ &= \log \|S(t)\| + \log \|S(s)\|. \end{aligned}$$

Pela proposição 1, a função  $\|S(t)\|$  é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Assim,  $\log \|S(t)\|$  é uma função limitada superiormente em intervalos limitados e, pelo lema 1, escolhendo  $p(t) = \log \|S(t)\|$  concluímos que (2.2) é válida.

Da definição de limite e de (2.2), se  $w > w_0$ , existe  $t_0$  tal que para  $t > t_0$  vale a desigualdade

$$\frac{\log \|S(t)\|}{t} < w. \quad (2.4)$$

Do fato que  $\|S(t)\| \leq M_0$ , para todo  $t \in [0, t_0]$  e  $\|S(0)\| = 1$ , concluímos que  $M_0 \geq 1$ . Agora, considerando  $w \geq 0$  em (2.4), obtemos

$$\log \|S(t)\| \leq wt + \log M_0, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados da desigualdade acima, temos que

$$\|S(t)\| \leq e^{wt} e^{\log M_0} = M_0 e^{wt}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Considerando  $M = M_0$ , verifica-se (2.3).

Analogamente, se  $w < 0$  em (2.4), vemos que

$$\log \|S(t)\| \leq wt - wt_0 + \log M_0, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Da mesma forma que o procedimento anterior

$$\|S(t)\| \leq e^{wt} e^{-wt_0} e^{\log M_0} = M_0 e^{-wt_0} e^{wt}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Considerando  $M = M_0 e^{-wt_0}$ , obtemos (2.3).

Para concluir a prova, podemos observar que  $M \geq 1$  em ambos os casos, pois  $M_0 \geq 1$ .

□

**Observação 2.** Quando  $w_0 < 0$ , existe  $M \geq 1$  tal que  $\|S(t)\| \leq M$ , para todo  $t \geq 0$ . Nesse caso, diz-se que  $S$  é um semigrupo uniformemente limitado de classe  $C_0$ . Se, além disto,  $M = 1$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é dito semigrupo de contrações de classe  $C_0$ .

**Definição 10.** Seja  $X$  um espaço de Banach e seja  $D(A) = \{x \in X : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe}\}$ . O operador  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  definido por  $Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x$  é o gerador infinitesimal do semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Notação 3.** Denotamos por  $A_h$ , com  $h > 0$ , o operador linear limitado dado por  $\frac{S(h) - I}{h}$ .

A próxima proposição é muito importante no estudo dos semigrupos de classe  $C_0$ . Ela trata da diferenciabilidade de um semigrupo associado a seu gerador infinitesimal.

**Proposição 3.** *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$  e  $A$  seu gerador infinitesimal.*

*i) Se  $x \in D(A)$ , então*

$$S(t)x \in D(A) \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } \frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax;$$

*ii) Se  $x \in D(A)$ , então*

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau;$$

*iii) Se  $x \in X$  e  $t \in \mathbb{R}$  com  $t \geq 0$ , então*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x;$$

*iv) Se  $x \in X$ , então*

$$\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A) \text{ e } S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau)x d\tau.$$

Demonstração:

(i):

Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  semigrupo de classe  $C_0$  e  $A$  seu gerador. Para  $t > 0$  e  $h > 0$ , vale a identidade

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h}x = \frac{S(h) - I}{h}S(t)x = A_h S(t)x = S(t)A_h x.$$

Assim, para  $x \in D(A)$ , o termo  $S(t)A_h x$  tem um limite quando  $h \rightarrow 0$ , isto é,

$$S(t) \left( \frac{S(h) - I}{h} \right) x = S(t)A_h x \rightarrow S(t)Ax,$$

pela definição de  $A$  ser gerador infinitesimal. Logo,  $S(t)x \in D(A)$  e

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{2.5}$$

Também para  $0 < h < t$  e  $x \in D(A)$  segue que

$$\begin{aligned} \frac{S(t-h) - S(t)}{-h}x &= S(t-h)A_hx \\ &= S(t-h)(A_hx - Ax) + S(t-h)Ax \rightarrow S(t)Ax \end{aligned}$$

quando  $h \rightarrow 0$ . Isto se justifica pois  $A_hx \rightarrow Ax$ , quando  $h \rightarrow 0$  e, pela proposição 1,  $\|S(t)\|$  é limitada para  $0 < h < t$ . Assim, o termo  $S(t-h)(A_hx - Ax) \rightarrow 0$  quando  $h \rightarrow 0$ . Além disso, da continuidade forte do semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  temos que  $S(t-h)Ax \rightarrow S(t)Ax$ . Portanto,

$$\frac{d^-}{dt}S(t)x = S(t)Ax. \quad (2.6)$$

Assim, de (2.5) e (2.6), temos

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

(ii):

Consideremos  $x \in D(A)$  e  $t, s$  números positivos. Integrando

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$$

de  $s$  a  $t$ , obtemos

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau.$$

(iii):

Pelo corolário 1,  $\lim_{\tau \rightarrow t} S(\tau)x = S(t)x$ , para todo  $x \in X$  e  $t \geq 0$ . Isto é, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para  $|\tau - t| < \delta$  resulta  $\|S(\tau)x - S(t)x\| < \epsilon$ .

Conseqüentemente, para  $x \in X$  e  $0 < |h| \leq \delta$  resulta

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (S(\tau)x - S(t)x) d\tau \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|S(\tau)x - S(t)x\| d\tau < \epsilon.$$

(iv):

Agora para  $x \in X$  e  $h > 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} A_h \int_0^t S(\tau)x d(\tau) &= \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(\tau)x d\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t S(h + \tau)x d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau)x d\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x d\tau. \end{aligned}$$

Tomando limite quando  $h \rightarrow 0$ , pelo item (iii) anterior, vemos que

$$A \int_0^t S(\tau)x d(\tau) = S(t)x - x.$$

□

**Proposição 4.** *i) O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$  é um operador linear fechado e seu domínio é denso em  $X$ .*

*ii) Um operador linear  $A$ , fechado e com domínio denso em  $X$ , é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe  $C_0$ .*

Demonstração:

(i):

Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$  e seja  $A$  seu gerador infinitesimal. Para cada  $x \in X$  e  $h > 0$ , considere  $x_h = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x dt$ . Portanto, da proposição 3, resulta que  $x_h \in D(A)$  e, como  $x_h \rightarrow x$  quando  $h \rightarrow 0$ , temos que  $x \in \overline{D(A)}$ . Logo,  $D(A)$  é denso em  $X$ .

Agora, provaremos que  $A$  é fechado.

Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência no domínio de  $A$  tal que  $x_n \rightarrow x$  e  $Ax_n \rightarrow y$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Da proposição 3, segue que

$$S(h)x_n - x_n = \int_0^h S(t)Ax_n dt. \quad (2.7)$$

E, pela proposição 1, existe  $M > 0$  tal que  $\|S(t)\| \leq M$ , para todo  $t \in [0, h]$ . Logo,

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \leq \|S(t)\| \|Ax_n - y\| \leq M \|Ax_n - y\|, \text{ para todo } t \in [0, h].$$

Como  $Ax_n \rightarrow y$  quando  $n \rightarrow \infty$ , concluímos que  $S(t)Ax_n \rightarrow S(t)y$  uniformemente em  $[0, h]$ . Assim, passando limite quando  $n \rightarrow \infty$  em (2.7), segue que

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)y dt.$$

Portanto,

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y dt \rightarrow y$$

quando  $h \rightarrow 0$ . Daí, concluímos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h}x$  existe. Assim,  $x \in D(A)$  e  $Ax = y$ .

Portanto,  $A$  é um operador fechado.

(ii):

Suponhamos que  $\{S_1(t)\}_{t \geq 0}$  e  $\{S_2(t)\}_{t \geq 0}$  possuem o mesmo gerador infinitesimal  $A$ . Se  $0 \leq s \leq t < \infty$ , para cada  $x \in D(A)$ , a função

$$\phi(s)x = S_1(t-s)S_2(s)x$$

é diferenciável no intervalo  $0 \leq s \leq t$  e, pela proposição 3,

$$\frac{d}{ds}\phi(s)x = S_1(t-s)AS_2(s)x - S_1(t-s)AS_2(s)x = 0.$$

Logo,  $\phi(s)x$  é constante para  $0 \leq s \leq t$ . Então,

$$\phi(0)x = S_1(t)S_2(0)x = S_1(t)x$$

$$\phi(t)x = S_1(0)S_2(t)x = S_2(t)x$$

para todo  $x \in D(A)$ . Como  $D(A)$  é denso em  $X$  e  $S_1(t)$  e  $S_2(t)$  são operadores contínuos de  $X$ , segue que

$$S_1(t)x = S_2(t)x, \text{ para todo } x \in X,$$

isto é,  $S_1(t) = S_2(t)$ .

□

**Observação 3.** Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C_0$  e  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  seu gerador infinitesimal. Então,  $U(t) = S(t)U_0$  é a única solução do problema

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$



para  $U_0 \in D(A)$ . Além disso,

$$U \in C^1([0, \infty), X) \cap C([0, \infty), D(A)).$$

Esses fatos seguem de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  ser um semigrupo de classe  $C_0$  e da Proposição 3.

## 2.2 Caracterização dos geradores infinitesimais de semigrupos de classe $C_0$

Nesta seção, apresentamos os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips, os quais caracterizam geradores infinitesimais de semigrupos de classe  $C_0$ . O teorema de Lumer-Phillips estuda o caso específico dos semigrupos lineares de contrações de classe  $C_0$ .

**Teorema 9** (Hille Yosida). *Seja  $X$  um espaço de Banach. Um operador linear  $A$ , definido em  $D(A) \subset X$  e com valores em  $X$  é um gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de classe  $C_0$  se, e somente se*

- i)  $A$  é fechado e seu domínio é denso em  $X$ ;*
- ii) Existam números reais  $M$  e  $w$  tal que, para cada real  $\lambda > w$  se tenha  $\lambda \in \rho(A)$  e  $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ .*

Este teorema caracteriza um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ . Encontramos sua demonstração em [1].

**Notação 4.** *Escrevemos  $A \in G(M, \omega)$  para indicar que  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , que satisfaz a condição  $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$  para todo  $t \geq 0$ .*

**Corolário 2.** *Para que um operador linear  $A$  seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , tal que  $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$ ,  $t \geq 0$  é necessário e suficiente que*

*A seja fechado, seu domínio seja denso e exista um número real  $w$ , tal que se  $\lambda > w$ , então*

$$\lambda \in \rho(A) \text{ e } \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - w}.$$

Demonstração:

Como  $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \|R(\lambda, A)\|^n \leq \frac{1}{(\lambda - w)^n}$ , então o operador  $A$  satisfaz as condições do teorema 9 com  $M = 1$ .

□

**Corolário 3.** *Para que um operador  $A$  seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe  $C_0$ , é necessário e suficiente que  $A$  seja fechado, seu domínio denso em  $X$ ,  $(0, \infty) \subset \rho(A)$  e para todo  $\lambda > 0$ ,  $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$ .*

Este corolário caracteriza um gerador infinitesimal de semigrupos de contrações de classe  $C_0$  e sua demonstração é um caso particular do corolário anterior, tomando  $w = 0$ .

A seguir, apresentamos uma outra caracterização dos geradores infinitesimais de semigrupos de contrações de classe  $C_0$ , o Teorema de Lumer-Phillips. Para isso, seja  $X$  um espaço de Banach e  $X'$  o dual de  $X$ . Para cada  $x \in X$ , definimos o conjunto  $J(x) \subset X'$  por

$$J(x) = \{x' \in X'; (x, x') = \|x\|^2 = \|x'\|^2\}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (Brezis [6], pg. 03),  $J(x) \neq \emptyset$  para todo  $x \in X$ .

Uma aplicação **dualidade** é uma aplicação  $j : X \rightarrow X'$  tal que  $j(x) \in J(x)$ , para todo  $x \in X$ . Pela definição de  $j$ ,  $\|j(x)\| = \|x\|$ .

**Definição 11.** *Um operador linear  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é dito dissipativo relativamente a uma aplicação dualidade  $j$ , se*

$$\operatorname{Re}(Ax, j(x)) \leq 0, \text{ para todo } x \in D(A).$$

**Teorema 10** (Lumer-Phillips). *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  um operador linear com domínio denso em  $X$ .*

(i) *Se  $A \in G(1, 0)$ , então  $A$  é dissipativo e  $R(\lambda - A) = X$ , para todo  $\lambda > 0$ ;*

(ii) *Se  $A$  é dissipativo e existe  $\lambda_0 > 0$  tal que  $R(\lambda_0 I - A) = X$ , então  $A \in G(1, 0)$ .*

Este teorema nos diz quando um operador linear  $A$  é um gerador infinitesimal de semigrupos de contrações de classe  $C_0$ . Sua prova pode ser encontrada em [7].

Agora, apresentamos um importante resultado que estabelece quais são as condições para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Este resultado será usado na prova da existência e unicidade de soluções dos problemas do capítulo 4.

**Corolário 4.** *Seja  $A$  um operador linear com domínio denso em um espaço de Hilbert  $H$ . Se  $A$  é dissipativo e  $0 \in \rho(A)$ , então  $A$  é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe  $C_0$ .*

Demonstração:

Por hipótese,  $0 \in \rho(A)$ , então  $A$  é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em  $H$ . Portanto, o operador

$$\lambda I - A = A(\lambda A^{-1} - I) \tag{2.8}$$

é inversível para  $0 < \lambda < \|A^{-1}\|$ . Agora, utilizando o teorema 10 concluímos que  $A$  é um gerador de um semigrupo de contrações de classe  $C_0$ .

□

# Capítulo 3

## Estabilidade exponencial de semigrupos

Neste capítulo, estudamos o Teorema de Gearhart que estabelece condições necessárias e suficientes para um semigrupo de contrações de classe  $C_0$  ser exponencialmente estável.

### 3.1 O Teorema de Gearhart

Apresentamos agora neste trabalho um importante teorema que será usado no próximo capítulo para provarmos o decaimento exponencial da solução de alguns modelos dissipativos associados com equações ou sistemas de equações diferenciais parciais de evolução.

**Teorema 11** (Gearhart). *Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de contrações de classe  $C_0$  em um espaço de Hilbert  $H$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Então,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A) \tag{3.1}$$

e

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty. \tag{3.2}$$

A demonstração completa desse teorema não será feita neste trabalho. De fato, nas aplicações necessitamos somente justificar que as condições (3.1) e (3.2) são suficientes para a estabilidade exponencial do semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Para provar essa suficiência, precisamos dos resultados a seguir. Mas, antes precisamos da seguinte definição:

**Definição 12.** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Diz-se que  $w_0(A)$  é o tipo do semigrupo gerado por  $A$  se*

$$w_0(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}.$$

**Notação 5.** *Quando  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ , denotamos  $\{S(t)\}_{t \geq 0} = \{e^{At}\}_{t \geq 0}$ .*

**Observação 4.** *Seja  $s > 0$  e seja  $A$  o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Então,  $w_0(sA) = sw_0(A)$ .*

De fato,

$$w_0(sA) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{Asts}\|}{t} = s \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{Ats}\|}{ts} = sw_0(A).$$

**Lema 2.** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . O raio espectral do operador  $S(t)$  é igual a  $e^{tw_0(A)}$ , para  $t > 0$ . Isto é,*

$$r_\sigma(S(t)) = e^{tw_0(A)}, \text{ para } t > 0.$$

Demonstração:

Da definição do tipo de semigrupo e propriedade da função logarítmica, vemos que

$$w_0(tA) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{Ast}\|}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \ln \|e^{Ast}\|^{\frac{1}{s}}.$$

Como  $r_\sigma(S(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S(t)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S(tn)\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{Atn}\|^{\frac{1}{n}}$ , então

$$r_\sigma(S(t)) = e^{tw_0(A)}$$

pela Observação 4.

□

**Teorema 12.** *Seja  $X$  um espaço de Banach,  $f \in C([0, 1]; X)$  e seja  $A$  o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ ,  $\{S(t) = e^{At}\}_{t \geq 0}$ . A equação*

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in [0, 1] \quad (3.3)$$

*possui uma única solução periódica, de período 1, se, e somente se  $1 \in \rho(e^A)$ , o resolvente de  $e^A = S(1)$ .*

Demonstração:

Primeiramente, provamos que a equação (3.3) possui uma única solução periódica se  $1$  está no resolvente do operador  $e^A$ . Suponhamos então que  $u(t)$  é uma solução da equação acima. Então, vale que

$$\frac{d}{dt} (e^{-At}u(t)) = e^{-At}f(t).$$

Assim, integrando no tempo, vemos que a equação (3.3) possui uma solução que pode ser escrita como

$$u(t) = e^{At}u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds \quad (3.4)$$

com  $u(0) \in X$ . Para que essa solução seja periódica, isto é,  $u(1)=u(0)$ , devemos ter

$$u(0) - e^A u(0) = \int_0^1 e^{A(1-s)}f(s)ds.$$

Como  $1 \in \rho(e^A)$ , constatamos que

$$u(0) = (I - e^A)^{-1} \int_0^1 e^{A(1-s)}f(s)ds.$$

Portanto, provamos que se  $1 \in \rho(e^A)$  então a função dada por (3.4), com  $u(0)$  dado pela expressão acima, é uma solução periódica da equação (3.3).

A seguir, mostramos a unicidade.

Sejam  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  soluções da equação (3.3), então

$$u_1'(t) = Au_1(t) + f(t)$$

e

$$u_2'(t) = Au_2(t) + f(t).$$

Isso implica, usando a fórmula (3.4), que

$$u_2(t) - u_1(t) = e^{At} (u_2(0) - u_1(0)).$$

Daí, como  $u_2(0) - u_1(0) = 0$ , segue que  $u_2(t) = u_1(t)$ .

Agora, supondo que a equação (3.3) tem uma única solução periódica, devemos provar que  $1 \in \rho(e^A)$ . Para isso, precisamos mostrar que o operador  $(I - e^A)^{-1}$  existe e é contínuo.

(i)  $I - e^A$  injetor:

Suponhamos que  $0 \neq x_0 \in \text{Ker}(I - e^A)$ , então  $x_0 - e^A x_0 = 0$ . Definindo  $u(t) = e^{At} x_0$ , segue que  $u(0) = u(1)$  e que  $u$  é uma solução não nula da equação (3.3) (com  $f(t) \equiv 0$ ), o que é uma contradição, pois por hipótese, a equação (3.3) possui uma única solução periódica. Portanto,  $I - e^A$  é injetor.

(ii)  $I - e^A$  sobrejetor:

Para verificar isso, tomamos  $x \in X$  e mostraremos que existe  $y \in X$ , tal que  $y - e^A y = x$ . Para isso, definimos

$$\begin{aligned} K : C([0, 1], X) &\rightarrow C([0, 1], X) \\ f &\rightarrow Kf = u \end{aligned}$$

sendo  $u = u(t)$  a única solução de 3.3, que existe por hipótese. Notamos que o operador  $K$  é fechado. De fato, seja  $f_n \in C([0, 1], X)$  tal que

$$f_n \rightarrow f \text{ e } Kf_n = u_n \rightarrow u,$$

sendo  $u_n$  a solução correspondente a  $f_n$ .

Como  $u_n(t) = e^{At} u_n(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f_n(s) ds$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então, tomando limite em  $n$ , resulta

$$u(t) = e^{At} u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds.$$

Portanto,  $u$  é solução da equação 3.3. Como  $u_n(0) = u_n(1)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , segue da convergência uniforme que  $u(0) = u(1)$ . Daí, concluímos que  $u$  é uma solução periódica da equação 3.3. Além disso, da unicidade da solução, decorre que  $Kf=u$ . Logo,  $K$  é um operador fechado e, pelo teorema do gráfico fechado,  $K$  é um operador contínuo.

Considerando  $f(t) = e^{At}x$ , definimos o operador contínuo

$$\begin{aligned} S: X &\rightarrow X \\ x &\rightarrow Sx = Kf(0) = u(0) \end{aligned}$$

onde  $u$  é, por hipótese, a única solução periódica associada a essa função  $f$ .

Sendo  $u$  periódica, temos que

$$u(0) = u(1) = e^A u(0) + \int_0^1 e^{A(1-s)} f(s) ds = e^A u(0) + \int_0^1 e^{A(1-s)} e^{As} x ds.$$

Daí, como  $Sx = u(0)$ , então

$$\begin{aligned} (I - e^A)(Sx + x) &= (I - e^A)Sx + (I - e^A)x \\ &= \int_0^1 e^{A(1-s)} e^{As} x ds + x - e^A x \\ &= e^A x + x - e^A x \\ &= x \end{aligned}$$

Assim, o operador  $I - e^A$  é sobrejetor. Como  $I - e^A$  é bijetor e contínuo, pelo teorema da aplicação aberta,  $(I - e^A)^{-1}$  é contínuo. Logo,  $1 \in \rho(e^A)$ .

O teorema anterior será usado para demonstrar o seguinte resultado:

**Teorema 13.** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um semigrupo  $\{S(t)\}$  de classe  $C_0$ . Então,  $1 \in \rho(e^A = S(1))$  se, e somente se,*

$$2k\pi i \in \rho(A), \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

$$e \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|(2k\pi i I - A)^{-1}\| < \infty.$$

Demonstração:

Seja  $1 \in \rho(e^A)$ . Como

$$e^{(A-2k\pi i I)} x - x = \int_0^1 \frac{d}{ds} e^{(A-2k\pi i I)s} x ds = \int_0^1 (A - 2k\pi i I) e^{(A-2k\pi i I)s} x ds$$



e

$$e^{(A-2k\pi iI)} = e^A,$$

obtemos que

$$e^A x - x = \int_0^1 (A - 2k\pi iI) e^{(A-2k\pi iI)s} x ds.$$

Do fato de que  $1 \in \rho(e^A)$ , verificamos que

1.

$$\begin{aligned} x &= (A - 2k\pi iI)(e^A - I)^{-1} \int_0^1 e^{(A-2k\pi iI)s} x ds \\ &= (A - 2k\pi iI)Bx \end{aligned}$$

sendo  $Bx = (e^A - I)^{-1} \int_0^1 e^{(A-2k\pi iI)s} x ds$ , pois os operadores  $(e^A - I)^{-1}$  e  $(A - 2k\pi iI)$  comutam;

2.

$$\begin{aligned} x &= (e^A - I)^{-1} \int_0^1 (A - 2k\pi iI) e^{(A-2k\pi iI)s} x ds \\ &= (e^A - I)^{-1} \int_0^1 e^{(A-2k\pi iI)s} (A - 2k\pi iI) x ds \\ &= B(A - 2k\pi iI)x. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\|(2k\pi iI - A)^{-1}\| \leq \|(e^A - I)^{-1} \int_0^1 e^{(A-2k\pi iI)s} ds\| \leq M, \quad (3.5)$$

sendo  $M \geq 0$ . Portanto, usando 1, 2 e (3.5), obtemos que

$$2k\pi i \in \rho(A)$$

e

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|(2k\pi iI - A)^{-1}\| \leq M.$$

Reciprocamente, mostramos que a equação (3.3) possui uma única solução periódica, para então, aplicarmos o teorema 12.

Primeiramente, mostramos que se existe uma solução ela é única. Seja  $u$  uma solução da equação 3.3. Denotando

$$u_k = \int_0^1 u(s)e^{-2k\pi is} ds$$

e

$$f_k = \int_0^1 f(s)e^{-2k\pi is} ds,$$

obtemos  $u_k = (2k\pi i - A)^{-1}f_k$ . Usando séries de Fourier, segue que a solução deve ser única. Agora, mostramos que existe uma solução periódica. Definindo

$$u_N(t) = \sum_{k=-N}^N u_k e^{2k\pi it}$$

e

$$F_N(t) = \sum_{k=-N}^N f_k e^{2k\pi it}$$

verificamos que

$$\frac{d}{dt}u_N = Au_N + F_N.$$

Isso implica que

$$u_N(t) = e^{At}u_N(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}F_N(s)ds. \quad (3.6)$$

Das hipóteses e como  $F_N \rightarrow f$  em  $L^2(0,1)$ , temos

$$u_N \rightarrow u \text{ forte em } L^2(0,1).$$

Considerando  $t = 1$  em (3.6), chegamos:

$$(1 - e^A)u_N(0) = \int_0^1 e^{(1-s)A}F_N(s)ds.$$

E, como

$$e^A u_N(0) = \int_0^1 e^{(1-t)A}u_N(t)dt - \int_0^1 e^{(1-t)A} \int_0^t e^{(t-s)A}F_N(s)dsdt,$$

então

$$u_N(0) = (1 - e^A)u_N(0) + e^A u_N(0) \rightarrow u_0,$$

pois  $u_N(0)$  é igual a soma de seqüências convergentes. Finalmente, aplicando o limite em 3.6, encontramos que

$$u(t) = e^{At}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds.$$

Como  $u$  é uma solução periódica da equação (3.3), pelo teorema 12, concluímos que  $1 \in \rho(e^A)$ .

□

**Corolário 5.** *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C_0$ . Então,  $e^{\lambda t} \in \rho(e^{At})$  se, e somente se,*

$$\lambda + \frac{2k\pi i}{t} \in \rho(A) \text{ e } \left\| \left( \left( \lambda + \frac{2k\pi i}{t} \right) I - A \right)^{-1} \right\| < \infty, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração:

Suponhamos que  $e^{\lambda t} \in \rho(e^{At})$ . Isso implica que  $1 \in \rho(e^{(A-\lambda)t})$ . Logo, pelo teorema anterior,  $2k\pi i \in \rho((A-\lambda)t)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$  e  $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|(2k\pi i I - (A-\lambda)t)^{-1}\| < \infty$ .

Como  $2k\pi i \in \rho((A-\lambda)t)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $\lambda + \frac{2k\pi i}{t} \in \rho(A)$ . Além disso, como  $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|(2k\pi i I - (A-\lambda)t)^{-1}\| < \infty$ , então  $\|[(\lambda + \frac{2k\pi i}{t})I - A]^{-1}\| < \infty$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

Reciprocamente, do fato que  $\lambda + \frac{2k\pi i}{t} \in \rho(A)$ , segue que  $2k\pi i \in \rho((A-\lambda)t)$  e, como  $\|[(\lambda + \frac{2k\pi i}{t})I - A]^{-1}\| < \infty$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que  $\|(2k\pi I - (A-\lambda))^{-1}\| < \infty$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim, pelo teorema anterior,  $1 \in \rho(e^{(A-\lambda)t})$ . Logo,  $I - e^{(A-\lambda)t}$  é inversível e seu inverso é limitado. Portanto,  $e^{\lambda t} \in \rho(e^{At})$ .

□

Este corolário será utilizado para demonstrarmos o Teorema de Gearhart, pois ele nos diz que  $1 \in \rho(e^{At})$  se, e somente se,

$$\frac{1}{t}L_\mu \subset \rho(A) \text{ e } \sup_{\lambda \in \frac{1}{t}L_\mu} \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty.$$

Demonstramos agora que as condições (3.1) e (3.2) do Teorema de Gearhart são suficientes para a estabilidade exponencial de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ .

Demonstração:

Consideramos a seguinte expressão:

$$(\lambda I - S(t))^{-1} = \lambda^{-1} (I - \lambda^{-1} S(t))^{-1} = \lambda^{-1} \left( I + \frac{S(t)}{\lambda} + \frac{S(t)^2}{\lambda^2} + \dots \right).$$

Assim, se  $\|S(t)\| < |\lambda|$ , então  $\lambda \in \rho(S(t))$ . Logo,  $\lambda \in \sigma(S(t))$  implica que  $|\lambda| \leq \|S(t)\|$ .

Como  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um semigrupo de contrações,  $\|S(t)\| \leq 1$ , logo,

$$\sigma(S(t)) \subseteq \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}.$$

Além disto, utilizando as hipóteses do teorema, segue que

$$\left\{ \frac{2\pi ni}{t}; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \rho(A) \quad \text{e} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \left( \frac{2\pi ni}{t} I - A \right)^{-1} \right\| \leq M.$$

Logo, pelo corolário 5, concluímos que  $1 \in \rho(e^{At})$ . Portanto,

$$\sigma(S(t)) \subseteq \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}.$$

Como  $\sigma(e^{At})$  é um conjunto fechado e limitado, tem-se

$$r_\sigma(e^{At}) = \sup_{\lambda \in \sigma(S(t))} |\lambda| < 1,$$

ou seja,

$$r_\sigma(e^{At}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \|e^{Ats}\|^{\frac{1}{s}} < 1.$$

Assim, como  $r_\sigma(e^{At}) = e^{tw_0(A)}$ , obtemos que  $tw_0(A) < 0$ . Isso implica que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{Az}\|}{z} < 0,$$

ou seja, existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{Az}\|}{z} = -\gamma.$$

Então, dado  $\epsilon > 0$  existe  $z_0 > 0$  tal que  $z > z_0$  implica que  $\left| \frac{\ln \|e^{Az}\|}{z} + \gamma \right| < \epsilon$ .

Considerando  $\epsilon = \frac{\gamma}{2}$ , tem-se  $\ln \|e^{Az}\| < \frac{-\gamma z}{2}$ . Daí,  $\|e^{Az}\| \leq e^{\frac{-\gamma z}{2}}$ , ou seja,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é exponencialmente estável.

□

# Capítulo 4

## Aplicações

Neste capítulo, estudamos a existência, unicidade e decaimento exponencial de soluções do sistema linear viscoelástico unidimensional com dissipação distribuída de modo uniforme em todo o domínio. Também estudamos o mesmo problema para a equação da onda unidimensional com a dissipação localmente distribuída em parte do domínio. O sistema linear termoelástico unidimensional e equação da onda em um domínio bidimensional retangular com dissipação localmente distribuída também são estudados.

### 4.1 Sistema linear viscoelástico

Nesta seção, estudamos a equação da onda unidimensional com dissipação distribuída de modo uniforme em todo o domínio. O problema de valor inicial e de contorno associado é o seguinte:

$$\begin{aligned}u_{tt} - au_{xx} - \gamma u_{xxt} &= 0, \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty) \\u(0, t) = u(l, t) &= 0, \quad t > 0 \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in (0, l) \\u_t(x, 0) &= u_1(x), \quad x \in (0, l)\end{aligned}\tag{4.1}$$

sendo  $a$  e  $\gamma$  constantes positivas.

### 4.1.1 Existência e unicidade

Seja  $H = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)$ . Este espaço munido da norma

$$\|U\|_H = \left( \int_0^l a|u_x|^2 dx + \int_0^l |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Considerando  $v = u_t$ , reescrevemos a primeira equação de (4.1) na forma de um sistema de primeira ordem no tempo dado por

$$\begin{cases} u_t - v = 0 \\ v_t - au_{xx} - \gamma v_{xx} = 0. \end{cases}$$

Agora, definindo

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ e } AU = \begin{pmatrix} v \\ au_{xx} + \gamma v_{xx} \end{pmatrix},$$

podemos escrever o modelo (4.1) da seguinte forma:

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

O domínio natural para o operador  $A$  é

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H; v \in H_0^1(0, l) \text{ e } (au_x + \gamma v_x) \in H^1(0, l) \right\}.$$

Notamos que  $D(A)$  é denso em  $H = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)$ .

Em relação ao operador  $A$ , temos o seguinte resultado:

**Teorema 14.** *O operador  $A$  gera um semigrupo de contrações de classe  $C_0$  em  $H$ .*

Demonstração:

Para provarmos este resultado, mostramos que  $A$  é dissipativo e que  $0 \in \rho(A)$ , para então, aplicarmos o Corolário 4.

i)  $A$  dissipativo:

Seja  $U \in D(A)$ . Usando as condições de contorno, resulta que

$$\begin{aligned}
 (AU, U)_H &= \left( \begin{pmatrix} v \\ au_{xx} + \gamma v_{xx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H \\
 &= (v, u)_{H_0^1(0,l)} + (au_{xx} + \gamma v_{xx}, v)_{L^2(0,l)} \\
 &= \int_0^l au_x v_x dx + \int_0^l (au_{xx} + \gamma v_{xx}) v dx \\
 &= - \int_0^l \gamma |v_x|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Como  $(AU, U)_H = - \int_0^l \gamma |v_x|^2 dx \leq 0$  concluímos que  $A$  é dissipativo, pois  $\gamma > 0$ .

ii)  $0 \in \rho(A)$ :

Provaremos que para todo  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ , existe um único

$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$  tal que

$$AU = F,$$

ou seja,

$$\begin{cases} v = f \in H_0^1(0, l) \\ (au_x + \gamma v_x)_x = g \in L^2(0, l). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, isto é, substituindo a primeira equação na segunda, vemos que  $u$  deve satisfazer

$$a(u_x)_x = g - \gamma f_{xx} \in H^{-1}(0, l). \quad (4.2)$$

Agora, usamos o Teorema de Lax-Milgram para mostrar que (4.2) admite uma única solução  $u \in H_0^1(0, l)$ . Para isto, definimos,

$$\begin{aligned}
 B(\cdot, \cdot) : H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (u, v) &\mapsto a(u_x, v_x)
 \end{aligned}$$

em que  $(\cdot, \cdot)$  indica o produto interno em  $L^2(0, l)$ . É claro que  $B(\cdot, \cdot)$  é bilinear. Resta verificar que  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva e contínua.

i) Coercividade de  $B(\cdot, \cdot)$ :

Seja  $u \in H_0^1(0, l)$ . Então,

$$B(u, u) = a(u_x, u_x) = a\|u_x\|_{L^2(0, l)}^2 = a\|u\|_{H_0^1(0, l)}^2.$$

Assim,  $B(u, u) \geq a\|u\|_{H_0^1(0, l)}$ , para todo  $u \in H_0^1(0, l)$ . Isso implica que  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva.

ii) Continuidade de  $B(\cdot, \cdot)$ :

Sejam  $u$  e  $v \in H_0^1(0, l)$ . Então,

$$|B(u, v)| = |a(u_x, v_x)| \leq a\|u_x\|_{L^2(0, l)}\|v_x\|_{L^2(0, l)} = a\|u\|_{H_0^1(0, l)}\|v\|_{H_0^1(0, l)}.$$

Assim, para  $u$  e  $v \in H_0^1(0, l)$ ,  $|B(u, v)| \leq a\|u\|_{H_0^1(0, l)}\|v\|_{H_0^1(0, l)}$ . Isso implica que  $B(\cdot, \cdot)$  é contínua. Como  $\gamma f_{xx} - g \in H^{-1}(0, l)$ , pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única  $u \in H_0^1(0, l)$ , tal que

$$B(u, v) = (\gamma f_{xx} - g, v),$$

para todo  $v \in H_0^1(0, l)$ .

Portanto, existe um único  $U \in D(A)$  tal que  $AU = F$ . Assim, existe o operador  $A^{-1}$  que é definido por  $A^{-1}F = U$ . Além disso,

$$\|U\|_H \leq C\|F\|_H.$$

De fato, usando a Desigualdade de Poincaré, temos

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 &= a\|u\|_{H_0^1(0, l)}^2 + \|v\|_{L^2(0, l)}^2 \\ &\leq a\|u\|_{H_0^1(0, l)}^2 + \|f_x\|_{L^2(0, l)}^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Como

$$a\|u\|_{H_0^1(0, l)}^2 = a(u_x, u_x) = (\gamma f_{xx} - g, u) = -(\gamma f_x, u_x) - (g, u)$$

para todo  $u \in H_0^1(0, l)$ , segue que

$$\begin{aligned} a\|u\|_{H_0^1(0, l)}^2 &\leq \|\gamma f_x\|_{L^2(0, l)}\|u_x\|_{L^2(0, l)} + \|g\|_{L^2(0, l)}\|u\|_{L^2(0, l)} \\ &\leq (\|\gamma f_x\|_{L^2(0, l)} + \|g\|_{L^2(0, l)})\|u\|_{H_0^1(0, l)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$a\|u\|_{H_0^1(0, l)} \leq \|\gamma f_x\|_{L^2(0, l)} + \|g\|_{L^2(0, l)} \quad (4.4)$$



para todo  $u \in H_0^1(0, l)$ . Logo, usando 4.4 em 4.3, resulta

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 &\leq (\|\gamma f_x\|_{L^2(0,l)} + \|g\|_{L^2(0,l)})^2 + \|f_x\|_{L^2(0,l)}^2 \\ &\leq C \left( \|f\|_{H_0^1(0,l)}^2 + \|g\|_{L^2(0,l)}^2 \right) \\ &= C \|F\|_H^2 \end{aligned}$$

sendo  $C$  uma constante positiva. Isso implica que o operador  $A^{-1}$  é limitado. Portanto,  $0 \in \rho(A)$ . Logo, segue do Corolário 4 que  $A$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe  $C_0$ .

□

Agora, como  $A$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , de classe  $C_0$ , a teoria de semigrupos diz que para  $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$ ,  $U(t) = S(t)U_0$  é a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

com

$$U \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H). \quad (4.5)$$

Interpretemos (4.5). Lembrando que  $v = u_t$ , concluímos que

$$\begin{aligned} u &\in C^1([0, \infty); H_0^1(0, l)); \\ u_t &\in C^1([0, \infty); L^2(0, l)), \quad \text{ou seja, } u \in C^2([0, \infty); L^2(0, l)); \\ (au_x + \gamma v_x)_x &\in L^2(0, l). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, concluímos que existe uma única função  $u(x, t)$  que satisfaz o problema de valor inicial (4.1).

### 4.1.2 Estabilidade exponencial

Agora, usaremos o Teorema de Gearhart para provar que o semigrupo de contrações de classe  $C_0$ , gerado por  $A$ , é exponencialmente estável.

**Teorema 15.** *O semigrupo de contrações de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , gerado por  $A$ , é exponencialmente estável, isto é, existem constantes positivas  $M$  e  $\alpha$  tal que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}.$$

Provaremos a estabilidade exponencial de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  verificando as condições (3.1) e (3.2) do Teorema de Gearhart. Primeiramente, mostramos que  $\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$ .

Segue do fato de  $0 \in \rho(A)$  que o operador

$$i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$$

é inversível para todo  $\beta$  tal que  $|\beta| < \|A^{-1}\|^{-1}$ . Além disso, a função

$$\|(i\beta I - A)^{-1}\|$$

é contínua para todo  $\beta \in (-\|A^{-1}\|^{-1}, \|A^{-1}\|^{-1})$ .

De fato, como  $(i\beta I - A)^{-1} = A^{-1}(i\beta A^{-1} - I)^{-1}$  e o operador  $(I - i\beta A^{-1})^{-1}$  é linear e contínuo, pois  $\|i\beta A^{-1}\| < 1$ , segue que a função  $\|(i\beta I - A)^{-1}\|$  é contínua para todo  $\beta \in (-\|A^{-1}\|^{-1}, \|A^{-1}\|^{-1})$ .

Agora, suponhamos que  $\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$  é falso. Então, existe  $w \in \mathbb{R}$  tal que  $w \neq 0$ , com  $\|A^{-1}\|^{-1} \leq |w| < \infty$ , tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \rho(A)$$

e

$$\sup\{\|(i\beta I - A)^{-1}\|; |\beta| < |w|\} = \infty.$$

Então, existe uma seqüência de números reais  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\beta_n \rightarrow w$  e  $|\beta_n| < w$  e uma seqüência vetorial de funções  $U_n \in D(A)$ , tal que  $\|U_n\| = 1$  e  $\|(i\beta_n I - A)U_n\| \rightarrow 0$ . Isto é,

$$i\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, l) \tag{4.6}$$

$$i\beta_n v_n - (au_{nx} + \gamma v_{nx})_x \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \tag{4.7}$$

Fazendo o produto interno de  $(i\beta_n I - A)U_n$  com  $U_n$  em  $H$ , resulta que

$$\begin{aligned} ((i\beta_n I - A)U_n, U_n)_H &= (i\beta_n U_n, U_n)_H - (AU_n, U_n)_H \\ &= i\beta_n + \int_0^l \gamma |v_{nx}|^2 dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte real, temos que

$$\operatorname{Re}((i\beta_n I - A)U_n, U_n)_H = \int_0^l \gamma |v_{nx}|^2 dx.$$

Assim, como a seqüência  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada e  $(i\beta_n I - A)U_n \rightarrow 0$  em  $H$ , segue que

$$\gamma \|v_{nx}\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l \gamma |v_{nx}|^2 dx \rightarrow 0,$$

ou seja, usando a Desigualdade de Poincaré:

$$C \int_0^l \gamma |v_{nx}|^2 dx \geq \int_0^l \gamma |v_n|^2 dx = \gamma \|v_n\|_{L^2(0,l)}^2,$$

concluimos que

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.8)$$

Multiplicando (4.6) por  $\frac{1}{\beta_n}$ , segue que

$$iu_n - \frac{v_n}{\beta_n} \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, l).$$

Como  $v_n \rightarrow 0$  em  $H_0^1(0, l)$ , pois  $\|v_n\|_{L^2(0,l)}^2 \rightarrow 0$ , obtemos

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, l). \quad (4.9)$$

Portanto, de (4.8) e (4.9), segue que  $\|U_n\|_H \rightarrow 0$ , o que é uma contradição, pois  $\|U_n\|_H = 1$ .

Agora, provaremos que

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty. \quad (4.10)$$

Suponhamos que (4.10) é falso, então existe uma seqüência de números reais  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  com  $|\beta_n| \rightarrow \infty$  e uma seqüência vetorial de funções  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $H$  tal que

$$\frac{\|(i\beta_n - A)^{-1}V_n\|}{\|V_n\|} \geq n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\|(i\beta_n - A)^{-1}V_n\| \geq n\|V_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  e que  $i\beta_n \in \rho(A)$ , existe uma única seqüência  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ , tal que

$$(i\beta_n - A)U_n = V_n, \text{ com } \|U_n\| = 1.$$

Assim,

$$\|U_n\| \geq n\|(i\beta_n - A)U_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isso implica que

$$\|(i\beta_n I - A)U_n\|_H \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$\begin{aligned} i\beta_n u_n - v_n &\rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, l) \\ i\beta_n v_n - (au_{nx} + \gamma v_{nx})_x &\rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \end{aligned}$$

De maneira similar ao que foi feito acima, concluímos que

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l)$$

e

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, l),$$

logo,  $\|U_n\|_H \rightarrow 0$ , o que é uma contradição, pois  $\|U_n\|_H = 1$ . Portanto, pelo Teorema de Gearhart, concluímos que o semigrupo de contrações de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , gerado por  $A$ , é exponencialmente estável. Assim, fica provado o decaimento exponencial da solução do modelo (4.1), pois quando se considera o estudo do decaimento exponencial da solução de um modelo dissipativo, o problema é estabelecer uma estimativa para a energia total do sistema,  $E(t)$ . Essa estimativa para a energia do sistema é obtida da estabilidade exponencial

$$\|S(t)\| \leq Ce^{-wt}, \text{ para todo } t \geq 0,$$

do semigrupo dissipativo,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , gerado por  $A$ . De fato, temos que a energia do sistema é

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l [au_x^2 + u_t^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \right\|_H^2 \\ &= \frac{1}{2} \|U\|_H^2. \end{aligned}$$

Mas, sendo a solução dada por  $U(t) = S(t)U_0$ , resulta que

$$2E(t) = \|U\|_H^2 = \|S(t)U_0\|_H^2 \leq Ce^{-wt} \|U_0\|_H^2 = 2CE(0)e^{-wt}$$

para todo  $t \geq 0$ . Assim,

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Portanto, a energia do sistema decai exponencialmente.

## 4.2 Equação da onda unidimensional com dissipação localmente distribuída

Nesta seção, estudamos a equação da onda unidimensional com uma dissipação friccional representada por  $a(x)u_t$ , sendo  $a(x)$  uma função em  $W^{1,\infty}(0,l)$  com  $a(x) \geq 0$  para todo  $x \in [0,l]$  e  $\int_0^l a(x)dx > 0$ . O problema de valor inicial e de contorno associado é o seguinte:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t &= 0, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(l,t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in (0,l) \\ u_t(x,0) &= u_1(x), \quad x \in (0,l) \end{aligned} \tag{4.11}$$

### 4.2.1 Existência e unicidade

Seja  $H = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)$ . Este espaço munido da norma

$$\|U\|_H = \left( \|u\|_{H_0^1(0, l)}^2 + \|v\|_{L^2(0, l)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_0^l |u_x|^2 dx + \int_0^l |v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Considerando  $v = u_t$ , reescrevemos a primeira equação do sistema (4.11) na forma de um sistema de primeira ordem no tempo dado por

$$\begin{cases} u_t - v = 0 \\ v_t - u_{xx} + a(x)u_t = 0. \end{cases}$$

Fazendo  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  e definindo o operador  $A$  como

$$AU = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix},$$

podemos reescrever o modelo (4.11) da seguinte forma:

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

O domínio do operador  $A$  é dado por

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H; u \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l) \text{ e } v \in H_0^1(0, l) \right\}.$$

Notamos que  $D(A)$  é denso em  $H = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)$ .

Em relação ao operador  $A$ , temos o seguinte resultado:

**Teorema 16.** *O operador  $A$  gera um semigrupo de contrações de classe  $C_0$  em  $H$ .*

Demonstração:

Mostramos que  $A$  é dissipativo e que  $0 \in \rho(A)$ , para então, aplicarmos o Corolário 4.

i)  $A$  dissipativo:

Seja  $U \in D(A)$ . Usando as condições de contorno, obtemos que

$$\begin{aligned} (AU, U)_H &= \left( \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - a(x)v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H \\ &= (v, u)_{H_0^1(0,l)} + (u_{xx} - a(x)v, v)_{L^2(0,l)} \\ &= \int_0^l v_x u_x dx + \int_0^l (u_{xx} - a(x)v)v dx \\ &= - \int_0^l a(x)|v|^2 dx. \end{aligned}$$

Como  $(AU, U)_H = - \int_0^l a(x)|v|^2 dx \leq 0$ , então  $A$  é dissipativo, pois  $a(x) \geq 0$ .

ii)  $0 \in \rho(A)$ :

Provaremos que para todo  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ , existe um único

$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$  tal que

$$AU = F.$$

Seja  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ . A equação  $AU = F$  em termos de seus componentes é dada por

$$\begin{cases} v = f \in H_0^1(0, l) \\ u_{xx} - a(x)v = g \in L^2(0, l) \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, isto é, considerando  $v = f$  e substituindo na segunda equação, temos

$$u_{xx} = g + a(x)f \in L^2(0, l). \quad (4.12)$$

Agora, mostramos que (4.12) admite uma única solução  $u \in H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ . Para isto, definimos a forma bilinear

$$\begin{aligned} B(\cdot, \cdot) : H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto B(u, v) = (u_x, v_x) \end{aligned}$$

em que  $(\cdot, \cdot)$  indica o produto interno em  $L^2(0, l)$ . Verificamos que  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva e contínua.

i) Coercividade de  $B(\cdot, \cdot)$ :

Seja  $u \in H_0^1(0, l)$ . Então,

$$B(u, u) = (u_x, u_x) = \|u_x\|_{L^2(0, l)}^2 = \|u\|_{H_0^1(0, l)}^2.$$

Portanto,  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva.

ii) Continuidade de  $B(\cdot, \cdot)$ :

Sejam  $u$  e  $v \in H_0^1(0, l)$ . Então,

$$|B(u, v)| = |(u_x, v_x)| \leq \|u_x\|_{L^2(0, l)} \|v_x\|_{L^2(0, l)} = \|u\|_{H_0^1(0, l)} \|v\|_{H_0^1(0, l)}$$

Portanto,  $B(\cdot, \cdot)$  é contínua.

Agora, mostraremos que o funcional

$$\begin{aligned} L : H_0^1(0, l) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto L(v) = (-g - a(\cdot)f, v) \end{aligned}$$

é linear e contínuo sobre  $H_0^1(0, l)$ .

(i) A linearidade de  $L$  segue direta da linearidade do produto interno.

(ii) Continuidade de  $L$ :

Sejam  $v \in H_0^1(0, l) \subset L^2(0, l)$  e  $-g - a(x)f \in L^2(0, l)$ . Então, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|L(v)| = |(-g - a(\cdot)f, v)| \leq \| -g - a(\cdot)f \|_{L^2(0, l)} \|v\|_{L^2(0, l)}.$$

Isso implica que  $L$  é contínuo.

Portanto,  $L \in H^{-1}(0, l)$ .

Usando o Teorema de Lax-Milgram concluímos que existe uma única  $u \in H_0^1(0, l)$  tal que  $B(u, v) = (-g - a(x)f, v)$ , para todo  $v \in H_0^1(0, l)$ . Isto é,

$$(u_x, v_x) = (-g - a(x)f, v), \text{ para todo } v \in H_0^1(0, l).$$



Em particular,

$$(u_x, \phi_x) = (-g - a(x)f, \phi), \text{ para toda } \phi \in D(0, l),$$

sendo  $D(0, l)$  o espaço das funções  $C_0^\infty(0, l)$ . Isso implica que

$$u_{xx} = g + a(x)f$$

no sentido distribucional.

Como  $g + a(x)f \in L^2(0, l)$ , usando o Teorema da Regularidade Elíptica para o operador elíptico de ordem 2,  $\Delta$ , resulta que  $u \in H^2(0, l)$ . Então,  $u \in H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ . Portanto, obtivemos uma única  $U \in D(A)$  tal que  $AU = F$ . Assim, existe o operador  $A^{-1}$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 &= \|u\|_{H_0^1(0, l)}^2 + \|v\|_{L^2(0, l)}^2 \\ &\leq \|u\|_{H^2(0, l)}^2 + \|f\|_{L^2(0, l)}^2 \\ &\stackrel{1}{\leq} c_1 \|af + g\|_{L^2(0, l)}^2 + \|f\|_{H_0^1(0, l)}^2 \\ &\leq c_3 \|f\|_{H_0^1(0, l)}^2 + c_4 \|g\|_{L^2(0, l)}^2 + \|f\|_{H_0^1(0, l)}^2 \\ &\leq c_5 \left( \|f\|_{H_0^1(0, l)}^2 + \|g\|_{L^2(0, l)}^2 \right) \\ &= c_5 \|F\|_H^2 \end{aligned}$$

sendo  $c_1, c_2, c_3, c_4$  e  $c_5$  constantes positivas, isto é, o operador  $A^{-1}$  é limitado. A desigualdade 1 é devida ao Teorema da Regularidade Elíptica.

Portanto,  $0 \in \rho(A)$ .

Assim, pelo Corolário 4, segue que  $A$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe  $C_0$ .

□

Logo, a teoria de semigrupos diz que para  $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$ ,  $U(t) = S(t)U_0$  é a única solução clássica do problema de valor inicial

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \end{cases} .$$

Também temos que

$$U \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H). \quad (4.13)$$

Interpretemos (4.13). Lembrando que  $v = u_t$ , (4.13) pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C([0, \infty), H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l)) \cap C^1([0, \infty); H_0^1(0, l) \times L^2(0, l)).$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} u &\in C([0, \infty), H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)); \\ u_t &\in C([0, \infty), H_0^1(0, l)), \quad \text{ou seja, } u \in C^1([0, \infty), H_0^1(0, l)); \\ u &\in C^1([0, \infty); H_0^1(0, l)); \\ u_t &\in C^1([0, \infty); L^2(0, l)), \quad \text{ou seja, } u \in C^2([0, \infty); L^2(0, l)). \end{aligned}$$

Portanto, para  $U_0 \in D(A)$ , a função  $u = u(x, t)$  na classe

$$u \in C([0, \infty), H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)) \cap C^1([0, \infty), H_0^1(0, l)) \cap C^2([0, \infty); L^2(0, l))$$

é a única solução do problema (4.11).

Conseqüentemente, concluímos que existe única função  $u(x, t)$  que satisfaz o problema de valor inicial (4.11).

## 4.2.2 Estabilidade exponencial

**Teorema 17.** *O semigrupo de contrações de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , gerado por  $A$ , é exponencialmente estável, isto é, existem constantes positiva  $M$  e  $\alpha$  tal que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Para provar a estabilidade exponencial de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , verificaremos as condições (3.1) e (3.2) do teorema de Gearhart.

Primeiramente provamos que  $\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$ . Para isso, suponhamos que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$$

é falso. Então, existe  $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$  tal que  $i\beta \in \sigma(A)$ . Já sabemos que a inversa de  $A$  está definida em todo  $H$ , com valores em  $D(A)$ , isto é,

$$A^{-1} : H \rightarrow D(A)$$

Como a imersão  $i_A$

$$i_A : D(A) \rightarrow H$$

é compacta, temos que a aplicação

$$A^{-1} = A^{-1} \circ i_A : H \rightarrow H$$

é compacta. Assim, usando o Teorema 6, concluímos que  $i\beta$  é um autovalor de  $A$ .

De fato, considerando  $\lambda = i\beta$ , temos as seguintes equações:

$$(1) \quad A^{-1}x - \frac{1}{\lambda}x = y \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda}Ax = Ay \Leftrightarrow \lambda x - Ax = \lambda Ay.$$

$$(2) \quad A^{-1}x - \frac{1}{\lambda}x = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda}Ax = 0 \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0.$$

Suponha que a equação  $\left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\right)x = 0$  admite apenas a solução trivial, então  $\lambda x - Ax = 0$  admite apenas a solução trivial. Assim, pelo Teorema 6, a equação  $A^{-1}x - \frac{1}{\lambda}x = y$  possui uma solução  $x$  para cada  $y \in H$  e o operador  $A^{-1} - \frac{1}{\lambda}$  tem inversa limitada, ou seja, o operador  $\lambda I - A$  tem inversa limitada. Logo,  $\lambda \in \rho(A)$ , o que é uma contradição, pois por  $\lambda \in \sigma(A)$ . Portanto, a equação  $\left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\right)x = 0$  não possui apenas a solução trivial e, desta forma,  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ .

Assim, existe um vetor  $U \in D(A)$ , com  $\|U\|_H = 1$ , tal que

$$i\beta U - AU = 0, \tag{4.14}$$

isto é,

$$i\beta u - v = 0 \tag{4.15}$$

$$i\beta v - u_{xx} + a(x)v = 0 \tag{4.16}$$

Fazendo o produto interno de (4.14) com  $U$  em  $H$ , resulta que

$$\begin{aligned} 0 = (i\beta U - AU, U)_H &= \left( \begin{pmatrix} i\beta u - v \\ i\beta v - u_{xx} + a(x)v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H \\ &= (i\beta u - v, u)_{H_0^1(0,l)} + (i\beta v - u_{xx} + a(x)v, v)_{L^2(0,l)} \\ &= i(\beta u, u)_{H_0^1(0,l)} - (v, u)_{H_0^1(0,l)} + i(\beta v, v)_{L^2(0,l)} + (a(x)v - u_{xx}, v)_{L^2(0,l)} \end{aligned}$$

Considerando a parte real e usando as condições de contorno, segue que

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{Re}(i\beta U - AU, U)_H &= (a(x)v - u_{xx}, v)_{L^2(0,l)} - (v, u)_{H_0^1(0,l)} \\ &= \int_0^l (a(x)v - u_{xx})v dx - \int_0^l v_x u_x dx \\ &= \int_0^l a(x)|v|^2 dx. \end{aligned}$$

Como

$$\|av\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l |a(x)v|^2 dx \leq \|a\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^l a(x)|v|^2 dx = 0$$

então,

$$a(x)v(x) = 0, \text{ para todo } x \in [0, l]. \quad (4.17)$$

Substituindo (4.15) e (4.17) em (4.16), obtemos

$$-\beta^2 u - u_{xx} = 0.$$

Como  $u(0) = u(l) = 0$ , a solução da equação acima é dada por

$$u(x) = k \sin \frac{m\pi}{l} x \text{ com } \beta^2 = \frac{m^2}{l^2} \pi^2,$$

sendo  $k \neq 0$  e  $m \geq 1$ . Substituindo a solução  $u(x)$  obtida em (4.17), segue que

$$0 = ika(x)\beta \sin \frac{m\pi}{l} x, \text{ para todo } x \in [0, l],$$

pois  $i\beta u - v = 0$ . Mas, isso diz que  $a(x) = 0$  exceto sobre um conjunto enumerável de pontos, o que é uma contradição, pois  $\int_0^l a(x) dx > 0$ . Portanto, podemos afirmar que  $\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$ .

Para a segunda parte da demonstração, suponhamos que  $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| = \infty$ , então existe uma seqüência de números reais  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  com  $|\beta_n| \rightarrow \infty$  e uma seqüência vetorial de funções  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $H$  tal que

$$\frac{\|(i\beta_n - A)^{-1}V_n\|}{\|V_n\|} \geq n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\|(i\beta_n - A)^{-1}V_n\| \geq n\|V_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  e que  $i\beta_n \in \rho(A)$ , existe uma única seqüência  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ , tal que

$$i\beta_n U_n - AU_n = V_n, \text{ com } \|U_n\| = 1.$$

Assim,

$$\|U_n\| \geq n\|i\beta_n U_n - AU_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isso implica que

$$\|(i\beta_n I - A)U_n\|_H \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$f_n = i\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, l) \tag{4.18}$$

$$g_n = i\beta_n v_n - u_{nxx} + a(x)v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l) \tag{4.19}$$

Fazendo o produto interno de  $i\beta_n U_n - AU_n$  com  $U_n$  em  $H$ , resulta

$$\begin{aligned} (i\beta_n U_n - AU_n, U_n)_H &= \left( \begin{pmatrix} i\beta_n u_n - v_n \\ i\beta_n v_n - u_{nxx} + a(x)v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \right)_H \\ &= (i\beta_n u_n - v_n, u_n)_{H_0^1(0, l)} + (i\beta_n v_n - u_{nxx} + a(x)v_n, v_n)_{L^2(0, l)} \end{aligned}$$

Considerando a parte real e usando as condições de contorno, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i\beta_n U_n - AU_n, U_n)_H &= (a(x)v_n - u_{nxx}, v_n)_{L^2(0, l)} - (v_n, u_n)_{H_0^1(0, l)} \\ &= (a(x)v_n, v_n)_{L^2(0, l)} \end{aligned}$$

Como  $i\beta_n U_n - AU_n \rightarrow 0$  em  $H$  e  $U_n$  é limitada, segue que

$$(a(x)v_n, v_n) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.20)$$

Agora, considerando a desigualdade

$$\|av_n\|_{L^2(0,l)}^2 = \int_0^l |av_n|^2 dx \leq \|a\|_{L^\infty(0,l)} \int_0^l |av_n|^2 dx$$

e usando (4.20), segue que

$$av_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.21)$$

Substituindo  $v_n = i\beta_n u_n - f_n$  em  $g_n = i\beta_n v_n - u_{nxx} + a(x)v_n$ , obtemos

$$-\beta_n^2 u_n - u_{nxx} = g_n + i\beta_n f_n - a(x)v_n. \quad (4.22)$$

Agora, considerando  $q(x) \in C^1(0, l)$  uma função real e fazendo o produto interno de (4.22) com  $q(x)u_{nx}$  em  $L^2(0, l)$ , obtemos

$$\int_0^l q_x(\beta_n^2 |u_n|^2 + |u_{nx}|^2) dx - [q|u_{nx}|^2]_0^l = 2(g_n, qu_{nx}) - 2(i\beta_n(f_n q)_x, u_n) - 2(av_n, qu_{nx}),$$

pois

$$\begin{aligned} (-\beta_n^2 u_n - u_{nxx}, qu_{nx}) &= - \int_0^l \beta_n^2 u_n q u_{nx} dx - \int_0^l u_{nxx} q u_{nx} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^l \beta_n^2 q (u_n^2)_x dx - \frac{1}{2} \int_0^l q (u_{nx}^2)_x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \beta_n^2 q_x u_n^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l q_x u_{nx}^2 dx - [q|u_{nx}|^2]_0^l \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (g_n + i\beta_n f_n - av_n, qu_{nx}) &= \int_0^l g_n q u_{nx} dx + \int_0^l i\beta_n f_n q u_{nx} dx - \int_0^l av_n q u_{nx} dx \\ &= \int_0^l g_n q u_{nx} dx - \int_0^l i\beta_n u_n (f_n q)_x dx - \int_0^l av_n q u_{nx} dx. \end{aligned}$$

Observando que  $\beta_n u_n$  é uniformemente limitada em  $L^2(0, l)$ , pois  $\|v_n\|_{L^2(0,l)} \leq 1$  e  $i\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0$  em  $L^2(0, l)$ , e usando (4.18), (4.19) e (4.21), concluímos que

$$2(g_n, qu_{nx}) - 2(i\beta_n(f_n q)_x, u_n) - 2(av_n, qu_{nx}) \rightarrow 0$$

ou seja,

$$\int_0^l q_x(\beta_n^2 |u_n|^2 + |u_{nx}|^2) dx - [q|u_{nx}|^2]_0^l \rightarrow 0.$$

Considerando  $q(x) = x$ , temos

$$\int_0^l (|u_{nx}|^2 + |\beta_n u_n|^2) dx - q(l)|u_{nx}(l)|^2 \rightarrow 0.$$

Como  $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l |u_{nx}|^2 + |v_n|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^l |u_{nx}|^2 + |i\beta_n u_n|^2 dx$ , pois  $i\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0$  em  $L^2(0, l)$ , segue que

$$|u_{nx}(l)|^2 \rightarrow \frac{1}{l}.$$

Agora, considerando  $q(x) = \int_0^x a(s) ds$ , temos

$$\int_0^l a(x)(\beta_n^2 |u_n|^2 + |u_{nx}|^2) dx - q(l)|u_{nx}(l)|^2 \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$(\beta_n u_n, a\beta_n u_n) + (a u_{nx}, u_{nx}) \rightarrow \frac{1}{l} \int_0^l a(s) ds > 0,$$

o que é uma contradição, pois por outro lado, mostraremos que  $(\beta_n u_n, a\beta_n u_n)$  e  $(a u_{nx}, u_{nx})$  convergem para zero.

$$\mathbf{1} \quad (\beta_n u_n, a\beta_n u_n) \rightarrow 0:$$

Fazendo o produto interno de  $i\beta_n u_n - v_n$  com  $a\beta_n u_n$ , obtemos

$$(i\beta_n u_n - v_n, a\beta_n u_n) = (i\beta_n u_n, a\beta_n u_n) - (v_n, a\beta_n u_n).$$

Como  $i\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0$  em  $H_0^1(0, l)$  e  $\beta_n u_n$  é uniformemente limitada em  $L^2(0, l)$ ,

$$|(i\beta_n u_n, a\beta_n u_n) - (v_n, a\beta_n u_n)| \rightarrow 0. \quad (4.23)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (4.21), segue que

$$|(v_n, a\beta_n u_n)| \rightarrow 0. \quad (4.24)$$

Portanto, de (4.23) e (4.24), concluímos que

$$(\beta_n u_n, a\beta_n u_n) \rightarrow 0.$$

**2**  $(au_{nx}, u_{nx}) \rightarrow 0$ :

Fazendo o produto interno de  $i\beta_n v_n - u_{nxx} + a(x)v_n$  com  $au_n$  e usando as condições de contorno, resulta

$$(i\beta_n v_n - u_{nxx} + a(x)v_n, au_n) = (iav_n, \beta_n u_n) + (a_x u_n, u_{nx}) + (au_{nx}, u_{nx}) + (a(x)v_n, au_n).$$

Como  $i\beta_n v_n - u_{nxx} + a(x)v_n \rightarrow 0$  em  $L^2(0, l)$  e  $au_n$  é limitada em  $L^2(0, l)$ ,

$$i(av_n, \beta_n u_n) + (a_x u_n, u_{nx}) + (au_{nx}, u_{nx}) + (av_n, au_n) \rightarrow 0. \quad (4.25)$$

Observando que  $\beta_n u_n$  e  $au_n$  são limitadas em  $L^2(0, l)$  e usando (4.21), obtemos

$$(iav_n, \beta_n u_n) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l) \quad (4.26)$$

e

$$(av_n, au_n) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.27)$$

De (4.18), concluímos que

$$iu_n - \frac{v_n}{\beta_n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l).$$

Isso implica que

$$ia u_n - a \frac{v_n}{\beta_n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l).$$

Como

$$av_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l),$$

concluímos que

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.28)$$

Agora, como  $\|u_{nx}\|_{L^2(0, l)} \leq 1$ , pois  $\|U_n\|_H = 1$ , usando (4.28), obtemos

$$(a_x u_n, u_{nx}) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.29)$$

Portanto, de (4.25), (4.26), (4.27) e (4.29), segue que

$$(au_{nx}, u_{nx}) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l).$$



Assim,  $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$ .

Logo, segue do Teorema de Gearhart que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é exponencialmente estável. Isso implica que a solução do modelo (4.11) decai exponencialmente, isto é,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (u_x^2 + u_t^2) dx \leq CE(0)e^{-\alpha t}, \text{ para todo } t > 0,$$

sendo  $C$  uma constante positiva.

## 4.3 Sistema linear termoelástico

Nesta seção, consideramos uma barra de comprimento  $l$  com densidade unitária. Seja  $u$  o deslocamento e  $\theta$  a diferença de temperatura entre a barra e o meio ambiente. Então,  $u$  e  $\theta$  satisfazem o seguinte sistema linear termoelástico unidimensional:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \gamma\theta_x &= 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty) \\ \theta_t + \gamma u_{xt} - k\theta_{xx} &= 0, & (x, t) \in (0, l) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0, & t > 0 \\ \theta(0, t) = \theta(l, t) &= 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & x \in (0, l) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), & x \in (0, l) \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) & x \in (0, l) \end{aligned} \tag{4.30}$$

sendo  $k$  e  $\gamma$  constantes com  $k > 0$  e  $\gamma \neq 0$ . Estas constantes dependem das propriedades do material.

### 4.3.1 Existência e unicidade

Seja  $H = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times L^2(0, l)$ . Este espaço munido da norma

$$\|U\|_H = (\|u_x\|_{L^2(0, l)}^2 + \|v\|_{L^2(0, l)}^2 + \|\theta\|_{L^2(0, l)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Agora, considerando  $v = u_t$  e  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}$ , segue que

$$U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - \gamma\theta_x \\ k\theta_{xx} - \gamma u_{xt} \end{pmatrix} = AU.$$

Portanto, podemos reescrever o modelo (4.30) da seguinte forma:

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

O domínio natural para  $A$  é

$$D(A) = H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) \times H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l).$$

Notamos que  $D(A)$  é denso em  $H = H_0^1(0, l) \times L^2(0, l) \times L^2(0, l)$ .

Em relação ao operador  $A$ , temos o seguinte resultado:

**Teorema 18.** *O operador  $A$  gera um semigrupo de contrações de classe  $C_0$  em  $H$ .*

Demonstração:

Para provarmos esse resultado mostramos que  $A$  é dissipativo e que  $0 \in \rho(A)$ , para então, aplicarmos o Corolário 4.

i)  $A$  dissipativo:

Seja  $U \in D(A)$ . Usando as condições de contorno, obtemos

$$\begin{aligned}
(AU, U)_H &= \left( \begin{pmatrix} v \\ u_{xx} - \gamma\theta_x \\ k\theta_{xx} - \gamma v_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \right)_H \\
&= (v, u)_{H_0^1(0,l)} + (u_{xx} - \gamma\theta_x, v)_{L^2(0,l)} + (k\theta_{xx} - \gamma v_x, \theta)_{L^2(0,l)} \\
&= \int_0^l v_x u_x dx + \int_0^l (u_{xx} - \gamma\theta_x) v dx + \int_0^l (k\theta_{xx} - \gamma v_x) \theta dx \\
&= -\gamma \int_0^l \theta_x v dx - k \int_0^l \theta_x \theta_x dx + \gamma \int_0^l v \theta_x dx \\
&= -k \int_0^l |\theta_x|^2 dx.
\end{aligned}$$

Como  $(AU, U)_H = -k \int_0^l |\theta_x|^2 dx \leq 0$ ,  $A$  é dissipativo, pois  $k > 0$ .

ii)  $0 \in \rho(A)$ :

Provaremos que para todo  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in H$ , existe um único

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \in H \text{ tal que } AU = F.$$

Seja  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \in H$ . A equação  $AU = F$  em termos de seus compo-

nentes é dada por:

$$\begin{cases} v = f \in H_0^1(0, l) \\ u_{xx} - \gamma\theta_x = g \in L^2(0, l) \\ k\theta_{xx} - \gamma v_x = h \in L^2(0, l) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, isto é, substituindo  $v = f$  na terceira equação, segue que

$$k\theta_{xx} = h + \gamma f_x \in L^2(0, l). \quad (4.31)$$

Agora, mostramos que a equação (4.31) possui uma única solução  $\theta \in H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ .

Para isto, definimos uma forma bilinear

$$\begin{aligned}
B(\cdot, \cdot) : H_0^1(0, l) \times H_0^1(0, l) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(\theta, v) &\longmapsto B(\theta, v) = k(\theta_x, v_x)
\end{aligned}$$

em que  $(\cdot, \cdot)$  é o produto interno em  $L^2(0, l)$ . Verificamos que  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva e contínua.

i) Coercividade de  $B(\cdot, \cdot)$ :

Seja  $\theta \in H_0^1(0, l)$ . Então,

$$B(\theta, \theta) = (\theta_x, \theta_x) = \|\theta_x\|_{L^2(0, l)}^2 = \|\theta\|_{H_0^1(0, l)}^2.$$

Portanto,  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva.

ii) Continuidade de  $B(\cdot, \cdot)$ :

Sejam  $\theta$  e  $v \in H_0^1(0, l)$ . Então,

$$|B(\theta, v)| = |(\theta_x, v_x)| \leq \|\theta_x\|_{L^2(0, l)} \|v_x\|_{L^2(0, l)} = \|\theta\|_{H_0^1(0, l)} \|v\|_{H_0^1(0, l)}$$

Portanto,  $B(\cdot, \cdot)$  é contínua.

Definimos agora o funcional

$$\begin{aligned}
L : H_0^1(0, l) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v &\longmapsto L(v) = (-h - \gamma f_x, v)
\end{aligned}$$

Verificamos que  $L$  é linear e contínuo sobre  $H_0^1(0, l)$ .

(i) A linearidade de  $L$  segue direta da linearidade do produto interno.

(ii) Continuidade de  $L$ :

Seja  $v \in H_0^1(0, l) \subset L^2(0, l)$ . Então, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|L(v)| = |(-h - \gamma f_x, v)| \leq \| -h - \gamma f_x \| \|v\|.$$

Isso implica que  $L$  é contínuo.

Logo, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única  $\theta \in H_0^1(0, l)$  tal que

$$B(\theta, v) = (-h - \gamma f_x, v), \text{ para todo } v \in H_0^1(0, l).$$

Isto é,

$$k(\theta_x, v_x) = (-h - \gamma f_x, v), \text{ para todo } v \in H_0^1(0, l).$$

Em particular, temos

$$k(\theta_x, \phi_x) = (-h - \gamma f_x, \phi), \text{ para toda } \phi \in D(0, l),$$

sendo  $D(0, l)$  o espaço das funções  $C_0^\infty(0, l)$ . Isso implica que

$$k\theta_{xx} = h + \gamma f_x$$

no sentido distribucional.

Como  $h + \gamma f_x \in L^2(0, l)$ , usando o Teorema da Regularidade Elíptica para o operador elíptico de ordem 2,  $\Delta$ , resulta que  $\theta \in H^2(0, l)$ . Então,  $\theta \in H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ . Logo, existe uma única  $\theta \in H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$  satisfazendo (4.31).

Agora, substituindo  $\theta$  obtida resolvendo a equação (4.31) na segunda equação, vemos que

$$u_{xx} = g + \gamma \theta_x \in L^2(0, l). \tag{4.32}$$

Precisamos mostrar que a equação (4.32) possui uma única solução  $u \in H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ . Esse problema é similar ao que foi resolvido acima para a função  $\theta$ .

Logo, existe uma única  $u \in H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$  satisfazendo (4.32). Assim, concluímos que existe única  $U \in D(A)$  tal que  $AU = F$ . Portanto, existe o operador  $A^{-1}$  que é definido por  $A^{-1}F = U$ . Além disso, da Desigualdade de Poincaré e do

Teorema da Regularidade Elíptica, temos

$$\begin{aligned}
\|U\|_H^2 &= \|u_x\|_{L^2(0,l)}^2 + \|f\|_{L^2(0,l)}^2 + \|\theta\|_{L^2(0,l)}^2 \\
&\leq \|u_x\|_{L^2(0,l)}^2 + \|f_x\|_{L^2(0,l)}^2 + \|\theta_x\|_{L^2(0,l)}^2 \\
&\leq c_1 \|u\|_{H^2(0,l)}^2 + \|f_x\|_{L^2(0,l)}^2 + c_2 \|g\|_{L^2(0,l)}^2 \\
&\leq c_3 \|h + \gamma f_x\|_{L^2(0,l)}^2 + \|f_x\|_{L^2(0,l)}^2 + c_2 \|g\|_{L^2(0,l)}^2 \\
&\leq c_4 \left( \|f_x\|_{L^2(0,l)}^2 + \|g\|_{L^2(0,l)}^2 + \|h\|_{L^2(0,l)}^2 \right) \\
&= c_4 \|F\|_H^2
\end{aligned}$$

sendo  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  constantes positivas. Isso implica que o operador  $A^{-1}$  é limitado. Portanto,  $0 \in \rho(A)$ . Assim, aplicando o Corolário 4, concluímos que  $A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe  $C_0$ .

□

Logo, a teoria de semigrupos diz que para  $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \in D(A)$ ,  $U(t) = S(t)U_0$  é a

única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Também temos que

$$\begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \theta \end{pmatrix} \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H).$$

Isso implica que

$$u \in C([0, \infty), H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l));$$

$$u_t \in C([0, \infty), H_0^1(0, l)), \quad \text{ou seja, } u \in C^1([0, \infty), H_0^1(0, l));$$

$$\theta \in C([0, \infty), H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l));$$

$$u \in C^1([0, \infty); H_0^1(0, l));$$

$$u_t \in C^1([0, \infty); L^2(0, l)), \quad \text{ou seja, } u \in C^2([0, \infty); L^2(0, l));$$

$$\theta \in C^1([0, \infty); L^2(0, l)).$$

Portanto,

$$u \in C([0, \infty), H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)) \cap C^1([0, \infty), H_0^1(0, l)) \cap C^2([0, \infty); L^2(0, l))$$

e

$$\theta \in C([0, \infty), H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)) \cap C^1([0, \infty), L^2(0, l)).$$

Conseqüentemente, concluímos que existe uma única função  $u(x, t)$  e uma única função  $\theta(x, t)$  que satisfazem o problema de valor inicial (4.30).

### 4.3.2 Estabilidade exponencial

Agora, provamos que o semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , gerado pelo operador  $A$ , associado ao problema termoelástico é exponencialmente estável.

**Teorema 19.** *O semigrupo de contrações de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , gerado por  $A$ , é exponencialmente estável, isto é, existem constantes positiva  $M$  e  $\alpha$  tal que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Para demonstrar este resultado, verificamos as condições (3.1) e (3.2) do Teorema de Gearhart.

Inicialmente, provamos que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Segue do fato de  $0 \in \rho(A)$  que o operador

$$i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$$

é inversível para todo número real  $\beta$  tal que  $|\beta| < \|A^{-1}\|^{-1}$ . Além disso,  $\|(i\beta I - A)^{-1}\|$  é uma função contínua para todo  $\beta \in (-\|A^{-1}\|^{-1}, \|A^{-1}\|^{-1})$ .

Agora, suponhamos que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$$

é falso, então existe  $w \in \mathbb{R}$  com  $\|A^{-1}\|^{-1} \leq |w| < \infty$ , tal que

$$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \rho(A)$$

e

$$\sup\{\|(i\beta I - A)^{-1}\|; |\beta| < |w|\} = \infty$$

Então, existe uma sequência  $\beta_n \in \mathbb{R}$  com  $\beta_n \rightarrow w$  e  $|\beta_n| < |w|$  e uma sequência vetorial

de funções  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \in D(A)$  com  $\|U_n\|_H = 1$  tal que

$$\|(i\beta_n I - A)U_n\|_H \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$i\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, l) \tag{4.33}$$

$$i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma \theta_{nx} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l) \tag{4.34}$$

$$i\beta_n \theta_n - k\theta_{nxx} + \gamma v_{nx} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l) \tag{4.35}$$

Fazendo o produto interno de  $(i\beta_n I - A)U_n$  com  $U_n$  em  $H$ , resulta

$$\begin{aligned} ((i\beta_n I - A)U_n, U_n) &= \left( \begin{pmatrix} i\beta_n u_n - v_n \\ i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma \theta_{nx} \\ i\beta_n \theta_n - k\theta_{nxx} + \gamma v_{nx} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \end{pmatrix} \right) \\ &= (i\beta_n u_n - v_n, u_n)_{H_0^1(0, l)} + (i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma \theta_{nx}, v_n)_{L^2(0, l)} \\ &\quad + (i\beta_n \theta_n - k\theta_{nxx} + \gamma v_{nx}, \theta_n)_{L^2(0, l)} \end{aligned}$$



Tomando a parte real e usando as condições de contorno, segue que

$$\operatorname{Re}((i\beta_n I - A)U_n, U_n)_H = k\|\theta_{nx}\|_{L^2(0,l)}^2.$$

Como  $U_n$  é limitada e  $(i\beta_n I - A)U_n \rightarrow 0$ , temos

$$k\|\theta_{nx}\|_{L^2(0,l)}^2 \rightarrow 0. \quad (4.36)$$

Em particular, devido a Desigualdade de Poincaré, segue que

$$k\|\theta_n\|_{L^2(0,l)}^2 \rightarrow 0. \quad (4.37)$$

Usando (4.35) e (4.37), segue que

$$k\theta_{nxx} - \gamma v_{nx} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.38)$$

Integrando  $k\theta_{nxx} - \gamma v_{nx}$  de 0 até  $x$ , teremos

$$\int_0^x k\theta_{nxx} - \gamma v_{nx} dx = k\theta_{nx}(x) - k\theta_{nx}(0) - \gamma v_n(x). \quad (4.39)$$

Como

$$\begin{aligned} \|k\theta_{nx} - k\theta_{nx}(0) - \gamma v_n\|_{L^2(0,l)}^2 &= \int_0^l \left| \int_0^x k\theta_{nxx}(x) - \gamma v_{nx}(x) dx \right|^2 dy \\ &\leq \int_0^l \left( \int_0^l |k\theta_{nxx}(x) - \gamma v_{nx}(x)| dx \right)^2 dy \\ &\leq \int_0^l \left( \int_0^l 1^2 dx \right) \left( \int_0^l |k\theta_{nxx}(x) - \gamma v_{nx}(x)|^2 dx \right) dy \\ &= l^2 \|k\theta_{nxx} - \gamma v_{nx}\|_{L^2(0,l)}^2. \end{aligned}$$

Então, usando (4.38), devemos ter

$$k\theta_{nx} - k\theta_{nx}(0) - \gamma v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.40)$$

Assim, de (4.40) e (4.36), chegamos a

$$k\theta_{nx}(0) + \gamma v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.41)$$

Agora, de (4.33) e do fato que  $\|u_{nx}\|_{L^2(0,l)} \leq 1$ , pois  $\|U_n\|_H = 1$ , obtemos que  $\|v_{nx}\|_{L^2(0,l)}$  é uniformemente limitada. Assim, de (4.38), segue que  $\|\theta_{nxx}\|_{L^2(0,l)}$  é uniformemente limitada. Logo, pela Desigualdade Gagliardo-Nirenberg, concluímos que

$$|\theta_{nx}(0)| \leq \|\theta_{nx}\|_{L^\infty(0,l)} \leq C_1 \|\theta_{nxx}\|_{L^2(0,l)}^{\frac{1}{2}} \|\theta_{nx}\|_{L^2(0,l)}^{\frac{1}{2}} + C_2 \|\theta_{nx}\|_{L^2(0,l)} \rightarrow 0 \quad (4.42)$$

sendo  $C_1$  e  $C_2$  constantes positivas. Então, de (4.41) e (4.42) segue que

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.43)$$

Fazendo o produto interno de  $i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma\theta_{nx}$  com  $u_n$  em  $L^2(0, l)$ , resulta que

$$\begin{aligned} (i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma\theta_{nx}, u_n) &= \int_0^l i\beta_n v_n u_n dx - \int_0^l u_{nxx} u_n dx + \int_0^l \gamma\theta_{nx} u_n dx \\ &= \int_0^l i\beta_n v_n u_n dx + \int_0^l |u_{nx}|^2 dx + \int_0^l \gamma\theta_{nx} u_n dx. \end{aligned}$$

Como  $u_n$  é limitada em  $L^2(0, l)$  e  $i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma\theta_{nx} \rightarrow 0$  em  $L^2(0, l)$ , segue que

$$\|u_{nx}\| \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.44)$$

Portanto, de (4.37), (4.43) e (4.44) concluímos que  $\|U_n\|_H \rightarrow 0$ , o que é uma contradição, pois  $\|U_n\| = 1$ .

Provaremos agora que

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty. \quad (4.45)$$

Suponhamos que

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| = \infty.$$

Então, existe uma sequência de números reais  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  com  $|\beta_n| \rightarrow \infty$  e uma sequência vetorial de funções  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $H$  tal que

$$\frac{\|(i\beta_n - A)^{-1} V_n\|}{\|V_n\|} \geq n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\|(i\beta_n - A)^{-1} V_n\| \geq n \|V_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  e que  $i\beta_n \in \rho(A)$ , pela primeira parte da demonstração, existe uma única seqüência  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ , tal que

$$i\beta_n U_n - AU_n = V_n, \text{ com } \|U_n\| = 1.$$

Assim,

$$\|U_n\| \geq n \|i\beta_n U_n - AU_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isto implica que

$$\|(i\beta_n I - A)U_n\|_H \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , ou, usando a definição do operador  $A$ , temos que

$$i\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(0, l) \quad (4.46)$$

$$i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma \theta_{nx} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l) \quad (4.47)$$

$$i\beta_n \theta_n - k\theta_{nxx} + \gamma v_{nx} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l) \quad (4.48)$$

Fazendo o produto interno de  $(i\beta_n I - A)U_n$  com  $U_n$  em  $H$  e usando as condições de contorno, segue que

$$\operatorname{Re}((i\beta_n I - A)U_n, U_n)_H = k \|\theta_{nx}\|_{L^2(0, l)}^2 \rightarrow 0. \quad (4.49)$$

Em particular, devido a Desigualdade de Poincaré, segue que

$$k \|\theta_n\|_{L^2(0, l)}^2 \rightarrow 0. \quad (4.50)$$

Multiplicando (4.48) por  $\frac{1}{\beta_n}$  e usando que  $\|\theta_n\|_{L^2(0, l)} \rightarrow 0$ , segue que

$$\frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n} - \frac{\gamma v_{nx}}{\beta_n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.51)$$

Multiplicando (4.46) por  $\frac{\gamma}{\beta_n}$ , obtemos

$$i\gamma u_{nx} - \gamma \frac{v_{nx}}{\beta_n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.52)$$

Subtraindo (4.52) de (4.51), vemos que

$$\frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n} - i\gamma u_{nx} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0, l). \quad (4.53)$$

Do fato que  $\|u_{nx}\|_{L^2(0,l)} \leq 1$ , pois  $\|U_n\|_H = 1$ , segue de (4.53) que  $\left\| \frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n} \right\|$  é limitada em  $L^2(0,l)$ . Fazendo o produto interno de  $\frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n} - i\gamma u_{nx}$  com  $u_{nx}$  em  $L^2(0,l)$ , vemos que

$$\left( \frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n} - i\gamma u_{nx}, u_{nx} \right) = \left( \frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n}, u_{nx} \right) - i\gamma \|u_{nx}\|_{L^2(0,l)}^2.$$

Como  $u_{nx}$  é limitada em  $L^2(0,l)$  e  $\frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n} - i\gamma u_{nx} \rightarrow 0$  em  $L^2(0,l)$ , então

$$\left( \frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n}, u_{nx} \right) - i\gamma \|u_{nx}\|_{L^2(0,l)}^2 \rightarrow 0. \quad (4.54)$$

Agora, notamos que

$$\begin{aligned} \left( \frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n}, u_{nx} \right) &= \int_0^l \frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n} u_{nx} dx \\ &= \frac{k\theta_{nx}(l)u_{nx}(l)}{\beta_n} - \frac{k\theta_{nx}(0)u_{nx}(0)}{\beta_n} - \left( \frac{k\theta_{nx}}{\beta_n}, u_{nxx} \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Multiplicando (4.47) por  $\frac{1}{\beta_n}$ , usando que  $k\|\theta_{nx}\|_{L^2(0,l)}^2 \rightarrow 0$  e que  $\|v_n\|_{L^2(0,l)} \leq 1$ , pois  $\|U_n\|_H = 1$ , segue que  $\left\| \frac{u_{nxx}}{\beta_n} \right\|$  é limitada em  $L^2(0,l)$ . Assim, utilizando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e do fato que  $k\|\theta_{nx}\|_{L^2(0,l)}^2 \rightarrow 0$ , temos que

$$\left( \frac{k\theta_{nx}}{\beta_n}, u_{nxx} \right) \rightarrow 0.$$

Da desigualdade Gagliardo-Nirenberg e de estimativas acima, vemos que

$$\left\| \frac{\theta_{nx}}{\sqrt{|\beta_n|}} \right\|_{L^\infty(0,l)} \leq C_1 \|\theta_{nx}\|_{L^2(0,l)}^{\frac{1}{2}} \frac{\|\theta_{nxx}\|_{L^2(0,l)}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|\beta_n|}} + C_2 \frac{\|\theta_{nx}\|_{L^2(0,l)}}{\sqrt{|\beta_n|}} \rightarrow 0 \quad (4.56)$$

e

$$\left\| \frac{u_{nx}}{\sqrt{|\beta_n|}} \right\|_{L^\infty(0,l)} \leq C_3 \|u_{nx}\|_{L^2(0,l)}^{\frac{1}{2}} \frac{\|u_{nxx}\|_{L^2(0,l)}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{|\beta_n|}} + C_4 \frac{\|u_{nx}\|_{L^2(0,l)}}{\sqrt{|\beta_n|}} \leq C \quad (4.57)$$

sendo C uma constante positiva independente de n.

Então, de (4.56) e (4.57), segue que

$$\left\| \frac{k\theta_{nx}u_{nx}}{\beta_n} \right\|_{L^\infty(0,l)} \leq k \left\| \frac{\theta_{nx}}{\sqrt{|\beta_n|}} \right\|_{L^\infty(0,l)} \left\| \frac{u_{nx}}{\sqrt{|\beta_n|}} \right\|_{L^\infty(0,l)} \rightarrow 0.$$

Isso implica que  $\left| \frac{k\theta_{nx}(l)u_{nx}(l)}{\beta_n} \right|$  e  $\left| \frac{k\theta_{nx}(0)u_{nx}(0)}{\beta_n} \right|$  convergem para zero. Logo, segue de (4.55) que

$$\left( \frac{k\theta_{nxx}}{\beta_n}, u_{nx} \right) \rightarrow 0. \quad (4.58)$$

Assim, de (4.54) e (4.58), concluímos que

$$\|u_{nx}\|_{L^2(0,l)}^2 \rightarrow 0. \quad (4.59)$$

De (4.46) e (4.59), vemos que

$$\frac{v_{nx}}{\beta_n} \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0,l). \quad (4.60)$$

Fazendo o produto interno de  $i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma\theta_{nx}$  com  $v_n$  em  $L^2(0,l)$ , obtemos

$$\begin{aligned} (i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma\theta_{nx}, v_n) &= i\beta_n \int_0^l |v_n|^2 dx - \int_0^l u_{nxx} v_n dx + \gamma \int_0^l \theta_{nx} v_n dx \\ &= i\beta_n \|v_n\|_{L^2(0,l)}^2 + (u_{nxx}, v_n) + \gamma(\theta_{nx}, v_n). \end{aligned}$$

Como  $i\beta_n v_n - u_{nxx} + \gamma\theta_{nx} \rightarrow 0$  em  $L^2(0,l)$  e  $\|v_n\|_{L^2(0,l)} \leq 1$ , pois  $\|U_n\|_H = 1$ , então

$$i\beta_n \|v_n\|_{L^2(0,l)}^2 + (u_{nxx}, v_n) + \gamma(\theta_{nx}, v_n) \rightarrow 0. \quad (4.61)$$

Multiplicando (4.61) por  $\frac{1}{\beta_n}$ , obtemos

$$i\|v_n\|_{L^2(0,l)}^2 + \left( u_{nxx}, \frac{v_{nx}}{\beta_n} \right) + \gamma \left( \theta_{nx}, \frac{v_n}{\beta_n} \right) \rightarrow 0. \quad (4.62)$$

Como  $\left( u_{nxx}, \frac{v_{nx}}{\beta_n} \right)$  e  $\left( \gamma\theta_{nx}, \frac{v_n}{\beta_n} \right)$  convergem para zero, concluímos de (4.62) que

$$v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(0,l). \quad (4.63)$$

Assim, de (4.59), (4.63) e (4.50), concluímos que  $\|U_n\|_H \rightarrow 0$ , o que é uma contradição, pois  $\|U_n\|_H = 1$ . Portanto,  $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$ .

Logo, segue do Teorema de Gearhart que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é exponencialmente estável e, portanto, a solução do modelo (4.30) decai exponencialmente.

**Conclusão:** Da estimativa do Teorema 19 tem-se para  $U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ \theta \end{pmatrix}$

com  $u$  e  $\theta$  solução do problema termoelástico a seguinte desigualdade:

$$\|U\|_H = \|S(t)U_0\|_H \leq \|S(t)\| \|U_0\| \leq M \|U_0\| e^{-\alpha t}, \quad t > 0.$$

Usando a definição de  $H$ , resulta

$$2E(t) = \|u\|_{H_0^1(0,l)}^2 + \|u_t\|_{L^2(0,l)}^2 + \|\theta\|_{L^2(0,l)}^2 \leq M^2 \|U_0\|^2 e^{-\alpha t}, \quad t > 0.$$

Assim,  $E(t)$ , a energia do sistema termoelástico, tem o seguinte comportamento assintótico no tempo:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (u_x^2 + u_t^2 + \theta^2) dx \leq CE(0)e^{-\alpha t}, \quad t > 0,$$

com  $C$  uma constante positiva.

## 4.4 Equação da onda bidimensional com dissipação localmente distribuída

Nesta seção, estudamos a equação da onda bidimensional com uma dissipação localizada representado pelo termo  $a(x, y)u_t$ , sendo  $a(x, y)$  uma função  $W^{1,\infty}(\Omega)$  com  $a(x, y) \geq 0$  para todo  $(x, y) \in \Omega = [0, a] \times [0, b]$  e  $\int_{\Omega} a(x, y) dz > 0$ . Aqui  $dz = dx dy$ . O problema de valor inicial e de contorno associado é o seguinte:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + a(x, y)u_t &= 0, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, y, t) &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \\ u_t(x, y, 0) &= u_1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \end{aligned} \tag{4.64}$$

A função  $a(x, y)$  pode anular em uma parte de  $\Omega$ . Assim, o termo dissipativo pode ser efetivo apenas em parte do domínio  $\Omega$ .

### 4.4.1 Existência e unicidade

Seja  $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Este espaço munido da norma

$$\|U\|_H = \left( \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dz + \int_{\Omega} |v|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Considerando  $v = u_t$ , reescrevemos a primeira equação do problema (4.64) na forma de um sistema de primeira ordem no tempo dado por:

$$\begin{cases} u_t - v = 0 \\ v_t - \Delta u + a(x, y)u_t = 0. \end{cases}$$

Escrevendo  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  e definindo o operador  $A$  como

$$AU = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - a(x, y)u_t \end{pmatrix},$$

podemos reescrever o modelo (4.64) da seguinte forma:

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

O domínio de  $A$  é dado por

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H; u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ e } v \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Notamos que  $D(A)$  é denso em  $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ .

Em relação ao operador  $A$ , temos o seguinte resultado:

**Teorema 20.** *O operador  $A$  gera um semigrupo de contrações de classe  $C_0$  em  $H$ .*

Demonstração:

Mostramos que  $A$  é dissipativo e que  $0 \in \rho(A)$ , para então, aplicarmos o Corolário 4.

i)  $A$  dissipativo:

Seja  $U \in D(A)$ . Usando as condições de contorno, obtemos

$$\begin{aligned}
(AU, U)_H &= \left( \begin{pmatrix} v \\ \Delta u - a(x, y)v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H \\
&= \int_{\Omega} [\nabla v \cdot \nabla u + (\Delta u - a(x, y)v)v] dz \\
&= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dz + \int_{\Omega} (\Delta u) v dz - \int_{\Omega} a(x, y)|v|^2 dz \\
&= - \int_{\Omega} v \Delta u dz + \int_{\Omega} (\Delta u) v dz - \int_{\Omega} a(x, y)|v|^2 dz \\
&= - \int_{\Omega} a(x, y)|v|^2 dz,
\end{aligned}$$

pois  $\int_{\Omega} v \Delta u dz = - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dz$ . Como  $(AU, U)_H = - \int_{\Omega} a(x, y)|v|^2 dz \leq 0$ , então  $A$  é dissipativo, pois  $a(x, y) \geq 0$ .

ii)  $0 \in \rho(A)$ :

Provaremos que para todo  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ , existe um único

$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$  tal que

$$AU = F.$$

Seja  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$ . A equação  $AU = F$  em termos de seus componentes é dada por

$$\begin{cases} v = f \in H_0^1(\Omega) \\ \Delta u - a(x, y)v = g \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, isto é, considerando  $v = f$  e substituindo na segunda equação, temos

$$\Delta u = g + a(x, y)f \in L^2(\Omega), \quad (4.65)$$

pois  $a \in L^\infty(\Omega)$ . Agora, mostramos que (4.65) admite uma única solução  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Para isto, definimos uma forma bilinear

$$\begin{aligned}
B(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\longmapsto B(u, v) = (\nabla u, \nabla v)
\end{aligned}$$



em que  $(\cdot, \cdot)$  indica o produto interno em  $L^2(\Omega)$ . Verificamos que  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva e contínua.

i) Coercividade de  $B(\cdot, \cdot)$ :

Seja  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Então,

$$B(u, u) = (\nabla u, \nabla u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Portanto,  $B(\cdot, \cdot)$  é coerciva.

ii) Continuidade de  $B(\cdot, \cdot)$ :

Sejam  $u$  e  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Então,

$$|B(u, v)| = |(\nabla u, \nabla v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto,  $B(\cdot, \cdot)$  é contínua.

Agora, mostraremos que o funcional

$$\begin{aligned} L : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto L(v) = (-g - a(\cdot, \cdot)f, v) \end{aligned}$$

é linear e contínuo sobre  $H_0^1(\Omega)$ .

(i) A linearidade de  $L$  segue direta da linearidade do produto interno.

(ii) Continuidade de  $L$ :

Seja  $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ . Como  $-g - a(\cdot, \cdot)f \in L^2(\Omega)$ , então pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|L(v)| = |(-g - a(x, y)f, v)| \leq \| -g - a(\cdot, \cdot)f \|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Isso implica que  $L$  é contínuo.

Portanto,  $L \in H^{-1}(\Omega)$ .

Usando o Teorema de Lax-Milgram concluímos que existe uma única  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $B(u, v) = (-g - a(\cdot, \cdot)f, v)$ , para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$ . Isto é,

$$(\nabla u, \nabla v) = (-g - a(\cdot, \cdot)f, v), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular,

$$(\nabla u, \nabla \phi) = (-g - a(\cdot, \cdot)f, \phi), \text{ para toda } \phi \in D(\Omega),$$

sendo  $D(\Omega)$  o espaço das funções  $C_0^\infty(\Omega)$ . Isso implica que

$$\Delta u = g + a(\cdot, \cdot)f$$

no sentido distribucional.

Como  $g + a(\cdot, \cdot)f \in L^2(\Omega)$ , usando o Teorema da Regularidade Elíptica para o operador elíptico de ordem 2,  $\Delta$ , resulta que  $u \in H^2(\Omega)$ . Então,  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ . Portanto, obtivemos uma única  $U \in D(A)$  tal que  $AU = F$ . Assim, existe o operador  $A^{-1}$ . Além disso, da Desigualdade de Poincaré e do Teorema da Regularidade Elíptica, temos

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c_1 \|af + g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq c_3 \|f\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + c_4 \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq c_5 \left( \|f\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= c_5 \|F\|_H^2 \end{aligned}$$

sendo  $c_1, c_2, c_3, c_4$  e  $c_5$  constantes positivas, isto é, o operador  $A^{-1}$  é limitado.

Portanto,  $0 \in \rho(A)$ .

Assim, pelo Corolário 4, segue que  $A$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe  $C_0$ .

□

Agora, como  $A$  é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , de classe  $C_0$ , a teoria de semigrupo diz que para  $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$ ,

$U(t) = S(t)U_0$  é a única solução clássica do problema de valor inicial

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Também temos que

$$U \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); H). \quad (4.66)$$

Interpretemos (4.66). Lembrando que  $v = u_t$ , (4.66) pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C([0, \infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)).$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} u &\in C([0, \infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)); \\ u_t &\in C([0, \infty), H_0^1(\Omega)), \quad \text{ou seja, } u \in C^1([0, \infty), H_0^1(\Omega)); \\ u &\in C^1([0, \infty); H_0^1(\Omega)); \\ u_t &\in C^1([0, \infty); L^2(\Omega)), \quad \text{ou seja, } u \in C^2([0, \infty); L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Portanto, para  $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ , existe uma única solução de (4.64) que satisfaz:

$$u \in C([0, \infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

Conseqüentemente, concluímos que existe uma única função  $u(x, t)$  que satisfaz o problema de valor inicial (4.64).

## 4.4.2 Estabilidade exponencial

**Teorema 21.** *O semigrupo de contrações de classe  $C_0$ ,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , gerado por  $A$ , é exponencialmente estável, isto é, existem constantes positiva  $M$  e  $\alpha$  tal que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Para provar a estabilidade exponencial de  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ , verificamos as condições (3.1) e (3.2) do Teorema de Gearhart.

Primeiramente, provamos que  $\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$ . Para isso, suponhamos que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$$

é falso. Então, existe  $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$  tal que  $i\beta \in \sigma(A)$ . Já sabemos que a inversa de  $A$  está definida e é contínua em todo  $H$ , com valores em  $D(A)$ , isto é,

$$A^{-1} : H \rightarrow D(A).$$

Como a imersão  $i_A$

$$i_A : D(A) \rightarrow H$$

é compacta, temos que a aplicação

$$A^{-1} = A^{-1} \circ i_A : H \rightarrow H$$

é compacta. Assim, usando o Teorema 6, concluímos que  $i\beta$  é um autovalor de  $A$ .

De fato, considerando  $\lambda = i\beta$ , temos as seguintes equações:

$$(1) \quad A^{-1}x - \frac{1}{\lambda}x = y \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda}Ax = Ay \Leftrightarrow \lambda x - Ax = \lambda Ay.$$

$$(2) \quad A^{-1}x - \frac{1}{\lambda}x = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda}Ax = 0 \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0.$$

Suponha que a equação  $\left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\right)x = 0$  admite apenas a solução trivial, então  $\lambda x - Ax = 0$  admite apenas a solução trivial. Assim, pelo Teorema 6, a equação  $A^{-1}x - \frac{1}{\lambda}x = y$  possui uma solução  $x$  para cada  $y \in H$  e o operador  $A^{-1} - \frac{1}{\lambda}$  tem inversa limitada, ou seja, o operador  $\lambda I - A$  tem inversa limitada. Logo,  $\lambda \in \rho(A)$ , o que é uma contradição, pois por  $\lambda \in \sigma(A)$ . Portanto, a equação  $\left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\right)x = 0$  não possui apenas a solução trivial e, desta forma,  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ .

Assim, existe um vetor  $U \in D(A)$ , com  $\|U\|_H = 1$ , tal que

$$i\beta U - AU = 0, \tag{4.67}$$

isto é,

$$i\beta u - v = 0 \quad (4.68)$$

$$i\beta v - \Delta u + a(x, y)v = 0 \quad (4.69)$$

Fazendo o produto interno de (4.67) com  $U$  em  $H$ , resulta

$$\begin{aligned} 0 = (i\beta U - AU, U)_H &= \left( \begin{pmatrix} i\beta u - v \\ i\beta v - \Delta u + a(x, y)v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H \\ &= (i\beta u - v, u)_{H_0^1(\Omega)} + (i\beta v - \Delta u + a(x, y)v, v)_{L^2(\Omega)} \\ &= i(\beta u, u)_{H_0^1(\Omega)} - (v, u)_{H_0^1(\Omega)} + i(\beta v, v)_{L^2(\Omega)} + (a(x, y)v - \Delta u, v)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Considerando a parte real e usando as condições de contorno, segue que

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{Re}(i\beta U - AU, U)_H &= (a(x, y)v - \Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (v, u)_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} (a(x, y)v - \Delta u)v \, dz - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, dz \\ &= \int_{\Omega} a(x, y)|v|^2 \, dz - \int_{\Omega} (\Delta u)v \, dz - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, dz \\ &= \int_{\Omega} a(x, y)|v|^2 \, dz - \int_{\Omega} (\Delta u)v \, dz + \int_{\Omega} v \Delta u \, dz \\ &= \int_{\Omega} a(x, y)|v|^2 \, dz. \end{aligned}$$

Como

$$\|av\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |a(x, y)v|^2 \, dz \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} a(x, y)|v|^2 \, dz = 0$$

então,

$$a(x, y)v(x, y) = 0, \text{ para todo } (x, y) \in \Omega. \quad (4.70)$$

Substituindo (4.68) e (4.70) em (4.69), obtemos

$$-\beta^2 u - \Delta u = 0,$$

em  $\Omega$ . Como  $u(x, t) = 0$  sobre  $\partial\Omega \times (0, \infty)$ , a solução da equação acima é dada por:

$$u(x, y) = k \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad \text{com} \quad \beta^2 = \frac{m^2}{a^2} \pi^2 + \frac{n^2}{b^2} \pi^2,$$

sendo  $k \neq 0$  e  $m, n \geq 1$ . Substituindo em

$$0 = a(x, y)v(x, y) = i\beta a(x, y)u(x, y) = i\beta ka(x, y) \sin \frac{m\pi}{a}x \sin \frac{m\pi}{b}y,$$

para todo  $(x, y) \in \Omega$ . Mas, isso diz que  $a(x, y) = 0$  exceto sobre um conjunto enumerável de pontos, o que é uma contradição, pois  $\int_{\Omega} a(x, y)dz > 0$ . Portanto, podemos afirmar que  $\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$ .

Para a segunda parte da demonstração, suponhamos que  $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| = \infty$ , então existe uma seqüência de números reais  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  com  $|\beta_n| \rightarrow \infty$  e uma seqüência vetorial de funções  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em  $H$  tal que

$$\frac{\|(i\beta_n - A)^{-1}V_n\|}{\|V_n\|} \geq n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\|(i\beta_n - A)^{-1}V_n\| \geq n\|V_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$  e que  $i\beta_n \in \rho(A)$ , existe uma única seqüência  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)$ , tal que

$$i\beta_n U_n - AU_n = V_n, \text{ com } \|U_n\| = 1.$$

Assim,

$$\|U_n\| \geq n\|i\beta_n U_n - AU_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isso implica que

$$\|(i\beta_n I - A)U_n\|_H \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja, sendo  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ :

$$f_n = i\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad (4.71)$$

$$g_n = i\beta_n v_n - \Delta u_n + a(x, y)v_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (4.72)$$

Fazendo o produto interno de  $i\beta_n U_n - AU_n$  com  $U_n$  em  $H$ , resulta

$$\begin{aligned} (i\beta_n U_n - AU_n, U_n)_H &= \left( \begin{pmatrix} i\beta_n u_n - v_n \\ i\beta_n v_n - \Delta u_n + a(x, y)v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \right)_H \\ &= (i\beta_n u_n - v_n, u_n)_{H_0^1(\Omega)} + (i\beta_n v_n - \Delta u_n + a(x, y)v_n, v_n)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Considerando a parte real e usando as condições de contorno, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i\beta_n U_n - AU_n, U_n)_H &= (a(x, y)v_n - \Delta u_n, v_n)_{L^2(\Omega)} - (v_n, u_n)_{H_0^1(\Omega)} \\ &= (a(x, y)v_n, v_n)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Como  $i\beta_n U_n - AU_n \rightarrow 0$  em  $H$  e  $U_n$  é limitada em  $H$ , segue que

$$(a(x, y)v_n, v_n) \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (4.73)$$

Agora, considerando a desigualdade

$$\|av_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |av_n|^2 dz \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |v_n|^2 dz$$

e usando (4.73), segue que

$$av_n \rightarrow 0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (4.74)$$

Substituindo  $v_n = i\beta_n u_n - f_n$  em  $g_n = i\beta_n v_n - \Delta u_n + a(x, y)v_n$ , obtemos

$$-\beta_n^2 u_n - \Delta u_n = g_n + i\beta_n f_n - a(x, y)v_n. \quad (4.75)$$

Agora, considerando  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função tal que  $q \in C^1(\Omega)$  e fazendo o produto interno em  $L^2(\Omega)$  de (4.75) com  $q(x, y) \cdot \nabla u_n$ , obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \operatorname{div}(q)(\beta_n^2 |u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dz + \int_{\partial\Omega} q \cdot \eta |\nabla u_n|^2 d\Gamma + 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (D_j q_i)(D_i u_n)(D_j u_n) dz = \\ &= 2(g_n, q \cdot \nabla u_n) - 2(av_n, q \cdot \nabla u_n) - 2(i\beta_n \operatorname{div}(f_n q), u_n) = 2(g_n, q \cdot \nabla u_n) - \\ &- 2(av_n, q \cdot \nabla u_n) - 2(i\beta_n f_n \operatorname{div}(q), u_n) - 2(i\beta_n (\nabla f_n) q, u_n), \end{aligned} \quad (4.76)$$

sendo  $\eta = \eta(x, y)$  a variável exterior unitária em  $(x, y) \in \partial\Omega$ . Seguem abaixo as justificativas da igualdade acima.

**1** Como  $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div}(F) + \langle \nabla f, F \rangle$ , sendo  $F$  um campo de vetores e  $f$  uma função escalar, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( q(x, y) \frac{|u_n|^2}{2} \right) &= \operatorname{div} (q(x, y)) \frac{|u_n|^2}{2} + q(x, y) \cdot \nabla \left( \frac{|u_n|^2}{2} \right) \\ &= \operatorname{div} (q(x, y)) \frac{|u_n|^2}{2} + q(x, y) \cdot (u_n \nabla u_n) \\ &= \operatorname{div} (q(x, y)) \frac{|u_n|^2}{2} + u_n q(x, y) \cdot \nabla u_n. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega} -\beta_n^2 u_n q(x, y) \cdot \nabla u_n dz = \int_{\Omega} -\beta_n^2 \left( \operatorname{div} \left( q(x, y) \frac{|u_n|^2}{2} \right) - \operatorname{div} (q(x, y)) \frac{|u_n|^2}{2} \right) dz$$

por conseguinte, usando o teorema da divergência, resulta que

$$\int_{\Omega} -\beta_n^2 u_n q(x, y) \cdot \nabla u_n dz = \int_{\Omega} \beta_n^2 \operatorname{div} (q(x, y)) \frac{|u_n|^2}{2} dz.$$

**2**

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta u_n q(x, y) \cdot \nabla u_n dz &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} q(x, y) \cdot \eta |\nabla u_n|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (q(x, y)) |\nabla u_n|^2 dz + \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (D_j q_i) (D_i u_n) (D_j u_n) dz. \end{aligned}$$

**3** Como

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f_n u_n q(x, y)) &= f_n u_n \operatorname{div}(q(x, y)) + \langle \nabla(f_n u_n), q(x, y) \rangle \\ &= f_n u_n \operatorname{div}(q(x, y)) + \langle u_n \nabla f_n, q(x, y) \rangle + \langle f_n \nabla u_n, q(x, y) \rangle \end{aligned}$$

então, integrando e usando o teorema da divergência, vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} i\beta_n f_n q(x, y) \cdot \nabla u_n dz &= \int_{\Omega} i\beta_n (\operatorname{div}(f_n u_n q(x, y)) - f_n u_n \operatorname{div}(q(x, y)) - \langle u_n \nabla f_n, q(x, y) \rangle) dz \\ &= -i\beta_n \int_{\Omega} f_n u_n \operatorname{div}(q(x, y)) dz - i\beta_n \int_{\Omega} \langle u_n \nabla f_n, q(x, y) \rangle dz \\ &= -i\beta_n \int_{\Omega} u_n \operatorname{div}(f_n q(x, y)) dz. \end{aligned}$$

Como  $\beta_n u_n$  é uniformemente limitada em  $L^2(\Omega)$ , usando (4.71), (4.72) e (4.74), concluímos de (4.76) que:

$$2(g_n, q \cdot \nabla u_n) - 2(av_n, q \cdot \nabla u_n) - 2(i\beta_n f_n \operatorname{div}(q), u_n) - 2(i\beta_n (\nabla f_n) \cdot q, u_n) \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(q) (\beta_n^2 |u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dz + \int_{\partial\Omega} q \cdot \eta |\nabla u_n|^2 d\Gamma + 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 (D_j q_i) (D_i u_n) (D_j u_n) dz \rightarrow 0.$$

Considerando  $q(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , temos

$$2 \int_{\Omega} (\beta_n^2 |u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dz + \int_{\partial\Omega} q \cdot \eta |\nabla u_n|^2 d\Gamma + 2 \int_{\Omega} u_{nx}^2 + u_{ny}^2 dz \rightarrow 0,$$



o que é uma contradição, pois  $\int_{\partial\Omega} q(x, y) \cdot \eta |\nabla u_n|^2 d\Gamma \geq 0$ ,  $2 \int_{\Omega} (u_{nx}^2 + u_{ny}^2) dz \geq 0$  e  $2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\Omega} (|\nabla u_n|^2 + |v_n|^2) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\Omega} (\beta_n^2 |u_n|^2 + |\nabla u_n|^2) dz$ , por causa que  $\beta_n u_n - v_n \rightarrow 0$  em  $L^2(\Omega)$ .

Assim,  $\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - A)^{-1}\| < \infty$ .

Logo, segue do Teorema de Gearhart que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é exponencialmente estável.

**Corolário 6.** *A única solução do problema (4.64) satisfaz a seguinte propriedade de decaimento:*

$$E(t) \leq C e^{-\alpha t}$$

sendo  $C$  uma constante positiva dependendo dos dados iniciais e  $\alpha$  uma constante positiva. Aqui,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (|\nabla u|^2 + |u_t|^2) dx dy.$$

# Referências Bibliográficas

- [1] A. M. Gomes, *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1985.
- [2] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [3] C.A. Raposo, *Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em EDP*. SBMAC, Florianópolis-SC:, 2007.
- [4] C. W. Groetsch, *Elements of applicable functional analysis*. Marcel Dekker, New York and Basel, 1983.
- [5] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley e Sons, 1978.
- [6] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle: théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [7] J. E. Muñoz Rivera, *Semigrupos e equações diferenciais parciais*. Instituto de Matemática, Petrópolis, 2007.
- [8] K. Yosida, *Functional analysis*. Springer-Verlag, Berlim-Heidelberg, New York, 1966.
- [9] L. A. Medeiros, P.H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais*. Textos de Métodos Matemáticos número 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

- [10] S. Agmon, H. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II*. Comm. Pure Appl. Math, 17, 35-92, 1964.
- [11] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems*. Chapman & Hall/CRC. London, 1999.