

**HOMERO FERNANDES OLIVEIRA**

**DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA INFORMATIZADO  
PARA DETERMINAR O ESPAÇAMENTO ÓTIMO ENTRE  
PONTOS DE PARADA DE TRANSPORTE COLETIVO**

**Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas – Área de Concentração: Transporte e Logística da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito à qualificação para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção.**

**Orientadora: Profa. Dra. Mirian Buss Gonçalves**

**FLORIANÓPOLIS  
27 de fevereiro de 2008**

**TERMO DE APROVAÇÃO****HOMERO FERNANDES OLIVEIRA****DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA INFORMATIZADO PARA  
DETERMINAR O ESPAÇAMENTO ÓTIMO ENTRE PONTOS DE PARADA DE  
TRANSPORTE COLETIVO**

Tese apresentada como requisito para qualificação para obtenção do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas – Área de Concentração: Transportes e Logística, Universidade Federal de Santa Catarina, pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Antônio Sérgio Coelho, Dr.  
Coordenador

---

Profa. Mirian Buss Gonçalves, Dra.  
Programa de Pós Graduação em  
Engenharia de Produção, UFSC  
Orientadora

---

Prof. Antônio Galvão N. Novaes, Dr.  
Programa de Pós Graduação em  
Engenharia de Produção, UFSC  
Co-orientador

---

Prof. Edson Tadeu Bez, Dr.  
Programa de Pós Graduação em  
Engenharia de Produção, UFSC  
Moderador

---

Prof. José Eduardo Souza de Cursi  
Laboratoire de Mécanique de Rouen  
INSA – Rouen - França  
Co-orientador e Examinador Externo

---

Prof. João Carlos Souza, Dr.  
Departamento de Arquitetura e  
Urbanismo, UFSC

---

Prof. Sérgio Fernando Mayerle, Dr  
Programa de Pós Graduação em  
Engenharia de Produção, UFSC

---

Prof. Orlando Strambi, Dr.  
Escola Politécnica  
Universidade de São Paulo  
Examinador Externo

Florianópolis  
27 de fevereiro de 2008

Este trabalho é dedicado à minha esposa Luciana e aos meus filhos Hélio e Henrique pelo apoio e paciência durante toda a sua execução e por serem a razão de tudo na minha vida.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a DEUS, por ter me proporcionado condições para alcançar este momento em minha vida.

Aos meus pais, por terem me dado a vida e terem se esforçado ao máximo pela minha educação.

À Profa. Mirian Buss Gonçalves por me receber como orientando e pela sua dedicação e esforço.

Ao meu co-orientador Prof. Antônio Galvão N. Novaes pelas idéias e pelas experiências a mim apresentadas.

À Prof. Débora Silva Lobo pela apoio prestado durante esta jornada.

Ao meu co-orientador Prof. José Eduardo Souza de Cursi, pela sua orientação e pela acolhida na cidade de Rouen.

Ao Prof. Edson Tadeu Bez pelo seu apoio quando precisei de socorro.

Ao Prof. Rui Rossi dos Santos que muito me auxiliou no início dos trabalhos.

À funcionária Sonia Lemanski da Unioeste pela competência e pelo auxílio durante o meu afastamento.

Ao pessoal do Pronex, em especial à Helena, pelo seu apoio e amizade.

Ao pessoal do LABTRANS pela amizade no curto espaço de tempo em que estivemos juntos.

À Universidade Estadual do Oeste do Paraná por ter me proporcionado esta oportunidade de qualificação profissional.

À CAPES e ao CNPQ pelo apoio financeiro durante o curso.

## SUMÁRIO

TERMO DE APROVAÇÃO .....	ii
AGRADECIMENTOS .....	iv
SUMÁRIO .....	v
LISTA DE FIGURAS .....	vii
LISTA DE TABELAS .....	viii
RESUMO .....	ix
ABSTRACT .....	x
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Problema .....	2
1.2 Objetivo Geral .....	3
1.2.1 Objetivos Específicos .....	3
1.3 Limitações do Trabalho .....	4
1.4 Estrutura do Trabalho .....	5
<b>2 REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	<b>6</b>
2.1 Regulamentações Existentes no Mundo .....	8
2.2 Regulamentações Existentes no Brasil .....	10
2.3 Modelos de Otimização .....	11
2.4 Estudo de Caso 1 .....	13
2.4.1 Aplicação do Modelo .....	16
2.5 Estudo de Caso 2 .....	17
2.5.1 Situação 1: O espaçamento é constante ao longo da linha e se mantém constante em todas as linhas .....	21
2.5.2 Situação 2: O espaçamento é constante ao longo de uma linha, mas pode variar de uma linha para outra .....	21
2.5.3 Situação 3: Considera-se que a distribuição de demanda pode variar entre rotas e ao longo de cada rota .....	22
2.5.4 Conclusões do Estudo de Kuah e Perl (1988) .....	23
2.6 Estudo de Caso 3 .....	23
2.7 Estudo de Caso 4 .....	27
2.8 Estudo de Caso 5 .....	30
2.9 Considerações Finais .....	38
<b>3 DIAGRAMA DE VORONOI .....</b>	<b>40</b>
3.1 Histórico .....	40
3.2 Considerações Iniciais .....	41
3.3 Definições .....	43
3.3.1 Diagrama de Voronoi .....	43
3.4 Triangulação de Delaunay .....	48
3.4.1 Definição Matemática da Triangulação de Delaunay .....	50
3.5 Propriedades Básicas .....	53
3.5.1 Diagrama de Voronoi .....	53
3.5.2 Triangulação de Delaunay .....	55
3.6 Generalizações do Diagrama de Voronoi .....	56
3.6.1 Diagrama de Voronoi Ponderado .....	56
3.6.2 Diagrama de Voronoi Ponderado por Multiplicação .....	57
3.6.3 Diagrama de Voronoi Ponderado por Adição .....	59
3.7 Considerações Finais .....	60
<b>4 PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR .....</b>	<b>62</b>
4.1 O Problema da Programação Não Linear .....	62
4.1.1 Condições de Otimalidade .....	63
4.1.2 Definição de Convexidade .....	64
4.1.3 Funções Convexas Diferenciáveis .....	65
4.2 Métodos de Solução de Problemas de Programação Não Linear .....	65
4.2.1 Método do Gradiente .....	66
4.2.2 Método das Direções Conjugadas (Gradiente Conjugado) .....	67
4.2.3 Método Davidon-Fletcher-Powell .....	68
4.2.4 Determinação do Tamanho do Deslocamento .....	69
4.2.5 Método Simulated Annealing (Metrópolis) .....	72
4.2.6 Método Numérico para o Cálculo da Derivada .....	73
4.3 Considerações Finais .....	74
<b>5 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....</b>	<b>75</b>
5.1 Município de São Paulo .....	75

5.1.1	O Transporte Coletivo em São Paulo.....	76
5.2	Linha 4 do Metrô de São Paulo.....	77
5.3	Linha Alimentadora da Linha 4 do Metrô de São Paulo.....	78
5.3.1	Modelo Matemático.....	80
5.4	Linha 5108-10 – Jd. Celeste / Parque Dom Pedro II.....	86
5.4.1	Modelo Matemático.....	88
5.5	Considerações sobre a Densidade Demográfica da Região de Abrangência.....	91
5.6	Metodologia para o Cálculo dos Valores.....	92
6	<b>RESULTADOS COMPUTACIONAIS</b> .....	94
6.1	Desenvolvimento das Ferramentas Computacionais.....	94
6.2	Teste das Ferramentas Computacionais.....	95
6.3	Operação do Sistema para a Linha Alimentadora.....	98
6.3.1	Funcionamento do Programa.....	103
6.3.2	Resultados Obtidos.....	104
6.4	Operação do Sistema para a Linha 5108.....	108
6.5	Considerações sobre os Resultados.....	114
7	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b> .....	116
7.1	Conclusões.....	116
7.2	Recomendações e Trabalhos Futuros.....	117
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	118
	<b>ANEXO 1</b> .....	123
	<b>ANEXO 2</b> .....	127
	<b>ANEXO 3</b> .....	128
	<b>ANEXO 4</b> .....	129
	<b>ANEXO 5</b> .....	152
	<b>ANEXO 6</b> .....	154
	<b>ANEXO 7</b> .....	155
	<b>ANEXO 8</b> .....	156

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 DIAGRAMA DEMONSTRANDO AS FASES DE ACELERAÇÃO E DESACELERAÇÃO .....	15
FIGURA 2.2: GEOMETRIA DA ÁREA ANALISADA .....	18
FIGURA 2.3 – DISTÂNCIA MÉDIA DE ACESSOS POR NÚMERO DE PARADAS .....	27
FIGURA 2.4 – DESLOCAMENTO DO USUÁRIO ATÉ A LINHA DO ÔNIBUS .....	28
FIGURA 2.5 – DESLOCAMENTO DO USUÁRIO NA LINHA DO ÔNIBUS .....	28
FIGURA 2.6 – REGIÃO URBANA SERVIDA POR UMA LINHA DE ÔNIBUS E METRÔ .....	31
FIGURA 2.7 – LOCALIZAÇÃO DAS ESTAÇÕES CALCULADAS PELO MODELO .....	34
FIGURA 2.8 – NOVO DIAGRAMA DE VORONOI CALCULADO .....	36
FIGURA 2.9 – NOVO DIAGRAMA DE VORONOI CALCULADO NA REGIÃO .....	38
FIGURA 3.1: LE TRAIT DE LA LUMIERE .....	40
FIGURA 3.2: DIAGRAMA DE VORONOI .....	42
FIGURA 3.3: DIAGRAMA ORDINÁRIO DE VORONOI NO PLANO .....	45
FIGURA 3.4: DIAGRAMA DE VORONOI DEGENERADO .....	45
FIGURA 3.5: DIAGRAMA DE VORONOI COM BARREIRAS .....	47
FIGURA 3.6: TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY .....	48
FIGURA 3.7: PRÉ-TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY .....	49
FIGURA 3.8: TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY OBTIDAS DA FIGURA 3.4 .....	49
FIGURA 3.9: CONSTRUÇÃO DE UMA TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY .....	52
FIGURA 3.10: DIAGRAMA DE VORONOI E TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY .....	52
FIGURA 3.11: TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY .....	53
FIGURA 3.12: DIAGRAMA DE VORONOI PONDERADO POR MULTIPLICAÇÃO .....	58
FIGURA 3.13: DIAGRAMA DE VORONOI PONDERADO POR ADIÇÃO .....	60
FIGURA 4.1: ALGORITMO SIMULATED ANNEALING .....	72
FIGURA 4.2: ALGORITMO PARA CÁLCULO NUMÉRICO DA DERIVADA .....	74
FIGURA 5.1: MAPA DA LINHA 4 DO METRO DE SÃO PAULO COM A ESTAÇÃO ESCOLHIDA .....	78
FIGURA 5.2: ESQUEMA DAS LINHAS DE ÔNIBUS EM RELAÇÃO À LINHA DO METRÔ .....	79
FIGURA 5.3: TRAÇADO DA LINHA ALIMENTADORA .....	80
FIGURA 5.4: GEOMETRIA DA ÁREA DE SERVIÇO .....	81
FIGURA 5.5: ÁREA DE ABRANGÊNCIA DE UM USUÁRIO .....	85
FIGURA 5.6: ARESTAS DOS DIAGRAMAS DE VORONOI REFERENTES ÀS PARADAS DE ÔNIBUS .....	86
FIGURA 5.7: TRAÇADO DA LINHA 5108-10 .....	87
FIGURA 5.8: DADOS GERAIS DA LINHA 5108-10 .....	88
FIGURA 5.9: GEOMETRIA DA ÁREA DE SERVIÇO .....	89
FIGURA 5.10: MODELO ESQUEMÁTICO DO COMPORTAMENTO DO USUÁRIO .....	90
FIGURA 5.11: MODELO ESQUEMÁTICO DA VARIAÇÃO DA DENSIDADE DEMOGRÁFICA .....	92
FIGURA 6.1: TELA INICIAL DO SISTEMA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR .....	95
FIGURA 6.2: TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA A FUNÇÃO DAVIS .....	96
FIGURA 6.3: TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA A FUNÇÃO SCHWEFEL .....	97
FIGURA 6.4: TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA A FUNÇÃO ACKLEY .....	98
FIGURA 6.5: ÁREA DE ABRANGÊNCIA DA LINHA COM AS DIVISÕES DOS BAIRROS .....	101
FIGURA 6.6: MODELO ESQUEMÁTICO DA ÁREA COM ALGUNS PONTOS E COORDENADAS .....	102
FIGURA 6.7: TELA INICIAL DO PROGRAMA .....	103
FIGURA 6.8: TEMPO MÉDIO DE VIAGEM POR USUÁRIO POR NÚMERO DE PARADAS .....	105
FIGURA 6.9: LOCALIZAÇÃO DAS PARADAS SOBRE A LINHA DE ÔNIBUS .....	107
FIGURA 6.10: LINHA 5108 COM SUA ÁREA DE ABRANGÊNCIA .....	109
FIGURA 6.11: MODELO ESQUEMÁTICO DA LINHA E REGIÃO .....	110
FIGURA 6.12: TEMPO MÉDIO DE VIAGEM POR USUÁRIO .....	111
FIGURA 6.13: TEMPO MÉDIO DE VIAGEM POR USUÁRIO .....	112
FIGURA 6.14: RESULTADO FINAL DA LINHA 5108 COM DIAGRAMA DE VORONOI .....	113

## LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1 – ÍNDICE DE EFICIÊNCIA POR TIPO DE VEÍCULO .....	7
TABELA 2.2 – ÍNDICES RELATIVOS POR TIPO DE VEÍCULO E POR PASSAGEIRO.....	7
TABELA 2.3 – EXEMPLOS DE NORMAS DE ESPAÇAMENTO EXISTENTES NOS EUA.....	9
TABELA 2.4 – NORMAS DE ESPAÇAMENTO EXISTENTES NA EUROPA .....	9
TABELA 2.5 – VARIÁVEIS E PARÂMETROS.....	18
TABELA 2.6 – NOTAÇÃO UTILIZADA NO MODELO.....	24
TABELA 2.7 – RESULTADOS DO MODELO.....	26
TABELA 2.8 – RESULTADOS DO MODELO.....	33
TABELA 2.9 – RESULTADOS DO NOVO MODELO .....	37
TABELA 5.1: DENSIDADE DEMOGRÁFICA DO MUNICÍPIO DE SÃO PAULO .....	76
TABELA 6.1: DENSIDADE DEMOGRÁFICA AO LONGO DO TRAJETO DA LINHA.....	99
TABELA 6.2: RESULTADO FINAL PARA 10 PONTOS DE PARADA .....	106
TABELA 6.3: RESULTADO FINAL PARA 21 PONTOS DE PARADA .....	114



## RESUMO

Este trabalho tem por finalidade o desenvolvimento de uma ferramenta computacional baseada em conceitos de Diagramas de Voronoi e Programação Não-linear para estudar e definir o espaçamento ideal entre paradas de transporte coletivo de uma região urbana com o objetivo de minimizar o tempo médio de viagem dos passageiros até o seu destino. Foi utilizada como parâmetro a densidade demográfica da região afetada pela linha como parâmetro de demanda de utilização da linha. Ao final, aplica-se a ferramenta a uma região metropolitana com os dados reais disponíveis de sua densidade demográfica. Os resultados obtidos demonstraram a possibilidade de redução do número de paradas existentes atualmente, com redução no tempo de viagem dos usuários. O sistema também resolveu problemas de divisão regional de áreas afetas às paradas determinando a região de abrangência de cada uma delas.

## **ABSTRACT**

This work has the purpose to develop a computational tool based on the concepts of Voronoi Diagrams and Non-linear Programming to study and define the ideal bus-stop spacing in urban areas in order to minimize the total travel time of all passengers until their destination. The demographic density of the region was used as a parameter of the demand of the region. The tool will be applied to a metropolitan region with real data available about the population density function. The results showed that it is possible to reduce the number of bus stops with a considerable reduction in the travel time of the users. The model also solved problems of regional division of the affected areas to each bus-stop determining the scope area of each one of them.

# 1 INTRODUÇÃO

Atualmente uma das maiores preocupações em termos de planejamento urbano diz respeito ao transporte coletivo. A quantidade de automóveis nas ruas das grandes cidades tem causado grandes problemas, quer na perspectiva de infra-estrutura (quantidade de automóveis acima da capacidade das vias públicas), quer no âmbito relativo à segurança da população (altos índices de acidentes e atropelamentos), quer no aspecto relativo ao meio-ambiente (quantidade de poluentes despejados na atmosfera pelos veículos), entre outros. Sob o ponto de vista da infra-estrutura, um problema acarretado pelo excesso de veículos nas vias públicas é o tempo de deslocamento que um cidadão utiliza para ir de um local a outro.

Esses problemas se intensificam principalmente nas grandes cidades, nas quais os congestionamentos se tornaram algo comum na vida das pessoas e também parte da paisagem urbana.

Nesse sentido, torna-se importante para o planejamento das cidades em ritmo de crescimento populacional e de desenvolvimento urbano acelerado, um sistema de transporte coletivo eficiente que atenda as necessidades dos cidadãos, evitando assim o uso individual do automóvel no seu dia a dia.

Dentre os tipos de transporte coletivo existentes, o mais flexível, simples, rápido e barato de se implantar é o ônibus. Diferentemente de outros tipos de transporte coletivo que utiliza linhas fixas, o ônibus pode operar virtualmente em qualquer via pública com várias rotas possíveis. Eles podem operar com paradas fixas ao longo da rota, o que é normalmente utilizado em áreas urbanas, ou podem operar num sistema onde o usuário solicita a parada em qualquer ponto onde seja necessário, sistema este utilizado em áreas rurais ou com baixa

densidade demográfica. Mesmo as paradas fixas possuem um baixo custo de instalação e são bastante fáceis de ter a sua localização alterada, caso isso seja necessário.

Um dos principais aspectos a serem considerados num sistema de transporte coletivo é o tempo de viagem e, como podemos imaginar, o número de paradas influi no tempo total da viagem. Desse modo, o número total de paradas deve ser estabelecido de maneira bem criteriosa, a fim de tornar a linha mais atrativa para o usuário. Um número excessivo de paradas faz com que o usuário se desloque pouco a pé, porém torna a viagem bastante lenta e desconfortável para aqueles que utilizam longos trechos da linha. Por outro lado, um número pequeno de paradas torna a viagem mais rápida, porém obriga o passageiro a andar muito até chegar ao ponto de parada, bem como ao destino desejado.

## **1.1 Problema**

As constatações mencionadas acima nos conduzem à seguinte indagação: como determinar o número ideal de paradas a fim de tornar a linha de ônibus mais atrativa para o usuário?

Ammons (2001) estudou várias regulamentações de espaçamento entre paradas de ônibus no mundo e descobriu que o espaçamento médio varia entre 200 e 600 metros em áreas urbanas. Reilly (1997) verificou que as agências européias de trânsito têm padrões diferentes dos americanos para determinar o espaçamento entre as paradas de ônibus. Na Europa utiliza-se o padrão de 2 a 3 paradas por quilômetro, ou seja, um espaçamento de 330 a 500 metros, contrastando com a prática nos Estados Unidos, onde as paradas possuem um espaçamento entre 160 e 250 metros.

Esses e outros estudos demonstram que o espaçamento entre as paradas não segue um padrão único, nem são baseados em estudos com metodologias padronizadas. Segundo Kehoe (2004), em muitas rotas nos Estados Unidos, as paradas de ônibus foram definidas ao longo

do tempo, resultado de um processo baseado em solicitações dos usuários que eram, ou não, atendidos pelas autoridades e/ou empresas de transportes. Por terem sido estabelecidas inicialmente por solicitações dos usuários, modificar o espaçamento entre as paradas torna-se um processo muito difícil, pois a população já se acostumou ao padrão atual.

## **1.2 Objetivo Geral**

Desse modo, o objetivo principal deste trabalho é propor um modelo matemático, a fim de avaliar a viabilidade de se utilizar os conceitos de Diagramas de Voronoi e Programação Não-linear, com a finalidade de determinar o espaçamento ideal entre as paradas de ônibus de uma região urbana com a finalidade de minimizar o tempo médio de viagem dos passageiros desde as suas casas até os seus destinos.

### **1.2.1 Objetivos Específicos**

Como objetivos específicos podem-se listar as seguintes metas:

- a) Determinar o espaçamento ótimo entre os pontos de parada de uma linha de transporte coletivo a fim de minimizar o tempo de viagem do usuário;
- b) Utilizar a densidade demográfica da região observada como um dos parâmetros para a projeção da demanda de utilização da linha;
- c) Determinar a área de influência de cada parada para que cada cidadão possa saber, através de um diagrama, qual é a parada mais adequada para que ele tome o transporte coletivo e chegue mais rapidamente ao seu destino;
- d) Desenvolver um sistema informatizado para resolver o problema. O sistema será desenvolvido em linguagem Delphi 6.0;

Sendo a finalidade principal do sistema minimizar o tempo de viagem dos passageiros até o seu destino, acredita-se que a sua implantação seja mais facilmente assimilada pelos usuários, uma vez que tornará a viagem mais rápida e mais atrativa.

### **1.3 Limitações do Trabalho**

O espaçamento obtido utilizando os conceitos de Diagramas de Voronoi desenvolvido neste trabalho pretende minimizar apenas o tempo de viagem do usuário em uma linha de ônibus real ou hipotética. O modelo utiliza como parâmetros apenas a velocidade do usuário a pé, a velocidade do ônibus e a densidade populacional da região atendida.

Alguns fatores não serão abrangidos por este estudo. Alguns deles estão listados a seguir:

- a) Fatores como custos operacionais, competitividade entre empresas e o estudo de múltiplas linhas não fazem parte do escopo deste trabalho;
- b) Tamanho da frota, espaçamento entre os ônibus e tempo de espera do usuário no ponto não fazem parte dos parâmetros analisados;
- c) O estudo sobre uma área que contenha alguma forma de barreira como rio, lago, grande avenida, parque, dentre outras, também não foi abordado;
- d) A topografia não foi levada em consideração neste modelo. Assume-se que a topografia é constante em toda a região, variando apenas a sua densidade demográfica.

Todas essas limitações poderão ser abordadas em trabalhos futuros.

## 1.4 Estrutura do Trabalho

Para compreensão do estudo proposto, este trabalho foi organizado em sete capítulos, incluindo esta introdução.

O segundo capítulo traz uma revisão bibliográfica sobre espaçamento de paradas de transportes coletivos. Nele são levantados os vários aspectos que compõem a problemática da logística urbana no tocante aos transportes coletivos, os modelos existentes e as metodologias empregadas atualmente para resolver o problema.

No terceiro capítulo discutem-se conceitos e aspectos técnicos sobre os Diagramas de Voronoi, seu histórico, seus tipos e suas propriedades principais. Descreve-se também a sua utilidade no planejamento urbano em geral.

No quarto capítulo é feita uma revisão sobre Programação Não-Linear. Procura-se destacar os aspectos relevantes à solução do problema a ser resolvido, bem como as heurísticas que serão implementadas para resolver o problema proposto.

No quinto capítulo é apresentada a formulação matemática do modelo proposto, com a sua fundamentação teórica. São discutidas as restrições do modelo, a sua função objetivo e também os aspectos relevantes para a sua solução. Também é mostrada a região geográfica e os dados técnicos das linhas que são utilizadas para a aplicação do sistema desenvolvido.

No sexto capítulo descreve-se os aspectos da implementação computacional do modelo, os resultados obtidos, na aplicação a um problema real e um hipotético, com os seus resultados e análises.

No sétimo capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho e as recomendações para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo serão analisados vários estudos desenvolvidos sobre o espaçamento de pontos de parada de transporte coletivo. Vários operadores de vários países foram pesquisados a fim de que fosse obtido um panorama geral de como esse problema é tratado e quais os parâmetros que costumam ser adotados a fim de melhor equacionar as demandas locais. Vários artigos que trazem modelos matemáticos a fim de estudar e otimizar o espaçamento das paradas de ônibus também serão estudados. Os artigos mais relevantes para este trabalho serão descritos mais detalhadamente a fim de auxiliar na compreensão do modelo a ser proposto.

Segundo Quinn (1992, citado por LINDAU; KHÜN 2000), o congestionamento viário é um fenômeno que assola grandes áreas urbanas em países ricos e pobres. Face à dimensão atual do problema, o congestionamento, antes encarado como um aborrecimento, agora é tido como uma ameaça à viabilidade econômica dos centros urbanos.

Quando considerado o impacto sobre o transporte coletivo, um estudo do IPEA/ANTP(1999) demonstra, por exemplo, que o congestionamento responde por 16% do custo operacional do ônibus na cidade de São Paulo e 10% no Rio de Janeiro.

Ainda segundo Lindau e Khün (2000), na Europa, onde, assim como no Brasil, vem ocorrendo uma gradativa redução na quantidade de passageiros transportados pelo sistema de transporte coletivo (NTU, 1998), cresce o interesse por medidas que priorizem a circulação do sistema de transporte coletivo em detrimento do transporte individual.

O ônibus é também entendido como a modal mais flexível de transporte coletivo urbano e, portanto, com papel importante a desempenhar dentro dos objetivos traçados pelo transporte sustentável.

Vasconcellos (2000) enfatiza que as políticas de circulação devem analisar, além da



fluidez e segurança, a acessibilidade, o nível de serviço dos transportes, o custo do transporte e a qualidade ambiental, pois são essenciais para o controle da circulação.

Segundo SEDU/PR - NTU (2002), o índice de motorização privada nas cidades brasileiras aumentou de 9 veículos por 100 habitantes em 1980 para cerca de 17 em 2000. Isto vem dificultando sobremaneira o planejamento urbano. A superlotação das vias gera cada vez mais congestionamentos, o que acarreta inúmeros prejuízos para toda a comunidade.

TABELA 2.1 – ÍNDICE DE EFICIÊNCIA POR TIPO DE VEÍCULO

<b>Modo</b>	<b>Passageiros Transportados por Espaço de Via</b>	<b>Índice de Eficiência Automóvel = 1,0</b>
<b>Automóvel</b>	1% de via – 0,35% dos passageiros	1,0
<b>Vans e Peruas</b>	1% de via – 1,00% dos passageiros	2,8
<b>Ônibus</b>	1% de via – 2,80% dos passageiros	7,9

FONTE: CNT – Pesquisa CNT. Passageiros nos corredores de transporte. Brasília: CNT, maio 2002, p.23, citado por SEDU/PR - NTU (2002).

Nas tabelas 2.1 e 2.2 temos uma comparação entre os diferentes tipos de veículos de transporte utilizados nas cidades em relação à sua eficiência no transporte de passageiros. Na tabela 2.1 temos o índice de eficiência do transporte de passageiros por área ocupada na via de transporte.

TABELA 2.2 – ÍNDICES RELATIVOS POR TIPO DE VEÍCULO E POR PASSAGEIRO

<b>Modo</b>	<b>Índices Relativos por Passageiro/Km<sup>1</sup></b>			
	<b>Energia<sup>2</sup></b>	<b>Poluição<sup>3</sup></b>	<b>Custo Total<sup>4</sup></b>	<b>Área de Via</b>
<b>Ônibus</b>	1	1	1	1
<b>Motocicleta</b>	4,6	32,3	3,9	4,2
<b>Automóvel</b>	12,7	17,0	8,0	6,4

FONTE: ANTP Associação Nacional de Transportes Públicos - Desenvolvimento Urbano, Transporte e Trânsito no Brasil. Propostas para debate. São Paulo: ANTP (2001, p. 11), citado por SEDU/PR - NTU (2002)

NOTA: <sup>1</sup> Ocupação de 50 pessoas por ônibus, 1 por moto e 1,3 por automóvel.

<sup>2</sup> Base calculada em gramas equivalentes de petróleo (diesel e gasolina).

<sup>3</sup> Monóxido de carbono(CO), hidrocarbonetos, óxidos de nitrogênio(NOx) e material particulado(MP).

<sup>4</sup> Custos totais, fixos e variáveis.

Na tabela 2.2 temos a comparação de vários índices relativo ao transporte de passageiros por quilômetro, tendo o ônibus como referência, ou seja, como índice unitário.

É possível perceber a grande importância do transporte coletivo para o desafogamento das vias urbanas, melhorando a trafegabilidade como um todo.

Ainda segundo SEDU/PR - NTU (2002), o transporte coletivo é o responsável pela maioria dos deslocamentos motorizados nas cidades (59% dos passageiros/dia contra 41% do transporte privado). Mas essa participação vem caindo de ano para ano. As causas ainda não foram identificadas, mas pode se perceber uma reação negativa dos usuários em relação ao transporte coletivo.

Para combater essa reação são utilizadas medidas diretas (atração) e indiretas (dissuasão) que são:

- e) Atração: melhorias no nível de serviço do transporte público, tarifas, informação e marketing e melhorias na integração do transporte público e privado, entre outras;
- f) Dissuasão: restrições no estacionamento de veículos particulares, moderação do tráfego, taxaço do combustível, cobrança pelo uso da via, por exemplo.

Uma das medidas de atração citadas, a melhoria no nível de serviço do transporte público, pode ser implementada com a diminuição no tempo médio de viagem entre a origem e o destino final do passageiro. Esta medida vai permitir que os usuários prefiram o transporte coletivo em vez do automóvel.

Um dos itens que podem ser utilizados para melhorar o tempo de viagem é o espaçamento entre os pontos de paradas. Sendo possível reduzir o tempo médio de viagem dos passageiros desde a sua origem até o seu destino, haverá um ganho de qualidade no serviço prestado, tornando a viagem de ônibus mais atrativa.

## **2.1 Regulamentações Existentes no Mundo**

Benn (1995), após analisar vários sistemas de trânsito do mundo todo concluiu o

seguinte: “O número de padrões de espaçamento existentes equivale ao número de operadores existentes.”

TABELA 2.3 – EXEMPLOS DE NORMAS DE ESPAÇAMENTO EXISTENTES NOS EUA

Pace Company – Chicago-IL USA	Espaçamento
Alto: > 1500 hab/Km <sup>2</sup>	200m
Médio: 750-1500 hab/km <sup>2</sup>	400m
Baixo: < 750 hab/km <sup>2</sup>	Sem local fixo(flag areas)
Texas Transportation Institute – USA	Espaçamento
Áreas comerciais centrais	90 a 300m
Áreas residenciais centrais	150 a 360m
Áreas residenciais periféricas	180 a 750m
Áreas Rurais	200 a 800m
Transportation District of Oregon – USA	Espaçamento
Áreas comerciais centrais	120 a 180m
Áreas residenciais centrais	150 a 220m
Áreas residenciais periféricas	180 a 300m
Áreas Rurais	Como necessário
San Francisco and Oakland – CA USA	Espaçamento
Linha Local	240 a 400m
Linha Expressa(rápida)	520 a 1500m
Transbay(Intermunicipal)	300 a 800m

FONTE: Os operadores de cada região mencionada

Nas tabelas 2.3 e 2.4 estão listados os dados referentes a vários operadores de transporte coletivo. Nela pode-se verificar a diversidade das normas de espaçamento entre as paradas.

TABELA 2.4 – NORMAS DE ESPAÇAMENTO EXISTENTES NA EUROPA

Local	Espaçamento
Portugal <sup>1</sup>	250 a 330m
Europa <sup>2</sup>	320 a 500m
Holanda <sup>2</sup>	300 a 450m
Hannover(Alemanha) <sup>3</sup>	450m

FONTE: <sup>1</sup> Silva, D.F.P.(2006)

<sup>2</sup> Bertini, R.L.(2004)

<sup>3</sup> Special report 257

Ao estudar com mais detalhes os padrões estabelecidos, percebe-se também que não

existe uma metodologia clara e objetiva para determinar o espaçamento ideal. Muitas vezes o padrão é definido com base em dados históricos que apenas são regulamentados pelos órgãos gestores do transporte público.

## **2.2 Regulamentações Existentes no Brasil**

Segundo Andrade *et. al.* (2004), o distanciamento recomendado entre as paradas deve ser estabelecido de forma que o passageiro realize uma caminhada de no máximo 500 metros, distância esta considerada normal. Porém, o mais comum é utilizar o espaçamento de 300 metros entre os pontos de ônibus.

De acordo com a Secretaria Especial de Desenvolvimento Urbano da Presidência da República e a Associação Nacional de Empresas de Transportes Urbanos (SEDU/PR - NTU (2002)), o padrão recomendado para o distanciamento médio entre paradas é de:

- a) 300 a 400m nas áreas centrais;
- b) 400 a 600m nas áreas intermediárias;
- c) 600 a 800m nas áreas periféricas das cidades.

Já a fabricante de ônibus urbanos MERCEDES-BENZ, em seu manual editado em 1987 aponta que o espaçamento adequado deve ser de 300 a 800 metros.

A Associação Nacional de Transportes Públicos (ANTP (1995) considera que, para operações em corredores de transporte, os distanciamentos devam ser de 300 a 500m entre os pontos de parada.

A Empresa Brasileira dos Transportes Urbanos (EBTU, 1998), considera que, do ponto de vista operacional, a quantidade e a distância média entre os pontos de parada têm uma grande influência na velocidade de percurso, podendo-se estimar a distância ótima entre os pontos de parada, utilizando como critério a minimização do custo da operação.

## 2.3 Modelos de Otimização

Furth e Rahbee (2000) propõem um modelo discreto para modelar o impacto de mudança no espaçamento entre paradas de ônibus numa rota específica.

Entre os impactos observados estão os atrasos causados pela demora dos usuários, o aumento dos custos operacionais devido a esses atrasos e o caminho mais curto perpendicular à rota do ônibus. Toda a intersecção ao longo da rota foi tratada como um local potencial para uma parada.

Foi utilizado um modelo geográfico para observar a demanda nas paradas existentes para as ruas perpendiculares e paralelas, resultando na distribuição de demanda da área de serviço.

Um algoritmo de programação dinâmica foi utilizado para determinar o espaçamento ótimo entre as paradas. Uma rota da cidade de Boston foi analisada como parâmetro. Essa linha possuía um espaçamento inicial de 200m e após a aplicação do modelo foi encontrada uma solução ótima com espaçamento de 400m.

Murray (2003) apresentou um modelo de cobertura híbrida com a finalidade de expandir a área de serviço atendida pela linha de ônibus, bem como aumentar a sua acessibilidade. Foi discutida também a integração do modelo com um sistema de informação geográfica com a finalidade de planejamento estratégico.

O modelo proporcionou uma boa flexibilidade no desenvolvimento de políticas viáveis para a melhoria e expansão do serviço de ônibus. Um dos aspectos analisados e otimizados foi o espaçamento entre as paradas.

Murray (2003) utilizou o Modelo de Cobertura Máxima (MCLP), que busca maximizar a proporção da população a ser atendida. São selecionados vários valores para o número de paradas a fim de atender a maior proporção da população possível.

O modelo foi aplicado na cidade de Brisbane, Austrália, cuja população era de

806.000 habitantes. A distância de acesso padrão na cidade é de 400m até a parada mais próxima. A cidade possui 7.543 paradas no total. Após análise, constatou-se que essa quantidade proporciona atendimento para 86% da população, deixando 14% sem um serviço adequado. Utilizando esse modelo, chegou-se à conclusão que 11.776 paradas elevariam o atendimento para 99% da população e que devido à topografia da cidade e ao desenho das linhas de ônibus não seria possível atender 100%.

Gonçalves (1995) efetuou um estudo cujo enfoque foi o detalhamento da análise do problema operacional de uma linha de ônibus urbano, englobando conjuntamente o ponto de vista do operador e do usuário. Neste sentido, a autora buscou analisar uma situação real com parâmetros operacionais diferenciados ao longo da linha de ônibus (tempos de parada, velocidade, distância entre pontos de parada, etc.), possibilitando um tratamento prático e mais detalhado da teoria.

A pesquisa foi feita utilizando a linha número 11 - Monte Verde/Florianópolis, na cidade de Florianópolis/SC. Foram feitos levantamentos dos dados referentes ao tempo de deslocamento do veículo, ao tempo de parada nos pontos, ao tempo de embarque e desembarque de passageiros e à velocidade de deslocamento do ônibus. Os dados foram coletados nos dias 15, 16 e 17 de junho de 1994, no horário de 7h30min da manhã no sentido centro-bairro.

O modelo foi baseado nos custos, tanto do operador, quanto do usuário, a fim de determinar a situação do serviço ofertado e a sua otimização. O custo do operador foi formado por uma parcela de custo variável e por outra de custo fixo. Os custos foram calculados para a frota, para um período padrão de uma hora.

O custo generalizado dos usuários foi calculado separadamente para cada par de pontos de parada, ou seja, para cada elemento da matriz Origem-Destino. O custo generalizado do usuário compõe-se por 5 elementos:

- a) Tarifa;

- b) Custo do tempo de percurso dentro do veículo;
- c) Custo de espera;
- d) Custo do desconforto;
- e) Custo do trajeto a pé.

Foi também feita uma pesquisa entre os usuários através de técnicas de preferência declarada a fim de obter a percepção do usuário em relação ao serviço ofertado.

Dentre os vários aspectos analisados no estudo, um aspecto importante foi o espaçamento entre os pontos de parada. Hoje, na linha em questão, existem 58 pontos distribuídos ao longo de 22750 metros, ou seja, um espaçamento médio de 392 metros entre pontos. A título de análise de sensibilidade foi feita a simulação de um caso modificado, em que 14 pontos atuais foram eliminados.

Nessa nova configuração, observou-se que houve um ganho, tanto para os usuários, como também para o operador. Houve uma redução de 3,2% no custo total dos usuários e de 2,8% no custo do operador. O tempo de viagem foi reduzido de 4,1% ( 2 min. 39 seg. ).

O espaçamento médio entre pontos de parada, nessa configuração é de  $22750/44 = 517$  metros, significando um acréscimo de 32%. O custo total (usuários + operador) foi reduzido de 3,1%.

A conclusão obtida pelo autor é que o aumento do número de pontos de parada, além de certo limite, passa a prejudicar o sistema no seu todo, e não apenas o operador, mas também os usuários.

## **2.4 Estudo de Caso 1**

Anthony A. Saka, da Morgan State University propôs, no artigo “Model For Determining Optimum Bus-Stop Spacing In Urban Areas” (Saka, 2001), um modelo que possa ser usado para determinar uma política sub-ótima para o espaçamento de paradas de

transporte coletivo em áreas urbanas. Ele demonstra, através de uma análise de sensibilidade, que o espaçamento apropriado pode melhorar a qualidade do serviço de transporte, o tempo do percurso e a diminuição da frota.

A seguir tem-se um breve resumo do modelo proposto.

O tempo total de viagem  $T_{bus}$  percorrido por um veículo é descrito pela seguinte equação:

$$T_{bus} = T_{a,d} + T_S + T_C + T_O + T_M \quad (2.1)$$

onde:

$T_{a,d}$  = tempo de aceleração e desaceleração;

$T_S$  = tempo de embarque e desembarque de passageiros;

$T_C$  = tempo de atraso devido a dispositivos de controle de tráfego (Sinais de trânsito);

$T_O$  = tempo de viagem em velocidade normal de tráfego;

$T_M$  = tempo perdido em outras situações (não modelado neste artigo)

Não se objetivou descrever todo o modelo desenvolvido no artigo mencionado, mas apenas o primeiro termo da fórmula para fornecer uma idéia da metodologia empregada. O primeiro termo da fórmula é  $T_{a,d}$ , ou seja, o tempo de aceleração e desaceleração, que é ilustrado pela figura 2.1.

A fórmula é a seguinte:

$$T_{a,d} = \left[ p_s * N_s + p_c * N_c + (p_s + p_c - p_s * p_c) * N_{s,c} + 1 \right] * \left[ \frac{u * (a + d)}{2 * a * d} \right] \quad (2.2)$$

Onde:

$p_c$  = probabilidade de que o ônibus pare num sinal;

$N_c$  = número de sinais existentes na rota;



$p_s$  = probabilidade de que o ônibus pare num ponto de parada;

$N_s$  = número de pontos de paradas existentes na rota;

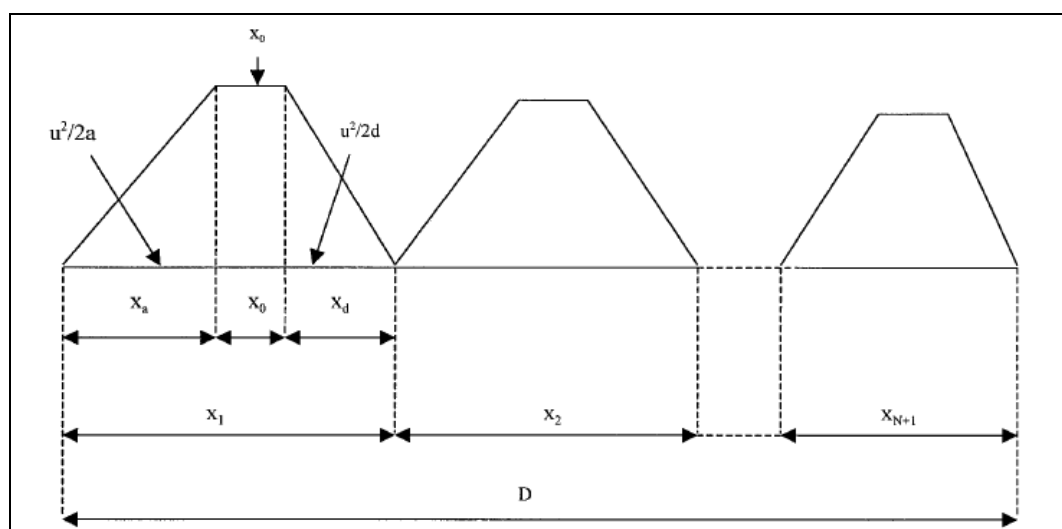
$N_{s,c}$  = número de paradas combinadas com sinais de trânsito existentes na rota;

$u$  = velocidade normal de cruzeiro

$a$  = taxa de aceleração

$d$  = taxa de desaceleração

FIGURA 2.1 DIAGRAMA DEMONSTRANDO AS FASES DE ACELERAÇÃO E DESACELERAÇÃO



FONTE: Saka (2001, p. 196).

As probabilidades acima descritas são calculadas da seguinte maneira:

$$p_c = \frac{C - g}{C} \quad (2.3)$$

Onde:

$C$  = Tempo médio do ciclo dos sinais ao longo da rota;

$g$  = Tempo médio da duração do sinal aberto ao longo da rota;

$$p_s = 1 - (e^{-\lambda})^2 \quad (2.4)$$

Onde:

$$\lambda = \frac{Q}{f * (N_s + N_{s,c} + 1)} \quad (2.5)$$

$f$  = frequência horária dos ônibus na rota;

$Q$  = demanda horária de passageiros na rota;

Dessa maneira, são calculados todos os demais termos até se obter a fórmula final:

$$T_{bus} = \left\{ \left[ p_s N_s + p_c N_c + (p_s + p_c - p_s p_c) N_{s,c} + 1 \right] * \left[ \frac{u(a+d)}{120ad} \right] \right\} + \quad (2.6)$$

$$\left\{ \left[ p_s (N_s + N_{s,c} + 1) \right] * \left[ (hq_s) \tau + \frac{60k}{3600} \right] \right\} + \left\{ p_c (N_c + N_{s,c}) \frac{C-g}{120} \right\} + \left[ \frac{D}{60u} \right]$$

A partir dessa fórmula, foi feito um modelo para determinar o efeito do espaçamento entre as paradas no tamanho da frota.

Em sua conclusão, Saka (2001, p. 198) considera falhos os vários modelos existentes porque eles não levam em consideração o efeito do espaçamento no desempenho operacional do sistema. Este modelo de espaçamento é bastante útil como ferramenta de apoio à decisão para o planejamento e implantação de um projeto de transporte coletivo.

#### 2.4.1 Aplicação do Modelo

Owen de Vries Kehoe, em seu trabalho intitulado “Effects of Bus Stop Consolidation on Transit Speed and Reliability: a Test Case” (Kehoe, 2004), utilizou o modelo apresentado por Saka (2001) para aprimorar a rota 48 da cidade de Seattle, estado de Washington, USA.

O estudo avaliou vários aspectos tais como: segurança de pedestres, troca entre linhas distintas, passageiros com necessidades especiais de locomoção, dentre outros, a fim de escolher a linha mais adequada. Uma vez escolhida a linha, foram avaliados os aspectos operacionais envolvendo a malha viária, as características que se identificaram nas origens e

nos destinos dos passageiros. A frota também foi analisada, bem como o intervalo de tempo entre os ônibus.

Através desse modelo foi possível aumentar o espaçamento médio entre as paradas de 218m para 260m, sem prejuízo para os usuários.

## 2.5 Estudo de Caso 2

Kuah e Perl (1988), em seu artigo intitulado “Optimization of Feeder Bus Routes and Bus-Stop Spacing”, propõem um modelo analítico para o projeto de uma rede de linhas de ônibus que seriam utilizadas para a alimentação de uma linha de trem existente. O objetivo do trabalho é encontrar um modelo que otimize as três variáveis básicas:

- a) Espaçamento entre as linhas;
- b) Intervalo entre ônibus;
- c) Espaçamento entre as paradas.

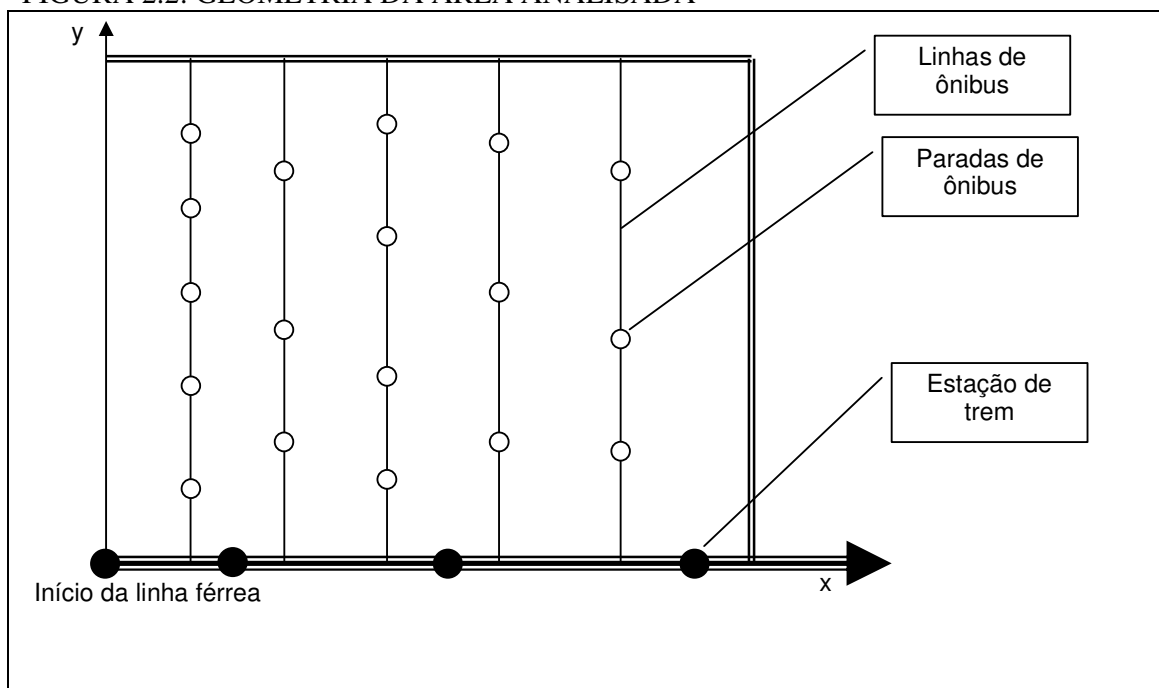
Observa-se a geometria da área que é objeto do estudo na figura 2.2.

Os dois primeiros itens são analisados normalmente. Já o espaçamento entre as paradas foi analisado em três situações diferentes. Na primeira, o espaçamento é considerado uniforme em toda a região analisada, ou seja, ele é constante em todas as linhas. Na segunda opção, o espaçamento é considerado constante em cada rota, porém difere de uma rota para outra. Já na terceira opção o espaçamento varia tanto entre as rotas como também na própria rota.

O modelo proposto assume uma demanda inelástica para as linhas de ônibus que são representadas pela função contínua  $p(x,y)$ . Tal assunção é válida no contexto onde se projeta um sistema de transporte onde a demanda é afetada principalmente pela qualidade do serviço oferecido. O espaçamento entre as rotas  $r(x)$  e o intervalo entre os ônibus  $h(x)$  são expressos através de funções contínuas da distância  $x$  medida a partir do final da linha férrea. Já o

espaçamento entre as paradas  $s(x,y)$  é expresso através de uma função contínua da localização da rota ( $x$ ) e da distância da linha férrea ao longo da linha de ônibus ( $y$ ).

FIGURA 2.2: GEOMETRIA DA ÁREA ANALISADA



FONTE: Kuah e Perl (1988, p. 342)

A tabela 2.5 mostra os parâmetros que foram utilizados no desenvolvimento do modelo. Nela pode-se notar que tudo foi quantificado em valores monetários, inclusive o tempo de espera do usuário entre outros.

TABELA 2.5 – VARIÁVEIS E PARÂMETROS

Símbolo	Unidade	Descrição
$r(x)$	km	Espaçamento entre rotas
$s(x,y)$	km	Espaçamento entre paradas
$h(x)$	hora	Intervalo entre os ônibus
$l_y$	km	Dimensão vertical da área de serviço
$l_x$	km	Dimensão horizontal da área de serviço
$V_a$	km/hora	Velocidade a pé do usuário
$\delta$	horas/parada	Tempo perdido em cada parada

$U$	km/hora	Velocidade média do ônibus
$\lambda_o$	\$/veículo-hora	Custo operacional do ônibus
$\lambda_a$	\$/passageiro-hora	Valor do tempo gasto pelo usuário andando até a parada
$\lambda_r$	\$/passageiro-hora	Valor do tempo gasto pelo usuário no ônibus
$\lambda_w$	\$/passageiro-hora	Valor do tempo de espera do usuário
$p(x,y)$	n° passageiros/km-hora	Densidade da demanda no ponto (x,y) por hora

FONTE: Kuah e Perl (1988, p. 344)

O objetivo final do modelo é minimizar o custo total do sistema, incluindo os tempos de espera e de viagem. No resultado final têm-se diferentes espaçamentos entre rotas em diferentes partes da área atendida e diferentes intervalos entre os ônibus de uma linha para outra. O espaçamento entre as paradas pode ainda variar de uma linha para outra ou numa mesma linha.

Apresenta-se a seguir algumas fórmulas utilizadas no modelo.

O custo do acesso às rotas de ônibus para todos os passageiros é dado por:

$$\frac{\lambda_a}{V_a} \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \frac{1}{4} r(x) p(x, y) dx dy \quad (2.7)$$

O custo do acesso às paradas de ônibus ao longo das rotas é dado por:

$$\frac{\lambda_a}{V_a} \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \frac{1}{4} s(x, y) p(x, y) dx dy \quad (2.8)$$

O custo da espera nas paradas de ônibus ao longo das rotas é dado por:

$$\lambda_w \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \frac{1}{2} h(x) p(x, y) dx dy \quad (2.9)$$

O número total de paradas de ônibus ao longo da rota localizada no ponto  $x$  e na distância  $y$  é dado por:

$$\int_0^y \frac{1}{s(x,t)} dt \quad (2.10)$$

O tempo total gasto pelo usuário em cada parada de ônibus ao longo da rota é dado por:

$$\lambda_r \delta \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \left[ \int_0^y \frac{1}{s(x,t)} dt \right] p(x,y) dx dy \quad (2.11)$$

O custo total de deslocamento e o custo em cada parada de ônibus ao longo da rota são dados respectivamente por:

$$\frac{2\lambda_o}{U} \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \frac{1}{h(x)r(x)} dx dy \quad (2.12)$$

$$\lambda_o \delta \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} \frac{1}{r(x)s(x,y)h(x)} dx dy \quad (2.13)$$

O custo total do sistema é dado por:

$$Z[h(x), r(x), s(x,y)] = \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} I(x,y) dx dy \quad (2.14)$$

Sendo:

$$I(x,y) = \left\{ \frac{\lambda_a}{4V_a} [r(x) + s(x,y)] + \frac{1}{2} \lambda_w h(x) + \lambda_r \delta \int_0^y \frac{1}{s(x,t)} dt \right\} p(x,y) \\ + \frac{2\lambda_o}{U} \left( \frac{1}{h(x)r(x)} \right) + \frac{\lambda_o \delta}{r(x)s(x,y)h(x)} \quad (2.15)$$

Para a finalidade desse trabalho, será analisado apenas o estudo envolvendo o espaçamento entre as paradas. Como foi esclarecido anteriormente, o espaçamento entre as paradas foi analisado sob três aspectos diferentes.

### 2.5.1 Situação 1: O espaçamento é constante ao longo da linha e se mantém constante em todas as linhas

Considera-se a demanda uniformemente distribuída ao longo de toda a região, ou seja,  $s(x,y)=s$ . Como o integrando  $I(x,y)$  é contínuo e diferenciável e  $s(x,y)$  é constante, tem-se que a equação de primeira ordem pode ser simplificada. Desse modo, a solução para um valor ótimo de  $s$  é dada pela equação:

$$s^* = \sqrt{\frac{4V_a \lambda_r \delta}{\lambda_a} \bar{y}} \quad (2.16)$$

Onde:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{l_y} \int_0^{l_x} y \cdot p(x, y) dx dy}{\int_0^{l_y} \int_0^{l_x} p(x, y) dx dy} \quad (2.17)$$

### 2.5.2 Situação 2: O espaçamento é constante ao longo de uma linha, mas pode variar de uma linha para outra

Considera-se a demanda uniformemente distribuída ao longo de uma determinada rota, ou seja,  $s(x,y) = s(x)$ .

Seguindo a metodologia do caso anterior, tem-se que a equação de custo pode ser simplificada e a solução para o espaçamento ótimo para  $s(x)$  é dada por:

$$s^*(x) = \sqrt{\frac{4V_a \lambda_r \delta}{\lambda_a} y_x} \quad (2.18)$$

Onde:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{l_y} y \cdot p(x, y) dy}{\int_0^{l_y} p(x, y) dy} \quad (2.19)$$

### 2.5.3 Situação 3: Considera-se que a distribuição de demanda pode variar entre rotas e ao longo de cada rota

A solução para um valor ótimo de  $s(x,y)$ , é obtida através da minimização do integrando  $I(x,y)$ . O espaçamento ótimo é obtido através da seguinte equação:

$$s^*(x, y) = \sqrt{\frac{8V_a \lambda_r \delta}{\lambda_a} (c - y)} \quad (2.20)$$

Onde  $c$  é uma constante que depende das condições iniciais (por exemplo, o espaçamento inicial na rota) e é dada por:

$$c = l_y + \frac{\lambda_a}{8V_a \lambda_r \delta} s^2(x, l_y) \quad (2.21)$$

Foi efetuado um estudo utilizando o modelo a partir de três funções de distribuição de demanda diferentes. Os valores utilizados, as funções e os resultados obtidos estão no Anexo I.



#### **2.5.4 Conclusões do Estudo de Kuah e Perl (1988)**

O estudo concluiu que o espaçamento entre as linhas e o intervalo entre os ônibus não sofrem muita variação quando analisados separadamente nas três situações descritas acima.

Concluiu também que o espaçamento ótimo entre as paradas é uma função da raiz quadrada de parâmetros relevantes.

Ele aumenta com:

- a) A velocidade a pé;
- b) Valor do tempo a bordo;
- c) Tempo médio perdido nas paradas;

Ele diminui com o valor do tempo da viagem a pé.

#### **2.6 Estudo de Caso 3**

Murray e Wu (2003) desenvolveram um método de modelagem integrada para examinar e planejar o espaçamento ideal entre os pontos de parada de ônibus a fim de melhorar a acessibilidade dos usuários ao sistema. O acesso é considerado importante porque ele está associado à entrada e à saída do sistema. No artigo os autores frisam que a acessibilidade é percebida em termos espaciais através da distância física do usuário até a parada ou estação mais próxima.

O modelo foi aplicado a uma rota de transporte coletivo da cidade de Columbus, Ohio-USA.

Na formulação do modelo, o objetivo estratégico e operacional do planejamento do sistema de transporte coletivo é o equilíbrio entre os vários aspectos da acessibilidade espacial, ou seja, do acesso propriamente dito juntamente com a cobertura geográfica. Foram também levados em conta os custos de operação do sistema.

O método apresentado é baseado no “Problema da p-mediana com Restrição de Distância”.

A tabela 2.6 abaixo mostra a notação referente ao modelo.

TABELA 2.6 – NOTAÇÃO UTILIZADA NO MODELO

$i$	índice das áreas de serviço atendidas(áreas são pré-definidas);
$j$	índice de um potencial ponto de parada (O conjunto é representado por $J$ );
$p$	número de paradas estipulado;
$a_i$	demanda potencial da área de serviço $i$ ;
$d_{ij}$	menor distância da área de serviço $i$ até o potencial ponto de parada $j$ ;
$S$	Distância máxima aceitável de deslocamento a pé;
$N_i$	$\{j \mid d_{ij} \leq S\}$
$x_j$	Será 1 se o ponto de parada $j$ permanecer na rota; Será 0 caso contrário;
$z_{ij}$	Será 1 se a área $i$ for atribuída ao ponto de parada $j$ ; Será 0 caso contrário;

FONTE: Murray e Wu (2003, p. 5)

Problema da p-mediana com Restrição de Distância:

Minimizar

$$Z_1 = \sum_i \sum_{j \in N_i} a_i d_{ij} z_{ij} \quad (2.22)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in N_i} z_{ij} = 1; \forall i \quad (2.23)$$

$$z_{ij} \leq x_j; \forall i, j \quad (2.24)$$

$$\sum_j x_j = p \quad (2.25)$$

$$x_j = (0,1); \forall j \quad (2.26)$$

$$z_{ij} = (0,1); \forall i, j \quad (2.27)$$

A função objetivo (equação 2.22) visa minimizar o valor total da demanda potencial que é atribuída ao próximo ponto de parada.

A primeira restrição (equação 2.23) exige que cada área de serviço seja atendida por uma parada dentro de uma distância razoável. A segunda (equação 2.24) impede que seja atribuída a uma área de serviço uma parada inexistente. A terceira (equação 2.25) faz com que sejam atribuídas  $p$  paradas.

Foram efetuados cálculos com o número de paradas  $p$  variando de 74 a 164. Foram utilizados os seguintes Softwares:

- a) ArcView 3.2 – Geographic Information System (GIS);
- b) Programas em Visual Basic para produzir os modelos de otimização em formato texto;
- c) CPLEX 6.6 – Para resolver os problemas de PL cujos resultados foram exportados para o ArcView.

Foi utilizada a distância Euclidiana do centróide da área de serviço até o ponto de parada. A distância máxima aceitável para deslocamento a pé  $S$  foi definida em 400m. Foram relacionados 873 blocos com 43.622 habitantes e 5.080 áreas comerciais com 71.039 empregados.

Na tabela 2.7 existe um resumo dos resultados obtidos. Nele pode-se observar algumas das conclusões obtidas:

- a) O número atual de paradas  $p$  é de 164. Pode-se notar que a partir de 120 paradas a distância média de acesso quase não diminui (Figura 2.3);
- b) Para  $p=75$  a redução no número de pontos de parada é de 42,07% e o aumento na média da distância de acesso é de 7,77% (apenas 15m em média);

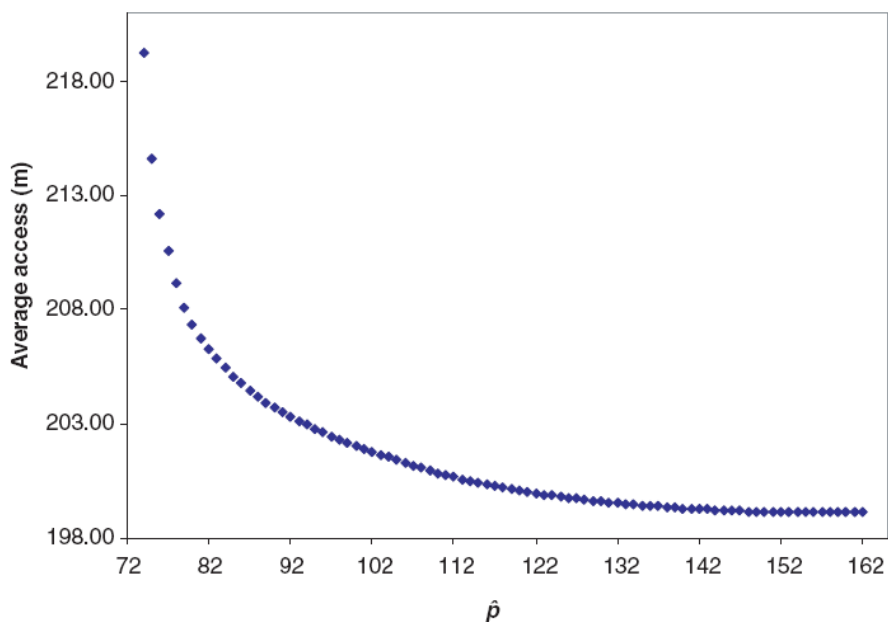
- c) Ainda para  $p=75$  o aumento no espaçamento entre os pontos de parada é de 72,63% (passa dos atuais 265m para 457,38m).

TABELA 2.7 – RESULTADOS DO MODELO

Número de pontos de parada(p)	Redução no nº de paradas (%)	Espaçamento médio em (m)	Diferença no espaçamento médio (%)	Distância média de acesso (m)	Diferença na distância média (%)
75	42,07	457,38	72,63	214,59	7,77
80	38,41	430,21	62,38	207,38	4,15
85	35,37	409,92	54,72	205,09	3,00
90	31,71	387,96	46,43	203,72	2,31
95	28,05	368,23	38,98	202,78	1,84
100	25,61	356,16	34,43	202,05	1,47
105	21,34	336,83	27,13	201,42	1,15
110	18,29	324,26	22,39	200,86	0,87
115	17,07	319,49	20,59	200,43	0,66
120	14,02	308,16	16,31	200,08	0,48
125	11,59	299,66	13,10	199,80	0,34
130	10,37	295,59	11,56	199,59	0,24

FONTE: Murray e Wu (2003, p. 10)

FIGURA 2.3 – DISTÂNCIA MÉDIA DE ACESSOS POR NÚMERO DE PARADAS



FONTE: Murray e Wu (2003, p. 10)

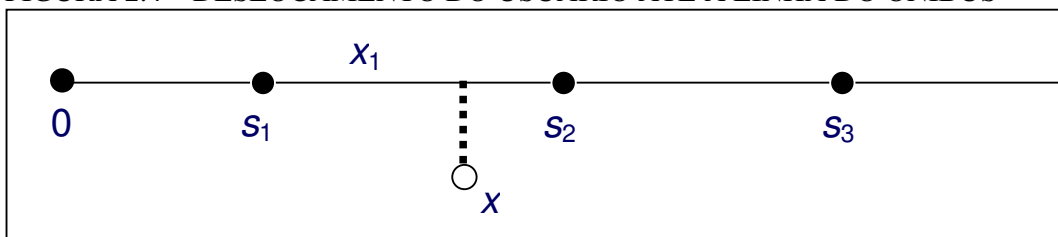
## 2.7 Estudo de Caso 4

Suzuki (1987) citado em Okabe *et. al.* (2000, p. 559-563) fez um estudo sobre uma linha de ônibus em Ichikawa, Japão. Ele utilizou conceitos de Diagramas de Voronoi para estabelecer o espaçamento ótimo entre paradas de ônibus numa linha alimentadora visando minimizar o tempo médio de viagem dos passageiros até um destino comum.

Essa linha foi escolhida devido ao fato de ter um traçado quase reto e a população na região por ela servida ter uma distribuição praticamente uniforme.

Suzuki (1987) partiu do princípio que o usuário se desloca até o ponto mais próximo da linha de ônibus e, a partir desse ponto, procura a parada mais próxima. Imaginando-se que todos os usuários se deslocariam dessa maneira, então o problema fica reduzido a apenas uma dimensão, pois a distância que mudaria com uma nova distribuição seria a distância percorrida na linha do ônibus, ou seja, sobre uma reta (Figuras 2.4 e 2.5).

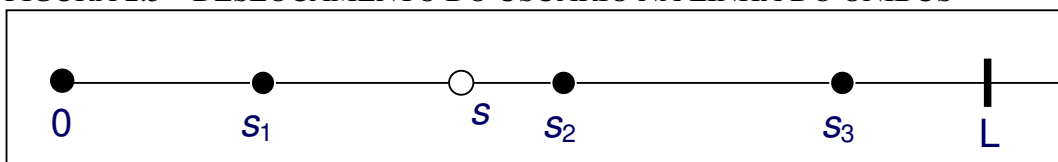
FIGURA 2.4 – DESLOCAMENTO DO USUÁRIO ATÉ A LINHA DO ÔNIBUS



FONTE: Okabe *et. al.* (2000, p. 560)

Esse tipo de simplificação se fez necessária para que o problema pudesse ser resolvido analiticamente, uma vez que a solução do problema original seria muito complicada e trabalhosa.

FIGURA 2.5 – DESLOCAMENTO DO USUÁRIO NA LINHA DO ÔNIBUS



FONTE: Okabe *et. al.* (2000, p. 560)

Para formular matematicamente o problema descrito acima, consideremos um ônibus na rota  $L$ , na região  $S$ , onde  $n$  pontos de paradas são colocados. Os pontos são indexados de 1 até  $n$  a partir do terminal. Seja  $l_i$  a distância na rota do ponto  $i$  até o ponto  $i+1$ , com  $i$  variando de 1 até  $n$ . O ponto 0(zero) é o terminal final da linha. A localização do ponto na rota  $L$  pode ser representada pela distância  $s$  do ponto até o terminal final. A localização do ponto  $i$  é então indicada por:

$$s = s_i = \sum_{j=1}^i l_j \quad (2.28)$$

Os usuários são distribuídos sobre a região  $S$  de acordo com a função de densidade

$\varnothing(x)$ .

Seja  $v_b$  a velocidade média do ônibus,  $v_w$  a velocidade do usuário a pé e  $b$  o tempo gasto pelo ônibus em cada parada. O tempo total de viagem do ponto  $s$  até o ponto  $i$  a pé e do ponto  $i$  até o terminal final de ônibus é dado pela seguinte fórmula:

$$\frac{|s - s_i|}{v_w} + \frac{s_i}{v_b} + (i * b) \quad (2.29)$$

A seguinte restrição precisa ser satisfeita, senão andar seria mais rápido do que ir de ônibus:

$$b + \frac{l_i}{v_b} < \frac{l_i}{v_w} \quad (2.30)$$

Como todo usuário deseja minimizar o seu tempo de viagem, ele então vai procurar o ponto que lhe proporcione o menor tempo possível. Ou seja, se ele está no ponto  $s$ , ele vai escolher o ponto  $i$  que minimize o tempo de viagem até o terminal. A equação que representa essa situação é:

$$\min_i \left\{ \frac{|s - s_i|}{v_w} + \frac{s_i}{v_b} + (i * b) \right\} \quad (2.31)$$

Como resultado, temos, para todo ponto  $i$ , uma área de abrangência definida por:

$$V_i = \left\{ s \mid \frac{|s - s_i|}{v_w} + \frac{s_i}{v_b} + (i * b) \leq \frac{|s - s_j|}{v_w} + \frac{s_j}{v_b} + (j * b), \text{ para } j \in I_n \setminus \{i\} \right\} \quad (2.32)$$

A equação acima representa uma região de Voronoi gerada na linha  $L$ . A partir dessa equação, temos o tempo total de viagem de todos os usuários da região que é dado por:

$$F(l_1, \dots, l_n) = \sum_{i=0}^n \int_{v_i} \left\{ \frac{|s - s_i|}{v_w} + \frac{s_i}{v_b} + (i * b) \right\} \phi_L(x) ds \quad (2.33)$$

O problema fica então definido da seguinte maneira:

$$\min_{l_1, \dots, l_n} \sum_{i=0}^n \int_{v_i} \left\{ \frac{|s - s_i|}{v_w} + \frac{s_i}{v_b} + (i * b) \right\} \phi_L(x) ds \quad (2.34)$$

Sujeito a:

$$b + \frac{l_i}{v_b} < \frac{l_i}{v_w} \text{ para todo } i \in I_n \quad (2.35)$$

$$\sum_{i=1}^n l_i \leq L \quad (2.36)$$

$$l_i > 0 \text{ para todo } i \in I_{n+1} \quad (2.37)$$

Este é um problema de programação não-linear com restrições. Como a função de densidade é considerada uniforme, a função objetivo pode ser reescrita transformando o problema num problema de programação quadrática (um caso especial de programação não-linear).

O problema descrito acima foi resolvido para vários números de paradas, com  $n$  variando de 2 até 34. Foi calculada a solução ótima para cada caso. A menor solução ótima encontrada foi para  $n=8$ , com um espaçamento entre os pontos de 608m. O espaçamento inicial era de 325m, com 15 pontos de parada ( $n=15$ ).

## 2.8 Estudo de Caso 5

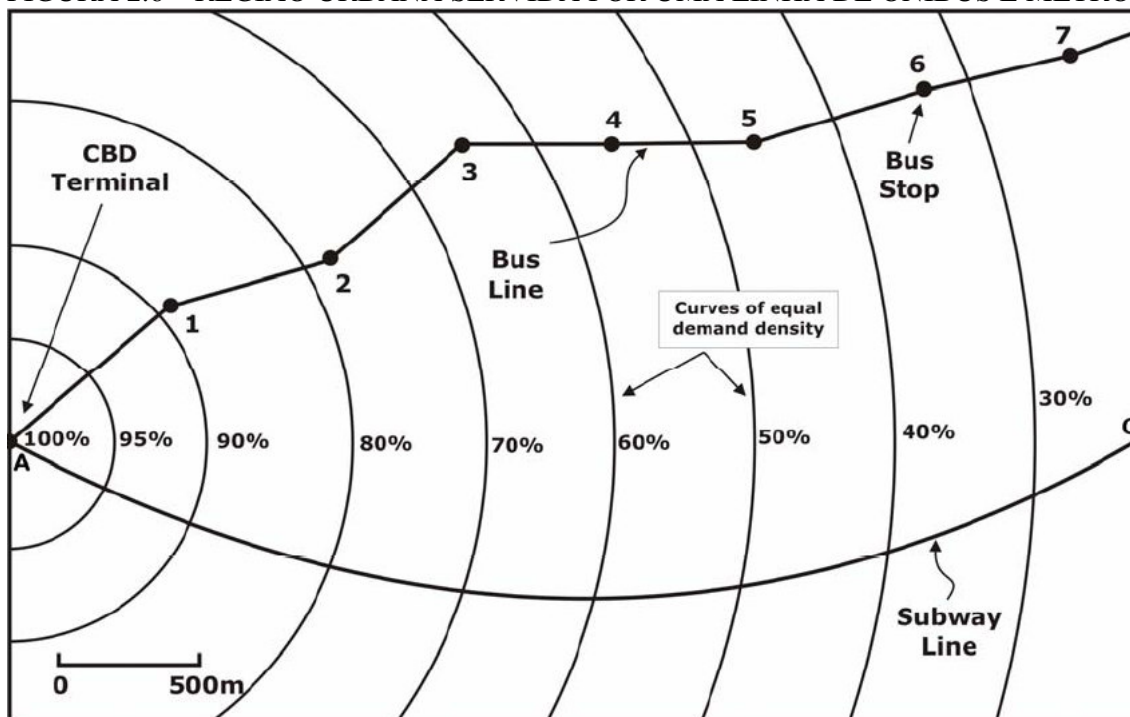
Novaes *et. al.* (2009) utilizou conceitos de diagramas de Voronoi e modelos de aproximação contínua para resolver problemas de alocação distrital voltados para aplicações em transporte e logística.

No artigo em questão, os autores analisaram um problema de localização de estações de metrô numa região urbana que também é servida por uma linha de ônibus.



A figura 2.6 abaixo mostra uma área  $\mathcal{R}$  a qual é atualmente servida por uma linha de ônibus que segue para um terminal urbano. Ao longo da linha existem 07 (sete) pontos de parada numerados de 1 a 7. Uma nova linha de metrô está sendo analisada para ser implantada na área em questão. A linha tem um traçado circular com raio de 3,85Km, como mostra a figura 2.6. O problema em questão é encontrar o número ideal de estações, bem como as suas respectivas localizações, a fim de otimizar uma função objetivo específica. Neste caso, o objetivo é maximizar arrecadação da linha do metrô, ou seja, atrair o maior número de passageiros possível.

FIGURA 2.6 – REGIÃO URBANA SERVIDA POR UMA LINHA DE ÔNIBUS E METRÔ



FONTE: Novaes *et. al.* (2009, p. 14)

A função de demanda é descrita como sendo uma função de densidade decrescente em torno do terminal. As curvas circulares na figura 2.5 indicam a variação da densidade (em porcentagem) na região. Como podemos perceber, no terminal a densidade é máxima (100%). Pela manhã os usuários andam desde suas casas até o ponto de ônibus ou estação do metrô

mais próxima. Seja  $\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  a representação dos  $m$  pontos de embarque (ônibus ou metrô) no plano euclidiano. Seja  $X$  um ponto arbitrário na região  $\mathfrak{R}$  com coordenadas  $(x,y)$ . A área de abrangência dos passageiros referente ao ponto de embarque  $P_i$  é representada por um diagrama de Voronoi ordinário poligonal definido por:

$$V(P_i) = \left\{ X \in R^2 \mid \|X - P_i\| \leq \|X - P_j\|, j \neq i, j = 1, \dots, m \right\} \quad (2.38)$$

Onde  $P_1, P_2, \dots, P_m$  são os pontos geradores do diagrama de Voronoi. Com  $i$  representando qualquer ponto de embarque, tem-se a seguinte representação:

- a)  $i = 0$  como sendo o terminal;
- b)  $i = 1, 2, \dots, b$  representando os pontos de ônibus;
- c)  $i = b+1, b+2, \dots, b+s$  representando as estações de metrô.

Assim temos  $b$  pontos de ônibus e  $s$  estações de metrô, sendo  $b+s=n$ . Assim sendo, o conjunto de pontos geradores compõem-se de três subconjuntos:  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_b \cup \Gamma_s$ , onde  $\Gamma_0 = \{P_0\}$ ,  $\Gamma_b = \{P_1, \dots, P_b\}$  e  $\Gamma_s = \{P_{b+1}, \dots, P_{b+s}\}$ .

Seja  $V(P_1), V(P_2), \dots, V(P_m)$  os diagramas de Voronoi ordinários gerados por  $\Gamma$ . Por construção,  $\bigcup_{i=1}^m V(P_i)$  cobre toda a região  $\mathfrak{R}$ . Seja  $\Phi(X)$  a função densidade de demanda no ponto  $X$ . O objetivo é maximizar a arrecadação do metrô através de duas variáveis de decisão:

- a) O número de estações;
- b) A localização das estações ao longo da linha de metrô.

Uma vez que a linha do metrô descreve um arco, os pontos de  $\Gamma$  ficam restritos a essa curva. Eles podem ser então descritos parametricamente por uma variável real  $\theta$ , ou seja, um ângulo ou um comprimento de arco. Cada ponto na linha do metrô corresponde a um valor de  $\theta$ , pertencente ao intervalo  $(\theta_{min}, \theta_{max})$ . Tem-se então uma equação paramétrica  $P=P(\theta)$  que descreve a localização geométrica da linha do metrô. Os elementos de  $\Gamma$  são definidos por um vetor real  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$ , ou seja, existe uma correspondência biunívoca entre os sub-

conjuntos viáveis de  $\Gamma_s$  e um sub-conjunto  $A$  pertencente ao conjunto real  $R^s$  e, para um  $s$  e  $A$ :  
 $\Gamma_s = \Pi(\Theta_s)$ , onde  $\Pi$  é uma função biunívoca. Temos então:

$$P_{b+1} = P(\theta_i), \Pi(\Theta) = \{P(\theta_i) : 1 \leq i \leq s\}, A = \{\Theta \in R^s \mid \theta_{\min} \leq \theta_i \leq \theta_{\max}\} \quad (2.39)$$

Assim sendo, as variáveis a serem numericamente determinadas são  $s$  e  $\Theta_s$ . A função objetivo a ser maximizada é:

$$G(\Theta_s) = \sum_{i=b+1}^{b+s} \int_{V_i} \|X - P_i\| \phi(X) dX \quad (2.40)$$

A resolução numérica da equação 2.40 envolve a construção de um diagrama de Voronoi ordinário definido pelos pontos geradores  $\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_m\} = \Gamma_0 \cup \Gamma_b \cup \Gamma_s$ , sendo  $\Gamma_s = \Pi(\Theta_s)$ . Existe ainda a necessidade de ser estabelecida uma distância mínima entre as estações do metrô. Considerando  $\overline{AB}$  como a extensão total da linha do metrô, temos então a seguinte restrição:

$$\frac{\overline{AB}}{s+1} \geq d_{\min} \quad (2.41)$$

Onde  $d_{\min}$  é a menor distância permitida entre as estações do metrô. Neste caso, foi utilizada a distância mínima de 800m. Isso nos dá um limite para o número máximo de estações, ou seja,  $s=1, 2, \dots, s_{\max}$ . Assim sendo, resolve-se o problema para todos os números de estações, de um até  $s_{\max}$ .

TABELA 2.8 – RESULTADOS DO MODELO

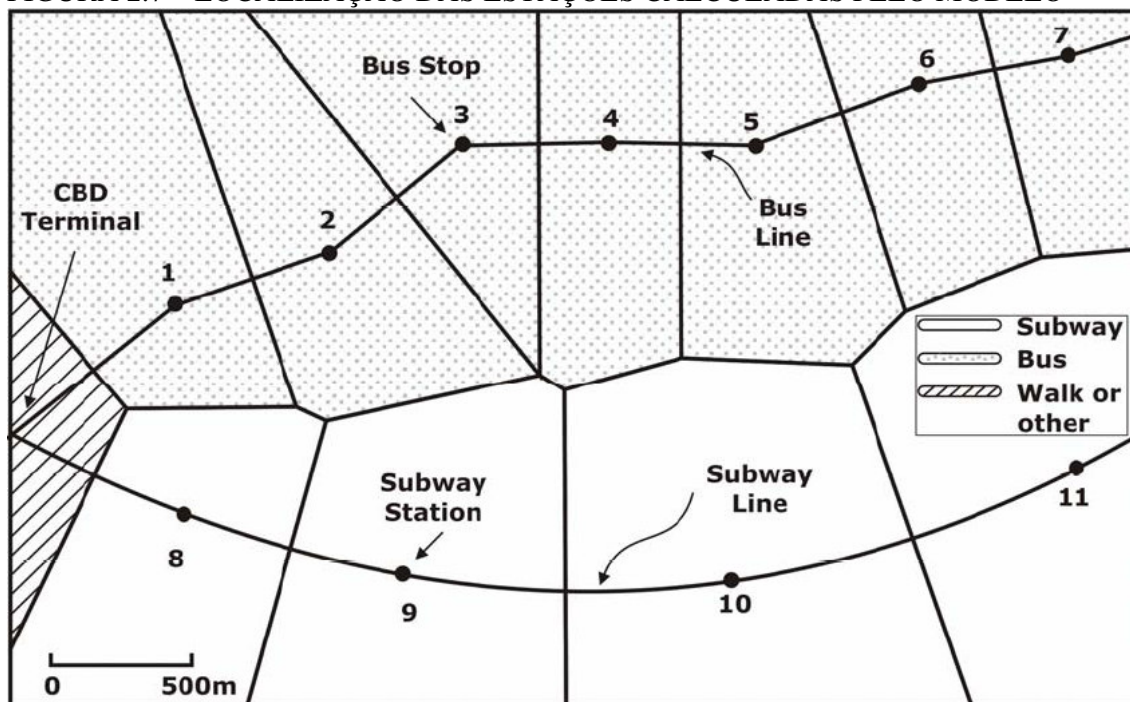
Número de Estações (s)	Número de Iterações	Distância entre Estações (em metros)	Quantidade de Passageiros(em % da demanda total)
1	29	2103	26,77
2	105	1402	41,73
3	115	1051	46,42
4	259	841	48,27
5	371	701	49,03

FONTE: Novaes *et. al.* (2009, p. 16)

Para encontrar a solução do problema de programação não-linear descrito acima, utilizou-se o método de busca direta de Hooke e Jeeves(1962). Foram calculadas as soluções ótimas para  $s = 1$  até 5. Os resultados estão na tabela 2.8.

Como podemos perceber na tabela 2.8, a diferença obtida aumentando de 4 para 5 estações é mínima, apenas 1,6%. Como 5 é o número máximo de estações determinado pelo espaçamento mínimo, temos que o valor ideal é obtido com  $s = 4$ , devido o custo elevado de construção de uma estação para um ganho muito pequeno. A localização das estações está indicada na figura 2.7.

FIGURA 2.7 – LOCALIZAÇÃO DAS ESTAÇÕES CALCULADAS PELO MODELO



FONTE: Novaes *et. al.* (2009, p. 17)

Outra abordagem feita pelos autores do artigo foi colocando algumas restrições de tempo no modelo. Assumiu-se que os usuários estariam dispostos a andar no máximo 20 minutos até uma estação do metrô, 15 minutos até um ponto de ônibus e 30 minutos até o terminal. Foi considerada uma velocidade a pé de 4,4 km/h. Para calcular a distância

percorrida pelo usuário, foi aplicado um fator de correção de 1,35 na distância euclidiana entre dois pontos. Esta modificação gerou uma mudança no resultado, pois o diagrama de Voronoi deixou de ser um diagrama ordinário, e o resultado está na figura 2.8.

Outro modelo, mais realístico que o descrito acima, também é descrito no artigo. A diferença está na função objetivo, que busca minimizar o tempo de viagem dos passageiros, desde as suas casas até o terminal, ou seja, o passageiro vai escolher a estação do metrô ou ponto de ônibus que o faça chegar mais rápido ao seu destino.

Suponhamos um usuário localizado no ponto  $X$  que caminha até o ponto de ônibus  $P_i(i=1,\dots,n)$ . O tempo total para que ele chegue no terminal é composto dos seguintes elementos:

- a) Tempo de viagem a pé até o ponto de ônibus ( $t_h$ );
- b) Tempo de espera no ponto ( $t_w$ );
- c) Tempo percorrido dentro do ônibus, excluindo o tempo nas paradas ( $t_t$ );
- d) Total do tempo perdido nos pontos subsequentes ( $t_s$ ).

O tempo a pé é calculado da seguinte maneira:

$$t_H^{(i)} = \frac{k}{V_H} \|X - P_i\| \quad (2.42)$$

Onde  $V_H$  é a velocidade média a pé e  $k$  é o fator de correção mencionado anteriormente. O valor esperado para o tempo gasto no ponto  $t_w$  é a metade do tempo observado entre um ônibus e o próximo na rota  $L$  ( $\tau_L$ ).

O tempo percorrido no ônibus é dado por:

$$t_t^{(i)} = \frac{k}{V_{L_t}} \sum_{j=0}^{i-1} \|P_j - P_{j+1}\| \quad (2.43)$$

Onde  $V_{L_t}$  é a velocidade média do ônibus na rota. A soma do tempo gasto nas paradas é calculada por:

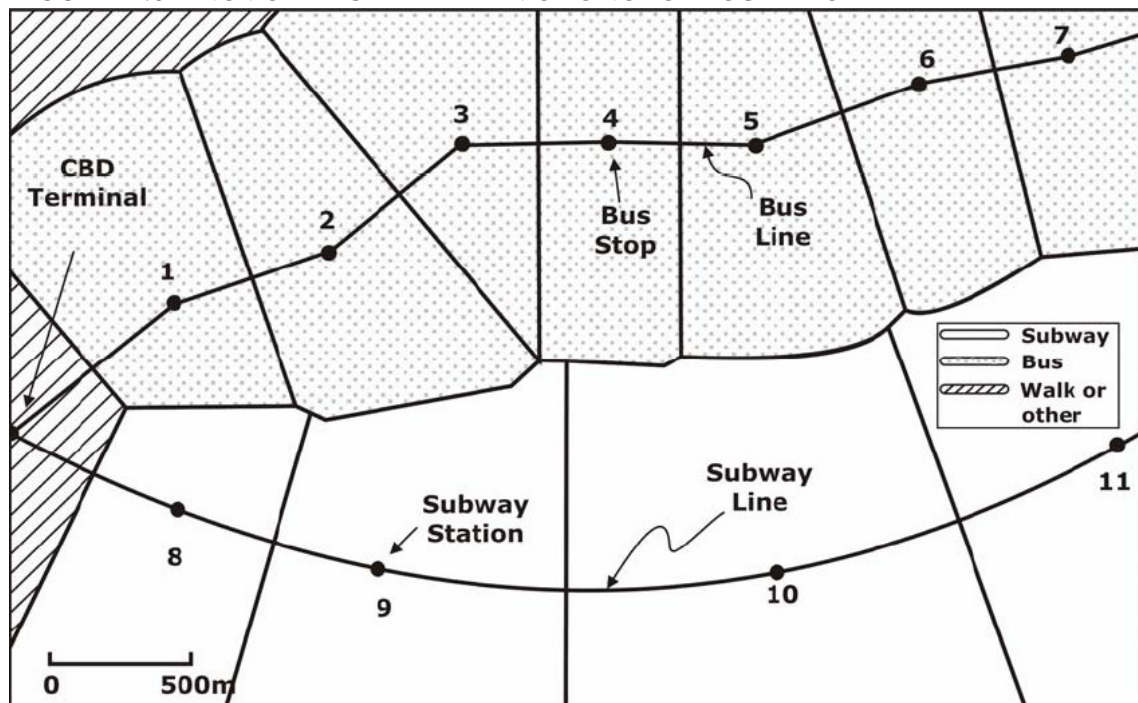
$$t_S^{(i)} = \sum_{j=1}^i S_{L_j} \quad (2.44)$$

Onde  $S_{Lj}$  é o tempo médio gasto no ponto  $j$  da rota  $L$ . O custo geral atribuído a cada usuário partindo do ponto  $X$  até o terminal, através do ponto  $i$ , é dado por:

$$C^{(i)} = \alpha_H t_H^{(i)} + \alpha_W t_W^{(i)} + \alpha_t (t_t^{(i)} + t_s^{(i)}); (i=1, \dots, n) \quad (2.45)$$

Onde  $\alpha_H$ ,  $\alpha_W$  e  $\alpha_t$  são pesos associados ao tempo da viagem a pé, ao tempo de espera no ponto e ao tempo percorrido na viagem no ônibus, respectivamente.

FIGURA 2.8 – NOVO DIAGRAMA DE VORONOI CALCULADO



FONTE: Novaes *et. al.* (2009, p. 19)

Portanto, para todo ponto  $X$  o modelo procura o ponto  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) que torna  $C^{(i)}$  mínimo. Após algumas substituições e simplificações na fórmula anterior (2.45)  $C^{(i)}$  pode ser expresso como:

$$C^{(i)} = \|X - P_i\| + \frac{V_H}{k\alpha_H} \left[ \frac{\alpha_W \tau_L}{2} + \frac{k\alpha_t}{V_{L_i}} \sum_{j=0}^{i-1} \|P_j - P_{j+1}\| + \alpha_t \sum_{j=1}^i S_{Lj} \right] = \|X - P_i\| - w_i \quad (2.46)$$

O que vem a ser uma região de Voronoi ponderado por soma.

Assumindo  $V_H = 4,4\text{Km/h}$ ,  $V_{L1} = 20\text{Km/h}$  para o ônibus,  $V_{L2} = 60\text{Km/h}$  para o metrô, o tempo gasto na parada 90 e 30 segundos para o ônibus e o metrô respectivamente. O tempo entre dois ônibus consecutivos é de 5 minutos e entre os trens do metrô é de 1,5 minutos. O fator de correção de distância  $k$  é igual a 1,35 e os limites de tempo do exemplo anterior, ou seja, que os usuários estariam dispostos a andar no máximo 20 minutos até uma estação do metrô, 15 minutos até um ponto de ônibus e 30 minutos até o terminal.

Aplicando-se o modelo tem-se o resultado descrito na tabela 2.9.

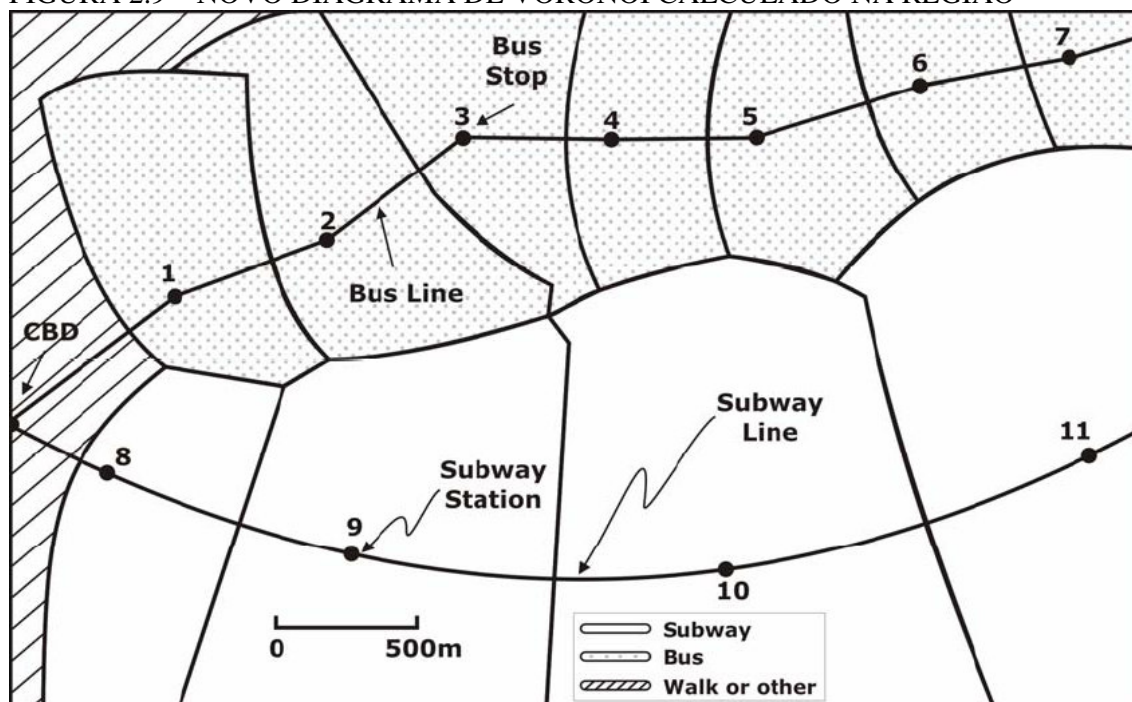
TABELA 2.9 – RESULTADOS DO NOVO MODELO

Número de Estações ( $s$ )	Número de Iterações	Distância entre Estações (em metros)	Quantidade de Passageiros(em % da demanda total)
1	29	2103	25,38
2	65	1402	44,04
3	205	1051	50,71
4	227	841	52,19
5	359	701	52,62

FONTE: Novaes *et. al.* (2009, p. 20)

Como podemos perceber, o melhor valor para  $s$  é 4, ou seja, quatro estações de metrô vão obter a melhor quantidade de passageiros na região quando o que se deseja minimizar é o tempo de viagem do usuário.

FIGURA 2.9 – NOVO DIAGRAMA DE VORONOI CALCULADO NA REGIÃO



FONTE: Novaes *et. al.* (2009, p. 21)

A figura 2.9 mostra a localização final das estações, bem como as suas áreas de abrangência. Comparando a figura 2.9 com a figura 2.8 podemos perceber que utilizando a nova metodologia, a área de abrangência das estações do metrô tende a aumentar consideravelmente.

## 2.9 Considerações Finais

O ônibus é um importante veículo de transporte coletivo urbano devido a sua facilidade de implantação, flexibilidade e adaptabilidade. Ele continua sendo o meio de transporte mais utilizado pela população e é uma alternativa importante para desafogar o trânsito nas grandes cidades.

O espaçamento entre os pontos de parada é um importante componente na maneira de se melhorar o desempenho do sistema em áreas urbanas e que vem a ser uma ferramenta de atração para induzir mais passageiros a utilizarem o sistema de transporte coletivo.



Atualmente existem inúmeras metodologias para definir o espaçamento entre os pontos de parada, sendo que alguns carecem de um melhor embasamento científico. Vários estudos existentes procuram minimizar custos e/ou tamanho da frota. Alguns procuram também minimizar o tempo médio da viagem, porém combinado com outros fatores.

No Anexo 8 temos um resumo dos artigos apresentados neste capítulo.

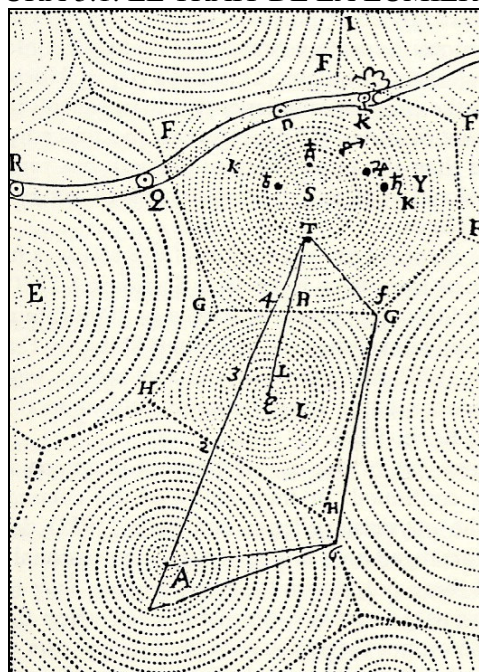
O estudo do espaçamento dos pontos de parada visando reduzir o tempo médio de viagem dos usuários pretende proporcionar uma importante ferramenta para o desenvolvimento do transporte coletivo em áreas urbanas.

### 3 DIAGRAMA DE VORONOI

#### 3.1 Histórico

A primeira referência sobre o Diagrama de Voronoi data de 1644, quando Descartes publicou um estudo chamado *Le Trait de la Lumière*, onde ele utilizou formas parecidas com Diagrama de Voronoi a fim de ilustrar o Sistema Solar e os seus arredores, conforme observa-se na ilustração na figura 3.1.

FIGURA 3.1: LE TRAIT DE LA LUMIERE



Fonte: Okabe *et. al.* (2000, p. 7)

Os primeiros estudos utilizando os conceitos que no futuro seriam definidos como Diagramas de Voronoi foram efetuados por Peter Gustav Lejeune Dirichlet, no ano de 1850, cujo conteúdo tratava de uma teoria sobre Formas Quadráticas Positivas Definidas. Ele estudou o assunto para os casos bi e tri-dimensionais.

Outro estudo foi feito por John Snow através de um Relatório sobre Epidemia de Cólera, na Inglaterra, que foi publicado em 1855.

Mais tarde, em 1896 Georgy Fedoseevich Voronoi, em sua tese de doutorado intitulada “*Ob odnom obobshchenii algoritma nepreryvnykh drobei*” que em russo significa “**Sobre uma generalização do algoritmo de quebra de cadeias**”, publicada em Varsóvia, Polônia. Ele desenvolveu um método em que, com base em uma triangulação pré-existente de pontos que representam os centros de alguma coisa (no caso da primeira aplicação, agências de correio), se determina qual a área de influência de cada um destes centros em função da posição dos outros centros, delimitando de forma geométrica cada área de influência.

Até onde se sabe, foi o matemático russo Boris Nikolaevitch Delaunay (1929, 1932) quem primeiro relacionou os nomes de Dirichlet e Voronoi a esses poliedros. Ele os chamou de Domínio de Dirichlet e Região de Voronoi (Okabe *et. al.*, 1998).

Shamos e Hoey (1975) desenvolveram um algoritmo computacional para a construção de um Diagrama de Voronoi e mostraram como utilizar esse conceito para resolver outros problemas correlatos. Desde então, vários algoritmos computacionais foram desenvolvidos para aplicações gerais ou para resolver problemas mais específicos.

### **3.2 Considerações Iniciais**

Considere-se as seguintes situações:

- a) Estudo astronômico da Estrutura do Universo;
- b) Estudos arqueológicos para definir a área de influência de uma determinada tribo;
- c) Estudo meteorológico sobre a quantidade de chuva numa determinada região atendida por um certo número de pluviômetros;
- d) Planejamento sobre a distribuição de escolas numa cidade;

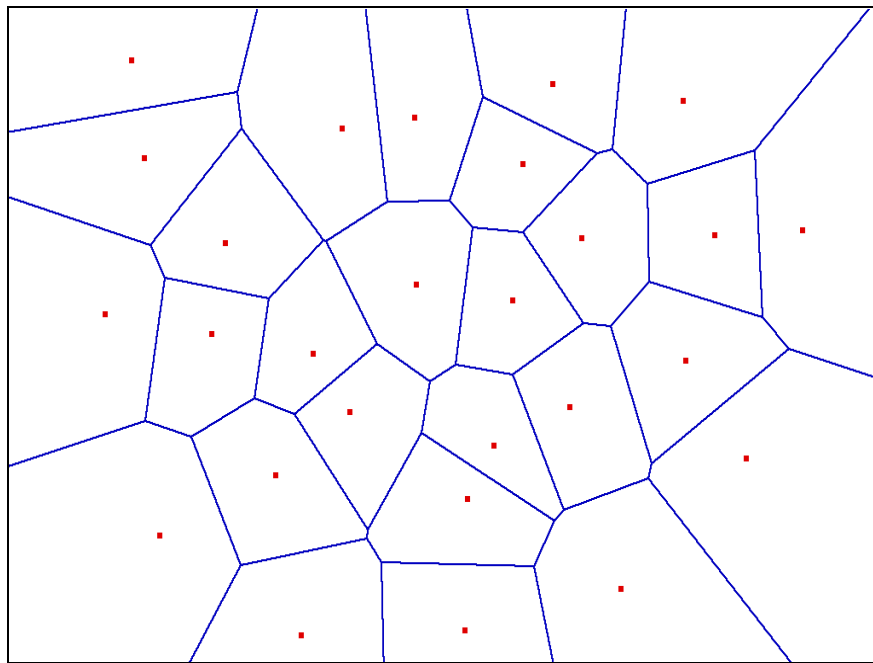
e) Um estudo sobre a capilaridade da irrigação sanguínea num tecido muscular.

Aparentemente essas atividades teriam pouca coisa em comum, porém existe algo em comum a todas elas: o Diagrama de Voronoi. Os conceitos matemáticos desenvolvidos por Voronoi são utilizados para a solução desses problemas e de muitos outros.

O conceito, apesar de bastante simples e intuitivo, possui características matemáticas importantes que vem sendo utilizadas há mais de um século na ciência em diversas áreas. O conceito é o seguinte: “Dado um conjunto finito de pontos  $P$ , distintos e isolados, num espaço contínuo, nós associamos todos os demais pontos do espaço ao ponto mais próximo do conjunto de pontos  $P$ .”<sup>1</sup> (OKABE *et. al.*, 2000, p. 44).

O resultado da definição acima é a partição do espaço em regiões. Essas regiões são conhecidas como Regiões de Voronoi. Ao se representar essas regiões num espaço Euclidiano bi-dimensional, ou seja, num plano, as regiões ficam reduzidas a polígonos, denominados Diagrama de Voronoi (Figura 3.2).

FIGURA 3.2: DIAGRAMA DE VORONOI



FONTE: Elaboração do autor.

---

<sup>1</sup> Tradução livre.

### 3.3 Definições

Os conceitos apresentados neste capítulo são oriundos de Okabe *et. al.* (2000).

#### 3.3.1 Diagrama de Voronoi

Suponha-se um conjunto de pontos  $P$  no plano e que o número de pontos é de dois ou mais, porém finito, sendo que todos são distintos. Dado um ponto fixo qualquer, será assumido que toda localização no plano está associada ao membro mais próximo dentre os pertencentes ao conjunto de pontos  $P$ . Se uma localização acontece de tal forma a estar igualmente perto de dois ou mais membros do conjunto de pontos, a locação será designada a todos esses membros. Como resultado, os conjuntos de localizações designados a cada membro no conjunto de pontos formam suas próprias regiões. As regiões resultantes são coletivamente exaustivas no plano porque cada locação é designada a, pelo menos, um conjunto de pontos. O conjunto de locações designado a dois ou mais membros do conjunto de pontos formam as regiões de fronteiras. Assim, o conjunto das regiões é coletivamente exaustivo e mutuamente exclusivo com exceção das fronteiras, ou seja, o conjunto das regiões forma uma tecelagem. O nome desta tecelagem é *Diagrama Comum de Voronoi* no plano, e as regiões que constituem o Diagrama de Voronoi são *Polígonos Comuns de Voronoi*.

##### 3.3.1.1 Definição Matemática do Diagrama de Voronoi

Seja  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  um conjunto finito de dois ou mais pontos não colineares do plano euclidiano, chamados de centros geradores ou centróides. Particione o plano atribuindo a cada ponto do plano o centróide mais próximo de acordo com a distância Euclidiana.

Todos os pontos associados a  $p_i$  formam um polígono de Voronoi  $V(p_i)$ . O conjunto de todos os pontos associados a mais de um centro forma o diagrama de Voronoi  $Vor(P)$ .

Seja  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$  onde  $2 < n < \infty$  e  $p_i \neq p_j$  para todo  $i \neq j$ , com  $i, j \in I_n$ :

$${}^oV = \{V(p_1), V(p_2), \dots, V(p_n)\} \quad (3.1)$$

E o conjunto é dado por:

$$V(p_i) = \left\{ x : \|p_i - x\| \leq \|p_j - x\| ; j \neq i, j \in I_n \right\} \quad (3.2)$$

Este é o Diagrama de Voronoi no plano, ou *Diagrama Ordinário de Voronoi* no plano.

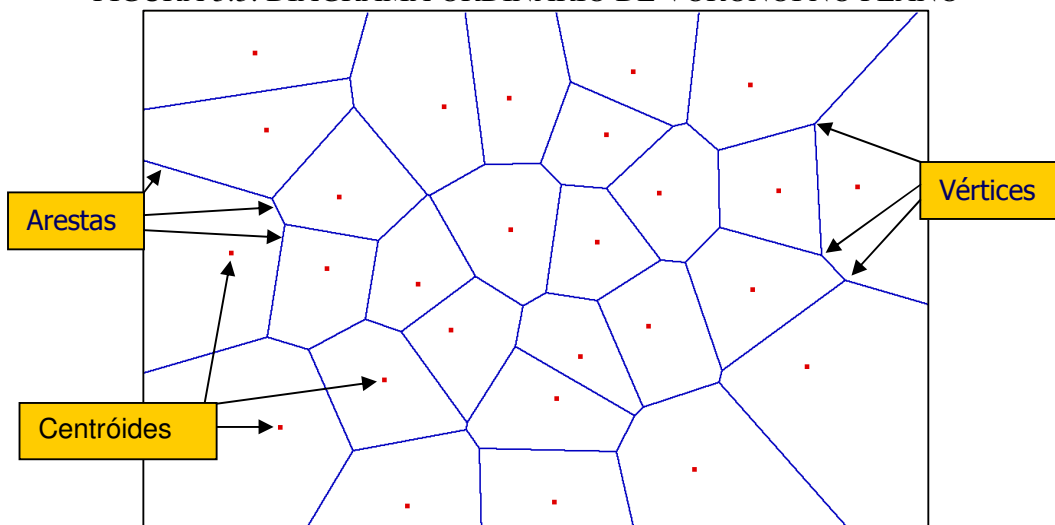
Esse conjunto pode ser descrito como:

$$\bigcup_{i=1}^n \partial V(p_i) \quad (3.3)$$

Onde  $\partial V(p_i)$  ou  $e_i$  é o conjunto das *Arestas de Voronoi* referente ao ponto gerador  $p_i$ . O ponto de término de uma Aresta é chamado de *Vértice de Voronoi*.

Na figura 3.3 pode-se ver um exemplo de um Diagrama Ordinário de Voronoi no plano, com os seus componentes especificados.

FIGURA 3.3: DIAGRAMA ORDINÁRIO DE VORONOI NO PLANO



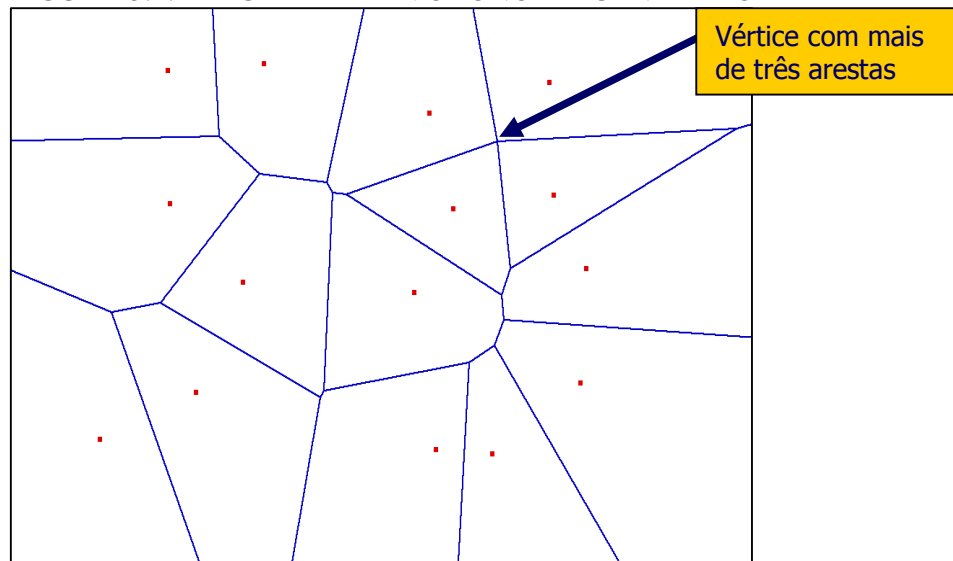
FONTE: Elaboração do autor.

### 3.3.1.2 Degeneração do Diagrama de Voronoi

Degeneração: considera-se que um Diagrama de Voronoi é Não Degenerado quando todos os seus vértices são formados por exatamente três Arestas. Caso contrário, ele será considerado um Diagrama de Voronoi Degenerado.

Na figura 3.4 temos um exemplo de um Diagrama de Voronoi Degenerado.

FIGURA 3.4: DIAGRAMA DE VORONOI DEGENERADO



FONTE: Elaboração do autor.

Em algumas aplicações, um diagrama de Voronoi Degenerado requer um tratamento especial para garantir a precisão no resultado.

### 3.3.1.3 Diagrama de Voronoi com Barreiras

Considerando as definições anteriores, define-se um diagrama de Voronoi em um plano ilimitado. Na prática, porém, freqüentemente ele está limitado de acordo com a região  $S$  onde os geradores são alocados. Neste caso é considerado o conjunto dado por:  $V \cap S = \{V(p_1) \cap S, V(p_2) \cap S, \dots, V(p_n) \cap S\}$ ,

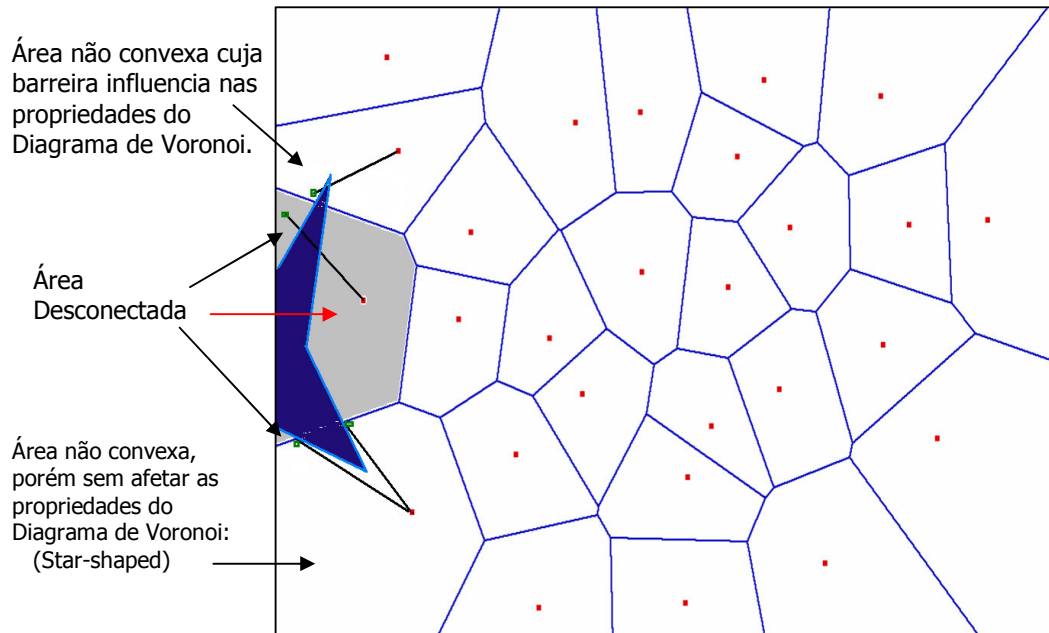
A união dos conjuntos de Diagramas Limitados de Voronoi ou Diagrama de Voronoi Limitado denota-se  $S$ . Se o polígono de Voronoi  $V(p_i)$  compartilha da fronteira de  $S$ , então é chamada a região  $V(p_i) \cap S$  por polígono de fronteira de Voronoi ou região (o termo “região” é usado quando  $\partial S$  é curvo ou quando  $V(p_i) \cap S$  é não conectado).

Deve-se notar que uma região de fronteira de Voronoi pode ser desligada e esse segmento de reta unindo um ponto em  $V(p_i)$  e  $p_i$  pode não estar contido em  $V(p_i) \cap S$ . Na prática, como a fronteira dos polígonos de Voronoi são freqüentemente problemáticas, tem-se assim que definir um diagrama de Voronoi de modo mais apropriado. Um diagrama limitado de Voronoi pode ser significativo na prática se toda região de fronteira de Voronoi for com ligações inteiramente contidas em cada polígono com respeito ao ponto gerador. Na prática, usualmente se trabalha com uma fronteira bem formada do diagrama de Voronoi.

A figura 3.5 possui um exemplo de um Diagrama de Voronoi com barreiras, exemplificando os conceitos acima.



FIGURA 3.5: DIAGRAMA DE VORONOI COM BARREIRAS



FONTE: Elaboração do autor.

### 3.3.1.4 Diagrama de Voronoi no $\mathbb{R}^m$

Aqui apenas apresenta-se uma generalização do Diagrama de Voronoi do  $\mathbb{R}^2$  para o  $\mathbb{R}^m$  apenas para ilustração, pois a intenção desse estudo é trabalhar com os conceitos do Diagrama de Voronoi no plano Euclidiano.

Seja  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^m$  onde  $2 < n < \infty$  e  $p_i \neq p_j$  para todo  $i \neq j$ , com  $i, j \in I_n$  tem-se:

se:

$$V(p_i) = \left\{ x : \|p_i - x\| \leq \|p_j - x\| \ ; j \neq i, j \in I_n \right\} = \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(p_i, p_j) \quad (3.4)$$

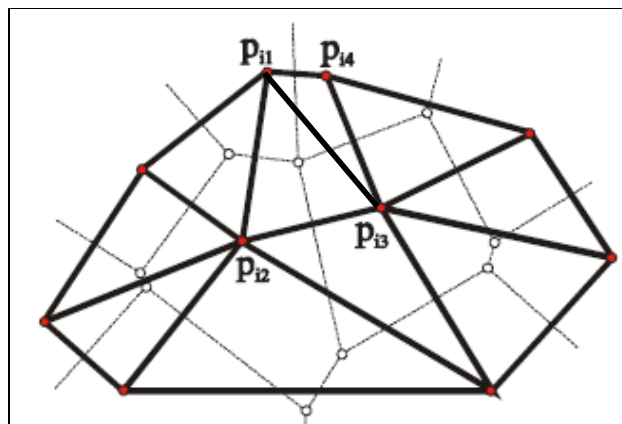
Onde  $H(p_i, p_j)$  é a região de dominância de  $p_i$  sobre  $p_j$ .

### 3.4 Triangulação de Delaunay

Dado um Diagrama de Voronoi com  $n$  Centros Geradores não-colineares e sendo  $3 \leq n < \infty$ , liga-se todos os Centros Geradores que compartilham uma aresta de um Polígono de Voronoi. O resultado dessa operação é um novo diagrama. Se ele consiste apenas de triângulos, então é denominado de Triangulação de Delaunay, caso contrário, de Pré-triangulação de Delaunay.

A Triangulação de Delaunay é o dual do Diagrama de Voronoi, como pode-se ver na figura 3.6 abaixo. As linhas mais escuras representam a Triangulação de Delaunay.

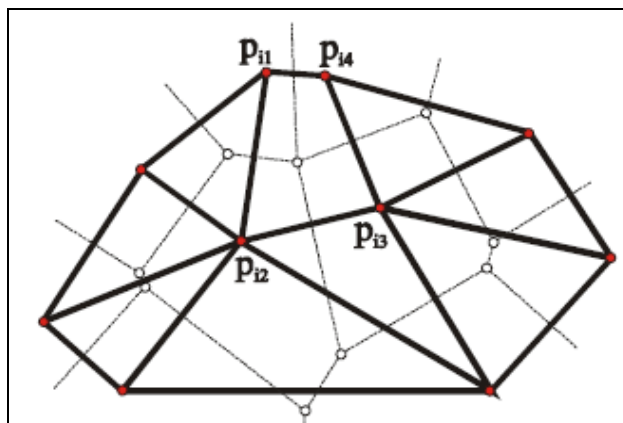
FIGURA 3.6: TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY



FONTE: Okabe *et. al.* (2000, p. 53).

Na figura 3.7 observa-se uma Pré-triangulação de Delaunay, pois existe um polígono entre os pontos assinalados que não é um triângulo.

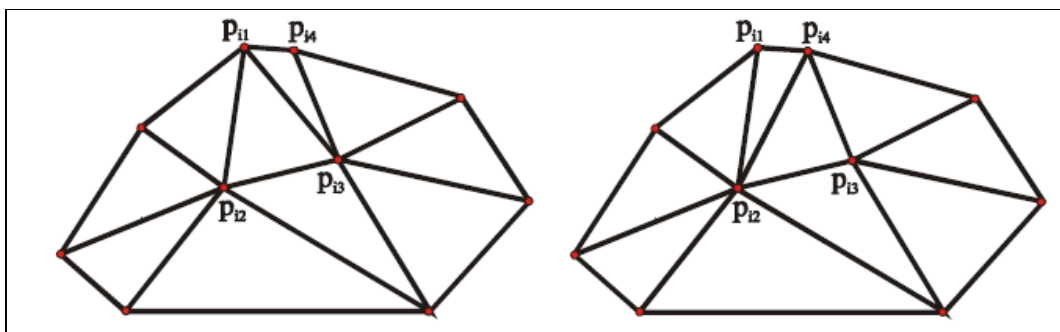
FIGURA 3.7: PRÉ-TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY



FONTE: Okabe *et. al.* (2000, p. 53).

Inspecionando o diagrama de Voronoi indicado pelas linhas pontilhadas na figura 3.7 acima, observa-se que uma Pré-triangulação de Delaunay só acontece quando o diagrama de Voronoi é degenerado.

FIGURA 3.8: TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY OBTIDAS DA FIGURA 3.4



FONTE: Okabe *et. al.* (2000, p. 53).

Uma pré-triangulação de Delaunay pode ter polígonos contendo quatro ou mais vértices. Faz-se partição nesses polígonos não triangulares em triângulos por segmentos de retas que não se interceptem juntando-se os vértices. Por exemplo, particionando o polígono quadrangular com vértices  $p_{i1}$ ,  $p_{i2}$ ,  $p_{i3}$ ,  $p_{i4}$  na figura 3.7 por segmentos  $p_{i1} p_{i3}$ . Com este resultado, a Pré-triangulação de Delaunay torna-se uma tecelagem, consistindo somente de triângulos (figura 3.8). Esta tecelagem também é chamada de triangulação de Delaunay (e,

algumas vezes, de triangulação degenerada de Delaunay para distinguir da triangulação de Delaunay dada acima). Deve-se notar que, como pode ser visto na figura 3.8, a triangulação de Delaunay obtida da pré-triangulação de Delaunay não é única; o polígono quadrangular  $p_{i1}p_{i2}p_{i3}p_{i4}$  pode ser triangulado pelos segmentos  $p_{i1}p_{i3}$  ou  $p_{i2}p_{i4}$ . Ambas as triangulações são aceitas.

Uma triangulação de Delaunay deve consistir de no mínimo um triângulo, e esta condição é garantida pela hipótese de não colinearidade e  $3 \leq n < \infty$ .

Define-se como  $CH(P)$  como o conjunto de triângulos que formam o contorno do fecho convexo dos pontos que geram o diagrama de Voronoi.

### 3.4.1 Definição Matemática da Triangulação de Delaunay

Seja  $V(P)$  um Diagrama de Voronoi generalizado por um conjunto de  $n$  pontos distintos  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^2$  sendo  $3 \leq n < \infty$ , que satisfaça a hipótese de não colinearidade. Seja  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  o conjunto de vértices de Voronoi em  $V(P)$  e sejam  $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iki}$  os vetores localizados para os centróides cujos polígonos de Voronoi partilham do vértice  $q_i$ . Este conjunto é definido por:

$$T_i = \left\{ \left\{ x : x = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j x_j, \text{ onde } \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j \in I_{k_i} \right\} \right\} \quad (3.5)$$

e seja

$$D = \{T_1, T_2, \dots, T_{n_v}\} \quad (3.6)$$

Se  $k_i=3$  para todos os  $i \in I_{n_v}$ , chama-se ao conjunto  $D$  triangulação de Delaunay de  $CH(P)$  cobrindo  $P$ . Se nele existe ao menos um  $k_i \geq 4$ , chama-se ao conjunto  $D$  pré triangulação de Delaunay de  $CH(P)$  cobrindo  $P$ . Particionando-se  $T_i$  tendo  $k_i \geq 4$  em  $k_i-2$  triângulos por segmentos que não se interceptam unindo-se os seus vértices, teremos como resultado os triângulos resultantes por  $T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{iki-2}$ . Seja

$$D = \{T_{11}, \dots, T_{1k-2}, \dots, T_{n1}, \dots, T_{nk-2}\} \quad (3.7)$$

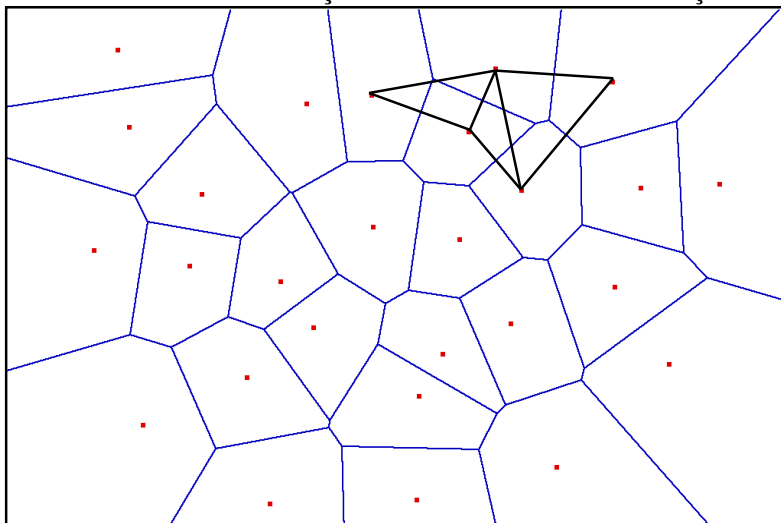
Chama-se o conjunto  $D$  de *Triangulação de Delaunay de  $CH(P)$  cobrindo todo o conjunto  $P$* , e os triângulos em  $D$  de *Triângulos de Delaunay*.

Como foi visto acima, um triângulo de Delaunay é definido como um conjunto fechado e suas fronteiras consistem de segmentos de retas. Chamam-se estes segmentos de extremidades de Delaunay. Especificamente, se uma extremidade de Delaunay é partilhada por dois triângulos de Delaunay, chama-se de uma extremidade interna de Delaunay, caso contrário ela será chamada de uma extremidade externa de Delaunay. Quando o Diagrama de Voronoi é não degenerado, uma extremidade de Voronoi corresponde exatamente a uma extremidade de Delaunay. Conseqüentemente, o número de extremidades de Voronoi em  $D$  é o mesmo que o das extremidades de Voronoi em  $V$ .

Ao contrário de uma extremidade de Voronoi, uma extremidade de Delaunay é sempre finita. Chamam-se os pontos finais de uma extremidade de Delaunay de vértices de Delaunay. Obviamente, todo vértice de Delaunay é um gerador de  $V(P)$ , e conseqüentemente o conjunto de vértices de Delaunay em  $D$  é dado por  $P$ .

Nas figuras abaixo temos a visualização da construção de uma Triangulação de Delaunay. Na figura 3.9 temos alguns centróides sendo conectados sobre um Diagrama de Voronoi.

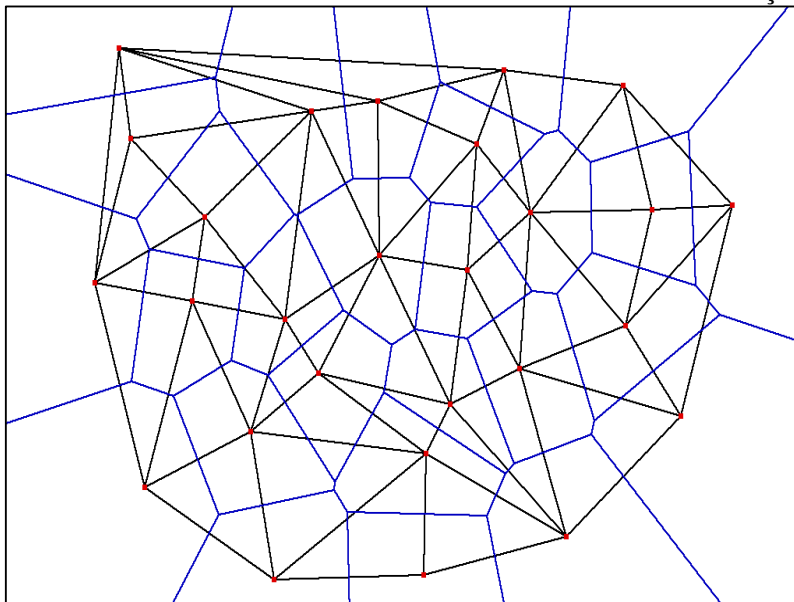
FIGURA 3.9: CONSTRUÇÃO DE UMA TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY



FONTE: Elaboração do Autor

Na figura 3.10 tem-se a Triangulação de Delaunay sobre um Diagrama de Voronoi.

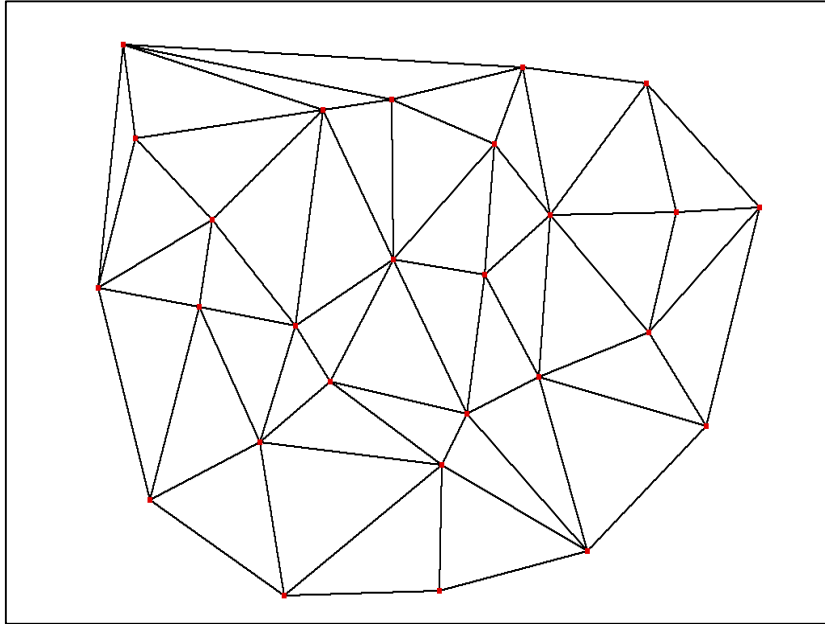
FIGURA 3.10: DIAGRAMA DE VORONOI E TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY



FONTE: Elaboração do Autor

Na figura 3.11 observa-se a Triangulação de Delaunay sobre os pontos que antes formavam o Diagrama de Voronoi.

FIGURA 3.11: TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY



FONTE: Elaboração do Autor.

### 3.5 Propriedades Básicas

#### 3.5.1 Diagrama de Voronoi

- a) Todo polígono  $V(p_i)$  de Voronoi é convexo;
- b)  $V(p_i)$  é ilimitado se e somente se  $p_i$  estiver no fecho convexo;
- c) Para o diagrama de Voronoi gerado por um conjunto de pontos distintos  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  tem-se o seguinte:
  - c.1. Extremidades de Voronoi são retas infinitas se e somente se  $P$  for colinear.
  - c.2. Extremidade de Voronoi  $e(p_i, p_j) (\neq \emptyset)$  é uma semi reta se e somente se  $P$  for não colinear e  $p_i$  e  $p_j$  sejam geradores consecutivos da fronteira do Fecho Convexo ou  $CH(P)$ .

- c.3. Suponha-se que  $p_i$  e  $p_j$  formem uma extremidade de Voronoi  $e(p_i, p_j)$ . Então esta extremidade é um segmento de reta finito se e somente se  $P$  for não colinear e ao menos um dos  $p_i, p_j$  esteja no interior de  $CH(P)$ .
- d) O ponto gerador mais próximo de  $p_i$  gera uma extremidade de Voronoi de  $V(p_i)$ ;
- e) O ponto gerador mais próximo de  $p_i$  existe nos geradores cujos polígonos de Voronoi compartilham as extremidades de Voronoi de  $V(p_i)$ ;
- f) O gerador  $p_i$  é o ponto gerador mais próximo do ponto  $p$  se e somente se  $V(p_i)$  contém  $p$ ;
- g) Para todo vértice de Voronoi,  $q_i \in Q$ , em um diagrama de Voronoi, existe um círculo vazio único  $C_i$  centrado em  $q_i$  que passa por três ou mais geradores. Através da suposição da não degeneração,  $C_i$  passa por exatamente três geradores;
- h) O círculo  $C_i$  na descrito na propriedade anterior é o maior círculo vazio entre os círculos vazios centrados no vértice  $q_i$  de Voronoi;
- i) Deixe  $n$ ,  $n_e$  e  $n_v$  serem: o número de geradores, as arestas de Voronoi e os vértices de Voronoi de um diagrama de Voronoi em  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente ( $2 \leq n < \infty$ ). Então  $n_v - n_e + n = 1$ ;
- j) Deixe  $n_k$  ser o número de faces  $k$ -dimensional de Voronoi em um diagrama de Voronoi  $m$ -dimensional. Então,

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k n_k = (-1)^m \quad (3.8)$$



- k) Deixe  $n$ ,  $n_e$  e  $n_v$  serem: o número de geradores, as arestas de Voronoi e os vértices de Voronoi, respectivamente, de um diagrama de Voronoi em  $\mathbb{R}^2$ , e assume-se que  $3 \leq n < \infty$ . Então

$$n_e \leq 3n - 6 \quad (3.9)$$

$$n_v \leq 2n - 5 \quad (3.10)$$

- l) Deixe  $n$ ,  $n_e$ ,  $n_v$  e  $n_c$  serem: o número de polígonos de Voronoi, as fronteiras de Voronoi, os vértices de Voronoi e os polígonos infinitos de Voronoi de um diagrama  $V(P)$  de Voronoi, respectivamente, onde  $3 \leq n < \infty$  e  $p$  satisfaz a hipótese da não colinearidade. Então as seguintes relações são válidas:

$$n_v \geq \frac{1}{2}(n - n_c) + 1 \quad (3.11)$$

$$n_e \geq 3n_v + n_c - 3 \quad (3.12)$$

- m) O número comum de fronteiras de Voronoi de um polígono de Voronoi não excede seis;
- n) Uma tecelagem no plano que consiste em polígonos convexos cujos vértices são em número de três é um diagrama de Voronoi se e somente se  $p_{i1} = p_{i2} = \dots = p_{ik}$ , assegurado para  $i \in I_{nv}$ , onde  $p_{ij}$  é definido como os pontos de intersecção em  $S$ ;

### 3.5.2 Triangulação de Delaunay

Apesar de não fazer parte específica do escopo deste trabalho, serão apresentadas a seguir algumas propriedades da Triangulação de Delaunay ( $Del(P)$ ):

- a)  $Del(P)$  é o dual com arestas retilíneas do Diagrama de Voronoi  $V(P)$ ;

- b)  $Del(P)$  é uma triangulação se nenhum grupo de 4 pontos forem co-circulares.  
Cada face é um triângulo (teorema de Delaunay);
- c) Cada triângulo de  $Del(P)$  corresponde a um vértice de  $V(P)$ ;
- d) Cada aresta de  $Del(P)$  corresponde a uma aresta de  $V(P)$ ;
- e) Cada vértice de  $Del(P)$  corresponde a um polígono (face) de  $V(P)$ ;
- f) A fronteira de  $Del(P)$  é o fecho convexo dos centróides;
- g) O interior de cada triângulo (face) de  $Del(P)$  não contém centróides.

### 3.6 Generalizações do Diagrama de Voronoi

#### 3.6.1 Diagrama de Voronoi Ponderado

No diagrama normal de Voronoi assume-se naturalmente que os geradores são indiferentes entre si, ou seja, independentemente da localização e que cada ponto gerador tem o mesmo peso. Em algumas aplicações práticas, porém, esta suposição pode não ser a melhor. Em geral, é mais apropriado assumir que os pontos geradores tenham pesos diferentes que reflitam as suas propriedades variáveis, tais como, o tamanho da população de um povoado, o número de funções em um *shopping center*, a quantidade de emissões de um poluente, o número de pessoas atendidas por uma escola, e assim sucessivamente. Esta seção mostra uma parte da família do Diagrama de Voronoi que, generalizados, levam em conta estes pesos diferentes em termos de “distância com peso”  $d_w(p, p_i)$ .

Considere-se um conjunto de pontos distintos:

$$P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset R^m \quad (2 \leq n < \infty) \quad (A=P, S=R^m) \quad (3.13)$$

e determine-se um peso a cada  $p_i$  que se relaciona a alguma propriedade variável do fenômeno a ser estudado. Este peso será representado por um conjunto de parâmetros,  $W_i = \{w_{i1}, \dots, w_{in}\}$  (se  $n_w=1$ , é escrito  $w_i$  para  $W_i$ ). Com este peso é definida uma distância,  $d_w(p, p_i)$  de  $p$  para  $p_i$ , chamada distância com peso que será especificada mais adiante. A região de domínio de  $p_i$  sobre  $p_j$  com a distância com peso é escrita como:

$$\text{Dom}(p_i, p_j) = \{p \mid d_w(p, p_i) \leq d_w(p, p_j)\} \quad j \neq i \quad (3.14)$$

$$V(p_i) = \bigcap_{i \in I_n \setminus \{i\}} \text{Dom}(p_i, p_j) \quad (3.15)$$

$$V(P, d_w, R_m) = V_w = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}. \quad (3.16)$$

Se a região de domínio dada pela equação acima é bem comportada, o conjunto  $V_w$  resulta num diagrama generalizado de Voronoi. O nome dado a ele é *Diagrama de Voronoi por Pesos* generalizado por  $P$  com peso  $\{W_1, \dots, W_n\}$ , e ao conjunto  $V(p_i)$  é dada a designação de *Região de Voronoi por Pesos* associada ao  $p_i$ .

### 3.6.2 Diagrama de Voronoi Ponderado por Multiplicação

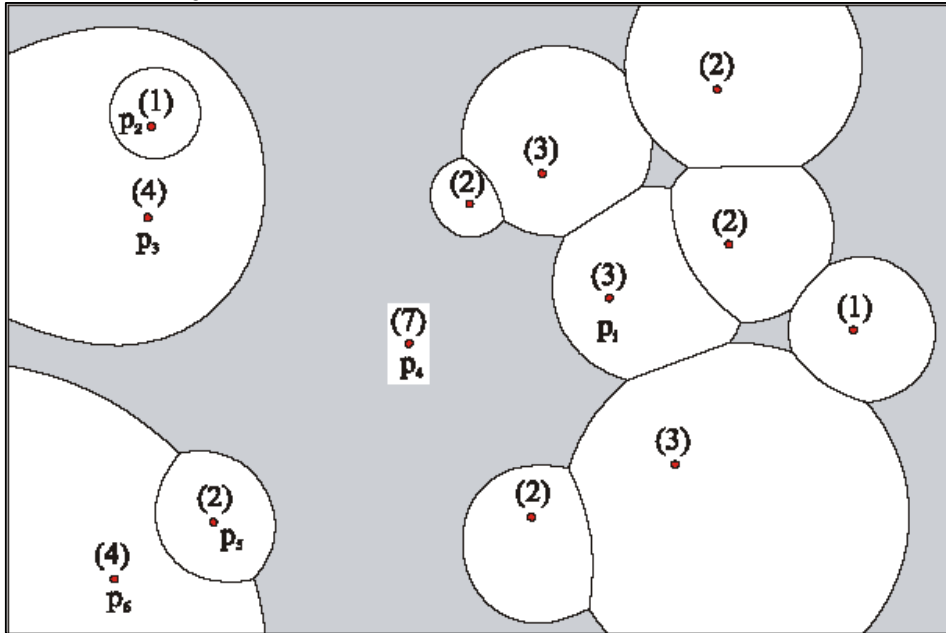
Este tipo de diagrama de Voronoi por pesos é caracterizado pela distância com peso dada por:

$$d_{mw}(p, p_i) = \frac{1}{w_i} \|x - x_i\|, \quad w_i > 0 \quad (3.17)$$

Essa distância é chamada de *distância multiplicativa por pesos* ou simplesmente de *MW-distância*. A região de domínio com relação a MW-distância é escrita como:

$$\text{Dom}(p_i, p_j) = \left\{x : \frac{1}{w_i} \|x - x_i\| \leq \frac{1}{w_j} \|x - x_j\|\right\}, \quad i \neq j \quad (3.18)$$

FIGURA 3.12: DIAGRAMA DE VORONOI PONDERADO POR MULTIPLICAÇÃO



FONTE: Okabe *et. al.* (2000, p. 121)

O Diagrama de Voronoi Ponderado por Multiplicação tem as seguintes propriedades:

- a) Uma região MW-Voronoi é um conjunto não vazio; não precisa ser convexo, ou conectado; e pode ter buraco(s). Uma região MW-Voronoi  $V(p_i)$  é convexa se e somente se os pesos das regiões MW-Voronoi adjacentes não forem menores que  $w_i$ ;
- b) Deixe  $w_{max} = \max_j \{w_j, j \in I_n\}$  e  $P_{max}$  ser o subconjunto de  $P$  dado por  $P_{max} = \{p_j / w_j = w_{max}\}$ . Uma região MW-Voronoi  $V(p_i)$  é infinita se e somente se  $p_i \in P_{max}$  e  $p_i$  estiver sobre a fronteira de  $CH(P_{max})$ . Se o gerador com o peso máximo é único, somente uma região MW-Voronoi é infinita;
- c) Duas regiões MW-Voronoi podem compartilhar arestas desconectadas. Uma fronteira é um arco circular se e somente se os pesos das regiões MW-Voronoi que compartilham a fronteira forem diferentes; uma fronteira é uma linha reta

se e somente se os pesos das regiões MW-Voronoi que compartilham a fronteira forem iguais.

### 3.6.3 Diagrama de Voronoi Ponderado por Adição

Um outro tipo de Diagrama de Voronoi ponderado é o caracterizado pela equação:

$$d_{aw}(p, p_i) = \|x - x_i\| - w_i \quad (3.19)$$

Ela é chamada *Distância Aditiva por Peso*, ou simplesmente *AW-Distance*. A região de domínio de  $p_i$  sobre  $p_j$  com AW-Distance é escrita como:

$$Dom(p_i, p_j) = \{x : \|x - x_i\| - \|x - x_j\| \leq w_i - w_j\}, i \neq j \quad (3.20)$$

A forma da região de dominação varia de acordo com o valor parâmetro  $\alpha = \|x_i - x_j\|$  e  $\beta = w_i - w_j$ . Na figura 3.13 abaixo tem-se um exemplo de um Diagrama de Voronoi Aditivo por Peso.

O Diagrama de Voronoi Ponderado por Adição tem as seguintes propriedades:

- a) O conjunto  $V(pi)$  é vazio se e somente se

$$\min_{j, j \neq i} \{\|x - x_i\| - w_j, j \in I_n\} < -w_i \quad (3.21)$$

- b) O conjunto  $V(pi)$  é uma semi-reta ou um segmento de reta se e somente se:

$$\min_{j, j \neq i} \{\|x - x_i\| - w_j, j \in I_n\} = -w_i \quad (3.22)$$

- c) O conjunto  $V(pi)$  tem área positiva se e somente se

$$\min_{j, j \neq i} \{\|x - x_i\| - w_j, j \in I_n\} > -w_i \quad (3.23)$$

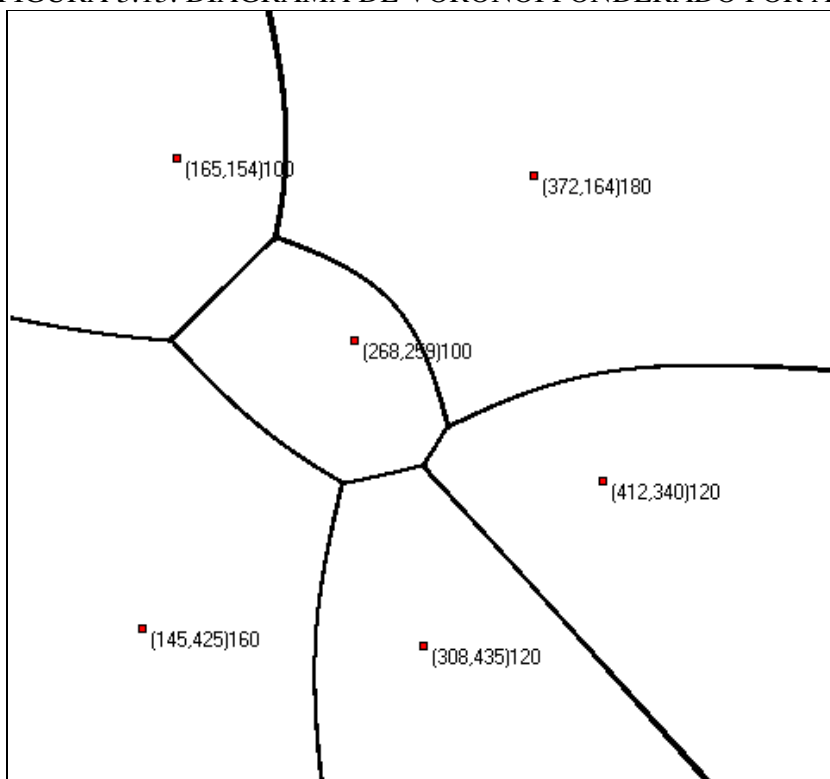
- d) Uma aresta de uma região de Voronoi Ponderada Aditiva ou é um arco hiperbólico ou um segmento de reta;

- e) Se apenas um peso,  $w_i$ , for diferente dos outros e a relação descrita no item 3.23 for verdadeira, então existe pelo menos uma região de Voronoi Aditiva por Pesos que será não convexa. Toda região não convexa será “Star-shaped”(ver figura 3.5).

### 3.7 Considerações Finais

Neste capítulo foi possível observar alguns princípios e conceitos relativos ao Diagrama de Voronoi e à Triangulação de Delaunay. Ambos são conceitos muito importantes na geometria computacional e possuem inúmeras utilidades nos mais diversos campos da ciência.

FIGURA 3.13: DIAGRAMA DE VORONOI PONDERADO POR ADIÇÃO



FONTE: Elaboração do autor. Entre parênteses estão as coordenadas dos pontos e após estão os pesos relativos a cada um deles.

No tocante ao planejamento urbano, o Diagrama de Voronoi possui uma grande utilidade, pois pode ser aplicado nos seus vários tipos para resolver uma variedade de problemas.

Foram descritos algumas propriedades do Diagrama de Voronoi e da Triangulação de Delaunay, bem como alguns algoritmos para a implementação dos mesmos. Não houve a intenção de aprofundamento nos conceitos apresentados, pois não era esse o escopo do trabalho, porém são fundamentos importantes a serem conhecidos e que servem de base para trabalhos futuros.

Os algoritmos para a construção dos diagramas de Voronoi descritos neste capítulo podem ser encontrados em Okabe *et. al.* (2000).

No próximo capítulo serão discutidos conceitos de Programação Não-linear e os métodos para a solução de problemas relativos a eles.

## 4 PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

Este capítulo tem por finalidade mostrar os conceitos básicos de programação não linear que serão importantes para a solução do problema.

### 4.1 O Problema da Programação Não Linear

Os problemas de localização tratados neste estudo se enquadram nos tipos de problemas de otimização matemática denominados “Problemas de Programação Não-Linear”.

Nesta seção serão descritos os conceitos básicos da Programação Não Linear. Para maiores detalhes, consultar Luenberger (2005) e Frielander (1994).

O problema de programação não-linear é definido matematicamente como:

$$\min_{x_1, \dots, x_n} f(x_1, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

Sujeito a

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad i=1, \dots, m_1 \quad (4.2)$$

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i=m_1+1, m_1 + m_2 \quad (4.3)$$

A primeira equação acima é a função objetivo. As equações  $g_i$  são chamadas restrições. Se  $m_1+m_2 = 0$  então o problema é denominado “Problema de Programação Não-linear Sem Restrições”. Porém, se  $m_1+m_2 \geq 1$  então o problema é denominado “Problema de Programação Não-linear Com Restrições”. Como maximizar  $f(x)$  é o mesmo que minimizar  $-f(x)$  então, por simplicidade, consideremos apenas os problemas de minimização. O mesmo raciocínio se aplica às restrições: como  $g(x) \geq 0$  é equivalente a  $-g(x) \leq 0$ , serão apenas consideradas as relações  $=$  e  $\leq$  nas equações de restrições. Por simplificação, utilizamos a notação  $f(x)$  e  $g(x)$  onde  $x^T=(x_1, \dots, x_n)$  é um vetor n-dimensional no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .



A região  $S \subset \mathbb{R}^n$  onde as restrições são atendidas é chamada de “Região Factível” ou “Região de Viabilidade”. No caso das restrições apresentadas acima a região  $S$  é dada por:

$$S = \{x \mid g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m_1; g_i(x) = 0, i = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2\} \quad (4.4)$$

Considere-se um ponto  $x^* \in S$ . Suponha-se que exista  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) \geq f(x^*)$  para todo  $x \in S$  tal que  $\|x - x^*\| < \varepsilon$ . Pode-se dizer então que  $x^*$  é um mínimo local de  $f$ .

Se existe um ponto  $x^* \in S$  tal que  $f(x) \geq f(x^*)$  para todo  $x \in S$ , então este ponto  $x^*$  é um mínimo global de  $f$ . E se  $f(x) > f(x^*)$  para todo  $x \in S$  e  $x \neq x^*$ , então  $x^*$  é um mínimo global estrito em  $S$ .

#### 4.1.1 Condições de Otimalidade

Para complementar o estudo, é necessário analisar as condições de otimalidade para problemas de minimização sem restrições, por ser o caso a ser resolvido neste trabalho.

Seja  $C^k$  o conjunto de funções  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tais que todas as derivadas de ordem menor ou igual a  $k$  são contínuas.

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1$ . Se  $x^*$  é um mínimo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ , então  $f'(x^*) = 0$ .

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2$ . Se  $x^*$  é um mínimo local de  $f$  em  $\mathbb{R}$ , então  $f'(x^*) = 0$  e  $f''(x^*) > 0$ .

São condições necessárias de primeira ordem:

Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1$ . Se  $x^*$  é um mínimo local de  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\nabla f(x^*) = 0$ .

Onde:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

São condições necessárias de segunda ordem:

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$ . Se  $x^*$  é um mínimo local de  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\nabla f(x^*) = 0$  e  $\nabla^2 f(x^*)$  é semi-definida positiva, ou seja,  $x^t \nabla^2 f(x^*) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Onde  $\nabla^2 f(x)$  é chamada de Matriz Hessiana de  $f$  e é definida por:

$$\nabla^2 f(x) = \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (4.6)$$

São condições suficientes de segunda ordem:

Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2$ . Se  $x^* \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla f(x^*) = 0$  e  $\nabla^2 f(x^*) > 0$ , então  $x^*$  é um mínimo local estrito de  $f$  em  $\mathbb{R}^n$ . (Frielander, 1994)

#### 4.1.2 Definição de Convexidade

Após reconhecer um mínimo local não é muito fácil saber se ele é também um mínimo global. Uma das maneiras mais simples é através de uma característica especial da função analisada: a sua convexidade.

Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é convexo se e somente se para todo o  $x, y \in S$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  se verifica que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$  (Frielander, 1994).

Uma função  $f$  definida em um conjunto convexo  $S$  é convexa se e somente se para todo  $x, y \in S$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  se verifica que  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

Para todo  $\lambda \in (0, 1)$  e  $x \neq y$  tem-se que  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$  então pode-se dizer que  $f$  é estritamente convexa.

### 4.1.3 Funções Convexas Diferenciáveis

A seguir serão enumeradas algumas características das funções convexas que são diferenciáveis.

Seja  $f \in C^1$  e seja  $S$  também convexo. A função  $f$  é convexa em  $S$  se e somente se para todo  $x, y \in S$  tem-se que

$$f(y) \geq f(x) + \nabla' f(x)(y-x). \quad (4.7)$$

Seja  $f \in C^2$  e seja  $S \subset \mathbb{R}^n$  e convexo tal que  $\overset{\circ}{S} \neq \emptyset$ , onde  $\overset{\circ}{S}$  é o conjunto interior de  $S$ . Então  $f$  é convexa se e somente se  $\nabla^2 f(x) \geq 0$  para todo  $x \in S$ . (Frielander, 1994)

Seja  $f$  uma função convexa definida em  $S$  convexo. Então:

- a) O conjunto  $\Gamma \subset S$  onde  $f$  tem o seu valor mínimo é convexo;
- b) Qualquer mínimo local de  $f$  é um mínimo global de  $f$ .

Seja  $f \in C^1$  uma função convexa e definida em um conjunto  $S$  também convexo. Se existe  $x^* \in S$  tal que para todo  $y \in S$  tem-se que  $\nabla' f(x^*)(y-x^*) \geq 0$ , então  $x^*$  é um mínimo global de  $f$  em  $S$ .

## 4.2 Métodos de Solução de Problemas de Programação Não Linear

Problemas de programação não-linear com funções não convexas costumam ser de difícil solução. Para resolver estes problemas existem vários métodos, dentre os quais o método do Gradiente, o método do Gradiente Conjugado e o método de Davidon-Fletcher-Powell, conhecido como método DFP (Luenberger (2005) e Press *et. al.*(2002)).

Existem também os critérios para o cálculo do tamanho do passo. As regras para o cálculo do tamanho do passo implementadas são as de Wolfe, Goldstein e Armijo, descritas em Luenberger (2005).

Todos esses métodos são descritos a seguir.

### 4.2.1 Método do Gradiente

O método do Gradiente, consiste em, a partir de um ponto inicial, realizar um deslocamento em direção a um outro ponto onde o valor da função seja menor que o inicial. Esse procedimento é repetido até que uma condição de parada seja atingida. O segredo do processo está em escolher  $d^k$  na direção  $-\nabla f(x^k)$  e, a seguir, o tamanho do deslocamento a ser efetuado. A seguir descreve-se um algoritmo para o método.

Como já foi observado anteriormente, se existe  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\nabla f(x) \neq 0$  então pode-se dizer que em toda a vizinhança de  $x$  existe um ponto  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(z) < f(x)$ .

O algoritmo que representa o método da descida é o seguinte:

- a) Escolha um ponto inicial  $x^k \in \mathbb{R}^n$  sendo  $k = 1$
- b) Determine a direção  $d^k$  no ponto  $x^k$ ;
- c) Determine o tamanho do deslocamento  $\alpha^k$  no ponto  $x^k$  e na direção  $d^k$ ;
- d) Faça  $x^{k+1} \leftarrow x^k + \alpha^k d^k$ ;
- e) Se  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon \approx 0$ , então  $x^{k+1}$  é o ponto de mínimo, senão faça  $k \leftarrow k + 1$  e retorne ao passo  $b$ .

Para a execução do passo  $b$ , ou seja, a escolha da direção a ser seguida ( $d^k$ ), escolhe-se a direção do gradiente. Ou seja:

$$d^k = -\nabla f(x^k) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_1^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x^k)}{\partial x_n^k} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Para o cálculo de  $\alpha^k$  no passo  $c$  utilizamos o mesmo método descrito na seção 4.2.4.

Uma das características desse método é a sua baixa velocidade de convergência. Para sanar esse problema outros métodos foram desenvolvidos. Alguns deles são descritos a seguir.

#### 4.2.2 Método das Direções Conjugadas (Gradiente Conjugado)

O método das Direções Conjugadas foi criado visando à resolução de problemas quadráticos. As técnicas desenvolvidas funcionaram tão bem que foram estendidas para problemas genéricos. Um dos métodos mais populares é o método do Gradiente Conjugado. Esse método tem provado ser extremamente efetivo na solução de problemas de programação não-linear e é considerado um dos melhores métodos disponíveis no momento (Luenberger (2005)). Ele consiste na seleção de sucessivos vetores direção como uma versão conjugada dos sucessivos gradientes encontrados ao longo do processo de solução.

Cada nova direção do Gradiente Conjugado é uma combinação linear de resíduo corrente com a direção anterior, ou seja, ele consiste em um método iterativo de busca do mínimo local da função, gerando aproximações para a solução e, em cada iteração do método, dois produtos internos são realizados para que se calculem dois escalares definidos de forma que a seqüência obedeça a condições de ortogonalidade.

Modificações, como forma de melhorar a velocidade de convergência no método do gradiente conjugado, são propostas por Fletcher e Reeves (1964). O seu algoritmo é muito parecido com o anterior, com apenas algumas modificações. Ele é descrito a seguir:

- a) Escolha um ponto inicial  $x^k \in \mathbb{R}^n$ ;  $k=1$  e determine o número total de iterações  $n$  desejado;
- b) Determine a direção  $d^k$  no ponto  $x^k$ ;
- c) Determine o tamanho do deslocamento  $\alpha^k$  no ponto  $x^k$  e na direção  $d^k$ ;
- d) Faça  $x^{k+1} \leftarrow x^k + \alpha^k d^k$ ;

e) Se  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon \approx 0$ , então  $x^{k+1}$  é o ponto de mínimo, senão se  $k \leq n$  então

$k \leftarrow k + 1$  e retorne ao passo  $b$ .

Para o cálculo de  $\alpha^k$  no passo  $c$  utiliza-se o mesmo método descrito na seção 4.2.4. Para a execução do passo  $b$  pela primeira vez, ou seja, a escolha da direção a ser seguida ( $d^k$ ), escolhemos a direção do gradiente, ou seja, de maneira idêntica ao algoritmo anterior. Para as execuções subsequentes, utiliza-se o seguinte método:

$$d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \beta^k d^k \quad (4.9)$$

Onde  $\beta^k$  é calculado da seguinte maneira:

$$\beta^k = \frac{-\nabla f'(x^{k+1}) \nabla^2 f(x^k) d^k}{d^{k'} \nabla^2 f(x^k) d^k} \quad (4.10)$$

Este método é um pouco mais complicado que o método da descida, porém converge com um número finito de iterações.

### 4.2.3 Método Davidon-Fletcher-Powell

É um dos métodos chamado Quase-Newton que tratam os inconvenientes relacionados à possibilidade de singularidade da matriz Hessiana que impossibilitam o cálculo de sua inversa. Tais inconvenientes são amenizados quando são utilizados esses métodos. Eles buscam estimar um valor aproximado para a matriz Hessiana com base em informações da derivada de primeira ordem.

O método foi inicialmente proposto por Davidon (1959), mas desenvolvido por Fletcher, em 1963. O método de Davidon-Fletcher-Powell, conhecido como método DFP (Luenberger (2005); Press *et. al.* (2002)), determina uma aproximação para a matriz Hessiana, através da seguinte expressão:

$$B^{k+1} = B^k + \frac{\delta^k \delta^{k'} }{\delta^{k'} \gamma^k} - \frac{B^k \gamma^k \gamma^{k'} B^k}{\gamma^{k'} B^k \gamma^k} \quad (4.11)$$

Onde

$$\delta^k = x^{k+1} - x^k \quad (4.12)$$

$$\gamma^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) \quad (4.13)$$

O algoritmo é o seguinte:

- a) Escolha um ponto inicial  $x^k \in \mathbb{R}^n$ ;  $k=1$  e determine o número total de iterações  $n$  desejado;
- b)  $B^k = I$  (Matriz Identidade);
- c) Determine a direção  $d^k = -B^k \nabla f(x^k)$ ;
- d) Faça  $x^{k+1} \leftarrow x^k + \alpha^k d^k$ , tal que  $f(x^k + \alpha^k d^k)$  seja mínimo para  $\alpha > 0$ ;
- e) Calcule  $B^{k+1}$  de acordo com a equação 4.11;
- f) Se  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon \approx 0$ , então  $x^{k+1}$  é o ponto de mínimo, senão se  $k \leq n$  então  $k \leftarrow k+1$  e retorne ao passo c.

Para o cálculo de  $\alpha^k$  no passo  $d$  utilizamos o método descrito na próxima seção.

#### 4.2.4 Determinação do Tamanho do Deslocamento

Após determinar a direção do deslocamento, falta determinar o tamanho dele (passo  $c$  dos algoritmos do Gradiente e do Gradiente Conjugado e passo  $d$  do algoritmo Davidon-Fletcher-Powell). Os métodos utilizados neste trabalho são os que utilizam as regras de Armijo, Goldstein e Wolfe conforme descrito em Luenberger (2005).

A idéia essencial da regra de Armijo é que ela deve primeiramente garantir que o valor de  $\alpha$  selecionado não seja muito grande, para em seguida garantir que também não seja demasiadamente pequeno.

Seja  $\alpha$  a distância de  $x^k$  ao longo da linha  $L^k$  na direção  $d^k$ , então

$$h^k(\alpha) = f(x^k + \alpha d^k) \quad (4.14)$$

A regra de Armijo é implementada considerando a função  $h^k(0) + \varepsilon h^{*k}(0)\alpha$  para um valor fixo de  $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ . Um valor de  $\alpha$  é considerado não muito grande se o valor da função correspondente obedece a seguinte condição:

$$h^k(\alpha) \leq h^k(0) + \varepsilon h^{*k}(0)\alpha \quad (4.15)$$

Para assegurar que  $\alpha$  não é demasiadamente pequeno, um valor  $\eta > 1$  é selecionado, e o valor de  $\alpha$  é considerado não demasiadamente pequeno se obedecer a seguinte condição:

$$h^k(\eta\alpha) > h^k(0) + \varepsilon h^{*k}(0)\eta\alpha \quad (4.16)$$

Isto significa que se  $\alpha$  é aumentado por um fator  $\eta$ , ele não atenderá a condição 4.15.

Na prática, o algoritmo para o teste de Armijo, descrito em Luenberger (2005) é o seguinte:

- a) Escolha um ponto inicial  $\alpha^0 > 0$ ;
- b) Se o valor de  $\alpha$  escolhido satisfaz a condição 4.15, então multiplique o valor de  $\alpha$  por  $\eta$  até a condição 4.15 não estiver mais satisfeita. O penúltimo valor encontrado é selecionado;
- c) Se o valor de  $\alpha$  escolhido não satisfaz a condição 4.15, então divida o valor de  $\alpha$  por  $\eta$  até que a condição 4.15 esteja satisfeita. O último valor encontrado é selecionado;

Outro teste bastante utilizado é o teste de Goldstein. Ele está descrito a seguir conforme Okabe *et. al.* (2000).

Seja  $\alpha$  a distância de  $x^k$  ao longo da linha  $L^k$  na direção  $d^k$ , então



$$h^k(\alpha) = f(x^k + \alpha d^k) \quad (4.17)$$

A linha tangencial a  $\beta = h^k(\alpha)$  quando  $\alpha = 0$  é dada por

$$\tau^k(\alpha) = h^k(0) + \frac{\partial h^k(0)}{\partial \alpha} \alpha \quad (4.18)$$

Agora consideremos duas linhas passando pelo ponto  $(0, h^k(0))$  cujas inclinações são um pouco menores que a da equação acima. Essas equações são escritas assim:

$$\eta_i^k(\alpha) = h^k(0) + \mu_i \frac{\partial h^k(0)}{\partial \alpha} \alpha; \quad i = 1, 2 \quad (4.19)$$

onde  $0 < \mu_1 \leq \mu_2 < 1$ .

O algoritmo para determinar o tamanho do deslocamento  $\alpha^k$  segundo a regra de Goldstein é o seguinte:

- a) Escolha um ponto inicial  $\alpha^0 > 0$  sendo  $i \leftarrow 0$ ;
- b)  $\alpha^i \leftarrow (i+1)\alpha^0$ ;
- c) Se  $\eta_2^k(\alpha^i) \leq h^k(\alpha^i)$  então vá para o passo  $d$ ; senão  $i \leftarrow i+1$  e vá para o passo  $b$ ;
- d) Se  $h^k(\alpha^i) \leq \eta_1^k(\alpha^i)$ , então  $\alpha^i$  é o melhor tamanho; senão  $\alpha^i \leftarrow \frac{(\alpha^i + \alpha^{i-1})}{2}$  e vá para o passo  $c$ ;

O teste de Wolfe é utilizado quando a derivada da função objetivo, bem como os seus valores, pode ser facilmente calculada. Um deslocamento  $\alpha^k$  satisfaz as condições de Wolfe se ele satisfaz as seguintes inequações:

$$h^k(\alpha) = f(x^k + \alpha d^k) \quad (4.20)$$

$$h^k(\alpha) \leq h^k(0) + \eta_1 \alpha h'^k(0) \quad (4.21)$$

$$d^{k'} h'(\alpha) \geq \eta_2 d^{k'} h'(0) \quad (4.22)$$

Onde  $0 < \eta_1 < \eta_2 < 1$ .

#### 4.2.5 Método Simulated Annealing (Metrópolis)

O método chamado Metrópolis ou “*Simulated Annealing*” consiste em uma técnica de busca local probabilística que aceita movimentos de piora para escapar de ótimos locais (Dowsland (1993)). Ele é fundamentado em uma analogia com a termodinâmica, simulando o resfriamento de um conjunto de átomos aquecidos, operação essa que é conhecida como recozimento.

FIGURA 4.1: ALGORITMO *SIMULATED ANNEALING*

```

 $s_0 \leftarrow$  solução inicial;
 $T_0 \leftarrow$  temperatura inicial;
 $\alpha \leftarrow$  taxa de resfriamento;
SAmax  $\leftarrow$  número máximo de iterações para se atingir o equilíbrio;
 $s \leftarrow s_0$ ;
 $s' \leftarrow s$ ;
 $T \leftarrow T_0$ ;
IterT  $\leftarrow$  0;      {Número de iterações na temperatura T}
Enquanto ( $T > 0$ ) faça
  Enquanto (IterT < SAmax) faça
    IterT  $\leftarrow$  IterT + 1;
     $s' \leftarrow$  um vizinho qualquer de  $s \in N(s)$ ;
     $\Delta = f(s') - f(s)$ ;
    Se ( $\Delta > 0$ )
      então
         $s \leftarrow s'$ ;
        Se  $f(s') > f(s^*)$  então  $s^* \leftarrow s'$ ;
      senão
         $x \leftarrow$  um valor aleatório no intervalo [0,1];
        Se  $x < e^{\Delta/T}$  então  $s \leftarrow s'$ ;
    fim-se;
  fim-enquanto;
   $T \leftarrow \alpha \times T$ ;
  IterT  $\leftarrow$  0;
fim-enquanto;
Retorne  $s^*$ ;

```

FONTE: Dowsland (1993) e Press *et. al.* (2002)

Essa técnica começa com uma busca a partir de uma solução inicial qualquer, cujo procedimento principal consiste em uma repetição que gera, em cada iteração, um único

vizinho  $s'$  da solução corrente  $s$ . Se este vizinho for melhor que o original ele é aceito e substitui a solução atual. Se ele for pior por uma quantidade  $\Delta$ , ele é aceito com uma probabilidade  $e^{-\Delta/T}$ , onde um parâmetro chamado de Temperatura ( $T$ ) decresce gradualmente conforme o progresso do algoritmo. Esse processo é repetido até que a temperatura ( $T$ ) seja tão pequena que mais nenhum movimento seja aceito. A melhor solução encontrada durante a busca é tomada como uma boa aproximação para a solução ótima.

O pseudocódigo do algoritmo é apresentado na figura 4.1. Detalhes adicionais desse algoritmo podem ser encontrados em Dowsland (1993) e Press *et. al.* (2002).

O método “*Simulated Annealing*” é muito utilizado em problemas de grande magnitude, especialmente aqueles em que o mínimo global está escondido entre vários mínimos locais (Press *et. al.* (2002)).

#### 4.2.6 Método Numérico para o Cálculo da Derivada

Encontrar a derivada de uma função objetivo nem sempre é trivial. Para evitar esse tipo de problema, optou-se por calcular a derivada da função numericamente, através de um algoritmo desenvolvido por Ridders, descrito em Press *et. al.* (2002).

Partindo da definição da derivada, que é o limite da equação 4.23 quando  $h \rightarrow 0$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.23)$$

Tem-se uma forma simétrica para minimizar o erro, que é:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (4.24)$$

FIGURA 4.2: ALGORITMO PARA CÁLCULO NUMÉRICO DA DERIVADA

```

Início
  hh ← h;
  A[0,0] ← (f(x+hh) – f(x-hh)) / (2*h);
  erro ← infinito;
  Para i=1 até N faça {N representa o tamanho da matriz de resultados}
    hh ← hh/ p { p representa o passo de redução de h};
    A[0,i] ← (f(x+hh) – f(x-hh)) / (2*h);
    fac ← hh * hh;
    Para j=1 até i faça
      A[j,i] ← ( A[j-1,i] * fac – A[j-1,i-1]) / (fac-1.0);
      fac ← fac * (hh * hh);
      erro_aux ← Max( Abs(A[j,i]-A[j-1,i]), Abs(A[j,i]-A[j-1,i-1]));
      Se erro_aux ≤ erro então
        erro ← erro_aux
        Resp ← A[j,i];
      fim-se;
    fim-para;
  fim-para;
  Retorne Resp;

```

FONTE: Press *et. al.* (2002)

Partindo da equação 4.24 como ponto inicial, temos na figura 4.2 o algoritmo para o cálculo numérico da derivada.

### 4.3 Considerações Finais

Neste capítulo foram descritos os conceitos de programação não-linear e os métodos que serão utilizados para resolver esses problemas.

No próximo capítulo será descrito o problema que é o objeto deste trabalho.

## **5 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA**

Este trabalho visa otimizar o espaçamento das paradas de transporte coletivo com o objetivo de reduzir o tempo médio de viagem dos passageiros. A idéia principal é utilizar conceitos de Diagrama de Voronoi e de Programação Não-linear para encontrar o espaçamento ideal entre as paradas de transporte coletivo numa região urbana considerando a densidade demográfica da região como parâmetro para a otimização. O objetivo principal será minimizar o tempo médio de viagem dos usuários do sistema.

A idéia deste trabalho é utilizar o tempo de viagem dos usuários do sistema como parâmetro para de estabelecer um padrão de espaçamento entre as paradas, uma vez que a maioria das políticas de espaçamento existentes não possui um embasamento bem definido.

As duas linhas de ônibus que serão utilizadas para testar o modelo proposto possuem características diferentes. A primeira é uma linha hipotética, na zona oeste de São Paulo, que partiria do bairro da Lapa e alimentaria a estação Fradique Coutinho, na linha 4 do Metrô de São Paulo.

A segunda é uma linha já existente, que liga a região sul do município de São Paulo ao Terminal Parque Dom Pedro II, no centro da cidade.

Elas foram escolhidas por terem as características desejadas para o teste e avaliação do modelo. Essas características serão explicadas a seguir.

### **5.1 Município de São Paulo**

As duas linhas utilizadas neste estudo estão localizadas no município de São Paulo. O município possui, segundo o censo do IBGE de 2000, uma população estimada em 10

milhões, quatrocentos e trinta e quatro mil, duzentos e cinquenta e dois habitantes (10.434.252), distribuídos em uma área de 150.900 hectares, ou 1.509 km<sup>2</sup>. A densidade demográfica do município está descrita na tabela 5.1 com a densidade dos bairros que são atendidos pelas duas linhas. A coluna Linha da tabela informa qual das linhas atende aquele bairro.

A tabela completa pode ser vista no Anexo 5.

**TABELA 5.1: DENSIDADE DEMOGRÁFICA DO MUNICÍPIO DE SÃO PAULO**

<b>Área Total, População Residente e Densidade Demográfica Município de São Paulo e Distritos Municipais Ano de 2000</b>						
<b>Distritos</b>	<b>Linha</b>	<b>População</b>	<b>Área em Hectare</b>	<b>Densidade Populacional</b>		
				<b>Hab/Ha</b>	<b>Hab/m<sup>2</sup></b>	<b>Hab/Km<sup>2</sup></b>
<b>Município de S. Paulo</b>		<b>10.434.252</b>	<b>150.900</b>	<b>69,15</b>	0,0069	6.915
Alto de Pinheiros	1	44.454	770	57,73	0,0058	5.773
Cambuci	2	28.717	390	73,63	0,0074	7.363
Cursino	2	102.089	1.280	79,76	0,0080	7.976
Ipiranga	2	98.863	1.050	94,16	0,0094	9.416
Lapa	1	60.184	1.000	60,18	0,0060	6.018
Liberdade	2	61.875	370	167,23	0,0167	16.723
Perdizes	1	102.445	610	167,94	0,0168	16.794
Pinheiros	1	62.997	800	78,75	0,0079	7.875
República	2	47.718	230	207,47	0,0207	20.747
Sacomã	2	71.179	1.420	182,51	0,0183	18.251
Sé	2	20.115	210	95,79	0,0096	9.579

FONTE: Prefeitura Municipal de São Paulo – IBGE Censos Demográficos 2000.

O mapa do município com as divisões regionais e as subdivisões dos bairros está no Anexo 6.

### 5.1.1 O Transporte Coletivo em São Paulo

O órgão responsável pela supervisão e controle do transporte coletivo na cidade de São Paulo é a São Paulo Transportes S.A. – SPTrans. A SPTrans é oriunda da antiga Companhia Municipal de Transportes Coletivos – CMTC que operava uma frota própria de

veículos na cidade. Hoje a SPTrans apenas administra o sistema de transporte coletivo da cidade, o qual detém cerca de 55% de todas as viagens motorizadas de transporte coletivo do município.

Em 2008 operavam no sistema 16 consórcios – formados por empresas e cooperativas – que são responsáveis por 15 mil veículos para atender 1300 linhas, transportando um total de 6 milhões de passageiros por dia útil.(Fonte: [www.sptrans.com.br](http://www.sptrans.com.br) )

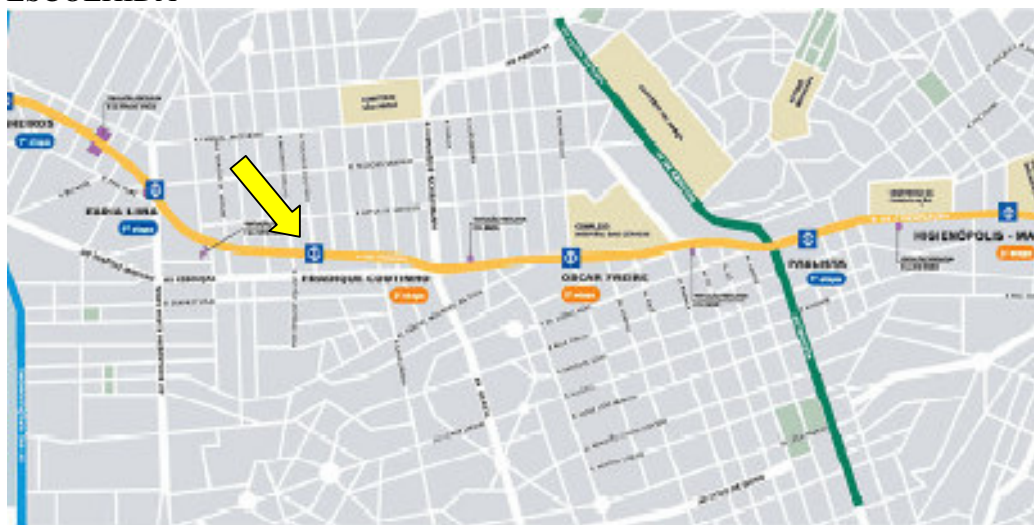
## **5.2 Linha 4 do Metrô de São Paulo**

A linha 4 do Metrô da cidade de São Paulo ligará o bairro da Luz ao bairro de Vila Sônia, na Zona Oeste, passando pela região da Consolação, Avenida Paulista e Pinheiros.

Com extensão de 12,8 quilômetros e 11 estações, a Linha 4-Amarela será implantada em duas etapas:

- a) A primeira prevê a construção e inauguração de seis estações: Butantã, Pinheiros, Faria Lima, Paulista, República e Luz; estrutura das estações intermediárias Fradique Coutinho, Oscar Freire e Higienópolis-Mackenzie; construção e inauguração do pátio de manutenção Vila Sônia.
- b) A segunda prevê o acabamento e a inauguração das estações intermediárias: Fradique Coutinho, Oscar Freire e Higienópolis-Mackenzie; construção e inauguração de duas estações: São Paulo-Morumbi e Vila Sônia. Haverá integração com as linhas 1-Azul, 2-Verde e 3-Vermelha nas estações Luz, Paulista, e República, respectivamente.

FIGURA 5.1: MAPA DA LINHA 4 DO METRO DE SÃO PAULO COM A ESTAÇÃO ESCOLHIDA



FONTE: Companhia do Metropolitano de São Paulo – Metrô.

Esta linha foi escolhida porque está localizada numa área de alta densidade populacional e as estações são separadas numa distância de 1 Km a 1,5 Km aproximadamente.

Para efeito do estudo, analisaremos a Estação Fradique Coutinho, pois ela fica a 1,5 Km de distância das estações próximas a ela e se situa numa área de grande densidade populacional.

As duas linhas que serão objeto deste estudo serão descritas a seguir.

### 5.3 Linha Alimentadora da Linha 4 do Metrô de São Paulo

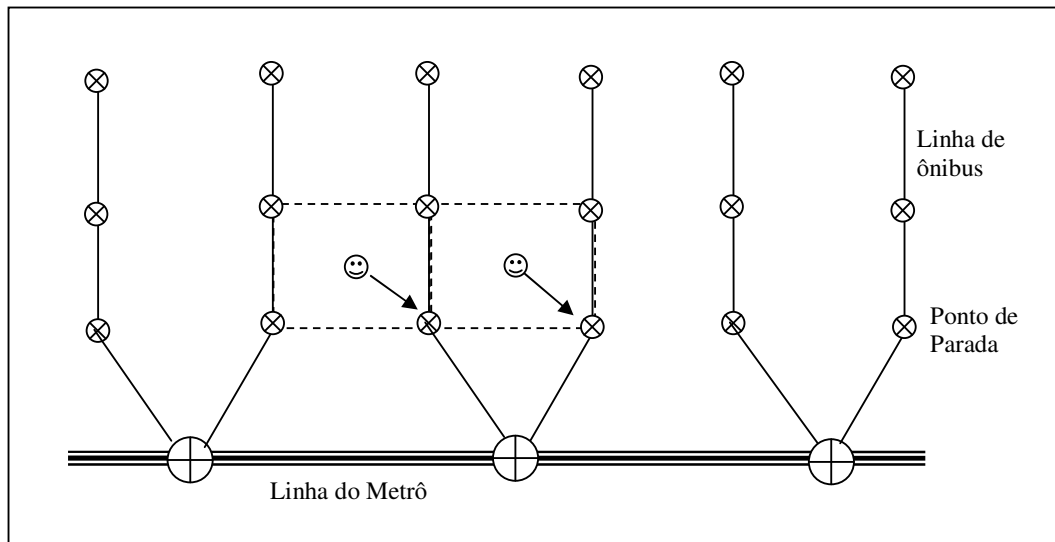
Esta linha foi concebida de maneira a ter um traçado relativamente reto e atravessar vários bairros com diferentes densidades demográficas.

Conforme foi visto no Capítulo 2, a distância máxima que uma pessoa deve se deslocar a pé para pegar um ônibus varia entre 300 e 600m. Portanto, se cada estação desse trecho for alimentada por duas linhas perpendiculares ao sentido da linha do metrô, conforme



está esquematizado na Figura 5.2, a distância máxima que um passageiro deverá percorrer será de 585 metros aproximadamente. Isso se assumirmos que os pontos de parada estarão espaçados em no máximo 500 metros.

FIGURA 5.2: ESQUEMA DAS LINHAS DE ÔNIBUS EM RELAÇÃO À LINHA DO METRÔ.

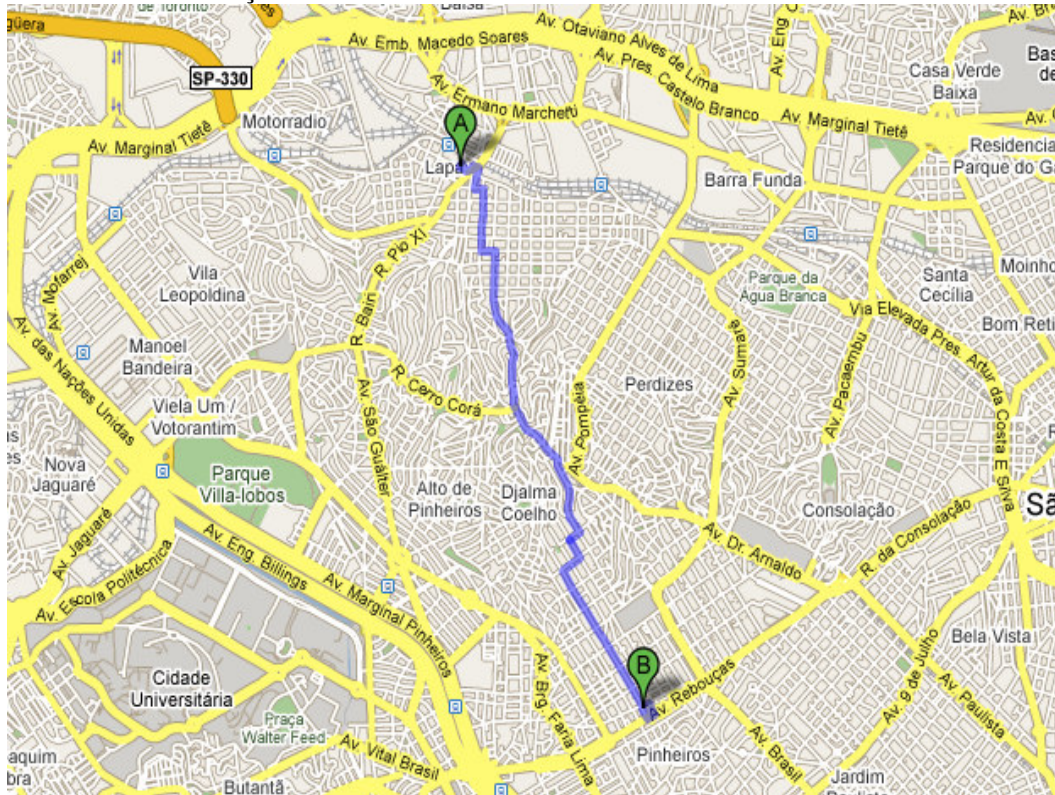


FONTE: Elaboração do autor.

Esse cálculo é feito a partir da Distância Euclidiana medida a partir do centro do retângulo formado pelas quatro paradas mais próximas do usuário até uma delas (Figura 5.2). Essa distância medida é multiplicada por um fator de correção, pois o usuário não poderá se deslocar em linha reta o tempo todo. O fator de correção utilizado neste trabalho é 1,3 (conforme Novaes, 2000). Portanto, a distância máxima que um usuário deverá se deslocar até a parada mais próxima será de:  $450,7 \times 1,3 = 585,9$  m.

A figura 5.3 mostra o traçado da linha a ser estudada. O seu itinerário completo encontra-se no Anexo 2.

FIGURA 5.3: TRAÇADO DA LINHA ALIMENTADORA



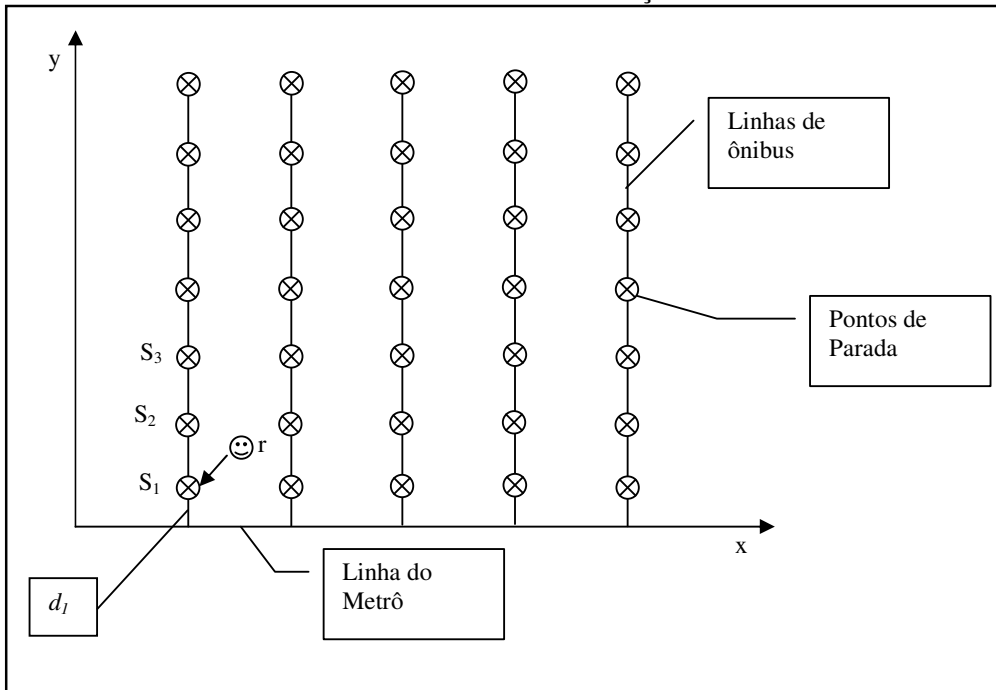
FONTE: Elaboração do autor com o auxílio do Google Maps.

### 5.3.1 Modelo Matemático

O modelo para esta linha baseia-se na hipótese de que os usuários do sistema de transporte coletivo da região utilizem as linhas de ônibus para chegar até a estação do metrô e de lá sigam viagem até o seu destino final.

A figura 5.4 mostra o modelo esquemático das linhas de ônibus em relação à linha do metrô num plano cartesiano. A função de densidade populacional  $\Phi$  será definida em relação a região de onde parte o usuário.

FIGURA 5.4: GEOMETRIA DA ÁREA DE SERVIÇO



FONTE: Elaboração do Autor.

A área de abrangência das linhas em questão será definida por  $S$ . O conjunto de estações existentes nas linhas é representado pelo conjunto  $s_i$  onde  $i \in I_n$  sendo o número de estações  $n+1$ . Existe também a variável  $d_i$  que representa a distância da estação  $i$  até a estação  $i-1$ .

Suponha-se que um usuário se encontra num ponto  $r(x_0, y_0)$  e deseja ir até a estação  $s_1(x_1, y_1)$ , sendo  $r, s_1 \in S$ . A distância  $D_a$  a ser percorrida será calculada da seguinte forma:

$$D_a = k * \|r - s_1\| = k * \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (5.1)$$

Neste caso  $k$  é uma constante de correção já explicada na seção anterior.

O tempo  $T_a$  que o usuário leva para se deslocar até a estação é calculado pela divisão da distância pela velocidade do usuário a pé. Ou seja:

$$T_a = \frac{D_a}{V_a} \quad (5.2)$$

Conforme estudado no Capítulo 2, Saka (2001) demonstrou como calcular o tempo que o ônibus leva para chegar até o seu destino (a estação do metrô). Ele é calculado da seguinte maneira:

$$T_{bus} = T_{ad} + T_{ed} + T_c + T_o \quad (5.3)$$

Onde:

- a)  $T_{ad}$  = tempo de aceleração e desaceleração;
- b)  $T_{ed}$  = tempo de embarque e desembarque de passageiros;
- c)  $T_c$  = tempo de atraso devido a dispositivos de controle de tráfego (Sinais de trânsito, etc.);
- d)  $T_o$  = tempo de viagem em velocidade normal de tráfego.

Adaptando para o problema em questão, uma vez que a intenção é calcular o espaçamento ideal entre os pontos de ônibus, podem-se eliminar algumas variáveis que não afetarão o resultado do modelo. Temos então que o tempo de viagem do ônibus do ponto  $s_i$  até o seu destino é descrito da seguinte maneira:

$$T_{s_i} = i * \left\{ \left[ \frac{V_b (X_a + X_d)}{120 X_a X_d} \right] + [(hq_i) \tau + t_p] \right\} + \frac{y_i}{V_b} \quad (5.4)$$

onde

- a)  $V_b$  = velocidade média do ônibus durante o percurso em m/s(metros por segundo);
- b)  $X_a$  = Taxa de aceleração em m/s<sup>2</sup>;
- c)  $X_d$  = Taxa de desaceleração em m/s<sup>2</sup>;
- d)  $t_p$  = Tempo de abertura e fechamento das portas em minutos;
- e)  $q_i$  = Quantidade de passageiros por hora que embarcam ou desembarcam no ponto  $i$ ;
- f)  $\tau$  = Tempo médio de embarque ou desembarque por passageiro;

g)  $h$  = Intervalo entre os ônibus;

h)  $y_i$  = Distância da parada  $i$  até o destino final (Estação do Metrô).

O primeiro termo da equação é tempo de aceleração e desaceleração, ou seja:

$$T_{ad} = \left[ \frac{V_b (X_a + X_d)}{120 X_a X_d} \right] \quad (5.5)$$

O segundo termo é o tempo de embarque e desembarque de passageiros, ou seja:

$$T_{ed} = \left[ (hq_i) \tau + t_p \right] \quad (5.6)$$

O último termo é o tempo gasto em velocidade normal de cruzeiro:

$$T_o = \frac{y_i}{V_b} \quad (5.7)$$

Assim sendo, o tempo total de viagem do usuário até a estação do metrô é dado pela seguinte equação:

$$T_{total} = \frac{D_a}{V_a} + i * \left\{ \left[ \frac{V_b (X_a + X_d)}{120 X_a X_d} \right] + \left[ (hq_i) \tau + t_p \right] \right\} + \frac{y_i}{V_b} \quad (5.8)$$

ou

$$T_{total} = k * \frac{\|r - s_i\|}{V_a} + i * \left\{ \left[ \frac{V_b (X_a + X_d)}{120 X_a X_d} \right] + \left[ (hq_i) \tau + t_p \right] \right\} + \frac{y_i}{V_b} \quad (5.9)$$

ou

$$T_{total} = k \frac{\|r - s_i\|}{V_a} + T_{s_i} \quad (5.10)$$

Assumindo que todo o usuário procurará utilizar a parada que minimize o tempo de viagem até o destino final, ele utilizará a parada que satisfaça a seguinte equação:

$$\text{Min}_i \left\{ k \frac{\|r - s_i\|}{V_a} + T_{s_i} \right\} \quad (5.11)$$

Como resultado dessa escolha, toda parada terá a sua área de abrangência definida por:

$$V_i = \left\{ r \mid k \frac{\|r - s_i\|}{V_a} + T_{s_i} \leq k \frac{\|r - s_j\|}{V_a} + T_{s_j}; i \neq j; i, j \in I_n \right\} \quad (5.12)$$

que vem a ser, conforme descrito no Capítulo 2, uma região de Voronoi Ponderada Aditiva.

Como se verifica através da Figura 5.5, o usuário poderá escolher entre duas linhas de ônibus, a fim de chegar ao seu destino final. Desse modo, a função que define o tempo total de viagem de todos os usuários na região estudada será dada a partir da função de densidade populacional que varia em função das variáveis  $x$  e  $y$ . Neste caso, tem-se uma variação no tempo de viagem entre uma linha e outra devido aos diferentes tempos utilizados nas paradas e também pelos diferentes números de paradas existentes.

O tempo total de viagem de todos os passageiros da região estudada será dado por:

$$T = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \left\{ k \frac{\|r(x, y) - s_i\|}{V_a} + T_{s_i} \right\} \phi(x, y) ds \quad (5.13)$$

Pode-se, então, definir o problema de otimização como sendo:

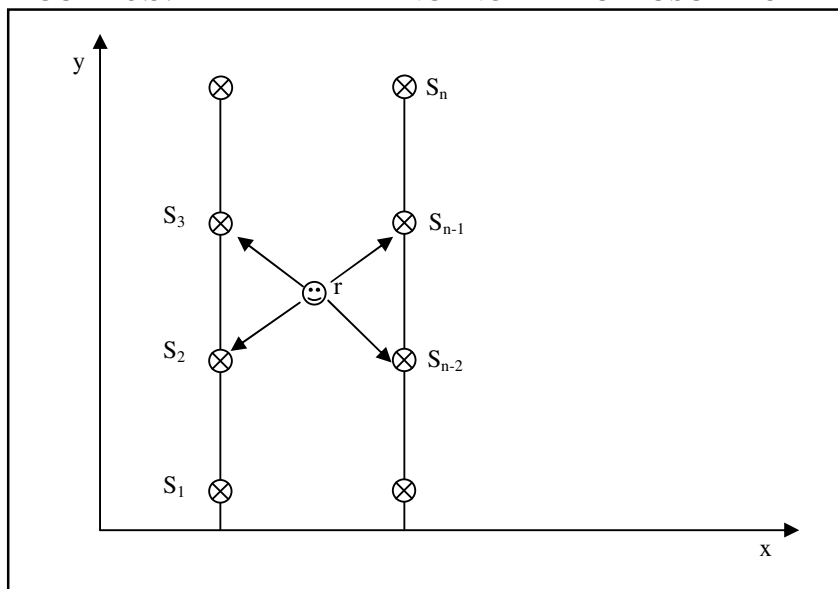
$$\min_{d_1, d_2, \dots, d_n} \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \left\{ k \frac{\|r(x, y) - s_i\|}{V_a} + T_{s_i} \right\} \phi(x, y) ds$$

(5.14)

Este é um problema de programação não linear sem restrições.

Porém, ao se analisar o problema detalhadamente, pode-se perceber que é muito pouco provável que exista realmente uma diferença entre as densidades populacionais em uma distância relativamente pequena (500m). Ao se assumir que a diferença entre as densidades populacionais das regiões atendidas por duas linhas adjacentes é desprezível, pode-se supor que o número de paradas e o espaçamento entre elas serão o mesmo (para as duas linhas adjacentes). Isto faz com que o tempo de viagem de um ônibus de uma parada  $s_i$  até o destino final seja o mesmo que o de uma parada equidistante do destino final de uma linha adjacente.

FIGURA 5.5: ÁREA DE ABRANGÊNCIA DE UM USUÁRIO

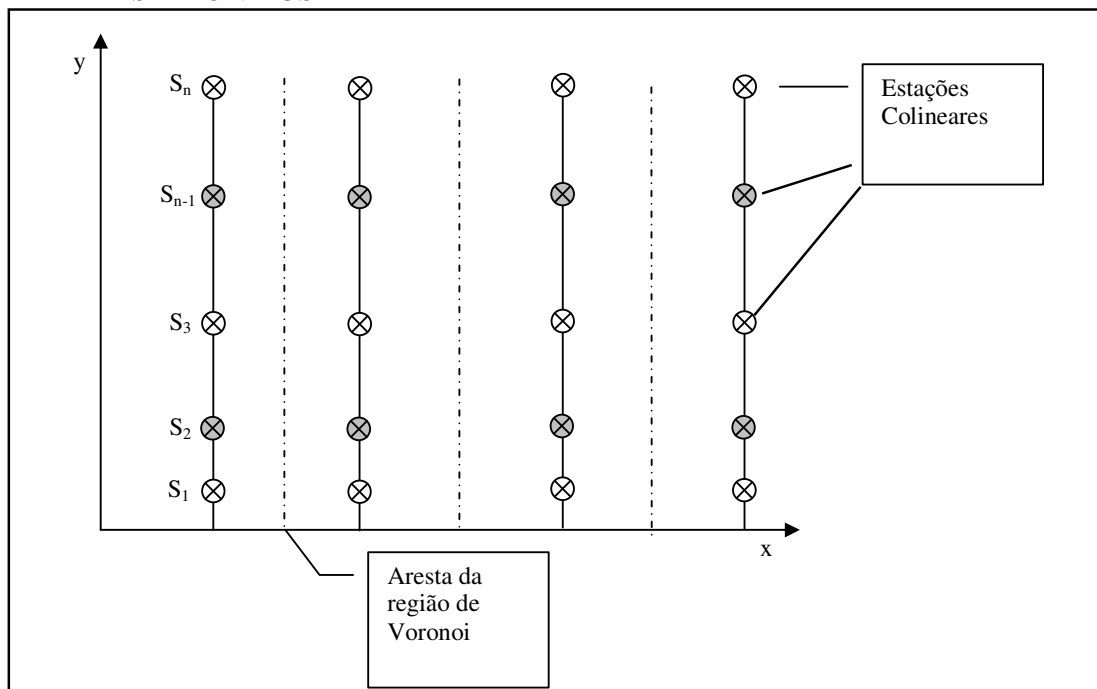


FONTE: Elaboração do Autor.

Como foi visto no Capítulo 2, se um diagrama de Voronoi é gerado por um conjunto de pontos distintos  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  e, sendo esses pontos colineares, pode-se afirmar que as arestas do Diagrama de Voronoi são retas infinitas.

Como as linhas de ônibus são praticamente em linha reta e as estações de uma linha possuem o mesmo espaçamento se comparadas com as linhas adjacentes a ela, pode-se dizer que a aresta da região de Voronoi entre as estações de uma linha com as estações da linha adjacente será uma reta. A figura 5.6 mostra como ficam as arestas dos diagramas de Voronoi referentes às paradas se elas forem consideradas colineares.

FIGURA 5.6: ARESTAS DOS DIAGRAMAS DE VORONOI REFERENTES ÀS PARADAS DE ÔNIBUS



FONTE: Elaboração do autor.

Assim sendo, pode-se limitar o escopo do estudo para uma única linha de ônibus. A região de abrangência dela estará limitada pelas arestas das regiões de Voronoi existentes entre ela e as linhas adjacentes, as quais estarão numa distância média entre as duas linhas.

#### 5.4 Linha 5108-10 – Jd. Celeste / Parque Dom Pedro II

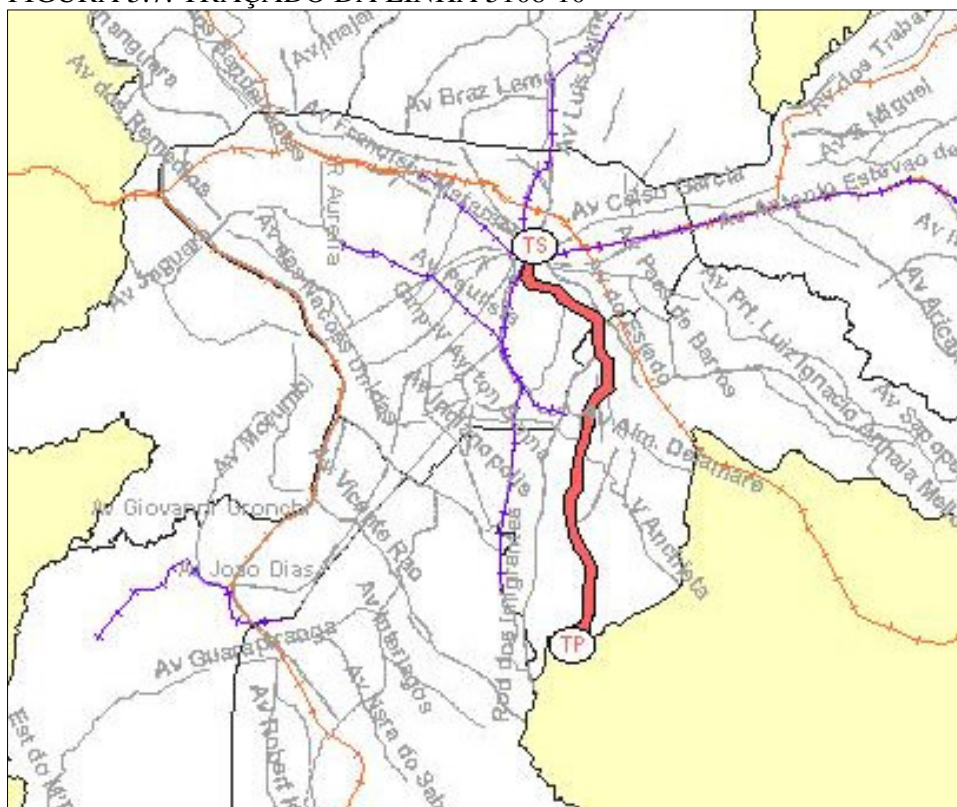
A linha 5108-10, Jd. Celeste/Parque Dom Pedro II liga o bairro do Sacomã, no sul do município de São Paulo, ao Parque Dom Pedro II no centro da cidade.

Essa linha foi escolhida por ser uma linha em parte alimentadora, pois vários usuários se deslocam até o Parque Dom Pedro II, onde se localiza o maior terminal de ônibus urbano do município de São Paulo, e em parte uma linha normal, pois uma boa parte dos usuários não segue no ônibus até o final do trajeto.



O Terminal Parque Dom Pedro II, inaugurado em 1996, está localizado no Região Central de São Paulo, junto ao Parque Dom Pedro II, na Av. do Exterior e próximo a Av. do Estado, atende aos ônibus da SPTrans.

FIGURA 5.7: TRAÇADO DA LINHA 5108-10



FONTE: São Paulo Transporte S.A. - SPTrans.

Neste terminal circulam diariamente mais de 160 mil pessoas e atende principalmente as regiões Leste, Sudeste e Nordeste da cidade.

A linha 5108-10 tem aproximadamente 17 km de extensão e funciona das 04h00min até as 24h00min no sentido bairro-centro e das 04h50min até as 24h50min no sentido inverso.

A figura 5.8 mostra os dados relativos à linha 5108-10. O itinerário da linha está no anexo 3.

FIGURA 5.8: DADOS GERAIS DA LINHA 5108-10

**Dados Gerais** Sair

Linha 5108-10
Partidas
Itinerário
Tempo

**Tipo** LINHA BASE

**Letreiro de Ida**  **Letreiro de volta**

**Área**

**Contratação**

**Empresa**

**Terminal Primário (TP): AV. BRASILIA , 1019**

**Terminal Secundário (TS): TERM. PARQUE DOM PEDRO II**

**Data de Criação** 10/03/2007 **Fim de Operação** -

Dias de Operação	Horários de Operação	
	TP/TS	TS/TP
Útil	04:00-00:00	04:50-00:50
Sábado	04:00-00:00	04:50-00:50
Domingo	04:00-00:00	04:50-00:50

**Dados por Período**

	Tempos de Viagem (min.)					
	TP/TS			TS/TP		
	Útil	Sáb.	Dom.	Útil	Sáb.	Dom.
<b>Manhã</b>	75	75	80	75	80	75
<b>Entrepico</b>	75	75	80	85	85	80
<b>Tarde</b>	75	80	80	95	95	80

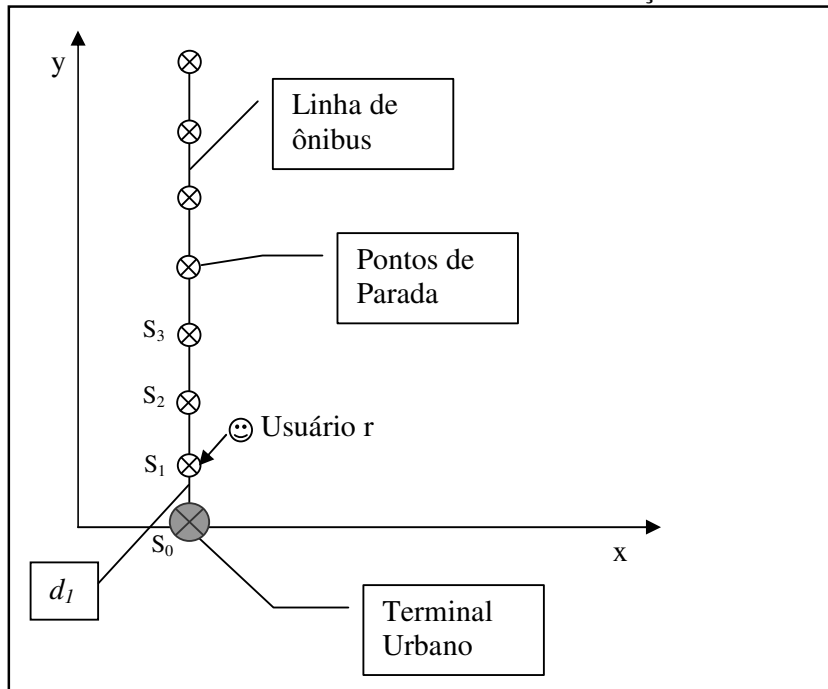
FONTE: São Paulo Transporte S.A. - SPTrans.

#### 5.4.1 Modelo Matemático

Diferentemente do modelo anterior, este não se baseia unicamente na hipótese de que os usuários do sistema de transporte coletivo da região utilizem a linha de ônibus para ir da periferia da cidade até um terminal urbano situado no final da linha. Ele baseia-se também na idéia de que apenas uma parte dos usuários utilize a linha para chegar até o ponto final e que os demais usuários desçam em algum lugar antes do ponto final.

A figura 5.9 mostra o esquema da área de serviço abrangido pela linha em questão e a figura 5.10 mostra a situação dos usuários dentro da área de abrangência da linha. Este modelo foi desenvolvido através de informações colhidas empiricamente pelo autor.

FIGURA 5.9: GEOMETRIA DA ÁREA DE SERVIÇO



FONTE: Elaboração do Autor.

Para efeito de cálculo, este modelo é praticamente idêntico ao anterior. A única diferença reside no fato de que neste caso os usuários não se deslocam na sua totalidade para o destino final, ou seja, parte deles segue até um ponto da linha anterior ao ponto terminal. Assim sendo, o tempo total de viagem de todos os passageiros da região estudada será dado pelas equações 5.13 e 5.14 com apenas uma modificação: a variável  $T_{s_i}^*$ . Devido o fato de que os usuários não seguirão todos até o ponto final da linha, ela deverá ser calculada da seguinte maneira:

$$T_{s_i}^* = (i - c) * \left\{ \left[ \frac{V_b (X_a + X_d)}{120 X_a X_d} \right] + [(hq_i) \tau + t_p] \right\} + \frac{y_i - y_c}{V_b} \quad (5.15)$$

Onde a variável  $c$  é calculada de acordo com a intenção do usuário, ou seja, é o ponto onde o usuário pretende descer do ônibus.

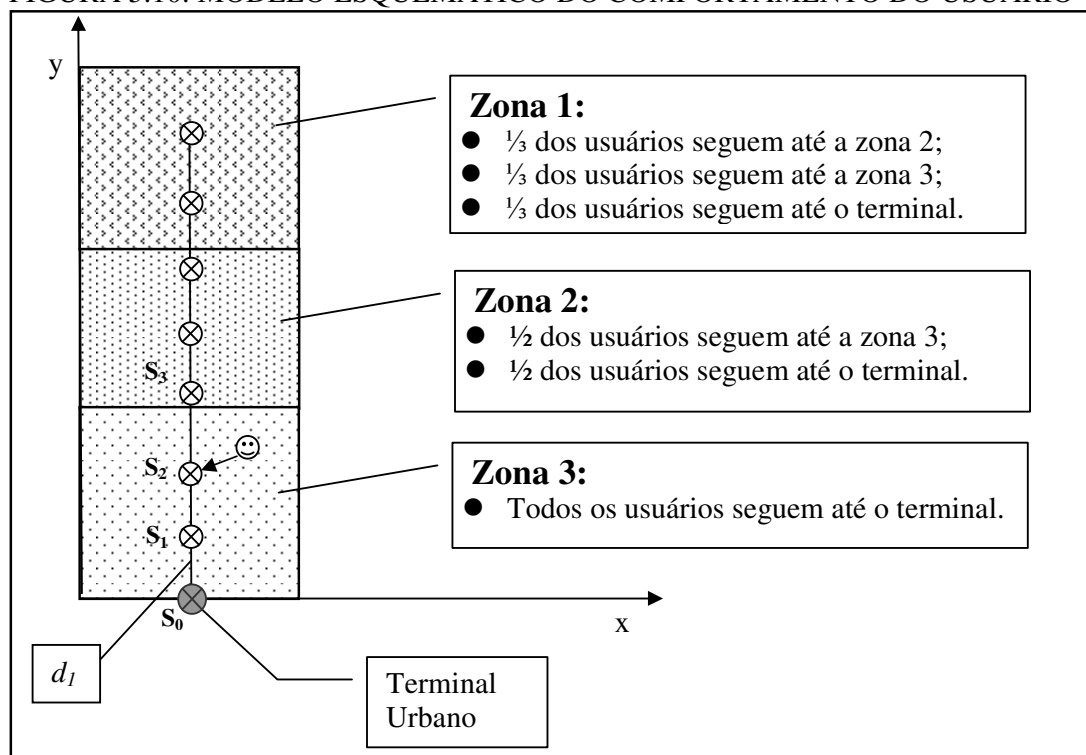
$$T = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \left\{ k \frac{\|r(x, y) - s_i\|}{V_a} + T_{s_i}^* \right\} \phi(x, y) ds \quad (5.16)$$

Pode-se, então, definir o problema de otimização como sendo:

$$\min_{d_1, d_2, \dots, d_n} \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \left\{ k \frac{\|r(x, y) - s_i\|}{V_a} + T_{s_i}^* \right\} \phi(x, y) ds \quad (5.17)$$

O critério para se definir valor de  $c$  obedecerá ao esquema descrito abaixo e está esquematizado na figura 5.10.

FIGURA 5.10: MODELO ESQUEMÁTICO DO COMPORTAMENTO DO USUÁRIO



FONTE: Elaboração do Autor.

Inicialmente o percurso total da linha foi dividido em três partes iguais. Os usuários que embarcam em qualquer ponto localizado no primeiro terço da linha (Zona 1) seguem até um determinado ponto baseado nos seguintes critérios:

- a) A terça parte dos usuários seguem até o segundo terço da linha(Zona 2);
- b) A terça parte dos usuários seguem até o terceiro terço da linha(Zona 3);
- c) A terça parte dos usuários seguem até o ponto final da linha(Terminal Urbano);

Os usuários que embarcam em qualquer ponto localizado no segundo terço da linha(Zona 2) seguem até um determinado ponto baseado nos seguintes critérios:

- a) A metade deles segue até o terceiro terço da linha(Zona 3);
- b) A outra metade segue até o ponto final da linha(Terminal Urbano);

Os usuários que embarcam em qualquer ponto localizado no terceiro terço da linha(Zona 3) seguem até o ponto final da linha(Terminal Urbano).

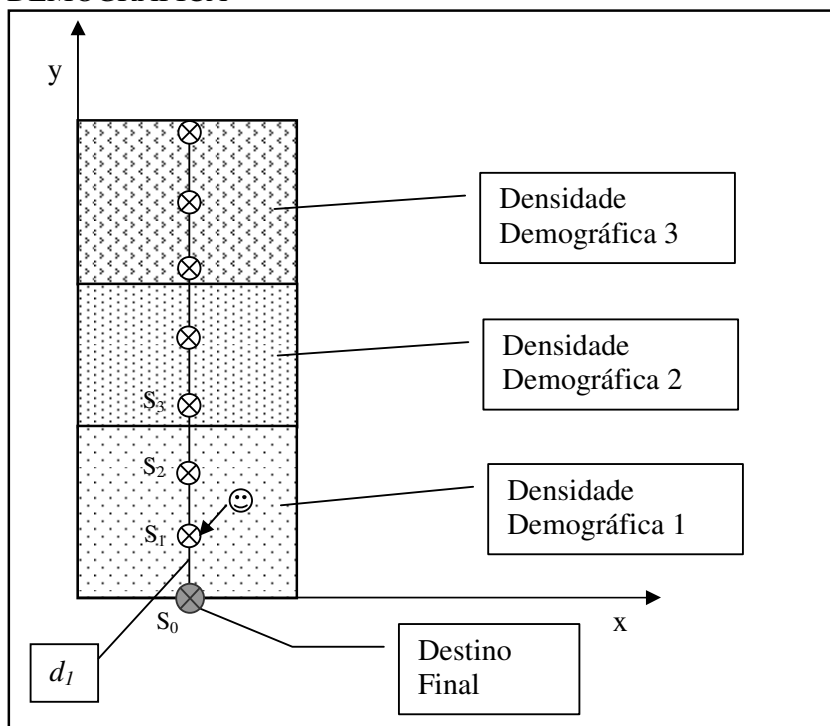
Para os usuários que desembarcam nas zonas 2 e 3 são atribuídos à variável  $c$  valores aleatórios correspondentes aos pontos localizados nessas respectivas zonas.

## **5.5 Considerações sobre a Densidade Demográfica da Região de Abrangência**

Nos dois modelos descritos anteriormente, a densidade demográfica é utilizada como parâmetro para a distribuição dos usuários na área de abrangência da linha em questão. Porém, ao longo da linha a densidade demográfica não é constante, variando nas várias regiões atendidas pela linha de ônibus.

O modelo desenvolvido aceita que a densidade demográfica tenha valores diferentes para cada setor da região abrangida pela linha sem que isso seja uma limitação. O cálculo será feito levando em conta a variação da densidade demográfica em toda a região. A figura 5.11 trás um exemplo de como pode ser constituída a região de abrangência da linha em estudo.

FIGURA 5.11: MODELO ESQUEMÁTICO DA VARIAÇÃO DA DENSIDADE DEMOGRÁFICA



FONTE: Elaboração do Autor.

## 5.6 Metodologia para o Cálculo dos Valores

Para o cálculo do valor da função objetivo o valor da integral definida ou integral de Riemann é calculado numericamente.

O valor da integral de Riemann num intervalo qualquer é equivalente a soma de todos os elementos da área sob a curva no intervalo. São definidas frações do intervalo e então é calculada a soma de todas as áreas parciais dessas frações.

No modelo definido neste trabalho, é definido um valor que representa o tamanho do lado de um quadrado que vai dividir a área de abrangência em várias frações. A partir daí é feita a somatória dos tempos de viagem do centro de cada fração de área definida anteriormente até o destino previsto para o usuário. O destino pode ser tanto o ponto final da linha, como é o previsto no caso da linha alimentadora, como também pode ser um ponto intermediário, como acontece para alguns passageiros da linha 5108.

Quanto menor for o valor que vai definir o tamanho da fração, maior será a precisão alcançada, porém maior será também o tempo de processamento.

O valor do tempo médio de viagem dos usuários de cada linha é calculado da seguinte maneira: multiplica-se o tempo de viagem de cada “ponto” (fração de área) da região de abrangência pela densidade demográfica da região em que ele se encontra e então é calculada a média ponderada para todos os valores encontrados.

No próximo capítulo serão descritas as rotinas e a implementação dos programas de computador que permitirão resolver o problema descrito acima. Serão também apresentados os resultados obtidos no estudo.

## **6 RESULTADOS COMPUTACIONAIS**

Neste capítulo serão descritos os sistemas desenvolvidos para resolver o problema descrito anteriormente e serão apresentados os resultados.

### **6.1 Desenvolvimento das Ferramentas Computacionais**

Inicialmente foram desenvolvidos sistemas para resolver problemas de programação não-linear. Foram utilizados os métodos descritos no capítulo 4, que são: Método da Descida(Gradiente), Método das Direções Conjugadas(Gradiente Conjugado) e o Método Davidon-Fletcher-Powel(DFP). Foram também implementados os métodos de Wolfe, Goldstein e Armijo para o cálculo do passo.

Como método de refinamento da solução inicial foi implementado o Método Simulated Annealing, ou Metropolis. O sistema também permite a geração de vários pontos iniciais, geração essa que pode utilizar a distribuição uniforme ou normal. É possível ainda calcular novos números a partir da combinação linear da população inicial a fim de gerar uma nova população de pontos iniciais a serem avaliados.

O sistema foi desenvolvido utilizando a linguagem de programação Delphi, versão 6.0. A tela inicial do sistema está na figura 6.1.



FIGURA 6.1: TELA INICIAL DO SISTEMA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

The screenshot shows the 'Programação Não Linear' software interface. The window title is 'Programação Não Linear'. The interface is divided into several sections:

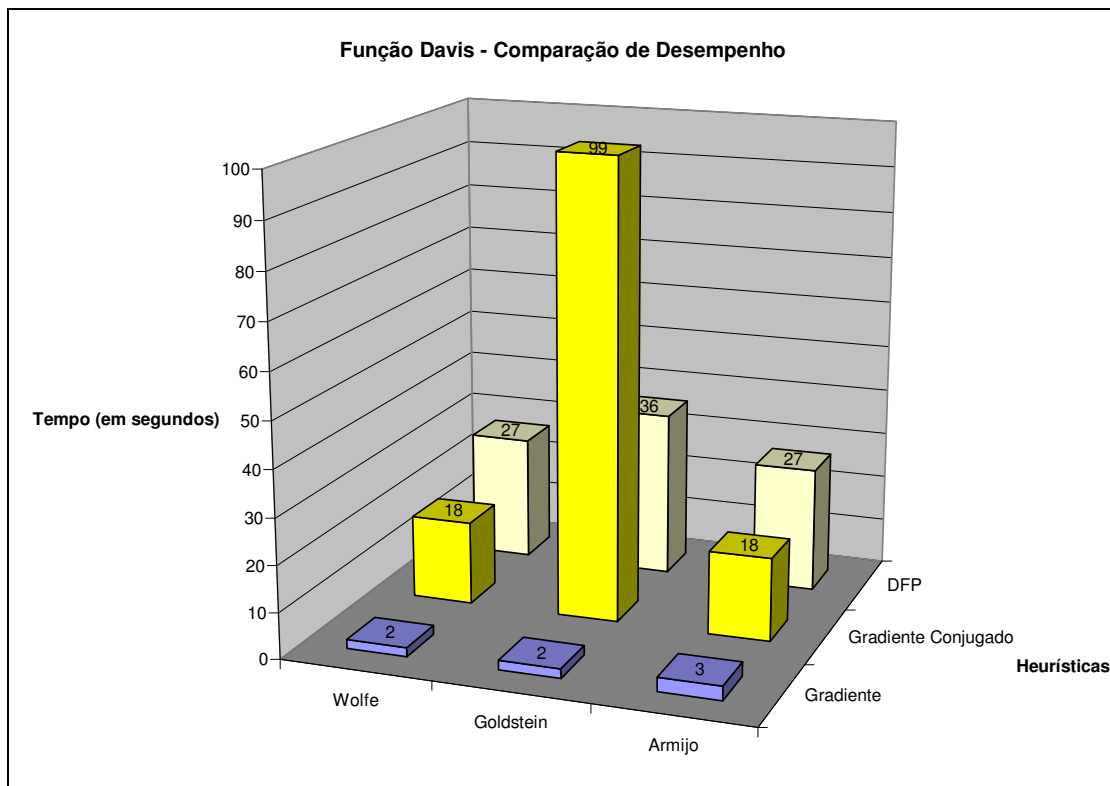
- Executar:** A button to start the process.
- Métodos de Busca:** Radio buttons for 'Gradiente' (selected), 'Gradiente Conjugado', and 'Davidon-Fletcher-Powel'.
- Cálculo do Passo:** Radio buttons for 'Wolfe' (selected), 'Goldstein', and 'Armijo'.
- Parâmetros de Entrada:** Input fields for TMax = 1,0; M1 = 0,1; M2 = 0,7; and DTmin = 0,000001.
- Critérios p/ Geração de Pontos:** Input fields for NDim (Min=2 | Máx=15) = 2; Limite Inferior = -10; and Limite Superior = 10.
- Métodos de Geração:** Radio buttons for 'Limitada (Dist. Uniforme)' (selected), 'Ilimitada (Dist. Normal)', and 'Limitada (Dist. Normal)'.
- Funções para Avaliação:** Radio buttons for 'Davis' (selected), 'Schwefel', 'Rosenbrock', 'Rastringin', 'Ackley', and 'Griewank'.
- Critérios de Parada:** Input fields for Nitmax = 10000; NitgualMax = 200; and Err = 0,000001.
- Método Simulated Annealing (Metrópolis):** A checked checkbox 'Aplicar Método Simulated Annealing' and input fields for Iter = 1000, s = 1, and Temptr = 1000.
- Parâmetros para Avaliação da População:** A checked checkbox 'Aplicar Avaliação da População', an unchecked checkbox 'Aplicar Avaliação da Combinação Linear da População', and input fields for Alpha = 10, Beta = 1,5, Gama = 11,5, and TotPop = 100.
- Arquivo de Saída:** Buttons for 'Limpar Arquivo' and 'Resultado.sai'.
- Buttons:** 'Gerar Novo Xini' and 'Sair'.

FONTE: Elaboração do Autor.

## 6.2 Teste das Ferramentas Computacionais

Para a fase de teste do sistema foram implementadas várias funções matemáticas a fim de verificar a precisão e eficiência do mesmo. As funções utilizadas nos testes são: Davis, Rastringin, Ackley, Griewank, Rosenbrock e Schwefel, todas descritas em Bez (2005). Os resultados de alguns dos testes estão listados no Anexo 4.

FIGURA 6.2: TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA A FUNÇÃO DAVIS



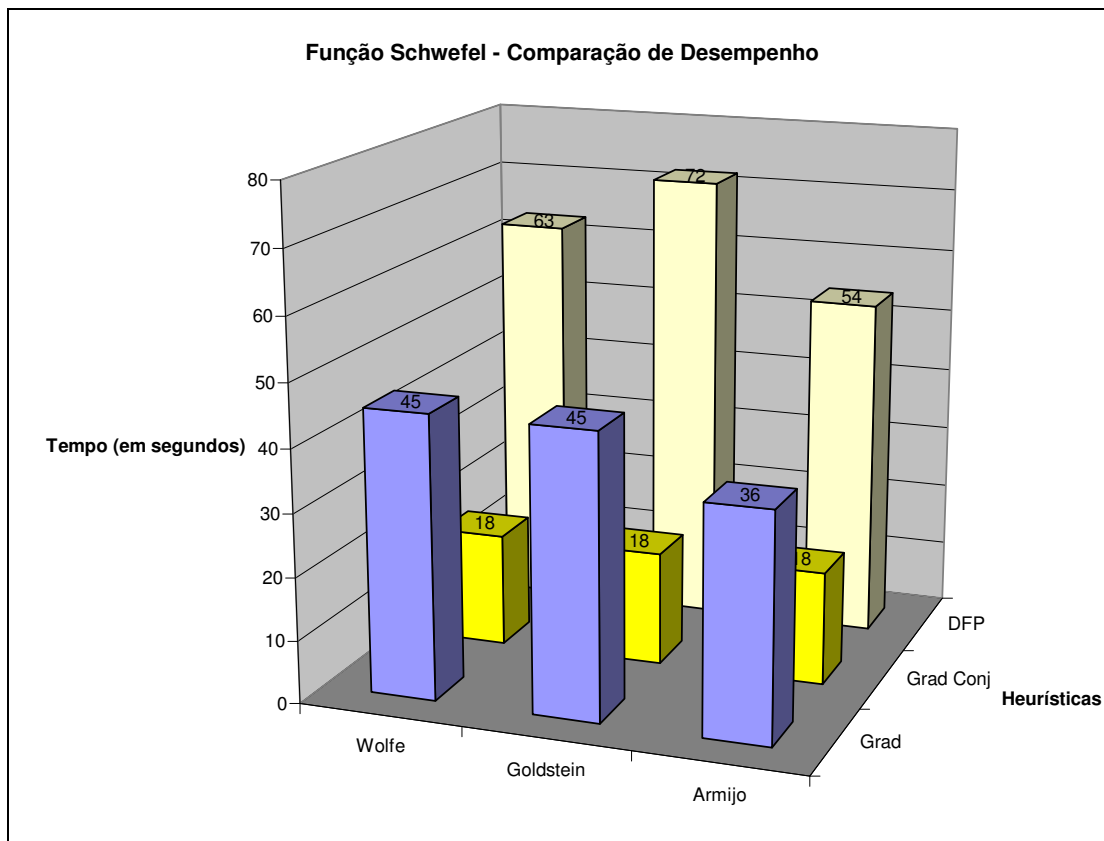
FONTE: Elaboração do autor.

Foram testadas as funções através de uma população inicial de números gerados aleatoriamente. Para todos os testes foi utilizado também o método de *Simulated Annealing*.

Os testes foram realizados utilizando um computador dotado de um processador Intel Core Duo com 2GHz de frequência e 2 Gb de memória RAM. Foram registrados os resultados obtidos para o menor valor das funções e o tempo de processamento.

Analisando os resultados podemos afirmar que todos os métodos obtiveram resultados bastante próximos, tanto em relação ao resultado quanto em relação ao tempo de execução. Porém em alguns casos ocorreram algumas discrepâncias, como a mostrada na figura 6.2, onde podemos perceber que, para a função Davis, o tempo de processamento do método do Gradiente Conjugado, utilizando a regra de Goldstein, foi bem maior que os demais.

FIGURA 6.3: TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA A FUNÇÃO SCHWEFEL



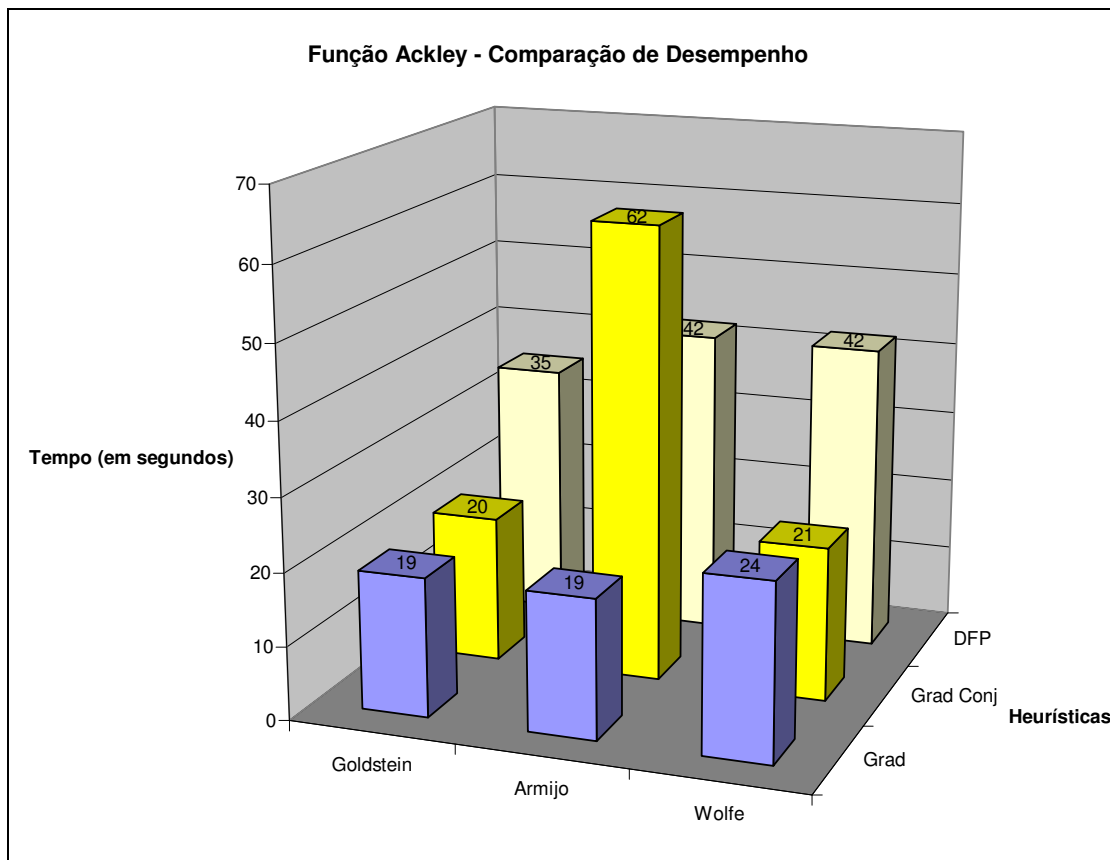
FONTE: Elaboração do autor.

Na figura 6.3 temos a comparação de tempo de processamento da função Schwefel. Aqui o método do Gradiente Conjugado teve um desempenho melhor que os demais.

Na figura 6.4 está o resultado do desempenho dos diferentes métodos. Nela podemos perceber que o método do Gradiente Conjugado foi o que mais tempo utilizou para encontrar o valor final.

Para a resolução do problema do espaçamento das paradas de ônibus, o método do Gradiente Conjugado foi o que melhor desempenho teve, embora os resultados tenham sido semelhantes, sem variações significativas.

FIGURA 6.4: TEMPO DE PROCESSAMENTO PARA A FUNÇÃO ACKLEY



FONTE: Elaboração do autor.

### 6.3 Operação do Sistema para a Linha Alimentadora

Como foi descrito nas seções anteriores, este modelo representa uma linha de ônibus que alimenta uma linha do Metrô de São Paulo. O trajeto total da linha possui 6,2km de extensão. A área de abrangência da linha corresponde a uma faixa que cobre cerca de 600 metros para cada lado do trajeto da linha. Esse número é compatível com o que foi mostrado no Capítulo 2 e na própria definição da linha feita nas seções anteriores.

Neste modelo considera-se que todos os passageiros irão embarcar em algum ponto da linha e se deslocarão até o ponto final.

A densidade demográfica da área de abrangência da linha varia de acordo com a região em que ela se encontra. A tabela 6.1 traz as diferentes densidades demográficas das regiões ao longo do trajeto da linha em questão.

A figura 6.6 mostra a área de abrangência referente à linha em estudo. Mostra também as divisões regionais que representam bairros com diferentes densidades demográficas.

TABELA 6.1: DENSIDADE DEMOGRÁFICA AO LONGO DO TRAJETO DA LINHA

Nome do Logradouro	Bairro	Densidade Demográfica(Hab/km <sup>2</sup> )
R. Martim Tenório	Lapa	6.018
R. Dr. Cincinato Pomponet	Lapa	6.018
R. Herbart	Lapa	6.018
Praça Melvin Jones	Lapa	6.018
R. Jeroaquara	Lapa	6.018
R. Joaquim Machado	Lapa	6.018
R. Catão	Lapa	6.018
R. Fábria	Lapa	6.018
R. Marco Aurélio	Lapa	6.018
R. Aurélia	Lapa / Perdizes	6.018 / 16.794
R. Heitor Penteado	Perdizes / Alto de Pinheiros	16.794 / 5.773
R. Paulistânia	Pinheiros	7.875
R. Harmonia	Pinheiros	7.875
R. Rodésia	Pinheiros	7.875
R. Girassol	Pinheiros	7.875
R. Purpurina	Pinheiros	7.875
R. Fradique Coutinho	Pinheiros	7.875

FONTE: Prefeitura Municipal de São Paulo – IBGE - Censos Demográficos 2000.

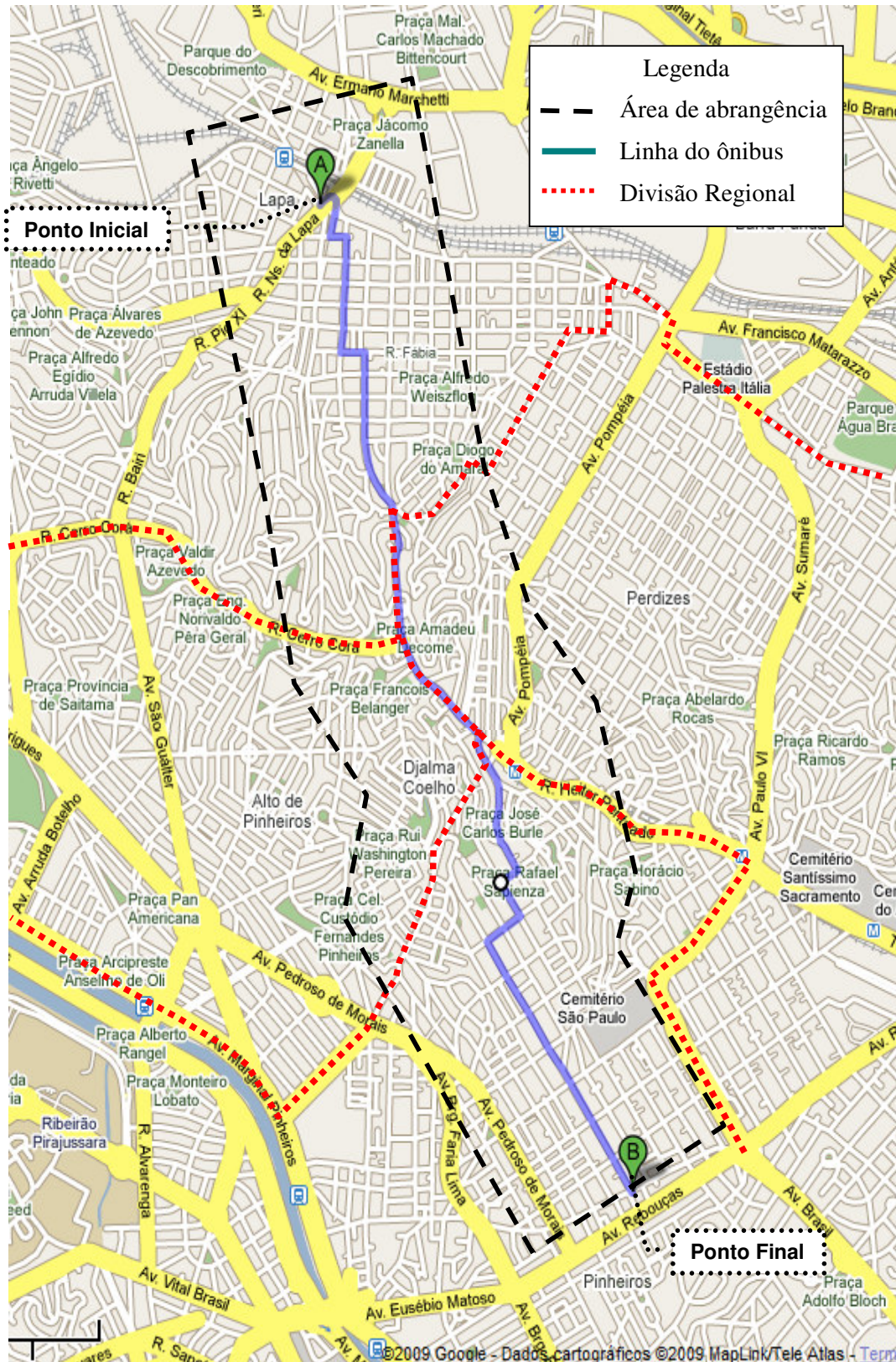
Para a operação do sistema, inicialmente precisa-se definir a área de abrangência da linha, conforme mostrado na figura 6.5. Feito isso, importamos a figura para uma tela do sistema onde marcamos os pontos significativos que definem o limite da área. Os pontos são anotados a partir de um sistema de coordenadas cartesianas que compreende toda a região estudada. São considerados significativos os pontos que definem todos os segmentos de reta das linhas que definem o problema em questão, ou seja, a linha do ônibus, os limites da área de abrangência e os limites regionais, onde existe mudança de densidade demográfica.

A figura 6.6 mostra o modelo esquemático da região estudada com as coordenadas de alguns pontos significativos em destaque. Os pontos estão definidos em coordenadas cartesianas ( $x$ =horizontal,  $y$ =vertical) sendo a origem no canto superior esquerdo do mapa.

Uma versão simplificada deste modelo foi utilizado em Oliveira<sup>a</sup> *et. al.* (2008).

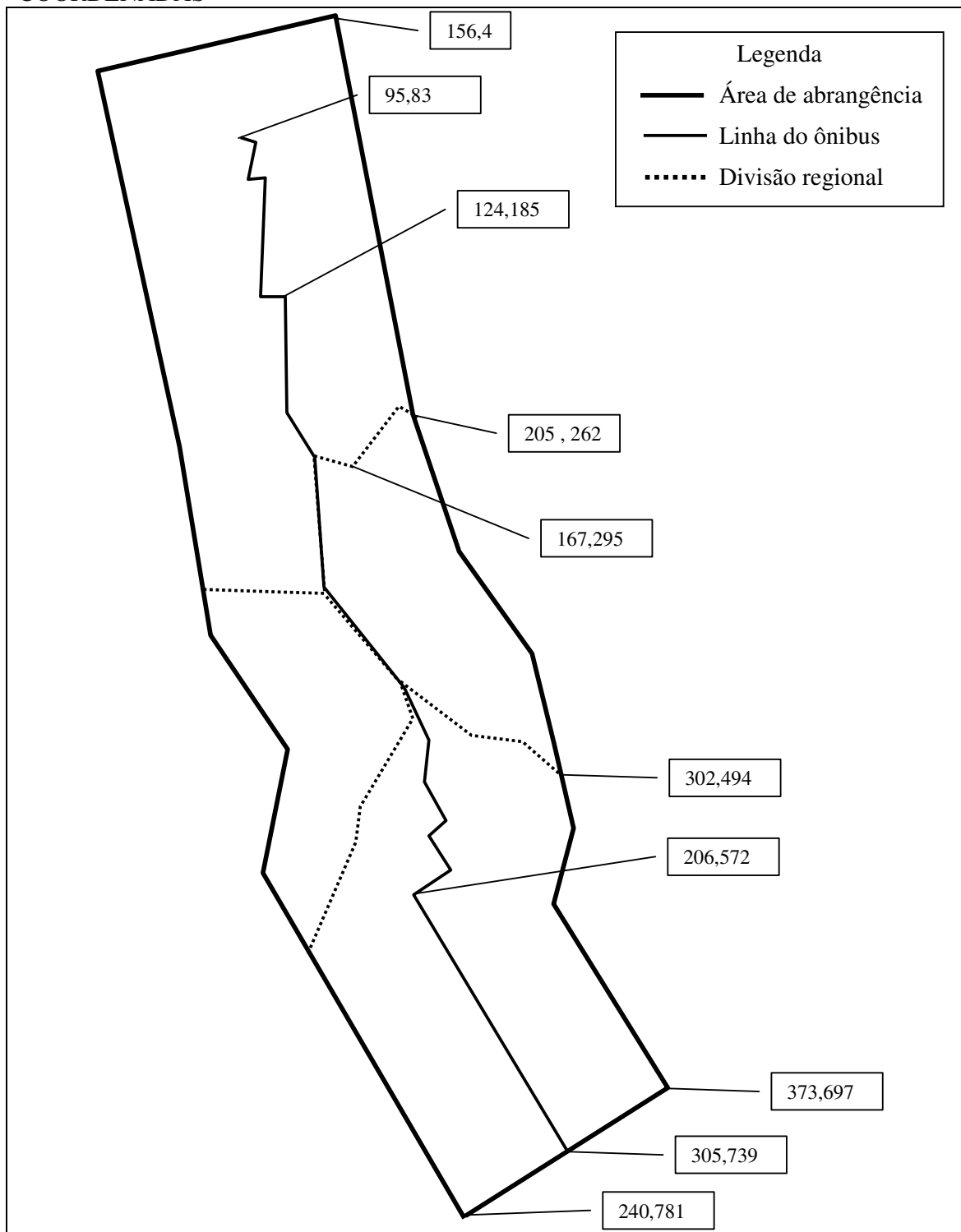


FIGURA 6.5: ÁREA DE ABRANGENCIA DA LINHA COM AS DIVISÕES DOS BAIRROS



FONTE: Elaboração do autor com o auxílio do Google Maps.

FIGURA 6.6: MODELO ESQUEMÁTICO DA ÁREA COM ALGUNS PONTOS E COORDENADAS



FONTE: Elaboração do autor.



### 6.3.1 Funcionamento do Programa

O programa parte de uma tela inicial, descrita na figura 6.7, onde é possível definir alguns parâmetros de entrada e quais os métodos para a solução do problema que desejamos utilizar.

FIGURA 6.7: TELA INICIAL DO PROGRAMA

The screenshot shows the 'Otimização' software interface with the following sections and values:

- Métodos de Busca:**
  - Gradiente
  - Gradiente Conjugado
  - Davidson-Fletcher-Powell
- Critérios de Parada:**
  - Nitmax = 1000
  - NitgualMax = 200
  - Err = 0,0001
- Critérios p/ Geração de Pontos:**
  - Métodos de Geração:**
    - Limitada (Dist. Uniforme)
    - Limitada (Dist. Normal)
  - Média = 0
  - Desvio Padrão = 1
  - Descentrar
  - Botão: Gerar Novo Xini
- Parâmetros de Entrada:**
  - Número de paradas: min (4) = 5, max (100) = 25
  - Área total pesquisada(em metros): Largura = 2000, Comprimento = 10000
  - Velocidade do usuário a pé = 1 m/s
  - Veloc. média do ônibus = 20 m/s
  - Lado da sub-área = 10
- Cálculo do Passo:**
  - Métodos:**
    - Wolfe
    - Goldstein
    - Armijo
  - Parâmetros de Entrada:
    - TMax = 1,0
    - M1 = 0,1
    - M2 = 0,7
    - DTmin = 0,000001
- Parâmetros para Avaliação da População:**
  - Aplicar Avaliação da População
  - Aplicar Avaliação da Combinação Linear da População
  - Alpha = 10, Beta = 1,5, Gama = 11,5
  - Tot\_Pop(max 100) = 10
- Método Simulated Annealing (Metropolis):**
  - Aplicar Método Simulated Annealing
  - Iter = 1000, s = 1
  - Temptr = 1000
- Arquivo de Saída:**
  - Limpar Arquivo
  - Resultado.sai
- Botões:** Executar, Desenhar, Sair

FONTE: Elaboração do autor.

Para que os cálculos sejam efetuados é necessária a importação dos pontos que delimitam as linhas que vão gerar o esquema mostrado na figura 6.7. Através desse esquema o programa irá armazenar as informações sobre o trajeto da linha, os limites da área de abrangência e as divisões regionais. Através do botão “desenhar” mostrado na tela da figura 6.7 é possível fazer a importação destes pontos.

Após a importação dos pontos, é gerada uma solução inicial, em que as paradas são distribuídas em distâncias iguais ao longo da linha. Podem também ser gerados pontos aleatórios distribuídos randomicamente sobre a linha.

A busca da solução ótima é feita através do método escolhido através de uma opção feita na tela inicial. Deve-se escolher também o método para o cálculo do passo, bem como definir os parâmetros necessários para a execução do programa. Se for escolhida a opção pela aplicação do método *Simulated Annealing* este será executado após a otimização inicial. Para maiores detalhes sobre o funcionamento do programa consulte o Anexo 7.

Após definido o espaçamento, o programa localiza as paradas ao longo do trajeto da linha a fim de calcular a sua posição e as suas coordenadas, a fim de efetuar o cálculo dos tempos de viagem para cada ponto da área de abrangência e assim calcular o valor da função objetivo.

Esse procedimento é repetido para cada nova solução encontrada até que o valor final seja obtido.

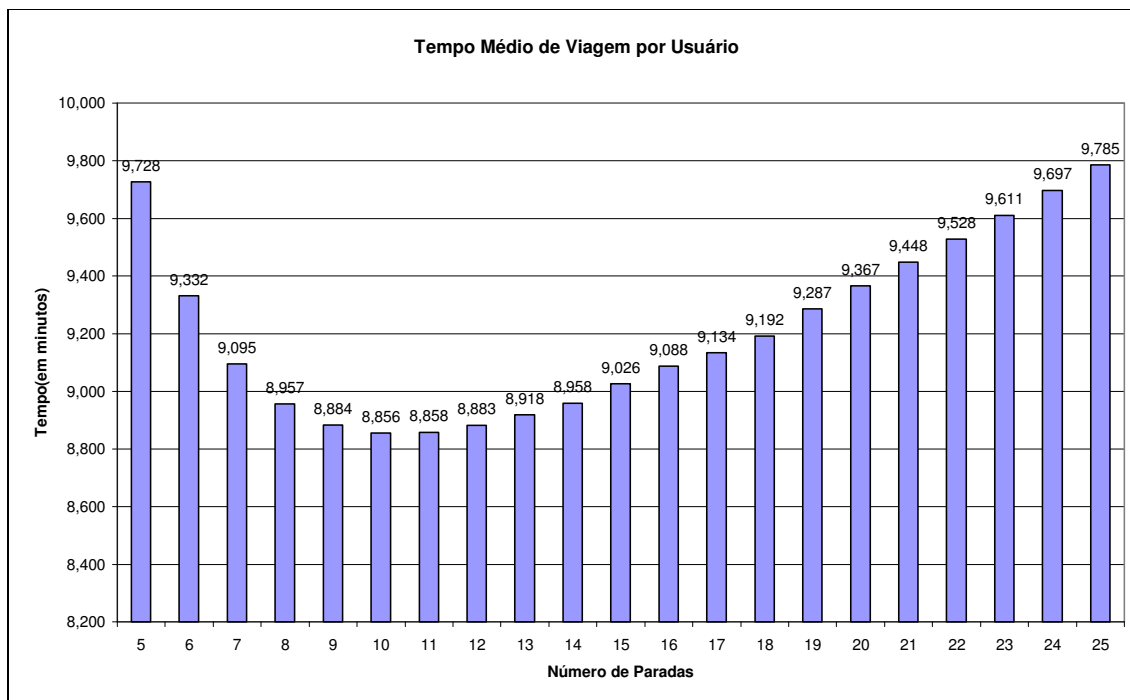
O cálculo do espaçamento ideal é feito individualmente para cada número de paradas que se julguem necessárias. O número ideal de paradas, bem como o seu espaçamento, será o que obtiver o menor valor para a função objetivo.

Após a obtenção do valor final o sistema localiza os pontos ótimos sobre a linha do ônibus e a partir daí é desenhado o Diagrama de Voronoi referente aos pontos encontrados.

### **6.3.2 Resultados Obtidos**

O programa foi executado de um total de cinco até um total de vinte e cinco paradas. Foi utilizado como velocidade do usuário a pé o valor de 1 m/s e como velocidade normal de cruzeiro do ônibus o valor de 20 m/s. O tempo médio de viagem por usuário foi calculado para cada um desses valores e o resultado pode ser visto na figura 6.8.

FIGURA 6.8: TEMPO MÉDIO DE VIAGEM POR USUÁRIO POR NÚMERO DE PARADAS



FONTE: Elaboração do autor.

Como podemos perceber no gráfico da figura 6.8 os tempos médios de viagem tendem a ser bastante altos quando o número de paradas é baixo. Esse valor diminui à medida que o número de paradas aumenta e depois de certo número ele começa a aumentar de novo.

O menor valor observado foi com dez paradas, com o tempo médio de viagem por usuário de 8,856 minutos. Podemos perceber pelo gráfico que para pequenos aumentos do número de paradas o tempo médio de viagem não sofre grandes variações. Porém com vinte e cinco paradas o aumento é superior a dez por cento.

A tabela 6.2 mostra o resultado final obtido pelo sistema para um total de dez paradas. A distância das paradas é medida a partir do ponto final da linha, que, neste caso, representa a estação do metrô.

TABELA 6.2: RESULTADO FINAL PARA 10 PONTOS DE PARADA

Ponto	Distância desde a origem	Distância desde a parada anterior
Terminal	0	
Ponto nº 1	992	992
Ponto nº 2	1865	873
Ponto nº 3	2633	768
Ponto nº 4	3309	676
Ponto nº 5	3904	595
Ponto nº 6	4428	524
Ponto nº 7	4888	461
Ponto nº 8	5294	405
Ponto nº 9	5650	357
Ponto nº 10	5964	314
Ponto Final	6200	236

FONTE: Elaboração do autor

Podemos perceber que quanto mais distante for a parada do final da linha, menor é o espaçamento entre elas.

A figura 6.9 mostra a localização dos pontos obtidos sobre a linha de ônibus. Ela mostra também o contorno do diagrama de Voronoi Ponderado e Ordinário referente a cada parada. Neste caso, assumiu-se que o ponto final da linha possui uma parada. Isto se deve ao fato de que cada parada próxima ao ponto final penaliza todos os usuários, causando um aumento de tempo para a maioria da população que utiliza a linha.

FIGURA 6.9: LOCALIZAÇÃO DAS PARADAS SOBRE A LINHA DE ÔNIBUS



FONTE: Elaboração do autor com o auxílio do Google Maps.

#### **6.4 Operação do Sistema para a Linha 5108**

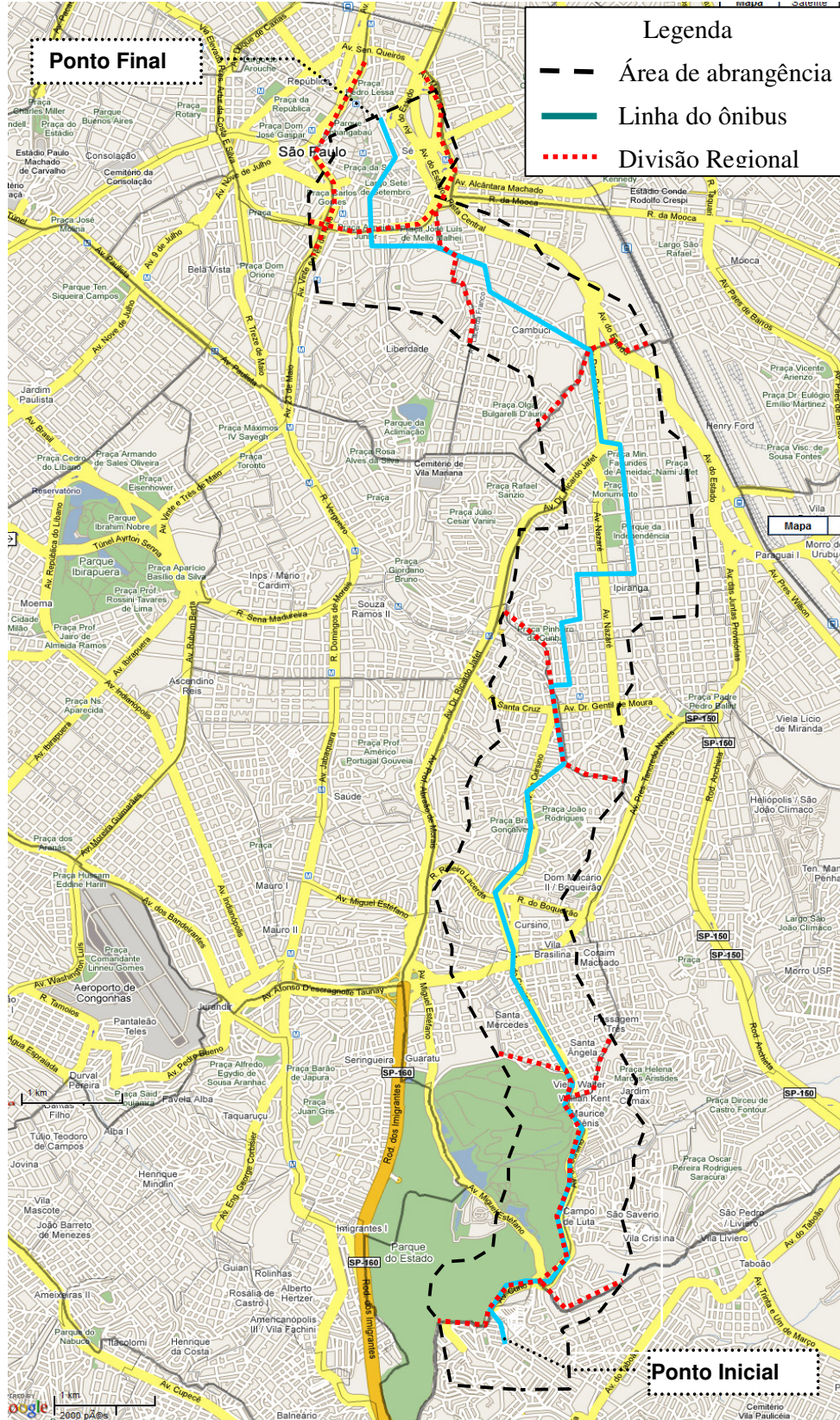
Esta é uma linha de ônibus urbana localizada no município de São Paulo. O modelo foi descrito no capítulo anterior. A linha 5108, que liga a zona sul do município de São Paulo até o terminal D. Pedro II, no centro da cidade, possui 17,1 km de extensão e conta atualmente com 71 paradas, tendo um espaçamento médio de 240 metros.

O trajeto da linha, sua área de abrangência e as divisões regionais são mostradas na figura 6.10. A figura 6.11 traz o modelo esquemático da linha contendo as três sub-divisões descritas anteriormente, que define o comportamento do usuário.

Uma versão simplificada deste modelo foi utilizado em Oliveira<sup>b</sup> *et. al.* (2008).

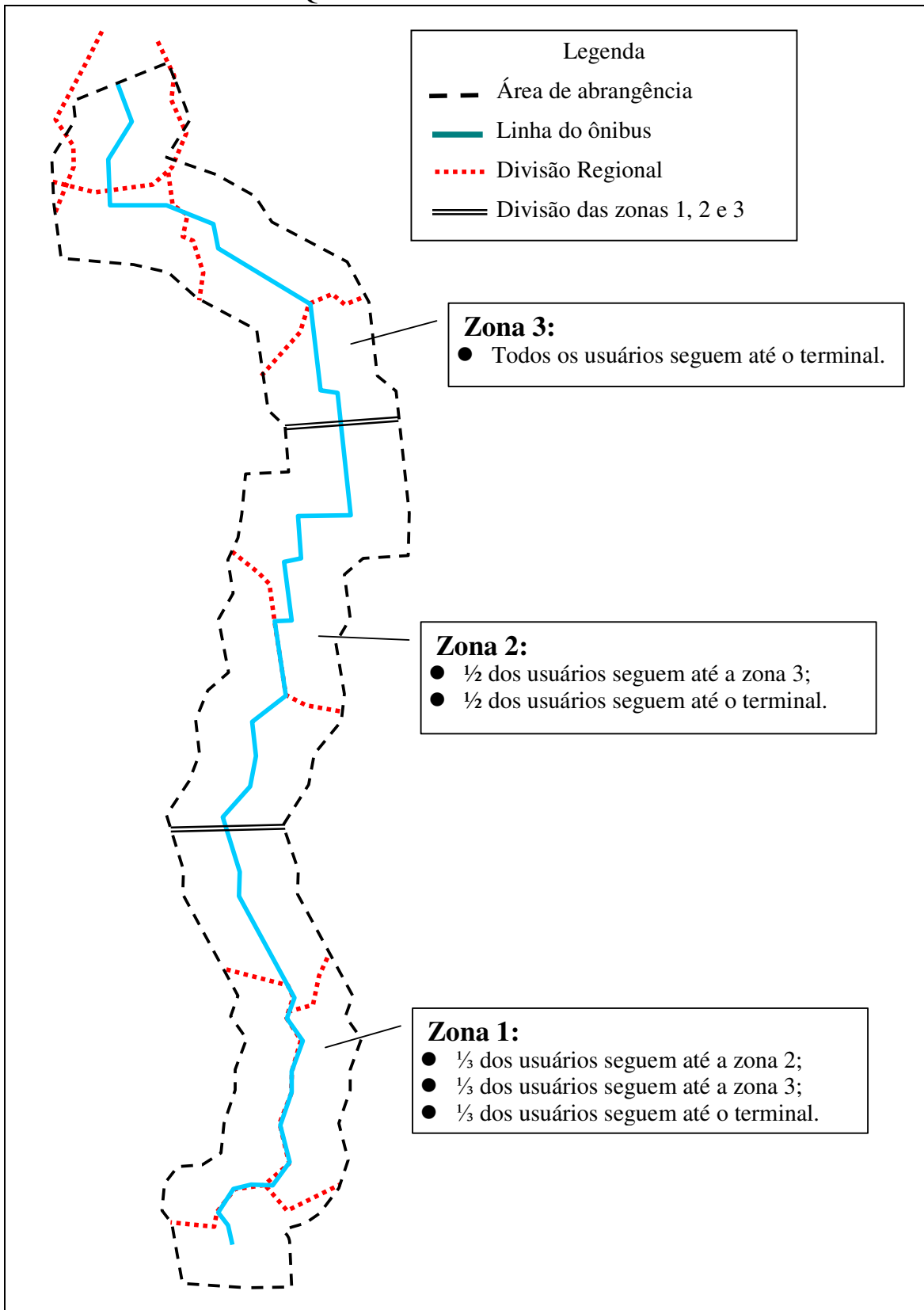


FIGURA 6.10: LINHA 5108 COM SUA ÁREA DE ABRANGÊNCIA



FONTE: Elaboração do autor com o auxílio do Google Maps.

FIGURA 6.11: MODELO ESQUEMÁTICO DA LINHA E REGIÃO



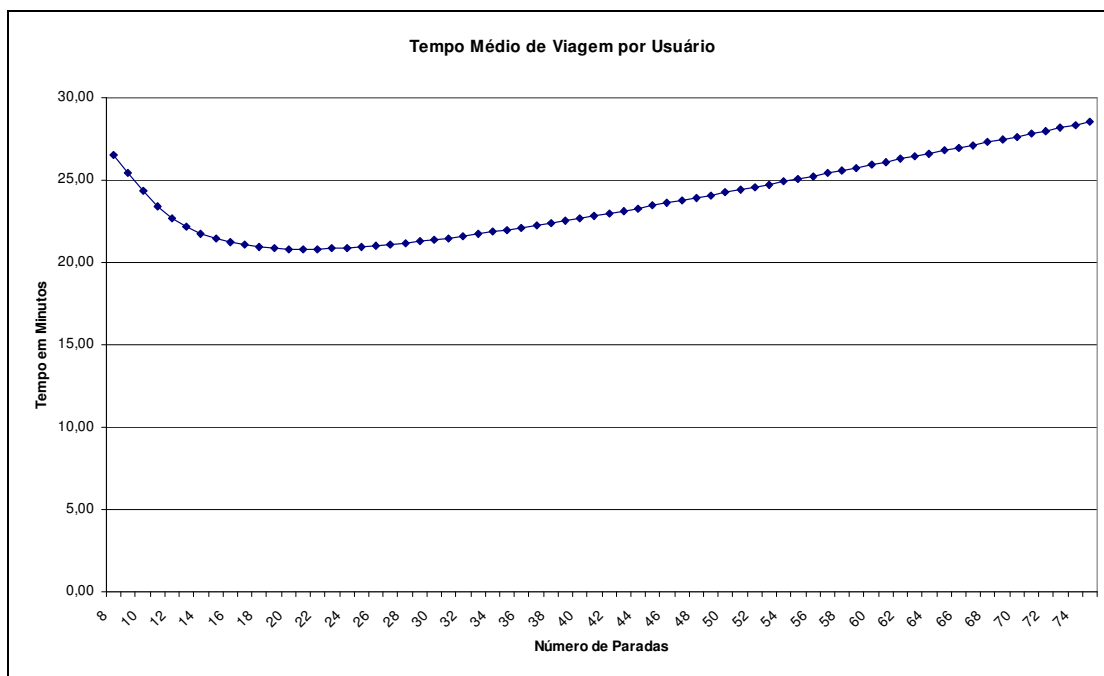
FONTE: Elaboração do autor.



O funcionamento do programa para este modelo é exatamente o mesmo que já foi descrito na seção anterior. Existe a necessidade apenas de informar ao sistema os novos parâmetros de entrada e os pontos significativos da nova rota. O único parâmetro novo é o valor da variável  $c$ , que como já foi explicado anteriormente, determina o ponto em que o usuário desce do ônibus.

O programa foi executado e obteve o tempo ótimo desde oito paradas até o total de setenta e cinco paradas. O resultado pode ser verificado na figura 6.12. Neste caso também podemos perceber que com um número baixo de paradas o tempo é bastante alto. Com o aumento do número de paradas o tempo diminui para depois voltar a subir.

FIGURA 6.12: TEMPO MÉDIO DE VIAGEM POR USUÁRIO



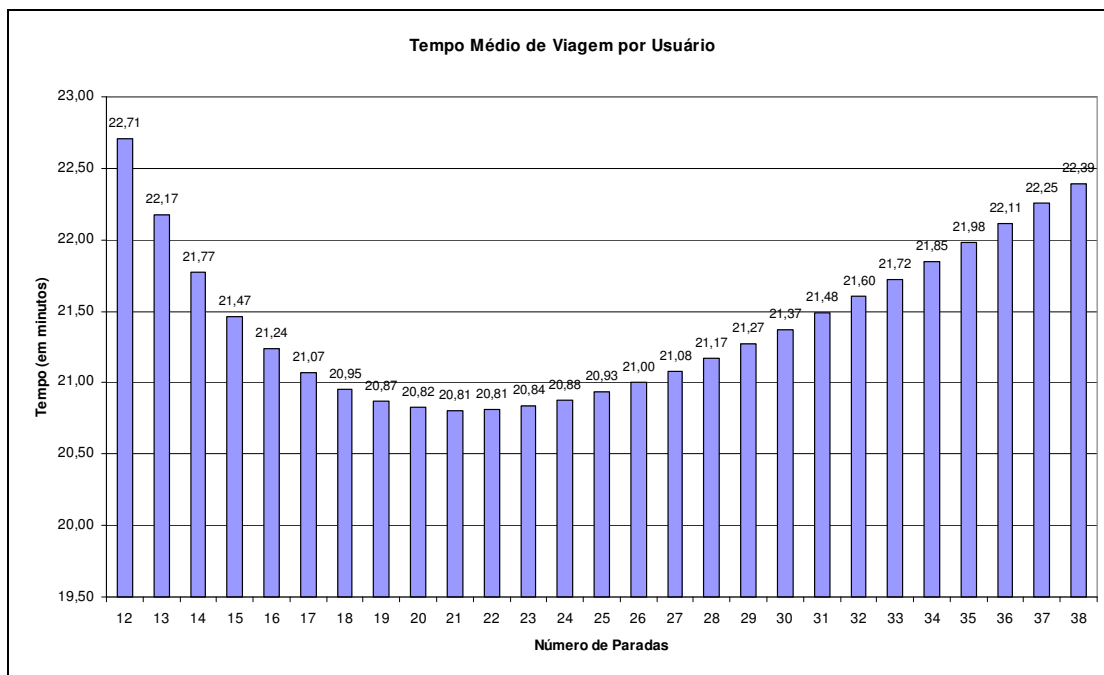
FONTE: Elaboração do autor.

Na figura 6.13 temos um quadro mais reduzido do número de paradas, onde podemos perceber que o menor valor corresponde a vinte e uma paradas, com o tempo médio de viagem por usuário de 20,81 minutos. Esse número corresponde a um espaçamento médio de 750 metros entre as paradas.

Analisando o gráfico da figura 6.13 pode-se perceber que pequenos aumentos no número de paradas não causa grandes aumentos no tempo médio de viagem. Isso nos permite decidir por um número um pouco maior que o ideal a fim de reduzir o percurso caminhado pelo usuário, sem grandes prejuízos no tempo de viagem.

Atualmente existem setenta e uma paradas ao longo dessa linha, o que corresponde a um espaçamento de 240 metros. O tempo médio de viagem por usuário calculado para esse número de paradas é de 27,82 minutos. Se aplicarmos um espaçamento mais amplo, podemos reduzir o tempo médio de viagem em aproximadamente 24%.

FIGURA 6.13: TEMPO MÉDIO DE VIAGEM POR USUÁRIO



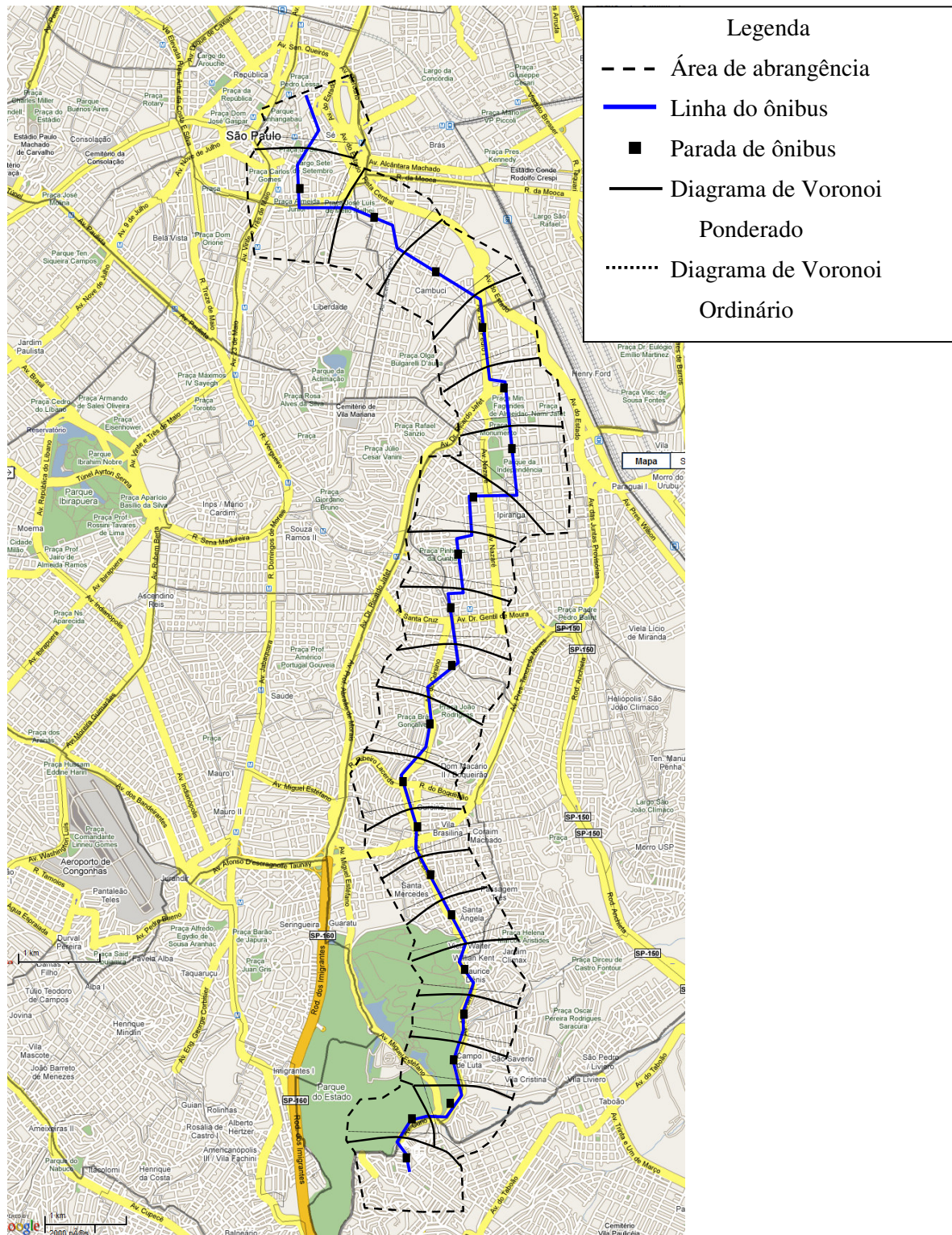
FONTE: Elaboração do autor.

A tabela 6.3 mostra o resultado final obtido pelo sistema para um total de vinte e uma paradas. A distância das paradas é medida a partir do ponto final da linha, que, neste caso, representa o terminal D. Pedro II.

Neste caso, como no modelo anterior, a distância entre as paradas decresce quanto mais distante ela for do final da linha. Isto se deve ao fato de que cada parada próxima ao

ponto final penaliza todos os usuários, causando um aumento de tempo para a maioria da população que utiliza a linha.

FIGURA 6.14: RESULTADO FINAL DA LINHA 5108 COM DIAGRAMA DE VORONOI



FONTE: Elaboração do autor com o auxílio do Google Maps.

A figura 6.14 mostra o resultado final para um total de 21 paradas com o diagrama de Voronoi Ponderado e Ordinário.

## 6.5 Considerações sobre os Resultados

Este trabalho teve por objetivo estabelecer um espaçamento ótimo entre as paradas de transporte coletivo tendo por finalidade a redução do tempo médio de viagem do passageiro.

TABELA 6.3: RESULTADO FINAL PARA 21 PONTOS DE PARADA

Ponto	Distância desde a origem(em metros)	Distância desde a parada anterior
Terminal	0	
Ponto nº 1	1197	1197
Ponto nº 2	2343	1146
Ponto nº 3	3439	1096
Ponto nº 4	4488	1049
Ponto nº 5	5492	1004
Ponto nº 6	6453	961
Ponto nº 7	7372	920
Ponto nº 8	8252	880
Ponto nº 9	9094	842
Ponto nº 10	9900	806
Ponto nº 11	10672	771
Ponto nº 12	11410	738
Ponto nº 13	12116	706
Ponto nº 14	12792	676
Ponto nº 15	13439	647
Ponto nº 16	14058	619
Ponto nº 17	14651	592
Ponto nº 18	15218	567
Ponto nº 19	15760	543
Ponto nº 20	16280	519
Ponto nº 21	16777	497

FONTE: Elaboração do autor

As várias normas pesquisadas neste trabalho indicaram que a maioria dos modelos existentes não possui um enfoque que vise estritamente o passageiro. Alguns desses modelos estabelecem uma distância máxima para que o passageiro possa percorrer a pé, porém sem estabelecer como essa distância máxima é calculada.

Nos vários estudos de caso analisados anteriormente no Capítulo 2, foi visto que em todos eles o resultado indica que deveria haver uma redução no número de paradas ao longo das linhas estudadas.

Os resultados encontrados neste trabalho demonstram também que uma redução no número de paradas reduz o tempo médio de viagem do passageiro até o seu destino. Pôde-se perceber, no estudo de caso da linha 5108 da cidade de São Paulo, que a aplicação do modelo causa uma redução bastante acentuada no número de paradas com uma redução no tempo médio de viagem dos usuários em torno de 24%. Se for considerado um total de aproximadamente seis milhões de passageiros por dia, podemos perceber a importância que uma redução no tempo de viagem do passageiro terá sobre os vários aspectos econômicos e sociais da cidade.

Embora o sistema aqui desenvolvido vise única e exclusivamente o tempo de viagem do passageiro, ele proporciona também outros benefícios, pois reduzindo o número de paradas, são reduzidos também os custos de manutenção e operação dos veículos (freios e combustível gasto na aceleração do veículo), a poluição da atmosfera causada pela emissão de gases, a poluição sonora gerada pela aceleração e desaceleração dos ônibus, etc.

Outro aspecto relevante do trabalho foi a opção pela resolução numérica do problema. Em trabalhos anteriores, a utilização da resolução analítica forçou os autores a buscar simplificações nos modelos a fim de que fosse viável a solução do mesmo. A opção pela resolução numérica permitiu uma liberdade bem maior na elaboração e execução do modelo proposto, possibilitando assim uma maior precisão nos resultados, bem como uma maior proximidade do modelo com a situação real.

## 7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### 7.1 Conclusões

O planejamento urbano tem hoje como uma de suas maiores preocupações o transporte coletivo. O excesso de veículos nas ruas das grandes cidades é uma fonte de problemas de vários tipos tais como: congestionamentos, poluição atmosférica e sonora, acidentes e atropelamentos, etc. Outro problema acarretado pelo excesso de veículos nas vias públicas é o tempo de deslocamento que um cidadão utiliza para ir de um local a outro. Por isso, um sistema de transporte coletivo eficiente e rápido ajudaria a resolver esses problemas.

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo para determinar o espaçamento ideal entre paradas de transporte coletivo cujo objetivo é minimizar o tempo médio de viagem do usuário do sistema de transportes. O modelo foi baseado nos conceitos de Diagramas de Voronoi e de Programação Não-linear. Ele utiliza também a densidade demográfica da região observada como um dos parâmetros para a otimização. Foi implementado um sistema informatizado para a análise do modelo e avaliar os seus resultados.

Esse sistema, além das funções já descritas, determinará também a área de influência de cada parada, ou seja, cada cidadão saberá, através de um diagrama, qual é a parada mais adequada para que ele tome o transporte coletivo e chegue mais rapidamente ao seu destino.

O sistema foi aplicado a duas linhas de ônibus da cidade de São Paulo. A primeira é uma linha hipotética localizada na região Oeste da cidade, que iniciaria no bairro da Lapa e terminaria na futura estação Fradique Coutinho da Linha 4 do Metrô de São Paulo. A segunda linha é uma linha já existente que liga a região Sul ao centro da cidade. O resultado nela obtido reduziu significativamente o número de paradas e por conseqüência reduziu também o tempo médio de viagem em 24%.



Este método aqui desenvolvido pode auxiliar bastante no planejamento do transporte público das cidades, bem como avaliar e aperfeiçoar os sistemas já existentes.

## **7.2 Recomendações e Trabalhos Futuros**

Os resultados obtidos pelo modelo desenvolvido foram bastante satisfatórios. Foi possível reduzir o tempo médio de viagem o passageiro. Porém o sistema ainda não permite o estudo de múltiplas linhas ou a integração com outros sistemas de transporte, tais como o Metrô ou Trem Metropolitano.

Para trabalhos futuros poderiam ser desenvolvidos modelos que contemplassem esses casos e, assim, melhorando o sistema de transporte coletivo de maneira mais global.

Alguns fatores que não foram abrangidos por este estudo poderão ser estudados no futuro, tais como:

- a) Tamanho da frota, espaçamento entre os ônibus e tempo de espera do usuário no ponto;
- b) O estudo sobre uma área que contenha alguma forma de barreira como rio, lago, grande avenida, parque, dentre outras;
- c) A variação da topografia da região atendida, modificando a acessibilidade e a velocidade do usuário.

Todas essas limitações poderão ser abordadas em trabalhos futuros.

A partir do modelo desenvolvido neste trabalho, poderão ser feitas também análises sobre a influência de alguns fatores no resultado obtido. Esses fatores são: o tempo de espera na parada, a frequência do ônibus, a velocidade do passageiro a pé e a velocidade média do ônibus durante o percurso.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMMONS, D. N. **Municipal benchmarks: Assessing local performance and establishing community standards.** (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 2001.

ANDRADE, K. R.; PAULA, V. A.; VILLELA, P. A.; MESQUITA, A. P. **Problemas relacionados aos pontos de parada do transporte público nas cidades de porte médio.** IV Seminário Internacional da LARES, São Paulo, ago. 2004.

ANTP – ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE TRANSPORTES PÚBLICOS. **Pontos de parada de ônibus urbano. Contribuição para sua implantação.** Caderno técnico n. 2, São Paulo – SP, 1995.

BENN, H. **Bus Route Evaluation Standards.** Synthesis of Transit Practice 10. Transit Cooperative Research Program, Transportation Research Board, National Research Council, USA, 1995.

BERMAN, O., DREZNER, Z. AND WESOLOWSKY, G.O. **Routing and location on a network with hazardous threats,** Journal of the Operational Research Society (2000) 51, 1093-1099

BERTINI, R. L. **Bus Stop Spacing.** Intelligent Transportation Systems Laboratory at Portland State University, 2004.

BEZ, E.T., **Procedimento de representação de soluções em otimização global: aplicação em modelos de interação espacial.** Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Produção, Florianópolis, 2005.

BODIN, L.D., GOLDEN, B ; ASSAD, A, BALL, M. **Routing and scheduling of vehicles and crews: The state of the art.** Computers and Operations Research, vol.10, n.2., 1983.

CENTRAL OHIO TRANSIT AUTHORITY. **Planning and development guidelines for public transit.** COTA, Columbus, OH, 1999.

CUNHA, C.B. **Algoritmos para roteamento e programação de veículos no contexto da distribuição física.** São Paulo: EPUSP, Departamento de Engenharia de Transportes. Dissertação de Mestrado, 1991.

DOWSLAND, K.A. **Simulated Annealing,** In Reeves, C.R. (ed), Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems, Blackwell Scientific Publications, 20-69, 1993.

EBTU – EMPRESA BRASILEIRA DE TRANSPORTES URBANOS. **Planejamento e Operação; Elementos Intervenientes.** v. 2. Empresa Brasileira dos Transportes Urbanos: Brasília, DF, 1998.



EL-GENEIDY, A. M.; KIMPEL, T. J.; STRATHMAN, J. G. **Empirical Analysis of the Effects of Bus Stop Consolidation on Passenger Activity and Transit Operations**. College of Urban and Public Affairs: Portland State University, 2005.

FISHER, M.L. **The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems**. *Management Science*, 27(1):1-17, 1981.

FLEISCHER, M. 1995. **Simulated annealing: past, present, and future**. In *Proceedings of the 27th Conference on Winter Simulation*, Arlington, Virginia, United States, 1995.

FLETCHER, R. ,REEVES, C.M. **Function minimization by conjugate gradients**. *Computer Journal*, 7 (149--154), 1964.

FRIELANDER, A. **Elementos de Programação Não Linear**. Campinas, SP: Editora Unicamp, 1994.

FURTH, P. G; RAHBEE, A. B. **Optimal bus stop spacing through dynamic programming and geographic modeling**. *Transportation Research Record*, n. 1731, p. 15-22, 2000.

GALVÃO, L. C. **Dimensionamento de Sistemas de Distribuição Através do Diagrama Multiplicativo de Voronoi com Pesos**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC, 2003.

GENDREAU, M., HERTZ, A., LAPORTE, G. **A tabu search heuristic for the routing problem**. *Management Science*, (10):1276-1290, 1994.

**Goldberg, Marco Cesar and Luna, Henrique Pacca L.**, “Otimização Combinatória e Programação Linear – Modelos e Algoritmos”, Editora Campus, 2000.

GOLDBARG, MARCO CESAR , LUNA, HENRIQUE PACCA L., **Otimização Combinatória e Programação Linear – Modelos e Algoritmos**, Editora Campus, 2000.

GOLDBERG, D.E. **Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning**. New York, Addison-Wesley, 412 p., 1989.

GOLDEN, B.; ASSAD, A. LEVY, L., GHEYSENS, F. **The Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem**, *Comput. & Ops Res.* Vol. 11, nº 1, pp.49-66, 1984.

GOLDEN, B.L., ASSAD, A. **Vehicle routing: methods and studies**. North Holland, Amsterdã, Países Baixos, 1988.

GONÇALVES, N.M., **Economias de escala em uma linha de ônibus urbano: O Enfoque Micro-Analítico**. Dissertação submetida à Universidade Federal De Santa Catarina para obtenção do Grau De Mestre Em Engenharia., Florianópolis, 1995.

GRACIOLLI, O. D. **Dimensionamento e Otimização de Sistemas de Distribuição Física de Produtos - Um Enfoque Contínuo**. Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas, UFSC, 1998.

HOOKE, R. JEEVES, T.A. **Direct search solution of numerical and statistical problems.** Journal of the Association for Computing Machinery 1962; 8, p.212-229.

IPEA – INSTITUTO DE PESQUISAS ECONÔMICAS APLICADAS / ANTP – AGÊNCIA NACIONAL DE TRANSPORTES PÚBLICOS. **Redução das deseconomias urbanas com a melhoria do transporte público.** Revista dos Transportes Públicos, n. 21 (1), pp. 35-92. São Paulo, 1999.

KEHOE, O. V. **Effects of Bus Stop Consolidation on Transit Speed and Reliability: a Test Case.** A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Civil Engineering University of Washington, 2004.

KUAH, G. K.; PERL, J. **Optimization of feeder bus routes and bus-stop spacing.** Journal of Transportation Engineering. vol. 114, n. 3, p. 341-354, 1988.

LINDAU, L. A.; KÜHN, F. **Sistemas prioritários para ônibus: tendências decorrentes da prática européia no limiar do século XXI.** Revista dos Transportes Públicos, São Paulo, v. 22, n. 2, p. 81-90, 2000.

LUENBERGER, D.G. **Linear and Nonlinear Programming.** Second Edition, Springer Science + Business Media Inc., 2005

MERCEDES-BENZ DO BRASIL S. A. **Manual de Sistema de Transporte Coletivo Urbano por Ônibus – Planejamento e Operação.** São Bernardo do Campo, SP, 1987.

MURRAY, A. **A coverage model for improving public transit system accessibility and expanding access.** Annals of Operations Research, vol. 123, p. 143-156, 2003.

MURRAY, A.; WU, X. **Accessibility tradeoffs in public transit planning.** Journal of Geographical Systems, n. 5(1), p. 93-107, 2003.

NOVAES, A.G. **Logistics Districting With Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams.** XI Congreso Panamericano de Ingeniería de Tránsito y Transporte, Gramado, RS. 19 al 24 de Noviembre del 2000.

NOVAES, A.G. **Sistemas Logísticos: Transporte, Armazenamento e Distribuição Física de Produtos.** São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1989.

NOVAES, A.G.; CURSI, J. E. S.; GRACIOLLI, O. D. **A continuous approach to the design of physical distribution systems.** Computers & Operations Research, 2000.

NOVAES, A.G., CURSI, J.E.S., SILVA, A.C.L., SOUZA, J.C., **Solving continuous location-districting problems with Voronoi diagrams.** Computers & Operations Research, Volume 36, Issue 1, January 2009, Pages 40-59.

NOVAES, A.G.; GRACIOLLI, O. D. **Designing Multi-Vehicle Delivery Tours in a Grid-Cell Format.** European Journal of Operational Research, n. 119, p. 613-634 , 1999.

NTU - Secretaria de Desenvolvimento Urbano da Presidência da República – Núcleo de Transporte Urbano. **Transporte Público Urbano: crise e oportunidades**. Associação Nacional das Empresas de Transportes Urbanos. Versão Preliminar. Brasília, 1999.

OKABE, A.; BOOTS, B.; SUGIHARA, K. **Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagrams**. John Wiley & Sons, Chichester. New York – Brisbane – Toronto – Singapore, 1992.

OLIVEIRA<sup>a</sup>, H.F.; GONÇALVES, M.B.; CURSI, E.S.; NOVAES, A.G; **Minimize the travel time of all passengers of a bus line using concepts of Voronoi Diagrams**. Proceedings of the Second International Conference on Multidisciplinary Design Optimization and Applications, Gijon, Spain, 2008.

OLIVEIRA<sup>b</sup>, H.F.; GONÇALVES, M.B.; CURSI, E.S.; NOVAES, A.G; **A Model based in Voronoi Diagrams Find the Best Bus-stop Spacing to Minimize the Total Travel Time of the Travelers**. Proceedings of the International Conference on Engineering Optimization - EngOpt 2008, Rio de Janeiro, Brazil, 2008.

PAMPLONA, M. R. **Considerações sobre O emprego dos diferentes tipos de ônibus no transporte público urbano**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2000.

PINTO, A. B.; DIÓGENES, M. C.; LINDAU, L. A. **Quantificação dos impactos de pólos geradores de tráfego**. Porto Alegre: Notas de aula, 2003.

PRESS, W.H., TEULOSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P. **Numerical Recipes in C++**. The Art of Scientific Computing. Second Edition, Cambridge University Press, 2002

REILLY, J. M. **Transit service design and operation practices in western european countries**. Transportation Research Record, 1604, 3-8, 1997.

ROCHAT, Y., SEMET, F. **A tabu search approach for delivering pet food and flour in Switzerland**. Journal of the Operational Research Society, 45(11):1233-1246, 1994.

SAKA, A. A. **Model for determining optimum bus-stop spacing in urban areas**. Journal of Transportation Engineering, n. 127 (3), pp. 195–199, USA , 2001.

SEDU/PR ; NTU - Secretaria de Desenvolvimento Urbano da Presidência da República – Núcleo de Transporte Urbano. **Relatório Técnico – Prioridade para o Transporte Coletivo Urbano**. Secretaria Especial de Desenvolvimento Urbano da Presidência da República e Associação Nacional de Empresas de Transportes Urbanos, Brasília, DF, 2002.

SILVA, D.F.P., **Sistemas de Informação Geográfica para Transportes. Uma Aplicação aos Transportes Urbanos de Guimarães**. Dissertação de Mestrado, Instituto Superior de Estatística e Gestão, Universidade Nova Lisboa, Janeiro de 2006.

SPECIAL REPORT 257. **Making transit work: insight from Western Europe, Canada, and the United States.**, Committee for an International Comparison of National Policies and

Expectations Affecting Public Transit, Transportation Research Board, National Research Council, USA, 2001.

SUZUKI, T. **Optimum locational patterns of bus-stops for many-to-travel demand.** Papers of the Annual Conference of the City Planning Institute of Japan, p-247-252, 1987

TEXAS TRANSPORTATION INSTITUTE (TTI). **Guidelines for the Location and Design of Bus Stops.** TCRP Report 19, Transit Cooperative Research Program, Transportation Research Board, National Research Council, 1996.

VASCONCELLOS, E. A. **Transporte urbano nos países em desenvolvimento: reflexões e propostas.** São Paulo: Annablume, 2000.

WANGENHEIM, A. Notas de Aula. Departamento de Informática e Estatística, UFSC, 2004

## ANEXO 1

### Valores numéricos do Estudo de Caso 2

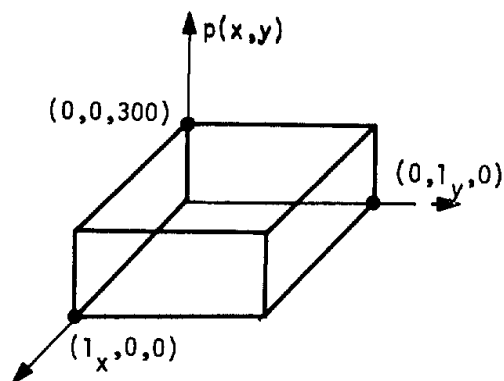
#### Valores para os Parâmetros utilizados no Exemplo Numérico:

Símbolo	Unidade	Descrição
$l_y$	16 km	Dimensão vertical da área de serviço
$l_x$	16 km	Dimensão horizontal da área de serviço
$V_a$	5,0 km/hora	Velocidade a pé do usuário
$\delta$	0,01 horas/parada	Tempo perdido em cada parada
$U$	40 km/hora	Velocidade média do ônibus
$\lambda_o$	\$35/veículo-hora	Custo operacional do ônibus
$\lambda_a$	\$8/passageiro-hora	Valor do tempo gasto pelo usuário até a parada
$\lambda_r$	\$4/passageiro-hora	Valor do tempo gasto pelo usuário no ônibus
$\lambda_w$	\$8/passageiro-hora	Valor do tempo de espera do usuário

Funções de distribuição de demanda utilizadas

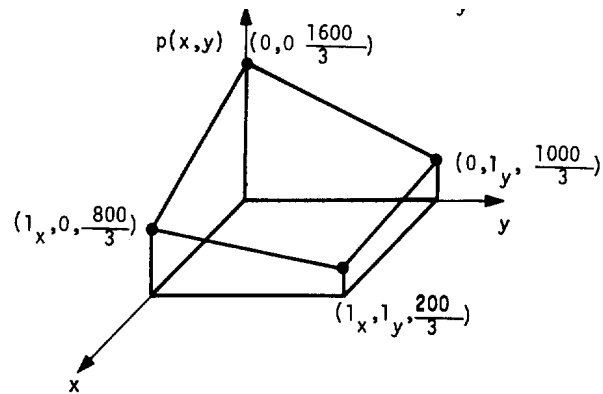
#### Exemplo 1:

$$p(x,y) = 300$$



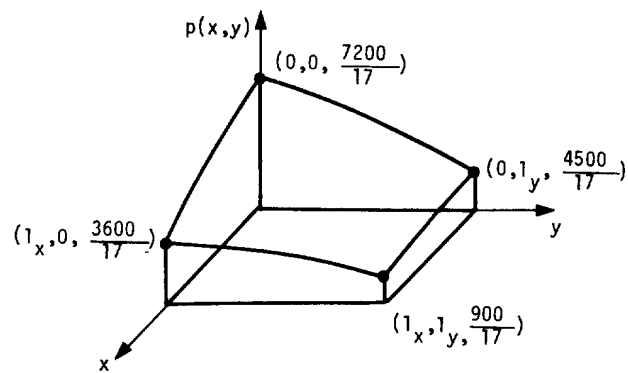
#### Exemplo 2:

$$p(x,y) = \frac{1600}{3} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{x}{l_x} - \frac{3}{8} \frac{y}{l_y} \right]$$



**Exemplo 3:**

$$p(x,y) = \frac{7200}{17} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l_x} \right)^2 - \frac{3}{8} \left( \frac{y}{l_y} \right)^2 \right]$$



### Resultado da Otimização

Caso 1: O espaçamento é constante ao longo da linha e se mantém constante em todas as linhas, ou seja,  $s(x,y) = s$ .

### Resultado do espaçamento

Exemplo	$s^*$ (Km)
1	0,89
2	0,84
3	0,85

Caso 2: O espaçamento é constante ao longo de uma linha, mas pode variar de uma linha para outra, ou seja,  $s(x,y) = s(x)$ .

**Resultado do espaçamento**

<b>Distância até o final da linha férrea</b>	<b>Exemplo 1</b>	<b>Exemplo 2</b>	<b>Exemplo 3</b>
<b>x (km)</b>	<b>s*(x) (km)</b>	<b>s*(x) (km)</b>	<b>s*(x)(km)</b>
1	0,89	0,86	0,86
2	0,89	0,86	0,86
3	0,89	0,85	0,86
4	0,89	0,85	0,86
5	0,89	0,85	0,86
6	0,89	0,85	0,86
7	0,89	0,85	0,86
8	0,89	0,84	0,86
9	0,89	0,84	0,85
10	0,89	0,84	0,85
11	0,89	0,83	0,85
12	0,89	0,83	0,85
13	0,89	0,82	0,84
14	0,89	0,82	0,84
15	0,89	0,81	0,83
16	0,89	0,80	0,82

Caso 3: Considera-se que a distribuição de demanda pode variar entre rotas e ao longo de cada rota.

**Resultado do espaçamento: exemplo 2**

		$s^*(x, y)$ (km)							
		1	3	5	7	9	11	13	15
$x$ (km)	$y$ (km)								
1	1	1.75	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.73
3	1	1.63	1.63	1.63	1.63	1.62	1.62	1.62	1.62
5	1	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.49	1.49	1.49
7	1	1.36	1.36	1.36	1.36	1.36	1.35	1.35	1.35
9	1	1.21	1.21	1.20	1.20	1.20	1.20	1.19	1.19
11	1	1.03	1.03	1.03	1.02	1.02	1.02	1.01	1.00
13	1	0.81	0.81	0.81	0.80	0.80	0.80	0.79	0.78
15	1	0.51	0.50	0.50	0.50	0.49	0.48	0.47	0.46

**Resultado do espaçamento: exemplo 3**

		$s^*(x, y)$ (km)							
		1	3	5	7	9	11	13	15
$x$ (km)	$y$ (km)								
1	1	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74
3	1	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.62
5	1	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	1.49
7	1	1.36	1.36	1.36	1.36	1.36	1.36	1.36	1.35
9	1	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21	1.20	1.20	1.19
11	1	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.02	1.02	1.01
13	1	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.80	0.79
15	1	0.51	0.50	0.50	0.50	0.49	0.48	0.48	0.48



## ANEXO 2

### Linha alimentadora – Itinerário

1.	R. Martim Tenório	ir por 51 m total 51 m
2.	R. Dr. Cincinato Pomponet	ir por 85 m total 0,1 km
3.	R. Herbart	ir por 82 m total 0,2 km
4.	Praça Melvin Jones	ir por 0,1 km total 0,4 km
5.	R. Jeroaquara	ir por 0,1 km total 0,5 km
6.	R. Joaquim Machado	ir por 93 m total 0,6 km
7.	R. Catão	ir por 0,6 km total 1,2 km
8.	R. Fábيا	ir por 0,1 km total 1,3 km
9.	R. Marco Aurélio	ir por 0,8 km total 2,1 km
10.	R. Aurélia	ir por 0,7 km total 2,9 km
11.	R. Heitor Penteado	ir por 0,7 km total 3,5 km
12.	R. Paulistânia	ir por 0,3 km total 3,8 km
13.	R. Harmonia	ir por 0,5 km total 4,3 km
14.	R. Rodésia	ir por 0,1 km total 4,4 km
15.	R. Girassol	ir por 0,2 km total 4,6 km
16.	R. Purpurina	ir por 0,2 km total 4,9 km
17.	R. Fradique Coutinho	ir por 1,5 km total 6,4 km

## ANEXO 3

### Linha nº 5108-10 – Itinerário

TP/TS - TERM. PQ. D. PEDRO II		TS/TP - JD. CELESTE	
AV. BRASILIA	0 → 0	TERM. PARQUE DOM PEDRO II	0 → 0
PCA. CELITE	0 → 0	AV. DO EXTERIOR	775 → 1026
AV. CURIO	1 → 517	R. ALEXANDRIA	1 → 61
AV. CURSINO	6709 → 348	R. FREDERICO ALVARENGA	64 → 308
R. DR. OCTACILIO CAMARA SILVEIRA	1 → 198	AV. PREF. PASSOS	1517 → 276
R. VERGUEIRO	6853 → 6240	R. TEIXEIRA LEITE	719 → 201
R. MQ. DE OLINDA	1 → 192	R. DO LAVAPES	144 → 1144
R. SALVADOR SIMOES	444 → 1	LGO. CAMBUCCI	276 → 416
PCA. PINHEIRO DA CUNHA	1065 → 1123	R. INDEPENDENCIA	748 → 506
R. SALVADOR SIMOES	1470 → 1312	AV. D. PEDRO I	488 → 1486
R. VIEIRA DE ALMEIDA	195 → 384	R. VASCONCELOS DRUMOND	1 → 122
R. GAMA LOBO	1035 → 543	PCA. DO MONUMENTO	24 → 0
R. MOREIRA E COSTA	156 → 734	AV. NAZARE	0 → 522
R. BOM PASTOR	1474 → 85	R. PE. MARCHETTI	304 → 1
R. TABOR	188 → 15	R. DR. MARIO VICENTE	606 → 1217
AV. D. PEDRO I	1453 → 427	R. VIEIRA DE ALMEIDA	195 → 324
AC. ACESSO A	19 → 1	R. SALVADOR SIMOES	1312 → 1470
R. INDEPENDENCIA	597 → 433	PCA. PINHEIRO DA CUNHA	1065 → 1123
R. CLIMACO BARBOSA	1087 → 1	R. SALVADOR SIMOES	1 → 327
LGO. CAMBUCCI	432 → 112	R. DR. ELISIO DE CASTRO	227 → 1
R. LUIS GAMA	643 → 371	R. VERGUEIRO	6118 → 6465
R. SILVEIRA DA MOTA	1 → 143	R. STA. CRUZ	2380 → 2442
R. OTTO DE ALENCAR	363 → 1	AV. CURSINO	1 → 6709
R. JUNQUEIRA FREIRE	1 → 51	AV. CURIO	517 → 1
R. BR. DE IGUAPE	999 → 421	PCA. CELITE	0 → 0
R. CONS. FURTADO	163 → 1	AV. BRASILIA	0 → 0
VIAD. SHUHEI UETSUKA	58 → 1		
R. CONS. FURTADO	1399 → 1030		
PCA. DR. JOAO MENDES	265 → 294		
R. ANITA GARIBALDI	208 → 1		
PCA. CLOVIS BEVILAQUA	498 → 388		
AV. RANGEL PESTANA	1 → 189		
R. DR. BITTENCOURT RODRIGUES	0 → 149		
PCA. FERNANDO COSTA	0 → 322		
R. GEN. CARNEIRO	1 → 78		
AC. ACESSO A	0 → 0		
TERM. PARQUE DOM PEDRO II	0 → 0		

\* **logradouro - nº inicial -> final**

## ANEXO 4

### Resultado dos Testes

```

=====
==
Função avaliada: Davis
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.000100096647
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0000000000
x[2]= 0.0000000003
Hora de Término: 14:24:40
=====
==
Função avaliada: Davis
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.000100096647

```

```

    Ponto Ótimo Final
x[1]=          0.0000003006
x[2]=          -0.0000001539
Hora de Término: 14:24:42
=====
==
Função avaliada:  Davis
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Armijo
TMax =  1.00000000
M1 =    0.10000000
M2 =    0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err =          0.00000100
NitMax =          10000  Número máximo de interações
NitIguMax =       200  Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000      Limite Superior =  1000

Aplicar análise da População
TotPop =          100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função =          0.000100096647
    Ponto Ótimo Final
x[1]=          -0.0000000020
x[2]=          0.0000000012
Hora de Término: 14:24:45
=====
==
Função avaliada:  Davis
Método:          Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax =  1.00000000
M1 =    0.10000000
M2 =    0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err =          0.00000100
NitMax =          10000  Número máximo de interações
NitIguMax =       200  Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000      Limite Superior =  1000

Aplicar análise da População
TotPop =          100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função =          0.000100096647
    Ponto Ótimo Final

```

```

x[1]=          -0.0000001479
x[2]=          0.0000000616
Hora de Término: 14:24:50
=====
==
Função avaliada:  Davis
Método:          Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++++
-----
Valor da função = 0.000100096647
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0000000349
x[2]= 0.0000000465
Hora de Término: 14:25:01
=====
==
Função avaliada:  Davis
Método:          Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++++
-----
Valor da função = 0.000100096647
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0000000197

```

```

x[2]=          0.0000001637
Hora de Término: 14:25:04
=====
==
Função avaliada:  Davis
Método:          Davidson-Fletcher-Powel
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax =  1.00000000
M1 =    0.10000000
M2 =    0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err =          0.00000100
NitMax =          10000  Número máximo de interações
NitIguMax =        200  Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000      Limite Superior =  1000

Aplicar análise da População
TotPop =          100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função =          0.009715909878
Ponto Ótimo Final
x[1]=          1.0369421316
x[2]=          -2.9622191911
Hora de Término: 14:25:09
=====
==
Função avaliada:  Davis
Método:          Davidson-Fletcher-Powel
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax =  1.00000000
M1 =    0.10000000
M2 =    0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err =          0.00000100
NitMax =          10000  Número máximo de interações
NitIguMax =        200  Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000      Limite Superior =  1000

Aplicar análise da População
TotPop =          100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função =          0.009722129614
Ponto Ótimo Final
x[1]=          1.6111082983
x[2]=          -2.6963168038

```

Hora de Término: 14:25:13

=====

==

Função avaliada: Davis  
 Método: Davidson-Fletcher-Powell  
 Cálculo do Passo: Armijo  
 TMax = 1.00000000  
 M1 = 0.10000000  
 M2 = 0.70000000  
 DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:

Err = 0.00000100  
 NitMax = 10000 Número máximo de interações  
 NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):

Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População

TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++

-----

Valor da função = 0.003939204574

Ponto Ótimo Final

x[1]= 0.0264902029

x[2]= 0.0560244352

Hora de Término: 14:25:17

=====

==

Função avaliada: Rastrigin  
 Método: Gradiente  
 Cálculo do Passo: Wolfe  
 TMax = 1.00000000  
 M1 = 0.10000000  
 M2 = 0.70000000  
 DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:

Err = 0.00000100  
 NitMax = 10000 Número máximo de interações  
 NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):

Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População

TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++

-----

Valor da função = 1.242020982729

Ponto Ótimo Final

x[1]= -0.0659383852

x[2]= -0.9805153121

Hora de Término: 14:26:01

```

=====
==
Função avaliada: Rastringin
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 1.619281741915
Ponto Ótimo Final
x[1]= 1.0488574521
x[2]= -0.0801568740
Hora de Término: 14:26:08
=====
==
Função avaliada: Rastringin
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 1.745698867239
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.9158163950
x[2]= 0.0921072457
Hora de Término: 14:26:13

```



```

=====
==
Função avaliada: Rastringin
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.000000000000
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0000000000
x[2]= 0.0000000000
Hora de Término: 14:26:19
=====
==
Função avaliada: Rastringin
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.000000000000
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0000000000
x[2]= 0.0000000000
Hora de Término: 14:26:23

```

```

=====
==
Função avaliada: Rastringin
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.015364092730
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0117958941
x[2]= 0.0107752446
Hora de Término: 14:26:28

=====
==
Função avaliada: Rosenbrock
Método: Gradiente
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.055730859957
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.9933657409
x[2]= 1.0220646193
Hora de Término: 14:36:17

```

```

=====
==
Função avaliada: Rosenbrock
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.301970518766
Ponto Ótimo Final
x[1]= 1.0418141581
x[2]= 1.0320520982
Hora de Término: 14:36:25
=====
==
Função avaliada: Rosenbrock
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.004615960141
Ponto Ótimo Final
x[1]= 1.0062925509
x[2]= 0.9976255704
Hora de Término: 14:36:32

```

```

=====
==
Função avaliada: Rosenbrock
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.451536210064
Ponto Ótimo Final
x[1]= 1.0000000000
x[2]= 1.0629396347
Hora de Término: 14:36:40
=====
==
Função avaliada: Rosenbrock
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 1.065851533075
Ponto Ótimo Final
x[1]= 1.0051354011
x[2]= 1.0938699418
Hora de Término: 14:36:47

```

```

=====
==
Função avaliada: Rosenbrock
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 1.352751309939
Ponto Ótimo Final
x[1]= 1.0507853476
x[2]= 0.0392807016
Hora de Término: 14:36:54

=====
==
Função avaliada: Griewank
Método: Gradiente
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = -1.000000000000
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0000000021
x[2]= -0.0000000258
Hora de Término: 14:39:24

```

```

=====
==
Função avaliada: Griewank
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = -1.000000000000
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0000000099
x[2]= -0.0000000000
Hora de Término: 14:39:28
=====
==
Função avaliada: Griewank
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = -1.000000000000
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0000000091
x[2]= -0.0000000030
Hora de Término: 14:39:31

```

```

=====
==
Função avaliada: Griewank
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = -1.000000000000
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0000006881
x[2]= 0.000000954
Hora de Término: 14:39:41
=====
==
Função avaliada: Griewank
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = -0.99999999658
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0000236085
x[2]= 0.0000154302
Hora de Término: 14:39:44

```

```

=====
==
Função avaliada: Griewank
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = -1.000000000000
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0000000035
x[2]= -0.0000001549
Hora de Término: 14:39:47
=====
==
Função avaliada: Griewank
Método: Davidson-Fletcher-Powell
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = -1.000000000000
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0000003182
x[2]= -0.0000007213
Hora de Término: 14:39:54

```



```

=====
==
Função avaliada: Griewank
Método:          Davidson-Fletcher-Powel
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = -0.99999999751
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0000171342
x[2]= -0.0000198421
Hora de Término: 14:40:01
=====
==
Função avaliada: Griewank
Método:          Davidson-Fletcher-Powel
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = -1.000000000000
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0000008254
x[2]= -0.0000005726
Hora de Término: 14:40:07

```

```

=====
==
Função avaliada: Ackley
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 5.180918588776
Ponto Ótimo Final
x[1]= -1.1776958139
x[2]= 0.6964678226
Hora de Término: 14:40:20
=====
==
Função avaliada: Ackley
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 3.911957325043
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.7032908746
x[2]= -0.2657388236
Hora de Término: 14:40:23

```

```

=====
==
Função avaliada: Ackley
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.387898390177
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0721409458
x[2]= 0.0341875433
Hora de Término: 14:40:25
=====
==
Função avaliada: Ackley
Método:          Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 2.790945224044
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0129352890
x[2]= 1.0418580537
Hora de Término: 14:40:29

```

```

=====
==
Função avaliada: Ackley
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.388247011052
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0057251387
x[2]= -0.0798235141
Hora de Término: 14:40:32
=====
==
Função avaliada: Ackley
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 2.594182278140
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0095516404
x[2]= 0.9293913532
Hora de Término: 14:40:35

```

```

=====
==
Função avaliada: Ackley
Método:          Davidson-Fletcher-Powel
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 2.686537433106
Ponto Ótimo Final
x[1]= -0.0309260075
x[2]= -1.0083646354
Hora de Término: 14:40:41
=====
==
Função avaliada: Ackley
Método:          Davidson-Fletcher-Powel
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 3.641424568794
Ponto Ótimo Final
x[1]= 1.0076793415
x[2]= -0.9369065738
Hora de Término: 14:40:45

```

```
=====
==
```

```
Função avaliada: Ackley
Método:          Davidson-Fletcher-Powel
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100
```

```
Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função
```

```
Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000
```

```
Aplicar análise da População
TotPop = 100 Total de números a serem gerados
```

```
+++++
-----
```

```
Valor da função = 0.007332780837
Ponto Ótimo Final
x[1]= 0.0008867916
x[2]= -0.0023718079
Hora de Término: 14:40:50
```

```
=====
==
```

```
Função avaliada: Schwefel
Método:          Gradiente
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100
```

```
Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função
```

```
Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000
```

```
Aplicar análise da População
TotPop = 1000 Total de números a serem gerados
```

```
+++++
-----
```

```
Valor da função = 0.025353721554
Ponto Ótimo Final
x[1]= 421.1412406806
x[2]= 420.5552272312
```

Hora de Término: 14:50:28

=====

==

Função avaliada: Schwefel  
 Método: Gradiente  
 Cálculo do Passo: Goldstein  
 TMax = 1.00000000  
 M1 = 0.10000000  
 M2 = 0.70000000  
 DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:

Err = 0.00000100  
 NitMax = 10000 Número máximo de interações  
 NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):

Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População

TotPop = 1000 Total de números a serem gerados

+++++

-----

Valor da função = 0.168978202795

Ponto Ótimo Final

x[1]= 420.0333623681

x[2]= 420.2872132324

Hora de Término: 14:51:05

=====

==

Função avaliada: Schwefel  
 Método: Gradiente  
 Cálculo do Passo: Armijo  
 TMax = 1.00000000  
 M1 = 0.10000000  
 M2 = 0.70000000  
 DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:

Err = 0.00000100  
 NitMax = 10000 Número máximo de interações  
 NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):

Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População

TotPop = 1000 Total de números a serem gerados

+++++

-----

Valor da função = 0.034120197758

Ponto Ótimo Final

x[1]= 420.4810213298

x[2]= 420.7888194267

Hora de Término: 14:51:43

```

=====
==
Função avaliada: Schwefel
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Wolfe
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 1000 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.000038469122
Ponto Ótimo Final
x[1]= 420.9718611537
x[2]= 420.9590802437
Hora de Término: 14:52:02
=====
==
Função avaliada: Schwefel
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Goldstein
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIguarMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 1000 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.000025588812
Ponto Ótimo Final
x[1]= 420.9680499396
x[2]= 420.9695042522
Hora de Término: 14:52:21

```



```
=====
==
Função avaliada: Schwefel
Método: Fletcher-Reeves/Gradiente Conjugado
Cálculo do Passo: Armijo
TMax = 1.00000000
M1 = 0.10000000
M2 = 0.70000000
DtMin = 0.00000100

Critérios de Parada:
Err = 0.00000100
NitMax = 10000 Número máximo de interações
NitIgualMax = 200 Número máximo de interações sem mudança no valor
da função

Região de Busca Limitada(Dist. Uniforme):
Limite Inferior = -1000 Limite Superior = 1000

Aplicar análise da População
TotPop = 1000 Total de números a serem gerados

+++++
-----
Valor da função = 0.000025884715
Ponto Ótimo Final
x[1]= 420.9700814544
x[2]= 420.9674728026
Hora de Término: 14:52:40
```

## ANEXO 5

<b>Área Total, População Residente e Densidade Demográfica Município de São Paulo e Distritos Municipais Ano de 2000</b>					
<b>Distritos</b>	<b>População</b>	<b>Área em Hectare</b>	<b>Densidade Populacional</b>		
			<b>Hab/Ha</b>	<b>Hab/m<sup>2</sup></b>	<b>Hab/Km<sup>2</sup></b>
<b>Município de S. Paulo</b>	<b>10.434.252</b>	<b>150.900</b>	<b>69,15</b>	<b>0,0069</b>	<b>6.915</b>
Água Rasa	85.896	690	124,49	0,0124	12.449
Alto de Pinheiros	44.454	770	57,73	0,0058	5.773
Anhanguera	38.427	3.330	11,54	0,0012	1.154
Aricanduva	94.813	660	143,66	0,0144	14.366
Artur Alvim	111.210	660	168,50	0,0169	16.850
Barra Funda	12.965	560	23,15	0,0023	2.315
Bela Vista	63.190	260	243,04	0,0243	24.304
Belém	39.622	600	66,04	0,0066	6.604
Bom Retiro	26.598	400	66,50	0,0067	6.650
Brás	25.158	350	71,88	0,0072	7.188
Brasilândia	247.328	2.100	117,78	0,0118	11.778
Butantã	52.649	1.250	42,12	0,0042	4.212
Cachoeirinha	147.649	1.330	111,01	0,0111	11.101
Cambuci	28.717	390	73,63	0,0074	7.363
Campo Belo	66.646	880	75,73	0,0076	7.573
Campo Grande	91.373	1.310	69,75	0,0070	6.975
Campo Limpo	191.527	1.280	149,63	0,0150	14.963
Cangaíba	137.442	1.600	85,90	0,0086	8.590
Capão Redondo	240.793	1.360	177,05	0,0177	17.705
Carrão	78.175	750	104,23	0,0104	10.423
Casa Verde	83.629	710	117,79	0,0118	11.779
Cidade Ademar	243.372	1.200	202,81	0,0203	20.281
Cidade Dutra	191.389	2.930	65,32	0,0065	6.532
Cidade Líder	116.841	1.020	114,55	0,0115	11.455
Cidade Tiradentes	190.657	1.500	127,10	0,0127	12.710
Consolação	54.522	370	147,36	0,0147	14.736
Cursino	102.089	1.280	79,76	0,0080	7.976
Ermelino Matarazzo	106.838	870	122,80	0,0123	12.280
Freguesia do Ó	144.923	1.050	138,02	0,0138	13.802
Grajaú	333.436	9.200	36,24	0,0036	3.624
Guaianases	98.546	860	114,59	0,0115	11.459
Iguatemi	101.780	1.960	51,93	0,0052	5.193
Ipiranga	98.863	1.050	94,16	0,0094	9.416
Itaim Bibi	81.456	990	82,28	0,0082	8.228
Itaim Paulista	212.733	1.200	177,28	0,0177	17.728
Itaquera	201.512	1.460	138,02	0,0138	13.802
Jabaquara	214.095	1.410	151,84	0,0152	15.184
Jaçanã	91.809	780	117,70	0,0118	11.770
Jaguara	25.713	460	55,90	0,0056	5.590
Jaguapé	42.479	660	64,36	0,0064	6.436
Jaraguá	145.900	2.760	52,86	0,0053	5.286
Jardim Ângela	245.805	3.740	65,72	0,0066	6.572
Jardim Helena	139.106	910	152,86	0,0153	15.286
Jardim Paulista	83.667	610	137,16	0,0137	13.716
Jardim São Luiz	239.161	2.470	96,83	0,0097	9.683

José Bonifácio	107.082	1.410	75,94	0,0076	7.594
Lajeado	157.773	920	171,49	0,0171	17.149
Lapa	60.184	1.000	60,18	0,0060	6.018
Liberdade	61.875	370	167,23	0,0167	16.723
Limão	82.045	630	130,23	0,0130	13.023
Mandaqui	103.113	1.310	78,71	0,0079	7.871
Marsilac	8.404	20.000	0,42	0,0000	42
Moema	71.276	900	79,20	0,0079	7.920
Moóca	63.280	770	82,18	0,0082	8.218
Morumbi	34.588	1.140	30,34	0,0030	3.034
Parelheiros	102.836	15.350	6,70	0,0007	670
Pari	14.824	290	51,12	0,0051	5.112
Parque do Carmo	64.067	1.540	41,60	0,0042	4.160
Pedreira	127.425	1.870	68,14	0,0068	6.814
Penha	124.292	1.130	109,99	0,0110	10.999
Perdizes	102.445	610	167,94	0,0168	16.794
Perus	70.689	2.390	29,58	0,0030	2.958
Pinheiros	62.997	800	78,75	0,0079	7.875
Pirituba	161.796	1.710	94,62	0,0095	9.462
Ponte Rasa	98.113	640	153,30	0,0153	15.330
Raposo Tavares	91.204	1.260	72,38	0,0072	7.238
República	47.718	230	207,47	0,0207	20.747
Rio Pequeno	111.756	970	115,21	0,0115	11.521
S.Miguel Paulista	228.283	750	160,76	0,0161	16.076
Sacomã	71.179	1.420	182,51	0,0183	18.251
Santa Cecília	124.654	390	98,93	0,0099	9.893
Santana	60.539	1.260	38,81	0,0039	3.881
Santo Amaro	82.834	1.560	82,83	0,0083	8.283
São Domingos	139.333	1.000	140,74	0,0141	14.074
São Lucas	154.850	990	119,12	0,0119	11.912
São Mateus	97.373	1.300	129,83	0,0130	12.983
São Rafael	125.088	1.320	94,76	0,0095	9.476
Sapopemba	282.239	1.350	209,07	0,0209	20.907
Saúde	118.077	890	132,67	0,0133	13.267
Sé	20.115	210	95,79	0,0096	9.579
Socorro	39.097	1.290	30,31	0,0030	3.031
Tatuapé	79.381	820	96,81	0,0097	9.681
Tremembé	163.803	5.630	29,09	0,0029	2.909
Tucuruvi	99.368	900	110,41	0,0110	11.041
Vila Andrade	73.649	1.030	71,50	0,0072	7.150
Vila Curuçá	146.482	970	151,01	0,0151	15.101
Vila Formosa	93.850	740	126,82	0,0127	12.682
Vila Guilherme	49.984	690	72,44	0,0072	7.244
Vila Jacuí	141.959	770	184,36	0,0184	18.436
Vila Leopoldina	26.870	720	37,32	0,0037	3.732
Vila Maria	113.845	1.180	96,48	0,0096	9.648
Vila Mariana	123.683	860	143,82	0,0144	14.382
Vila Matilde	102.935	890	115,66	0,0116	11.566
Vila Medeiros	140.564	770	182,55	0,0183	18.255
Vila Prudente	102.104	990	103,14	0,0103	10.314
Vila Sônia	87.379	990	88,26	0,0088	8.826

Elaboração: Sempla/Dipro

## ANEXO 6

### Subprefeituras e Distritos do Município de São Paulo

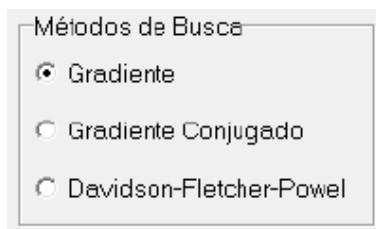


Fonte: Secretaria Municipal de Planejamento – Sempla/  
Depto. de Estatística e Produção de Informação – Dipro.

## ANEXO 7

### Fases de Execução do Programa

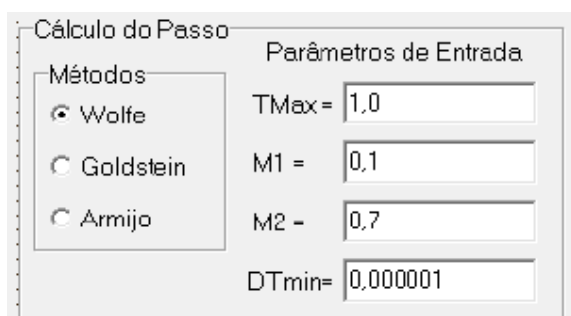
Passo 1: Escolha o método para a resolução do problema de PNL



Métodos de Busca

- Gradiente
- Gradiente Conjugado
- Davidson-Fletcher-Powel

Passo 2: Escolha o método pra o cálculo do passo, bem como os parâmetros associados a eles.



Cálculo do Passo

Métodos

- Wolfe
- Goldstein
- Armijo

Parâmetros de Entrada

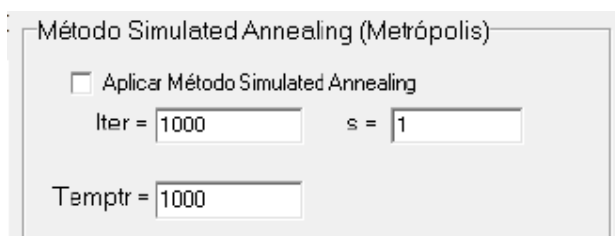
TMax =

M1 =

M2 =

DTmin =

Passo 3: Defina se deseja que seja aplicado o Método de Simulated Annealing. Este método será aplicado após a otimização inicial feito pelos métodos definidos anteriormente.



Método Simulated Annealing (Metropolis)

Aplicar Método Simulated Annealing

Iter =       s =

Temptr =

## ANEXO 8

Resumo dos trabalhos analisados no capítulo 2:

<b>Modelos Apresentados</b>			
<b>Autores/Ano</b>	<b>Tema/Assunto</b>	<b>Parâmetros Analisados</b>	<b>Resultado Encontrado</b>
Furth e Rahbee (2000)	Propõem um modelo discreto para modelar o impacto de mudança no espaçamento entre paradas de ônibus numa rota específica.	Os atrasos causados pela demora dos usuários, o aumento dos custos operacionais devido a esses atrasos.	O espaçamento aumentou de 200 m para 400 m.
Gonçalves (1995)	Um estudo cujo enfoque foi o detalhamento da análise do problema operacional de uma linha de ônibus urbano, englobando conjuntamente o ponto de vista do operador e do usuário.	A pesquisa foi feita utilizando a linha número 11 - Monte Verde/Florianópolis, na cidade de Florianópolis/SC. Foram feitos levantamentos dos dados referentes ao tempo de deslocamento do veículo, ao tempo de parada nos pontos, ao tempo de embarque e desembarque de passageiros e à velocidade de deslocamento do ônibus.	Hoje existem 58 pontos, com um espaçamento médio de 392 m. Simulou-se uma redução para 44 pontos. Observou-se que houve um ganho, tanto para os usuários, como também para o operador. Houve uma redução de 3,2% no custo total dos usuários e de 2,8% no custo do operador. O tempo de viagem foi reduzido de 4,1% ( 2 min. 39 seg. ).
Saka (2001)	Model For Determining Optimum Bus-Stop Spacing In Urban Areas	Tempo de aceleração e desaceleração; Tempo de embarque e desembarque de passageiros; Tempo de atraso devido a dispositivos de controle de tráfego (Sinais de trânsito); Tempo de viagem em velocidade normal de tráfego.	Ver próximo artigo.
(Kehoe, 2004),	Effects of Bus Stop Consolidation on Transit Speed and Reliability: a Test Case	Utilizou o modelo apresentado por Saka (2001) para aprimorar a rota 48 da cidade de Seattle,	Através desse modelo foi possível aumentar o espaçamento médio entre as paradas de

		estado de Washington, USA	218m para 260m, sem prejuízo para os usuários.
Kuah e Perl (1988)	Optimization of Feeder Bus Routes and Bus-Stop Spacing. É proposto um modelo analítico para o projeto de uma rede de linhas de ônibus que seriam utilizadas para a alimentação de uma linha de trem existente	O objetivo do trabalho é encontrar um modelo que otimize as três variáveis básicas: Espaçamento entre as linhas; Intervalo entre ônibus; Espaçamento entre as paradas.	O espaçamento ótimo entre as paradas é uma função da raiz quadrada de parâmetros relevantes. Ele aumenta com: A velocidade a pé; Valor do tempo a bordo; Tempo médio perdido nas paradas; Ele diminui com o valor do tempo da viagem a pé.
Murray e Wu (2003)	Método de modelagem integrada para examinar e planejar o espaçamento ideal entre os pontos de parada de ônibus a fim de melhorar a acessibilidade dos usuários ao sistema.	A acessibilidade é percebida em termos espaciais através da distância física do usuário até a parada ou estação mais próxima. O modelo foi aplicado a uma rota de transporte coletivo da cidade de Columbus, Ohio-USA.	Número atual de paradas: p=164; A partir de 120 paradas a distância média de acesso quase não diminui; Para p=75 a redução no número de pontos de parada é de 42,07% e o aumento na média da distância de acesso é de 7,77% (apenas 15m em média); Ainda para p=75 o aumento no espaçamento entre os pontos de parada é de 72,63% (passa dos atuais 265m para 457,38m).
Suzuki (1987)	Um estudo sobre uma linha de ônibus em Ichikawa, Japão. Ele utilizou conceitos de Diagramas de Voronoi para estabelecer o espaçamento ótimo entre paradas de ônibus numa linha alimentadora visando minimizar o tempo médio de viagem dos	Partiu do princípio que o usuário se desloca até o ponto mais próximo da linha de ônibus e, a partir desse ponto, procura a parada mais próxima.	O espaçamento inicial era de 325m, com 15 pontos de parada (n=15). A solução ótima encontrada foi para n=8, com um espaçamento entre os pontos de 608m.

	passageiros até um destino comum.		
Novaes <i>et. al.</i> (2009)	Utilizaram conceitos de diagramas de Voronoi e modelos de aproximação contínua para resolver um problema de localização de estações de metrô numa região urbana que também é servida por uma linha de ônibus.	O problema em questão é encontrar o número ideal de estações, bem como as suas respectivas localizações, a fim de maximizar arrecadação da linha do metrô, ou seja, atrair o maior número de passageiros possível	O valor ideal é obtido com $s = 4$ , ou seja, 4 estações de metrô.