

**Ismael Rodrigo Bleyer**

***Funcionais de Tikhonov e Penalização com  
distâncias de Bregman***

Florianópolis

2008

**Ismael Rodrigo Bleyer**

***Funcionais de Tikhonov e Penalização com  
distâncias de Bregman***

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, área de concentração em Matemática Aplicada. Linha de pesquisa: Problemas Inversos.

Orientador:

Prof. Dr. Antônio Carlos Gardel Leitão

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Florianópolis

2008

# *Funcionais de Tikhonov e Penalização com distâncias de Bregman*

**Ismael Rodrigo Bleyer**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação de Matemática e Computação Científica, nível de mestrado da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, em 17 de Dezembro de 2008.

---

Prof. Clóvis Caesar Gonzaga, Dr. (UFSC)  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação  
de Matemática e Computação Científica

Apresentada à Comissão Examinadora, integrada pelos Professores:

---

Prof. José Mario Martínez, Dr. (UNICAMP)

---

Prof. Clóvis Caesar Gonzaga, Dr. (UFSC)

---

Prof. Juliano de Bem Francisco, Dr. (UFSC)

---

Prof. Antônio Carlos Gardel Leitão, Dr.  
(UFSC) - Orientador

Florianópolis, 17 de Dezembro de 2008.

# *Agradecimentos*

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus pelo dom da vida e pela maneira que Ele me guia.

Agradeço também a minha família, desde meus pais e meu querido irmão até meus tios e avós, pelo carinho recebido e pela preocupação que eles têm comigo.

Agradeço ainda aos meus amigos do departamento de matemática e principalmente aos professores Fermín Bazán, Lício Bezerra, Ruy Charão, Ruy Exel, entre outros, pelo conhecimento transmitido.

Agradecimento especial ao professor Clóvis Gonzaga que muito tem feito por mim desde a graduação. Através de suas aulas pude compreender melhor o sentido da epígrafe encontrada na próxima página. Muito embora, neste trabalho existam mais fórmulas e ilustrações.

Não poderia deixar de manifestar meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Antônio Leitão, por sua paciência, seu tempo e sua amizade. Além disso, por me incentivar sempre a prosseguir e acreditar em mim. Por abrir inúmeras portas para o meu futuro e quanto a isso não tenho palavras para expressar minha gratidão.

Agradeço a CNPq pelo apoio financeiro ao longo do curso, e a Elisa Amaral por sua eficiência e simpatia ao nos atender.

Por fim, agradeço aos professores que compõe a banca, pela correção de erros e demais sugestões.

*“Nenhum cientista pensa com fórmulas”.*

Albert Einstein

# *Resumo*

BLEYER, Ismael Rodrigo. **Funcionais de Tikhonov e Penalização com distâncias de Bregman**. 2008. 123 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis, 2008.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Gardel Leitão  
Defesa: 17/12/2008

Uma técnica de regularização que vem ganhando destaque na comunidade de problemas inversos é a regularização de Tikhonov com termo de penalização dado pela seminorma de variação limitada. Esse método de regularização busca aproximar a solução “exata” do problema por funções em  $BV$ , um espaço de Banach.

O método de Tikhonov é largamente utilizado para problemas inversos formulados em espaços de Hilbert, situação para qual vários resultados teóricos são conhecidos. Esse método de regularização tem como característica fornecer soluções suaves, o que se torna uma desvantagem em certas aplicações em processamento de imagens, quando a imagem a ser reconstruída apresenta grandes gradientes ou quando é descontínua.

Neste trabalho apresentamos um método tipo Tikhonov que visa obter soluções de problemas inversos mal-postos num contexto mais geral. Com essa generalização procuramos resultados teóricos para o tratamento de uma equação mal-posta em que o operador envolvido é definido entre espaços de Banach, além de utilizar uma penalização não diferenciável. Dessa maneira, o método investigado corresponde a uma generalização da teoria clássica de Tikhonov, a qual pode ser utilizada no espaço de funções de variação limitada.

Após introduzirmos as condições necessárias para garantir a existência de uma solução para o problema regularizado, damos início ao estudo da qualidade das soluções obtidas por esse método. Exibimos resultados de estabilidade e taxas de convergência entre uma solução regularizada e uma solução “exata” do problema inverso. Tal análise de convergência é obtida com base na distância de Bregman. Operadores lineares e não lineares são considerados. Para problemas não lineares, investigamos também um método de Tikhonov iterado.

**Palavras-chave:** regularização de Tikhonov, distâncias de Bregman, penalização com variação limitada.

# *Abstract*

BLEYER, Ismael Rodrigo. **Funcionais de Tikhonov e Penalização com distâncias de Bregman**. 2008. 123 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, Florianópolis, 2008.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Gardel Leitão  
Defesa: 17/12/2008

In the last few years a regularization technique became popular in the inverse problems community, namely the Tikhonov regularization with a penalization function given by the bounded variation seminorm. This regularization method provides approximate solutions in BV to the “exact” solution of the inverse problem.

The Tikhonov method is widely used to approximate solutions of inverse problems modeled by operator equations in Hilbert spaces, and there are many theoretical results concerning this situation. A characteristic of this regularization approach is to provide smooth approximations. This however, can be a disadvantage in some applications, e.g., in image processing, where one has to recover images with sharp edges or the nonsmooth images.

In this work we investigate a Tikhonov type method formulated in a more general context. The approach investigated here allows the generalization of classical theoretical results to the context of ill-posed equations where the operator is defined between Banach spaces. Moreover, non-differentiable penalty functions are used and regularized solutions are found in the space of functions of bounded variation.

Existence of solutions of the regularized problem can be guaranteed. Moreover, using source conditions, we provide quantitative estimates to the regularization error in the parameter space. Stability and convergence results are derived, and are based on the use of Bregman distances to estimate the errors. Both linear and nonlinear problems are considered. In the nonlinear case we also investigate an iterated Tikhonov method.

**Key words:** Tikhonov regularization, Bregman distances, penalization with total variation.

# Conteúdo

## Lista de Figuras

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 10
1.1	Problemas inversos . . . . .	p. 10
1.2	Método de regularização . . . . .	p. 12
1.3	Regularização de Tikhonov . . . . .	p. 14
1.3.1	Operadores lineares . . . . .	p. 16
1.3.2	Operadores não lineares . . . . .	p. 17
1.4	Regularização tipo Tikhonov usando distâncias de Bregman . . . . .	p. 18
<b>2</b>	<b>Análise de problemas lineares</b>	p. 22
2.1	Estimativas para a condição de fonte $\xi = F^* \omega$ . . . . .	p. 25
2.1.1	Possíveis variações . . . . .	p. 29
2.2	Estimativas para condições de fonte $\xi = F^* F \omega$ . . . . .	p. 36
2.3	Comparação com a teoria clássica de regularização . . . . .	p. 44
2.3.1	Regularização de Tikhonov . . . . .	p. 44
2.3.2	Regularização de variação limitada . . . . .	p. 45
2.3.3	Regularização de máxima entropia . . . . .	p. 50
<b>3</b>	<b>Análise de problemas não lineares</b>	p. 53
3.1	Estimativas para a condição de fonte $\xi = F'(\bar{u})^* \omega$ . . . . .	p. 55
3.2	Estimativas para a condição de fonte $\xi = F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega$ . . . . .	p. 66



<b>4 Um método iterativo para problemas não lineares</b>	p. 75
4.1 Um Algoritmo baseado em distância de Bregman . . . . .	p. 76
4.2 Um funcional com variação limitada . . . . .	p. 81
4.3 Propriedades do algoritmo . . . . .	p. 82
<b>5 Conclusão</b>	p. 108
<b>Bibliografia</b>	p. 111
<b>Apêndice A – Análise Funcional</b>	p. 116
<b>Apêndice B – Análise convexa</b>	p. 119
B.1 Funções convexas . . . . .	p. 119
B.2 Subgradiente . . . . .	p. 120
B.3 Distâncias de Bregman . . . . .	p. 121
<b>Apêndice C – Elementos de dualidade</b>	p. 123

## *Lista de Figuras*

1.1	Ilustração da distância de Bregman . . . . .	p. 20
2.1	Convergência com distância de Bregman . . . . .	p. 42
2.2	Exemplo imagem com ruído . . . . .	p. 46
2.3	Imagem original - prédio . . . . .	p. 46
4.1	Exemplo imagem borrada . . . . .	p. 81
4.2	Imagem original - fotógrafo . . . . .	p. 81

# 1 *Introdução*

Neste trabalho estudamos métodos tipo Tikhonov, uma técnica importante para obtermos soluções estáveis para problemas inversos. A análise de tais métodos generaliza resultados conhecidos da teoria clássica. São investigados resultados publicados recentemente que exibem taxas de convergência e estabilidade entre uma solução aproximada por esse método e uma solução “exata” do problema. Tais resultados são obtidos utilizando a distância de Bregman induzida por um funcional convexo. A teoria é desenvolvida para operadores lineares e não lineares, em especial apresentamos um método iterativo para o caso não linear.

Neste capítulo fazemos uma breve introdução sobre problemas inversos e sua relação com problemas mal-postos. Em seguida apresentamos uma técnica usada para resolver problemas inversos: os métodos de regularização. Em especial voltamos nossa atenção ao método clássico de Tikhonov, exibindo de forma resumida os principais resultados da teoria clássica para equações regidas por operadores tanto lineares quanto não lineares definidos entre espaços de Hilbert. Na sequência exploramos a idéia que motivou o estudo e elaboração deste trabalho. A distribuição do conteúdo desta dissertação é exposta na última seção deste capítulo.

## 1.1 Problemas inversos

A área de problemas inversos tem sido um dos ramos na matemática aplicada com o maior crescimento nas últimas décadas. Tal fato deve-se ao grande número de aplicações extraídas do mundo real, na ciência e tecnologia.

Além dos exemplos de problemas inversos encontrados em [TG87] e [Ram05], destacamos os problemas de restauração de imagens [RS02, OBG<sup>+</sup>05], eletrocardiograma [JXS<sup>+</sup>08], tomografia por impedância [LRH<sup>+</sup>05], exploração geofísica de depósitos de petróleo [Pen97, ORL08] e identificação biométrica [YSSP05], devido sua importância científica, econômica, social e inclusive política.

Antes de mais nada, precisamos definir o que é um *problema inverso*. Uma das definições

mais difundidas foi dada em [EHN00], segundo os autores “ resolver um problema inverso é determinar *causas* desconhecidas a partir de *efeitos* desejados ou observados”.

Por outro lado, definimos um *problema direto* aquele em que são conhecidas precisamente as causas e buscamos determinar seus efeitos.

Do ponto de vista teórico modelamos um problema inverso através de uma equação de operadores

$$F(u) = y, \quad (1.1)$$

em que o operador  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  pode ser linear ou não linear, dependendo da natureza do problema original,  $y \in \mathcal{H}$  é o dado observado e  $u \in \mathcal{U}$  é a “causa” a ser determinada. Em nosso contexto visamos trabalhar com  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  espaços de Banach. Na teoria clássica de regularização de Tikhonov é comum considerar operadores em que ambos os espaços  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  são Hilbert. No entanto, já são conhecidos inúmeros resultados nesse contexto, como pode ser visto em [Mor84, Gro84, Gro93, Kir96, EHN00].

Convém observarmos que a modelagem de problemas inversos lineares freqüentemente resulta em equações integrais de primeira espécie. A maioria dos problemas estudados na comunidade induz modelos matemáticos mal-postos. A definição *mal-posto* surgiu no início do século passado quando o matemático francês Jacques Salomon Hadamard estudava equações diferenciais parciais; os resultados de seu estudo foram publicados em [Had02].

Dizemos que um problema do tipo (1.1) é **bem-posto** se as três propriedades são satisfeitas:

- (P1) *Existência*: para cada  $y \in \mathcal{H}$  existe (pelo menos um)  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $F(u) = y$  ;
- (P2) *Unicidade*: para cada  $y \in \mathcal{H}$  existe no máximo um  $u \in \mathcal{U}$  tal que  $F(u) = y$  ;
- (P3) *Estabilidade*: a solução  $u$  depende continuamente dos dados  $y$ , isto é, para toda seqüência  $(u_k) \subset \mathcal{U}$  com  $F(u_k) \rightarrow F(u)$  quando  $k \rightarrow \infty$ , vale que  $u_k \rightarrow u$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Desse modo um problema é dito **mal-posto** se pelo menos uma das condições acima não é satisfeita, conforme [Kir96].

Em geral as medições e observações feitas para determinado problema são imprecisas e os dados inseridos em  $y$  vêm contaminados com ruídos ou erros experimentais. Muitas vezes tais erros surgem na própria modelagem matemática. Sendo assim, dispomos somente de uma aproximação  $y^\delta$  ao invés do dado exato  $y$ . Visto isso, ao invés de resolvermos a Equação (1.1) voltamos nossa atenção para o problema

$$F(u) = y^\delta. \quad (1.2)$$

Ao trabalharmos com dados exatos ou com suas aproximações, até mesmo aquelas obtidas quando resolvemos o problema numericamente, o conceito de problema mal-posto deve ser visto com cautela. Segundo [EHN00] tecemos comentários para as propriedades (P1), (P2) e (P3).

A violação da *existência* de solução é uma condição importante quando os dados são exatos. Geralmente podemos relaxar a noção de solução ou aumentar o espaço solução para contornar tal dificuldade.

A violação do segundo item - *unicidade*, é um pouco mais séria, pois a existência de várias soluções nos leva a decidir dentre elas qual é a mais viável. Em certos problemas basta tomar como solução a de menor norma, mas isto não se aplica a todos. Do contrário devemos adicionar condições ao problema original e com isso obter a unicidade, a saber, escolhemos uma das soluções do problema original que também satisfaça as novas propriedades. Mesmo em aplicações em que esse item é satisfeito, quando resolvemos numericamente geralmente a unicidade é violada por causa da discretização.

Quanto ao terceiro item, o mais importante deles, a falta de *estabilidade* torna o problema extremamente sensível a presença de ruídos nos dados, de modo que pequenas perturbações nos levam a uma grande variação na solução. A tentativa de buscar uma solução numérica para um problema cuja a solução não dependa continuamente dos dados, a primeira vista, nos parece inviável e até mesmo impossível. Uma maneira de amenizarmos tal dificuldade é através de *métodos de regularização*.

Por fim, enfatizamos que o requerimento (P3) depende da topologia dos espaços envolvidos, a saber, se o operador inverso é contínuo. Diferente das questões de existência e unicidade, as quais dependem unicamente da natureza algébrica dos espaços e do operador. Em suma, a definição bem-posto depende da tripla  $(\mathcal{U}, \mathcal{H}, F)$  e suas normas, conforme [Kir96].

## 1.2 Método de regularização

A solução de um problema inverso modelado pela Equação (1.1) consiste em determinar  $u$  mediante o conhecimento de  $y$ . Em outras palavras, o problema consiste na inversão do operador  $F$ . No contexto linear, uma vez conhecido o operador pseudo-inverso<sup>1</sup>  $F^\dagger : \mathcal{H} \supset \mathcal{D}(F^\dagger) \rightarrow \mathcal{U}$ , pensamos em resolver o problema da seguinte forma

$$u = F^\dagger(y) .$$

---

<sup>1</sup>Esse operador também é conhecido com a inversa generalizada de Moore-Penrose, veja [GL96].

No entanto essa tentativa é inútil quando o dado  $y$  não pertence ao domínio de definição do operador pseudo-inverso. Mesmo que exista tal operador ele ainda pode ser ilimitado. Portanto, devemos procurar outra ferramenta para encontrarmos uma solução para (1.1).

Os métodos de regularização aparecem justamente para remediar tal dificuldade. De modo geral construímos uma família de operadores  $R_\alpha : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$  limitados que dependem de um parâmetro  $\alpha > 0$ , conhecido como *parâmetro de regularização*, que aproximem pontualmente o operador  $F^\dagger$ , ou seja,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha(y) = F^\dagger(y). \quad (1.3)$$

Caso busquemos uma solução para a equação do tipo (1.2) é indispensável o conhecimento de um limite para a perturbação dos dados, isto é,

$$\|y^\delta - y\| \leq \delta. \quad (1.4)$$

Conhecido o nível de ruído  $\delta$  existem duas regras básicas para a escolha do parâmetro de regularização. Na primeira dizemos que a escolha do parâmetro é feita *a priori*, quando essa escolha depende somente do nível de ruído  $\delta$ , a saber,  $\alpha = \alpha(\delta)$ . Ao passo que na segunda regra, feita *a posteriori*, ainda há dependência do dado  $y^\delta$  com ruído, isto é,  $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$ . Do ponto de vista prático essa escolha torna-se muito útil, uma vez que é calculado juntamente com a solução aproximada  $u_\alpha^\delta$  enquanto resolvemos o problema numericamente.

Sintetizando: um método de regularização aproxima a solução  $u$  de um problema mal-posto por uma família de problemas bem-postos  $R_\alpha(y^\delta)$ , de modo que  $u_\alpha^\delta \rightarrow u$  quando  $\delta \rightarrow 0$ , para  $\alpha$  devidamente escolhido. Conforme [EHN00, p. 50] o erro no pior caso deve satisfazer

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \left\| R_\alpha(y^\delta) - F^\dagger(y) \right\|_{\mathcal{U}} \mid y^\delta \in \mathcal{H}, \|y^\delta - y\| \leq \delta \right\} = 0. \quad (1.5)$$

Não basta que o erro convirja para zero, essa convergência deve ser da mesma ordem do nível de ruído. Caso essa ordem de convergência seja satisfeita dizemos que a taxa de convergência é *ótima*.

Para assegurar que um método produz taxas ótimas de convergência devemos assumir certas condições, chamadas **condições de fonte**, e apenas com esse tipo de informação é possível obter taxas de convergência no domínio do operador.

Na literatura são apresentados métodos de regularização e métodos iterativos [TGSY95, EHN00, Vog02, LB05]. Para cada tipo de operador temos uma abordagem especial e uma cadeia de resultados. Por exemplo: para os operadores lineares, compactos e auto-adjuntos,

uma referência é [Gro84]. Dentre os métodos apresentados nas referências acima, sem dúvida nenhuma, o método de regularização de Tikhonov é o mais conhecido.

### 1.3 Regularização de Tikhonov

O professor Andrei Nikolaevich Tikhonov foi um grande matemático russo que trabalhou no consagrado Instituto de Matemática Steklov da Academia Russa de ciências, onde passaram outros ilustres matemáticos, como A. N. Krylov, S. L. Sobolev e A. A. Markov.

Tikhonov sugeriu uma formulação mais geral para resolver problemas mal-postos no artigo [Tik63] publicado em 1963. A partir desse trabalho a teoria de Tikhonov tem sido aplicada no tratamento de problemas inversos.

Segundo o livro de [Kir96], para a Equação (1.1) com  $F$  um operador linear e limitado entre espaços de Hilbert, o método de Tikhonov é apresentado como uma família de operadores  $\{R_\alpha\}$  da forma

$$R_\alpha(y) = (F^*F + \alpha I)^{-1} F^*y, \quad (1.6)$$

em que  $F^*$  é o operador adjunto,  $I$  é o operador identidade e  $\alpha$  é uma constante positiva devidamente escolhida. Essa formulação concorda com a teoria apresentada na seção anterior.

O operador  $F^*F$  é auto-adjunto, compacto e tem auto-valores não negativos. Para um  $\alpha > 0$  o operador  $(F^*F + \alpha I)$  tem auto-valores estritamente positivos e por sua vez possui inversa limitada. Assim, a equação de segundo tipo

$$(F^*F + \alpha I)u_\alpha = F^*y \quad (1.7)$$

é bem-posta.

Quando assumimos que o operador  $F$  também é compacto podemos calcular o sistema singular<sup>2</sup> e por sua vez a solução é obtida de maneira direta, definida por um somatório envolvendo esse sistema.

Outra formulação mais difundida para a regularização de Tikhonov é dada pela seguinte interpretação variacional

$$u_\alpha = \operatorname{argmin} \{J_\alpha(u) \mid u \in \mathcal{U}\}, \quad (1.8)$$

com

$$J_\alpha(u) = \|F(u) - y\|^2 + \alpha \|u\|_{\mathcal{U}}^2, \quad (1.9)$$

---

<sup>2</sup>É uma generalização para a decomposição SVD - decomposição de valores singulares - para operadores com dimensão infinita.

em que  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  é dito parâmetro de regularização.

No livro [Kir96, Teorema 2.11] existe a seguinte relação para o caso linear: a solução do modelo apresentado em (1.8) e (1.9) é a única solução de (1.7).

Convém observarmos que a penalização exercida pelo segundo termo do funcional  $J_\alpha(\cdot)$  dado acima pode ser feita a partir de uma aproximação inicial  $u_0$ , substituindo o termo quadrático  $\|u\|_{\mathcal{U}}^2$  por  $\|u - u_0\|_{\mathcal{U}}^2$ . Através de um operador  $G$  devidamente definido podemos tomar como penalização o termo  $\|G(u)\|^2$ , [Mor84]. Na formulação variacional apresentada acima pensamos  $G$  como o operador identidade e  $u_0$  como o vetor nulo. Essa simplificação é adotada por muitos autores, por exemplo [Han00].

A interpretação variacional introduzida em (1.8) e (1.9) consiste em localizar um elemento que reduza o erro obtido na Equação (1.2) com respeito a norma de  $\mathcal{H}$ . No entanto, devido ao mal condicionamento do operador  $F$  a identificação desse minimizador é uma tarefa difícil. Para amenizar essa dificuldade é suficiente adicionarmos uma penalização no problema de minimização com o objetivo de tornar mais evidente tal minimizador.

Nessa formulação nossa atenção é voltada para o parâmetro de regularização  $\alpha$ . Sua função é fornecer *estabilidade* ao problema e calibrar a solução regularizada de maneira a obtermos um valor mínimo para o resíduo, isto é, uma boa *precisão*. Todavia a norma da solução deve ser pequena, devido ao termo de penalização. Caso o parâmetro seja muito pequeno (ou até mesmo nulo) estamos bem próximos do problema original, o qual não conseguimos resolver de modo estável. Por outro lado, se o parâmetro for muito grande nos desviamos da formulação original dando mais importância ao termo de penalização, e por sua vez resultará numa solução distinta da qual procuramos.

Na literatura encontramos diversos métodos para a escolha do parâmetro  $\alpha$ , o qual pode ser obtido *a priori* ou *a posteriori*. Entre os principais, para problemas lineares, destacamos o método heurístico da curva L [Han97c], o princípio de discrepância de Morozov [Mor66], o critério de mínimo local do funcional definido por Regińska [Reg96] e o método do ponto fixo [Baz08]. Para problemas não lineares citamos [Ram02, SEK93].

Neste trabalho damos ênfase para a formulação apresentada em (1.8) e (1.9), contudo a escolha do parâmetro de regularização não faz parte do nosso estudo. Essa formulação pode ser estendida para operadores não lineares enquanto a formulação exibida em (1.6) somente faz sentido para o caso linear.

O funcional de Tikhonov (1.9) quando aplicado para operadores lineares e contínuos é convexo, portanto todo minimizador local será um minimizador global. Quando o operador é não



linear, o problema regularizado ainda pode ser escrito na formulação variacional de Tikhonov dado por (1.8) com o funcional

$$J_\alpha(u) = \|F(u) - y\|^2 + \alpha \|u - u_0\|_{\mathcal{U}}^2. \quad (1.10)$$

Não podemos mais garantir a convexidade desse funcional e perdemos a unicidade de minimizadores locais. A análise desse método requer uma boa escolha para a aproximação inicial  $u_0$ , pois a análise de convergência passa a ser local.

Mediante essa dificuldade na formulação do método de Tikhonov para problemas não lineares definimos  $\bar{u}$  uma  $u_0$ -**solução de norma mínima** como

$$\bar{u} = \operatorname{argmin} \{ \|u - u_0\|_{\mathcal{U}} \mid F(u) = y \}. \quad (1.11)$$

Resultados de existência de solução, convergência e estabilidade para métodos de regularização tipo Tikhonov são mais conhecidos para operadores lineares. A extensão desses métodos e resultados para o caso não linear não é tão fácil, uma vez que não podemos resolver um sistema singular e tampouco definir um operador adjunto. Por isso, no caso não linear devemos adicionar certas hipóteses ao operador, assim como feito em [EKN89]. Apresentamos de forma resumida resultados clássicos de convergência e estabilidade para operadores lineares e não lineares definidos entre espaços de Hilbert nas subseções que seguem.

### 1.3.1 Operadores lineares

Para um operador  $F$  linear e limitado já comentamos sobre a existência de solução para o funcional convexo (1.9).

Assumindo que os dados com ruídos satisfaçam (1.4) e o dado  $y$  pertença a imagem do operador  $F$ , garantimos a convergência da sequência das soluções regularizadas para a solução  $u^\dagger = F^\dagger y$ , em que  $F^\dagger$  denota a inversa generalizada de  $F$ . Segundo [EHN00, Teorema 5.2] temos  $u_\alpha^\delta \rightarrow u^\dagger$  quando  $\delta \rightarrow 0$  para um parâmetro  $\alpha = \alpha(\delta)$  escolhido de modo que

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \text{ e } \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \text{ quando } \delta \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

Caso assumamos apenas que o termo  $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)}$  seja limitado obtemos a convergência no sentido fraco  $u_\alpha^\delta \rightharpoonup u^\dagger$ , conforme [EHN00, p. 119].

A melhor taxa de convergência que obtemos, apresentada em [EHN00, p. 120] em função

de  $\mu > 0$ , é obtida na Equação (1.13) tomando  $\mu = 1$ ,

$$\left\| u_\alpha^\delta - u^\dagger \right\|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O} \left( \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} \right) \quad \text{e} \quad \left\| u_\alpha - u^\dagger \right\|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}(\alpha^\mu). \quad (1.13)$$

Essa taxa é verificada quando tomamos  $\alpha \sim \delta^{\frac{2}{3}}$  e ainda supomos a existência de uma potência  $\mu > 0$  e um elemento  $\omega \in \mathcal{U}$  tal que  $u^\dagger = (F^\dagger F)^\mu \omega$ , para  $\|\omega\|_{\mathcal{U}} \leq 1$ .

### 1.3.2 Operadores não lineares

No caso do operador  $F$  ser não linear, segundo [EHN00, p. 241] para garantirmos a existência de um minimizador para (1.10) devemos ainda supor:

- (H1)  $F$  é limitado;
- (H2)  $F$  é seqüencialmente fracamente fechado, isto é, para qualquer seqüência  $(u_k) \subset \mathcal{D}(F)$ , a convergência fraca de  $u_k$  para  $u \in \mathcal{U}$  e a convergência fraca de  $F(u_k)$  para  $y \in \mathcal{H}$  implica que  $u \in \mathcal{D}(F)$  e  $F(u) = y$ .

Observamos também que a escolha de  $u_0$  para o funcional (1.10) é muito importante, especialmente para taxas de convergência, uma vez que os mínimos são locais. Para o caso linear  $u_0$  pode ser tomado como o elemento nulo.

Para os dados com ruídos que satisfaçam (1.4) e um parâmetro  $\alpha(\delta)$  satisfazendo (1.12) como no caso linear, garantimos que toda seqüência  $(u_{\alpha_k}^{\delta_k})$  possui uma subseqüência convergente, quando  $\delta_k \rightarrow 0$ . Além disso, o limite de toda subseqüência convergente é uma  $u_0$ -solução de norma mínima.

Para taxas de convergência necessitamos adicionar hipóteses ao problema. Em [EHN00, Teorema 10.4] as condições suficientes para provar que

$$\left\| u_\alpha^\delta - u \right\|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O} \left( \delta^{\frac{1}{2}} \right) \quad \text{e} \quad \left\| F(u_\alpha^\delta) - y \right\| = \mathcal{O}(\delta)$$

são

- (F1)  $F$  é Fréchet diferenciável;
- (F2) existe uma constante  $c \geq 0$  tal que  $\|F'(\bar{u}) - F'(u)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})} \leq c \|\bar{u} - u\|_{\mathcal{U}}$  para todo  $u \in \mathcal{D}(F) \cap \mathcal{B}_\rho(\bar{u})$ , para um raio  $\rho > 0$  suficientemente grande;
- (F3) existe um  $\omega \in \mathcal{H}$  satisfazendo  $\bar{u} = F'(\bar{u})^* \omega + u_0$  e

(F4)  $c\|\omega\| < 1$  .

Além das condições anteriores assumimos também que  $\bar{u}$  é uma  $u_0$ -solução de norma mínima,  $\mathcal{D}(F)$  é convexo e  $\alpha \sim \delta$ .

Segundo [EHN00, Teorema 10.7] temos um resultado de convergência mais geral. Para  $\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$  com a escolha de  $\alpha \sim \delta^{\frac{2}{2\mu+1}}$  obtemos

$$\|u_\alpha^\delta - u\|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right).$$

Essa taxa é válida sob as quatro hipóteses dadas acima e ainda supondo que  $\bar{u}$  pertença ao interior de  $\mathcal{D}(F)$  e  $\bar{u} = (F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}))^\mu \omega + u_0$ .

## 1.4 Regularização tipo Tikhonov usando distâncias de Bregman

No livro de Morozov [Mor84] é apresentada uma formulação para a regularização de Tikhonov em espaços métricos. A idéia primitiva consiste em minimizar o desvio de  $F(u)$  em relação ao lado direito  $y^\delta$  com ruído, relativamente ao quadrado da métrica do espaço  $\mathcal{H}$  e ainda tentar estabilizar a solução por meio de um funcional não negativo.

Com isso em mente o modelo da regularização de Tikhonov apresentado na seção anterior, por meio das equações (1.8) e (1.9), pode ser facilmente visualizado na conotação dada em [Mor84]. Para isso tomamos como métrica a norma do espaço  $\mathcal{H}$  e como funcional não negativo a norma do espaço  $\mathcal{U}$  ao quadrado.

Generalizando a escolha do termo de penalização do método de Tikhonov por um funcional não negativo  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  e preservando o primeiro termo de (1.9), isto é, a norma do resíduo, apresentamos o método de regularização estudado neste trabalho associado a Equação (1.1), o qual consiste em minimizar o funcional

$$J_\alpha(u) = \frac{1}{2} \|F(u) - y\|^2 + \alpha h(u), \quad (1.14)$$

em que  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ .

Sob certas hipóteses sobre esse funcional garantimos a existência de solução para o problema regularizado (1.14). Nesse contexto assumimos

(J1) o funcional  $h$  é semi-contínuo inferiormente com respeito a uma topologia  $\tau_{\mathcal{U}}$  de  $\mathcal{U}$ , isto

é,  $h(u) \leq \liminf_k h(u_k)$ , para toda sequência  $u_k \rightarrow u$ , na topologia  $\tau_{\mathcal{U}}$ ;

(J2) os subconjuntos de nível  $\{u \in \mathcal{U} \mid h(u) \leq \rho\}$  são compactos em relação a topologia  $\tau_{\mathcal{U}}$  e não vazios, para uma constante  $\rho \geq 0$ ;

A demonstração deste resultado, o problema regularizado (1.14) é bem-posto, pode ser conferido em [HKPS07, Teorema 3.1].

A primeira vista essa caracterização não parece ser uma novidade. No entanto a utilização de um funcional convexo não negativo como penalização torna o trabalho mais interessante e com certas propriedades que generalizam certos resultados já conhecidos na literatura. Ainda mais, é possível encontrar resultados em espaços de Banach e trabalhar com penalizações não diferenciáveis.

A diferenciabilidade e convexidade de  $h$  induz um novo conceito: a distância de Bregman. Essa definição foi introduzida por Lev Bregman e publicada em [Bre67] no estudo de problemas em programação convexa, em otimização. Desde então essa definição tem sido aplicada em diferentes áreas da matemática. Em nosso contexto ela torna-se o meio mais natural para mensurar erros entre as soluções regularizada e exata.

No contexto de espaços de Hilbert definimos a distância de Bregman como a diferença entre o valor do funcional e sua aproximação linear, aplicados em um elemento do seu domínio. Algebricamente, dados  $u, v \in \text{dom } h$ , a distância de Bregman entre  $u$  e  $v$  induzida pelo funcional convexo  $h$  é definido como

$$D_h(v, u) = h(v) - h(u) - \langle h'(u), v - u \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (1.15)$$

em que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  denota o produto interno real no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Essa definição, embora feita com pouco rigor matemático, é exemplificada na Figura 1.1. Conquanto denominamos de “distância”, necessariamente (1.15) não é uma distância usual. Mesmo sendo não negativa, a simetria nem sempre é cumprida, a menos que exigimos  $h$  ser estritamente convexo; a desigualdade triangular pode não ser satisfeita. Contudo vamos utilizá-la em nossas estimativas ao invés da norma do espaço de Banach  $\mathcal{U}$ .

Kiwiel em [Kiw97] usou o conceito da distância de Bregman para funcionais não diferenciáveis. Para tal generalização necessitamos do conhecimento do subdiferencial do funcional  $h$ . Denotamos por  $\partial h(u)$  o conjunto dos subgradientes de  $h$  em relação ao elemento  $u$ , esse conjunto é chamado de subdiferencial. Para relembrar tais definições veja, por exemplo, o Apêndice B; para demais detalhes sugerimos o livro de [IS05] e [Ius95].

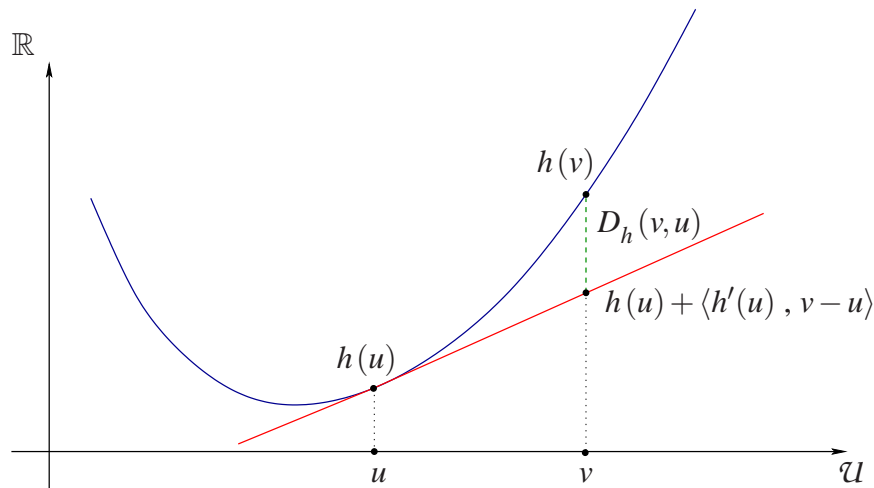


Figura 1.1: Ilustração da distância de Bregman

Ao longo deste trabalho usamos a definição de *distância de Bregman generalizada*. A saber, dado  $\Omega \subset \mathcal{U}$  um conjunto convexo num espaço de Banach  $\mathcal{U}$  e  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  um funcional convexo, a distância de Bregman generalizada induzida pelo funcional  $h$  entre os elementos  $v, u \in \Omega$  é definida como

$$D_h(v, u) = \left\{ D_h^\xi(v, u) \mid \xi \in \partial h(u) \right\}, \quad (1.16)$$

em que

$$D_h^\xi(v, u) = h(v) - h(u) - \langle \xi, v - u \rangle. \quad (1.17)$$

A notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto de dualidade clássico definido para um par de elementos em  $\mathcal{U}^* \times \mathcal{U}$ , em que  $\mathcal{U}^*$  é o dual do espaço de Banach  $\mathcal{U}$ . Uma vez que  $\mathcal{U}^*$  denota o conjunto dos funcionais lineares limitados definidos de  $\mathcal{U}$  em  $\mathbb{R}$ , a definição da distância de Bregman representa um conjunto de escalares reais.

Mediante essa generalização não somente será possível utilizar penalizações feitas por funcionais não diferenciáveis como também o tratamento de operadores definidos entre espaços Banach. O uso de espaços de Banach, em particular não reflexivos, não eram comuns na literatura. Neste trabalho primeiramente assumimos  $\mathcal{U}$  ser Banach, enquanto  $\mathcal{H}$  continua sendo Hilbert. Em seguida, para o caso não linear, assumimos que ambos os espaços são Banach.

As referências básicas deste trabalho são relativamente recentes. O primeiro resultado publicado que introduz o uso de espaços de Banach ao invés de Hilbert foi [BO04], em 2004. Nesse artigo são extraídas taxas de convergência para problemas lineares em regularização variacional convexa. Também foi apresentada generalizações para a teoria exposta, como por exem-

plo: o tratamento de operadores não lineares. No ano seguinte apareceu a segunda publicação na mesma linha de pesquisa, [Res05]. Nesse artigo o foco da autora é voltado para os métodos de regularização para problemas mal-postos e foi trabalhado no mesmo contexto que o primeiro, no entanto foram são admitidos condições de fonte mais forte. O tratamento de operadores não lineares em que ambos os espaços, em que o operador está definido, são espaços de Banach e foi publicado em 2006 no artigo [RS06]. Nessa publicação, assim como nas anteriores, são apresentadas taxas de convergência e estabilidade. Todos os trabalhos até aqui citados têm como principal hipótese a continuidade dos operadores envolvidos, a qual pode ser considerada numa topologia mais fraca do que a usual. No entanto, no trabalho [HKPS07] publicado em 2007 é discutido o tratamento de operadores não suaves. Nesse artigo são assumidos novas condições de fonte e não linearidade. Para tais condições são derivados taxas de convergência para a regularização de Tikhonov.

A distribuição de conteúdos deste trabalho é feita da seguinte maneira. No Capítulo 2 consideramos apenas operadores lineares, apresentamos estimativas de erro no domínio e imagem do operador  $F$ . São feitas estimativas para duas condições de fonte. As estimativas no domínio são obtidas por meio da distância de Bregman, enquanto na imagem utilizamos a norma do operador  $\mathcal{H}$ . Por fim mostramos que essas taxas generalizam o método clássico de Tikhonov.

Em seguida, no Capítulo 3, buscamos resultados semelhantes aos apresentados no Capítulo 2, porém trabalhamos com operadores não lineares. Novamente temos estimativas de erro no domínio e imagem do operador. Apresentamos os resultados para duas condições de fonte semelhantes ao caso linear. Ao longo da construção das hipóteses desse capítulo, em especial, apresentamos uma condição de não linearidade que utiliza a distância de Bregman. Essa condição difere daquelas conhecidas e revisadas na seção anterior com relação a teoria clássica, portanto uma novidade.

No Capítulo 4 damos uma atenção especial para o caso não linear; investigamos um método iterativo baseado na distância de Bregman. Provamos que esse algoritmo está bem definido e produz um resíduo monótono decrescente. Por fim, apresentamos um funcional convexo e com ele provamos a existência de uma seqüência gerada pelo algoritmo que possui uma subseqüência convergente para uma solução do problema em estudo, tanto para o caso com dados exatos quanto para dados com a presença de ruído. Para dados inexatos utilizamos um critério apropriado de parada.

## 2 *Análise de problemas lineares*

Assim como a teoria clássica da regularização de Tikhonov foi desenvolvida inicialmente para problemas lineares, a estrutura deste trabalho não poderia ser diferente. Iniciamos o estudo apresentando o problema a ser resolvido, as hipóteses que serão assumidas ao longo deste capítulo e introduzimos definições necessárias. Em seguida, exibimos resultados de convergência e estabilidade. Em especial, na primeira seção apresentamos três possíveis variações do problema regularizado do ponto de vista de otimização. Por fim, mediante a escolha de certos funcionais de penalização convexos, mostramos que os resultados aqui aferidos condizem com a teoria clássica.

Na teoria geral de problemas inversos não é possível obter estimativas para o erro entre a solução “exata” e a regularizada de um problema mal-posto a menos que façamos o uso de informações *a priori*, as chamadas condições de fonte. Neste capítulo apresentamos duas condições, sendo a segunda uma condição mais forte e portanto esperamos estimativas melhores. Os resultados aqui apresentados servem de inspiração para o tratamento de problemas não lineares, como veremos no capítulo posterior.

O tratamento teórico para problemas mal-postos lineares no contexto de espaços de Banach, com o método de regularização tipo Tikhonov apresentado na introdução, foi publicado pela primeira vez em [BO04] e teve continuidade no artigo de Resmerita [Res05], onde foram publicados resultados para uma condição de fonte diferente da utilizada em [BO04]. Uma das maiores motivações que os levaram a buscar ferramentas teóricas nesse contexto foi um outro método de regularização, conhecido como *regularização de variação limitada* ou ainda *regularização de variação total*. O primeiro artigo sobre esse tipo de regularização a ganhar destaque foi [ROF92] e muitos pesquisadores referem-se ao funcional de Tikhonov proposto nesse artigo como o funcional ROF, devido as iniciais dos nomes dos autores. Sem dúvida nenhuma, esse método é um dos exemplos de maior destaque para técnicas de restauração de imagem. Tal fato se deve a uma particularidade interessante: a possibilidade de se obter soluções com descontinuidades.

Sem perder o foco deste capítulo, apesar do método comentado acima ter uma grande influência nessa pesquisa e em particular no Capítulo 4, aqui estamos interessados em resolver uma equação da forma

$$Fu = y, \quad (2.1)$$

em que  $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  é um operador linear mal-posto entre o espaço de Banach  $\mathcal{U}$  e o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , ambos de dimensão infinita.

Antes de continuarmos, fazemos algumas observações quanto a notação. Para o espaço de Banach  $\mathcal{U}$  associamos a norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$  e para o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  associamos a norma  $\|\cdot\|$  (ao invés de  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  para não carregar a notação) definida a partir do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ . Definimos  $\mathcal{U}^*$  o dual topológico de  $\mathcal{U}$  enquanto para o espaço de Hilbert temos  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$ . Com isso denotamos o operador adjunto de  $F$  como  $F^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}^*$ . O produto de dualidade  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para um par de elementos em  $\mathcal{U}^* \times \mathcal{U}$  é definido de maneira clássica como  $\langle \psi, u \rangle = \psi(u)$  para um funcional  $\psi \in \mathcal{U}^*$  e  $u \in \mathcal{U}$ . No entanto, se o elemento  $\psi \in \mathcal{R}(F^*)$  então existirá um elemento  $v \in \mathcal{H}$  tal que  $\psi = F^*v$  e para esse caso definimos o produto de dualidade como

$$\langle \psi, u \rangle = \langle F^*v, u \rangle := \langle v, Fu \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (2.2)$$

Observamos, ainda, que a definição acima vale trivialmente no caso em que ambos os espaços são Hilbert, como na teoria clássica de Tikhonov.

Visto que o problema regularizado está bem definido, nosso interesse é saber quão “boas” são as soluções regularizadas. Isto é, encontrar estimativas entre a solução de (2.1) com uma solução regularizada  $u_{\alpha}^{\delta}$ , a qual minimiza o funcional

$$J_{\alpha}^{\delta}(u) = \frac{1}{2} \|Fu - y^{\delta}\|^2 + \alpha h(u). \quad (2.3)$$

No funcional acima temos  $\alpha$  um escalar não negativo,  $h(\cdot)$  um funcional convexo não negativo e  $y^{\delta}$  uma aproximação do dado exato  $y$  que tenha um nível de ruído  $\delta$  controlado, da forma

$$\|y - y^{\delta}\| < \delta. \quad (2.4)$$

O funcional  $h : \mathcal{D}(h) \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  inicialmente definido não assume valores “infinitos”. Contudo nos referimos a sua extensão  $\tilde{h} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ . Podemos estender o funcional  $h$  para todo espaço  $\mathcal{U}$  da seguinte maneira

$$\tilde{h}(u) = \begin{cases} h(u) & , \text{ se } u \in \mathcal{D}(h) \\ +\infty & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$



Observamos que o funcional  $\tilde{h}$  é convexo quando  $\mathcal{D}(h)$  é convexo, conforme [ET99]. Caso desejemos estender para todo o domínio do operador  $F$ , devemos supor a convexidade de  $\mathcal{D}(F)$ . Sem fazer confusão vamos denotar esse funcional com a mesma  $h$ , para simplificar a notação.

Para provarmos resultados como existência de mínimo para o problema regularizado (2.3) exigimos que a penalização feita por  $h$  não seja sempre infinito. Um funcional convexo que atinge um valor finito em pelo menos um elemento do seu domínio é denominado funcional *próprio*. Quando conveniente fazemos referência ao conjunto dos elementos de  $\mathcal{U}$  em que o funcional  $h$  assume valores finitos com a definição de **domínio efetivo de  $h$** , a saber

$$\text{dom } h = \{u \in \mathcal{U} \mid h(u) < \infty\} .$$

As principais hipóteses que assumimos ao longo deste capítulo estão listadas abaixo.

**Hipótese 2.1.**

- (L1) Com o espaço de Banach  $\mathcal{U}$  associamos a topologia  $\tau_{\mathcal{U}}$  que é mais fraca do que a topologia induzida pela norma;
- (L2) Com o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  associamos a topologia  $\tau_{\mathcal{H}}$  induzida pelo produto interno;
- (L3) Os duais topológicos de  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  são denotados por  $\mathcal{U}^*$  e  $\mathcal{H}$ , respectivamente;
- (L4) Temos  $\mathcal{D}(F) \cap \text{dom } h \neq \emptyset$ ;
- (L5)  $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  é um operador linear contínuo de  $(\mathcal{U}, \tau_{\mathcal{U}})$  em  $(\mathcal{H}, \tau_{\mathcal{H}})$ ;
- (L6) O funcional  $h$  é limitado e semi-contínuo inferiormente na topologia  $\tau_{\mathcal{U}}$ ;
- (L7) Para cada  $M > 0$ ,  $\alpha > 0$ , o conjunto

$$\mathcal{M}(M) = \{u \in \mathcal{U} \mid h(u) \leq M\}$$

é compacto na topologia  $\tau_{\mathcal{U}}$ .

Os resultados que seguem ao longo deste trabalho são extraídos em relação a uma **solução  $h$ -minimizante**, a qual generaliza a definição de  $u_0$ -solução de norma mínima dada em (1.11).

**Definição 2.2.** Um elemento  $\bar{u} \in \text{dom } h \cap \mathcal{D}(F)$  é dito uma *solução  $h$ -minimizante* de (1.1) se ele minimiza o funcional  $h$  em relação a todas as possíveis soluções do problema, isto é,

$$\bar{u} = \text{argmin} \{h(u) \mid F(u) = y\} .$$

A noção de solução do problema original pode ser substituída pela solução da equação normal, dependendo do contexto apresentado.

## 2.1 Estimativas para a condição de fonte $\xi = F^* \omega$

Ao longo desta seção apresentamos taxas de convergência no domínio do operador  $F$  para a solução regularizada do problema (2.1). Tais resultados são obtidos mediante uma hipótese crucial: a condição de fonte  $\xi = F^* \omega$ . Uma motivação para a construção de tal condição está relacionada ao produto de dualidade (2.2).

Assumimos primeiramente que  $y \in \mathcal{R}(F)$  e tomamos  $\bar{u}$  uma solução  $h$ -minimizante como na Definição 2.2. É conveniente supor que existe pelo menos um elemento do subdiferencial de  $h(\bar{u})$  que pertence a imagem do adjunto do operador  $F$ . Essa hipótese faz sentido, uma vez que  $\mathcal{R}(F^*) \subseteq \mathcal{U}^*$  e  $\partial h(\bar{u}) \subseteq \mathcal{U}^*$ . Em resumo, supomos

$$\xi \in \mathcal{R}(F^*) \cap \partial h(\bar{u}) \neq \emptyset \quad (2.5)$$

e que seja satisfeita a equação

$$F\bar{u} = y. \quad (2.6)$$

Uma maneira análoga de apresentar a condição (2.5) é a seguinte: assumimos que existe um elemento  $\omega \in \mathcal{H}$  tal que  $\xi = F^* \omega$ . Note que para o elemento  $\xi$  fica bem definido o produto de dualidade dado em (2.2).

Outra interpretação para essa condição de fonte (2.5) está relacionada com a Definição 2.2. Podemos reescrevê-la da seguinte maneira:  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  é uma *solução  $h$ -minimizante* se ele resolve o problema de minimização com restrição, a saber

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & h(u) \\ \text{sujeito a} & Fu - y = 0 \end{array} \quad (2.7)$$

Segundo [NW06], definimos o Lagrangeano associado ao problema de otimização com restrição de igualdade acima como

$$\mathcal{L}(u, \omega) = h(u) + \langle \omega, Fu - y \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (2.8)$$

A condição *necessária* de primeira ordem para  $\bar{u}$  ser um mínimo local do problema (2.7)

pode ser formulada em relação ao Lagrangeano (2.8), como

$$\nabla_u \mathcal{L}(\bar{u}, \omega) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_\omega \mathcal{L}(\bar{u}, \omega) = 0. \quad (2.9)$$

Essas condições também são conhecidas como *condições de Karush–Kuhn–Tucker*, ou simplesmente *condições de KKT*. Observamos que as condições dadas em (2.9), necessariamente, são (2.5) e (2.6). Portanto, assumindo a condição de fonte proposta nesta seção as condições de KKT passam a ser *suficientes*.

Uma vez conhecido o nível de ruído na medição de dados inexatos, o primeiro resultado que apresentamos é de estabilidade. A estimativa é feita com relação a distância de Bregman induzida pelo funcional de penalização convexo  $h$ . Mostramos que para um parâmetro de regularização devidamente escolhido, a saber quando  $\alpha$  é da mesma ordem do nível de ruído, obtemos uma taxa de convergência ótima. Portanto, pela Equação (2.11) quando  $\delta \rightarrow 0$  temos  $u_\alpha^\delta \rightarrow \bar{u}$ . Por toda extensão deste trabalho deixamos implícito que essa convergência é dada no sentido da distância de Bregman. Dependendo do funcional que induz essa distância é possível mostrar que essa convergência implica na convergência em  $L^2$ .

**Teorema 2.3** (Estabilidade). *Suponha (2.4) válida e seja  $\bar{u}$  uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) tal que a condição de fonte (2.5) e a Equação (2.6) são satisfeitas. Então, para cada minimizador  $u_\alpha^\delta$  do funcional dado em (2.3) a estimativa*

$$D_h^{F^* \omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \leq \frac{1}{2\alpha} (\alpha \|\omega\| + \delta)^2 \quad (2.10)$$

é válida para  $\alpha > 0$ . Em particular, se  $\alpha \sim \delta$ , então

$$D_h^{F^* \omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) = \mathcal{O}(\delta). \quad (2.11)$$

**Demonstração:** Primeiramente observamos que

$$\begin{aligned} \left\| F\bar{u} - y^\delta \right\| &= \left\| F\bar{u} - y + (y - y^\delta) \right\| \\ &\leq \left\| F\bar{u} - y \right\| + \left\| y - y^\delta \right\| \\ &\leq \delta. \end{aligned}$$

Note que para obtermos a última desigualdade acima usamos (2.6) e (2.4). Portanto, vale

$$\left\| F\bar{u} - y^\delta \right\|^2 \leq \delta^2. \quad (2.12)$$

Como por hipótese  $u_\alpha^\delta$  é solução  $h$ -minimizante e utilizando (2.12) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 + \alpha h(u_\alpha^\delta) &\leq \frac{1}{2} \left\| F\bar{u} - y^\delta \right\|^2 + \alpha h(\bar{u}) \\ &\leq \frac{\delta^2}{2} + \alpha h(\bar{u}) . \end{aligned}$$

Reescrevendo essa desigualdade,

$$\frac{1}{2} \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 + \alpha \left( h(u_\alpha^\delta) - h(\bar{u}) \right) \leq \frac{\delta^2}{2} . \quad (2.13)$$

Pela definição da distância de Bregman entre  $u_\alpha^\delta$  e  $\bar{u}$ , com o subgradiente dado em (2.5)

$$D_h^{F^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) = h(u_\alpha^\delta) - h(\bar{u}) - \langle F^* \omega, u_\alpha^\delta - \bar{u} \rangle .$$

Essa igualdade é equivalente a

$$h(u_\alpha^\delta) - h(\bar{u}) = D_h^{F^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \langle F^* \omega, u_\alpha^\delta - \bar{u} \rangle .$$

Aplicando a igualdade acima em (2.13) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{2} &\geq \frac{1}{2} \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 + \alpha \left( D_h^{F^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \langle F^* \omega, u_\alpha^\delta - \bar{u} \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 + \alpha D_h^{F^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \alpha \langle \omega, Fu_\alpha^\delta - F\bar{u} \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{2} \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 + \alpha D_h^{F^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \langle \alpha \omega, Fu_\alpha^\delta - y \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{2} \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 + \alpha D_h^{F^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \langle \alpha \omega, Fu_\alpha^\delta - y^\delta + (y^\delta - y) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{2} \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 + \alpha D_h^{F^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \langle \alpha \omega, Fu_\alpha^\delta - y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \alpha \omega, y^\delta - y \rangle_{\mathcal{H}} . \end{aligned}$$

Visto essa estimativa, aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 + \langle \alpha \omega, Fu_\alpha^\delta - y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \alpha D_h^{F^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) &\leq \frac{\delta^2}{2} + \langle \alpha \omega, y - y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{\delta^2}{2} + \left| \langle \alpha \omega, y - y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} \right| \\ &\leq \frac{\delta^2}{2} + \|\alpha \omega\| \|y - y^\delta\| \\ &\leq \frac{\delta^2}{2} + \alpha \|\omega\| \delta . \quad (2.14) \end{aligned}$$

Finalmente, observamos através da igualdade  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2$ , válida

pela definição do produto de dualidade, que

$$\left\| Fu_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta} + \alpha \omega \right\|^2 = \left\| Fu_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta} \right\|^2 + 2 \left\langle \alpha \omega, Fu_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta} \right\rangle_{\mathcal{H}} + \|\alpha \omega\|^2 .$$

Observando os dois primeiros elementos do lado esquerdo de (2.14), reescrevemos a igualdade acima como

$$\frac{1}{2} \left\| Fu_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta} \right\|^2 + \left\langle \alpha \omega, Fu_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left\| Fu_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta} + \alpha \omega \right\|^2 - \frac{\alpha^2}{2} \|\omega\|^2 .$$

Substituindo essa igualdade do lado esquerdo de (2.14) obtemos

$$\frac{1}{2} \left\| Fu_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta} + \alpha \omega \right\|^2 - \frac{\alpha^2}{2} \|\omega\|^2 + \alpha D_h^{F^* \omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right) \leq \frac{\delta^2}{2} + \alpha \|\omega\| \delta ,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2} \left\| Fu_{\alpha}^{\delta} - y^{\delta} + \alpha \omega \right\|^2 + \alpha D_h^{F^* \omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right) \leq \frac{\alpha^2}{2} \|\omega\|^2 + \alpha \delta \|\omega\| + \frac{\delta^2}{2} .$$

Como nessa desigualdade todos os termos envolvidos são positivos, podemos estimar cada elemento da soma do lado esquerdo da desigualdade pelo limitante dado no lado direito da mesma. Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} \alpha D_h^{F^* \omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right) &\leq \frac{\alpha^2}{2} \|\omega\|^2 + \alpha \delta \|\omega\| + \frac{\delta^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\alpha \|\omega\| + \delta)^2 . \end{aligned}$$

Além disso, para  $\alpha > 0$  temos

$$D_h^{F^* \omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right) \leq \frac{1}{2\alpha} (\alpha \|\omega\| + \delta)^2 .$$

Em particular, se  $\alpha \sim \delta$  é fácil ver que

$$D_h^{F^* \omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right) = \mathcal{O}(\delta) .$$

Com isso garantimos as implicações desse teorema. □

Segundo a estimativa fornecida em 2.10, sabemos quão próximo uma solução regularizada  $u_{\alpha}^{\delta}$  está de uma solução do Problema (2.1) apenas conhecendo a norma de  $\omega \in \mathcal{H}$  fornecido pela condição de fonte, o parâmetro de regularização  $\alpha$  utilizado e o nível de ruído  $\delta$ .

O próximo resultado é análogo ao anterior, porém, aqui analisamos o problema com da-

dos exatos. Encontramos um novo limitante para o erro produzido por uma solução regularizada em relação a solução  $h$ -minimizante  $\bar{u}$ . Essa estimativa depende somente do parâmetro de regularização  $\alpha$  e do elemento  $\omega \in \mathcal{H}$  proveniente da condição de fonte. Ou seja, não é necessário conhecer a solução  $u_\alpha$  para saber quão eficiente ela será, muito menos ter o conhecimento da solução  $\bar{u}$  do Problema (2.1).

**Teorema 2.4** (Convergência). *Se  $\bar{u}$  é uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) tal que a condição de fonte (2.5) e a Equação (2.6) sejam satisfeitas, então para cada minimizador  $u_\alpha$  do funcional definido em (2.3) com dados exatos, a estimativa*

$$D_h^{F^* \omega}(u_\alpha, \bar{u}) \leq \frac{\alpha}{2} \|\omega\|^2 \quad (2.15)$$

é válida.

**Demonstração:** A demonstração desse teorema pode ser vista como uma aplicação do teorema anterior tomando  $\delta = 0$ . □

Os teoremas que vimos anteriormente consideram o problema regularizado na formulação clássica tipo Tikhonov apresentado em (2.1). As mesmas taxas de convergência ainda são obtidas se modificarmos o problema regularizado de maneira conveniente ao tratamento da aplicação desejada. Na próxima subseção apresentamos três possíveis variações.

### 2.1.1 Possíveis variações

A principal modificação feita nesta subseção é uma mudança de variável no parâmetro de regularização do problema (2.3). A saber, definimos  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$  e multiplicamos o funcional definido em (2.3) por  $\lambda \geq 0$ . Mediante esse procedimento eliminamos o parâmetro  $\alpha$  que multiplica a penalização efetuada pelo funcional convexo  $h$  e introduzimos o parâmetro  $\lambda$  junto a norma do resíduo.

As variações apresentadas a seguir, para o problema regularizado (2.3), serão elaboradas num formato de problemas de minimização. Não apresentaremos técnicas ou métodos de otimização para resolvê-las, apenas mostraremos que as soluções regularizadas, por elas obtidas, são satisfatórias com relação a taxas de convergência.

#### Modelo irrestrito

O primeiro modelo sugerido, o apresentamos num formato de minimização irrestrita. Mediante a transformação proposta anteriormente, esse modelo surge de maneira bem natural; faze-

mos apenas uma mudança no parâmetro de regularização. Convém observar que a multiplicação por uma constante positiva não altera o argumento que minimiza o funcional (2.16) em relação ao (2.3).

O problema regularizado (2.3) considerado nesta subseção assume este formato:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && h(u) + \frac{\lambda}{2} \|Fu - y^\delta\|^2 \\ & \text{sujeito a} && u \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Esse é o formato básico apresentado no artigo [BO04], o qual foi motivado pelo método de regularização de variação limitada originalmente introduzido para o tratamento de imagens em [ROF92].

As primeiras estimativas apresentadas no início deste capítulo, a saber Teoremas 2.3 e 2.4, são reescritas aqui no formato do modelo (2.16). As demonstrações não são feitas, uma vez que difere por constantes.

No resultado a seguir mostramos que a distância entre a solução  $u_\lambda^\delta$  de (2.16) e a solução  $h$ -minimizante  $\bar{u}$  é da ordem do nível do ruído quando escolhermos  $\lambda \sim \delta^{-1}$ , isto é,

$$D_h^{F^* \omega} (u_\lambda^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}(\delta) .$$

Equivalentemente, quando  $\delta \rightarrow 0$  temos  $u_\lambda^\delta \rightarrow \bar{u}$  para  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Proposição 2.5** (Estabilidade). *Suponha (2.4) válida e seja  $\bar{u}$  uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) tal que condição de fonte (2.5) e a Equação (2.6) são satisfeitas. Então, para cada minimizador  $u_\lambda^\delta$  do funcional dado em (2.16) a estimativa*

$$D_h^{F^* \omega} (u_\lambda^\delta, \bar{u}) \leq \frac{\|\omega\|^2}{2\lambda} + \delta \|\omega\| + \frac{\lambda \delta^2}{2}$$

é válida.

**Demonstração:** A demonstração segue diretamente do Teorema 2.3, a menos de constantes.  $\square$

O próximo resultado é para dados exatos e a ordem de convergência obtida nesse caso é  $\mathcal{O}(\lambda^{-1})$ .

**Proposição 2.6** (Convergência). *Se  $\bar{u}$  é uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) tal que condição de fonte (2.5) e a Equação (2.6) são satisfeitas, então para cada minimizador  $u_\lambda$  do funcional dado em (2.16) com dado exato, a estimativa*

$$D_h^{F^* \omega} (u_\lambda, \bar{u}) \leq \frac{\|\omega\|^2}{2\lambda}$$

é válida.

**Demonstração:** A demonstração desse teorema pode ser vista como uma aplicação do teorema anterior tomando  $\delta = 0$ .  $\square$

O próximo funcional de Tikhonov a ser estudado é uma variante de (2.16). Para tal variação retiramos a hipótese da diferenciabilidade do segundo termo, o qual mede o resíduo.

### Modelo com penalização exata

Um aproximação para o problema regularizado (2.16) ou (2.3), pois como observamos anteriormente esses modelos possuem o mesmo minimizador, é através de uma penalização exata.

A nomenclatura *penalização exata* é usada em programação não linear, em nosso contexto também vamos usá-la. Essa terminologia fica mais próxima do seu contexto original quando pensamos  $Fu = y^\delta$  como a restrição de igualdade para o modelo

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && h(u) + \lambda \left\| Fu - y^\delta \right\| \\ & \text{sujeito a} && u \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Apesar desse modelo ser diferente dos anteriores obtemos ótimos resultados teóricos. O primeiro é para dados com ruídos. No modelo irrestrito os resultados vistos garantem que uma solução regularizada converge para a solução  $\bar{u}$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$  e mais, a escolha do parâmetro de regularização depende do nível de ruído. No próximo resultado para o modelo de penalização exata proposto em (2.17), garantimos que uma solução regularizada converge para a solução  $\bar{u}$  na ordem  $\mathcal{O}(\delta)$  e essa taxa ocorre para um  $\lambda$  finito e não tem dependência de  $\delta$ .

**Teorema 2.7** (Estabilidade). *Suponha (2.4) válida e seja  $\bar{u}$  uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) tal que condição de fonte (2.5) e a Equação (2.6) são satisfeitas. Assuma que  $\lambda > \|\omega\|$ . Então, para cada minimizador  $u_\lambda^\delta$  de (2.17) a estimativa*

$$D_h^{F^* \omega} \left( u_\lambda^\delta, \bar{u} \right) \leq (\lambda + \|\omega\|) \delta$$

é válida.



**Demonstração:** Como  $u_\lambda^\delta$  é minimizador de (2.17) vale

$$\begin{aligned} \lambda \left\| Fu_\lambda^\delta - y^\delta \right\| + h(u_\lambda^\delta) &\leq \lambda \left\| F\bar{u} - y^\delta \right\| + h(\bar{u}) \\ &= \lambda \left\| y - y^\delta \right\| + h(\bar{u}) \\ &\leq \lambda \delta + h(\bar{u}) . \end{aligned}$$

Note que na primeira igualdade usamos (2.6), enquanto para a última desigualdade utilizamos (2.4).

Podemos reescrever a desigualdade acima de maneira conveniente, como

$$\lambda \left\| Fu_\lambda^\delta - y^\delta \right\| + h(u_\lambda^\delta) - h(\bar{u}) \leq \lambda \delta . \quad (2.18)$$

A distância de Bregman entre  $u_\lambda^\delta$  e  $\bar{u}$  com o subgradiente dado pela condição de fonte (2.5) é definida como

$$D_h^{F^* \omega} (u_\lambda^\delta, \bar{u}) = h(u_\lambda^\delta) - h(\bar{u}) - \langle F^* \omega, u_\lambda^\delta - \bar{u} \rangle . \quad (2.19)$$

Reescrevendo essa definição como

$$h(u_\lambda^\delta) - h(\bar{u}) = D_h^{F^* \omega} (u_\lambda^\delta, \bar{u}) + \langle F^* \omega, u_\lambda^\delta - \bar{u} \rangle$$

e substituindo essa igualdade em (2.18), obtemos

$$\lambda \left\| Fu_\lambda^\delta - y^\delta \right\| + D_h^{F^* \omega} (u_\lambda^\delta, \bar{u}) + \langle F^* \omega, u_\lambda^\delta - \bar{u} \rangle \leq \lambda \delta .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda \left\| Fu_\lambda^\delta - y^\delta \right\| + D_h^{F^* \omega} (u_\lambda^\delta, \bar{u}) &\leq \lambda \delta - \langle F^* \omega, u_\lambda^\delta - \bar{u} \rangle \\ &= \lambda \delta - \langle \omega, Fu_\lambda^\delta - F\bar{u} \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq \lambda \delta + \left| \langle \omega, Fu_\lambda^\delta - F\bar{u} \rangle_{\mathcal{H}} \right| \\ &= \lambda \delta + \left| \langle \omega, Fu_\lambda^\delta - y \rangle_{\mathcal{H}} \right| \\ &\leq \lambda \delta + \|\omega\| \left\| Fu_\lambda^\delta - y \right\| \\ &= \lambda \delta + \|\omega\| \left\| Fu_\lambda^\delta - y^\delta - (y - y^\delta) \right\| \\ &\leq \lambda \delta + \|\omega\| \left( \left\| Fu_\lambda^\delta - y^\delta \right\| + \left\| y - y^\delta \right\| \right) \\ &\leq \lambda \delta + \|\omega\| \left( \left\| Fu_\lambda^\delta - y^\delta \right\| + \delta \right) . \end{aligned}$$

Para as estimativas feitas acima usamos a definição de produto dual, desigualdade de Cauchy - Schwarz e (2.4).

Visto a última desigualdade, podemos isolar a distância de Bregman do lado esquerdo e obter

$$\begin{aligned}
 D_h^{F^* \omega} (u_\lambda^\delta, \bar{u}) &\leq \lambda \delta + \|\omega\| \left( \|Fu_\lambda^\delta - y^\delta\| + \delta \right) - \lambda \|Fu_\lambda^\delta - y^\delta\| \\
 &= \lambda \delta + \|\omega\| \|Fu_\lambda^\delta - y^\delta\| + \delta \|\omega\| - \lambda \|Fu_\lambda^\delta - y^\delta\| \\
 &= (\lambda + \|\omega\|) \delta + (\|\omega\| - \lambda) \|Fu_\lambda^\delta - y^\delta\|. \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração, usamos a hipótese  $\lambda > \|\omega\|$  e concluímos que  $(\|\omega\| - \lambda) < 0$ . Substituindo em (2.20) temos

$$D_h^{F^* \omega} (u_\lambda^\delta, \bar{u}) \leq (\lambda + \|\omega\|) \delta.$$

□

O segundo resultado desenvolvido para o modelo (2.17) é ainda mais interessante. Para dados exatos garantimos que para um  $\lambda$  finito resolvemos o problema proposto (2.1) de maneira eficiente e se adicionarmos uma hipótese ao funcional no termo de penalização, a saber que ele seja estritamente convexo, garantimos que a solução regularizada de (2.17) é uma solução  $\bar{u}$ .

**Teorema 2.8** (Convergência). *Seja  $y^\delta = y$  e  $\bar{u}$  uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) tal que condição de fonte (2.5) e a Equação (2.6) são satisfeitas. Assuma que  $\lambda > \|\omega\|$ . Então, cada minimizador  $u_\lambda$  de (2.17) é uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) e*

$$D_h^{F^* \omega} (u_\lambda, \bar{u}) = 0.$$

*Ainda mais, se assumirmos que  $h$  é estritamente convexo no núcleo de  $F$ , então  $u_\lambda = \bar{u}$ .*

**Demonstração:** A demonstração desse teorema segue a demonstração do teorema anterior tomando  $\delta = 0$ . Falta mostrar a última parte do teorema, quando admitimos uma hipótese adicional.

Tomamos uma distância como em (2.19) e pela desigualdade (2.20) temos

$$D_h^{F^* \omega} (u_\lambda, \bar{u}) \leq (\|\omega\| - \lambda) \|Fu_\lambda - y\|.$$

Observe que o lado esquerdo da desigualdade acima representa um valor não negativo. Pela hipótese  $\lambda > \|\omega\|$  o lado direito dessa desigualdade deve ser menor ou igual a zero. Portanto,

deve ser satisfeita a igualdade

$$D_h^{F^* \omega}(u_\lambda, \bar{u}) = 0 .$$

Visto que cada solução analisada  $u_\lambda$  é um minimizador do funcional regularizado (2.17), vale

$$\begin{aligned} \lambda \|Fu_\lambda - y\| + h(u_\lambda) &\leq \lambda \|F\bar{u} - y\| + h(\bar{u}) \\ &= h(\bar{u}) . \end{aligned}$$

A última igualdade é verdadeira pois  $\bar{u}$  satisfaz (2.6). Como cada parcela do lado esquerdo é limitada pelo lado direito, em particular, temos

$$h(u_\lambda) \leq h(\bar{u}) .$$

Por outro lado, temos por hipótese que  $\bar{u}$  é uma solução  $h$ -minimizante, isto é, o valor do funcional aplicado em qualquer elemento sempre é maior do que  $h(\bar{u})$ . Em particular para o elemento  $u_\lambda$  vale

$$h(\bar{u}) \leq h(u_\lambda) .$$

Combinando as duas últimas desigualdades temos a igualdade  $h(\bar{u}) = h(u_\lambda)$ .

Utilizando a hipótese adicional de que o funcional  $h$  é estritamente convexo segue que  $\bar{u} = u_\lambda$ .  $\square$

O último modelo apresentado faz sentido somente quando os dados não são exatos, pois ele é definido por uma restrição de desigualdade que depende do nível de ruído.

### Modelo restrito

O último modelo a ser exposto é um problema com restrição de desigualdade. Esse modelo é uma aproximação relacionada ao Problema (2.16), apenas para o caso de dados com ruído. O modelo estudado é

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && h(u) \\ &\text{sujeito a} && \left\| Fu - y^\delta \right\| \leq \delta . \\ &&& u \in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Uma motivação para a escolha da restrição de desigualdade é dada por (2.4) em que o nível de ruído é controlado. Sendo assim, um elemento  $u$  que satisfaz a restrição de desigualdade

do Problema (2.21) tem sua imagem próxima do dado exato  $y$  a menos de  $2\delta$ . Apesar dessa implicação não garantir que tal elemento esteja próximo da solução  $\bar{u}$ , pois o problema (2.1) é mal-posto, o conjunto dos elementos  $u$  que satisfazem a restrição de desigualdade é um bom palpite para procurarmos um elemento, nesse conjunto, que também esteja próximo de uma solução  $h$ -minimizante.

O próximo resultado nos informa quais as condições que devemos assumir a fim de obtermos uma taxa da ordem  $\mathcal{O}(\delta)$ . Essa formulação não tem o parâmetro  $\lambda$  e mesmo assim conseguimos estimativas tão boas quanto as anteriores. De fato, as soluções desse problema convergem na mesma taxa das soluções regularizadas dos problemas (2.3), (2.16) e (2.17) para dados inexatos.

**Teorema 2.9.** *Suponha (2.4) válida e seja  $\bar{u}$  uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) tal que condição de fonte (2.5) e a Equação (2.6) são satisfeitas. Então, para cada minimizador  $u^\delta$  de (2.21) a estimativa*

$$D_h^{F^* \omega} \left( u^\delta, \bar{u} \right) \leq 2\delta \|\omega\|$$

é válida.

**Demonstração:** Como por hipótese  $u^\delta$  é solução de (2.21), o valor do funcional  $h(\cdot)$  aplicado em  $u^\delta$  é menor do que em qualquer outro elemento  $u$  que satisfaça  $\|Fu - y^\delta\| \leq \delta$ . Por exemplo, para a solução  $h$ -minimizante vale

$$h \left( u^\delta \right) \leq h \left( \bar{u} \right) .$$

Ou ainda,

$$h \left( u^\delta \right) - h \left( \bar{u} \right) \leq 0 . \tag{2.22}$$

A definição de distância de Bregman entre  $u^\delta$  e  $\bar{u}$  com subgradiente dado por (2.5) é

$$D_h^{F^* \omega} \left( u^\delta, \bar{u} \right) = h \left( u^\delta \right) - h \left( \bar{u} \right) - \left\langle F^* \omega, u^\delta - \bar{u} \right\rangle .$$

Por conveniência reescrevemos essa distância como

$$h \left( u^\delta \right) - h \left( \bar{u} \right) = D_h^{F^* \omega} \left( u^\delta, \bar{u} \right) + \left\langle F^* \omega, u^\delta - \bar{u} \right\rangle .$$

Com isso, substituímos o valor da igualdade acima no lado esquerdo da desigualdade (2.22).

Logo,

$$D_h^{F^* \omega} \left( u^\delta, \bar{u} \right) + \left\langle F^* \omega, u^\delta - \bar{u} \right\rangle \leq 0 .$$

Usando propriedades de produto dual, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a hipótese (2.4) e o fato de  $u^\delta$  ser solução do problema (2.21) conseguimos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
D_h^{F^* \omega} (u^\delta, \bar{u}) &\leq -\langle F^* \omega, u^\delta - \bar{u} \rangle \\
&= \langle F^* \omega, \bar{u} - u^\delta \rangle \\
&= \langle \omega, F\bar{u} - Fu^\delta \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle \omega, y - Fu^\delta \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle \omega, (y - y^\delta) + (y^\delta - Fu^\delta) \rangle_{\mathcal{H}} \\
&\leq \|\omega\| \left\| (y - y^\delta) + (y^\delta - Fu^\delta) \right\| \\
&\leq \|\omega\| \left( \|y - y^\delta\| + \|y^\delta - Fu^\delta\| \right) \\
&\leq \|\omega\| (\delta + \delta) \\
&= \|\omega\| 2\delta .
\end{aligned}$$

Comparando a parte inicial da desigualdade dada acima com a última parte concluímos que

$$D_h^{F^* \omega} (u^\delta, \bar{u}) \leq 2\delta \|\omega\| .$$

□

Todas as estimativas apreciadas até o presente momento são baseadas na condição de fonte (2.5). Na próxima seção assumimos uma nova condição mais forte e derivamos estimativas análogas as obtidas na primeira parte deste capítulo.

## 2.2 Estimativas para condições de fonte $\xi = F^*F\omega$

Na teoria clássica de regularização de Tikhonov é comum exigir que as soluções regularizadas e a solução “exata” do Problema (2.1) pertençam a imagem do operador  $(F^*F)^\mu$  com  $\mu > 0$ . Essa suposição é uma condição de fonte para a regularização de Tikhonov em espaços de Hilbert, conforme comentado na introdução deste trabalho. Nesta seção vamos derivar estimativas para o erro no domínio e também na imagem do operador  $F$ . As estimativas no domínio são obtidas através da distância de Bregman, enquanto as estimativas na imagem são feitas em relação a norma do espaço  $\mathcal{H}$ . Motivados pela condição de fonte (2.5), admitida na seção anterior, e tendo em vista a condição de fonte na formulação clássica, assumimos por conveniência a condição de fonte  $\xi = F^*F\omega$ .

Na seção anterior assumimos  $y \in \mathcal{R}(F)$ , com a nova condição de fonte podemos relaxar essa exigência. Uma vez que possivelmente  $y \notin \mathcal{R}(F)$  não garantimos a igualdade  $Fu = y$ , logo a Definição 2.2 deve ser reformulada. Por isso, consideramos a solução de quadrados mínimos  $F^*F\bar{u} = F^*y$ . Com isso em mente definimos  $\bar{u}$  uma *solução h-minimizante* como uma solução do problema de otimização com restrição de igualdade

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && h(u) \\ & \text{sujeito a} && F^*F\bar{u} - F^*y = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ao longo desta seção a condição de fonte é baseada na existência de um elemento  $\xi \in \partial h(\bar{u}) \subset \mathcal{U}^*$  na imagem do operador  $F^*F$ . Em suma, supomos

$$\xi \in \mathcal{R}(F^*F) \cap \partial h(\bar{u}) \neq \emptyset \quad (2.24)$$

e a equação abaixo seja satisfeita

$$F^*F\bar{u} = F^*y. \quad (2.25)$$

Assumir a Equação (2.24) é equivalente a afirmar a existência de um elemento  $\omega \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$  tal que  $\xi = F^*F\omega$ , em que  $F^*$  é o operador adjunto de  $F$  e  $F^*F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^*$ .

Uma análise da condição de fonte (2.24) e (2.25) com relação as condições de KKT exibidas em (2.9) para o problema (2.23) pode ser repetida como na seção anterior, definindo o Lagrangeano de maneira semelhante a (2.8). Para (2.23) as condições de KKT são

$$\partial h(\bar{u}) \in (F^*F)^* \omega$$

e

$$F^*F\bar{u} = F^*y.$$

Uma vez que  $(F^*F)^* : \mathcal{U}^{**} \rightarrow \mathcal{U}^*$ , garantimos a existência de um multiplicador de Lagrange  $\omega \in \mathcal{U}^{**}$ , em que  $\mathcal{U}^{**} = (\mathcal{U}^*)^*$  é o dual do espaço  $\mathcal{U}^*$ , chamado de bidual de  $\mathcal{U}$  (ver [Kre89]). Sabemos que  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^{**}$  e o espaço de Banach  $\mathcal{U}^{**}$  pode ser bem maior que o espaço de Banach  $\mathcal{U}$ , pois a igualdade  $\mathcal{U}^{**} = \mathcal{U}$  vale somente para espaços de Banach reflexivos. Contudo, a hipótese de  $\mathcal{U}$  ser um espaço de Banach reflexivo não é assumida neste trabalho. A condição de fonte (2.24) considera apenas os elementos  $\omega \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}^{**}$  e desse modo fazemos menção ao operador  $F^*F$  ao invés de  $(F^*F)^*$ , pois a restrição do operador  $(F^*F)^*$  ao subespaço  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^{**}$  é o próprio operador  $F^*F$ .

Apresentamos o primeiro resultado para dados inexatos, cujo nível de ruído é limitado. Através da hipótese de fonte discutida acima obtemos uma estimativa para a distância entre

uma solução regularizada  $u_\alpha^\delta$  e a solução  $\bar{u}$  em comparação com a distância de  $\bar{u}$  e do elemento  $v = \bar{u} - \alpha\omega$ . Note que o elemento  $v$  está na direção oposta ao multiplicador de Lagrange fornecido pela condição de fonte (2.24), a partir da solução  $h$ -minimizante  $\bar{u}$ . Essas distâncias são mensuradas pela distância de Bregman. A ordem de convergência para esse resultado é fornecida através do Corolário 2.12, mediante hipóteses adicionais.

**Teorema 2.10** (Estabilidade). *Sejam (2.4) válida e  $\bar{u}$  uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) tal que a condição de fonte (2.24) e (2.25) são satisfeitas, então as seguintes desigualdades valem para  $\alpha > 0$ :*

$$D_h^{F^*F\omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \leq D_h^{F^*F\omega} (\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) + \frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{\delta^2 + 2\alpha D_h^{F^*F\omega} (\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u})} \quad (2.26)$$

e

$$\left\| Fu_\alpha^\delta - F\bar{u} \right\| \leq \alpha \|F\omega\| + \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\alpha D_h^{F^*F\omega} (\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u})}.$$

**Demonstração:** Dado uma solução  $u_\alpha^\delta$  do problema regularizado (2.3) temos

$$\frac{1}{2} \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 + \alpha h(u_\alpha^\delta) \leq \frac{1}{2} \left\| Fu - y^\delta \right\|^2 + \alpha h(u).$$

Reescrevendo essa desigualdade e utilizando a Equação (2.25), segue

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2} \left[ \left\| Fu_\alpha^\delta - y^\delta \right\|^2 - \left\| Fu - y^\delta \right\|^2 \right] + \alpha h(u_\alpha^\delta) - \alpha h(u) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left\| Fu_\alpha^\delta \right\|^2 - 2 \langle Fu_\alpha^\delta, y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \left\| y^\delta \right\|^2 - \|Fu\|^2 + 2 \langle Fu, y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} - \left\| y^\delta \right\|^2 \right] \\ &\quad + \alpha \left( h(u_\alpha^\delta) - h(\bar{u}) - \langle F^*F\omega, u_\alpha^\delta - \bar{u} \rangle \right) - \alpha \left( h(u) - h(\bar{u}) - \langle F^*F\omega, u - \bar{u} \rangle \right) \\ &\quad + \alpha \langle F^*F\omega, u_\alpha^\delta - u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left\| Fu_\alpha^\delta \right\|^2 - \|Fu\|^2 - 2 \langle Fu_\alpha^\delta - Fu, y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} \right] + \alpha D_h^{F^*F\omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) - \alpha D_h^{F^*F\omega} (u, \bar{u}) \\ &\quad + \alpha \langle F^*F\omega, u_\alpha^\delta - u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left\| Fu_\alpha^\delta \right\|^2 - \|Fu\|^2 \right] - \langle F(u_\alpha^\delta - u), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \alpha \langle F\omega, F(u_\alpha^\delta - u) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad - \alpha D_h^{F^*F\omega} (u, \bar{u}) + \alpha D_h^{F^*F\omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Observamos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
& \left\| F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha \omega \right) \right\|^2 - \|F(u - \bar{u} + \alpha \omega)\|^2 + 2 \left\langle F u_\alpha^\delta - F u, F \bar{u} - \alpha F \omega \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
= & \left\langle F u_\alpha^\delta - F(\bar{u} - \alpha \omega), F u_\alpha^\delta - F(\bar{u} - \alpha \omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} - \left\langle F u - F(\bar{u} - \alpha \omega), F u - F(\bar{u} - \alpha \omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
& + 2 \left\langle F u_\alpha^\delta - F u, F \bar{u} - \alpha F \omega \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
= & \left\langle F u_\alpha^\delta, F u_\alpha^\delta \right\rangle_{\mathcal{H}} - \left\langle F u_\alpha^\delta, F(\bar{u} - \alpha \omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} - \left\langle F(\bar{u} - \alpha \omega), F u_\alpha^\delta \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
& + \left\langle F(\bar{u} - \alpha \omega), F(\bar{u} - \alpha \omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} - \left\langle F u, F u \right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle F u, F(\bar{u} - \alpha \omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} + \left\langle F(\bar{u} - \alpha \omega), F u \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
& - \left\langle F(\bar{u} - \alpha \omega), F(\bar{u} - \alpha \omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} + 2 \left\langle F u_\alpha^\delta, F(\bar{u} - \alpha \omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} - 2 \left\langle F u, F(\bar{u} - \alpha \omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
= & \left\| F u_\alpha^\delta \right\|^2 - \|F u\|^2 .
\end{aligned}$$

Com essa observação o lado direito da desigualdade (2.27) é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[ \left\| F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha \omega \right) \right\|^2 - \|F(u - \bar{u} + \alpha \omega)\|^2 \right] + \left\langle F u_\alpha^\delta - F u, F \bar{u} - \alpha F \omega \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
& - \left\langle F \left( u_\alpha^\delta - u \right), y^\delta \right\rangle_{\mathcal{H}} + \alpha \left\langle F \omega, F \left( u_\alpha^\delta - u \right) \right\rangle_{\mathcal{H}} - \alpha D_h^{F^* F \omega} (u, \bar{u}) + \alpha D_h^{F^* F \omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \\
= & \frac{1}{2} \left[ \left\| F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha \omega \right) \right\|^2 - \|F(u - \bar{u} + \alpha \omega)\|^2 \right] + \left\langle F \left( u_\alpha^\delta - u \right), F \bar{u} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
& - \alpha \left\langle F \left( u_\alpha^\delta - u \right), F \omega \right\rangle_{\mathcal{H}} - \left\langle F \left( u_\alpha^\delta - u \right), y^\delta \right\rangle_{\mathcal{H}} + \alpha \left\langle F \omega, F \left( u_\alpha^\delta - u \right) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
& - \alpha D_h^{F^* F \omega} (u, \bar{u}) + \alpha D_h^{F^* F \omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \\
= & \frac{1}{2} \left[ \left\| F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha \omega \right) \right\|^2 - \|F(u - \bar{u} + \alpha \omega)\|^2 \right] - \left\langle F \left( u_\alpha^\delta - u \right), y^\delta - F \bar{u} \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
& - \alpha D_h^{F^* F \omega} (u, \bar{u}) + \alpha D_h^{F^* F \omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) . \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Para continuar a estimativa acima observamos através da hipótese (2.25), a seguinte equivalência:

$$\begin{aligned}
& \left\langle F \left( u_\alpha^\delta - u \right), y^\delta - F \bar{u} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle u_\alpha^\delta - u, F^* \left( y^\delta - F \bar{u} \right) \right\rangle = \left\langle u_\alpha^\delta - u, F^* y^\delta - F^* F \bar{u} \right\rangle \\
= & \left\langle u_\alpha^\delta - u, F^* y^\delta - F^* y \right\rangle = \left\langle u_\alpha^\delta - u, F^* \left( y^\delta - y \right) \right\rangle = \left\langle F \left( u_\alpha^\delta - u \right), y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

Substituindo essa informação no lado direito de (2.28), o qual estima o lado direito de



(2.26), que é menor ou igual a zero, segue

$$\frac{1}{2} \left\| F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha \omega \right) \right\|^2 + \alpha D_h^{F^*F\omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \leq \left\langle F \left( u_\alpha^\delta - u \right), y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} + \alpha D_h^{F^*F\omega} (u, \bar{u}) + \frac{1}{2} \left\| F (u - \bar{u} + \alpha \omega) \right\|^2$$

para todo elemento  $u \in \mathcal{U}$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $\delta \geq 0$ .

Tomando  $u = \bar{u} - \alpha \omega$  para um  $\alpha \geq 0$  na equação acima verificamos

$$\frac{1}{2} \left\| F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha \omega \right) \right\|^2 + \alpha D_h^{F^*F\omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \leq \left\langle F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} - \alpha \omega \right), y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} + \alpha D_h^{F^*F\omega} (\bar{u} - \alpha \omega, \bar{u}) .$$

Usando a relação  $\langle a, b \rangle \leq |\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$  e a hipótese (2.4) na estimativa acima, obtemos

$$\frac{1}{2} \left\| F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha \omega \right) \right\|^2 + \alpha D_h^{F^*F\omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \leq \left\| F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha \omega \right) \right\| \delta + \alpha D_h^{F^*F\omega} (\bar{u} - \alpha \omega, \bar{u}) .$$

Para simplificar a notação definimos a variável  $\gamma = \left\| F \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha \omega \right) \right\|$  e reescrevemos a relação acima como

$$\frac{1}{2} \gamma^2 + \alpha D_h^{F^*F\omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \leq \delta \gamma + \alpha D_h^{F^*F\omega} (\bar{u} - \alpha \omega, \bar{u}) .$$

Como todos os termos envolvidos na desigualdade acima são positivos, cada parcela da soma dada no lado esquerdo da mesma é limitado pela quantidade do lado direito. Dessa maneira obtemos duas estimativas, a saber

$$\alpha D_h^{F^*F\omega} \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \leq \delta \gamma + \alpha D_h^{F^*F\omega} (\bar{u} - \alpha \omega, \bar{u}) \quad (2.29)$$

e

$$\gamma^2 \leq 2\delta\gamma + 2\alpha D_h^{F^*F\omega} (\bar{u} - \alpha \omega, \bar{u}) . \quad (2.30)$$

Para continuar a estimativa na primeira desigualdade precisamos encontrar um majorante para  $\gamma$ , o qual será exibido através da desigualdade (2.30). Para isso, basta ver que ela é uma inequação do segundo grau em  $\gamma$ . Utilizando a fórmula de Báskara encontramos duas raízes para a equação do segundo grau associada a essa inequação, a saber

$$\gamma_{1,2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 + 2\alpha D_h^{F^*F\omega} (\bar{u} - \alpha \omega, \bar{u})} .$$

Facilmente vemos que uma solução  $\gamma$  é positiva e outra é negativa. Como a solução deve

satisfazer  $\gamma \geq 0$ , a Inequação (2.30) é satisfeita para

$$\gamma \leq \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\alpha D_h^{F^*F\omega}(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u})}. \quad (2.31)$$

Usando essa estimativa em (2.29) e assumindo que  $\alpha > 0$  encontramos a primeira estimativa desse teorema, a saber

$$D_h^{F^*F\omega}(u_\alpha^\delta, \bar{u}) \leq D_h^{F^*F\omega}(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) + \frac{\delta^2}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{\delta^2 + 2\alpha D_h^{F^*F\omega}(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u})}.$$

Para encontrar a segunda desigualdade requerida nesse teorema observamos que

$$\begin{aligned} \|F(u_\alpha^\delta - \bar{u})\| &= \|F(u_\alpha^\delta - \bar{u}) + \alpha F\omega - \alpha F\omega\| \\ &\leq \|F(u_\alpha^\delta - \bar{u} + \alpha\omega)\| + \|\alpha F\omega\| \\ &= \gamma + \alpha \|F\omega\|. \end{aligned}$$

Note que na última igualdade utilizamos apenas a definição de  $\gamma$  introduzida anteriormente. Utilizando a estimativa (2.31) para  $\gamma$  obtemos

$$\|F(u_\alpha^\delta - \bar{u})\| \leq \alpha \|F\omega\| + \delta + \sqrt{\delta^2 + 2\alpha D_h^{F^*F\omega}(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u})},$$

confirmando a segunda estimativa desse teorema.  $\square$

O mesmo resultado visto no teorema acima é repetido para dados exatos. A estimativa para o erro obtida no teorema a seguir, entre a solução regularizada e a solução  $h$ -minimizante, é dada novamente em relação a distância de Bregman entre  $\bar{u}$  e  $v = \bar{u} - \alpha\omega$ . Para  $\alpha \rightarrow 0$  temos  $v \rightarrow \bar{u}$  e como  $D_h^\xi(\cdot, \bar{u})$  é uma função crescente, o erro produzido pela distância de Bregman decresce quando  $\alpha$  tende a zero. Para melhor ilustrar o comportamento do termo que aparece no lado direito de (2.32) observamos a Figura 2.1.

Para melhor compreender a ilustração da Figura 2.1 inserimos a notação com índice  $k$ . Sendo assim, definimos  $v_k = \bar{u} - \alpha_k\omega$  com  $\alpha_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  e denotamos  $e_k = D_h^\xi(v_k, \bar{u})$ , com  $\xi \in \partial h(\bar{u})$ .

No Teorema 2.11 apresentamos uma estimativa na imagem do operador  $F$ . Para taxas de convergência no domínio do operador citamos o Corolário 2.12.

**Teorema 2.11** (Convergência). *Se  $\bar{u}$  é uma solução  $h$ -minimizante de (2.1) tal que as condições de fontes (2.24) e (2.25) são satisfeitas, então, dado  $\alpha \geq 0$ , as desigualdades*

$$D_h^{F^*F\omega}(u_\alpha, \bar{u}) \leq D_h^{F^*F\omega}(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) \quad (2.32)$$

e

$$\|Fu_\alpha - F\bar{u}\| \leq \alpha \|F\omega\| + \sqrt{2\alpha D_h^{F^*F\omega}(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u})}$$

são satisfeitas.

**Demonstração:** A demonstração desse teorema segue a mesma idéia da demonstração do Teorema 2.10, porém aqui tomamos  $\delta = 0$  e não é necessário impor  $\alpha > 0$ .  $\square$

O próximo resultado agrupa taxas de convergência para os Teoremas 2.10 e 2.11. As hipóteses assumidas no Corolário 2.12 são suficientes para obter uma taxa  $\mathcal{O}(\delta^{\frac{4}{3}})$  para dados com ruídos, quando tomamos o parâmetro de regularização  $\alpha \sim \delta^{\frac{2}{3}}$ . Em geral, para obtermos taxas de convergência para os teoremas desta seção precisamos de uma estimativa para a distância de Bregman  $D_h^\xi(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u})$  encontrada nas estimativas (2.26) e (2.32). Uma alternativa é apresentada a seguir.

**Corolário 2.12.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.10 assuma também que  $h$  é duplamente diferenciável numa vizinhança de  $\bar{u}$  e que existe um número  $M > 0$  tal que, para cada  $u$  nesta vizinhança e  $v \in \mathcal{U}$ ,*

$$\langle h''(u)v, v \rangle \leq M \|v\|^2. \quad (2.33)$$

Então, para a escolha do parâmetro  $\alpha \sim \delta^{\frac{2}{3}}$

$$D_h^\xi(u_\alpha^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}(\delta^{\frac{4}{3}}),$$

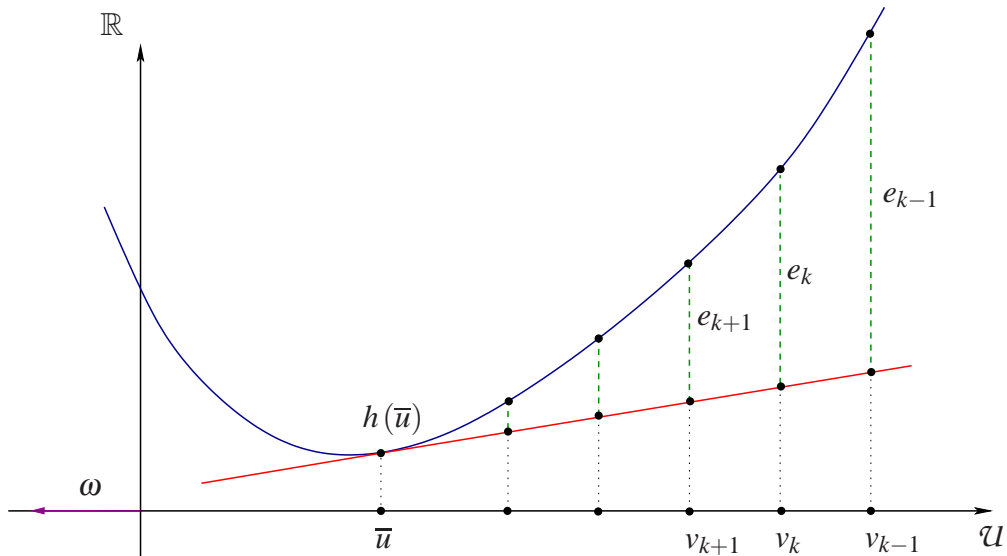


Figura 2.1: Convergência com distância de Bregman

enquanto para dados exatos obtemos

$$D_h^\xi(u_\alpha, \bar{u}) = \mathcal{O}(\alpha^2) .$$

**Demonstração:** Através da expansão de Taylor da função  $h$  em torno de  $\bar{u}$  temos

$$h(u) = h(\bar{u}) + \langle h'(\bar{u}), u - \bar{u} \rangle + \frac{1}{2} \langle h''(\mu)(u - \bar{u}), u - \bar{u} \rangle$$

para algum  $\mu \in [u, \bar{u}]$ .

Tomando  $u = \bar{u} - \alpha\omega$  na expressão acima

$$\begin{aligned} h(\bar{u} - \alpha\omega) &= h(\bar{u}) + \langle h'(\bar{u}), \bar{u} - \alpha\omega - \bar{u} \rangle + \frac{1}{2} \langle h''(\mu)(\bar{u} - \alpha\omega - \bar{u}), \bar{u} - \alpha\omega - \bar{u} \rangle \\ &= h(\bar{u}) + \langle h'(\bar{u}), -\alpha\omega \rangle + \frac{1}{2} \langle h''(\mu)(-\alpha\omega), -\alpha\omega \rangle . \end{aligned}$$

Essa igualdade pode ser reescrita como

$$h(\bar{u} - \alpha\omega) - h(\bar{u}) - \langle h'(\bar{u}), -\alpha\omega \rangle = \frac{1}{2} \langle h''(\mu)(-\alpha\omega), -\alpha\omega \rangle .$$

Visto que  $h$  é duplamente diferenciável o subgradiente em  $\bar{u}$  é o próprio gradiente da função. Isto é,  $\xi = h'(\bar{u})$ . Observando que o lado esquerdo da igualdade acima necessariamente é a distância de Bregman entre  $\bar{u} - \alpha\omega$  e  $\bar{u}$ , induzida pelo funcional  $h$ , podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned} D_h^\xi(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) &= \frac{1}{2} \langle h''(\mu)(-\alpha\omega), -\alpha\omega \rangle \\ &\leq \frac{M}{2} \|\alpha\omega\|^2 \\ &= \alpha^2 \frac{M}{2} \|\omega\|_U^2 \\ &= \mathcal{O}(\alpha^2) . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Note que para obtermos a estimativa acima utilizamos a hipótese (2.33).

Para dados com ruído mencionamos o Teorema 2.10, mais especificamente a Equação (2.26) e encontramos

$$D_h^\xi(u_\alpha^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}\left(\delta^{\frac{4}{3}}\right) ,$$

quando  $\alpha \sim \delta^{\frac{2}{3}}$ .

Para os dados exatos, pela Equação (2.32) do Teorema 2.11, concluímos

$$D_h^\xi(u_\alpha, \bar{u}) = \mathcal{O}(\alpha^2) .$$

## 2.3 Comparação com a teoria clássica de regularização

Nesta seção vamos definir um funcional  $h$  como termo de penalização para o problema regularizado apresentado em (2.3). Com a escolha de um funcional conveniente, desde que sejam satisfeitas as hipóteses anteriormente observadas, podemos comparar os resultados até então obtidos com a teoria clássica.

Para cada funcional definido derivamos um método de regularização diferente. Em cada subseção que segue apresentamos um funcional de penalização com o objetivo de gerar o método de Tikhonov, variação total e máxima entropia. Nossa atenção é voltada aos dois primeiros, os quais formam a base e motivação deste trabalho.

### 2.3.1 Regularização de Tikhonov

O método de regularização de Tikhonov, como já mencionamos, é a base deste trabalho. Nosso principal interesse nesta seção é exemplificar a generalização proposta, para isso aplicamos um funcional convexo de maneira a derivar o método de Tikhonov. Além disso, vamos mostrar que as condições de fonte e as taxas de convergência investigadas neste capítulo são equivalentes as do método clássico. Para maiores detalhes sugerimos [EHN00, Gro84, Gro93, Kir96, Mor84].

Essa regularização é aplicada para uma equação do tipo (2.1), em que o operador linear  $F$  é definido entre o espaço de Hilbert  $\mathcal{U}$  nele mesmo. Para a escolha do funcional de penalização

$$h(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{\mathcal{U}}^2, \quad (2.35)$$

o problema regularizado (2.3) torna-se

$$J_{\alpha}^{\delta}(u) = \frac{1}{2} \|Fu - y^{\delta}\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_{\mathcal{U}}^2.$$

Uma vez que o funcional definido em (2.35) é Gâteaux diferenciável temos  $\partial h(u) = \{u\}$ .

Portanto, a distância de Bregman é

$$\begin{aligned}
 D_h^\xi(v, u) &= h(v) - h(u) - \langle \xi, v - u \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{\mathcal{U}}^2 - \langle u, v - u \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 - \frac{1}{2} \|u\|_{\mathcal{U}}^2 - \langle u, v \rangle + \|u\|_{\mathcal{U}}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \|v\|_{\mathcal{U}}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{\mathcal{U}}^2 - \langle u, v \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \|v - u\|_{\mathcal{U}}^2 .
 \end{aligned}$$

Falta verificar a condição de fonte para aplicarmos os resultados de convergência anteriores, a qual é satisfeita. De fato, a condição de fonte (2.5) para o caso em que o subdiferencial é unitário resulta em  $\bar{u} = F^* \omega$ . Para essa condição de fonte podemos aplicar os Teoremas 2.3 e 2.4 e através deles encontramos os seguintes resultados de convergência

$$\|u_\alpha^\delta - \bar{u}\|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}})$$

e

$$\|u_\alpha - \bar{u}\|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}(\alpha^{\frac{1}{2}}) .$$

Para a condição de fonte (2.24), visto que  $\partial h(\bar{u}) = \{\bar{u}\}$ , temos  $\bar{u} = F^* F \omega$ . Aplicando o Corolário 2.12 encontramos

$$\|u_\alpha^\delta - \bar{u}\|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}(\delta^{\frac{2}{3}}) , \text{ se } \alpha \sim \delta^{\frac{2}{3}}$$

e

$$\|u_\alpha - \bar{u}\|_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}(\alpha) .$$

Os resultados são comparáveis com a teoria clássica (veja por exemplo [EHN00]) e para a segunda condição de fonte temos uma taxa de convergência ótima.

Através desse exemplo concluímos que o método tipo Tikhonov generalizado por uma penalização convexa está bem fundamentado.

### 2.3.2 Regularização de variação limitada

Para o método de Tikhonov apresentado anteriormente, em geral, é utilizado o espaço de Hilbert  $L^2(\Omega)$  e sua norma como termo de penalização. O método de regularização de variação limitada consiste em trabalhar com funções cuja variação total seja limitada, ao invés de funções

que possuem quadrado integrável (integral com valor finito).

Esse método vem ganhando destaque na comunidade de problemas inversos a partir do artigo [ROF92]. Essa teoria vem sendo investigada por diversos autores como [AV94, CKP99, CK97, OBG<sup>+</sup>05, Vog02].

Essa técnica é aplicada como uma ferramenta favorável para problemas de processamento de imagem, uma vez que ela permite a reconstrução de soluções com descontinuidades. Um destaque para essa aplicação é a reconstrução de imagens com ruído. Em inglês esse processo é chamado de *denoising*.



Figura 2.2: Exemplo imagem com ruído



Figura 2.3: Imagem original - prédio

Esta aplicação a teoria clássica tem como objetivo ilustrar o método investigado com funcionais que são aplicados na prática, assim como na próxima subseção. Não vamos nos ater a detalhes de convergência e demais comparações. Para maiores detalhes veja [BO04, Res05].

Antes de apresentarmos a penalização para derivarmos o método de regularização desta subseção, precisamos definir o espaço das funções de variação total limitada, denotado por  $BV(\Omega)$  - do inglês *Bounded Variation*.

Iniciamos com uma definição num contexto mais acessível para uma função de uma variável, encontrada no livro [BSU96], e na sequência generalizamos tal definição. Seja  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\Omega = [a, b]$  e defina  $\pi$  uma partição qualquer desse intervalo, tal que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$ . Definimos a variação da função  $u$  como

$$TV_{\pi}(u; [a, b]) = \sum_{k=0}^{m-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)|$$

e a **variação total**<sup>1</sup> de  $u$  como

$$TV(u; [a, b]) = \sup_{\pi} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| \right\}. \quad (2.36)$$

<sup>1</sup>A notação  $TV(u; \Omega)$  deriva da expressão em inglês *Total Variation*.

O supremo na definição acima é calculado sobre todas as possíveis partições do intervalo  $[a, b]$ . Caso  $u$  seja constante por partes com um número finito de descontinuidades, então a variação total de  $u$  fornece a soma das magnitudes desses saltos.

Se  $TV(u; [a, b])$  é finito então dizemos que  $u$  possui variação total limitada, ou simplesmente *variação limitada*. Observamos que o conjunto de todas as funções com variação limitada formam o espaço normado  $BV([a, b])$  com a norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = |u|_{BV(\Omega)} + u(a) .$$

Na expressão acima  $| \cdot |_{BV(\Omega)}$  denota o supremo da variação total, isto é,

$$|u|_{BV(\Omega)} = \sup_{\pi} \{TV_{\pi}(u; [a, b])\} .$$

Além disso,  $| \cdot |_{BV(\Omega)}$  representa uma seminorma para o espaço  $BV(\Omega)$ .

As funções monótonas limitadas pertencem ao espaço  $BV(\Omega)$  e nesse caso  $|u|_{BV(\Omega)} = |u(b) - u(a)|$ . Outro exemplo clássico são as funções Lipschitz no intervalo  $[a, b]$ . Em particular, quando  $u \in \mathcal{C}^1([a, b])$  a definição de variação total pode ser reformulada, multiplicando e dividindo o lado direito de (2.36) por  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ . Assim,

$$|u|_{BV(\Omega)} = \sup_{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|u(u_{k+1}) - u(u_k)|}{\Delta x_k} \Delta x_k .$$

Tomando o limite quando  $\Delta x_k \rightarrow 0$  na equação acima obtemos a representação

$$|u|_{BV(\Omega)} = \int_a^b |\nabla u| dx , \tag{2.37}$$

em que  $\nabla u = \frac{du}{dx}$  denota a derivada da função  $u$  em relação a variável  $x$ . No livro [Kre89] com a definição de variação limitada da função  $u$  é obtido o conceito da integral de Riemann-Stieltjes.

Observamos que a definição da semi-norma de  $BV(\Omega)$  em (2.37) necessariamente é a norma da derivada da função  $u$  no espaço  $L^1([a, b])$ . Ainda mais, essa definição pode ser estendida para espaços de dimensão  $n \geq 1$ .

No livro [EG92] é apresentado uma definição para o espaço  $BV(\Omega)$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um subconjunto aberto, num contexto mais geral para funções em  $L^1(\Omega)$ .

Uma função  $u \in L^1(\Omega)$  pode ser descontínua e portanto não diferenciável no sentido clássico. Sendo assim, a generalização da definição apresentada em (2.37) deve ser construída num sentido mais fraco para a diferenciação de  $u$ . Utilizamos a derivada no sentido das distribuições



com o auxílio do conjunto de funções teste  $\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega) \mid |\varphi(x)| < 1, \forall x \in \Omega\}$ .

Definimos a variação total de  $u$  como

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup_{\varphi \in \mathcal{V}} \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varphi) dx \right\}, \quad (2.38)$$

em que  $Du$  denota a derivada distribucional de  $u$ .

Portanto,

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) \mid |u|_{BV(\Omega)} < \infty\} \quad (2.39)$$

é o espaço das funções de variação limitada, com

$$|u|_{BV(\Omega)} = \int_{\Omega} |Du|.$$

Além disso,  $BV(\Omega)$  é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = |u|_{BV(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Duas referências básicas para o estudo do espaço  $BV(\Omega)$  são [EG92] e [AFP00]. A última em especial traz propriedades que mostram  $BV(\Omega)$  como um espaço de Banach, sua imersão é compacta em  $L^1(\Omega)$  e introduz a definição de convergência fraca para esse espaço em dois sentidos: fraco-\* e estritamente convergente. Depois é observado que  $BV(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$  e  $W^{1,1} \subset BV(\Omega)$ , sendo estrita a inclusão do espaço de Sobolev<sup>2</sup> em  $BV(\Omega)$ . É definido a convergência fraco-\* e na sequência [AFP00, p. 124] traz um importante comentário:  $BV(\Omega)$  é o dual de um espaço separável e a caracterização da convergência fraca para o espaço de Banach  $BV(\Omega)$  é muito difícil; por outro lado, para domínios suficientemente regulares a convergência fraco-\* introduzida em [AFP00, Definição 3.11] define a convergência no dual de  $BV(\Omega)$ . Supondo  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  uma região aberta e limitada com fronteira  $\partial\Omega$  Lipschitz contínua são obtidos mais propriedades em [EG92], como a extensão de  $u \in BV(\Omega)$  para  $\tilde{u} \in BV(\mathbb{R}^n)$ .

Uma vez que as definições mais importantes estão expostas, o método de regularização proposto em [ROF92] consiste em tomar

$$h(u) = |u|_{BV(\Omega)} \quad (2.40)$$

como o funcional de penalização. Portanto, o problema regularizado (2.3) torna-se

$$J_{\alpha}^{\delta}(u) = \frac{1}{2} \left\| Fu - y^{\delta} \right\|^2 + \alpha |u|_{BV(\Omega)}. \quad (2.41)$$

---

<sup>2</sup>Aconselhamos ao leitor o livro [AF03] para maiores detalhes sobre espaços de Sobolev e teoria de distribuição.

Propriedades do método regularizado (2.41) foram desenvolvidas em [AV94, CKP99]. Nessas referências encontramos resultados que garantem a convexidade e a semi-continuidade inferior para o funcional de penalização (2.40), bem como a existência de solução e estabilidade para (2.41).

Segundo [BO04] um problema padrão  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  considerado pela regularização de variação limitada é definido para  $F = I$  o operador identidade entre os espaços  $\mathcal{U} = BV(\Omega)$  e  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ , para algum domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  com  $n \leq 3$ .

Se  $u$  é uma função contínua com  $|\nabla u| > 0$ , então o método regularizado (2.41) pode ser escrito como

$$J_{\alpha}^{\delta}(u) = \frac{1}{2} \|y^{\delta} - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx .$$

Nessas condições o subdiferencial de  $h$  é unitário

$$\partial h(u) = \{\zeta(u)\} \quad , \quad \zeta(u) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) .$$

Uma vez que  $F^* = I$  em  $L^2(\Omega)$ , a condição de fonte (2.5) resumi-se a

$$\zeta(u) \in L^2(\Omega) . \tag{2.42}$$

Terminamos a ilustração referente a regularização de variação limitada com algumas observações. A condição de fonte (2.42) é uma condição de regularidade bastante fraca, pois funções descontínuas também satisfazem essa condição. Por exemplo a função característica na bola de raio  $\rho$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } |x| < \rho \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} .$$

Essa função é exibida em [BO04, ref. (16)] e para um  $y^{\delta}$  apropriado ela é uma solução  $h$ -minimizante para o problema regularizado (2.41) e satisfaz a condição de fonte (2.42). Portanto, a condição de fonte necessariamente não impõe regularidade na função envolvida.

Motivado pelo mesmo exemplo no artigo [Res05] a autora afirma que a condição de fonte (2.24) também é satisfeita para um  $y^{\delta} \in BV(\Omega)$ . De fato, aplicando a condição de otimalidade de primeira ordem para (2.41), no contexto que estamos trabalhando, temos

$$0 \in F^* \left( Fu - y^{\delta} \right) + \alpha \partial h(u) . \tag{2.43}$$

Como  $F = I$  vale  $Fy^\delta = y^\delta$  e por sua vez

$$F^* (Fu - y^\delta) = F^* (Fu - Fy^\delta) = F^* F (u - y^\delta) .$$

Portanto, basta tomar  $\omega = \frac{1}{\alpha}(y^\delta - u) \in BV(\Omega)$  e a relação  $F^* F \omega \in \partial h(u)$  é satisfeita.

Uma vez que as condições de fonte são satisfeitas podemos aplicar os resultados obtidos ao longo deste capítulo.

### 2.3.3 Regularização de máxima entropia

Outro exemplo importante na área é a regularização de máxima entropia, [AH91, EL93, Egg93]. O funcional de penalização a ser usado é *entropia negativa de Shannon*. Claude E. Shannon (1916-2001) é considerado o pai da *teoria da informação*, um ramo da teoria de probabilidade e estatística. Um dos trabalhos a dar início a moderna teoria da informação é associado a [Sha48].

A característica principal desse método é a busca de soluções positivas sem a necessidade de adicionar restrições ao modelo, pois esta particularidade provém da formulação do problema.

A saber, o funcional de penalização  $h : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  limitado e mensurável é dado por

$$h(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} u(x) \log(u(x)) dx & , \text{ se } u(x) \geq 0 \text{ q.s. e } u(x) \log(u(x)) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & , \text{ caso contrário} \end{cases} . \quad (2.44)$$

Na definição acima a sigla q.s.<sup>3</sup> significa *quase sempre*; fazemos ainda a convenção  $0 \log(0) = 0$ .

Observamos brevemente que a *entropia de Shannon* foi introduzida na teoria de probabilidade como  $-\sum_k p_k(x) \log(p_k(x))$ ; para o caso contínuo é usado a integral ao invés do somatório. Note que cada função  $p_k(\cdot)$  representa uma probabilidade, isto é,  $0 \leq p_k(x) \leq 1$  e por sua vez  $\log(p_k(x))$  assume um valor negativo. Por isso na definição aparece um sinal negativo, uma vez que a medida de entropia deve ser positiva. Na definição que utilizamos não trabalhamos com função de probabilidade e portanto não há necessidade de utilizarmos tal sinal. Por sua vez o funcional definido em (2.44) é chamado *entropia negativa de Shannon*. Maiores detalhes em [Yoc05].

---

<sup>3</sup>Alguns livros utilizam a sigla a.e. derivada da expressão em inglês *almost everywhere*.

O método de regularização de máxima entropia para o funcional definido em (2.44) é

$$J_{\alpha}^{\delta}(u) = \frac{1}{2} \|Fu - y^{\delta}\|^2 + \alpha h(u). \quad (2.45)$$

Um estudo desse método pode ser conferido com mais detalhes em [AH91]. Nesse mesmo artigo são realizadas comparações numéricas entre o método de máxima entropia e o método de Tikhonov com restrição de não negatividade, ambos buscam reconstruir soluções não negativas. O comportamento observado nos exemplos propostos apontou uma melhor performance para o método de máxima entropia quando a solução está próxima da fronteira. Caso contrário, o método de Tikhonov obteve um melhor comportamento. Um estudo de estabilidade, convergência e taxas de convergência pode ser conferido em [EL93].

Assim como fizemos para o método de variação limitada, vamos apenas apresentar alguns resultados e tecer comentários sobre a regularização de máxima entropia a fim de ilustrar o funcional de penalização  $h$ .

O próximo resultado exibido foi extraído de [Res05] e através dele obtemos informações importantes sobre o domínio de  $h$  e o subgradiente desse funcional. Não demonstraremos esse resultado. Para o mesmo precisamos definir o conjunto  $L_+^p(\Omega)$  para  $p \in [1, \infty]$ . De modo natural definimos esse conjunto como  $L_+^p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid u(x) \geq 0 \text{ q.s.}\}$ .

**Lema 2.13.** *O funcional definido em (2.44) possui as seguintes propriedades:*

- (i) *o domínio do funcional  $h$  está estritamente incluído em  $L_+^1(\Omega)$ ;*
- (ii) *o conjunto  $\partial h(u)$  é não vazio se e somente se  $u$  pertence a  $L_+^{\infty}(\Omega)$  e é limitado longe do zero, ainda mais,  $\partial h(u) = \{1 + \log(u)\}$ ;*
- (iii) *para todo  $u, v \in \text{dom } h$ , vale*

$$\|v - u\|_{L^1(\Omega)}^2 \leq \left( \frac{2}{3} \|v\|_{L^1(\Omega)} + \frac{4}{3} \|u\|_{L^1(\Omega)} \right) D_h(v, u)$$

Observando as hipóteses do lema acima, podemos reescrever a condição de fonte para  $\xi = \log(\bar{u}) + 1$  como  $\bar{u} = \exp(\xi - 1)$ , ou ainda,  $\bar{u} = \frac{\exp(\xi)}{\exp(1)}$ . Note que para as condições de fonte (2.5) e (2.24) podemos reescrevê-las como

$$\bar{u} = \frac{\exp(F^* \omega)}{\exp(1)} \quad \text{e} \quad \bar{u} = \frac{\exp(F^* F \omega)}{\exp(1)}.$$

Por fim, calculamos a distância de Bregman induzida pelo funcional (2.44) entre  $u, v \in$

$L_+^1(\Omega)$  para  $\xi = \log(u) + 1$ .

$$\begin{aligned}
 D_h^\xi(v, u) &= h(v) - h(u) - \langle \log(u) + 1, v - u \rangle \\
 &= \int_{\Omega} v \log(v) - \int_{\Omega} u \log(u) - \int_{\Omega} (\log(u) + 1)(v - u) \\
 &= \int_{\Omega} v \log(v) - u \log(u) - (v - u) - v \log(u) + u \log(u) \\
 &= \int_{\Omega} v \log(v) - v \log(u) + u - v \\
 &= \int_{\Omega} v \log\left(\frac{v}{u}\right) + u - v.
 \end{aligned}$$

Em resumo,

$$D_h^\xi(v, u) = \int_{\Omega} v(x) \log\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right) + u(x) - v(x) dx.$$

Essa distância estima o divergente de Kullback-Leibler, o qual é uma medida natural na teoria de informação. A saber o divergente de Kullback-Leibler foi inicialmente definido no caso contínuo para duas funções de densidade (ou probabilidade)  $p$  e  $q$  da seguinte forma

$$D_{KL}(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) dx.$$

Para o caso discreto usamos um somatório ao invés da integral. Note que  $D_{KL}$  não é simétrico, assim como a distância de Bregman.

Mediante os comentários exibidos sobre o método podemos aplicar os resultados garantidos pelos resultados contidos ao longo deste capítulo.

### 3 *Análise de problemas não lineares*

Pela primeira vez na literatura em [EKN89] foram apresentadas taxas de convergências para problemas mal-postos com operadores não lineares, utilizando técnicas de regularização de Tikhonov. Tal formulação foi feita em espaços de Hilbert. No capítulo anterior vimos as primeiras técnicas aplicadas para um operador linear definido entre um espaço de Banach num espaço de Hilbert. Motivados pelos resultados dados em [BO04] e [Res05], esse estudo foi estendido para o caso não linear com uma novidade: ambos os espaços são de Banach. Essa extensão foi desenvolvida em [RS06] e é a referência básica deste capítulo.

Na seqüência, apresentamos o problema geral para o qual buscamos uma solução, o método de regularização a ser aplicado e as hipóteses que assumiremos nos teoremas que seguem. O capítulo é dividido em duas seções, uma para cada condição de fonte assumida. Cada seção traz um resultado de estabilidade e um de convergência.

Neste capítulo buscamos uma solução para equação operador

$$F(u) = y, \quad (3.1)$$

em que  $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  é um operador não linear mal-posto entre os espaços de Banach  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$ , ambos de dimensão infinita.

Novamente denotamos  $u_\alpha^\delta$  uma solução regularizada para dados com ruídos. Essa solução é dada pelo elemento que minimiza o funcional (3.2), proveniente do método de regularização com penalização convexo

$$J_\alpha^\delta(u) = \frac{1}{2} \|F(u) - y^\delta\|^2 + \alpha h(u). \quad (3.2)$$

No funcional acima temos  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,  $h$  um funcional convexo positivo e  $y^\delta$  um dado com ruído satisfazendo

$$\|y - y^\delta\| < \delta. \quad (3.3)$$

A princípio a formulação (3.2), para problemas não lineares, é idêntica a formulação para

problemas lineares apresentada na Equação (2.3) do capítulo anterior. Na introdução deste trabalho demos ênfase na importância da escolha de uma aproximação inicial  $u_0$  para o método de Tikhonov não linear, conforme a Seção 1.3. A escolha de  $u_0$  não é necessária na formulação estudada neste capítulo. No entanto, considerando o funcional  $h(u) = \frac{1}{2} \|u - u_0\|_{\mathcal{U}}^2$  podemos refazer os cálculos do subgradiente  $\partial h(\bar{u})$  e concluir a mesma condição de fonte exibida em (F3) na página 17, concordando com a teoria clássica.

Por toda a extensão deste capítulo assumimos as hipóteses listadas abaixo.

**Hipótese 3.1.**

- (N1) Com os espaços de Banach  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  associamos as topologias  $\tau_{\mathcal{U}}$  e  $\tau_{\mathcal{H}}$ , respectivamente, as quais são mais fracas do que as topologias induzidas pelas normas;
- (N2) Os duais topológicos de  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  são denotados por  $\mathcal{U}^*$  e  $\mathcal{H}^*$ , respectivamente;
- (N3) A norma  $\|\cdot\|$  é semi-contínua inferiormente com respeito a topologia  $\tau_{\mathcal{H}}$ ;
- (N4)  $\mathcal{D}(F)$  possui interior não vazio com relação a topologia da norma e é fechado na topologia  $\tau_{\mathcal{U}}$ . Além disso,  $\mathcal{D}(F) \cap \text{dom } h \neq \emptyset$ ;
- (N5)  $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  é um operador não linear contínuo de  $(\mathcal{U}, \tau_{\mathcal{U}})$  em  $(\mathcal{H}, \tau_{\mathcal{H}})$ ;
- (N6) O funcional  $h$  é limitado e semi-contínuo inferiormente na topologia  $\tau_{\mathcal{U}}$ ;
- (N7) Para cada  $M > 0$ ,  $\alpha > 0$ , o conjunto

$$\mathcal{M}_{\alpha}(M) = \left\{ u \in \mathcal{U} : \|F(u)\|^2 + \alpha h(u) \leq M \right\} \quad (3.4)$$

é compacto na topologia  $\tau_{\mathcal{U}}$ .

Em [EKN89] são dados alguns exemplos de operadores não lineares. Em tais exemplos observamos que um problema não linear mal-posto pode ter sua linearização bem-posta e ainda um problema originalmente bem-posto pode ter sua linearização mal-posta. Portanto, não podemos fazer generalizações somente ao tipo de operador não linear. Nesse contexto é natural exigir condições sobre o problema não linear e sua linearização. Tal hipótese é chamada *condição de não linearidade*.

Quando ambos os espaços em que definimos o operador são Hilbert, assumimos que o operador  $F'$  satisfaz uma condição semelhante a Lipschitz continuidade numa vizinhança de uma  $u_0$ -solução de norma mínima, conforme a segunda hipótese exibida na página 17 extraída de [EHN00]. Para operadores definidos de um espaço de Banach num espaço de Hilbert a

condição de não linearidade é outra. Conforme o comentário feito em [BO04], o operador  $F$  deve satisfazer

$$\langle F(u) - F(\bar{u}) - F'(\bar{u})(u - \bar{u}), \omega \rangle_{\mathcal{H}} \leq c \|F(u) - F(\bar{u})\| \|\omega\|, \quad (3.5)$$

para uma constante  $c > 0$  e  $\omega \in \mathcal{H}$  dado pela condição de fonte em (3.9). Mediante essa condição de fonte é possível estender os resultados apresentados no Capítulo 2 para o caso não linear, sendo que os resultados apresentados no capítulo anterior continuam válidos com uma pequena mudança nas constantes.

O objetivo deste capítulo é generalizar um pouco mais os resultados de convergência e estabilidade para problemas não lineares a fim de abranger o caso em que ambos os espaços envolvidos são Banach. Para isso a condição de não linearidade exibida em (3.5) deve ser modificada, de modo a não depender do produto interno. No artigo [RS06] essa condição é substituída por (3.6), em que é usada a norma do espaço  $\mathcal{H}$  e no lado direito é utilizada a distância de Bregman.

**Hipótese 3.2.** *Assuma que existe uma solução  $h$ -minimizante  $\bar{u}$  de (3.1) e que o operador  $F : \mathcal{D}(F) \subseteq \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  é Gâteaux diferenciável. Além disso, suponha que exista  $\rho > 0$  tal que, para cada  $u \in \mathcal{D}(F) \cap \mathcal{B}_\rho(\bar{u})$*

$$\|F(u) - F(\bar{u}) - F'(\bar{u})(u - \bar{u})\| \leq c D_h^\xi(u, \bar{u}), \quad c > 0 \quad (3.6)$$

e  $\xi \in \partial h(\bar{u})$ .

Tendo em vista o objetivo deste capítulo, bem como as hipóteses que usaremos, em cada seção que segue introduzimos a condição de fonte a ser usada e apresentamos os principais resultados.

### 3.1 Estimativas para a condição de fonte $\xi = F'(\bar{u})^* \omega$

Para operadores não lineares não é definido o operador adjunto. Por isso, ao longo deste capítulo não assumimos condições de fonte iguais ao capítulo anterior. Para contornar essa dificuldade fazemos hipóteses sobre a linearização do operador  $F$  de modo semelhante ao tratamento dado para problemas lineares, assim como vem sendo feito na literatura [EKN89, EHN00, Neu89].

Em comparação com a condição de fonte (2.5) apresentada no capítulo anterior, nesta seção



assumimos a condição de fonte

$$\xi \in \mathcal{R}(F'(\bar{u})^*) \cap \partial h(\bar{u}) \neq \emptyset \quad (3.7)$$

e que a equação

$$F(\bar{u}) = y \quad (3.8)$$

seja satisfeita.

A diferenciação do operador  $F$  é definida entre o espaço  $\mathcal{U}$  e o espaço  $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$  das transformações lineares de  $\mathcal{U}$  em  $\mathcal{H}$ . Quando aplicamos um elemento  $\bar{u} \in \mathcal{U}$  no operador  $F'(\cdot)$ , obtemos um operador linear  $F'(\bar{u}) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  e por sua vez está bem definido o operador adjunto para ele,  $F'(\bar{u})^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{U}^*$ . Podemos reescrever a condição de fonte apresentada em (3.7) assumindo a existência de um elemento  $\omega \in \mathcal{H}^*$  tal que

$$\xi = F'(\bar{u})^* \omega \in \partial h(\bar{u}) . \quad (3.9)$$

O primeiro resultado deste capítulo reúne condições suficientes para obtermos taxas de convergência para uma solução regularizada  $u_\alpha^\delta$  no domínio e na imagem do operador  $F$ , para dados inexatos. Além disso, com a escolha do parâmetro de regularização  $\alpha$  na ordem do nível de ruído  $\delta$  obtemos uma taxa da ordem  $\mathcal{O}(\delta)$ .

**Teorema 3.3** (Estabilidade). *Assuma que as Hipóteses 3.1, 3.2 e as relações (3.3) e (3.8) sejam satisfeitas. Além disso, suponha que exista  $\omega \in \mathcal{H}^*$  tal que (3.9) é válida e*

$$c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} < 1 .$$

Então, temos as seguintes estimativas:

$$\left\| F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u}) \right\| \leq 2\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} + 2 \left( \alpha^2 \|\omega\|_{\mathcal{U}}^2 + \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) \leq \frac{2}{1 - c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}} \left[ \frac{\delta^2}{2\alpha} + \alpha \|\omega\|_{\mathcal{U}}^2 + \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} \left( \alpha^2 \|\omega\|_{\mathcal{U}}^2 + \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] .$$

Em particular, para a escolha de um parâmetro de regularização  $\alpha \sim \delta$ , temos

$$\left\| F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u}) \right\| = \mathcal{O}(\delta) , \quad D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}(\delta) .$$

**Demonstração:** Como  $u_\alpha^\delta$  é minimizador do problema (3.2) vale

$$\frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\|^2 + \alpha h(u_\alpha^\delta) \leq \frac{1}{2} \left\| F(\bar{u}) - y^\delta \right\|^2 + \alpha h(\bar{u}) .$$

Usando a desigualdade  $\|F(\bar{u}) - y^\delta\| = \|y - y^\delta\| \leq \delta$  na estimativa acima obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|F(\bar{u}) - y^\delta\|^2 + \alpha h(\bar{u}) - \alpha h(u_\alpha^\delta) \\ &\leq \frac{1}{2} \delta^2 - \alpha (h(u_\alpha^\delta) - h(\bar{u})) \\ &= \frac{1}{2} \delta^2 - \alpha \left( D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \langle F'(\bar{u})^* \omega, u_\alpha^\delta - \bar{u} \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note que a última igualdade provém da definição da distância de Bregman.

Para encontrar uma estimativa na imagem do operador precisamos primeiramente observar a estimativa

$$\begin{aligned} \|F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u})\|^2 &= \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 \\ &= \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta + y^\delta - y\|^2 \\ &= \|(F(u_\alpha^\delta) - y^\delta) + (y^\delta - y)\|^2 \\ &= \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \|y^\delta - y\|^2 + 2 \langle F(u_\alpha^\delta) - y^\delta, y^\delta - y \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \|y^\delta - y\|^2 + 2 \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\| \|y^\delta - y\| \\ &\leq \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \|y^\delta - y\|^2 + \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \|y^\delta - y\|^2 \\ &\leq 2 \left( \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \|y^\delta - y\|^2 \right) \end{aligned}$$

Note que na penúltima desigualdade acima usamos o seguinte fato:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left( \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\| - \|y^\delta - y\| \right)^2 \\ &= \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \|y^\delta - y\|^2 - 2 \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\| \|y^\delta - y\|, \end{aligned}$$

ou melhor,

$$2 \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\| \|y^\delta - y\| \leq \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \|y^\delta - y\|^2.$$

Pela observação anterior e a relação (3.3) temos

$$\frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u})\|^2 \leq \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \delta^2. \quad (3.11)$$

Na seqüência exibimos uma nova estimativa, a qual depende das estimativas e observações feitas anteriormente. Por exemplo, na primeira desigualdade abaixo usamos (3.11) e na segunda

(3.10). Dessa maneira

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) \right\|^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) \right\|^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left( \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - y^\delta \right\|^2 + \delta^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \delta^2 - \alpha \left( D_h^{F'(\bar{u})^*} \omega \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) + \left\langle F'(\bar{u})^* \omega, u_\alpha^\delta - \bar{u} \right\rangle \right) + \frac{1}{2} \delta^2 \\
&= \delta^2 - \alpha D_h^{F'(\bar{u})^*} \omega \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) + \alpha \left\langle \omega, -F'(\bar{u}) \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} \right) \right\rangle \\
&\leq \delta^2 - \alpha D_h^{F'(\bar{u})^*} \omega \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) + \alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} \left\| -F'(\bar{u}) \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} \right) \right\| \\
&= \delta^2 - \alpha D_h^{F'(\bar{u})^*} \omega \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \\
&\quad + \alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) - F'(\bar{u}) \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} \right) - \left[ F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) \right] \right\| \\
&\leq \delta^2 - \alpha D_h^{F'(\bar{u})^*} \omega \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) + \alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) \right\| \\
&\quad + \alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) - F'(\bar{u}) \left( u_\alpha^\delta - \bar{u} \right) \right\| \\
&\leq \delta^2 - \alpha D_h^{F'(\bar{u})^*} \omega \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) + \alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} c D_h^{F'(\bar{u})^*} \omega \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) \\
&\quad + \alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) \right\| \\
&= \delta^2 + \alpha \left( c \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} - 1 \right) D_h^{F'(\bar{u})^*} \omega \left( u_\alpha^\delta, \bar{u} \right) + \alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) \right\| \\
&\leq \delta^2 + \alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) \right\| \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Para garantir a penúltima desigualdade feita acima usamos (3.6), enquanto a última desigualdade deriva da hipótese  $c \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} < 1$ , ou melhor,  $(c \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} - 1) < 0$ .

Reescrevendo a estimativa (3.12) encontramos a inequação do segundo grau

$$\gamma^2 - 4\alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} \gamma - 4\delta^2 \leq 0,$$

com  $\gamma = \left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) \right\| \geq 0$  a variável.

Utilizando a fórmula de Báskara facilmente encontramos as raízes da equação do segundo grau associada a essa inequação. Como uma raiz da equação do segundo grau é positiva e outra negativa, observando também que a variável  $\gamma$  da inequação acima é positiva e a concavidade da equação do segundo grau é para cima, a inequação é verificada quando

$$\left\| F \left( u_\alpha^\delta \right) - F \left( \bar{u} \right) \right\| \leq 2\alpha \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*} + 2 \left( \alpha^2 \left\| \omega \right\|_{\mathcal{H}^*}^2 + \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.13}$$

Vamos extrair a última igualdade de (3.12), a saber

$$0 \leq \delta^2 + \alpha (c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} - 1) D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u}) \right\|.$$

Utilizando a estimativa (3.13) reescrevemos a desigualdade acima como

$$\begin{aligned} \alpha (1 - c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}) D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) &\leq \delta^2 + \alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u}) \right\| \\ &\leq \delta^2 + \alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} \left[ 2\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} + 2 \left( \alpha^2 \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2 + \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da relação acima obtida por  $\frac{1}{\alpha(1-c\|\omega\|_{\mathcal{H}^*})}$ , para  $\alpha > 0$  e efetuando algumas operações básicas encontramos

$$D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) \leq \frac{2}{1 - c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}} \left[ \frac{\delta^2}{2\alpha} + \alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2 + \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} \left( \alpha^2 \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2 + \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Em particular, para uma escolha de  $\alpha \sim \delta$ , facilmente vemos que

$$\left\| F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u}) \right\| = \mathcal{O}(\delta) \quad \text{e} \quad D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}(\delta).$$

□

Repetimos esse resultado para dados exatos. Sob as hipóteses do Teorema 3.3 mostramos que  $u_\alpha \rightarrow \bar{u}$  quando  $\alpha \rightarrow 0$ . Obtemos uma taxa de convergência na imagem e no domínio do operador  $F$  com a ordem  $\mathcal{O}(\alpha)$ .

**Teorema 3.4** (Convergência). *Assuma que as Hipóteses 3.1, 3.2 e a Equação (3.8) são verdadeiras. Além disso, suponha que existe  $\omega \in \mathcal{H}^*$  tal que (3.9) é satisfeita e*

$$c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} < 1.$$

Então, temos as seguintes estimativas:

$$\|F(u_\alpha) - F(\bar{u})\| \leq 4\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}$$

e

$$D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha, \bar{u}) \leq \frac{4\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2}{1 - c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}}.$$

**Demonstração:** A demonstração é análoga a demonstração do teorema anterior, tomando  $\delta = 0$ .

□

A condição de não linearidade (3.6) é fundamental na obtenção dos resultados apresentados

anteriormente, por exemplo, obtemos estimativas para  $D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u})$  e  $D_h^{F'(\bar{u})^* \omega} (u_\alpha, \bar{u})$  na ordem  $\mathcal{O}(\delta)$ .

Na sequência apresentamos um corolário para o Teorema 3.3 com estimativas no domínio e na imagem do operador  $F$  entre as soluções regularizadas  $u_\alpha^\delta$  e  $u_\alpha$ . Note que  $D_h^\zeta (u_\alpha^\delta, u_\alpha)$  não depende de  $\bar{u}$ , solução  $h$ -minimizante, portanto a condição de fonte (3.7) não é útil para encontrar um subgradiente  $\zeta \in \partial h(u_\alpha)$ . O cálculo de um elemento do subdiferencial de  $h$  para  $u \in \mathcal{U}$  é realizado no lema a seguir.

**Lema 3.5.** *Se  $F$  é um operador Fréchet diferenciável em  $u$ , então a condição de otimalidade de primeira ordem para o problema regularizado (3.2) é*

$$\zeta(u) = -\frac{1}{\alpha} F'(u)^* p \in \partial h(u) , \quad (3.14)$$

para  $p \in \mathcal{A} (F(u) - y^\delta)$ , em que  $\mathcal{A}$  é a aplicação multivaluada

$$\mathcal{A}(x) = \left\{ p \in \mathcal{H}^* \mid \langle p, x \rangle = \|p\|_{\mathcal{H}^*}^2 = \|x\|^2 \right\} .$$

**Demonstração:** Conforme a Proposição C.1 se  $u$  é um ponto extremo então  $0 \in \partial J_\alpha^\delta(u)$ . Utilizando os resultados B.10 e B.11 vale

$$0 \in \partial \left( \frac{1}{2} \|F(u) - y^\delta\|^2 \right) + \alpha \partial h(u) . \quad (3.15)$$

Para terminar a demonstração basta calcular o subgradiente do primeiro termo em (3.15). Observamos que a aplicação envolvida é uma composição de aplicações, a saber

$$\frac{1}{2} \|F(u) - y^\delta\|^2 = \frac{1}{2} \|x\|^2 \circ [F(x) - y^\delta] (u) . \quad (3.16)$$

Aplicando o resultado B.13 temos

$$\partial \left( \frac{1}{2} \|x\|^2 \circ [F(x) - y^\delta] \right) (u) \subseteq [F'(u)]^* \partial g (F(u) - y^\delta) \quad (3.17)$$

com  $g(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$ .

Uma vez que  $\mathcal{H}$  é um espaço de Banach e não existe um produto interno definido, o modo clássico de diferenciação não é aplicado ao funcional  $g$ . No entanto podemos utilizar elementos de dualidade para visualizar o subgradiente de  $g$ . Tendo em vista o teorema de Asplund (Teorema C.5) definimos a aplicação de dualidade  $\mathcal{A}(\cdot)$  com densidade  $\phi(t) = t$ , conforme a

Definição C.3,

$$\mathcal{A}(x) = \left\{ p \in \mathcal{H}^* \mid \langle p, x \rangle = \|p\|_{\mathcal{H}^*}^2 = \|x\|^2 \right\}. \quad (3.18)$$

Por fim, pelo Lema C.4 e o Teorema C.5, concluímos

$$\partial g(x) = \partial \left( \frac{1}{2} \|x\|^2 \right) = \mathcal{A}(x). \quad (3.19)$$

Logo,

$$\partial g \left( F(u) - y^\delta \right) = \mathcal{A} \left( F(u) - y^\delta \right). \quad (3.20)$$

Portanto, (3.17) fica bem definido e por sua vez (3.16) garante o resultado (3.14).  $\square$

Com esse resultado é possível provar o seguinte corolário:

**Corolário 3.6.** *Sob as hipóteses do Teorema 3.3, assuma também que o operador  $F$  é Fréchet diferenciável em  $\mathcal{D}(F) \cap \mathcal{B}_\rho(\bar{u})$  e para cada par  $u, v \in \mathcal{D}(F) \cap \mathcal{B}_\rho(\bar{u})$*

$$\|F(u) - F(v) - F'(v)(u - v)\| \leq c D_h^{\zeta(v)}(u, v)$$

vale para um  $c > 0$  e  $\zeta(v) \in \partial h(v)$ . Se (3.9) vale e

$$4c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} < 1,$$

então, para  $\alpha > 0$  temos

$$\|F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha)\| \leq j(\alpha, \delta)$$

e

$$D_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha(1 - 4c\|\omega\|_{\mathcal{H}^*})} \left[ 4\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} j(\alpha, \delta) + 32\alpha^2 \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2 + 2\delta^2 \right],$$

em que  $\zeta(u_\alpha) \in \partial h(u_\alpha)$  e  $j(\alpha, \delta)$  é definido por

$$j(\alpha, \delta) = 8\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} + \left( 8\delta^2 + 192\alpha^2 \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, para um parâmetro de escolha  $\alpha \sim \delta$  temos

$$\|F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha)\| = \mathcal{O}(\delta)$$

e

$$D_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha) = \mathcal{O}(\delta).$$

**Demonstração:** Como  $u_\alpha^\delta$  é minimizador de (3.2) o valor do funcional aplicado nesse elemento

é menor do que em qualquer outro do domínio, em particular para  $u_\alpha$ , temos

$$\frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\|^2 + \alpha h(u_\alpha^\delta) \leq \frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha) - y^\delta \right\|^2 + \alpha h(u_\alpha) . \quad (3.21)$$

Para a próxima estimativa lembramos da desigualdade abaixo observada na demonstração do teorema anterior, para quaisquer  $a$  e  $b$  vale

$$2ab \leq a^2 + b^2 . \quad (3.22)$$

Com isso, iniciamos a estimativa na imagem do operador,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) \right\|^2 &= \frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta + (y^\delta - F(u_\alpha)) \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| y^\delta - F(u_\alpha) \right\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( 2 \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\| \left\| y^\delta - F(u_\alpha) \right\| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| y^\delta - F(u_\alpha) \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\| y^\delta - F(u_\alpha) \right\|^2 \\ &= \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\|^2 + \left\| y^\delta - F(u_\alpha) \right\|^2 . \end{aligned}$$

A Observação (3.22) foi usada para obter a segunda desigualdade da relação acima.

Tomando a estimativa acima, multiplicando por  $\frac{1}{2}$  e somando o termo  $\alpha D_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha)$ , que é positivo, em ambos os lados da desigualdade, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) \right\|^2 + \alpha D_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha) &\leq \frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| y^\delta - F(u_\alpha) \right\|^2 \\ &\quad + \alpha D_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\|^2 + \frac{1}{2} \left\| y^\delta - F(u_\alpha) \right\|^2 \\ &\quad + \alpha \left[ h(u_\alpha^\delta) - h(u_\alpha) - \left\langle \zeta(u_\alpha), u_\alpha^\delta - u_\alpha \right\rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\| F(u_\alpha^\delta) - y^\delta \right\|^2 + \alpha h(u_\alpha^\delta) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\| y^\delta - F(u_\alpha) \right\|^2 - \alpha h(u_\alpha) \\ &\quad - \alpha \left\langle \zeta(u_\alpha), u_\alpha^\delta - u_\alpha \right\rangle . \quad (3.23) \end{aligned}$$

Na sequência estimamos (3.23) com (3.21). Para isso utilizamos  $\zeta(u_\alpha) = -\frac{1}{\alpha} F'(u_\alpha)^* p \in$

$\partial h(u_\alpha)$  para algum  $p \in \mathcal{A}(F(u_\alpha) - y)$  dado pelo Lema 3.5, o que resulta

$$\begin{aligned}
(3.23) \quad &\leq \frac{1}{2} \|F(u_\alpha) - y^\delta\|^2 + \alpha h(u_\alpha) + \frac{1}{2} \|y^\delta - F(u_\alpha)\|^2 - \alpha h(u_\alpha) \\
&\quad - \alpha \langle \zeta(u_\alpha), u_\alpha^\delta - u_\alpha \rangle \\
&= \|F(u_\alpha) - y^\delta\|^2 - \alpha \langle \zeta(u_\alpha), u_\alpha^\delta - u_\alpha \rangle \\
&= \|F(u_\alpha) - y + (y - y^\delta)\|^2 - \alpha \left\langle -\frac{1}{\alpha} F'(u_\alpha)^* p, u_\alpha^\delta - u_\alpha \right\rangle \\
&\leq 2 \|F(u_\alpha^\delta) - y\|^2 + 2 \|y - y^\delta\|^2 + \langle F'(u_\alpha)^* p, u_\alpha^\delta - u_\alpha \rangle \\
&\leq 2 \|F(u_\alpha^\delta) - y\|^2 + 2\delta^2 + \langle p, F'(u_\alpha)(u_\alpha^\delta - u_\alpha) \rangle \\
&\leq 2 \|F(u_\alpha^\delta) - y\|^2 + 2\delta^2 + \|p\|_{\mathcal{H}^*} \|F'(u_\alpha)(u_\alpha^\delta - u_\alpha)\|. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Note que na segunda igualdade usamos a definição de  $\zeta(u_\alpha)$  e aplicamos as propriedades da norma a fim de fazer uso da desigualdade (3.22). Na penúltima desigualdade usamos (3.3) e na última a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Para ficar mais claro a segunda desigualdade da relação anterior, observamos a desigualdade  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$  e uma vez que os termos são positivos vale

$$\begin{aligned}
(\|a + b\|)^2 &\leq (\|a\| + \|b\|)^2 \\
&= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\|b\| \\
&\leq \|a\|^2 + \|b\|^2 + \|a\|^2 + \|b\|^2 \\
&= 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

O uso desigualdade (3.22) ocorre na segunda desigualdade acima.

Observamos ainda que a escolha de  $p \in \mathcal{A}(F(u_\alpha) - y)$  resulta em

$$\|p\|_{\mathcal{H}^*} = \|F(u_\alpha) - y\|.$$

De fato, vemos essa igualdade pela definição da aplicação  $\mathcal{A}(\cdot)$ . Através do Lema 3.5 a aplicação é definida como

$$\mathcal{A}(F(u_\alpha) - y) = \left\{ p \in \mathcal{H}^* : \langle p, F(u_\alpha) - y \rangle = \|F(u_\alpha) - y\|^2 = \|p\|_{\mathcal{H}^*}^2 \right\}.$$

Uma vez que a igualdade é verificada ao quadrado e os elementos são positivos, então vale a igualdade sem os quadrados.



Visto essas observações damos continuidade a estimativa

$$\begin{aligned}
(3.24) &= 2 \left\| F(u_\alpha^\delta) - y \right\|^2 + 2\delta^2 + \|F(u_\alpha) - y\| \left\| F'(u_\alpha) (u_\alpha^\delta - u_\alpha) \right\| \\
&= \|F(u_\alpha) - y\| \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) - \left[ F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) - F'(u_\alpha) (u_\alpha^\delta - u_\alpha) \right] \right\| \\
&\quad + 2 \left\| F(u_\alpha^\delta) - y \right\|^2 + 2\delta^2 \\
&\leq \|F(u_\alpha) - y\| \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) \right\| + 2 \left\| F(u_\alpha^\delta) - y \right\|^2 + 2\delta^2 \\
&\quad + \|F(u_\alpha) - y\| \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) - F'(u_\alpha) (u_\alpha^\delta - u_\alpha) \right\| \\
&\leq \|F(u_\alpha) - y\| \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) \right\| + 2 \left\| F(u_\alpha^\delta) - y \right\|^2 + 2\delta^2 \\
&\quad + \|F(u_\alpha) - y\| cD_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha) . \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Claramente a última desigualdade é válida mediante a condição de não linearidade (3.6).

Uma vez que assumimos as hipóteses do Teorema 3.3, as hipóteses do Teorema 3.4 são verificadas e por sua vez podemos usar a estimativa  $\|F(u_\alpha) - y\| \leq 4\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}$ . Com isso, temos

$$\begin{aligned}
(3.26) &\leq (4\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}) \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) \right\| + 2(4\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*})^2 + 2\delta^2 \\
&\quad + c(4\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}) D_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha) \\
&= 4\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) \right\| + 32\alpha^2 \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2 + 2\delta^2 + 4\alpha c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} D_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha) .
\end{aligned}$$

Sem perder o foco da estimativa inicial dada no lado direito de (3.23), a saber

$$\frac{1}{4} \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) \right\|^2 + \alpha D_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha) ,$$

organizamos os termos semelhantes e obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) \right\|^2 + \alpha(1-4c) \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} D_h^{\zeta(u_\alpha)}(u_\alpha^\delta, u_\alpha) &\leq 4\alpha \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(u_\alpha) \right\| \\
&\quad + 32\alpha^2 \|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2 + 2\delta^2 . \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Como por hipótese temos  $4c \|\omega\|_{\mathcal{H}^*} < 1$ , ou seja,  $(1-4c) > 0$ , o lado esquerdo da estimativa acima é composto pela soma de dois termos positivos. Sendo assim, podemos estimar cada termo pelo lado da direita da desigualdade.

Para o primeiro termo da estimativa temos uma inequação do segundo grau na variável  $\gamma$  da

forma

$$\frac{1}{4}\gamma^2 - (4\alpha\|\omega\|_{\mathcal{H}^*})\gamma - \left(2\delta^2 + 32\alpha^2\|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2\right) \leq 0,$$

em que

$$\gamma = \left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F\left(u_\alpha\right) \right\| \geq 0.$$

Através do fórmula de Báskara encontramos facilmente as duas raízes para a equação do segundo grau associada a essa inequação. Visto uma raiz é positiva, a outra é negativa e a variável  $\gamma$  é positiva, obtemos a solução

$$\left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F\left(u_\alpha\right) \right\| \leq j(\alpha, \delta), \quad (3.28)$$

em que a função  $j(\alpha, \delta)$  é definida por

$$j(\alpha, \delta) = 8\alpha\|\omega\|_{\mathcal{H}^*} + \left(8\delta^2 + 192\alpha^2\|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Com isso terminamos a primeira estimativa do teorema. Para a estimativa no domínio do operador  $F$  estimamos o segundo termo da desigualdade (3.27) da forma

$$\alpha(1-4c)\|\omega\|_{\mathcal{H}^*} D_h^{\zeta(u_\alpha)}\left(u_\alpha^\delta, u_\alpha\right) \leq 4\alpha\|\omega\|_{\mathcal{H}^*} \left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F\left(u_\alpha\right) \right\| + 32\alpha^2\|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2 + 2\delta^2.$$

Por fim, usamos a estimativa (3.28) para  $\alpha > 0$  e encontramos

$$D_h^{\zeta(u_\alpha)}\left(u_\alpha^\delta, u_\alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha(1-4c\|\omega\|_{\mathcal{H}^*})} \left[ 4\alpha\|\omega\|_{\mathcal{H}^*} j(\alpha, \delta) + 32\alpha^2\|\omega\|_{\mathcal{H}^*}^2 + 2\delta^2 \right].$$

Fica evidente que a escolha de  $\alpha \sim \delta$  fornece

$$\left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F\left(u_\alpha\right) \right\| = \mathcal{O}(\delta)$$

e

$$D_h^{\zeta(u_\alpha)}\left(u_\alpha^\delta, u_\alpha\right) = \mathcal{O}(\delta).$$

Com isso concluímos a prova desse corolário.  $\square$

**Observação 3.7.** Em particular o resultado (3.14) vale para um operador não linear  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$ , em que  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert. Nesse caso, na aplicação  $\mathcal{A}(\cdot)$  facilmente encontramos um elemento do dual

$$\zeta(u) = -\frac{1}{\alpha} F'(u)^* \left( F(u) - y^\delta \right).$$

Observamos ainda que se tomarmos  $u = \bar{u}$  na igualdade acima obteremos  $\zeta(\bar{u}) = F'(\bar{u})^* \omega$  com  $\omega = \frac{1}{\alpha} (y^\delta - F(\bar{u}))$ . Portanto, a condição de fonte (3.9) será válida.

É interessante notar que as três estimativas obtidas nos resultados anteriores, Teoremas 3.3, 3.4 e Corolário 3.6, aparecem no lado esquerdo da *igualdade dos três pontos*. Segundo a Proposição B.15 vale

$$D_h^\zeta(u_\alpha^\delta, u_\alpha) - D_h^\xi(u_\alpha^\delta, \bar{u}) + D_h^\xi(u_\alpha, \bar{u}) = \langle \zeta - \xi, u_\alpha - u_\alpha^\delta \rangle,$$

em que  $\zeta \in \partial h(u_\alpha)$  e  $\xi = F'(\bar{u})^* \omega$ . Essa estimativa é usada no capítulo posterior.

Na próxima seção fazemos um estudo análogo para uma condição de fonte mais forte, assim como foi feito para problemas lineares.

### 3.2 Estimativas para a condição de fonte $\xi = F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega$

Motivados pela eficiência da condição de fonte escolhida através da linearização do operador  $F$  conforme a seção anterior, nesta seção fazemos um estudo para uma condição de fonte no formato proposto em (2.24), a saber supomos

$$\xi \in \mathcal{R}(F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})) \cap \partial h(\bar{u}) \neq \emptyset$$

e que seja satisfeita a equação

$$F(\bar{u}) = y. \quad (3.29)$$

De maneira equivalente, assumimos a existência de um elemento  $\omega \in \mathcal{U}$  tal que

$$\xi = F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega \in \partial h(\bar{u}). \quad (3.30)$$

Mediante essa nova condição de fonte precisamos supor que o espaço  $\mathcal{H}$  novamente é um espaço de Hilbert, assim como na formulação do Capítulo 2.

O primeiro resultado a ser apresentado é para dados inexatos. Apresentamos cotas para o erro na imagem e no domínio do operador  $F$ .

A primeira estimativa que será dada no lado direito de (3.31) dependerá do escalar  $s$ , o qual será definido em (3.33) como a distância de Bregman entre  $\bar{u}$  e  $\bar{u} - \alpha \omega$ . Conforme observamos na Figura 2.1 essa distância tende a zero quando  $\delta \rightarrow 0$ . No entanto, não sabem em que ordem ocorre tal convergência, a menos seja assumido condições sobre o funcional  $h$ . Taxas de convergência serão apresentadas no Corolário 3.10.

**Teorema 3.8** (Estabilidade). *Suponha que as Hipóteses 3.1, 3.2, a Equação (3.29) e a Estimativa (3.3) são satisfeitas e tome  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Além disso, assuma que a solução  $h$ -minimizante  $\bar{u}$  de (3.1) está no interior do  $\mathcal{D}(F)$  e que existe  $\omega \in \mathcal{U}$  tal que (3.30) é satisfeita e*

$$c \|F'(\bar{u}) \omega\| < 1 .$$

Então, para  $\alpha$  suficientemente pequeno, temos as seguintes estimativas:

$$\|F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u})\| \leq \alpha \|F'(\bar{u}) \omega\| + g(\alpha, \delta)$$

e

$$D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega}(u_\alpha^\delta, \bar{u}) \leq \frac{\alpha s + (cs)^2/2 + \delta g(\alpha, \delta) + cs(\delta + \alpha \|F'(\bar{u}) \omega\|)}{\alpha(1 - c \|F'(\bar{u}) \omega\|)} , \quad (3.31)$$

em que

$$g(\alpha, \delta) = \delta + \sqrt{(\delta + cs)^2 + 2\alpha s(1 + c \|F'(\bar{u}) \omega\|)} \quad (3.32)$$

e

$$s = D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega}(\bar{u} - \alpha \omega, \bar{u}) . \quad (3.33)$$

**Demonstração:** Como  $u_\alpha^\delta$  é o minimizador de (3.2), para todo elemento  $u \in \mathcal{D}(F)$  vale

$$\frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \alpha h(u_\alpha^\delta) \leq \frac{1}{2} \|F(u) - y^\delta\|^2 + \alpha h(u) .$$

Reescrevendo essa desigualdade de maneira conveniente obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 - \frac{1}{2} \|F(u) - y^\delta\|^2 + \alpha (h(u_\alpha^\delta) - h(u)) \\ &= \frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta)\|^2 - \langle F(u_\alpha^\delta), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} \|y^\delta\|^2 - \frac{1}{2} \|F(u)\|^2 + \langle F(u), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} - \frac{1}{2} \|y^\delta\|^2 \\ &\quad + \alpha (h(u_\alpha^\delta) - h(u)) \\ &= \frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta)\|^2 - \frac{1}{2} \|F(u)\|^2 + \langle F(u) - F(u_\alpha^\delta), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \alpha (h(u_\alpha^\delta) - h(u)) \\ &= \Phi(u_\alpha^\delta) - \Phi(u) . \end{aligned} \quad (3.34)$$

A última igualdade é válida para

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \|F(u) - q\|^2 + \alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega}(u, \bar{u}) - \langle F(u), y^\delta - q \rangle_{\mathcal{H}} + \alpha \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u \rangle ,$$

com  $q = F(\bar{u}) - \alpha F'(\bar{u}) \omega$ .

Para ver isso calculamos  $\Phi(u_\alpha^\delta)$  e  $\Phi(u)$ . A saber

$$\begin{aligned}\Phi(u_\alpha^\delta) &= \frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta) - q\|^2 + \alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega}(u_\alpha^\delta, \bar{u}) - \langle F(u_\alpha^\delta), y^\delta - q \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \alpha \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u_\alpha^\delta \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta)\|^2 - \langle F(u_\alpha^\delta), q \rangle_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} \|q\|^2 - \langle F(u_\alpha^\delta), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \langle F(u_\alpha^\delta), q \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \alpha [h(u_\alpha^\delta) - h(\bar{u}) - \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u_\alpha^\delta - \bar{u} \rangle] + \alpha \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u_\alpha^\delta \rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{2} \|F(u)\|^2 - \langle F(u), q \rangle_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} \|q\|^2 - \langle F(u), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \langle F(u), q \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \alpha [h(u) - h(\bar{u}) - \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u - \bar{u} \rangle] + \alpha \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u \rangle.\end{aligned}$$

Tomamos a diferença entre eles

$$\begin{aligned}\Phi(u_\alpha^\delta) - \Phi(u) &= \frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta)\|^2 - \frac{1}{2} \|F(u)\|^2 - \langle F(u_\alpha^\delta), q \rangle_{\mathcal{H}} + \langle F(u), q \rangle_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} \|q\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|q\|^2 - \langle F(u_\alpha^\delta), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \langle F(u), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} + \langle F(u_\alpha^\delta), q \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad - \langle F(u), q \rangle_{\mathcal{H}} + \alpha [h(u_\alpha^\delta) - h(\bar{u}) - \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u_\alpha^\delta - \bar{u} \rangle] \\ &\quad - \alpha [h(u) - h(\bar{u}) - \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u - \bar{u} \rangle] \\ &\quad + \alpha \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u_\alpha^\delta \rangle - \alpha \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta)\|^2 - \frac{1}{2} \|F(u)\|^2 - \langle F(u_\alpha^\delta) - F(u), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \alpha [h(u_\alpha^\delta) - h(u) - \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u_\alpha^\delta - u \rangle] \\ &\quad + \alpha \langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega, u_\alpha^\delta - u \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|F(u_\alpha^\delta)\|^2 - \frac{1}{2} \|F(u)\|^2 - \langle F(u_\alpha^\delta) - F(u), y^\delta \rangle_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \alpha (h(u_\alpha^\delta) - h(u)).\end{aligned}$$

Através de (3.34) obtemos  $\Phi(u_\alpha^\delta) \leq \Phi(u)$ . Usando a definição de  $\Phi$  aplicada nos elementos  $u_\alpha^\delta$  e  $u$  como feito acima, podemos reescrever essa desigualdade de maneira mais apropriada,

a saber

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left\| F \left( u_{\alpha}^{\delta} \right) - q \right\|^2 + \alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right) &\leq \alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} (u, \bar{u}) + \frac{1}{2} \|F(u) - q\|^2 \\
&+ \left\langle F \left( u_{\alpha}^{\delta} \right), y^{\delta} - q \right\rangle_{\mathcal{H}} - \left\langle F(u), y^{\delta} - q \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&- \alpha \left\langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega, u_{\alpha}^{\delta} \right\rangle \\
&+ \alpha \left\langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega, u \right\rangle \\
&= \alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} (u, \bar{u}) + \frac{1}{2} \|F(u) - q\|^2 \\
&+ \left\langle F \left( u_{\alpha}^{\delta} \right) - F(u), y^{\delta} - q \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&+ \alpha \left\langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega, u - u_{\alpha}^{\delta} \right\rangle. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Usando a definição de  $q = F(\bar{u}) - \alpha F'(\bar{u})\omega$ , o primeiro termo do lado esquerdo da estimativa acima é igual a  $\frac{1}{2} \left\| F \left( u_{\alpha}^{\delta} \right) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega \right\|^2$ . Para simplificarmos a notação definimos

$$v = F \left( u_{\alpha}^{\delta} \right) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega. \tag{3.36}$$

Como por hipótese  $\bar{u}$  pertence ao interior de  $\mathcal{D}(F)$  então existe um  $\alpha > 0$  suficientemente pequeno tal que  $\bar{u} - \alpha\omega \in \mathcal{D}(F)$ . Visto que as estimativas feitas até aqui são válidas para todo elemento  $u \in \mathcal{D}(F)$  podemos tomar  $u = \bar{u} - \alpha\omega$  na desigualdade (3.35). Dessa maneira

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|v\|^2 + \alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right) &\leq \alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} (\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) \\
&+ \frac{1}{2} \left\| F(\bar{u} - \alpha\omega) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega \right\|^2 \\
&+ \left\langle F \left( u_{\alpha}^{\delta} \right) - F(\bar{u} - \alpha\omega), y^{\delta} - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&+ \alpha \left\langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega, \bar{u} - \alpha\omega - u_{\alpha}^{\delta} \right\rangle. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Afim de simplificar mais a notação definimos

$$s = D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} (\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) \tag{3.38}$$

e

$$T_1 = \frac{1}{2} \left\| F(\bar{u} - \alpha\omega) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega \right\|^2. \tag{3.39}$$

Para modificar o terceiro elemento do lado direito da desigualdade (3.37) usamos a propri-

idades do produto interno e a igualdade  $F(\bar{u}) = y$ . Fazendo isso, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|v\|^2 + \alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) &\leq \alpha s + T_1 + \left\langle F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u} - \alpha\omega), y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \left\langle F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u} - \alpha\omega), \alpha F'(\bar{u})\omega \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \alpha \left\langle F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega, \bar{u} - \alpha\omega - u_\alpha^\delta \right\rangle \\
&\leq \alpha s + T_1 + \left| \left\langle F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u} - \alpha\omega), y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \\
&\quad + \left\langle \alpha F'(\bar{u})\omega, F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u} - \alpha\omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \alpha \left\langle F'(\bar{u})\omega, F'(\bar{u})(\bar{u} - \alpha\omega - u_\alpha^\delta) \right\rangle_{\mathcal{H}}. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Por fim, definimos

$$T_2 = \left| \left\langle F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u} - \alpha\omega), y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} \right|. \quad (3.41)$$

Aplicando propriedades do produto interno nos dois últimos termos do lado direito de (3.40) definimos também

$$T_3 = \alpha \left\langle F'(\bar{u})\omega, F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u} - \alpha\omega) - F'(\bar{u})(\bar{u} - \alpha\omega) \right\rangle_{\mathcal{H}}. \quad (3.42)$$

Em resumo,

$$\frac{1}{2} \|v\|^2 + \alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} (u_\alpha^\delta, \bar{u}) \leq \alpha s + T_1 + T_2 + T_3, \quad (3.43)$$

com  $s$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  dados por (3.38), (3.39), (3.41) e (3.42), respectivamente.

A próxima etapa da demonstração consiste em estimar cada constante  $T_i$  com  $i = \{1, 2, 3\}$ .

Pela definição de  $T_1$  em (3.39) e pela Equação (3.6) temos

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} \left[ \|F(\bar{u} - \alpha\omega) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega\|^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \left[ c D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} (\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) \right]^2 \\
&= \frac{c^2 s^2}{2}. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Note que a última igualdade provém da notação definida em (3.38).

Para encontrarmos uma estimativa para  $T_2$  vamos somar e subtrair termos iguais, aplicar propriedades do produto interno, a desigualdade de Cauchy-Schwarz e por último fazer uso da

condição de não linearidade (3.6). Dessa maneira encontramos

$$\begin{aligned}
T_2 &= \left| \left\langle F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u} - \alpha\omega), y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \\
&= \left| \left\langle \left( F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega \right) + F(\bar{u}) - \alpha F'(\bar{u})\omega - F(\bar{u} - \alpha\omega), y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \\
&= \left| \left\langle v, y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} - \left\langle F(\bar{u} - \alpha\omega) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega, y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \\
&\leq \left| \left\langle v, y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| + \left| \left\langle F(\bar{u} - \alpha\omega) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega, y^\delta - y \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \\
&\leq \|v\| \|y^\delta - y\| + cD_h^{F'(\bar{u})^*F'(\bar{u})\omega}(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) \|y^\delta - y\| \\
&\leq \delta \|v\| + \delta cs.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Na estimativa acima também usamos a definição de  $v$  introduzida em (3.36). Além disso, usamos a hipótese (3.3).

Por fim, estimamos  $T_3$  de maneira similar as anteriores. Visto que o operador  $F'(\bar{u})$  é linear segue

$$\begin{aligned}
T_3 &= \alpha \left\langle F'(\bar{u})\omega, F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u} - \alpha\omega) - F'(\bar{u})(u_\alpha^\delta - (\bar{u} - \alpha\omega)) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \alpha \left\langle F'(\bar{u})\omega, F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u} - \alpha\omega) - F'(\bar{u})(u_\alpha^\delta - \bar{u}) - \alpha F'(\bar{u})\omega \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \alpha \left\langle F'(\bar{u})\omega, F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u}) - F'(\bar{u})(u_\alpha^\delta - \bar{u}) - F(\bar{u} - \alpha\omega) + F(\bar{u}) - \alpha F'(\bar{u})\omega \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \alpha \left\langle F'(\bar{u})\omega, F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u}) - F'(\bar{u})(u_\alpha^\delta - \bar{u}) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \alpha \left\langle F'(\bar{u})\omega, - (F(\bar{u} - \alpha\omega) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&\leq \alpha \|F'(\bar{u})\omega\| \left\| F(u_\alpha^\delta) - F(\bar{u}) - F'(\bar{u})(u_\alpha^\delta - \bar{u}) \right\| \\
&\quad + \alpha \|F'(\bar{u})\omega\| \left\| F(\bar{u} - \alpha\omega) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u})\omega \right\| \\
&\leq \alpha \|F'(\bar{u})\omega\| cD_h^{F'(\bar{u})^*F'(\bar{u})\omega}(u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \alpha \|F'(\bar{u})\omega\| cD_h^{F'(\bar{u})^*F'(\bar{u})\omega}(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) \\
&= \alpha c \|F'(\bar{u})\omega\| D_h^{F'(\bar{u})^*F'(\bar{u})\omega}(u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \alpha cs \|F'(\bar{u})\omega\|.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Substituindo as estimativas (3.44), (3.45) e (3.46) na desigualdade (3.43) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|v\|^2 + \alpha D_h^{F'(\bar{u})^*F'(\bar{u})\omega}(u_\alpha^\delta, \bar{u}) &\leq \alpha s + \frac{c^2 s^2}{2} + \delta \|v\| + \delta cs \\
&\quad + \alpha c \|F'(\bar{u})\omega\| D_h^{F'(\bar{u})^*F'(\bar{u})\omega}(u_\alpha^\delta, \bar{u}) + \alpha cs \|F'(\bar{u})\omega\|.
\end{aligned}$$

Multiplicando por 2 ambos os lados da desigualdade acima e associando no lado esquerdo



os elementos semelhantes ao termo  $D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right)$ , resulta

$$\begin{aligned} \|v\|^2 + 2\alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right) [1 - c \|F'(\bar{u})\omega\|] &\leq 2\delta \|v\| + 2\alpha s + (cs)^2 \\ &\quad + 2\delta cs + 2\alpha cs \|F'(\bar{u})\omega\| . \end{aligned}$$

Por hipótese  $c \|F'(\bar{u})\omega\| < 1$ , ou melhor,  $[1 - c \|F'(\bar{u})\omega\|] > 0$ . Dessa maneira o lado esquerdo da desigualdade acima é formado pela soma de dois elementos positivos e estimamos cada um deles pelo lado direito da mesma desigualdade da seguinte forma:

$$\|v\|^2 \leq 2\delta \|v\| + 2\alpha s + (cs)^2 + 2cs (\delta + \alpha \|F'(\bar{u})\omega\|)$$

e

$$2\alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega} \left( u_{\alpha}^{\delta}, \bar{u} \right) (1 - c \|F'(\bar{u})\omega\|) \leq 2\delta \|v\| + 2\alpha s + (cs)^2 + 2cs (\delta + \alpha \|F'(\bar{u})\omega\|) .$$

Através da penúltima estimativa acima obtemos uma inequação do segundo grau na variável  $\|v\|$ . A saber,

$$\|v\|^2 - 2\delta \|v\| - [2\alpha s + (cs)^2 + 2cs (\delta + \alpha \|F'(\bar{u})\omega\|)] \leq 0 .$$

As raízes da equação do segundo grau associada a ela são obtidas pela fórmula de Báskara. Uma vez que uma raiz é positiva, a outra é negativa e observando a restrição  $\|v\| \geq 0$ , a solução da inequação acima é

$$\|v\| \leq \delta + \left[ (\delta + cs)^2 + 2\alpha s (1 + c \|F'(\bar{u})\omega\|) \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (3.47)$$

Para simplificar a notação definimos o lado direito da desigualdade acima como uma função de  $\alpha$  e  $\delta$ ,

$$g(\alpha, \delta) = \delta + \left[ (\delta + cs)^2 + 2\alpha s (1 + c \|F'(\bar{u})\omega\|) \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Por meio da definição de  $v$  dada em (3.36) encontramos a primeira estimativa enunciada

nesse teorema. Com a desigualdade (3.47) obtemos

$$\begin{aligned}
g(\alpha, \delta) &\geq \left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F(\bar{u}) + \alpha F'(\bar{u}) \omega \right\| \\
&= \left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F(\bar{u}) - (-\alpha F'(\bar{u}) \omega) \right\| \\
&\geq \left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F(\bar{u}) \right\| - \left\| -\alpha F'(\bar{u}) \omega \right\| \\
&= \left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F(\bar{u}) \right\| - \left\| \alpha F'(\bar{u}) \omega \right\| \\
&= \left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F(\bar{u}) \right\| - \alpha \left\| F'(\bar{u}) \omega \right\|.
\end{aligned}$$

Por sua vez, encontramos a estimativa na imagem do operador  $F$

$$\left\| F\left(u_\alpha^\delta\right) - F(\bar{u}) \right\| \leq \alpha \left\| F'(\bar{u}) \omega \right\| + g(\alpha, \delta).$$

Reescrevemos a estimativa de interesse encontrada anteriormente

$$2\alpha D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega}\left(u_\alpha^\delta, \bar{u}\right) (1 - c \left\| F'(\bar{u}) \omega \right\|) \leq 2\delta \left\| v \right\| + 2\alpha s + (cs)^2 + 2cs (\delta + \alpha \left\| F'(\bar{u}) \omega \right\|).$$

Utilizando (3.47) para estimar  $\left\| v \right\|$  e multiplicando por  $\frac{1}{2\alpha(1-c\|F'(\bar{u})\omega\|)}$  ambos os lados da desigualdade acima, para  $\alpha > 0$  encontramos

$$D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u}) \omega}\left(u_\alpha^\delta, \bar{u}\right) \leq \frac{\delta g(\alpha, \delta) + \alpha s + (cs)^2/2 + cs (\delta + \alpha \left\| F'(\bar{u}) \omega \right\|)}{\alpha (1 - c \left\| F'(\bar{u}) \omega \right\|)},$$

confirmando a última estimativa do teorema enunciado.  $\square$

Repetimos esse resultado para dados exatos e exibimos estimativas para o erro, produzido por uma solução regularizada em comparação com uma solução  $h$ -minimizante, no domínio e imagem do operador. Taxas de convergência seguem como consequência desse resultado, exibidas no Corolário 3.10.

**Teorema 3.9** (Convergência). *Suponha que as Hipóteses 3.1, 3.2 e a Equação (3.29) são satisfeitas, e tome  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Além disso, assuma que a solução  $h$ -minimizante  $\bar{u}$  de (3.1) está no interior do  $\mathcal{D}(F)$  e que existe  $\omega \in \mathcal{U}$  tal que (3.30) é satisfeita e*

$$c \left\| F'(\bar{u}) \omega \right\| < 1.$$

Então, para  $\alpha$  suficientemente pequeno temos as seguintes estimativas:

$$\left\| F\left(u_\alpha\right) - F(\bar{u}) \right\| \leq \alpha \left\| F'(\bar{u}) \omega \right\| + \sqrt{(cs)^2 + 2\alpha s (1 + c \left\| F'(\bar{u}) \omega \right\|)}$$

e

$$D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega}(u_\alpha, \bar{u}) \leq \frac{\alpha s + (cs)^2/2 + \alpha cs \|F'(\bar{u})\omega\|}{\alpha(1 - c\|F'(\bar{u})\omega\|)}, \quad (3.48)$$

em que

$$s = D_h^{F'(\bar{u})^* F'(\bar{u})\omega}(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}).$$

**Demonstração:** A demonstração desse teorema segue como a demonstração do Teorema 3.8 anterior, com  $\delta = 0$  para dados exatos.  $\square$

O próximo resultado é bastante significativo para a nossa análise, haja vista que a partir dele serão obtidas as taxas de convergência para os resultados exibidos nos Teoremas 3.8 e 3.9. Para apresentarmos tais taxas precisamos de uma estimativa para a distância de Bregman. Para isso impomos condições ao funcional  $h$  que são suficientes para obtermos uma taxa de convergência da ordem  $\mathcal{O}(\delta^{\frac{4}{3}})$  para dados com ruído e  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  para dados exatos.

**Corolário 3.10.** *Sob as hipóteses do Teorema 3.8 assuma também que  $h$  é duplamente diferenciável numa vizinhança de  $\bar{u}$  e que existe um número  $M > 0$  tal que, para cada  $u$  nessa vizinhança e  $v \in \mathcal{U}$ ,*

$$\langle h''(u)v, v \rangle \leq M\|v\|^2. \quad (3.49)$$

Então, para a escolha do parâmetro  $\alpha \sim \delta^{\frac{2}{3}}$

$$D_h^\xi(u_\alpha^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}(\delta^{\frac{4}{3}}).$$

Para dados exatos, temos

$$D_h^\xi(u_\alpha^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}(\alpha^2).$$

**Demonstração:** A demonstração desse corolário é idêntica do Corolário 2.12. Portanto, segundo (2.34) temos  $D_h^\xi(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u}) = \mathcal{O}(\alpha^2)$ .

Utilizando o resultado do Teorema 3.8, o qual relaciona  $D_h^\xi(u_\alpha^\delta, \bar{u})$  com  $D_h^\xi(\bar{u} - \alpha\omega, \bar{u})$  através da desigualdade (3.31), vale  $D_h^\xi(u_\alpha^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}(\alpha^2)$ .

Em particular, para a escolha de  $\alpha \sim \delta^{\frac{2}{3}}$ , resulta

$$D_h^\xi(u_\alpha^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}(\delta^{\frac{4}{3}}).$$

Repetindo essa análise para a estimativa (3.48) do Teorema 3.9, encontramos a estimativa

$$D_h^\xi(u_\alpha^\delta, \bar{u}) = \mathcal{O}(\alpha^2),$$

como requerido.  $\square$

## 4 *Um método iterativo para problemas não lineares*

Uma extensão natural da teoria de regularização desenvolvida nos Capítulos 2 e 3 para operadores lineares e não lineares, respectivamente, é o desenvolvimento de um método de Tikhonov iterado. O termo *método iterativo* abrange um grande conjunto de técnicas utilizadas para resolver um problema inverso e se caracteriza pela obtenção de aproximações sucessivas para a solução. Tais aproximações devem distar cada vez menos da solução procurada e o método é iniciado tomando como ponto de partida uma aproximação inicial dada. Neste capítulo apresentamos o método de Tikhonov iterado usando distâncias de Bregman como termo de penalização.

Durante as últimas décadas a maioria dos métodos iterativos de regularização mais conhecidos para operadores lineares têm sido generalizados para operadores não lineares. Destacamos os métodos de Tikhonov [EKN89, SEK93], tipo iteração de Landweber [Ram99], métodos de Levenberg-Marquardt [Han97a], Gauss-Newton [Bak92, BNS97], Gradiente Conjugado [Han97b] e os métodos tipo-Newton [Bla97]. Citamos métodos que combinam alguns desses, como TIGRA (Tikhonov-GRAdiente Conjugado) [Ram03], [GPP07] e [WHL08].

O método a ser exposto foi inicialmente proposto em [OBG<sup>+</sup>05], cujo principal resultado é a introdução de um método iterativo para melhorar o desempenho do modelo ROF apresentado em [ROF92], usado no tratamento de imagens. Nessa proposta foram usadas distâncias de Bregman e considerada a semi-norma de  $BV$  como funcional de penalização. Nesse mesmo artigo Osher e os demais autores fizeram uma generalização do método iterativo para o caso linear e por sua vez derivaram resultados teóricos, tais como semi-convergência e estabilidade. A seqüência desse estudo foi realizada em [Bac07] com a proposta de modificar o mesmo método iterativo para o tratamento de operadores não lineares. As referências citadas nesse parágrafo formam a base da teoria apresentada neste capítulo.

Na primeira seção expomos a equação a ser tratada ao longo deste capítulo, bem com as hipóteses a ela relacionada. Em seguida apresentamos um algoritmo baseado em distâncias de Bregman, cuja solução é obtida através de um processo iterativo. Mostramos que os resíduos

obtidos pelos iterados são decrescentes, assim como a distância entre uma solução  $u_k$  e uma solução  $h$ -minimizante, mensuradas pela distância de Bregman.

Nosso próximo passo é mostrar que esse algoritmo está bem definido no seguinte sentido: dado uma seqüência  $(u_k)$  gerada pelo algoritmo proposto é possível extrair uma subseqüência que converge para uma solução do problema estudado, mesmo num sentido mais fraco. Todavia, tais resultados de convergência não são demonstrados para o caso geral, ou seja, para qualquer funcional  $h$  convexo. Antes de mais nada precisamos de um funcional convexo com boas propriedades teóricas e acima de tudo que seja útil na prática para o tratamento de problemas relevantes.

Na seção seguinte exibiremos um funcional com a seguinte propriedade: a convergência da distância de Bregman, induzida por esse funcional, implica na convergência na norma  $L^2$ , a menos de uma constante.

Na última seção será exibida a condição de não linearidade que assumiremos nos demais resultados. Também será mostrado que o algoritmo investigado está bem definido para esse funcional, no sentido que o elemento  $u_{k+1}$  define o novo minimizador do problema regularizado e o subgradiente  $\xi_{k+1}$  pertence ao novo subdiferencial. O capítulo será finalizado com dois resultados importantes, um para dados exatos e outro para dados inexatos, para os quais mostramos que a seqüência dos iterados gerados pelo Algoritmo 1 possui uma subseqüência que converge para uma solução  $h$ -minimizante. A noção da convergência é dada nos respectivos teoremas.

## 4.1 Um Algoritmo baseado em distância de Bregman

Assim como fizemos nos capítulos anteriores consideramos a equação de operadores

$$F(u) = y, \quad (4.1)$$

em que  $F : \mathcal{D}(F) \rightarrow \mathcal{H}$  é um operador contínuo, não linear e Fréchet diferenciável, com  $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{U}$  um domínio convexo contido num espaço Banach  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert.

Uma vez que a Equação (4.1) analisada é mal-posta no sentido de Hadamard a questão referente a existência de solução pode falhar, caso seja satisfeita garantimos unicidade. Sendo assim, definimos o conjunto das soluções da Equação (4.1) como

$$\mathcal{S}(y) = \{u \in \mathcal{D}(F) \mid F(u) = y\}.$$

Uma análise quantitativa para uma solução regularizada da Equação (4.1) foi feita no

capítulo anterior; teoricamente temos bons resultados para tal solução. Neste capítulo investigamos um método iterativo que possui ao menos uma subsequência convergente para uma solução  $u^\delta \in \mathcal{S}(y^\delta)$ , quando trabalhamos com dados inexatos.

O método aqui proposto é uma generalização para o método de Tikhonov iterado

$$u_{k+1} \in \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \|F(u) - y^\delta\|^2 + \alpha_k \|u - u_k\|_{\mathcal{U}}^2 \right\}. \quad (4.2)$$

A primeira iteração desse método consiste na solução clássica de Tikhonov para problemas não lineares, encontrada a partir de uma aproximação inicial  $u_0$ . No método iterado damos continuidade na resolução do problema utilizando a solução encontrada anteriormente como uma nova estimativa e reiniciamos o processo, isto é, calculamos outro minimizador conforme (4.2).

A modificação proposta para generalizar o método de Tikhonov ocorre no termo de penalização. Ao invés de usarmos a norma do espaço  $\mathcal{U}$  utilizamos a distância de Bregman para mensurar o desvio de  $u$  em relação a  $u_k$ . Consideramos o seguinte problema de minimização como a generalização para (4.2)

$$u_{k+1} \in \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \|F(u) - y^\delta\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u, u_k) \right\}. \quad (4.3)$$

Para que essa modificação fique bem definida necessitamos encontrar um subgradiente  $\xi_k \in \partial h(u_k)$  em cada iteração. Essa tarefa não exige muito esforço, observando a condição necessária de otimalidade de primeira ordem para um minimizador local do problema regularizado dado em (4.3) temos um bom palpite para a atualização do mesmo, a saber,

$$\xi_{k+1} = \xi_k - \frac{1}{\alpha_k} F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta). \quad (4.4)$$

Com as Equações (4.3) e (4.4) definimos o método iterativo baseado em distâncias de Bregman estudado ao longo deste capítulo.

Na formulação apresentada no Algoritmo 1 o parâmetro de regularização  $\alpha_k$  possui apenas uma exigência: ser estritamente positivo. O mesmo pode ser tomado constante ao longo das iterações, ou ainda, ser atualizado por algum processo adequado.

Quanto ao critério de parada para o Algoritmo 1, para dados exatos, não existe uma limitação para o número de iterações. Assim, podemos iterá-lo até atingir a tolerância requerida.

**Observação 4.1.** Na Equação (4.4) damos uma fórmula explícita para calcular  $\xi_{k+1}$  em relação ao subgradiente anterior. Podemos facilmente reescrever essa equação como um somatório

---

**Algoritmo 1** Tikhonov generalizado com distância de Bregman
 

---

**Dados:**  $u_0 \in \mathcal{D}(F) \cap \text{dom } h$ ,  $\xi_0 \in \partial h(u_0)$

1:  $k = 0$

2:  $\alpha_k > 0$

3: **repita**

4:  $u_{k+1} \in \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \|F(u) - y^\delta\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u, u_k) \right\}$

5:  $\xi_{k+1} = \xi_k - \frac{1}{\alpha_k} F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta)$

6:  $k = k + 1$

7:  $\alpha_k > 0$

8: **até** convergência

---

envolvendo todos os subgradientes  $\xi_k$  anteriores. Para ver isso basta escrevermos algumas iterações usando sempre a expressão encontrada na iteração anterior. Dessa forma encontramos como definição equivalente a (4.4)

$$\xi_{k+1} = \xi_0 - \sum_{j=0}^k \frac{1}{\alpha_j} F'(u_{j+1})^* (F(u_{j+1}) - y^\delta). \quad (4.5)$$

O Algoritmo 1 possui boas propriedades. A primeira a ser apresentada garante a monotonicidade decrescente do resíduo obtido pelos iterados. Note que esse resultado independe de hipóteses adicionais ao operador  $F$ .

**Lema 4.2.** Os iterados definidos no Algoritmo 1 satisfazem

$$\|y^\delta - F(u_{k+1})\| \leq \|y^\delta - F(u_k)\|. \quad (4.6)$$

**Demonstração:** Uma vez que  $u_{k+1}$  é o minimizador de (4.3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|y^\delta - F(u_{k+1})\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) &\leq \frac{1}{2} \|y^\delta - F(u_k)\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u_k, u_k) \\ &= \frac{1}{2} \|y^\delta - F(u_k)\|^2. \end{aligned}$$

Evidentemente  $D_h^{\xi_k}(u_k, u_k) = 0$  e portanto a última igualdade acima é trivialmente satisfeita.

Visto que  $D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) \geq 0$ , a soma do lado esquerdo da desigualdade acima é maior do que cada termo da soma, em particular

$$\frac{1}{2} \|y^\delta - F(u_{k+1})\|^2 \leq \frac{1}{2} \|y^\delta - F(u_k)\|^2.$$

Multiplicando por 2 em ambos os lados da desigualdade acima e extraindo a raiz quadrada

em seguida, confirmamos a desigualdade (4.6), visto que todos os elementos são positivos.  $\square$

Outra propriedade a ser demonstrada é a monotonia com relação a distância de Bregman entre os iterados, a saber

$$D_h^{\xi_{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1}) \leq D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) .$$

Esse resultado é verdadeiro sob uma condição de não linearidade exigida ao operador  $F$ . No Capítulo 3 apresentamos duas condições de não linearidade, (3.5) e (3.6), no entanto aqui é requerido outra variação.

**Lema 4.3.** *Seja  $y^\delta \in \mathcal{H}$  uma medição do dado observado. Para dados  $u_k$  e  $\xi_k$ , se o iterado  $u_{k+1}$  obtido da solução de (4.3) satisfaz*

$$\left\| y^\delta - F(u_{k+1}) - F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1}) \right\| \leq c \left\| y^\delta - F(u_{k+1}) \right\| , \quad (4.7)$$

para  $0 < c < 1$ , então

$$D_h^{\xi_{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1}) - D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) + D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) \leq -\frac{1-c}{\alpha_k} \left\| y^\delta - F(u_{k+1}) \right\|^2 . \quad (4.8)$$

**Demonstração:** Através da Proposição B.15 garantimos

$$D_h^{\xi_{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1}) - D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) + D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) = \langle \xi_{k+1} - \xi_k, u_{k+1} - \bar{u} \rangle . \quad (4.9)$$

Usando a igualdade (4.4) reescrevemos somente o lado direito da equação acima como

$$\begin{aligned} \langle \xi_{k+1} - \xi_k, u_{k+1} - \bar{u} \rangle &= \left\langle -\frac{1}{\alpha_k} F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta), u_{k+1} - \bar{u} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\alpha_k} \left\langle F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta), \bar{u} - u_{k+1} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\alpha_k} \left\langle F(u_{k+1}) - y^\delta, F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1}) \right\rangle_{\mathcal{H}} . \end{aligned} \quad (4.10)$$

A última igualdade é válida pela definição do produto de dualidade.

No segundo termo do produto interno em (4.10) vamos somar e subtrair  $F(u_{k+1}) - y^\delta$  de modo a preservar a igualdade, e pelas propriedades do produto interno no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$



temos

$$\begin{aligned}
(4.10) &= \frac{1}{\alpha_k} \left\langle F(u_{k+1}) - y^\delta, F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1}) + F(u_{k+1}) - y^\delta - (F(u_{k+1}) - y^\delta) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \frac{1}{\alpha_k} \left\langle F(u_{k+1}) - y^\delta, - (F(u_{k+1}) - y^\delta) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \frac{1}{\alpha_k} \left\langle F(u_{k+1}) - y^\delta, F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1}) + F(u_{k+1}) - y^\delta \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= -\frac{1}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\|^2 - \frac{1}{\alpha_k} \left\langle F(u_{k+1}) - y^\delta, y^\delta - F(u_{k+1}) - F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1}) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&\leq -\frac{1}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\|^2 - \frac{1}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| \|y^\delta - F(u_{k+1}) - F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1})\|.
\end{aligned}$$

Para a última desigualdade acima usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Note que a última expressão é igual a

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| \left( \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| - \|y^\delta - F(u_{k+1}) - F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1})\| \right) \\
&= \frac{1}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| \left( \|y^\delta - F(u_{k+1}) - F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1})\| - \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| \right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| \left( c \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| - \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| \right). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

A última desigualdade obtida é baseada na hipótese (4.7) para uma constante  $0 < c < 1$ . Continuando essa estimativa

$$\begin{aligned}
(4.11) &= \frac{1}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| \left( [c - 1] \|F(u_{k+1}) - y^\delta\| \right) \\
&= \frac{(c - 1)}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\|^2 \\
&= -\frac{(1 - c)}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\|^2. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Visto que (4.12) estima o lado direito de (4.9) então é satisfeita a estimativa

$$D_h^{\xi^{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1}) - D_h^{\xi^k}(\bar{u}, u_k) + D_h^{\xi^k}(u_{k+1}, u_k) \leq -\frac{(1 - c)}{\alpha_k} \|F(u_{k+1}) - y^\delta\|^2.$$

□

Esse resultado é muito importante, pois se não fosse possível garantir que  $u_k$  está próximo de uma solução  $\bar{u}$ , tampouco garantiríamos resultados de convergência para o Algoritmo 1. Portanto, nos principais resultados deste capítulo devemos em primeiro lugar verificar as hipóteses do Lema 4.3.

Esse resultado também é válido quando a medição dos dados é desprovida de ruídos, isto é,

para  $y^\delta = y$ .

## 4.2 Um funcional com variação limitada

Iniciamos o Capítulo 2 com a apresentação da teoria de regularização num contexto bem geral, extraíndo resultados para um funcional de penalização convexo e semi-contínuo inferiormente. Na Seção 2.3 mostramos que a escolha de um funcional específico aferimos a teoria clássica.

Nesta seção escolhemos um funcional de penalização bem especial, combinando a penalização de Tikhonov (Seção 2.3.1) com penalização de variação limitada, visto na Seção 2.3.2. Com isso buscamos aproveitar características de cada modelo, em especial a possibilidade de reconstruir soluções não suaves. A análise do Algoritmo 1 é feita em relação ao funcional introduzido nesta seção.

Um interesse em particular é o tratamento de imagens tremidas, borradas ou embaçadas. Em inglês o processo para a correção de tais efeitos é conhecido como *deblurring*.



Figura 4.1: Exemplo imagem borrada



Figura 4.2: Imagem original - fotógrafo

Para os próximos resultados consideramos um operador não linear  $F$  tal que  $\mathcal{D}(F) \subseteq L^2(\Omega)$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é um domínio Lipschitz limitado. Definimos o funcional de penalização convexo como

$$h(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{BV(\Omega)}. \quad (4.13)$$

Esse funcional foi proposto no artigo [OBG<sup>+</sup>05] na seção de futuras generalizações. Com a escolha desse funcional obtemos um resultado muito importante que relaciona a convergência da distância de Bregman com a convergência no espaço  $L^2(\Omega)$ . O próximo lema garante uma limitação inferior para a distância de Bregman nesse contexto.

**Lema 4.4.** *Se  $h$  é o funcional convexo definido em (4.13), então*

$$\frac{1}{2} \|v - u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq D_h^\xi(v, u) \quad (4.14)$$

para todo  $u, v \in \mathcal{D}(F)$  e  $\xi \in \partial h(u)$ .

**Demonstração:** Visto que  $h$  satisfaz as hipóteses da Proposição B.16, temos

$$\begin{aligned} D_h^\xi(v, u) &= D_{h_1}^{\xi_1}(v, u) + D_{h_2}^{\xi_2}(v, u) \\ &\geq D_{h_1}^{\xi_1}(v, u), \end{aligned} \quad (4.15)$$

com  $h_1(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$ ,  $h_2(u) = |u|_{BV(\Omega)}$ ,  $\xi_1 \in \partial h_1(u)$  e  $\xi_2 \in \partial h_2(u)$ .

Observando os cálculos efetuados na Seção 2.3.1, temos  $D_{h_1}^{\xi_1}(v, u) = \frac{1}{2} \|v - u\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Portanto, o resultado segue de (4.15).  $\square$

A prova desse resultado está ligada diretamente à demonstração da Proposição B.16 e por sua vez depende da igualdade em (B.2). Resultados análogos podem ser repetidos desde que as hipóteses desses resultados sejam preservadas. Por exemplo, poderíamos adicionar outro funcional Gâteaux diferenciável em (4.13) e o resultado da proposição continuaria válido.

Outra propriedade importante é fornecida pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger em [EG92], garantindo a imersão contínua  $BV(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , isto é, existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|u\|_{BV(\Omega)}$  para todo  $u \in BV(\Omega)$ .

### 4.3 Propriedades do algoritmo

Esta seção é a mais importante do capítulo, pois exibimos resultados que comprovam a eficiência do algoritmo introduzido no início deste capítulo. Em especial, mostramos que a seqüência  $(u_k)$  gerada pelo Algoritmo 1 possui uma subseqüência que converge para uma solução da equação operador (4.1), tanto para dados exatos quanto para dados com ruído. Tais resultados são demonstrados com o auxílio da hipótese dada a seguir.

**Hipótese 4.5.** *Seja  $F : \mathcal{D}(F) \subset L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}$  um operador não linear seqüencialmente fracamente fechado, com  $F'(\cdot)$  localmente limitado. Suponha que a condição de não linearidade*

$$\|F(v) - F(u) - F'(u)(v - u)\| \leq \eta \|u - v\|_{L^2(\Omega)} \|F(u) - F(v)\| \quad (4.16)$$

é satisfeita para todos elementos  $u, v \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u}) \cap \mathcal{D}(F)$ , para algum  $\eta, \rho > 0$  em que  $\mathcal{B}_\rho(\bar{u})$  denota a bola aberta sobre  $\bar{u}$  de raio  $\rho$  em  $L^2(\Omega)$  e  $\bar{u} \in \mathcal{S}(y) \cap \text{dom } h$ .

Com essa hipótese válida derivamos uma estimativa de (4.16) útil para os próximos resultados, conforme a seguinte observação:

**Observação 4.6.** *Podemos reescrever o lado esquerdo da desigualdade dada em (4.16) como*

$$\| -F'(u)(v-u) - [F(u) - F(v)] \| \geq \| -F'(u)(v-u) \| - \| F(u) - F(v) \| .$$

*Essa estimativa resulta da desigualdade triangular. Pelo lado direito de (4.16) temos*

$$\| F'(u)(v-u) \| - \| F(u) - F(v) \| \leq \eta \| u - v \|_{L^2(\Omega)} \| F(u) - F(v) \| .$$

*Por sua vez, reescrevemos a desigualdade acima como*

$$\| F'(u)(v-u) \| \leq \left( 1 + \eta \| u - v \|_{L^2(\Omega)} \right) \| F(u) - F(v) \| . \quad (4.17)$$

*Essa estimativa é válida sob as mesmas constantes e suposições introduzidas na Hipótese 4.5.*

O Algoritmo 1 intuitivamente está bem definido, pois tomamos a solução  $u_{k+1}$  como um minimizador de um funcional semelhante aqueles utilizados nos capítulos anteriores e o subgradiente é atualizado de modo análogo a Observação 3.7, dada no Capítulo 3. Caso não exista um minimizador para o funcional proposto ou ainda, se o subgradiente  $\xi_{k+1} \notin \partial h(u_{k+1})$ , o algoritmo é inviável. O próximo resultado trata da eficiência do algoritmo proposto com relação a essas questões.

**Proposição 4.7.** *Seja  $F$  um operador satisfazendo a Hipótese 4.5. Tome  $k \in \mathbb{N}$  e  $u_k, \xi_k$  um par de iterados fornecidos pelo Algoritmo 1. Então existe um minimizador  $u_{k+1}$  para (4.3) e  $\xi_{k+1}$  definido em (4.4) satisfaz  $\xi_{k+1} \in \partial h(u_{k+1})$ .*

**Demonstração:** Primeiro vamos provar a existência de um minimizador  $u_{k+1}$  para o funcional definido em (4.3), a saber

$$J_{\alpha_k}^\delta(u) = \frac{1}{2} \| F(u) - y^\delta \|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u, u_k) , \quad (4.18)$$

com  $\alpha_k > 0$ .

Conforme a formulação do problema temos  $\text{dom } h \subset \mathcal{D}(F)$  e pela Hipótese 4.5 temos  $\mathcal{D}(F) \subset L^2(\Omega)$ , logo  $\text{dom } h \subset L^2(\Omega)$  e assim  $\xi_k \in L^2(\Omega)$  para todo  $k$ .

Inicialmente supomos  $u_0$  e  $\xi_0$  dados iniciais bem definidos. Supomos ainda que existe um

elemento  $u \in \mathcal{D}(F)$  tal que  $J_{\alpha_k}^\delta(u) < \infty$ . Sendo assim, podemos definir um escalar  $\beta \geq 0$  tal que

$$\beta = \inf \left\{ J_{\alpha_k}^\delta(u) \mid u \in \mathcal{D}(F) \right\} .$$

Portanto, existe uma seqüência minimizante  $(u_j) \in \mathcal{D}(F) \cap BV(\Omega)$  que converge para o valor mínimo, isto é,  $\lim_j J_{\alpha_k}^\delta(u_j) \rightarrow \beta$ .

Como essa seqüência é convergente existe uma constante  $M \geq 0$  tal que

$$J_{\alpha_k}^\delta(u_j) \leq M, \quad \forall j .$$

A partir dessa limitação e da Definição (4.18), temos

$$D_h^{\xi_k}(u_j, u_k) \leq \frac{M}{\alpha_k}, \quad (4.19)$$

para todo  $j$  e  $\alpha_k > 0$ .

Usando a definição da distância de Bregman e o funcional  $h$  dado em (4.13) obtemos

$$\begin{aligned} D_h^{\xi_k}(u_j, u_k) &= h(u_j) - h(u_k) - \langle \xi_k, u_j - u_k \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_j|_{BV(\Omega)} - \frac{1}{2} \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - |u_k|_{BV(\Omega)} \\ &\quad - \langle \xi_k, u_j \rangle + \langle \xi_k, u_k \rangle . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para melhorar a definição dessa distância observamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 - \langle \xi_k, u_j \rangle &= \frac{1}{2} \|u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \langle \xi_k, u_j \rangle - \frac{1}{2} \|\xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|u_j - \xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} (4.20) &= \frac{1}{2} \|u_j - \xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_j|_{BV(\Omega)} - \frac{1}{2} \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - |u_k|_{BV(\Omega)} + \langle \xi_k, u_k \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|u_j - \xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_j|_{BV(\Omega)} - \frac{1}{2} \left( \|u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \langle \xi_k, u_k \rangle \right) - |u_k|_{BV(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2} \|u_j - \xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_j|_{BV(\Omega)} - \frac{1}{2} \|u_k - \xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 - |u_k|_{BV(\Omega)} . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Em resumo, para um passo  $k$  fixo e para todo  $j$

$$D_h^{\xi_k}(u_j, u_k) = \frac{1}{2} \|u_j - \xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_j|_{BV(\Omega)} - c_k, \quad (4.23)$$

com  $c_k = \frac{1}{2} \|u_k - \xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_k|_{BV(\Omega)}$  uma constante positiva.

Com isso combinamos (4.19) e (4.23) e concluímos

$$\frac{1}{2} \|u_j - \xi_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_j|_{BV(\Omega)} \leq \frac{M}{\alpha_k} + c_k = \tilde{M}_k, \quad (4.24)$$

em que  $\tilde{M}_k \geq 0$ .

Em particular essa limitação vale para cada parcela da soma, a saber

$$|u_j|_{BV(\Omega)} \leq \tilde{M}_k. \quad (4.25)$$

Por argumentos de compacidade<sup>1</sup> existe uma subsequência  $(u_{j_m}) \in BV(\Omega)$  que converge fraco  $u_{j_m} \rightharpoonup \tilde{u}$ , para  $\tilde{u} \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

Como o funcional  $J_{\alpha_k}^\delta(\cdot)$  é seqüencialmente fracamente semi-contínuo inferiormente

$$J_{\alpha_k}^\delta(\tilde{u}) \leq \liminf_{j_m} J_{\alpha_k}^\delta(u_{j_m}) = \lim_{j_m} J_{\alpha_k}^\delta(u_{j_m}) = \lim_j J_{\alpha_k}^\delta(u_j) = \beta \quad (4.26)$$

Note que as igualdades acima derivam da existência do limite, limite da subsequência e da definição da seqüência minimizante, respectivamente.

Portanto, o limite  $\tilde{u}$  existe e  $\tilde{u} \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Além disso, é satisfeita a igualdade  $J_{\alpha_k}^\delta(\tilde{u}) = \beta$ , ou seja,  $\tilde{u} = \operatorname{argmin} \{J_{\alpha_k}^\delta(u) \mid u \in \mathcal{D}(F)\}$ .

Para concluir a primeira parte da demonstração dessa proposição basta definir  $u_{k+1} = \tilde{u}$ .

A segunda etapa da demonstração consiste em provar que  $\xi_{k+1} \in \partial h(u_{k+1})$ . Para fazer isso aplicamos o resultado da Proposição B.12.

De fato, o funcional  $J_{\alpha_k}^\delta(\cdot)$  definido em (4.18) através da soma de um funcional Gâteaux diferenciável e outro convexo, respectivamente. Cada funcional satisfaz as hipóteses da proposição referida e definimos

$$\phi_1(u) = \frac{1}{2} \left\| y^\delta - F(u) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.27)$$

e

$$\phi_2(u) = \alpha_k D_h^{\xi_k}(u, u_k). \quad (4.28)$$

Na primeira parte da demonstração provamos que  $u_{k+1} \in \mathcal{D}(F)$  é o minimizador de  $J_{\alpha_k}^\delta(\cdot)$  e pela Proposição B.12 segue

$$\phi_2(v) \geq \phi_2(u_{k+1}) + \langle -\phi_1'(u_{k+1}), v - u_{k+1} \rangle, \quad (4.29)$$

---

<sup>1</sup>Tais argumentos são repetidos nos teoremas a seguir.

para todo  $v \in \mathcal{D}(F)$ .

Fazendo os cálculos necessários e substituindo os funcionais  $\phi_1$  e  $\phi_2$  na desigualdade acima resulta

$$\alpha_k D_h^{\xi_k}(v, u_k) \geq \alpha_k D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) + \left\langle -F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta), v - u_{k+1} \right\rangle.$$

Mediante operações básicas temos

$$D_h^{\xi_k}(v, u_k) - D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) \geq \frac{1}{\alpha_k} \left\langle -F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta), v - u_{k+1} \right\rangle. \quad (4.30)$$

Observando somente o lado esquerdo da desigualdade acima, aplicamos a definição da distância de Bregman para encontrar a igualdade

$$\begin{aligned} D_h^{\xi_k}(v, u_k) - D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) &= h(v) - h(u_k) - \langle \xi_k, v - u_k \rangle \\ &\quad - [h(u_{k+1}) - h(u_k) - \langle \xi_k, u_{k+1} - u_k \rangle] \\ &= h(v) - h(u_{k+1}) - \langle \xi_k, v - u_{k+1} \rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Substituindo o lado esquerdo de (4.30) pelo lado direito de (4.31) obtemos

$$h(v) - h(u_{k+1}) - \langle \xi_k, v - u_{k+1} \rangle \geq \left\langle -\frac{1}{\alpha_k} F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta), v - u_{k+1} \right\rangle.$$

Para melhor compreender essa desigualdade vamos reescrevê-la como

$$h(v) \geq h(u_{k+1}) + \left\langle \xi_k - \frac{1}{\alpha_k} F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta), v - u_{k+1} \right\rangle.$$

Por fim, usamos a Definição B.9 para concluir que  $\xi_{k+1} \in \partial h(u_{k+1})$ , em que

$$\xi_{k+1} = \xi_k - \frac{1}{\alpha_k} F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta). \quad (4.32)$$

□

O resultado apresentado acima pode ser repetido para outros funcionais convexos  $h$  ao invés de (4.13), desde que  $h$  seja seqüencialmente consistente e satisfaça as condições enunciadas nesse resultado.

Na seqüência do texto apresentamos os principais resultados, primeiro para dados exatos e em seguida analisamos o mesmo problema para dados com ruído. Essa esquematização é a mais natural, contudo nos capítulos anteriores procedemos diferentemente com o objetivo de simplificar as demonstrações.

Para o problema regularizado (4.18) com dados exatos e com um parâmetro de regularização finito, exibimos condições suficientes sobre o operador  $F$  e sobre os dados iniciais  $u_0$  e  $\xi_0$  com o objetivo de garantir a existência de uma subsequência convergente para uma solução da Equação (4.1), gerada pelo Algoritmo 1 a partir dos dados iniciais  $u_0$  e  $\xi_0$ .

**Teorema 4.8** (Convergência). *Seja  $F$  um operador sob a Hipótese 4.5 e tome  $\gamma < \min \left\{ \frac{1}{\eta}, \frac{\rho}{2} \right\}$  para  $\eta, \rho$  como em (4.16),  $0 < \alpha_k < \bar{\alpha}$ ,  $h(\bar{u}) < \infty$  e os valores iniciais  $u_0, \xi_0 \in L^2(\Omega)$  satisfazendo  $D_h^{\xi_0}(\bar{u}, u_0) < \frac{\gamma^2}{8}$  para um  $\bar{u} \in \mathcal{S}(y)$ . Então para dados exatos toda subsequência de  $(u_k)$  tem uma subsequência convergindo para um  $u \in \mathcal{S}(y)$  na topologia fraca-\* de  $BV(\Omega)$ . Além disso, se  $\mathcal{S}(y) \cap \overline{\mathcal{B}_\rho(\bar{u})} = \{\bar{u}\}$ , então  $u_k \xrightarrow{*} \bar{u}$  em  $BV(\Omega)$ .*

**Demonstração:** Dividimos esta demonstração em quatro passos a fim de facilitar a compreensão.

*Passo 1:* Por indução sobre  $k$  vamos mostrar que para todo  $k$  os elementos da seqüência  $(u_k)$  estão próximos de  $\bar{u}$ .

Primeiro verificamos para  $k = 0$ . Para isso reescrevemos a hipótese apresentada no enunciado desse teorema sobre os dados iniciais  $u_0, \xi_0 \in L^2(\Omega)$  como

$$2\sqrt{2D_h^{\xi_0}(\bar{u}, u_0)} < \gamma. \quad (4.33)$$

Supomos que essa desigualdade vale para todo  $k$ . Portanto, a hipótese de indução sobre o par  $u_k, \xi_k$  dados pelo Algoritmo 1 é

$$2\sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} < \gamma. \quad (4.34)$$

Vamos mostrar sua validade para o par  $u_{k+1}, \xi_{k+1}$ .

Por (4.3) temos que  $u_{k+1}$  minimiza o funcional

$$J_{\alpha_k}(u) = \frac{1}{2} \|F(u) - y\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u, u_k)$$

com dados são exatos.

Como  $u_{k+1}$  é o minimizador do funcional dado acima vale

$$J_{\alpha_k}(u_{k+1}) \leq J_{\alpha_k}(\bar{u}),$$

para  $\bar{u}$  tal que  $F(\bar{u}) = y$ .



Reescrevendo essa desigualdade com a definição do funcional regularizado, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|F(u_{k+1}) - y\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) &\leq \frac{1}{2} \|F(\bar{u}) - y\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) \\ &= \alpha_k D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) . \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo da desigualdade acima é composta pela soma de dois termos positivos, cada um deles é estimado pelo lado direito; visto que os  $\alpha_k$  são positivos em particular vale

$$D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) \leq D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) . \quad (4.35)$$

Através do Lema 4.4, Equação (4.14), obtemos

$$\frac{1}{2} \|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) . \quad (4.36)$$

Associando a estimativa acima com (4.35) concluímos

$$\frac{1}{2} \|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) .$$

Essa estimativa é equivalente a

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} . \quad (4.37)$$

Novamente pelo Lema 4.4 garantimos

$$\frac{1}{2} \|\bar{u} - u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) .$$

Reescrevendo essa estimativa de maneira conveniente, obtemos

$$\|\bar{u} - u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} . \quad (4.38)$$

A combinação de (4.37) e (4.38) resulta em

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} &= \|u_{k+1} - u_k - (\bar{u} - u_k)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{u} - u_k\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} + \sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} \\ &= 2\sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} \\ &< \gamma . \end{aligned}$$

Note que para a desigualdade estrita obtida acima usamos a hipótese de indução (4.34). Em resumo

$$\|u_{k+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} < \gamma. \quad (4.39)$$

Uma vez que  $\gamma < \frac{\rho}{2}$  temos  $\|u_{k+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} < \rho$ . Portanto, concluímos que  $u_{k+1} \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u}) \cap \mathcal{D}(F)$  e com isso é possível aplicar a Hipótese 4.5. Tomando  $u = u_{k+1}$  e  $v = \bar{u}$  na desigualdade (4.16), obtemos

$$\begin{aligned} \|F(\bar{u}) - F(u_{k+1}) - F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1})\| &\leq \eta \|u_{k+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|F(u_{k+1}) - F(\bar{u})\| \\ &< \eta\gamma \|F(u_{k+1}) - F(\bar{u})\|. \end{aligned} \quad (4.40)$$

A última desigualdade estrita acima resulta de (4.39).

Como por hipótese  $\gamma < \frac{1}{\eta}$  temos  $0 < \eta\gamma < 1$ . Visto que  $\bar{u}$  é tal que  $F(\bar{u}) = y$ , a desigualdade acima satisfaz a hipótese requerida no Lema 4.3 para  $c = \eta\gamma$ . Portanto, por (4.8) segue

$$D_h^{\xi_{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1}) \leq D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k). \quad (4.41)$$

Multiplicando ambos os lados dessa desigualdade por 8 e em seguida extraindo a raiz quadrada, temos

$$2\sqrt{2D_h^{\xi_{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1})} \leq 2\sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)}. \quad (4.42)$$

Pela hipótese de indução o lado direito dessa desigualdade é estimado por  $\gamma$ , logo

$$2\sqrt{2D_h^{\xi_{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1})} \leq \gamma. \quad (4.43)$$

Dessa maneira mostramos que para todo  $k \in \mathbb{N}$  vale  $\|u_k - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} < \gamma < \rho$ ; além disso, usando a Hipótese 4.5 podemos aplicar o Lema 4.3 para todos os iterados.

*Passo 2:* Neste passo mostramos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} \|y - F(u_{i+1})\|^2 < \infty. \quad (4.44)$$

Esse resultado é necessário para o próximo passo da demonstração.

Como vimos no passo anterior, pelo Lema 4.3 a desigualdade (4.8) vale para cada  $k$ . Vamos reescrevê-la como

$$D_h^{\xi_{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1}) + D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) + \frac{1 - \eta\gamma}{\alpha_k} \|y - F(u_{k+1})\|^2 \leq D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k). \quad (4.45)$$

Uma vez que essa desigualdade vale para todo  $k$ , podemos somar os valores dessa desigualdade para os  $k$  primeiros termos. Para isso fixamos um  $k \in \mathbb{N}$  qualquer e aplicamos um somatório em ambos os lados da desigualdade acima da seguinte forma

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_h^{\xi_{i+1}}(\bar{u}, u_{i+1}) + \sum_{i=0}^{k-1} D_h^{\xi_i}(u_{i+1}, u_i) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1 - \eta\gamma}{\alpha_i} \|y - F(u_{i+1})\|^2 \leq \sum_{i=0}^{k-1} D_h^{\xi_i}(\bar{u}, u_i) . \quad (4.46)$$

Observamos que o primeiro termo do lado esquerdo pode ser reescrito após uma mudança de variável  $j = i + 1$  como

$$\sum_{j=1}^k D_h^{\xi_j}(\bar{u}, u_j) = \sum_{j=1}^{k-1} D_h^{\xi_j}(\bar{u}, u_j) + D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) .$$

Para o somatório do lado direito de (4.46) retiramos o primeiro termo do somatório, assim

$$\sum_{i=0}^{k-1} D_h^{\xi_i}(\bar{u}, u_i) = D_h^{\xi_0}(\bar{u}, u_0) + \sum_{i=1}^{k-1} D_h^{\xi_i}(\bar{u}, u_i) .$$

Mediante essas observações podemos cancelar os termos semelhantes de cada lado da desigualdade. Logo (4.46) é igual a

$$D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) + \sum_{i=0}^{k-1} D_h^{\xi_i}(u_{i+1}, u_i) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1 - \eta\gamma}{\alpha_i} \|y - F(u_{i+1})\|^2 \leq D_h^{\xi_0}(\bar{u}, u_0) .$$

Uma vez que o lado direito da desigualdade acima é limitado por  $\frac{\gamma^2}{8}$  e o lado esquerdo é formado por termos positivos segue

$$\begin{aligned} (1 - \eta\gamma) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_i} \|y - F(u_{i+1})\|^2 &\leq D_h^{\xi_0}(\bar{u}, u_0) \\ &< \frac{\gamma^2}{8} . \end{aligned}$$

Tomando o limite para  $k$  tendendo a infinito resulta

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} \|y - F(u_{i+1})\|^2 < \frac{\gamma^2}{8(1 - \eta\gamma)} < \infty .$$

Segundo o teste da divergência de uma série, se uma série é convergente então o limite do termo geral deve ir para zero. Aplicando esse teste na série convergente acima obtemos

$$F(u_k) \rightarrow y , \quad (4.47)$$

em  $\mathcal{H}$ .

*Passo 3:* Este passo é o mais elaborado da demonstração. Mostramos a limitação uniforme da seqüência  $(h(u_k))$  obtida através da aplicação do funcional  $h$  nos elementos da seqüência  $(u_k)$  gerada pelo Algoritmo 1.

Lembramos da definição da distância de Bregman entre  $\bar{u}$  e  $u_k$  induzida pelo funcional  $h$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  fixo, como

$$D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) = h(\bar{u}) - h(u_k) - \langle \xi_k, \bar{u} - u_k \rangle,$$

com  $\xi_k \in \partial h(u_k)$  dado por (4.4).

Uma vez que a distância de Bregman sempre é positiva, vale

$$\begin{aligned} h(u_k) &\leq h(\bar{u}) - \langle \xi_k, \bar{u} - u_k \rangle \\ &\leq h(\bar{u}) + |\langle \xi_k, \bar{u} - u_k \rangle| \\ &= h(\bar{u}) + \left| \left\langle \xi_0 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_i} F'(u_{i+1})^* (F(u_{i+1}) - y), \bar{u} - u_k \right\rangle \right|. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para obter a última igualdade acima usamos a definição equivalente para  $\xi_k$  exibida em (4.5).

Tecemos uma observação sobre o produto de dualidade acima. Visto que os elementos da primeira parcela dessa aplicação pertencem ao espaço de Banach  $\mathcal{U}^*$ , dados dois elementos no dual e um escalar a soma deles ou a multiplicação por um escalar ainda pertence ao dual. Uma vez que o somatório é finito e as constantes  $\alpha_k$  são positivas para todo  $k$ , temos

$$\begin{aligned} (4.48) &\leq h(\bar{u}) + |\langle \xi_0, \bar{u} - u_k \rangle| + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_i} |\langle F'(u_{i+1})^* (F(u_{i+1}) - y), \bar{u} - u_k \rangle| \\ &= h(\bar{u}) + |\langle \xi_0, \bar{u} - u_k \rangle| + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_i} |\langle F(u_{i+1}) - y, F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_k) \rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\leq h(\bar{u}) + \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u} - u_k\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_i} \|F(u_{i+1}) - y\| \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_k)\| \\ &\leq h(\bar{u}) + \gamma \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_i} \|F(u_{i+1}) - y\| \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_k)\|. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Para obter a penúltima desigualdade aplicamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e para a última usamos a conclusão do *Passo 1*:  $\|\bar{u} - u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma$ .

Vamos nos ater apenas ao termo  $\|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_k)\|$  e buscar uma estimativa para ele a fim

de substituí-la em (4.49). Para todo índice  $0 \leq i \leq k-1$  vale

$$\begin{aligned} \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_k)\| &= \|F'(u_{i+1})[\bar{u} - u_{i+1} - (u_k - u_{i+1})]\| \\ &\leq \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{i+1})\| + \|F'(u_{i+1})(u_k - u_{i+1})\|. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Vamos estimar os dois termos do lado direito da desigualdade acima.

Através do *Passo I* obtemos  $\|\bar{u} - u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma$  para todo  $k$  e ainda  $u_{i+1}$  e  $u_k \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u})$ . Com isso aplicamos a desigualdade (4.17) duas vezes: primeiro para  $v = \bar{u}$  e depois para  $v = u_k$ , ambas com  $u = u_{i+1}$ . Fazendo isso encontramos

$$\begin{aligned} \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{i+1})\| &\leq \left(1 + \eta \|u_{i+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}\right) \|F(u_{i+1}) - F(\bar{u})\| \\ &\leq (1 + \eta\gamma) \|F(u_{i+1}) - F(\bar{u})\| \\ &= (1 + \eta\gamma) \|F(u_{i+1}) - y\| \end{aligned} \quad (4.51)$$

e

$$\begin{aligned} \|F'(u_{i+1})(u_k - u_{i+1})\| &\leq \left(1 + \eta \|u_{i+1} - u_k\|_{L^2(\Omega)}\right) \|F(u_{i+1}) - F(u_k)\| \\ &= \left(1 + \eta \|u_{i+1} - \bar{u} - (u_k - \bar{u})\|_{L^2(\Omega)}\right) \|F(u_{i+1}) - F(u_k)\| \\ &\leq \left[1 + \eta \left(\|u_{i+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}\right)\right] \|F(u_{i+1}) - F(u_k)\| \\ &\leq [1 + \eta(\gamma + \gamma)] \|F(u_{i+1}) - F(u_k)\| \\ &= (1 + 2\eta\gamma) \|F(u_{i+1}) - y - (F(u_k) - y)\| \\ &\leq (1 + 2\eta\gamma) (\|F(u_{i+1}) - y\| + \|F(u_k) - y\|) \\ &\leq (1 + 2\eta\gamma) (\|F(u_{i+1}) - y\| + \|F(u_{i+1}) - y\|) \\ &= 2(1 + 2\eta\gamma) \|F(u_{i+1}) - y\|. \end{aligned} \quad (4.52)$$

A última desigualdade é garantida pelo Lema 4.2, uma vez que  $i \leq k-1$  (ou melhor,  $i+1 \leq k$ ).

Combinando as estimativas (4.51) e (4.52), conseguimos uma estimativa para (4.50) da forma

$$\begin{aligned} (4.50) &\leq (1 + \eta\gamma) \|F(u_{i+1}) - y\| + 2(1 + 2\eta\gamma) \|F(u_{i+1}) - y\| \\ &= (3 + 5\eta\gamma) \|F(u_{i+1}) - y\|. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Com a estimativa acima voltamos a (4.49) e vale

$$\begin{aligned}
 (4.49) \quad &\leq h(\bar{u}) + \gamma \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_i} \|F(u_{i+1}) - y\| (3 + 5\eta\gamma) \|F(u_{i+1}) - y\| \\
 &= h(\bar{u}) + \gamma \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)} + (3 + 5\eta\gamma) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_i} \|F(u_{i+1}) - y\|^2 .
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Por fim, por (4.48) temos

$$h(u_k) \leq h(\bar{u}) + \gamma \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)} + (3 + 5\eta\gamma) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\alpha_i} \|F(u_{i+1}) - y\|^2 . \tag{4.55}$$

Uma vez que no *Passo 2* mostramos que o somatório presente na estimativa acima possui um valor finito, concluímos a limitação uniforme de  $h(u_k)$  para todo  $k$ .

*Passo 4:* No passo anterior concluímos que para todo  $k$

$$|h(u_k)| = h(u_k) \leq N ,$$

com  $N > 0$  dado pelo lado direito da Equação (4.55).

Visto que o funcional  $h$  é dado por (4.13), temos

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega)} + |u_k|_{BV(\Omega)} \leq R , \tag{4.56}$$

para um  $R > 0$  e para os elementos da seqüência  $(u_k) \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  extraída do Algoritmo 1.

Da estimativa acima e através do Teorema C.6 de Banach-Alaoglu temos que  $\overline{\mathcal{B}_R(0)}$  é fraco-\* compacta em  $L^2(\Omega)$  e em  $BV(\Omega)$ . Portanto, podemos extrair uma subsequência  $(u_{k,l})$  que é fraco-\* convergente em  $L^2(\Omega)$  para um elemento  $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Novamente utilizamos o teorema de Banach-Alaoglu para obter uma subsequência fraco-\* convergente em  $BV(\Omega)$ . No entanto, aplicamos esse resultado na subsequência  $(u_{k,l})$  que possui as mesmas propriedades da seqüência  $(u_k)$ . Portanto, a subsequência  $(u_{k,l,m})$  converge fraco-\* convergente em  $BV(\Omega)$  para o mesmo elemento que a subsequência  $(u_{k,l})$  converge.

Para não carregar a notação definimos  $u_{k_m} := u_{k,l,m}$ . Em resumo, observando que  $L^2(\Omega)$  é um espaço reflexivo, temos

$$u_{k_m} \rightharpoonup u \text{ em } L^2(\Omega) \tag{4.57}$$

e

$$u_{k_m} \xrightarrow{*} u \text{ em } BV(\Omega) , \tag{4.58}$$

para  $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

Por fim, mostramos que o limite  $u \in \mathcal{S}(y)$ . Pela Hipótese 4.5 o operador  $F$  é fracamente seqüencialmente fechado, isto é, o gráfico de  $F$  é fechado na topologia fraca de  $L^2(\Omega)$ . Como  $u_{k_m} \rightharpoonup u$  em  $L^2(\Omega)$ ,  $(u_{k_m}) \in \mathcal{D}(F)$  e por (4.47) sabemos que  $F(u_{k_m}) \rightarrow y$ , pelo teorema do gráfico fechado (Teorema A.13) concluimos que  $u \in \mathcal{S}(y)$  e  $F(u) = y$ , isto é,  $u \in \mathcal{S}(y)$ . Deixamos claro que o elemento limite possui as mesmas propriedades dos elementos  $u_k$  da seqüência gerada pelo Algoritmo 1 do qual extraímos a subseqüência  $(u_k)$  e portanto  $u \in \overline{\mathcal{D}(F) \cap \mathcal{B}_\rho(\bar{u})}$ .

É claro que se  $\mathcal{S}(y) \cap \overline{\mathcal{B}_\rho(\bar{u})} = \{\bar{u}\}$ , a subseqüência  $u_{k_m} \xrightarrow{*} \bar{u}$  em  $BV(\Omega)$ .  $\square$

Quando procuramos uma solução para um problema com dados exatos através do Algoritmo 1 não nos deparamos com dificuldades relacionadas a um critério de parada, necessário para resultados de semi-convergência. Com uma boa escolha para uma aproximação inicial o resultado anterior garante a eficiência do Algoritmo 1 sem nos preocuparmos com o número de iterações. Esse fato não se aplica para problemas com dados inexatos.

Quando os dados coletados apresentam perturbações, ainda que seja conhecido o nível de ruído  $\delta$  e os dados inexatos sejam controlados da forma  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ , exibimos apenas um resultado de semi-convergência; isto é, garantimos estabilidade do algoritmo até um certo passo e a partir desse índice ele torna-se instável. Para contornar essa dificuldade utilizamos o princípio da discrepância como critério de parada e definimos o índice de parada  $k^*$  como o menor inteiro tal que a desigualdade

$$\|F(u_{k^*}) - y^\delta\| \leq \tau \delta \quad (4.59)$$

é satisfeita, com  $\tau > 1$ . Tomamos  $u_{k^*}$  como a solução regularizada para o problema com dados inexatos.

No próximo teorema testamos a robustez do método investigado para dados com ruído. Caso seja possível melhorar as estimativas para o nível ruído, construindo uma seqüência  $(\delta_m)$  que tende para zero, damos condições suficientes para garantir a existência de uma subseqüência convergente gerada pelo Algoritmo 1 com o critério de parada (4.59), para um  $\tau$  específico; além disso, mostramos que  $k^*$  é finito. No final da demonstração reunimos os detalhes da mesma e atualizamos o algoritmo exibido no início do capítulo.

**Teorema 4.9** (Semi-convergência). *Seja  $F$  um operador sob a Hipótese 4.5 e tome  $\gamma < \min\left\{\frac{1}{\eta}, \frac{\rho}{2}\right\}$  para  $\eta, \rho$  como em (4.16),  $0 < \underline{\alpha} \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}$ ,  $h(\bar{u}) < \infty$  e os valores iniciais  $u_0, \xi_0 \in L^2(\Omega)$  satisfazendo  $D_h^{\xi_0}(\bar{u}, u_0) < \frac{\gamma^2}{8}$  para um  $\bar{u} \in \mathcal{S}(y)$ . Sejam  $\delta_m > 0$  para todo índice  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\delta_m \rightarrow 0$  e*

os correspondentes índices de parada  $k_m^*$  encontrados através do critério (4.59) com

$$\tau > \frac{1 + \eta\gamma}{1 - \eta\gamma}. \quad (4.60)$$

Então para cada  $\delta_m$  o índice de parada é finito e toda subsequência de  $(u_{k_m^*})$  tem uma subsequência convergindo para um  $u \in \mathcal{S}(y)$  na topologia fraco-\* de  $BV(\Omega)$ . Além disso, se  $\mathcal{S}(y) \cap \overline{\mathcal{B}_\rho(\bar{u})} = \{\bar{u}\}$ ,  $u_{k_m^*} \xrightarrow{*} \bar{u}$  em  $BV(\Omega)$ .

**Demonstração:** Dividimos esta demonstração em cinco passos devido sua extensão.

*Passo 1:* Tome  $\delta > 0$  arbitrário e o fixamos.

Em seguida tomamos  $k^*$  o correspondente índice de parada fornecido por (4.59), aqui ele pode ser infinito.

Para todo  $k$  tal que  $k < k^* - 1$ , isto é, aqueles que não satisfazem (4.59) vale

$$\left\| F(u_k) - y^\delta \right\| > \tau\delta. \quad (4.61)$$

Vamos mostrar por indução sobre  $k$  que cada elemento da seqüência  $(u_k)$  está próximo da solução  $\bar{u}$ .

Primeiro verificamos para  $k = 0$ . Para isso reescrevemos a hipótese feita aos dados iniciais  $u_0, \xi_0 \in L^2(\Omega)$  como

$$2\sqrt{2D_h^{\xi_0}(\bar{u}, u_0)} < \gamma.$$

Supomos que essa desigualdade seja válida para todo  $k$ . Portanto, a hipótese de indução para o par  $u_k, \xi_k$  dados pelo Algoritmo 1 é

$$2\sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} < \gamma. \quad (4.62)$$

Vamos mostrar que ela vale para o par  $u_{k+1}, \xi_{k+1}$ .

Por definição dos iterados em (4.3), para um passo  $k$  qualquer temos que  $u_{k+1}$  é minimizador do funcional

$$J_{\alpha_k}^\delta(u) = \frac{1}{2} \left\| F(u) - y^\delta \right\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u, u_k). \quad (4.63)$$

Em particular para  $\bar{u}$  tal que  $F(\bar{u}) = y$ , visto que  $u_{k+1}$  é o minimizador do funcional acima, vale

$$J_{\alpha_k}^\delta(u_{k+1}) \leq J_{\alpha_k}^\delta(\bar{u}).$$



Reescrevendo a desigualdade acima com a definição do funcional de regularização obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta \right\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) &\leq \frac{1}{2} \left\| F(\bar{u}) - y^\delta \right\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) \\ &= \frac{1}{2} \left\| y - y^\delta \right\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) \\ &< \frac{1}{2} \delta^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) . \end{aligned}$$

Lembrando que para todo  $k < k^* - 1$  vale (4.61), temos

$$\frac{1}{2} (\tau \delta)^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) < \frac{1}{2} \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta \right\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) .$$

Combinando essa desigualdade com a anterior obtemos

$$\frac{1}{2} (\tau \delta)^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) < \frac{1}{2} \delta^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) .$$

Associando os termos semelhantes no lado esquerdo da desigualdade acima segue

$$\frac{1}{2} \delta^2 (\tau^2 - 1) + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) < \alpha_k D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) .$$

Como por definição  $\tau > 1$  temos  $(\tau^2 - 1) > 0$ . Usando esse fato e tomando  $\alpha > 0$ , para todo  $k$

$$D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) < D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k) . \quad (4.64)$$

Pelo Lema 4.4 temos

$$\frac{1}{2} \|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq D_h^{\xi_k}(u_{k+1}, u_k) .$$

Combinando essa relação com a desigualdade (4.64) obtemos

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Omega)} < \sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} . \quad (4.65)$$

Novamente pelo Lema 4.4 vale

$$\|\bar{u} - u_k\|_{L^2(\Omega)} < \sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} . \quad (4.66)$$

Por fim, combinando os resultados (4.65) e (4.66) concluímos

$$\begin{aligned}
\|u_{k+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} &= \|u_{k+1} - u_k - (\bar{u} - u_k)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u_{k+1} - u_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{u} - u_k\|_{L^2(\Omega)} \\
&< \sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} + \sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} \\
&= 2\sqrt{2D_h^{\xi_k}(\bar{u}, u_k)} \\
&< \gamma.
\end{aligned}$$

Note que a última desigualdade provém da hipótese de indução (4.62).

Como  $\gamma < \rho$  concluímos pela estimativa acima que  $\|u_{k+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} < \rho$  e portanto  $u_{k+1} \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u})$ .

Para finalizar o *Passo 1* devemos aplicar o Lema 4.3, antes verificaremos sua hipótese.

Como por hipótese (4.16) é válido, aplicamos tal resultado para  $u = u_{k+1}$  e  $v = \bar{u}$ ; utilizando (4.61) verificamos a condição de não linearidade (4.7)

$$\begin{aligned}
\left\| y^\delta - F(u_{k+1}) - F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1}) \right\| &= \left\| y^\delta - F(\bar{u}) + F(\bar{u}) - F(u_{k+1}) - F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1}) \right\| \\
&\leq \left\| y^\delta - y \right\| + \left\| F(\bar{u}) - F(u_{k+1}) - F'(u_{k+1})(\bar{u} - u_{k+1}) \right\| \\
&\leq \delta + \eta \|u_{k+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|F(u_{k+1}) - F(\bar{u})\| \\
&< \delta + \eta \gamma \|F(u_{k+1}) - y\| \\
&= \delta + \eta \gamma \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta - (y - y^\delta) \right\| \\
&\leq \delta + \eta \gamma \left( \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta \right\| + \left\| y - y^\delta \right\| \right) \\
&\leq \delta + \eta \gamma \left( \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta \right\| + \delta \right) \\
&= \delta + \eta \gamma \delta + \eta \gamma \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta \right\| \\
&= \frac{1}{\tau} (1 + \eta \gamma) \delta \tau + \eta \gamma \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta \right\| \\
&< \frac{1}{\tau} (1 + \eta \gamma) \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta \right\| + \eta \gamma \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta \right\| \\
&= \left[ \frac{1}{\tau} (1 + \eta \gamma) + \eta \gamma \right] \left\| F(u_{k+1}) - y^\delta \right\|.
\end{aligned}$$

Portanto, para  $k < k^* - 1$  vale a condição de não linearidade (4.7) e por sua vez a hipótese do Lema 4.3 é satisfeita para a constante

$$c = \frac{1}{\tau} (1 + \eta \gamma) + \eta \gamma. \quad (4.67)$$

Note que, de fato, tomando  $c$  como definido acima, temos  $0 < c < 1$  devido a escolha de  $\tau$  dado por (4.60).

Reescrevendo o resultado (4.8) obtido pelo Lema 4.3, vale

$$D_h^{\xi^{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1}) + D_h^{\xi^k}(u_{k+1}, u_k) + \frac{1-c}{\alpha_k} \left\| y^\delta - F(u_{k+1}) \right\|^2 \leq D_h^{\xi^k}(\bar{u}, u_k), \quad (4.68)$$

para a constante  $c$  dado em (4.67).

Em particular, uma vez que todos os termos da relação acima são positivos, vale

$$D_h^{\xi^{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1}) \leq D_h^{\xi^k}(\bar{u}, u_k).$$

Por fim, para concluir que a hipótese de indução do *Passo 1* vale para  $k+1$ , multiplicamos ambos os lados da desigualdade acima por 8, em seguida extraímos a raiz quadrada e aplicando a hipótese de indução (4.62) encontramos

$$D_h^{\xi^{k+1}}(\bar{u}, u_{k+1}) < \frac{\gamma^2}{8}. \quad (4.69)$$

*Passo 2:* Vamos verificar que o índice de parada  $k^*$  é finito. Na demonstração do passo anterior não exigimos que  $k^*$  seja finito e concluimos que o Lema 4.3 é válido para todo  $k < k^* - 1$  e por sua vez (4.68) é satisfeito. Sendo assim, somamos essa desigualdade para cada  $k$ , ou melhor, para os primeiros  $k^* - 1$ .

$$\sum_{i=0}^{k^*-2} D_h^{\xi^{i+1}}(\bar{u}, u_{i+1}) + \sum_{i=0}^{k^*-2} D_h^{\xi^i}(u_{i+1}, u_i) + \sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1-c}{\alpha_i} \left\| y^\delta - F(u_{i+1}) \right\|^2 \leq \sum_{i=0}^{k^*-2} D_h^{\xi^i}(\bar{u}, u_i). \quad (4.70)$$

Observando o primeiro termo do lado esquerdo, fazemos uma mudança de variável  $j = i + 1$  e o reescrevemos como

$$\sum_{j=1}^{k^*-1} D_h^{\xi^j}(\bar{u}, u_j) = \sum_{j=1}^{k^*-2} D_h^{\xi^j}(\bar{u}, u_j) + D_h^{\xi^{k^*-1}}(\bar{u}, u_{k^*-1}).$$

Para o somatório do lado direito retiramos o primeiro termo do somatório, logo

$$\sum_{i=0}^{k^*-2} D_h^{\xi^i}(\bar{u}, u_i) = D_h^{\xi^0}(\bar{u}, u_0) + \sum_{i=1}^{k^*-2} D_h^{\xi^i}(\bar{u}, u_i).$$

Vistas essas observações, podemos cancelar os termos semelhantes de cada lado da desi-

gualdade, assim (4.70) é igual a

$$D_h^{\xi_{k^*-1}}(\bar{u}, u_{k^*-1}) + \sum_{i=0}^{k^*-2} D_h^{\xi_i}(u_{i+1}, u_i) + \sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1-c}{\alpha_i} \left\| y^\delta - F(u_{i+1}) \right\|^2 \leq D_h^{\xi_0}(\bar{u}, u_0) .$$

Como por hipótese o lado direito da desigualdade acima é limitado por  $\frac{\gamma^2}{8}$  e do lado esquerdo cada termo é positivo, segue

$$(1-c) \sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1}{\alpha_i} \left\| y^\delta - F(u_{i+1}) \right\|^2 < \frac{\gamma^2}{8} . \quad (4.71)$$

Vamos mostrar que o lado esquerdo estima uma quantidade que depende do parâmetro  $k^*$ , e por conseguinte mostraremos que ele é finito.

De fato, através do critério (4.61) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1}{\alpha_i} \left\| y^\delta - F(u_{i+1}) \right\|^2 &> \sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1}{\alpha_i} (\tau\delta)^2 \\ &= (\tau\delta)^2 \sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1}{\alpha_i} \\ &\geq \frac{\tau^2\delta^2}{\max_{k \leq k^*-2} \alpha_k} \sum_{i=0}^{k^*-2} 1 \\ &= \frac{\tau^2\delta^2(k^*-1)}{\bar{\alpha}} . \end{aligned} \quad (4.72)$$

Como o lado esquerdo de (4.72) é estimado por (4.71) temos

$$\frac{\tau^2\delta^2(k^*-1)}{\bar{\alpha}} < \frac{\gamma^2}{8(1-c)} .$$

Assim concluímos que  $k^*$  é finito mediante uma modificação na relação acima, como

$$k^* < \left( \frac{\gamma}{\tau\delta} \right)^2 \frac{\bar{\alpha}}{8(1-c)} + 1 .$$

*Passo 3:* Neste passo vamos provar um resultado necessário para o próximo passo, a saber mostramos que a série abaixo é finita,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i} \left\| y^\delta - F(u_{i+1}) \right\|^2 < \infty . \quad (4.73)$$

Na verdade só falta concluir isso, pois pela desigualdade (4.71) já temos

$$\sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1}{\alpha_i} \left\| y^\delta - F(u_{i+1}) \right\|^2 < \frac{\gamma^2}{8(1-c)}, \quad (4.74)$$

com  $(1-c) > 0$ .

Portanto, tomando o limite quando  $k^*$  tende a infinito concluimos (4.73).

*Passo 4:* Nesse passo vamos mostrar que o funcional  $h$  aplicado nos elementos da seqüência  $(u_{k^*})$  é uniformemente limitado.

Sabemos que  $D_h^{\xi_{k^*}}(\bar{u}, u_{k^*}) \geq 0$ , para  $\xi_{k^*} \in \partial h(u_{k^*})$  dado por (4.4) e (4.59). Sendo assim,

$$\begin{aligned} h(u_{k^*}) &\leq h(\bar{u}) - \langle \xi_{k^*}, \bar{u} - u_{k^*} \rangle \\ &\leq h(\bar{u}) + |\langle \xi_{k^*}, \bar{u} - u_{k^*} \rangle|. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Usando (4.5) temos

$$\xi_{k^*} = \xi_0 - \sum_{l=0}^{k^*-1} \frac{1}{\alpha_l} F'(u_{l+1})^* \left( F(u_{l+1}) - y^\delta \right). \quad (4.76)$$

Substituindo essa igualdade na relação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} (4.75) &= h(\bar{u}) + \left| \left\langle \xi_0 - \sum_{l=0}^{k^*-1} \frac{1}{\alpha_l} F'(u_{l+1})^* \left( F(u_{l+1}) - y^\delta \right), \bar{u} - u_{k^*} \right\rangle \right| \\ &= h(\bar{u}) + \left| \langle \xi_0, \bar{u} - u_{k^*} \rangle - \left\langle \sum_{l=0}^{k^*-1} \frac{1}{\alpha_l} F'(u_{l+1})^* \left( F(u_{l+1}) - y^\delta \right), \bar{u} - u_{k^*} \right\rangle \right| \\ &= h(\bar{u}) + \left| \langle \xi_0, \bar{u} - u_{k^*} \rangle - \sum_{l=0}^{k^*-1} \frac{1}{\alpha_l} \left\langle F'(u_{l+1})^* \left( F(u_{l+1}) - y^\delta \right), \bar{u} - u_{k^*} \right\rangle \right| \\ &\leq h(\bar{u}) + |\langle \xi_0, \bar{u} - u_{k^*} \rangle| + \sum_{l=0}^{k^*-1} \frac{1}{\alpha_l} \left| \left\langle F'(u_{l+1})^* \left( F(u_{l+1}) - y^\delta \right), \bar{u} - u_{k^*} \right\rangle \right| \\ &= h(\bar{u}) + |\langle \xi_0, \bar{u} - u_{k^*} \rangle| + \sum_{l=0}^{k^*-1} \frac{1}{\alpha_l} \left| \left\langle F(u_{l+1}) - y^\delta, F'(u_{l+1})(\bar{u} - u_{k^*}) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \\ &= h(\bar{u}) + |\langle \xi_0, \bar{u} - u_{k^*} \rangle| + \sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1}{\alpha_i} \left| \left\langle F(u_{i+1}) - y^\delta, F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{k^*}) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_{k^*-1}} \left| \left\langle F(u_{k^*}) - y^\delta, F'(u_{k^*})(\bar{u} - u_{k^*}) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right|. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Vamos estimar separadamente os três últimos termos da desigualdade acima.

Em primeiro lugar estimamos o segundo termo de (4.77), assim

$$\begin{aligned} |\langle \xi_0, \bar{u} - u_{k^*} \rangle| &\leq \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u} - u_{k^*}\|_{L^2(\Omega)} \\ &< \rho \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Note que para concluir a estimativa acima é necessário mostrar que  $\|\bar{u} - u_{k^*}\|_{L^2(\Omega)} < \rho$ , para ver isso procedemos como no *Passo 1*. Como no passo  $k^* - 1$  o elemento  $u_{k^*}$  minimiza o funcional  $J_{\alpha_k}^\delta(\cdot)$  dado em (4.63), vale  $J_{\alpha_k}^\delta(u_{k^*}) \leq J_{\alpha_k}^\delta(\bar{u})$ . Aplicando a definição do problema regularizado temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| F(u_{k^*}) - y^\delta \right\|^2 + \alpha_{k^*-1} D_h^{\xi_{k^*-1}}(u_{k^*}, u_{k^*-1}) &\leq \frac{1}{2} \left\| F(\bar{u}) - y^\delta \right\|^2 + \alpha_{k^*-1} D_h^{\xi_{k^*-1}}(\bar{u}, u_{k^*-1}) \\ &= \frac{1}{2} \left\| y - y^\delta \right\|^2 + \alpha_{k^*-1} D_h^{\xi_{k^*-1}}(\bar{u}, u_{k^*-1}) \\ &< \frac{1}{2} \delta^2 + \alpha_{k^*-1} D_h^{\xi_{k^*-1}}(\bar{u}, u_{k^*-1}). \end{aligned}$$

Como  $\alpha_{k^*-1} > 0$  e ambos os termos do lado esquerdo são positivos, vale

$$\begin{aligned} D_h^{\xi_{k^*-1}}(u_{k^*}, u_{k^*-1}) &< \frac{\delta^2}{2\alpha_{k^*-1}} + D_h^{\xi_{k^*-1}}(\bar{u}, u_{k^*-1}) \\ &< \frac{\delta^2}{2\alpha_{k^*-1}} + \frac{\gamma^2}{8}. \end{aligned}$$

Para a última desigualdade aplicamos (4.69) para  $k = k^* - 2$ , uma vez que vale para todo  $k < k^* - 1$ .

Unindo esse resultado com (4.14), ou seja,

$$\frac{1}{2} \|u_{k^*} - u_{k^*-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq D_h^{\xi_{k^*-1}}(u_{k^*}, u_{k^*-1}),$$

obtemos

$$\|u_{k^*} - u_{k^*-1}\|_{L^2(\Omega)} < \left( \frac{\delta^2}{\alpha_{k^*-1}} + \frac{\gamma^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Com isso, estimamos

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - u_{k^*}\|_{L^2(\Omega)} &= \|\bar{u} - u_{k^*-1} - (u_{k^*} - u_{k^*-1})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\bar{u} - u_{k^*-1}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{k^*} - u_{k^*-1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &< \gamma + \left( \frac{\delta^2}{\alpha_{k^*-1}} + \frac{\gamma^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Com a escolha de um  $\delta$  suficientemente pequeno, a saber

$$\delta < \bar{\delta} = \sqrt{\frac{3}{4}\gamma^2\alpha}, \quad (4.79)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - u_{k^*}\|_{L^2(\Omega)} &< \gamma + \left(\frac{\delta^2}{\alpha_{k^*-1}} + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \gamma + \left(\frac{3\gamma^2\alpha}{4\alpha_{k^*-1}} + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \gamma + \left(\frac{3\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \gamma + (\gamma^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\gamma \\ &< \rho. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Em segundo lugar, estimamos o terceiro termo de (4.77). Vamos aplicar os resultados obtidos pelos passos anteriores. Em especial, no *Passo 1*, assumindo que a hipótese de indução (4.62) era válida para  $k < k^* - 1$  provamos a validade para  $k + 1$ . Portanto, os resultados desse passo valem para todo  $k \leq k^* - 1$ .

A estimativa deste passo é verificada para  $0 \leq i \leq k^* - 2$  em virtude do somatório em que ela aparece; pelo *Passo 2* esse somatório é finito. Para tais índices  $i$  vale

$$\left| \left\langle F(u_{i+1}) - y^\delta, F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{k^*}) \right\rangle \right| \leq \|F(u_{i+1}) - y^\delta\| \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{k^*})\|. \quad (4.81)$$

Observamos que a escolha dos índices  $i \leq k^* - 2$  é equivalente a  $i + 1 \leq k^* - 1$ , satisfazendo a condição do *Passo 1*.

Para estimar o segundo termo do lado direito de (4.81) observamos que

$$\begin{aligned} \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{k^*})\| &= \|F'(u_{i+1})[\bar{u} - u_{i+1} - (u_{k^*} - u_{i+1})]\| \\ &\leq \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{i+1})\| + \|F'(u_{i+1})(u_{k^*} - u_{i+1})\|. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Uma vez obtidas estimativas para os dois termos do lado direito de (4.82) obtemos a estimativa para (4.81). Para estimar o primeiro termo utilizamos a Hipótese 4.5 e para o segundo usamos o Lema 4.3.

Pelo *Passo 1* obtemos  $\|\bar{u} - u_{i+1}\|_{L^2(\Omega)} < \gamma < \rho$  e por sua vez  $u_k \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u})$ , para todo  $0 \leq$

$i \leq k^* - 2$ . Encontramos também em (4.80) a relação  $\|\bar{u} - u_{k^*}\|_{L^2(\Omega)} < \rho$  e assim  $u_{k^*} \in \mathcal{B}_\rho(\bar{u})$ . Verificado isso podemos aplicar a Hipótese 4.5 na versão apresentada em (4.17) para  $u = u_{i+1}$  e  $v = u_{k^*}$ .

Observamos ainda que

$$\begin{aligned}
\|u_{i+1} - u_{k^*}\|_{L^2(\Omega)} &= \|u_{i+1} - \bar{u} - (u_{k^*} - \bar{u})\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u_{i+1} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{k^*} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \\
&< \gamma + \rho \\
&< \rho + \rho \\
&= 2\rho .
\end{aligned}$$

Note que na primeira desigualdade estrita usamos a estimativa conhecida pelo *Passo 1*, reescrita no parágrafo anterior, e a relação (4.80).

Dessa maneira segue

$$\begin{aligned}
\|F'(u_{i+1})(u_{k^*} - u_{i+1})\| &\leq \left(1 + \eta \|u_{i+1} - u_{k^*}\|_{L^2(\Omega)}\right) \|F(u_{i+1}) - F(u_{k^*})\| \\
&< (1 + 2\eta\rho) \|F(u_{i+1}) - F(u_{k^*})\| \\
&= (1 + 2\eta\rho) \left\|F(u_{i+1}) - y^\delta - \left(F(u_{k^*}) - y^\delta\right)\right\| \\
&\leq (1 + 2\eta\rho) \left(\|F(u_{i+1}) - y^\delta\| + \|F(u_{k^*}) - y^\delta\|\right) \\
&\leq (1 + 2\eta\rho) \left(\|F(u_{i+1}) - y^\delta\| + \|F(u_{i+1}) - y^\delta\|\right) \\
&= 2(1 + 2\eta\rho) \|F(u_{i+1}) - y^\delta\| . \tag{4.83}
\end{aligned}$$

Note que para obter a última desigualdade utilizamos o Lema 4.2, uma vez que  $i + 1 < k^*$ .

Afim de obter uma estimativa para o segundo termo de (4.82) aplicamos o Lema 4.3. Como foi verificado no *Passo 1*, a hipótese desse lema é válida para todo índice menor que  $k^*$  com constante  $c$  dado em (4.67). Logo

$$\left\|y^\delta - F(u_{i+1}) - F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{i+1})\right\| \leq c \left\|y^\delta - F(u_{i+1})\right\| .$$

Combinando a desigualdade

$$\left\|-F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{i+1}) - \left(F(u_{i+1}) - y^\delta\right)\right\| \geq \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{i+1})\| - \|F(u_{i+1}) - y^\delta\| ,$$



com a anterior, temos

$$\|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{i+1})\| \leq (1+c) \|y^\delta - F(u_{i+1})\|. \quad (4.84)$$

Por fim, através de (4.83) e (4.84), encontramos a seguinte estimativa para (4.82)

$$\begin{aligned} \|F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{k^*})\| &< (1+c) \|y^\delta - F(u_{i+1})\| + 2(1+2\eta\rho) \|F(u_{i+1}) - y^\delta\| \\ &= [(1+c) + 2(1+2\eta\rho)] \|F(u_{i+1}) - y^\delta\| \\ &= (c+3+4\eta\rho) \|F(u_{i+1}) - y^\delta\|. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Por sua vez, a estimativa para (4.82) garante

$$(4.81) < (c+3+4\eta\rho) \|F(u_{i+1}) - y^\delta\|^2.$$

Com isso concluímos a estimativa para o terceiro termo de (4.77), a saber

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1}{\alpha_i} \left| \left\langle F(u_{i+1}) - y^\delta, F'(u_{i+1})(\bar{u} - u_{k^*}) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| &< (c+3+4\eta\rho) \sum_{i=0}^{k^*-2} \frac{1}{\alpha_i} \|F(u_{i+1}) - y^\delta\|^2 \\ &< (c+3+4\eta\rho) \frac{\gamma^2}{8(1-c)}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Note que a última desigualdade foi verificada no *Passo 3*, mais precisamente em (4.74).

O último termo de (4.77) é estimado assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_{k^*-1}} \left| \left\langle F(u_{k^*}) - y^\delta, F'(u_{k^*})(\bar{u} - u_{k^*}) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| &\leq \frac{1}{\alpha_{k^*-1}} \|F(u_{k^*}) - y^\delta\| \|F'(u_{k^*})(\bar{u} - u_{k^*})\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{\alpha}} \|F(u_{k^*}) - y^\delta\| \|F'(u_{k^*})(\bar{u} - u_{k^*})\| \\ &\leq \frac{1}{\underline{\alpha}} \tau \delta \|F'(u_{k^*})(\bar{u} - u_{k^*})\|. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Para as duas últimas desigualdades acima usamos a definição do índice de parada  $k^*$  dado em (4.59) e o fato de  $\underline{\alpha} < \alpha_{k^*-1}$ .

Podemos ainda aplicar (4.17) com  $u = \bar{u}$  e  $v = u_{k^*}$  na desigualdade acima e em seguida

(4.80), dessa forma

$$\begin{aligned}
(4.87) \quad &\leq \frac{\tau\delta}{\underline{\alpha}} \left(1 + \eta \|\bar{u} - u_{k^*}\|_{L^2(\Omega)}\right) \|F(\bar{u}) - F(u_{k^*})\| \\
&< \frac{\tau\delta}{\underline{\alpha}} (1 + \eta\rho) \|F(\bar{u}) - F(u_{k^*})\| \\
&= \frac{\tau\delta}{\underline{\alpha}} (1 + \eta\rho) \left\| y - y^\delta - \left(F(u_{k^*}) - y^\delta\right) \right\| \\
&\leq \frac{\tau\delta(1 + \eta\rho)}{\underline{\alpha}} \left( \|y - y^\delta\| + \|F(u_{k^*}) - y^\delta\| \right) \\
&\leq \frac{\tau\delta(1 + \eta\rho)}{\underline{\alpha}} (\delta + \tau\delta) \\
&= \frac{\tau\delta^2(1 + \eta\rho)(1 + \tau)}{\underline{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Note que na última desigualdade usamos (4.59). Em resumo

$$\frac{1}{\alpha_{k^*-1}} \left| \left\langle F(u_{k^*}) - y^\delta, F'(u_{k^*})(\bar{u} - u_{k^*}) \right\rangle_{\mathcal{H}} \right| < \frac{\tau\delta^2(1 + \eta\rho)(1 + \tau)}{\underline{\alpha}}. \quad (4.88)$$

Com isso, terminamos as estimativas para todos os termos de (4.77) e portanto, a partir (4.75), vale

$$h(u_{k^*}) < h(\bar{u}) + \rho \|\xi_0\|_{L^2(\Omega)} + \frac{(c + 3 + 4\eta\rho)\gamma^2}{(1 - c)8} + \frac{\tau\delta^2(1 + \eta\rho)(1 + \tau)}{\underline{\alpha}}, \quad (4.89)$$

com a constante  $c$  dada em (4.67). Tal estimativa provém das anteriores como em (4.78), (4.86) e (4.88), na ordem utilizada.

Por sua vez, concluímos a limitação uniforme da seqüência  $(h(u_{k^*}))$  para quaisquer  $\delta < \bar{\delta}$  suficientemente pequeno, em que  $\bar{\delta}$  é dado em (4.79).

*Passo 5:* No passo anterior concluímos que para quaisquer  $\delta < \bar{\delta}$  suficientemente pequeno definido em (4.79) vale

$$|h(u_{k^*})| = h(u_{k^*}) < N, \quad (4.90)$$

com  $N > 0$  dado pelo lado direito da Equação (4.89).

Pela definição do funcional  $h$  em (4.13), temos

$$\|u_{k^*}\|_{L^2(\Omega)} + |u_{k^*}|_{BV(\Omega)} \leq R, \quad (4.91)$$

com  $R > 0$  e a seqüência  $(u_{k^*}) \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  extraída do Algoritmo 1 respeitando o critério de parada (4.59).

Mediante esse fato, tomamos uma seqüência  $(\delta_m)$  tais que  $\delta_m > 0$  para cada  $m$  e  $\delta_m \rightarrow 0$ .

Definimos  $(k_m^*)$  a seqüência de números naturais correspondente aos índices de parada definidos por

$$k_m^* = \min \left\{ k_m \mid \left\| F(u_{k_m}) - y^{\delta_m} \right\| \leq \tau \delta_m \right\}, \quad (4.92)$$

com  $\tau$  dado em (4.60).

Assim a Equação (4.91) vale para os índices  $k_m^*$  e através do Teorema C.6 de Banach-Alaoglu temos que  $\overline{\mathcal{B}_R(0)}$  é fraco-\* compacta em  $L^2(\Omega)$  e em  $BV(\Omega)$ . Portanto, podemos extrair uma subseqüência  $(u_{k_m^*, l})$  que é fraco-\* convergente em  $L^2(\Omega)$  para um elemento  $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ . Novamente utilizamos o teorema de Banach-Alaoglu para obter uma subseqüência fraco-\* convergente em  $BV(\Omega)$ , no entanto aplicamos esse resultado na subseqüência  $(u_{k_m^*, l})$  que possui as mesmas propriedades de seqüência  $(u_{k_m^*})$ . Logo, a subseqüência  $(u_{k_m^*, l, n})$  é fraco-\* convergente em  $BV(\Omega)$  para o mesmo elemento que a subseqüência  $(u_{k_m^*, l})$  converge.

A fim de simplificar a notação definimos  $u_n := u_{k_m^*, l, n}$ . Em resumo, observando que  $L^2(\Omega)$  é um espaço reflexivo, temos

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^2(\Omega) \quad (4.93)$$

e

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } BV(\Omega), \quad (4.94)$$

para  $u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ .

Por fim, falta mostrar que o limite  $u \in \mathcal{S}(y)$ . Antes fazemos a observação de que a seqüência  $(F(u_{k_m^*}))$  converge para o dado exato  $y$  na norma do espaço  $\mathcal{H}$ . De fato,

$$\begin{aligned} \|F(u_{k_m^*}) - y\| &= \left\| F(u_{k_m^*}) - y^{\delta_m} + y^{\delta_m} - y \right\| \\ &\leq \left\| F(u_{k_m^*}) - y^{\delta_m} \right\| + \left\| y^{\delta_m} - y \right\| \\ &\leq \tau \delta_m + \delta_m \\ &= (1 + \tau) \delta_m. \end{aligned}$$

Note que para verificar a última desigualdade usamos o critério de parada dado em (4.92) e  $\left\| y^{\delta_m} - y \right\| \leq \delta_m$  para todo  $m$ .

Como  $\delta_m \rightarrow 0$ , quando  $m \rightarrow \infty$ , temos  $\left\| F(u_{k_m^*}) - y \right\| \rightarrow 0$ , isto é,

$$F(u_{k_m^*}) \rightarrow y. \quad (4.95)$$

Essa convergência também vale para as subseqüências de  $(u_{k_m^*})$ , em particular, vale para  $(u_n)$ .

Pela Hipótese 4.5 o operador  $F$  é fracamente seqüencialmente fechado, isto é, o gráfico de  $F$  é fechado na topologia fraca de  $L^2(\Omega)$ . Como  $u_n \rightharpoonup u$  em  $L^2(\Omega)$ ,  $(u_n) \in \mathcal{D}(F)$  e por (4.95) sabemos que  $F(u_n) \rightarrow y$ , pelo Teorema do gráfico fechado (Teorema A.13) concluímos que  $u \in \mathcal{S}(y)$  e  $F(u) = y$ . Deixamos claro que o elemento limite  $u$  possui as mesmas propriedades dos elementos  $u_k$  da seqüência gerada pelo Algoritmo 1 e portanto  $u \in \mathcal{D}(F) \cap \overline{\mathcal{B}_\rho(\bar{u})}$ .

É claro que se  $\mathcal{S}(y) \cap \overline{\mathcal{B}_\rho(\bar{u})} = \{\bar{u}\}$ , a subseqüência  $u_n \xrightarrow{*} \bar{u}$  em  $BV(\Omega)$ .  $\square$

Esse resultado nos permite fazer uma adaptação do Algoritmo 1 para dados com ruído, impondo o critério de parada 4.59. Resumindo os resultados até aqui expostos formulamos o seguinte algoritmo:

---

**Algoritmo 2** Tikhonov generalizado com distância de Bregman com critério de parada

---

**Dados:**  $u_0 \in \mathcal{D}(F) \cap \text{dom } h$ ,  $\xi_0 \in \partial h(u_0)$ ,  $\eta, \gamma, \delta < \bar{\delta}$

1:  $k = 0$

2:  $\tau > (1 + \eta\gamma)(1 - \eta\gamma)^{-1}$

3:  $\alpha_k > 0$

4: **enquanto**  $\|F(u_k) - y^\delta\|^2 > \tau\delta$  **faça**

5:  $u_{k+1} \in \text{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \|F(u) - y^\delta\|^2 + \alpha_k D_h^{\xi_k}(u, u_k) \right\}$

6:  $\xi_{k+1} = \xi_k - \frac{1}{\alpha_k} F'(u_{k+1})^* (F(u_{k+1}) - y^\delta)$

7:  $k = k + 1$

8:  $\alpha_k > 0$

9: **fim enquanto**

---

## 5 Conclusão

Uma técnica difundida para resolução de equações mal-postas é o método de Tikhonov. Motivados por essa técnica, na introdução deste trabalho apresentamos uma generalização para esse método de regularização, o qual consiste em utilizar uma penalização convexa ao invés da penalização quadrática feita por Tikhonov. Essa generalização permitiu desenvolver ferramentas teóricas em espaços de Banach e utilizar penalizações não diferenciáveis.

Ao longo desta pesquisa fizemos uma análise quantitativa do método investigado, buscando estimativas para o erro entre uma solução regularizada e uma solução  $h$ -minimizante. Usamos o conceito de *distância de Bregman* para mensurar os erros obtidos, a noção de convergência foi dada nesse sentido.

Concluimos que a distância de Bregman é uma ferramenta eficiente na obtenção de taxas de convergência, ademais, o método de regularização com penalização convexa concorda com a teoria clássica de Tikhonov. As taxas extraídas no sentido da distância de Bregman são idênticas às obtidas por técnicas utilizadas anteriormente no método de Tikhonov. Além disso, um funcional convexo devidamente escolhido induz a regularização de máxima entropia e de variação limitada. Esses dois métodos de regularização, no caso linear, apresentam melhores taxas de convergência em relação as obtidas por diferentes técnicas, [Res05].

Para operadores lineares definidos de um espaço de Banach num espaço de Hilbert encontramos taxas de convergência na ordem  $\mathcal{O}(\delta)$ , para dados com ruído e com um parâmetro de regularização  $\alpha$  escolhido *a priori* dependendo de  $\delta$ . Para dados exatos a taxa de convergência é dada por  $\mathcal{O}(\alpha)$ . Ambas as taxas foram obtidas com o auxílio da primeira condição de fonte proposta. As taxas são preservadas para variações do modelo regularizado. Em especial para penalização exata, sob certas condições, mostramos que uma solução regularizada  $u_\alpha^\delta$  é uma solução  $h$ -minimizante. Damos destaque para as limitações obtidas no erro: dependência de  $\alpha$ ,  $\omega$  proveniente da condição de fonte e  $\delta$  quando o dado possui ruído. Em suma, sabemos quão boa uma solução regularizada é sem a necessidade de conhecer a solução exata do problema.

Buscando estimativas no mesmo contexto anterior e admitindo uma condição de fonte mais forte podemos relaxar a exigência  $y \in \mathcal{R}(F)$ . Na limitação para o erro aparecem as distâncias de Bregman do lado direito da estimativa. Nesse caso obtemos taxas de convergência adicionando condições a penalização. Por exemplo: supondo  $h$  duplamente diferenciável encontramos as taxas  $\mathcal{O}\left(\frac{4}{3}\right)$  e  $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$  para dados com ruído e exatos, respectivamente.

Para operadores não lineares definidos entre espaços de Banach encontramos as mesmas taxas de convergência obtidas no contexto linear, a saber  $\mathcal{O}\left(\delta\right)$  e  $\mathcal{O}\left(\alpha\right)$ . Essas taxas foram obtidas assumindo uma condição de fonte para problemas não lineares semelhante a primeira condição de fonte imposta no caso linear. Um resultado interessante obtido, no contexto referido, foi o cálculo da condição de otimalidade de primeira ordem para o problema regularizado com uma penalização convexa não diferenciável. Em particular, esse resultado nos permitiu obter uma estimativa entre duas soluções regularizadas, para problemas com e sem a presença de ruído, com a taxa da ordem  $\mathcal{O}\left(\delta\right)$ .

Admitindo uma condição de fonte mais forte, para o caso não linear, encontramos limitações para o erro assim como no caso linear. Novamente assumindo  $h$  duplamente diferenciável encontramos taxas da ordem  $\mathcal{O}\left(\frac{4}{3}\right)$  e  $\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)$ . Evidentemente uma condição mais forte fornece melhores resultados.

Na sequência introduzimos um método iterativo. Apresentamos um algoritmo conceitual e mostramos a monotonicidade decrescente para o resíduo e os iterados. Os resultados derivados para o método iterativo forma obtidos em relação a uma condição de fonte diferente das anteriores. Apresentamos um funcional convexo que possui boas propriedades teóricas, por exemplo, a convergência no sentido da distância de Bregman implica na convergência em  $L^2(\Omega)$ . Com relação a esse funcional garantimos a existência de uma subsequência convergente no sentido fraco-\* na topologia de  $BV(\Omega)$  para uma solução do problema analisado, com dados exatos. Para dados com ruído obtemos um resultado de semi-convergência. Introduzimos um critério de parada pelo princípio da discrepância e mostramos que o mesmo é satisfeito para um número finito de iterações. Foi dado condições suficientes para extrair uma subsequência convergente no mesmo sentido do resultado anterior.

Uma extensão natural deste trabalho é a implementação dos algoritmos desenvolvidos no Capítulo 4 e a realização de testes computacionais para a comparação da eficiência do mesmo em relação aos métodos clássicos conhecidos.

Do ponto de vista teórico, longe de se exaurir aqui, podemos dar continuidade ao estudo adicionando algumas restrições, por exemplo de positividade. Outra extensão seria a generalização do método de Tikhonov envolvendo como penalização o termo  $\|G(u)\|_{\mathbb{Z}}^2$ , para um operador

$G: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Z}$  em que  $\mathcal{Z}$  seja um espaço de Hilbert ou Banach. Em ambos os casos podemos fazer uma análise de convergência baseada em distâncias de Bregman, estudo de condições de fonte ou demais condições que devam ser satisfeitas.

Percebemos que o uso de condições de fonte é imprescindível para obtenção de estimativas no domínio do operador. Podemos fazer um estudo dessas condições impondo mais regularidade, assumindo uma condição de fonte da forma  $(F^*F)^\mu \omega \in \partial h(\bar{u})$  com  $\mu \in [\frac{1}{2}, 1]$ , de modo similar como foi feito no método clássico de Tikhonov. O recente trabalho [Hei08] traz estimativas para o problema clássico de Tikhonov para condições de fonte aproximadas. Motivado por esse artigo podemos buscar estimativas para o problema regularizado com penalização convexa, quando o mesmo comportamento ocorre. Por exemplo, ao invés de assumirmos  $\xi = F^*F\omega$  assumiríamos  $\xi = F^*F\omega + r$ , com  $r \in \mathcal{R}(F^*F)^\perp$ .

A generalização para o método de Tikhonov foi feita apenas no termo de penalização e o termo de ajuste foi preservado. No artigo [LV08] é sugerido uma modificação para o método ROF, penalizando o resíduo com a norma do espaço Hilbert-Sobolev negativo, denotado por  $H^{-s}$  com  $s \in \mathbb{R}$  (para maiores detalhes [DL00]). Para imagens bidimensionais em que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  vale as inclusões  $BV(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^2(\mathbb{R}^2) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^2)$ . Mediante resultados significativos apresentados nesse artigo, uma sugestão para um trabalho futuro é utilizar a norma de  $H^{-s}$  ao invés da norma em  $L^2$  para o termo de ajuste no método de regularização tipo Tikhonov.

Por fim, citamos o artigo [HKPS07] como uma referência natural na linha desta pesquisa. Ao longo deste trabalho assumimos a continuidade para o operador tratado, mesmo numa topologia mais fraca. No artigo citado foi observado numericamente que a violação da hipótese de suavidade do operador não tem efeitos negativos na convergência do método. Isso motivou o estudo de uma análise de convergência com operadores não-suaves. Em resumo, um operador ser não-suave não implica no mal condicionamento do problema. Na prática foi observado que as chances de um operador suave possuir um grau de mal condicionamento grande são muito maiores do que em operadores não-suaves.

Sem dúvida nenhuma com este trabalho foi possível aumentar o nosso conhecimento, com a fixação e revisão de algumas definições, assimilação de novos conceitos e interpretação de resultados clássicos. O estudo realizado neste trabalho nos proporcionou vislumbrar a conexão entre alguns ramos da matemática, tais como análise funcional e otimização. E isso nos motiva cada vez mais a seguir um caminho dentro da matemática aplicada.

## *Bibliografia*

- [AF03] Robert A. Adams and John J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, 2 ed., Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Academic Press, 2003.
- [AFP00] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press, 2000.
- [AH91] U. Amato and W. Hughes, *Maximum entropy regularization of Fredholm integral equations of the first kind*, *Inverse Problems* **7** (1991), 793—808.
- [AV94] R. Acar and Curtis R. Vogel, *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems*, *Inverse Problems* **10** (1994), no. 6, 1217–1229.
- [Bac07] Markus Bachmayr, *Iterative total variation methods for nonlinear inverse problems*, Master’s thesis, Johannes Kepler Universität, Linz, January 2007.
- [Bak92] A. W. Bakushinskii, *The problem of the convergence of the iteratively regularized Gauss-Newton method*, *Comput. Math. Math. Phys.* **32** (1992), 1353–1359.
- [Baz08] Fermim Viloche Bazán, *Fixed-point iterations in determining the Tikhonov regularization parameter*, *Inverse Problems* **24** (2008), 1–15.
- [Bla97] B. Blaschke, *Some Newton type methods for the regularization of nonlinear ill-posed problems*, *Inverse Problems* **13** (1997), 729–753.
- [BNS97] B. Blaschke, Andreas Neubauer, and Otmar Scherzer, *On convergence rates for the iteratively regularized Gauss-Newton method*, *IMA Journal of Numerical Analysis* **17** (1997), 421–436.
- [BO04] Martin Burger and Stanley Osher, *Convergence rates of convex variational regularization*, *Inverse Problems* **20** (2004), 1411–1421.
- [Bre67] Lev Bregman, *The relaxation method for finding the common point of convex sets and its applications to the solution of problems in convex programming.*, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* **7** (1967), 200–217.
- [BSU96] I. Makarovich Berezanskii, Zinovij G. Sheftel, and Georgij F. Us, *Functional analysis vol. ii*, Operator Theory, Advances and Applications Series, vol. 35, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Cio90] Ioana Cioranescu, *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems*, Kluwer Academic, Dordrecht, London, 1990.
- [CK97] G. Chavent and K. Kunisch, *Regularization of linear least squares problems by total bounded variation*, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **2** (1997), 359–376 (electronic).



- [CKP99] E. Casas, Karl Kunisch, and C. Pola, *Regularization by functions of bounded variation and applications to image enhancement*, Applied Mathematics and Optimization **40** (1999), no. 2, 229–257.
- [Cla90] Frank H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, 2 ed., Classics in Applied Mathematics, vol. 5, SIAM, Philadelphia, 1990.
- [dCS06] José Eduardo Souza de Cursi and Rubens Sampaio, *Modelagem e convexidade*, Notas em matemática aplicada, vol. 28, SBMAC, São Paulo, 2006.
- [DL00] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, Functional and variational methods, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [EG92] Lawrence Craig Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.
- [Egg93] P. P. B. Eggermont, *Maximum entropy regularization for Fredholm integral equations of the first kind*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), no. 6, 1557–1576.
- [EHN00] Heinz W. Engl, Martin Hanke, and Andreas Neubauer, *Regularization of inverse problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [EKN89] Heinz W. Engl, Karl Kunisch, and Andreas Neubauer, *Convergence rates for Tikhonov regularisation for non-linear ill-posed problems*, Inverse Problems **5** (1989), 523–540.
- [EL93] Heinz W. Engl and Gerhard Landl, *Convergence rates for maximum entropy regularization*, SIAM Journal on Numerical Analysis **30** (1993), no. 5, 1509—1536.
- [ET99] Ivar Ekeland and Roger Téman, *Convex analysis and variational problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999.
- [GL96] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, *Matrix computations*, 3 ed., The Johns Hopkins University Press, United States, 1996.
- [GPP07] Maria Grazia Gasparo, Alessandra Papini, and Aldo Pasquali, *A two-stage method for nonlinear inverse problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics **198** (2007), no. 2, 471–482.
- [Gro84] Charles W. Groetsch, *The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equation of the first kind*, Pitman, Boston, 1984.
- [Gro93] ———, *Inverse problems in the mathematical sciences*, Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 1993.
- [Had02] Jacques Hadamard, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Princeton University Bulletin (1902), 49–52.
- [Han97a] Martin Hanke, *A regularizing Levenberg-Marquardt scheme, with applications to inverse groundwater filtration problems*, Inverse Problems **13** (1997), 79–95.

- [Han97b] ———, *Regularizing properties of a truncated new-CG algorithm for nonlinear ill-posed problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization **18** (1997), 971–993.
- [Han97c] Per Christian Hansen, *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: Numerical aspects of linear inversion*, Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, PA, 1997.
- [Han00] ———, *The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems*, in Computational Inverse Problems in Electrocardiology, ed. P. Johnston, Advances in Computational Bioengineering, WIT Press, 2000, pp. 119–142.
- [Hei08] Torsten Hein, *Convergence rates for regularization of ill-posed problems in Banach spaces by approximate source conditions*, Inverse Problems **24** (2008), 1–10.
- [HKPS07] Bernd Hofmann, Barbara Kaltenbacher, Christiane Pöschl, and Otmar Scherzer, *A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators*, Inverse Problems **23** (2007), 987–1010.
- [IS05] Alexey Izmailov and Mikhail Solodov, *Otimização. condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*, vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [Ius95] Alfredo Noel Iusem, *Métodos de ponto proximal em otimização*, 20<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1995.
- [JXS<sup>+</sup>08] Mingfeng Jiang, Ling Xia, Guofa Shou, Feng Liu, and Stuart Crozier, *Two hybrid regularization frameworks for solving the electrocardiography inverse problem*, Physics in Medicine and Biology **53** (2008), 5151–5164.
- [Kir96] Andreas Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Applied mathematical sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Kiw97] Krzysztof C. Kiwiel, *Proximal minimization methods with generalized Bregman functions*, SIAM J. Control Optimization **35** (1997), 1142–1168.
- [Kre89] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley, New York, US, 1989.
- [LB05] Antônio Leitão and Johann Baumeister, *Topics in inverse problems*, 20<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [LRH<sup>+</sup>05] Ying Li, Liyun Rao, Renjie He, Guizhi Xu, Qing Wu, Weili Yan, Guoya Dong, and Qingxin Yang, *A novel combination method of electrical impedance tomography inverse problem for brain imaging*, IEEE Transactions on Magnetics **41** (2005), 1848–1851.
- [LV08] Linh Lieu and Luminita Vese, *Image restoration and decomposition via bounded total variation and negative Hilbert-Sobolev spaces*, Applied Mathematics and Optimization **58** (2008), no. 2, 167–193.
- [Mor66] Vladimir Alekseevich Morozov, *On the solution of functional equations by the method of regularization*, Soviet Math. Dokl. **7** (1966), 414–417.

- [Mor84] \_\_\_\_\_, *Methods for solving incorrectly posed problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [Neu89] Andreas Neubauer, *Tikhonov regularisation for non-linear ill-posed problems: optimal convergence rates and finite-dimensional approximation*, *Inverse Problems* **5** (1989), 541–557.
- [NW06] Jorge Nocedal and Stephen Wright, *Numerical optimization*, 2 ed., Springer, New York, 2006.
- [OBG<sup>+</sup>05] Stanley Osher, Martin Burger, Donald Goldfarb, Jinjun Xu, and Wotao Yin, *An iterative regularization method for total variation-based image restoration*, *Multiscale Modeling & Simulation* **4** (2005), 460–489.
- [ORL08] Dean S. Oliver, Albert C. Reynolds, and Ning Liu, *Inverse theory for petroleum reservoir characterization and history matching*, Cambridge, New York, 2008.
- [Pen97] Yue-Jun Peng, *An inverse problem in petroleum exploitation*, *Inverse Problems* **13** (1997), 1533–1546.
- [Ram99] Ronny Ramlau, *A modified Landweber-method for inverse problem*, *Journal for Numerical Functional Analysis and Optimization* **20** (1999), no. 1 & 2, 79–98.
- [Ram02] \_\_\_\_\_, *Morozov’s discrepancy principle for Tikhonov regularization of nonlinear operators*, *Journal for Numerical Functional Analysis and Optimization* **23** (2002), 147–172.
- [Ram03] \_\_\_\_\_, *TIGRA—an iterative algorithm for regularizing nonlinear ill-posed problems*, *Inverse Problems* **19** (2003), 433–465.
- [Ram05] Alexander G. Ramm, *Inverse problems, mathematical and analytical techniques with applications to engineering*, Springer, Boston, 2005.
- [Reg96] Teresa Regińska, *A regularization parameter in discrete ill-posed problems*, *SIAM J. Sci. Comput.* **17** (1996), no. 3, 740–749.
- [Res05] Elena Resmerita, *Regularization for ill-posed problems in Banach spaces: convergence rates*, *Inverse Problems* **21** (2005), 1303–1314.
- [ROF92] Leonid I. Rudin, Stanley Osher, and Emad Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, *Physica D* **60** (1992), 259–268.
- [RS02] Marielba Rojas and Trond Steihaug, *An interior-point trust-region-based method for large-scale non-negative regularization*, *Inverse Problems* **18** (2002), 1291–1307.
- [RS06] Elena Resmerita and Otmar Scherzer, *Error estimates for non-quadratic regularization and the relation to enhancement*, *Inverse Problems* **22** (2006), 801–814.
- [Rud73] Walter Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [SEK93] Otmar Scherzer, Heinz W. Engl, and Karl Kunisch, *Optimal a posteriori parameter choice for Tikhonov regularization for solving nonlinear ill-posed problems*, *SIAM journal on numerical analysis* **30** (1993), no. 6, 1796–1838.

- [Sha48] Claude E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, The Bell System Technical Journal **27** (1948), 379—423.
- [TG87] Andrei Nikolaevich Tikhonov and A. V. Goncharsky, *Ill-posed problems in the natural sciences*, MIR Publisher, Moscow, 1987.
- [TGSY95] Andrei Nikolaevich Tikhonov, A. Goncharsky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*, Mathematics and Its Applications, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Tik63] Andrei Nikolaevich Tikhonov, *Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method*, Soviet Math Dokl **4** (1963), 1035–1038, English translation of Dokl Akad Nauk SSSR 151, 1963, 501-504.
- [Vog02] Curtis R. Vogel, *Computational methods for inverse problems*, SIAM, Philadelphia, PA, 2002.
- [WHL08] W. Wang, B. Han, and L. Li, *A Runge-Kutta type modified Landweber method for nonlinear ill-posed operator equations*, J. Comput. Appl. Math. **212** (2008), no. 2, 457–468.
- [Yoc05] Hubert P. Yockey, *Information theory, evolution, and the origin of life*, Cambridge University Press, 2005.
- [YSSP05] Svetlana N. Yanushkevich, Adrian Stoica, Vlad P. Shmerko, and Denis V. Popel, *Biometric inverse problems*, CRC Press/Taylor and Francis Group, Florida, 2005.

## APÊNDICE A – Análise Funcional

**Definição A.1** ([Kre89]). Um espaço normado  $\mathcal{U}$  é um espaço vetorial com uma norma definido nele. Um espaço de Banach é um espaço normado completo (completo na métrica definida pela norma).

**Definição A.2** ([Kre89]). Um espaço com produto interno (ou um espaço pré-Hilbert) é um espaço vetorial  $\mathcal{H}$  com um produto interno definido em  $\mathcal{H}$ . Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno completo (completo na métrica definida pelo produto interno).

**Definição A.3** ([Kre89]). Um funcional linear  $f$  é um operador linear em que o domínio está num espaço normado  $\mathcal{U}$  e a imagem está no corpo de escalares  $\mathbb{K}$  de  $\mathcal{U}$ ; assim,

$$f : \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbb{K} ,$$

em que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  se  $\mathcal{U}$  é real ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  se  $\mathcal{U}$  é complexo.

**Definição A.4** ([Kre89]). Um funcional linear limitado  $f$  é um funcional linear com imagem no corpo de escalares  $\mathbb{K}$  do espaço normado  $\mathcal{U}$  no qual pertence o domínio  $\mathcal{D}(f)$ . Dessa forma existe uma constante real  $c$  tal que para todo  $u \in \mathcal{D}(f)$ ,

$$|f(u)| \leq c \|u\|_{\mathcal{U}} .$$

**Definição A.5** ([Kre89]). Seja  $\mathcal{U}$  um espaço normado. Então o conjunto de todos os funcionais lineares limitados em  $\mathcal{U}$  formam um espaço normado com a norma definida como

$$\|f\| = \sup_{u \in \mathcal{U}, u \neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|_{\mathcal{U}}} ,$$

o qual é chamado o espaço dual de  $\mathcal{U}$  e denotamos<sup>1</sup> por  $\mathcal{U}^*$ .

**Teorema A.6** ([Kre89]). O espaço dual  $\mathcal{U}^*$  de um espaço normado  $\mathcal{U}$  é um espaço de Banach (mesmo que  $\mathcal{U}$  não seja).

---

<sup>1</sup>Convém observar que a notação padrão para o dual topológico é  $\mathcal{U}'$  e  $\mathcal{U}^*$  para o dual algébrico.

**Definição A.7** ([Kre89]). O conjunto  $\mathcal{U}^{**}$  é chamado de bidual do espaço normado  $\mathcal{U}$  e é definido como o dual do espaço de Banach  $\mathcal{U}^*$ . Para cada elemento de  $\mathcal{U}^{**}$  podemos associar um elemento de  $\mathcal{U}$  e com isso definimos a aplicação canônica injetiva  $C : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^{**}$  tal que

$$u \mapsto g_u(f) = f(u) .$$

Logo  $\mathcal{R}(C) \subset \mathcal{U}^{**}$ . Se  $C$  é sobrejetora (e portanto bijetora), tal que  $\mathcal{R}(C) = \mathcal{U}^{**}$ , então  $\mathcal{U}$  é dito um espaço reflexivo.

**Definição A.8** ([Kre89]). Seja  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear e contínuo, em que  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  são espaços normados. Então o operador adjunto  $F^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{U}^*$  de  $F$  tal que  $h \rightarrow F^*h$  é definido por

$$h(Fu) = (F^*h)(u) = g(u) , g \in \mathcal{U}^* ,$$

em que  $\mathcal{U}^*$  e  $\mathcal{H}^*$  são os espaços duais de  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$ , respectivamente.

**Teorema A.9** ([Kre89]). Todo funcional linear limitado num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  pode ser representado pelo produto interno, a saber,

$$h(u) = \langle u, z \rangle$$

em que  $z$  depende de  $h$  e é unicamente determinado por  $h$  e tem a norma  $\|z\| = \|h\|$ .

**Definição A.10** ([Kre89]). Tome  $f_k$  uma sequência de funcionais lineares e limitados num espaço normado  $\mathcal{U}$ . Então

- (i) Dizemos que  $f_k$  converge (fortemente) quando existe  $f \in \mathcal{U}^*$  tal que  $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ . Denotamos por  $f_k \rightarrow f$ .
- (ii) Dizemos que  $f_k$  converge fraco-\* quando existe  $f \in \mathcal{U}^*$  tal que  $f_k(u) \rightarrow f(u)$  para todo  $u \in \mathcal{U}$ . Denotamos por  $f_k \xrightarrow{*} f$ .

**Definição A.11** ([Kre89]). Sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  são espaços normados e  $F : \mathcal{D}(F) \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear e fechado, em que  $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{U}$ . Então dizemos que  $F$  é um operador linear fechado se seu gráfico

$$\mathcal{G}(F) = \{(u, y) \mid u \in \mathcal{D}(F) \text{ e } y = F(u)\}$$

é fechado no espaço normado  $\mathcal{U} \times \mathcal{H}$ .

**Teorema A.12** ([Kre89]). Sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  são espaços de Banach e  $F : \mathcal{D}(F) \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear e fechado, em que  $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{U}$ . Então se  $\mathcal{D}(F)$  é fechado em  $\mathcal{U}$ , o operador  $F$  é limitado.

**Teorema A.13** ([Kre89]). *Tome  $F : \mathcal{D}(F) \rightarrow \mathcal{H}$  um operador linear, em que  $\mathcal{D}(F) \subset \mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{H}$  são espaços normados. Então se  $\mathcal{D}(F)$  é fechado se e somente se a seguinte propriedade é satisfeita. Se  $u_k \rightarrow u$ , em que  $(u_k) \in \mathcal{D}(F)$  e  $F(u_k) \rightarrow y$ , então  $u \in \mathcal{D}(F)$  e  $F(u) = y$ .*

## APÊNDICE B – Análise convexa

### B.1 Funções convexas

**Definição B.1** ([Cla90]). Uma função  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita Lipschitz se existe um escalar  $c$  não negativo, tal que

$$|h(u) - h(v)| \leq c \|u - v\|_{\mathcal{U}}$$

para todo  $u, v \in \mathcal{U}$ .

**Definição B.2** ([dCS06]). Seja  $\Omega \subset \mathcal{U}$  é um conjunto convexo num espaço vetorial  $\mathcal{U}$ . Dizemos que o funcional  $h : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  é convexo em  $\Omega$  quando

$$h(\mu u + (1 - \mu)v) \leq \mu h(u) + (1 - \mu)h(v)$$

para quaisquer  $u, v \in \Omega$  e  $0 \leq \mu \leq 1$ . Dizemos que  $h$  é estritamente convexa quando a desigualdade acima é estrita. Definimos ainda o conjunto

$$\text{dom } h = \{u \in \mathcal{U} \mid h(u) < \infty\}$$

como o domínio efetivo de  $h$ . Se  $\text{dom } h \neq \emptyset$  e não assuma valor  $-\infty$ , então  $h$  é dito próprio.

**Proposição B.3** ([ET99]). Toda função convexa própria em um espaço de dimensão finito é contínua no interior de seu domínio efetivo.

**Corolário B.4** ([Cla90]). Seja  $h$  um funcional convexo limitado numa vizinhança  $V$  de  $u \in \Omega$ , com  $\Omega$  um conjunto aberto convexo. Então  $h$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $V$ .

**Proposição B.5** ([dCS06]). Seja  $h : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  um funcional

1. Se  $h$  é convexo próprio e  $\alpha \geq 0$ , então  $\alpha h$  é convexo próprio.
2. Toda soma finita de funcionais convexas próprios é convexo.



3. Se  $(h_k)$  é uma sequência de funcionais convexos tal que  $h_k(u) \rightarrow h(u)$  para todo  $u \in \mathcal{U}$  então  $h$  é convexo.
4. Se  $h$  é convexo então  $\text{dom } h$  é convexo.

## B.2 Subgradiente

**Definição B.6** ([Cla90]). Dizemos que  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{H}$  é estritamente diferenciável em  $u$  se existe um elemento  $D_s F(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{H})$  tal que para todo  $v \in \mathcal{U}$  temos

$$\lim_{u' \rightarrow u, t \downarrow 0} \frac{F(u' + tv) - F(u')}{t} = \langle D_s F(u), v \rangle, \quad (\text{B.1})$$

e essa convergência é uniforme para  $v$  em espaços compactos.

**Proposição B.7** ([Cla90]). Se  $F$  é continuamente Gâteaux diferenciável (i.e., existe a derivada e ela é contínua) em  $u$ , então  $F$  é estritamente diferenciável em  $u$  e portanto Lipschitz em  $u$ .

**Proposição B.8** ([Cla90]). Se  $h$  é estritamente diferenciável em  $u$ , então  $h$  Lipschitz próximo  $u$  e  $\partial h(u) = \{D_s h(u)\}$ . Reciprocamente, se  $h$  Lipschitz próximo  $u$  e  $\partial h(u) = \{\xi\}$  é unitário, então  $h$  é estritamente diferenciável em  $u$  e  $D_s h(u) = \xi$ .

**Definição B.9** ([dCS06]). Sejam  $\Omega \subset \mathcal{U}$  um conjunto convexo num espaço de Banach  $\mathcal{U}$  e  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional convexo. Dizemos que  $\xi \in \mathcal{U}^*$  é um subgradiente de  $h$  no ponto  $u \in \mathcal{U}$  se

$$h(v) \geq h(u) + \langle \xi, v - u \rangle$$

para todo  $v \in \mathcal{U}$ . O conjunto de todos os subgradientes de  $h$  em  $u$  é chamado de subdiferencial de  $h$  em  $u$ , denotamos como

$$\partial h(u) = \{ \xi \in \mathcal{U}^* \mid h(v) \geq h(u) + \langle \xi, v - u \rangle \ \forall v \in \mathcal{U} \}.$$

**Proposição B.10** ([Cla90]). Seja  $h$  um funcional Lipschitz contínuo numa vizinhança de  $u$ , então para qualquer escalar  $\alpha$  vale

$$\partial(\alpha h)(u) = \alpha \partial h(u).$$

**Proposição B.11** ([Cla90]). Seja  $(h_i)$  uma família finita de funções no qual cada uma é Lipschitz próximo de  $u$ . Então

$$\partial \left( \sum_{i=1}^n h_i \right) (u) \subseteq \sum_{i=1}^n \partial h_i(u), \quad (\text{B.2})$$

a igualdade é verificada quando no máximo uma (ou nenhuma) função falha a condição de diferenciabilidade estrita.

**Proposição B.12** ([Bac07]). *Seja  $h(u) = h_1(u) + h_2(u)$  em que  $h_1, h_2$  são funções de um subconjunto convexo fechado  $\Omega \subset \mathcal{U}$  em  $\mathbb{R}$ ,  $h_1$  é Gâteaux diferenciável e  $h_2$  é convexa. Então se  $u \in \Omega$  é um minimizador de  $h$ , vale*

$$h_2(v) \geq h_2(u) + \langle -h'_1(u), v - u \rangle$$

para qualquer  $v \in \Omega$ .

**Teorema B.13** ([Cla90]). *Seja  $F$  um operador definido de  $\mathcal{U}$  em um outro espaço de Banach  $\mathcal{H}$  e seja  $g$  um funcional em  $\mathcal{H}$ . Suponha que  $F$  seja Fréchet diferenciável em  $u$  e que  $h$  seja Lipschitz próximo de  $F(u)$ . Então se  $f = h \circ F$  é Lipschitz próximo de  $u$ , vale*

$$\partial f(u) \subseteq [F'(u)]^* \partial h(F(u)) .$$

### B.3 Distâncias de Bregman

**Definição B.14** ([dCS06]). *Sejam  $\Omega \subset \mathcal{U}$  um conjunto convexo num espaço de Banach  $\mathcal{U}$  e  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  um funcional convexo, definimos a distância de Bregman generalizada induzida pelo funcional  $h$  entre os elementos  $v, u \in \Omega$  como*

$$D_h(v, u) = \left\{ D_h^\xi(v, u) \mid \xi \in \partial h(u) \right\} ,$$

em que

$$D_h^\xi(v, u) = h(v) - h(u) - \langle \xi, v - u \rangle .$$

**Proposição B.15** ([Bac07]). *Sejam  $u, v, w \in \mathcal{U}$  em que  $\mathcal{U}$  é um espaço de Banach,  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  um funcional convexo,  $\xi \in \partial h(u)$  e  $\zeta \in \partial h(v)$  dois subgradientes. Então vale a igualdade*

$$D_h^\xi(w, u) - D_h^\zeta(w, v) + D_h^\zeta(u, v) = \langle \xi - \zeta, u - w \rangle .$$

**Proposição B.16.** *Sejam  $\Omega \subset \mathcal{U}$  um conjunto convexo num espaço vetorial  $\mathcal{U}$  e  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida por  $h(u) = h_1(u) + h_2(u)$  em que  $h_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  são funcionais convexas próprios e  $h_1$  estritamente diferenciável. Então  $h$  é um funcional convexo e vale*

$$D_h^\xi(v, u) = D_{h_1}^{\xi_1}(v, u) + D_{h_2}^{\xi_2}(v, u) \tag{B.3}$$

para todo  $v, u \in \Omega$ .

**Demonstração:** Pela Proposição B.5 garantimos a convexidade de  $h$ .

Dado  $\xi \in \partial h(u)$  então existe  $\xi_1 \in \partial h_1(u)$  e  $\xi_2 \in \partial h_2(u)$  tal que  $\xi = \xi_1 + \xi_2$ , pela Proposição B.11.

Portanto,

$$\begin{aligned}
 D_h^\xi(v, u) &= h(v) - h(u) - \langle \xi, v - u \rangle \\
 &= h_1(v) + h_2(v) - [h_1(u) + h_2(u)] - \langle \xi_1 + \xi_2, v - u \rangle \\
 &= h_1(v) - h_1(u) - \langle \xi_1, v - u \rangle + h_2(v) - h_2(u) - \langle \xi_2, v - u \rangle \\
 &= D_{h_1}^{\xi_1}(v, u) + D_{h_2}^{\xi_2}(v, u)
 \end{aligned}$$

conforme requerido. □

## APÊNDICE C – Elementos de dualidade

**Proposição C.1** ([Cla90]). *Seja  $h$  um funcional Lipschitz contínuo numa vizinhança de  $u$ . Se  $h$  atingi o mínimo ou máximo local em  $u$ , então*

$$0 \in \partial h(u) .$$

**Definição C.2** ([Cio90]). *Uma função contínua e estritamente crescente  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , tal que  $\phi(0) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = +\infty$  é chamada função densidade.*

**Definição C.3** ([Cio90]). *Uma aplicação de dualidade com densidade  $\phi$  é uma aplicação multivaluada entre um espaço de  $\mathcal{H}$  de Banach e seu dual  $\mathcal{H}^*$  definida por*

$$\mathcal{A}(y) = \{p \in \mathcal{H}^* \mid \langle p, y \rangle = \|p\|_{\mathcal{H}^*} \|y\|, \|p\|_{\mathcal{H}^*} = \phi(\|y\|)\} .$$

**Lema C.4** ([Cio90]). *Seja  $\phi$  uma densidade em  $\mathbb{R}_+$  e  $\psi(t) = \int_0^t \phi(s) ds$ . Então  $\psi$  é uma função convexa em  $\mathbb{R}_+$ .*

**Teorema C.5** ([Cio90]). *Se  $\mathcal{A}$  é uma aplicação de dualidade de densidade  $\phi$ , então*

$$\mathcal{A}(y) = \partial \psi(\|y\|) .$$

**Teorema C.6** ([Rud73]). *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço normado e  $\mathcal{H}^*$  seu dual. Então a bola fechada unitária em  $\mathcal{H}^*$ ,*

$$\mathcal{B}_1(0) = \{f \in \mathcal{H}^* \mid \|f\|_{\mathcal{H}^*} \leq 1\}$$

*é compacta na topologia fraco-\**.