

Carlos Henrique Radavelli

*Ensaaios Sobre Risco na Teoria do  
Prospecto Intertemporal*

Florianópolis – SC

Maio / 2007

Carlos Henrique Radavelli

*Ensaaios Sobre Risco na Teoria do  
Prospecto Intertemporal*

Dissertação apresentada à Coordenação do  
Mestrado em Economia da Universidade Fed-  
eral de Santa Catarina para a obtenção do  
título de Mestre em Economia.

Orientador:

Prof. Dr. Eraldo Sérgio Barbosa da Silva

MESTRADO EM ECONOMIA  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA  
CENTRO SÓCIO ECONÔMICO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis – SC

Maio / 2007

Dissertação de Mestrado sob o título “*Ensaaios Sobre Risco na Teoria do Prospecto Intertemporal*”, defendida por Carlos Henrique Radavelli e aprovada em 30 de maio de 2007, em Florianópolis, Santa Catarina, pela banca examinadora constituída pelos doutores:

---

Prof. Dr. Eraldo Sérgio Barbosa da Silva  
Orientador

---

Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa Junior  
Membro

---

Prof. Dr. Zenira Pires de Souza  
Membro

*Dedico esta dissertação a meus pais,  
cujo exemplo de honestidade e trabalho  
tem sido um norteador para a minha vida,  
e para meus amigos, que tem  
me dado apoio em todos os momentos.*

# *Agradecimentos*

Dedico meus sinceros agradecimentos para:

- o professor doutor Eraldo Sérgio Barbosa da Silva, pela orientação e incentivo;
- ao Luiz Alberto Radavelli, meu irmão, pela ajuda na resolução de problemas no editor utilizado.

Da seção (3) foi extraído o artigo “Large Sharpening Intertemporal Prospect Theory”, publicado em: Applied Mathematical Sciences, 2007 (1) **34** pp. 1695-1701.

# *Resumo*

A Teoria do Prospecto [14] de escolhas sobre risco tem sido desenvolvida a fim de incorporar escolhas intertemporais [19]. A apresentação da teoria do prospecto intertemporal incorre em pequenos erros [4]. Para esclarecer a teoria identificaremos e mostraremos os erros presentes nas apresentações correntes ([19], [4]) da função valor e função desconto.

Em seguida, faremos um estudo paralelo ao desenvolvido por John W. Pratt(1964) e Kenneth J. Arrow(1965) para encontrar uma medida que quantifique a aversão ao risco. Arrow-Pratt o fizeram considerando a função utilidade. Tentaremos encontrar uma nova medida de aversão ao risco através da função valor, que veio substituir a função utilidade.

**Classificação AMS:** 91B16

**Palavras-Chaves:** Teoria da Utilidade Descontada, escolha intertemporal, Teoria do Prospecto, Arrow-Pratt.

# *Abstract*

## **Intertemporal Prospect Theory**

**Carlos Henrique Radavelli**

*Department of Economics, Federal University of Santa Catarina  
88049-970 Florianopolis SC, Brazil  
E-mail: carlosradavelli@hotmail.com*

### **Abstract**

Prospect theory [14] of risky choices has been extended to encompass intertemporal choices [19]. Presentation of intertemporal prospect theory suffers from minor mistakes, however [4]. To clarify the theory we restate it and show further mistakes in current presentations ([19], [4]) of value and discount functions.

Following, we are going to make a parallel study to that developed by John W. Pratt (1964) and Kenneth J. Arrow (1965) to find out a measurement which may quantify the risk aversion. Arrow-Pratt has done it considering the utility function. We will try to find out a new measurement for risk aversion through the value function, which has substituted the utility function.

**AMS Subject classification:** 91B16

**Keywords:** Discount utility theory, intertemporal choice, prospect theory, Arrow-Pratt's measure.

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 10
1.1	Contexto da pesquisa . . . . .	p. 11
1.2	Objetivos da Pesquisa . . . . .	p. 12
1.2.1	Objetivo Geral . . . . .	p. 12
1.2.2	Objetivos Específicos . . . . .	p. 13
1.3	Estrutura do Trabalho . . . . .	p. 13
<b>2</b>	<b>Revisão de Literatura</b>	p. 14
2.1	Introdução . . . . .	p. 14
2.2	Teoria do Prospecto . . . . .	p. 15
2.2.1	Função Valor . . . . .	p. 15
2.2.2	Função Ponderada . . . . .	p. 17
2.2.3	Função Desconto . . . . .	p. 18
2.3	Teoria do Prospecto para Perdas e Ganhos . . . . .	p. 18
2.4	Medida de Arrow-Pratt . . . . .	p. 19
<b>3</b>	<b>Corrigindo a Teoria do Prospecto Intertemporal</b>	p. 21
3.1	Introdução . . . . .	p. 21
3.2	Reformulando as suposições . . . . .	p. 22
3.3	Avaliando as correções . . . . .	p. 24
3.3.1	Elasticidade da Função Valor . . . . .	p. 24
3.3.2	Efeito Diferença Comum . . . . .	p. 24



3.3.3	Consumo Ótimo . . . . .	p. 26
3.3.4	Domínio das Perdas . . . . .	p. 27
3.4	Algumas Conclusões . . . . .	p. 28
<b>4</b>	<b>Generalização da medida de Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco considerando a teoria do prospecto</b>	<b>p. 29</b>
4.1	Introdução . . . . .	p. 29
4.2	A Medida . . . . .	p. 30
4.3	Exemplo Numérico . . . . .	p. 32
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>p. 34</b>
	<b>Referências</b>	<b>p. 37</b>

## LISTA DE ABREVIACOES

1. AD: Al-Nowaihi and Dhami [4].
2. HCJ: Hartog, Carbonell and Jonker (2000) [12].
3. LP: Loewenstein and Prelec [19].
4. WC: Weber and Camerer [34].

# 1 *Introdução*

Uma das maiores questões de finanças é saber se um investidor consegue ou não ganhar, sistematicamente, do mercado mais que a média do rendimento do mesmo. No início da década de 30, supunha-se que as massas eram tomadas por atitudes irracionais (“loucura coletiva”)(David Thoreau, Bernard Baruch e Gustave La Bom). Aparece as finanças tradicionais, a qual pressupõem que o mercado nem sempre está certo, e então deseja-se descobrir onde o mesmo comete erros para conseguir retornos maiores, e portanto a diversificação não é desejável. Fisher 1930 [10] desenvolveu os princípios básicos de investimento e consumo num mundo com e sem intermediários financeiros. Estes princípios básicos foram refinados e transformados em ferramentas analíticas efetivas para serem usadas na análise de investimentos dentro e fora das empresas via a técnica de fluxo de caixa descontado. No início dos anos 50, com o aparecimento da teoria dos jogos (Von Neumann e Morgenstern), começam as críticas a teoria das finanças tradicionais.

Com esses novos conceitos, surge as finanças modernas, que supõem a racionalidade dos investidores e então que o risco deve ser diversificado (fronteira eficiente).

Já nas finanças comportamentais, o investidor apresenta tendências sistemáticas a cometer erros (auto-correlação do erro). Isso é justificado por alguns efeitos que nós investidores estamos sujeitos: superconfiança, negação, dissonância cognitiva, etc.

Com o aparecimento do paradoxo de Allais surgiu a teoria do prospecto [14] que veio reescrever o modelo comportamental da teoria de escolhas sobre risco, e com este grandioso trabalho, Daniel Kahneman conquistou o prêmio nobel em economia de 2002.

A economia tem prestado muita atenção em modelar escolhas de consumo e investimento, principalmente quando estas envolvem um certo grau de risco. Este por sua vez é caracterizado por uma função que pondera as possibilidades de determinados resultados ocorrerem.

Há indivíduos que são mais avessos ao risco do que outros (níveis de aversão). Assim, as pessoas podem, às vezes, optar por investimentos com um certo grau de risco

determinado, como por exemplo, investimentos no mercado de ações.

Tem-se que indivíduos tem aversão ao risco em escolhas que envolvem ganhos seguros, porém procuram o risco no caso contrário, ou seja, aqueles que envolvem perdas seguras. Neste contexto analisa-se o ponto de referência, o que ocasiona duas tendências: efeito disposição, no qual o apostador vende o ativo quando obteve ganho no primeiro momento, e permanece com ativos nos quais obteve prejuízo; e efeito doação, em que indivíduos exigem preços mais elevados para vender objetos de seu poder do que estariam dispostos a pagar pela aquisição dos mesmos. Um exemplo para a primeira tendência no mercado financeiro, é que os investidores tomam como ponto de referência o valor pelo qual adquiriram a ação no mercado, vendendo-os em um segundo momento se o ativo obteve uma elevação no seu preço e mantendo-se no ativo se obteve queda. Estas evidências estão especificadas no trabalho de Shefrim e Statman (1985) [26].

Mensurar o risco de uma escolha então, tornou-se um objetivo importante. A variabilidade dos resultados (variância e desvio padrão) de uma aposta ou investimento, por exemplo, é um bom indicador para o risco, já que estas são grandezas diretamente proporcionais.

Com o surgimento da economia comportamental, surgem três situações que não podem ser explicadas através da teoria clássica de maximização da utilidade esperada: efeito disposição, doação e lei dos pequenos números.

## 1.1 Contexto da pesquisa

Muitas das decisões que tomamos diariamente envolvem risco. Ir ao trabalho de carro ou tomar um ônibus? Fazer o tratamento de um tumor por cirurgia ou terapia radioativa? Investir no mercado acionário ou em CDB? Quaisquer das decisões que tomarmos, devemos esperar as consequências que as mesmas acarretam.

Microeconomia trata risco como uma simples extensão da teoria da escolha, isto é, a teoria da utilidade esperada (Von Neumann, Morgenstern 1944). E escolha intertemporal é explicada pela teoria da utilidade descontada (Samuelson 1937).

Portanto, várias anomalias aparecem através de experimentos. Anomalias estas que contrapõem-se aos axiomas da Utilidade Esperada. Teoria do Prospecto tem sido uma alternativa encontrada para explicar escolhas de risco (Kahneman and Tversky 1979). Tanto as anomalias como a teoria do prospecto trabalham com respostas cerebrais (Camerer,

Loewenstein, and Prelec 2005; Trepel, Fox, and Poldrack 2005).

Teoria do prospecto sobre escolhas de risco tem sido estendida para escolha intertemporal (Loewenstein and Prelec 1992), tomando como suposições as anomalias até aqui encontradas. Esta tem sido chamada Teoria do Prospecto “Intertemporal”, e sofreu algumas correções matemáticas (Al-Nowaihi and Dhami 2005).

Não menos importante que explicar a tomada de decisão sobre risco intertemporal, é poder quantificar a aversão ao risco absoluta. Temos três reações do indivíduo com relação ao risco inerente a sua tomada de decisão: aversão, neutralidade e propensão ao risco.

A definição para existência de aversão ao risco é, em uma situação de incerteza, “o mal-estar associado à perda de um montante é maior do que o bem estar associado a um ganho de mesmo valor”, i. é., a utilidade do valor esperado da aposta  $G$  é maior que a utilidade da aposta  $G$  ( $U(E[G]) > U(G)$ ). A função utilidade, em uma situação de aversão ao risco, é estritamente côncava.

Atitudes individuais diante do risco são alvos de constantes análises. Então é natural a tentativa de desenvolver um instrumento para mensurar a atitude individual perante o risco, e testar se esta aversão ao risco aumenta de acordo com quedas ou aumentos no “preço pago para entrar na aposta”.

A partir dessas indagações, deduziremos uma medida individual de aversão ao risco como a definida por Arrow-Pratt.

Em diversos trabalhos experimentais, focados em testar a teoria da utilidade esperada e teorias alternativas (veja, por exemplo, Kahnemann e Tversky, 1979 [14]), verificou-se a violação de predições e axiomas estabelecidos pelas mesmas.

Derivaremos a medida individual de aversão ao risco levando em consideração o “preço da aposta”, empregando agora a teoria do prospecto intertemporal.

## 1.2 Objetivos da Pesquisa

### 1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral dessa pesquisa é “lapidar” a teoria do prospecto intertemporal, e deduzir uma nova medida de aversão absoluta de risco que compreenda essa teoria.

## 1.2.2 Objetivos Específicos

Visando o alcance do objetivo geral, alguns objetivos específicos serão buscados, assim como:

- Investigar os artigos de Loewenstein e Prelec 1992 e sua correção matemática feita por Al-Nowaihi and Dhami 2005, identificando pequenas falhas.
- Mensurar aversão ao risco absoluta levando em consideração a medida feita por Arrow-Pratt e Weber-Camerer [34].
- Com dados de trabalhos empíricos feitos por Tversky e Fox [32], Tversky e Kahneman [33] e Gonzales e Wu [11], analisar persistência de anomalias nos axiomas da teoria da utilidade esperada.

## 1.3 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho está estruturado em cinco capítulos. O primeiro capítulo é basicamente introdutório, que apresenta a contextualização na qual a pesquisa está inserida, junto com os objetivos do mesmo.

No segundo tem-se o referencial teórico, onde é fundamentada a pesquisa. Traz desde conceitos até caracterização do conteúdo que será usado para alcançar os objetivos do trabalho. Traçamos uma linha de pensamentos econômicos, que vai da economia tradicional até as teorias atuais, tais como: teoria do prospecto intertemporal e economia comportamental (esta última com menor ênfase).

Por se tratar de um dos objetivos específicos do trabalho, e portanto parte integrante do objetivo geral, o terceiro capítulo trará as correções na teoria do prospecto intertemporal.

No Quarto capítulo, far-se-a a dedução da medida de aversão absoluta do risco, assim como sua comparação com a realizada por WC. Em seguida, analisaremos a persistência ou não das anomalias dos pressupostos assumidos pela teoria da utilidade esperada.

O quinto capítulo apresentará as conclusões finais do trabalho.

## 2 *Revisão de Literatura*

### 2.1 Introdução

Originalmente na teoria da tomada de decisão, os indivíduos baseavam-se na escolha que tivesse o maior valor esperado (EV).

$$EV = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_ip_i \quad (2.1)$$

Esta teoria maximiza o valor esperado, porém apresenta problemas pois não assume que os indivíduos são avessos ao risco. Bernoulli [7] avançou a teoria com uma solução para este problema, quando assumiu que as pessoas não avaliam as opções por seus valores esperados mas sim por um “valor moral”.

Na teoria clássica das decisões sobre risco, o indivíduo pode ser classificado por seu comportamento: “neutro ao risco” se ele for indiferente entre uma aposta e seu valor esperado; dito “avesso ao risco” se preferir um resultado certo a um prospecto de risco com um valor esperado de igual ou maior valor esperado; e “amante do risco” se ele preferir um prospecto de risco ao valor certo de igual ou maior valor esperado.

Agora, pelo modelo de Bernoulli, os indivíduos tomam decisões analisando a opção com maior utilidade esperada:

$$EU = \sum_{i=1}^n u(x_i)p_i \quad (2.2)$$

em que  $u(x_i)$  representa a utilidade de obter o resultado  $x_i$ .

Essa teoria ganha credibilidade na teoria econômica quando von Neumann e Morgenstern [21] articularam um conjunto de axiomas necessários e suficientes, um a um, para representar preferências por maximização da utilidade esperada.

Essa teoria logo começou a ser criticada, especialmente com o surgimento do que conhecemos como “Paradoxo de Allais” [5], [6]. Considere as seguintes escolhas:

**Escolha 1** Escolher entre: (a) receber R\$1 milhão com certeza ou (b) 10% de chance de receber R\$5 milhões, 89% de chance de receber R\$1 milhão e 1% de não receber nada.

**Escolha 2** Escolher entre: (c) 11% de chance de receber R\$1 milhão ou (d) 10% de chance de receber R\$5 milhões.

Muitos indivíduos escolhem (a) ao invés de (b) na escolha 1, e (d) ao invés de (c) na segunda escolha. Essa escolha viola um dos axiomas de preferência, o qual os indivíduos escolhem prospectos com maior utilidade esperada.

## 2.2 Teoria do Prospecto

Economistas e Psicólogos tem direcionado muita atenção na tentativa de descrever a decisão do indivíduo sobre condições de risco, tais decisões podem ser caracterizadas por uma conhecida distribuição de probabilidade sobre possíveis resultados. Tais modelos motivaram o desenvolvimento da teoria do Prospecto (D. Kahneman, A. Tversky)[14].

O valor  $V$  de uma aposta simples com resultado  $x$  reais com probabilidade  $p$  é dado por:

$$V(x, p) = \nu(x)w(p), \quad (2.3)$$

em que  $\nu$  mede o subjetivo valor do resultado  $x$  acontecer, e  $w$  mede o impacto da probabilidade  $p$  na aposta (veja figura 1).

### 2.2.1 Função Valor

Através de experimentos, tem-se hipotetizado que a função valor é côncava para valores acima do ponto de referência ( $\nu''(x) < 0$ , para  $x > 0$ ) e convexa caso contrário ( $\nu''(x) > 0$ , para  $x < 0$ ).

A função possui uma assimetria em relação a perdas e ganhos, já que possui uma inclinação maior para perdas do que para ganhos, ou seja, para  $x > 0$  então  $\nu(x) < -\nu(-x)$ . Se  $\nu$  for diferenciável esta afirmação equivale a  $\nu'(x) < \nu'(-x)$



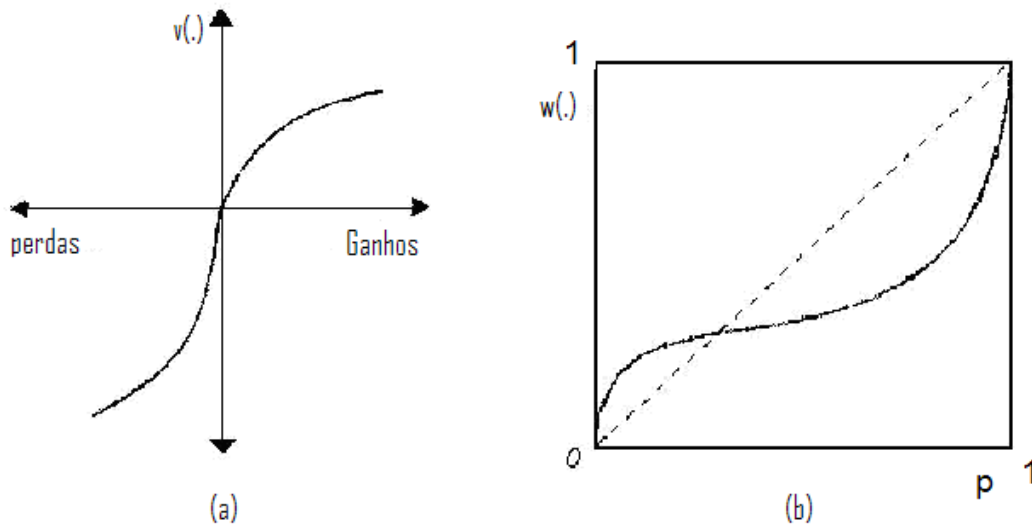


Figura 1: Função Valor (a) e Ponderada (b) da Teoria do Prospecto.

Segundo Kahneman e Tversky [14], podemos parametrizar a função valor como:

$$\nu(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^\beta, & x < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

em que,  $\alpha, \beta > 0$  medem a curvatura da função valor para ganhos e perdas, respectivamente, e  $\lambda$  é o coeficiente de aversão a perda ( $\lambda > 1$ )

Nas escolhas que envolvem risco, esta aversão a perda fica muito bem caracterizada em apostas mistas, ou seja, que envolva perda e ganho. Por exemplo, muitas pessoas rejeitariam uma aposta na qual ganhariam R\$100 se ao lançar um dado a face fosse um número par, e perderiam os mesmos R\$100 se a face fosse ímpar. Isto ocorre pois perdas tem impacto maior na decisão do indivíduo do que em situação de ganhos ( $\lambda > 1$ ). Segundo Tversky e Kahneman [33], o impacto de uma perda é aproximadamente duas vezes o de um equivalente ganho (i. é.,  $\lambda \geq 2$ ), então um indivíduo pode aceitar entrar em uma aposta que tenha 50% de chance de ganhar R\$200 e outros 50% de perder R\$100.

A função valor é côncava no domínio dos ganhos e convexa para as perdas ([1], [2] e [11]). Geralmente, a curvatura da função valor é relativamente pequena, Tversky e Kahneman [33] estimam valores médios de  $\alpha = 0,88$  e  $\beta = 0,88$ , e  $\lambda = 2,25$  com uma amostra de estudantes universitários.

Esta parametrização foi em seguida melhorada, e é dada por:

	Ganhos	Perdas
(a) Apostas Puras		
Probabilidade baixa	$C(\$100, 0.05) = \$15$ Amante ao risco • sobreavaliando prob. baixas • função valor côncava	$C(\$ - 100, 0.05) = \$ - 8$ avesso ao risco • sobreavaliando prob. baixas • função valor convexa
Probabilidades altas	$C(\$100, 0.95) = \$78$ aversão côncava • subavaliando prob. altas	$C(\$ - 100, 0.95) = \$ - 84$ amante côncava • subavaliando prob. altas
(b) Apostas Mistas	$0 \sim (-\$100, 0.5; \$202)$ aversão ao risco • aversão a perda	

Figura 2: (a) Atitudes do individuo diante de apostas puras.  $C(x, p)$  é o equivalente certeza médio de apostas que pagam  $x$  com probabilidade  $p$ ; (b) reação para apostas mistas.

$$\nu(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma_1} - 1}{1 - \gamma_1}, & x \geq 0 \\ -\lambda \frac{x^{1-\gamma_2} - 1}{1 - \gamma_2}, & x < 0 \end{cases}$$

## 2.2.2 Função Ponderada

Com o surgimento do paradoxo de Allais, violando a teoria da utilidade esperada, vem desenvolvendo-se estudos que tentam mostrar por que as pessoas violam alguns principios da teoria da utilidade. A tabela ilustra as atitudes de aversão ou propensão ao risco dos indivíduos em um estudo realizado por Tversky e Kahneman [33].

Dentro das probabilidades de ocorrência de um determinado evento, temos dois pontos de referência a serem considerados: o primeiro para probabilidades baixas (próximas de zero), denominado impossibilidade; o segundo para altas probabilidades (próximas de 1), denominado ceertezas. Disto incorre que a curva de probabilidade é ponderada por uma função  $w(p)$  que é côncava para probabilidades próximas de zero, e convexa para valores próximos de 1.

Segundo Lattimore [18], a função ponderada é parametrizada da seguinte forma:

$$w(p) = \frac{\delta p^\gamma}{\delta p^\gamma + (1-p)^\gamma} \quad (2.5)$$

em que  $\delta > 0$  mede a elevação da função ponderada e  $\gamma > 0$  mede o grau de curvatura.

O somatório da função ponderada complementar é menor do que 1, (i. é.,  $w(p) + w(1-p) < 1$ ) princípio este conhecido como subcerteza (Veja [14]). Isto implica que a função ponderada corta a função identidade abaixo do ponto 0.5 (modelado por  $\delta < 1$  na Eq. 2.5), refletindo uma tendência de subavaliar as probabilidades. Como sabemos a atratividade por apostas com alto risco varia de indivíduo para indivíduo, tendo assim que modelar as preferências individualmente na inclinação da função ponderada [11].

### 2.2.3 Função Desconto

O efeito diferença comum revela que as pessoas são mais sensíveis a um dado atraso de tempo se este ocorrer no presente do que se o mesmo ocorrer no futuro. Especificamente, se um indivíduo é indiferente entre receber  $x > 0$  imediatamente, e  $y > x$  em um tempo futuro  $s$ , então este indivíduo prefere estritamente o maior resultado se os dois forem atrasados por um tempo comum  $t$ :

$$\nu(x) = \nu(y)\phi(s), \quad \text{implica que } \nu(x)\phi(t) < \nu(y)\phi(t+s) \quad (2.6)$$

Para satisfazer este fenômeno, Ainslie [1975] propôs a função desconto,  $\phi(t) = \frac{1}{t}$ .

## 2.3 Teoria do Prospecto para Perdas e Ganhos

Aqui Martin Weber e Colin Camerer [34] mostram como o efeito reflexão e o efeito ponto de referência combinam-se e causam o efeito disposição. Suponha que o investidor compre uma ação por um preço  $P$ . Em seguida, o preço cai na magnitude de  $L$ . O investidor tem a opção de manter-se com a ação ou vendê-la. Se manter-se na ação poderá auferir um ganho e retornar para o preço  $P$ , ou ter uma nova queda, levando o preço a  $P - 2L$ . A situação é análoga para um ganho  $G$ .

A figura (3) mostra o que acontece quando o ponto de referência do investidor é o gasto  $P$  original. Após ocorrido a queda do ativo para  $P - L$  o indivíduo tem a

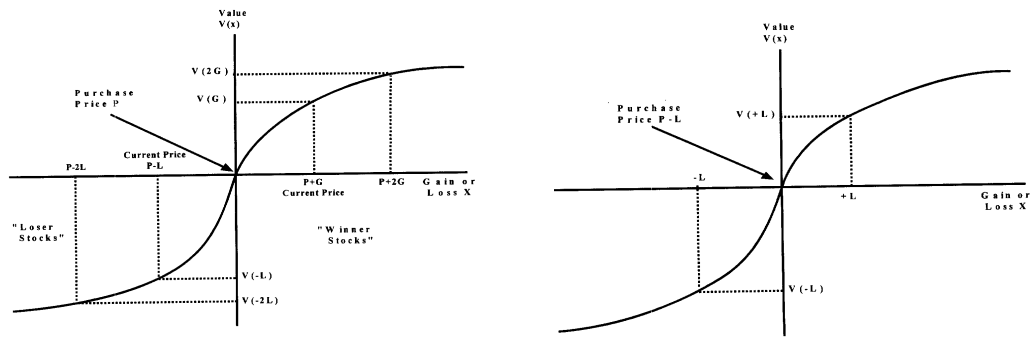


Figura 3: Como o ponto de referência cria o efeito disposição, Weber e Camerer [34]

escolha de vender e aceitar a perda certa, ou manter-se no ativo entrando numa aposta de probabilidades de retornar ao ponto de partida  $v(0)$  ou obter mais uma perda  $v(-2L)$ . Investidores geralmente mantêm-se nas perdas pois a “dor” de perder mais  $L$  é menor do que o “prazer” proporcionado pelo retorno ao ponto de partida, recuperando a perda. Veja fig. (3), elasticidade para resultado  $x$  é maior do que  $y$ , se  $0 < x < y$ . O investidor ajusta o seu ponto de referência quando o preço do ativo sofre variação.

## 2.4 Medida de Arrow-Pratt

Em economia, incerteza refere-se a situação em que são possíveis vários resultados com probabilidades desconhecidas, já risco refere-se a situações em que conhecemos todos os possíveis resultados (mensuráveis) e suas respectivas probabilidades de realização.

Para poder mensurar o “grau” de aversão ao risco de um indivíduo analisamos a concavidade da função utilidade. Porém esta não é única, e portanto suas derivadas segundas também não, o que torna impossível comparar o grau de aversão ao risco em algum par de função utilidade.

O prêmio de risco, expresso em termos da riqueza, trará uma medida melhor. Esta medida de aversão ao risco foi introduzida por John W. Pratt (1964) e Kenneth J. Arrow (1965) e é definida como segue:

**Definição 2.1** A medida Arrow-Pratt é obtida através da função utilidade. Denotando a função utilidade por  $u(w)$ . A medida de Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco é

$$R_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

em que  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função utilidade aplicada para qualquer riqueza  $w \in \mathbb{R}$ .

Esta é a medida da curvatura da função utilidade, sendo assim, qualquer transformação linear da função utilidade não afetará esta medida, já que estas não afetam as preferências expressas por  $u()$ .

A função valor é convexa no domínio das perdas, ou seja, as perdas são proporcionalmente menos “dolorosas” mais adiante. Os incentivos são então agrupados em favor de mater o ativo no investimento. Este incentivo é revertido no lado dos ganhos, motivando as pessoas a venderem rapidamente as ações das quais obtiveram um ganho em valor Weber e Camerer (1997)[34].

## 3 *Corrigindo a Teoria do Prospecto Intertemporal*

### 3.1 Introdução

A Escolha sobre risco é relacionada a um *trade-off* de utilidade entre situações alternativas ao passo que a escolha intertemporal é vista como um *trade-off* de utilidade entre períodos alternativos. O *trade-off* da utilidade entre períodos de tempo é capturado pela noção de taxa de desconto, ou seja, a taxa pela qual as pessoas descontam utilidades futuras em detrimento da data em que elas ocorrem. Microeconomia trata o risco como uma simples extensão da teoria da escolha fundamental; isto é, a teoria da utilidade esperada [21]. Escolhas intertemporais por sua vez é apresentada pela teoria da utilidade descontada [25]. Com esses acontecimentos, várias anomalias têm sido documentadas através de experimentos com pessoas em laboratórios. A teoria do Prospecto surge então para suprir estas anomalias e sugere um novo paradigma para explicar escolhas sobre risco [14]. Tanto as anomalias quanto a teoria do prospecto estão comumente ligada as funções neurais ([8], [31]). A teoria do prospecto de escolhas de risco tem sido, por si só, desenvolvida com a finalidade de englobar escolhas intertemporais [19]. Esta teoria ainda tem sido questionada, com respeito a alguns pequenos erros matemáticos [4]. Neste trabalho reexaminaremos a teoria de Loewenstein e Prelec [19] considerando as questões apontadas por Al-Nowaihi e Dhami [4]. As suposições que atentam sobre a função valor e função desconto são reformuladas com mais clareza. Inicialmente, tanto o artigo de LP quanto de AD ainda necessitam de alguns ajustes. Temos a espeança de poder ajudar na apresentação da teoria do prospecto intertemporal. Na seção 3.2 reformularemos a teoria. Seção 3.3 avaliaremos as correções já previstas à teoria, e na seção 3.4 apresentaremos as conclusões.

## 3.2 Reformulando as suposições

Com o objetivo de identificar a função valor e a função desconto, reformularemos as suposições de Loewenstein e Prelec (LP), como segue:

A1 (impaciência). Função Desconto  $\phi : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  é estritamente decrescente em intervalos arbitrariamente pequeno. (A1 não é dado explicitamente em LP, como observa Al-Nowaihi and Dhami (AD).)

A2 (Assimetria ganho-perda). Se  $0 < x < y$  e  $v(x) = v(y)\phi(t)$ , então  $v(-x) > v(-y)\phi(t)$ . ( $v(\cdot)$  é a função valor para plano de consumo  $x$  e  $y$ .)

A3 (efeito magnitude absoluta). Se  $0 < x < y$ ,  $v(x) = v(y)\phi(t)$  e  $a > 1$ , então  $v(ax) < v(ay)\phi(t)$ .

A4 (efeito diferença comum). Se  $0 < x < y$ ,  $v(x) = v(y)\phi(t)$  e  $s > 0$ , então  $v(x)\phi(s) < v(y)\phi(s+t)$ . (Efeito diferença comum é um comportamento do indivíduo que contradiz a teoria da utilidade descontada; ele captura o fato de que preferências entre dois resultados atrasados não permanece quando estes forem atrasados por uma mesma constante.)

As suposições acima surgem através (experimentalmente) de anomalias bem documentadas na teoria da utilidade descontada. (LP (p. 578) refere-se a velocidade de atraso como outra anomalia, e portanto eles não consideram esta em sua teoria.) Em particular, a suposição A1 e A4 são suficientes para derivar a função desconto hiperbólico generalizada  $\phi$  a qual captura a função exponencial como um caso particular. Mais do que A4, AD emprega

A5 (efeito diferença comum com atraso quadrático). Se  $0 < x < y$ ,  $v(x) = v(y)\phi(t)$ , and  $s > 0$ , então  $v(x)\phi(s) = v(y)\phi(s+t+\alpha st)$ ,  $\alpha > 0$ .

A4 segue, obviamente, de A1 and A5. Então AD usa A1 e A5 para derivar a função desconto

$$\phi(t) = (1 + \alpha t)^c, \quad c < 0 \tag{3.1}$$

como solução da equação funcional

$$\phi(s + t + \alpha st) = \phi(s)\phi(t). \quad (3.2)$$

(A várias possibilidades de resolver equações deste tipo

$$\phi(s)\phi(t) = g(s, t)\phi(s + t)$$

em que  $g(s, t)$  pode ser definida dependendo do tipo de solução pretendida, incluindo a função hiperbólica generalizada.) Notamos que este resultado é bem documentado na literatura de equações funcionais e foi primeiramente provado por Thielman [30]. (Veja também [3] p. 81.) Já A5 não é preciso, e o presuposto [ equação (3.2)] de AD não é necessário.

De fato observe que A4 (incluindo também a igualdade) trás

$$\phi(t)\phi(s) \leq \phi(s + t). \quad (3.3)$$

Aqui Petrovic [23] prova que funções contínuas e convexas  $\phi$  satisfazem (3.3). (Veja também [16] pp. 197, 205.) Isto segue para verificar que a função exponencial

$$\phi(t) = e^{-bt} \quad (3.4)$$

e a função hiperbólica generalizada

$$\phi(t) = (1 + at)^{-b/a} \quad (3.5)$$

são somente duas funções convexas contínuas que satisfazem (3.3). (A medida  $a$  traça o quanto (3.5) distancia-se do desconto constante; com  $a$  próximo de zero, (3.4) é obtido.) Então isto nos faz concluir que não precisamos assumir (3.2) (como é feito por AD) para tomar uma função desconto exponencial e a generalizada hiperbólica.

Para justificar (3.2), AD segue as derivações de LP (p. 580) e incorretamente toma  $k = 1 + \alpha t$ . Isto é incorreto pois  $k$  não depende de  $t$ . Explicitamente LP diz (p. 579) que  $k$  depende de  $x$  e  $y$ , mas não de  $t$ ; e a solução de LP (na p. 580) somente é possível se assumirmos que  $k$  seja constante, i.e. independente de  $t$ . Então a solução de LP não



satisfaz a equação funcional em questão

$$\phi(s)\phi(t) = \phi(t + ks). \quad (3.6)$$

A princípio, a solução de LP é uma das soluções para (3.3). Já sua prova para derivar a solução hiperbólica generalizada é falha. E ainda, as observações de AD são baseadas em provas incorretas de LP em que  $k = 1 + \alpha s$ , e portanto falham também.

### 3.3 Avaliando as correções

#### 3.3.1 Elasticidade da Função Valor

AD alega que LP comete quatro erros. Agora avaliaremos estas afirmações. As correções são as seguintes.

1. Ao definir a elasticidade da função valor, LP (p. 584) afirma que a função valor é mais elástica para resultados que tem sua magnitude absoluta maior, i.é.

$$\varepsilon_v(x) < \varepsilon_v(y), \quad 0 < x < y \quad \text{or} \quad y < x < 0$$

em que  $\varepsilon_v(x) = x \frac{v'(x)}{v(x)}$ .

AD afirma que a proposição correta é a que segue. A função valor é mais elástica para resultados que são *menores* em sua magnitude absoluta, i.é.

$$\varepsilon_v(x) > \varepsilon_v(y), \quad 0 < x < y \quad \text{or} \quad y < x < 0.$$

Esta correção é apropriada, a prova dada por AD é correta.

#### 3.3.2 Efeito Diferença Comum

Quando consideram o efeito diferença comum, LP (p. 579) tomam um atraso linear (A4). Logo se  $v(x) = v(y)\phi(s)$  então  $v(x)\phi(t) = v(y)\phi(kt + s)$ , e a constante  $k$  depende somente de  $x$  e  $y$ . Já AD sugere que o desconto seja hiperbólico com  $k = 1 + \alpha s$ , que agora depende somente de  $s$ , não mais de  $x$  e  $y$ . Estas reivindicações estão baseadas em

erros, pelas razões que foram discutidas na seção anterior. Com relação a isto, corrigimos a solução de LP afirmando que esta é apenas uma solução encontrada para a equação 3.3. A prova feita por eles para derivar a solução hiperbólica generalizada não é correta. E como as observações de AD baseiam-se nessas provas de LP, estão incorretas também.

No artigo de (LP):

Efeito comum com atraso linear. Se  $v(x) = v(y)\phi(s)$ , implica que

$$v(x)\phi(t) = v(y)\phi(kt + s) \quad (3.7)$$

na qual a constante  $k$  depende somente de  $x$  e  $y$ .

Correção:

Mostraremos que o desconto hiperbólico generalizado depende de  $s$  e não de  $x$  e  $y$ .  
( $k = 1 + \alpha s$ )

Seja  $0 < x < y$ . Dado que o consumidor é indiferente a consumir  $x$  agora a  $y$  em  $t$  períodos mais tarde, ou seja,

$$v(x) = v(y)\phi(t) \quad (3.8)$$

Pelo efeito comum,

$$v(x)\phi(s) < v(y)\phi(t + s) \quad (3.9)$$

Suposições de (LP):

- $v(x) = v(y)\phi(t) \rightarrow v(x)\phi(t) < v(y)\phi(kt + s)$ .
- $\phi(t) = (1 + \alpha t)^{-\frac{\beta}{\alpha}}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned}
v(x) &= v(y)\phi(t) \\
v(x)\phi(s) &= v(y)\phi(t)\phi(s) \\
\frac{v(x)\phi(s)}{v(y)} &= \phi(t)\phi(s) \\
\phi(s + kt) &= \phi(t)\phi(s) \\
(1 + \alpha(s + kt))^{-\frac{\beta}{\alpha}} &= (1 + \alpha t)^{-\frac{\beta}{\alpha}}(1 + \alpha s)^{-\frac{\beta}{\alpha}} \\
(1 + \alpha s + \alpha kt)^{-\frac{\beta}{\alpha}} & \\
\alpha kt &= \alpha t + \alpha^2 st \\
k &= 1 + \alpha s
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Então  $k$  depende de  $s$ , não de  $x$  e  $y$ .

### 3.3.3 Consumo Ótimo

LP desejam que seu modelo possa prever a forma de benefícios de alocação intertemporal ótima sobre uma restrição de valor presente no mercado constantestant. A sua equação para o plano do consumo ótimo no domínio dos ganhos é (p. 592)

$$c^{t*} = r - \left( -\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \right) \left( -\frac{v'}{v''} \right)$$

em que  $r > 0$  é uma taxa de juro real constante.

AD sugere que esta necessita de correção. A equação sugerida para a substituição é

$$c^{t*} = \left[ r - \left( -\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \right) \right] \left( -\frac{v'}{v''} \right).$$

Avaliamos essa considerações (AD) e verificamos a validade das mesmas. Uma prova alternativa a esta dada por AD pode ser obtida através de um trabalho realizado por Yaari [35] onde trabalha com distribuição de consumo e que as preferências não dependem somente do consumo, mas também da riqueza final (or bequest). O plano de consumo ótimo dado por Yaari (obtido após maximizar a função utilidade sujeito a restrição de

riqueza) é dada

$$e^{r(t-T)}\phi(t)v'(c^*(t)) = \kappa, \quad \kappa > 0 \quad (3.11)$$

como uma condição necessária e suficiente (equação (3.11) de Yaari, p. 307). Obviamente a função valor  $v$  não esta presente no artigo de Yaari. Ao invés de  $v$ , ele toma a utilidade associada com a taxa de consumo em vários períodos de tempo. Ele assume que a função utilidade é duas vezes diferenciável e estritamente côncava. Yaari admite que estas suposições são importantes (p. 305) porém sem elas nenhuma aplicação especificada pode ser obtida.

Tomando as derivadas desta equação, tem-se:

$$\begin{aligned} e^{r(t-T)}r\phi v'(c^*) + e^{r(t-T)}\phi'v'(c^*) + e^{r(t-T)}\phi v''(c^*)c'^* &= 0 \\ e^{r(t-T)}[r\phi v'(c^*) + \phi'v'(c^*) + \phi v''(c^*)c'^*] &= 0 \\ -[r\phi + \phi']v'(c^*) &= \phi v''c'^* \\ \left[ r - \left( -\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \right) \right] \left( -\frac{v'}{v''} \right) &= c'^* \end{aligned} \quad (3.12)$$

e isto confirma a correção.

### 3.3.4 Domínio das Perdas

No domínio das perdas, LP [19] (p. 592) declara que

$$r < \frac{-\phi'(t)/\phi(t)}{\varepsilon_v(Ie^{rt})} \quad (3.13)$$

em que  $I$  é a riqueza inicial, e  $\varepsilon_v(Ie^{rt})$  é crescente.

AD sugere que a expressão esta incorreta. A correta é

$$r > \frac{-\frac{\phi'}{\phi}}{\frac{Ie^{rt}}{Ie^{rt}-\bar{c}}\varepsilon_v(Ie^{rt}-\bar{c})}$$

**Prova:** Quando  $c(t) < \bar{c}$  (domínio das perdas), a função valor é estritamente convexa,

i. é,

$$U(t) = v(Ie^{rt} - \bar{c})\phi(t)$$

Derivando a utilidade em função do tempo,

$$\begin{aligned} \dot{U} &= v'(Ie^{rt} - \bar{c})rIe^{rt}\phi(t) + \phi'(t)v(Ie^{rt} - \bar{c}) \\ 0 &< v'(Ie^{rt} - \bar{c})rIe^{rt}\phi(t) + \phi'(t)v(Ie^{rt} - \bar{c}) \\ v'(Ie^{rt} - \bar{c})rIe^{rt}\phi(t) &> -\phi'(t)v(Ie^{rt} - \bar{c}) \\ r &> \frac{-\frac{\phi'}{\phi}}{\frac{Ie^{rt}}{Ie^{rt}-\bar{c}}\varepsilon_v(Ie^{rt}-\bar{c})} \end{aligned} \tag{3.14}$$

assegura-se essa equação pois  $\phi > 0$ ,  $\phi' < 0$ ,  $v < 0$ ,  $v' > 0$ ,  $e^{rt} > 0$ ,  $I > 0$ , e  $r > 0$ . O fator desconto é positivo, porém cresce a uma taxa decrescente. A função valor no campo das perdas é negativa, mas sua derivada é positiva. A função exponencial, riqueza inicial e taxa de juros são positivas.

O que confirma a correção feita por AD [4].

### 3.4 Algumas Conclusões

Nesta seção reformulamos as suposições que dão base a teoria do prospecto intertemporal [19], e é através delas que se destacam a função valor e a função desconto. Isso tudo foi feito considerando as correções realizadas por AD [4].

Em particular, encontramos que a prova que deriva a solução hiperbólica generalizada é falha. Correções de AD baseadas em provas incorretas de LP geram falhas como resultado. Estas pequenas falhas não põem em dúvida a importância crítica da teoria do prospecto intertemporal.

## 4 *Generalização da medida de Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco considerando a teoria do prospecto*

### 4.1 Introdução

Para encontrarmos uma medida de aversão ao risco alternativa, recorreremos ao trabalho de Hartog, Carbonell e Jonker (2000) [12]. Para deduzir o valor da medida de Arrow-Pratt os autores utilizam a teoria da utilidade esperada para se referir a uma aposta, onde  $W$  é a riqueza,  $e$  é o valor pago pela compra do ticket da loteria,  $Z$  é o prêmio da loteria,  $a$  é a probabilidade de ganhar e  $(1 - a)$  a probabilidade de perder a aposta, ou seja:

$$U(W) = (1 - a)U(W - e) + aU(W + Z - e)$$

Desenvolvendo a expansão de Taylor<sup>1</sup> de  $U(W - e)$  e  $U(W + Z - e)$  em torno de  $U(W)$ , tem-se:

$$U(W) = U(W) + aZU(W) - eU'(W) + U''(W)\frac{(1 - a)e^2 + a(Z - e)^2}{2}$$

Isolando  $\rho = \frac{U''(W)}{U'(W)}$ , tem-se:

$$\rho = \frac{aZ - e}{\frac{e^2}{2} + \frac{aZ^2}{2} - eaZ}$$

---

<sup>1</sup>A fórmula de expansão de Taylor é dada por

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2}{2!}$$

$\rho$  depende das mesmas unidades nas quais  $W$  é mensurado.

Se supusermos que o valor de  $e = 0$  teremos uma situação de aversão ao risco, ou seja,  $\rho = \frac{2}{Z}$ ; agora se  $e = aZ$  (neutralidade ao risco) então  $\rho = 0$ ; e se  $e = Z$  há um grau de amor ao risco e  $\rho = -\frac{2}{Z}$ .

Ao diferenciar a função que mensura o risco em função do valor pago pelo bilhete de loteria, tem-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial e} = \frac{\rho}{(aZ - e)} + \rho^2$$

a inclinação desta transformação não é constante. A inclinação aumenta conforme o aumento do valor do bilhete.

## 4.2 A Medida

Ao invés da riqueza  $W$  utilizaremos  $P$  para denotar valor da ação. Assim supomos uma situação onde o valor da ação cai, existindo a possibilidade da ação voltar a subir  $P$  ou cair novamente  $P - 2L$ , assim, temos:

$$\nu(P - L) = a\nu(P) + (1 - a)\nu(P - 2L) \quad (4.1)$$

Desenvolvendo a expansão de Taylor para  $\nu(P)$  e  $\nu(P - 2L)$  em torno de  $\nu(P - L)$ , temos:

$$\nu(P) = \nu(P - L) + \nu'(P - L)L + \frac{\nu''(P - L)L^2}{2} \quad (4.2)$$

$$\nu(P - 2L) = \nu(P - L) + \nu'(P - L)(-L) + \frac{\nu''(P - L)(-L)^2}{2} \quad (4.3)$$

Substituindo as equações (4.2) e (4.3) em (4.1), temos:

$$\varrho = -\frac{\nu''(P - L)}{\nu'(P - L)} = \frac{4a - 2}{L}$$

Para  $a = 0$  teremos  $\varrho = -\frac{2}{L}$ , ou seja, um inacreditável grau de amor ao risco, para  $a = \frac{1}{2}$  (neutralidade ao risco) temos  $\varrho = 0$ , e para  $a = 1$  então  $\varrho = \frac{2}{L}$ .

A inclinação desta transformação é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial L} = \frac{(2 - 4a)}{L^2}$$

i. é, a variação da medida de aversão ao risco diminui (aproxima-se de zero), quando  $L$  é consideravelmente grande.

Agora se usarmos as funções valor especificadas no capítulo 1, e cujas fórmulas funcionais são dadas por

$$\nu(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^\beta, & x < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

e

$$\nu(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma_1} - 1}{1 - \gamma_1}, & x \geq 0 \\ -\lambda \frac{x^{1-\gamma_2} - 1}{1 - \gamma_2}, & x < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Diferenciando a função (4.4) acima em relação a  $x$ , tem-se:

$$\nu'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1}, & x \geq 0 \\ -\lambda\beta(-x)^{\beta-1}, & x < 0 \end{cases}$$

tendo como derivada segunda,

$$\nu''(x) = \begin{cases} \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}, & x \geq 0 \\ -\lambda\beta(\beta - 1)(-x)^{\beta-2}, & x < 0 \end{cases}$$

aplicando na medida de aversão ao risco dada por Arrow-Pratt, tem-se:

$$\mathbb{R}_a = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{x}, & x \geq 0 \\ \frac{\beta - 1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

Desenvolvendo o mesmo procedimento para a função (4.5):

$$\nu'(x) = \begin{cases} x^{-\gamma_1}, & x \geq 0 \\ -\lambda x^{-\gamma_2}, & x < 0 \end{cases}$$



P	$\delta = 0,21; \gamma = 0,15$	$\delta = 0,86; \gamma = 0,52$	$\delta = 1,51; \gamma = 0,89$
0,01	0,095356734	0,073081851	0,024661362
0,10	0,131218084	0,215281316	0,176038625
0,11	0,133049699	0,224782867	0,190209431
0,89	0,223213542	0,71836431	0,906605016
0,9	0,225995244	0,729430262	0,914326136
0,99	0,294967282	0,903666081	0,989032234

Figura 4: Tabela dos valores da função ponderada, com parâmetros  $\delta$  e  $\gamma$  especificados

Diferenciando novamente,

$$\nu''(x) = \begin{cases} -\gamma_1 x^{-(1+\gamma_1)}, & x \geq 0 \\ \lambda \gamma_2 x^{-(1+\gamma_2)}, & x < 0 \end{cases}$$

Então se utilizarmos a relação de Arrow-Pratt para este resultado, teremos:

$$\mathbb{R}_a = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{x}, & x \geq 0 \\ \frac{\gamma_2}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

### 4.3 Exemplo Numérico

Tomando o exemplo da seção 2.1, e os parâmetros da teoria do prospecto obtidos por Tversky e Fox [32] e Tversky e Kahneman [33], teremos

Na figura (4.3) acima constata-se que realmente há uma sobreavaliação para probabilidade próxima de zero, e uma subavaliação de probabilidades próximas de 1, por exemplo, a função ponderada para 0,01 é 0,09 e de 0,29 para probabilidade de 0,99, valores aproximados ( $\delta = 0,21; \gamma = 0,15$ ).

A figura (4.3), mostra os resultados da função valor ( $V(x,p) = \nu(x)w(p)$ ) para parâmetros  $\delta$ ,  $\gamma$  e  $\alpha$  especificados (considerando para  $\nu$  a equação (4.4)).

Verificou-se que para valores de  $\delta = 0,21; \gamma = 0,15$  a anomalia verificada por Allais ([5], [6]) é agora compreendida pela teoria. Considerando a sobreavaliação de probabilidades baixas, e subavaliação das altas, a função valor consegue capturar, para alguma situação, o efeito causador da anomalia de Allais. Assim sendo, ao optar por (a) no primeiro prospecto, confirma com a opção (d) no segundo prospecto.

$\delta = 0,21;$ $\gamma = 0,15$	$\alpha = 0,23$	$\alpha = 0,45$	$\alpha = 0,68$	$\alpha = 0,88$
$V_a$	1	1	1	1
$V_b$	0,413214938	0,493939683	0,615220065	0,354431626
$V_c$	0,133049699	0,133049699	0,1330496993	0,133049699
$V_d$	0,311723426	0,270726141	0,392006523	0,540863027
$\delta = 0,86$ $\gamma = 0,52$	$\alpha = 0,23$	$\alpha = 0,45$	$\alpha = 0,68$	$\alpha = 0,88$
$V_a$	1	1	1	1
$V_b$	1,030087736	1,162527784	1,361504934	1,605724505
$V_c$	0,224782867	0,224782867	0,224782867	0,224782867
$V_d$	0,311723426	0,444163474	0,643140624	0,887360195
$\delta = 1,51$ $\gamma = 0,89$	$\alpha = 0,23$	$\alpha = 0,45$	$\alpha = 0,68$	$\alpha = 0,88$
$V_a$	1	1	1	1
$V_b$	1,161505739	1,26980387	1,432510343	1,632212195
$V_c$	0,190209431	0,190209431	0,190209431	0,190209431
$V_d$	0,254900724	0,363198854	0,525905328	0,72560718

Figura 5: Tabela dos resultados da função valor  $V(x, p)$

## 5 Conclusão

Neste trabalho reformulamos as suposições da teoria do prospecto intertemporal [19] que destacam as funções valor e desconto (hiperbólica generalizada). Ao reexaminamos a teoria estamos considerando as recentes correções feitas por Al-Nowaihi e Dhami's [4]. Fazendo isto, encontramos erros remanecentes tanto no artigo de LP quanto no artigo de AD. Em particular, encontramos que a prova que deriva a solução hiperbólica generalizada é falha. Correções de AD baseadas em provas incorretas de LP geram falhas como resultado. Estes erros matemáticos são pequenos e não afetam nos resultados críticos da teoria. Contudo, ao destacar esses erros, espero contribuir para lapidar a apresentação da teoria do prospecto intertemporal.

Na seção 4, recorremos ao trabalho de HCJ para deduzir uma nova medida de aversão ao risco. Nesta medida, ao invés da riqueza  $W$  utilizamos o valor de uma ação  $P$ , para isso utilizamos a medida feita por Arrow-Pratt e adaptamos a feita mais tarde por HCJ, encontrando por consequência uma nova medida. Adaptação esta que visa capturar a teoria do prospecto intertemporal.

$$\varrho = -\frac{\nu''(P-L)}{\nu'(P-L)} = \frac{4a-2}{L}$$

Essa nova teoria assume aversão ao risco em um primeiro momento ( $P$ ), mas destaca o efeito “ponto de referência”, no qual indivíduos, ao obter um ganho ( $P+G$ ) em um determinado ativo, vendem-nos assumindo assim esse ganho; caso contrário, se realizaram uma perda no ativo ( $P-L$ ), permanecem com o ativo preferindo então, uma nova aposta de ganho-perda.

O que nos motivou a investigar essa nova teoria foi o paradoxo de Allais, pois através dele, verificou-se a não satisfação de alguns preceitos da teoria da utilidade esperada.

Logo após é realizado um exemplo numérico tomando valores para os parâmetros gerais da teoria do prospecto (graus de concavidade/convexidade). Estes parâmetros

utilizados na função valor foram obtidos por Tversky e Fox [32] e por Tversky e Kahneman [33], em seus trabalhos experimentais. Observamos que para os valores de  $\delta = 0,21$ ;  $\gamma = 0,15$  o paradoxo de Allais é satisfeito (veja figura 5). Ainda não verifica-se para os demais valores previstos pelos autores citados acima.

Recentes estudos trazem que anomalias na tomada de decisão diante de um investimento e/ou aposta podem ter bases neurológicas. O indivíduo pode seguir um comportamento coletivo, e portanto não tomar decisão totalmente movido pela racionalidade. Em estudos empíricos as pessoas reagiram ao risco de acordo com suas emoções. Isto trouxe uma nova discussão, conhecida como neuroeconomia.



## *Referências*

- M. Abdellaoui. Parameter-free elicitation of utility and probability weighting functions. *Manage. Sci.*, 46:1497–1512, 2000.
- M. Abdellaoui, H. Bleichrodt, and C. Paraschiv. Measuring loss aversion under prospecto theory: a parameter-free approach. *Unpublished manuscript*, 2004.
- J. Aczel. Lectures on functional equations and their applications. *Academic Press*, 1966.
- A. Al-Nowaihi and S. Dhami. A note on loewenstein-prelec’s theory of intertemporal choice. *Mathematical Social Sciences*, 52:99–108, 2006.
- M. Allais. Le comportement de l’homme rationel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l’école américaine. *Econometrica*, 21:503–546, 1953.
- M. Allais and O. Hagan. The so-called allais paradox and rational decisions under uncertainty, in: O.h.m. allais (ed), expected utility hipotesis and the allais paradox. *Reidel publishing Company*, pages 434–698, 1979.
- D. Bernoulli. Specimen theoriae novae de mensura sortis. *Acad. Sci. Imp.*, 5:175–192, 1738.
- C. Camerer, G. Loewenstein, and D. Prelec. Neuroeconomics: How neuroscience can inform economics. *Journal of economic literature*, 43:9–64, 2005.
- Duffie, Darrell, and K. Singleton. Simulated moments estimation of markov models of asset prices. *econometrica*, 61(4):929–952, 1993.
- I. Fisher. The theory of interest as determined by impatience to spend income and opportunity to invest it. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 36:783–784, 1930.
- R. Gonzales and G. Wu. On the shape of the probabilityweighting function. *Cogn. Psychol.*, 38:129–166, 1999.
- Hartog, Carbonell, and Jonker. On a simple survey measure of individual risk aversion. 2000.
- G. Jehle and P. Reny. *Advanced Microeconomic Theory*. second edition edition, 2001.
- D. Kahneman and A. Tversky. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47:263–291, 1979.
- D. Kahneman and A. Tversky. Reference theoryof choice and exchange. Unpublished working paper, 1990.

- M. Kuczama. An introduction to the theory of functional equations and inequalities: Cauchy's equation and Jensen's inequality. *Panstwowe Wydawnictwo Naukowe*, 1985.
- D. Laibson, A. Repetto, and J. Tobacman. Estimating discount functions from lifecycle consumption choices. January 2004.
- P. K. Lattimore and A. D. Baker. The influence of probability on risky choice - a parametric examination. *J. Econ. Behav. Organ.*, 17(3):377–400, 1992.
- G. Loewenstein and D. Prelec. Anomalies in intertemporal choice: evidence and an interpretation. *Quarterly Journal of Economics*, 107(573-597), 1992.
- D. McFadden. A method of simulated moments for estimation of discrete response models without numerical integration. *Econometrica*, 57(5):995–1026, 1989.
- J. V. Neumann and O. Morgenstern. Theory of games and economic behavior. *Princeton University Press*, 1944.
- A. Pakes and D. Polard. Simulation and the asymptotics of optimization estimators. *Econometrica*, 57(5):1027–1057, 1989.
- M. Petrovic. Sur une equation fonctionnelle. *Publications Mathematiques de l'Universite da Belgrade*, pages 149–156, 1932.
- Rathie, C. H. Radavelli, and S. D. Silva. Large sharpening intertemporal prospect theory. *Applied Mathematical Sciences*, 34(1):1695–1701, 2007.
- P. A. Samuelson. A note on measurement of utility. *Review of Economic Studies*, 4:155–161, 1937.
- H. M. Shefrim and M. Statman. The disposition to sell winners too early and ride losers too long. *Journal of Finance*, 40:770–790, 1985.
- Shui, Haiyan, and Awsubel. Time inconsistency in the credit card market. 2005.
- E. Silberberg. *The structure of economics. A mathematical analysis*. 1990.
- L. Sommer. New exposition on the measurement of risk. *Econometrica*, 22:23–26, 1738. Tradução do item acima.
- H. P. Thielman. On generalized Cauchy functional equations. *American Mathematical Monthly*, 56:452–457, 1949.
- C. Trepel, C. R. Fox, and R. A. Poldrack. Prospect theory on the brain? toward a cognitive neuroscience of decision under risk. *Cognitive Brain Research*, 23:34–50, 2005.
- A. Tversky and C. R. Fox. Weighing risk and uncertainty. *Psychol. Rev.*, 102:269–283, 1995.
- A. Tversky and D. Kahneman. Advances in prospect theory cumulative representation of uncertainty. *J. Risk Uncertain.*, 5(4):297–323, 1992.
- M. Weber and F. C. Camerer. The disorientation effect in securities trading: an experimental analysis. *University Mannheim*, October 1997.

M. E. Yaari. On the consumer's lifetime allocation process. *International Economic Review*, 5:304–371, 1964.