UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC

Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica

A LINGUAGEM NATURAL E A LINGUAGEM ALGÉBRICA:

nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental

KARINA ZOLIA JACOMELLI

Florianópolis-SC
2006

KARINA ZOLIA JACOMELLI

A LINGUAGEM NATURAL E A LINGUAGEM ALGÉBRICA:

nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal de Santa Catarina, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica.
Orientadora: Professora Doutora Neri Terezinha Both Carvalho.

Florianópolis-SC

2006

Dedico este trabalho
aos meus pais, Augustinho e Maria Bernadete,
às minhas irmãs, Karla e Karise,
aos meus sobrinhos, Jorge Luiz e Fernando,
e ao meu noivo, Alexandre.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por mais uma vez, ter me acompanhado durante um curso.

Aos meus pais, Augustinho e Maria Bernardete, por me oferecerem a oportunidade de estudar e por terem me apoiado até hoje.

Ao meu noivo, Alexandre, por estar ao meu lado em todos os momentos e por me apoiar nas difíceis decisões.

À professora Neri, que além de uma professora paciente, perseverante e realizadora foi uma amiga compreensível. Meu agradecimento especial por ter se empenhado tanto neste trabalho e por ter ajudado a realizar um sonho.

Aos professores Saddo e Claudia, por terem aceitado o convite de participarem da Banca Examinadora aceitando prontamente as exigências desta missão.

Aos professores, que se dedicaram o que puderam para esta realização.

Aos meus amigos e amigas, pelas palavras de incentivo e de afeto. Um agradecimento especial para Josiane e Cristini.

A todos aqueles que, de certa forma, incentivaram e desejaram esta conclusão.

RESUMO

Os relatos sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem da Álgebra fazem parte do discurso dos professores no seu cotidiano. Muitas dessas dificuldades são direcionadas à linguagem natural e a linguagem algébrica. Nosso estudo permitiu constatar que documentos oficiais recomendam, no ensino fundamental, explorar diferentes registros de representação, em particular a linguagem natural e a linguagem algébrica. Usando como referência elementos do estudo sobre os Registros de Representação Semiótica realizado por Raymond Duval, identificamos em duas coleções de livros didáticos exercícios propostos contemplando conversão e tratamento os quais organizamos em tipos. Na seqüência, a observação em uma classe de 7ª série nos permitiu conhecer a abordagem da Álgebra, feita por um professor, onde buscamos destacar o lugar dado à conversão e ao tratamento em situação real: a classe.

Palavras–chave: Registros de representação, Linguagem algébrica, Linguagem natural, Álgebra, Ensino fundamental.

ABSTRACT

Accounts concerning the difficulties of learning and teaching Algebra are part of the speech of teachers in their quotidian. Many of these difficulties are related to natural language and algebraic language. Our study allowed us to ascertain that official documents advise, in primary school, to explore different registers of representation, in particular natural language and algebraic language. Using as reference elements of the Theory of Registers of Semiotic Representation (Duval), we identified, in two collections of didactic books, proposed exercises concerning conversion and treatment, which we organized in types. After that, the observation of a 7th grade classroom allowed us to study the didactic approach to Algebra made by a teacher, where we highlighted the place given to conversion and treatment in a real world situation: the classroom.

Keywords: Registers of representation, Algebraic language, Natural language, Algebra, Primary school.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As dificuldades relativas ao ensino e aprendizagem da Álgebra no ensino fundamental são conhecidas. Há várias pesquisas, apresentadas no capítulo 1, que pontuam alguns aspectos.

A minha prática como professora e o meu trabalho de conclusão de curso nos permitiram constatar dificuldades dos alunos na escrita algébrica de instruções dadas em linguagem natural, bem como no tratamento de expressões algébricas elementares. Estas constatações e a hipótese de que a *compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica* (Duval, 2003, p. 15), serviram de base para uma reflexão que teve como conseqüência a formulação de algumas questões:

- Por que os alunos encontram tanta dificuldade para resolver problemas dados em linguagem natural que podem ser escritos por expressões algébricas?

- Como são trabalhados, no ensino fundamental, estes dois tipos de linguagem, natural e algébrica?

- Os livros didáticos oferecem a oportunidade de trabalhar estas questões? De que maneira isto acontece?

- E, independente dos livros didáticos, como o professor trabalha a abordagem da linguagem algébrica em sala?

Essa inquietação nos leva a escolha do tema de pesquisa desta dissertação: a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e vice-versa.

Neste trabalho, a linguagem natural se refere ao estilo retórico da história da Álgebra. Este estilo é um dos estágios no desenvolvimento da notação algébrica e significa explicação ou redação discursiva na língua corrente. A linguagem algébrica, consideramos como sendo uma parte da linguagem matemática que abrange o estilo simbólico. É a linguagem das letras usadas como parâmetros, incógnitas ou variáveis e suas operações.

Para apresentar o nosso estudo, estruturamos a dissertação em capítulos conforme segue:

Capítulo 1: Neste capítulo apresentamos o estudo de cinco trabalhos em educação matemática. Apesar de alguns serem mais elementares, todos tratam da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e vice-versa e ilustraram essas duas conversões como uma dificuldade para a aprendizagem de matemática. Apresentamos também, o estudo realizado de três documentos oficiais - Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) e Diretrizes da Secretaria de Estado da Educação e do Desporto (2001). Buscamos identificar, nesses documentos, qual a relevância dada quanto aos registros em linguagem natural e linguagem algébrica, além de possíveis considerações aos termos tratamento e conversão. Terminamos o capítulo com a apresentação de nossa problemática.

Capítulo 2: Neste capítulo apresentamos elementos da teoria de Duval quanto aos registros de representação semiótica. Mais particularmente aos termos tratamento, conversão, congruência e não congruência. Ainda, sucintamente, apresentamos a metodologia para a realização do estudo dos livros didáticos e para a observação em classe, ambos a luz das representações semióticas. Para observar as aulas consideramos proposições da observação naturalista em classe de Comitti.

Capítulo 3: Apresentamos, neste capítulo, o estudo realizado dos livros didáticos de 5ª a 8ª séries do ensino fundamental de duas coleções. Buscamos identificar nos exercícios propostos pelos autores a questão da conversão e do tratamento relacionados com a linguagem natural e/ou linguagem algébrica. Quanto às conversões, consideramos os termos de congruência e não congruência da Teoria das Representações Semióticas.

Capítulo 4: Neste capítulo relatamos fatos da observação feita em uma classe de 7ª série do ensino fundamental da grande Florianópolis. Buscamos identificar se o professor trabalha e como ele trabalha os registros em linguagem natural e em linguagem algébrica em termos de conversão e tratamento.

CAPÍTULO 1

ESTUDOS PRELIMINARES E PROBLEMÁTICA

Neste capítulo serão apresentados resultados de pesquisas que realizamos na área da Educação Matemática que tratam da linguagem natural e/ou da linguagem algébrica como um fator responsável pelas dificuldades de aprendizagem em Matemática. Apresentamos ainda o estudo dos documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) e Diretrizes da Secretaria de Estado da Educação e do Desporto (2001) – nos quais identificamos elementos que dão lugar no ensino a um trabalho que leva em conta diferentes registros de representação semiótica, particularmente os registros em linguagem natural e/ou linguagem algébrica. Terminamos este capítulo expondo nossa problemática.

1.1. Trabalhos em Educação Matemática

Em Educação Matemática, no contexto da Álgebra, são muitos os trabalhos desenvolvidos que fazem uso de registros de representação semiótica[1]. A título de conhecimento, citamos três:

1. Ribeiro (2001) preocupou-se em levantar, identificar e analisar os procedimentos e estratégias que os alunos da 8ª série do ensino fundamental utilizavam para resolver questões de Álgebra Elementar; também identificou possíveis causas para erros mais freqüentes. Com base nos documentos do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), o autor elaborou cinco questões abertas e as apresentou para que 20 alunos da rede pública estadual de São Paulo respondessem. As questões propostas tinham por objetivo: verificar se o aluno é capaz de traduzir uma situação-problema em uma expressão algébrica; verificar se o aluno sabe interpretar um problema traduzido por um sistema de inequações do 1º grau; e verificar de que forma o aluno soluciona uma equação. Observamos que o primeiro objetivo busca trabalhar a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, o

[1] Estes trabalhos não são, necessariamente, desenvolvidos sob a Teoria de Registros de Representação Semiótica estudada por Raymond Duval.

segundo a passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural e o terceiro objetivo, o tratamento em linguagem algébrica.

2. Em sua pesquisa, Júnior (2002), investigou primeiramente, por meio de um teste-diagnóstico, se os alunos (de uma determinada turma) que estavam terminando o ensino médio conseguiam resolver alguns problemas de programação linear que podem ser solucionados principalmente com o sistema de inequações do 1º grau (já estudado pela turma). Depois de confirmada a hipótese de que esses alunos teriam dificuldades de resolver esses problemas e considerando o tratamento, a conversão e a coordenação dos registros de representação de um objeto matemático proposto por Duval, foi elaborada uma seqüência didática aplicada a uma segunda turma de 3º ano do ensino médio. Com esses dados, foi feita uma análise comparativa entre o teste-diagnóstico aplicado na primeira turma e o pós-teste aplicado na segunda turma.

O autor buscou observar, entre outras coisas, se o aluno teria condições mais favoráveis tanto para apreensão do objeto matemático (sistema de inequações de 1º grau) quanto para aplicar seus conhecimentos na resolução de problemas de otimização. Para isto, inseriu no processo ensino-aprendizagem atividades que focalizavam o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros de representação algébrico, gráfico e da língua natural do objeto matemático em questão.

3. Freitas (2002) estudou aspectos relativos aos procedimentos de resolução de equações do primeiro grau utilizados por alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola particular de São Paulo. Mais especificamente, esta pesquisa refere-se aos erros relacionados aos aspectos conceituais e aos métodos de resolução das equações do 1º grau.

O autor apresentou 24 equações do primeiro grau com coeficientes inteiros, para que os alunos resolvessem. Com a finalidade de elaborar as conclusões de seu estudo, tendo por base as resoluções apresentadas pelos alunos, realizou entrevistas com eles. Em nossa interpretação, esta pesquisa foi desenvolvida com o intuito de verificar procedimentos de resolução realizados com base em um único registro de representação: a linguagem algébrica.

Os três trabalhos citados fazem uso dos registros de representação em linguagem natural, linguagem algébrica e linguagem figural. Os conceitos de conversão e tratamento também são utilizados mesmo que implicitamente. Vejamos alguns trabalhos que dão algum indicativo de dificuldades dos alunos diante de situações-problema que envolvam, mais especificamente, a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e vice versa.

De acordo com essa especificidade, apresentamos cinco trabalhos desenvolvidos em Educação Matemática. Diferentemente dos três trabalhos citados acima, estes ilustram a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica como sendo fator responsável pela dificuldade de aprendizagem em Matemática.

1. Jacomelli (2003) no trabalho de conclusão do curso de Matemática, habilitação Licenciatura em Matemática, observou as dificuldades dos alunos do ensino fundamental em trabalhar com expressões algébricas. O tema do trabalho foi "Polinômio". Neste estudo buscava-se conhecer como os livros didáticos apresentavam o objeto "Polinômio" no ensino fundamental, além de buscar identificar dificuldades na resolução de situações-problema envolvendo a Álgebra. Foi realizada uma sondagem com 125 alunos de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental[2]. Um dos exercícios propostos aos alunos tinha a intenção de identificar elementos que pudessem mostrar como um aluno de 7ª série do Ensino Fundamental trabalha a questão da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica[3]. O exercício proposto foi o seguinte:

Preencha, seguindo as instruções, a tabela abaixo:

Instruções	*Dê um exemplo*	*Expresse as instruções usando a álgebra*
Pense em um número		
Ache o seu dobro		
Some 3 ao resultado		
Triplique o que você obteve		
Subtraia 9 do resultado		
Divida tudo por 6		

O que você pode concluir em relação ao resultado obtido e ao número pensado? Explique por que isto acontece.

Quanto às respostas, em relação ao exemplo numérico (coluna "Dê um exemplo"), os resultados obtidos foram: 102 acertos (81,6%) e, apenas 01 aluno (0,8%) não respondeu. No

[2] No nosso trabalho de conclusão de curso, pesquisa de Jacomelli (2003), constam apenas 21 alunos de 7ª série do Ensino Fundamental. Depois de concluir o trabalho, fizemos novas aplicações para mais 104 alunos de 8ª série.

[3] No trabalho original, Jacomelli (2003) trata da linguagem simbólica. Nesta pesquisa, interpretamos como linguagem algébrica.

entanto, em relação à solicitação “Expresse as instruções usando a álgebra”, zero acerto (0%) e 26 de 102 alunos (20,8%) deixaram em branco, isto é, nem tentaram responder. Entre os erros identificados destacamos: o “dobro de um número” como x^2; o “dobro de um número somado com três” como 5x; o “triplo da soma do dobro de um número com três” como 3 . 2x +3. Quanto à resposta à pergunta “O que você pode concluir em relação ao resultado obtido e ao número pensado? Explique por que isto acontece”, 2 alunos (1,6%) responderam corretamente. Do restante, 74 alunos (59,2%) perceberam que conseguiam chegar ao número pensado, mas não sabiam o porquê; 27 alunos (21,6%) nem perceberam o acontecido e 22 alunos (17,6%) deixaram em branco. Um dos motivos para esse resultado foi à dificuldade de dar tratamento à expressão algébrica encontrada. Neste estudo, concluí-se que existe uma grande dificuldade dos alunos para representar algebricamente situações elementares propostas em linguagem natural.

Esta constatação reforça a afirmação de Araújo et al (2002, p. 7). Para os autores a linguagem algébrica é um importante elemento a ser considerado, ou seja, quando se está no campo algébrico para a resolução de um problema “há todo um trabalho no sentido de entender o que o problema propõe; de estabelecer relações [...]; de transformar o problema verbal em linguagem algébrica [...]”. Para poder realizar um trabalho no sentido de entender o que um problema propõe é necessário não somente aprender, mas usar adequadamente a linguagem natural.

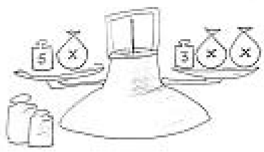
2. Miranda (2003) em seu trabalho de conclusão do curso teve por objetivo estudar as dificuldades e/ou estratégias dos alunos de 8ª série para resolver uma equação do 2º grau. A autora não contava, em sua experimentação, com o estudo das dificuldades dos alunos em representar na linguagem algébrica um enunciado expresso em linguagem natural, ao executarem as tarefas. Dentre os exercícios propostos, submeteu a quatro duplas de alunos de 8ª série do ensino fundamental o seguinte enunciado: “*O quadrado de um número menos o triplo desse número é igual a zero. Determine esse número”* (MIRANDA, 2003, p. 51).

O estudo das resoluções dos alunos mostra erros do seguinte tipo: o “triplo de um número” representado por x^3, obtendo então a equação $x^2 - x^3 = 0$. Na seqüência da experimentação, as duplas não souberam resolver a equação. Este resultado nos deu um indicativo de que não somente os alunos têm dificuldades na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica como também têm dificuldades de tratamento da equação em linguagem algébrica.

Segundo Carmo (2001), a dificuldade de tratamento em linguagem algébrica é um dos fatores responsáveis por reprovação em Matemática. Para o autor, é preciso ter o domínio da linguagem algébrica[4] e, "para o domínio desta linguagem, faz-se necessário o aprendizado de seus códigos verbais, a fim de que a leitura de expressões matemáticas apresente algum sentido lógico para quem as lê" (CARMO, 2003, p. 1). O aprendizado da linguagem natural não ocorre de imediato e com a linguagem algébrica não é diferente. Isso quer dizer, segundo o autor, que o aprendizado da linguagem algébrica só pode ocorrer se se dispuser de um alicerce ainda mais importante: o domínio prévio do nosso código lingüístico, ou seja, o aprendizado e o uso adequado da linguagem natural. Em outras palavras e, concordando com Araújo et al (2002), não se aprende a linguagem matemática sem a linguagem natural.

3. Meira (2003) em um boletim realizado pela TV Escola, relata uma experimentação cujo objetivo foi estudar equações polinomiais do 1º grau via resolução de problemas. Vejamos um dos exercícios propostos a alunos de 7ª série do ensino fundamental:

> *"Quanto deve pesar cada saco para que a balança permaneça em equilíbrio?".*



Como podemos ver, em um dos pratos temos um saco com o número 5 e outro com a letra x, e no outro prato o número 3 e dois sacos com a letra x. No estudo das resoluções dos alunos, o autor identificou representações da tarefa dada por $5 + x = 3 + 2x$ como sendo $5x.3x^2$. Temos aqui indicativos das dificuldades dos alunos na formulação em linguagem algébrica de um enunciado cuja representação passa pela leitura e interpretação.

4. Freitas (2003) fez um estudo sobre tratamento e conversão de registros de representação na produção de provas na passagem da aritmética para a álgebra. Realizou um

[4] Carmo (2001), em seu trabalho, trata da "linguagem matemática" e afirma que suas reflexões podem se estender para as demais noções matemáticas presentes nos conteúdos pragmáticos das diversas séries de ensino. Em nosso trabalho limitamos à "linguagem algébrica" o interesse de nosso estudo.

experimento com 147 alunos de colégios franceses[5]. Um de seus objetivos era analisar tipos de registros e procedimentos utilizados durante as produções. Entre os problemas propostos destacamos o seguinte: *"Um aluno diz que encontrou 3 números ímpares cuja soma é 20. É dado a você esse problema. Qual é sua solução? Explique sua resposta e conte como a obteve"* (FREITAS, 2003, p. 117)

Este problema, segundo Freitas, foi testado em quatro modalidades. Cada modalidade possui duas variáveis de comando. A primeira assume dois valores (3 e 5, sendo 3 no exemplo citado) que correspondem à quantidade de números ímpares que adicionamos. A segunda modalidade corresponde à soma obtida e assume também dois valores (20 e 100, sendo 20 no exemplo citado). Um outro objetivo deste problema era fazer aparecer uma variedade (a mais ampla possível) de tipos de provas.

Nesse mesmo artigo, a título de ilustração, o autor apresentou a resolução realizada por uma aluna que recebeu o problema referente à modalidade (3, 100), ou seja, "encontrar 3 números ímpares cuja soma é 100". Vejamos a resolução desta aluna:

Números ímpares: $x + 1$ $\quad (2 + 1 = 3)$

$(x + 2) + 1 \quad (2 + 2) + 1 = 5$ *ímpar*

$(x - 2) + 1 \quad (2 - 2) + 1 = 1$ *ímpar*

Eu submeto a equação com minha incógnita x que eu admiti acima a alguns testes:

$x + 1 + x + 2 + 1 + x - 2 + 1 = 100$

$3x + 3 = 100$

$3x = 100 - 3 = 97$

$x = \frac{97}{2} =$

Passagem 1

....

$100 \div 3 \approx 33$

$31 + 33 + 35 = 99$

Passagem 2

....

2 números ímpares somados entre eles dão um número par e 100 menos um número par dá um número par e então não podemos, somando 3 números ímpares, cair em 100, número par.

Passagem 3

....
......

Se x é ímpar *um número par: 2x*

[5] As idades dos alunos variavam entre 14 e 15 anos, sendo 74 alunos de troisième (corresponde à 8ª série do ensino fundamental no Brasil) e 73 alunos de seconde (corresponde a 1ª série do ensino médio no Brasil).

Se x é par *número ímpar: x + 1 ou x – 1*
→ *2x + 1 ou 2x – 1 número ímpar*
3(2x + 1) → *6x + 3*
$(2x + 1) + (2y + 1) + (2a + 1) = 100$
$2x + 1 + 2y + 1 + 2a + 1 = 100$
$2x + 2y + 2a = 97$
$2(x + y + a) = 97$
$x + y + a = \frac{97}{2}$ *então uma das incógnitas x, y ou a não é inteira.*
Não tem solução.
(p. 122)[6]

Passagem 4

O autor observa que a aluna começa a resolução por um modelo algébrico e que esta tentativa não corresponde ao grau de generalidade do problema (Passagem 1). Em seguida, ela considera três inteiros consecutivos (Passagem 2). Na seqüência, a aluna produz uma prova por enunciados, dando tratamento lógico correto (Passagem 3). Afirma ainda que esta aluna não se contenta com o tipo de prova que produziu e retorna ao registro algébrico (Passagem 4). Finalmente, no registro algébrico, ela redige uma prova com um bom nível de generalidade. O autor alerta que, além dos tratamentos com elevado nível de abstração, para chegar à solução final, foi necessário que várias conversões de registros fossem feitas.

A experimentação mostrou a distinção de dois tipos de provas relativas ao campo aritmética-álgebra: a prova por enunciados e a prova algébrica. Essa distinção foi feita levando em conta os tipos de registros de representação empregados pelos alunos (linguagem natural versus linguagem algébrica). Além disso, também foram consideradas as transformações de registros realizadas: num primeiro momento, na prova por enunciados visando organizar a forma dedutiva das proposições e, num segundo momento, a prova algébrica visando atingir relações gerais.

O autor concluiu que a produção de prova algébrica é, em geral, precedida de provas por enunciados. As observações "*mostraram que essas provas não apresentam as "qualidades" suficientes para ser aceitas como tais pelos alunos, pois, mesmo após terem produzido uma prova por enunciado, eles continuam procurando 'provar' algebricamente*" (FREITAS, 2003, p. 124).

Podemos observar que, para Freitas (2003), a prova feita em linguagem natural era suficiente. Markarian (2004) não contraria esta idéia, mas defende o uso da linguagem

---

[6] A separação feita por traços horizontais e pontilhados foi feita pelo autor para, segundo ele, facilitar a leitura das diferentes conversões que são destacadas no discurso da aluna.

algébrica. Esse autor afirma que a linguagem em geral, na matemática, ajuda a enriquecer a capacidade de transmissão, simplifica os modos de pensar e permite chegar diretamente no cerne dos problemas. Acrescenta ainda que um bom manejo na linguagem oral clarifica a apresentação de idéias complicadas e evita rodeios na descrição de situações.

5. Samora e Tancredi (2004) identificaram conceitos algébricos apropriados por alunos que freqüentavam um curso pré-vestibular da cidade de São Carlos. De posse de um levantamento dos conceitos algébricos em vigor presentes em propostas educacionais para o ensino da Matemática, as autoras elaboraram uma lista com 31 objetos algébricos que os alunos, ao final da escolaridade obrigatória, deveriam ser capazes de compreender. Diante desta lista foi realizado um teste com 38 alunos e cada um teve que nomear e justificar sua classificação para cada objeto algébrico apresentado, o que implica em uma leitura (uso da linguagem natural) e reconhecimento de uma expressão dada em linguagem algébrica. Vejamos alguns destes objetos algébricos e os resultados obtidos pelo teste, no quadro a seguir[7]:

[7] Alguns alunos acertaram a classificação, mas não justificaram suas respostas, por isto elas não estão incluídas aqui. O quadro que estamos apresentando não se encontra no documento original, pois as autoras expuseram cada objeto em forma de texto.

Quadro 1 – Resultados obtidos referente a tarefa “nomear e justificar a classificação de cada objeto algébrico”.

Samora e Tancredi (2004) concluíram que a idéia de que a matemática é difícil de justificar é correta para esse grupo de alunos. Mesmo quando acertam as classificações, muitos

Objeto algébrico	**Número de alunos que não classificaram**[8]	**Número de erros**	**Denominação incorreta**	**Justificativa**
$\frac{3x}{5}$	23 (60,5%)	8 (21%)	Potenciação	-
			Divisão	está dividindo *3x* por *5*
			Fração	é uma divisão
$6y^5$	16 (42%)	13 (34,2%)	Expressão exponencial	-
			Incógnita	-
			Potenciação	-
$2ax - 3xy$ [9]	4 (10,4%)	-	-	-
$\frac{x+2}{2}$	18 (47,4%)	6 (15,8%)	Fração	traço da divisão
			Monômio	possui incógnita
			divisão com variável	-
$\frac{x+y}{2}$	18 (47,2%)	7 (18,4%)	Potenciação	-
			Divisão	- relação entre x + y e 2 - soma de duas incógnitas dividido por um número
			Fração	-
$x^2 + 5y + 6z$	10 (26%)	9 (23,7%)	equação de 2º grau	- há incógnitas com expoente 2 - tem mais de uma variável
			Incógnita	-
			Potenciação	-
$9x^4 - 5x^2 - 4$	11 (28,9%)	20 (52,6)	equação biquadrada	-
			equação de 4º grau	-
			Equação	-
			equação de 1º grau	-
			equação de 2º grau	-
			soma de quadrados	-
			equação exponencial	-
x^2y+xy^2-xy-3	18 (47,3%)	8 (21%)	equação de 2º grau	incógnita elevada ao quadrado
			produtos notáveis	-
			binômio	- dois termos diferentes - pode colocar *x* e *y* em evidência
			variáveis com incógnita	-

[8] As respostas dos alunos que disseram “não lembro” e “não sei” estão incluídas neste item.
[9] Embora 34 alunos tenham dado respostas satisfatórias, 10 deles (29,4%) não as justificaram.

dos alunos deixam de justificar ou usam argumentação incorreta, o que indica falta de compreensão ou aquisição incompleta do conceito. As autoras concluem que, mesmo que estes alunos saibam operar com objetos algébricos (o que não foi avaliado), isto não lhes permite aprendizagem compreensiva de conceitos mais avançados e talvez, menos ainda, resolver problemas. Em vista disto, concluem que "os conceitos algébricos iniciais são os alicerces para a formação de conceitos algébricos posteriores" (SAMORA e TANCREDI, 2004, p. 7).

As autoras constataram mais de 50% de alunos que não classificaram ou que erraram. Para a expressão $x^2 + 5y + 6z$ foi designado equação do 2º grau com as seguintes justificativas: "ter incógnitas com expoente 2" ou "ter mais de uma variável". Esta outra expressão x^2y+xy^2-xy-3 foi designada binômio com as justificativas: "dois termos diferentes" ou "poder colocar x e y em evidência".

Estas pesquisas nos mostram que os alunos encontram dificuldades quando no desenvolvimento de exercícios são exigidas na tarefa mudanças de representação e tratamento referentes aos registros em linguagem natural e/ou linguagem algébrica. Essas dificuldades provocam, entre outros, o seguinte:

- erros como o "dobro de um número" ser x^2 ou o "triplo da soma do dobro de um número com três" ser $3.2x + 3$.
- o não entendimento do desenvolvimento do tratamento algébrico impossibilitando uma explicação em linguagem natural da situação dada.
- a falta de dar continuidade a uma expressão algébrica obtida incorretamente pela dificuldade de dar tratamento algébrico.
- a busca de uma resolução em linguagem algébrica por não aceitar a linguagem natural como tal.

Esses fatos nos dão indicativos da importância dos conceitos algébricos no estudo da Matemática, quando buscamos o reconhecimento de padrões, estruturas e da generalização de resultados.

Em vista disto, uma questão se coloca: em relação ao ensino fundamental, o que está preceituado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), na Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) e nas Diretrizes da Secretaria de Estado da Educação e do Desporto (2001), como princípios gerais referentes ao trabalho em diferentes registros e representação no contexto da Álgebra?

Para buscar elementos de resposta a esta questão, apresentamos o estudo dos documentos oficiais a seguir.

1.2. Estudo dos Documentos Oficiais

1.2.1. Álgebra

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dão ênfase ao ensino da álgebra. Segundo os PCN, situações-problema envolvendo a álgebra garantem que seu ensino e aprendizagem aconteçam de forma significativa. A álgebra, como linguagem, permite elaborar e conceber o significado matemático:

> *O ensino de álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significados à linguagem e às idéias matemáticas. Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difícies do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas* (PCN, 1998, p. 84).

A Proposta Curricular de Santa Catarina, assim como os PCN, enfatizam o trabalho com situações-problema. Isto quando justificam como garantir o ensino e aprendizagem da álgebra de forma significativa. Segundo a PCSC, para garantir que o ensino da álgebra tenha mais sentido para o aluno, é preciso

> não se reduzir ao transformismo algébrico, ou seja, ao cálculo algébrico. Para que o aluno atribua sentido a álgebra, deve-se trabalhar com a *álgebra também quando se estudam equações e inequações, relações e funções;* explorando *os vários significados das letras (como valores numéricos, como incógnitas, como variáveis e como símbolos abstratos);* atribuindo *significados geométricos, físicos ou sociais às expressões algébricas;* obtendo *modelos matemáticos representativos de situações problemas da realidade e* explorando *geometricamente os processos do transformismo algébrico (operações com polinômios e fatoração)* (PCSC, 1998, p. 111).

Já as Diretrizes da Educação do Estado de SC e do Desporto (2001, p. 65) consideram que a “álgebra deve ser interpretada como uma linguagem que representa o movimento da matemática com as outras áreas do conhecimento e como uma leitura da realidade”. Podemos considerar a “leitura da realidade” como uma chamada para se trabalhar situações-problema, atendendo as proposições dos PCN e da PCSC, visto que uma das melhores maneiras de se trabalhar a realidade é no contexto de situações-problema.

Como pudemos examinar nos Parâmetros Curriculares Nacionais, a álgebra é especialmente desenvolvida nas séries finais do Ensino Fundamental. A despeito disto, ela pode também ser introduzida nas séries iniciais, desenvolvendo alguns de seus aspectos (PCN, 1998, p. 50). Estamos de acordo com a afirmação de que "a introdução da linguagem simbólica dar-se-á gradativamente no Ensino Fundamental" (PCSC, 1998, p. 111). Além de sugerir que a álgebra seja trabalhada de forma gradativa, a PCSC oferece um quadro mostrando, no campo algébrico, aspectos que podem ser abordados em cada série do Ensino Fundamental:

		ENSINO FUNDAMENTAL								ENSINO MÉDIO		
CAMPOS ALGÉBRICOS	PRÉ	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	1ª	2ª	3ª
1. ALGEBRA												
• Produção histórico cultural												
• Seqüências												
• Conceitos												
• Operações com expressões algébricas (calculo algébrico. Produtos notáveis e fatoração)												
• Expressões polinomiais de uma ou mais variáveis.												
2. RELAÇÕES E FUNÇÕES												
3. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES												
4. MATRIZES E SISTEMAS LINEARES												

Quadro 2 – Aspectos que podem ser abordados em cada série do ensino fundamental.
Fonte: SANTA CATARINA (SC). Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. *Proposta Curricular de Santa Catarina*: *Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio: disciplinas curriculares*. Florianópolis: COGEN, 1998.

1.2.2. Diferentes Registros de Representação

Os PCN indicam como um dos objetivos do ensino fundamental fazer com que os alunos sejam capazes de utilizar diferentes linguagens como "meio para produzir, expressar e comunicar suas idéias" (p. 4). Entre estas linguagens, temos a natural[10] e a matemática[11]. A linguagem oral, enfatizada por Markarian (2004), como já fizemos referência anteriormente, também tem seu espaço, porquanto os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmam que ao se comunicar matematicamente o aluno deve "descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas" (PCN, 1998, p. 48).

O uso da linguagem oral e escrita aparece como competência e habilidade necessárias por parte do aluno para "discutir e comunicar descobertas e idéias matemáticas, através de uma linguagem escrita e oral, não ambígua e adequada à situação" (DIRETRIZES, 2001, p.69).

Destacamos da afirmação acima dos PCN o fato de estabelecer relações com diferentes representações. Ou seja, é dever do aluno, ao descrever, representar, apresentar e argumentar sobre os resultados obtidos, transitar em diferentes tipos de representação como, por exemplo, as representações em linguagem natural e em linguagem algébrica. A Proposta Curricular de Santa Catarina concorda com este fato argumentando que "no processo de apropriação da linguagem algébrica o registro gráfico exerce um papel fundamental" (PCSC, 1998, p. 111). Sem argumentos, mas reforçando os PCN e a PCSC, as Diretrizes (2001, p. 69) consideram como competências e habilidades do aluno: "ler, interpretar e utilizar representações matemáticas".

1.2.3. Linguagem Algébrica

A linguagem algébrica é considerada como uma construção necessária para descrever simbolicamente regularidades: "é interessante também propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente" (PCN, 1998, p. 117). Por outro lado, a linguagem algébrica[12] é considerada como sendo "um instrumento facilitador na simplificação de cálculos..." (PCSC, 1998, p. 111). Além disso, em concordância com os PCN, a Proposta Curricular de Santa Catarina (1998, p. 111) afirma que:

[10] Nesta dissertação interpretamos como linguagem natural a expressão "linguagem verbal" dos PCN.
[11] Consideramos a linguagem matemática uma linguagem que abrange, também, a linguagem algébrica.
[12] A PCSC trata da linguagem algébrica como linguagem simbólica.

o desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua linguagem exige atividades ricas em significados que permitam ao aluno pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar estas regularidades matematicamente, pensar analiticamente e estabelecer relações entre grandezas variáveis. [...]

As Diretrizes também destacam a questão da generalização, propondo que o aluno deve "explorar individual e/ou coletivamente, situações-problema, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações e pensar de maneira lógica" (DIRETRIZES, 2001, p. 69), como formas de desenvolver suas competências e habilidades.

1.2.4. Linguagem Natural

A argumentação, que é desenvolvida pela linguagem natural, faz com que os alunos "não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. [...] A argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é redigida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal" (PCN, 1998, p. 70). Sendo assim, o uso da linguagem natural através do argumento está vinculado com a justificativa e só será aceito se for pertinente, ou seja, "se ele estiver sustentado por conteúdos matemáticos e se for possível responder os contra-argumentos ou réplicas que lhe forem impostas" (ibidem). A prática da argumentação, segundo os PCN, permite defender diferentes pontos de vista em diferentes discursos e não só conduz como possibilita as demonstrações em geral. Saber expressar-se verbalmente é uma das competências e habilidades exigidas pelas Diretrizes (2001, p. 69). É preciso "saber utilizar a linguagem matemática, no que se refere ao conhecimento sistematizado sendo capaz de interpretar e expressar (verbal e textualmente) os fenômenos naturais, físicos e sócio-econômico".

1.2.5. Passagem da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica

As Diretrizes (2001, p. 69) reservam um lugar para o trabalho com a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, quando afirma: "[...] ler, escrever e interpretar situações sociais na linguagem materna transpondo-as para a linguagem matemática". Já nos PCN, há uma possível consideração quanto à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Identificamos esta transformação, apresentada implicitamente, quando se afirma no item “conceitos e procedimentos” a “tradução de situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau [...] (PCN, 1998, p. 87)”. A tradução neste caso seria o trabalho realizado para sair de uma representação para outra, podendo ser da representação em linguagem natural para a representação em linguagem algébrica e vice versa.

Entendemos que os documentos oficiais, relativo à Álgebra, dão lugar a um trabalho que leva em conta a mudança de registro de representação e o tratamento em cada registro.

1.3. Problemática

Os trabalhos de pesquisa em Educação Matemática mostram que a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica (e vice-versa) é causa da dificuldade para resolução de exercícios. Observando o exercício proposto por Jacomelli (2003), verificamos que preencher uma tabela seguindo instruções e responder a uma pergunta foi uma tarefa que nenhum dos alunos conseguiu concluir. Miranda (2003) e Meira (2003) não conseguiram observar o que pretendiam porque os alunos, ao realizar a tarefa, erram a representação algébrica de um texto dado em linguagem natural. Em Freitas (2003), diferentemente dos trabalhos citados acima, observamos uma defasagem, ou falta de informação, por parte da aluna ao realizar a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Mais ainda, a insistência de obter uma resolução em linguagem algébrica.

A respeito da passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural, o estudo de Samora e Tancredi (2004) mostra que, além de nomear a expressão dada em linguagem algébrica de forma errada, a justificativa na resolução não é adequada. Constataram mais de 50% de alunos que não classificaram ou que erraram.

Não podemos deixar de notar a dificuldade quanto ao tratamento em linguagem algébrica às expressões obtidas nos exercícios propostos. Em Miranda (2003) e Meira (2003) isso apareceu claramente. Em Jacomelli (2003), as dificuldades de tratamento de expressões em linguagem algébrica ficam também evidentes.

Temos então que alunos encontram dificuldades ao trabalhar com a linguagem natural e/ou com a linguagem algébrica tanto em termos de troca de representação como de tratamento em cada uma das representações[13]. Entretanto, o estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais e da Proposta Curricular de Santa Catarina nos mostrou que estes documentos, garantem que o ensino da Álgebra se realiza e que a aprendizagem deve se dar de forma significativa. As Diretrizes da Educação do Estado de SC e do Desporto (2001) acreditam que a Álgebra deve ser considerada como uma linguagem, tendo como uma de suas funções, fazer uma leitura da realidade.

Os três documentos já citados consideram a linguagem algébrica como necessária para descrever simbolicamente regularidades, ou seja, para padronizar situações. Especificamente para os PCN, a linguagem natural tem um papel importante na "argumentação" e na "justificativa", enquanto que para as Diretrizes a linguagem natural é necessária para expressar textualmente o conhecimento sistematizado.

Notamos ainda, explicitamente nas Diretrizes (2001) e implicitamente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), o lugar referente à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. A representação da transformação das situações-problema numa linguagem matemática pode ser deduzida pela utilização dos termos "transpor" (DIRETRIZES, 2001) e "traduzir" (PCN, 1998). A partir do exposto e levando em conta que tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais quanto na Proposta Curricular de Santa Catarina a classe de 7ª série é a Instituição em que é feita a primeira abordagem sistemática sobre "Expressões Algébricas" e considerando mais precisamente que a abordagem da "Álgebra" é feita a partir da 5ª série do ensino fundamental, formulamos as seguintes questões:

1. De que maneira os livros didáticos realizam um trabalho que contempla a conversão e o tratamento referente aos registros de representação em linguagem natural e em linguagem algébrica?

2. O professor, ao introduzir Álgebra em uma classe de 7ª série do Ensino Fundamental, considera os registros em linguagem natural e em linguagem algébrica? Se sim, como o professor trabalha esses registros em termos de conversão e tratamento?

---

[13] Estes trabalhos que foram citados nessa dissertação têm por objetivo mostrar a importância de se estudar a linguagem natural e a linguagem algébrica no ensino da Matemática. Não temos a intenção de pesquisar nem de estudar dificuldades de alunos.

A primeira questão de pesquisa se justifica pelo fato de que o livro didático é a referência à qual todos os professores recorrem para preparar suas atividades sobre o que e como ensinar. Em outras palavras, o livro didático é o documento mais próximo do professor e de fácil acesso. Além disto, sabemos que os livros didáticos dão orientações quanto à abordagem de conteúdos e têm uma proposta pedagógica inerente. Estes aspectos fazem dos livros didáticos observatórios fundamentais se quisermos conhecer as propostas de organização didática referente a qualquer tema de estudo. Por isto, fizemos um estudo de duas coleções de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental, utilizando elementos da Teoria dos Registros de Representação. Supomos que este estudo permitirá conhecer as propostas sobre como trabalhar a Linguagem Natural e a Linguagem Algébrica no ensino fundamental.

A segunda questão de pesquisa nos permite conhecer o trabalho real em classe efetiva. Para isso realizamos uma observação em classe, na 7ª série do Ensino Fundamental. Esta escolha deve-se ao fato, já mencionado, de que é na 7ª série que a linguagem algébrica é introduzida formalmente.

Com isso, temos por objetivo: conhecer como duas coleções de livros didáticos de 5ª a 8ª série e um professor de 7ª série do ensino fundamental desenvolvem um trabalho, contemplando o registro em linguagem natural e em linguagem algébrica, em termos de conversão e tratamento.

Mais especificamente, temos por finalidade:

1. identificar nos livros didáticos de 5ª a 8ª série do ensino fundamental como são propostos os exercícios que contemplam a conversão e o tratamento nos registros de representação em linguagem natural e em linguagem algébrica;

2. estudar como é trabalhada, a linguagem natural e a linguagem algébrica em termos de conversão e tratamento numa classe de 7ª série do ensino fundamental.

No capítulo seguinte, apresentamos nosso quadro teórico referente à teoria dos registros de representação semiótica. A metodologia utilizada para o estudo dos livros didáticos e para a observação em classe de 7ª série será também explicitada.

CAPÍTULO 2

QUADRO TEÓRICO E METODOLOGIA DA PESQUISA

Como já vimos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Proposta Curricular de Santa Catarina (PCSC) e as Diretrizes da Secretaria de Estado da Educação e do Desporto (2001) dão indicativos para se trabalhar com diferentes representações. Nosso objetivo neste estudo é conhecer como os livros didáticos de 5ª a 8ª série e o professor de 7ª série do ensino fundamental desenvolvem um trabalho contemplando o registro em linguagem natural e em linguagem algébrica, em termos de conversão e tratamento.

Tomamos como referência a teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval, tanto para o estudo dos livros didáticos quanto para a observação em classe. Isto porque, nesta teoria sugere-se, assim como nos documentos oficiais, que para que ocorra aprendizagem é necessário transitar em diferentes registros de representação.

Vejamos, primeiramente, alguns elementos dessa teoria de Registro de Representação Semiótica e, na seqüência, a metodologia de nossa pesquisa.

2.1. Representações Semióticas

Representações semióticas, segundo Duval (1995) são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. O papel fundamental da representação semiótica é aquele relativo a um sistema particular de signos, de linguagem, de escrita algébrica ou gráfica cartesianos, que pode ser convertida em representações equivalentes em um outro sistema semiótico e, que podem levar a significações diferentes pelo sujeito que a utiliza. Segundo o autor, a representação semiótica também tem a função de objetivação e de expressão e é o instrumento mais adequado para estudar os problemas de aquisição dos conhecimentos; de certa forma ela realiza uma função de tratamento intencional.

Duas características sobre representações semióticas devem ser consideradas (DUVAL, 2003):

1. a importância primordial das representações semióticas – a primeira razão fundamental é o fato de que as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado; a segunda é o fato de que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos objetos, em geral, depende de um sistema de representação. Por exemplo: os números;
2. a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática – existem dois tipos distintos de registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática), como podemos ver no quadro abaixo:

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural[14] Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: ▪ argumentação a partir de observações, de crenças, ...; ▪ dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) ▪ apreensão operatória e não somente perceptiva[15]; ▪ construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas: ▪ numéricas (binária, decimal, fracionária, ...); ▪ algébricas; ▪ simbólicas (língua formal) Cálculo	Gráficos cartesianos ▪ mudanças de sistemas de coordenadas; ▪ interpolação, extrapolação.

Quadro 3 – Representações semióticas utilizadas em Matemática.
Fonte[16]: DUVAL, Raymond. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.), *Aprendizagem em matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

A apreensão de um objeto matemático é significativa quando o aluno, além de realizar tratamentos em diferentes registros de representação, consegue mudar naturalmente de um registro de representação para outro, mesmo que numa resolução de problemas um registro apareça como privilegiado. Ou seja, a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas, segundo Duval (2003).

---

[14] A língua natural está sendo tratada como linguagem natural em nosso estudo.
[15] Segundo Almouloud (2003, p. 127), "a apreensão operatória está centrada nas modificações possíveis de uma figura de partida e na organização perceptiva que essas modificações sugerem e a apreensão perceptiva é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica".
[16] No quadro original não se encontram as notas de rodapé 14 e 15.

2.1.1. Tratamento e Conversão

Duval (1995) descreve três atividades cognitivas fundamentais para que um sistema semiótico seja um registro de representação: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão.

Formação de uma representação identificável

A formação de uma representação identificável pode ser comparável a uma descrição do enunciado de uma frase (compreensível na linguagem natural dada), de um texto escrito, na escrita de uma fórmula ou num esquema. Para essa formação devem-se respeitar regras que podem ser gramaticais (para a linguagem natural) e também de um sistema formal. Essas regras têm a função de dar condições de identificação e de reconhecimento da representação e ainda, de possibilitar sua utilização para tratamento.

Tratamento

Tratamento é uma transformação interna de um registro. Do ponto de vista "pedagógico", segundo o autor, tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado, para que os alunos possam compreender um objeto matemático. Vejamos dois exemplos de tratamento:

a) a paráfrase[17] e a inferência[18] são as formas de tratamento em linguagem natural.

> Exemplo 1: *Dois aumentos sucessivos, cada um de 30%, em um mesmo preço, não resultam num aumento de 60%. Explique por quê.*
>
> (IMENES e LELLIS, 2001, p. 218, exercício 27)

Diante desse enunciado em linguagem natural, o aluno desenvolverá alguma forma que lhe permita responder o exercício. Para tanto, esse aluno poderá fazer uso da linguagem natural também, ou seja, poderá dar tratamento para realizar a tarefa proposta. Por exemplo, usando a inferência podemos ter a seguinte resposta: dois aumentos sucessivos de 30% cada, em um mesmo preço, não é o mesmo que 60%, porque 30% de um determinado valor não é o mesmo

---

[17] Paráfrase: explicação ou tradução mais desenvolvida do que o texto ou enunciado original; tradução livre e desenvolvida; comentário. (*Dicionário on line*. Disponível em: http://www.priberam.pt/dlpo/definir_resultados.aspx). Acesso em 06/04/06.
[18] Inferência: dedução; consequencia; conclusão. (*Dicionário on line*:. Disponível em: http://www.priberam.pt/dlpo/definir_resultados.aspx. Acesso em: 06/04/06.

que 30% de um outro determinado valor. Supondo que a quantia inicial seja R$ 100,00, então 30% de 100 serão R$ 30,00. Ao aplicar um segundo aumento de 30%, não será mais sobre R$ 100,00, mas sim sobre R$ 130,00; assim o novo aumento não será novamente R$ 30,00, mas de 0,3 . 130, ou seja, R$ 39,00, obtendo R$ 169,00, referentes a 69% de aumento.

b) o cálculo, inclusive o algébrico, é uma forma de tratamento próprio às estruturas simbólicas.

Exemplo 2: *Resolva as equações:*

a) $x + \frac{3x}{2} = 5$ *b)* $\frac{2x}{5} - 4 = 7x - 8$

(IMENES e LELLIS, 2003, p. 211, exercício 31)

Como podemos observar, a tarefa está proposta em linguagem algébrica e, para desenvolvê-la, utiliza-se também a linguagem algébrica, ou seja, aplica-se o tratamento neste registro de representação. Vejamos uma solução para o primeiro item (a): $x + \frac{3x}{2} = 5 \Rightarrow \frac{2x + 3x = 10}{2} \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$, ou seja, $S = \{2\}$.

Conversão

A conversão é a transformação de um registro em um outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático em questão. O autor ressalta que não podemos confundir a conversão com a ação de codificar e com a interpretação, apesar de serem operações muito próximas. A ação de codificar seria a transcrição de uma representação em um outro sistema semiótico diferente do anterior e a interpretação seria a modificação do contexto ou a alteração do quadro teórico. Diferentemente dessas ações, a tradução e a descrição são conversões. A tradução é a conversão de uma representação lingüística dentro de uma linguagem dada por uma representação lingüística em uma outra língua ou de outro tipo de linguagem. A descrição é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma representação lingüística.

O exemplo 1 citado acima - *Dois aumentos sucessivos, cada um de 30%, em um mesmo preço, não resultam num aumento de 60%. Explique por quê.* – nos dá, também, uma ilustração de conversão. O aluno, ao invés de responder em linguagem natural, pode optar por responder em linguagem algébrica. Por exemplo: primeiro aumento de certa quantia *x*: *x + 0,3.*

$x = 1{,}3.\ x$; segundo aumento referente à quantia $1{,}3.\ x$: $1{,}3.\ x + 0{,}3.\ (1{,}3.\ x) = 1{,}3.\ x + 0{,}39.\ x = 1{,}69.\ x =\quad x + 0{,}69.\ x$, ou seja, o aumento é de 69%.

Há um tipo de fenômeno característico da conversão das representações: as variações de congruência e de não-congruência. Para melhor explicitar estes dois processos, conceituaremos primeiro a "organização redacional".

Organização Redacional

De acordo com Duval (1986) a distância existente entre a organização proposta ao conteúdo cognitivo do texto e a organização redacional é um fator que deve ser considerado para o processo de compreensão de textos. O conteúdo cognitivo do texto é o conceito que o problema considera, necessitando do uso de uma representação. Ele é independente do que o texto mobiliza ou apresenta. A organização redacional leva em consideração as variáveis redacionais. Estas são as que tornam o problema congruente ou não e, os problemas de não-congruência são os que apresentam maior dificuldade de compreensão.

As variáveis redacionais são um fenômeno na produção de textos que se impõe de maneira evidente quando se trata da produção de texto para um mesmo assunto. Estes textos podem ser comparados levando-se em conta sua complexidade. Independente de serem ou não de um mesmo autor, estas diferentes versões apresentam um invariante que é definido como: conteúdo cognitivo do texto. Essas variáveis redacionais dependem de dois fatores: fatores intrínsecos e fatores extrínsecos.

Os fatores intrínsecos são pertinentes do ponto de vista de uma correspondência entre o texto do enunciado e a escrita do tratamento matemático solicitado. Aqui, três pontos devem ser considerados: primeiro, a escolha dos elementos de organização cognitiva com os quais vamos explicitamente designar os elementos dados na redação de um enunciado de problema; segundo, se o texto é redacionalmente declarado (explícito por uma proposição) ou se é redacionalmente mencionado (explícito por um termo, uma expressão); por último, a escolha da questão, podendo ser a partir dos dados do enunciado ou não.

Os fatores extrínsecos são os que comandam as variações neutras, ou não pertinentes do ponto de vista de certas correspondências, que são constitutivas de um enunciado de problema, mas não são determinantes. Nesse caso, são considerados quatro pontos: a escolha da situação extra-matemática; a presença de informações inúteis, mas atrativas; o desenvolvimento dos aspectos relativos à descrição e à compreensão da situação extra-matemática envolvida no enunciado; e o lugar da questão no enunciado do problema.

Congruência e Não Congruência

Segundo Duval (1986), a compreensão do texto depende de dois parâmetros, subordinados um ao outro:

1. relação entre o conteúdo cognitivo do texto e a organização redacional. Isto é devido aos três pontos dos fatores intrínsecos. O grau de explicitação e a importância dos elementos considerados implícitos influenciam no fenômeno de compreensão;
2. relação entre o conteúdo cognitivo do texto e a base do conhecimento do leitor: a familiaridade com o conteúdo cognitivo do texto ou a novidade deste conteúdo constituem os dois valores principais deste parâmetro.

A combinação destes dois parâmetros permite a distinção e a classificação das diferentes situações de leitura em que um leitor pode se encontrar. Estas diferentes situações estão definidas no quadro abaixo:

Texto/Leitor	**CONGRUÊNCIA**	**NÃO-CONGRUÊNCIA**
Conteúdo cognitivo FAMILIAR	**Situação I: trivial, sem riscos de erros**	**Situação II: trivial com riscos de erros**
Conteúdo cognitivo NOVO	**Situação III: normativa para uma aprendizagem exigindo tratamentos paralelos ao texto**	**Situações IV: exigindo uma pesquisa ou uma aprendizagem independente do texto**

Quadro 4 – A congruência e a não-congruência nas diferentes situações de leitura.

Fonte: DUVAL, Raymond. ***Lecture et Compréhension dês textes.*** **Strasbourg: I.R.E.M., 1986.**

Situação I: existe um percurso rápido e único do texto; não é preciso ler tudo e nem mesmo ter o domínio de gramática para compreender o texto.

Situação II: na hora do percurso visual, pode-se ter dúvidas, incompreensões locais e necessidade de previsões. Isso faz com que o aluno releia o texto por motivo de controle, mas a familiaridade leva o leitor a se contentar com a releitura.

Situação III: o leitor é levado a uma incompreensão do conteúdo cognitivo. Nesta situação, procura-se chegar a uma apreensão da organização redacional, visto que já existe a compreensão do conteúdo do texto. O leitor deve seguir atentamente o

desenvolvimento do texto, revendo certas passagens. Tratamentos paralelos são necessários.

Situação IV: Nesta situação é necessário um trabalho direcionado sobre o conteúdo cognitivo do texto e que seja independente do texto a compreender.

Vejamos dois exemplos em que, para sua resolução, é preciso mudar de registro, ou seja, efetuar uma conversão:

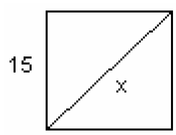
Exemplo 1: Os lados de um quadrado medem 15 cm. Qual é a medida aproximada da diagonal?

Exemplo 2: Um quadrado tem 144 cm² de área. Qual é a medida aproximada da diagonal do quadrado?

(págs. 38 e 39, livro de 8ª série, números 56 e 64)

Ambos os exemplos pedem a medida da diagonal de um quadrado. Para o aluno, o uso de uma figura ajuda a visualizar o triângulo retângulo que será formado com a diagonal procurada, pois, de forma implícita, é o Teorema de Pitágoras que está sendo tratado. Outras informações estão implícitas e tratam das propriedades do quadrado, quais sejam: lados todos iguais e ângulos retos.

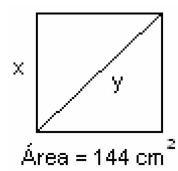
Exemplo 1: lados 15 cm e diagonal como hipotenusa



$$x^2 = 15^2 + 15^2, \text{ ou seja, } x = 21,2 \text{ cm}$$

O exemplo 1 é considerado congruente do tipo trivial e sem riscos de erros, pois é uma aplicação direta do Teorema de Pitágoras. Já o exemplo 2 é diferente: o aluno não pode aplicar o teorema enquanto não conseguir o valor da medida do lado do quadrado. Há neste exercício um trabalho implícito.

Exemplo 2: se x é a medida do lado do quadrado tem-se



$$x^2 = 144 \text{ onde } x = 12 \text{ cm}$$

Com o mesmo raciocínio da situação 1 encontra-se y =17 cm, sendo y a diagonal procurada.

Classificamos o exemplo 2 como não-congruente do tipo trivial e com riscos de erros, pois o aluno deve perceber a necessidade de encontrar a medida do lado do quadrado para chegar à solução. Para isso, é preciso usar a relação da medida da área de um quadrado com a medida do seu lado. Isso poderá não ser percebido num primeiro momento, mas com uma releitura do enunciado, essa informação poderá ser notada.

2.2. Metodologia da Pesquisa

Para o estudo dos livros didáticos utilizamos os elementos fornecidos pela teoria de Registros de Representação. Para o estudo em classe usamos como metodologia a observação naturalista em classe com apoio dos elementos da teoria de Registros de Representação.

2.2.1. Metodologia para o Estudo dos Livros Didáticos

O estudo dos livros didáticos foi feito, principalmente, em termos de tratamento e conversão. Para tanto, elaboramos uma classificação de acordo com os livros didáticos, baseando-nos nos elementos teóricos expostos anteriormente.

O objetivo do estudo dos livros didáticos é de explicitar elementos de resposta à questão: d*e que maneira os livros didáticos realizam um trabalho que contempla a conversão e o tratamento referente aos registros de representação em linguagem natural e em linguagem algébrica?*. Percebemos, todavia, num primeiro estudo, que para considerar a linguagem natural e a linguagem algébrica, tanto em forma de tratamento como de conversão no ensino fundamental, devíamos considerar a linguagem figural[19] também. Pois muitos dos exercícios envolvem uma figura que serve para auxiliar na resolução, definir algum conceito ou apresentar os dados do problema.

Com isso, em nosso estudo, nos centramos na identificação de tarefas que fazem emergir um dos cinco tipos seguintes de conversões[20] aqui classificados:

Tipo 1: Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica

Este tipo de conversão ocorre quando o enunciado é dado em linguagem natural e, para sua resolução, esse enunciado poderá ou deverá ser escrito em uma expressão referente à linguagem algébrica.

[19] Estamos considerando linguagem figural como a linguagem da Matemática que envolve figuras. Nessa dissertação, uma figura pode ser uma figura geométrica, um desenho de gráfico, um desenho qualquer que tem a função de passar alguma informação, entre outros.

[20] Cada uma das conversões será exemplificada com exercícios tirados dos livros didáticos estudados no capítulo 3.

Tipo 2: Passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural

Este tipo de conversão ocorre quando o enunciado é dado em linguagem algébrica e, para sua resolução, esse enunciado poderá ou deverá ser escrito em linguagem natural.

Tipo 3: Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural

Este tipo de conversão ocorre quando o enunciado é dado em linguagem natural e, para sua resolução, esse enunciado poderá ou deverá passar pela linguagem figural para, então, ser escrito em uma expressão referente à linguagem algébrica. Em geral, a linguagem figural é representada por figuras que têm a função de completar o enunciado, ilustrar o exercício dado ou ser uma figura de estudo produzida pelo aluno.

Tipo 4: Passagem da linguagem figural para a linguagem natural

Este tipo de conversão ocorre quando o enunciado é dado em linguagem figural; para sua resolução, esse enunciado poderá ou deverá ser escrito em linguagem natural. Os enunciados desse tipo possuem, em geral, tarefas que exigem a generalização em linguagem natural de uma dada situação.

***Tipo 5*: Passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica**

Este tipo de conversão é semelhante à do tipo 4. Ocorre quando o enunciado é dado em linguagem figural e, para sua resolução, esse enunciado poderá ou deverá ser escrito em linguagem algébrica. Os enunciados desse tipo possuem, em geral, tarefas que exigem a generalização representada numa expressão algébrica de uma dada situação.

Além das atividades de conversão, estudamos os exercícios segundo o tratamento, pois, de acordo com Duval (2003, p. 16), "a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro". Identificamos nos livros didáticos tarefas propostas que contemplam os quatro tipos de tratamento a seguir:

Tipo 1: em linguagem natural

Neste tipo de tratamento, o enunciado é dado em linguagem natural e a resolução pode ou deve ser dada também em linguagem natural.

Tipo 2: em linguagem algébrica

Neste tipo de tratamento o enunciado é dado em linguagem algébrica e a resolução pode ou deve ser dada também em linguagem algébrica.

Tipo 3: em linguagem natural passando pela linguagem figural

Este é o tipo de tratamento em que o enunciado é dado em linguagem natural com ou sem uma figura. Essa figura pode ter a função de ilustrar os dados do enunciado necessários para que a resolução possa ser dada também em linguagem natural.

Tipo 4: em linguagem algébrica passando pela linguagem figural

Da mesma forma, este é o tipo de tratamento em que o enunciado é dado em linguagem algébrica com ou sem uma figura. Essa figura pode ter a função de ilustrar os dados do enunciado necessários para que a resolução possa ser dada também em linguagem algébrica.

Para a atividade de conversão, consideramos também os casos "congruente" e "não congruente"[21]. Apesar de a congruência ou não ser objeto nos casos de conversão, nos ateremos a questão de congruência e não congruência também para os casos de tratamento dos itens 3 e 4.

2.2.2. Metodologia para Observação em Classe

Fizemos uma observação em uma classe de 7ª série do Ensino Fundamental em uma escola Municipal da grande Florianópolis. Buscamos responder à segunda questão de pesquisa proposta no capítulo 1*: O professor, em uma classe de 7ª série do Ensino Fundamental, considera os registros em linguagem natural e em linguagem algébrica? Se sim, como o professor trabalha esses registros em termos de conversão e tratamento?*

Nos fenômenos observados, usamos as mesmas classificações e os mesmos elementos da teoria de Duval explicitadas na metodologia para o estudo dos livros didáticos. Porém, para realizar esta observação, apoiamo-nos na teoria de Comitti (1995), quanto à observação naturalista em classe.

De acordo com Comitti (1995), a observação naturalista em classe permite que os fenômenos ligados a tomadas de decisões do professor em ação sejam colocados em

[21] É importante deixarmos claro que não temos a intenção de verificar o grau de congruência dos exercícios estudados neste trabalho; somente as classificaremos em congruentes ou não-congruentes.

evidência. Para que esta observação seja realizada, é preciso estabelecer um contrato entre pesquisador e professor antes de realizar a observação em sala.

A metodologia de observação naturalista em classe possui quatro aspectos importantes que devem ser considerados e que consistem em:

a) Realizar uma primeira entrevista com o professor para estabelecer um contrato

Este contrato tem por objetivos:

- **estabelecer uma relação entre pesquisador-professor e observador-observado no campo da pesquisa e não do controle;**
- **estabelecer as condições da experimentação.**

b) Recolher os dados para prosseguir com o registro das informações

Os dados recolhidos podem ser de dois tipos:

- **internos: são os dados recolhidos dentro da classe (notas do observador, registro de áudio das sessões em classe);**
- **externos: são os dados que constituem o plano de aula do professor (fundamental para analisar o que foi previsto pelo professor e o que foi observado pelo pesquisador), exercícios preparados e entrevista (que permite recuperar de maneira geral o que o professor pensa sobre o tema, qual será sua metodologia, seus objetivos para a aula, entre outros).**

c) Elaborar protocolos

O protocolo é um documento que permite reconstituir as situações da classe.

d) Analisar a situação

As análises deverão ser realizadas de duas maneiras distintas:

- **análise a priori: é a análise da aula planejada pelo professor que precede a realização da aula e que é efetuada com base nas atividades e proposições de abordagem;**
- análise a posteriori: é a análise feita sobre os protocolos e que consiste basicamente na interpretação dos acontecimentos recuperados no protocolo.

Fazemos os estudos a priori e a posteriori à luz dos elementos da Teoria dos registros de Representação explicitados neste capítulo.

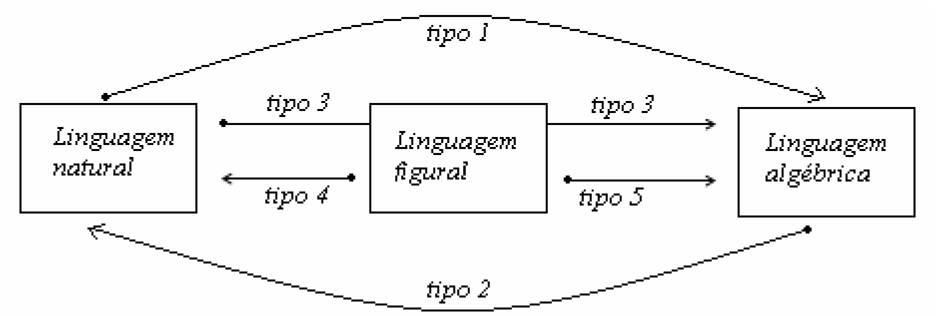
CAPÍTULO 3

ESTUDO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo pretendemos resgatar elementos de resposta para a questão "*De que maneira os livros didáticos realizam um trabalho que contempla a conversão e o tratamento referente aos registros de representação em linguagem natural e em linguagem algébrica?"*. Para conhecer as propostas de solução deste problema, optamos por estudar duas[22] coleções de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental: *Matemática*[23] *– Coleção 5ª a 8ª séries,*de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis e *Matemática, Uma aventura do pensamento*[24], de Oscar Guelli.

Como vimos no capítulo 1, a linguagem algébrica pode ser desenvolvida a partir da 5ª série do ensino fundamental. Consequentemente, atividades que exploram a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e vice-versa poderão estar presentes nos livros didáticos das diferentes séries do Ensino Fundamental, isto é, nos livros de 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries. A linguagem algébrica pode ser ainda, a priori, objeto de estudo em diferentes conteúdos desenvolvidos, como por exemplo, áreas, perímetros, equações, sistema de equações, funções, entre outros.

Em nosso estudo, como já dissemos, consideramos cinco diferentes tipos de conversão envolvendo a linguagem natural e/ou a linguagem algébrica.



Esquema 1 – Classificação quanto aos tipos de conversão e tratamento

Onde:

Tipo 1: passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica;

---

[22] Na apresentação desse estudo centramo-nos na coleção *Matemática*. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* foi utilizada para mostrar uma situação diferente ou nova em relação àquela.
[23] A escolha dessa coleção deve-se ao fato de que nos anos de 2003 e 2004 ela era utilizada como livro-texto na escola onde lecionei.
[24] A escolha dessa coleção justifica-se pelo fato de que ela foi usada como referência pelo professor da classe que estudamos neste trabalho (ver capítulo 4).

Tipo 2: passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural;

Tipo 3: passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural;

Tipo 4: passagem da linguagem figural para a linguagem natural;

Tipo 5: passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica

Também estudamos os exercícios nos casos de tratamento em linguagem natural, linguagem algébrica e linguagem figural:

Tipo 1: em linguagem natural;

Tipo 2: em linguagem algébrica;

Tipo 3: em linguagem natural passando pela linguagem figural;

Tipo 4: em linguagem algébrica passando pela linguagem figural.

Para os cinco tipos de conversão e para os dois últimos tipos de tratamento, levamos em consideração a questão de "congruência" e "não-congruência" dos exercícios. Isso porque, segundo Duval (2005), o estudo de exercícios congruentes e não-congruentes somente ocorre quando há mudança de registro de representação.

3.1. Estudo dos Livros Didáticos das Coleções *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento*

Para fins de estudo, optamos por estudar os livros didáticos em duas partes. Na primeira parte realizamos o estudo das orientações pedagógicas do manual do professor; na segunda estudamos os exercícios propostos nos livros didáticos.

3.1.1. Estudo das Orientações Pedagógicas

A. Coleção *Matemática*[25]

Nesta coleção os conteúdos são abordados principalmente por meio de exercícios que, segundo Diniz[26], estimulam o aluno "a analisar, argumentar, generalizar, comparar e construir podendo, então, refletir sobre cada tema ou conceito tratado" (p. 4). Além disso, a coleção não esgota um determinado conteúdo numa mesma série, isto é, o ensino em espiral é almejado. Nesse sentido, um mesmo conteúdo é trabalhado nas diferentes séries. Segundo Diniz, "isso faz com que o conhecimento se aperfeiçoe, pois analisar uma

[25] Imenes, Luiz Márcio; Lellis, Marcelo; *Matemática*[25] *– Coleção 5ª a 8ª séries;* São Paulo: Scipione, 2001, 2003, 1ª edição, 5ª, 6ª e 12 ª impressão.
[26] Diniz, Maria Ignez de Souza Vieira: escreve uma carta na referida obra destacando-a como fator relevante de auxílio para a análise do professor.

mesma idéia de formas diferentes possibilita o estabelecimento de outras relações entre os diversos significados dessa idéia" (p. 3).

Orientações Pedagógicas para a 5ª série

Segundo as orientações pedagógicas, o livro de 5ª série é fundamentado na busca de padrões e generalizações. Os autores deixam isso bem claro no capítulo "Generalizações":

> [...] obter conclusões gerais é uma característica essencial do pensamento científico e, em especial, do pensamento matemático [...] Estimulamos a generalização pela observação de padrões ou regularidades, a partir de casos particulares [...] como sabemos, o que vale para casos particulares nem sempre valem para o geral. É preciso justificar a generalização... (p. 57).

Nesse texto Imenes e Lellis (2001, 2003) dão ênfase à generalização e à justificativa, o que abre a possibilidade, a priori, de se trabalhar a linguagem algébrica e/ou linguagem natural.

As orientações pedagógicas também indicam que alguns conteúdos do livro de 5ª série são considerados como uma introdução para o ensino da Álgebra. No capítulo "Linguagem matemática", por exemplo, as expressões numéricas são trabalhadas porque elas podem "expressar raciocínios envolvendo números [...] Assim, prepara-se o aprendizado da Álgebra" (IMENES e LELLIS, 2001, 2003, p. 46). Reforçando e, implicitamente, oferecendo a possibilidade de se trabalhar a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, no capítulo "Generalizações" os autores afirmam que as conclusões são expressas em "linguagem matemática, usando-se variáveis, isto é, letras que representam números quaisquer. No entanto, isso é precedido pela expressão verbal [...] ao usarmos letras, estamos dando os primeiros passos em direção a Álgebra" (p. 57). Notemos a presença do termo "expressão verbal", ou seja, a linguagem natural também é considerada pelos autores que afirmam que "a compreensão e a comunicação são favorecidas pela linguagem natural que deve ser usada sempre que possível" (IMENES e LELLIS, 2001, 2003, p. 40).

Orientações Pedagógicas para a 6ª série

Consta nas orientações pedagógicas que o livro destinado à 6ª série tem como foco o raciocínio (como a dedução e a generalização): "buscamos propiciar o exercício do raciocínio e a percepção de certas relações lógicas" (IMENES e LELLIS, 2001, 2003, p. 37). Para tanto, os autores consideram a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica como constituindo-se de “formulações verbais e de sua tradução para a linguagem matemática, a qual resulta em fórmulas com letras” (idem, p.50)[27]. Além disso, é explicita a presença de tratamento em linguagem algébrica no capítulo “Usando letras em matemática”: “a Álgebra permite operar com expressões algébricas, simplificando-as e facilitando a comunicação” (idem, p. 50) e da linguagem natural no capítulo “Formas geométricas”: “a linguagem adotada não é rigorosa [...] nossa opção é partir da linguagem natural dos alunos e, junto com eles, construir as noções matemáticas” (idem, p. 31).

De acordo com as orientações pedagógicas, o livro de 6ª série trabalha com a Álgebra como continuidade do livro de 5ª série. Na 6ª série, principalmente no capítulo “Usando letras em matemática”, Imenes e Lellis (2001, 2003, p. 50) justificam “como e para que usam-se letras em matemática [...] os cálculos com letras ganham significado porque são tratados como meio de comunicar idéias e raciocínios”.

Orientações Pedagógicas para a 7ª série

O livro de 7ª série, segundo as orientações pedagógicas, é uma continuação do que vem sendo feito desde o de 5ª série, ou seja, é um avanço “na compreensão da escrita algébrica das fórmulas” (IMENES e LELLIS, 2001, 2003, p. 17). O capítulo “Cálculo Algébrico”, o que mais enfatiza o aprendizado da Álgebra, trata da dedução de fórmulas envolvendo dois tipos de ação mental: “a “tradução” de certas idéias para a linguagem algébrica e cálculos com expressões algébricas obtidas” (idem, p. 38). Segundo os autores, essas duas ações mentais já vinham sendo trabalhadas, mas a novidade do capítulo é “a ênfase que o assunto ganha [...], permitindo reforçar o aprendizado da Álgebra e compreender sua utilidade” (idem, p. 38).

Mesmo que seja feito um trabalho com a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, o capítulo “Cálculo Algébrico”, segundo as orientações pedagógicas, dá mais ênfase ao cálculo algébrico propriamente dito, isto é, enfatiza o tratamento em linguagem algébrica: “aprender Álgebra não envolve apenas exprimir fatos usando expressões matemáticas. Envolve também a transformação de expressões matemáticas em outras, mais simples (idem, p. 38). A passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica continua sendo trabalhada, pois “continuamos apresentando problemas que exigem “tradução” para a Álgebra” (idem, p. 51).

[27] Fórmula com letras, para os autores, pode expressar conclusão geral.

Orientações Pedagógicas para a 8ª série

Estas orientações também contemplam a arte de exercitar o raciocínio dedutivo, ou seja, desenvolver "diversos aspectos do raciocínio matemático [...] a percepção de padrões e regularidades, a generalização, etc" (IMENES e LELLIS, 2001, 2003, p. 25-26). Em toda a coleção, segundo as orientações pedagógicas, a "tradução" de algumas situações para a Álgebra foi exercitada. Porém, neste volume, um item do capítulo "Equações e sistemas de equações" foi dedicado somente para esse objetivo. Notamos, novamente, a possibilidade de trabalhar a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. No capítulo "Técnica algébrica" o objetivo específico é o de "organizar o conhecimento do aluno, avançar no pensamento algébrico e exercitar o cálculo" (IMENES e LELLIS, 2001, 2003, p. 64).

Conclusão das orientações pedagógicas da coleção *Matemática*

Podemos notar que, segundo as orientações pedagógicas dessa coleção, em todos os volumes há trabalhos envolvendo a linguagem natural e/ou a linguagem algébrica relativos às quatro séries do Ensino Fundamental. A conversão e o tratamento referentes a essas linguagens são, implicitamente, sistematicamente enfatizados como relevantes para o aprendizado da matemática.

B. Coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*[28]

A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* oferece em cada volume de 5ª a 8ª série, segundo as orientações pedagógicas, seções como, por exemplo, "A vida e a Matemática" e o "Apoio teórico". A primeira delas procura contextualizar o tema central do capítulo e a segunda discutir e aprofundar algumas questões teóricas que o autor considera não ser de fácil compreensão para os alunos. Além disso, de acordo com as orientações pedagógicas, a coleção oferece "atividades complementares" e/ou "atividades de reforço" que são exercícios que podem ser utilizados para completar cada unidade. Além disso, nesses manuais encontramos os objetivos para cada sub-item de cada unidade. Vejamos a seguir, o que propõem as orientações pedagógicas desse manual do professor referentes aos registros de representação em linguagem natural e/ou em linguagem algébrica.

Orientações Pedagógicas para a 5ª série

[28] Guelli, Oscar; *Matemática, Uma aventura do pensamento – Coleção de 5ª a 8ª séries*. São Paulo: Ática, 2005, 2ª edição, 1ª impressão.

De acordo com as orientações pedagógicas, o livro de 5ª série enfatiza o tratamento em linguagem algébrica. Este tratamento tem a tarefa de "obter o valor numérico de expressões algébricas" (GUELLI, 2005, p. 46) e aparece em três partes do livro didático sub-intituladas: "Variáveis: letras que valem números", "Potências de números naturais" e "Raízes quadradas de quadrados perfeitos". No subtítulo "Variáveis: letras que valem números" temos uma chamada ao tratamento numérico e algébrico cujo objetivo é "diferenciar expressão numérica e expressão com variáveis" (idem, p. 31).

Orientações Pedagógicas para a 6ª série

De acordo com as orientações pedagógicas, o livro de 6ª série trata da álgebra em todas as unidades e tem como um dos objetivos trabalhar a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, ou seja, "representar frases por meio de expressões algébricas ou expressar o enunciado de um problema mediante equações" (GUELLI, 2005, p. 44) ou ainda mediante "inequações ou sistemas de equações" (idem, p. 54); outro objetivo é tratar da passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural, ou seja, "traduzir uma expressão algébrica por meio de frases" (idem, p. 44). Além destes, fica explicito o objetivo de trabalhar o tratamento em linguagem algébrica, ou seja, "calcular o valor numérico de expressões com variáveis ou comprovar se um número é raiz de uma equação ou resolver equações entre outros" (idem, p. 21 e 44).

Orientações Pedagógicas para a 7ª série

De acordo com as orientações pedagógicas, o livro de 7ª série visa tratar da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica juntamente com o tratamento em linguagem algébrica, ou seja, "traduzir problemas por meio de equações e resolvê-las" (GUELLI, 2005, p. 28) ou por meio de "inequações ou sistemas de equações" (idem, p. 48 e 56). Além disso, são apresentados objetivos que buscam dar lugar somente ao trabalho de tratamento em linguagem algébrica, como por exemplo: "calcular o valor numérico de um polinômio ou simplificar uma fração algébrica" entre outros (idem, p. 28 e 37).

Orientações Pedagógicas para a 8ª série

As orientações pedagógicas do livro de 8ª série, para todas as unidades, anunciam como objetivo tratar da linguagem algébrica, ou seja, "fatorar um trinômio do 2º grau, resolver sistemas de inequações ou dividir polinômios por polinômios " (GUELLI, 2005, p.

33, 41 e 49), e também da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, ou seja, "resolver problemas que podem ser traduzidos por equações do 2º grau" (idem, p. 29).

Conclusão das orientações pedagógicas da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*

Podemos perceber nas orientações pedagógicas a ênfase dada ao tratamento da linguagem algébrica nas quatro séries do ensino fundamental. Por outro lado, a linguagem natural não é trabalhada na 5ª série sendo, implicitamente, tratada nas 6ª, 7ª e 8ª séries. A conversão e o tratamento que levam em conta a linguagem natural e/ou a linguagem algébrica são, implicitamente, considerados relevantes para o aprendizado de matemática.

Conclusão do estudo das orientações pedagógicas das coleções *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento*

Como podemos notar, o estudo das orientações pedagógicas nos indica que em ambas as coleções há espaço para a conversão e o tratamento. Porém, na coleção *Matemática,* o trabalho de conversão parece ser distribuído nas quatro séries do ensino fundamental, de maneira a contemplar uma abordagem em espiral, enquanto que na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* a ênfase à conversão está mais concentrada nas 6ª, 7ª e 8ª séries. Por outro lado, no que se refere ao tratamento, as orientações pedagógicas dão indicativos de que na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* ele tem lugar nas quatro séries do ensino fundamental, enquanto que na coleção *Matemática* aparece focado nas 6ª, 7ª e 8ª séries.

3.1.2. Estudo dos Exercícios dos Livros Didáticos da coleção *Matemática*[29] e da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*[30]

Apresentamos este estudo por meio de exemplos de exercícios[31] de cada tipo de conversão e tratamento, seguidos de uma tabela que contempla o número referente à

[29] Imenes, Luiz Márcio; Lellis, Marcelo; *Matemática – Coleção 5ª a 8ª séries;* São Paulo: Scipione, 2001, 2003, 1ª edição, 5ª, 6ª e 12 ª impressão.
[30] Guelli, Oscar; *Matemática, Uma aventura do pensamento – Coleção de 5ª a 8ª séries*. São Paulo: Ática, 2005, 2ª edição, 1ª impressão.

quantidade desses exercícios, incluindo a congruência e a não-congruência. Esse estudo dos exercícios contempla as duas coleções. Os exercícios da segunda coleção se diferem da primeira por alguma razão e, com isso, ilustram algumas particularidades.

Tipos de Conversão

No estudo dos exercícios do livro do aluno das duas coleções encontramos exemplos de quatro tipos de conversão, objeto de nosso estudo.

Tipo 1: Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica

A passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica é proposta, segundo as orientações pedagógicas, tanto na coleção *Matemática* como na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*. No livro do aluno, identificamos exercícios que contemplam essa conversão. Na coleção *Matemática* (2001, 2003), por exemplo, temos exercícios do seguinte tipo:

1. Escreva em linguagem matemática simbólica as sentenças abaixo. Use a letra que quiser para representar o número.

   a) Zero somado a qualquer número dá o próprio número.
   b) Subtraindo qualquer número de si mesmo, o resultado é zero.
   c) Qualquer número dividido por 1 dá ele mesmo.
   d) O dobro do dobro de qualquer número é o seu quádruplo.

(Matemática, p. 270, 5ª série, número 21)

Este exercício coloca explicitamente como tarefa a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica. Além da indicação do enunciado "*use a letra que quiser para representar o número*", todos os itens possuem a expressão *qualquer número*. Dessa forma, fica claro para o aluno que "*qualquer número"* deverá ser substituído por uma letra. A tarefa se resume em "traduzir" o que está enunciado em linguagem natural para linguagem algébrica o que torna o exercício congruente.

No estudo desse exercício, destacamos a resolução do item *d* onde explicitamos a conversão realizada:

[31] Ressaltamos que o objetivo deste estudo não é apresentar os tipos de conversão e tratamento relativos à cada série do ensino fundamental, mas sim, à cada coleção.

Linguagem natural	Considerações	Linguagem algébrica
O dobro do dobro de qualquer número é o seu quádruplo	*Dobro: multiplicar por 2* *Qualquer número: x* *Dobro de qualquer número: 2.x* *Quádruplo de um número: 4.x*	$2 \,.\, 2.x = 4.x$

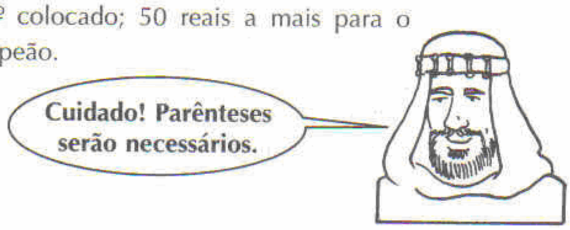
Quadro 5 – Resolução do exemplo 1 tirada da coleção *Matemática* referente a conversão "passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica".

Cabe notar que a representação algébrica solicitada pelo item 'd' envolve uma certa complexidade, todavia ainda se apresenta como congruente.

2. No programa "A Arca da Felicidade", do famoso animador Juju Literato, um prêmio de 270 reais foi distribuído assim: a menor parte para o 3º colocado; 50 reais a mais para o 2º colocado; o dobro desta última quantia para o campeão.

a) Escreva a sentença matemática correspondente à situação.

b) Quanto receberá cada premiado?



(Matemática, p. 207, 6ª série, número 17)

Aqui a expressão em linguagem algébrica é uma conseqüência do enunciado dado em linguagem natural. Notemos que para formular a expressão em linguagem algébrica é preciso representar a quantia do terceiro colocado. Percebendo isso, o aluno poderá usar uma letra para representar essa quantia. Na formulação faz-se necessária uma organização dos dados e a opção de representar a quantia desconhecida fica a cargo da interpretação do aluno. Além disso, apesar dos autores ajudarem escrevendo que os parênteses são necessários, não é possível perceber de imediato que o 1º colocado receberá $2.(x + 50)$. Por isso, classificamos esse exercício como não congruente.

Na tarefa relativa ao item 'a', temos:

Linguagem natural	Considerações	Linguagem algébrica
Prêmio de 270 reais *Menor parte para o 3ª colocado* *50 reais a mais para o 2ª colocado* *O dobro dessa última quantia para o campeão*	*Total: 270* *3º colocado: x* *2º colocado: x + 50* *Campeão: 2.(x + 50)*	$x + (x + 50) + 2.(x + 50) = 270$

Quadro 6 – Resolução do exemplo 2 tirada da coleção *Matemática* referente a conversão "passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica".

Na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* (2005), identificamos exercícios que necessitam dessa conversão tanto na congruência como na não-congruência. Exercícios que, apesar de não possuírem o mesmo enunciado, correspondem aos mesmos objetivos como "traduzir" o que está em linguagem natural para a linguagem algébrica e "escrever" em linguagem algébrica uma expressão matemática correspondente a uma situação dada em linguagem natural. Vejamos a seguir o enunciado de dois exercícios tirados dessa coleção para ilustrar outros exercícios similares aos já vistos.

1. Encontre expressões algébricas para representar as frases a seguir.
   a) Quarta parte da soma de um número com 2.
   b) Soma de um número com seus três quartos.
   c) Diferença entre um número e seus sete oitavos.
   d) Triplo da soma de um número com 4.
   e) Dobro da diferença entre um número e 1.
   f) Quádruplo da soma de um número com 9.

(Matemática – Uma aventura do pensamento, p. 151, 6ª série, número 21)

Nesse exercício a tarefa solicita a conversão passando da linguagem natural para a linguagem algébrica, isto é, o exercício se resume na tarefa "traduzir" como nos exercícios já vistos anteriormente. No entanto, temos a necessidade implícita de usar parênteses para realizar essa tarefa como, por exemplo, a "quarta parte da soma de um número com 2": $\frac{1}{4}.(x+2)$ e o "dobro da diferença entre um número e 1": $2.(x-1)$. Além do uso dos parênteses, o aluno tem que perceber que "seus três quartos" do item "soma de um número com seus três quartos", é o produto de $3/4$ pelo número desconhecido: $x+\frac{3}{4}x$. Esses fatos caracterizam esse exercício como não-congruente.

2. Arnaldo deseja construir uma prateleira de modo que caiba exatamente uma coleção de 16 livros de História. Se cada livro tem **y** centímetros de largura, qual deve ser o comprimento da prateleira?

(Matemática – Uma aventura do pensamento, p. 119, 6ª série, número 42)

Esse exercício tem como tarefa escrever uma expressão algébrica para representar o enunciado que permite determinar o comprimento da prateleira. Para resolvê-lo, o aluno poderá perceber que se possui 16 livros terá 16 vezes o comprimento *y* e, portanto, a solução será *16.y*. O exercício nesse caso é congruente, diferentemente do que ocorreu com o exercício citado da coleção *Matemática* (exercício 2, pg. 10).

Há uma considerável quantidade de enunciados diferentes em ambas as coleções, tanto para exercícios congruentes como não-congruentes. Na coleção *Matemática* temos um total de 236 exercícios referentes à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica; desses, 158 são congruentes e 78 não-congruentes. Na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*, observamos um total de 285 exercícios do mesmo tipo, sendo 206 congruentes e 79 não-congruentes. A tabela dada a seguir fornece a quantidade de exercícios que contemplam as especificidades ilustradas por série, segundo os livros didáticos das coleções estudadas:

Tabela 1 – Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica no ensino fundamental

Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	*Total* **parcial**	**Total**
Matemática						
Congruente	12	46	52	48	**158**	
Não congruente	4	23	27	24	**78**	**236**
Tota parcial	**16**	**69**	**79**	**72**	---------	
Matemática – Uma aventura do pensamento						
Congruente	4	113	47	42	**206**	
Não congruente	-	46	21	12	**79**	**285**
Tota parcial	**4**	**159**	**68**	**54**	---------	

Tipo 2: **Passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural**

Para ilustrar a passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural, escolhemos dois exercícios da coleção *Matemática*.

1. Veja a fórmula do peso da vaca no exercício 17.[32]
Escreva uma frase explicando como se faz para calcular esse peso.

(Matemática, p. 17, 7ª série, número 25)

No exercício 17 é apresentada a fórmula $P = \dfrac{ab^2}{4\pi}$ com as seguintes instruções: *P* é o peso aproximado em quilograma, *a* é o comprimento do tronco em centímetro, *b* é o comprimento da cintura em decímetros e, π (pi) é uma letra grega que indica um número que

[32] Veja o exercício 17 no anexo 1.

vale aproximadamente 3,1. Observamos que é explicita a tarefa proposta de passar a expressão apresentada em linguagem algébrica para uma frase em linguagem natural.

Resolução:

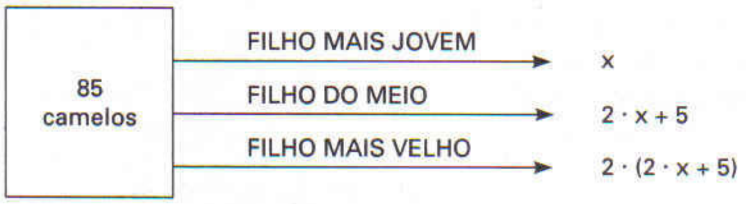
Linguagem algébrica	Considerações	Linguagem natural
$P = \dfrac{ab^2}{4\pi}$	*P*: peso aproximado em quilograma *a*: comprimento do tronco em centímetro *b*: comprimento da cintura em decímetros π (pi): letra grega que indica um número	*Para obter o peso aproximado da vaca (em quilogramas) multiplica-se o comprimento do tronco (em decímetros) pelo quadrado do comprimento da cintura (em decímetros) e, a seguir, divide-se esse produto por quatro vezes π (pi, que vale, aproximadamente, 3,1)*[33]

Quadro 7 – Resolução do exemplo 1 tirada da coleção *Matemática* referente a conversão "passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural".

Nesse exercício, além de sua trivialidade, o significado de cada elemento da fórmula é dado ao aluno, o que o caracteriza como congruente. No próximo exemplo, podemos verificar uma tarefa diferente dessa que também ilustra a passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural:

2.

Este esquema mostra como foi distribuída uma herança:



a) Quanto recebeu cada filho?
b) Escreva o enunciado do problema.

(Matemática, p. 208, 6ª série, número 23)

Observamos no item 'b' a tarefa proposta: "escrever o enunciado do problema". O aluno, nesse caso, utiliza a linguagem natural para descrever esse enunciado. Vejamos um exemplo de resolução no quadro a seguir:

33 Resposta encontrada na página 88 do manual destinado ao professor. Note que houve um erro (ou uma confusão), por parte dos autores, pois eles colocam as unidades de medida do comprimento do tronco da vaca em decímetros, todavia na fórmula elas são dadas em centímetros.

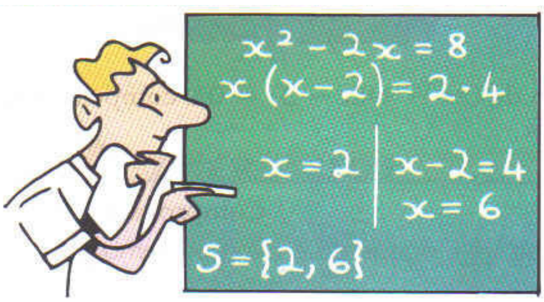
Linguagem algébrica	Considerações	Linguagem natural
x *2.x + 5* *2.(2.x + 5)* *85*	*Total: 85* *Quantia do filho mais jovem: x* *Quantia do filho do meio:* *2. x + 5 – dobro de x mais 5* *Quantia do filho mais velho:* *2.(2.x + 5) – dobro da soma de 2x e 5 ou dobro da quantia do filho do meio.*	*Mustafá quer dividir seus 85 camelos para seus três filhos de modo que o filho do meio receba o dobro mais 5 de camelos do que o filho mais novo e, o filho mais velho receba o dobro de camelos do filho do meio. Quantos camelos cada um dos filhos receberam?*

Quadro 8 – Resolução do exemplo 2 tirada da coleção *Matemática* referente a conversão "passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural".

É interessante notarmos que este exercício poderá ser ou não congruente. Isto vai depender não só do grau de explicitação pertencente aos fatores intrínsecos, ou seja, se o aluno irá explicitar ou não uma correspondência entre o texto do enunciado e a escrita do tratamento matemático solicitado, como também dos fatores extrínsecos do texto escolhido. Dentre os fatores extrínsecos encontram-se a escolha da situação extra-matemática, a presença de informações inúteis e o lugar da questão no enunciado do problema. Além disso, a relação das expressões em linguagem algébrica "*2.x*" e "*2.x + 5*" com suas contrapartes em linguagem natural "dobro de *x*" e "soma de *2.x* com *5*" , respectivamente, é necessária para se escrever o enunciado, ou seja, é necessário interpretar a mesma situação em dois diferentes registros de representação: linguagem natural e linguagem algébrica.

A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*, assim como a coleção *Matemática*, propõem exercícios, como o exemplo 1 mostrado acima (p. 14), nos quais a tarefa é declaradamente escrever em linguagem natural a expressão dada em linguagem algébrica. Entretanto, destacamos dois exercícios de tarefas diferentes da coleção *Matemática* na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*. Vejamos:

1. · Justifique o erro na resolução desta equação:



(Matemática – Uma aventura do pensamento, p. 60, 8ª série, número 15)

Notamos que a tarefa “justificar” é conseqüência das tarefas implícitas “observar”, “analisar” e “calcular”. O aluno precisa perceber que o erro da resolução está em considerar o produto de dois números iguais a 2 vezes 4. De fato, o produto de dois números iguais a 8 poderia ser 1.8 ou ½.16, etc. Destacamos que, antes de justificar, o aluno tem a opção de dar um tratamento tanto no registro numérico, por tentativas, como no registro algébrico, pela resolução da equação de 2º grau. De acordo com a resposta oferecida no livro didático, o texto da justificativa pode ser, a priori, em linguagem natural. Notemos que, como o exercício é destinado ao aluno de 8ª série, é provável que ele justifique somente no registro algébrico.

A pesquisa de Freitas (2003) mostrou que o aluno, mesmo quando justifica em linguagem natural, busca a justificativa na linguagem algébrica. Supomos que o registro usado pelos alunos vai ser determinado pelo contrato didático estabelecido pelo professor.

2. Escolhemos ao acaso um destes cartões: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12. A probabilidade de escolhermos um cartão que contenha um número primo é:

$$\frac{5}{12}$$

número de cartões com números primos

número de cartões

Se escolhermos ao acaso um destes cartões:

$\frac{1}{2}xy^2$ $a^3 - a + a^2$ $y^2 - 7y + 10$ $2y^4 - y^2 - 3y^6$

$-10ay^2$ $y^2 - x^2y^3$ $1 - a^3$ $4x$ $2y^2 - y - 1$

qual será a probabilidade de escolhermos um cartão que contenha:

a) um monômio?

b) um binômio?

c) um trinômio?

d) um polinômio do 2º grau em **y**?

(Matemática – Uma aventura do pensamento, pp. 79-80, 7ª série, número 7)

Neste exercício, passar da linguagem algébrica para a linguagem natural não é uma conversão explicitamente exigida. Todavia, a tarefa de determinar a probabilidade na escolha de cartões exige essa conversão durante a observação e análise para identificar cada expressão dada em linguagem algébrica com os termos “monômio”, “binômio”, “trinômio” e “polinômio”, ou seja, o aluno deve reconhecer a relação entre o termo em linguagem natural e a forma algébrica, mesmo que a resposta obtida esteja no registro numérico.

Lembramos que essa tarefa é semelhante à de Tamora e Tancredi (2004) apresentada no capítulo 1 desta dissertação. As autoras observaram que poucos alunos conseguiram concluir uma tarefa desse tipo. A maioria dos alunos classificou ou justificou erroneamente a expressão algébrica apresentada.

As coleções *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento* tratam da passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural com uma quantidade de exercícios inferior em relação à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica vista anteriormente. A coleção *Matemática* tem um total de 9 exercícios e a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* tem um total de 6 exercícios destinados à passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural. Em ambas as coleções todos os exercícios que necessitam desse tipo de conversão são congruentes. A tabela a seguir apresenta a quantidade de exercícios propostos para cada série de cada coleção dos livros-texto estudados:

Tabela 2 – Passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural no ensino fundamental

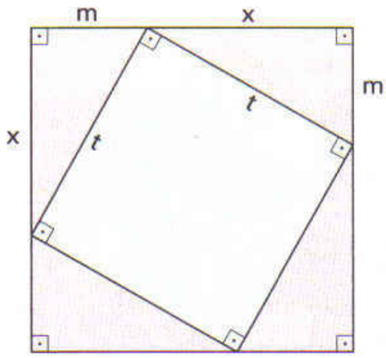
Passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	*Total* **parcial**	Total
Matemática						
Congruente	1	2	3	3	**9**	
Não congruente	-	-	-	-	**-**	**9**
Tota parcial	**1**	**2**	**3**	**3**	---------	
Matemática – Uma aventura do pensamento						
Congruente	-	2	2	2	**6**	
Não congruente	-	-	-	-	**-**	**6**
Tota parcial	**-**	**2**	**2**	**2**	---------	

***Tipo 3*: Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural**

As coleções *Matemática* e *Matemática –Uma aventura do pensamento* tratam dos conceitos de área, volume e função, entre outros conteúdos em que a figura tem o papel de completar ou ilustrar o enunciado. Para estudar os exercícios que envolvem esses conceitos matemáticos temos mais um tipo de conversão: a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica necessitando de uma figura, seja esta figura dada no enunciado ou não.

Ambas as coleções apresentam exercícios que representam a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural. A seguir, apresentamos dois exercícios da coleção *Matemática*.

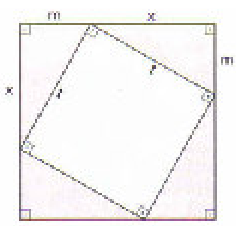
1. Este exercício é para verificar se você entendeu a demonstração do teorema de Pitágoras. Observe a figura e responda:
a) Qual é a área de cada triângulo?
b) Qual é a área do quadrado azul?
c) Qual é a área do quadrado grande?
d) Usando álgebra e as letras **m**, **x** e **t**, escreva: A área do quadrado azul é igual à área do quadrado grande, menos quatro vezes a área de um dos triângulos.
e) Faça cálculos algébricos, simplifique a expressão e dê sua conclusão.



(Matemática, p. 208, 7ª série, número 34)

No item 'd' desse exercício, a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica é explicitada no enunciado. Para resolvê-lo, o uso da figura é necessário, pois não está escrito nesse enunciado a medida do lado do quadrado, a forma do "triângulo", do "quadrado azul" e do "quadrado grande", ou seja, a figura completa o enunciado inclusive com as marcas que permitem identificar os ângulos retos. Por isso, esse exemplo ilustra o caso da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural.

Vejamos a resolução do item 'd':

Linguagem natural	Considerações	Linguagem algébrica
*Usando álgebra e as letras **m**, **x** e **t**, escreva: A área do quadrado azul é igual a área do quadrado grande, menos quatro vezes a área de um dos triângulos*	 *Área do triângulo:* $\frac{m.x}{2}$ *Área do quadrado azul:* t^2 *Área do quadrado grande:* $(m + x)^2$	$t^2 = (m + x)^2 - 4.\ \frac{m.x}{2}$

Quadro 9 – Resolução do exemplo 1 tirada da coleção *Matemática* referente a conversão “passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural”.

O enunciado é dado em linguagem natural. Para apresentar a solução em linguagem algébrica, é preciso fazer uma leitura da figura, isto é, uma decodificação. Notemos ainda que o item ‘d’ *é* conseqüência dos itens ‘a’, ‘b’ e ‘c’ e que a resolução do exercício se resume em seguir os passos dados em cada item. Com isso, estamos diante de um exercício congruente.

2. Um jardim quadrado, com lados de **x** metros, teve um dos lados aumentado em 3 metros; o outro lado foi aumentado em 5 metros. Assim, o jardim ficou retangular.

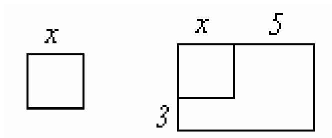
a) Escreva o polinômio que indica a nova área do jardim.

b) Subtraia da nova área a antiga. Assim você terá o polinômio que indica a diferença das áreas.

c) Sabendo que a diferença entre a nova área e a antiga é de 31 m^2, descubra a medida **x**.

(Matemática, p. 168, 7ª série, número 94)

Observamos que, diferentemente do exemplo 1 acima, a figura sugerida na frase “Neste problema, faça uma figura” tem função de ser uma figura de estudo. Ela pode ou não ser representada. Para executar a tarefa mentalmente, basta o aluno imaginar um jardim quadrado que, devido às modificações, passou a ser um jardim retangular e identificar como ficam as medidas dos lados usando uma representação algébrica da sentença dada em linguagem natural. Nesse caso, a passagem pela linguagem figural pode estar presente como conseqüência do contrato estabelecido no enunciado com a frase “Neste problema, faça uma figura. Ajuda muito!”. Vejamos o estudo da resolução do item a:

Linguagem natural	Considerações	Linguagem algébrica
Um jardim quadrado, com lados de x metros, teve um dos lados aumentado em 3 metros; o outro foi aumentado em 5 metros. Assim, o jardim ficou retangular. a) Escreva o polinômio que indica a nova área do jardim.	 *Comprimento: x* *Novo comprimento: x + 5* *Largura: x* *Nova largura: x + 3*	*Nova área do jardim:* *(x + 5).(x + 3)*

Quadro 10 – Resolução do exemplo 2 tirada da coleção *Matemática* referente a conversão "passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural".

Notemos que essa resolução apresentada não é única. É possível o aluno olhar para nova área e imaginar esta dividida em três outros retângulos obtendo, portanto, a nova área a partir da soma das áreas de cada uma dessas partes. Nesse caso teríamos que desenvolver a expressão $x^2 + 3.x + 5.(x + 3)$. O fato de desenhar um quadrado e imaginá-lo acrescido em alguns metros tanto no comprimento quanto na largura faz esse exercício não-congruente.

Vejamos, a seguir, um exemplo com esse tipo de conversão na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*.

1. Uma pesquisa sobre o índice de aprovação dos 100 alunos das sétimas séries de um colégio apresentou os seguintes resultados:
Aprovado → 75%
Recuperação → 15%
Reprovado → 10%
a) O gráfico de setores corresponde ao resultado? Em caso negativo, construa o gráfico corretamente.
b) Faça um gráfico de barras com esses dados.

(Matemática – Uma aventura do pensamento, p. 156, 7ª série, número 77)

Observamos que o enunciado é apresentado em linguagem natural. O gráfico de setores dado tem função de completar o enunciado. A tarefa proposta no item 'a' solicita um estudo do gráfico de setores e uma leitura da quantidade nele representada de aprovados, em recuperação e reprovados. Como os dados do enunciado não correspondem ao representado no gráfico, o aluno, pelo estudo da figura, passará a tratar o enunciado em linguagem algébrica para encontrar qual porção do gráfico deverá corresponder à cada classificação.

Notemos, ainda, que para resolver esse exercício é preciso de uma leitura do círculo em termos de ângulos - 360º de uma volta completa corresponde a 100% - e da aplicação da regra de três para a obtenção de uma expressão algébrica.

$$\begin{array}{lcl} 100\% \rightarrow 360^o & & 100.x = 360.75 \\ 75\% \rightarrow x^o & \longrightarrow & x = 27000:100 \\ & & x = 270^o \end{array}$$

Tendo o resultado, faz-se necessário uma leitura do gráfico dado para comparar com os resultados obtidos. Dessa forma, conclui-se que esse gráfico não corresponde ao resultado anunciado.

Como mostram os dados da tabela abaixo, a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* propõe um número maior de exercícios desse tipo de conversão: 99 de 131. Entretanto, cabe frisar que 22 dos 32 exercícios propostos na coleção *Matemática* são congruentes, enquanto que na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* 80 dos 99 são congruentes.

Tabela 3 - Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural no ensino fundamental

Passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	*Total* **parcial**	**Total**
Matemática						
Congruente	4	3	7	8	**22**	
Não congruente	-	-	6	4	**10**	**32**
Tota parcial	**4**	**3**	**13**	**12**	---------	
Matemática – Uma aventura do pensamento						
Congruente	-	6	5	69	**80**	
Não congruente	-	2	3	14	**19**	**99**
Tota parcial	**-**	**8**	**8**	**83**	---------	

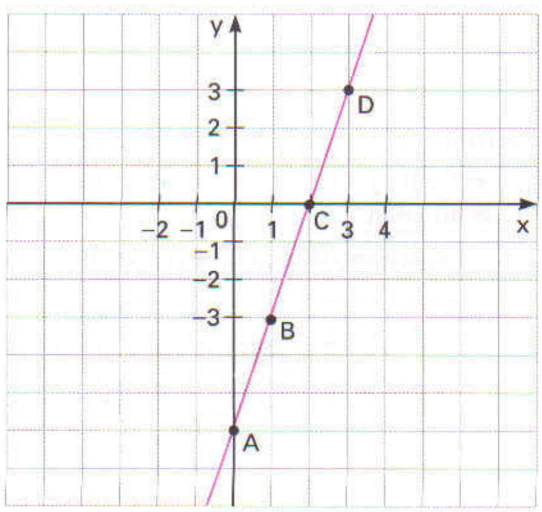
***Tipo 4*: Passagem da linguagem figural para a linguagem natural**

Ao estudar as duas coleções aqui consideradas, observamos que nenhum exercício desse tipo de conversão foi proposto em nenhuma das coleções.

***Tipo 5*: Passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica**

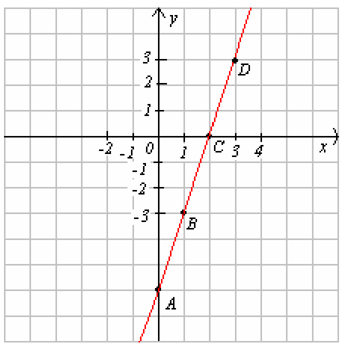
Ambas as coleções propõem exercícios que tratam da conversão do tipo passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica. Vejamos dois exercícios de cada uma das coleções, começando pela coleção *Matemática*.

1. Observe o gráfico e responda:
   a) Quais as coordenadas dos pontos **A**, **B**, **C** e **D**?
   b) Agora um desafio! A linha reta vermelha é o gráfico de uma função. Tente descobrir a fórmula dessa função.
   Sugestão: se a função é de 1º grau, a fórmula é do tipo $y = ax + b$. Além disso, observe o gráfico: se $x = 0$, qual é o valor de **y**? Use esses dados na fórmula.



(Matemática, p. 233, livro de 8ª série, número 21)

Resolução do item b:

Linguagem figural	Considerações	Linguagem algébrica
	*Dados: $y = ax + b$, ponto $A(0, –6)$ e ponto $C(2, 0)$* *Para o ponto A: $-6 = a.0 + b$* *$b = -6$* *Para ponto C e $b = -6$: $0 = 2a – 6$* *$a = 3$*	*Fórmula da função:* *$y = 2x – 6$*

Quadro 11 – Resolução do exemplo 1 tirada da coleção *Matemática* referente a conversão “passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica”.

Notemos que a tarefa proposta no exercício consiste em analisar o gráfico dado e escrever, a partir dos dados oferecidos, a função polinomial de 1º grau. Essa tarefa caracteriza explicitamente a mudança do registro de representação em linguagem figural para a linguagem algébrica onde se devem levar em consideração os objetos em jogo fornecidos no gráfico. Além disto, os dados e a sugestão fornecidos direcionam para um procedimento. Como podemos observar nas considerações do quadro acima, os dados referentes aos pontos do gráfico também facilitaram a resolução do exercício. Ao considerar o ponto sobre o eixo ‘x’, obtemos diretamente o valor de *b* e, com isso, evitamos o uso de um sistema de equações. Este fato considera o exercício como congruente.

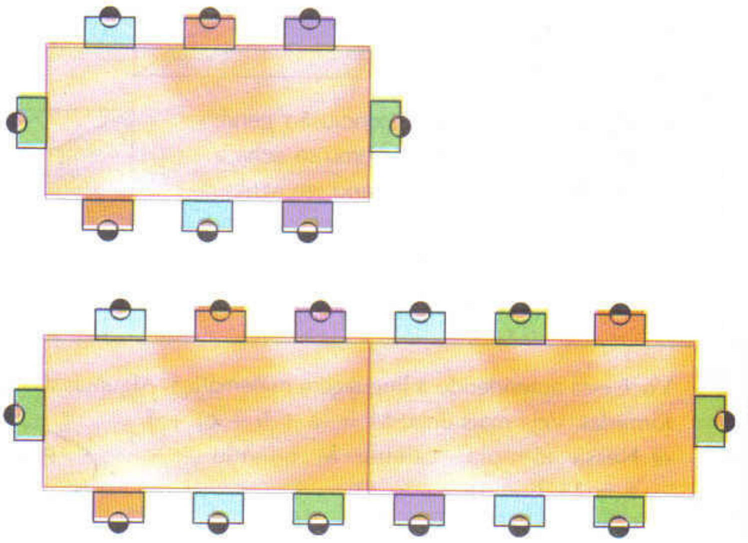
2. Observe a figura:

a) Juntando 3 mesas dessa maneira, quantas pessoas se acomodam?

b) Mostre as contas necessárias para achar quantas pessoas se acomodariam em 13 mesas.

c) Copie e complete esta conclusão geral: *O número de pessoas acomodadas é* $\boxed{??}$.

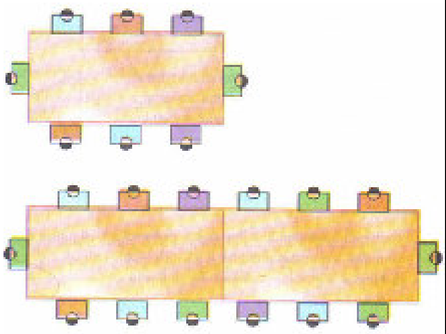
d) Escreva a conclusão numa fórmula: **p** será o número de pessoas acomodadas e **m** o número de mesas.



(Matemática, p. 270, 5ª série, número 24)

Nesse exercício, como no anterior, a figura completa o enunciado. Observamos que, no item ‘b’, a tarefa “determinar o número de cadeiras para um total de 13 mesas” sugere que se aumente o número de mesas, induzindo a uma estratégia de resolução, ou seja, a de não contar as cadeiras uma a uma (caso comece com contagem). A intenção é levar o aluno a buscar solução mais adequada.

Resolução do item ‘d’:

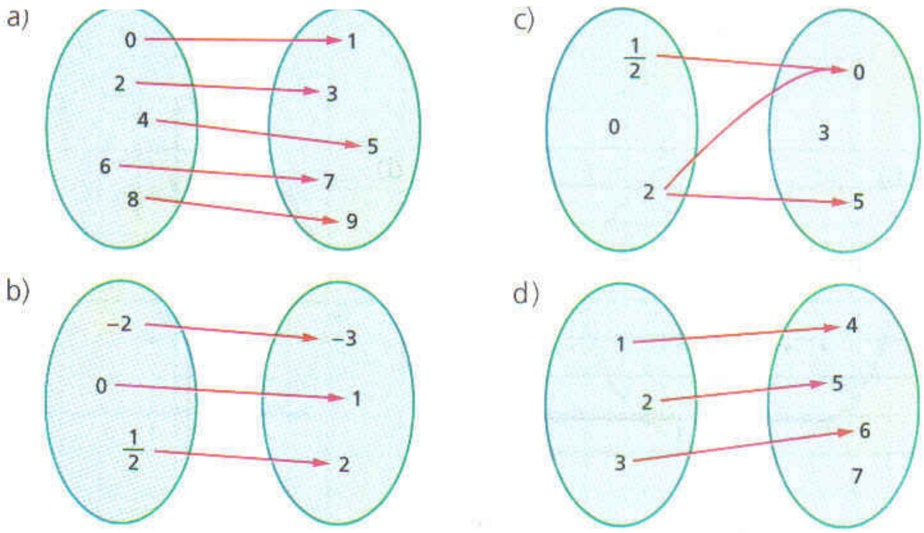
Linguagem figural	Considerações	Linguagem algébrica
	*2 cadeiras laterais fixas para qualquer número de mesas* *Além disso:* *1 mesa → 6 cadeiras* *2 mesas → 12 cadeiras* *Generalizando: o número de cadeiras é um múltiplo de 6.*	*Fórmula da conclusão:* $p = 6.m + 2$ *onde* *p: número de pessoas acomodadas* *m: número de mesas*

Quadro 12 – Resolução do exemplo 2 tirada da coleção *Matemática* referente a conversão “passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica”.

Podemos perceber nesse exercício que é preciso uma interpretação da forma da figura dada geometricamente e a manipulação da figura, acrescentando mais mesas aos dados. Espera-se que os alunos observem que, para cada desenho da seqüência, existem apenas duas cadeiras laterais, ou seja, o número 2 é fixo para qualquer número de mesas. Além disto, o número de cadeiras restante é sempre seis para cada mesa. A formulação da solução não é a tradução simples de expressões dadas**;** ela é uma generalização que deve ser produzida. Por isto, o exercício é não-congruente.

Diferentemente da coleção *Matemática*, a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* trata a passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica somente quando se trabalha a função de 1º grau. Os exercícios propostos têm como tarefa escrever a fórmula de uma função polinomial de 1º grau. Para escrever essa função, ou é dada uma tabela, onde são apresentados pares de números que se correspondem ou, então, é dado um gráfico, como no exemplo da coleção *Matemática* estudado acima. Há uma única situação na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* que difere da coleção *Matemática*. Essa situação possui a mesma tarefa, mas os dados são oferecidos em forma de diagramas. Vejamos o enunciado a seguir:

Nomeie os elementos de cada relação. Dê o domínio e a imagem. Quais dessas relações são funções? Expresse as funções por meio de uma fórmula:



(Matemática – Uma aventura do pensamento, p. 152, 8ª série, número 2)

Observamos que esse exercício oferece a possibilidade do aluno responder sem precisar fazer cálculos algébricos, ou seja, ele tem condições de responder por meio de raciocínios lógicos. Por exemplo, no item ‘a’, percebemos facilmente que os valores da imagem possuem uma unidade a mais que os valores do domínio. Apenas com essa idéia o aluno pode escrever em linguagem algébrica a fórmula da função: $y = x + 1$.

Como mostra a tabela abaixo, a coleção *Matemática* propõe um total de 15 exercícios desse tipo de conversão, dos quais 6 são congruentes e 9 são não-congruentes. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* propõe um total de 8 exercícios, todos com situações congruentes.

Tabela 4 – Passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica

Passagem da linguagem figural para linguagem algébrica	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	*Total* **parcial**	Total
Matemática						
Congruente	2	-	2	2	**6**	
Não congruente	1	5	2	1	**9**	**15**
Tota parcial	**3**	**5**	**4**	**3**	---------	
Matemática – Uma aventura do pensamento						
Congruente	-	-	-	8	**8**	
Não congruente	-	-	-	-	**-**	**8**
Tota parcial	**-**	**-**	**-**	**8**	---------	

Conclusão

Nas coleções *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento* identificamos 692 exercícios do tipo conversão, conforme mostra a tabela abaixo. Destes, temos 521 referentes à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica; 15 referentes à passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural; 133 exercícios referentes à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural; 23 referentes à passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica. Vejamos os dados das duas coleções consideradas, separados por cada uma das séries do ensino fundamental:

Tabela 5 – Conversão no ensino fundamental nas coleções *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento*

Conversão	***Matemática***				Matemática – Uma aventura do pensamento				*Total* **parcial**	Total
	5ª série	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**		
Passagem LN → LA[34]										
Congruente	12	46	52	48	4	113	47	42	**364**	
Não congruente	4	23	27	24	-	46	21	12	**157**	**521**
Tota parcial	**16**	**69**	**79**	**72**	**4**	**159**	**68**	**54**	-------	
Passagem LA → LN[35]										
Congruente	1	2	3	3	-	2	2	2	**15**	
Não congruente	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	**15**
Tota parcial	**1**	**2**	**3**	**3**	**-**	**2**	**2**	**2**	-------	
Passagem LN → LF→ LA[36]										
Congruente	4	3	7	8	-	6	5	69	**102**	
Não congruente	-	-	6	4	-	2	3	14	**29**	**131**
Tota parcial	**4**	**3**	**13**	**12**	**-**	**8**	**8**	**83**	-------	
Passagem LF → LA[37]										
Congruente	2	-	2	2	-	-	-	8	**14**	
Não congruente	1	5	2	1	-	-	-	-	**9**	**23**
Tota parcial	**3**	**5**	**4**	**3**	**-**	**-**	**-**	**8**	-------	
Total	**24**	**79**	**99**	**90**	**4**	**169**	**78**	**147**	-------	**692**

[34] Passagem LN → LA: passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica
[35] Passagem LA → LN: passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural
[36] Passagem LN → LF→ LA: passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural
[37] Passagem LF→ LA: passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica

De acordo com a tabela, as coleções *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento* distribuíram exercícios que oferecem a possibilidade de trabalhar a conversão, nas quatro séries do ensino fundamental, de forma diferenciada. A coleção *Matemática* ofereceu os quatro tipos de conversão nas quatro séries do ensino fundamental. No entanto, na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*, os quatro tipos de conversão foram oferecidos apenas para a 8ª série, pois para a 5ª série foi oferecida somente a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e para a 6ª e 7ª série não foi oferecida a passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica.

A passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica foi trabalhada em ambas as coleções predominantemente com exercícios congruentes: 364 dos 521 exercícios. A coleção *Matemática* concentrou a quantidade de exercícios na 6ª, 7ª e 8ª série com 46, 52 e 48 exercícios respectivamente; e deu mais ênfase à esta conversão na 5ª série com 16 exercícios, quando comparada com a 5ª série da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* com 4 exercícios. Contrariamente, a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* focalizou a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica na 6ª série, com 159 dos 286 exercícios. A diferença da quantidade de exercícios da conversão é considerável na 6ª série das duas coleções: 69 exercícios contra 159, sendo 46 congruentes na coleção *Matemática* e 113 congruentes na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*.

À passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural foi dedicado um número pequeno de exercícios em ambas as coleções. Juntas, as coleções contemplaram apenas 15 dos 692 exercícios propostos, sendo que 9 pertencem à coleção *Matemática* e 6 à coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*. Os exercícios propostos foram distribuídos de forma equilibrada de acordo com as séries e todos foram considerados congruentes. Ressaltamos que a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* optou por não trabalhar esse tipo de conversão na 5ª série do ensino fundamental.

A passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural foi tratada na coleção *Matemática* em todas as séries do ensino fundamental. Porém, para a 5ª e 6ª série a coleção não ofereceu exercícios não-congruentes e os congruentes apareceram em quantidade inferior às turmas de 7ª e 8ª séries: 4 e 3 exercícios para 5ª e 6ª séries e, 7 e 8 exercícios para 7ª e 8ª séries, respectivamente. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*, assim como fez com a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, enfatiza esse tipo de conversão em uma só série.

Consequentemente há uma considerável diferença da quantidade de exercícios da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica com o apoio de uma figura na 8ª série das duas coleções: 12 exercícios contra 83, sendo 8 congruentes na coleção *Matemática* e 69 congruentes na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*.

A passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica foi considerada em ambas as coleções. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* optou por trabalhar essa conversão somente na 8ª série e com todos os exercícios congruentes. A coleção *Matemática* ofereceu essa conversão em todas as séries do ensino fundamental. Porém, na 6ª série, foram desenvolvidos apenas exercícios não-congruentes. Ressaltamos que, quando comparadas às quantidades de exercícios na 8ª série das duas coleções, novamente a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* se sobressai: 3 exercícios na coleção *Matemática* contra 8 na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*.

A coleção *Matemática* dispõe de uma quantidade maior de exercícios de conversão para a 7ª série: 99 exercícios; em seguida, para a 8ª série, 90 exercícios; para a 6ª série, 79 exercícios e, finalmente, para a 5ª série, 24 exercícios. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* trabalha mais a conversão no livro de 6ª série, com 169 exercícios; depois no de 8ª série, com 147 exercícios; na 7ª série, 78 exercícios; por fim, na 5ª série, 4 exercícios. Os tipos de conversão que foram oferecidos com maior número de exercícios foram: para a 6ª série 248 exercícios (79 + 169); para a 8ª série 237 exercícios (90+174), para a 7ª série 177 exercícios (99 + 78); e para a 5ª série 28 (24 + 4) exercícios.

Tipos de Tratamento

Apresentamos aqui o estudo realizado das coleções relativo aos quatros tipos de tratamento.

***Tipo 1*: Tratamento em linguagem natural**

Ilustraremos o tratamento em linguagem natural com o seguinte exercício:

Explique, com suas palavras, a diferença entre uma *equação* e uma *expressão algébrica*. Dê exemplos.

(Matemática, p.145, 7ª série, número 20)

No livro de 7ª série da coleção *Matemática*, o conceito de equação e o de expressão algébrica vem sendo tratado, de forma implícita, desde o começo do capítulo “Cálculo algébrico”. No momento em que é dada ao aluno esta tarefa, ele já sabe diferenciar esses dois termos. Como mostra o quadro abaixo, tanto o enunciado como a solução do exercício são dados em linguagem natural:

Linguagem natural	Considerações	Linguagem natural
Explique, com suas palavras, a diferença entre uma equação e uma expressão algébrica.	*O que é equação* *O que é expressão algébrica*	*A equação tem o sinal de igual; a expressão não. Assim a equação é como uma sentença completa e, a expressão é como uma sentença incompleta.*[38]

Quadro 13 – Resolução do exemplo tirado da coleção *Matemática* sobre o “tratamento em linguagem natural”.

Notemos que, nesse exercício, o comando “explique com suas palavras” é o que assegura o tratamento em linguagem natural esperada pelos autores. Como o exercício é proposto para alunos de 7ª série, é possível um tratamento algébrico misturado com um tratamento em linguagem natural. Exercícios que contemplam esse tipo de tratamento têm por tarefa: responder o porquê, justificar ou fazer comparações. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*, diferentemente da coleção *Matemática*, propôs um exercício na qual a tarefa pede para corrigir um erro de uma frase. Vejamos o enunciado a seguir:

Indique por que a frase a seguir, dita por um locutor de rádio, está incorreta e escreva-a corretamente no caderno: “Com o término dos jogos da rodada dez, o Flamengo melhorou a sua posição: passou do lugar oito para o lugar cinco”.

(Matemática – Uma aventura do pensamento, p.12, 7ª série, número 4)

Neste exercício notamos dois momentos de tratamento em linguagem natural: dizer o porquê a frase está incorreta e corrigir o erro escrevendo a frase novamente. A resposta esperada pelos autores é a seguinte:

[38] Resolução da página 107 do manual pedagógico da 7ª série da coleção de Imenes e Lellis.

Linguagem natural	Considerações	Linguagem natural
"Com o término dos jogos da rodada dez, o Flamengo melhorou sua posição: passou do lugar oito para o lugar cinco".	*As posições de um jogo qualquer são indicadas por números ordinais.*	*O locutor deveria ter usado os números naturais com a função ordinal: "Com o termino dos jogos da décima rodada, o Flamengo melhorou sua posição: passou do oitavo lugar para o quinto lugar".*

Quadro 14 – Resolução do exemplo tirado da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* sobre o "tratamento em linguagem natural".

Como mostra a tabela abaixo, ambas as coleções trabalham o tratamento em linguagem natural em todas as séries do ensino fundamental. A coleção *Matemática* propôs 54 exercícios, das quais 7 correspondem à 5ª série, 6 correspondem à 6ª série, 23 à 7ª série e 18 à 8ª série. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* propôs uma quantidade menor: 29 exercícios, dos quais 11 correspondem à 5ª série, 2 correspondem à 6ª série, 11 à 7ª série e, finalmente, 5 exercícios à 8ª série.

Tabela 6 – Tratamento em linguagem natural no ensino fundamental

Tratamento em linguagem natural	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	**Total**
Matemática	**7**	**6**	**23**	**18**	**54**
Matemática – Uma aventura do pensamento	**11**	**2**	**11**	**5**	**29**

***Tipo 2*: Tratamento em linguagem algébrica**

Ambas as coleções, *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento*, propõem exercícios em que a tarefa exige um tratamento em linguagem algébrica. As tarefas implicam em simplificar expressões algébricas, resolver equações e sistemas de equações do 1º e 2º graus, entre outras. Vejamos, a seguir, uma atividade da coleção *Matemática*:

Resolva, seguindo o exemplo:

a) $2 - 5(x + 2) = 14 - x$
b) $6 - 5x = 3 - 2(3x + 1)$
c) $3(2x + 5) = 100 - 1(2x - 5)$
d) $4x = 3 - (x + 5)$

Cuidado aqui!

Exemplo:

$$2 - (x + 3) = -2(3x + 1)$$
$$2 - x - 3 = -6x - 2 \quad +6x$$
$$+6x \quad 2 + 5x - 3 = -2$$
$$5x = -1$$
$$x = -\frac{1}{5}$$

Atenção para o $-(x + 3)$.

- Pensando que ele é o oposto de $x + 3$, temos $-(x + 3) = -x - 3$.
- Pensando que ele é igual a $-1(x + 3)$, temos $-1(x + 3) = -x - 3$.

(Matemática, p. 211, 6ª série, número 30)

Nesse exercício temos um tratamento no registro da linguagem algébrica. A ajuda é oferecida por meio de um exemplo resolvido e com dicas enfatizadas de duas maneiras diferentes: uma considerando a expressão – *(x + 3)* como sendo o oposto da expressão *x + 3* e outra considerando o coeficiente 1 na frente dos parênteses para, então, aplicar a propriedade distributiva.

Resolução do item c:

Linguagem algébrica	Considerações	Linguagem algébrica
$3(2x + 5) = 100 - 2(2x - 5)$	*Propriedade distributiva* *Princípios multiplicativo e aditivo* *Soma de termos semelhantes*	$3.2x + 3.5 = 100 - 2.2x - 2.(-5)$ $6x + 15 = 100 - 4x + 10$ $10x = 95$ $x = \frac{95}{10} \Rightarrow x = \frac{19}{2}$

Quadro 15 – Resolução do exemplo tirado da coleção *Matemática* sobre o “tratamento em linguagem algébrica”.

Exercícios como a da coleção *Matemática* são facilmente encontradas na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*. Porém, desta última, destacamos um exercício não encontrado na coleção *Matemática*, destinada a alunos de 5ª série. Vejamos:

Com uma calculadora, Pedro obteve os valores de duas expressões numéricas:

$x + y = 36$ milhões $\qquad x + y + b = 45$ milhões

Qual é o valor de cada expressão numérica abaixo?

$y + x \qquad (x + y) + b \qquad x + (y + b) \qquad (x + b) + y \qquad b$

(Matemática – Uma aventura do pensamento, p. 49, 5ª série, número 22)

Notamos que o autor trata as expressões $y + x$, $(x + y) + b$ como expressões numéricas. Além disso, observamos que, ao pedir como tarefa calcular o valor da expressão $y + x$, o autor enfatiza a propriedade comutativa da adição; para as expressões $(x + y) + b$ e $x + (y + b)$ a propriedade associativa; com a expressão $(x + b) + y$ enfatiza tanto a propriedade comutativa quanto a propriedade associativa da adição. Ao pedir para achar o valor de b, o autor dá indícios para um trabalho com equações. Esses fatos mostram que o exercício proposto, além de oferecer um tratamento implícito em linguagem algébrica, preserva algumas propriedades da adição. Vejamos sua resolução:

Linguagem algébrica	Considerações	Linguagem algébrica
$x + y = 36$ *milhões* $x + y + b = 45$ *milhões* $y + x$ $(x + y) + b$ $x + (y + b)$ $(x + b) + y$ b	*Propriedade comutativa da adição* *Propriedade associativa da adição* *Valor numérico: substituir uma expressão por um número*	$y + x = x + y = 36$ *milhões (comutatividade)* $(x + y) + b = x + y + b = 45$ *milhões (associatividade)* $x + (y + b) = (x + y) + b = 45$ *milhões (associatividade)* $(x + b) + y = (b + x) + y = b + (x + y) = (x + y) + b = 45$ *milhões (comutatividade e associatividade)* $b = 9$ *milhões pois* $(x + y) + b = 45 \rightarrow 36 + b = 45 \rightarrow b = 45 - 36 = 9$ *(valor numérico)*

Quadro 16 – Resolução do exemplo tirado da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* sobre o "tratamento em linguagem algébrica".

A coleção *Matemática* propõe 250 exercícios; 11 deles 11 destinados à 5ª série, 33 destinados à 6ª série, 98 à 7ª série e, 108 à 8ª série. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* propõe 427 exercícios, dos quais 21 correspondem à 5ª série, 59 à 6ª série, 173 correspondem a 7ª série e 174 à 8ª série.

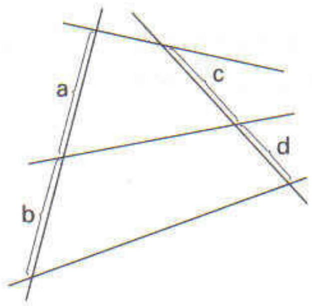
Tabela 7 – Tratamento em linguagem algébrica no ensino fundamental

Tratamento em linguagem algébrica	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	Total
Matemática	**11**	**33**	**98**	**108**	**250**
Matemática – Uma aventura do pensamento	**21**	**59**	**173**	**174**	**427**

Tipo 3: **Tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural**

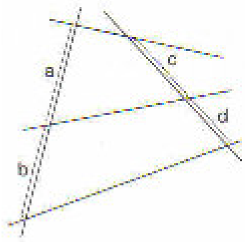
No tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural tanto o enunciado quanto a resolução devem ser formuladas na linguagem natural. A figura, além de ter a função de completar e ilustrar o exercício, pode ter a função de ser uma figura de estudo produzida pelo aluno. Ambas as coleções propõem exercícios cujo tratamento se realiza em linguagem natural com o apoio na linguagem figural. Ilustraremos esse tratamento com o seguinte exercício:

Na figura, meça **a**, **b**, **c** e **d**. Depois, verifique se é verdadeira a igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Tente explicar por quê.



(Matemática, p. 206, 8ª série, número 40)

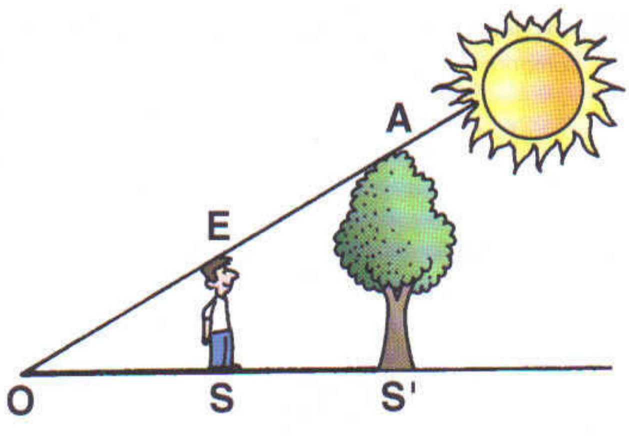
Nesse exercício, o tratamento poderá ser dado em linguagem natural quando se tratar da tarefa "explicar o porquê". Para tanto, essa explicação depende da observação da figura dada. Observe que os feixes de retas não são visivelmente paralelos e, pelo teorema de Tales, isso é o suficiente para não validar a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Por outro lado, o aluno tem a opção de realizar um tratamento em linguagem numérica, considerando as medidas dos segmentos e verificando que a igualdade obtida é falsa. Vejamos as duas possíveis soluções para esse exercício:

Linguagem natural	Considerações	Linguagem natural
*Na figura, meça **a**, **b**, **c** e **d**. Depois verifique se é verdadeira a igualdade:* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. *Tente explicar o porquê.*	 Medindo os segmentos: a = 17 mm c = 15 mm b = 16 mm d = 11 mm	*1) A igualdade* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *é falsa porque o feixe de retas dado é composto de retas não paralelas.* *2)* $\frac{17}{16}=\frac{15}{11}\rightarrow 17.11=15.16$ *187 = 240 falso* *A igualdade* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *é falsa porque as medidas dos segmentos envolvidos não formam uma proporção.*

Quadro 17 – Resolução do exemplo 1 tirado da coleção *Matemática* sobre o “tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural”.

É visível nesse exercício a não validade da igualdade que ocorre tanto pela observação das retas não paralelas como, também, pelas medidas dos segmentos. Isso caracteriza exercício como congruente. Vejamos outro exemplo:

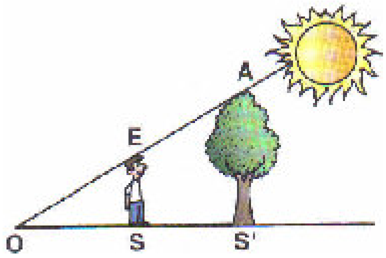
- Veja em que posição eu me coloquei:
  SO é o comprimento de minha sombra;
  S’O é o comprimento da sombra da árvore.
  a) Explique por que os triângulos ESO e AS’O são semelhantes.
  b) Sabendo que minha altura é 1,70 m, o comprimento de minha sombra é 2,2 m e o da sombra da árvore é 3,3 m, qual é a altura da árvore?
  c) Invente um problema parecido com este e resolva-o. Dê para um colega corrigi-lo.



(Matemática, p. 26, 8ª série, número 34)

No item ‘a’, a tarefa “explique por que os triângulos ESO e AS’O são semelhantes” pode ter um tratamento em linguagem natural. A Configuração de Tales é facilmente recuperada na figura dada. A coleção *Matemática* apresenta a seguinte resposta:

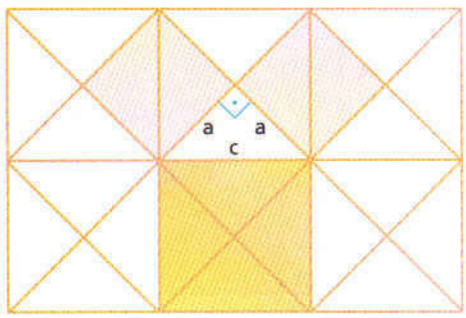
Linguagem natural	Considerações	Linguagem natural
SO é o comprimento de minha sombra; *S'O é o comprimento da sombra da árvore.* *Explique por que os triângulos ESO e AS'O são semelhantes.*	*ESO e AS'O são triângulos semelhantes*	*triângulos ESO e AS'O são semelhantes porque eles têm dois ângulos iguais:* $\hat{O}$ *(ângulos comum aos dois triângulos) e* $\hat{S}$ *e* $\hat{S}'$ *(ângulos retos).*[39]



Quadro 18 – Resolução do exemplo 2 tirado da coleção *Matemática* sobre o "tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural".

Observamos que a interpretação de sub-figuras e a mobilização dos casos de semelhança de triângulos se tornam necessária para que possamos explicar a semelhança de dois triângulos. Isso classifica o exercício como não-congruente. Encontramos outro tipo diferente de tarefa na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*:

• Observe a figura abaixo. Se pensarmos no triângulo retângulo isósceles como o mais simples dos triângulos retângulos, é provável que tenha sido com esse tipo de triângulo que foi feita a primeira demonstração do teorema de Pitágoras. Utilize a figura para mostrar com suas próprias palavras que $c^2 = 2a^2$:



[39] Página 104 do manual pedagógico.

(Matemática – Uma aventura do pensamento, p. 36, 8ª série, número 62)

Observamos no enunciado "utilize a figura para mostrar com suas próprias palavras" a tarefa que solicita um tratamento em linguagem natural por meio do estudo da figura. Nesse exercício o aluno é levado a escrever sua própria demonstração, em função do que ele observa na figura dada. Uma resposta considerável seria observar as áreas dos dois quadrados rosa, a^2 cada um, totalizando $2a^2$ e do quadrado laranja, c^2, e observar que tanto os dois quadrados rosa quanto o quadrado laranja possuem os mesmos quatro triângulos isósceles, ou seja, eles são iguais: $c^2 = 2a^2$. É interessante notar nesse exercício uma chamada para a história da matemática. Isso ocorre ao apresentar a idéia da provável primeira demonstração do teorema de Pitágoras.

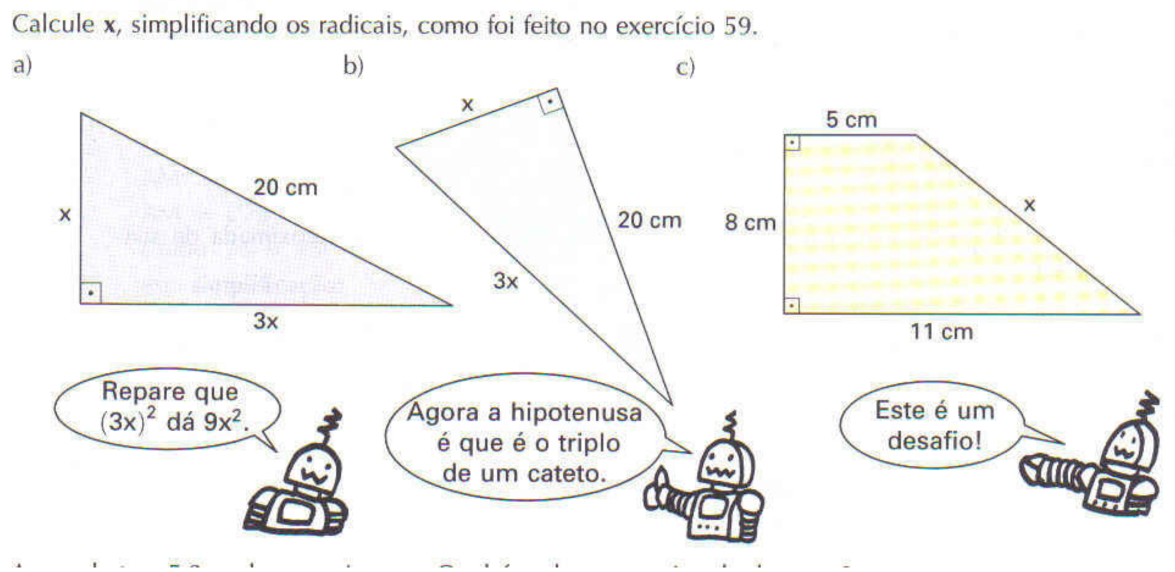
A coleção *Matemática* trabalha o tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural com o dobro da quantidade de exercícios que a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*. A primeira tem um total de 22 exercícios, nos quais 19 são congruentes e 3 são não-congruentes. A segunda coleção tem 11 exercícios, sendo 7 congruentes e 4 não-congruentes. Vejamos com mais detalhes, na tabela a seguir, a quantidade de exercícios referentes à cada série dos livros-texto estudados destinados ao tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural:

Tabela 8 – Tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural no ensino fundamental

Tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	*Total* **parcial**	**Total**
Matemática						
Congruente	-	-	6	13	**19**	
Não congruente	-	-	-	3	**3**	**22**
Tota parcial	**-**	**-**	**6**	**16**	--------	
Matemática – Uma aventura do pensamento						
Congruente	-	-	5	2	**7**	
Não congruente	-	-	4	-	**4**	**11**
Tota parcial	**-**	**-**	**9**	**2**	--------	

Tipo 4: Tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural

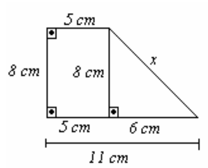
Ilustraremos esse tipo de tratamento com um exemplo de exercício da coleção *Matemática*:



(Matemática, p. 40, 8ª série, número 69)

A figura nesse exercício também completa o enunciado. Na figura, as marcas permitem a formulação de que os triângulos são retângulos e, assim, a identificação dos catetos e da hipotenusa.

Resolução dos itens *a* e *b*:



Quadro 19 – Resolução do exemplo tirado da coleção *Matemática* sobre o “tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural”.

Nos itens ‘a’ e ‘b’, tem-se a aplicação direta do teorema de Pitágoras e, por isso, consideramos como um exercício em que há congruência. É interessante observarmos, no

Linguagem algébrica	Considerações	Linguagem algébrica
Dados: *Medidas dos lados: 8, 5* e *11* *Um lado a determinar: x*	*Trapézio formando um retângulo e um triângulo retângulo com a medida de três lados: Teorema de Pitágoras*	$x^2 = 6^2 + 8^2$ $x = 10$

item ‘a’, a ajuda que os autores oferecem aos alunos para que evitem erros no tratamento em linguagem algébrica: $(3x)^2 = 9x^2$. No item ‘b’ é preciso identificar no triângulo retângulo qual a hipotenusa e expressar em termos do Teorema de Pitágoras.

Resolução do item *c*:

Linguagem algébrica	Considerações	Linguagem algébrica
Dados: a) $x, 3x, 20$ e $(3x)^2 = 9x^2$ *hipotenusa: 20* b) $x, 3x, 20$ e $(3x)^2 = 9x^2$ *hipotenusa: 3x*	*Triângulo retângulo* *Aplicação do Teorema de Pitágoras*	a) $20^2 = (3x)^2 + x^2$ $400 = 9x^2 + x^2$ $x^2 = 40$ $x = 2\sqrt{10}$ b) $(3x)^2 = 20^2 + x^2$ $9x^2 = 400 + x^2$ $x^2 = 50$ $x = 5\sqrt{2}$

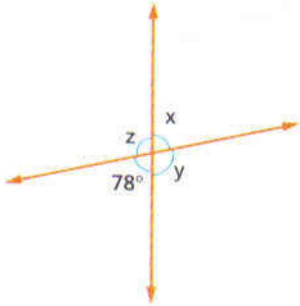
Quadro 20 – Resolução do exemplo tirado da coleção *Matemática* sobre o “tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural”.

O item ‘c’, diferentemente dos itens ‘a’ e ‘b’, é um tipo de exercício não-congruente, pois o aluno precisa reconhecer na figura dada a presença de um retângulo e de um triângulo retângulo. Além disso, é preciso conhecer a propriedade da figura, retângulo, no qual lados opostos paralelos são iguais. Com estas considerações, basta formular uma expressão algébrica usando o Teorema de Pitágoras e dar tratamento a essa expressão em linguagem algébrica.

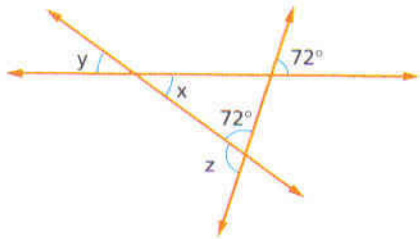
No estudo da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento,* confirmamos a presença de exercícios que envolvem o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Além de exercícios que utilizam os conceitos de área, perímetro, valor numérico, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, entre outros, temos exercícios que utilizam propriedades de ângulos. Vejamos:

Calcule **x**, **y** e **z**.

a)



b)



(Matemática – Uma aventura do pensamento, p. 65, 6ª série, número 43)

Observamos no exercício a tarefa "calcule", que caracteriza um tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. No item 'a', duas propriedades de ângulo são necessárias para resolver o problema: a propriedade dos ângulos opostos e a propriedade dos ângulos suplementares. A propriedade dos ângulos opostos pelo mesmo vértice permite concluir que $x = 78^o$ e que $z = y$; a propriedade dos ângulos suplementares permite dizer que $z + 78^o = 180^o$, ou seja, $z = y = 102^o$. No item 'b', utilizamos as duas propriedades citadas para descobrir que $x = y$ e que $z + 72^o = 180^o$, ou seja, $z = 108^o$. Nesse caso, ainda não sabemos quais os valores de *x* e *y*. Para obter esses valores, podemos envolver outra propriedade: a propriedade dos ângulos internos de um triângulo, que conclui a atividade: $72^o + 72^o + x = 180^o$. A percepção necessária quanto às propriedades envolvidas tornam o exercício não-congruente.

A quantidade de exercícios que trabalha o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural é significativa. Na coleção *Matemática* são 201 exercícios, dos quais 154 são congruentes e 47 são não-congruentes; Já na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* temos um total de 274 exercícios propostos, dos quais 216 são congruentes e 58 são não-congruentes. Vejamos a tabela a seguir que ilustra a quantidade de exercícios de cada série dos livros-texto estudados:

Tabela 9 – Tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural no ensino fundamental

Tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	*Total* **parcial**	**Total**
Matemática						
Congruente	-	10	52	92	**154**	
Não congruente	-	-	16	31	**47**	**201**
Tota parcial	**-**	**10**	**68**	**123**	--------	
Matemática – Uma aventura do pensamento						
Congruente	8	25	62	121	**216**	
Não congruente	-	6	33	19	**58**	**274**
Tota parcial	**8**	**31**	**95**	**140**	--------	

Conclusão

Ambas as coleções, *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento* ofereceram um total de 1268 exercícios que trabalham o tratamento. Desses exercícios, 83 são referentes ao tratamento em linguagem natural; 677 se referem ao tratamento em linguagem algébrica; 33 exercícios são referentes ao tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural; e, 475 exercícios se referem ao tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Vejamos, na tabela abaixo, os dados em relação a quantidades de exercícios de cada série do ensino fundamental das duas coleções estudadas:

Tabela 10 – Tratamento no ensino fundamental nas coleções *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento*

Tratamento	*Matemática*				Matemática – Uma aventura do pensamento				*Total* **parcial**	**Total**
	5ª série	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**	**5ª série**	**6ª série**	**7ª série**	**8ª série**		
LN[40]										
Total parcial	**7**	**6**	**23**	**18**	**11**	**2**	**11**	**5**	-------	**83**
LA[41]										
Total parcial	**11**	**33**	**98**	**108**	**21**	**59**	**173**	**174**	-------	**677**
LN → LF[42]										
Congruente	-	-	6	13	-	-	5	2	**26**	
Não congruente	-	-	-	3	-	-	4	-	**7**	**33**
Total parcial	**-**	**-**	**6**	**16**	**-**	**-**	**9**	**2**	-------	
LA → LF[43]										
Congruente	-	10	52	92	8	25	62	121	**370**	
Não congruente	-	-	16	31	-	6	33	19	**105**	**475**
Total parcial	**-**	**10**	**68**	**123**	**8**	**31**	**95**	**140**	-------	
Total	**18**	**49**	**195**	**265**	**40**	**92**	**288**	**321**	-------	**1268**

De acordo com a tabela, ambas as coleções propõem exercícios que contemplam um dos quatro tipos de tratamento. Os exercícios oferecidos estão concentrados em determinadas séries: na coleção *Matemática,* o tratamento em linguagem natural se concentra na 7ª e 8ª série (41 de 57 exercícios) e na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento,* na 5ª e 7ª série (22 de 29 exercícios); já o tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural, na coleção *Matemática,* está mais concentrado na 8ª série (16 de 22 exercícios) e na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento,* na 7ª série (9 de 11 exercícios); nas duas coleções, o tratamento em linguagem algébrica foi concentrado na 7ª e 8ª série (na coleção *Matemática,* 206 dos 250 exercícios e na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento,* 347 dos 427 exercícios) e o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural se concentra na 8ª série (na coleção *Matemática,* 123 dos 201 exercícios e na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento,* 140 dos 274 exercícios).

[40] LN: Tratamento em linguagem natural
[41] LA: Tratamento em linguagem algébrica
[42] LN→LF: tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural
[43] LA→LF: tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural

Além disso, assim como aconteceu nos tipos de conversão, as duas coleções deram mais ênfase à congruência do que à não-congruência. Em relação aos dois últimos tipos de tratamento, ou seja, linguagem natural passando pela linguagem figural e linguagem algébrica passando pela linguagem figural, a coleção *Matemática* propôs 173 exercícios congruentes do total de 223 exercícios; e a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* propôs 223 do total de 285 exercícios.

Considerando as duas coleções ao mesmo tempo, em relação à quantidade de exercícios no tratamento em linguagem natural, a 6ª séria da coleção *Matemática* possui 4 exercícios a mais em relação à 6ª série da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* (6 contra 2); a 7ª série da coleção *Matemática* possui 12 exercícios a mais que a 7ª série da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* (23 contra 11), o mesmo acontecendo com a 8ª série, que possui 13 exercícios a mais (18 contra 5). Somente na 5ª série da coleção *Matemática* se registra um número menor de exercícios de tratamento em linguagem natural, em relação à 5ª série da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* (7 contra 11, i.e, 4 exercícios a menos).

O tratamento em linguagem algébrica, em ambas as coleções, foi o tratamento mais trabalhado de forma que, à medida que a série aumenta, a quantidade de exercícios também aumenta. A coleção *Matemática* passa de 33 exercícios na 6ª série para 98 exercícios na 7ª série, caracterizando um avanço considerável. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*, além de passar da 6ª série com 59 exercícios para a 7ª com 173 exercícios, ofereceu uma quantidade maior de exercícios em relação à coleção *Matemática* (250 contra 427). A diferença na 5ª série é de 10 exercícios; na 6ª série é de 26 exercícios; na 7ª série, de 75 exercícios; e na 8ª série é de 66 exercícios. Notamos a considerável diferença, principalmente na 7ª e na 8ª série.

O tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural foi desenvolvido somente na 7ª e 8ª série das duas coleções. A coleção *Matemática* enfatizou mais esse tratamento na 8ª série e não tratou da não-congruência na 7ª série. Contrariamente, a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* enfatizou mais esse tratamento na 7ª série e não tratou da não-congruência na 8ª série.

O tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural foi o segundo tratamento mais desenvolvido nas coleções estudadas. Assim como ocorreu no tratamento em linguagem algébrica, à medida que a série avança, a quantidade de exercícios aumenta. A diferença é que o avanço considerável ocorre em todas as mudanças de séries. A coleção *Matemática* passa de 10 exercícios na 6ª série para 68 exercícios na 7ª série, uma diferença de 58 exercícios; de 68 exercícios da 7ª série para 123 na 8ª série, uma diferença de 55 exercícios. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* passa de 8 exercícios na 5ª série para 31 exercícios na 6ª série, uma diferença de 23 exercícios; passa de 31 exercícios na 6ª série para 95 exercícios na 7ª série, uma diferença de 64 exercícios; de 95 exercícios da 7ª série para 140 na 8ª série, uma diferença de 45 exercícios.

Na coleção *Matemática*, temos uma quantidade maior de exercícios de tratamento na 8ª série: 265 exercícios; em ordem decrescente, na 7ª série, 195 exercícios; na 6ª série, 49 exercícios e, por último, na 5ª série, 18 exercícios. Na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* acontece o mesmo, ou seja, dá mais ênfase ao tratamento na 8ª série: 321 exercícios; na 7ª série, 288 exercícios, na 6ª série, 92 exercícios; por fim, na 5ª série, 40 exercícios. Considerando as duas coleções ao mesmo tempo, a classificação mantém a quantidade crescente de exercícios partindo da 5ª série: a 5ª série contém 58 exercícios (18 + 40); a 6ª série 141 (49 + 92); a 7ª série 483 (195 + 288) exercícios e, finalmente, a 8ª série contém 586 exercícios de tratamento (265 + 321).

3.2. Conclusão do Estudo dos Livros Didáticos

Conforme as orientações pedagógicas do manual do professor, a coleção *Matemática* opta por utilizar exercícios desenvolvendo os conteúdos em forma de espiral; a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*, além de utilizar exercícios, opta por um trabalho que procura contextualizar, discutir e aprofundar algumas questões teóricas. Cada volume das duas coleções explicita essa forma diferenciada de desenvolver os conteúdos.

Na 5ª série, a coleção *Matemática* enfatiza a busca de padrões e generalizações, além de dar espaço para a linguagem natural, com o intuito de favorecer a compreensão e a comunicação; Já a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* opta por um trabalho com exercícios que propõe diferenciar a expressão numérica da algébrica e com atividades em que a tarefa é obter valores numéricos. Na 6ª série, a coleção *Matemática* prossegue com a generalização e a linguagem natural e acrescenta um trabalho com a linguagem algébrica e com a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica; a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* também acrescenta ao trabalho com tratamento algébrico exercícios que contemplam a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e vice-versa. Na 7ª série, a coleção *Matemática* avança na compreensão da escrita algébrica e permanece com o trabalho da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e com o trabalho de tratamento em linguagem algébrica; a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* dá continuidade ao trabalho feito na 6ª série. Por fim, na 8ª série, a coleção *Matemática* permanece com o trabalho realizado de 5ª a 7ª série e a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* permanece com o trabalho realizado na 6ª e 7ª série.

Nos livros didáticos, tanto na coleção *Matemática* como na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento,* foram identificados quatro tipos de conversão: passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural, passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural e passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica. A tabela a seguir mostra os resultados quantitativos de ambas as coleções.

Tabela 11 – Quantidade de exercícios de conversão por coleção

Conversão	***Matemática***	Matemática – Uma aventura do pensamento	*Total* **parcial**	**Total**
Passagem LN → LA[44]				
Congruente	158	206	**364**	
Não congruente	78	79	**157**	**521**
Tota parcial	**236**	**285**	---------	
Passagem LA → LN[45]				
Congruente	9	6	**15**	
Não congruente	-	-	**-**	**15**
Tota parcial	**9**	**6**	---------	
Passagem LN → LF→ LA[46]				
Congruente	22	80	**102**	
Não congruente	10	19	**29**	**131**
Tota parcial	**32**	**99**	---------	
Passagem LF → LA[47]				
Congruente	6	8	**14**	
Não congruente	9	-	**9**	**23**
Tota parcial	**15**	**8**	---------	

[44] Passagem LN → LA: passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica
[45] Passagem LA → LN: passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural
[46] Passagem LN → LF→ LA: passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural
[47] Passagem LF→ LA: passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica

Total	292	398	---------	690

Comparando os tipos de conversão, observamos que, de um total de 690 exercícios, as duas coleções ofereceram um número maior de exercícios envolvendo a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica: 521 (236+285); o trabalho de passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica necessitando do apoio de uma figura teve 131 exercícios propostos (32+99); a passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica teve 23 (15+8) e a passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural, 15 (9+6).

Comparando as duas coleções, de acordo com a tabela, constatamos 398 exercícios na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* que contemplam algum tipo de conversão, contra 292 da coleção *Matemática*. Essa diferença se dá, principalmente, nas conversões referentes à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica e à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Enquanto a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* possui 285 exercícios referentes à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, a coleção *Matemática* possui 236. Essa diferença é visível nos tipos de exercícios congruentes, ou seja, a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* possui 49 exercícios a mais do que a coleção *Matemática*, sendo 48 deles congruentes. Observamos na passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural: enquanto a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* possui 99 exercícios desse tipo de conversão, a coleção *Matemática* possui 32. A diferença entre as duas coleções no que diz respeito aos exercícios considerados congruentes é de 58 exercícios e aos não-congruentes é de 9.

De acordo com a tabela, notamos o fato de que a congruência é bem mais enfatizada do que a não-congruência. Em relação à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica temos 364 exercícios congruentes contra 157 exercícios não-congruentes e em relação à passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural temos 102 exercícios congruentes contra 29 não-congruentes.

Considerando ainda a tabela acima e comparando as duas coleções, temos duas outras conversões: passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural e passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica. Quanto à passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural, notamos que ambas as coleções optaram somente por exercícios congruentes e ofereceram poucos exercícios desse tipo. A coleção *Matemática – Uma* *aventura do pensamento* ofereceu 6 exercícios e a coleção *Matemática* ofereceu 9 exercícios, de um total de 690. Já quanto à passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica, notamos que somente a coleção *Matemática* optou por trabalhar a não-congruência com 9 exercícios. Em relação aos exercícios congruentes para este tipo de conversão, temos 6 para a coleção *Matemática* e 8 para a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*.

Também foram identificados quatro tipos de tratamento nas coleções didáticas *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento*: tratamento em linguagem natural, tratamento em linguagem algébrica, tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural e tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. A tabela a seguir mostra os resultados quantitativos de ambas as coleções.

Tabela 12 – Quantidade de exercícios de tratamento por coleção

Tratamento	***Matemática***	Matemática – Uma aventura do pensamento	*Total* **parcial**	**Total**
LN[48]				
Total parcial	**54**	**29**	-------	**83**
LA[49]				
Total parcial	**250**	**427**	-------	**677**
LN → LF[50]				
Congruente	19	7	**26**	
Não congruente	3	4	**7**	**33**
Total parcial	**22**	**11**	-------	
LA → LF[51]				
Congruente	154	216	**370**	
Não congruente	47	58	**105**	**475**
Total parcial	**201**	**274**	-------	
Total	**527**	**741**	-------	**1268**

De acordo com a tabela, comparando os tipos de tratamento, notamos que o tratamento em linguagem algébrica envolvendo ou não a linguagem figural foi mais focalizado. Dos 1268 exercícios, temos 1152 referentes ao tratamento em linguagem algébrica e linguagem algébrica passando pela linguagem figural (677 e 475 exercícios, respectivamente). Os 116

[48] LN: Tratamento em linguagem natural
[49] LA: Tratamento em linguagem algébrica
[50] LN→LF: tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural
[51] LA→LF: tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural

exercícios restantes foram destinados para o tratamento em linguagem natural (83 exercícios) e para o tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural (33 exercícios).

Comparando as duas coleções, observamos na tabela que a coleção *Matemática* ofereceu mais exercícios referentes aos tratamentos envolvendo a linguagem natural: 54 exercícios na coleção *Matemática* contra 29 exercícios na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*, ou seja, uma diferença de 25 exercícios; 22 dos 33 exercícios referentes ao tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural são da coleção *Matemática* e os 11 restantes são da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*. Observamos ainda, que os tratamentos envolvendo a linguagem algébrica foram mais trabalhados na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*. Para o tratamento em linguagem algébrica a diferença da quantidade de exercícios é alarmante: enquanto a coleção *Matemática* possui 250 exercícios a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* possui 427, uma diferença de 177 exercícios. Para o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural, a diferença da quantidade de exercícios é um pouco menor, mas ainda considerável: enquanto a coleção *Matemática* possui 201 exercícios a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* possui 274, uma diferença de 73 exercícios.

Ainda, de acordo com a tabela acima, observamos que, novamente, a congruência é mais enfatizada do que a não-congruência. No tratamento da passagem da linguagem natural passando pela linguagem figural a diferença entre exercícios congruentes e não-congruentes na coleção *Matemática* é de 16 exercícios (19 e 3, respectivamente) e na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* é de 3 exercícios (7 congruentes e 4 não-congruentes). No tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural a diferença de exercícios congruentes e não-congruentes é consideravelmente maior. Na coleção *Matemática*, essa diferença é de 107 exercícios (154 e 47, respectivamente) e na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* é de 158 exercícios (216 congruentes e 58 não-congruentes).

CAPÍTULO 4

ESTUDO DA OBSERVAÇÃO EM CLASSE

Neste capítulo relatamos o estudo feito sobre as escolhas e decisões de um professor de classe de 7ª série na realização de seu projeto de introdução oficial da Álgebra. Esse estudo toma como referência os indicativos expostos nos capítulos anteriores, pois consideramos que as propostas dos livros didáticos possam ter influência nas concepções do professor na realização em classe.

4.1. Apresentação da observação

Nossa experimentação foi realizada em uma classe de 7ª série do Ensino Fundamental de uma escola municipal da grande Florianópolis. Iniciamos o presente estudo em 17 de março de 2005, estabelecendo um primeiro contato com o professor e terminamos em 20 de abril de 2005 com a observação da aplicação de uma prova escrita pelo professor aos alunos da classe observada. Assistimos um total de 11 aulas que, segundo o professor da classe, tratavam da introdução à Álgebra. Cada uma das onze aulas tinha 45 minutos de duração.

Comiti et al (1995) salientam a importância de um contrato específico com o professor observado. Estabelecemos esse contrato com o professor, representado por P neste capítulo[52]. Esse professor voluntário aceitou que sua "prática" fosse observada antes e durante as aulas sobre introdução a Álgebra e permitiu que dados fossem recolhidos para o estudo. Desde o primeiro contato com o professor para a realização dessa observação, não interferimos nas suas escolhas, na concepção das aulas, na escolha da abordagem, na seleção dos exercícios, nem na realização em classe.

Com base em Comiti et al (1995, p. 90), recolhemos as informações para o estudo via dados externos e dados internos. Quanto aos dados externos, realizamos uma entrevista[53] semi-estruturada com o professor, na qual fizemos perguntas sobre seu projeto. Essas

[52] Nos protocolos, todos os alunos são representados por A. Não conseguimos diferenciar esses alunos nas observações. Apesar disso, afirmamos que quando temos dois 'A' seguidos, são falas de diferentes alunos.
[53] Ver anexo 2.

perguntas foram feitas antes do professor ter preparado as aulas. O objetivo dessa entrevista foi o de buscar informações sobre sua proposta de trabalho para introduzir a Álgebra em classe de 7ª série e as razões para suas escolhas. Conforme Comiti et al (1995, p. 95), essa entrevista feita preliminarmente permite identificar as representações do professor sobre Álgebra, o que ele pensa sobre a maneira como a aprendizagem acontece em classe. A entrevista ainda permitiu recolher informações sobre seus métodos de ensino, objetivos, suas atividades previstas e as escolhas efetuadas. Além da entrevista, recebemos os planos de aula organizados pelo professor para a abordagem em classe.

Os dados internos são os dados obtidos por meio da observação em classe. Usamos como meios para recolher os dados o registro em áudio (gravador) da fala do professor e dos alunos que se manifestaram, as notas do observador como registro do que foi escrito no quadro, a lista de exercícios distribuídos em classe, as tarefas para casa e a avaliação aplicada pelo professor à turma. Além disso, fizemos algumas perguntas no fim das aulas. Segundo Comiti et al (1995, p. 99) "a entrevista posterior à seqüência de ensino é destinada a recolher o que diz o professor sobre o que se passou durante a aula como, também, sua análise sobre acontecimentos que ele remarcou".

Todos os dados levantados nessas 11 aulas, incluindo as notas do observador, permitiram elaborar os protocolos (documentos) que nos levaram a reconstituição do discurso do professor e do que se passou em classe.

A seguir, apresentamos o estudo a priori, considerando os protocolos sobre a entrevista realizada com o professor antes de preparar suas aulas e os planos de aulas disponibilizados pelo professor durante as observações. Em seguida, apresentamos o estudo a posteriori, considerando os protocolos das aulas observadas e as avaliações preenchidas pelos alunos da classe.

4.2. Análise a priori – O Projeto do Professor

O estudo dos protocolos da entrevista e dos planos de aula nos permitiu identificar alguns elementos do projeto do professor para ensinar Álgebra em classe de 7ª série.

Uma concepção de Álgebra

Ao estudar as escolhas do professor na abordagem da introdução à Álgebra explicitadas na entrevista, identificamos certa concepção de Álgebra. Para o professor a Álgebra significa usar letras para representar números. Outro aspecto importante é de que o aluno deve, por exemplo, distinguir quando um número representa o coeficiente de um termo de uma expressão algébrica ou quando é o valor da variável. Diz o professor: "o aluno deve saber distinguir quando é um número com a letra ou quando é pra substituir alguma coisa" (entrevista, pergunta 4).

Álgebra como conteúdo complicado

Segundo o professor, a Álgebra de 7ª série é complicada. Um dos motivos seria porque em alguns livros didáticos ela é abordada no contexto da geometria e os alunos não sabem geometria: *[...] acho que na 7ª série é um negócio bem complicado [...] os livros geralmente trazem geometria. Mas misturar geometria [...] eles não tem um conhecimento profundo em geometria [...]* (entrevista, pergunta 6). Outro motivo poderia ser porque na 7ª série é que se efetiva o primeiro contato com a Álgebra. Segundo o professor, *[...] a 7ª série vai ser o primeiro contato deles, praticamente é o primeiro contato deles com álgebra* (entrevista, pergunta 21). Notemos que, para o professor, na 5ª e 6ª série não se estuda Álgebra, pois é na 7ª série que os alunos têm o primeiro contato com essa abordagem.

Uma finalidade da Álgebra

Segundo o professor, a Álgebra servirá para que o aluno "consiga ler a Matemática":

> *[...] se você vai somar é a+a+a, por exemplo, pelo fato de você ler a+a+a já te dá a idéia de que vão ser três [...] Eu penso que o interessante é ele ler essa expressão... ele já vai estar percebendo algumas coisas, está lendo os números e as letras, 1x, 2x, 3x, ele está tendo a oportunidade de ver que são termos semelhantes, x ao quadrado mais x, (x^2 +x) ele está vendo que não são termos semelhantes e não pode nunca somar e ele acaba somando.* (entrevista, pergunta 14).

Observemos que essa finalidade voltada para a "leitura da Matemática" está fortemente ligada com a identificação oral de termos semelhantes ou não em uma expressão dada em linguagem algébrica.

Conteúdo de Álgebra no projeto de ensino

Com o objetivo de trabalhar "noções de Álgebra", o professor propõe no plano de aula os tópicos: *usando letras para representar números*, *operações envolvendo letras e números* e *valor numérico de uma expressão algébrica* (plano de aula, 04/04/05). Isso confirma seu depoimento na entrevista sobre o que vai ensinar de Álgebra na 7ª série: *[...] usando perímetro para que eles comecem a trabalhar com letras [...] interpretar a multiplicação e a soma, [...] saber quando é 2x ou* x^2 *[...] olhar para uma expressão seja ela numérica ou não e definir se ele vai somar, multiplicar ou diminuir [...]* (entrevista, perguntas 6, 7 e 9).

Uma abordagem da Álgebra

A abordagem da Álgebra declarada na entrevista se dá por meio do estudo de situações-problema envolvendo figuras planas, mais especificamente, através da definição de perímetro e de área. O trabalho com perímetro servirá para introduzir a soma de expressões algébricas e o trabalho com área auxiliará para abordar a multiplicação de expressões algébricas e conceituar polinômios:

> *[...] Eu penso assim usar figuras planas, para representar e focar algumas definições da própria natureza, usando perímetro inicialmente somente [...] para que eles comecem a trabalhar com as letras representando somas, somando as variáveis que tem os mesmos coeficientes e depois tentaria... usar um pouco de área para utilizar os polinômios (entrevista, pergunta 6).*

Notemos aqui a escolha que se faz da abordagem através do estudo de perímetros e áreas de figuras planas. O professor opta por essa abordagem, mesmo tendo relatado no item "Álgebra como conteúdo complicado" (p. 3) uma crítica ao estudo de Álgebra usando geometria.

Essa abordagem oferece indicativos para trabalhar a linguagem algébrica via linguagem figural. A conversão pode ser contemplada com situações-problema em linguagem natural, completadas por figuras e apoiadas nos conceitos de geometria, cuja resolução se realiza na linguagem algébrica. Conforme o plano de aula, o tratamento em linguagem algébrica através da *representação algébrica do perímetro de figuras planas* (plano de aula, 06/04/05) também tem seu lugar: *operações conhecendo termos semelhantes* (plano de aula, 06/04/05). Além disso, o tratamento em linguagem algébrica é contemplado quando o professor diz que o aluno precisa interpretar a multiplicação e a soma:

> *[...] interpretar a multiplicação e a soma, saber quando você vai somar, quando é 2x ou x^2. [...] Você observa que hoje no ensino médio a gente vê vestígios de alunos que x multiplicado por x coloca 2x. [...] que o aluno saiba quando ele vai multiplicar as duas letras, na verdade não é multiplicar, ele vai somar os expoentes quando tiver bases iguais (entrevista, pergunta 7).*

Interpretar a multiplicação e a soma, para o professor, é saber qual o algoritmo que o aluno vai utilizar. Por exemplo, interpretar a multiplicação é saber que o ponto indica uma multiplicação e que, para isso, o aluno pode usar a propriedade da potenciação: multiplicar duas potências de mesma base conserva-se a base e somam-se os expoentes.

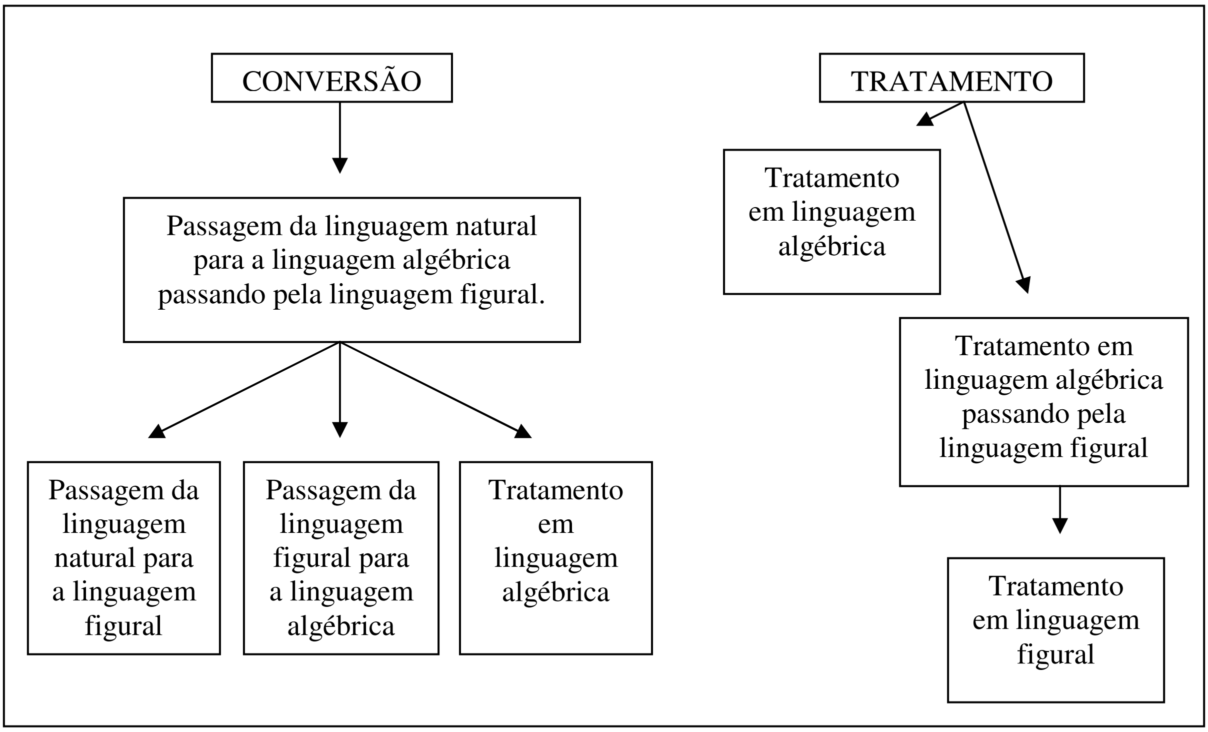
> *[...] Então eu quero que ele saiba ler isso, a interpretação disso [...] idéia que ele já teve, lá no consciente dele, já abstraído que o ponto indica que ele vai multiplicar, ou seja, somar os expoentes na verdade e não somar os coeficientes que é como eles acabam fazendo (entrevista, pergunta 8).*

4.2.1. Conclusão

De acordo com essa análise, supomos que o professor, em seu trabalho, considere as conversões da linguagem natural para a linguagem algébrica relacionando ou não com figuras planas, o tratamento em linguagem algébrica e o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. A priori, segundo a entrevista e o planejamento, podemos supor que o professor irá explorar exercícios que contemplem as seguintes tarefas: expressar em linguagem algébrica uma situação dada em linguagem natural, identificar os coeficientes de expressões algébricas, identificar termos semelhantes, ler corretamente termos e expressões algébricas, calcular a soma e o produto de expressões algébricas, reforçando a idéia de que $x + x = 2x$ e $x \cdot x = x^2$, calcular o valor numérico, o perímetro e a área de figuras planas principalmente dos quadriláteros, entre outros.

4.3. Analise a posteriori – As observações das aulas

Observamos em sala 11 aulas, das quais usaremos as três primeiras para fazer um estudo detalhado. As oito aulas restantes serão utilizadas para recuperar fatos que podem reforçar o observado nas três primeiras ou exemplificar um fato novo. O professor, assim como as coleções *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento*, trabalha a introdução à Álgebra por meio de exercícios. É na resolução desses exercícios que ele explicita os conceitos matemáticos a serem explorados. É na exposição e na resolução desses exercícios que identificamos os tipos de conversão e os tipos de tratamentos, conforme o esquema que apresentamos a seguir:



Esquema 2 – Conversão e tratamentos observados em sala de aula

O esquema acima ilustra a seqüência da apresentação de nosso estudo. Primeiramente apresentamos fatos relacionados com a conversão; em seguida apresentamos fatos relacionados com o tratamento.

4.3.1. Exercícios propostos na sala de aula: Conversão

De acordo com os protocolos das aulas observadas e com o referido esquema, a conversão “passar da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural” foi a única conversão contemplada. Essa passagem foi desenvolvida pelo professor por meio de dois exercícios cuja resolução se dá em três etapas: passagem da linguagem natural para a linguagem figural, passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica e tratamento em linguagem algébrica.

Etapa 1: Passagem da linguagem natural para a linguagem figural

Nas aulas observadas, identificamos elementos de uma concepção de Álgebra por parte do professor e de um aluno durante a exposição do primeiro exercício. Para um aluno, a Álgebra é uma expressão algébrica ou o tratamento de expressões algébricas: *é uma coisa assim ó, x + y, daí, quando x vale 5...* (1ª aula, linha 16). Para o professor, a Álgebra é trabalhar letras misturadas com números e/ou letras que representam números: *Agora nós vamos trabalhar um pouco de números misturados com letras. [...] letras do alfabeto que representam números* (1ª aula, linha 17). Notemos que o professor confirma a concepção explicitada na entrevista.

Consideremos o enunciado do primeiro exercício colocado pelo professor a seus alunos da 7ª série:

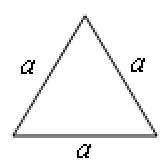
> *1) “Seja uma figura triangular de lados iguais e cada lado medindo ‘a’. Qual será a representação da soma dos três lados da figura? Qual o perímetro da figura, se a = 4? E se a = 12?”* (1ª aula).

A passagem para a representação figural se caracteriza pela tradução do enunciado em linguagem natural numa figura de estudo: o triângulo eqüilátero de lado medindo *a*. Essa passagem é feita pelo professor sem deixar aos alunos qualquer formulação:

> *25 P: Seja uma figura triangular. Você lembra o que é uma figura triangular? É uma figura em forma de?*
> *26 A: Triângulo.*
> *27 P: Triângulo. Se ela tiver todos os lados iguais. Se nós representarmos a medida de cada lado pela letra ‘a’*
> *[...]*
> *29 P: Seja uma figura triangular de lados iguais. Cada lado medindo ‘a’.*
> *[...]*
> *31 P: Gente, nós... vamos desenhar então? Olha só, seja uma figura triangular de lados iguais. O que significa lados iguais? Que todos devem ter o mesmo?*
> *32 A: Lado*

33 P: O mesmo? Comprimento. Olha a representação da soma dos três lados da figura. Como é que nós podemos somar estes três lados? A gente precisa da?
34 A: ...
35 P: Soma, estamos falando de soma, gente. Qual a representação que teremos da soma? Qual será a representação?
36 A: Mais
37 P: Então desenhe esta figura aí. De lados iguais né? Pessoal... Pessoal, quanto vale cada lado da figura que esta representada ali? Olha só, seja uma figura triangular. Você já desenhou sua figura? 7ª série já terminaram a figura? Triangular significa que é uma figura que tem?
38 A: Três lados.
39 P: Três lados. Qual é, ah em cada lado tem, ele mede?
40 A: 'a'
41 P: 'a'. Qual é a representação da soma dos três lados. Primeiro, temos que colocar a medida de cada lado. Que medida é essa? Qual é a medida de cada lado?
42 A: 'a'
43 P: A medida de cada lado é?
44 A: 'a'
(1ª aula)

Temos nesse momento, a representação da figura de estudo: o triângulo eqüilátero.



Juntamente com essa figura de estudo, temos a introdução da representação da medida do lado pela letra *a*:

46 P: Por que nós representamos por 'a' a medida de cada lado?
[...]
48 P: Representa o mesmo número. E, outro detalhe, aqui nós não colocamos qual deve ser a medida do lado. Se nós não conhecemos as medidas do lado da figura então representamos por uma? Letra qualquer. Você poderia representar por qualquer letra que você deseje. Apenas para representar o que? A medida de cada lado.
(1ª aula)

O segundo exercício trabalhado pelo professor em sala possui a mesma tarefa da primeira. Vejamos o enunciado:

2) "Uma figura com quatro lados iguais e, cada lado medindo b. Qual a soma dos quatro lados? Qual o valor de b, se P = 40? Qual o valor de P, se b = 6?" (1ª aula).

A tradução do enunciado em linguagem natural resulta em uma representação figural em que a figura de estudo é um quadrado de lado medindo *b*. Novamente essa mudança de registro fica a cargo do professor:

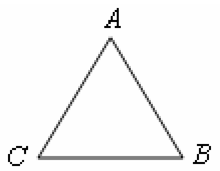
> *95 P: Se uma figura tem quatro lados iguais, o que lembra vocês? Se uma figura tem quatro lados iguais o que a gente lembra? Se ela tem quatro lados, só poderá ser?*
> *[...]*
> *97 P: Faça uma figura aí gente. [..] quadrada com quatro lados. Uma figura de quatro lados iguais.*
> *[...]*
> *101 P: [...] uma figura de base quadrado de quatro lados que são? Iguais.*
> *[...]*
> *103 P: Foi determinado que cada figura, o lado de cada, aliás, foi determinado que cada lado da figura tem uma medida?*
> *104 A: igual*
> *(1ª aula)*

Etapa 2: Passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica

A passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica acontece com a interpretação dos exercícios. Essa conversão surge ao examinar a figura de estudo elaborada a partir da interpretação do enunciado do exercício, no qual as situações envolvem o conceito de perímetro.

Conceito de perímetro

Consideramos o triângulo ABC:



Para o professor, segundo o observador, os segmentos AB, BC e AC estão delimitando a figura triângulo. Esse fato faz com que esses segmentos AB, BC e AC juntos representem o perímetro desse triângulo. Como conseqüência, o perímetro[54] é a soma das medidas destes segmentos:

> *50 P: Então para a soma dos três lados da figura. Porque, olha, se você observar estes três segmentos aqui, estão limitando a figura, né? Eles limitam a parte do quadro.*
> *[...]*

[54] O professor sempre se refere a soma das medidas dos segmentos que formam a figura como a soma dos lados da figura.

52 P: Nós chamaremos esse limite de perímetro. Agora isso. Como é que nós podemos representar, agora respondendo à pergunta, a soma dos três lados da figura? Olha se estamos falando. Estamos falando de? Soma.
[...]
54 P: [...] Se estamos falando de soma, é claro que teremos que efetuar soma. Então a soma dos três lados chamamos de? Perímetro. Como é que vai ser representado?
(1ª aula)

O perímetro, isto é, a medida que representa a soma dos lados de uma figura geométrica plana foi usado em diversos exercícios colocadas em classe.

A realização da passagem

Nessa segunda etapa, ambos os exercícios exigem a soma das medidas dos lados das figuras para a resolução. A partir de cada figura, obtem-se o valor do perímetro. No exercício 1, que envolve o triângulo eqüilátero, temos $P = a + a + a$:

54 P: [...] Se estamos falando de soma, é claro que teremos que efetuar soma. Então a soma dos três lados chamamos de? Perímetro. Como é que vai ser representado?
55 A: 'a + a'
56 P: + a
(1ª aula)

O registro na linguagem algébrica para o valor do perímetro do quadrado no exercício 2 é dado por $P = b + b + b + b$ que, seguido de um tratamento, resulta em $P = 4.b$:

108 P: E a soma dos quatro lados? Como é que realizamos a soma? Como é que realizamos a soma dos quatro lados?
109 A: é 4.b
[...]
113 A: fica b + b + b + b
(1ª aula)

Etapa 3: Tratamento em linguagem algébrica

Na resolução dos exercícios apresentados nas páginas 103 e 104, a conversão foi feita na primeira e na segunda etapa. O tratamento se dá na terceira etapa e nós a dividimos em dois momentos:

- Primeiro momento: referente à simplificação de uma expressão algébrica;

- Segundo momento: referente à determinação de valor numérico.

Primeiro momento

Consideremos o primeiro exercício e a figura de estudo obtida: triângulo eqüilátero. Uma vez identificado que o perímetro é determinado pela soma das medidas dos lados do triângulo, isto é, $P = a + a + a$, o tratamento guiado pelo professor resulta em: $P = 3.a.$.

> *62 P: [...] Nós podemos somar estes três valores? Gente, se eu tenho 'a', outro 'a' e outro 'a', o que nós temos aqui?*
> *63 Alguns alunos: 3ª*
> *[...]*
> *65 P: 3a. Então eu posso indicar, no caso da nossa figura triangular, que a soma dos três lados, já que são iguais, podemos representar como sendo? 3?*
> *66 A: 3a*
> *(1ª aula)*

O mesmo ocorre no segundo exercício referente ao quadrado. Sendo $P = b + b + b + b$ então $P = 4.b$.

> *113 A: fica b + b + b + b*
> *[...]*
> *115 P: isso pode ser representado como uma outra forma que é?*
> *116 Alunos: 4.b*
> *(1ª aula)*

O tratamento dado à expressão encontrada para perímetro das duas figuras do exercício se refere à soma dos termos semelhantes. Para calcular essa soma, o professor trabalhou oralmente. Isto significa para o professor a "leitura da Matemática", conforme declarado na entrevista:

> *[...] se você vai somar é a+a+a, por exemplo, pelo fato de você ler a+a+a já te dá a idéia de que vão ser três [...] Eu penso que o interessante é ele ler essa expressão... ele já vai estar percebendo algumas coisas, está lendo os números e as letras, 1x, 2x, 3x, ele está tendo a oportunidade de ver que são termos semelhantes [...]* (entrevista, pergunta 14).

A seguir, antes de apresentarmos o segundo momento referente ao tratamento, apresentamos elementos da concepção de valor numérico.

Valor numérico

O professor utiliza o nome “valor numérico” em duas situações. Na primeira, o valor numérico se refere ao valor do resultado obtido no tratamento numérico quando substituímos as letras de uma expressão algébrica por número:

151 P: Muito bem. Quando em uma expressão algébrica nós... Representação algébrica nós utilizamos? Letras para representar os números. Se nós substituirmos as letras por um certo número, o resultado obtido será chamado como sendo? Valor numérico da expressão. [...]
(1ª aula)

Nos livros didáticos, a expressão “valor numérico” é usada no mesmo sentido da fala 151 do professor. Na segunda situação, o valor numérico é o nome dado ao número que será substituído na expressão algébrica:

67 P: Agora nós podemos dar um valor pro ‘a’, não podemos?
68 A: Pode
69 P: Porque o ‘a’ representa? [...]. O ‘a’ ele representa [...]? Portanto nós podemos determinar o valor do ‘a’. Estipular o valor do ‘a’. E chamaremos de valor numérico. [...]
(1ª aula)

Ainda, na fala 69 do professor, acima, ele indica que o aluno pode atribuir esse valor, caso não seja dado no enunciado. Nós supomos que o aluno pode trabalhar a seguinte idéia: se $P = 3.a$; dado a, determinar P. Acreditamos que isso possa ter induzido uma aluna à tentativa de buscar um número para perímetro na expressão em linguagem algébrica encontrada:

59 A: Mas qual é o valor de ‘a’?
60 P: Pois é, nós ainda não temos, por isso que nós colocamos ‘a’, porque nós não conhecemos o valor de ‘a’. Por isso está representado.
[...]
87 A: (ela perguntou se não tivesse o valor do ‘a’, se teria que medir o comprimento do lado).
88 P: Para saber o valor do ’a’. Como nós não medimos, podemos estipular um valor qualquer [...]
(1ª aula)

Podemos supor que, para a aluna da fala 87, $P = 3.a$ carece de significado. Ela precisa que P seja dado em número para ser apreendido como perímetro. A idéia de que é preciso obter um número, após conseguir a formulação de uma expressão algébrica, permanece nas segunda e terceira aulas. Dessa vez o professor insiste em que a tarefa é simplesmente representar uma expressão algébrica para o perímetro, nesse caso, do pentágono, retângulo e triângulo dados[55]. Segundo o professor, a expressão encontrada não será "resolvida", porque não foram fornecidos os valores de *a* e *b*:

> *81 P: Pessoal, [...] nós não vamos resolver a expressão. Nós vamos apenas representar a soma dos lados. Se der 'a' e 'b' vai ficar simplesmente? 'a' e 'b'. O perímetro é apenas a representação dos lados, quantos lados 'b' você tem e quantos lados 'a' você tem.*
> *82 A: só assim?*
> *83 P: Pois nós não vamos substituir esses valores, porque nós não temos, olha só. Tem algum número aqui pra substituir o 'a' e o' b'? Não temos. [..]*
> *[...]*
> *124 P: Atenção gente. O 'a' representa um número que nós não conhecemos e o 'b' também representa um número desconhecido.*
> *125 P: Pessoal a representação algébrica, como é uma representação, você não vai resolver esse exercício, a menos que seja fornecido o valor para o 'a' e um para o 'b'.*
> *(2ª e 3ª aulas)*

A manifestação do aluno na fala 82 é um indicativo de que o aluno não decodifica $P = 2.a + 3.b$ como o perímetro da figura de estudo. Somente agora o professor, percebendo a confusão dos alunos, informa que '*a*' e '*b*' representam números desconhecidos. Na fala 125, o professor faz uma chamada para o fato de que a expressão algébrica é uma representação.

Segundo momento

O tratamento em linguagem algébrica na determinação do valor numérico de uma expressão algébrica é guiado pelo professor. Como vimos anteriormente, a solução encontrada para a primeira tarefa do primeiro exercício se refere à expressão algébrica que representa o perímetro do triângulo eqüilátero: $P = 3.a$. A tarefa seguinte consiste na determinação do valor desse perímetro para $a = 4$. O tratamento se baseia na substituição do *a* por *4* na expressão $P = a + a + a$:

> *71 P: Se a = 4, o que representa, o que é o perímetro da figura gente? O que é o perímetro da figura triangular?*
> *72 A: 4*
> *73 P: Não*
> *74 A: É a soma de 4 + 4 + 4*
> *[...]*
> *76 P: Vamos ver aqui, olha só. Somando os três lados da figura denominaremos?*
> *[...]*

[55] O pentágono possui três lados medindo 'a' e dois lados medindo 'b'; o retângulo possui duas medidas 'a' e duas medidas 'b'; e o triângulo possui medidas a, b e c (anexo 4)

78 P: Perímetro. Se o ‘a’ é 4, quanto, qual valor desse perímetro? Se o ‘a’ é 4 isso indica o que? Que deveremos substituir o ‘a’ pelo valor numérico?
(1ª aula)

Interessante notar que o aluno na fala 74, acima, usa $P = a + a + a$ e não $P = 3.a$. Podemos supor que esse fato contribuiu para que o aluno se confundisse, em sua expressão em linguagem natural, quanto ao conceito de perímetro:

79 A: a quantidade de ‘a’ na figura vezes o perímetro.
(1ª aula)

A fala 79 ainda nos leva a confirmar a hipótese de que $P = 3.a$ não significa para o aluno o perímetro do triângulo. A dificuldade de leitura de que $P = a + a + a$ ou $P = 3.a$ representa o perímetro de um triângulo eqüilátero de lado *a* leva o professor a retomar:

88 P: Para saber o valor do a. Como nós não medimos podemos estipular um valor qualquer. Pessoal e se o ‘a’ for
[...]
90 P: 12 unidades, qual será o perímetro? Qual será o valor numérico do perímetro da figura? Ora, estamos falando ainda da mesma figura ta? Se P que representa a soma dos lados da figura, certo, é 3 vezes o ‘a’. Se nós trocarmos o ‘a’ por 12.
(1ª aula)

Em relação à fala 90 do professor: “se *P* representa a soma dos lados da figura” e “se nós trocarmos o *a* por 12”, nos questionamos: o que formula o aluno quando lê $P = 3.a$ e $P = 3.12$? Outro exemplo de tratamento ocorre no exercício que tem por tarefa “calcular o valor de *b”* na expressão obtida $P = 4.b$, para $P = 40$:

121 P: [...] Qual é valor de b se o valor de P é 40?
122 A: é 10, é 4.10
123 P: qual o valor de b se o P já é 40?
124 Alguns alunos: é 10
(1ª aula)

Como 4 é um divisor de 40, ficou fácil para os alunos determinarem o valor de b. O professor busca o tratamento algébrico:

125 P: Vamos substituir aqui primeiro? Qual é a expressão que estamos utilizando? A expressão que utilizamos para a figura é P = 4.b. Olha, qual valor que nós temos aqui para resolver esta equaçãozinha. Quanto é que vale P aqui na nossa?

126 A: 40
127 P: 40 = 4.b
(1ª aula)

O professor toma para si a tarefa e representa a equação *40 = 4.b*. Em seguida, ele retorna a pergunta que pede o valor de *b* aos alunos. Como a expressão é simples, os alunos não trabalham com a expressão, mas usam o tratamento numérico e a nível mental:

135 P: [...] então eu somei a figura e deu 40. Qual o valor de b?
136 Alunos: 10
137 P: Você lembra de como resolver este. Qual o valor da igualdade? [...] Qual o valor de 'b' para que o resultado dê 40?
138 Alunos: 10
139 A: daí fica 4.10
(1ª aula)

O professor não esperava dos alunos uma resposta calculada mentalmente. Este buscava relembrar o princípio multiplicativo da igualdade pela equação *40 = 4.b*:

140 P: [...] Lembram no ano passado quando vocês começaram a estudar as equações? Olha 4.b = 10. Como é que tiramos o 4 na frente do b? 4 está? Multiplicando. Pra você tirar o quatro aqui da frente do b, pra isolarmos o b? Tem que dá 40. [...] Não lembram mais como resolver esta equação?
141 A: 40 dividido por 4 vai dar 10
(1ª aula)

A busca pelo professor para um tratamento algébrico seria: se *4b = 40* então $b = \frac{40}{4} \Rightarrow b = 10$.

4.3.2. Exercícios propostos na sala de aula: Tratamento

Nas aulas observadas, foram trabalhados 15 exercícios que necessitavam apenas de tratamento para as suas resoluções. Desses exercícios, 6 foram oferecidos como atividade para casa. Os tipos de tratamentos contemplados foram: tratamento em linguagem algébrica e tratamento em linguagem figural como conseqüência do tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural.

Tipo 1: Tratamento em linguagem algébrica

Os exercícios que necessitam de tratamento em linguagem algébrica para sua resolução se referem, novamente[56], ao cálculo de valor numérico. Nesse caso, a diferença é que a expressão em linguagem algébrica é dada. Vejamos, para ilustrar, o enunciado de um dos exercícios:

Ache o valor numérico das expressões algébricas:

a) $2.x + 2.y$ *se* $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$ *c)* $\dfrac{a+b}{c}$ *se* $\begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{cases}$

b) $3.a - b + c$ *se* $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$ *d)* $\sqrt{(x+y)}$ *se* $\begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases}$

(2ª e 3ª aulas)

Um aluno, diante desse exercício, mostra uma intenção de seguir modelos de resolução. Até o momento, o professor não tinha trabalhado com expressões fracionárias e a proposição destes exercícios nos confirma que o aluno também não entendeu o que é valor numérico:

58 A: Professor o que é isso ali na 'd' e na 'c', como é que faz aquilo? Professor não explicou em fração.
59 P: Não expliquei?!
60 A: Não
(2ª e 3ª aulas)

Esse fato leva o professor a resolver o item 'c'; com isto fornece o modelo que o aluno buscava. Declaradamente, o professor resolveu a questão apresentando cada ação que o aluno deveria realizar: substituir, somar e dividir:

61 P: O que quer dizer uma fração?
62 A: Não sei
63 A: é pra dividir
64 P: Uma fração é uma?
65 Alunos: Divisão
66 P: Divisão. Então você deverá fazer o que aqui?
67 A: somar e depois dividir.
68 P: Substituir primeiro os números, somar e dividir. [...]
(2ª e 3ª aulas)

[56] Novamente porque nos primeiros exercícios apresentados que exigiam a conversão, tínhamos identificado a necessidade de tratamento em linguagem algébrica pelo cálculo de valor numérico.

A institucionalização de como proceder para determinar o valor numérico de uma expressão é feita pelo professor:

> *85 P: Por que aqui nós resolvemos, assim, a expressão? Porque aqui nós temos o valor para 'x' e para 'y'?. Aqui nós temos para 'a', 'b' e 'c'?. Você só vai resolver 'a', só vai obter um valor numérico quando você tiver um outro valor pra substituir a letra.*
> *(2ª e 3ª aulas)*

Tratamento numérico

Quando os valores fornecidos são negativos, surge uma dificuldade para as determinações de valor numérico de expressões algébricas. Durante a resolução do item 'b' *3.a – b + c*, surge uma dúvida quando o professor substitui o "*+c*" na expressão dada por "*-4*". Essa dúvida em relação aos sinais é esclarecida pelo professor pela regra de sinais da multiplicação:

> *181 A: Ô, professor, não é mais ali depois do -3?*
> *[...]*
> *183 P: mas o sinal negativo vai prevalecer. Olha só, +(-4). [...] tu estas dizendo que o valor, o 'c' está representando o valor? –4. Agora aqui você tem o sinal positivo e um sinal negativo, na multiplicação vai prevalecer quem?*
> *184 A: negativo*
> *(2ª e 3ª aulas)*

Nesse momento, a dúvida se refere às regras de sinais da soma e do produto de números inteiros:

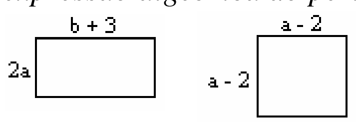
> *185 P: [...] Então, 6 – 3, 3.*
> *186 A: Vai ficar o sinal do maior ou vai fazer regra de sinal?*
> *187 P: mas o 6 é maior que o 3.*
> *188 A: ta, professor, mas, ah, ta.*
> *189 P: aqui o sinal do maior é negativo, por isso vai ficar –1*
> *[...]*
> *191 P: Aqui vai ter um mais e um menos, por causa disso vai ficar negativo.*
> *[...]*
> *193 P: Olha só, tinha 6 tirando 3 ficaram?*
> *194 A: 3*
> *195 P: 3 né? 6 é maior por isso prevalece o sinal positivo. Agora você tem 3 – 4, aqui acaba ficando?*
> *(2ª e 3ª aulas)*

O professor, na fala 189 acima, se refere a soma "*3 – 4*" presente na resolução. Notemos uma falha, por parte do professor e do aluno, quanto ao uso da linguagem natural: o sinal do maior não é negativo, mas sim o sinal do maior número em módulo é negativo. Acreditamos que isso contribui para a confusão em relação ao tratamento numérico de expressões.

Tratamento em linguagem figural

O tratamento em linguagem figural aparece rapidamente na figura de estudo nos exemplos trabalhados em sala de aula. Isso porque esse tratamento é uma necessidade para a tarefa que exige o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Os exercícios propostos, como o exemplo apresentado abaixo, onde a figura completa o enunciado, permite-nos entender que se trata inicialmente de um tratamento em linguagem figural:

Qual a expressão algébrica do perímetro da figura?



(2ª e 3ª aulas)

Na tarefa proposta, o tratamento em linguagem figural se dá na identificação das propriedades das figuras que caracterizam o retângulo e o quadrado. O tratamento figural se confirma no diálogo:

237 P: Vamos imaginar, é claro, talvez a nossa figura não esteja tão perfeita, mas imaginamos que os lados aqui são os lados paralelos. Eles são?

238 A: Iguais
239 P: [...] Os lados paralelos são iguais. Então isso significa que essa medida também vale, quanto?
240 Alunos: b + 3
241 P: E esse lado também, já que são paralelos, se eles são paralelos, então acreditamos que a medida desse lado também será? 2a. [...]
(2ª e 3ª aulas)

O professor considera uma das condições para a definição da figura do retângulo: lados opostos paralelos. Não identificamos a presença da condição para os ângulos do retângulo.

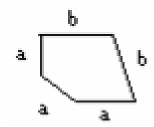
Tipo 2: Tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural

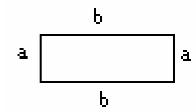
O professor deu lugar a exercícios que trabalham o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Nesses exercícios, a figura dada completa o enunciado. Em geral, as tarefas se referem ao cálculo do perímetro ou da área de figuras geométricas planas com tratamento algébrico referente à redução de termos semelhantes.

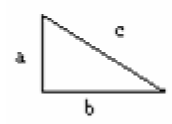
Soma de termos não semelhantes

A princípio, para alguns alunos, é possível somar dois termos não semelhantes resultando num único termo. Por exemplo, $a + b = 2ab$. Essa interpretação foi trabalhada pelo professor oralmente e sem regras. Consideremos o seguinte enunciado:

Qual a expressão algébrica que representa o perímetro das figuras.

a) 

b) 

c) 

(2ª e 3ª aulas)

O professor lembra aos alunos que a definição de perímetro está em seus cadernos. Uma aluna pesquisa e conclui que o perímetro é igual ao número de lados vezes a letra:

68 P[...] Lá no caderno de vocês, vocês prestam atenção no que é o? Perímetro.
[...]
70 A: professor aí tem três a, aqui, ta. Perímetro igual ao número de lados vezes o, a letra, por exemplo, aqui nesse triângulo[57] aqui ó, daí pega a e faz 3 vezes a. 3 lados vezes o a.
71 P: Sim, aqui você tem 3 lados
(2ª e 3ª aulas)

Um tratamento algébrico: como tratar a expressão $3a + 2b$.

72 A: Então, vai dar 5ab.
73 P: Não.
74 A: Como não, não sei fazer isso então.
75 P: Você não pode somar.
76 A: Aqui ó, 3 vezes o a mais 2 vezes o b?
(2ª e 3ª aulas)

[57] Esse triângulo é referente ao exercício 1 da página 103 desse capítulo.

O professor recupera a representação do perímetro pela expressão algébrica. Ainda, considerando a fala 76 da aluna, trabalha a "leitura da matemática", confirmando seu objetivo[58], apresentado na entrevista, e busca dar significado para a expressão obtida:

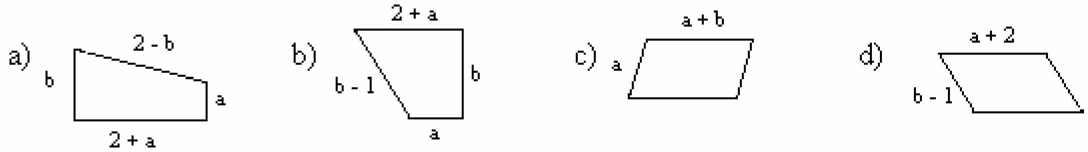
77 P: Pois é, você acabou de falar pra mim a resposta, você já falou pra mim. Só falta você compreender o que você esta fazendo. Você tem 3 lados iguais, que vai ser quanto?
78 A: 3 vezes a
79 P: 3a coloca lá, escreve. O perímetro o que é? É a soma? Dos lados. E você tem dois lados que são iguais. Então mais? Essa é a representação algébrica do? Perímetro.
(2ª e 3ª aulas)

A letra *b* desse exercício é retomada pelo professor nas 6ª e 7ª aulas. Novamente, identificamos um aluno que considera a soma de termos não semelhantes. O professor chama à atenção mostrando que essas medidas são diferentes e, por isso, não podemos somá-las:

23 P: É a soma dos quatro lados, então a, a+b, mais a, mais b. [...] Quanto é que dá a soma dos dois a, dos lados iguais aqui?
24 A: 2a
25 P: e?
26 A: +2b
27 A: da 4ab
28 P: São medidas diferentes, olha só. O 'a' e o 'b' representam medidas diferentes, que nós não conhecemos e nós não podemos somá-los.
(6ª e 7ª aulas)

Consideremos o exercício a seguir, que é o único em que a tarefa é calcular o valor numérico a partir da representação do perímetro das figuras:

Sejam, nas figuras abaixo: a = -3 e b = 5. Determine o valor numérico de cada representação algébrica a partir do perímetro.



(5ª aulas)

[58] *[...] se você vai somar é a+a+a, por exemplo, pelo fato de você ler a+a+a já te dá a idéia de que vão ser três [...] Eu penso que o interessante é ele ler essa expressão[...] ele está tendo a oportunidade de ver que são termos semelhantes, x ao quadrado mais x (x^2 +x) ele está vendo que não são termos semelhantes [...].* (entrevista, pergunta 14).

Observamos, durante a correção deste exercício, que o professor optou por não somar os termos semelhantes. Dessa forma, o tratamento é dado em linguagem numérica. Acreditamos que essa opção possa ser conseqüência da dificuldade dos alunos em dar tratamento em linguagem algébrica quanto à soma de termos não semelhantes. Vejamos, por exemplo, a resolução do item 'd':

$P = a + 2 + b - 1 + a + 2 + b - 1$
$P = 3 + 2 + 5 - 1 + 3 + 2 + 5 - 1$
$P = 5 + 4 + 5 + 4$
$P = 9 + 9$
P = 18 unidades de comprimento
(5ª aulas)

É interessante relatarmos que apenas um aluno percebeu que antes de realizar a substituição, ele poderia reduzir os termos semelhantes. Ao mostrar o seu caderno, o professor disse:

111 P: Ah, você reduz os termos, está correto. Você agrupa os termos semelhantes primeiro [...]
(5ª aulas)

Linguagem algébrica escrita e falada

De acordo com os protocolos das aulas observadas, identificamos momentos referentes ao tratamento algébrico em que a fala do professor e/ou dos alunos, em linguagem natural, não coincide com a escrita. Considere as falas na resolução do item 'c' quanto ao triângulo do exercício apresentado acima:

146 P: E na figura 'c'? E a figura 'c'?
147 A: um mais 'a', uma mais 'b' e um mais 'c'
148 P: Você tem um lado 'a', um lado 'b'
149 A: e um lado 'c'
(2ª e 3ª aulas)

Observamos a fala 147. De acordo com nossas observações, esse aluno falando "um mais *a*" pensava em "um lado *a*", ou seja, *1a*. De maneira semelhante, ocorreu com o professor:

258 P: Olha só, porque nós temos 4a, porque temos 2 e temos mais 2a, então posso agrupá-los como sendo? Então tem 2 vezes o 'a' mais 2 vezes o 'a' ficamos com 4a. [...]

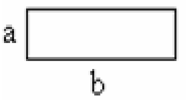
(2ª e 3ª aulas)

Notemos que “temos *2* e temos mais *2a*" algebricamente é representado por *2 + 2a*. Na escrita e na fala seguinte, “tem *2* vezes o *a* mais *2* vezes o *a*”, o professor corrige a formulação.

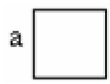
Na seqüência, o professor explica a definição de área de figuras planas para o estudo da Álgebra, a fim de dar continuidade ao trabalho de tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Ele relembra a fórmula para o cálculo da área de figuras planas quadradas e retangulares: “lado vezes lado”:

> *176 P: qual a área de uma figura de face retangular? [...]*
> *180 P: e a área? Perímetro é a soma dos 4 lados. Se a figura é de base quadrada ou retangular. [...] E a área dessa figura como é que nós podemos medir? É a multiplicação. Lado vezes lado.*
> *(5ª aula)*

Com apoio nessa definição, são feitos exercícios que contemplam o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Por exemplo:

1. *Se:* 

. Qual a representação algébrica da área da figura?
(5ª aula)

2. *Seja o quadrado de lado “a”. Como representar algebricamente a área dessa figura?*
(5ª aula)


O professor pergunta aos alunos como medir a área do retângulo dado. Na tentativa de responder a essa pergunta, identificamos na resolução do exercício 1:

> *171 P: [...] Nós temos uma figura gente, de face retangular. Como é que nós medimos a área dessa figura?*
> *172 A: a + b + a + b*
> *[...]*
> *174 P: Isso aí é o perímetro, a soma dos lados.*
> *[...]*
> *176 P: Qual a área de uma figura de face retangular? Gente perímetro é diferente da área. O que é o perímetro? Vocês lembram o que é o perímetro?*
> *177 A: é a soma dos lados.*
> *178 P: seria a + b + a + b*
> *[...]*

180 P: e a área? [...]
[...]
(5ª aula)

Notemos o tratamento fortemente presente nas falas:

182 P: Como é que vai ficar a multiplicação aqui,hein gente, atenção?
183 A: 'a' vezes 'b' vezes 'a' vezes 'b'.
184 P: lado vezes lado. Um lado mede?
185 A: a
186 P: Se eles são iguais estou representando apenas um 'a'. E o outro lado mede?
187 Alunos: b
(5ª aula)

A resolução do exercício 2 também contempla o tratamento:

34 P: Pessoal, aqui nós temos uma figura de mesmo lado. Como é que vai ficar determinado o perímetro dessa figura?
35 A: 'a' vezes 'a'
36 P: o perímetro primeiro.
37 A: 'a' mais 'a' mais 'a' mais 'a'
38 A: 'a' vezes 'a' vezes 'a' vezes 'a'
39 P: Não o perímetro é sempre relativo a? Soma. [...] Qual a área dessa figura?
40 A: 'a' vezes 'a'
(6ª e 7ª aulas)

Nas notas do observador[59], o aluno da fala 40, acima, concluiu o exercício perguntando ao professor se '*a.a*' poderia ser *2.a*. O professor respondeu que não porque a operação envolvida é a multiplicação e não a soma. O cálculo da área e do perímetro permite um tratamento diferenciado:

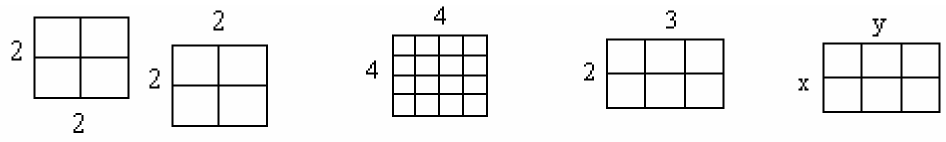
49 A: o professor quando for perímetro eu somo.
50 P: o comprimento de cada lado
51 A: o comprimento. E quando for área eu multiplico?
52 P: multiplica dois lados apenas.
53 A: Ah, os outros dois não?
54 P: eles são iguais né?
55 A: Aí, por exemplo, se eu tivesse um retângulo e fosse tirar a área eu multiplicaria, por exemplo, o 'a' pelo 'b' e os outros dois lados não multiplicava?
(6ª e 7ª aulas)

[59] Na fita gravada não conseguimos recuperar o diálogo. Temos esse fato somente nas anotações da observação.

Esta formulação não é deduzida naturalmente. Um aluno pergunta:

171 A: Pra calcular a área eu tenho, por exemplo, 'x' vezes 'x', por exemplo, tem que multiplicar aqueles dois 'x' ali? Porque não dos 4 lados?
(8ª aula)

O professor, na tentativa de esclarecer e responder ao aluno, ilustra casos numéricos particulares, utilizando os seguintes desenhos:



figuras 1 figura 2 figura 3 figura 4

Nesse momento, o tratamento figural é retomado pelo professor: lado dividido e número de quadradinhos obtidos.

171 A: Pra calcular a área eu tenho, por exemplo, 'x' vezes 'x', por exemplo, tem que multiplicar aqueles dois 'x' ali? Porque não dos 4 lados?
172 P: Porque, lembra quando eu expliquei pra você, isso aqui ó, quando você tem, por exemplo, uma figura 2 por 2.
174 P: Significa que este lado está dividido em 2 e este outro também está dividido em? Por isso que o total dá 4. Então se eu multiplicar esses dois lados, vou ter a quantidade de quadradinhos menores. Se eu multiplicar aqui, também vou ter a quantidade igual. É por isso que na hora você multiplica dois lados.
(Figura 1)

176 P: Aqui ó, se você fizer 2.2.2.2 quanto é que vai dar? 8. quantos que você tem aqui no total?
177 A: é 16 professor
178 P: é 16. Tem 16 quanto você tem aqui?
179 A: 4
180 P: 4, só dois lados.
181 A: só dois lados
182 P: só dois lados. Se fosse um 4, ai você faria, multiplica 4 vezes, né?.
184 P: assim, você dividiu em 4, aí ficaria 16. Agora se você fizer 4.4.4.4 você vai ter 256 e aqui na verdade você tem apenas 16. Então você multiplica apenas, dois lados.
185 A: é porque os lados são iguais pra poder fazer, né?
186 P: também, poderia ser assim, por exemplo. (figura 2)

188 P: poderia ter assim, uma 2 e 3, por exemplo, então aqui ta dividido em 2. É a quantidade de quadradinhos envolvendo esses dois.
189 A: aí no caso representaria, têm que fazer 'x' vezes 'x' daí.
190 P: ah não, daí se fossem diferentes, representaria apenas,'x' vezes 'y'.

192 A: como poderia ficar 2 vezes ali né
193 P: não, mas daí quando nós conhecemos o valor numérico 2 vezes 3, aí você pode então multiplicar. Nós só não resolvemos, ficamos em função de 'x', porque nós não conhecemos qual é valor do lado 'x'. Se nós não conhecemos, olha só, nós representamos e somamos os expoentes. E a área desse outro lado aqui?
(figura 3 e 4)
(8ª aula)

4.3.3. Considerações quanto à avaliação aplicada pelo professor à turma

A avaliação[60] aplicada pelo professor foi realizada no dia 20 de abril de 2005, último dia de nossa observação. Cada um dos 26 alunos recebeu uma folha contendo dois exercícios. Esses exercícios são semelhantes aos trabalhados em sala de aula e envolve somente tratamento. O primeiro deles contempla na tarefa o tratamento em linguagem algébrica juntamente com o tratamento numérico; o segundo o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural.

a) O tratamento na avaliação na tarefa: "Calcule o valor numérico". Para realizar esse exercício, são necessários dois momentos: o primeiro é substituir o valor dado na expressão algébrica e o segundo é dar tratamento numérico. Vejamos alguns dos erros freqüentemente encontrados:

- Substituição de um número inteiro negativo. Exemplo: se $a = 9, b = 12$ e $c = -8$ então $2.a + b + c = 2.9 + 12 + 8 = 18 + 12 + 8 = 38$;
- O uso dos parênteses. Exemplo: $3.(12 - 2.9) = 3.12 - 2.9 = 36 - 18 = 18$;
- A ordem das operações. Exemplo: $9 + 2.12 = 11.12 = 132$;
- Operações com números inteiros. Exemplo: $12 - 18 = -30$.

b) O exercício que contempla o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural tem por tarefa representar algebricamente o perímetro e a área de figuras planas. Para realizar esse exercício são necessários dois momentos: o primeiro é aplicar a definição de perímetro e de área e o segundo é reduzir os termos semelhantes. Vejamos alguns dos erros freqüentemente encontrados:

---

60 Ver anexo 8.

- Definição de área. A maioria[61] dos alunos mostrou não saber como calcular a área de um retângulo: Área = lado x lado.
- Soma de termos semelhantes. Exemplos: $2.a + 2.a + 3 + 2.a + 2.a + 3 = 14.a$; ou $2.x + 2.x + 2.x + 2.x = 8 + 4.x$; ou $x + xy + x + xy = 4x + 2y$;
- Uso dos parênteses. Exemplo: se um retângulo possui lados *x e* $x + 8$ então *área* $= x.x + 8$

4.4. Conclusão do estudo das observações em classe

O professor trabalhou com uma abordagem no contexto da geometria para introduzir Álgebra na 7ª série do ensino fundamental. Para essa abordagem foram utilizados os conceitos de perímetro e área de figuras planas, principalmente retângulos e quadrados.

Para o professor, a Álgebra, trabalhada dessa forma, estimula em sala a leitura da matemática que, por sua vez, ocorre com a identificação em linguagem oral de situações diversas, por exemplo, na identificação oral de termos semelhantes e não semelhantes em uma expressão dada em linguagem algébrica.

A introdução à Álgebra se deu por meio de exercícios. Desses, identificamos 2 que contemplam a conversão: passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural e 15 dos exercícios propostos que contemplam um dos tipos de tratamento: em linguagem algébrica e em linguagem figural como conseqüência do tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural.

Os exercícios, cujas tarefas foram classificadas como a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural, foram desenvolvidos de forma semelhante. Em ambos, a tarefa é “representar a soma das medidas dos lados”, ou seja, o perímetro de um triângulo regular ou de um quadrado. Pudemos notar que a representação encontrada para perímetro não teve significado para o aluno pelo fato de não ser uma representação numérica. Mais do que isso, notamos que o professor não deu oportunidade para o aluno criar um significado para a expressão encontrada em linguagem algébrica. Isso porque o professor ficou com toda a responsabilidade na execução da tarefa, deixando para o aluno apenas um modelo de resolução.

---

[61] 18 dos 26 alunos.

Em relação à linguagem algébrica, o tratamento foi considerado de duas maneiras: uma para o cálculo de valor numérico e outra para a simplificação de uma expressão algébrica. O tratamento em linguagem figural foi necessário para realizar o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Este último, por sua vez, foi utilizado na representação de perímetro e área de figuras planas.

CONCLUSÃO

Constatamos, no estudo dos PCN, da PCSC e das Diretrizes da Secretaria de Estado da Educação e do Desporto (2001), que a Álgebra deve ser trabalhada de forma significativa, sendo introduzida gradualmente no ensino fundamental. Além disso, a 7ª série é a instituição em que é feita a primeira abordagem sistematicamente acerca de "Expressões Algébricas". Esse fato nos levou a selecionar para estudo os livros de 5ª a 8ª série e, para observação, a classe de 7ª série do ensino fundamental.

De acordo com os documentos oficiais, dar significado à álgebra no ensino é trabalhar também com diferentes registros de representação. A linguagem algébrica é reconhecidamente necessária para descrever simbolicamente regularidades e resultados genéricos. A linguagem natural tem um papel importante na "argumentação" e na "justificativa". Ainda, a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica faz com que o aluno seja capaz de escrever, "traduzir" situações dadas em linguagem natural na linguagem algébrica.

O estudo feito da Teoria dos Registros de Representações Semióticas nos forneceu elementos para que pudéssemos organizar uma classificação em termos de conversão e tratamento, que usamos no estudo dos livros didáticos e na observação:

Tipo 1: conversão da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica;

Tipo 2: conversão da passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural;

Tipo 3: conversão da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural;

Tipo 4: conversão da passagem da linguagem figural para a linguagem natural;

Tipo 5: conversão da passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica

Tipo 1: tratamento em linguagem natural;

Tipo 2: tratamento em linguagem algébrica;

Tipo 3: tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural;

Tipo 4: tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural.

Os tipos que contemplam a linguagem figural surgem pelo fato de que muitos dos exercícios presentes nos livros didáticos envolvem figura exercendo diferentes funções: - ilustra o enunciado; - define algum conceito; - apresenta os dados do problema. Esse fato nos fez levar em consideração, também, a linguagem figural.

Isto posto, retomamos aqui a questão de pesquisa 1: *De que maneira os livros didáticos realizam um trabalho que contempla a conversão e o tratamento referente aos registros de representação em linguagem natural e em linguagem algébrica?*

Estudo dos livros didáticos – Orientações pedagógicas

No estudo das orientações pedagógicas dos livros didáticos identificamos que ambas as coleções dão lugar ao trabalho de conversão e tratamento. Na coleção *Matemática* esse trabalho de conversão é desenvolvido nas quatro séries do ensino fundamental estudadas, de maneira a contemplar uma abordagem em espiral. Na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* este lugar está mais concentrado nas 6ª, 7ª e 8ª séries. No que se refere ao tratamento, a coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* dá lugar nas quatro séries do ensino fundamental, enquanto que na coleção *Matemática,* está centrado na 6ª, 7ª e 8ª série.

Estudo dos livros didáticos – Exercícios propostos referente à conversão

Dos cinco tipos de conversão considerados para o estudo, constatamos quatro nos livros do aluno: a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica, a passagem da linguagem algébrica para a linguagem natural, a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural e a passagem da linguagem figural para a linguagem algébrica. Os trabalhos com essas conversões são propostos, principalmente, por meio de exercícios. Esses exercícios se referem aos mais variados assuntos como, por exemplo, introdução à Álgebra, equações do 1º e 2º graus, probabilidade, áreas de figuras planas, teoremas como o de Pitágoras e Tales, estatística, função polinomial de 1º grau, entre outros.

Na coleção *Matemática*, as conversões foram mais trabalhadas com a 7ª série (99 de 292 exercícios) e, na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* com a 6ª série (171 de 400 exercícios). Entre os exercícios de conversão propostos identificamos exercícios congruentes e não-congruentes. Em ambas as coleções notamos com mais freqüência os exercícios de conversão congruentes.

Estudo dos livros didáticos – Exercícios propostos referente a tratamento

Constatamos os quatro tipos de tratamento envolvendo os mesmos registros de representação (linguagem natural, linguagem algébrica e linguagem figural) quanto à conversão. Os tipos identificados são: tratamento em linguagem natural, tratamento em linguagem natural passando pela linguagem figural, tratamento em linguagem algébrica e tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Também pudemos observar que os tipos de tratamento são propostos, principalmente, por meio de exercícios. Esses exercícios de tratamento se referem aos mesmos assuntos trabalhados na conversão e nas quatro séries do ensino fundamental. Porém, dessas séries, tanto na coleção *Matemática* como na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* a 8ª série foi aquela em que mais os alunos exercitam os tratamentos. Os dois tipos de tratamento que envolveu a linguagem figural também foram propostos com exercícios congruentes e não-congruentes.

Assim, temos que as coleções *Matemática* e *Matemática – Uma aventura do pensamento* trabalham por meio de exercícios, principalmente. A coleção *Matemática* desenvolve os conteúdos em forma de espiral e, desde a 5ª série, enfatiza a busca de padrões e generalizações. A linguagem natural tem seu espaço contribuindo para a compreensão e comunicação. A coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento* apresenta os conteúdos de forma fragmentada e, somente na 6ª série, a linguagem natural e a linguagem algébrica ganham destaque.

Ambas as coleções propuseram exercícios que contemplam as conversões classificadas nesse estudo. A passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica identificadas nas tarefas foi a mais enfatizada: 236 de 292 exercícios na coleção *Matemática* e 285 de 398 exercícios na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*. Ainda, a congruência é bem mais trabalhada que a não congruência. A maior quantidade de exercícios se refere também a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica: 158 exercícios congruentes contra 78 não congruentes na coleção *Matemática* e 206 exercícios congruentes contra 79 não congruentes na coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*.

Em relação ao tratamento, identificamos todos os quatro tipos nas situações problemas de ambas as coleções. Destes, o tratamento em linguagem algébrica foi mais considerado: 250 de 527 exercícios na coleção *Matemática* e 427 de 741 exercícios da coleção *Matemática – Uma aventura do pensamento*.

Pudemos constatar que tanto para trabalhar a conversão como para trabalhar o tratamento a linguagem algébrica é a mais utilizada. Mesmo algumas séries sendo mais focadas, isso ocorre desde a 5ª série do ensino fundamental. A linguagem natural tem seu espaço, mas ela é mais utilizada para apoiar exercícios onde a tarefa deve ser desenvolvida em linguagem algébrica.

Este estudo nos permitiu obter elementos de resposta a questão de pesquisa 2: *O professor, ao introduzir Álgebra em uma classe de 7ª série do Ensino Fundamental, considera os registros em linguagem natural e em linguagem algébrica? Se sim, como o professor trabalha esses registros em termos de conversão e tratamento?*

O professor observado desenvolveu um trabalho por meio de exercícios, assim como ocorreu nos livros didáticos. A linguagem natural serviu para introduzir o conceito de perímetro de figuras planas com dois exercícios envolvendo a conversão: passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica passando pela linguagem figural. Após a introdução dessa definição o trabalho do professor ficou voltado para o tratamento em linguagem algébrica e tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural.

O tratamento em linguagem algébrica foi desenvolvido em tarefas como "cálculo de valor numérico" pela substituição e "simplificação de uma expressão algébrica" referente à área ou perímetro de uma figura plana. O tratamento em linguagem figural foi necessário para realizar o tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural e parte da observação de que dois lados paralelos em um retângulo possuem a mesma medida. O tratamento em linguagem algébrica passando pela linguagem figural foi enfatizado nas tarefas que exigem a representação do perímetro ou da área de figuras planas, principalmente quadrados e retângulos.

Tanto o trabalho de conversão como o de tratamento foi realizado de forma a não ter significado para o aluno. O professor procurou conduzir passo a passo cada nova tarefa apresentada e para o aluno ficou a tarefa de seguir modelos de resolução. Notamos isso, principalmente, na busca do aluno para encontrar uma expressão numérica não aceitando que o perímetro ou a área de figuras planas possa ser representado algebricamente.

Quanto ao tratamento nos exercícios, identificamos dois tipos: linguagem algébrica, linguagem algébrica passando pela linguagem figural. O tratamento em linguagem natural, segundo o professor, foi feito oralmente pela "leitura da Matemática". Segundo o professor, esse trabalho oral incentiva o aluno a "ler a Matemática". Essa leitura foi trabalhada no momento em que o aluno tinha como tarefa "reduzir uma expressão algébrica" referente ao perímetro ou área de figuras planas. O resultado obtido na avaliação nos faz interpretar que essa forma de trabalhar também não foi significativa. Erros muitos freqüentes forma identificados: $2.a + 2.a + 3 + 2.a + 2.a + 3 = 14.a$; ou $2.x + 2.x + 2.x + 2.x = 8 + 4.x$; ou $x + xy + x + xy = 4x + 2y$;

Com essa pesquisa explicitamos elementos do trabalho feito nos livros didáticos com relação à exploração dos diferentes registros de representação: linguagem natural e linguagem algébrica. Para compreender a atuação do professor do ensino fundamental seria preciso responder outras questões: Como se dá o ensino da Álgebra na graduação quando o professor está em formação? A problemática dos diferentes registros de representação, tratamento e conversão, é tema de estudo nos cursos de licenciatura em Matemática? Qual seqüência didática seria adequada para abordagem da Álgebra no ensino fundamental?

Além disso, os materiais utilizados para essa pesquisa permitem outros diferentes tipos de análises. Por exemplo: os saberes em jogo nos exercícios propostos pelos livros didáticos e pelo professor em sala, o discurso do professor, o contrato didático na classe observada, as diferentes concepções de Álgebra existentes e a do professor, entre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Claudia Roberta de; ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio da; BRITO LIMA, Anna Paula de Avelar; LINS LESSA, Mônica Maria. *Contribuições da psicologia da educação matemática para o ensino da matemática:* a introdução à álgebra no ensino fundamental. In: V Encontro Pernambucano de Educação Matemática (EPEM), 2002, Recife. *Anais do V EPEM*. Disponível em: http://www.dmat.ufpe.br/~mro/extensao/v_epem/anais/MR1.pdf, acesso em 25 junho 2004.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática, 5ª a 8ª séries. Brasília, 1998. 148p.

CARMO, João dos Santos. *Conhecimentos de estudantes de licenciatura em Matemática acerca do conceito de número 1*. v. 10, n. 18,. jul/dez – 2001. Publicação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT. Disponível em: http://www.ufmt.br/revista/arquivo/rev18/carmo.htm. Acesso em 25. jun. 2004.

COMITTI, Claude; GRENIER, D.; MARGOLINAS, C. *Niveaux de connaissances em jeu lors d'interactions em situation de classes et modélisation de phénomène didactiques*. In Arsac et al (coord.). *Différents types de savoir et leur articulation*. France: La Pensée Sauvage, 1995.

DUVAL, Raymond. *Sémiosis et Pensée Humaine – Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*. Berne, Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (Org.), *Aprendizagem em matemática*: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. *Lecture et Compréhension des textes.* Strasbourg: I.R.E.M., 1986.

FREITAS, Marcos Agostinho de. *Equação do 1º grau:* métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio. São Paulo, 2002. (pp. 146). Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

FREITAS (2003) *Registros de Representação na produção de provas na passagem da Aritmética para a Álgebra.* In: Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica/Silvia Dias Alcântara Machado (org). Campinas, SP: Papirus, 2003.

GUELLI, Oscar. *Matemática – Uma aventura do pensamento*. 5ª série. Editora Ática, São Paulo: 2002. 2ª edição e 1ª impressão, 2005.

__________. *Matemática – Uma aventura do pensamento*. 6ª série. Editora Ática, São Paulo: 2002. 2ª edição e 1ª impressão, 2005.

__________. *Matemática – Uma aventura do pensamento*. 7ª série. Editora Ática, São Paulo: 2002. 2ª edição e 1ª impressão, 2005.

__________. *Matemática – Uma aventura do pensamento*. 8ª série. Editora Ática, São Paulo: 2002. 2ª edição e 1ª impressão, 2005.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; LELLIS, Marcelo. *Matemática*. 5ª série. 1ª ed., 5ª impressão. São Paulo: Scipione, 2001.

__________. *Matemática*. 6ª série. 1ª ed., 5ª impressão. São Paulo: Scipione, 2003

__________. *Matemática*. 7ª série. 1ª ed., 6ª impressão. São Paulo: Scipione, 2003.

__________. *Matemática*. 8ª série. 1ª ed. , 12ª impressão. São Paulo: Scipione, 2001.

JACOMELLI, Karina Zolia. *Polinômios – de "saber a ensinar" a "saber ensinado" em 7ª série*. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2003.

JUNIOR, Armando Traldi. *Sistema de inequações do 1º grau:* uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representação. São Paulo, 2002. (pp. 120) Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MARKARIAN, Roberto. *A Matemática na escola – alguns problemas e suas causas*. In: *Explorando o ensino* – Matemática, v. I. Brasília: Secretaria de Educação-MEC, 2004.

MEIRA, Luciano. *Educação algébrica e resolução de problemas: significados e modelagem na atividade algébrica*. Boletim do Salto para o Futuro. TVE Brasil, de 05- 09 de maio de 2003. Programa de Educação à Distância realizado pela TV Escola. Disponível em: http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/tetxt1.htm. Acesso em 25 jun 2004.

MIRANDA, Clarice Borges. *Equação do 2º grau e técnicas de resolução: um estudo didático da classe 8ª série*, Trabalho de Conclusão de Curso. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2003

RIBEIRO, Alessandro Jacques. *Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP*. São Paulo, 2001. (pp. 145). Dissertação de Mestrado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SANTA CATARINA (SC). Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. Diretoria de Ensino Médio. Diretoria de Ensino Fundamental. *Diretrizes 3*: organização da prática escolar na educação básica: conceitos científicos essenciais, competências e habilidades. Ficha catalográfica elaborada na Biblioteca da SED. Florianópolis, 2001. 130p.

SANTA CATARINA (SC). Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. *Proposta Curricular de Santa Catarina*: *Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio: disciplinas curriculares*. Florianópolis: COGEN, 1998. 244p.

SAMORA, Gisele; TANCREDI, Regina Maria Simões Puccinelli. *Conceitos algébricos iniciais: Um estudo com alunos de um curso pré-vestibular.* Trabalho de graduação, Universidade Federal de São Carlos/UFSCar – São Carlos, 2003

APÊNDICE A - ÍNDICE DE FIGURAS

APÊNDICE B - ÍNDICE DE TABELAS

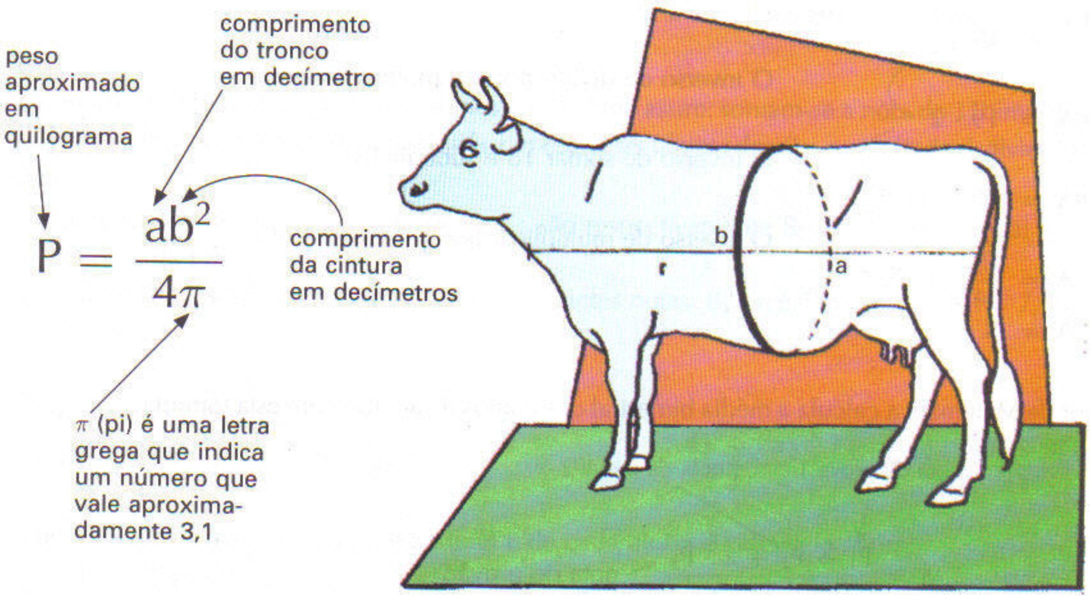
APÊNDICE C - ÍNDICE DE QUADROS

APÊNDICE D - ÍNDICE DE ESQUEMAS

ANEXO 1

Matemática, p. 15, 7ª série, número 17

Às vezes, o criador precisa dar remédios a seu gado. A quantidade de remédio depende do peso do boi ou da vaca, mas como pesar o animal? O professor Paulus Gerdes, de Moçambique, apresentou uma fórmula para se obter o peso aproximado do gado:



Qual é o peso de uma novilha cujo tronco tem 9,3 dm (ou 93 cm) de comprimento e cuja cintura mede 16 dm (ou 160 cm)?

ANEXO 2

Primeira entrevista com o professor no dia 30/03/05

P: professor da classe **O**: observador

1. **O**: Quantas turmas de 7ª série você esta lecionando este ano?
   P: São duas

2. **O**: Quando vais ensinar álgebra na 7ª série?
   P: Eu acho que até segunda, sexta-feira acho que posso dar uma pincelada, porque que eu trabalhei a intenção de números racionais e irracionais é só pra discutir conhecimento mesmo, não vai ser nada aprofundado né, sexta-feira já pode dar uma pincelada sobre o que é, sobre a álgebra.

3. **O**: É a primeira vez que trabalhas com 7ª série?
   P: Completo vai ser. Que o ano passado eu peguei uma 7ª série assim a partir de maio eu acho que foi, maio ou junho, então como não tive oportunidade de trabalhar o ano todo né, então pra com a álgebra assim eles teriam o conhecimento é a primeira vez.

4. **O**: O que você vai ensinar de álgebra nessas 7ª aqui?
   P: Olha, eu já estive olhando alguns livros assim, o objetivo é assim é fazer um, casar a álgebra com números sem, sem criar uma miscelânea na cabeça, mas o meu objetivo assim que eu penso era assim que o aluno lesse a matemática né, que ele lesse quando um número que ele lesse como, por uma letra né, ... , e conseguir distinguir quando é um número com a letra ou quando é pra substituir alguma coisa assim.

5. **O**: Sabes se é ensinado álgebra na 5ª ou e eu achei bem na 6ª série?
   P: Nesse ano na sexta série assim, eu comecei a trabalhar alguns tópicos não propriamente assim, utilizando números e letras mas em forma de substituição não, não cheguei a falar pra eles, não dei título nenhum, nas próprias potências que eu estava trabalhando eu utilizei algumas letras para representar, pra fazerem substituições e eu achei bem legal.

6. **O**: Como é que pretendes abordar álgebra na 7ª série?
   P: Olha, assim, é um tema ... que eu acho bastante eu acho que na 7ª série é um negócio bem complicado, mas eu penso assim ó já estive olhando alguns livros e os livros geralmente trazem geometria né. Só que misturar geometria porque eles não tem um conhecimento profundo em geometria ainda mais que se o professor aborda ... bem complicado. Eu penso assim usar figuras planas né, pra representar e focar algumas definições da própria natureza né, usando perímetro inicialmente somente na de perímetro pra que eles comecem trabalhar com as letras representando somas de né, somando as variáveis que tem os mesmos coeficientes e depois mais tarde tentaria ... usar um pouco de área pra utilizar os polinômios né.

7. **O**: tem alguma situação em particular que achas importante trabalhar neste momento da álgebra?
   P: o que eu acho importante é assim ó, é que eles interpretar, separar ou seja, interpretar a multiplicação e a soma, saber quando você vai somar, quando é 2x ou $2x^2$. Isso eu acho importante. Você observa que hoje no ensino médio a gente vê restigios de alunos que x multiplica x coloca 2x. Então é a única preocupação que eu acho que devo ter pra que o aluno saiba quando ele vai multiplicar as duas letras, na verdade não é multiplicar é, ele vai somar os expoentes quando tiver bases iguais ou quando ele for somar um...

8. **O**: Você falou em interpretar isso, como assim interpretar?
   P: Ler, saber o que esta, saber qual a principal a, o algoritmo que ele vai utilizar né, ele olha pra lá x vezes x geralmente a pessoa coloca a x vezes, x multiplica por x é 2x. Então eu quero que ele saiba ler isso, a interpretação disso que o ponto ali deve ser, idéia que ele teve já, lá no consciente dele né, que já abstraído que o ponto indica que ele vai multiplicar, ou seja, somar os expoentes na verdade e não somar os coeficientes que é como eles acabam fazendo isso né. Quando é multiplicar ele acaba somando.

9. **O**: Que aspectos você, ou costuma, ou julga importante, colocar em evidência, destacar, no ensino da álgebra referente a 7ª série? Seria isso também?
   P: É isso. É ele, não só de 7ª. Eu queria assim ó, eu gostaria que o aluno soubesse é primeiro, interpretar o caderno dele, depois assim ó, ele olhar pra uma expressão seja ela numérica ou não e definir se ele vai somar ou vai multiplicar se ele vai diminuir, sem aquele negócio há –7 com –7 da mais 14 porque é menos com menos né, aquele paradigma de que menos com menos da mais, fica positivo. Então isso é uma preocupação que eu tenho mesmo né, com o pessoal de ensino médio, eu estou sempre frisando isso que sinais iguais você vai somar, sinais diferentes você vai diminuir, essa é uma preocupação que eu tenho.

10. **O**: Mas porque você se preocupa com isso?
    P: Por que sim é que o aluno é são coisas assim que ele não consegue ele não conseguiu, é como é que se diz, abstrair esse conceito é de que parcelas iguais você vai somar né, se aquelas são duas parcelas positivas ai ele consegue facilmente determinar vai somar e continuar positivo, mas quando você inverte as parcelas e uma passa a ser uma positiva e outra negativa ele confundi os alunos confundem. Eu nunca trabalhei com a sexta série é a primeira vez que estou trabalhando, vou trabalhar com números inteiros né, com a definição, assim então eu sempre me pego nessa situação. É aquela história, o aluno não lê o número –7 com –4 ele lê, ele olha o número e vê que tem dois sinais negativos e não observa se tem um ponto que indica a multiplicação e as vezes até mesmo quando tem parênteses ele acaba confundindo acaba fazendo multiplicação.

11. **O**: E você acha que se o aluno não souber isso que você considera essencial ele não consegue continuar o conteúdo de álgebra? Ele sai defasado ou tem condições de acompanhar?
    P: Não assim ó, porque ele vai ficar incompleto, porque aquele conceito ele não vai usar só na álgebra ele vai usar em outras situações também, então eu acho que ele fica incompleto nessa situação. Mesmo que ele trabalhe só expressão numérica fica incompleta a situação. Que ele possa progredir né, as vezes até ele tem, entendeu o principio da né, o conceito a definição ele consegue desenvolver normalmente a expressão ele só acaba esbarrando nesse espaço. Não que isso vai impedir de ele até ser aprovado... só que sempre vai nunca confeccionar isso.

12. **O**: Quais são os objetivos do programa em geral da 7ª série em relação a álgebra?
    P: Não pensei nisso

13. **O**: E os objetivos que vão ter em seu planejamento?
    P: Olha meu objetivo assim é que ele leia a matemática. Eu gostaria assim que não fosse nada mecânico. Porque assim as vezes passa um enunciado no quadro e ai ele não, ele raramente lê até o final e já diz que o professor passou algo que tem nada haver com a explicação. Então eu queria assim quebrar com esse. Quebrar com esse negócio assim o professor passou uma coisa e no exercício ele deu outra. Então significa que o aluno não entendeu nenhum exemplo, ele não conseguiu compreender. Eu gostaria assim, que ele passasse a ler matemática e não desenvolver mecanicamente.

14. **O**: Vamos fazer de conta que agora estas dando aula, qual é o tipo, um exemplo de exercício que tu daria para que ele consiga então ler a matemática como estas falando agora?
    P: Mas por exemplo né, se você vai somar é a+a+a por exemplo pelo fato de você ler a+a+a já te da dando a idéia de que vão ser três, essa é a idéia que eu gostaria que os alunos tivessem, que tenham. Até mesmo quando tu ta dando aula que eles lêem isso né, lêem o que você está fazendo. É você, 5 – 3, você ta lendo, você tem o 5, uma parcela de 5 menos uma parcela de 3, e não vai ser aquele negócio, é claro que depois... isso vai se tornar algo mecânico que já está sabendo, mas até ele saber como fazer. Eu penso que o interessante é ele ler essa expressão. Ele já vai ta é percebendo algumas coisas né, esta lendo os números e as letras, um x, dois x, três x, ele esta tendo a oportunidade de ver que são termos semelhantes né ó, x ao quadrado mais x ele esta vendo que não são termos semelhantes e não pode nunca somar e ele acaba somando.

15. **O**: Você esta enfatizando bastante esta questão da leitura, por isso estou te perguntando, tem alguma atividade específica que vai frizar isso ou como é que vai ser, durante as aulas, explicação?
    P: Não, durante as aulas mesmos, porque assim ó, toda correção de exercícios né, eu peço que, raramente, assim ó até não gosto de que venham ao quadro porque sempre tem alguém que não conseguiu compreender, e as vezes eu deixo usar o quadro e as vezes não. Daí na hora de eu fazer, que eu vou explicar eu faço a leitura lá.

16. **O**: Então não tem nenhuma atividade específica para esta questão que você fala de linguagem?
    P: Não, não pensei não.

17. **O**: Quantas aulas você esta pretendendo dar sobre este conteúdo?
    P: Olha, como é a primeira vez eu também assim, eu vi só, eu dei uma olhada nos livros já, mas eu vi só a parte, que são bastante coisa né. Mas assim ó, eu não quero "enfardar" muito os alunos né, pra não se tornar muito cansativo, pra não ser chato. Mas ainda não pensei no número de aulas.

18. **O**: E as aulas, já preparasse?
    P: Não, só estou estudando.

19. **O**: quando é que pretendes preparar as aulas já que dissesse que vais introduzir na sexta feira?
    P: Talvez amanhã a tarde vou começar a dar uma elaborada.

20. **O**: Em geral assim, tu achas que os alunos têm muita dificuldade em álgebra?
    P: Olha, não falando de 7ª série tem.

21. **O**: Como assim não falando de 7ª série?
    P: Assim ó, a 7ª série vai ser o primeiro contato deles né, praticamente é o primeiro contato deles com álgebra, no mínimo que eles devem ter é um pouco de equações né. Então mais. 3ª série do ensino médio eles tem quando, eles têm dificuldades.

22. **O**: Que dificuldades você acha que eles têm? Que tipo de dificuldade?
    P: É na multiplicação na multiplicação mesmo, de mover letras e é, substituição. Até às vezes ele errou em alguma coisa que não sabe como completar.

23. **O**: É o que eles mais erram?
    P: Quando se trabalha com álgebra é.

24. **O**: Essa dificuldade assim, que você acha que já tem, como é que você pretende trabalhar essa dificuldade? Já pensou em alguma coisa?
    P: Não, não pensei.

25. **O**: Qual material você vai se apoiar para as aulas?
    P: Vou usar o livro do Dante, do próprio Geovanni, tem um terceiro livro que eu não lembro o nome, capa vermelha.

26. **O**: Porque escolhesse estes materiais?
    P: Tive observando esses livros e eu achei interessante, assim a principio. Até o Geovanni não, ele é meio vago assim, da parte inicial, os outros livros achei interessante.

27. **O**: Você usa só o livro didático para preparar tua aula ou tem um outro apoio também?
    P: Não eu to usando só o livro didático.

ANEXO 3

Protocolo da aula 1 do dia 04/04/05

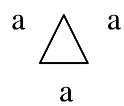
P: professor da classe **A(s)**: aluno(s)[62] *Obs.*: notas do observador.

1. *Obs.: o professor demora alguns minutos até começar a aula esperando os alunos se sentarem.*
2. **P**: Boa tarde. Vocês podem sentar ficar à vontade. Hoje é dia quatro.
3. *Obs.: o professor escreve no quadro "04/04/05 mtm"*
4. **P**: Aula passada nós demos uma olhada em números racionais e números irracionais. Muito bem. A gente. Essa atividade né. Hoje nós vamos começar um novo conteúdo.
5. **A**: Qual? Aquele outro parou aqui professor?
6. **P**: Aquele lá era só para vocês terem uma noção de números racionais.
7. **A**: Ah tá.
8. **P**: O novo conteúdo é, chamado de cálculo algébrico.
9. *Obs.: depois de dizer o nome do novo conteúdo o professor escreve no quadro "Cálculo Algébrico"*
10. **A**: Professor, mas tem um exercício daquele professor.
11. **P**: Chamado cálculo algébrico.
12. **A**: Professor tem um exercício ainda daquela vez.
13. **P**: Não, nem vamos resolver. Vamos lá 7ª série. Abram os cadernos.
14. **A**: o professor não vai ver o exercício que a gente fez pra casa?
15. **P**: Vocês já ouviram alguma coisa sobre álgebra? Sobre uso de letras representando números?
16. **A**: É uma coisa assim ó, x + y é, daí fica assim ó, para 5 é o x ...
17. **P**: Agora nós vamos trabalhar um pouco de números misturados com letras. Números que representam, aliás, letras do alfabeto que representam números. Graziela. Pessoal, vamos prestar atenção aqui, matéria nova de álgebra, conteúdo novo pra vocês. Talvez vocês já tenham visto, mas não com este título. Certo? Então a álgebra gente, nós vamos ter uma noção de álgebra. É uso de letras para representar números. Vamos colocar alguma coisa no quadro né.
18. *Obs.: nesse momento o professor só escreve no quadro "É o uso de letras para representar números. Ex.: seja uma figura triangular de lados iguais e cada lado medindo 'a'".*
19. **P**: Algo pra você anotar em seu caderno.
20. *Obs.: o professor espera um tempo para os alunos copiarem.*
21. **P**: Então gente. Vamos lá né. O uso de letras pra representar os números. Então vamos ver uma, por exemplo.
22. **A**: Tem que copiar professor?
23. **P**: Sim, sim, conteúdo pra vocês copiarem. Por exemplo.

---

[62] Quando tivermos dois A seguidos, representam alunos diferentes.

24. *Obs.: nesse momento o professor pára a aula para fazer a chamada silenciosamente. Em seguida um aluno vai até sua mesa e os dois discutem em voz baixa, aparentemente, sobre um exercício da aula anterior. Terminando, o professor volta e escreve no quadro: "Qual será a representação da soma dos três lados da figura?".*
25. **P**: Seja uma figura triangular. Você lembra o que é uma figura triangular? É uma figura em forma de?
26. **A**: Triângulo.
27. **P**: Triângulo. Se ela tiver todos os lados iguais. Se nós representarmos a medida de cada lado pela letra 'a'.
28. *Obs.: o professor desenha no quadro um triângulo usando como instrumento de medida o palmo. Em seguida um aluno vai até sua a mesa para mostrar seu caderno (aparentemente, mostrando a figura).*
29. **P**: Seja uma figura triangular de lados iguais. Cada lado medindo 'a'.
30. *Obs.: pausa para refazer o desenho.*
31. **P**: Gente nós, vamos desenhar então? Olha só, seja uma figura triangular de lados iguais. O que significa lados iguais? Que todos devem ter o mesmo?
32. **A**: Lado
33. **P**: O mesmo? Comprimento. Olha a representação da soma dos três lados da figura. Como é que nós podemos somar estes três lados? A gente precisa da?
34. *Obs.*: *um aluno falou algo que não deu para entender*
35. **P**: Soma, estamos falando de soma gente. Qual a representação que teremos da soma? Qual será a representação?
36. **A**: Mais
37. **P**: Então desenhe esta figura aí. De lados iguais né. Pessoal. Pessoal, quanto vale cada lado da figura que esta representada ali? Olha só, seja uma figura triangular. Você já desenhou sua figura? 7ª série. Já terminaram a figura? Triangular significa que é uma figura que tem?
38. **A**: Três lados.
39. **P**: Três lados. Qual é. Ah, em cada lado tem. Ele mede?
40. **A**: 'a'
41. **P**: 'a'. Qual é a representação da soma dos três lados. Primeiro, temos que colocar a medida de cada lado. Que medida é essa? Qual é a mediada de cada lado?
42. **A**: 'a'
43. **P**: A medida de cada lado é?
44. **A**: 'a'
45. *Obs.: neste momento o professor acrescenta o 'a' no triangulo desenhado*:

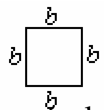


46. **P**: Por que nós representamos por 'a' a medida de cada lado?
47. **A**: triangulo
48. **P**: Representa o mesmo número. E outro detalhe, aqui nós não colocamos qual deve ser a medida do lado. Se nós não conhecemos as medidas do lado da figura então representamos por uma? Letra qualquer. Você poderia representar por qualquer letra que você deseje. Apenas para representar o que? A medida de cada lado. Pessoal olha aqui.
49. *Obs.: o professor escreve no quadro "A soma dos três lados da figura, denominaremos perímetro (P)".*
50. **P**: Então, para a soma dos três lados da figura. Porque olha, se você observar estes três segmentos aqui estão limitando a figura né? Eles limitam a parte do quadro.
51. *Obs.: o professor aponta para o retorno do triangulo desenhado.*
52. **P**: Nós chamaremos esse limite de perímetro. Agora isso. Como é que nós podemos representar, agora respondendo a pergunta, a soma dos três lados da figura? Olha se estamos falando. Estamos falando de? Soma.

53. **A**: Poderia ser.
54. **P**: Vamos lá Felipe. Se estamos falando de soma é claro que teremos que efetuar soma. Então a soma dos três lados chamamos de? Perímetro. Como é que vai ser representado?
55. **A**: ‘a + a’
56. **P**: + a
57. *Obs.: No quadro o professor escreve:* $P = a + a + a$.
58. **P**: Pessoal algum questionamento aqui?
59. **A**: Mas qual é o valor de a?
60. **P**: Pois é, nós ainda não. Por isso que nós colocamos a, porque nós não conhecemos o valor de a. Por isso está representado.
61. **A**: Isso daí é uma incógnita né?
62. **P**: Uma incógnita. Nós podemos somar estes três valores? Gente se eu tenho ‘a’, outro ‘a’ e outro ‘a’. O que nós temos aqui?
63. **As**: 3a
64. *Obs.: o professor escreve no quadro: 3a.*
65. **P**: 3a. Então eu posso indicar né, para no caso da nossa figura triangular que a soma dos três lados, já que são iguais, podemos representar como sendo? 3?
66. **A**: 3a
67. **P**: Agora nós podemos dar um valor para ‘a’, não podemos?
68. **A**: Pode
69. **P**: Porque o ‘a’ representa? Gabriela. O ‘a’ ele representa. Certo? Portanto nós podemos determinar o valor do ‘a’. Estipular o valor do ‘a’. E chamaremos de valor numérico. Pessoal até aqui algum questionamento? Bom, então vamos responder a mais uma questão então?
70. *Obs.: nesse momento o professor escreve: “Qual o perímetro da figura, se* $a = 4$*”.*
71. **P**: Se a = 4, o que representa. O que é o perímetro da figura gente? O que é o perímetro da figura triangular?
72. **A**: 4
73. **P**: Não
74. **A**: É a soma de 4 + 4 + 4
75. **A**: é 4 + 4 + 4
76. **P**: Vamos ver aqui, olha só. Somando os três lados da figura denominaremos?
77. **A**: o professor colocou um P?
78. **P**: Perímetro. Se o ‘a’ é 4, quanto, qual valor desse perímetro? Se o ‘a’ é 4 isso indica o que? Que deveremos substituir o ‘a’ pelo valor numérico?
79. **A**: a quantidade de ‘a’ na figura vezes o perímetro.
80. **P**: a quantidade de lados da figura vezes o valor da incógnita ‘a’
81. *Obs.: o professor escreve:* $P = 3.a$
$P = 3.4$
$P = 12$
82. **P**: 12 o que? Bananas? Abacaxi? Ora, toda medida ela é dada. Quais medidas nós mais conhecemos? De comprimento.
83. **A**: metros, centímetros.
84. **P**: Metros, centímetros. Como nós não sabemos escreveremos de unidade de comprimento.
85. *Obs.: o professor acrescenta: P = 12 unidades de comprimento.*
86. **P**: É isso porque não foi especificado, poderia ser metro, poderia ser centímetro, poderia ser quilômetros. Já que nós não conhecemos. Porque olha só, não tem como você fazer uma medida e não colocar uma unidade, né, se você vai medir, por exemplo, o comprimento. Ah, o perímetro da sua carteira você vai medir o que, ou em centímetro, ou

em metros. Então, isso precisa ser especificado. Nesse caso, não pode ser simplesmente 12 alguma coisa. 12 unidades de comprimento. Pessoal, algum questionamento aqui? Alguém não compreendeu?

87. *Obs.: uma aluna perguntou se não tivesse o valor do 'a', se teria que medir o comprimento do lado.*
88. **P**: Para saber o valor do a. Como nós não medimos podemos estipular um valor qualquer. Pessoal e se o 'a' for
89. *Obs.: o professor escreve: Se a = 12.*
90. **P**: 12 unidades, qual será o perímetro? Qual será o valor numérico do perímetro da figura? Ora, estamos falando ainda da mesma figura ta? Se P que representa a soma dos lados da figura, certo, é 3 vezes o 'a'. Se nós trocarmos o 'a' por 12
91. *Obs.: o professor escreve no quadro: P = 3.a*
P = 3.12
P = 36 unidades de comprimento
92. **A**: Seriam 36 unidades de comprimento?
93. **P**: 36 unidades de comprimento
94. Obs.: o *professor escreve no quadro: "Ex.: Uma figura com quatro lados iguais e, cada lado medindo 'b'".*
95. **P**: Se uma figura tem quatro lados iguais, o que lembra vocês? Se uma figura tem quatro lados iguais o que a gente lembra? Se ela tem quatro lados só poderá ser?
96. **A**: 6
97. **P**: Faça uma figura aí gente. Quadrada com quatro lados. Uma figura de quatro lados iguais.
98. *Obs.: o professor escreve em seu caderno e ao mesmo tempo conversa com os alunos sobre a morte do papa. Depois disso vai e desenha no quadro*:



99. **P**: Pessoal, já copiaram? Vocês devem chegar o mais próximo possível da igualdade.
100. *Obs.: o professor fala isso quanto ao desenho que os alunos fazem.*
101. **P**: Uma figura de base quadrado de quatro lados que são? Iguais.
102. **A**: 6 unidades de comprimento.
103. **P**: Foi determinado que cada figura, o lado de cada, aliás, foi determinado que cada lado da figura tem uma medida?
104. **A**: igual
105. **P**: 'b'. Por que essa medida é 'b'? Porque nós não sabemos qual é o valor numérico, quanto mede realmente cada lado. Por isso representamos por uma variável chamada?
106. **A**: 'b'
107. *Obs.: o professor escreve no quadro: Soma dos quatro lados?*
108. **P**: E a soma dos quatro lados? Como é que realizamos a soma? Como é que realizamos a soma dos quatro lados?
109. **A**: é 4.b
110. **P**: como é que chamaremos essa soma?
111. **A**: soma não sei o que lá
112. **P**: perímetro
113. **A**: fica b + b + b + b
114. *Obs.: o professor escreve no quadro: P = b + b + b + b.*
115. **P**: isso pode ser representado como uma outra forma que é?
116. **As**: 4.b
117. *Obs.: o professor escreve no quadro: P = 4.b*
118. *Obs.: um aluno pergunta se é possível ter o valor de P para achar o de b*

119. **P**: Seguindo a colocação do Willian
120. *Obs.: o professor escreve no quadro: Qual o valor de b, se P = 40.*
121. **P**: Olha só o que o Willian falou. Qual é valor de b se o valor de P é 40?
122. **A**: é 10, é 4.10
123. **P**: qual o valor de b se o P já é 40?
124. **As**: é 10
125. **P**: Vamos substituir aqui primeiro? Qual é a expressão que estamos utilizando? A expressão que utilizamos para a figura é P = 4.b. Olha, qual valor que nós temos aqui para resolver esta equaçãozinha. Quanto é que vale P aqui na nossa?
126. **A**: 40
127. **P**: 40 = 4 . b
128. **As**: o professor como.
129. **P**: Ta, olha só, o 40 está aqui. Qual o valor de b, ta anunciando no exercício, por exemplo, se o P é 40. O que significa o P ali na nossa representação?
130. **A**: é o perímetro.
131. **P**: perímetro. O que é o perímetro?
132. **A**: soma dos lados
133. **P**: é a soma?
134. **A**: a soma dos quatro lados
135. **P**: dos lados da figura, então eu somei a figura e deu 40. Qual o valor de b?
136. **As**: 10
137. **P**: Você lembra de como resolver este. Qual o valor da igualdade? Meninas aqui. Qual o valor de b para que o resultado dê 40?
138. **As**: 10
139. **A**: daí fica 4.10
140. **P**: resolvemos aqui por tentativa. Pessoal, ficou claro aqui, porque do 10? Lembram no ano passado quando vocês começaram a estudar as equações? Olha 4.b = 10. Como é que tiramos o 4 na frente do b? 4 está? Multiplicando. Pra você tirar o quatro aqui da frente do b, pra isolarmos o b? Tem que dá 40. Vocês estão. Não lembram mais como resolver esta equação?
141. **A**: 40 dividido por 4 vai dar 10
142. *Obs.: o professor escreve: 40/4 = b*
b = 10 unidades de comprimento
Qual o valor de P, se b = 6
143. **P**: qual o valor da soma dos lados?
144. **A**: o professor, podemos escrever com as letras diferentes a, b, c?
145. **P**: escreveremos com as letras diferentes também. 7ª série. Conseguiram determinar, Adriele, qual o valor de P se o valor de b é 6? Estamos sempre nos recordando gente a expressão inicial. Ora, eu tenho que o P é 4 vezes o lado b. Se o lado b valer 6?
146. **A**: 24
147. *Obs.: o professor escreve: P = 4.b*
P = 4.6
P = 24 unidades de comprimento
148. *Obs.: o professor continua escrevendo: Quando, em uma representação algébrica, substituímos a letra por um número qualquer, e achamos um resultado, chamamos este de valor numérico da representação algébrica. Ex.: Se a = 2, b = 7 e c = 3, qual o valor de:* $2.a - 3.b + c^2$.
149. **P**: Muito bem. Mas aqui é uma situação e lá é outra.
150. *Obs.: isso o professor fala se referindo aos exemplos onde b = 6 e P = 40 na expressão p=4b, pois um aluno se confundiu e achava que era o mesmo exercício.*

151. **P**: Muito bem. Quando em uma expressão algébrica nós né, representação algébrica nós utilizamos? Letras para representar os números. Se nós substituirmos as letras por um certo número o resultado obtido será chamado como sendo? Valor numérico da expressão. Já copiaram ali?

152. **As**: não

153. **P**: se a = 2, b = 7 e c = 3 qual o valor daquela representação? Para o valor numérico devemos substituir o a por?

154. **As**: 2

155. **P**: o b por?

156. **As**: 7

157. **P**: e o c?

158. **As**: 3

159. *Obs.: o professor enquanto fala escreve:* $2.a - 3.b + c^2$

$$2.(2) - 3.(7) + (3)^2$$
$$4 - 21 + 9$$
$$-17 + 9$$
$$-8$$

160. *Obs.: Uma aluna comenta sobre a ordem da adição, aí o professor faz*:

$$4 - 21 + 9$$
$$13 - 21$$
$$-8$$

161. **P**: uma atividade para casa né?

162. *Obs.: o professor escreve: P/ casa: qual o valor numérico da representação* $2.x + 3.y$ *se*
$x = 3$
$y = -2$

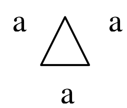
163. **P**: Essa é para responder em casa.

No quadro ficou assim:

Cálculo Algébrico

É o uso de letras para representar números.

Ex.: seja uma figura triangular de lados iguais e cada lado medindo 'a'.
Qual será a representação da soma dos três lados da figura?



A soma dos três lados da figura, denominaremos perímetro (P)

P = a + a + a
P = 3a

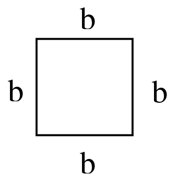
Qual o perímetro da figura, se a = 4

P = 3.a
P = 3.4
P = 12 unidades de comprimento

Se a = 12

P = 3.a
P = 3.12
P = 36 unidades de comprimento

Ex.: Uma figura com quatro lados iguais e, cada lado medindo 'b'
Soma dos quatro lados?



P = b + b + b + b
P = 4b

Qual o valor de b, se P = 40

$P = 4.b$

$40 = 4.b$ ou $40/4 = b$

$b = 10$ $b = 10$

Qual o valor de P, se b = 6

$P = 4.b$

$P = 4.6$

P = 24 unidades de comprimento

Quando, em uma representação algébrica, substituímos a letra por um número qualquer, e achamos um resultado, chamamos este de valor numérico da representação algébrica.

Ex.: Se a = 2, b = 7 e c = 3, qual o valor de: $2.a – 3.b +c^2$

$2.a – 3.b + c^2$

$2.(2) – 3.(7) + (3)^2$

$4 – 21 + 9 \longrightarrow 4 – 21 + 9$

$– 17 + 9$ $13 – 21$

$– 8$ $– 8$

P/ casa

Qual o valor numérico da representação $2.x + 3.y$ se $x = 3$

$y = -2$

Entrevista com o professor (O: observador):

O: Qual era o seu objetivo na aula de hoje?

P: Meu objetivo principal era ele começarem a se familiarizar com letras e números.

O: Seu objetivo foi alcançado?

P: Sim, acho que sim. Sempre fica alguma coisa devendo, mas acho que está bom.

O: Você fez ou disse algo que não pensava em fazer ou dizer?

P: Não, não. Acho que poderia ter me organizado melhor no quadro, mas só.

ANEXO 4

Protocolo das aulas 2 e 3 do dia 06/04/05

P: professor da classe **A(s)**: aluno(s)[63] *Obs.*: notas do observador.

1. **P**: Vamos sentar
2. **A**: Professor, fiz os deveres.
3. **P**: Vamos sentar, por favor.
4. *Obs.: o professor passa pelas carteiras para olhar os cadernos dos alunos e ver se os deveres foram feitos.*
5. **P**: Gabriela. Vamos retomar a aula? Nós começamos. Segunda-feira tivemos contato com um novo conteúdo. De álgebra, não é mesmo? Aí vimos alguns. Tinha alguma atividade para vocês tentarem fazer em casa.
6. *Obs.: alunos comentando entre si: eu fiz, eu também, eu não.*
7. **P**: Então você tinha. Vamos lá 6ª, 7ª série. 7ª série, vamos nos concentrar, por favor. Você tinha lá no seu caderno, pedia o valor numérico de uma expressão que era 2x
8. **A**: mais 3 vezes o y
9. **P**: Daí nós. Para o x e para o y?
10. **A**: o valor de x é 3
11. **P**: e o y o valor é?
12. **A**: é -2
13. *Obs.: enquanto o professor fala, ele escreve a expressão: 2.x + 3.y, x = 3 e y = - 2.*
14. **P**: O que é, ó gente, e o título do exercício o que dizia?
15. **A**: Qual o valor numérico da representação.
16. **P**: Como é que nós iríamos determinar o valor numérico de 2 vezes x mais 3 vezes y?
17. **A**: 2 vezes 3 mais
18. **P**: temos que fazer uma substituição, o x, ou seja, aqui nós estamos usando uma letra para representar quem?
19. *Obs.: o professor fala isso apontando no quadro para o x da expressão.*
20. **A**: o 3
21. **P**: o 3, o y ele representa o?
22. **A**: -2
23. **P**: -2. Então nós vamos substituir os números para ver qual é o valor disso. O y, oi? Substituímos por?
24. **A**: -2
25. **P**: Olha, sempre que o sinal for negativo é bom nós representarmos com parênteses para nós não confundir na hora de multiplicarmos.
26. *Obs.: o professor fala isso quando escreve: 2.3 + 3.(-2).*

---

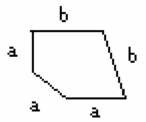
[63] Quando tivermos dois A seguidos, representam alunos diferentes.

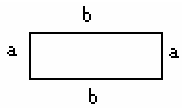
27. **P**: Quanto é que da essa multiplicação?
28. **A**: 6
29. **P**: e agora gente? Mais 3, ou seja, 3 vezes menos 2?
30. **A**: 6
31. **P**: 3 que multiplica –2
32. **A**: - 6
33. **P**: Ah, vai ser –6.
34. **A**: Por que professor?
35. **P**: Porque olha só, estou multiplicando o 3 vezes –2. Então é a mesma coisa que –2, que é quanto isso?
36. *Obs.: Professor aponta para o sinal de multiplicação e para o 3 no quadro*.
37. **A**: O professor mais não é sempre que fica o sinal do maior?
38. **P**: Mas olha aqui gente, nós estamos o que, fazendo o que aqui, uma?
39. **A**: Multiplicação
40. **P**: Multiplicação, quando nós temos uma multiplicação nós devemos proceder com a regra de? Sinais não é?
41. *Obs.: o professor escreve: 6 + (-6).*
42. **P**: Agora aqui, como é que vai ficar essa representação na regra de sinais aqui? Mais vezes menos?
43. **A**: Menos
44. **P**: 6 – 6 dará quanto?
45. *Obs.: essa pergunta é referente ao resultado de 6 + (-6) que é 6 – 6.*
46. **A**: zero
47. **P**: Você deve ter sempre atenção quanto aos? Sinais. Gente, algum questionamento aqui além desse? Pessoal que não conseguiu fazer compreendeu a resolução? O que é valor numérico, compreenderam? Então vamos fazer uma atividade agora rápida.
48. *Obs.: professor em silêncio passa no quadro as atividades seguintes e usa como medida de comprimento o palmo da mão*:

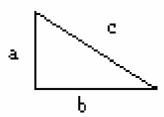
Atividades

Para pensar e resolver:

1. Qual a expressão algébrica que representa o perímetro das figuras.

a) 

b) 

c) 

2. Ache o valor numérico das expressões algébricas:

a) $2x + 2y$ *se* $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$

c) $\dfrac{a+b}{c}$ *se* $\begin{matrix} a = 4 \\ b = 5 \\ c = 3 \end{matrix}$

b) $3a - b + c$ *se* $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$

d) $\sqrt{(x+y)}$ *se* $\begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases}$

49. *Obs.: o professor espera os alunos copiarem e mexe em seu material. Dois alunos procuraram o professor na mesa dele para falar sobre algo do caderno (aparentemente é sobre a atividade dada).*
50. **A**: Professor que é isso?
51. *Obs.: essa pergunta vem do exercício número 1 na letra a.*
52. **P**: É uma figura qualquer né? Que contém? Quantos lados contêm a figura?
53. **As**: 5

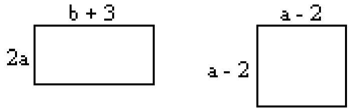
54. **P**: Precisa fechar a cortina para vocês verem? 6ª, 7ª série.
55. **A**: O professor, calma aí.
56. **P**: mas eu estou calmo.
57. **A**: Professor o que é isso ali na d e na c, como é que faz aquilo? Professor não explicou em fração.
58. **P**: Não expliquei?!
59. **A**: Não
60. **P**: O que quer dizer uma fração?
61. **A**: Não sei
62. **A**: é pra dividir
63. **P**: Uma fração é uma?
64. **As**: Divisão
65. **P**: Divisão. Então você deverá fazer o que aqui?
66. **A**: somar e depois dividi.
67. **P**: Substituir primeiro os números, somar e dividir. Por isso é que você deve pensar e resolver, antes de perguntar. Lá na, no caderno de vocês, vocês prestam atenção no que é o? Perímetro.
68. *Obs.: o professor fala com um aluno na sua mesa olhando para o caderno do aluno.*
69. **A**: professor aí tem três a aqui, ta. Perímetro igual ao número de lados vezes o, a letra, por exemplo, aqui nesse triângulo aqui ó, daí pega a e faz 3 vezes a. 3 lados vezes o a.
70. **P**: Sim aqui você tem 3 lados
71. **A**: Então, vai dar 5ab
72. **P**: Não.
73. **A**: Como não, não sei fazer isso então.
74. **P**: Você não pode somar.
75. **A**: Aqui ó, 3 vezes o a mais 2 vezes o b?
76. **P**: Pois é, você acabou de falar pra mim a resposta, você já falou pra mim. Só falta você compreender o que você esta fazendo. Você tem 3 lados iguais, que vai ser quanto?
77. **A**: 3 vezes a
78. **P**: 3a coloca lá, escreve. O perímetro o que é? É a soma? Dos lados. E você tem dois lados que são iguais. Então mais? Essa é a representação algébrica do? Perímetro.
79. *Obs.: o professor fala agora do exercício 1.*
80. **P**: Pessoal, o item a, b e c, nós não vamos resolver a expressão. Nós vamos apenas representar a soma dos lados. Se der a e b vai ficar simplesmente? a e b. O perímetro é apenas a representação dos lados, quantos lados b você tem e quantos lados a você tem.
81. **A**: só assim?
82. **P**: Pois nós não vamos substituir esses valores porque nós não temos, olha só. Tem algum número aqui pra substituir o a e o b? Não temos. Aqui sim.
83. *Obs.: o professor esta falando agora do exercício 2.*
84. **P**: Por que aqui nós resolvemos, assim, a expressão? Porque aqui nós temos o valor para x e para? y. Aqui nós temos para a, b e? c. Você só vai resolver a, só vai obter um valor numérico quando você tiver um outro valor pra substituir a letra.
85. **A**: O professor.
86. **P**: Essa de substituir os valores?
87. **A**: É.
88. **P**: Já resolveu a soma? Olha só, aqui ta dizendo pra você somar, então.
89. **A**: Soma ali, aí dividi..
90. **P**: Não, mas ali você vai só somar.
91. **A**: dá 9

92. **P**: então. O que indica essa fração? Mas o que quer dizer esse traço aqui? Você deverá o que?
93. **A**: Dividi
94. **P**: Dividir.
95. *Obs.: o professor recebe a visita de um outro aluno em sua mesa e falam baixinho olhando para o caderno do aluno.*
96. **P**: primeiro você vai ter que somar
97. **A**: professor na b ali é –4?
98. **P**: No exercício c?
99. **A**: Na b, na b, na b.
100. **P**: É menos 3, menos 4.
101. **A**: Professor explica o número 1?
102. **P**: Pessoal o exercício número 1 aqui, ó. Têm gente que esta com dúvida aqui. Olha qual expressão algébrica. Qual a representação algébrica que representa o perímetro das figuras. Primeiro, lembram a aula passada? O que é o perímetro da figura?
103. **A**: É a soma dos lados
104. **P**: Perímetro é a soma de todos os?
105. **As**: lados
106. **P**: Então se nós formos somar os lados que nós temos aqui, cada lado esta sendo representado por uma letra, não é mesmo? Então nós temos o lado a, depois novamente o lado a. Se é a soma você irá representar com o sinal?
107. **A**: de mais
108. **P**: de adição. Mais um outro lado a, temos também um lado b e o outro lado?
109. **A**: b
110. *Obs.: o professor fala isso apontando para o item a do número 1 e vai escrevendo:* $P = a + a + a + b + b$.
111. **P**: Quantos lados a nós têm aqui?
112. **As**: 3
113. **P**: Então posso escrever de que forma?
114. **As**: 3a
115. *Obs.: o professor escreve:* $P = 3a$.
116. **P**: E quantos lados b nós temos aqui?
117. **As**: 2
118. **P**: E posso representa-los de que forma?
119. **A**: 2b
120. *Obs.: o professor escreve:* $P = 3a + 2b$.
121. **P**: Isso dá a representação algébrica, ou seja, o a representa um número que nós não conhecemos.
122. **A**: Só isso!
123. **P**: Atenção gente. O a representa um número que nós não conhecemos e o b também representa um número desconhecido.
124. **P**: Pessoal a representação algébrica, como é uma representação você não vai resolver esse exercício, a menos que seja fornecido o valor para o a e um para o b.
125. *Obs.: o professor passeia pelos cadernos dos alunos.*
126. **P**: Podemos a correção?
127. **As**: não
128. *Obs.: o professor continua passeando pelos cadernos dos alunos.*
129. **A**: o professor deixa eu fazer a d?

130. **P**: 6ª série. O seu Augusto. José Augusto? Pessoal, vamos fazer a correção no quadro porque alguns colegas estão em dúvidas e é bom pra, clarear os pensamentos de vocês. 7ª série, Felipe, Bruno.
131. *Obs.: o professor chama a atenção dos alunos para correção.*
132. **P**: O item a tinha ficado?
133. *Obs.: o professor escreve novamente: P = 3a + 2b.*
134. **P**: Pessoal a figura b, é uma figura de?
135. **A**: 4 lados
136. **P**: Aí você sabe que. Atenção! Vamos lá. A representação do perímetro é a soma dos quatro?
137. **A**: lados
138. **P**: então vai ser o lado a, mais o lado b
139. *Obs.: o professor escreve enquanto fala: P = a + b + a + b.*
140. **P**: o que são iguais, você vai? Você tem dois lados que medem a, então podemos escrever como sendo?
141. **A**: 2a
142. **P**: 2a. E você também tem dois lados com representação?
143. **A**: b
144. *Obs.: o professor escreve: P = 2a + 2b.*
145. **P**: E na figura c? E a figura c?
146. **A**: um mais a, uma mais b e um mais c
147. **P**: Você tem um lado a, um lado b
148. **A**: e um lado c
149. *Obs.: o professor escreve: P = 1a + 1b + 1c.*
150. **P**: Ou se você representar apenas por
151. *Obs.: o professor escreve: P = a + b + c.*
152. **P**: Pessoal, vamos aqui o exercício número 2? O que é valor numérico. O valor numérico gente, você deve ter atenção na hora de trabalhar com? Sinais. Pessoal, qual a representação, que número o x esta representando?
153. **A**: 3
154. **A**: -3
155. **P**: Esta representando? E o y?
156. **A**: 4
157. *Obs.: Professor escreve: 2.x + 2.y ; 2.(-3) + 2.4.*
158. **P**: esta representando o valor? Meninas lá. Quanto é que vai dar essa multiplicação?
159. **A**: -6
160. **P**: 2 vezes 4
161. **A**: 8
162. *Obs.: professor se refere a 2.(-3) e depois a 2.4.*
163. **P**: -6 + 8?
164. **A**: -2
165. **A**: +2
166. **P**: exercício b, vamos lá. Qual valor numérico que representa o a?
167. **A**: 2
168. **P**: 2. O b?
169. **As**: 3
170. **P**: 3 e o c?
171. **As**: -4
172. *Obs.: o professor escreve: 3.2 – 3 – 4.*
173. **P**: Podemos coloca direto o –4 aqui?

174. *Obs.: o professor se refere no +c, em vez de colocar +(-4) ele coloca direto –4.*
175. **P**: 3.2
176. **A**: 6
177. **P**: quanto é que é 6 – 3 ? Gente, 6 – 3 vai ser?
178. **A**: 3, – 4 que vai dar?
179. **P**: 3 – 4?
180. **A**: O professor não é mais ali no -3?
181. *Obs.: a aluno se refere ao sinal atrás do –3 que seria o sinal do 4.*
182. **P**: mas o sinal negativo vai prevalecer. Olha só, +(-4). Gente, nesse caso aí, 7ª série, aqui olha só, tu ta dizendo que o valor, o c esta representando o valor? –4. Agora aqui você tem o sinal positivo e um sinal negativo, na multiplicação vai prevalecer quem?
183. **A**: negativo
184. **P**: sinal negativo. Por isso que fica? Então, 6 – 3, 3.
185. **A**: vai ficar o sinal do maior ou vai fazer regra de sinal?
186. **P**: mas o 6 é maior que o 3.
187. **A**: tá professor, mas, a ta.
188. **P**: aqui ó o sinal do maior é negativo, por isso vai ficar –1
189. *Obs.: o professor se refere a 3 – 4 que vem do 6 – 3 – 4.*
190. **P**: Felipe! Aqui vai ter um + e um menos, por causa disso vai ficar negativo.
191. *Obs.: neste caso voltou para +(-4).*
192. **P**: Olha só, tinha 6 tirando 3 ficaram?
193. **A**: 3
194. **P**: 3 né? 6 é maior por isso prevalece o sinal positivo. Agora você tem 3 – 4, aqui acaba ficando?
195. *Obs.: o professor escreveu novamente esta resolução: 6 – 3 – 4.*
196. **P**: E o a + b sobre c?, o a substituísse por?
197. **As**: 4
198. **P**: 4, o b?
199. **As**: 5
200. **P**: Ora se aqui esta dizendo que é uma soma nós vamos? Agrupar os valores. Vai ficar?
201. *Obs.: o professor já escreve a solução: 9/3 = 3.*
202. **A**: Porque que deu 3?
203. **P**: Gente olha só, 9 dividido por 3. 7ª, sempre que for possível a simplificação, vamos simplificar.
204. *Obs.: um aluno fala algo que não consegui escutar.*
205. **P**: olha só. Ô gente uma dúvida aqui.
206. *Obs.: nesse momento o professor fala voltado para a aluna, não da para entender. Mas parece que ela quer tirar a dúvida do item b onde no +(-4) foi feito regra de sinal e no 6 – 3 não.*
207. **P**: O item d. Raiz quadrada, você sabe que, 6ª, 7ª série. Raiz quadrada de?
208. **A**: 8 + 8
209. **P**: Pessoal quanto é que vai ser a raiz quadrada de 8 + 8?
210. **A**: 16
211. **A**: a raiz quadrada de 16 é 4 o resultado é 4
212. **A**: é 8
213. **P**: a raiz é? 4.
214. *Obs.: o professor procura seu material.*
215. **P**: Pessoal, uma outra situação aqui.
216. *Obs.: o professor escreve: Outra situação*

Qual a expressão algébrica do perímetro da figura?

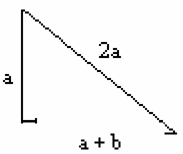


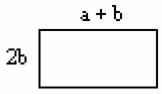
217. **P**: 6ª série?
218. **As**: 7ª
219. **P**: 7ª série, quando nós tivemos a
220. **Alunos**: espera professor
221. *Obs.: o professor dá mais um tempo.*
222. **P**: Pessoal já, já copiaram aqui?
223. **A**: não
224. **P**: vamos lá 7ª série, Willian? Já copiaram?
225. **As**: já
226. **P**: Já pensaram sobre a situação?
227. **A**: já.
228. **A**: não
229. **P**: Nós temos duas figuras de 4 lados. Qual valor dos outros dois lados da primeira figura?
230. *Obs.: o professor se refere aos lados que ele não nomeou.*
231. **P**: Pessoal, qual valor desses dois lados aqui?
232. **A**: 1
233. **A**: 2a?
234. **P**: qual a representação algébrica desses dois lados?
235. **A**: 2a e b + 3
236. **P**: Vamos imaginar, é claro talvez a nossa figura não esta tão perfeita, mas imaginamos que os lados aqui são, os lados paralelos eles são?
237. **A**: Iguais
238. **P**: Portinho e Eduardo. Os lados paralelos eles são iguais. Então isso significa que essa medida também vale a, quanto?
239. **As**: b + 3
240. **P**: E esse lado também, já que são paralelos, se eles são paralelos então acreditamos que a medida desse lado também será? 2a. Como é que podemos representar o perímetro dessa figura aqui? O perímetro é a soma de todos os lados né? Começando pelo lado a teremos
241. **A**: 4a
242. **A**: 2a + b + 3
243. **P**: 2a + b + 3
244. **A**: e mais 2a
245. **P**: E mais, porque né, imaginemos que são paralelos e tem o mesmo comprimento. E mais b + 3. Quantos lados, como é que podemos representar ainda? Reduzir estes termos? O 7ª série? Quais os termos que nós podemos agrupar ali? Ora nós podemos agrupar quem aqui? Menino, a Jéssica Padilha, Willian da Silva. Estamos numa nova situação aqui, então vamos pensar juntos. Quais os termos que podemos agrupar aqui? Olha, nós temos 2a e? São valores iguais?
246. **A**: são
247. **P**: então nós podemos?
248. **A**: somar
249. **P**: somar. Quanto é que dá?
250. **A**: 4a
251. **P**: 4 vezes o de a
252. **A**: e b + 6

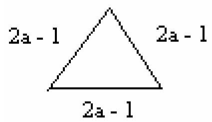
253. **P**: E b. Quantas medidas de b nós temos?
254. **As**: 2
255. **P**: e teremos?
256. **A**: 2b e 3 + 3, por causa que o b esta escrito duas vezes e o 3 também
257. **P**: compreendeu? Olha só, porque nós temos 4a , porque temos 2 e temos mais 2a, então posso agrupa-los como sendo? Então tem 2 vezes o a mais 2 vezes o a ficamos com 4a. Pensando no b eu tenho uma mais uma letra b.. e a número 6, 3 + 3 teremos?
258. **As**: 6
259. **P**: E essa outra figura?
260. **A**: professor já tenho a resposta será 4a +
261. **P**: Esta representação esta envolvendo sinal negativo. Qual a representação algébrica desse comprimento? Vamos representar a soma dos quatro lados? Como é que vai ficar isso? E esse lado aqui? E o outro lado?
262. *Obs.: o professor escreve: P = a – 2 + a – 2 + a – 2 + a – 2. Depois disso o professor interrompe a aula para retirar a revista de um aluno.*
263. **P**: Pessoal, vamos organizar esta representação algébrica? Vamos reduzir ela? Ora nós observamos que, a figura a né, ou seja, os lados a, são em torno de?
264. **A**: 4
265. **P**: 4a. E agora o menos 2, menos 2. Quanto é que vai dar essa representação?
266. **A**: negativo 8
267. **A**: -8
268. **A**: só isso prof?
269. **P**: É. Muito bem.
270. *Obs.: professor passa em silêncio no quadro o seguinte*:

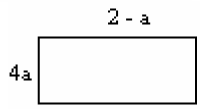
Atividades

Represente algebricamente o perímetro das figuras:

a)


b)


c)


d)


Escreva o valor numérico das expressões:

a) $\frac{x}{y} - \frac{a}{b} \quad se \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{x}{y} \quad se \quad \begin{cases} a = 4 & b = 3 \\ c = 5 & d = 6 \\ x = 1 & y = 1 \end{cases}$

b) $\sqrt{(x.y)} \quad se \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$

d) $x^2 - 3y + a^3 \quad se \quad \begin{cases} a = 3 \\ x = 6 \\ y = -4 \end{cases}$

271. *Obs.: o professor dá um tempo para os alunos copiarem, depois passeia pela sala olhando os cadernos e, com alguns alunos, discute os exercícios.*
272. **P**: Gente a diretora, por favor.
273. *Obs.: a diretora interrompe para dar recados.*
274. **P**: Pessoal hoje as aulas são de, são menores?
275. **A**: Deixa pra fazer em casa professor
276. **P**: Não, não é para casa não, é para agora.

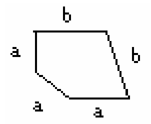
277. *Obs.: um aluno fala algo que não consegui escutar.*
278. **P**: Não aí apresentaremos outro conteúdo. Isso é a parte inicial de álgebra. Daí nós vamos ver depois multiplicação. Definição. Meninos e meninas estão dando certos os exercícios?
279. *Obs.: o professor da mais um tempo para resolverem os exercícios.*
280. **P**: Como é que ta a resolução aí? O 7ª série vamos sentar, vamos sentar. E aguardem fazendo atividades. Pode apagar o quadro?
281. **As**: pode

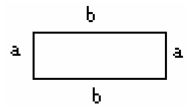
No quadro ficou assim:
2.x + 3.y, x = 3 e y = 2
2.3 + 3.(-2)
6 + (-6)
6 – 6
0

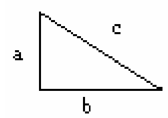
Atividades

Para pensar e resolver:

1. Qual a expressão algébrica que representa o perímetro das figuras.

a) 

b) 

c) 

2. Ache o valor numérico das expressões algébricas:

$$a)\ 2x+2y \quad se \quad \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases} \qquad c)\ \frac{a+b}{c} \quad se \quad \begin{matrix} a=4 \\ b=5 \\ c=3 \end{matrix}$$

$$b)\ 3a-b+c \quad se \quad \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=-4 \end{cases} \qquad d)\ \sqrt{(x+y)} \quad se \quad \begin{cases} x=8 \\ y=8 \end{cases}$$

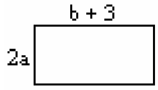
1. a) P = a + a + a + b + b
   P = 3a + 2b
   b) P = a + b + a + b
   P = 2a + 2b
   c) P = 1a + 1b + 1c
   P = a + b + c

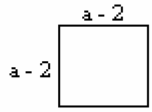
2. a) 2.x + 2.y
   2.(-3) + 2.4
   -6 + 8
   2
   b) 3.a – b + c
   3.2 – 3 – 4
   6 – 3 – 4
   3 – 4 = -1

   c) $\frac{a+b}{c} = \frac{4+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$
   d) $\sqrt{(x+y)}$
   $\sqrt{(8+8)} = \sqrt{16} = 4$

Outra situação

Qual a expressão algébrica do perímetro da figura?

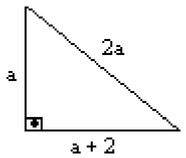


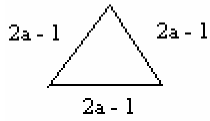


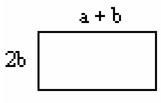
P = 2a + b + 3 + 2a + b + 3 P = a – 2 + a – 2 + a – 2 + a – 2
P = 4a + 2b + 6 P = 4a – 8

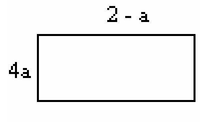
Atividades

1. Represente algebricamente o perímetro das figuras:

a)


c)


b)


d)


2. Escreva o valor numérico das expressões:

a) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{a}{b}$ se $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

c) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} - \dfrac{x}{y}$ se $\begin{cases} a = 4 & b = 3 \\ c = 5 & d = 6 \\ x = 1 & y = 1 \end{cases}$

b) $\sqrt{(x.y)}$ se $\begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases}$

d) $x^2 - 3y + a^3$ se $\begin{cases} a = 3 \\ x = 6 \\ y = -4 \end{cases}$

Entrevista com o professor (O: observador):

O: Qual foi seu objetivo na aula de hoje?

P: Meu objetivo hoje foi fazer eles trabalharem com a álgebra. Na aula de exercício né. E dar mesmo trabalhar, conhecer os termos semelhantes, o que que ele pode agrupar o que não pode.

O: E você acha que eles alcançaram esse objetivo?

P: Não por completo. Eu percebi que assim, se os termos estão sós eles conseguem, assim a, conseguem compreender rápido o que eles podem ser agrupados, vai ser representado de uma forma. Mas se o elemento tem um número a mais multiplicando já sentem dificuldade principalmente nos exercícios eu percebi isso, por exemplo, 2a + a eles não conseguiram, que eles podem ser agrupados na forma de 3 as.

O: O que você fez para tentar sanar esta dificuldade que você disse que acabou de observar?

P: Pois é, eu não imaginava que surgiria. Daí eu tentei fazer eles observassem assim que, como é uma representação de um valor qualquer então, eu tentei mostrar o seguinte que você tem um termo de a, mais dois termos de a e mais um termo de a, então qual é o total disso. Agrupando esses termos separados que estão, qual o valor disso. Alguma coisa eu consegui, consegui assim, houve uma pequena assimilação disso. Provavelmente na próxima aula vai ter bastante questionamento.

O: Toda atividade que você preparou você aplicou ali ou teve alguma coisa que teve de fazer de última hora?

P: Toda ela foi que eu tinha pensado já.

O: Como agora já preparasse tuas aulas, gostaria de saber qual é o teu objetivo do planejamento, das aulas de 7ª série em relação a álgebra.

P: Meu objetivo assim é, estarem familiarizados com letras e números que a partir de agora eu quero trabalhar bastante isso. Que eles saibam ler as operações de multiplicação que tem entre um número e outro, até mesmo não sei se você observou, a questão do mais, mais e menos 4 né, eles tem bastante dificuldade nisso e, ajuda-los no máximo assim a, a ter, a gostarem um

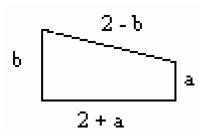
pouco da matemática né. Claro que a matemática nunca vai ser aquela flor linda e maravilhosa para os alunos né, nem deveria ser, afinal de contas é conhecimento científico né, nem tudo eles vão gostar. Mas eu gostaria assim, que eles se familiarizassem mais né com a matemática. Ficassem mais a vontade com a matemática.
O: Preparando as aulas você percebeu se precisaria, se teria alguma atividade em particular, assim, que você acha importante nesse momento ser aplicado?
P: Não, não percebi.
O: O que você vai mais focar na sala de aula? O que vai ser mais focado nas aulas de álgebra?
P: As operações. Até mesmo com denominadores, o mínimo múltiplo comum, isso eu vou focar bastante.
O: Diga algum tipo de atividade que você vai fazer para focar bem isso?
P: Um tipo de atividade? Nos próprios exercícios né, trabalhar a questão dos sinais mesmo, números com sinais diferentes. Eles a, somarem com sinais iguais. Fazer essa interpretação né, tipo, quando os sinais são iguais, eles confundem muito a soma com a multiplicação. Essas coisas.
O: E não pensasse em nenhuma atividade diferente pra eles interpretarem, já que você fala de interpretação, de leitura?
P: Não, não cheguei a pensar.

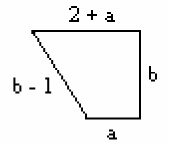
ANEXO 5

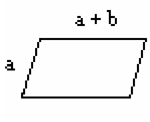
Protocolo da aula 5 do dia 11/04/05

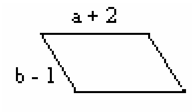
P: professor da classe **A(s)**: aluno(s)[64] *Obs.*: notas do observador.

1. **P**: Pessoal, precisamos dar continuidade e marcar uma avaliação também. Pessoal como é que foram. As atividades.
2. **A**: professor, esqueci o caderno.
3. **A**: professor eu não fiz.
4. **A**: eu também não.
5. *Obs.: o professor escreve no quadro: a = 3; b = 5.*

a) 

b) 

c) 

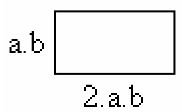
d) 

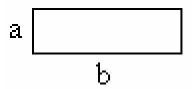
6. **A**: professor não vai olhar protessor?
7. **P**: Todos fizeram mesmo?
8. *Obs.: o professor olha os cadernos dos alunos.*
9. **A**: eu não fiz
10. **A**: eu fiz professor
11. **P**: Pessoal como é que vocês resolveram? Qual o valor numérico, atenção. 7ª série. Ta bastante calor né? Mas é preciso. 7ª série. Vamos lá, 7ª série, concentre-se no seu caderno. No seu caderno, por favor. O valor numérico do perímetro da figura, qual vai ser? O valor numérico do perímetro.
12. **A**: 2 – b + a
13. *Obs.: Professor começa a escrever: P = 2 – b + a + 2 + a + b.*
14. **P**: Pessoal nós podemos.
15. **A**: o professor faltou o b
16. **P**: Nós podemos substituir. Você pode substituir o a por?
17. **A**: 3
18. **P**: e o b por?
19. **A**: 5
20. **A**: o professor é positivo o b
21. *Obs.: professor tinha colocado no quadro o b negativo e o aluno chamou atenção.*
22. **P**: 2 – 5 + 3 + 2 + 3 + 5. Não copiou? Quanto é que vai ser isto? 2 – 5?
23. **A**: 3
24. **P**: 3 + 2? 3 + 2? 3 + 2?
25. **As**: 5

[64] Quando tivermos dois A seguidos, representam alunos diferentes.

26. **P**: 5 + 8, + 3
27. *Obs.: professor se enganou no 8, por isso em seguida arrumou falando 3.*
28. **A**: 8
29. **A**: 5 + 3, 8 + 5, 13
30. **P**: -3 + 5
31. **A**: 2
32. **P**: 2 + 8
33. **As**: 10
34. **P**: 10 unidades né.
35. **A**: o professor e não pode fazer assim ó. 2 + 2, 3 + 3
36. *Obs.: professor faz sinal com a cabeça dizendo que sim.*
37. **A**: mas ali eu somei e não deu o mesmo número.
38. **P**: 2 + 2?
39. **A**: 4, ai somou
40. **P**: +3?
41. **A**: não, ele colocou.
42. **P**: mas vai dar, olha só. – 5 + 5?
43. **A**: o professor, mas o meu não deu o mesmo número.
44. **P**: Pessoal, surgiu uma, um questionamento aqui. Gabriela. Gabriela e Bruno. Pessoal uma dúvida ali na, (nome de uma aluna). Se você somar os números né, o 2 + o 2 você vai ter?
45. **A**: 4
46. *Obs.: professor escreve P = 4.*
47. **P**: o 3 + o 3?
48. **A**: 6
49. *Obs.: professor escreve P = 4 + 6.*
50. **P**: -5 + 5?
51. **A**: zero
52. *Obs.: professor não escreve e conclui.*
53. **P**: zero.Mesmo assim vai ser 10.
54. *Obs.: professor escreve P = 4 + 6; P = 10.*
55. **A**: deu igual a mesma coisa
56. **P**: unidades de comprimento. Exercício b. Pessoal um questionamento lá do exercício lá? Exercício b. 2 + a + b, b – 1. Qual valor de a e b?
57. **A**: do a é 3
58. **P**: o '*a*' queremos que seja? 3
59. **A**: 3
60. **P**: o b substituo por? 5. O a novamente 3 e menos 1. Quanto que vai dar o somatório aqui? 2 + 3?
61. **A**: 5
62. **P**: 5 + 3?
63. **A**: 8
64. **P**: 5 – 1?
65. **A**: 4
66. **P**: quanto é que vai dar esse somatório? 8 + 5?
67. **A**: vai dar 17?
68. **A**: 13
69. **P**: 13.
70. *Obs.: professor termina o exercício escrevendo no quadro sem perguntar, P = 13 + 4; P = 17 unidades de comprimento.*
71. **P**: e no exercício c?

72. **A**: o professor não faz mal colocar assim ó, a conta foi diferente mas o resultado foi igual?
73. **P**: Não. Lados paralelos são? Iguais. 7ª série, lados paralelos são? Considerados iguais. Então temos a + b, quanto é que vai ser esse lado?
74. **A**: a
75. **P**: +, aqui?
76. **As**: a + b
77. **P**: e +? Então temos a representação algébrica do perímetro. O ‘a’ podemos substituir.
78. **A**: por 3.
79. **As**: 3
80. **P**: e o b?
81. **As**: 5
82. *Obs.: professor escreve P = 3 + 5 + 3 + 3 +5 + 3.*
83. **P**: Quanto é que vai dar esse somatório? O número 3, 5 teremos?
84. **A**: 8
85. **P**: 3, 3?
86. **A**: 6
87. **P**: 5, 3?
88. **A**: 8
89. **P**: e 6?
90. *Obs.: professor conclui no quadro escrevendo P = 14 + 8, P = 22 unidades de comprimento.*
91. **A**: Tem que colocar esse negócio professor? Unidade de comprimento?
92. **P**: claro, se não o perímetro trata-se de uma figura, né, de uma face de uma figura e ela tem medidas essa figura.
93. **A**: mas tem que coloca?
94. **P**: sim. Se nós estivéssemos usando uma escala métrica daí ficaria em metros né, ou centímetros. Figura d ... na c, os lados paralelos continuam como sendo? Iguais.
95. *Obs.: professor inicia a escrita: P = a + 2 + b – 1 + a + 2 + b – 1.*
96. **P**: b mais –1, e mais b – 1. Qual valor numérico de a?
97. **As**: 3
98. **P**: valor numérico de b?
99. **As**: 5
100. **P**: Atenção aqui. 6ª, 7ª série. Somamos 3.
101. **As**: 5
102. *Obs.: professor aponta para 3 + 2.*
103. **A**: 4
104. **P**: 4
105. **A**: 5 e 4
106. **A**: 18
107. **P**: e 9 com +9?
108. **A**: dá 18 prof.
109. *Obs.: professor conclui escrevendo P = 18 unidades de comprimento. Um aluno o procura em sua mesa e falam olhando para o caderno.*
110. **A**: ..
111. **P**: há, você reduz os termos, esta correto, está correto. Você agrupa os termos semelhantes primeiro pra depois...
112. **A**: professor não vai fazer a chamada?
113. **P**: vou fazer chamada sim.
114. *Obs.: professor faz a chamada observando e as vezes perguntando sobre alguém.*
115. **P**: pode apagar aqui né?

116. **A**: não
117. **P**: Vamos ver uma outra situação de expressões algébricas. Semana que vem provavelmente então.
118. *Obs.: professor faz gestos que dizem que vai ter uma prova e espera mais um pouco. Depois começa a escrever no quadro*:
Se: ab + $a^2.b^2$ e a = 3; b = -1. Qual será o valor numérico de a.b + $a^2.b^2$?
Se:


Qual a representação algébrica do perímetro da figura?
Se:


Qual a representação algébrica da área da figura?
119. *Obs.: professor espera alunos copiarem.*
120. **A**: o professor ali ó, é a e pontinho b?
121. **P**: sim, é a multiplicação entre a e b. a vezes b mais a ao quadrado vezes b ao quadrado.
122. **A**: o professor isso aí é pra fazer?
123. **P**: não, não, mas se quiser ir fazendo pode fazer.
124. **A**: não, não
125. *Obs.: professor fica chamando a atenção de alguns alunos.*
126. **A**: precisa resolver professor?
127. **P**: não, não, por enquanto é só copiar. Pessoal, podemos? 7ª série, aqui nós temos olha só. Uma multiplicação de dois números que estão representados pelas letras a e?
128. **A**: b
129. **P**: aqui é uma multiplicação, onde todos os termos estão levados a? Potência. O valor numérico dessa representação? Como determinar o valor numérico dessa representação? Vamos substituir o a por?
130. **As**: 3
131. **P**: 3. Substituímos a letra a pelo número?
132. **As**: 3
133. **P**: A letra b representa o número?
134. **A**: -1
135. **P**: então vamos colocá-lo entre? Parênteses. E a ao quadrado? 3? 7ª série, preste atenção aqui... E menos 1 também ao quadrado.
136. *Obs.: a expressão ficou assim: $3.(-1) + (3)^2.(-1)^2$.*
137. **P**: Multiplicamos aqui, 3 vezes –1?
138. **As**: 3
139. **A**: -3
140. **P**: 3 ao quadrado?
141. **As**: 9
142. **P**: e –1 ao quadrado? –1 ao quadrado?
143. **A**: -2
144. **A**: -1
145. *Obs.: professor tem no quadro o seguinte: -3 + 9.*
146. **P**: pessoal o que significa o expoente quadrado aqui? Que vocês devem fazer 3 vezes?
147. **A**: 3
148. *Obs.: o professor apaga o 9 e escreve: -3 + (3.3).*

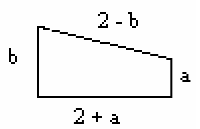
149. **P**: e o –1 ao quadrado? -1 vezes –1. Se nós temos uma multiplicação esquecemos de fazer a regra dos?
150. *Obs.: o professor completa: -3 + (3.3). (-1. –1).*
151. **A**: Sinais
152. **P**: -1 vezes –1?
153. **A**: daí fica 1
154. *Obs.: Temos a escrita: -3 + 9.1 onde o prof. coloca sem perguntar esta outra: -3 + 9.*
155. **P**: -3 mais 9?
156. **As**: 6
157. **A**: professor não entendi essa parte ali ó, 3 vezes
158. **P**: primeiro você multiplica esses valores aqui, 3.3?
159. **A**: não professor ali na primeira, 3 vezes –1.
160. **P**: 3 vezes 1? 3. Aqui é os sinais da multiplicação. + vezes menos permanece o sinal? Gente e aqui nesse caso?
161. *Obs.: professor esta falando do item b.*
162. **P**: Como é que vai ficar a representação algébrica dessa figura? 7ª série presta atenção aqui. João Marcos. Qual é a representação algébrica do perímetro dessa figura? Lembramos que, lados paralelos são? Tem a mesma medida. Então ab, nós vamos soma aqui ab +
163. **A**: 2ab + ab + 2ab
164. **P**: quais são os termos que nós podemos agrupar aqui? Olha, uma medida de ab com outra de ab temos quantas? Temos? 2ab. Gente, 2ab mais 2ab?
165. **As**: 4ab
166. **P**: 2ab mais 4ab?
167. **As**: 6ab
168. **P**: Apenas agrupamos os termos semelhantes. Nós temos uma figura gente, de face retangular. Como é que nós medimos a área dessa figura?
169. **A**: a + b + a + b
170. **A**: lado vezes lado
171. **P**: isso aí é o perímetro, a soma dos lados.
172. *Obs.: professor escreve no quadro: Obs.: perímetro é diferente de área.*
173. **P**: qual a área de uma figura de face retangular? Gente perímetro é diferente da área. O que é o perímetro? Vocês lembram o que é o perímetro?
174. **A**: é a soma dos lados.
175. **P**: seria a + b + a + b
176. *Obs.: professor escreve P = a + b + a + b unidades de comprimento.*
177. **P**: e a área? Perímetro é a soma dos 4 lados. Se a figura é de base quadrada ou retangular. Se a figura for. E a área dessa figura como é que nós podemos medir? é a multiplicação. Lado vezes lado.
178. *Obs.: professor escreve: A = multiplicação.*
Lado x lado
179. **P**: Como é que vai ficar a multiplicação aqui em gente, atenção?
180. **A**: a vezes b vezes a vezes b.
181. **P**: lado vezes lado. Um lado mede?
182. **A**: a
183. **P**: Se eles são iguais estou representando apenas um a. E o outro lado mede?
184. **As**: b
185. **P**: b. Qual a unidade da área gente? Lembram qual unidade que nós usamos pra área? É a mesma unidade de comprimento? O perímetro é a unidade de?

186. **A**: unidade de comprimento.
187. **P**: e a área gente é a unidade de?é a unidade quadrada.Você deve saber diferenciar quando é perímetro e área.
188. *Obs.: professor passa mais um exercício.*
189. **P**: um quadrado de lado a. Seja um quadrado de lado a.
190. ...
191. **P**: pessoal, o que significa um quadrado de lado a?
192. **A**: é um quadrado com todos os lados iguais.
193. **P**: Se a base da figura é quadrada significa que todos os lados vai ser?
194. **A**: a
195. **P**: iguais. Vamos representar a área da figura então.
196. ...
197. **P**: se o lado mede a, isso significa que a área do quadrado vai ser a vezes?
198. **A**: a
199. **P**: lembram gente? Multiplicação de potências com bases iguais? Da multiplicação de potências com bases iguais?
200. ...

Obs.: Daqui em diante é impossível de escutar, a pilha estava fraca e não gravou bem. Mas tem um momento em que o prof coloca no quadro: A = a . a; A = a^2 e uma aluna pergunta se não pode ser 2.a, o prof. responde que não, pois 2.a seria a+a.

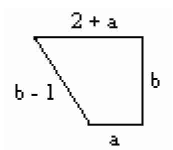
No quadro ficou assim:

a = 3 b = 5

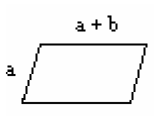
a) 

P = 2 – b + a + 2 + a + b
P = 2 – 5 + 3 + 2 + 3 + 5
P = - 3 + 5 + 8
P = 2 + 8
P = 10 unidades de comprimento

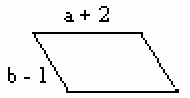
P = 4 + 6
P = 10

b) 

P = 2 + a + b + a + b – 1
P = 2 + 3 + 5 + 3 + 5 – 1
P = 5 + 8 + 4
P = 13 + 4
P = 17 unidades de comprimento

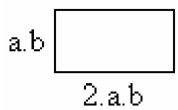
c) 

P = a + b + a + a + b + a
P = 3 + 5 + 3 + 3 + 5 + 3
P = 8 + 6 + 8
P = 14 + 8
P = 22 unidades de comprimento

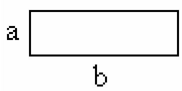
d) 

P = a + 2 + b – 1 + a + 2 + b – 1
P = 3 + 2 + 5 – 1 + 3 + 2 + 5 – 1
P = 5 + 4 + 5 + 4
P = 9 + 9
P = 18 unidades de comprimento

Se: $ab + a^2.b^2$ e a = 3; b = -1. Qual será o valor numérico de $ab + a^2.b^2$?
$ab + a^2.b^2$
$3.(-1) + (3)^2.(-1)^2$
-3 + (3.3).(-1.-1)
-3 + 9.1
-3 + 9
6

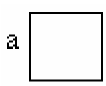
Se: 

Qual a representação algébrica do perímetro da figura?
P = a.b + 2.a.b + a.b + 2.a.b
P = 2.a.b + 4.a.b
P = 6.a.b

Se: 

Qual a representação algébrica da área da figura?
Obs: perímetro é diferente de área
P = a + b + a + b unidade de comprimento
A = multiplicação
lado x lado
A = a.b unidade quadrada de área

Seja o quadrado de lado “a”. Como representar algebricamente a área dessa figura?



A = ?
A = a.a
A = a^2 unidades de área

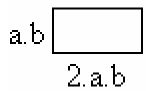
Entrevista com o professor (O: observador):
O: Seu objetivo de hoje?
P: Era começar a trabalhar com a área de figuras. Com face retangular e com face quadrada.
O: Percebeu alguma coisa de diferente na turma?

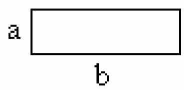
P: Não eles estão mais, já estão um pouco mais acostumados com letras e. Apesar de que eu estou percebendo a questão de sinais mesmo, quando dá sinal negativo, multiplicação
O: Alguma dificuldade neste momento, agora?
P: Não, não percebi.

ANEXO 6

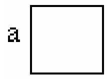
Protocolo das aulas 6 e 7 do dia 13/04/05

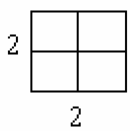
P: professor da classe **A(s)**: aluno(s)[65] *Obs.*: notas do observador.

1. **P**: Vamos as nossas atividades de hoje? O seu Augusto, você não pode arrastar assim as carteiras. Nós vamos ver a representação algébrica da área de uma figura de face? Quadrada ou face retangular. Nós vimos um exemplo, não é mesmo?
2. **A**: sim
3. **P**: Vamos refazer o exemplo anterior só pra nós nos sintonizarmos. Pessoal, isso aqui você já tem em seu caderno não é?
4. *Obs.: o professor copia a seguinte figura no quadro*: 

5. **P**: Pessoal, aula passada nós vimos essa figura aqui de lado *ab* e de lado *2ab*
6. **A**: o professor, isso o professor já passou.
7. **P**: Sim só pra retomarmos. Pessoal nesse exemplo, nessa situação, o que nós 6ª, 7ª série, determinamos nessa atividade aqui? O perímetro da? Figura, ou seja, o perímetro é a soma dos quatro?
8. **As**: lados
9. **P**: Lados. Lados paralelos são lados que tem a mesma? Medida, aliás, numa figura regular. Então temos uma ab, outro lado que vai ser 2ab, o outro lado será ab e mais?
10. **As**: 2ab
11. *Obs.: o professor escreve enquanto fala: P = a.b + 2.a.b + a.b + 2.a.b.*
12. **P**: O perímetro é a soma, então nós temos que somar, não é mesmo? Aí você somou. Aqui as medidas de *ab*, aqui você tem uma medida né? Que é *ab*. Aqui você tem 2 medidas do mesmo *ab*, aqui você tem mais uma e mais duas medidas.
13. *Obs.: o professor falou isso olhando para a expressão do perímetro*.
14. **P**: O total você somou e deu quanto lá?
15. **A**: 2ab?
16. **P**: Deu um total de 6ab.
17. *Obs.: deu um pequeno tumulto neste momento porque o professor pulou uma parte da aula anterior, ele colocou direto 6ab sem fazer o passo: P = 2.a.b + 4.a.b. Teve então que explicar a soma*.
18. **P**: Vamos ver aqui. 3ab + 3ab. O total soma quanto?
19. **A**: 6ab
20. **P**: Nesse último exercício o que nós pedimos aqui? Para você determinar o perímetro, qual vai ser o perímetro dessa figura?
21. *Obs.: Nesse momento a figura é*: 

[65] Quando tivermos dois A seguidos, representam alunos diferentes.

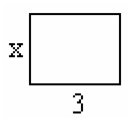
22. **A**: a
23. **P**: É a soma dos quatro lados, então a, a+b, mais a, mais b. Atenção aqui 7ª série. Quanto é que dá a soma dos dois a, dos lados iguais aqui?
24. **A**: 2a
25. **P**: e?
26. **A**: +2b
27. **A**: da 4ab
28. **P**: São medidas diferentes né, olha só. O a e o b representam medidas diferentes que nós não conhecemos e nós não podemos somá-los. Eu pedi para representar a área dessa figura? Como é que nós representamos à área? Hein gente. O que é a área de uma figura? No caso a área de uma figura de base retangular?
29. **A**: *a* vezes *b*
30. **P**: é a multiplicação de dois?
31. **A**: números
32. **P**: dos seus lados. Então vai ser o lado *a* vezes o lado? *b*. E aqui, foi a última atividade que nós fizemos.
33. *Obs.: o professor se refere a figura*: 

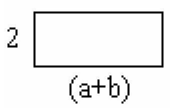
34. **P**: Pessoal, aqui nós temos uma figura de mesmo lado. Como é que vai ficar determinado o perímetro dessa figura?
35. **A**: *a* vezes *a*
36. **P**: o perímetro primeiro.
37. **A**: a mais a mais a mais a
38. **A**: *a* vezes *a* vezes *a* vezes *a*
39. **P**: Não o perímetro é sempre relativo a? Soma. Então termos, unidade de comprimento. Qual a área dessa figura?
40. **A**: *a* vezes *a*
41. **P**: Meninos, Willian e companhia. a vezes. Daí nós lembramos sobre, quando eu multiplico bases iguais o que nós fazemos?
42. **A**: a sobre 2
43. **P**: Conserva a base e somamos os seus? Expoentes. Unidade de área.
44. **A**: Professor vai ter prova já?
45. **P**: Sim, vamos marcar.
46. *Obs.: nesse momento alguns alunos discutem que não precisa de prova só atividades está bom.*
47. **P**: Pessoal algum questionamento aqui?
48. **A**: não.
49. **A**: o professor quando for perímetro eu somo a
50. **P**: o comprimento de cada lado
51. **A**: o comprimento. E quando for área eu multiplico?
52. **P**: multiplica dois lados apenas.
53. **A**: Há, os outros dois não?
54. **P**: eles são iguais né?
55. **A**: Aí, por exemplo, se eu tivesse um retângulo e fosse tirar a área eu multiplicaria, por exemplo, o a pelo b e os outros dois lados não multiplicava?
56. **P**: porque são medidas iguais né. Porque quando você multiplica pra ver a área, por exemplo, essa figura aqui, 2 por 2.
57. *Obs.: o professor fala desta figura*: 

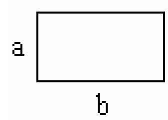
58. **P**: Você vai verificar a área o que é? 2 vezes 2, em centímetros né, que vai dar 4 centímetros quadrados. Então quando você vai multiplicar, é como se você fosse separar ele. Aí 2 e depois se coloca novamente 2, por isso que a área é 4. Você esta separando em quadrados menores de mesma medida. Por isso que não é necessário multiplicar todos os lados. Muito bem gente, então vamos dar continuidade?
59. **A**: Não professor não.
60. **P**: Porque não
61. **A**: porque não precisa passar atividade.
62. **P**: Estamos encerrando esta primeira parte.
63. *Obs.: Professor escreve no quadro*:

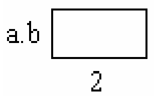
Atividades

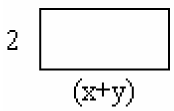
Escreva algebricamente o perímetro e a are das figuras:

a)


b)


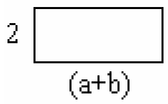
c)


d)


e)


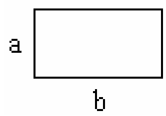
64. **P**: Seu Augusto, você não tem copiado do quadro, não tem feito as atividades e isso não é bom para sua pessoa.
65. *Obs.: Professor faz chamada silenciosamente chamando alguns nomes e depois vai na carteira dos alunos enquanto eles fazem os exercícios. De alguns alunos ele chama a atenção porque não estão fazendo*.
66. **A**: O professor não sei fazer esse negócio aqui não.
67. *Obs.: professor vai a mesa do aluno para discutirem em seu caderno*.
68. **P**: Você pode utilizar assim ó, colocar o número antes da letra. Fica melhor. Primeiro vê a definição de área.
69. *Obs.: professor continua passeando pelas carteiras dos alunos*.
70. **P**: Vamos corrigir, já terminaram?
71. **A**: Não prof.
72. **P**: Agora nós vamos marcar a avaliação já.
73. **A**: não
74. *Obs.: professor escreve no quadro: Avaliação; Conteúdo de álgebra*;
75. **P**: Que tal 6ª feira?
76. **A**: não professor.
77. *Obs.: professor marca então para 18/04/05 que é 2ª feira, mas professor e alunos ficam discutindo datas, pois no dia 18/04 já tem duas avaliações e como regra da escola isso não pode acontecer. O professor então, adia para dia 20/04/05*.
78. **P**: vamos à correção gente? Seu Marcos, seu Felipe, olhando pra cá agora. Vamos a correção gente. Vamos lá, já foi tempo suficiente para você fazer. 7ª série você precisa ouvir. 7ª série você precisa ouvir pra entender o enunciado do exercício, se não na hora da prova você não vai conseguir compreender.
79. **A**: professor fica x + 3 + x + 3
80. **P**: Pessoal você tem que entender e diferenciar o perímetro de uma figura de área né, retangular. O perímetro e a área. O que é representar o perímetro, o que é representar algebricamente primeiro? O que é representar algebricamente?
81. **A**: 2 vezes x + x?
82. **P**: É utilizar, é escrever o perímetro utilizando? A letra x. Perímetro é a soma dos quatro?
83. **As**: lados

84. **P**: Então vai ser o lado x mais
85. **A**: 3
86. **A**: eu botei 3 mais x mais 3 mais x
87. **P**: mesma coisa. x e x nós podemos agrupar.
88. *Obs.: professor esta falando da expressão:* $P = x + 3 + x + 3$.
89. **P**: 3 e 3 também podemos?
90. **A**: 6
91. **P**: agrupar e temos?
92. **As**: 6
93. **P**: unidades de comprimento. Pra nós representarmos a área?
94. **A**: x vezes x
95. **P**: quando você trabalha com área você estará multiplicando os lados.
96. **A**: 3 vezes o x
97. **P**: 3, unidades de área. O exercício b aqui.
98. *Obs.: o exercício b é*:

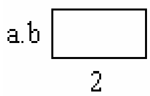


99. **P**: O exercício b, atenção. 7ª série, aí vocês dizem que não conseguem entender, mas na hora das explicações vocês ficam conversando, aí realmente você não vai compreender. É impossível você compreender. Pessoal para representar o perímetro dessa figura aqui? Temos
100. **A**: 2a
101. **P**: 2 + a + b
102. *Obs.: professor não fala, mas conclui a expressão* $P = 2 + a + b + 2 + a + b$.
103. **A**: ah professor eu botei o contrário, botei x3 e não 3x
104. *Obs.: esse aluno esta se referindo ao exercício 1.*
105. **P**: Atenção 7ª série, podemos somar os termos aqui?
106. **A**: pode
107. **P**: o termo a com o termo?
108. **A**: b
109. **P**: teremos quanto?
110. **As**: 2a
111. **P**: termo b com termo b teremos?
112. **As**: 2b
113. **A**: e 4
114. **A**: o professor eu poderia colocar, por exemplo, 4 + 2ab? Mais 2, mais 2ab
115. **P**: Você poderia fazer assim ó, 2, a mais b, assim? Assim poderia, e mais 4
116. **A**: foi assim que eu fiz
117. *Obs.: os dois se referem a expressão:* $P = 2.(a + b) + 4$.
118. **A**: o professor, eu já fiz direto, não faz mal?
119. **P**: ta tudo bem.
120. **A**: o professor pode ser também assim ó, 2, quer dizer 4 + 2 (a + b)?
121. **P**: pode. Pessoal, as formas que o pessoal fez diferente né. 4 + 2, a + b
122. *Obs.: professor aponta para as 3 opções.*
123. **A**: o professor ficou a mesma coisa
124. **A**: é a mesma coisa, só porque o 4 foi para frente.
125. **P**: E a representação da área? Como é a representação da área aqui?
126. **A**: 2 vezes a mais b

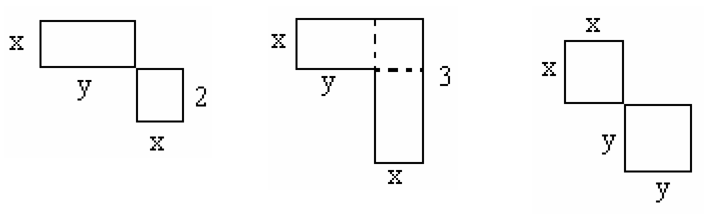
127. **P**: 2 vezes a mais b. Senhor Eduardo esta copiando? Pega seu lápis, sua caneta. Aqui são as formas diferentes que o pessoal resolveu ta? Eu resolvi dessa forma e alguns fizeram de outra maneira. Como é que você pode representar a figura aqui?
128. *Obs.: agora é relativo a figura*:



129. **A**: 2 de a mais 2 de b.
130. **P**: 2 de a
131. **A**: professor eu poderia colocar 4ab? Não né?
132. **P**: você poderia colocar assim
133. *Obs.: o professor mostra a expressão: P = 2.(a + b).*
134. **P**: assim estaria correto. E a representação da área?
135. **A**: a vezes b
136. **P**: o exercício d. como é que ficou?
137. *Obs.: o exercício d seria*:



138. **P**: pessoal qual a representação dessa figura aqui? O perímetro? Scheila como é que ficou?
139. **A**: eu fiz 2 + a + 2 x + y, a não, é, mas é.
140. **A**: é a d.
141. **A**: ah é a d, desculpa professor
142. **P**: meninas? Como é que você pode representar aqui gente?
143. **A**: 2 + 2
144. **A**: 4 + 2ab
145. **A**: o professor a área?
146. **P**: é mesmo, me esqueci. Qual a representação algébrica da área?
147. **A**: a.b
148. **P**: Representação aqui.
149. **A**: é 4 + 2 x + y professor?
150. **P**: se você tirar os parênteses vai ficar assim, 2x + y. Agora com o parênteses ele indica que, são duas medidas de x e duas de y que aparece nos dois lados.
151. **A**: ah por isso que posso juntar 2 vezes a + b parênteses?
152. *Obs.: aluna esta falando do exercício c.*
153. **P**: por isso você pode representar daquela forma. Por que olha só, você pegou um termo que é o mesmo, são iguais né, e representou como sendo duas de a e duas de b. E a representação da área?
154. **A**: 2 vezes
155. **P**: a vezes b. Pessoal eu trouxe uma outra atividade aqui para vocês fazerem.
156. **A**: não, não precisa.
157. *Obs.: professor escreve*:
2. Qual será a representação algébrica do perímetro e área das figuras:

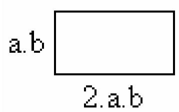


158. *Obs.: professor atende alguns alunos em sua mesa ou na carteira dele, usando o caderno do aluno. Ele está dando um tempo para os alunos resolverem as atividades.*
159. **A**: O professor o que é isso aí.

160. **P**: O gente.
161. *Obs.: professor repreende alunos que não estão copiando.*
162. **P**: Aqui vocês têm duas figuras, mas nós queremos saber qual é a representação total. A área e o? Perímetro. Aqui também pode separar em duas figuras.
163. *Obs.: professor fala da letra b.*
164. **P**: pessoal, estes 3 é para você pensar.
165. **A**: professor o que vai cair na prova mesmo?
166. **P**: tudo que nós falamos cai na prova.
167. *Obs.: Parece que há um tumulto por causa do item b, onde as medidas não estão todas expressas. Fica assim o resto da aula, com exercícios para fazer.*
168. **A**: o professor como é que vou fazer a área?
169. **P**: a área tem que fazer separado.
170. *Obs.: chega um outro aluno na mesa mostra o caderno pro professor que diz*:
171. **P**: ah ta, agora é o seguinte, você como é, como é a representação da figura, você deverá somar o perímetro dessa figura com o dessa outra figura.
172. *Obs.: chega outro aluno.*
173. P: E a área, olha só. Aqui a área dessa figura, onde é que esta a área desta outra?
174. **A**: qual? Desta aqui?
175. **P**: Qual seria a área total da figura?
176. **A**: não sei. Tem que fazer a área prof.?
177. **P**: Não, a área total né. Você tem idéia de como fazer a área total? Você pode somar a área dessas duas figuras e obter a área total.
178. *Obs.: próximo aluno fala do exercício b.*
179. **P**: então olha você teria que pensar o seguinte, essa medida é daqui até lá tirando quem? Ó essa medida vai daqui até lá. Mas quem é que eu tenho que subtrair aqui? O x.
180. **A**: ah ta
181. **P**: então você pode botar como sendo 3 menos?
182. *Obs.: outro aluno.*
183. **P**: Aqui ta correto, ta correto exceto um detalhe. Aqui você já tem essa medida total, então você não precisa repetir o x. Olha só, aqui esse x ele não precisa aparecer aqui, então é cilada, aqui vale x, aqui vale y, aqui vale 3, daqui até lá. Mas se você contar daqui até lá também vai dar 3 entendeu? Só que essa parte aqui não interessa. Então olha só, daqui até lá tem 3, só que olha só, nós temos que descontar quem? Esse comprimento aqui que é o x. Então você vai ter aqui, na verdade vai ser 3 menos quem?
184. **A**: x
185. *Obs.: outro aluno.*
186. **A**: o professor vê se ta certo aqui, deve ta errado, com certeza.
187. **P**: Como é que você fez a representação aqui? Você repetiu os termos que são lados paralelos. E esse lado aqui?
188. *Obs.: professor faz uma pergunta e sai passeando na sala para ver o trabalho dos alunos.*
189. P: pessoal como é que esta o desenvolvimento aí?

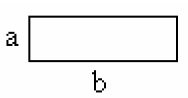
No quadro ficou assim:

Ex:

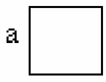


P = a.b + 2.a.b + a.b + 2.a.b
P = 6.a.b

P = 3.a.b + 3.a.b
P = 6.a.b



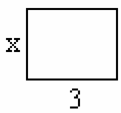
P = a + b + a + b
P = 2.a + 2.b
A = a.b

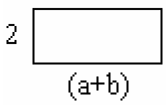


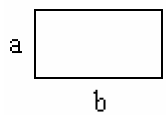
P = a + a + a + a
P = 4.a
A = a.a
A = a^2

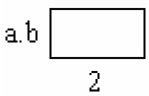
Atividades

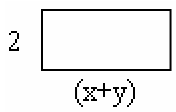
Escreva algebricamente o perímetro e a are das figuras:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Avaliação
Conteúdo de álgebra
20/04/05

a) P = x + 3 + x + 3
P = 2.x + 6
A = 3.x

b) P = 2 + a + b + 2 + a + b
P = 2a + 2b + 4
A = 2.(a + b)

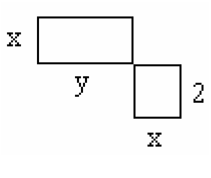
P = 2.(a + b) + 4
P = 4 + 2.(a + b)

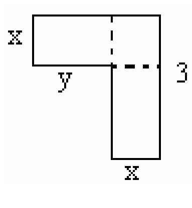
c) P = 2a + 2b
P = 2.(a + b)
A = a.b

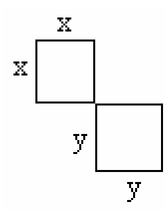
d) P = 2 + a.b + 2 + a.b
P = 4 + 2.a.b   ou   P = 2.ab + 4
A = 2.a.b

e) P = 4 + 2.(x+y)
A = 2.(x+y)

2. Qual será a representação algébrica do perímetro e área das figuras:

a) 

b) 

c) 

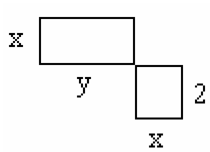
Entrevista com o professor (O: observador):
O: O objetivo pra hoje?
P: O objetivo assim era, na correção dos exercícios ver como eles desenvolveram né? Ver a criatividade deles na, como trabalhar a questão de perímetro e área de figuras.
O: Você acha que eles estão acompanhando Eliel, as atividades que estas dando?
P: Poucos alunos estão conseguindo acompanhar, porque assim ó, pelo menos, poucos eu vejo, assim, a manifestação. São poucas manifestações de, participação de contribuição, de uma outra forma de resolver os exercícios. São muito poucas. Ah e, os alunos estão fazendo, mas eu não vejo assim a participação deles efetiva na hora da correção. Defender o que ele fez, defender aquilo que ele colocou no caderno.
O: Quais são as dificuldades que estas mais encontrando na sala de aula nas suas atividades?
P: No momento acho que mais é a conversa. Sim a, eu tenho feito assim, é isso que eu te falei, não há um retorno assim, de eles manifestarem contra o que eles fizeram.Teve, até teve alunos que observei que fizeram de uma outra forma, mas só que fiz de uma outra maneira e eles apagaram achando que estava errado, aí só quando outra aluna questionou a maneira de fazer é que eles, ah tinha feito assim. Então assim, há mais dificuldade essa manifestação assim, deles abrir, não aquele aluno que diz ah não entendi nada, não, não é isso, mas assim, aquele aluno assim, que faz e quer ver porque que houve que não conseguiu acertar, ou porque que ele fez de maneira diferente, da mesma forma, do mesmo resultado.
O: Tu marcou prova para 4ª feira né?
P: 4ª feira.
O: Vai ter alguma atividade diferente daquelas ou vai só reforçar o que já fizesse?
P: só reforçar
O: aula de exercícios?
P: sim.

ANEXO 7

Protocolo da aula 8 do dia 15/04/05

P: professor da classe **A(s)**: aluno(s)[66] *Obs.*: notas do observador.

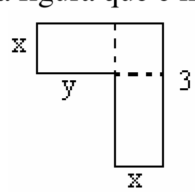
1. **P**: Qual foi a atividade da aula passada?
2. *Obs.: professor apaga o quadro e escreve*:



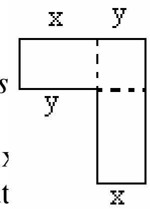
3. **P**: Pessoal nesse exercício. Vamos lá vocês que fizeram abram o seu caderno por gentileza.
4. **A**: eu fiz professor
5. **P**: É para determinar o perímetro total da figura. Onde é que está, o que é o perímetro? É essa limitação aqui toda.
6. **A**: é a soma dos lados.
7. **P**: Então o perímetro, como você tem duas figuras unidas pelo vértice aqui né, então o perímetro será a soma de todos os lados da figura não é? Aqui nós temos uma figura, aqui a outra e aqui a união das figuras.
8. *Obs.: a primeira figura o professor apontou para o retângulo de lados x e y, a outra figura seria o de lados x e 2, e a união ele apontou para o vértice que liga estas duas*.
9. **P**: Então o perímetro vai ser o que? A soma dos lados. Começando aqui por essa figura que esta em cima.
10. **A**: x + y
11. **P**: lado x mais esse lado que mede?
12. **A**: y
13. **P**: mais esse outro lado.
14. **A**: x
15. **P**: né, aqui vai valer x, x aqui também, aqui quanto gente?
16. **As**: 2
17. **P**: então vale 2 e aqui?
18. **A**: x
19. **P**: Mais?
20. **As**: 2
21. **P**: 2. E pra completar a figura, mais? Mais o que?
22. **A**: y
23. *Obs.: professor acabou de concluir a expressão:* $P = x + y + x + x + 2 + x + 2 + y$.
24. **A**: prof. porque y?
25. **P**: Porque y? Porque a medida é y. x com outro x com outro x, quanto é que nós teremos?

[66] Quando tivermos dois A seguidos, representam alunos diferentes.

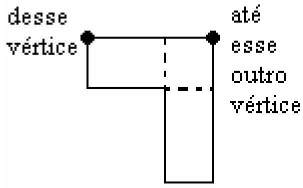
26. **A**: 4
27. **A**: 4x
28. **P**: x mais?
29. **A**: 2y
30. **P**: 2y
31. **A**: e mais 4
32. **P**: e mais. Conferiu aí?
33. **A**: ah eu errei professor
34. **A**: eu acertei
35. **P**: Gente como é que você vai determinar a área total?
36. **A**: x + y + x + y
37. **P**: como é que nós representamos a área?
38. **A**: x vezes y.
39. **P**: nós vamos ter que fazer a área separada né. A área dessa figura mais a área dessa outra figura.
40. *Obs.: professor aponta primeiro para a de lados x e y.*
41. **P**: Daí o somatório vai ser a área total. Então vamos determinar a área dessa primeira parte. É x vezes y. E essa outra área aqui?
42. **A**: 2 vezes x
43. **P**: Então mais. E mais essa figura que vai ser? x vezes y. E você vai ver do outro pedaço da figura, atenção aqui, vai ser? 2 vezes x. A área total vai ser essa primeira figura, o primeiro pedaço da figura mais?
44. **A**: área total?
45. **P**: Área total é essa do primeiro pedaço aqui soma com esse outro pedaço aqui. A área total é essa, é a soma.
46. *Obs.: professor mostra* $A_{total} = x.y + 2.x$.
47. **A**: professor precisa escrever área total?
48. **P**: Se você entender que é a soma das duas, da, dos dois pedaços?
49. **A**: professor ali nós podemos somar x + x
50. **P**: nós não podemos somar x + x porque ele esta? Pra somar teria que ter o que aqui do lado do x?
51. *Obs.: professor aponta para o 2x.*
52. **P**: O que esta faltando aqui gente, pra somar estes dois termos?
53. **A**: um y?
54. **P**: um y. Olha só, pra somar estes termos devem ser? iguais né. Deve ter a mesma quantidade de medidas, de letras né. Porque que que nós somamos os x aqui?
55. *Obs.: professor aponta para o 4.x do perímetro da mesma figura.*
56. **P**: porque eles são todos os termos?
57. **As**: iguais
58. **P**: iguais. Porque que nós somamos o y? Porque são? Iguais. Pessoal e a outra figura que você tinha.
59. **A**: professor na área ali se tivesse um y?
60. *Obs.: o aluno se refere em vez de 2x ter 2xy.*
61. **P**: Ah, se tivesse aí ficaria? Ou seja, xy, uma medida de xy mais 2. Então fica.
62. **A**: 3 mais x?
63. **P**: Não, olha. Uma medida de x com mais duas medidas. 3
64. **A**: Ah, agora entendi, obrigado.
65. **P**: Gente, aqui nós temos que observar essa figura que é importante né.
66. *Obs.: Professor esta falando da figura*:



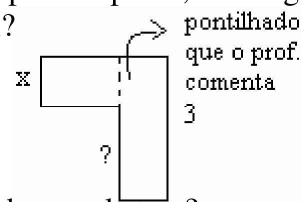
67. **P**: Quanto mede esse segmento aqui gente?
68. **A**: y
69. **P**: e esse outro segmento menor?
70. **A**: x
71. *Obs.: professor esta falando das medidas não indicadas*



72. **P**: Gente olha só. Se aqui vale y, atenção, e aqui vale x ue posso representar o comprimento total? É esse comprimento aqui mais o out ento menor.
73. *Obs.: professor esta falando do y e o menor é x.*
74. **P**: Conseguiram ver, olha só. Eu tenho a distância desse vértice até esse outro vértice aqui, né, esse segmento aqui.
75. *Obs.: professor se refere ao segmento x+y*:

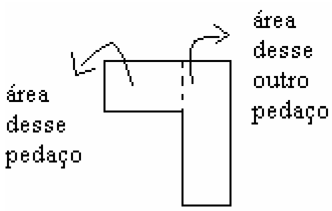


76. **P**: Ele esta dividido em duas partes não é mesmo? Embora este aqui é maior, mas ele estão. Patrícia. Embora esse lado, esse segmento é maior, mas eles são? dois pedaços diferentes.
77. *Obs.: professor diz que o y é maior.*
78. **P**: Essa primeira parte mede? y né. Isso que nós temos que te mostrar. Por isso que está tracejado aqui, pra indicar que eles têm a mesma? Medida. Esse outro segmento vai medir? x. Então se aqui mede y e aqui x eu posso representar o comprimento total, que vem deste ponto até este, como sendo? y mais o x.
79. *Obs.: deste ponto até este significa do 1º vértice ao 2º.*
80. **P**: muito bem. Como é que nós vamos representar o perímetro? Ah.
81. *Obs.: nesse momento o professor percebe que não comentou do lado 3 – x, e começa a falar nisso antes de calcular o perímetro.*
82. **P**: Se aqui mede 3, né olha só. Este de ponta a ponta, este segmento mede 3. Quanto é que mede somente este pedaço menor aqui?
83. *Obs.: professor se refere ao lado*:



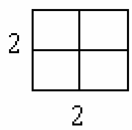
84. **A**: 3 – x
85. **P**: Esse pontilhado aqui, qual é a medida que ele tem?
86. **A**: x
87. **P**: x né. Mas olha só.
88. **A**: o professor quando tem esse pontilhado significa que mesmo dentro da figura vai ter a mesma medida?
89. **P**: Sim, é claro que na hora de fazer o perímetro nós vamos só contornar a parte que está? Fora.
90. *Obs.: nesse momento o professor contorna os segmentos que formam a figura.*
91. **P**: Gente, se aqui mede x quanto é que mede só esse pedaço menor aqui?
92. **A**: 3 – x.
93. **P**: Quanto é que mede esse pedaço menor?
94. **A**: 3 – x.
95. **P**: 3 menos 1? Não poderia ser –1, se o x fosse menos 1 poderia ser 3 menos 1.
96. **A**: professor é 3 – y?
97. **P**: o total é? Quanto o total aqui?
98. **A**: professor é 3 – y?

99. **A**: menos x
100. **P**: como aqui é x terá que ser? x. Gente o total aqui do, comprimento total é quanto? É 3, só que eu tenho que subtrair quem? Esse pedaço menor aqui que é? Se vai fazer a representação da subtração?
101. **A**: $3 - x$
102. **P**: Pra você fazer a soma do perímetro nós vamos contornar aqui né? Somente esta parte que está em? Que cor é essa aqui?
103. *Obs.: professor faz o contorno com outra cor de giz para visualizar os segmentos que formam a figura.*
104. **P**: Perímetro vai ser quem? Esse comprimento que é?
105. **As**: x
106. **P**: Esse comprimento maior?
107. **A**: $y + x$
108. **P**: Esse comprimento aqui?
109. **A**: + 3 +x +, menos + 3 – x
110. **P**: fechou né?
111. *Obs.: professor conclui a expressão:* $P = x + y + x + 3 + x + 3 - x + y$.
112. **P**: Olha só.
113. *Obs.: um aluno pede para fechar a cortina.*
114. **P**: Quanto é que nós vamos ter aqui gente? Um de x mais um de x mais outro de x, teremos?
115. **A**: 3
116. **P**: E esse aqui que é o? Menos x né. Ele é negativo e nós não podemos somar. E y? Quantos de y nós temos?
117. **A**: 2
118. **A**: 2y
119. **P**: 2. E de 3?
120. **A**: 6
121. *Obs.: professor escreveu:* $P = 3x - x + 2y + 6$.
122. **A**: o professor ali no menos ali é mais ou é menos mesmo?
123. **P**: Menos. 3 de x menos 1 de x? ficou quanto?
124. **A**: 2x.
125. **P**: como é que nós vamos representar a área?
126. **A**: não sei.
127. **P**: A área desse pedaço aqui e a área desse outro pedaço aqui.
128. *Obs.: professor se refere a*:



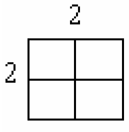
129. **A**: professor é obrigado a separar essas áreas ou eu posso?
130. **P**: Sim. É que se fosse o quadrado, se fosse fechado, não teria problema. Agora nesse, necessariamente aqui ó, você tem que fazer. Aqui a área é assim, fica lado vezes lado e aqui lado vezes lado. Depois somar. Como é que vai ficar a área dessa figura aqui gente? Desse pedaço aqui?
131. **A**: x, x+y
132. **P**: a área, área. Como é que nós representamos a área?
133. **A**: x.y
134. **A**: não primeiro coloca o 3

135. **P**: E dessa outra, e esse outro pedaço aqui?
136. **A**: 3 vezes x
137. **P**: Então como é que vai ficar a área total? É a soma da x+y, ah, x vezes y aqui, mais
138. **A**: o professor porque 3 vezes x?
139. **P**: Porque a área é o lado vezes? lado.
140. **A**: E aquele 3 – x ali?
141. **P**: Olha só, aí eu considero como se isso aqui estivesse completamente fechado.
142. *Obs.: o professor fala do retângulo de medidas x e 3.*
143. **P**: Se eu vou multiplicar aqui, como eu não tenho essa medida, na verdade é um valor diferente do que estamos trabalhando por enquanto.
144. *Obs.: à medida que o professor diz que não tem é a de 3 – x.*
145. **P**: Então já que eu já conheço esse valor de 3, e é lado vezes lado, então eu posso multiplicar esse lado por esse lado.
146. *Obs.: professor aponta para o segmento que vale x e o que vale 3.*
147. **A**: Porque eu o usei.
148. **P**: só tem utilidade na hora de você somar o comprimento. Pra área você vai usar o valor deles. E aqui também ó, x vezes y.
149. **A**: o professor essa conta é cheia dos resultados.
150. **P**: aqui pode apagar? Nossa avaliação esta marcada para?
151. **A**: 4ª feira
152. **P**: 4ª feira.
153. *Obs.: professor desenha a última figura perguntando para uma aluna como é a figura. Como ela fala medidas x e y o professor desenha dois retângulos, até que ele nota que são dois quadrados e apaga a figura desenhando novamente.*
154. **A**: é x e x de um lado e y e y do outro
155. **P**: ah também, ta bem desproporcional a figura né. Ah Scheila.
156. **A**: que tem, tava certo prof.
157. **P**: não estava desproporcional a figura. Aqui quer dizer que eles são iguais então tem que fazer iguais.
158. *Obs.: aqui quer dizer se refere as letras que estão sendo iguais.*
159. **P**: Como é que nós fazemos a representação do perímetro aqui? Meninos e meninas. A representação do perímetro?
160. **A**: 4 de x
161. **P**: 4x mais?
162. **A**: 4y
163. **P**: E a área da figura?
164. **A**: é x + y
165. **P**: a área. Como é que nós medimos a área dessa figura aqui?
166. *Obs.: professor escreve A = x.x.*
167. **P**: Multiplicação de bases iguais?
168. **A**: ah é x elevado a 2
169. **P**: conservamos a base, quem são os expoentes aqui? 1 + 1?
170. **As**: 2
171. **A**: pra calcular a área eu tenho, por exemplo, x vezes x, por exemplo, tem que multiplicar aqueles dois x ali? porque não dos 4 lados?
172. **P**: Por que lembra quando eu expliquei pra você, isso aqui ó, quando você tem por exemplo, uma figura 2 por 2.
173. *Obs.: professor relembra a figura*:



174. **P**: Significa que este lado está dividido em 2 e este outro também está dividido em? Por isso que o total dá 4. Então se eu multiplicar esses dois lados vou ter a quantidade de quadradinhos menores. Se eu multiplicar aqui também vou ter a quantidade igual. É por isso que na hora você multiplica dois lados.

175. *Obs.: professor mudou o local de onde aparece o 2 para dizer que não importa que lado pegar, mas pega só dois*:



176. **P**: Aqui ó, se você fizer 2.2.2.2 quanto é que vai dar? 8. quantos que você tem aqui no total?

177. **A**: é 16 professores

178. **P**: é 16. Tem 16 quantos você tem aqui?

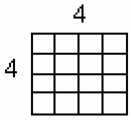
179. **A**: 4

180. **P**: 4, só dois lados.

181. **A**: só dois lados

182. **P**: só dois lados. Se fosse um 4 ai você faria, multiplica 4 vezes né.

183. *Obs.: professor desenha a figura*:

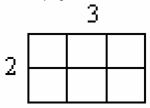


184. **P**: assim, você dividiu em 4 aí ficaria 16. Agora se você fizer 4.4.4.4 você vai ter 256 e aqui na verdade você tem apenas 16. Então você multiplica apenas, dois lados.

185. **A**: é porque os lados são iguais pra poder fazer né?

186. **P**: também, poderia ser assim, por exemplo.

187. *Obs.: professor desenha*:

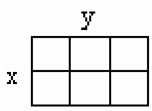


188. **P**: poderia ter assim, uma 2 e 3, por exemplo, então aqui ta dividido em 2. É a quantidade de quadradinhos envolvendo esses dois.

189. **A**: aí no caso representaria, tem que fazer x vezes x daí.

190. **P**: ah não, daí se fossem diferentes representaria apenas, x vezes y.

191. *Obs.: professor desenha*:



192. **A**: como poderia ficar 2 vezes ali né

193. **P**: não, mas daí quando nós conhecemos o valor numérico 2 vezes 3 aí você pode então multiplicar. Nós só não resolvemos, ficamos em função de x, porque nós não conhecemos qual é valor do lado x. Se nós não conhecemos, olha só nós representamos e somamos os expoentes. E a área desse outro lado aqui?

194. *Obs.: o outro lado é o quadrado de lado y.*

195. **A**: y.y que é igual a y

196. **P**: multiplicação de bases iguais você conserva a base

197. **A**: e soma os expoentes

198. *Obs.: professor faz a chamada chamando o nome só de alguns*.

199. **P**: Gente e aí? Podemos apagar aí o quadro? Pessoal estão preparados pra prova de 4ª feira?

200. **A**: o professor a prova não vai esta difícil né?

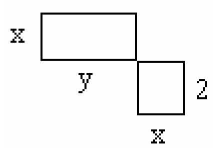
201. **P**: não. Vai ser bem facinho.

202. **A**: o professor poderia passar um exercício pra gente treinar de valor numérico né?

203. **P**: de valor numérico?

204. **A**: é.
205. **P**: Pessoal vocês lembram o que é valor numérico de uma expressão? Valor numérico, Portinho Cardoso. Lembram valor numérico de uma expressão algébrica?
206. **A**: eu não lembro mais disso. Quando o prof. passa uma matéria nova a gente esquece da outra
207. **P**: mas não é matéria nova.
208. *Obs.: professor passa um exercício*:
Valor numérico (atividade)
Se x = 3; y = -4 e a = 5, qual o valor de:
$x^3 + y^2 + 3.a$
$2.x^2 + x.y + a^2$
$\frac{x}{a} + \frac{1}{x} + y$
$\sqrt[2]{(x.x)}$
$\sqrt[2]{(y.y)}$
$\frac{x}{2} - \frac{a}{3} + \frac{a}{x}$
x^{-2}
209. **P**: pessoal se você trouxe máquina fotográfica pode usar a vontade.
210. **A**: pode usar? Vou trazer então.
211. **A**: pode usar filmadora?
212. **P**: máquina fotográfica
213. **A**: porque professor
214. **P**: não quer copiar tira foto.
215. **A**: é boa idéia professor
216. *Obs.: professor dá um tempo para alunos fazerem. Alguns vão procura-lo e falam diante do caderno sozinhos. Depois de falar com um deles ele vai ao quadro e diz*:
217. **P**: olha só
218. *Obs.: e escreve:* $(-4)^2 = -4 \,.\, -4 = +16$*, com outro aluno*:
219. **A**: professor lá o mmc deu 15, daí eu faço dividido por 2 ou é vezes 2. Dividido por 2 daí o resultado por x? é a c, a c. Daí da 15 né. Daí primeiro eu faço dividido
220. **P**: e depois multiplica
221. **A**: eu to fazendo professor te acalma
222. **P**: eu to calmo. Eu to memorizando os alunos
223. **A**: o professor me olhando com essa cara
224. **A**: vê se até aqui ta certo.
225. *Obs.: aluno mostra o caderno*.
226. **P**: raiz quadrada de 9
227. **A**: é 3
228. **P**: Então é 3 e não raiz de 3
229. **A**: então eu só coloco ali

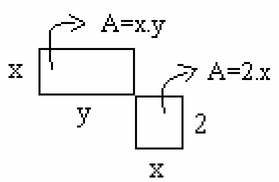
No quadro ficou assim:



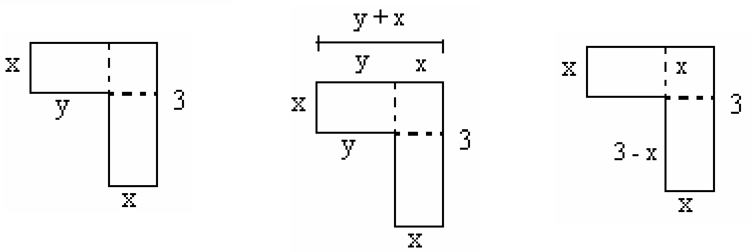
P = ?
A = ?

P = x + y + x + x + 2 + x + 2 + y

$P = 4.x + 2y + 4$
$A = x.y + 2.x$

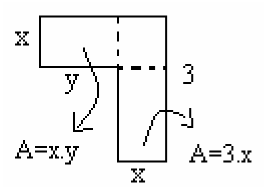


$A_{total} = x.y + 2.x$

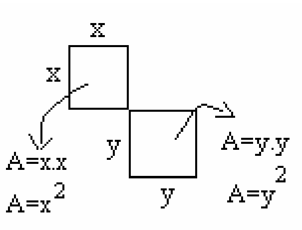


Obs: prof. desenha enquanto explica

$P = x + y + x + 3 + x + 3 - x + y$
$P = 3x - x + 2y + 6$
$P = 2x + 2y + 6$



c)



$P = 4x + 4y$
$A_{total} = x^2 + y^2$

Valor numérico (atividade)
Se x = 3; y = -4 e a = 5, qual o valor de:

a) $x^3 + y^2 + 3.a$
b) $2.x^2 + x.y + a^2$
c) $\frac{x}{a} + \frac{1}{x} + y$
d) $\sqrt[2]{(x.x)}$
e) $\sqrt[2]{(y.y)}$
f) $\frac{x}{2} - \frac{a}{3} + \frac{a}{x}$
g) x^{-2}

Entrevista com o professor (O: observador):
O: O objetivo da aula de hoje?
P: Era verificar como que foram na resolução dos exercícios né, ver se eles estão preparados para uma avaliação.
O: Você acha que eles estão?
P: Os que estão mais concentrados na aula com certeza estão preparados, achei bem interessante as discussões sobre a atuação dos exercícios né.

ANEXO 8

Avaliação aplicada pelo professor no dia 20/04/05

1) Calcule o valor numérico de cada expressão algébrica para:

$a = 9$, $b = 12$ e $c = -8$.

a) $15.a$ b) $a + 2.b$ c) $2.a + b + c$

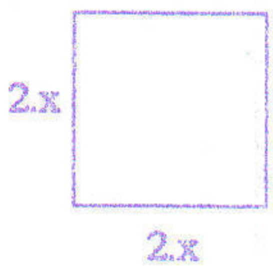
d) $3.(b - 2.a)$

2) Represente algebricamente o perímetro e a área das figuras:

a)

b)

c)



d)