

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**CENTRO SÓCIO-ECONÔMICO**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA**

**UM ESTUDO SOBRE OS FILTROS**

**HODRICK-PRESCOTT**

**E**

**BAXTER-KING**

**CRISTIANO TRINDADE DE ANGELIS**

**FLORIANÓPOLIS**

**2004**

**Cristiano Trindade de Angelis**

**UM ESTUDO SOBRE OS FILTROS**

**HODRICK-PRESCOTT**

**E**

**BAXTER-KING**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia.

**Orientador: Prof. Jean Luc Rosinger, Dr.**

**Florianópolis, fevereiro de 2004.**

# **UM ESTUDO SOBRE OS FILTROS HODRICK-PRESCOTT E BAXTER-KING**

**Cristiano Trindade de Angelis**

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Economia e aprovada, na sua forma final, pelo Curso de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

Prof. Celso Leonardo Weydmann , Dr.  
Coordenador do Curso

Apresentada à Comissão Examinadora integrada pelos professores:

---

Prof. Jean Luc Rosinger, Dr.  
Orientador

---

Prof. Victor Gomes, Dr.  
(membro)

---

Prof. Fernando Seabra, Dr.  
(membro)

## ***DEDICATÓRIA***

Quero dedicar esta dissertação para meus queridos pais Fausto e Cléia e meus irmãos Márcio, Débora, Caroline, Liane, Fábio e Patrícia.

Uma dedicatória especial ao meu pai Fausto, pelo exemplo de caráter e determinação.

## AGRADECIMENTOS

Eu agradeço primeiramente a Deus, pela força e disposição para enfrentar os desafios da pós-graduação numa área que é diferente da minha graduação.

Um agradecimento especial ao meu orientador pelos ensinamentos e dedicação e , principalmente, pela parceria que começou no estágio de docência das disciplinas de Macroeconomia II e Economia Monetária.

Agradeço também a minha namorada Daniela pela compreensão, atenção e carinho nos momentos mais difíceis.

## RESUMO

ANGELIS, Cristiano Trindade. **Um estudo sobre os filtros HP e BK.** 2004. xxxf. Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

**Orientador:** Jean Luc Rosinger, Dr.

O que estamos fazendo quando filtramos dados econômicos? Esta pergunta me levou a tentar entender os dois procedimentos mais utilizados em filtragem linear.

Para respondê-la eu faço uma resenha de literatura, buscando estudar, sintetizar e apresentar de maneira didática a Teoria de Filtragem utilizada em Macroeconomia a qual esta fundamentada na Análise Espectral.

O filtro HP retém os componentes com flutuações menores do que 32 trimestres, enquanto o filtro BK retém os componentes intermediários com flutuações entre 6 e 32 trimestres. Ambos os filtros HP e BK geram resultados espúrios, uma vez que existe uma série de problemas relacionados ao processo de filtragem. Os filtros alteram a volatilidade, a persistência e o tipo de co-movimento da série do produto com cada série estudada.

Palavras-chaves: **Filtragem, Análise Espectral, Função de Transferência, Função Resposta de Freqüência, Ganho Quadrático**

## ABSTRACT

ANGELIS, Cristiano Trindade. **Um estudo sobre os filtros HP e BK.** 2004. xxxf. Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

**Orientador:** Jean Luc Rosinger, Dr.

What are we doing when we filter economic data? This question made me understand better the two used procedures in linear filtering. To answer it I make a survey of the literature in order to study, syntetize and present in didactic way the Theory of Filtering used in Macroeconomics which is based on the Spectral Analysis. The HP filter maintains the components with fluctuations lesser than 32 trimesters, while BK filter maintains the intermediate components with fluctuations between 6 and 32 trimesters. Both filters generate spurious results, since there exists a series of problems related to the filtering process. These filters modify the volatilities, persistence and type of co-movement of the series of the product with each studied series.

Palavras-chaves: **Filtering, Spectral Analysis, Function of Transference, Function Reply of Frequency, Quadratic Gain.**

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2. A ANÁLISE ESPECTRAL E SUA UTILIDADE PARA A MEDIÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DO CICLO .....</b>	<b>12</b>
<b>2.1. PRELIMINARES MATEMÁTICOS .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1.1 Período e Frequência .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1.2 Uma revisão de números complexos .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1.3 Transformada de Fourier .....</b>	<b>14</b>
<b>2.3.DENSIDADE ESPECTRAL .....</b>	<b>15</b>
<b>2.4. ESPECTRO E FILTRO LINEAR .....</b>	<b>18</b>
<b>3. OS MÉTODOS HP E BK .....</b>	<b>20</b>
<b>3.1 FILTRO HP (HODRICK-PRESCOTT).....</b>	<b>21</b>
<b>3.2. FILTRO BK (BAXTER- KING) .....</b>	<b>26</b>
<b>3.2.1. Filtros low-pass (passa-baixo), high-pass (passa-alto) e band-pass (passa- banda).....</b>	<b>27</b>

<b>3.2.2. Construção de filtros passa-alto e passa-banda .....</b>	<b>27</b>
<b>3.2.3 A representação do filtro BK .....</b>	<b>32</b>
<b>4. APLICAÇÃO DOS FILTROS HP E BK AOS DADOS BRASILEIROS</b>	<b>37</b>
<b>5. OS PROBLEMAS COM OS FILTROS HP E BK .....</b>	<b>42</b>
<b>5.1 O FILTRO HP.....</b>	<b>43</b>
<b>5.2 O FILTRO BK .....</b>	<b>49</b>
<b>6. CONCLUSÕES .....</b>	<b>53</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>55</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>57</b>
<b>ANEXO A – ALGORÍTMO DO FILTRO HP .....</b>	<b>57</b>
<b>ANEXO B – ALGORÍTMO DO FILTRO BK .....</b>	<b>58</b>
<b>ANEXO C – SÉRIES ORIGINAIS.....</b>	<b>60</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Uma questão básica da macroeconomia é saber se as economias de mercado, quando estão operando a níveis diferentes do produto de pleno emprego, possuem mecanismos automáticos capazes de trazê-las de volta para o pleno emprego.

A especialização do trabalho na macroeconomia atribui a tarefa de estudar as forças que determinam o produto potencial (produto de pleno emprego) à teoria do crescimento econômico. Aos modelos agregativos de curto prazo, cabe explicar as razões que levam o produto a desviar-se do nível de pleno emprego dos fatores de produção.

Ocorre um hiato entre o produto efetivamente gerado e o produto potencial. Analiticamente o produto real é decomposto em duas componentes; i) tendência ( $y_t$ ) e ii) ciclo ( $y_c$ ), isto é:  $y = y_t + y_c$ . A componente de tendência é denominada de produto potencial e é estimada ( $\tilde{y}_t$ ).

A componente cíclica, o hiato do produto ( $y_c$ ), é, então, definida por:  $y_c = y - \tilde{y}_t$ .

Como calcular o produto potencial?

Desde o paper influente de Nelson e Plosser(1982), o qual sugere que séries de tempo macroeconômicas podem ser melhor caracterizadas por tendências estocásticas do que por tendências determinísticas, métodos para filtragem estocástica tem sido desenvolvidos.

Tornou-se popular utilizar o filtro de Hodrick-Prescott (HP) e o filtro *band-pass* proposto por Baxter e King (BK) para extrair o componente de ciclos de negócios de séries de tempo macroeconômicas.

O que estamos fazendo quando filtramos dados econômicos? Esta pergunta me levou a tentar entender os dois procedimentos mais utilizados em filtragem linear.

Para respondê-la eu faço uma resenha de literatura, buscando estudar, sintetizar e apresentar de maneira didática a Teoria de Filtragem utilizada em Macroeconomia a qual esta fundamentada na Análise Espectral. Espero que esta resenhe sirva de guia para os

macroeconomistas brasileiros. Conforme meu conhecimento, tal resenha inexistente na literatura brasileira.

Esse trabalho tem ,portanto, por objetivo fazer uma resenha de literatura a respeito da filtragem linear e trazer essa discussão para a comunidade acadêmica. Visa ser uma introdução fundamentada aos métodos atualmente utilizados pelos macroeconomistas para calcular o Pib potencial.

Como se trata de uma revisão de Literatura, a metodologia se resume em estudar artigos relevantes sobre a Teoria de Filtragem e fazer uma síntese, identificando pontos críticos e importantes. Além disso, é feita uma aplicação aos dados brasileiros dos filtros HP e BK, com os objetivos de verificar a eficiência dos filtros estudados e fazer uma comparação entre eles.

O trabalho está dividido 5 capítulos. O primeiro capítulo é destinado a Introdução do trabalho. O segundo capítulo tem como objetivo fazer uma síntese de Análise Espectral focando na Teoria de Filtragem Linear. O terceiro capítulo busca apresentar de maneira didática os métodos de Hodrick e Prescott (o filtro HP) e Baxter e King (o filtro BK) e aplicar os conceitos vistos na seção anterior. O quarto capítulo é destinado a aplicação dos filtros a algumas séries brasileiras a fim de fazer uma comparação entre os dados originais e os dados filtrados pelos dois filtros estudados. Finalmente no quinto capítulo busco identificar os problemas e as questões sem resposta com relação aos filtros HP e BK.

## **2. A ANÁLISE ESPECTRAL E SUA UTILIDADE PARA A MEDIÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DO CICLO**

Freqüentemente, antes de olharmos as relações entre as séries temporais, nós as filtramos e as desazonalizamos. Implicitamente, estes procedimentos significam que nós pensamos que as relações entre as séries são diferentes, a frequências diferentes e nós queremos isolar as frequências de interesse antes de analisarmos as séries, ao invés de construirmos modelos abrangentes da relação entre séries a todas as frequências.

Por exemplo, a relação entre o crescimento da oferta de moeda e a taxa de juros nominal depende da frequência considerada. A altas frequências espera-se uma relação negativa, e a baixas frequências uma relação positiva.

Um filtro linear é uma combinação linear das observações (originais) de uma variável para distintos momentos do tempo, que se realiza com a finalidade de remover algum componente “não desejado” da série original.

A análise espectral das séries de tempo é uma ferramenta útil para o estudo das propriedades da metodologia utilizada por Baxter e King (1995) e Hodrick e Prescott(1980) , pois permite pôr em evidência as implicações da aplicação de diferentes transformações sobre os dados originais que representam um conjunto de variáveis.

Por outro lado, este enfoque para o estudo das séries de tempo proporciona instrumentos analíticos necessários para a medição e a caracterização do ciclo macroeconômico que complementam as estatísticas usuais, tais como o desvio padrão, a função de autocorrelação e as correlações cruzadas com a variável que representa o ciclo de referência.

A análise no domínio das frequências ou análise espectral interpreta o processo estocástico de maneira que o comportamento no tempo de uma variável é o resultado de uma

combinação (adição) de ciclos de distintas amplitudes e durações e permite estudar de que forma as diferentes periodicidades ou frequências contribuem para a explicação da variabilidade total da série.

Esse capítulo tem como objetivo principal permitir ao leitor entender a conexão entre a teoria da filtragem e a análise espectral, e divide-se em três partes: a primeira parte é uma revisão de matemática; a segunda trata da função geradora de covariância e da densidade espectral; a terceira trata da filtragem linear, na sua relação com a densidade espectral.

Neste capítulo foram utilizados os livros de Sargent (1987) e Hamilton (1994) e as notas mimeografadas de Cochrane (1997)

## 2.1. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

Lembramos a seguir a relação entre período e frequência, uma pequena introdução de números complexos e a Transformada de Fourier.

### 2.1.1 Período e Frequência

O período  $p$  é relacionado à frequência  $w$  por  $p = 2\pi / w$ . O período  $p$  é a quantidade de tempo que a onda leva para completar um ciclo inteiro. A frequência  $w$  é a velocidade angular em radianos/tempo.

O período  $p$  é a quantidade de tempo durante o qual a onda percorre um ciclo inteiro.

### 2.1.2 Uma revisão de números complexos

Número complexo é todo número que pode ser escrito na forma  $z = a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$  é a unidade imaginária. O número real  $a$  é a parte real do número complexo  $z$  e o número real  $b$  é a parte imaginária do número complexo  $z$ , denotada por:

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

Os números complexos podem ser representados em notação exponencial, onde

$z = re^{i\mathbf{q}}$ , sendo  $r = (a^2 + b^2)^{1/2}$  o módulo do complexo e  $\mathbf{q} = \operatorname{tg}^{-1}(b/a)$  o ângulo

formado com o eixo da parte real.

Esta propriedade dos complexos é muito utilizada para expressar as funções seno e cosseno em notação exponencial, onde:

$$\cos(x) = \frac{e^{i(x)} + e^{-i(x)}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{i(x)} - e^{-i(x)}}{2i}$$

Assim, podemos representar as exponenciais complexas:

$$e^{i(x)} = \cos(x) + i \cdot \operatorname{sen}(x)$$

$$e^{-i(x)} = \cos(x) - i \cdot \operatorname{sen}(x)$$

### 2.1.3 Transformada de Fourier

Seja qualquer seqüência de números  $\{x_t\}$  tal que  $\sum_t x_t^2 < \infty$ . Nós definimos a

transformada de Fourier como a função  $f(w)$  definida no intervalo  $[-p, p]$ , tal que:

$$f(w) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-iwt} x_t \quad (1)$$

Dada  $f(w)$ , nos podemos recuperar  $x_t$ , pela Transformada Inversa de Fourier:

$$x_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p e^{iwt} f(w) dw \quad (2)$$

A transformada inversa de Fourier expressa  $x_t$  como uma soma de senos e cossenos a cada frequência  $w$ .

### 2.3.DENSIDADE ESPECTRAL

Existem basicamente duas formas de analisar séries estacionárias. A primeira é chamada análise no domínio do tempo e envolve a estimativa e interpretação das autocovariâncias  $\mathbf{g}_r$ <sup>1</sup>. A segunda é chamada análise no domínio de frequência ou análise espectral e concentra-se sobre a função  $f(w)$ . Na prática, certos tipos de análise são mais fáceis em um domínio que outro, e então a familiaridade com ambas é conveniente.

A representação espectral dos processos de covariância estacionários<sup>2</sup> é uma forma matemática rigorosa de expressar a noção de que as séries macroeconômicas contêm componentes associados com diferentes frequências de flutuação: os movimentos lentos ou de baixa frequência associados ao conceito de tendência, os de frequência média que correspondem ao ciclo, e por último, os movimentos rápidos ou de alta frequência, relacionados aos fatores irregulares.

Quais frequências são dominantes e quais são de menor importância para explicar os movimentos da série temporal  $y_t$ ?

---

<sup>1</sup> No domínio do tempo, a autocovariância de ordem  $t$ , que se anota  $\mathbf{g}_t$ , se define como  $\mathbf{g}_t = \text{cov}(y_t, y_{t-t}) = E[(y_t - \mathbf{m}_y)(y_{t-t} - \mathbf{m}_y)]$  onde  $\mathbf{m}_y = E(y_t)$ .

<sup>2</sup> Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas pela variável  $t$ . Um processo estocástico é dito ser covariância estacionário ou estacionário de segunda ordem se a média  $\mathbf{m}_t$  é independente de  $t$  e se a correlação  $\mathbf{S}_{t,s}$  depende somente de  $t-s$ .

Uma resposta para esta questão é proporcionada pela função densidade espectral, a qual é definida como a Transformada de Fourier da função autocovariância.

Seja o processo real estocástico  $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ , cuja variância é notada  $\mathbf{g}_0$  e cuja  $t$ -ésima autocovariância é notada  $\mathbf{g}_t$ , define-se  $\{\mathbf{g}_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$  como a seqüência de autocovariâncias. Se esta seqüência é absolutamente convergente, a função geradora de autocovariância será dada por:

$$g_y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_j z^j \quad (3)$$

onde o argumento da função  $z$  é um escalar complexo.

Substituindo  $z$  por  $e^{-iw}$  na função geradora de autocovariância (3), a função resultante de  $w$ ,  $s_y(w)$ , se denomina função de densidade espectral ou espectro populacional (ou simplesmente espectro) de  $y_t$ :

$$s_y(w) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_j e^{-iwj} \quad (4)$$

onde  $-\mathbf{p} < w < \mathbf{p}$ .

Desta forma, o espectro pode ser visto como uma função geradora de autocovariância e constitui um recurso para realizar a decomposição da variância do processo  $\{y_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$  em componentes não-correlacionados a cada freqüência  $w$ . A porção da variância de uma série que ocorre entre duas freqüências quaisquer é dada pela área abaixo do espectro entre essas duas freqüências.

Com efeito, valendo-se da fórmula da inversão da transformada de Fourier (infra, p.16), temos:

$$\mathbf{g}_j = \frac{1}{2\mathbf{p}} \int_{-\mathbf{p}}^{\mathbf{p}} s_y(w) e^{iwj} dw$$

Tomando  $j = 0$ , obtém-se:

$$\mathbf{g}_0 = \int_{-\mathbf{p}}^{\mathbf{p}} s_y(w) dw$$

isto é, a área abaixo do espectro no intervalo  $[-\mathbf{p}, \mathbf{p}]$ , é igual à variância de  $y_t$ .

Esta propriedade permite interpretar a variância no domínio do tempo, pois a mesma é a soma do espectro ao longo de todas as freqüências entre  $-\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}$ .

Por exemplo, se calcularmos  $\int_{-w_1}^{w_1} s_y(w) dw$  para algum  $w_1$  entre 0 e  $\mathbf{p}$ ; encontraremos a

porção da variância de  $y_t$ ; que é associada com freqüências  $w$  que são menores que  $w_1$  em

valor absoluto. De outra maneira,  $\int_{-w_1}^{w_1} s_y(w) dw$  representa a contribuição que ciclos de

freqüências menores ou iguais a  $w_1$  fazem à variância de  $y_t$ .

A variância de uma série de tempo se distribui desigualmente entre as freqüências, exceto no caso de ruído branco, de forma que o componente de crescimento, o componente do ciclo econômico (*business cycle*) e o componente estacionário contribuem de maneira diferente da mesma. (COCHRANE, 1997).

Assim, o espectro de um processo estocástico contém a mesma informação que a função geradora de autocovariâncias, pois simplesmente é uma combinação linear das autocovariâncias. Entretanto, a diferença fundamental é que a função de densidade espectral apresenta a importância dos componentes cíclicos para diferentes freqüências.

Se a seqüência de autocovariância é absolutamente convergente, o espectro populacional existe e tem um conjunto de propriedades importantes:

i) O espectro é uma função de  $w$ , não negativa, contínua e real.

ii) Como  $\cos(wt) = \cos(-wt)$ , o espectro é simétrico ao redor de  $w=0$ , de forma que  $s_y(w) = s_y(-w)$ .

iii) Como  $\cos(wt + 2\mathbf{p}k) = \cos(wt)$  para qualquer  $k$  inteiro, o espectro é uma função periódica de  $w$ :  $s_y(w) = s_y(w + 2k\mathbf{p})$ . Assim, o conhecimento do valor de  $w$  no intervalo de  $[0, \mathbf{p}]$  implica o conhecimento de  $s_y(w)$  para qualquer valor de  $w$ .

#### 2.4. ESPECTRO E FILTRO LINEAR

Seja o filtro  $b(L) = \sum_j b_j L^j$ , definimos a resposta de frequência do filtro  $b(L)$  como a Transformada de Fourier da seqüência  $\{b_j\}$ :

$$b(e^{-iw}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{-iwj}$$

O ganho do filtro  $b(L)$  é o comprimento do número complexo  $b(e^{-iw})$ , isto é,  $|b(e^{-iw})|$ .

Então, como é demonstrado por Cochrane (1997, p.71), o espectro de uma série filtrada é,  $s_y(w) = |b(e^{-iw})|^2 \cdot s_x(w)$ .

A densidade espectral  $s_y(w)$  da série filtrada  $y_t$ , onde  $y_t = b(L)x_t$ , resulta do produto da densidade espectral  $s_x(w)$  da série original pelo ganho ao quadrado  $|b(e^{-iw})|^2$ , também chamado de “função de transferência”.

O ganho quadrático (ou função de transferência do filtro linear à frequência  $w$ ) indica a extensão na qual uma média móvel aumenta ou diminui a contribuição da variância nas

séries filtradas do nível das séries originais. Em outras palavras, o ganho quadrático mede o efeito da filtragem sobre a variância de  $y_t$ .

Então, a ação sobre a série  $x_t$  está completamente determinada pela função de transferência do filtro, e é através da mesma que o filtro é analisado no domínio da frequência.

Uma função de ganho quadrático igual a um acima de uma determinada banda de frequência implica que o filtro  $b(L)$  deixa as propriedades de  $x_t$  acima de tal banda não afetada, ou melhor, acima dessa banda as propriedades estatísticas de  $x_t$  e  $y_t$  são idênticas.

De outra maneira, ganho quadrático igual a zero acima de uma determinada banda de frequência implica que a variância de  $x_t$  é completamente eliminada, a fim de que  $y_t$  não possua qualquer componente dentro dessa banda.

Finalmente, ganho quadrático igual a  $k$  implica que todos os componentes de  $x_t$  tornam-se ampliados pelo fator  $k$ .

As frequências associadas a zero referem-se a tendência, por isso os filtros que buscam extrair ou estimar o componente cíclico devem ter ganho quadrático zero a frequência zero.

### 3. MÉTODO HP E BK

Os métodos disponíveis de filtragem podem subdividir-se em três grandes grupos:

- i) os procedimentos empiricistas;
- ii) os filtros *band pass*;
- iii) os métodos baseados em modelos.

Os métodos empiricistas provêm da análise de um grande número de séries reais, mas não fazem referência explícita a nenhum modelo teórico de geração de dados.

Os filtros passa-banda caracterizam-se por requerer uma especificação a priori do componente que se deseja estudar em uma determinada banda de frequências, de forma que o procedimento consiste em extrair aquelas flutuações que fazem parte da banda de interesse e remover as restantes.

Nos métodos baseados em modelos o pesquisador especifica o processo estocástico que gera a tendência.

O método HP é um procedimento empiricista, enquanto o filtro BK é um filtro aproximado popular do filtro passa-banda ideal.

Os filtros HP e BK são os filtros mais utilizados para remover a tendência de séries temporais macroeconômicas.

Este capítulo é dividido em duas partes, sendo que a primeira trata do filtro HP e a segunda do filtro BK.

### 3.1 FILTRO HP (HODRICK-PRESCOTT)

Entre as razões para a utilização do filtro HP está o fato de que é o filtro padrão na literatura de ciclos reais de negócios (COOLEY e PRESCOTT, 1995), e que, sendo extensamente usado, existe uma literatura com as vantagens e problemas de usar tal filtro. Além disso, tem uma implementação computacional fácil, com códigos providos para uma gama extensiva de *softwares*.

Embora seja a ferramenta mais popular para separar ciclos, tendências e movimentos irregulares presentes nas séries, o filtro HP já foi sujeito a algumas críticas. Os potenciais problemas com o filtro HP são mais evidentes quando filtramos dados anuais (Baxter e King, 1995, p.21).

A escola dos Ciclos Reais de Negócios (*Real Business Cycles - RBC*) busca explicar as propriedades do ciclo econômico, isto é, as correlações entre produto, consumo, investimento, horas trabalhadas, produtividade do trabalho, etc.

Para tanto, as séries reais, e também as artificialmente produzidas na etapa de simulação, são tratadas com o filtro HP ou algum outro método de filtragem. Este filtro tem por função remover flutuações de baixa frequência nas séries, deixando apenas componentes de curto prazo.

No caso do filtro HP as séries são filtradas de forma que as frequências menores do que 32 trimestres (oito anos) sejam eliminadas. Não podemos dizer que este é um procedimento consensualmente aceito pelos macroeconomistas, principalmente pelos macroeconometristas que lidam com o instrumental de cointegração, já que para estes a tendência e a possibilidade de correlação em longo prazo são elementos importantes demais para serem eliminados.

Em economia, tendência e ciclo referem-se a propriedades espectrais diferentes, isto é, elas são distintas com respeito a frequências. O ciclo é associado com frequências entre 4 e 32 trimestres, ao invés disso a tendência é associada às baixas frequências nas séries de tempo.

O filtro HP busca extrair a tendência, que é considerada estocástica, mas com variações suaves ao longo do tempo e não correlacionadas com o ciclo, através da minimização com respeito a  $\mathbf{t}_t$  da seguinte expressão:

$$\left[ \sum_{t=1}^T (y_t - \mathbf{t}_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} ((\mathbf{t}_{t+1} - \mathbf{t}_t) - (\mathbf{t}_t - \mathbf{t}_{t-1}))^2 \right] \quad (1)$$

a qual pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left[ \sum_{t=1}^T c_t^2 + \lambda \sum_{t=3}^T (\Delta^2 \mathbf{t}_t)^2 \right] \quad (2)$$

onde  $c_t \equiv y_t - \mathbf{t}_t$  e  $\Delta^2 = (1 - L)^2$ , com L sendo o operador de defasagens,  $Lx_t = x_{t-1}$ .

Nas expressões (1) e (2), T é o tamanho da amostra e  $\lambda$  é um parâmetro que penaliza a variabilidade da tendência. O parâmetro  $\lambda$  é o parâmetro de suavidade com o qual se controla a aceleração do componente de tendência, isto é, as variações na taxa de crescimento do componente de tendência.

O primeiro termo da equação (1) é a soma dos desvios das séries com respeito à tendência ao quadrado, e é uma medida do grau de ajuste.

O segundo termo é a soma de quadrados das segundas diferenças dos componentes de tendência e é uma medida do grau de suavidade.

Hodrick e Prescott (1997) afirmam que, quando  $\lambda$  aumenta, o desvio padrão da série  $c_t$  aumenta, e existe uma maior persistência.

Quanto maior  $\lambda$  for, mais suave será a tendência. Em particular:

- Se  $\lambda = 0$ , o primeiro termo da equação (1) deve ser zero para minimizar a função objetivo e então resulta que  $\mathbf{t}_t$  é igual à série de tempo original e  $c_t = 0$ ;

- Se  $I$  tende ao infinito, o segundo termo da equação (1) deve ser zero para minimizar a função objetivo. Então,  $t_t$  será uma tendência linear, isto é, os valores tendencializados são representados por uma linha reta dos mínimos quadrados ordinários e se obtém a máxima ciclicidade possível para  $c_t$ .

Para Hodrick e Prescott (1997) se o componente de tendência e as segundas diferenças do componente de crescimento são variáveis normais idêntica e independentemente distribuídas com média zero e variância  $\mathbf{s}_1^2$  e  $\mathbf{s}_2^2$  (não o são na realidade), a expectativa condicional da tendência no tempo  $t$ , dadas as observações, seria a solução do problema (1), quando  $\sqrt{I} = \mathbf{s}_1 / \mathbf{s}_2$ .<sup>3</sup>

A partir de investigações empíricas para dados trimestrais, Hodrick e Prescott chegam ao valor de 1600 para o parâmetro de suavização  $I$ .

No capítulo 5, o qual trata dos problemas com os filtros estudados neste trabalho, será mostrado que o valor do parâmetro de suavidade não é consensual, porque o mesmo é determinado, na prática, empiricamente.

King e Rebelo (1993) obtiveram a expressão do componente tendencial em termos de médias móveis, com o que comprovaram que a tendência é uma média móvel centrada, cujas ponderações são de ordem infinita.

Isto implica que o filtro HP teórico possui uma série de características ideais<sup>4</sup> segundo os critérios de Baxter e King (1995):

- Como o filtro é simétrico, não produz movimentos de fase.
- Aproxima bem um filtro ideal quando se utiliza  $I=1600$  para dados trimestrais.

---

<sup>3</sup> Eles escolhem  $\mathbf{s}_1 = 5\%$  e  $\mathbf{s}_2 = 1/8\%$ ; o valor de  $I$  é:  $\sqrt{I} = 5/(1/8) = 40$ , ou  $I = 1600$ .

<sup>4</sup> Estas características ainda não foram discutidas.

- Produzem séries estacionárias, quando estas são integradas até a ordem quatro.
- O método é operacional.

A condição de primeira ordem se obtém diferenciando a função objetivo (1) com respeito a  $t_t$ :

$$2(y_t - t_t) - 2I[(t_t - t_{t-1}) - (t_{t-1} - t_{t-2})] + 4I[(t_{t+1} - t_t) - (t_t - t_{t-1})] - 2I[(t_{t+2} - t_{t+1}) - (t_{t+1} - t_t)] = 0$$

Empregando o operador de defasagem e dividindo por 2(dois), obtém-se:

$$y_t - t_t = I[(1-L)t_t - (1-L)t_{t-1}] - 2I[(1-L)t_{t+1} - (1-L)t_t] + I[(1-L)t_{t+2} - (1-L)t_{t+1}]$$

Aplicando repetidamente o operador de defasagens, obtém-se:

$$\begin{aligned} y_t - t_t &= I[(1-L)^2 t_t] - 2I[(1-L)^2 t_{t+1}] + I[(1-L)^2 t_{t+2}] = \\ &= I(1-L)^2 [1 - 2L^{-1} + L^{-2}] t_t \\ y_t &= I(1-L)^2 [1 - 2L^{-1} + L^{-2}] t_t + t_t = \\ &= [I(1-L)^2 (1-L^{-1})^2 + 1] t_t \end{aligned}$$

Definindo  $F(L) \equiv I(1-L)^2 (1-L^{-1})^2 + 1$ , temos então :

$$y_t = F(L) \cdot t_t \text{ ou, invertendo: } t_t = F(L)^{-1} y_t$$

O componente cíclico  $c_t = y_t - t_t$  é portanto:

$$c_t = (1 - F(L)^{-1}) y_t$$

Definindo  $c(L) = (F(L) - 1) / F(L)$ . Temos, portanto:

$$C(L) = \frac{I[1-L]^2 [1-L^{-1}]^2}{I[1-L]^2 [1-L^{-1}]^2 + 1}$$

então:

$$c_t = \frac{I[1-L]^2 [1-L^{-1}]^2}{I[1-L]^2 [1-L^{-1}]^2 + 1} y_t \quad (3)$$

A função de resposta de frequência é obtida substituindo na fórmula do filtro, o operador de defasagens por  $e^{-iw}$ .

$$C(w) = \frac{F(e^{-iw}) - 1}{F(e^{-iw})} = \frac{I[1 - e^{-iw}]^2 [1 - e^{iw}]^2}{I[1 - e^{-iw}]^2 [1 - e^{iw}]^2 + 1} = \frac{4I(1 - \cos(w))^2}{4I(1 - \cos(w))^2 + 1}$$

e a função de transferência do filtro é:

$$H(w) = \left| \frac{4I(1 - \cos(w))^2}{4I(1 - \cos(w))^2 + 1} \right|^2 \quad (4)$$

Dados os quatro termos em primeira-diferença no numerador de (3), a parcela cíclica do filtro do HP produz uma série estacionária para todas as séries subjacentes integradas até o quarto grau.

Quando  $I = 1600$ , a função transferência associada com (4) é uma aproximação do filtro passa-alto (supra, p.28) que, quando aplicado a dados trimestrais, remove as variações associadas com ciclos de períodos menores do que 32 trimestres e tem as seguintes propriedades:

- i) A função de transferência do filtro é zero à frequência zero, pois  $\cos(0)=1$ . Isto implica que o filtro remove os ciclos correspondentes à frequência zero, isto é, gera séries estacionárias quando se aplica a processos  $I(1)$ .
- ii) O filtro é simétrico, e então não induz à mudança de fase.
- iii) A função transferência do filtro não tem ciclos.
- iv) O ciclo tem uma função de transferência próxima da unidade para as frequências altas (ou próximas de  $\pi$ ), pois  $\cos(\pi)=-1$ , o que implica que  $C(\pi) = \frac{16I}{(1+16I)}$ , que é quase 1 para valores grandes de  $I$ .

### 3.2. FILTRO BK (BAXTER- KING)

Baxter e King (1995) propuseram um filtro de tipo passa-banda, o filtro BK, cujo propósito é isolar certas frequências nos dados.

O filtro passa-banda ( $BP_k(p,q)$ ) é um tipo de construção de média móvel que isola os componentes periódicos de uma série de tempo econômica que caem em uma banda de frequência específica, de periodicidades mínima  $p$  e máxima  $q$ .

Baxter e King (1995) escolheram as frequências associadas com períodos na escala de um ano e meio a oito anos. A escolha foi feita para ser compatível com a classificação de Burn e Mitchell (1946), de movimentos cíclicos.

De acordo com esta metodologia, o filtro ideal passa-banda preservaria estas flutuações, mas eliminaria todas as outras, flutuações de frequências altas, associadas, por exemplo, com erros de medida, e as baixas frequências, associadas a tendência.

Baxter e King (1995) constróem um filtro de ciclo de negócios, definido como um filtro linear que elimina muitos componentes de movimento lento e frequência baixa – com periodicidade maior do que 32 trimestres associados a evolução de longo prazo das variáveis (tendência), e muitos componentes de frequência alta - com periodicidade menor do que 6 trimestres vinculados a movimentos estacionários e irregulares de curto prazo , enquanto retém componentes intermediários com flutuações entre seis e trinta e dois trimestres ( ciclo de negócios).

Então, o filtro BK tem como objetivo manter os componentes associados as frequências que estão entre  $p/16$  e  $p/3$ .

Seu procedimento se resume em dois passos: primeiro, define-se o ciclo para o qual o investigador deve especificar certas características do mesmo e, posteriormente, o ciclo é isolado, aplicando uma média móvel nos dados.

A seguir é explicada a construção dos filtros low-pass (passa-baixo), high-pass (passa-alto) e band-pass (passa-banda).

### **3.2.1. Filtros low-pass (passa-baixo), high-pass (passa-alto) e band-pass (passa-banda)**

Existe uma família de filtros que requerem que o investigador especifique de antemão o intervalo de frequências correspondentes ao componente de interesse. A mesma está composta pelos denominados filtros passa-baixo, passa- alto e passa-banda.

Os filtros passo-baixo, que se denota lp, transfere os componentes associados às frequências baixas e removem todos os componentes vinculados a frequências maiores que uma determinada frequência de corte. Seguindo a mesma lógica, os filtros passa-alto (hp) transferem os componentes relacionados com as frequências altas e removem os associados às frequências que estão a baixo de uma certa frequência de corte.

A terceira classe de filtros dessa família são os filtros passa-banda (band-pass ou bp). Estes transferem os componentes associados a uma banda ou intervalo de frequências e removem as frequências mais altas e mais baixas.

### **3.2.2. Construção de filtros passa-alto e passa-banda**

Estes filtros são facilmente construídos a partir de filtros passa-baixo. O filtro passa-baixo retém somente componentes de movimento lento dos dados. Este filtro tem uma função

resposta de frequência dada por  $\mathbf{b}(w)=1$  para  $|w| \leq \underline{w}$  e  $\mathbf{b}(w) = 0$  para  $|w| > \underline{w}$ , como mostrado no painel A da figura 1.

Os filtros passa-baixo, passa-banda e passa-alta não podem ser implementados em conjunto de dados finitos porque requerem um número infinito de valores passados e futuros das séries; porém, um filtro de ordem finita pode ser usado para aproximar este filtro ideal.

Para construir um filtro que se aproxima do filtro ideal usa-se médias móveis finitas, isto é, que são truncadas na defasagem  $k$ . Denota-se  $LP_k(p)$  o filtro aproximado *low pass* o qual é truncado na defasagem  $k$  e passa componentes dos dados com periodicidade maior ou igual a  $p$ . Já que o filtro ideal envolve  $k=\infty$ , o filtro ideal passa-baixo será denotado por  $LP_\infty(p)$ .

O filtro passa-alto HP ( $p$ ) passa componentes dos dados com periodicidade menor ou igual a  $p$ , como ilustrado no painel B da figura 1. Se os pesos do filtro passa-baixo na figura 1 painel A são  $b_h$  para  $h=0$  e  $h=\pm 1, 2, \dots$ , então os pesos do filtro *high pass* são  $1-b_0$  para  $h=0$  e  $-b_h$  para  $h=\pm 1, 2, \dots$ .<sup>5</sup>

Correspondentemente, o filtro passa-alto aproximado  $HP_k(p)$  é simplesmente construído por truncar os pesos do  $HP_\infty(p)=1-LP_k(p)$ .

<sup>5</sup> Para um filtro passo-baixo ideal, os ponderadores  $b_h$  são:

$$b_h^{LP} = \frac{1}{2p} \int_{-\underline{w}}^{\underline{w}} \mathbf{b}(w) e^{iwh} dw \quad \text{onde} \quad \mathbf{b}(w) = \begin{cases} 1, & |w| \leq \underline{w} \\ 0, & |w| > \underline{w} \end{cases}$$

No caso do filtro passo-alto ideal os ponderadores  $b_h$  são obtidos da seguinte forma:

$$b_h^{HP} = \frac{1}{2p} \int_{-\underline{w}}^{\underline{w}} \mathbf{b}(w) e^{iwh} dw + \frac{1}{2p} \int_{\underline{w}}^{\underline{w}} \mathbf{b}(w) e^{iwh} dw = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p \mathbf{b}(w) e^{iwh} dw - \frac{1}{2p} \int_{-\underline{w}}^{\underline{w}} \mathbf{b}(w) e^{iwh} dw$$

$$\text{onde} \quad \mathbf{b}(w) = \begin{cases} 1, & |w| \geq \underline{w} \\ 0, & |w| < \underline{w} \end{cases}$$

Então, quando  $h \neq 0$ , temos:  $b_h^{HP} = -b_h^{LP}$ ,  $h = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

E quando  $h = 0$ , temos:  $b_0^{HP} = 1 - b_0^{LP}$

O filtro passa-alto ideal elimina componentes de baixa frequência das séries de tempo (com frequências até  $w_0$ ) e passa através dos componentes de alta frequência sem afetar seu espectro para frequências acima de  $w_0$ .

A função de transferência do filtro passa-alto ideal é:

$$|H_{HP}(w)|^2 = \begin{cases} 1, w \geq w_0 \\ 0, w < w_0 \end{cases}$$

Seguindo a mesma lógica usada para os filtros passa-alto, os filtros passa-banda podem ser construídos através da diferença entre os filtros passa-baixo:  $bp = lp_u - lp_l$ , onde  $lp_u$  é o filtro passa-baixo cuja frequência de corte é mais alta e  $lp_l$  é o filtro passa-baixo associado a uma frequência de corte menor.

Então, o filtro passa-banda proposto por Baxter e King (BK) é obtido pela diferença entre dois filtros passa-baixo: um que deixa passar as frequências menores que  $p/3$  e outro as frequências menores que  $p/16$ .

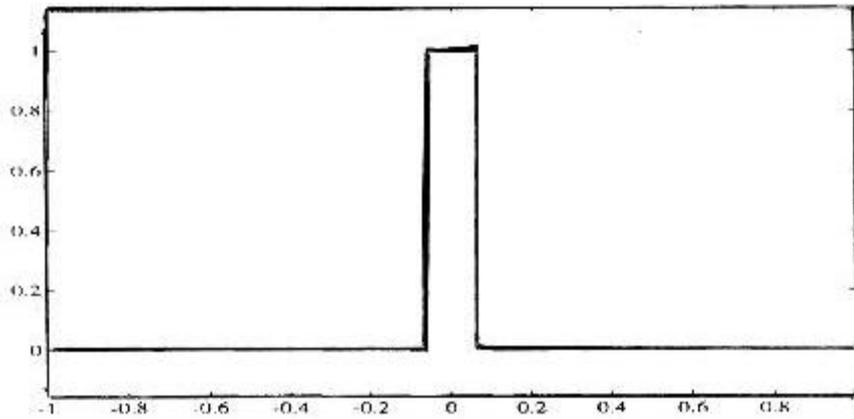
O filtro ideal passa-banda passa somente frequências no espectro  $\underline{w} \leq |w| \leq \bar{w}$ . Este é construído de dois filtros passa-baixo com cortes  $\bar{w}$  e  $\underline{w}$ . Denota-se a resposta de frequência destes filtros como  $\bar{b}(w)$  e  $\underline{b}(w)$ .

Então, para se obter a resposta de frequência desejada, formamos a resposta de frequência do filtro *band pass* como  $\bar{b}(w) - \underline{b}(w)$ , já que isto dará resposta de frequência unitária sobre bandas de frequência  $\underline{w} \leq |w| \leq \bar{w}$  e zero nas demais.

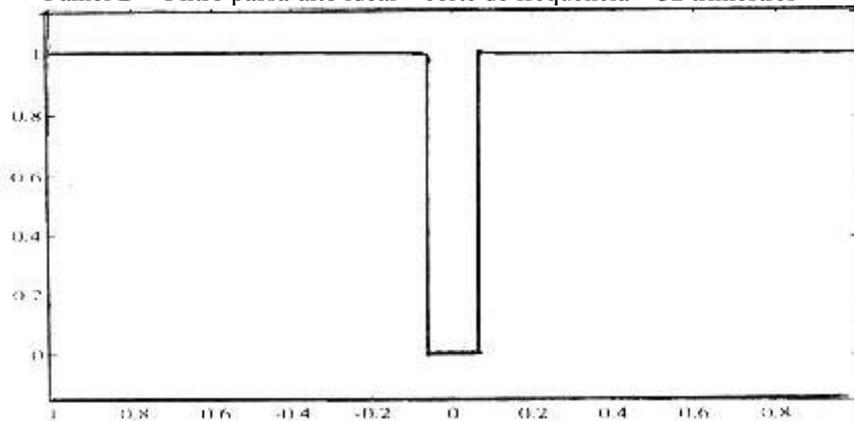
Se nos deixarmos  $\underline{b}_h$  e  $\bar{b}_h$  serem os pesos dos filtros para filtros passa-baixo com cortes  $\underline{w}$  e  $\bar{w}$ , então o filtro passa-banda tem pesos  $\bar{b}_h - \underline{b}_h$ .

$BP_k(p,q)$  denota nossa aproximação do filtro passa-banda. Este filtro é truncado na defasagem  $k$ , e passa componentes de periodicidade maior ou igual a  $p$  e menor ou igual a  $q$ , como ilustrado no painel C da figura 1.

Painel A - Filtro passa-baixo ideal – corte de frequência = 32 trimestres



Painel B - Filtro passa-alto ideal – corte de frequência = 32 trimestres



Painel C - Filtro passa-banda ideal – corte de frequência = 6 - 32 trimestres

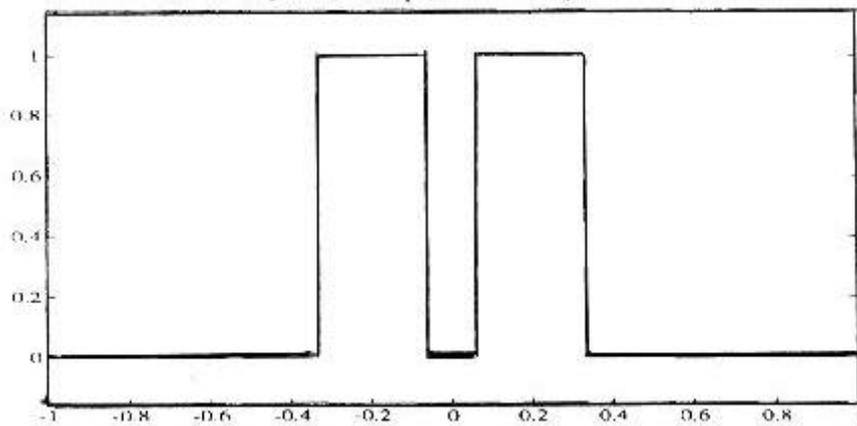


FIGURA 1 – Filtros Ideais

Fonte: Baxter e King, (1995, p.43).

Nesses gráficos, o eixo x representa a frequência (fração de  $p$ ) e o eixo y representa o valor da função de resposta de frequência.

Conforme Baxter e King (1995, p.9), “não existe um melhor valor para defasagem  $k$ . Aumentando  $k$  para melhor aproximar o filtro ideal, resulta numa maior perda de observações”.

Quando  $k=4$ , por exemplo, para que a média móvel cubra somente os quatro trimestres anteriores e subseqüentes, existe uma maior divergência do filtro ideal. Em particular, o filtro aproximado admite componentes importantes na escala de frequência pouco acima da frequência de corte  $w = p / 16$ .

Este fenômeno é convencionalmente chamado de ‘*leakage*’: este termo significa que o filtro passa as frequências que deve suprimir, além das que deve reter. Da mesma forma, o fenômeno conhecido como ‘*compression*’ refere-se ao fato das frequências que o filtro deve manter, mas as comprime. À medida que aumenta o valor de  $k$ , o incremento destes problemas se atenuam.

Correspondentemente, o filtro aproximado tem uma resposta de frequência menor que a unidade na escala  $|w| \leq p / 16$ .

Da mesma forma que o parâmetro  $I$  no filtro HP, o valor de  $k$  é determinado por testes empíricos. O valor de  $k$  dependerá da quantidade de dados disponíveis e da necessidade de obter uma boa aproximação do filtro ideal.

A figura 2 mostra os efeitos do truncamento sobre o fitro BK(6,32).

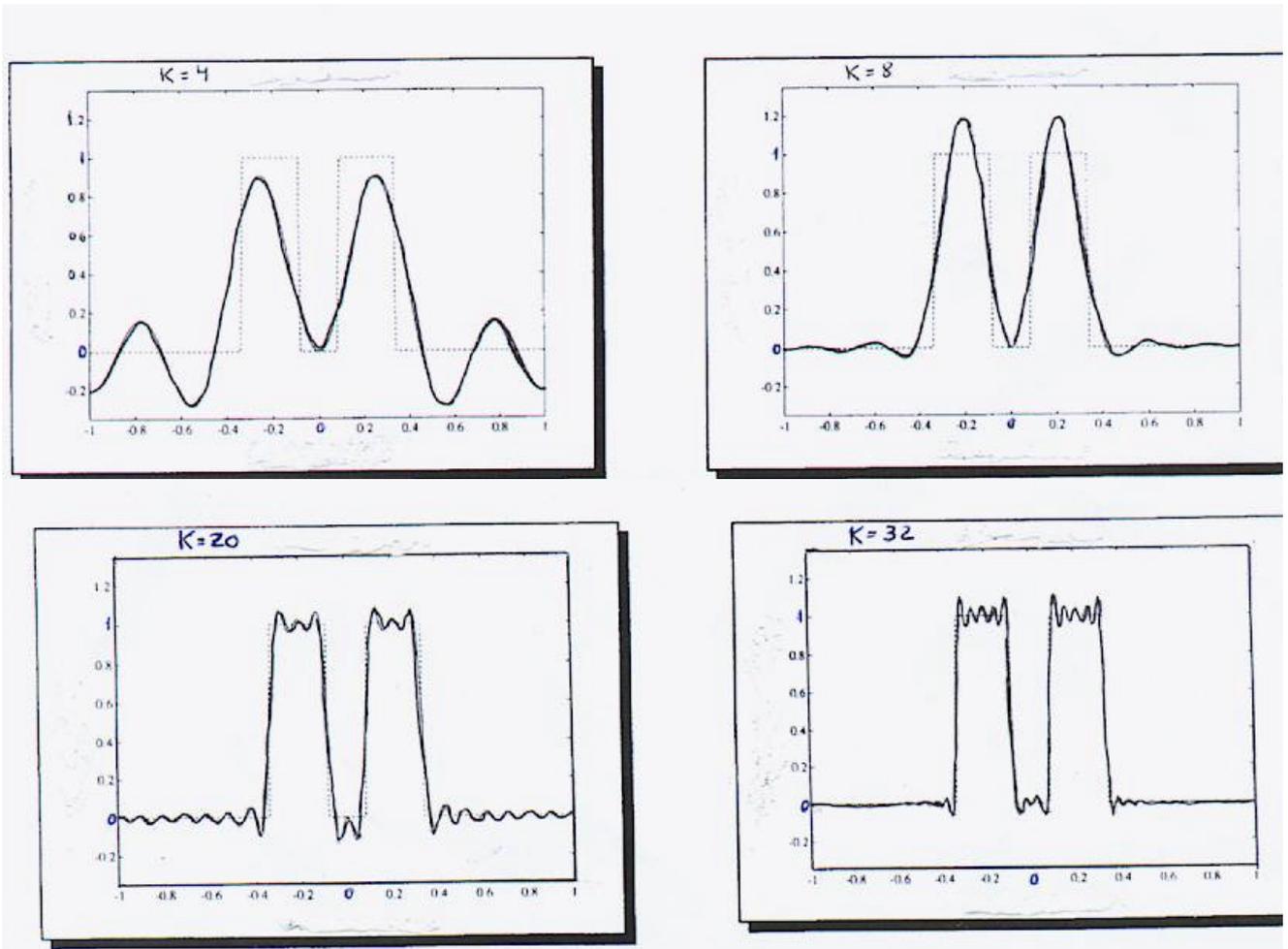


FIGURA 2- Construção de filtros passa-banda aproximados (6-32 trimestres) truncados nas defasagens  $k=4, 8, 20$  e  $32$ .

Fonte: Baxter e King (1995, p.45).

Nesses gráficos, o eixo x representa a frequência (fração de  $p$ ) e o eixo y representa o valor da função de resposta de frequência.

### 3.2.3 A representação do filtro BK

A representação geral do filtro no domínio do tempo é  $b(B) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_h B^h$ , onde  $B$  é o operador de defasagem e  $b_h$  são os ponderadores de médias móveis infinitos.

Os ponderadores do filtro são obtidos através da transformação inversa de Fourier da função resposta de frequência, o que implica:

$$b_h = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p \mathbf{b}(w) e^{iwh} dw \quad (5)$$

onde  $\mathbf{b}(w)$  é a ponderação ideal do filtro infinito.

Resolvendo a integral em (5) conforme feito por Baxter e King (1995, .p.28), temos:

$b_0 = w_1 / p$  e  $b_h = \text{sen}(hw_1) / hp$  para  $h = 1, 2, \dots$ , onde  $w_1$  é a menor frequência de corte do filtro passa-baixo. A impossibilidade de construir tal filtro conduz à necessidade de buscar uma aproximação ótima do mesmo, que é obtida através de uma média móvel finita, e o componente de tendência surge de  $\mathbf{t}_t^{BP} = \sum_{h=-k}^k a_h y_{t-h} = a(B)y_t$ , onde B é o operador de defasagens.

Os ponderadores do filtro,  $a_h$ , são determinados, resolvendo-se o seguinte problema de minimização:

$$\min_{\{a_j\}} \int_{-p}^p |\mathbf{b}(w) - \mathbf{a}(w)|^2 dw$$

Onde  $\mathbf{b}(w)$  é a função de resposta de frequência do filtro passa-baixo ideal e  $\mathbf{a}(w)$  é a função de resposta de frequência do filtro aproximado. Assim,  $|\mathbf{b}(w) - \mathbf{a}(w)|^2$  é a função de perda ou discrepância que surge da impossibilidade de aplicar o filtro ideal. Baxter e King (1995, p. 7) mostram que a solução deste problema é :

$$a_h = \begin{cases} b_h & \text{se } h = \pm 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{se } h > k \end{cases}$$

Em outras palavras, a aproximação ótima para o filtro para um número dado de defasagens (k) que se utiliza para calcular a média móvel, é construída simplesmente

truncando os ponderadores ou pesos do filtro ideal – infinito- na defasagem  $k$ . Com isso, o filtro estimará ponderações finitas iguais as infinitas até a defasagem  $k$ , e igualará a zero todas as ponderações finitas quando o número de defasagens for maior ou igual a  $k+1$ . As ponderações se estimam igualmente mediante a transformação inversa de Fourier.

A eleição de  $k$  depende do tamanho da amostra com que se trabalha e da necessidade de aproximar-se do filtro ideal.

Baxter e King (1995) recomendam utilizar  $k=12$  para séries trimestrais. Eles baseiam-se em três indicadores estatísticos para fazer tal recomendação:

- o desvio padrão, como medida de volatilidade
- os coeficientes de correlação serial, como indicadores de persistência
- as correlações contemporâneas com o PNB, como medida de correlação com o ciclo de referência.

Desta forma, o filtro passa-banda de Baxter e King no domínio do tempo tem a forma de uma média móvel finita simétrica bidirecional, cujos ponderadores surgem da minimização de uma função perda.

Quando aplicados a dados trimestrais, o filtro passa-banda proposto por Baxter e King (1995) toma a forma de um média móvel (MA); 24 trimestres:

$$y_t^f = \sum_{h=-12}^{12} a_h y_{t-h} = a(L)y_t,$$

Baxter e King (1995) ajustaram o filtro passa-banda por impor a restrição que o ganho é zero à frequência zero. Esta restrição implica em que a soma dos coeficientes da média móvel deve ser zero.

O espectro do componente cíclico obtido ao se aplicar o filtro BK é  $f_{y^c}(w) = |BK(w)|^2 f_y(w)$ , onde  $|BK(w)|^2$  é o ganho quadrático do filtro BK e  $f_y(w)$  é o

espectro de  $y_t$ . O ganho quadrático  $|BK(w)|^2$  é igual a  $|a(w)|^2$ , onde  $a(w)$  denota a transformação de Fourier de  $a(L)$  à frequência  $w$ .

Na figura 3 apresentamos o ganho quadrático do filtro BK, o qual tem um ganho quadrático igual a zero fora da banda de interesse e um dentro dessa banda. Junto na figura aparece o ganho quadrático do filtro HP. Vê-se que o filtro HP opera essencialmente como o filtro “passa-alto”, removendo as mais baixas frequências, e deixando todos os outros componentes dos dados não afetados.

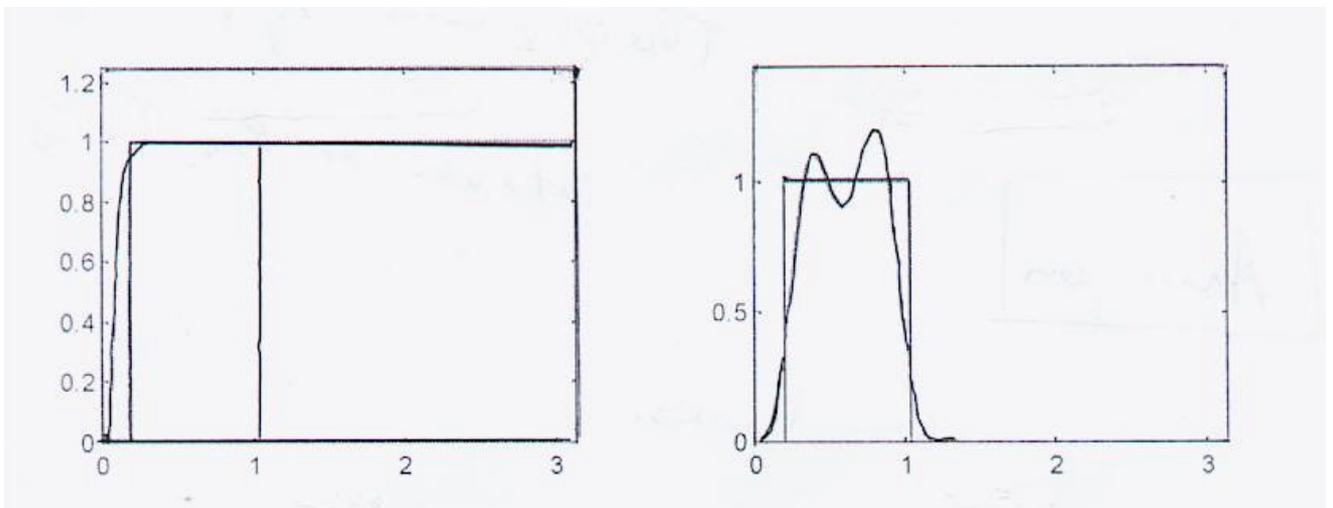


FIGURA 3- Ganho quadrático do filtro HP comparado com o ganho quadrático do filtro BK

Fonte: Benati (2001, p.37)

Nesses gráficos o eixo x representa a frequência (fração de  $p$ ) e o eixo y representa o valor da função de resposta de frequência.

Segundo Baxter e King (1995, p.3), “um método ótimo de extração de ciclos econômicos deve cumprir com 6 objetivos”:

- O filtro deve extrair uma banda específica de periodicidades, sem variar suas propriedades inerentes (a variância, correlações e outras medidas aleatórias dos dados).

- Não deve produzir um movimento de fase (quer dizer, que não deve alterar as relações temporais das séries a nenhuma frequência). As duas características anteriores definem um filtro ideal baseado em médias móveis com ponderações simétricas.
- O método deve ser uma aproximação ótima de um filtro ideal. Isto se pode determinar medindo a diferença dos resultados obtidos com um filtro ideal e um aproximado.
- A aplicação de um filtro deve produzir uma série de tempo estacionária quando se aplica a dados que apresentam tendência. Por esta razão, o filtro é construído de forma que a função-resposta de frequência do filtro seja zero a frequência zero (este requisito significa, além disso, que o filtro *passa-banda* eliminará tendências quadráticas)
- O método deve ser independente do comprimento da série.
- O método deve ser operacional, isto é, de fácil aplicação e uso.

Segundo a análise das características ideais feitas por Baxter e King (1995), o filtro BK apresenta a maioria delas: é simétrico, porque não produz movimentos de fase, aproxima-se relativamente bem do filtro ideal, produz séries estacionárias e é um método operacional.

## 4. APLICAÇÃO DOS FILTROS HP E BK AOS DADOS BRASILEIROS

Este capítulo tem como objetivo a aplicação destas duas metodologias de extração do componente cíclico de um conjunto de variáveis macroeconômicas, de modo a estudar a sensibilidade dos resultados empíricos ao procedimento empregado.

Foram analisadas as características das séries brasileiras originais e a relação das mesmas com as séries brasileiras filtradas. As séries foram filtradas com os filtros HP e BK a fim de trabalhar apenas com o componente cíclico das séries originais.

Foram observadas as relações entre o PIB e outras variáveis macroeconômicas, tais como: consumo, investimento, salário real e horas trabalhadas.

Utilizamos dados trimestrais relativos ao período do primeiro trimestre de 1991 ao segundo trimestre de 2003. Todas as séries foram transformadas em logaritmo natural (ln), de maneira que a primeira diferença pode ser interpretada enquanto taxa de crescimento.

Filtramos os dados com algoritmos desenvolvidos para a linguagem *Matlab*.<sup>6</sup>

Para comparar os resultados que surgem da aplicação dos distintos procedimentos considera-se um conjunto de estatísticas:

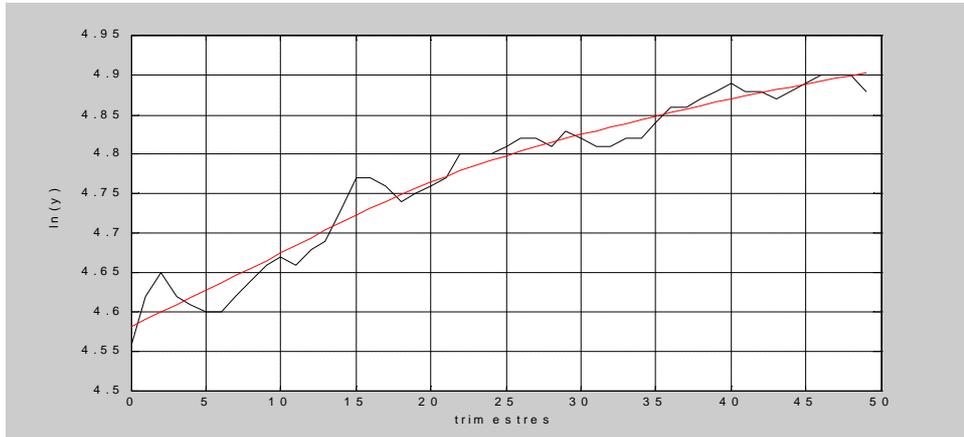
- i) o desvio padrão, como aproximação da volatilidade do ciclo;
- ii) a autocorrelação de primeira ordem, como medida da persistência das flutuações cíclicas;
- iii) as correlações cruzadas com o produto que permitem caracterizar o tipo de movimento do mesmo e de cada série estudada.

---

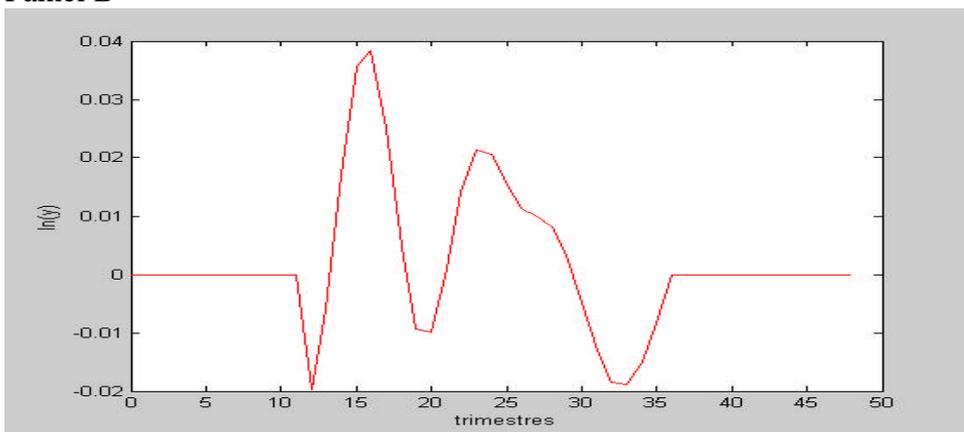
<sup>6</sup> O algoritmo do filtro HP foi feito por Ivailo Izvorski e está disponível em <http://faculty.london.edu/wdenhaan/p102/hpfilter.m>  
O algoritmo do filtro BK foi feito por Baxter e King e está disponível em <http://dragon.seowon.ac.kr/~johnnam/bpfilter1.htm>

O painel A da figura 1 apresenta a série do PIB brasileiro original superposto à série filtrada pelo filtro HP ( $\lambda = 1600$ ); o painel B apresenta a série do PIB brasileiro filtrada pelo filtro BK(6,32) para  $K=12$ ; e o painel C apresenta o ciclo HP superposto ao ciclo BK.

Painel A



Painel B



Painel C

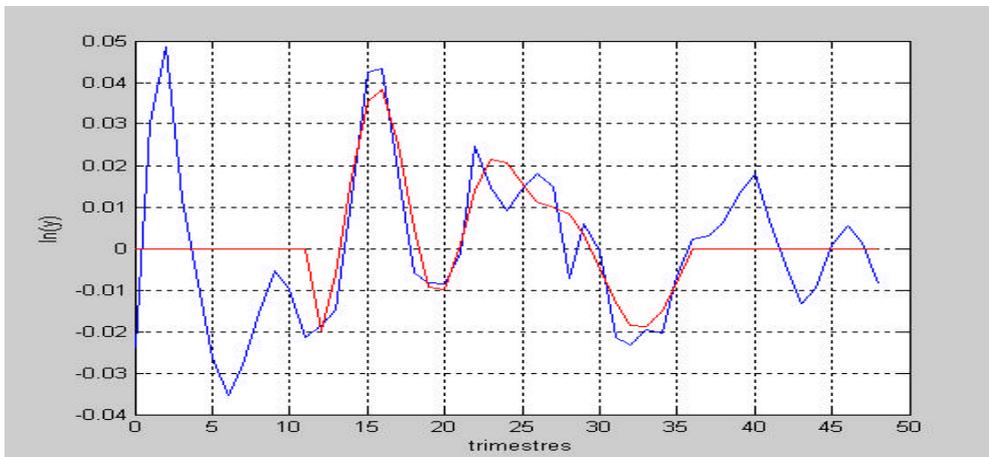


FIGURA 1 – Efeitos da Filtragem sobre a série do PIB brasileiro.

TABELA 1- EFEITOS DA FILTRAGEM SOBRE OS MOMENTOS

## Painel A: Momentos da série original

Var	S	S rel.Y	Autocorrelação			Correlação Cruzada com $Y_{t-i}$								
			1	2	3	8	4	2	1	0	-1	-2	-4	-8
Y	0,068	1	0,972	0,929	0,902	0,486	0,764	0,884	0,925	1	0,935	0,882	0,771	0,502
C	0,087	1,273	0,963	0,905	0,866	0,095	0,437	0,718	0,849	0,976	0,855	0,728	0,504	0,271
I	0,107	1,568	0,867	0,692	0,605	0,033	0,29	0,603	0,761	0,89	0,75	0,62	0,42	0,31
N	0,11	1,6	0,977	0,931	0,885	-0,26	-0,65	-0,80	-0,85	-0,89	-0,89	-0,78	-0,50	-0,23
W	0,06	0,88	0,845	0,764	0,513	-0,44	-0,64	-0,56	-0,49	-0,32	-0,24	-0,18	-0,13	-0,01

Obs.: As variáveis referidas são : Y, PIB; C, consumo das famílias; I, investimento doméstico; N, mão-de-obra; W, salário real.<sup>7</sup>

## Painel B: Momentos da série filtrada pelo filtro HP(1600)

Var	S	S rel.Y	Autocorrelação			Correlação Cruzada com $Y_{t-i}$								
			1	2	3	8	4	2	1	0	-1	-2	-4	-8
Y	0,018	1	0,708	0,236	-0,076	-0,09	-0,30	-0,07	0,25	1	0,969	0,674	-0,12	-0,007
C	0,029	1,631	0,761	0,359	0,064	-0,036	-0,16	0,378	0,743	0,914	0,60	0,164	-0,30	-0,12
I	0,056	3,206	0,662	0,174	-0,111	-0,06	-0,18	0,363	0,728	0,85	0,47	0,01	-0,41	-0,13
N	0,040	2,26	0,857	0,578	0,322	-0,06	-0,31	-0,35	-0,26	-0,07	0,187	0,524	0,721	-0,05
W	0,044	2,5	0,723	0,613	0,246	-0,13	-0,21	-0,146	0,024	0,296	0,451	0,656	0,561	-0,14

## Painel C: Momentos da série filtrada pelo filtro BK(6,32) com k=8

Var	S	S rel.Y	Autocorrelação			Correlação Cruzada com $Y_{t-i}$								
			1	2	3	8	4	2	1	0	-1	-2	-4	-8
Y	0,015	1	0,823	0,375	-0,12	0,078	-0,63	-0,121	1	0,826	0,975	0,781	-0,17	-0,262
C	0,022	1,487	0,824	0,384	-0,09	-0,05	-0,33	0,469	0,833	0,927	0,658	0,190	-0,53	-0,007
I	0,05	3,360	0,831	0,394	-0,11	-0,21	-0,27	0,547	0,863	0,907	0,592	0,105	-0,66	-0,006
N	0,031	2,10	0,869	0,523	-0,12	-0,351	-0,45	-0,63	-0,47	-0,13	0,29	0,689	0,783	0,821
W	0,032	2,14	0,88	0,542	0,110	0,181	-0,47	-0,40	-0,12	0,27	0,611	0,850	0,57	-0,50

<sup>7</sup> Essas séries foram fornecidas pelo Ipea-data com as seguintes denominações:

Y : PIB - preços de mercado - índice encadeado - dessaz. (média 1990 = 100); C: Consumo final - famílias - índice encadeado - dessaz.- trim (média 1990 = 100); I: Capital fixo - formação bruta - índice encadeado -trim (média 1990 = 100); N : Horas trabalhadas - indústria - índice (média 1992 = 100) (mensal) ; W: Salário - real - indústria - índice (média 1992 = 100) (mensal);

As tabelas mostram como a aplicação destas duas alternativas de filtragem afeta os momentos computados de algumas séries macroeconômicas brasileiras. O estudo foi focado num conjunto de três momentos de particular interesse na análise de ciclo de negócios: volatilidade, persistência e correlação com o produto.

Analisando os painéis A, B e C, observa-se que em todas as séries filtradas o desvio padrão é menor do que da série original. Uma justificativa pode estar no fato de que, quando filtramos as séries, removemos a tendência da série original. Então, estamos comparando a série original que contém os componentes de tendência e ciclo com a série filtrada, a qual contém somente o componente cíclico.

Em particular, nota-se que a volatilidade (desvio padrão) da série do investimento original, 0,107, é maior que a volatilidade da série do investimento filtrada pelos filtros HP e BK, 0,056 e 0,050, respectivamente.

Além disso, os filtros alteram a ordem de grandeza dos desvios padrões relativos.

Por exemplo, tomando os momentos originais das séries estudadas, a de maior desvio padrão relativo à série do produto é a série das horas trabalhadas, mas quando filtramos, a série do investimento é a com maior volatilidade relativa.

É importante notar que a correlação cruzada do consumo com o produto na defasagem 4(quatro) passa de 0,504 nas séries originais para  $-0,30$  e  $-0,53$  nas séries filtradas pelos filtros HP e BK, respectivamente.

Segundo Issler e Rocha; Reis *et al* *apud* Ellery *et al.* (2002), a grande volatilidade do ciclo do consumo pode ser explicada pela inclusão de bens duráveis no consumo e, principalmente, pela existência bem documentada de restrições à liquidez.

Esta pode ser uma justificativa para as estranhas correlações cruzadas da série do consumo com a série do produto.

Os resultados das correlações cruzadas com a série do PIB são anormais (são todas negativas) para as séries das horas trabalhadas e salário real, devido ao fato de que são comparadas séries heterogêneas. Enquanto o PIB é da economia como um todo, as séries de salário real e horas trabalhadas são somente do setor industrial.

Apesar disso, analisando os painéis, fica claro que os filtros HP e BK diminuem a correlação da série estudada com a série do produto.

As autocorrelações das séries quando utilizamos o filtro BK são maiores que o filtro HP. Portanto, podemos concluir que as séries filtradas pelo BK têm maior persistência do que as filtradas pelo HP, principalmente, para a série do produto e do investimento.

Concluimos que o resultado das duas filtrações é semelhante.<sup>8</sup>

De acordo com Baxter e King (1995, p.18), “o filtro HP é uma razoável aproximação do filtro *band-pass*”.

Conforme visto na seção anterior, o filtro HP é uma forte aproximação do filtro *high-pass*, que significa que o mesmo retém a volatilidade de alta frequência, que é removida pelo filtro BK.

Isto explica porque o filtro HP produz medidas significativamente de maior volatilidade comparada com o filtro BK: o filtro BK remove os componentes de alta frequência, enquanto o HP não.

---

<sup>8</sup> Contudo, no *paper* de Baxter e King (1995), os resultados para série da Inflação apresentam uma notável diferença entre o filtro HP e BK. A razão é que a inflação contém componentes importantes em altas frequências, as quais são passadas pelo filtro HP, mas são removidas pelo BK. O PIB, ao contrário, não tem variações importantes em altas frequências.

## 5. OS PROBLEMAS COM OS FILTROS HP E BK

O que é tendência e o que é componente cíclico?

Burnside (1998) destaca que o fato de os economistas usarem um grande número de filtros para extrair os componentes 'cíclico' e 'tendência' de séries de tempo simplesmente mostra que estes conceitos não têm significado igual entre eles.

A identificação do ciclo e da tendência possui uma única resposta somente num modelo estrutural bem-definido.

Cabem algumas observações válidas para todos os exercícios de filtragem linear, antes de examinar as críticas específicas aos métodos dos filtros HP e BK.

Segundo Benati (2001), uma desvantagem da decomposição não-estrutural é clara: enquanto a decomposição estrutural é unicamente definida, existe um número infinito de maneiras nas quais séries temporais integradas podem ser decompostas em uma tendência estocástica e um componente cíclico estacionário baseado em métodos não-estruturais, mas nem a teoria econômica nem os métodos estatísticos podem determinar a forma exata da tendência de crescimento ou a relação entre o componente cíclico e o secular.

A adoção de uma decomposição particular não-estrutural pode ser justificada se e somente se tal decomposição tem uma razoável *performance* numa larga escala de circunstâncias alternativas possíveis.

No caso do filtro passa-banda, tal suposição é, em geral, incorreta, pela simples razão que a *performance* do filtro não varia com respeito à estrutura que está sendo filtrada.

Então, dependendo da estrutura particular que está sendo filtrada, a *performance* do filtro passa-banda pode ser extremamente boa, extremamente ruim, ou variar, e já que a estrutura verdadeira da economia não pode ser conhecida, é logicamente impossível de dizer, *a priori*, se a *performance* do filtro será razoavelmente boa ou não.

Um outro problema esta na aproximação dos filtros ideais. Um grande número de métodos estatísticos tem sido propostos para filtrar uma tendência estocástica em séries de tempo macroeconômicas. Mas, como não é possível construir um filtro no domínio do tempo com um número finito de observações, todos os métodos de filtragem usando filtros aproximados de ordem finita desviam-se do filtro ideal de alguma maneira, causando distorções.

Nelson e Kang (1981) chamaram a atenção para as distorções que podem surgir quando ajustamos tendências determinísticas a séries que na verdade são dirigidas por tendências estocásticas.

Para Pedersen (2001), o principal problema é que os segundos momentos das séries filtradas dependem do método de filtragem e sem uma medida para mensuração do efeito da distorção causada pelo filtro, é impossível determinar qual o conjunto de fatos estilizados podem ser confiáveis e quais podem ser construções estatísticas artificiais.

Pedersen (2001) constrói uma métrica para medir o tamanho das distorções dos filtros. Esta métrica é primeiramente usada para determinar o valor ótimo do parâmetro de suavização  $\lambda$  do filtro HP e depois comparar dez diferentes filtros, medindo suas distorções.

A seguir, faço uma distinção entre os problemas e questões sem resposta dos filtros HP e BK.

## 5.1 O FILTRO HP

Baxter e King (1995) afirmam que o uso do filtro HP é o resultado de uma falta de atenção a uma questão central na visão de Burns e Mitchell (1946), que é a definição do ciclo econômico.

As críticas à utilização do filtro HP para extrair o componente cíclico têm sido abundantes na literatura econômica.

O filtro HP tem sido criticado por Harvey e Jaeger (1993), Cogley e Nason (1995), Park (1996) e Guay e St-Amant (1997) por induzir a ciclos espúrios nas séries de tempo filtradas com a “forma espectral típica” de Granger (1966).

As críticas ao filtro HP foram agrupadas conforme 4 critérios:

(i) Natureza eminentemente estatística e mecânica dos métodos univariados; (ii) Subjetividade na eleição do parâmetro de suavização ( $\lambda$ ); (iii) O filtro HP distorce fortemente os valores filtrados nas extremidades das séries filtradas; (iv) Geração de ciclos espúrios.

i) Os métodos univariados deixam de lado relações econômicas, como, por exemplo, a interação que pode se dar entre o produto e outras variáveis macroeconômicas, como a inflação e o consumo privado.

King e Rebelo (1993) sustentam que a aplicação mecânica do filtro pode alterar as propriedades inerentes da série, isto é, suas medidas aleatórias tais como sua volatilidade (desvio padrão) e correlação com outras séries. Para chegar à tal conclusão, eles replicam os resultados modelo de ciclos reais de Hansen (1989).

Os autores destacam ainda que o filtro HP altera a volatilidade relativa (o desvio padrão da variável dividido pelo desvio padrão do produto) de diferentes séries. Em particular, o filtro HP aumenta a volatilidade relativa da série de investimento e horas trabalhadas, enquanto diminui a do consumo, salário real e estoque de capital. Além disso, as correlações do capital e do trabalho com o produto são 0,68 e 0,79 nas séries originais e passam a ser 0,07 e 0,98 nas séries filtradas. O resultado mais impressionante foi obtido na correlação entre as séries do produto e horas trabalhadas, passando de 0,06 nas séries originais para 0,86 nas séries filtradas.

Além disso, para dados com periodicidade anual, comprova-se empiricamente que o filtro HP é uma aproximação ruim de um filtro ideal, porquanto inclui componentes cíclicos que deveriam ser omitidos e vice-versa.

ii) Subjetividade na eleição do parâmetro de suavização  $I$ .

O valor de  $I$  não é determinado, em princípio, por otimização, mas este é escolhido por investigações empíricas.

Nelson e Plosser (1982) demonstraram que o valor de  $I = 1600$  para dados trimestrais não é ótimo para a maioria das séries examinadas por estes, de forma que a utilização deste parâmetro implica que muito da variabilidade que é atribuída do filtro ao componente cíclico, é, de fato, parte da tendência.

Para Hodrick e Prescott (1997), como visto no capítulo 3, se o componente de tendência e as segundas diferenças do componente de crescimento são variáveis normais idêntica e independentemente distribuídas com média zero e variância  $\mathbf{s}_1^2$  e  $\mathbf{s}_2^2$ , a expectativa condicional da tendência no tempo  $t$ , dada as observações, seria a solução do problema (1) da seção 3 quando  $\sqrt{I} = \mathbf{s}_1 / \mathbf{s}_2$ . Teorias econômicas fornecem pouco ou nada em relação ao que esta razão deve ser. Entretanto, os autores reconhecem a restrição imposta por estas suposições.

Hodrick e Prescott (1997, p.6) chamam a atenção para o fato de que qualquer filtro altera as propriedades de correlação seriada dos dados, e estas devem ser interpretadas com cautela. Os valores sugeridos de  $I$  para dados anuais e mensais são, respectivamente, 400 e 6400.

Canova (1998, p.485) afirma que o valor de  $I$  é discutível e para investigar a questão, o autor experimenta o filtro HP com  $I = 1600$  e  $I = 4$ , encontrando para o desvio padrão os valores de 1,76 e 0,55 para os filtros HP1600 e HP4, respectivamente.

Para Pedersen (2001), o valor de  $\lambda$  para dados trimestres não é 1600, mas está entre 1000 e 1050.

- iii) O filtro HP distorce fortemente os valores filtrados nas extremidades das séries filtradas.

Na prática, alguns estudos utilizam projeções do produto para períodos posteriores aos últimos dados disponíveis, para se ter uma melhor estimativa da tendência desses últimos períodos.

St- Amant e Guay (1997) alertam que o usuário do filtro HP não deve estar interessado em pontos de dados perto do começo ou da extremidade da amostra, pois o filtro HP, um filtro dois lados, muda sua natureza e torna-se parecido com um filtro um lado, no começo ou no fim de uma série de tempo. Após ter estudado as propriedades do filtro HP naquelas extremidades, Baxter e King (1995) recomendam que três anos dos dados sejam deixados de lado em ambas as extremidades de uma série de tempo quando o filtro HP é aplicado aos dados.

- iv) Geração de ciclos espúrios.

O que é um ciclo espúrio?

A resposta para esta questão depende da definição do que são ciclo e tendência.

Então, é difícil dizer quem extraiu o ciclo correto e quem extraiu um ciclo espúrio, pois isto vai da definição de cada pesquisador em relação ao que é ciclo e o que é tendência.

Pedersen (2001) afirma que o filtro HP é uma boa aproximação do filtro passo-alto ideal quando aplicado a séries temporais estacionárias, mas não é um filtro passo-alto ideal, devido aos fenômenos de “*leakage*” e “*compression*”.

Para Pedersen (2001) , o efeito Slutsky, o qual é definido como ciclos na função de transferência, é devido a uma insuficiente distinção entre o efeito da filtragem com o filtro passa-alto e o efeito do filtro HP.

Pedersen (2001, p.1087) destaca que,

[...] o que Slutsky mostrou foi que o filtro, o qual consiste de sucessivas operações de somas e diferenciações, gera ciclos espúrios em séries temporais filtradas, mesmo quando filtramos um processo ruído branco porque existe um ciclo na função de transferência do filtro.

Harvey e Jaeger (1993) analisam as distorções do filtro e concluem que elas podem criar ciclos espúrios ou distorcer a estimativa do componente cíclico das séries. Eles definem esta distorção como efeito Yule-Slutsky, isto é, como um ciclo na série filtrada que não está presente na série original.<sup>9</sup>

Esta propriedade do filtro HP pode levar a conclusões enganosas sobre a relação entre movimentos de curto prazo nas séries temporais macroeconômicas.

Harvey e Jaeger (1993) fornecem uma ilustração de como a filtragem com o filtro HP pode mudar substancialmente as propriedades de volatilidade e periodicidade do componente cíclico estimado. Os exemplos apresentados colocam sérias dúvidas sobre a validade dos ciclos obtidos das séries de preços e base monetária filtrada pelo filtro HP. Em particular, eles argumentam que a teoria econômica é inconsistente com a correlação negativa entre as séries de preço e o PIB para dados estadunidenses.

Cogley e Nason (1995) mostram que, quando o filtro HP é aplicado a dados cujo processo gerador é estacionário em diferenças, as regularidades empíricas acerca da periodicidade e das correlações com respeito ao ciclo de referência podem alterar as

---

<sup>9</sup> Isto é ilustrado com exemplos empíricos em Harvey e Jaeger (1993, p.236)

propriedades do ciclo original e dizer pouco a respeito das propriedades da dinâmica dos dados.

Para Park (1996) e Guay e St-Amant (1997), os *papers* anteriores, com o objetivo de avaliar a *performance* do filtro HP, têm usado definições não claras do componente de ciclo de negócios.

A principal conclusão é que o filtro HP é eficiente em termos de extrair as frequências de ciclos de negócios de séries de tempo cujo espectro possui um pico nestas frequências. O problema é que a maioria das séries econômicas apresentam a ‘Forma Espectral típica de Granger’: a densidade no seu espectro é altamente concentrada em baixas frequências. Quando uma série de tempo possui a forma Espectral típica de Granger (1966) e é filtrada pelo filtro HP, a série filtrada tem um pico ao redor das frequências de ciclo de negócio que não se encontra presente na série original, gerando ciclos espúrios.

Schenk- Hoppé (2002) analisou um modelo simples de crescimento econômico e ciclo de negócios no qual investimento e progresso técnico são estocásticos. e estudou numericamente se os filtros HP e BK detectam os ciclos de negócios em séries de tempo geradas pelo modelo.

A principal ênfase do estudo está nas propriedades qualitativas ao invés de estatísticas do ciclo. Os resultados causam dúvidas sobre a validade dos fatos estilizados dos ciclos de negócios comumente aceitos, e alertam para o perigo da filtragem de séries macroeconômicas não estacionárias por filtros.

Os ciclos de negócios do modelo e o resultado de métodos de filtragem são comparados e ambos os filtros HP e BK (as críticas referentes a esse filtro serão discutidas a seguir) geram ciclos de negócios espúrios quando aplicados aos dados gerados pelo modelo.

## 5.2 O FILTRO BK

As críticas mais importantes aos filtros passa-banda encontram-se nos *papers* de Benati (2001) e Murray (2002). Tomando vários modelos macroeconômicos como processos geradores de dados, Benati (2001) mostra que o filtro passa-banda:

- (a) pode fortemente distorcer fatos estilizados chaves de ciclo de negócios, como capturados pelas estatísticas de correlações cruzadas entre os componentes cíclicos das variáveis de interesse e o componente cíclico do PIB; e,
- (b) pode criar fatos estilizados espúrios. Estes resultados não são peculiares para uma classe particular do modelo, mas ao invés disso ilustram um problema geral: a presença de tendências estocásticas e a possibilidade de relações de cointegração entre variáveis macroeconômicas podem significativamente alterar os fatos estilizados de ciclo de negócios como capturados pelo filtro passa-banda.

As críticas ao filtro BK foram reagrupadas conforme 4 critérios: (i) Trade-off entre uma melhor aproximação do filtro ideal e a perda de observações ; (ii) Presença de tendências estocásticas e a possibilidade de relações de cointegração entre variáveis macroeconômicas; (iii) Fenômeno de Gibbs.

- i) Trade-off entre uma melhor aproximação ao filtro ideal e a perda de observações.

Existe um importante *tradeoff*: o filtro passa-banda ideal pode ser melhor aproximado quanto maior o tamanho das médias móveis, mas mais defasagens também significam que observações devem ser perdidas no começo e no final da amostra, deixando poucas para a análise.

A escolha do número de defasagens dependerá em grande medida da quantidade de dados disponíveis e do necessário para que se aproxime do filtro ideal. Se escolhermos uma

média móvel com defasagem  $k$ , significa que na implementação do filtro perdem-se  $2k$  observações.

Segundo Baxter e King (1995, p.9), “quando o valor de  $k$  aumenta, o filtro truncado aproximado mais se aproxima do filtro ideal. Além disso, maiores reduções em “*leakage*” e “*compression*” são obtidas com  $k=16$  e  $k=32$ ”.

ii) Presença de tendências estocásticas e a possibilidade de relações de cointegração entre variáveis macroeconômicas.

Conforme Benati (2001), a presença de tendências estocásticas e a possibilidade de relações de cointegração entre variáveis macroeconômicas podem significativamente alterar os fatos estilizados de ciclo de negócios como capturados pelo filtro passa-banda. O problema irá ser particularmente mais sério quando existe uma relação de cointegração entre a série de interesse e o PIB.

Primeiramente, fatos estilizados de ciclos de negócios chaves terminarão sendo distorcidos e contaminados pela presença de tendências estocásticas filtradas. Um exemplo típico é a correlação entre inflação e o componente cíclico da atividade econômica, a qual irá, em geral, aparecer mais fraca que é na realidade. Em tais circunstâncias, além disso, os fatos estilizados de ciclos de negócios capturados pelo filtro passa-banda refletirão tanto a relação entre os componentes cíclicos das duas séries, como a relação de cointegração entre as duas tendências estocásticas.

Para Benati (2001), o filtro passa-banda é baseado na noção de extrair das séries todos os componentes existentes dentro de uma banda de frequência pré-especificada, não interessando o fato de que tais componentes podem estar filtrando uma tendência estocástica.

Murray (2002) demonstra que o filtro de Baxter e King, e em geral qualquer filtro passa-banda, não isolam o ciclo em um modelo de componentes não observáveis com uma tendência estocástica. A primeira diferença da tendência passa através do filtro, e como

resultado, as propriedades espectrais das séries filtradas dependem da tendência da série original.

Murray (2002) define ciclo de negócios como desvios estacionários de uma tendência estocástica e demonstra que o espectro do modelo de componentes não observáveis filtrados pelo BK é composto de 3 componentes: um devido à tendência estocástica, um devido ao ciclo, e um termo de covariância. Além disso, o filtro BK atribui um peso muito maior ao componente de tendência do que ao componente cíclico na determinação do poder espectral das séries filtradas.

### iii) Fenômeno de Gibbs

O filtro original Baxter-King tem uma propriedade indesejável, a qual é conhecida como “Fenômeno de Gibbs”, devido ao fato de que o filtro ideal, o qual é uma função descontínua de  $w$ , é aproximado por séries de Fourier. Esta aproximação deixa de lado lóbulos na função ganho do filtro. (PRIESTLEY, 1981; KOOPMANS, 1974).

Enquanto a contribuição relativa de alguns componentes para toda a variância da série é exagerada (isto é, são multiplicados por um ganho maior do que 1), outros componentes são suprimidos (isto é, eles são multiplicados por um ganho menor do que 1).

Pode uma função descontínua, como a onda quadrada, ser expressa como uma soma, mesmo infinita, das contínuas?

Como demonstrado na figura 4, quanto mais termos são adicionados as séries, as oscilações parecem tornar-se mais rápidas e menores, mas os picos não estão decrescendo e os estranhos picos nas séries de Fourier de ondas quadráticas nunca desaparecem. J. Willard Gibbs explicou primeiramente este fenômeno em 1899, e conseqüentemente estes pontos descontínuos são descritos como o “Fenômeno de Gibbs”.

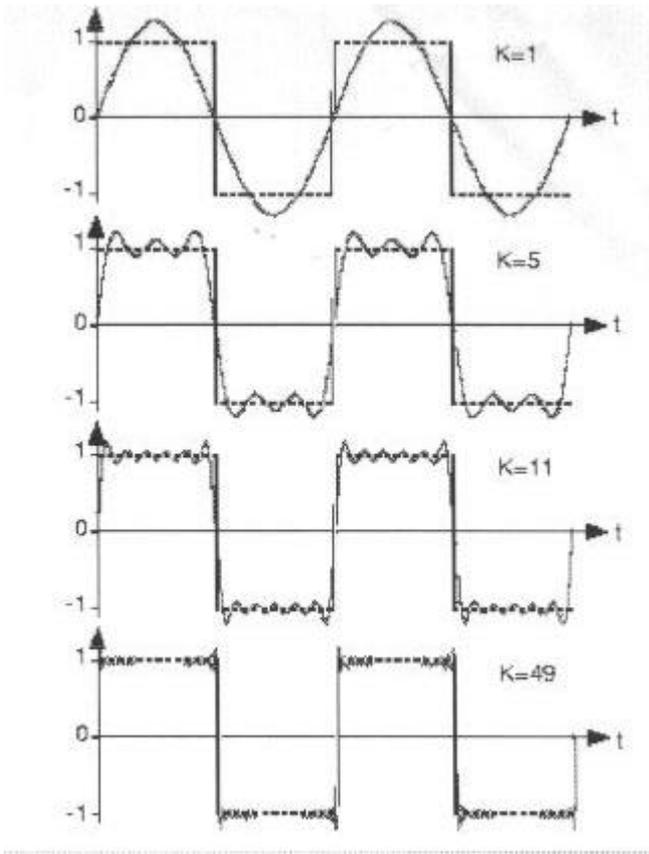


FIGURA 4 – Aproximação de Séries de Fourier de uma onda quadrada

Fonte: Disponível em <http://www.cnx.rice.edu/content/m10092/latest>

O número dos termos na soma de Fourier é indicado em cada painel da figura 1, e a onda quadrada é mostrada como uma linha traçada sobre dois períodos.

## 6. CONCLUSÕES

Foi iniciada uma discussão sobre os métodos de eliminação da tendência através do questionamento dos efeitos do filtro HP.

Como foi visto, os dois filtros apresentam problemas e a discussão sobre os métodos de filtragem está longe de ser encerrada.

Através da Análise espectral o intervalo de frequência é dividido em três segmentos: banda de frequências de longo prazo, banda de frequências de ciclo de negócios e banda de frequência de curto prazo.

Como visto no capítulo 3, o filtro HP retém os componentes com flutuações menores do que 32 trimestres, enquanto o filtro BK retém os componentes intermediários com flutuações entre 6 e 32 trimestres.

Ambos os filtros HP e BK geram resultados espúrios, uma vez que existe uma série de problemas relacionados ao processo de filtragem que foram discutidos no capítulo 5.

A aplicação dos filtros aos dados brasileiros comprova a observação feita por Baxter e King (1995) a qual afirma que os resultados da filtragem com ambos os filtros são parecidos.

Porém, os resultados, como visto no capítulo 4, deixam a desejar. Os filtros alteram a volatilidade, a persistência e o tipo de co-movimento da série do produto com cada série estudada.

Em particular, o filtro HP produz medidas de volatilidade significativamente maiores que o filtro BK, enquanto que as séries filtradas pelo filtro BK têm maior persistência do que as filtradas pelo HP.

Além disso, as correlações cruzadas das séries estudadas com o produto são fortemente diminuídas quando os dados são filtrados.

Vários filtros servem para extrair a tendência de uma série temporal e outros têm sido desenvolvidos recentemente com o objetivo de aperfeiçoar as técnicas de filtragem.

É um campo em amplo desenvolvimento como atesta a publicação ininterrupta de *papers* sobre o assunto.

Espera-se que essa introdução ao assunto sirva para incentivar outras pesquisas no campo.

## REFERÊNCIAS

BAXTER, M.; KING (1995), publicado como R. Measuring business cycles: approximate band-pass filters for economic time series, *Review of Economics and Statistics*, v.81, 1999, p.575-593.

BENATI, L. Band-Pass filtering, cointegration, and business cycle analysis, **Working Paper, Bank of England**, 2001.

BEVERIDGE, S.; NELSON, C. A new approach to the decomposition of economic time series into permanent and transitory components, with particular attention to the measurement of the ‘business cycle’, **Journal of Monetary Economics**, v. 7, 1981. p.151-74.

BURNS, A.M. ; MITCHELL, W.C. Measuring business cycles, National Bureau of Economic Research, New York.

BURNSIDE, C. Detrending and business cycle facts: a comment, **Journal of Monetary Economics**, v. 41, 1998, p. 513-32.

CANOVA, F. Detrending and business cycle facts, **Journal of Monetary Economics**, v. 41, 1998, p. 475-512.

CHRISTIANO, L.; FITZGERALD, T. The band-pass filter, **NBER Working Paper**, n. 7257, July, 1999.

COCHRANE, J. H. , *Time Series for Macroeconomics and Finance*, 1997; disponível em <http://gsbwww.uchicago.edu/fac/john.cochrane/research/Papers/timeser1.pdf>

COGLEY, T.; NASON, J. Effects of the Hodrick-Prescott filter on trend and difference stationary time series—implications for business cycle research, **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 19, 1995. p. 253-278.

ELLERY, R.; GOMES, V.; SACHSIDA, A. Business cycle fluctuations in Brazil. **RBE**, Rio de Janeiro 56(2), abr./jun., 2002. p.269-308.

GRANGER, CLIVE, The Typical Spectral Shape of Na Economic Variable,” *Econometrica*, vol 34, no.1 (janeiro 1966), 150-161.

GUAY, St-AMANT. Do the Hodrick-Prescott and Baxter-King filters provide a good. Approximation of Business Cycles? Working Paper N.53.

HAMILTON, J. D. Time series analysis, **Princeton University Press**, 1994.

HANSEN, GARY D. “ Technical Progress and Aggregate Fluctuations.” Department of Economics Working Paper no. 546, University of California, Los Angeles, 1989.

HARVEY, A. (1985), ‘Trends and cycles in macroeconomic time series’, **Journal of Business and Economic Statistics**, v. 3, 1985, p.216-27.

HARVEY, A.; JAEGER, A. Detrending, stylised facts, and the business cycle, **Journal of Applied Econometrics**, v. 8, 1993. p.231-47.

HODRICK, R. J.; PRESCOTT, E. C. Post-war US business cycles: an empirical investigation', reimpresso no **Journal of Money, Credit, and Banking**, v.29, 1997. p.1-16.

KING, R.; REBELO, S. (1993), 'Low-frequency filtering and real business cycles', **Journal of Economic Dynamics and Control**, v.17, 1993. p.207-31.

KOOPMANS, LEONID, The spectral analysis of time series, New York, N.Y. Academic Press, 1974.

MURRAY, C. **Cyclical properties of Baxter-King filtered time series**, Texas: University of Houston, 2002. (Mimeo).

NELSON, C. R.; KANG, H. Spurious periodicity in inappropriately detrended time series. **Econometrica** **41**, 1981. p.741-51.

NELSON, C. R.; PLOSSER, C. Trends and Ransom walks in macroeconomic time series. **Journal of Monetary Economics** **10**, 1982. p.139-67.

PEDERSEN, T. The Hodrick-Prescott filter, the Slutsky effect, and the distortionary effect of filters. **Journal of Economic Dynamics & Control** **25**, 2001. p.1081-1101.

PRIESTLEY, M., 1981. Spectral Analysis and Time Series. Academic Press, London.

ROSINGER, JEAN. Ciclos na Economia Brasileira: Uma aplicação do Filtro Hodrick e Prescott, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

SARGENT, T. **Macroeconomic theory**. Academic Press: Iith edition 1987.

SCHENK-HOPP; REINER, K. Economic growth and business cycles: A critical comment on detrending time series. Studies in nonlinear dynamics and econometrics. **Quarterly Journal**, v.5, n.1, 2001.

TELES, V. K.; SPRINGER, P.; GOMES, M. R. A.; CAVALCANTI, A. A. P.; PAES, N. L. Uma análise das propriedades dos ciclos de negócios: fatos estilizados para o Caso Brasileiro. UNB, Brasília, 2000.

WOITEC, U., 1998. A note on the Baxter-King Filter. Discussion Papers in Economics, no. 9813. University of Glasgow.

## ANEXOS

### ANEXO A – ALGORITMO DO FILTRO HP

```

function [s]=hpfiler(y,w)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Author: Ivailo Izvorski,
% Department of Economics
% Yale University.
% izvorski@econ.yale.edu
% This code has been used and seems to be free of error.
% However, it carries no explicit or implicit guarantee.
%
% function [s]=hpfiler(y,w)
% Hondrick Prescott filter where:
% w - smoothing parameter; w=1600 for quarterly data
% y - the original séries that has to be smoothed
% s - the filtered séries
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if size(y,1)<size(y,2)
    y=y';
end
t=size(y,1);
a=6*w+1;
b=-4*w;
c=w;
d=[c,b,a];
d=ones(t,1)*d;
m=diag(d(:,3))+diag(d(1:t-1,2),1)+diag(d(1:t-1,2),-1);
m=m+diag(d(1:t-2,1),2)+diag(d(1:t-2,1),-2);
%
m(1,1)=1+w;    m(1,2)=-2*w;
m(2,1)=-2*w;   m(2,2)=5*w+1;
m(t-1,t-1)=5*w+1; m(t-1,t)=-2*w;
m(t,t-1)=-2*w; m(t,t)=1+w;
%
s=inv(m)*y;

```

## ANEXO B – ALGORITMO DO FILTRO BK

```

function yf=bpf(y,up,dn,K);

% bpf.m
% Program to compute band-pass filtered séries
% Inputs are
% y: data (rows = observations, columns=séries)
% up: period corresponding to highest frequency (e.g., 6)
% dn: period corresponding to lowest frequency (e.g., 32)
% K: number of terms in approximating moving average
% [calls filtk.m (filter with symmetric weights) as subroutine]
x=[up dn];
disp(' ')
disp('bpf(y,up,dn,K): band-pass filtering of séries y with symmetric MA(2K+1)')
disp(' ')
disp('          for additional information see: ')
disp(' ')
disp('          M. Baxter and R.G. King      ')
disp(' ')
disp('          Measuring Business Cycles: ')
disp('          Approximate Band-Pass Filters')
disp('          for Macroeconomic Time Séries')
disp(' ')
disp('Filter extracts components between periods of: ')
disp(' up dn')
disp(x)
% pause(2)

if (up>dn)
disp('Periods reversed: switching indices up & dn')
disp(' ')
dn=x(1); up=x(2);
end

if (up<2)
up=2;
disp('Higher periodicity > max: Setting up=2')
disp(' ')
end
% convert to column vector
[r c]=size(y);
if (r<c)
y=y';
disp('There are more columns than rows: Transposing data matrix')
disp(' ')
end
% Implied Frequencies
omubar=2*pi/up;

```

```

omlbar=2*pi/dn;
% An approximate low pass filter, with a cutoff frequency of "ombar",
% has a frequency response function
%
%  $\alpha(\omega) = a_0 + 2*a_1 \cos(\omega) + \dots + 2*a_K \cos(K \omega)$ 
%
% and the  $a_k$ 's are given by:
%
%  $a_0 = \text{ombar}/(\pi)$              $a_k = \sin(k \text{ ombar})/(k \pi)$ 
%
% where ombar is the cutoff frequency.

% A band-pass filter is the difference between two
% low-pass filters,
%  $bp(L) = bu(L) - bl(L)$ 
% with  $bu(L)$  being the filter with the high cutoff point and  $bl(L)$  being
% that with the low cutoff point. Thus, the weights are differences
% of weights for two low-pass filters.

% Construct filter weights for bandpass filter ( $a(0) \dots a(K)$ ).

akvec=zeros(1,1:K+1);

akvec(1)=(omubar-omlbar)/(pi); % weight at  $k=0$ 

for k=1:K;
    akvec(k+1)=(sin(k*omubar)-sin(k*omlbar))/(k*pi); % weights at  $k=1,2,\dots,K$ 
end

% Impose constraint on frequency response at  $\omega = 0$ 
% (If high pass filter, this amounts to requiring that weights sum to zero).
% (If low pass filter, this amounts to requiring that weights sum to one).

if (dn>1000)
    disp('dn > 1000: assuming low pass filter')
    phi=1;
else
    phi=0;
end
% sum of weights without constraint
theta=akvec(1)+2*sum(akvec(2:K+1));
% amount to add to each nonzero lag/lead to get sum = phi
theta=phi-(theta/(2*K+1));
% adjustment of weights
akvec=akvec+theta;
% filter the time series
yf=filtk(y,akvec);
if (r<c)
    yf=yf';
end

```

## ANEXO C – SÉRIES ORIGINAIS EM LN

w	h	l	C	Y
4,61115	4,63032	4,4673	4,537903	4,563097
4,56432	4,64375	4,5549	4,607805	4,621536
4,52392	4,59563	4,6557	4,659981	4,654627
4,53862	4,61027	4,5417	4,609142	4,620748
4,54280	4,60519	4,5040	4,597958	4,610456
4,55154	4,60201	4,4646	4,589675	4,606569
4,58424	4,60986	4,4744	4,590835	4,60527
4,58870	4,59654	4,5110	4,610621	4,617593
4,57708	4,59656	4,5245	4,625179	4,641309
4,59894	4,59248	4,5535	4,654459	4,661172
4,59913	4,59275	4,5485	4,65138	4,665795
4,65845	4,55689	4,5725	4,634751	4,663439
4,62834	4,59075	4,6262	4,660395	4,681298
4,61229	4,58045	4,5879	4,674826	4,684351
4,59922	4,58301	4,6587	4,7249	4,724463
4,61795	4,58821	4,8393	4,787401	4,767204
4,59994	4,59260	4,8356	4,822955	4,773055
4,64071	4,59431	4,7804	4,796746	4,760035
4,61257	4,60149	4,6850	4,773488	4,741361
4,60100	4,59402	4,7037	4,792171	4,751001
4,57758	4,58420	4,7106	4,787696	4,755485
4,57639	4,58448	4,7410	4,817491	4,768818
4,61008	4,56745	4,7876	4,861456	4,804103
4,63545	4,58511	4,8163	4,863918	4,802052
4,62049	4,58394	4,8282	4,858983	4,801641
4,57740	4,58023	4,8496	4,870854	4,810801
4,56499	4,58916	4,8728	4,867695	4,823663
4,60389	4,57263	4,8649	4,86073	4,824627
4,65340	4,59178	4,8573	4,859227	4,804349
4,69440	4,57224	4,8665	4,855992	4,828874
4,69407	4,56356	4,8606	4,867914	4,825831
4,59791	4,57801	4,8187	4,846479	4,807213
4,62169	4,58318	4,7877	4,84502	4,812753
4,65035	4,59067	4,7779	4,842043	4,819959
4,69042	4,60064	4,7593	4,857279	4,823502
4,72019	4,65971	4,7785	4,870272	4,841269
4,75046	4,64631	4,7829	4,870319	4,854839
4,73004	4,64816	4,8168	4,880697	4,86507
4,73698	4,63506	4,8219	4,902786	4,868303
4,74411	4,63204	4,8550	4,912161	4,878931
4,76881	4,62111	4,8738	4,912627	4,88907
4,79965	4,60659	4,8433	4,911231	4,884089
4,79240	4,57653	4,8335	4,883933	4,874586
4,72930	4,56513	4,7659	4,886463	4,870837
4,73236	4,52485	4,7719	4,895406	4,887186

4,70984	4,52970	4,7790	4,901818	4,894101
4,73164	4,51905	4,7970	4,887524	4,905719
4,73947	4,52673	4,8048	4,882084	4,907199
4,74995	4,50098	4,7551	4,868805	4,899108

Essas séries foram fornecidas pelo Ipea-data com as seguintes denominações:

Y : PIB - preços de mercado - índice encadeado - dessaz. (média 1990 = 100); C: Consumo final - famílias - índice encadeado - dessaz.- trim (média 1990 = 100); I: Capital fixo - formação bruta - índice encadeado -trim (média 1990 = 100); N : Horas trabalhadas - indústria - índice (média 1992 = 100) (mensal) ; W: Salário - real - indústria - índice (média 1992 = 100 (mensal);

OBS: Todas as séries são do primeiro trimestre de 1991 ao último trimestre de 2003.