

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA FADIGA EM MATERIAIS COMPOSTOS  
LAMINADOS DE RESINA POLIMÉRICA REFORÇADA POR FIBRAS DE VIDRO**

**Dissertação submetida à**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**para a obtenção do grau de**

**MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**LUCIANO FEDALTO**

**Florianópolis, Março de 2004**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DA FADIGA EM MATERIAIS COMPOSTOS  
LAMINADOS DE RESINA POLIMÉRICA REFORÇADA POR FIBRAS DE VIDRO**

**LUCIANO FEDALTO**

**Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de**

**MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA**

**sendo aprovada em sua forma final.**

---

**EDISON DA ROSA, Dr.Eng.  
Orientador**

---

**JOSÉ ANTONIO BELLINI DA CUNHA NETO, Dr.  
Coordenador do Curso**

**BANCA EXAMINADORA**

---

**CARLOS HENRIQUE AHRENS, Dr.Eng.  
Presidente**

---

**JOSÉ CARLOS PEREIRA, Dr.**

---

**MARCELO KRAJNC ALVES, Ph.D.**

---

**PAULO DE TARSO ROCHA DE MENDONÇA, Ph.D.**

# Agradecimentos

À **CAPES** pelo apoio financeiro;

Ao professor **Edison da Rosa**, pela orientação deste trabalho e experiências compartilhadas;

Aos **professores** pela transmissão dos seus valiosos conhecimentos;

Ao **peçoal do GRANTE**, bolsistas, mestrandos e doutorandos pela ajuda e descontração;

Aos **colegas de república**, pelo convívio;

À **Carolina**, pela paciência e compreensão;

Aos meus Irmãos **Rodrigo** (em memória) e **Franciele**;

Aos meus pais **Luís Mário** e **Eunice**, pela minha existência, apoio e confiança;

A **Deus**.

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumo</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Materiais compostos laminados</b>	<b>3</b>
2.1 O laminado . . . . .	3
2.2 Propriedades mecânica das lâminas ortotrópicas . . . . .	3
2.2.1 Micromecânica da lâmina . . . . .	4
2.2.2 Macromecânica da lâmina . . . . .	8
2.3 Critérios de falha . . . . .	13
2.3.1 Teoria da máxima tensão . . . . .	13
2.3.2 Teoria de máxima deformação . . . . .	14
2.3.3 Critério de falha de Tsai-Hill . . . . .	14
2.3.4 Critério de falha de Tsai-Wu . . . . .	15
2.3.5 Índice progressivo de falha de LIU e TSAI (2001) . . . . .	16
<b>3 Dano e fadiga</b>	<b>19</b>
3.1 Mecanismos de dano . . . . .	20
3.1.1 Dano multidimensional . . . . .	21
3.1.2 Modelo de dano . . . . .	25
3.2 Dano aplicado à fadiga em materiais compostos . . . . .	26
3.2.1 Abordagem micro-mecânica . . . . .	26
3.2.2 Abordagem Fenomenológica . . . . .	27

---

3.2.3	Modelo de dano fenomenológico de fadiga em composto de fibra e polímero unidirecional . . . . .	28
3.2.4	Modelo multidimensional . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Elementos finitos</b>	<b>35</b>
4.1	Teoria de elementos finitos para placas laminadas . . . . .	35
4.1.1	Equações cinemáticas e de movimento . . . . .	35
4.1.2	Relações constitutivas . . . . .	39
4.1.3	Formulação em elementos finitos . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Desenvolvimento experimental e numérico</b>	<b>49</b>
5.1	O desenvolvimento do ensaio experimental . . . . .	49
5.1.1	Corpos de prova . . . . .	49
5.1.2	Procedimento de ensaio . . . . .	51
5.1.3	Ensaio realizados . . . . .	55
5.2	O desenvolvimento do ensaio numérico . . . . .	55
5.2.1	Modelo de elementos finitos . . . . .	56
5.2.2	Cálculo das tensões . . . . .	58
5.2.3	Cálculo do dano . . . . .	58
5.2.4	Rotina de cálculo . . . . .	61
5.2.5	Análise do corpo de prova . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Análise de resultados</b>	<b>66</b>
6.1	Análise comparativa do modelo proposto com a bibliografia . . . . .	66
6.2	Resultados preliminares . . . . .	68
6.3	Resultados experimentais e numéricos dos ensaios de fadiga . . . . .	75
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>79</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Extensometria</b>	<b>84</b>
A.1	Extensômetros . . . . .	84
A.2	Sistema de medição para os extensômetros . . . . .	85
<b>B</b>	<b>Validação do modelo de elementos finitos</b>	<b>89</b>
<b>C</b>	<b>Projeto da célula de carga</b>	<b>91</b>
C.1	Objetivo . . . . .	91
C.2	Introdução . . . . .	91
C.3	Desenvolvimento do projeto . . . . .	91

---

C.3.1	Análise estrutural . . . . .	92
C.3.2	Materiais . . . . .	93
C.3.3	Extensometria . . . . .	93
C.3.4	Calibração da célula . . . . .	95
C.4	Conclusão . . . . .	96

# Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática de um laminado. . . . .	3
2.2	Sistema de eixos de ortotropia. . . . .	4
2.3	Esquema do ensaio de tração. . . . .	5
2.4	Esquema do ensaio de cisalhamento. . . . .	6
2.5	Representação esquemática dos índices de falha. . . . .	17
3.1	Curva de degradação da rigidez típica para materiais compostos. . . . .	28
5.1	Geometria dos corpos de prova. . . . .	50
5.2	Corpos de prova instrumentados, em cima $[0^\circ/90^\circ]$ e em baixo $[45^\circ/-45^\circ]$ . . . . .	51
5.3	Esquema da instrumentação dos corpos de prova. . . . .	51
5.4	Vista superior da máquina de fadiga. . . . .	52
5.5	Lateral da máquina de ensaio de fadiga . . . . .	52
5.6	Esquema ilustrativo do ensaio. . . . .	53
5.7	Deslocamento senoidal aplicado. . . . .	53
5.8	Numeração do elemento quártico de 25 nós. . . . .	57
5.9	Definição da posição de avaliação das tensões ao longo da espessura do laminado. . . . .	58
5.10	Fluxograma da rotina de cálculo . . . . .	63
5.11	Malha utilizada nas simulações. . . . .	64
5.12	Localização das rotações prescritas. . . . .	65
5.13	Condição de contorno de engaste. . . . .	65
6.1	Resultados de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) . . . . .	67
6.2	Reprodução dos resultados da figura 6.1 através do modelo proposto. . . . .	68
6.3	Gráficos de histerese do CP $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ para a excentricidade de 3 mm. . . . .	69
6.4	Gráficos de histerese do CP $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ para a excentricidade de 8 mm. . . . .	70
6.5	Gráficos de histerese do CP $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$ para a excentricidade de 3 mm. . . . .	70
6.6	Gráficos de histerese do CP $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$ e uma excentricidade de 8 mm. . . . .	71
6.7	Deformações simuladas pela excentricidade para CP $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ . . . . .	71
6.8	Deformações experimentais pela excentricidade para CP $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ . . . . .	72

---

6.9	Deformações simuladas pela excentricidade para CP $[45^\circ / - 45^\circ]_{22}$ . . . . .	73
6.10	Deformações experimentais pela excentricidade para CP $[45^\circ / - 45^\circ]_{22}$ . . . . .	73
6.11	Gráfico do momento pela excentricidade para CP $[0^\circ / 90^\circ]_{22}$ . . . . .	74
6.12	Gráfico do momento pela excentricidade para CP $[45^\circ / - 45^\circ]_{22}$ . . . . .	74
6.13	Corpo de prova com características do segundo estágio de degradação. . . . .	75
6.14	Ensaio de fadiga no corpo de prova de $[0^\circ / 90^\circ]_{22}$ com espessura de 2,2 mm. . . . .	76
6.15	Efeitos da deformação permanente nos momentos em CP $[45^\circ / - 45^\circ]_{24}$ . . . . .	77
6.16	Ensaio de fadiga no corpo de prova de $[45^\circ / - 45^\circ]_{24}$ com espessura de 2,4 mm. . . . .	77
6.17	Corpo de prova danificado, com falha final. . . . .	78
6.18	Ensaio do CP $[0^\circ / 90^\circ]_{24}$ com falha final. . . . .	78
A.1	Partes de um extensômetro metálico. . . . .	85
A.2	Representação esquemática da ponte de Wheatstone. . . . .	86
A.3	Tipos de montagem da ponte de Wheatstone. . . . .	87
A.4	Diagrama do sistema de medição de deformações por extensômetros. . . . .	87
C.1	Corpo da célula de carga e o posicionamento dos extensômetros. . . . .	92
C.2	Malha, carregamento e condições de contorno utilizados na análise. . . . .	94
C.3	Tensões equivalentes para a carga máxima da célula. . . . .	94
C.4	Deformações na direção $y$ decorrentes da carga máxima na célula. . . . .	95
C.5	Curva de calibração da célula de carga. . . . .	96
C.6	Desenho de fabricação do corpo da célula de carga. . . . .	97
C.7	Instrumentação da célula de carga. . . . .	98



# Lista de Símbolos

$h$	espessura total do laminado
$h_k$	espessura da lâmina $k$
$xyz$	sistema de referência global
123	sistema de referência da lâmina
$\theta$	ângulo de rotação de 123 para $xyz$
$E_{11}$	módulo de elasticidade longitudinal na direção 1
$E_{22}$	módulo de elasticidade longitudinal na direção 2
$\nu_{12}$	coeficiente maior de Poisson
$\nu_{21}$	coeficiente menor de Poisson
$G_{12}$	módulo de elasticidade cisalhante 1 – 2
$X_t$	resistências à tração direção 1
$X_c$	resistência à compressão direção 1
$Y_t$	resistências à tração direção 2
$Y_c$	resistência à compressão direção 2
$S$	resistência ao cisalhamento 1 – 2
$\sigma_{fR}$	tensão de ruptura da fibra
$\sigma_{mR}$	tensão de ruptura da matriz
$\nu_m$	coeficientes de Poisson da matriz
$\nu_f$	coeficientes de Poisson da fibra
$E_m$	módulo de elasticidade da matriz
$E_f$	módulo de elasticidade da fibra
$[S^1]$	matriz de flexibilidade do material
$[C^1]$	matriz de rigidez do material
$[S^1]^*$	matriz de flexibilidade reduzida
$[Q^1]^*$	matriz de rigidez reduzida
$[T]$	matriz de transformação
$[\bar{Q}]$	matriz de rigidez reduzida transformada
$[\bar{S}]$	matriz de flexibilidade reduzida transformada
$C_s$	coeficiente de segurança
$T_R$	taxa de resistência

$\Sigma_{ij}^{1D}$	índices de falha unidirecionais
$\Sigma_{ij}^{2D}$	índices de falha bidirecionais
$\Sigma_{ij}$	índices de falha multidirecionais
$\tilde{\sigma}_{ij}$	tensão efetiva
$\sigma_{ij}$	tensão nominal
$D_{ij}$	variáveis de dano
$c_i$	coeficientes do modelo de dano para fadiga
$N$	número de ciclos de vida
$\epsilon_{ij}$	deformação de Green-St. Venant
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker
$u^o$	deslocamento de membrana na direção $x$
$v^o$	deslocamento de membrana na direção $y$
$w$	deflexão na direção $z$
$\psi_x$	rotação em torno do eixo $x$
$\psi_y$	rotação em torno do eixo $y$
$\{\epsilon^o\}$	vetor de deformações de membrana
$\{\kappa\}$	vetor das curvaturas de referência
$\{N\}$	vetor de esforços normais
$\{M\}$	vetor de momentos
$\bar{z}_k$	cota da superfície média da lâmina $k$
$[A]$	matriz de rigidez de membrana
$[B]$	matriz de rigidez de acoplamento entre flexão e membrana
$[D]$	matriz de rigidez de flexão do laminado
$N(r, s)$	funções base
$[B_{mf}^e(x, y)]$	matriz de deformação membrana-flexão
$[B_{mf}^e(x, y)]$	matriz de deformação cisalhante
$[K_{mf}^e]$	matriz de rigidez de membrana-flexão
$[K_c^e]$	matriz de cisalhamento transversal
$\{F^e\}$	vetor força nodal

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar o comportamento da fadiga em materiais compostos laminados. O material composto foco do estudo é formado por resina epóxi reforçada por fibra de vidro dispostas em lâminas com as fibras orientadas a  $[0^\circ/90^\circ]$  e a  $[45^\circ/-45^\circ]$ . Duas abordagens do problema foram propostas, uma experimental e outra numérica. A parte experimental avalia a fadiga em corpos de prova que foram ensaiados numa máquina de fadiga por flexão, sendo levantadas curvas de esforços pelo número de ciclos de vida do material. Os corpos de prova foram fabricados utilizando o processo de moldagem a vácuo em molde aberto. Técnicas de extensometria foram aplicadas na aquisição dos dados experimentais. Na parte numérica foi aplicado um modelo de dano que avalia o comportamento da fadiga em materiais compostos. Este modelo consiste de uma lei de evolução do dano que utiliza as tensões que a peça está submetida pelos carregamentos cíclicos aplicados. As tensões foram obtidas de um modelo de elementos finitos para placas de materiais ortotrópicos laminados. Foi utilizado um elemento quártico de 25 nós, para de obter-se boa precisão na tensões com um custo computacional não muito elevado. O modelo está implementado em uma rotina de cálculo no Software MATLAB. Os resultado obtidos na análise numérica foram confrontados com os dados experimentais dos ensaios e com dados da literatura.

# Abstract

The aim of this study is analyse the fatigue behavior at laminated composites materials made of epoxy resin reinforced by fiber glass. It was considered two composites configurations,  $[0^\circ/90^\circ]$  and  $[45^\circ/ - 45^\circ]$ . Fatigue life was analysed by experimental analysis and numerical model. In the experimental analysis, glass-epoxy specimens were tested in a bending fatigue machine. Strain gages was used as sensors in data aquisition. The specimens were manufactured using the vacuun molding tecnique. A damage model was used in the numerical analysis to measure the fatigue in the composite material. A damage evolution law was inserted in the elastic finite element model. Theories for orthotropic laminate material in plates were applied. The 25 nodes element type with fourth order polinomial function was used in numerical analysis. The experimental analysis results was confronted with the numerical analysis results.

# Capítulo 1

## Introdução

Atualmente existe uma constante necessidade de redução do peso aliada ao aumento da resistência mecânica dos componentes estruturais de peças e equipamentos, principalmente nas indústrias aeronáutica e aeroespacial, que vêm utilizando cada vez mais materiais alternativos. Com isso, julga-se importante conhecer as propriedades destes materiais, visando melhorar a qualidade dos projetos e análises estruturais.

Assim, revela-se um vasto campo para a aplicação de materiais compostos laminados. Este tipo de material tem propriedades preferenciais em certas direções, podendo ser aplicado para otimizar regiões de peças onde ocorrem solicitações mais acentuadas. Propõe-se análises baseadas em conceitos e teorias provenientes da resistência dos materiais e da mecânica dos sólidos para avaliação dessas regiões. Componentes constituídos de materiais compostos, cada vez mais, estão sendo utilizados em várias aplicações de engenharia, como automobilística, aeroespacial, química, petroquímica, esportiva e biomédica. Na maioria dos casos, a concepção do projeto destes componentes leva em consideração apenas a análise de modos de falha para carregamentos estáticos, não sendo considerado o comportamento do material para solicitações dependentes do tempo. Estas solicitações podem desencadear processos de acúmulo de dano e vir a culminar na falha do componente por fadiga, fluência, entre outros modos de falha. O problema de prever falhas por fadiga em materiais compostos, constituídos de polímeros reforçados por fibras, é relevante nas atividades relacionadas ao projeto e a inspeção de estruturas e componentes.

A ausência de um critério de falha bem definido, que possa ser utilizado para prever a falha por fadiga, desencadeou a investigação deste problema de diversos pontos de vista. As metodologias propostas estão baseadas principalmente em modelos de dano.

O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento em fadiga de materiais compostos laminados de fibra de vidro e resina epóxi. Assim, dois focos de análise foram abordados, um experimental e outro numérico.

Na parte experimental foram testados corpos de prova de fibra de vidro e resina epóxi. O equipamento utilizado nos testes foi uma máquina de ensaio de fadiga, submetendo os

corpos de prova à um carregamento de flexão cíclica. Os corpos de prova foram fabricados por moldagem à vácuo, em duas configurações de orientação das fibras, em  $[0^\circ/90^\circ]$  e em  $[45^\circ/-45^\circ]$ .

Na abordagem numérica foi implementado um modelo de dano que avalia a fadiga no decorrer da vida do material. O modelo consiste em uma lei de evolução do dano que rege a análise. Esta lei se utiliza das tensões resultantes de uma determinada condição de contorno e de carregamento, obtidas através de um modelo de elementos finitos para placas laminadas, empregando um elemento quártico de 25 nós. As propriedades do material foram obtidas através de ensaios experimentais. Os dados obtidos no modelo numérico foram confrontados com os resultados da análise experimental.

O trabalho está disposto em sete capítulos e três apêndices.

No capítulo 2 são mostradas as propriedades mecânicas dos materiais compostos laminados.

O capítulo 3 apresenta uma revisão de dano e suas aplicações na análise da fadiga para materiais compostos.

O capítulo 4 aborda conceitos de elementos finitos aplicados para placas ortotrópicas laminadas.

No capítulo 5 estão apresentados os desenvolvimentos experimentais e numéricos que foram feitos durante a pesquisa.

Os resultados obtidos, bem como uma análise dos resultados são apresentados no capítulo 6.

As conclusões e propostas para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 7.

No apêndice A está apresentada uma revisão de conceitos básicos de extensometria e análise experimental de tensões.

O apêndice B apresenta a validação do modelo de cálculo por elementos finitos.

No apêndice C está o projeto da célula de carga utilizada nos ensaios experimentais.

# Capítulo 2

## Materiais compostos laminados

As propriedades mecânicas apresentadas pelos materiais compostos laminados ortotrópicos são de fundamental importância nesse trabalho. Assim, uma revisão sobre o assunto é apresentada neste capítulo.

### 2.1 O laminado

Um laminado é formado por várias lâminas sobrepostas como representado na figura 2.1, sendo  $h$  a espessura total do laminado e  $h_k$  a espessura de cada lâmina  $k$ . As propriedades mecânicas deste laminado dependem das propriedades e da orientação das fibras de cada a lâmina que o constituem. As propriedades das lâminas são descritas nas seções abaixo.

### 2.2 Propriedades mecânica das lâminas ortotrópicas

Análise e projeto de estruturas em material composto laminado requer o conhecimento de propriedades macro-mecânicas, como resistências mecânicas e parâmetros do comportamento elástico. Estas dependem das propriedades das lâminas que o compõe, bem como da orientação e da posição das lâminas no laminado. Estas propriedades podem

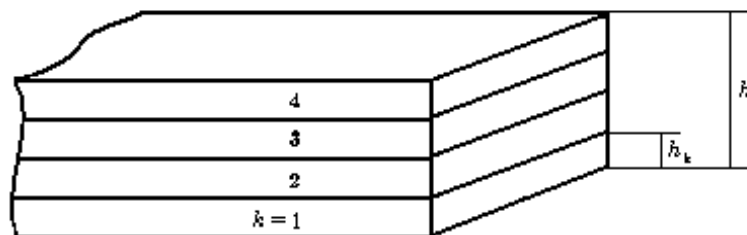


Figura 2.1: Representação esquemática de um laminado.

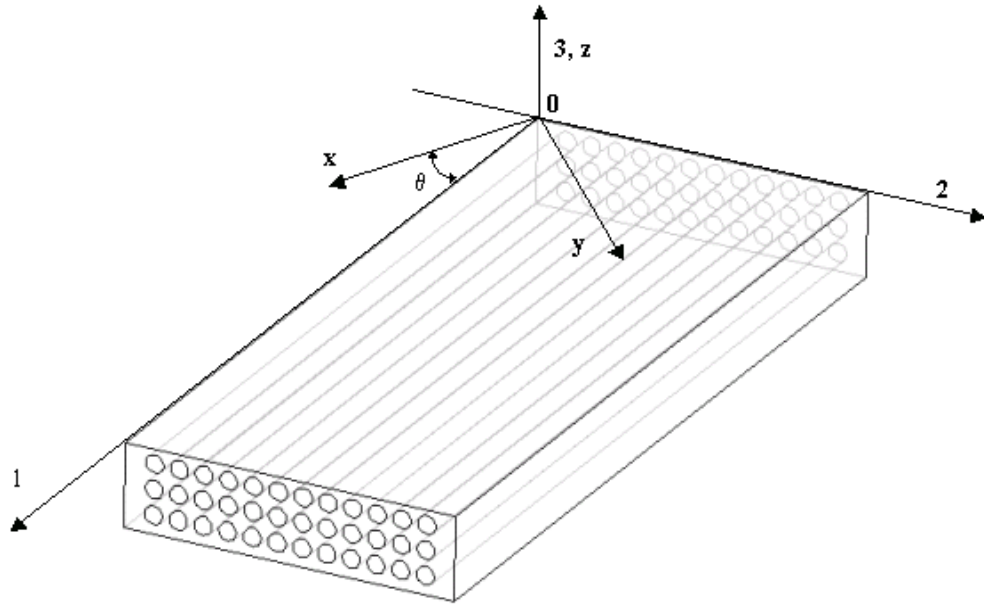


Figura 2.2: Sistema de eixos de ortotropia.

ser obtidas através de ensaios em corpos de prova.

Nesta seção é apresentada uma revisão das propriedades macro e micro mecânicas da lâmina. O assunto pode ser aprofundado em bibliografia específica como em MENDONÇA (2001) e GIBSON (1994).

### 2.2.1 Micromecânica da lâmina

A determinação das propriedades mecânicas de uma lâmina dependem de ensaios mecânicos, na lâmina ou em seus componentes. Estes ensaios devem ser simples e preferencialmente uniaxiais.

Considera-se as direções ortonormais mostradas na figura 2.2, onde as direções  $x$ ,  $y$ ,  $z$  representam o sistema de referência global do laminado  $0xyz$ . A direção 1 é a direção longitudinal das fibras, a direção 2 é a direção transversal às fibras e a direção 3 é a direção normal à lâmina, representando o sistema de ortotropia de cada lâmina  $0123$ . O sistema  $0123$  está rotacionado do sistema  $0xyz$ , no eixo  $z$ , pelo ângulo  $\theta$ , MENDONÇA (2001).

#### Propriedades empíricas

Aplicando-se uma tensão  $\sigma_{11}$  na direção 1 da placa, como na figura 2.3 a), duas deformações são geradas:  ${}^1\epsilon_{11}$ , sendo a deformação de membrana na direção 1, e  ${}^1\epsilon_{22}$ , sendo a deformação de membrana na direção 2. Dessas duas informações defini-se as propriedades:



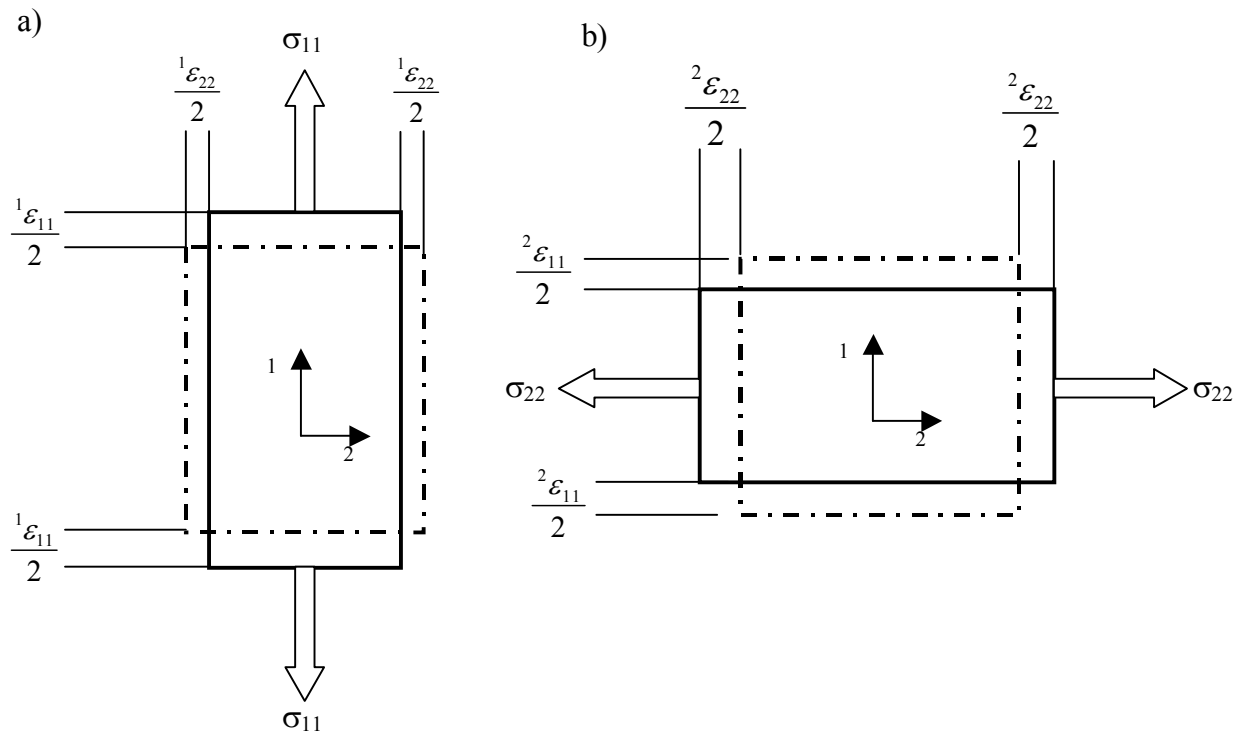


Figura 2.3: Esquema do ensaio de tração.

$$E_{11} = \frac{\sigma_{11}}{1\epsilon_{11}} \quad (2.1)$$

$$\nu_{12} = -\frac{1\epsilon_{22}}{1\epsilon_{11}} \quad (2.2)$$

sendo  $E_{11}$  o módulo de elasticidade longitudinal na direção principal 1 da lâmina e  $\nu_{12}$  o coeficiente maior de Poisson da lâmina.

Submetendo a placa uma tensão  $\sigma_{22}$  na direção 2 da lâmina, como na figura 2.3 b), obtém-se as deformações:  $2\epsilon_{22}$ , sendo a deformação de membrana na direção 2 e  $2\epsilon_{11}$  sendo a deformação de membrana na direção 1. Assim define-se:

$$E_{22} = \frac{\sigma_{22}}{2\epsilon_{22}} \quad (2.3)$$

$$\nu_{21} = -\frac{2\epsilon_{11}}{2\epsilon_{22}} \quad (2.4)$$

sendo  $E_{22}$  o módulo de elasticidade longitudinal na direção principal 2 da lâmina e  $\nu_{21}$  o coeficiente menor de Poisson da lâmina.

Aplicando a tensão cisalhante  $\sigma_{12}$  nas direções principais, como apresentado na figura

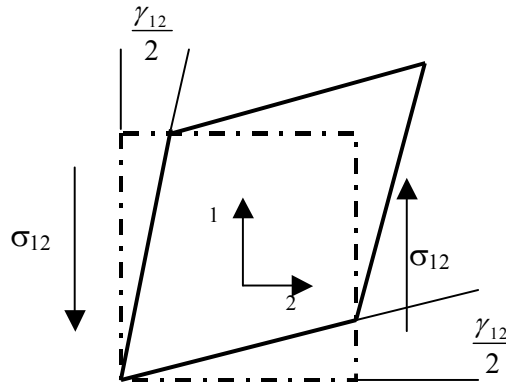


Figura 2.4: Esquema do ensaio de cisalhamento.

2.4, pode-se medir a deformação cisalhante no plano  $\gamma_{12}$ , e obter a seguinte propriedade:

$$G_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\gamma_{12}} \quad (2.5)$$

sendo  $G_{12}$  o módulo de elasticidade cisalhante para o plano principal 1-2.

Determina-se as propriedades de resistência da lâmina com estes mesmos ensaios, onde para o plano 1-2:

- $X_t$  e  $X_c$  são as resistências à tração e à compressão na direção 1;
- $Y_t$  e  $Y_c$  são as resistências à tração e à compressão na direção 2;
- $S$  é a resistência ao cisalhamento no plano 1-2.

Para os planos 1-3 e 2-3 têm-se:

- $Z_t$  e  $Z_c$  são as resistências à tração e à compressão na direção 3;
- $S_1$  e  $S_2$  são as resistências ao cisalhamento nos planos 1-3 e 2-3 respectivamente.

Além de esforços mecânicos as lâminas podem ser submetidas a cargas devido a dilatações térmicas e de umidade. Essas cargas geram deformações que podem influenciar o comportamento do material. Determina-se coeficientes de dilatação térmica e de dilatação devido à umidade através de ensaios empíricos.

Por não estar no escopo deste trabalho, não será dada ênfase a estas dilatações. Porém o assunto pode ser visto com maiores detalhes em bibliografia especializada, como em MENDONÇA (2001).

### Propriedades teóricas

A proporção relativa entre fibra e resina é uma importante indicação da constituição da lâmina. Existem duas medidas que as relacionam: uma de massa relativa, utilizada principalmente na fabricação e outra de volume relativo, usadas para obtenção das propriedades teóricas.

Assim, faz-se necessário definir:

- $v_c$  sendo o volume do composto;
- $v_f$  e  $v_m$  sendo o volume de fibra e de matriz no composto;
- $v_v$  sendo o volume de vazios presentes no composto;
- $m_c$  sendo a massa do composto;
- $m_f$  e  $m_m$  sendo a massa de fibra e de matriz no composto;

Pode-se também definir as relações:

$$v_c = v_f + v_m + v_v \quad (2.6)$$

$$m_c = m_f + m_m \quad (2.7)$$

Com isso, define-se as frações volumétricas  $V_f$ ,  $V_m$  e  $V_v$  da fibra, matriz e vazios, e as frações de massa  $M_f$  e  $M_m$  da fibra e da matriz no composto.

$$V_f = \frac{v_f}{v_c}; \quad V_m = \frac{v_m}{v_c}; \quad V_v = \frac{v_v}{v_c} \quad (2.8)$$

$$M_f = \frac{m_f}{m_c}; \quad M_m = \frac{m_m}{m_c} \quad (2.9)$$

As frações definidas em (2.8) e (2.9) devem satisfazer:

$$V_f + V_m + V_v = 1 \quad \text{e} \quad M_f + M_m = 1 \quad (2.10)$$

Definindo  $\rho_c$ ,  $\rho_f$  e  $\rho_m$  como as densidades (massa/volume) do composto, da fibra e da matriz respectivamente, constata-se que:

$$\rho_c = \rho_f V_f + \rho_m V_m \quad (2.11)$$

Dos ensaios de tração uniaxiais da fibra e da matriz separadamente, pode-se desenvolver as propriedades teóricas da lâmina, detalhes do desenvolvimento em MENDONÇA (2001).

Assim, o módulo de elasticidade  $E_{11}$  pode ser determinado por:

$$E_{11} = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.12)$$

A resistência à ruptura em tração longitudinal  $X_t$ , por:

$$X_t = \sigma_{fR} \left[ V_f \left( 1 - \frac{E_m}{E_f} \right) + \frac{E_m}{E_f} \right] \quad (2.13)$$

sendo  $\sigma_{fR}$  a tensão de ruptura da fibra e  $E_f$  o módulo de elasticidade da fibra.

O módulo de elasticidade  $E_{22}$ , é obtido por:

$$\frac{1}{E_{22}} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad (2.14)$$

A ruptura transversal a tração  $Y_t$ , é determinada por:

$$Y_t = \sigma_{mR} \left( \frac{E_{22}}{E_m} \right) \left( 1 - V_f^{1/3} \right) \quad (2.15)$$

sendo  $\sigma_{mR}$  a tensão de ruptura da matriz e  $E_m$  o módulo de elasticidade da matriz.

Os coeficientes de Poisson  $\nu_{12}$  e  $\nu_{21}$ , são obtidos por:

$$\nu_{12} = \nu_m V_m + \nu_f V_f \quad (2.16)$$

$$\nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} \nu_{12} \quad (2.17)$$

sendo  $\nu_m$  e  $\nu_f$  coeficientes de Poisson da matriz e da fibra.

O módulo cisalhante  $G_{12}$ , é calculado por:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f} \quad (2.18)$$

sendo  $G_m$  e  $G_f$  os módulos de cisalhantes da matriz e da fibra.

### 2.2.2 Macromecânica da lâmina

Definidas as propriedades da lâmina, pode-se desenvolver o modelo de comportamento mecânico dos materiais laminados. O desenvolvimento é baseado na hipótese dos materiais possuírem um comportamento elástico-linear. Esta hipótese é frequentemente aplicada na engenharia, MENDONÇA (2001).

#### Equação constitutiva da lâmina

A relação tensão-deformação para materiais elásticos-lineares é dada pela equação (2.19):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sim. & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

ou em notação matricial

$$\{\sigma^1\} = [C^1] \{\epsilon^1\} \quad (2.20)$$

Na equação (2.19),  $\sigma_{ii}$  e  $\tau_{ij}$  são as tensões normais e cisalhantes e  $\epsilon_{ii}$  e  $\gamma_{ij}$  as deformações normais e cisalhantes, com  $i, j = 1, 2, 3$ .  $C_{ij}$ , com  $i, j = 1, \dots, 6$  sendo as componentes da matriz de rigidez do material. O índice 1 nas equações (2.20) e (2.23) indica o sistema de coordenadas de ortotropia, figura 2.2.

Caso o material seja ortotrópico, a relação tensão-deformação simplifica-se para a equação (2.21):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

A matriz de rigidez de um material ortotrópico possui apenas nove constantes independentes.

A relação deformação-tensão pode ser obtida pela inversão da matriz de rigidez, que para o caso ortotrópico resulta em:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

ou em notação matricial:

$$\{\epsilon^1\} = [S^1] \{\sigma^1\} \quad (2.23)$$

sendo  $[S^1]$  a matriz de flexibilidade do material.

As constantes de engenharia, que representam as propriedades elásticas do material, podem ser obtidas através de ensaios experimentais. Essas constantes são representadas pelos módulos de Young,  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  e  $E_{33}$ , os coeficientes de Poisson  $\nu_{ij} = -\epsilon_{ii}/\epsilon_{jj}$ , com  $i, j = 1, 2, 3$  e os módulos de cisalhamento  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  e  $G_{23}$ .

A matriz de flexibilidade para um material ortotrópico em função das constantes de engenharia é dada pela equação (2.24).

$$[S^1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ sim. & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Mostra-se pela simetria de  $[S^1]$  que  $\frac{\nu_{ij}}{E_{ii}} = \frac{\nu_{ji}}{E_{jj}}$ , e verifica-se que existem nove constantes independentes. Invertendo a matriz de flexibilidade, retorna à matriz de rigidez, descrita pela equação (2.25):

$$[C^1] = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_{22}E_{33}\Delta} & \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_{22}E_{33}\Delta} & \frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_{22}E_{33}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_{11}E_{33}\Delta} & \frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_{11}E_{33}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_{11}E_{22}\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{23} & 0 & 0 \\ & & & & G_{31} & 0 \\ sim. & & & & & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

sendo

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{31}}{E_{11}E_{22}E_{33}} \quad (2.26)$$

Considerando que a lâmina esteja sob um estado plano de tensões, ou seja, cada ponto está sujeito à tensões num único plano, então tem-se apenas as tensões  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\tau_{12}$  não nulas, com:

$$\sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{31} = 0 \quad (2.27)$$

e as componentes de deformação ficam:

$$\epsilon_{33} = S_{11}\sigma_{11} + S_{22}\sigma_{22}, \quad \gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{31} = 0 \quad (2.28)$$

e

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

ou em notação matricial:

$$\{\epsilon^1\} = [S^1]^* \{\sigma^1\} \quad (2.30)$$

Em (2.30),  $[S^1]^*$  é a matriz de flexibilidade reduzida para lâminas ortotrópicas sob estado plano de tensões, em relação aos eixos principais 0123, descrita por:

$$[S^1]^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Invertendo a relação (2.29), obtém-se a relação tensão-deformação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Ou na forma matricial:

$$\{\sigma^1\} = [Q^1]^* \{\epsilon^1\} \quad (2.33)$$

sendo  $[Q^1]^*$  a matriz de rigidez reduzida. Os seus termos, em função das constantes de engenharia, são dados por:

$$[Q^1]^* = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}^2}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}} & \frac{\nu_{12} E_{11} E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}} & 0 \\ \frac{\nu_{12} E_{11} E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}} & \frac{E_{11} E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

### Rotação das tensões e deformações em torno do eixo 0z

Devido às várias orientações das fibras das lâminas no laminado, se faz necessária a definição de um sistema de coordenadas global  $0xyz$  para o laminado e sistemas locais 0123 para cada lâmina. Como as condições de contorno e os carregamentos são aplicados no laminado, e as propriedades do material são definidas na lâmina, é necessário realizar uma transformação de sistema de coordenadas de  $0xyz$  para 0123 e vice-versa, podendo ser visto na figura 2.2.

Assim demonstra-se em MALVERN (1969) que a relação de transformação de  $\{\sigma^1\}$  em  $\{\sigma^x\}$  é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos \theta \sin \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

sendo  $\theta$  é o ângulo de rotação em torno do eixo  $0z$ . A matriz de transformação  $[T]$  para o estado plano de tensões é definida como:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos \theta \sin \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

A transformação das deformações é obtida invertendo a matriz  $[T]$ , e pode ser descrita como:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

ou em notação matricial:

$$\{\epsilon^{x/2}\} = [T]^{-1} \{\epsilon^{1/2}\} \quad (2.38)$$

As deformações cisalhantes usadas são  $\gamma/2$  ao invés de  $\gamma$  indicadas pela notação  $\epsilon^{x/2}$  e  $\epsilon^{1/2}$  nos vetores de deformação.

Demonstra-se em MENDONÇA (2001) que a relação tensão-deformação para o estado plano de tensões no sistema de coordenadas  $0xyz$  é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{61} & \overline{Q}_{62} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

ou na notação matricial:

$$\{\sigma^x\} = [\overline{Q}] \{\epsilon^x\} \quad (2.40)$$

sendo  $[\overline{Q}]$  a matriz de rigidez reduzida transformada, dada por:

$$[\overline{Q}] = [T]^{-1} [Q^1]^* [T]^{-t} \quad (2.41)$$

O expoente  $t$  de  $[T]^{-t}$  indica a transposta de matriz  $[T]^{-1}$ .

Mostra-se que a relação deformação-tensão da lâmina em função das coordenadas transformadas é dada por:



$$\{\epsilon^x\} = [\overline{S}] \{\sigma^x\} \quad (2.42)$$

sendo  $[\overline{S}]$  a matriz de flexibilidade reduzida transformada, dada por:

$$[\overline{S}] = [T]^t [S^1]^* [T] \quad (2.43)$$

## 2.3 Critérios de falha

A falha de um componente ou sistema está relacionada com a perda da funcionalidade. Pode-se definir diversos tipos de função, como por exemplo: resistir à determinadas solicitações, fixar uma estrutura, proteger o sistema, isolar termicamente, entre outras.

Abordando a função resistência mecânica, pode-se definir diversas maneiras para caracterizar a ocorrência da falha, definindo-se os modos de falhas, são exemplos o colapso plástico, a ruptura frágil ou dúctil, a deformação excessiva, a instabilidade estrutural, a presença de trincas, o excesso de vibração, o acúmulo de dano, entre outras.

Para cada modo de falha é necessário definir maneiras de quantificar a ocorrência desta falha, definindo-se assim os critérios de falha. Através da avaliação desses critérios conclui-se sobre a ocorrência ou não da falha em análise. Podem existir mais de um critério de falha para cada modo de falha, pois há diversas formas para se avaliar um modo de falha.

No caso da análise da resistência mecânica, os critérios de falha são definidos em função de variáveis que quantificam a resistência dos materiais empregados e as solicitações aplicadas sobre o componente. A avaliação ocorre freqüentemente pela comparação de algumas dessas variáveis. Por exemplo, numa falha por colapso plástico pode-se definir como critério de falha a comparação entre a tensão gerada pelo carregamento numa peça e a tensão admitida pelo material utilizado para fabricação da peça.

Os critérios mais aplicados em materias compostos laminados para resistência mecânica são:

- Teoria de máxima tensão;
- Teoria de máxima deformação;
- Teoria de Tsai-Hill;
- Teoria de Tsai-Wu.

### 2.3.1 Teoria da máxima tensão

A teoria de máxima tensão assume que as tensões aplicadas nas direções principais do material devem ser menores que as resistências nas respectivas direções das cargas,

MENDONÇA (2001) .

Assim os limites de segurança para este critério são:

$$\begin{aligned} -X_c &< \sigma_{11} < X_t \\ -Y_c &< \sigma_{22} < Y_t \\ |\sigma_{12}| &< S \end{aligned} \quad (2.44)$$

$X_t$ ,  $X_c$ ,  $Y_t$ ,  $Y_c$  e  $S$  são as resistências coplanares da lâmina, obtidas através de ensaios experimentais.

### 2.3.2 Teoria de máxima deformação

A teoria de máxima deformação é análoga à de tensão, colocando a deformação ao invés da tensão como parâmetro comparativo. Os limites para este critério são:

$$\begin{aligned} -\frac{X_c}{E_{11}} &< \varepsilon_{11} < \frac{X_t}{E_{11}} \\ -\frac{Y_c}{E_{22}} &< \varepsilon_{22} < \frac{Y_t}{E_{22}} \\ |\gamma_{12}| &< \frac{S}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Estes dois critérios de falha são bastante usados em materiais isotrópicos. Os critérios que estão apresentados a baixo são mais sofisticados e precisos na análise de materiais laminados ortotrópicos.

### 2.3.3 Critério de falha de Tsai-Hill

A teoria de Hill é derivada do critério de Von Mises para o início do escoamento em metais isotrópicos. Considerando que é possível incluir os efeitos da anisotropia, Hill propôs o seguinte critério para o estado triaxial de tensões.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}^2}{X^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^2} + \frac{\sigma_{33}^2}{Z^2} - \left( \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_{11}\sigma_{22} - \left( \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_{22}\sigma_{33} \\ - \left( \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right) \sigma_{11}\sigma_{33} + \frac{\sigma_{23}^2}{S_1^2} + \frac{\sigma_{13}^2}{S_2^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} = 1 \end{aligned} \quad (2.46)$$

$X_t$ ,  $X_c$ ,  $Y_t$ ,  $Y_c$  e  $S$  são as propriedades de resistência coplanar da lâmina e  $Z_t$ ,  $Z_c$ ,  $S_1$  e  $S_2$  as propriedades de resistência transversais, relacionadas com tração e compressão na direção

3 e os cisalhamentos nos plano 1 – 3 e 2 – 3, obtidas através de ensaios experimentais. Os valores de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são os menores valores absolutos das resistências à compressão ou à tração em cada direção.

Para uma lâmina transversalmente isotrópica, verifica-se que  $Z = Y$  e  $S_1 = S$ . No estado plano de tensão ocorre que  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ . Então o critério de Hill, para uma lâmina transversalmente isotrópica sob estado plano de tensão fica:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{S^2} = 1 \quad (2.47)$$

TSAI e AZZI (1965) adaptaram o critério de Hill para lâminas transversalmente ortotrópicas sob estado plano de tensão, definindo o critério de Tsai-Hill. Considerando que as tensões analisadas estão abaixo do limiar da falha apontada pelo critério, encontra-se uma situação de segurança, e a equação pode ser descrita como:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = \frac{1}{C_s^2} \quad (2.48)$$

Considera-se  $C_s$  sendo um coeficiente de segurança quando maior que 1.

Uma limitação desse critério aparece por não acusar falha em um estado hidrostático de tensões, o mesmo problema apresentado pelo critério de Von Mises, que também é muito utilizado em materiais isotrópicos.

### 2.3.4 Critério de falha de Tsai-Wu

O critério de Tsai-Wu baseia-se na ampliação do número de termos do critério de Hill, foi apresentado por VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) na seguinte forma:

$$F_i\sigma_{ii} + F_{ij}\sigma_{ii}\sigma_{jj} = 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.49)$$

Incorporando-se as propriedades e considerando estado plano de tensões em uma lâmina ortotrópica tem-se a expressão do ponto crítico de falha:

$$\left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|}\right)\sigma_{11} + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{|Y_c|}\right)\sigma_{22} + \frac{\sigma_{11}^2}{X_t|X_c|} + \frac{\sigma_{22}^2}{Y_t|Y_c|} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sqrt{X_tX_cY_tY_c}} = 1 \quad (2.50)$$

Neste trabalho o critério de falha empregado está baseado no desenvolvimento de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003), que utilizaram um modelo apresentado por LIU e TSAI (2001), sendo uma extensão ao critério de falha quadrático de Tsai-Wu. Inseriu-se no modelo um índice de falha que permite avaliar o estado de dano do material durante a vida. O critério de Tsai-Wu, equação (2.49), na sua forma original, avalia apenas a falha final. Este modelo encontra-se detalhado no capítulo 4.

### 2.3.5 Índice progressivo de falha de LIU e TSAI (2001)

LIU e TSAI (2001) propuseram uma extensão do critério de falha de Tsai-Wu para tornar a análise progressiva. Definiram a taxa de resistência  $T_R$  como um fator de escala linear do vetor de carregamento.

No estudo de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003), a definição de índice de falha unidirecional  $\Sigma$  foi expandida a um conjunto de índices de falha multidirecionais  $\Sigma_{ij}$ , os quais são associados as respectivas componentes de tensão  $\sigma_{ij}$ . Os índices de falha  $\Sigma_{ij}$  representam os fatores de escala linear para cada componente de tensão  $\sigma_{ij}$  separadamente. Demonstra-se que esses índices podem incluir os efeitos do dano substituindo a tensão nominal  $\sigma_{ij}$  pela tensão efetiva  $\tilde{\sigma}_{ij}$  no critério de falha estático de Tsai-Wu.

#### Índice de falha 1D

No caso unidirecional o critério de falha de Tsai-Wu é apresentado na formulação (2.51):

$$\frac{1}{X_t |X_c|} \sigma^2 + \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|} \right) \sigma < 1 \quad (2.51)$$

sendo  $X_t$  é a máxima tensão à tração e  $X_c$  a máxima tensão à compressão.

A taxa de resistência  $T_R$ , definida por LIU e TSAI (2001), é a raiz positiva da equação (2.52):

$$\left( \sigma^2 \frac{1}{X_t |X_c|} \right) T_R^2 + \left[ \sigma \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|} \right) \right] T_R - 1 = 0 \quad (2.52)$$

Como  $T_R$  é um fator de escala linear, pode ser facilmente calculado por  $X_t/\sigma$  para  $\sigma \geq 0$  ou  $-|X_c|/\sigma$  para  $\sigma < 0$ . Assim, LIU e TSAI (2001) definiram o índice de falha  $\Sigma^{1D}$  como o inverso de  $T_R$ :

$$\Sigma^{1D} = \frac{1}{T_R} \quad (2.53)$$

Este índice de falha  $\Sigma$  é utilizado por VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2002) em um modelo de dano.

#### Índice de falha 2D

Desenvolvendo essa teoria para o caso bidimensional, VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) partiram da equação (2.50), desconsiderando os efeitos do termo de  $F_{12}$ , e obtiveram as expressões para os índices de falha multidimensionais:

O índice de falha  $\Sigma_{11}^{2D}$  para a componente de tensão  $\sigma_{11}$  é definida pela raiz positiva da equação (2.54):

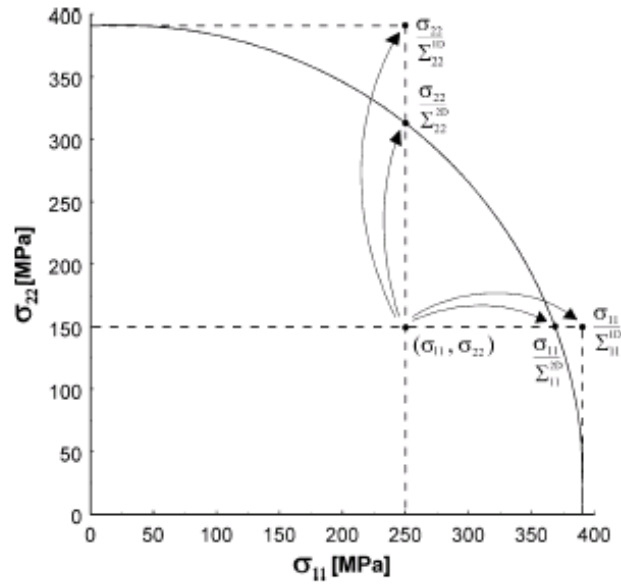


Figura 2.5: Representação esquemática dos índices de falha.

$$\frac{1}{X_t |X_c|} \left( \frac{\sigma_{11}}{\Sigma_{11}^{2D}} \right)^2 + \frac{1}{Y_t |Y_c|} \sigma_{22}^2 + \frac{1}{S^2} \sigma_{12}^2 + \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|} \right) \frac{\sigma_{11}}{\Sigma_{11}^{2D}} + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{|Y_c|} \right) \sigma_{22} = 1 \quad (2.54)$$

O índice de falha  $\Sigma_{22}^{2D}$  para a componente de tensão  $\sigma_{22}$  é definida pela raiz positiva da equação (2.55):

$$\frac{1}{X_t |X_c|} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{Y_t |Y_c|} \left( \frac{\sigma_{22}}{\Sigma_{22}^{2D}} \right)^2 + \frac{1}{S^2} \sigma_{12}^2 + \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{|Y_c|} \right) \frac{\sigma_{22}}{\Sigma_{22}^{2D}} = 1 \quad (2.55)$$

O índice de falha  $\Sigma_{12}^{2D}$  para a componente de tensão  $\sigma_{12}$  é definida pela raiz positiva da equação (2.56):

$$\frac{1}{X_t |X_c|} \sigma_{11}^2 + \frac{1}{Y_t |Y_c|} \sigma_{22}^2 + \frac{1}{S^2} \left( \frac{\sigma_{12}}{\Sigma_{12}^{2D}} \right)^2 + \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|} \right) \sigma_{11} + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{|Y_c|} \right) \sigma_{22} = 1 \quad (2.56)$$

### Condições de falha

Quando um estado de tensão num ponto  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$  se aproxima da superfície de falha, os índices de falha  $\Sigma_{ij}^{2D}$  se aproximam do valor 1. Entretanto um dos componentes de tensão pode ser o principal responsável pela falha, porém os índices de falha  $2D$  não informam qual é esta componente. Para evidenciar qual componente de tensão  $\sigma_{ij}$  tem maior influência no evento da falha, VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) propuseram

correlacionar os índices de falha retirados do critério bidimensional com os do critério unidirecional. Assim o índice de falha pode ser redefinido por (2.57):

$$\begin{aligned}\Sigma_{11} &= \frac{\Sigma_{11}^{2D}}{1 + (\Sigma_{11}^{2D} - \Sigma_{11}^{1D})} \\ \Sigma_{22} &= \frac{\Sigma_{22}^{2D}}{1 + (\Sigma_{22}^{2D} - \Sigma_{22}^{1D})} \\ \Sigma_{12} &= \frac{\Sigma_{12}^{2D}}{1 + (\Sigma_{12}^{2D} - \Sigma_{12}^{1D})}\end{aligned}\tag{2.57}$$

Sendo  $\Sigma_{11}^{2D}$ ,  $\Sigma_{22}^{2D}$ ,  $\Sigma_{12}^{2D}$  calculados nas equações (2.54), (2.55), (2.56) respectivamente, e  $\Sigma_{11}^{1D}$ ,  $\Sigma_{22}^{1D}$ ,  $\Sigma_{12}^{1D}$  definidas da razão  $\sigma_{ij}$  pelas suas respectivas resistências estáticas.

Na figura 2.5, pode-se verificar a representação esquemática dos índices de falha  $\Sigma_{ij}$  causados pelas tensões  $\sigma_{ij}$ , para um ponto de tensão onde  $\sigma_{11} = 250MPa$  e  $\sigma_{22} = 150MPa$ . O material possui as propriedades:  $X_t = 390MPa$ ,  $X_c = 345MPa$ ,  $Y_t = 390MPa$ ,  $Y_c = 345MPa$  e  $S = 100MPa$ , retirados de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003).

# Capítulo 3

## Dano e fadiga

O dano interno do material pode ser definido pela presença e a evolução de trincas e cavidades a um nível microscópico, o que pode eventualmente levar à falha, ou seja, a completa perda da capacidade do material suportar um determinado carregamento ou perda de rigidez. Na avaliação do dano interno é importante considerar os diversos fenômenos envolvidos na degradação dos sólidos. Assim, pode-se citar alguns fatores que causam efeitos consideráveis sobre o dano:

- o tipo de material;
- os processos de fabricação;
- a forma de aplicação de carregamento e condições de contorno;
- o meio onde será utilizado.

Para melhor compreender o significado físico das variáveis de dano, é conveniente separar as teorias da mecânica do dano contínuo em duas categorias: modelos micro-mecânicos, representados em uma micro-escala e modelos fenomenológicos, representados em meso-escala e macro-escala, LEMAITRE (1996).

Nos modelos micro-mecânicos as variáveis de dano interno devem representar uma média dos defeitos microscópicos que caracterizam o estado de degradação interna. Porém, estas variáveis são de difícil representação em ensaios experimentais e as leis de evolução dificultam a utilização prática de muitos desses modelos micro-mecânicos.

As variáveis de dano dos modelos fenomenológicos são baseadas no efeito que a degradação interna exerce sobre as propriedades macroscópicas do material. O módulo de elasticidade, a tensão de escoamento, a densidade, a resistência elétrica, podem ser fortemente afetadas pela presença de dano na forma de microcavidades ou microtrincas.

Na micro-escala, a danificação dos metais ocorre devido ao deslocamento e acúmulo de discordâncias, nucleação de vazios e surgimento e propagação de microtrincas, o que causa uma redução na resistência do material. Em polímeros o dano aparece devido ao rearranjo

e posterior ruptura das ligações das moléculas das cadeias poliméricas, reduzindo dessa forma a rigidez do material. Em materiais cerâmicos, o fenômeno é caracterizado por micro-decoesões das partículas.

Tradicionalmente, a previsão de falhas durante a vida nos materiais é baseada em experimentos empíricos. Estes experimentos devem reproduzir em laboratório as condições de serviço, o que pode representar um custo elevado. Com o acúmulo do conhecimento dos mecanismos envolvidos no dano interno que possam causar falhas, possibilitou-se a formulação de modelos constitutivos capazes de simular a evolução da deterioração interna. Estes modelos representam a mecânica do dano contínuo, e se relacionam fortemente com a mecânica do contínuo. Assim as novas variáveis utilizadas para descrever os fenômenos de dano, podem ser relacionadas com as variáveis tradicionais da mecânica dos sólidos (tensor tensão, tensor deformação, invariantes de tensão, etc.).

Nesse trabalho a fadiga em materiais compostos laminados é abordada através da mecânica do dano.

### 3.1 Mecanismos de dano

O primeiro modelo da mecânica do dano contínuo publicado em artigo foi proposto por Kachanov em 1958. Ele introduziu uma variável escalar, sem um claro significado físico, em um modelo de falha para fluência de metais, submetido a um carregamento uniaxial, SOUZA NETO *et al.* (2002).

Depois Rabotnov em 1963 propôs que a redução da área da seção transversal devido às microtrincas, seria uma medida adequada para o dano interno. Assim, descreveu a variável de dano  $D$  na equação (3.1), como sendo :

$$D = \frac{A_o - A}{A_o}, \quad (3.1)$$

onde  $A$  é a área da seção transversal num determinado instante de carregamento, apresentando dano no material, e  $A_o$  é a área da seção transversal antes do carregamento, ou seja, sem dano. Então, um dano  $D = 0$  corresponde ao material virgem, e um dano  $D = 1$  corresponde a completa perda de capacidade de resistência do material à um carregamento.

Depois, Kachanov definiu a partir da tensão uniaxial  $\sigma$  macroscópica observada a tensão efetiva  $\tilde{\sigma}$ :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (3.2)$$

Ainda, considerando o problema de dano em fluência, LEMAITRE (1996) propôs uma teoria fenomenológica na qual a variável dano aparece como um tensor de quarta ordem



para um caso geral anisotrópico.

LEMAITRE (1996), utilizando uma variável de dano escalar, apoiado na hipótese da deformação equivalente, onde *"a relação constitutiva de um material danificado é representada pela lei constitutiva de um material virgem com a tensão verdadeira substituída pela tensão efetiva"*, postulou a seguinte lei constitutiva elástica para um material danificado:

$$\tilde{\sigma} = E_o \varepsilon \quad (3.3)$$

Ou, equivalentemente:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3.4)$$

sendo  $E_o$  e  $E = (1 - D) E_o$  são os módulos de Young do material virgem e do material danificado, respectivamente. Assim pôde-se definir o dano como uma medida de perda de rigidez:

$$D = \frac{E_o - E}{E_o} \quad (3.5)$$

### 3.1.1 Dano multidimensional

Até agora, as relações de tensão-deformação-dano foram apresentadas de uma forma unidimensional, onde a degradação da matriz de rigidez se resume a equação (3.6).

$$\sigma_{11} = E_o (1 - D) \varepsilon_{11} \quad (3.6)$$

Porém, em condições de carregamentos multiaxiais essa aproximação pode ser insuficiente. Alguns modelos para relacionar tensão-deformação-dano multidirecionais foram propostos em LEMAITRE (1996).

#### Modelo de CAUVIN e TESTA (1999)

CAUVIN e TESTA (1999) propuseram um modelo aplicado à materiais isotrópicos, onde a relação tensão equivalente tridimensional é expressa na equação (3.7):

$$\sigma_{ij} = \tilde{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = (E_{ijkl} - D_{ijrs} E_{rskl}) \varepsilon_{kl} \quad (3.7)$$

A simetria do tensor de rigidez  $\tilde{E}_{ijkl}$  deve ser mantida, então o tensor dano  $D_{ijrs}$  não é simétrico.

Assumindo que o material não danificado é isotrópico e o material danificado é ortotrópico, o tensor dano  $\mathbf{D}$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{4444} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{5555} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{6666} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Apesar do tensor dano  $\mathbf{D}$ , ser não simétrico, ele possui somente nove elementos independentes. Assim existem três equações que definem os elementos que estão abaixo da diagonal principal, que são dadas por:

$$\begin{aligned} D_{2211} &= D_{1122} + (D_{1111} - D_{2222}) \frac{\nu}{1 - \nu} + (D_{1133} - D_{2233}) \frac{\nu}{1 - \nu} \\ D_{3311} &= D_{1133} \frac{1 - \nu + \nu^2}{1 - \nu} + (D_{1122} - D_{3333}) \nu + (D_{1111} - \nu D_{2222} - D_{2233}) \frac{\nu}{1 - \nu} \\ D_{3322} &= D_{2233} + (D_{2222} - D_{3333}) \nu + (D_{1122} - D_{1133}) \nu \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nas equações (3.7) e (3.9) as propriedades elásticas são apenas duas, o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, por que foi assumido que o material não danificado era isotrópico. Caso esta teoria fosse extendida para um material ortotrópico, como materiais compostos laminados, as equações se tornariam muito mais complexas.

São necessárias nove equações de evolução do dano, para se prever a fadiga de cada um dos nove componentes do tensor dano  $\mathbf{D}$ . Cada uma dessas equações vai apresentar algumas constantes, isso somado às constantes do material, torna o modelo impraticável, com um número excessivo de constantes.

A simples relação da degradação da resistência do material  $D = 1 - E/E_o$  é substituída por complexas equações relacionando as variáveis de dano com as variáveis de resistência dos materiais.

Assim, o modelo de CAUVIN e TESTA (1999) para dano multidimensional é matematicamente consistente, porém seria muito complicado para avaliar a fadiga em materiais compostos.

### Modelo de LEMAITRE *et al.* (2000)

Outra abordagem para resolver a não simetria do tensor dano, equação (3.8), seria o uso da tensão como uma variável dependente. LEMAITRE *et al.* (2000) propuseram calcular a deformação por:

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1 + \nu}{E} \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \tilde{\sigma}_{kk} \delta_{ij} \quad (3.10)$$

Sendo que a tensão efetiva  $\tilde{\sigma}_{ij}$  é simétrica e não depende dos parâmetros elásticos:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ij} &= (H_{ik}\sigma_{kl}^{Dev}H_{lj}) + \frac{\sigma_H}{1 - \eta D_H}\delta_{ij} \\ \mathbf{H} &= (1 - \mathbf{D})^{-1/2}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Sem entrar em maiores detalhes, o tensor tensão é dividido em uma tensão deviatórica  $\sigma^{Dev}$ , afetada pelas variáveis de dano tensoriais  $\mathbf{D}$ , e uma tensão hidrostática  $\sigma_H$ , afetada por uma variável de dano escalar.

Depois, LEMAITRE *et al.* (2000) adotaram um critério para distinguir tração e compressão no estado multiaxial de tensões, devido a diferenças no comportamento das propriedades da microtrinca nestes casos. A proposta seria calcular as tensões principais, aplicando um coeficiente de fechamento de trincas  $h$  na ocorrência de tensões principais negativas.

Porém a abordagem de LEMAITRE *et al.* (2000), não é eficiente para modelar fadiga em material composto laminado. A teoria pode ser aplicada em ligas de aço isotrópicas para carregamentos quase estáticos, e não para fadiga em material composto ortotrópico. A distinção entre a tensão deviatórica e a tensão hidrostática na equação (3.11) seria de difícil obtenção em materiais compostos de fibra-resina, por ser um material não homogêneo e anisotrópico. A lei elástica da equação (3.10) coloca algumas dificuldades de implementação em código de elementos finitos, pois deformação está definida em função da tensão.

### Abordagem de engenharia de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003)

A proposta de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) prevê uma diferenciação entre a cinética do dano intra-laminar (trincas na matriz, descolamento entre fibra/matriz, fratura das fibras, ...) e a inter-laminar (delaminações). O efeito das componentes de tensão não são os mesmos para os dois casos, as tensões no plano ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ ) causam dano intra-laminar, e as tensões fora do plano ( $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{33}$ ) afetam o dano inter-laminar.

As delaminações são desconsideradas no modelo, pois não apareceram para as condições de carregamento aplicadas nos ensaios experimentais realizados no estudo de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003). Assim, considerando apenas o dano intra-laminar, postulou-se que existem três variáveis de dano  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}$ , e são definidas na equação (3.12):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-D_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \sqrt{1-D_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 1 & 0 \\ & & & & & \sqrt{1-D_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{1-D_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \sqrt{1-D_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 1 & 0 \\ & & & & & \sqrt{1-D_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} - \epsilon_{11}^p \\ \epsilon_{22} - \epsilon_{22}^p \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

A matriz  $[C]$  é a matriz de rigidez ortotrópica do material composto definida no capítulo 2. As deformações permanentes  $\epsilon_{11}^p$  e  $\epsilon_{22}^p$  ocorreram nos ensaios laminados de  $[45^\circ / -45^\circ]_8$ , sendo desta forma, consideradas no modelo.

Uma importante característica da formulação (3.12) é que as variáveis de dano  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}$  estão relacionadas com suas respectivas componentes de tensão  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ , através dos índices de falha definidos no capítulo 2. Assim as taxas de crescimento do dano  $dD_{11}/dN$ ,  $dD_{22}/dN$  e  $dD_{12}/dN$  também são dirigidas pelas componentes de tensão  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$ . Por fim, é clara a distinção entre tensões tratativas e compressivas, verificando o sinal da componente de tensão pode-se definir a necessidade de considerar o efeito de fechamento de trincas na compressão. Essas considerações estão apresentadas na equação (3.28).

A equação (3.12) pode ser reescrita na equação (3.13):

$$\begin{aligned}
\{\sigma\} &= [H] \{\epsilon\}, \text{ com} \\
h_{ij} &= 0, \text{ exceto:} \\
h_{11} &= C_{11} (1 - D_{11}) \\
h_{12} &= h_{21} = C_{12} \sqrt{1 - D_{11}} \sqrt{1 - D_{22}} \\
h_{13} &= h_{31} = C_{13} \sqrt{1 - D_{11}} \\
h_{22} &= C_{22} (1 - D_{22}) \\
h_{23} &= h_{32} = C_{23} \sqrt{1 - D_{22}} \\
h_{33} &= C_{33} \\
h_{44} &= C_{44} \\
h_{55} &= C_{55} \\
h_{66} &= C_{66} (1 - D_{12})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

### 3.1.2 Modelo de dano

Os modelos de dano são formulados para descrever problemas específicos, dependendo dos fenômenos e modos de falha que se deseja avaliar. Na literatura existem modelos que descrevem problemas elasto-plásticos, visco-elásticos, de fluência, de fadiga de alto ciclo, de fadiga de baixo ciclo, entre outros. Detalhes destes modelos podem ser estudados em bibliografia específica como em LEMAITRE (1996), SOUZA NETO *et al.* (2002) e CHABOCHE e LEMAITRE (1990).

O foco desse trabalho é o modo de falha por fadiga de alto ciclo em materiais compostos laminados. Modelos de dano para descrever este problema são apresentados em seções posteriores.

#### Modelo de dano para fadiga

Modelos de dano para fadiga não apresentam incremento no tempo como outros modelos como o elastoplástico ou de fluência. O incremento para esse modelo é definido através do número de ciclos de carregamento a que a peça é submetida. Com isso, pode-se prever a vida a fadiga, LEMAITRE (1996).

Nesse caso, as variáveis da lei de evolução do dano são dependentes do:

- estado inicial do ciclo (temperatura, dano  $D$  e as variáveis de encruamento)
- valor médio e máximo dos parâmetros definidos pelo carregamento (tensão, deformação elástica e plástica)

Alguns modelos de fadiga para material composto laminado são apresentados em seções posteriores. Parte de um desses modelos foi utilizado no desenvolvimento da parte numérica desse trabalho.

## 3.2 Dano aplicado à fadiga em materiais compostos

Atribui-se como causa da fadiga em material composto a ocorrência eventos microscópicos complexos, como:

- o desencadeamento do acúmulo de microtrincas na matrix polimérica;
- as delaminações interfaciais;
- o descolamento das superfícies das fibras e da matriz;
- a fratura das fibras.

Estudos focando os possíveis modelos de falha da fadiga que ocorrem durante a vida útil do material composto, têm sido abordados por pesquisadores considerando fundamentalmente os seguintes aspectos:

- Abordagem micro-mecânica do dano.

Baseada na análise da evolução do dano por um aspecto microscópico, como densidade de trincas na matriz.

- Abordagem fenomenológica do dano.

Análise da perda de rigidez ou resistência do material no decorrer da vida.

### 3.2.1 Abordagem micro-mecânica

BONIFACE *et al.* (1987) mediram o crescimento individual de trincas transversais na matriz. Os resultados mostram que uma taxa estável de crescimento de trincas é essencialmente independente do comprimento da trinca, porém dependente do espaçamento entre as trincas. TONG *et al.* 1997 também concluíram que em um laminado quase isotrópico, a taxa individual de crescimento para trincas a  $45^\circ$  e a  $90^\circ$  são independentes do comprimento da trinca.

TONG *et al.* 1997 estudaram os efeitos do modo de carregamento e do nível de carga no crescimento de trincas na matriz de um laminado quase isotrópico submetido a um carregamento de fadiga, concluindo que o crescimento da densidade de trincas em lâminas

fora do eixo pode ser escrita em três estágios: iniciação, um estágio de crescimento constante e um último de saturação. O crescimento de trincas está diretamente relacionado com a degradação da rigidez.

AKSHANTALA e TALREJA (2000) propuseram uma metodologia para previsão da vida de fadiga que utiliza um modelo micro-mecânico baseado na avaliação da evolução do dano em conjunto com um critério semi empírico de falha por fadiga. Esse modelo avalia o avanço do dano analisando a delaminação e o acúmulo de trincas na matriz.

### 3.2.2 Abordagem Fenomenológica

VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2002) propuseram um modelo que considera a variação no módulo de elasticidade devido ao dano de fadiga, abordando dois pontos:

- (i) a taxa de crescimento do dano - uma medida da perda de rigidez é expressa em dois termos, a iniciação e a propagação do dano, e
- (ii) o critério de falha estática é modificado para representar a redução da resistência estática final.

Este modelo é capaz de simular os três estágios da degradação da rigidez: o enfraquecimento inicial, redução gradual e a falha final, bem como a redistribuição de tensões devido à perda de rigidez nas regiões danificadas.

REIFSNIDER (1991) estudaram o desenvolvimento do dano à fadiga em laminados e produziram a primeira evidência experimental sistemática na evolução do dano durante a vida à fadiga num laminado de fibra de vidro. Eles concluíram que as trincas na matriz em lâminas fora do eixo não crescem continuamente, e que o número de trincas em uma lâmina saturada permanece essencialmente constante durante o resto da vida do corpo de provas. Essa observação leva a previsão de um estado de dano característico no laminado usando um modelo baseado na análise do cisalhamento, REIFSNIDER e TALUG (1980). Um estado de dano característico representa um estágio avançado das trincas na matriz, freqüentemente associado com uma redução da rigidez do laminado. Entretanto os conceitos do estado de dano característico são extremamente valiosos para previsão da resistência residual e da vida do laminado composto.

O comportamento da degradação da rigidez pode ser distinguida em três estágios. Na figura 3.1 está representado o comportamento para ensaios com controle de carga. Em ensaios com controle de deslocamento a degradação da rigidez não tende a zero, pois como o deslocamento está prescrito, ocorre uma redução dos esforços de reação com o dano do material, e a energia de deformação aplicada não é capaz de danificar completamente o material.

- Estágio 1: região inicial, com uma rápida redução da rigidez de 2 à 5 %, ocorre o

desenvolvimento de trincas transversais na matriz.

- Estágio 2: região intermediária, ocorre uma redução adicional de 1 à 5 % de uma maneira aproximadamente linear com o número de ciclos. O mecanismo de dano predominante é o desenvolvimento da delaminação e de trincas ao longo das fibras dispostas à zero graus.
- Estágio 3 : região final, ocorre uma brusca redução que resulta na fratura do composto.

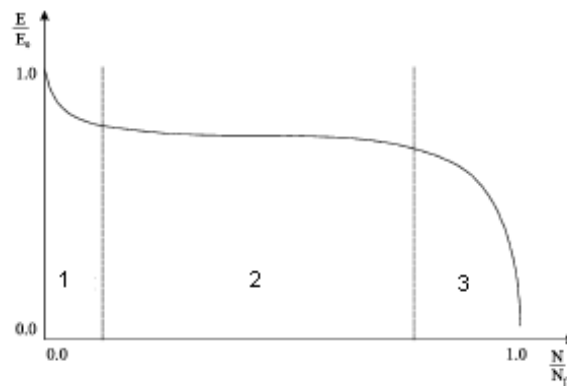


Figura 3.1: Curva de degradação da rigidez típica para materiais compostos.

### 3.2.3 Modelo de dano fenomenológico de fadiga em composto de fibra e polímero unidirecional

No modelo proposto por VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2002) a variação no módulo de elasticidade devido à fadiga é tratada por duas análises, primeiramente aborda-se a taxa de crescimento do dano, depois avalia-se o critério de falha. Um critério de falha estática é utilizado para representar a redução da resistência, e definir a taxa de evolução do dano.

#### Taxa de crescimento do dano

No modelo, o crescimento do dano é analisado a cada ciclo de carga pela equação (3.14):

$$\frac{dD}{dN} = f_i(\sigma, D, \dots) + f_p(\sigma, D, \dots) \quad (3.14)$$

onde  $f_i$  é a função que descreve a evolução do dano no primeiro estágio, a parte inicial da curva. Enquanto  $f_p$  é a função que descreve a propagação do dano no segundo e terceiro



estágio, prevenindo a falha final. A função  $f_i(\sigma, D, \dots)$  representa o fenômeno físico do início do desenvolvimento das trincas na matriz.

Considerando-se que o comprimento de trinca e a redução da rigidez estão relacionados, a degradação da rigidez pode ser avaliada pela expressão (3.15):

$$E = E_o(1 - c\delta) \quad (3.15)$$

sendo  $E$  e  $E_o$ , respectivamente, os módulos de Young do material com e sem trinca,  $c$  é uma constante e  $\delta$  é a densidade média de trincas, descrita pela equação (3.16):

$$\delta = \frac{1}{2s} \quad (3.16)$$

onde  $2s$  é a área média das trincas.

A taxa de crescimento da densidade média de trincas é obtida da proporcionalidade de (3.17):

$$\frac{d\delta}{dN} \propto \left( \frac{\sigma_{máx}^2}{\delta} \right)^2 \quad (3.17)$$

Como o aumento da densidade de trincas, em escala microscópica, acarreta numa redução macroscópica da rigidez, descreve-se na equação (3.18) a função  $f_i$  em termo da variável dano  $D$ :

$$f_i(\sigma, D, \dots) = c_1(\sigma^*)^m \exp(-c_2 D) \quad (3.18)$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  constantes,  $m$  é o expoente da tensão, e  $\sigma^*$  é uma medida de tensão que será definida posteriormente.

A função  $f_p(\sigma, D, \dots)$  descreve o segundo estágio de danificação. A curva de degradação da rigidez, nesse estágio, tem uma relação aproximadamente linear entre rigidez e número de ciclos (ver figura 3.1). Assim, tem-se a equação (3.19):

$$\frac{E}{E_o} = A \cdot N + B \quad (3.19)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade após  $N$  ciclos, e  $E_o$  o módulo de elasticidade inicial,  $A$  e  $B$  constantes.

Então a taxa de variação da rigidez pode ser descrita pela expressão (3.20):

$$\frac{d\left(\frac{E}{E_o}\right)}{dN} = -M \left(\frac{\sigma}{E_o}\right)^n \quad (3.20)$$

sendo  $n$  e  $M$  constantes.

Desta forma, a equação (3.20) modifica-se para a equação (3.21):

$$f_p(\sigma, D, \dots) = c_3 (\sigma^*)^n \quad (3.21)$$

A medida de tensão  $\sigma^*$  pode ser definida como a tensão atual em cada ponto do material, podendo variar durante a vida de fadiga, por exemplo, devido à redistribuições de tensões. No modelo de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2002) considerou-se que o índice de falha de  $\Sigma(\sigma, D)$ , é um valor aceitável para a medida de tensão  $\sigma^*$ .

O índice de falha  $\Sigma(\sigma, D)$  é definido substituindo as tensões da equação (2.52) pela tensão efetiva, equação (3.2), introduzindo no critério de falha a variável dano  $D$ , tem-se a equação (3.22):

$$\left( \left( \frac{\sigma}{1-D} \right)^2 \frac{1}{X_t |X_c|} \right) T_R^2 + \left[ \frac{\sigma}{1-D} \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|} \right) \right] T_R - 1 = 0 \quad (3.22)$$

A idéia, quando se trabalha com a resistência residual, é que  $X_t$  e  $X_c$  diminuam com aumento do número de ciclos para expressar a influência do dano da fadiga. Assim pode-se definir a resistência residual, equação (3.23), à tração  $\sigma_{RT} (= X_t(N))$  e a resistência residual à compressão  $\sigma_{RC} (= X_c(N))$ .

$$\sigma_{RT} = X_t (1 - D) \quad (3.23)$$

Substituindo no critério de falha e resolvendo a equação (3.23), tem-se:

$$T_R = \frac{X_t (1 - D)}{\sigma} = \frac{X_t}{\tilde{\sigma}} \quad (3.24)$$

e

$$\Sigma = \frac{1}{T_R} = \frac{\tilde{\sigma}}{X_t} \quad (3.25)$$

Então  $\Sigma(\sigma, D)$  é usado por VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2002) em modelos de dano para análise de fadiga em material composto.

Assim, pode-se redefinir a equação da taxa de crescimento pela expressão (3.26):

$$\frac{dD}{dN} = c_1 (\Sigma(\sigma, D))^m \exp(-c_2 D) + c_3 (\Sigma(\sigma, D))^n \quad (3.26)$$

Deve-se levar em conta algumas considerações práticas a respeito deste modelo:

1. A evolução do dano em regiões submetidas à tensões trativas não ocorre na mesma intensidade que para regiões onde as tensões são compressivas. Na compressão o dano cresce de uma maneira mais lenta do que na tração. Então, é necessário considerar na evolução do dano um efeito de fechamento de trinca. Com isso divide-se a equação da taxa de dano (3.26) em duas partes:

- uma parte tratativa, onde  $\sigma \geq 0$ ;
  - outra compressiva, onde  $\sigma < 0$ .
2. Considera-se que o número de trincas satura em um estado característico de trincas, o estado de dano característico, após um certo número de ciclos, mantendo-se neste estado até o início das fraturas nas fibras.
  3. Por fim, o índice de falha é constante para ensaios com controle de deformação, assim a densidade de trincas saturada dependerá do nível da amplitude de deformação cíclica aplicada.

Assim, com estas considerações, chega-se na forma final da equação para a taxa de dano unidirecional (3.27):

$$\frac{dD}{dN} = \begin{cases} c_1 \cdot \Sigma \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D}{\sqrt{\Sigma}}\right) + c_3 \cdot D \cdot \Sigma^2 \cdot [1 + \exp(c_5 (\Sigma - c_4))] \\ \text{se } \sigma \geq 0 \\ \left[ c_1 \cdot \Sigma \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D}{\sqrt{\Sigma}}\right) \right]^3 + c_3 \cdot D \cdot \Sigma^2 \cdot [1 + \exp\left(\frac{c_5}{3} (\Sigma - c_4)\right)] \\ \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

com as constantes do modelo:

- $c_1$  indica a amplitude da taxa de dano inicial,
- $c_2$  indica o fator de decréscimo da rigidez no estágio 1,
- $c_3$  é a taxa de propagação de dano,
- $c_4$  define o limite para a não fratura das fibras e
- $c_5$  está relacionado com a aceleração final do dano.

Essas constantes são retiradas de ensaios experimentais de fadiga com corpos de prova submetidos a um carregamento de flexão.

### 3.2.4 Modelo multidimensional

O modelo unidirecional simula bem um laminado com características próximas a de uma viga. Porém, em casos de carregamentos multidirecionais ou laminados com orientações diferentes as do carregamento, o modelo unidirecional não representa bem a realidade.

Assim, em outro trabalho VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) desenvolveram um modelo multidirecional de dano, com intuito de avaliar a fadiga em carregamentos

multiaxiais no plano em laminados com as direções das lâminas diferentes das direções do carregamento. Neste caso os efeitos de acoplamento de esforços na matriz de rigidez são considerados.

Nesse modelo, foram consideradas as definições de índices de falha multidirecionais, expresso na equação (2.57), retirados do critério de falha de Tsai-Liu. A definição de tensão-dano-deformação da equação (3.13), é aplicada ao modelo. As relações da taxa de crescimento das componentes de dano  $dD_{11}/dN$ ,  $dD_{22}/dN$  e  $dD_{12}/dN$ , são definidas da mesma forma que no caso unidirecional, equação (3.27), porém ao invés de um índice de falha escalar, a variável dano escalar, aplica-se às respectivas componentes.

$$\begin{aligned}
 \frac{dD_{11}}{dN} &= \begin{cases} c_1 \cdot \Sigma_{11} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{11}}{\sqrt{\Sigma_{11}}}\right) + c_3 \cdot D_{11} \cdot \Sigma_{11}^2 \cdot [1 + \exp(c_5 (\Sigma_{11} - c_4))] \\ \text{se } \sigma_{11} \geq 0 \\ \left[ c_1 \cdot \Sigma_{11} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{11}}{\sqrt{\Sigma_{11}}}\right) \right]^3 + c_3 \cdot D_{11} \cdot \Sigma_{11}^2 \cdot [1 + \exp\left(\frac{c_5}{3} (\Sigma_{11} - c_4)\right)] \\ \text{se } \sigma_{11} < 0 \end{cases} \\
 \frac{dD_{22}}{dN} &= \begin{cases} c_1 \cdot \Sigma_{22} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{22}}{\sqrt{\Sigma_{22}}}\right) + c_3 \cdot D_{22} \cdot \Sigma_{22}^2 \cdot [1 + \exp(c_5 (\Sigma_{22} - c_4))] \\ \text{se } \sigma_{22} \geq 0 \\ \left[ c_1 \cdot \Sigma_{22} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{22}}{\sqrt{\Sigma_{22}}}\right) \right]^3 + c_3 \cdot D_{22} \cdot \Sigma_{22}^2 \cdot [1 + \exp\left(\frac{c_5}{3} (\Sigma_{22} - c_4)\right)] \\ \text{se } \sigma_{22} < 0 \end{cases} \\
 \frac{dD_{12}}{dN} &= c_1 \cdot \Sigma_{12} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{12}}{\sqrt{\Sigma_{12}}}\right) + c_3 \cdot D_{12} \cdot \Sigma_{12}^2 \cdot [1 + \exp(c_5 (\Sigma_{12} - c_4))] \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

As constantes  $c_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) são as mesmas do modelo unidimensional. A taxa de crescimento  $dD_{12}/dN$  tem o mesmo formato do dano trativo, pois as tensões de cisalhamento causam descolamentos entre as fibras e a matriz, e este tipo de dano causa iniciação de mecanismos de trincas transversais. Como o sinal da tensão de cisalhamento  $\sigma_{12}$  não afeta a evolução do dano, não existe o efeito de fechamento de trincas.

Esse conjunto de equações não é capaz de simular a fadiga à flexão em corpos de prova laminados de  $[45^\circ / -45^\circ]_8$ . Assim, VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) concluíram que as equações da taxa de crescimento de dano para  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}$  deveriam ser acopladas, e a lei de evolução de dano  $dD_{12}/dN$  deveria ser modificada. Aplicando estas considerações nas equações (3.28), tem-se as equações (3.29):

$$\begin{aligned}
\frac{dD_{11}}{dN} &= \begin{cases} c_1 \cdot (1 + D_{12}^2) \cdot \Sigma_{11} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{11}}{\sqrt{\Sigma_{11}}}\right) + c_3 \cdot D_{11} \cdot \Sigma_{11}^2 \cdot [1 + \exp(c_5 (\Sigma_{11} - c_4))] \\ \text{se } \sigma_{11} \geq 0 \\ \left[ c_1 \cdot \Sigma_{11} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{11}}{\sqrt{\Sigma_{11}}}\right) \right]^{1+2 \cdot \exp(-D_{12})} + c_3 \cdot D_{11} \cdot \Sigma_{11}^2 \cdot [1 + \exp\left(\frac{c_5}{3} (\Sigma_{11} - c_4)\right)] \\ \text{se } \sigma_{11} < 0 \end{cases} \\
\frac{dD_{22}}{dN} &= \begin{cases} c_1 \cdot (1 + D_{12}^2) \cdot \Sigma_{22} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{22}}{\sqrt{\Sigma_{22}}}\right) + c_3 \cdot D_{22} \cdot \Sigma_{22}^2 \cdot [1 + \exp(c_5 (\Sigma_{22} - c_4))] \\ \text{se } \sigma_{22} \geq 0 \\ \left[ c_1 \cdot \Sigma_{22} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{22}}{\sqrt{\Sigma_{22}}}\right) \right]^{1+2 \cdot \exp(-D_{12})} + c_3 \cdot D_{22} \cdot \Sigma_{22}^2 \cdot [1 + \exp\left(\frac{c_5}{3} (\Sigma_{22} - c_4)\right)] \\ \text{se } \sigma_{22} < 0 \end{cases} \\
\frac{dD_{12}}{dN} &= c_1 \cdot \Sigma_{12} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{12}}{2\sqrt{\Sigma_{12}}}\right) \quad (3.29)
\end{aligned}$$

A constatação da existência de deformação permanente  $\epsilon_{ii}^p$  nos corpos de prova de  $[45^\circ / -45^\circ]_8$ , levaram a VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) incluir este efeito em seu modelo. Para isso tiveram que fazer algumas considerações:

- a deformação permanente  $\epsilon_{ii}^p$  está relacionada com o dano cisalhante  $D_{12}$ , sendo que a sua taxa de evolução é mais ou menos proporcional a taxa de evolução do dano cisalhante;
- a taxa de deformação permanente nas direções 1 e 2 é proporcional à deformação aplicada nas respectivas direções.
- as trincas não crescem quando comprimidas, então não é aceitável crescimento da deformação permanente quando aplicadas tensões positivas.
- possíveis efeitos de fluência foram desconsiderados no modelo de evolução da deformação permanente.

Adotando as considerações acima, a lei de evolução da deformação permanente proposta por VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003), está descrita na equação (3.30):

$$\frac{d\epsilon_{ii}^p}{dN} = \begin{cases} c_6 \cdot \epsilon_{ii} \frac{dD_{12}}{dN} & \text{se } \sigma_{ii} \geq 0 \\ 0 & \text{se } \sigma_{ii} > 0 \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (3.30)$$

sendo  $c_6$  a constante que indica o máximo percentual que a deformação permanente  $\epsilon_{ii}^p$  pode ter da deformação total  $\epsilon_{ii}$  quando o dano  $D_{12}$  atinge o valor 1.

As equações (3.30), (3.29) e (3.13) formam o sistema completo de equações constitutivas para simular flexão monotônica em laminados ortotrópicos de  $[45^\circ / -45^\circ]_8$ . Esse modelo se reduz a equação (3.27), caso seja considerado um carregamento de fadiga uniaxial.

Este modelo multiaxial foi aplicado em uma formulação de elementos finitos 3D (elementos sólidos), e testado na análise da fadiga em corpos de prova de laminados na configuração de  $[45^\circ / -45^\circ]_8$ .

# Capítulo 4

## Elementos finitos

No projeto e análise estrutural de geometrias complexas são raros os casos onde existem soluções analíticas confiáveis, fazendo-se necessária a utilização de outros métodos de cálculo. Nesse trabalho o método dos elementos finitos foi empregado na solução numérica do problema de fadiga em estruturas de material composto.

Uma rotina de cálculo com o método dos elementos finitos foi implementada no software Matlab. Esta rotina pode solucionar problemas de placas, fornecendo deslocamentos, deformações, tensões, entre outras respostas. Diversas condições de contorno e carregamentos podem ser aplicadas na solução de problemas estruturais de materiais isotrópicos e laminados ortotrópicos.

A rotina de elementos finitos será utilizada como calculador de tensões no modelo de dano, visando avaliar problemas de fadiga em placas, que é o foco deste estudo.

### 4.1 Teoria de elementos finitos para placas laminadas

Serão apresentadas as equações diferenciais necessárias para aplicar o método de elementos finitos. As deduções e explicações mais detalhadas podem ser aprofundadas em bibliografia clássica como MALVERN (1969).

#### 4.1.1 Equações cinemáticas e de movimento

As equações de movimento e cinemáticas serão descritas na configuração original indeformada do corpo, ou seja, configuração material ou Lagrangeana. Assim, as equações de movimento são apresentadas em termos das componentes do segundo tensor de Piola-Kirchhoff  $\sigma$ , como:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[ \sigma_{jk} \left( \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \right] + \rho b_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \quad (4.1)$$

$\sigma$  é definido considerando o vetor de força na superfície deformada, dado em termos do vetor tração por unidade de área inicial,  $\rho$  é a densidade do material, e  $b$  a força de corpo, BATHE (1982).

Na forma estendida tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X_1} \left[ \sigma_{11} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \sigma_{13} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_2} \left[ \sigma_{21} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \sigma_{23} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_3} \left[ \sigma_{31} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) + \sigma_{32} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \sigma_{33} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right] + \rho b_1 = \rho \frac{d^2 u_1}{dt^2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X_1} \left[ \sigma_{11} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \sigma_{13} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_2} \left[ \sigma_{21} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \sigma_{23} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_3} \left[ \sigma_{31} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) + \sigma_{32} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \sigma_{33} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right] + \rho b_2 = \rho \frac{d^2 u_2}{dt^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X_1} \left[ \sigma_{11} \left( 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) + \sigma_{12} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \sigma_{13} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_2} \left[ \sigma_{21} \left( 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) + \sigma_{22} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \sigma_{23} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial X_3} \left[ \sigma_{31} \left( 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) + \sigma_{32} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \sigma_{33} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right] + \rho b_3 = \rho \frac{d^2 u_3}{dt^2} \end{aligned}$$

Na medida de deformação, considerando pequenos deslocamentos e pequenas deformações, defini-se as componentes do tensor de deformação de Green-St. Venant  $\epsilon_{ij}$ , MALVERN (1969), pela equação (4.3):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \frac{\partial u_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right] \quad (4.3)$$

O delta de Kronecker  $\delta_{ij}$  vale 1, se  $i = j$ , ou 0, se  $i \neq j$ .

O tensor deformação é um tensor simétrico, então são necessárias apenas seis componentes para defini-lo, podendo ser apresentado na seguinte forma simplificada pela equação (4.4):



$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \\
\epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \\
\epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \\
\gamma_{23} &= 2\epsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\
\gamma_{13} &= 2\epsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\
\gamma_{12} &= 2\epsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

sendo  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$  deslocamentos e  $X_1 = x$ ,  $X_2 = y$ ,  $X_3 = z$  as coordenadas na configuração material.

Se as derivadas parciais de  $u_m$  com respeito a  $X_i$  forem suficientemente pequenas, os termos quadráticos podem ser desconsiderados quando comparados aos termos lineares.

No caso de placas laminadas, considera-se as hipótese de von Kármán e de Mindlin-Reissner. A hipótese de von Kármán mantém apenas os termos não lineares envolvendo  $\partial u_3/\partial X_1$  e  $\partial u_3/\partial X_2$ , admitindo deslocamentos moderadamente grandes. Assim as equações diferenciais (4.1) e (4.4), tomam a forma das equações (4.5) e (4.6):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}^{l_k}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{l_k}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{l_k}}{\partial z} + \rho^k b_x &= \rho^k \frac{d^2 u}{dt^2} \\
\frac{\partial \sigma_{xy}^{l_k}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{l_k}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{l_k}}{\partial z} + \rho^k b_y &= \rho^k \frac{d^2 v}{dt^2} \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[ \sigma_{xz}^{l_k} + \sigma_{xx}^{l_k} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{xy}^{l_k} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sigma_{yz}^{l_k} + \sigma_{xy}^{l_k} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{yy}^{l_k} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\
+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sigma_{zx}^{l_k} + \sigma_{xz}^{l_k} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_{yz}^{l_k} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \rho^k b_z &= \rho^k \frac{d^2 w}{dt^2}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\
\epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yx} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

O modelo de deslocamento cinemático utilizado é baseado nas hipóteses da teoria de primeira ordem de Mindlin para placas semi-espessas, onde considera-se que qualquer segmento inicialmente reto e normal à superfície de referência indeformada da placa permanece reto e inextensível após o carregamento, porém não necessariamente normal à superfície de referência deformada, considerando a deformação causada pelo cisalhamento transversal, COOK *et al.* (1989). Assim, o deslocamento pode ser descrito pelas equações (4.7):

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u^o(x, y, t) + z \cdot \psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v^o(x, y, t) + z \cdot \psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

O modelo possui cinco graus de liberdade  $u^o$ ,  $v^o$ ,  $w$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ .  $u^o$  é o deslocamento de membrana na direção  $x$ ,  $v^o$  é o deslocamento de membrana na direção  $y$ ,  $w$  é a deflexão (deslocamento na direção  $z$ ),  $\psi_x$  é a rotação em torno do eixo  $x$  e  $\psi_y$  é a rotação em torno do eixo  $y$ . A notação  $(\cdot)^o$  é usada para representar funções definida sobre a superfície de referência da placa.

Substituindo as hipóteses de Mindlin nas equações (4.7) e (4.6), tem-se a equação (4.8) que descreve as deformações coplanares através da espessura do laminado:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}(x, y, z, t) \\ \epsilon_{yy}(x, y, z, t) \\ \gamma_{xy}(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^o(x, y, t) \\ \epsilon_{yy}^o(x, y, t) \\ \gamma_{xy}^o(x, y, t) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx}(x, y, t) \\ \kappa_{yy}(x, y, t) \\ \kappa_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

as deformações de membrana  $\{\epsilon^o\}$  são definidas por:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^o(x, y, t) \\ \epsilon_{yy}^o(x, y, t) \\ \gamma_{xy}^o(x, y, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^o}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v^o}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v^o}{\partial x} + \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

e as curvaturas da superfície de referência  $\{\kappa\}$  por:

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx}(x, y, t) \\ \kappa_{yy}(x, y, t) \\ \kappa_{xy}(x, y, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

A equação (4.11) descreve as deformações cisalhantes transversais no laminado:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

## 4.1.2 Relações constitutivas

### Relações para deformações coplanares

As relações constitutivas para deformações coplanares para laminados são desenvolvidas inserindo a equação de variação da deformação através da espessura em um laminado, equação (4.8), na relação tensão-deformação de uma lâmina, equação (2.39), com isso as tensões na k-ésima lâmina podem ser expressas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{l_k} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left\{ \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^o \\ \epsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (4.12)$$

Cada lâmina desenvolverá suas próprias tensões coplanares, dependendo das suas propriedades e da sua cota ao longo de  $z$ . Essas tensões tem variações lineares dentro da lâmina. Por outro lado as tensões podem ter variações descontínuas nas interfaces entre lâminas.  $\{\sigma^{xl_k}\}$

Os esforços no laminado são obtidos pela integração das tensões em cada lâmina através da espessura do laminado:

$$\{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} dz \quad (4.13)$$

$$\{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} z dz \quad (4.14)$$

sendo  $\{N\}$  e  $\{M\}$  os esforços normais e de momento por unidade de comprimento ao longo de uma aresta de um elemento diferencial de placa, paralelos aos eixos  $x$  e  $y$ .  $H$  é a espessura total do laminado.

A integral ao longo da espessura  $z$ , nas definições das forças resultantes, podem ser substituída por um somatório de integrais ao longo da espessura de cada lâmina:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{l_k} dx \quad (4.15)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{l_k} z dx \quad (4.16)$$

Inserindo as relações de tensão e deformação, equação (4.12), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^o \\ \epsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) \right] dx \quad (4.17)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left( z \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^o \\ \epsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right) \right] dx \quad (4.18)$$

Como  $\{\epsilon_x^o\}$  e  $\{\kappa\}$  não são função de  $z$ , ao realizar as integrações e os somatórios, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^o \\ \epsilon_{yy}^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

sendo:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Definindo  $h_k$  como a espessura da lamina  $k$ , demonstra-se que as equações (4.20) são equivalentes à:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k h_k \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k h_k \bar{z}_k \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k \left( h_k \bar{z}_k^2 + \frac{h_k^3}{12} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

sendo  $\bar{z}_k$  a cota da superfície média da lâmina  $k$ , dada por  $\bar{z}_k = (z_{k-1} + z_k)/2$ .

A equação (4.19) pode se escrita na forma compacta como:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \epsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

As matrizes  $[A]$ , matriz de rigidez de membrana,  $[B]$ , matriz de rigidez de acoplamento entre flexão e membrana, e  $[D]$ , matriz de rigidez à flexão do laminado, são simétricas e formam a matriz constitutiva do material  $[C]$ . Caso o laminado seja simétrico  $[B] = 0$ , e não existe acoplamento entre membrana e flexão, MENDONÇA (2001).

### Relação para deformações cisalhantes transversais

Para definir a relação tensão deformação cisalhante transversal, toma-se os termos cisalhantes da relação constitutiva de uma lâmina genérica  $l_k$  nas direções  $x - y$ .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{l_k} = \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{54}^x & C_{55}^x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{l_k} \quad (4.23)$$

A definição dos esforços cortantes no laminado é:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (4.24)$$

Introduzindo a equação (4.23) na (4.24) tem-se:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{54}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{l_k} dz \quad (4.25)$$

Considerando a hipótese de que a deformação cisalhante é uniforme em  $z$ , pode-se definir a matriz de rigidez cisalhante como:

$$[A_c] = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{54}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^k dz \quad (4.26)$$

Entretanto a hipótese de cisalhamento constante ao longo da espessura é fisicamente impossível, pois o cisalhamento é nulo nas superfícies do laminado. Então é usado um fator de correção de cisalhamento  $k$  como correção para a integração em  $z$ . Assim a relação constitutiva para esforços cortantes fica da forma:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

sendo,

$$[E] = k \sum_{k=1}^N h_k \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{54}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^k \quad (4.28)$$

Para placas isotrópicas, é usual adotar-se  $k = 5/6$ .

### 4.1.3 Formulação em elementos finitos

Considerando uma formulação de elementos finitos de deslocamentos, lagrangeano, para placa laminada usando a teoria de Mindlin de placas semi-espessas, a formulação de elementos finitos é obtida a partir do método dos resíduos ponderados, posto na forma do princípio dos trabalhos virtuais, que tomado para um caso linear é dado por:

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}^o \\ \hat{\kappa} \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{yz} \\ \hat{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix}^t [E] \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{w} q d\Omega = 0 \quad (4.29)$$

O problema do princípio dos trabalhos virtuais consiste em buscar uma solução para  $\{u\} = \{u^o; v^o; w; \psi_x; \psi_y\}^t$ , com as funções  $u_i \in \mathbb{U}(\not\approx)$ , definidas em qualquer ponto  $(x, y) \in \Omega$  de tal forma que a equação (4.29) seja satisfeita para qualquer conjunto de funções peso  $\{\hat{u}\} = \{\hat{u}^o; \hat{v}^o; \hat{w}; \hat{\psi}_x; \hat{\psi}_y\}^t$ , com  $u_i \in \mathbb{V}(\not\approx)$ . Sendo  $\Omega$  o domínio da placa,  $q(x, y)$  é a carga transversal distribuída por unidade de área, e  $\mathbb{U}(\not\approx)$  e  $\mathbb{V}(\not\approx)$  são os espaços vetoriais das funções teste e peso, respectivamente.

Particiona-se a superfície de referência da placa, representada por  $\Omega$ , em regiões denominadas de elementos finitos  $\Omega^e$  de forma que  $\cup_{e=1}^{ne} \Omega^e = \Omega$ , e  $\Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , onde  $e$  é o contador de elementos e  $ne$  o número total de elementos.

A formulação usada é a de elementos finitos baseada em deslocamento, partindo das hipóteses cinemáticas da teoria de Mindlin para placas semi-espessas, equação (4.7).

No lugar das soluções exatas de  $u^o$ ,  $v^o$ ,  $w$ ,  $\psi_x$ , e  $\psi_y$ , busca-se soluções aproximadas  $u_h^o(x, y)$ ,  $v_h^o(x, y)$ ,  $w_h(x, y)$ ,  $\psi_{xh}(x, y)$ , e  $\psi_{yh}(x, y)$  para a equação (4.29).

Sobre o domínio  $\Omega^e$  de cada elemento finito  $e$  definem-se funções de base  $N_{no}$ , associadas aos nós  $no$  do elemento de forma que o campo de deslocamentos aproximado pode ser expresso em termos de valores nodais como:

$$\begin{Bmatrix} u^o(x, y) \\ v^o(x, y) \\ w(x, y) \\ \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \end{Bmatrix}_h^e = \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no}^e(x, y) \begin{Bmatrix} u_{no} \\ v_{no} \\ w_{no} \\ \psi_{xno} \\ \psi_{yno} \end{Bmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \Omega^e \quad (4.30)$$

sendo  $n_{ne}$  o número de nós do elemento e  $w_{no}$  com  $no = 1, 2, \dots, n_{ne}$ , representam os valores

nodais de  $w_h(x, y)$ , da mesma forma para  $u_{no}$ ,  $v_{no}$ ,  $\psi_{xno}$ ,  $\psi_{yno}$ . E  $N_{no}^e(x, y)$  é o conjunto das  $n_{ne}$  funções de interpolação base do elemento  $e$ . Em geral essas funções  $N_{no}^e$  não são escritas diretamente em termos das coordenadas reais  $(x, y)$  mas mapeadas em termos das coordenadas paramétricas  $(r, s)$  do elemento. Então a equação (4.30) pode ser expressa da forma aberta:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^o(x, y) \\ v^o(x, y) \\ w(x, y) \\ \psi_x(x, y) \\ \psi_y(x, y) \end{array} \right\}_h^e = \left[ \begin{array}{cccccc} N_1(r, s) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1(r, s) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1(r, s) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & N_1(r, s) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1(r, s) & \dots \end{array} \right] \underbrace{\left[ \begin{array}{cccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right]}_{n_2} \dots \quad (4.31)$$

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{ccccc} N_{ne}(r, s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{ne}(r, s) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{ne}(r, s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{ne}(r, s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ne}(r, s) \end{array} \right]}_{n_{ne}} \left\{ \begin{array}{l} \{u_1\} \\ \{u_2\} \\ \vdots \\ \{u_{no}\} \\ \vdots \\ \{u_{n_{ne}}\} \end{array} \right\}$$

Os deslocamentos nodais de um nó genérico  $no$  do elemento  $e$  são:

$$\{u_{no}\} = \left\{ \begin{array}{l} u_{no} \\ v_{no} \\ w_{no} \\ \psi_{xno} \\ \psi_{yno} \end{array} \right\} \quad (4.32)$$

De uma forma compacta pode-se escrever (4.31) como:

$$\{u(r, s)\}_h^e = [N^e(r, s)] \{U^e\} \quad (4.33)$$

Como os deslocamentos são dados em termos das coordenadas paramétricas  $(r, s)$  e o que se deseja é representar  $u$  em função de  $(x, y)$ , então se faz necessário um mapeamento entre os dois domínios do elemento,  $(x, y) \leftrightarrow (r, s)$  através das funções base  $N(r, s)$ . O mapeamento é feito pelas relações:

$$\begin{aligned}
 x(r, s) &= \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no}^e(r, s) x_{no} \\
 y(r, s) &= \sum_{no=1}^{n_{ne}} N_{no}^e(r, s) y_{no}
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

Fazendo o mapeamento inverso em (4.31) por  $r = r(x, y)$  e  $s = s(x, y)$ , tem-se a equação:

$$\{u(x, y)\}_h^e = [\bar{N}^e(x, y)] \{U^e\} \tag{4.35}$$

e  $[\bar{N}^e(x, y)] = [\bar{N}^e(r(x, y), s(x, y))]$ .

### Funções de interpolação

As funções de base da família lagrangeana são constitutuidas pelos polinômios de Lagrange. Assim os elementos podem ter funções bi-lineares, bi-quadráticas, bi-cúbicas, bi-quárticas, etc, podendo ser facilmente formadas fazendo-se produtos dos polinômios uniaxiais, nas direções  $r$  e  $s$ . As funções de base lagrangeanas quadráticas no caso uniaxial são:

$$\begin{aligned}
 L_1(r) &= \frac{r}{2}(r-1) \\
 L_2(r) &= (1-r^2) \\
 L_3(r) &= \frac{r}{2}(r+1)
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

As funções de base lagrangeanas foram aplicadas no desenvolvimento da rotina de elementos finitos. Maiores detalhes sobre as funções de interpolação pode ser encontradas em DHATT e TOUZOT (1984).

### Matriz de rigidez do elemento:

Tomando as deformações da equação (4.29) e colocando em termos de deslocamentos, tem-se:



$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} u_{,x}^o \\ v_{,y}^o \\ u_{,y}^o + v_{,x}^o \\ \psi_{x,x} \\ \psi_{y,y} \\ \psi_{x,y} + \psi_{y,x} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \psi_y + w_{,y} \\ \psi_x + w_{,x} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

sendo  $(\cdot)_{,x}$  a diferenciação da função  $(\cdot)$  em termos de  $x$ .

Usando-se as expressões (4.35) para os deslocamentos, tem-se as seguintes aproximações para as deformações no elemento  $e$  :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix}_h^e &= \begin{bmatrix} \bar{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{N}_{n_{ne},x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_{1,y} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{N}_{n_{ne},y} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_{1,y} & \bar{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \bar{N}_{n_{ne},y} & \bar{N}_{n_{ne},x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{1,x} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{n_{ne},x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{1,y} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{1,y} & \bar{N}_{1,x} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{n_{ne},y} \end{bmatrix} \{U^e\} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_h^e &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{N}_{1,x} & 0 & \bar{N}_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & \bar{N}_{n_{ne},x} & 0 & \bar{N}_{n_{ne}} \\ 0 & 0 & \bar{N}_{1,y} & \bar{N}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \bar{N}_{n_{ne},y} & \bar{N}_{n_{ne}} & 0 \end{bmatrix} \{U^e\} \end{aligned} \quad (4.38)$$

De forma mais compacta, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix}_h^e &= [B_{mf}^e(x, y)] \{U^e\} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_h^e &= [B_c^e(x, y)] \{U^e\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$[B_{mf}^e(x, y)]$  e  $[B_c^e(x, y)]$  são denominadas matrizes de deformação membrana-flexão e cisalhante do elemento  $e$  respectivamente.

De fomar análoga, pode-se encontrar as aproximações para as deformações virtuais

para os deslocamentos virtuais  $\{\hat{u}(x, y)\}_h^e$ , que ficam:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}^o \\ \hat{k} \end{Bmatrix}_h^e &= [B_{mf}^e(x, y)] \{\hat{U}^e\} \\ \begin{Bmatrix} \hat{\gamma}_{yz} \\ \hat{\gamma}_{xz} \end{Bmatrix}_h^e &= [B_c^e(x, y)] \{\hat{U}^e\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Aproximando as funções peso para  $\hat{w}(x, y)$  no carregamento distribuido  $q(x, y)$  tem-se:

$$\hat{w}_h^e(x, y) = \sum_{no=1}^{n_{ne}} \bar{N}_{no}^e(x, y) \hat{w}_{no} \quad (4.41)$$

que pode ser escrito da forma:

$$\begin{aligned} \hat{w}_h^e(x, y) &= \left\{ \underbrace{0, 0, \bar{N}_1, 0, 0, 0, 0, \bar{N}_2, 0, 0}_{\text{nó 1}} \dots \underbrace{0, 0, \bar{N}_{no}, 0, 0}_{\text{nó no}} \dots \underbrace{0, 0, \bar{N}_{ne}, 0, 0}_{\text{nó } n_{ne}} \right\} \{\hat{U}^e\} \\ &= \{\bar{N}_w^e(x, y)\} \{\hat{U}^e\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Assim para um elemento genérico  $e$  tem-se que as deformações nodais podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} \{\hat{U}^e\}^t & \left[ \underbrace{\int_{\Omega^e} [B_{mf}^e]^t \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} [B_{mf}^e] dx dy}_{[K_{mf}^e]} + \underbrace{\int_{\Omega^e} [B_c^e]^t [E^e] [B_c^e] dx dy}_{[K_c^e]} \right] \{U^e\} \\ & - \underbrace{\{\hat{U}^e\}^t \int_{\Omega} \{\bar{N}_w^e(x, y)\} q(x, y) dx dy}_{\{F^e\}} = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Assim de forma compacta tem-se:

$$\{\hat{U}^e\}^t \left[ [K_{mf}^e] + [K_c^e] \right] \{U^e\} - \{F^e\} = 0 \quad (4.44)$$

$[K_{mf}^e]$ ,  $[K_c^e]$  e  $\{F^e\}$  são as matrizes de rigidez de membrana-flexão, de cisalhamento transversal e vetor força nodal do elemento respectivamente.

Como o princípio dos trabalhos virtuais afirma que a solução deve anular a expressão (4.29) para qualquer função peso  $\{\hat{u}\}_h$ , então tem-se a equação de equilíbrio do elemento  $e$ :

$$[[K_{mf}^e] + [K_c^e]] \{U^e\} = \{F^e\} \quad \text{ou} \quad [K^e] \{U^e\} = \{F^e\} \quad (4.45)$$

### Integração numérica

Fazendo a integração numérica de  $[K_{mf}^e]$ ,  $[K_c^e]$  e  $\{F^e\}$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} [K_{mf}^e] &= \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} [B_{mf}^e(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)]^t [C^e] [B_{mf}^e(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)] |J(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)| P_i P_j \\ [K_c^e] &= \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} [B_c^e(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)]^t [E^e] [B_c^e(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)] |J(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)| P_i P_j \\ \{F^e\} &= \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \{N_w^e(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)\} q |J(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)| P_i P_j \end{aligned} \quad (4.46)$$

$np$  número de pontos de integração,  $\tilde{r}_i$  e  $\tilde{s}_j$  são as coordenadas intrínsecas dos pontos de integração,  $P_i$  e  $P_j$  são os pesos de integração.  $|J(\tilde{r}_i, \tilde{s}_j)|$  é a matriz Jacobiana que faz o mapeamento das funções base do elemento descritas em termos das coordenadas globais, para as descritas em termos das coordenadas paramétricas, que genericamente pode ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr} \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \end{bmatrix}}_{[J]} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

O número de pontos de integração depende do grau do polimônio de interpolação. Pode ser realizada uma integração completa ou incompleta, dependendo da ocorrência de travamento no elemento. Informações mais aprofundadas sobre integração numérica pode ser obtidas em bibliografia especializada como BATHE (1982) e DHATT e TOUZOT (1984).

### Montagem da matriz de rigidez global

Calculada a matriz de rigidez e o vetor força de cada elemento, esses valores são sobrepostos formando a matriz de rigidez global  $[K]$  de ordem do número total de graus de liberdade do problema, e o vetor força global  $\{F\}$ , formando um sistema algébrico na forma:

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (4.48)$$

sendo  $\{U\}$  o vetor contendo os deslocamentos nodais. Na montagem da matriz de rigidez global são aplicadas as condições de contorno, eliminando os movimentos de corpo rígido

do problema BABUSKA e SZABO (1991).

### Cálculo das tensões

Com os deslocamentos nodais do modelo  $\{U\}$  pode-se montar um vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\{U^e\}$ . Assim as deformações do elemento podem ser calculadas operando as matrizes de deformação  $[B_{mf}^e(x, y)]$  e  $[B_c^e(x, y)]$  e o vetor  $\{U^e\}$ , MENDONÇA (2001).

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^o \\ \kappa \end{Bmatrix}^e = [B_{mf}^e(x, y)] \{U^e\} \quad (4.49)$$

As tensões coplanares  $\{\sigma^x\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}$  nas direções  $x-y$  e  $\{\sigma^1\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}$  nas direções principais 1-2 em cada lâmina  $l_k$  no ponto  $(x, y, z)$  podem ser obtidas fazendo:

$$\begin{aligned} \{\sigma^{xl_k}(x, y, z)\} &= [\bar{Q}^k(x, y)] \{ \{\epsilon^o(x, y)\}^e + z \{\kappa(x, y)\}^e \} \\ \{\sigma^{1l_k}(x, y, z)\} &= [T^k] \{\sigma^{xl_k}(x, y, z)\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

E as tensões cisalhantes por:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz}(x, y, z) \\ \sigma_{xz}(x, y, z) \end{Bmatrix}^{l_k} &= \begin{bmatrix} C_{44}^x & C_{45}^x \\ C_{54}^x & C_{55}^x \end{bmatrix}^{l_k} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_{13}(x, y, z) \\ \sigma_{23}(x, y, z) \end{Bmatrix}^{l_k} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{l_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{yz}(x, y, z) \\ \sigma_{xz}(x, y, z) \end{Bmatrix}^{l_k} \end{aligned} \quad (4.51)$$

sendo  $\theta$  o ângulo de orientação das fibras na lâmina  $l_k$ .

As tensões cisalhantes transversais são supostas constantes na espessura pela teoria de Mindlin, não representando a realidade. Existem procedimentos mais refinados para avaliar estas tensões, e podem ser aprofundados em bibliografia especializada como em MENDONÇA (2001).

# Capítulo 5

## Desenvolvimento experimental e numérico

Este trabalho baseia-se em dois desenvolvimentos, um experimental e outro numérico. A parte experimental consiste em ensaiar corpos de prova de material composto laminado em vidro/epóxi, submetidos a carregamentos cíclicos de flexão. A parte numérica aborda a simulação dos ensaios experimentais. Através de um modelo matemático, que contempla teorias de mecânica dos sólidos, mecânica do dano e elementos finitos, descrevendo o comportamento da fadiga do material durante a vida do corpo de prova.

### 5.1 O desenvolvimento do ensaio experimental

Os ensaios experimentais têm como objetivos:

- Levantar curvas dos esforços de reação no decorrer da vida dos corpos de prova para serem confrontadas com os resultados obtidos através do modelo numérico implementado;
- Verificar a formação de trincas, delaminações e rupturas, durante o processo de deformação dos corpos de prova.

#### 5.1.1 Corpos de prova

##### Definição

Os corpos de prova foram fabricados em material composto com fibras de vidro impregnados em resina epóxi por moldagem a vácuo. A fibra utilizada na fabricação é de tecido biaxial trançado. A densidade do tecido é de 120 g/m<sup>2</sup>, tipo VTL-120 da marca Vitro-Textil. A resina epóxi é do tipo TCR-550/B e o catalizador XR-435, da marca LQueiroz.

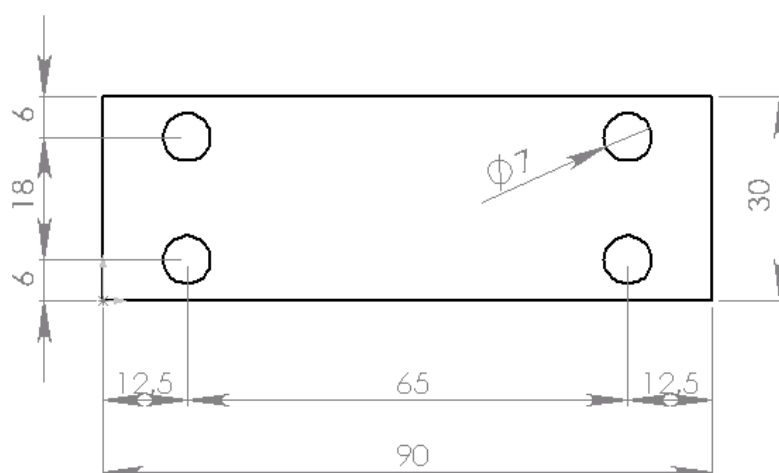


Figura 5.1: Geometria dos corpos de prova.

Foram utilizadas nos ensaios corpos de prova com duas configurações na orientação das lâminas, uma em  $[0^\circ/90^\circ]_{nl}$  e outra em  $[45^\circ/-45^\circ]_{nl}$ , contendo  $nl$  lâminas com espessura variando entre 0,1 mm e 0,15 mm.

As frações de massa do laminado curado ficaram em aproximadamente 40% de fibra.

A geometria dos corpos de prova pode ser vista na figura 5.1. Ela foi definida a partir de especificações da máquina de ensaio de fadiga Schenck, SCHENCK (1965).

O comprimento dos corpos de prova é de 90 mm, necessário para uma correta fixação na máquina. Porém, o comprimento que efetivamente está submetido a flexão é de 40 mm, pois o corpo de prova é fixado com uma garra de 25 mm em cada lado.

A largura dos corpos de prova é de 30 mm. O corpo de prova não possui entalhe concentrador de tensões.

### Confecção

Foi utilizado na fabricação dos corpos de prova o processo de moldagem manual auxiliada por vácuo em molde fechado por uma membrana plástica. O molde feito de lâminas de vidro com uma superfície de baixa rugosidade, deram um bom acabamento superficial ao corpo de prova. A membrana plástica comprime a superfície oposta do corpo de prova devido ao vácuo, resultando em uma espessura mais homogênea. As últimas etapas do processo de fabricação dos corpos de prova foram o corte no tamanho especificado, e a furação para a fixação na máquina.

### Instrumentação

Alguns corpos de prova foram instrumentados para verificação das deformações nas superfícies do laminado. Foram aplicados extensômetros metálicos como sensores de de-

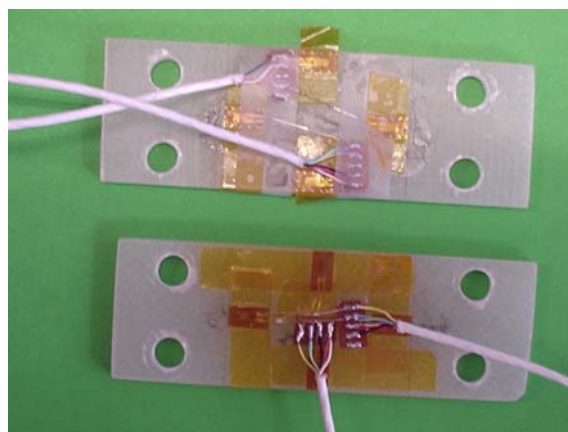


Figura 5.2: Corpos de prova instrumentados, em cima  $[0^\circ/90^\circ]$  e em baixo  $[45^\circ/-45^\circ]$ .

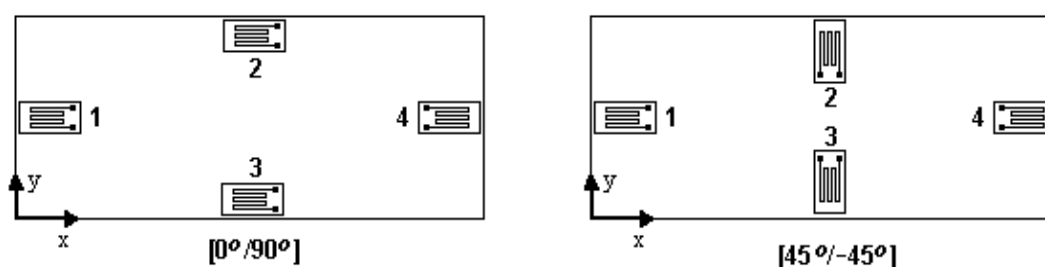


Figura 5.3: Esquema da instrumentação dos corpos de prova.

formação. Os extensômetros utilizados são do tipo 1-LY18-3/350A da marca HBM, com temperatura compensada para plásticos. Esses extensômetros são uniaxiais, e foram aplicados e forma que a orientação das grades de medição coincidam com a direção dos eixos  $x - y$  do sistema de referência global. Assim essas deformações podem ser comparadas às deformações calculadas no modelo numérico. Todos os extensômetros foram montados em um quarto de ponte, e conectados ao sistema de aquisição de dados.

No corpo de prova tipo  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ , foram aplicados quatro extensômetros, todos alinhados com a direção do eixo  $x$ . No corpo de prova tipo  $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$ , dois extensômetros foram aplicados na direção do eixo  $x$  e outros dois na direção do eixo  $y$ . A disposição dos extensômetros no corpo de prova podem ser vistos na figura 5.3 ou na foto dos corpos de prova instrumentados na figura 5.2.

### 5.1.2 Procedimento de ensaio

Aqui são apresentados resumidamente os procedimentos realizados na execução dos ensaios.

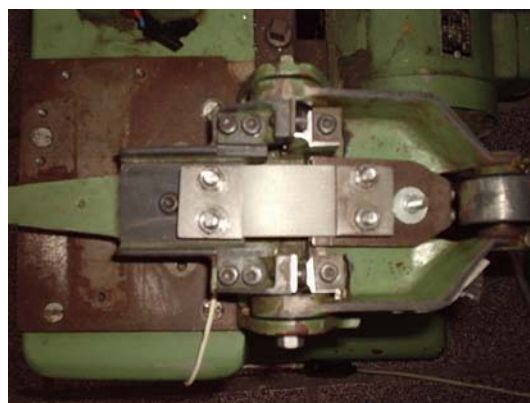


Figura 5.4: Vista superior da máquina de fadiga.



Figura 5.5: Lateral da máquina de ensaio de fadiga

### Equipamentos utilizados

O ensaio foi realizado na máquina de ensaio à fadiga de flexão plana da marca Schenck, que é apresentada nas figuras 5.5.e 5.4. O sistema consiste em submeter o corpo de prova a carregamentos cíclicos de flexão pura. Um esquema ilustrativo do ensaio pode ser visto na figura 5.6.

O sistema de medição de esforços da máquina de fadiga era totalmente mecânico. Sendo assim, este sistema é impreciso e suscetível a erros operacionais. Visando reduzir esses erros e imprecisões, foi desenvolvido um sistema de medição instrumentado. Uma célula de carga foi projetada, projeto apresentado no apêndice C, para realizar a medição dos esforços presentes no corpo de prova com maior precisão e redução dos riscos operacionais. A mola foi substituída pela célula de carga e os relógios comparadores foram removido do sistema.

A máquina possui dois braços, o braço de medição que serve para transmitir o momento aplicado no corpo de prova à célula de carga, e o braço guia, que aplica uma deslocamento no corpo de prova. Esses braços possuem a mesma linha de rotação. O corpo de prova



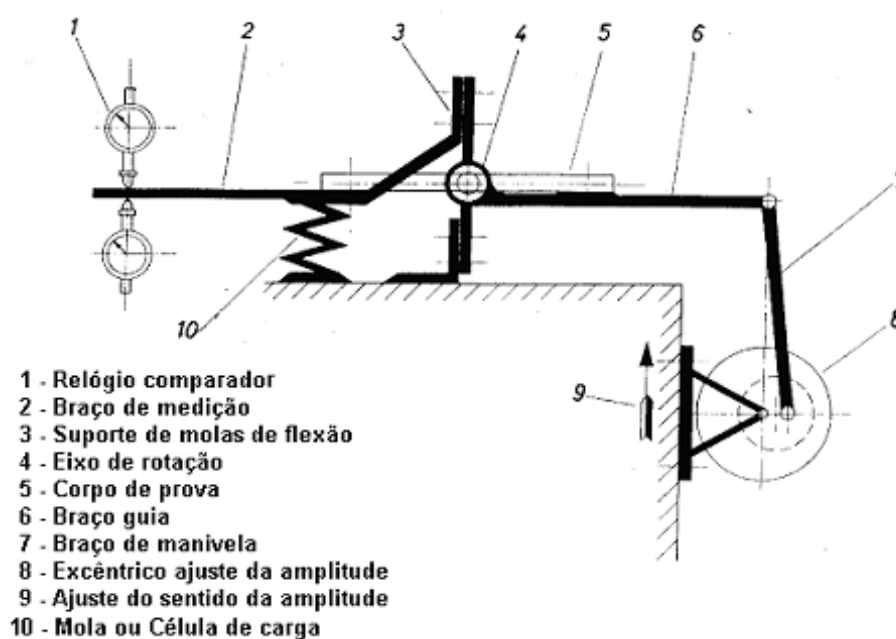


Figura 5.6: Esquema ilustrativo do ensaio.

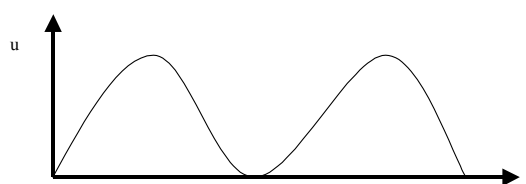


Figura 5.7: Deslocamento senoidal aplicado.

deve ser fixado com a sua linha neutra na mesma altura deste eixo, como pode ser visto no esquema da figura 5.6. Essa configuração gera uma flexão pura no corpo de prova.

### O procedimento de ensaio

O procedimento de ensaio segue o manual da máquina de ensaio à fadiga, SCHENCK (1965). Porém, para a aquisição de dados foi criado um novo procedimento devido à alteração do sistema mecânico para a célula de carga. Assim o procedimento realizado para a execução dos ensaios é resumido abaixo:

- Definição da amplitude do deslocamento

A amplitude do deslocamento a ser aplicado no corpo de prova deve levar em consideração o limite de carga suportado pela célula de carga (200N). A carga gerada na célula depende do material do corpo de prova e da sua geometria (largura, espessura e concentrador de tensão).

Foram aplicados vários níveis de deslocamento nos ensaios. O deslocamento foi aplicado numa única direção. O deslocamento aplicado como carregamento tem a forma senoidal podendo ser visto na figura 5.7. Esses deslocamentos geram uma flexão pura no corpo de prova, com isso o momento aplicado pode ser medido através da célula de carga da máquina.

- Montagem da célula de carga

A célula de carga deve ser fixada na máquina de ensaio de fadiga e conectada ao sistema de aquisição de dados, o “SPIDER-8” da marca HBM. Devem ser realizados testes de aquisição para verificar o correto funcionamento da célula, bem como a zeragem da ponte obtida através de um potenciômetro instalado.

- Montagem do corpo de prova

O corpo de prova deve ser fixado no equipamento conforme o procedimento do manual SCHENCK (1965). Deve-se ter atenção ao posicionamento da altura do corpo de prova, que deve estar com a sua linha neutra coincidindo com a linha do eixo de rotação que liga o braço de aplicação de carga ao braço de leitura dos esforços. Dependendo da espessura do corpo de prova deve-se utilizar calços para um melhor nivelamento.

- Ajuste do deslocamento

O deslocamento foi ajustado conforme os valores definidos. Este ajuste foi feito regulando a altura do motor com relação ao corpo de prova, permitindo que o deslocamento fosse aplicado em apenas uma direção, e pelo movimento de uma came de excentricidade variável que permite a regulagem da amplitude do deslocamento.

- Coleta de dados

A célula de carga foi ligada ao sistema de aquisição de dados. Este por sua vez, está conectado a um computador que o gerência através de um software chamado CATMAN. Assim foi possível ler os esforços a que a célula de carga foi submetida durante o ensaio. Esses dados foram gravados e pós processados para o levantamento das curvas de carregamento pela vida do corpo de prova.

Também foram coletados os dados de deformação fornecidos pelos extensômetros que foram instalados nos corpos de prova. Esses dados foram processados e com eles foram levantadas as curvas das deformações no corpo de prova.

Basicamente esses foram os passos realizados na execução dos ensaios.

### 5.1.3 Ensaios realizados

Foram realizados ensaios preliminares estáticos para a definição do nível de carga a ser aplicado no ensaio de fadiga. Primeiramente foram levantados os momentos resultantes para diversos níveis de amplitude de deslocamento em um corpo de prova com laminado disposto a  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ , com lâminas de aproximadamente 0,14 mm de espessura. Em todos os casos analisados, o corpo de prova foi flexionado apenas em um sentido, fazendo com que o deslocamento inferior coincidissem com a amplitude zero. Com esses dados pode-se levantar a curva de momento pela excentricidade aplicada da came, que resulta no nível de carregamento aplicado.

Outro ensaio preliminar foi a verificação do perfil de deformações no comprimento do corpo de prova, para os níveis de amplitude de deslocamento aplicados no ensaio para verificação dos momentos. Neste ensaio foram aplicados extensômetros na superfície do corpo de prova como no esquema da figura 5.3.

Utilizando os dados dos dois ensaios realizados, é possível levantar curvas de histerese para cada nível de carregamento aplicado. Algumas curvas obtidas são apresentadas na seção de resultados.

Os módulos de elasticidade  $E_{11}$  e  $E_{22}$ , o coeficiente de poisson  $\nu$  e as resistências limites  $X_t$ ,  $Y_t$  das lâminas foram retiradas de ensaios uniaxiais de tração realizados em corpos de prova especiais, constituídos de lâminas dispostas à  $[0^\circ/90^\circ]_{12}$ , à  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$  e à  $[0^\circ/90^\circ]_{24}$ , de forma semelhante à revisada no capítulo 1. O módulo cisalhante  $G$  e resistências limites a compressão  $X_c$ ,  $Y_c$  e cisalhante  $S$  foram baseadas na literatura, ASTM (2000). Os valores encontrados para estas constantes são:

$$\begin{array}{ll} E_{11} = 10 \text{ GPa} & X_t = 200 \text{ MPa} \\ E_{22} = 10 \text{ GPa} & X_c = 150 \text{ MPa} \\ G = 2 \text{ GPa} & Y_t = 200 \text{ MPa} \\ \nu = 0,20 & Y_c = 150 \text{ MPa} \\ & S = 50 \text{ MPa} \end{array}$$

Estas foram as constantes utilizadas no modelo numérico para simular os ensaios experimentais realizados neste trabalho.

## 5.2 O desenvolvimento do ensaio numérico

A parte numérica deste trabalho consiste em simular o comportamento da fadiga em materiais compostos laminados. Utilizou-se o método de elementos finitos para avaliar o comportamento estrutural de placas submetidas a um determinado carregamento e condição de contorno, visando simular o ensaio experimental. O comportamento à fadiga foi abordado utilizando conceitos da mecânica do dano, e incorporado ao modelo de

elementos finitos.

### 5.2.1 Modelo de elementos finitos

O modelo de elementos finitos empregado está baseado nas teorias de placa semi-espessa de Mindlin, para um material ortotrópico laminado. Em resumo, o modelo realiza uma seqüência de análises estáticas lineares. Essas análises são guiadas por uma lei de evolução do dano até satisfazer um critério de parada. A cada análise as propriedades do laminado são degradadas, até a perda completa da resistência, na região mais solicitada.

#### O elemento

O tipo de elemento utilizado foi o quadrado com quatro tipos de funções larangeanas de interpolação:

- Linear com 4 nós;
- Quadrático com 9 nós;
- Cúbico com 16 nós;
- Quártico com 25 nós.

O elemento quártico foi o utilizado nas simulações, os outros elementos seviram apenas para ajustes, comparações e validações das rotinas de elementos finitos. O elemento quártico foi escolhido por que o seu grau polinomial se aproxima das soluções analíticas de tensão para placas (refino p). Assim, será necessário um número reduzido de elementos na malha para obter-se a precisão necessária nas tensões. Caso fosse utilizado um elemento com um grau polinomial menor, quadrático por exemplo, o número de elementos teria que ser muito elevado (refino h), aumentando assim o custo computacional da simulação.

As funções de interpolação  $H_i$  utilizadas para o elemento quártico são dadas pelo produto das funções lineares quárticas  $N_{r_i}$  da direção  $r$ , equação (5.1), pelas funções lineares quárticas  $N_{s_i}$  da direção  $s$ , equação (5.2), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 N_{r1} &= \frac{2}{3} \cdot r^4 - \frac{2}{3} \cdot r^3 - \frac{1}{6} \cdot r^2 + \frac{1}{6} \cdot r \\
 N_{r2} &= -\frac{8}{3} \cdot r^4 + \frac{4}{3} \cdot r^3 + \frac{8}{3} \cdot r^2 - \frac{4}{3} \cdot r \\
 N_{r3} &= 4 \cdot r^4 - 5 \cdot r^2 + 1 \\
 N_{r4} &= -\frac{8}{3} \cdot r^4 - \frac{4}{3} \cdot r^3 + \frac{8}{3} \cdot r^2 + \frac{4}{3} \cdot r \\
 N_{r5} &= \frac{2}{3} \cdot r^4 + \frac{2}{3} \cdot r^3 - \frac{1}{6} \cdot r^2 - \frac{1}{6} \cdot r
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

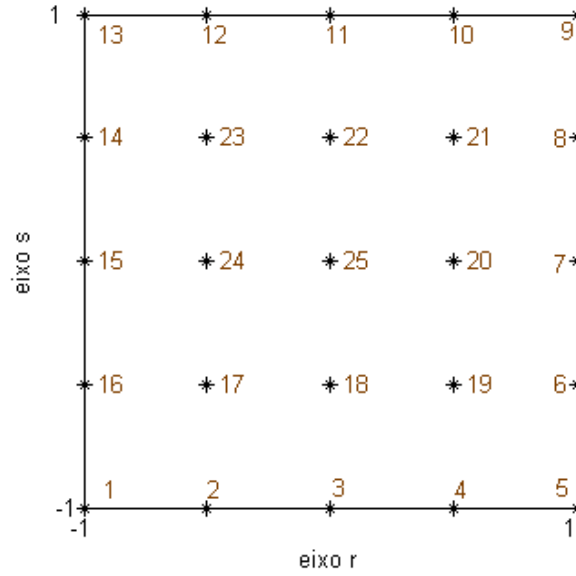


Figura 5.8: Numeração do elemento quártico de 25 nós.

$$\begin{aligned}
 N_{s1} &= \frac{2}{3} \cdot s^4 - \frac{2}{3} \cdot s^3 - \frac{1}{6} \cdot s^2 + \frac{1}{6} \cdot s \\
 N_{s2} &= -\frac{8}{3} \cdot s^4 + \frac{4}{3} \cdot s^3 + \frac{8}{3} \cdot s^2 - \frac{4}{3} \cdot s \\
 N_{s3} &= 4 \cdot s^4 - 5 \cdot s^2 + 1 \\
 N_{s4} &= -\frac{8}{3} \cdot s^4 - \frac{4}{3} \cdot s^3 + \frac{8}{3} \cdot s^2 + \frac{4}{3} \cdot s \\
 N_{s5} &= \frac{2}{3} \cdot s^4 + \frac{2}{3} \cdot s^3 - \frac{1}{6} \cdot s^2 - \frac{1}{6} \cdot s
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$N_{13} = N_{r1} \cdot N_{s5}$	$N_{12} = N_{r2} \cdot N_{s5}$	$N_{11} = N_{r3} \cdot N_{s5}$	$N_{10} = N_{r4} \cdot N_{s5}$	$N_9 = N_{r5} \cdot N_{s5}$
$N_{14} = N_{r1} \cdot N_{s4}$	$N_{23} = N_{r2} \cdot N_{s4}$	$N_{22} = N_{r3} \cdot N_{s4}$	$N_{21} = N_{r4} \cdot N_{s4}$	$N_8 = N_{r5} \cdot N_{s4}$
$N_{15} = N_{r1} \cdot N_{s3}$	$N_{24} = N_{r2} \cdot N_{s3}$	$N_{25} = N_{r3} \cdot N_{s3}$	$N_{20} = N_{r4} \cdot N_{s3}$	$N_7 = N_{r5} \cdot N_{s3}$
$N_{16} = N_{r1} \cdot N_{s2}$	$N_{17} = N_{r2} \cdot N_{s2}$	$N_{18} = N_{r3} \cdot N_{s2}$	$N_{19} = N_{r4} \cdot N_{s2}$	$N_6 = N_{r5} \cdot N_{s2}$
$N_1 = N_{r1} \cdot N_{s1}$	$N_2 = N_{r2} \cdot N_{s1}$	$N_3 = N_{r3} \cdot N_{s1}$	$N_4 = N_{r4} \cdot N_{s1}$	$N_5 = N_{r5} \cdot N_{s1}$

(5.3)

A seqüência da numeração dos nós no elemento está representada na figura 5.8. As funções estão dispostas na matriz na mesma ordem de numeração dos nós no elemento, equações (5.3).

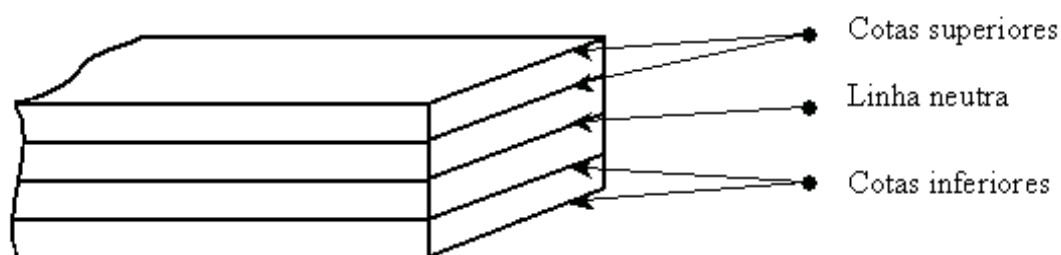


Figura 5.9: Definição da posição de avaliação das tensões ao longo da espessura do laminado.

### 5.2.2 Cálculo das tensões

O modelo de dano utiliza como variável as tensões na placa. Como a tensão em um nó não é constante ao longo da espessura da placa, ela foi discretizada em diversos pontos que caracterizam as tensões máximas em cada lâmina. Nas lâminas situadas abaixo da linha neutra da placa as tensões foram avaliadas na cota inferior, e nas lâminas situadas acima da linha neutra as tensões foram avaliadas na cota superior, conforme mostrado na figura 5.9. Assim as tensões obtidas são as máximas tensões existentes na posição do nó em cada lâmina, podendo ser inseridas no modelo de dano.

### 5.2.3 Cálculo do dano

O modelo de dano implementado no trabalho está baseado nos estudos de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003), aplicado a placas sob estado plano de tensão, e se desconsiderando as deformações permanentes e o acoplamento das variáveis de dano  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}$ , como detalhado no capítulo 3. Assim a lei de evolução do dano é dada pelas equações (5.4).

$$\begin{aligned}
\frac{dD_{11}}{dN} &= \begin{cases} c_1 \cdot \Sigma_{11} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{11}}{\sqrt{\Sigma_{11}}}\right) + c_3 \cdot D_{11} \cdot \Sigma_{11}^2 \cdot [1 + \exp(c_5 (\Sigma_{11} - c_4))] \\ \text{se } \sigma_{11} \geq 0 \\ \left[ c_1 \cdot \Sigma_{11} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{11}}{\sqrt{\Sigma_{11}}}\right) \right]^3 + c_3 \cdot D_{11} \cdot \Sigma_{11}^2 \cdot [1 + \exp\left(\frac{c_5}{3} (\Sigma_{11} - c_4)\right)] \\ \text{se } \sigma_{11} < 0 \end{cases} \\
\frac{dD_{22}}{dN} &= \begin{cases} c_1 \cdot \Sigma_{22} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{22}}{\sqrt{\Sigma_{22}}}\right) + c_3 \cdot D_{22} \cdot \Sigma_{22}^2 \cdot [1 + \exp(c_5 (\Sigma_{22} - c_4))] \\ \text{se } \sigma_{22} \geq 0 \\ \left[ c_1 \cdot \Sigma_{22} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{22}}{\sqrt{\Sigma_{22}}}\right) \right]^3 + c_3 \cdot D_{22} \cdot \Sigma_{22}^2 \cdot [1 + \exp\left(\frac{c_5}{3} (\Sigma_{22} - c_4)\right)] \\ \text{se } \sigma_{22} < 0 \end{cases} \\
\frac{dD_{12}}{dN} &= c_1 \cdot \Sigma_{12} \cdot \exp\left(-c_2 \frac{D_{12}}{2\sqrt{\Sigma_{12}}}\right) \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Os danos  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}$ , são calculados pelas equações (5.5), para cada ciclo  $N$  de carregamento.

$$\begin{aligned}
D_{11}^N &= D_{11}^{N-1} + \frac{dD_{11}^N}{dN} \cdot \Delta N \\
D_{22}^N &= D_{22}^{N-1} + \frac{dD_{22}^N}{dN} \cdot \Delta N \\
D_{12}^N &= D_{12}^{N-1} + \frac{dD_{12}^N}{dN} \cdot \Delta N
\end{aligned} \quad (5.5)$$

São calculadas nos mesmos pontos de avaliação das tensões, com isso existe um valor para cada variável de dano em cada lâmina do laminado em cada nó da malha. Isso significa que o número de avaliações do dano no laminado é igual ao número de nós da malha vezes o número de lâminas do laminado.

O valor inicial dos danos  $D_{11}^0$ ,  $D_{22}^0$ ,  $D_{12}^0$ , é zero ( $= 0$ ), representando um material virgem, ou seja não danificado no início da vida.

Como o custo computacional é bastante considerável, uma rotina para utilização de um fator de amplificação dos passos de incremento  $\Delta N$  foi implementado. Este fator é dependente de  $\frac{dD_{11}^N}{dN}$ ,  $\frac{dD_{22}^N}{dN}$ ,  $\frac{dD_{12}^N}{dN}$ . Quando esses valores são muito baixos o fator aumenta, fazendo com que a simulação progrida mais rapidamente. Isso ocorre principalmente no estágio 2 onde a taxa de dano é praticamente constante. Nesse procedimento perde-se um pouco na precisão dos resultados, mas em contra partida têm-se um ganho considerável no tempo de cálculo. Os estágios de degradação foram apresentados na figura 3.1.

### Degradação da matriz de rigidez

A relação tensão-deformação-dano empregada no modelo parte da equação (3.13), onde são feitas as considerações de estado plano de tensão, e desconsideradas as deformações permanentes existentes no modelo de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(1 - D_{11}) & C_{12}\sqrt{1 - D_{11}}\sqrt{1 - D_{22}} & 0 \\ C_{12}\sqrt{1 - D_{11}}\sqrt{1 - D_{22}} & C_{22}(1 - D_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}(1 - D_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

Dessa forma o dano é inserido na matriz de rigidez. No cálculo das deformações e tensões nodais por elementos finitos, o valor do dano utilizado é o correspondente de cada lâmina do laminado.

### Degradação da resistência mecânica

A resistência mecânica é degradada quando se avalia a falha, onde pelo critério de falha de Tsai Wu são calculados os índices de falha  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$ ,  $\Sigma_{12}$  que são inseridas nas equações de evolução do dano (5.4).

Os índices de falha bidimensionais são calculados a partir das tensões efetivas  $\tilde{\sigma}_{ij}$ , definidas na equação (5.7), em substituição à tensão  $\sigma_{ij}$ , VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003).

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{1 - D_{11}} \\ \tilde{\sigma}_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{1 - D_{22}} \\ \tilde{\sigma}_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{1 - D_{12}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

O índice de falha  $\Sigma_{11}^{2D}$  para a componente de tensão efetiva de  $\tilde{\sigma}_{11}$  é definida pela raiz positiva da equação (5.8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_t|X_c|} \left( \frac{\sigma_{11}}{(1 - D_{11})\Sigma_{11}^{2D}} \right)^2 + \frac{1}{Y_t|Y_c|} \left( \frac{\sigma_{22}}{1 - D_{22}} \right)^2 + \frac{1}{S^2} \left( \frac{\sigma_{12}}{1 - D_{12}} \right)^2 + \\ \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|} \right) \frac{\sigma_{11}}{(1 - D_{11})\Sigma_{11}^{2D}} + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{|Y_c|} \right) \frac{\sigma_{22}}{1 - D_{22}} = 1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

O índice de falha  $\Sigma_{22}^{2D}$  para a componente de tensão efetiva de  $\tilde{\sigma}_{22}$  é definida pela raiz positiva da equação (5.9):



$$\begin{aligned} \frac{1}{X_t |X_c|} \left( \frac{\sigma_{11}}{1 - D_{11}} \right)^2 + \frac{1}{Y_t |Y_c|} \left( \frac{\sigma_{22}}{(1 - D_{22}) \Sigma_{22}^{2D}} \right)^2 + \frac{1}{S^2} \left( \frac{\sigma_{12}}{1 - D_{12}} \right)^2 + \quad (5.9) \\ \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|} \right) \frac{\sigma_{11}}{1 - D_{11}} + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{|Y_c|} \right) \frac{\sigma_{22}}{(1 - D_{22}) \Sigma_{22}^{2D}} = 1 \end{aligned}$$

O índice de falha  $\Sigma_{12}^{2D}$  para a componente de tensão efetiva de  $\tilde{\sigma}_{12}$  é definida pela raiz positiva da equação (5.10):

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_t |X_c|} \left( \frac{\sigma_{11}}{1 - D_{11}} \right)^2 + \frac{1}{Y_t |Y_c|} \left( \frac{\sigma_{22}}{1 - D_{22}} \right)^2 + \frac{1}{S^2} \left( \frac{\sigma_{12}}{(1 - D_{12}) \Sigma_{12}^{2D}} \right)^2 + \quad (5.10) \\ \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{|X_c|} \right) \frac{\sigma_{11}}{1 - D_{11}} + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{|Y_c|} \right) \frac{\sigma_{22}}{1 - D_{22}} = 1 \end{aligned}$$

Os índices de falha unidimensionais  $\Sigma_{11}^{1D}$ ,  $\Sigma_{22}^{1D}$ ,  $\Sigma_{12}^{1D}$  definidos pela razão da tensão efetiva  $\tilde{\sigma}_{ij}$  por suas respectivas resistências tratativas e cisalhantes do ensaio estático, equações (5.11):

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}^{1D} &= \frac{\sigma_{11}}{X_t (1 - D_{11})} \\ \Sigma_{22}^{1D} &= \frac{\sigma_{22}}{Y_t (1 - D_{22})} \\ \Sigma_{12}^{1D} &= \frac{\sigma_{12}}{S (1 - D_{12})} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Assim os índices de falha podem ser redefinidos pelas equações (5.12), e podem ser inseridos na lei de evolução do dano, equação (5.4).

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= \frac{\Sigma_{11}^{2D}}{1 + (\Sigma_{11}^{2D} - \Sigma_{11}^{1D})} \\ \Sigma_{22} &= \frac{\Sigma_{22}^{2D}}{1 + (\Sigma_{22}^{2D} - \Sigma_{22}^{1D})} \\ \Sigma_{12} &= \frac{\Sigma_{12}^{2D}}{1 + (\Sigma_{12}^{2D} - \Sigma_{12}^{1D})} \end{aligned} \quad (5.12)$$

#### 5.2.4 Rotina de cálculo

A rotina de cálculo do modelo numérico foi implementada no software MATLAB. Um fluxograma da seqüência do cálculo é apresentado na figura 5.10.

O modelo consiste em realizar cálculos elásticos lineares para cada ciclo de carga, com isso as propriedades do material degradam-se ciclo após ciclo, até o critério de parada ser

atingido.

As etapas de cálculo são as seguintes:

1. Definição do problema: aqui o usuário deve entrar com os dados referentes à geometria da placa (dimensões), às propriedades do laminado, à malha de elementos finitos (tipos e quantidade do elemento), ao número de pontos de integração, às condições de contorno e ao carregamento aplicado nos ciclos.
2. Cálculo das deformações: aqui os dados de entrada são inseridos na rotina de elementos finitos onde é realizada uma análise linear elástica e são obtidos os deslocamentos nodais, para um ciclo de carregamento.
3. Cálculo das tensões: aqui através dos deslocamentos nodais são calculadas as deformações e as tensões nodais existentes em cada lâmina da placa.
4. Cálculo do dano: com as tensões se avalia as variáveis de dano em cada ponto de avaliação das tensões.
5. Avalia o critério de parada: aqui é analisado se alguma variável de dano atingiu o critério de parada ( $D_{ij} \geq 1$ ).
6. Redefinição das propriedades: aqui as propriedades do material são degradadas pelas variáveis de dano na matriz constitutiva e no critério de falha.
7. Retorna a etapa 2: se o critério de parada não foi atingido, realiza-se mais um ciclo de carregamento.

Quando o critério de parada é atingido, tem-se a avaliação da vida útil da peça em número de ciclos de carregamento  $N$ .

É importante salientar que a lei de evolução do dano rege o cálculo. Ela utiliza uma rotina de elementos finitos para obter as informações dos deslocamentos, tensões e deformações, para cada ciclo de carga, e a partir deles avalia o nível de danificação que ocorre no material.

Assim, esse modelo pode avaliar a fadiga em outros materiais laminados, bastando ajustar as constantes do modelo de acordo com o ensaio experimental. Materiais compostos por mantas de fibras, onde as fibras normalmente são descontínuas e distribuídas aleatoriamente no laminado, poderiam ser avaliados com algumas modificações na matriz constitutiva do material.

### 5.2.5 Análise do corpo de prova

O modelo acima apresentado foi utilizado neste trabalho para modelar os corpos de prova utilizados no ensaio experimental. As condições de contorno e carregamento representam as condições de ensaio.

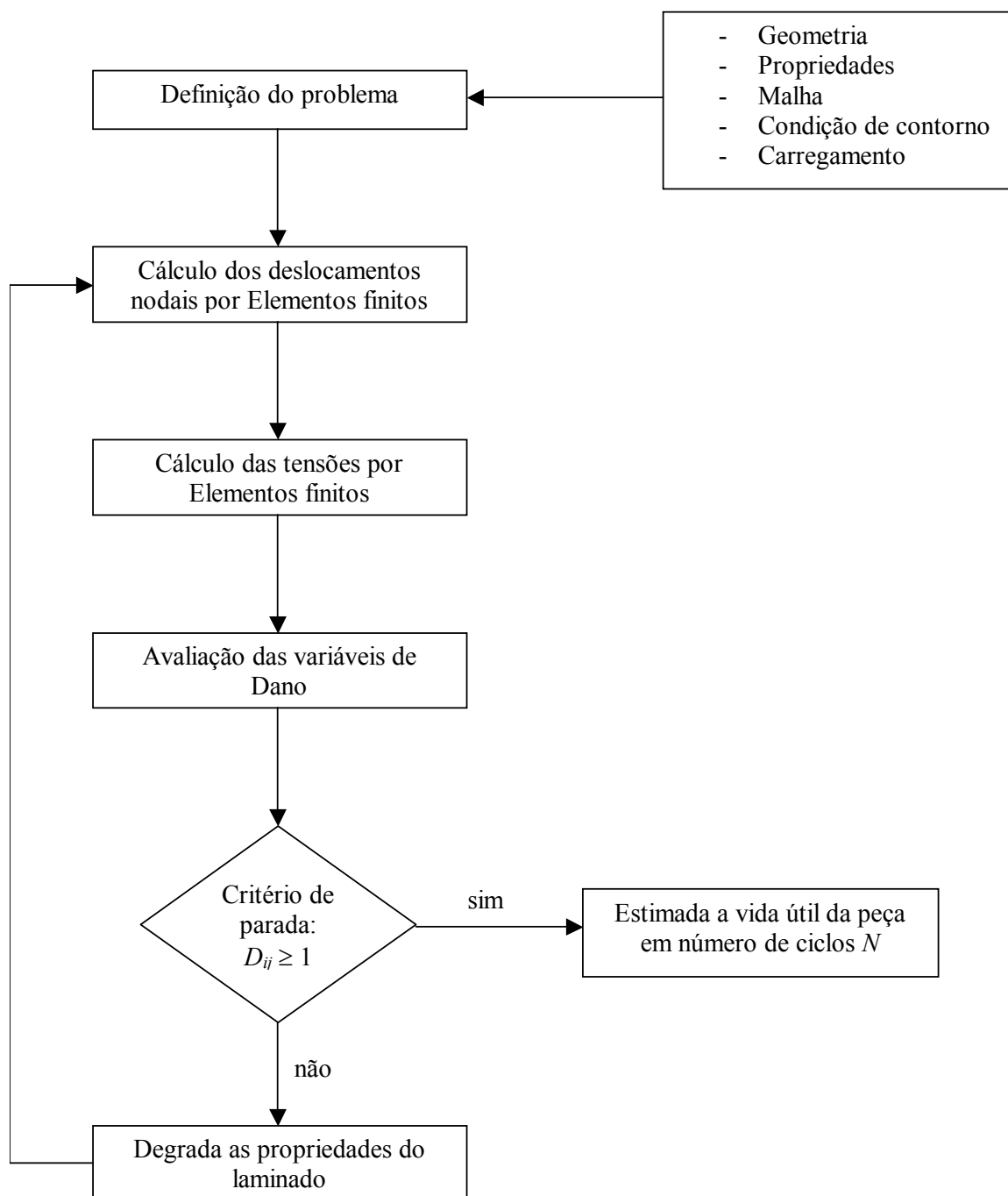


Figura 5.10: Fluxograma da rotina de cálculo

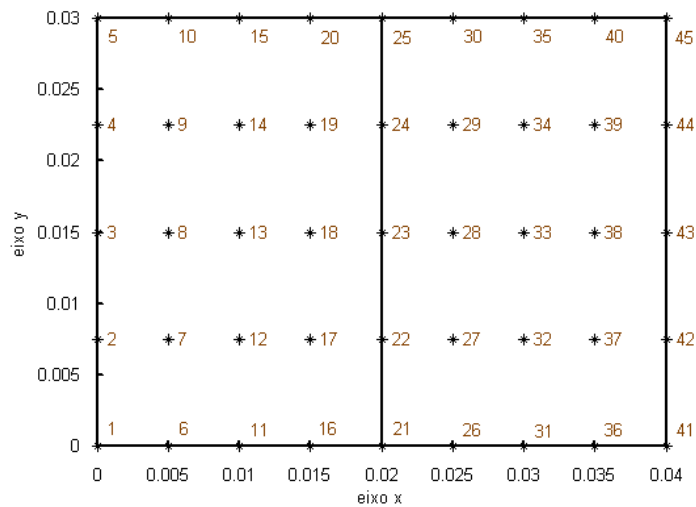


Figura 5.11: Malha utilizada nas simulações.

Foram modeladas apenas a região do corpo de prova efetivamente flexionada.

Nos ensaios experimentais foram utilizados dois tipos de orientação das lâminas nos corpos de prova,  $[0^\circ/90^\circ]$  e  $[45^\circ/-45^\circ]$ . Foram aplicadas condições de carregamento com amplitudes diversas. A condição de carregamento imposta foi um deslocamento angular prescrito em radianos, definido através da geometria do equipamento de ensaio.

Para os ensaios experimentais estáticos preliminares realizados, foram reproduzidas curvas pela simulação numérica, que são apresentadas na seção de resultados.

### Dados de entrada

Os dados de entrada referentes à geometria foram retiradas das dimensões do corpo de prova, considerando as regiões submetidas à flexão, sendo retiradas da simulação as regiões das garras de fixação, que foram inseridas no modelo através das condições de contorno e carregamento. Assim a geometria analisada tem as dimensões de 40 mm de comprimento (eixo x) e 30 mm de largura (eixo y).

As constantes elásticas do material foram tiradas do ensaio de tração, e foram apresentadas na seção 5.1.3.

As constantes do modelo de fadiga ajustadas para esse material foram:

$c_1 = 0,002$	indica amplitude da taxa de dano inicial
$c_2 = 30,0$	indica o fator de decréscimo da rigidez no estágio 1
$c_3 = 4,0 \cdot 10^{-6}$	é a taxa de propagação de dano
$c_4 = 0,85$	define o limite para a não fratura das fibras
$c_5 = 93,0$	está relacionado com a aceleração final do dano

O elemento quártico foi empregado na análise. Após alguns testes constatou-se que

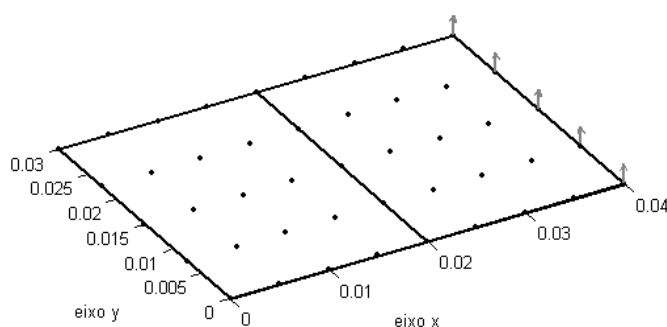


Figura 5.12: Localização das rotações prescritas.

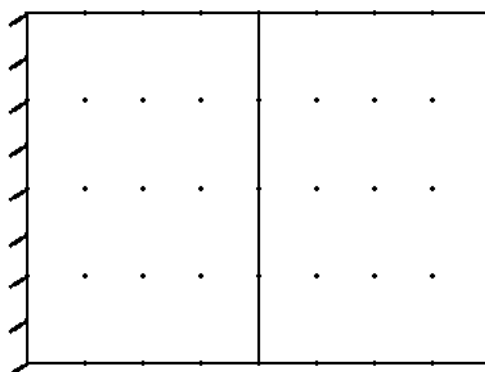


Figura 5.13: Condição de contorno de engaste.

uma malha com apenas dois elementos forneciam resultados satisfatórios em termos de tensões. Foram utilizados 25 pontos por elemento para realização da integração numérica das equações de equilíbrio do modelo de elementos finitos. A malha do modelo pode ser vista na figura C.2, do apêndice C.

O deslocamento angular foi aplicado nos nós da extremidade direita da peça, como pode ser visto na figura 5.12.

A condição de contorno aplicada é um engaste nos nós do lado oposto ao carregamento, e pode ser visualizada na figura 5.13.

O custo computacional médio de cada simulação girou em torno de 15 horas, variando com o número de lâminas empregadas, a amplitude do carregamento aplicado e o incremento de passo utilizado.

A rotina de Elementos Finitos utilizada foi validada pela comparação das soluções de deslocamento e tensões obtidas com as soluções analíticas existentes, mostradas no apêndice B.

# Capítulo 6

## Análise de resultados

Neste capítulo os resultados obtidos no trabalho são apresentados e analisados.

Primeiramente o modelo proposto é comparado com curvas experimentais existentes na bibliografia.

O objetivo dessa análise é verificar a validade dos modelos numéricos utilizados. Assim procurou-se confrontar os resultados obtidos na análise numérica com os obtidos na análise experimental.

### 6.1 Análise comparativa do modelo proposto com a bibliografia

O modelo numérico de dano implementado para avaliar a fadiga contém algumas simplificações, quando comparado com o modelo proposto por VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003), como a passagem de uma modelagem considerando os corpos de prova sólidos para uma modelagem os considerando placas sob estado plano de tensão.

Nesta comparação foram aplicados modelos com condições semelhantes aos do trabalho de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003), porém ele não publicou com precisão as condições que seus ensaios foram executados e foi necessário estimar alguns dados de geometria, condições de carregamento e controno do seu ensaio. Mesmo assim, pode-se observar, comparando as figuras 6.1 e 6.2, que as respostas obtidas têm as mesmas tendências. Na figura 6.1 estão representadas as curvas experimentais dos esforços resultantes pelo número de ciclos, obtidos por VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) em placas de  $[0^\circ/90^\circ]_8$  e  $[45^\circ/-45^\circ]_8$  com espessura de 2,72 mm, largura de 30,0 mm e comprimento de 54,0 mm, engastadas e com um deslocamento máximo de 34,4 mm. Ensaando corpos de prova com essas características geométricas, VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) validaram seu modelo numérico.

A figura 6.2 mostra os resultados numéricos obtidos através do modelo desenvolvido. Foi aplicada uma condição de engaste em uma das bordas da placa, e imposto uma rotação

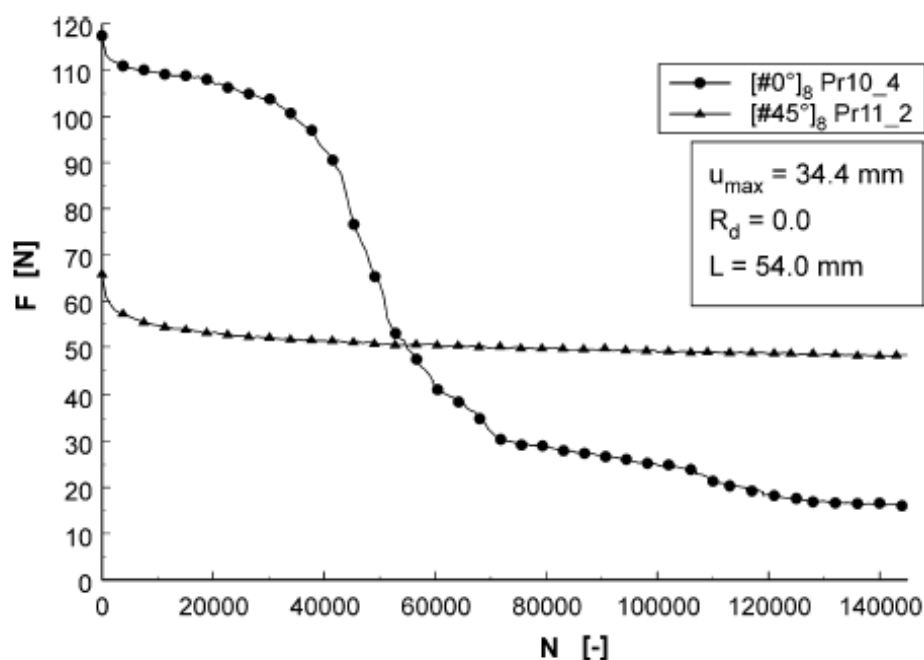


Figura 6.1: Resultados de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003)

na borda oposta, o valor dessa rotação foi estimado através dos dados estimados de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003).

As constantes elásticas do material utilizadas nessa simulação foram:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 25 \text{ GPa} & X_t &= 400 \text{ MPa} \\
 E_{22} &= 25 \text{ GPa} & X_c &= 345 \text{ MPa} \\
 G &= 5 \text{ GPa} & Y_t &= 400 \text{ MPa} \\
 \nu &= 0,15 & Y_c &= 345 \text{ MPa} \\
 & & S &= 100 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

As constantes do modelo de fadiga ajustadas para esse material foram:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 0,002 \\
 c_2 &= 30,0 \\
 c_3 &= 4,0 \cdot 10^{-6} \\
 c_4 &= 0,85 \\
 c_5 &= 93,0
 \end{aligned}$$

As diferenças nos valores de força podem ser justificadas pelo desconhecimento das condições exatas em que foram realizados os ensaios de VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003). Outra causa dessa diferença é que não foram consideradas no modelo de elementos finitos as não linearidades de grandes deslocamentos existentes, e também pelas descondição de algumas hipóteses propostas no modelo proposto por VAN PAEPEGEM e

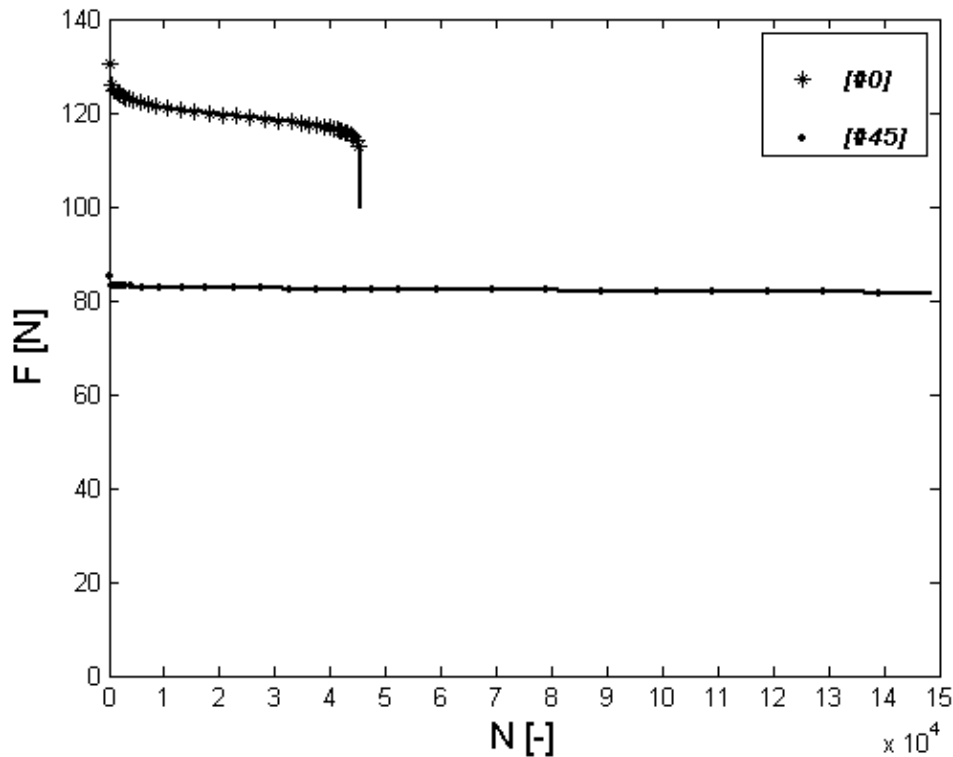


Figura 6.2: Reprodução dos resultados da figura 6.1 através do modelo proposto.

DEGRIECK (2003), como a influência de deformações permanentes em laminados dispostos a  $[45^\circ / -45^\circ]$  e alterações nas equações de evolução do dano.

## 6.2 Resultados preliminares

Os ensaios preliminares forneceram informações a respeito do comportamento estático do material. Dos ensaios de tração, foram verificados os módulos elásticos  $E_{11}$  e  $E_{22}$ , o coeficiente de Poisson  $\nu_{12}$ , e as resistências à tração  $X_t$ ,  $Y_t$ . Esses dados foram utilizados para estimar outros parâmetros com o módulo de cisalhamento  $G$ , e as resistências à compressão  $X_c$  e  $Y_c$ , e ao cisalhamento  $S$ . Com isso, ficaram definidas as constantes elásticas necessárias para a parte linear do modelo numérico. Os valores destes parâmetros foram listados na seção 5.1.3.

Os ensaios de flexão, realizados na máquina de ensaio à fadiga, fornecem dados relacionados com o nível de carregamento e deformação no corpo de prova, devido a variação da excentricidade da came da máquina de ensaio à fadiga. Esse ensaio serve de base para o ajuste do deslocamento a ser utilizado nos ensaios de fadiga.

Foram testados corpos de prova de  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$  e  $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$ , com espessura de 3,1 mm, ambos com o mesmo procedimento de ensaio. A excentricidade da came foi variada de 1 à 12 mm. Foram coletados dados dos momentos resultantes e das deformações em quatro



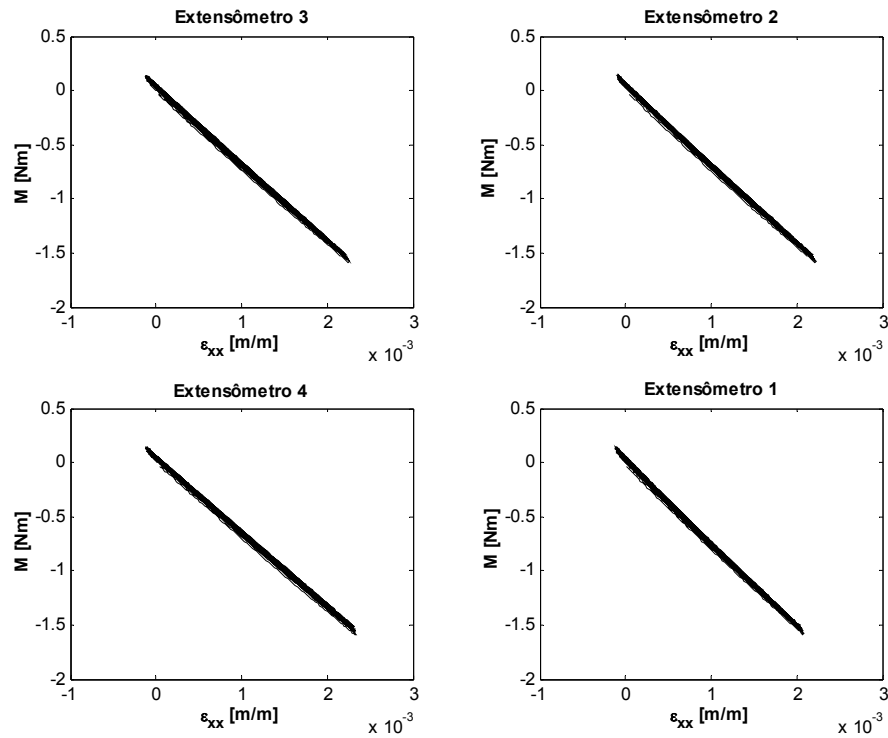


Figura 6.3: Gráficos de histerese do CP  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$  para a excentricidade de 3 mm.

pontos do corpo de prova, conforme figura 5.3, devido à imposição deste deslocamento de forma senoidal. Destes dados foram geradas curvas dos momentos e das deformações pela excentricidade, além de curvas de histerese para dois níveis de excentricidade, 3 mm e 8 mm.

Nas figuras 6.3 e 6.4 são apresentadas as curvas de histerese para o corpo de prova  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ , para as excentricidades de 3 mm e de 8 mm, respectivamente.

As curvas de histerese para o corpo de prova  $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$  são mostradas nas figuras 6.5 e 6.6 para as excentricidades de 3 mm e de 8 mm, respectivamente.

As curvas de histerese revelam a existência do acúmulo inicial de dano, devido à abertura do laço, sendo mais acentuado no ensaio com a excentricidade de 8 mm.

As curvas do momento pela excentricidade e das deformações pela excentricidade foram reproduzidas numericamente na rotina utilizada para a simulação da fadiga. Os valores foram retirados de nós localizados nas proximidades das posições onde os extensômetros foram aplicados.

Na figura 6.7 são mostradas as deformações simuladas para o ensaio no corpo de prova de  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ . Estes dados podem ser comparados com as deformações medidas experimentalmente nos quatro extensômetros, para o mesmo corpo de prova, apresentadas na figura 6.8. As deformações indicadas na legenda,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ ,  $\epsilon_4$ , medidas nas posições 1, 2, 3 e 4, conforme a figura 5.3. As deformações medidas neste ensaio são uniformes. As

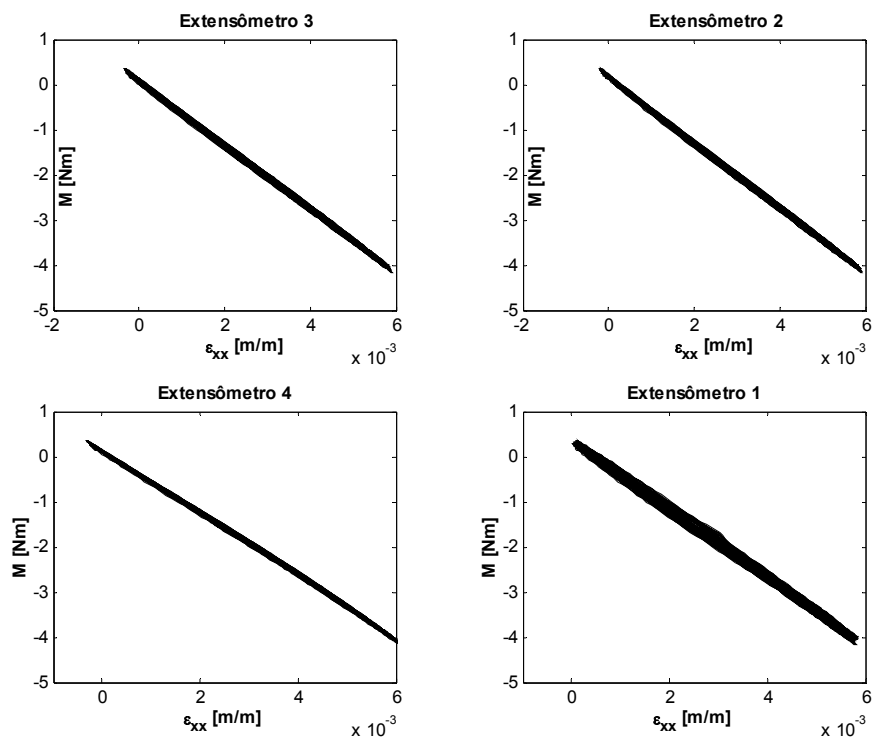


Figura 6.4: Gráficos de histerese do CP  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$  para a excentricidade de 8 mm.

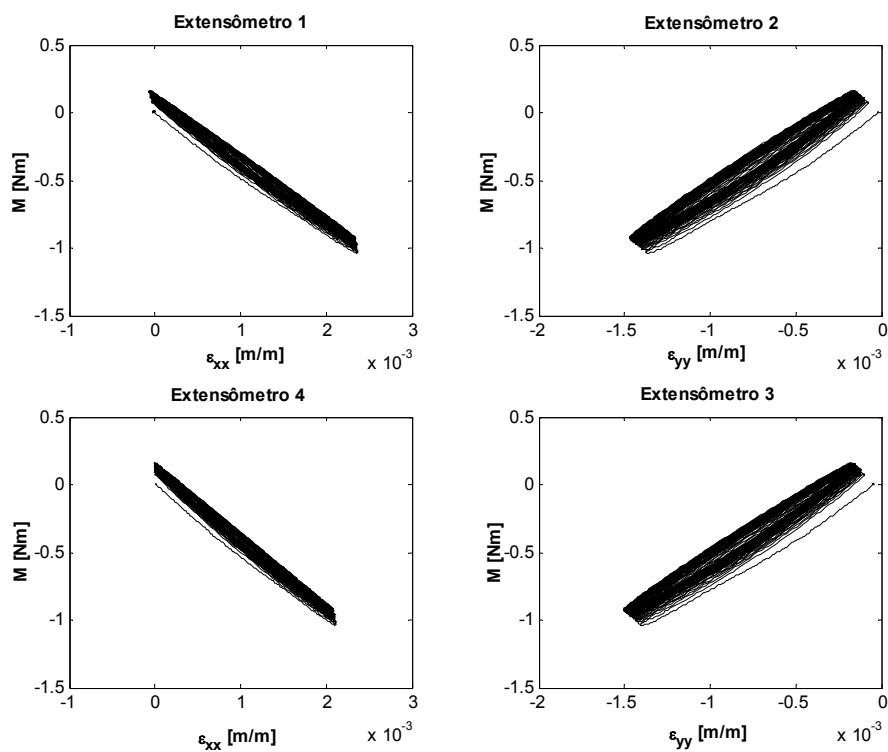


Figura 6.5: Gráficos de histerese do CP  $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$  para a excentricidade de 3 mm.

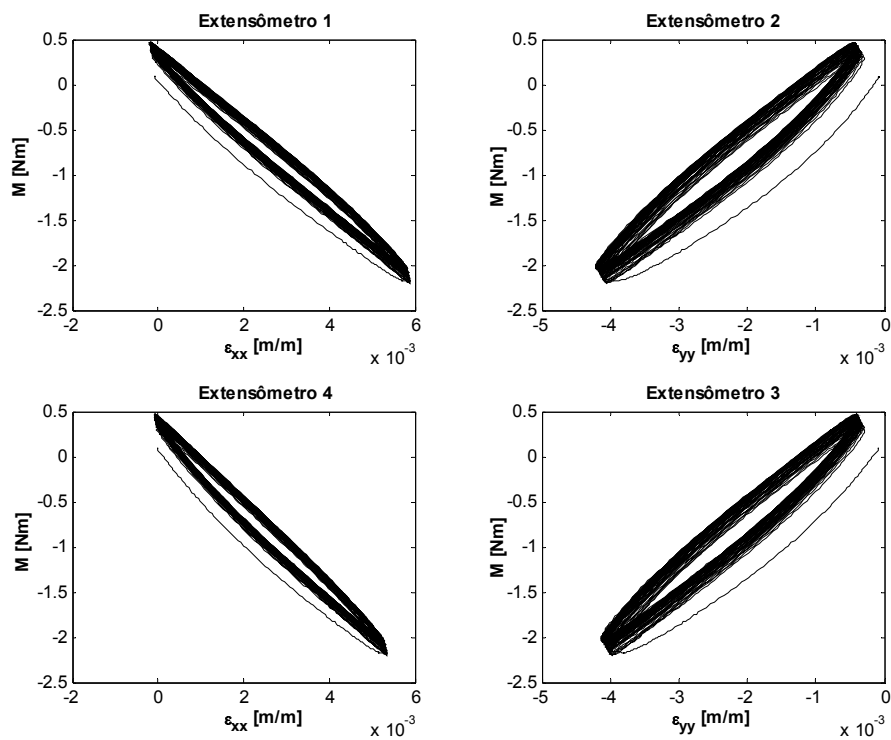


Figura 6.6: Gráficos de histerese do CP  $[45^\circ / -45^\circ]_{22}$  e uma excentricidade de 8 mm.

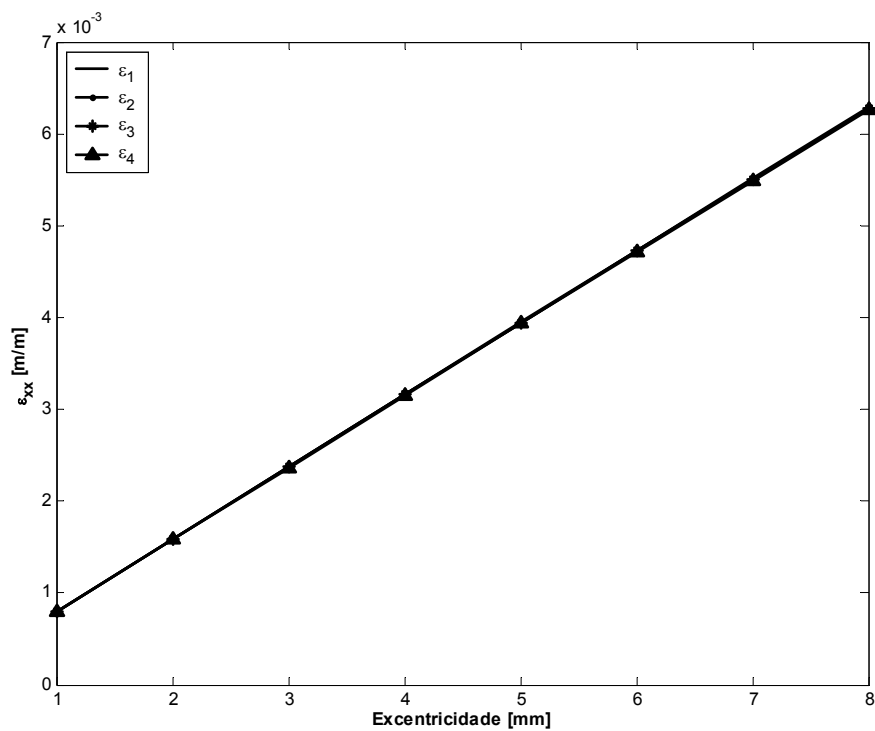


Figura 6.7: Deformações simuladas pela excentricidade para CP  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ .

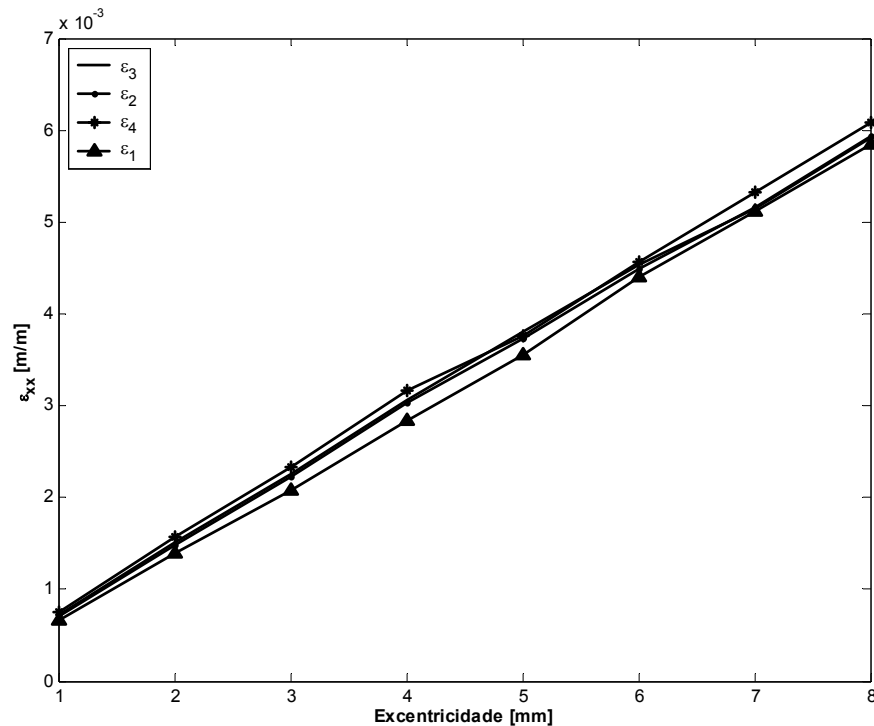


Figura 6.8: Deformações experimentais pela excentricidade para CP  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ .

pequenas diferenças encontradas se devem ao posicionamento das garras de fixação, além dos desvios de posicionamento angular dos extensômetros.

Na figura 6.10, as deformações experimentais retiradas do ensaio no corpo de prova de  $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$ , podem ser comparadas com as deformações calculadas na simulação deste ensaio, apresentadas na figura 6.9.

Os dados de deformação são válidos até a excentricidade de 8 mm, para excentricidades acima deste valor, o sinal elétrico emitido pelos extensômetros se apresentaram duvidos e foram descartados. Já nos gráficos do momento pela excentricidade foram aproveitados os dados das amplitudes de 1 mm até 12 mm.

Nas figuras 6.11 e 6.12 são mostrados de forma gráfica os momentos simulados numericamente e os retirados dos ensaios experimentais, para os corpos de prova de  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$  e  $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$ , respectivamente.

Na figura 6.12, a curva de momento máximo, é apresentada para mostrar a existência da deformação permanente acentuada nos corpos de prova de  $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$ . Essa deformação permanente cria momentos de sinal oposto ao gerado pelo deslocamento prescrito pela excentricidade da came, o que não era previsto pois o deslocamento ocorre em apenas um sentido.

Os resultados experimentais são as curvas de carregamento por número de ciclos retirados do ensaio de fadiga a flexão.

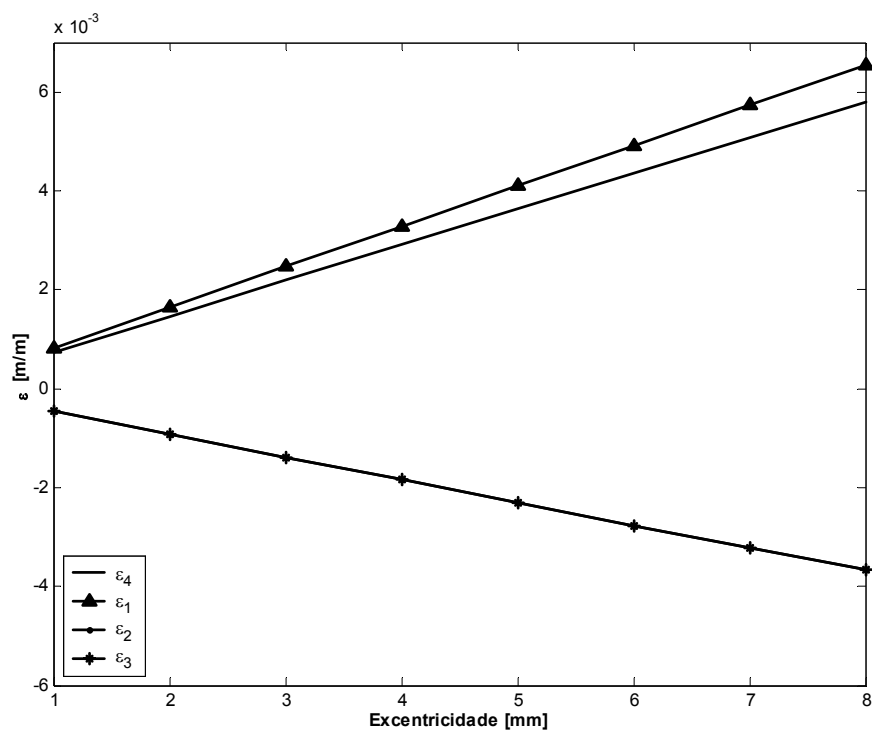


Figura 6.9: Deformações simuladas pela excentricidade para CP  $[45^\circ / -45^\circ]_{22}$ .

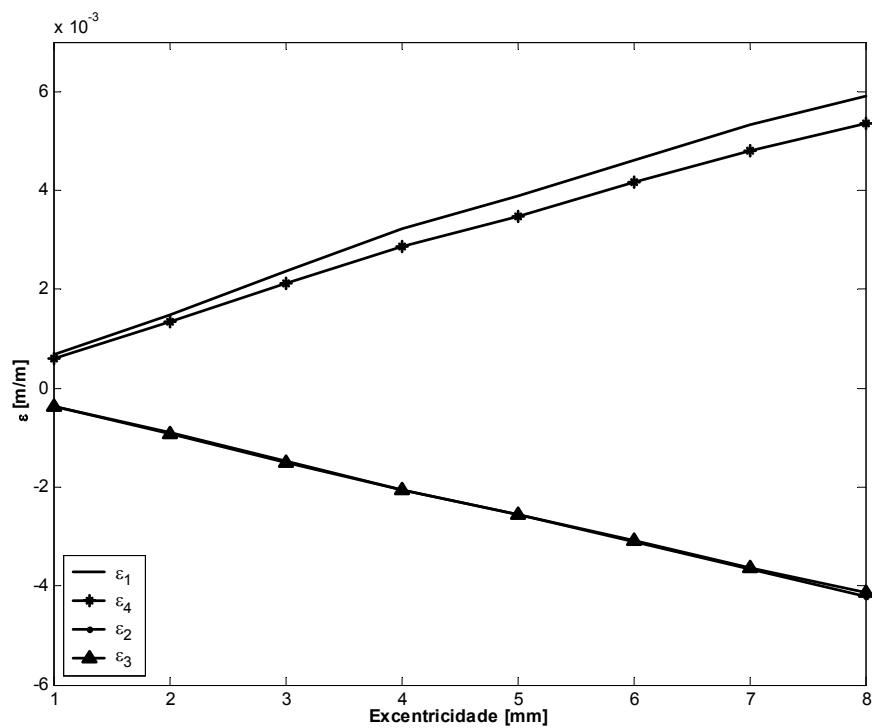
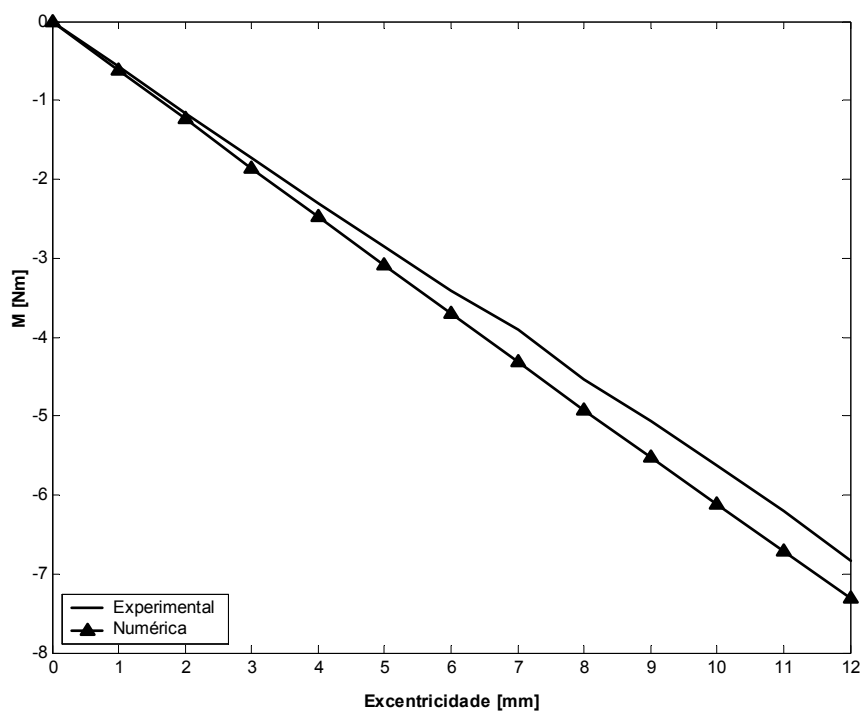
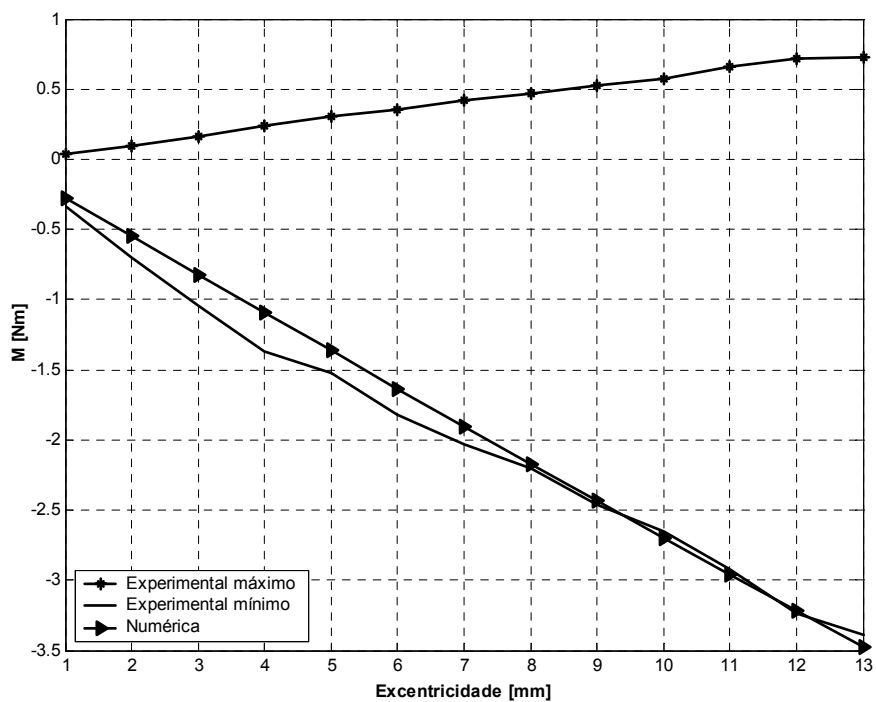


Figura 6.10: Deformações experimentais pela excentricidade para CP  $[45^\circ / -45^\circ]_{22}$ .

Figura 6.11: Gráfico do momento pela excentricidade para CP  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ .Figura 6.12: Gráfico do momento pela excentricidade para CP  $[45^\circ/-45^\circ]_{22}$ .

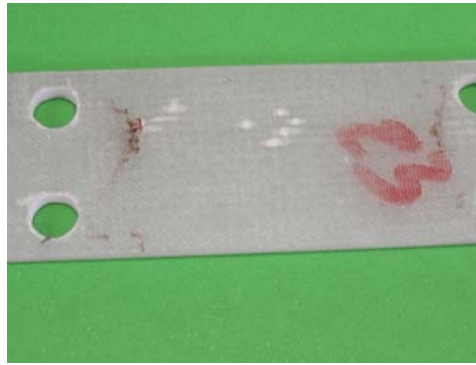


Figura 6.13: Corpo de prova com características do segundo estágio de degradação.

### 6.3 Resultados experimentais e numéricos dos ensaios de fadiga

O material composto utilizado nos ensaios apresentou seu módulo de elasticidade baixo ( $E_{11} = E_{22} \approx 10 \text{ GPa}$ ). Isso significa que a rigidez do corpo de prova também é baixa. Assim, para obtenção de tensões mais elevada seria necessário aplicar no ensaio grandes deslocamentos prescritos, o que seria desaconselhável para a análise numérica, devido as hipóteses de pequenos deslocamentos e pequenas deformações que foram impostas.

Em deslocamentos moderados (9 mm na came), os corpos de prova apresentaram degradação inicial, porém, não foi constatado degradação final, onde ocorre a fratura das fibras.

No ensaio em corpo de prova de  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$ , e espessura de 2,2 mm, com deslocamento prescrito de 9 mm na came, nota-se que foi caracterizada a existência de dano inicial, porém não foi possível detectar o fim do estágio 2 de degradação. Um corpo de prova que encontra-se no estágio 2 de degradação é apresentado na figura 6.13.

Os resultados do ensaio experimental e da simulação numérica em termos dos momentos e da vida são apresentados na figura 6.14.

Os ensaios de fadiga, experimentais e numéricos para um corpo de prova de  $[45^\circ/-45^\circ]_{24}$ , espessura de 2,4 mm, e com deslocamento prescrito de 9 mm no excêntrico da came. Neste ensaio detectou-se a presença de deformação permanente. Esta deformação causa uma variação no comportamento da resposta das reações. Os momentos que no início do ensaio eram todos negativos, devido ao deslocamento ser aplicado somente em um sentido, passaram a ser em parte positivos. Isso ocorre porque o corpo de prova que antes era plano, resultando num momento superior igual a zero quando o deslocamento também tem amplitude zero, passa a ter uma forma de cela, apresentando rotações nos eixos  $x$  e  $y$ , resultando em um valor superior para o momento maior que zero, ou seja, de sinal oposto ao inicial, como pode ser visto na figura 6.15. Os valores iniciais do momento superior

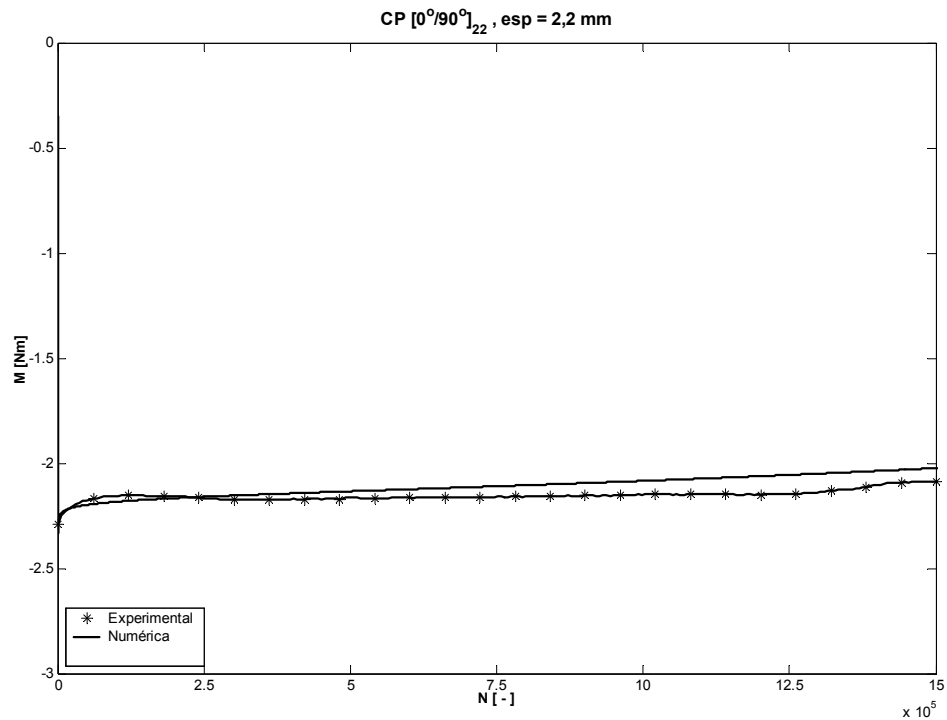


Figura 6.14: Ensaio de fadiga no corpo de prova de  $[0^\circ/90^\circ]_{22}$  com espessura de 2,2 mm.

não coincidem com o zero devido a tara da célula de carga. A simulação numérica para este ensaio é confrontada com a experimental em termos de momentos pela vida apresentada na figura 6.12. Nessa simulação como não foi considerado no modelo as hipóteses de deformação permanente, assim as diferenças nos resultados são mais acentuadas, quando comparados com o ensaio experimental.

Em um caso pontual, foi aplicado um deslocamento maior, 12 mm no excêntrico da came, o corpo de prova de  $[0^\circ/90^\circ]_{24}$ , com 2,4 mm de espessura, apresentou o estágio 3 de degradação, ou seja, falha por ruptura de fibras. Essa falha foi caracterizada pela ruptura de algumas fibras de lâminas próximas a superfície do laminado. O corpo de provas danificado é apresentado na figura 6.17.

Para simular numericamente este ensaio foram ajustadas as constantes em  $c_3 = 1,0 \cdot 10^5$  e  $c_4 = 0,75$ . As outras constantes do modelo para esse material são  $c_1 = 0,002$ ;  $c_2 = 30,0$ ;  $c_5 = 93,0$  permaneceram com os mesmos valores encontrado na bibliografia, VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003). Este corpo de prova apresentou comportamento diferente dos outros, provavelmente pela existência de irregularidades acentuadas na superfície. Assim, ele foi utilizado como exemplo para mostrar um ajuste de curva. Os resultados da simulação deste ensaio são apresentados na figura 6.18 .



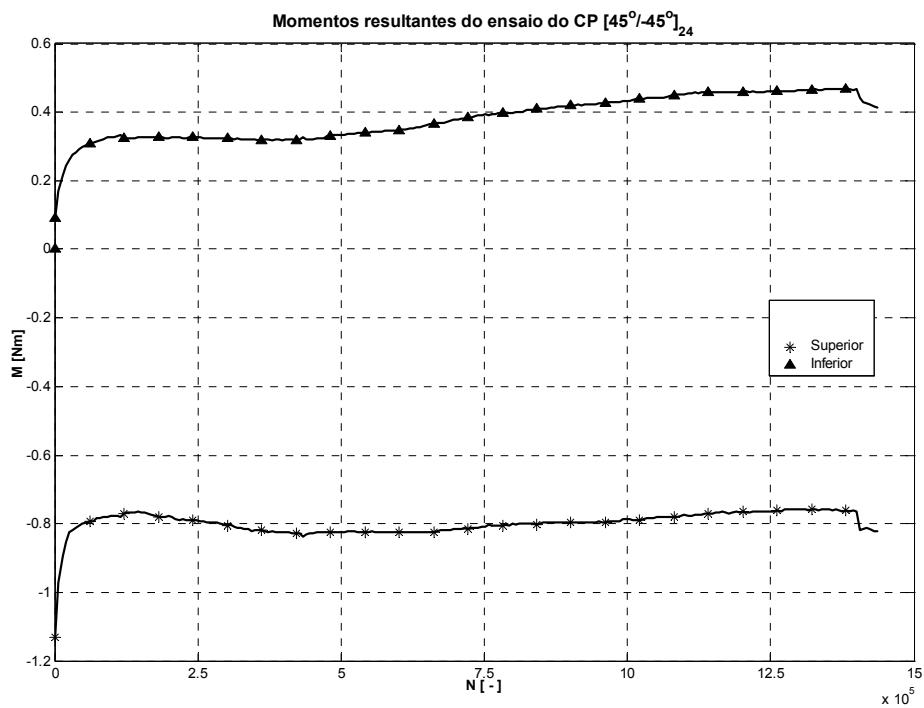
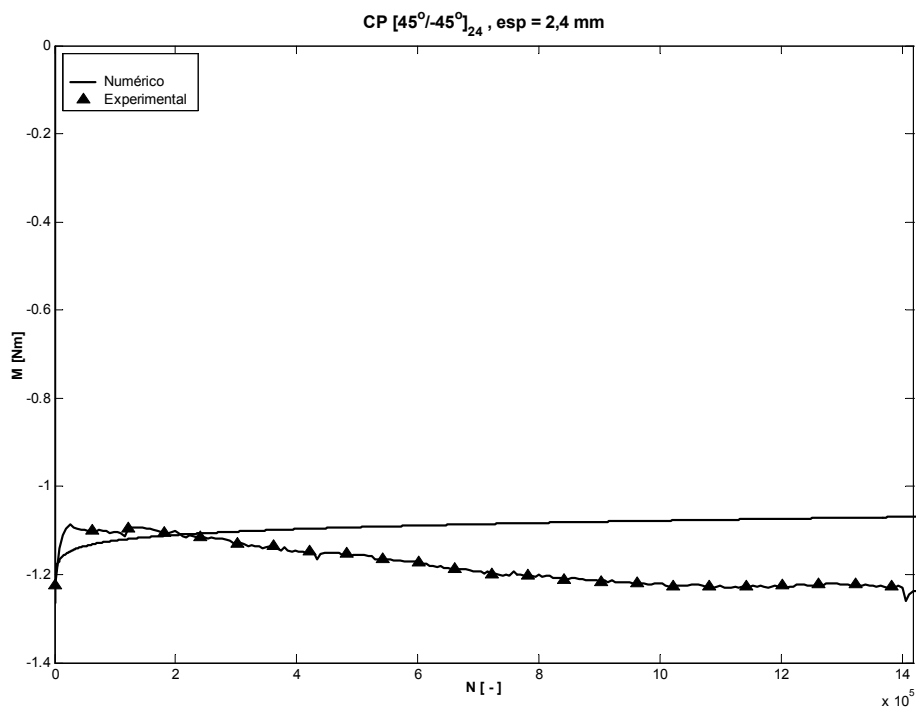
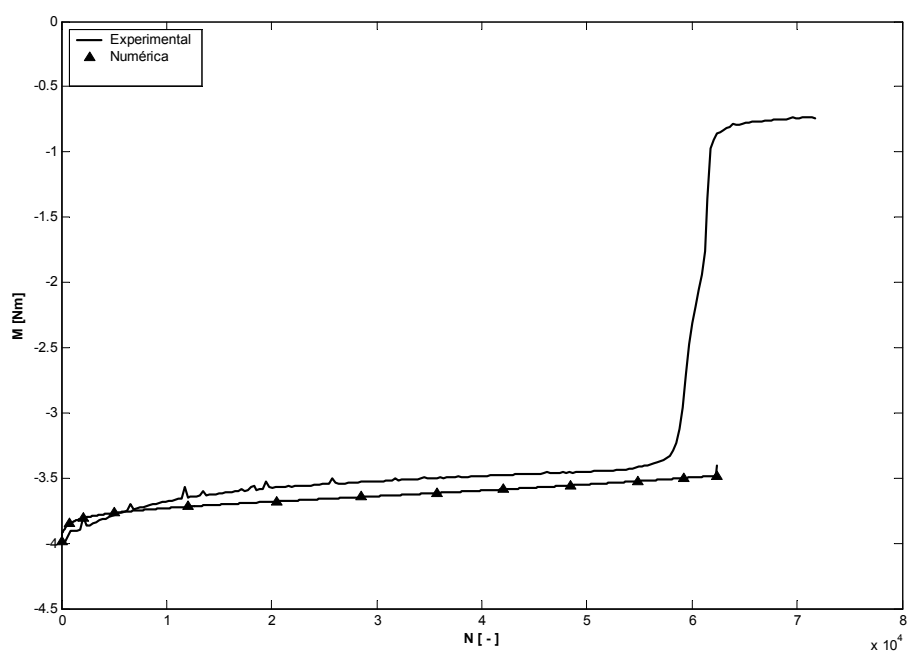
Figura 6.15: Efeitos da deformação permanente nos momentos em CP  $[45^\circ/-45^\circ]_{24}$ .Figura 6.16: Ensaio de fadiga no corpo de prova de  $[45^\circ/-45^\circ]_{24}$  com espessura de 2,4 mm.



Figura 6.17: Corpo de prova danificado, com falha final.

Figura 6.18: Ensaio do CP  $[0^\circ/90^\circ]_{24}$  com falha final.

# Capítulo 7

## Conclusão

O modelo apresentado por VAN PAEPEGEM e DEGRIECK (2003) pode ser simplificado sem perda da sua representatividade qualitativa do fenômeno de fadiga em materiais compostos, mesmo revelando eventuais erros e incertezas adicionais.

As respostas dos elementos quárticos convergem para as soluções analíticas de tensões com um menor número de elementos se comparadas com as funções cúbicas, quadráticas e lineares. Também foi constatado que o custo computacional é menor para o elemento quártico, quando comparado com elementos com outras funções em modelos com o mesmo número de nós.

Dos ensaios experimentais, pôde-se concluir que os corpos de prova têm vida infinita para as condições de carga aplicadas, quando avaliados pelo critério de falha pela ruptura das fibra. Se a falha for analisada por outro critério, como a incompleta degradação da rigidez, as constantes do modelo de dano devem ser redefinidas, ajustando-se ao caso em estudo.

A máquina de ensaio à fadiga a flexão aplica carregamentos do tipo momento puro nos corpos de prova com largura constante, comprovado pelos resultados dos ensaios estáticos nos corpos de prova instrumentados com extensômetros.

Deformações permanentes foram detectadas nos ensaios experimentais em corpos de prova com orientação de  $[45^\circ / -45^\circ]$ . Assim o modelo numérico aplicado, cujo as hipóteses que representam a deformação permanente foram desconsideradas, não apresentou comportamento muito preciso.

As constantes do material  $c_3$  e  $c_4$  para o modelo de dano não puderam ser calibradas com muita precisão para esse tipo de material, devido ao número de ciclos se apresentar muito grande, caracterizando vida infinita. Os valores das constantes foram calibrados de forma demonstrativa, apenas para ensaio onde ocorreu a perda de rigidez, caracterizando o estágio 3 de danificação.

A utilização desse modelo visa avaliar a vida útil de componentes de materiais compostos. O modelo mostrou-se consistente para laminados dispostos a  $[0^\circ/90^\circ]$ , entretanto

deve ser melhorado para  $[45^\circ / -45^\circ]$ .

## Proposta para trabalhos futuros

- Calibrar o modelo para outros materiais compostos, com outras fibras e resinas, levantando os parâmetros necessários.
- Considerar as hipóteses de deformação permanente no modelo de dano.
- Ampliar o modelo para cascas e testar em geometrias mais complexas, por exemplo a asa de um avião, carroceria de ônibus, casco de barcos, etc..
- Aplicar o modelo em materiais compostos por fibras aleatórias.
- Implementação do modelo de dano em um software comercial, como a customização do ANSYS, facilitando e agilizando o cálculo das tensões, possibilitando um foco maior no fenômeno da fadiga.
- Aplicar teoria de grandes deformações no modelo.
- Aplicar extensômetros nas interfaces das lâminas, verificando tensões interlaminares existentes. Assim é possível realizar uma análise comparativa entre as tensões medidas e as calculadas no modelo.
- Incluir hipóteses de delaminação no modelo de dano.

# Referências Bibliográficas

- Akshantala, N. V. e R. Talreja. A micromechanics based model for predicting fatigue life of composite laminates. **Materials Science and Engineering**, v.285, n.1-2, JUN 15, p.303-313. 2000.
- ASTM. High modulus fiber and composites. **ASTM Standards**, v.15, n.03. 2000.
- Babuska, I. e B. Szabo. **Finite element analysis**. New York: Wiley. 1991
- Bathe, K.-J. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. 1982.
- Boniface L, Smith PA, Ogin SL, Bader MG. Observations on transverse ply crack growth in (02/902)s CFRP laminate under monotonic and cyclic Loading. **In: Proceedings of the Second European Conference on Composite Materials**. London. v.3. p.156-65. 1987.
- Boniface L, Ogin SL and Smith PA. Fracture mechanics approaches to transverse ply cracking in composite laminates. In: O'Brien TK, editor. **Composite Materials: Fatigue and Fracture**. ASTM STP 1110. p.9-29. 1991.
- Cauvin, A. e R. B. Testa. Damage mechanics: basic variables in continuum theories. **International Journal of Solids and Structures**, v.36, n.5, FEB, p.747-761. 1999.
- Chaboche, J.-L. e J. Lemaitre. **Mechanics of solid materials**: Cambridge University Press. 1990
- Cook Robert, D., S. Malkus David, et al. **Concepts and applications of finite element analysis**. New York, N.Y.: John Wiley. 1989.
- Dally James, W. e F. Riley William. **Experimental stress analysis**. New York: McGraw-Hill. 1991
- Dhatt, G. e G. Touzot. **The finite element method displayed**. Chichester: Wiley. 1984.

- Gibson Ronald, F. **Principles of composite material mechanics**. McGraw-Hill. 1994 (McGraw-Hill series in aeronautical and aerospace engineering)
- Hoffmann, K. **An introduction to measurements using strain gages**. Darmstadt: Hottinger Baldwin Messtechnik. 1989
- Lemaitre, J. **A course on damage mechanics**. Berlin ; London: Springer. 1996. 2ªed.
- Lemaitre, J., R. Desmorat, et al. Anisotropic damage law of evolution. **European Journal of Mechanics Solids**, v.19, n.2, MAR-APR, p.187-208. 2000.
- Liu, K. S. e S. W. Tsai. A progressive quadratic failure criterion for a laminate. **Composites Science and Technology**, v.58, n.7, p.1023-1032. 1998.
- Malvern, L. E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. Englewood Cliffs, N.J.,: Prentice-Hall. 1969.
- Mendonça,P.T.R., **Materiais compostos e estruturas sanduíches**, Grante - UFSC, 2001.
- Reifsnider, K. L. e A. Talug. Analysis of Fatigue Damage in Composite Laminates. **International Journal of Fatigue**, v.2, n.1, p.3-11. 1980.
- Reifsnider KL. Damage and damage mechanics. Fatigue of composite materials. In: Reifsnider KL, editor. **Composite Material Series**, vol. 4. Amsterdam; Elsevier, 1991:11-75.
- Schenck, C. **Description and Operating Instructions for the Schenke Alternating Bending Fatigue Testing Machine "Webi"**. Maschinenfabrik GmbH. Darmstadt. 1965
- Schulte K. Stiffness reduction and development of longitudinal cracks during fatigue loading of composite laminates. In: Cardon AH, Verchery G, editors. Mechanical characterisation of load bearing fibre composite laminates. **Proceedings of the European Mechanics Colloquium** 182. p.36-54. 1984.
- Souza Neto, E. A., D. Péric, et al. **Apostila do curso de mecânica computacional não linear**. Computational plasticity. USP. 2002
- Tong, J., F. J. Guild, et al. Off-axis fatigue crack growth and the associated energy release rate in composite laminates. **Applied Composite Materials**, v.4, n.6, p.349-359. 1997.

- Tong, J., F. J. Guild, et al. On matrix crack growth in quasi-isotropic laminates - I. Experimental investigation. **Composites Science and Technology**, v.57, n.11, p.1527-1535. 1997.
- Tong, J., F. J. Guild, et al. On matrix crack growth in quasi-isotropic laminates - II. Finite element analysis. **Composites Science and Technology**, v.57, n.11, p.1537-1545. 1997.
- Tsai, S. W. e V. D. Azzi. Anisotropic strength of composit. **proceeding of the Society for Experimental Stress Analysis**, v.XXII, n.2, 1965, p.283-288. 1965.
- Van Paepegem, W. e J. Degrieck. A new coupled approach of residual stiffness and strength for fatigue of fibre-reinforced composites. **International Journal of Fatigue**, v.24, n.7, JUL, p.747-762. 2002.
- Van Paepegem, W. e J. Degrieck. Calculation of damage-dependent directional failure indices from the Tsai-Wu static failure criterion. **Composites Science and Technology**, v.63, n.2, p.305-310. 2003.
- Van Paepegem, W. e J. Degrieck. Modelling damage and permanent strain in fibre-reinforced composites under in-plane fatigue loading. **Composites Science and Technology**, v.63, n.5, APR, p.677-694. 2003.

# Apêndice A

## Extensometria

A análise por extensometria foi utilizada em dois casos neste trabalho. Primeiramente foi aplicada na instrumentação de uma célula de carga, posteriormente empregada na obtenção de informações sobre o estado de tensões no corpo de provas.

Assim, a revisão de análise por extensometria merece um apêndice nesse trabalho.

A extensometria é uma das ferramentas existentes para análise experimental de tensões e deformações. Esta consiste na utilização de extensômetros, que são transdutores de deformação, para verificação das deformações pontuais na superfície de um corpo. Os pontos de medição devem ser previamente definidos, priorizando locais onde ocorrem tensões mais elevadas devido ao carregamento submetido.

### A.1 Extensômetros

Atualmente no mercado existem diversos tipos de extensômetros. Citam-se como principais os mecânicos, os piezelétricos, os capacitivos e os metálicos.

Os mecânicos são muito imprecisos e suscetíveis a erros, quando comparado com os outros.

Os capacitivos são bastante utilizados em aplicações onde as temperaturas são elevadas, superiores à 400°C.

Os piezelétricos são utilizados em transdutores específicos devido a sua alta sensibilidade.

Os metálicos são os mais comuns, possuindo diversas aplicações como na análise experimental de tensões e na construção de transdutores.

Os extensômetros utilizados nas experiências realizadas neste trabalho são do tipo metálicos.

O princípio de funcionamento destes extensômetros está baseado na relação existente entre deformação e resistência elétrica do condutor. Todo condutor elétrico altera sua resistência elétrica quando submetido à tensões mecânicas, sejam elas compressivas ou



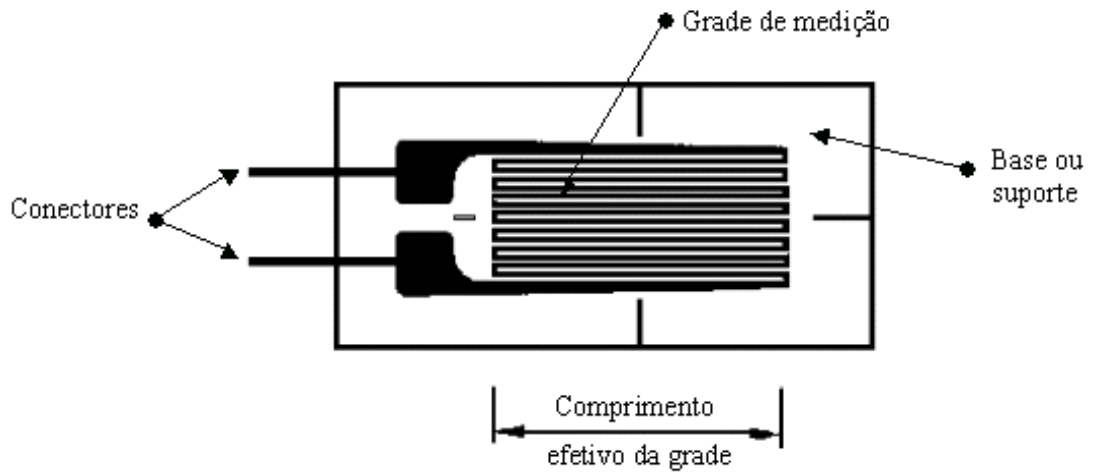


Figura A.1: Partes de um extensômetro metálico.

trativas. Na figura A.1 pode-se observar as partes constituintes de um extensômetro metálico.

A variação da resistência elétrica resultante das tensões mecânicas aplicadas no material condutor é justificada pela modificação da sua geométrica, mudanças de caráter físicos, e pela variação na sua resistividade, mudanças de caráter micro-estruturais, podendo ser descrita pela relação (A.1):

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \varepsilon (1 - \nu) + \frac{\Delta \varsigma}{\varsigma_0} \quad (\text{A.1})$$

sendo,

- $\varepsilon$  : Deformação
- $\nu$  : Coeficiente de Poisson do condutor
- $\varsigma$  : Resistividade do material condutor
- $R$  : Resistência elétrica

A sensibilidade do extensômetro  $S$  é dada pela razão entre a variação de resistência  $\frac{\Delta R}{R}$  e a deformação  $\varepsilon$ , através da relação (A.2):

$$S = \frac{\frac{\Delta R}{R_0}}{\varepsilon} \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Sistema de medição para os extensômetros

As deformações a serem medidas são normalmente pequenas, produzindo variações da resistência elétrica nas proporções da sensibilidade do extensômetro. Estas variações de resistência não podem ser medidas diretamente com multímetros comuns, sendo necessário instalar o extensômetro em um sistema de medição.

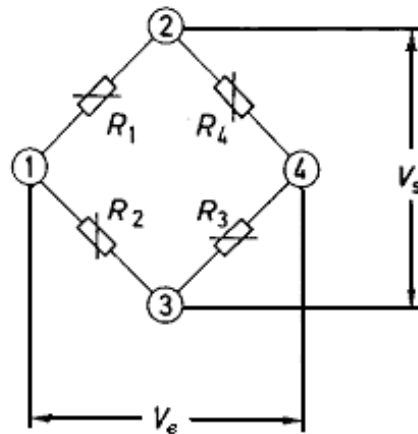


Figura A.2: Representação esquemática da ponte de Wheatstone.

O sistema é formado basicamente do extensômetro, que converte a deformação em variação da resistência elétrica. Essa variação é lida através de um circuito elétrico chamado de ponte de Wheatstone, representada na figura A.2.

Os extensômetros podem ser inseridos na ponte de diversas formas (1/4 de ponte, 1/2 ponte, ponte completa). A escolha do tipo de ponte depende da aplicação a ser realizada, bem como da quantidade de extensômetros a ser aplicado. Na figura A.3 estão representados os tipos de montagem de ponte. A alimentação da ponte é feita por tensão elétrica. Geralmente fontes com voltagem constante são utilizadas, porém não são obrigatórias.

Quando os extensômetros deformam ocorre uma variação na resistência elétrica, que pode ser quantificada pelo desbalançamento da ponte que causa uma variação na tensão elétrica de saída, calculada pela equação do equilíbrio da ponte (A.3):

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{4} \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \quad (\text{A.3})$$

Esse sinal de tensão é primeiro tratado em um amplificador de voltagem e depois em uma placa de aquisição de dados. As informações coletadas podem ser posteriormente processadas pelo usuário em um computador. Outros equipamentos podem ser acoplados no sistema com objetivo de reduzir erros e agilizar o processo. O diagrama ilustrativo do processo de medição pode ser analisado na figura A.4.

Inserindo a relação de sensibilidade do extensômetros (A.2) na equação da ponte (A.3), e considerando que todos os extensômetros têm o mesmo fator de sensibilidade, obtém-se a relação (A.4):

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{S}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \quad (\text{A.4})$$

O tipo de montagem de ponte utilizado deve propiciar que as deformações trativas

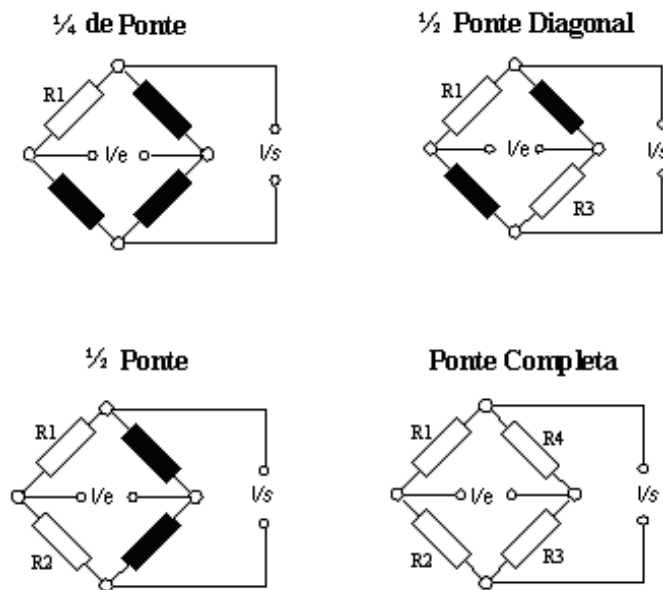


Figura A.3: Tipos de montagem da ponte de Wheatstone.

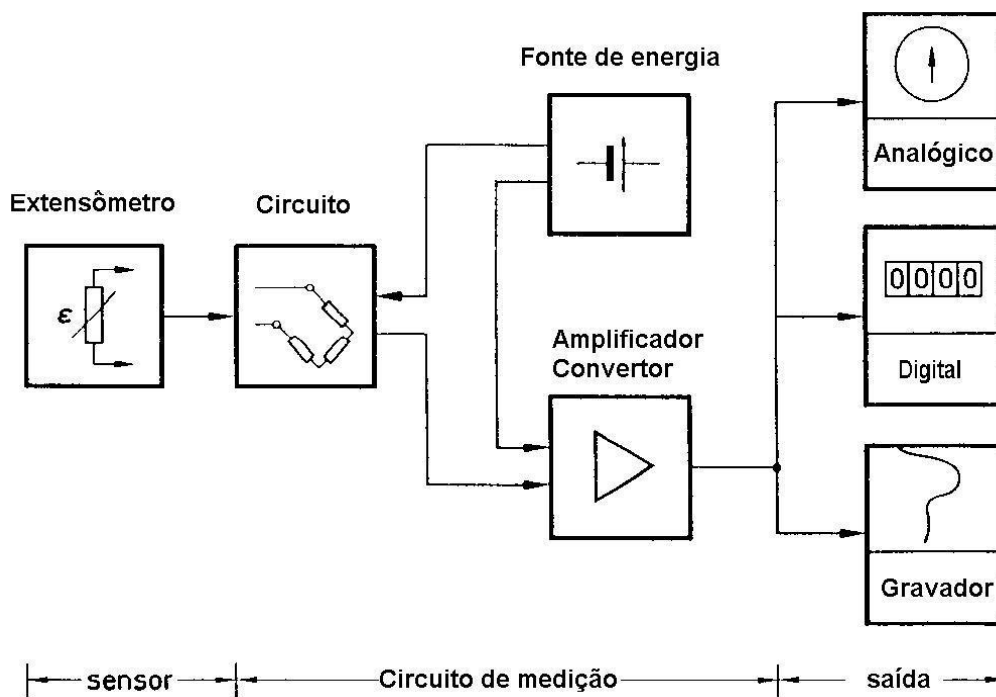


Figura A.4: Diagrama do sistema de medição de deformações por extensômetros.

não anulem ou reduzam as compressivas. Por exemplo, caso haja uma deformação trativa montada no braço 1 da ponte e uma deformação compressiva no braço 3, o equilíbrio da ponte irá anular ou reduzir os efeitos dessas deformações.

O ambiente onde se realizam os ensaios deve ser considerado na aplicação dos extensômetros. A temperatura é o fator externo de maior influência nos ensaios. Altas temperaturas requerem extensômetros específicos, fiações mais resistentes e colas especiais. Altas variações de temperatura afetam o funcionamento dos extensômetros, alterando a sensibilidade, dilatações térmicas, entre outros efeitos.

Outros fatores que podem influenciar no ensaio são os campos magnético e elétrico. Estes provocam ruído no sinal a ser medido, prejudicando os resultados do ensaio. Estes efeitos são amenizados com a utilização de cabos blindados e com o adequado aterramento dos equipamentos de medição e das peças a serem ensaiadas.

A proteção dos extensômetros após instalação deve ser feita conforme a agressividade do meio. Em meios muito sujos, com umidade elevada ou com presença de agentes químicos nocivos, se faz necessário a aplicação de revestimentos apropriados. O período de realização do ensaio também pode influir no tipo de proteção aos extensômetros.

Aplicação do extensômetro na peça é uma etapa da extensometria que requer muito cuidado. Considera-se que toda a deformação que ocorre na peça é repassada para o extensômetro, sem perdas. Isso exige que as superfícies coladas estejam muito bem aderidas, isentas de sujeiras e resíduos entre elas. Um processo minucioso de limpeza deve ser feito antes da colagem. A posição, ponto de aplicação e direções do extensômetro devem estar previamente definidas, para obtenção de dados com qualidade.

Informações mais específicas referentes à análise através da extensometria podem ser buscadas em bibliografia especializada como DALLY e RILEY (1991) e HOFFMANN (1989).

# Apêndice B

## Validação do modelo de elementos finitos

A validação do modelo de elementos finitos foi feita a partir de soluções prontas provenientes da teoria de Kirchhoff, para uma placa quadrada isotrópica de dimensões:

$$a = 1,0 \text{ m}$$

$$b = 1,0 \text{ m}$$

Com carregamento distribuído e condição de contorno simplesmente apoiada. A solução de tensão máxima é obtida pela expressão:

$$\sigma_{\max} = \frac{\beta qb^2}{t^2} \quad (\text{B.1})$$

sendo  $\beta = 0,2874$  uma constante geométrica para  $a/b = 1$ ,  $q = 1,0 \text{ N/m}^2$  o carregamento distribuído, e  $t = 0,01 \text{ m}$  a espessura da placa.

A solução de deslocamento máximo no centro da placa é dada por:

$$y_{\max} = \frac{-\alpha qb^4}{Et^3} \quad (\text{B.2})$$

sendo  $\alpha = 0,0444$  uma constante geométrica para  $a/b = 1$ , e  $E = 100,0 \text{ MPa}$  o módulo de Elasticidade do material.

Resolvendo este caso, tem-se que:

- $\sigma_{\max} = 2874,0 \text{ N/m}^2$ , e
- $y_{\max} = -4,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

Os resultados provenientes do modelo de elementos finitos para uma malha de 36 elementos quárticos são:

- $\sigma_{\max} = 2904,5 \text{ N/m}^2$ , e
- $y_{\max} = -4,47 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

Assim os erros encontrados são de:

- 1,05% para  $\sigma_{\max}$  e
- 0,67% para  $y_{\max}$ .

# Apêndice C

## Projeto da célula de carga

### C.1 Objetivo

Projetar uma célula de carga para a aquisição dos esforços solicitados no corpo de prova proveniente do ensaio de fadiga plana. Aumentando o nível de automação do equipamento.

### C.2 Introdução

A célula de carga substituirá o antigo sistema de medição de força do equipamento, figura 5.6. Este utilizava um mecanismo totalmente mecânico. A leitura era feita por intermédio em dois relógios comparadores (1) que mostravam o deslocamento amplificado da mola (10) responsável pela reação dos esforços aplicados no corpo de prova. Onde a coleta das medições facilita erros operacionais, além de informar resultados com pouca precisão.

As leituras dos esforços na célula de carga serão realizadas por um sistema de aquisição eletrônico que é conectado aos sensores de deformação da célula. Essas informações são armazenadas em tempo real por um computador, que monitora o ensaio de fadiga. Com isso, obtêm-se informações mais apuradas, evitando alguns erros operacionais.

### C.3 Desenvolvimento do projeto

O projeto da célula foi feito visando a aquisição de dados em uma faixa de esforços gerados nos ensaios de corpos de prova de plástico e de materiais compósitos (resina polimérica reforçadas por fibras). Assim, as solicitações são relativamente baixas, fazendo com que a faixa de aplicação da célula fique entre 10 N e 240 N. O que representa um momento fletor no corpo de prova na faixa de 0,5 Nm à 12 Nm.

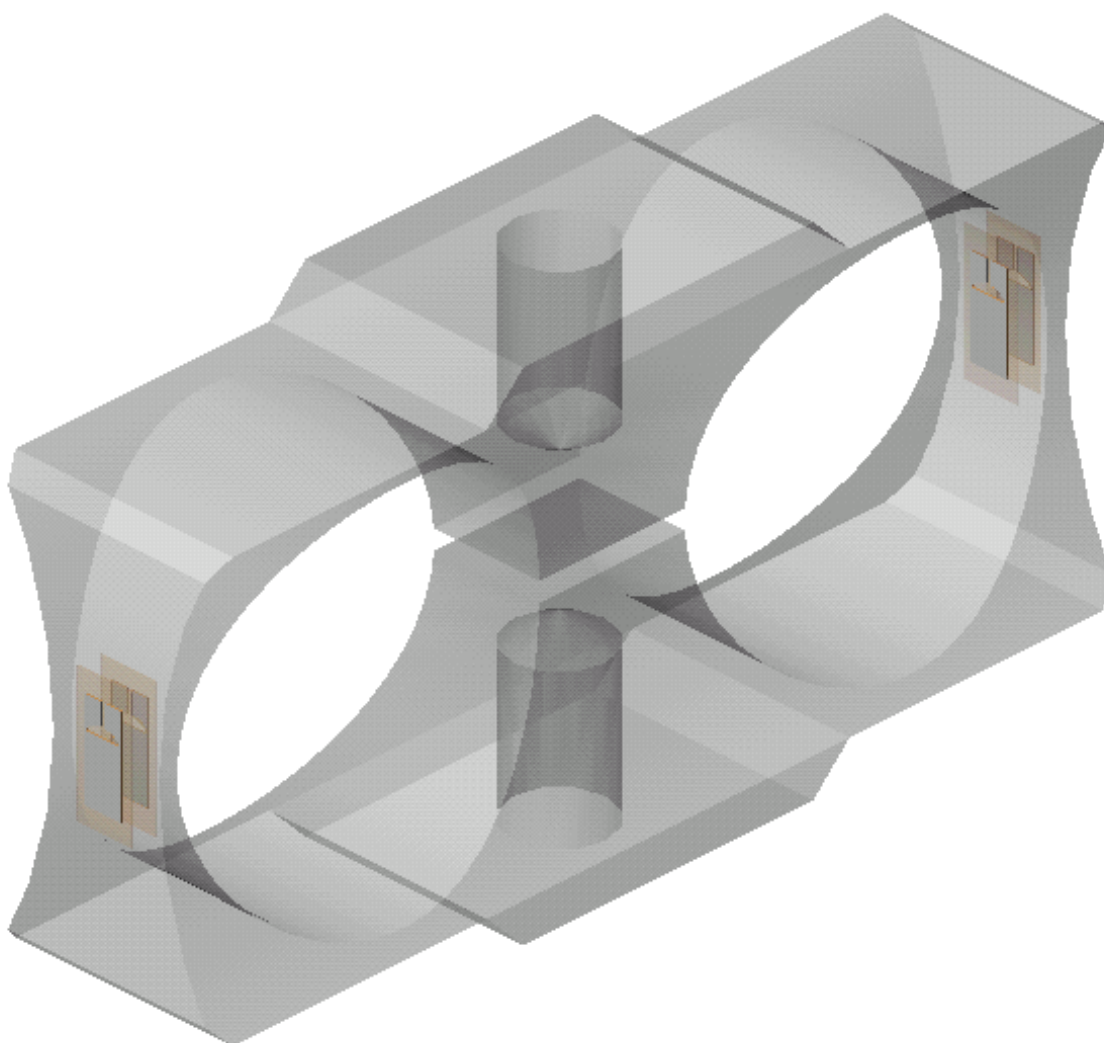


Figura C.1: Corpo da célula de carga e o posicionamento dos extensômetros.

A geometria definida para o corpo da célula de carga e a posição de aplicação dos extensômetros são apresentadas na figura C.1. O desenho de fabricação do corpo da célula e de montagem dos extensômetros são apresentados nas figuras C.6 e C.7, respectivamente.

### C.3.1 Análise estrutural

Uma análise estrutural numérica foi realizada na geometria do corpo da célula. O método dos elementos finitos foi aplicado através do software comercial ANSYS. O intuito dessa análise foi avaliar os níveis de tensão, deformação e deslocamentos existentes na peça, bem como os locais onde estes ocorreriam. Estes dados forneceram embasamento para a definição dos pontos de aplicação dos extensômetros na célula. Podendo ser estimada a sensibilidade do sensor de carga adequada. As situações de carregamento extremas foram analisadas.



Primeiramente foi simulada a situação de capacidade de carga máxima da célula de carga. Aplicou-se uma carga de 240 N. Ver configuração na figura C.2.

- A máxima tensão equivalente encontrada foi de 710 Mpa, representação gráfica na figura C.3.
- O deslocamento máximo foi de 0,35 mm.

A constante elástica  $k$  da célula pôde ser estimada pela razão entre a Força  $F$  e o deslocamento  $\delta$ , como na equação:

$$k = \frac{F}{\delta}$$

As deformações  $\varepsilon$  na direção  $y$ , que serão medidas pelos extensômetros, são da ordem 3,5 mm/m e podem ser visualizadas na figura C.4. A localização das deformações máximas e mínimas indica a posição de aplicação dos extensômetros.

Em uma segunda simulação foi aplicada a situação de capacidade mínima da célula de carga. Onde uma carga de 10 N foi aplicada.

- O deslocamento máximo foi de 0,0147 mm. A constante elástica apresenta um valor muito próximo ao caso do carregamento máximo, podendo ser considerada linear.

As deformações  $\varepsilon$  na direção  $y$ , que serão medidas pelos extensômetros, são da ordem 0,14 mm/m. Essas deformações se enquadram na faixa de medição dos extensômetros. Assim a célula de carga é sensível a carregamentos em torno de 10 N.

### C.3.2 Materiais

O material do corpo da célula de carga deve suportar as tensões gerada por ciclos de carregamentos máximo.

O material definido para esta aplicação é o aço ABNT 4340 temperado e revenido com uma dureza de 35 – 45 HC.

### C.3.3 Extensometria

O extensômetro empregado na célula de carga é o sensor que lê a deformação na superfície de aplicação e a transforma em variação da resistência elétrica. Um circuito elétrico conhecido como ponte de Wheatstone transforma a variação de resistência em uma diferença de potencial elétrico. Esta diferença de potencial é lida por um aquisitor de dados e processada para fornecer o resultado desejado.

Serão aplicados quatro extensômetros na célula de carga, e o circuito será montado em ponte completa. Ver apêndice B.

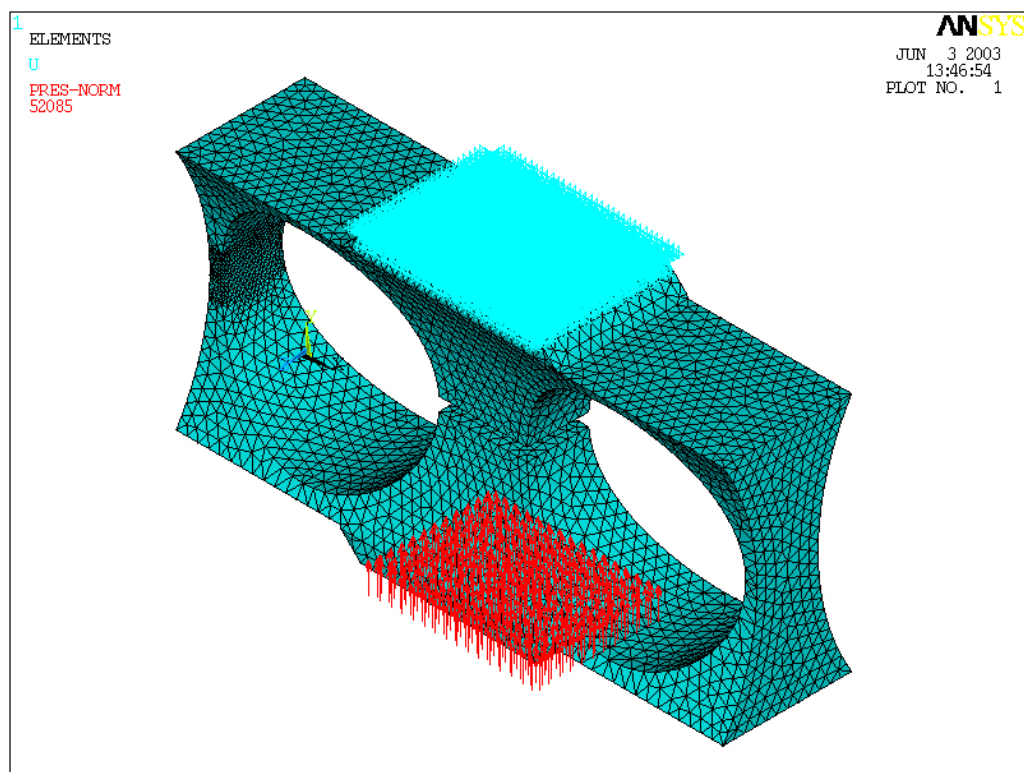


Figura C.2: Malha, carregamento e condições de contorno utilizados na análise.

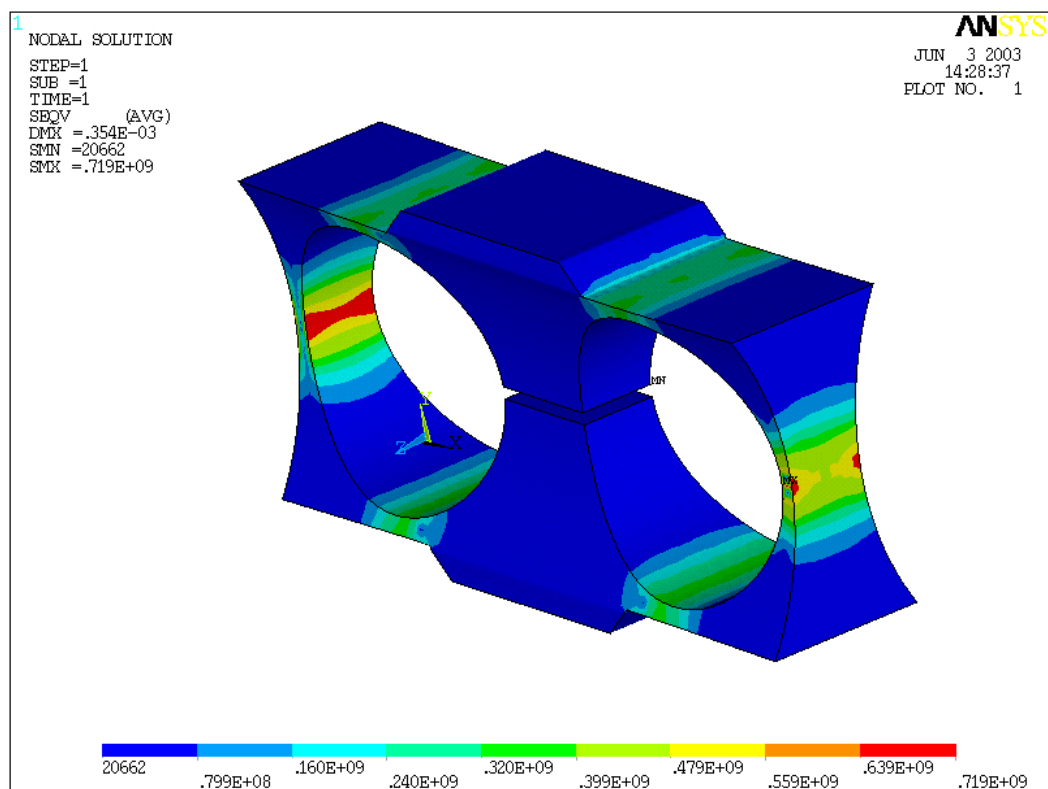


Figura C.3: Tensões equivalentes para a carga máxima da célula.

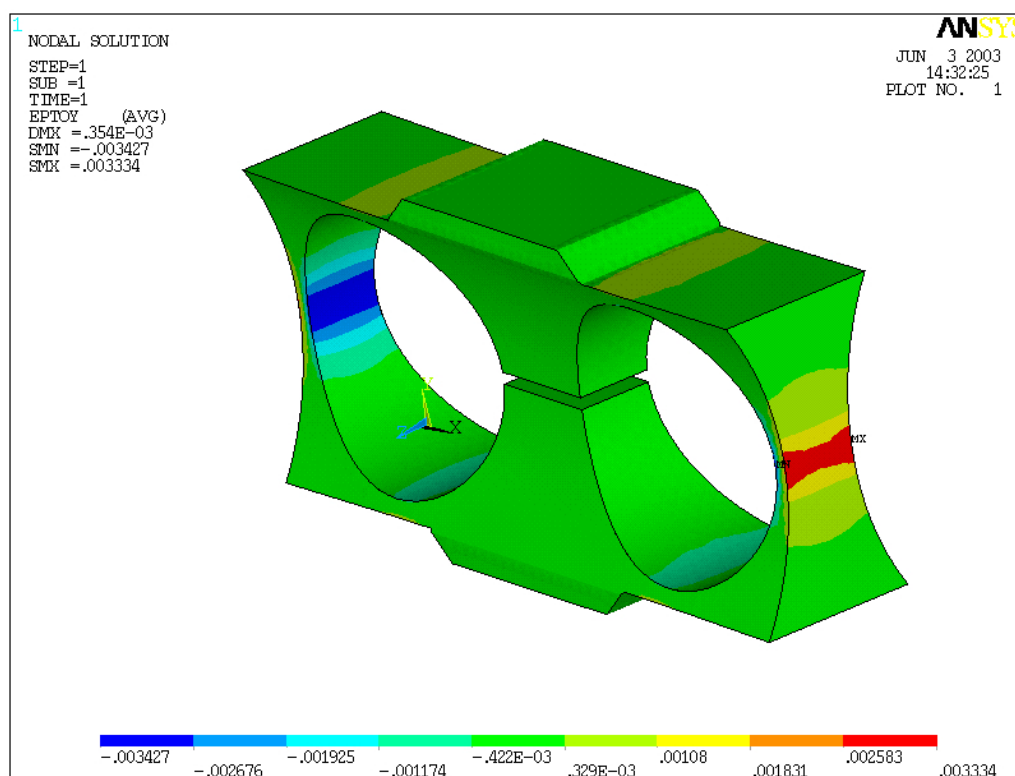


Figura C.4: Deformações na direção  $y$  decorrentes da carga máxima na célula.

A faixa de leitura da resposta esperada da ponte varia de 0.28 mV/V à 3,5 mV/V para extensômetros com sensibilidade igual a dois ( $k = 2$ ).

Os extensômetros selecionados são do tipo PA-06-062AA-350-L, marca EXCEL. Com as seguintes especificações:

- Resistência elétrica de 350 ohms;
- Comprimento efetivo de grade de 3,18 mm;
- Sensibilidade  $k = 2,1$ ;
- Compensação de temperatura para aço;
- Terminais com fio de cobre soldado;
- Suporte da grade é em poliamida.

### C.3.4 Calibração da célula

É importante para conhecer as características da célula de carga levantar uma curva de rigidez experimental, avaliando o deslocamento em função dos esforços aplicados. A célula foi calibrada em uma balança de precisão e a curva de calibração é apresentada na figura C.5. A constante de calibração da célula é de aproximadamente  $5871 \left[ \frac{gf}{mV/V} \right]$ .

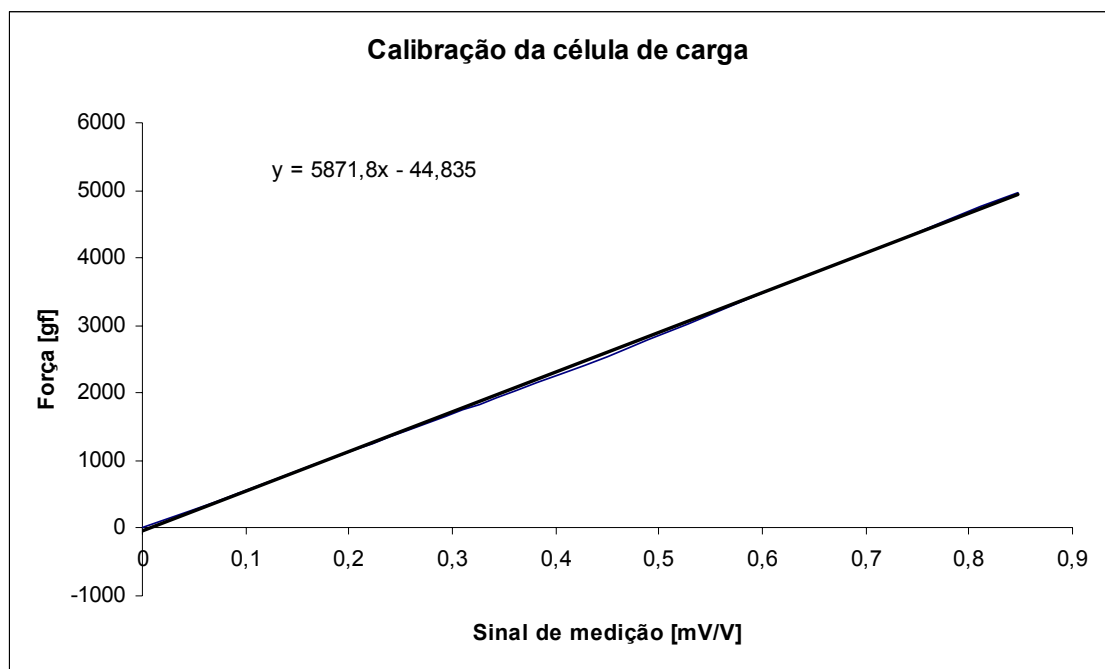


Figura C.5: Curva de calibração da célula de carga.

## C.4 Conclusão

A célula de carga projetada substituiu com melhor performance o sistema mecânico de leitura de esforços da mola e relógios comparadores da máquina de fadiga plana Schenke.

As informações obtidas nos ensaios de fadiga terão maior precisão e confiabilidade.

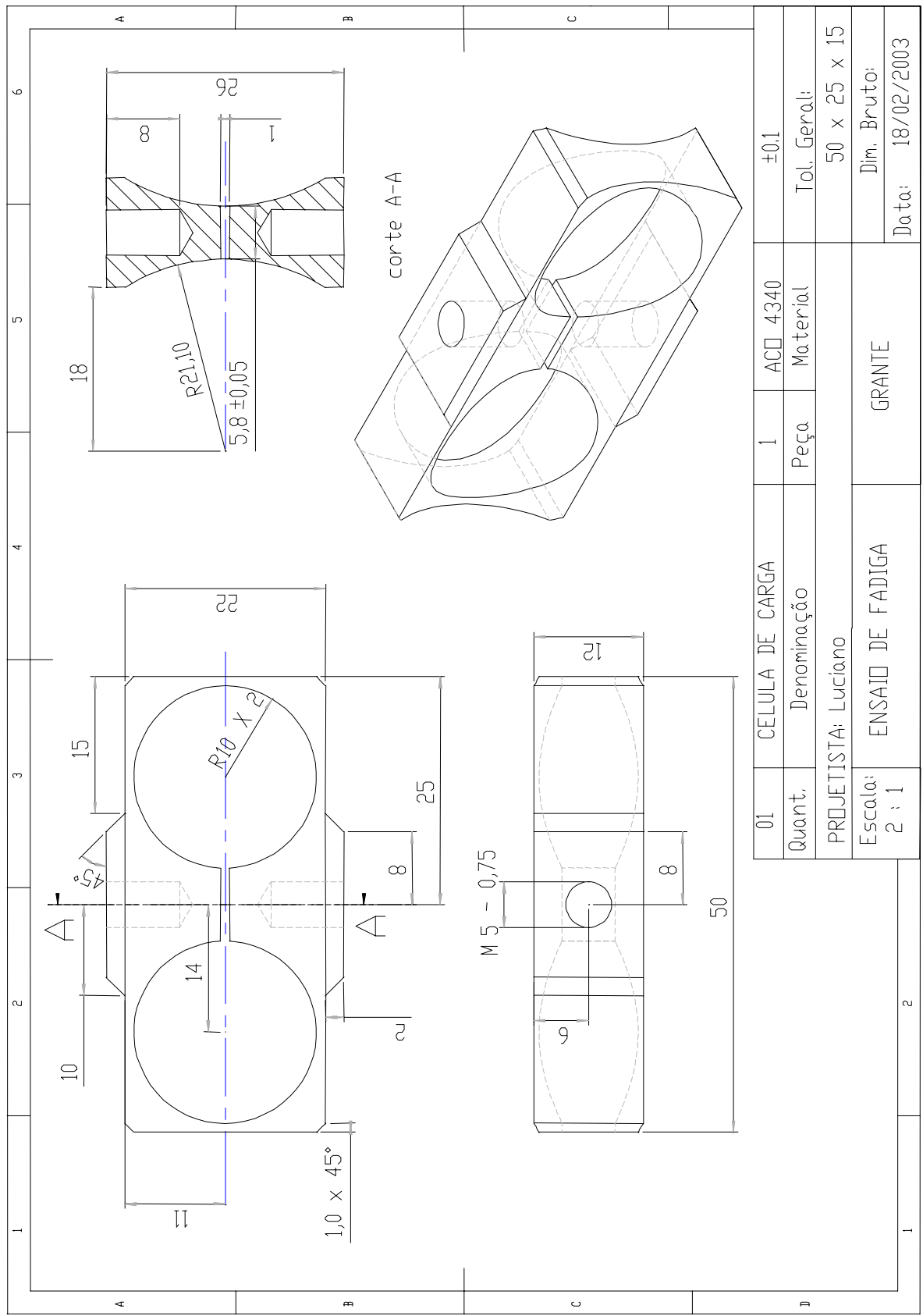


Figura C.6: Desenho de fabricação do corpo da célula de carga.

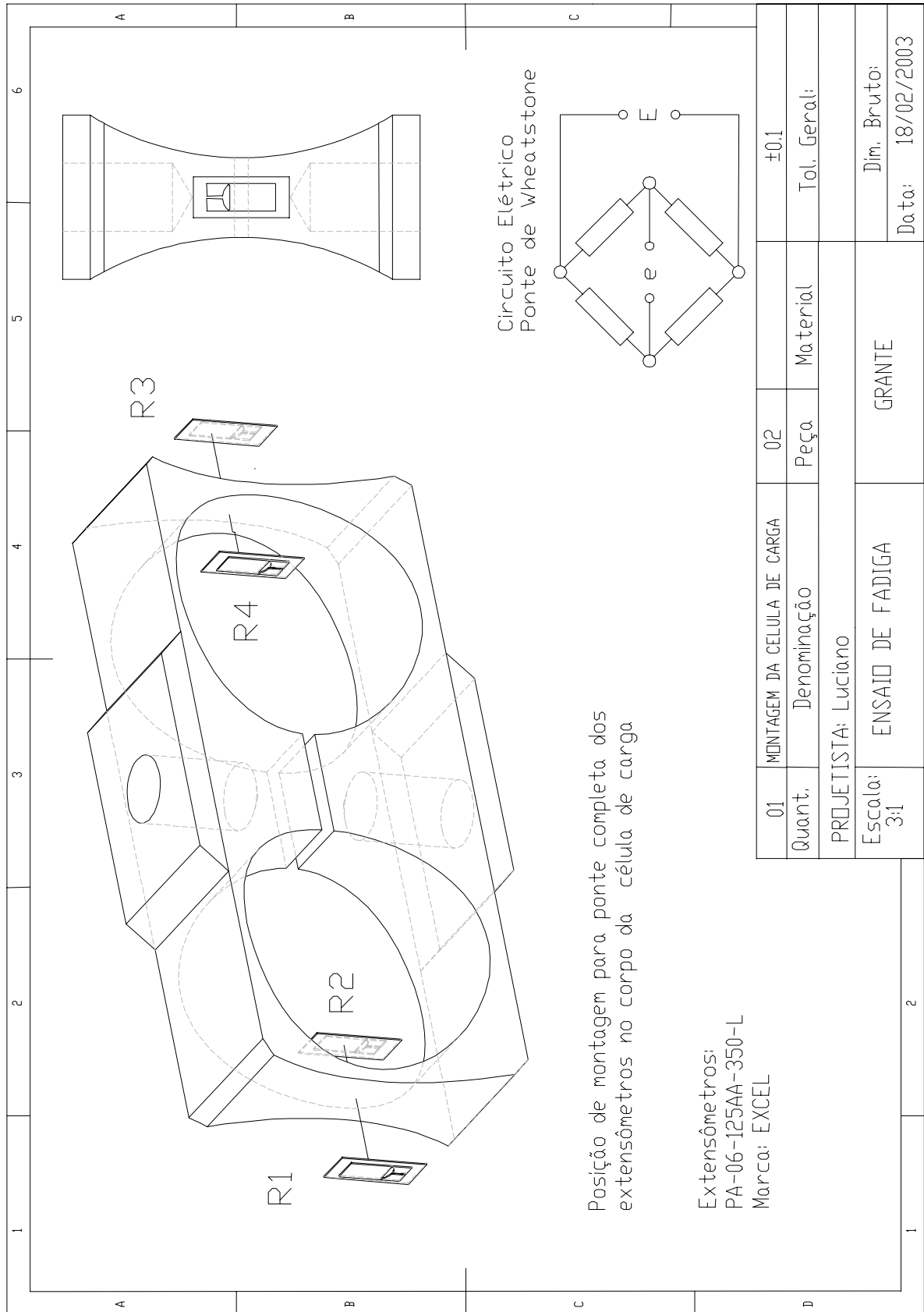


Figura C.7: Instrumentação da célula de carga.