

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**DETERMINAÇÃO DA CURVA DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO VERDADEIRA DE
METAIS ISOTRÓPICOS USANDO CORPOS DE PROVA DE CHAPA FINA**

Dissertação submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para a obtenção do grau de

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

YOSHIHIRO LIMA NEMOTO

Florianópolis, Junho de 2004

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**DETERMINAÇÃO DE CURVA DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO VERDADEIRA DE
METAIS ISOTRÓPICOS USANDO CORPOS DE PROVA DE CHAPA FINA**

YOSHIHIRO LIMA NEMOTO

**Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
sendo aprovada em sua forma final.**

Paulo de T. R. Mendonça, Ph.D. - Orientador

José A. Bellini da Cunha Neto, Dr. - Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Edison da Rosa, Dr. - Presidente

Eduardo A. Fancello, D.Sc.

Pedro A. Nannetti Bernardini, Dr.Eng.

À Hiro e Sônia, pais maravilhosos.

Agradecimentos

À **CAPES** e **FEESC**, pelo apoio financeiro;

ao professor **Paulo de Tarso R. Mendonça**, pela orientação neste trabalho;

aos colegas do GRANTE que contribuíram direta e indiretamente, em especial ao **Luciano, André, Cleber, Bruno, Oswaldo, Gustavo e Pedrão**;

aos Professores **Edison da Rosa, José Bellini, Lauro Nicolazzi, Eduardo Fancello e Marcelo Krajnc**, pelos vários conselhos nas horas difíceis;

ao **LabMETRO** e **LabMat**, pela colaboração nos trabalhos;

à tia **Toyoko** e **D. Wilma**, que me receberam de braços abertos;

aos meus pais **Hiro** e **Sônia** e minhas irmãs **Joana** e **Carol**, pelo apoio e todo o seu amor;

à minha namorada, **Fernanda** que compartilhou comigo todos estes momentos importantes.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	3
2.1	Ensaio de Tração Axial: Procedimento e limitações	3
2.2	Efeitos do Entalhe	9
2.3	Tensões e deformações no entalhe	12
2.4	Teoria da Plasticidade	17
2.4.1	Função constitutiva incremental	17
2.4.2	Problema de condição de contorno incremental	19
2.4.3	Equação de Elementos Finitos (EF) não-linear incremental	19
2.4.4	Plasticidade independente de taxas	20
2.4.5	Limite de escoamento	21
2.4.6	Regra de escoamento	21
2.4.7	Regra de encruamento	22
2.4.8	Incremento de deformação plástica	22
2.4.9	Formulação de Elementos Finitos	23
2.5	Formulação para grandes deformações	26
2.5.1	Implementação computacional	29
2.5.2	Formulação do elemento	30
2.6	Método de Newton-Raphson	31
2.7	Método de Arc-Length	33
2.8	Método de Newton-Raphson/Arc-Length combinado	35
2.8.1	Determinação do previsor de solução	37

3	Materiais e métodos	41
3.1	Análise Numérica Proposta	41
3.1.1	Equipamento utilizado	41
3.1.2	Método	42
3.1.3	Materiais	43
3.1.4	Corpos de prova	44
3.1.5	Tipo do elemento	45
3.1.6	Tipo da malha	46
3.1.7	Parâmetros do método de Arc-Length	48
3.1.8	Monitoramento da área	52
3.1.9	Variação de área	54
3.1.10	Variação de área proporcional	54
3.1.11	Variação de área não-proporcional (n-p)	55
3.1.12	Normalização da variação de área não-proporcional	55
3.1.13	Equação proposta de variação de área	62
3.1.14	Verificação da equação de variação de área proposta	63
3.1.15	Correção de Bridgman	63
3.2	Procedimento Experimental	64
3.2.1	Equipamento utilizado	65
3.2.2	Método	66
3.2.3	Materiais	66
3.2.4	Corpos de prova	67
3.2.5	Procedimento	67
4	Resultados e discussão	72
4.1	Modelo Numérico	72
4.1.1	Tensão de Engenharia	72
4.1.2	Variação de área total	74
4.1.3	Variação de área n-p	76
4.1.4	Variação de área n-p normalizadas em relação ao valor de área n-p cor- respondente à redução de 50% da espessura	77

4.1.5	Normalização da variação de área n-p pela relação de forma da seção . . .	78
4.1.6	Normalização pela deformação na carga máxima	79
4.1.7	Comparação entre as curvas de tensão-deformação verdadeira obtidas por FEM e pela formulação dos materiais ideais	82
4.1.8	Correção das curvas pela equação de Bridgman	82
4.2	Resultados experimentais	85
5	Conclusão	96
	Bibliografia	98
A	Gráficos de distribuição de tensões no modelo de Elementos Finitos	101
B	Corpos de prova levados à ruptura	108
C	Detalhamento dos corpos de prova	112
D	Resumo de Vocabulário Internacional de Metrologia	118

Lista de Figuras

2.1	Curva de engenharia e curva de tensão-deformação verdadeira. Fonte: [17].	4
2.2	a) Variação de área na seção circular. b) Variação de área proporcional na seção retangular.	5
2.3	Deformação de área não-proporcional.	8
2.4	O gráfico mostra o comportamento do fator de concentração de tensão K_t em relação à geometria do corpo de prova. Fonte: [10].	10
2.5	Distribuição esquemática de tensões ao redor do entalhe para o estado plano de deformações. Fonte[23].	13
2.6	Distribuição de tensões num estado plano de tensões. Fonte: [23].	14
2.7	Distribuição da tensão longitudinal σ_{11} e da tensão transversal σ_{22} ao longo de um corpo de prova externamente entalhado no estado plano de deformação. Fonte: [23].	15
2.8	a) superfície de escoamento isotrópico. b) superfície de escoamento cinemático. Fonte:[23].	22
2.9	Determinação de σ_k no encruamento isotrópico multi-linear. Fonte [2].	25
2.10	Configuração inicial, média e final.	27
2.11	a) Estado plano indeformado. b) Estado plano deformado. Fonte: [2].	29
2.12	Algoritmo de Newton-Raphson para a equação de equilíbrio de elementos finitos incremental. Fonte: [16].	32
2.13	Equilíbrio instável: Comportamento de snap-through e snap-back. Fonte: [16].	33
2.14	Método de Arc-Length cilíndrico. Fonte: [16].	35
2.15	Solução tangencial, $\delta\bar{u}$. Fonte: [16].. . . .	39

2.16	O critério do preditor de direção do caminho secante. a) O fator de carregamento é crescente, escolhendo $\delta\lambda > 0$; b) O fator de carregamento é decrescente, escolhendo $\delta\lambda < 0$. Fonte: [16].	39
3.1	Curvas de escoamento obtidas através da equação (3.1).	44
3.2	Modelo simplificado de 1/8 do corpo de prova. A malha é mais refinada na região do entalhe.	45
3.3	Elemento de 20 nós, SOLID 95. Fonte [2].	46
3.4	Carga máxima de tração obtida pelas diferentes malhas.	47
3.5	Espessura da seção mínima correspondente à carga máxima de tração.	48
3.6	Carga de tração correspondente à redução de 50% na espessura da seção mínima.	48
3.7	Carga máxima de tração para os diferentes fatores de Arc-Length.	49
3.8	Espessura da seção mínima correspondente à carga máxima de tração para os diferentes fatores de Arc-Length.	49
3.9	Carga de tração correspondente à redução de 50% na espessura da seção mínima para os diferentes fatores de Arc-Length.	50
3.10	Carga máxima de tração para os diferentes valores de carregamento inicial.	51
3.11	Espessura da seção mínima correspondente à carga máxima de tração para os diferentes carregamentos iniciais.	51
3.12	Carga de tração correspondente à redução de 50% na espessura da seção mínima para os diferentes carregamentos iniciais.	52
3.13	Esforço computacional exigido para a simulação.	53
3.14	Variação de área n-p correspondente à redução de 50% na espessura mínima para as diferentes relações de forma da seção transversal mínima.	58
3.15	Variação de área n-p correspondente à redução de 50% na espessura mínima para as diferentes relações de forma da seção transversal mínima normalizadas pelo valor correspondente à relação de forma $RF = 4$	58
3.16	Variação de área n-p dos corpos de prova com $RF = 4$ dos diferentes materiais.	59
3.17	Variação de área n-p dos corpos de prova com $RF = 4$ dos diferentes materiais transladados pela equação (3.9).	60

3.18	Variação de área n-p dos corpos de prova com $RF = 4$ dos diferentes materiais transladados pela equação (3.9) e normalizados pelos respectivos valores correspondentes de redução da espessura à 50%.	60
3.19	Variação de área n-p correspondente ao material com $n = 0,15$, transladada e normalizada pelos respectivos valores na redução de espessura em 50% e a equação de 4ª ordem que a reproduz.	61
3.20	Função f_m que reproduz os valores de variação n-p transformada correspondentes à redução de 50% de espessura nas suas respectivas cargas máximas de tração.	62
3.21	Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,15$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos.	64
3.22	Máquina de tração utilizada nos ensaios experimentais. No detalhe, as garras fixando um corpo de prova de chapa fina de cobre CA122.	68
3.23	Aparelho medidor de espessura de tubos utilizado para monitorar a variação de espessura durante os ensaios experimentais.	70
4.1	Tensão de engenharia.	73
4.2	Variação de área total pela variação de espessura na seção mínima.	75
4.3	Variação de área não-proporcional pela variação de espessura.	76
4.4	Variação de área não-proporcional normalizada pelo seu valor correspondente à redução de 50% de espessura.	77
4.5	a) Valores de variação de área n-p correspondentes à redução de 50% da espessura na seção mínima pela relação de forma da seção transversal. b) Variação de área n-p em cada material normalizada pelo respectivo valor da variação n-p correspondente à redução de 50% na espessura do corpo de prova com relação de forma $RF = 4$	78
4.6	a) Variação de área n-p para $RF = 4$ com $n = 0,05, 0,10, 0,15$ e $0,20$. b) Curvas de variação de área n-p transladadas pela transformação da eq.4.3.	79

-
- 4.7 a)Variação de área n-p dos corpos de prova com $RF = 4$ dos diferentes materiais transladados pela equação (3.9) e normalizados pelos respectivos valores correspondentes de redução da espessura à 50%. b)Variação de área n-p correspondente ao material com $n = 0,15$, transladada e normalizada pelo respectivos valores na redução de espessura em 50% e a equação de 4ª ordem que a reproduz. 80
- 4.8 Função f_m que reproduz os valores de variação n-p transformada correspondentes à redução de 50% de espessura nas suas respectivas cargas máximas de tração. . 81
- 4.9 Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,05$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos. 83
- 4.10 Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,10$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos. 83
- 4.11 Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,15$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos. 84
- 4.12 Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,20$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos. 84
- 4.13 Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de escruamento introduzida no modelo de Elementos Finitos extraída da equação (3.1) para o material com $n = 0,05$ 85
- 4.14 Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de escruamento introduzida no modelo de Elementos Finitos extraída da equação (3.1) para o material com $n = 0,10$ 86
- 4.15 Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de escruamento introduzida no modelo de Elementos Finitos extraída da equação (3.1) para o material com $n = 0,15$ 86

4.16	Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de Elementos Finitos extraída da equação (3.1) para o material com $n = 0, 20$	87
4.17	Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o aço inox 316 (chapa).	88
4.18	Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do aço inox 316 (chapa).	89
4.19	Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o aço inox 316 (barra).	90
4.20	Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do aço inox 316 (barra).	90
4.21	Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o alumínio 3105-H14.	91
4.22	Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do alumínio 3105-H14 (chapa).	91
4.23	Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o alumínio 6351.	92
4.24	Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do alumínio 6351 (barra).	93
4.25	Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o cobre CA122.	94
4.26	Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do cobre CA122 (chapa).	94

4.27	Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o cobre CA110.	95
4.28	Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do cobre CA110 (barra).	95
A.1	Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no aço inox 316 (barra).	102
A.2	Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no alumínio 6351 (barra).	103
A.3	Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no cobre CA110 (barra).	104
A.4	Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no cobre CA122 (Chapa).	105
A.5	Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no aço inox 316 (Chapa).	106
A.6	Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no alumínio 3105-H14 (Chapa).	107
B.1	Corpos de prova retangulares de alumínio 3105-H14.	109
B.2	Corpos de prova retangulares de aço inox 316.	109
B.3	Corpos de prova retangulares de cobre CA122.	110
B.4	Corpos de prova cilíndricos de aço inox 316.	110
B.5	Corpos de prova cilíndricos de alumínio 6351.	111
B.6	Corpos de prova cilíndricos de cobre CA110.	111
C.1	Detalhamento do corpo de prova cilíndrico com diâmetro nominal, $D = 6,25$ mm	113
C.2	Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 4$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm.	114
C.3	Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 2$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm.	115
C.4	Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 5$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm.	116

C.5 Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 8$ e
espessura nominal, $t = 1,5$ mm. 117

Simbologia

S é a tensão longitudinal média;
 e é a deformação longitudinal;
 σ é a tensão verdadeira;
 ε é a deformação verdadeira a cada passo de carga;
 P é a carga de tração;
 A_0 é a área da seção transversal inicial;
 A é a área da seção transversal deformada;
 L é a comprimento útil;
 L_0 é a comprimento útil inicial;
 \mathbf{R} é a raio inicial da seção transversal;
 r é a raio da seção transversal deformada;
 $\Delta\mathbf{R}$ é a variação do raio da seção;
 ΔA é a variação da área da seção transversal;
 W_0 é a largura inicial da seção transversal;
 W é a largura da seção transversal deformada;
 ΔW é a variação da largura da seção;
 t_0 é a espessura inicial da seção transversal;
 t é a espessura da seção transversal deformada;
 Δt é a variação da espessura da seção;
 A_e é o valor da área efetiva;
 t_e é a espessura efetiva;
 W_e é a largura efetiva;
 σ_{\max} tensão máxima;
 σ_{nominal} tensão nominal;

-
- K_ε é o fator de concentração de deformação;
 K_σ é o fator de concentração de tensões plásticas;
 K_t é o fator de concentração de tensões elásticas;
 σ_{11} é a tensão principal na direção do carregamento axial;
 ε_{11} é a deformação principal na direção do carregamento axial;
 σ_{22} é a tensão trativa transversal;
 ε_{22} é a deformação principal resultante da contração lateral;
 σ_{33} é a tensão principal na direção da espessura;
 ε_{33} é a deformação principal na espessura;
 σ_0 é a tensão de escoamento;
 ν é o coeficiente de Poisson;
 λ é a constante de Lamé;
 μ é o módulo de cisalhamento;
 τ_{11} é a tensão de cisalhamento na zona plástica;
 $\sigma_{\text{média}}$ é a tensão média na estrição;
 P_{cp} é a carga de colapso plástico;
 R é o raio de curvatura da estrição;
 a é a largura entre o centro do corpo de prova e a borda da estrição;
 $\varepsilon_{Q_{\max}}$ é o valor da deformação verdadeira correspondente à carga máxima Q de tração;
 te_n é o tempo em n ;
 te_{n+1} é o tempo em $n + 1$;
 ε_{n+1} é o tensor de deformações;
 σ_{n+1} é o tensor de tensões em $n + 1$;
 $\hat{\sigma}$ é a função constitutiva incremental para o tensor de tensões;
 η é o deslocamento virtual;
 b_{n+1} é a força de corpo;
 t_{n+1} é o campo de tração na superfície;
 κ é o coeficiente plástico (que indica qual o montante de deformação plástica);
 Q é a função da tensão em termos do potencial plástico (que determina a direção da deformação plástica);
 \bar{f}^{ext} é o vetor de forças externas global;

-
- $d\varepsilon^{pl}$ é o incremento de deformação plástica;
 $\{\alpha\}$ é o vetor de translação da superfície de escoamento e indica a localização do centro da superfície de escoamento (back stress);
 C é o parâmetro característico do material;
 ε^g é a deformação-guia;
 ε_n^{pl} é a deformação plástica atual;
 ε^{el} é a deformação elástica computada;
 σ_h é a tensão hidrostática;
 σ_k é a tensão de escoamento do passo atual;
 σ_x é a tensão no eixo x;
 σ_y é a tensão no eixo y;
 σ_z é a tensão no eixo z;
 $\{\sigma\}$ é o tensor de deformação elástica;
 $[D]$ é a matriz de tensão-deformação do elemento;
 V_0 é o volume inicial;
 $\Delta\lambda$ é o fator de carga incremental;
 Δu é o deslocamento incremental;
 $\delta\bar{u}$ é a solução tangencial;
 V é o volume modificado a cada instante;
 $\det [F]$ é o determinante do gradiente de deformação;
 $[R]$ é o tensor de rotação ($[R]^T [R] = [I]$);
 $[U]$ é o tensor de alongamento, também conhecido como tensor de Cauchy-Green à direita;
 ν_i são os auto-valores do tensor $[U]$ (alongamentos principais);
 $\{\varepsilon_i\}$ são os auto-vetores do tensor $[U]$ (direções principais);
 ψ é o parâmetro de escala prescrito;
 $\bar{\varepsilon}_p$ é o Deformação Plástica equivalente;
 $\bar{\sigma}$ é o Tensão no escoamento correspondente à deformação plástica equivalente;
 δu^* é o deslocamento iterativo;
 ε_0 é o Deformação de escoamento;
 n é o Expoente de encruamento;
 $\bar{Q}_{máx}$ é a carga máxima média de tração;

\bar{t} é a espessura média;

Q_i é a carga inicial do fator de Arc-length;

$\frac{\Delta A_p}{A_0}$ é a variação de área proporcional;

$\frac{\Delta t}{t_0}$ é a variação de espessura;

$\frac{\Delta A_{np}}{A_0}$ é a variação de área não-proporcional;

$\frac{\Delta A}{A_0}$ é a variação total de área obtida diretamente através do modelo de Elementos Finitos;

$\frac{\Delta A_{np}}{A_0}$ é a variação de área n-p correspondente à uma redução de espessura qualquer;

$\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}$ é a variação de área n-p correspondente à uma redução de 50% na espessura;

$\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}^i$ correspondente à relação de forma i ;

$\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}^{i=4}$ corresponde à relação de forma, $RF = 4$;

$f_{RF}(RF)$ é a função que descreve a influência da relação de forma na evolução de variação de área n-p;

RF é referente a relação de forma da seção transversal do corpo de prova;

Observação: Se RF for igual a quatro, então $f_{RF}(4)$ será igual a 1;

$\frac{\Delta t^T}{t_0}$ é o valor da variação de espessura transladado para o correspondente valor de onde a variação de área tem início no material com $n = 0.15$;

$\frac{\Delta t}{t_0}$ é a variação de espessura de um material qualquer com expoente de encuramento (n) diferente de 0.15;

$\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}}$ é a variação de espessura do material qualquer, correspondente à carga máxima se tração;

$\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}}^{n=0.15}$ é a variação de espessura do material com $n = 0.15$, correspondente à carga máxima se tração;

$\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)^T$ é a variação de área n-p transformada correspondente à uma redução de espessura qualquer;

$\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}^T$ é a variação de área n-p transformada correspondente à uma redução de 50% na espessura;

$f_t(x)$ é a função que descreve a influência da carga máxima de tração no comportamento da redução de espessura para a evolução da variação de área n-p;

Resumo

Na obtenção de certas propriedades mecânicas em chapas metálicas espessas, usualmente são utilizados corpos de prova com seção transversal circular, pois a determinação da curva de tensão-deformação verdadeira ou curva de escoamento é feita registrando a variação da carga e a redução do diâmetro do corpo de prova dúctil, seguida por uma correção da tensão na estrição pela equação de Bridgman.

Contudo, para chapas mais finas, onde a confecção de corpos de prova cilíndricos torna-se inviável, a alternativa mais acessível é a utilização de corpos de prova com seção transversal retangular. A obtenção experimental da curva tensão-deformação verdadeira é complexa pois, logo após o início da estrição difusa, ocorrem duas formas distintas de deformação na seção transversal dificultando a medição direta das dimensões em tempo real de ensaio.

Na primeira forma de deformação, a redução da área da seção transversal ocorre de forma proporcional e é calculada diretamente a partir da sua redução de espessura efetiva. Já na segunda, a redução da área ocorre de forma não-linear, e em decorrência disso, a seção transversal começa a se diferenciar do seu formato retangular inicial, tornando praticamente inviável o monitoramento da área real.

Neste trabalho foi implementado um modelo de elementos finitos, para simular as condições do ensaio de tração em corpo de prova de chapa e obter a curva de escoamento de materiais metálicos com diferentes propriedades de encruamento. Os resultados numéricos permitiram determinar um modelo algébrico para a evolução da área de seção transversal real em termos da geometria, variação de espessura e carga máxima de tração. Adicionalmente, foram conduzidos ensaios experimentais para determinar as curvas de escoamento de cinco materiais (aço inox 316, alumínio 3105-H14, 6351, cobre CA122 e CA110), obtendo desvios mínimos de aproximação com as curvas do modelo. O resultado é um procedimento que permite determinar as tensões e deformações verdadeiras através de medições simples no ensaio de corpos de chapa.

Abstract

To obtain some mechanical properties of thick metallic plates, usually specimens with round cross section are tested, because determining the true stress-strain curve or its flow curve is made monitoring the load changing of ductile specimen and diameter reduction, followed by a necking stress correction through Bridgman's equation.

However, for thin plates manufacturing of cylindrical specimens is frequently unviable, such that the most accessible alternative is to use specimens with rectangular cross section. However, measurements to the true stress-strain curve involves certain complications, just after the diffuse necking takes place, when two different strain forms begin to develop in the cross section, hindering the direct of the measurement in real time testing.

In the first strain form, the cross section area reduction happens in a proportional way and it is calculated directly from its effective thickness reduction. In the second form, the area reduction is nonlinear such that the cross section begins to differentiate from its original rectangular format, becoming practically unviable real area monitoring.

In this study a finite element model was implemented to simulate the tension test conditions in plate specimens and to obtain metallic materials flow curve with different hardening characteristics. The numeric results allowed to calibrate an algebraic model adequate to compute the real cross section area evolution in terms of its geometry, thickness change and maximum load. In addition, experimental tests were also carried out to determine five material's flow curves (stainless steel 316, aluminum 3105-H14, 6351, cooper CA122 and CA110), retrieving minimum deviation between model curves . The result is a procedure that allows to determine the true stress-strain properties through simple measurements in plate specimens tension tests.

Capítulo 1

Introdução

Descrever a relação tensão-deformação verdadeira de um determinado material é muito útil quando grandes deformações são levadas em consideração. Análises de processos de estampagem de metais ou análises de dano e fratura dúctil podem ser citadas como exemplos.

No caso de chapas espessas o procedimento consiste em utilizar corpos de prova cilíndricos usinados a partir das próprias chapas, que serão solicitados à tração axial para determinar a curva tensão-deformação verdadeira do material. Em função das cargas de tração e a variação de área da seção transversal circular mínima, sendo que a variação da área por sua vez, é calculada a partir da redução do diâmetro da seção transversal de corpo de prova no decorrer do ensaio.

Em uma segunda etapa a tensão longitudinal verdadeira obtida é corrigida, pois o estado triaxial de tensões introduzido pela formação da estrição difusa a eleva de forma dissimulada. Em 1944 Bridgman [10] propôs uma equação baseada na tensão longitudinal média e variações na geometria do corpo de prova para corrigir este desvio.

O fenômeno da estrição pode ser dividido em duas partes, estrição difusa e estrição localizada. A estrição difusa é uma forma de escoamento instável que se manifesta logo após a carga máxima de tração ser atingida, que eventualmente pode levar à ruptura. Depois que a estrição difusa começa, a deformação no corpo de prova continua a se desenvolver sob a influência do carregamento que decresce até que a estrição localizada se manifeste culminando na ruptura do corpo de prova.

Entretanto, confeccionar corpos de prova cilíndricos para determinar as mesmas propriedades em chapas finas torna-se inviável, assim uma alternativa é a utilização de corpos de prova retan-

gulares. Contudo, o monitoramento da variação de área em corpos de prova de seção transversal retangular não é tarefa simples justamente pela influência da estrição difusa, responsável pela variação da área passar a ter duas componentes, uma proporcional e uma não-proporcional.

A componente proporcional refere-se à redução de área da seção transversal mantendo seu formato retangular, durante a fase de pré-estricção ela é a única componente de variação da área da seção transversal. Por outro lado a componente de variação não-proporcional reflete a transição do formato originalmente retangular da seção, para o formato semelhante a um entalhe suave resultante da formação da estrição difusa. Portanto o primeiro desafio para a utilização de corpos de prova retangulares para a determinação da curva tensão-deformação verdadeira é quantificar e monitorar a variação da área da seção transversal após o surgimento da estrição difusa.

Em 1951, Aronofsky [3] constatou que a distribuição de tensões em corpos de prova retangulares após a estrição também não é uniforme, indicando a necessidade de empregar um método de correção destas tensões longitudinais antes de serem consideradas como as tensões de escoamento verdadeiras do material. As análises paramétricas apresentadas por Zhang *et al* [24], feitas entre as tensões verdadeiras obtidas a partir de corpos de prova cilíndricos e retangulares, constataram que a equação de correção de Bridgman também pode ser utilizada para corrigir as tensões longitudinais verdadeiras em corpos de prova retangulares. Desde que o monitoramento da variação de área nestas seções tenha sensibilidade suficiente para considerar as mudanças no formato da seção transversal mínima resultante da estrição.

Nesse sentido foi implementado em software comercial de elementos finitos um modelo parametrizado para simular corpos de prova com relações de forma distintas, com a finalidade de fornecer uma formulação algébrica baseada no conceito de normalização apresentado por Zhang *et al* [24] capaz de produzir aproximações com grande concordância entre si, para a variação de área baseado nos resultados obtidos pelo modelo, como a variação da espessura na seção transversal mínima e a carga máxima de tração. Ensaio experimentais utilizando corpos de prova cilíndricos e retangulares foram conduzidos para verificar a validade e a precisão do método, comparando as curvas obtidas experimentalmente com as curvas extraídas através do monitoramento da variação de área na seção transversal do modelo numérico de elementos finitos.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Ensaio de Tração Axial: Procedimento e limitações

O ensaio de tração axial é um dos principais procedimentos na determinação das características mecânicas dos materiais metálicos. Através dele é possível obter informações importantes como a tensão limite de escoamento, resistência à tração, alongamento percentual, redução de área, tensão de ruptura e a curva de tensão-deformação de engenharia. Esta última se refere à tensão longitudinal média S eq.(2.1), calculada a partir da carga de tração P aplicada ao corpo de prova dividido pela área da seção transversal inicial A_0 . E a deformação longitudinal e eq.(2.2) é dada dividindo a variação linear média $L - L_0$ pelo comprimento útil inicial L_0 do corpo de prova:

$$S = \frac{P}{A_0} \quad (2.1)$$

$$e = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.2)$$

Entretanto a curva tensão-deformação de engenharia (fig.2.1) tem a limitação de relacionar sua tensão com o valor da área da seção transversal inicial e por isso apresenta um traçado parabólico, indicando que a tensão decresceria ao atingir o limite de resistência à tração. Mas na realidade o corpo de prova também se deforma nas direções transversais ao carregamento, respeitando o efeito de Poisson, resultando na variação da área da seção transversal mínima.

Assim é necessário relacionar a solicitação de tração aplicada com o valor da área atualizada a cada incremento de carga, o que tornará possível a construção de uma curva de tensão-deformação verdadeira, $\sigma \times \varepsilon$. Por outro lado, para metais dúcteis em virtude da formação da estrição, ocorre uma distribuição de tensões instável na região da estrição. A tensão verdadeira é dada pela eq.(2.3) e a deformação verdadeira ou deformação logarítmica pela eq.(2.4).

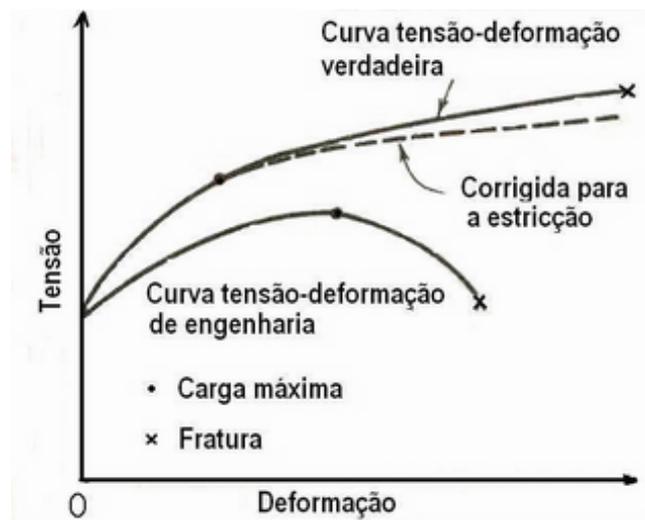


Figura 2.1: Curva de engenharia e curva de tensão-deformação verdadeira. Fonte: [17].

Segundo Souza [17], a correlação entre a deformação de engenharia e a deformação verdadeira é obtida levando-se em conta que a deformação longitudinal e juntamente com a deformação de Hencky ε são equivalentes até deformações da ordem de 0,1 e que o volume do material na região plástica permanece constante. Desta forma, o procedimento consiste em relacionar a variação de área da seção transversal com a variação do comprimento linear do corpo de prova como é mostrado abaixo:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.3)$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} \frac{A_0}{A}$$

Sabendo que : $A_0 L_0 = AL$ ou $\frac{A_0}{A} = \frac{L}{L_0}$

Assim : $\varepsilon = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right)$

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{A_0}{A}\right) \quad (2.4)$$

Para corpos de prova de seção circular feitos a partir de metais isotrópicos, a variação de área na seção transversal ocorre sem que ocorram mudanças no formato circular, ou seja, a única mudança é no raio da seção transversal mínima que diminui com o incremento de carga de tração axial.

Quando o carregamento atinge o ponto de carga máximo, inicia-se a formação da estrição (pescoço) e a introdução de um estado triaxial de tensões do corpo de prova. A partir daí, o surgimento do estado de tensões triaxiais torna necessária a correção das tensões axiais obtidas. Segundo Dieter [10], Bridgman introduziu uma equação algébrica que pode ser utilizada nestes casos para aproximar a tensão obtida para valores mais próximos da tensão axial atuante no evento real.

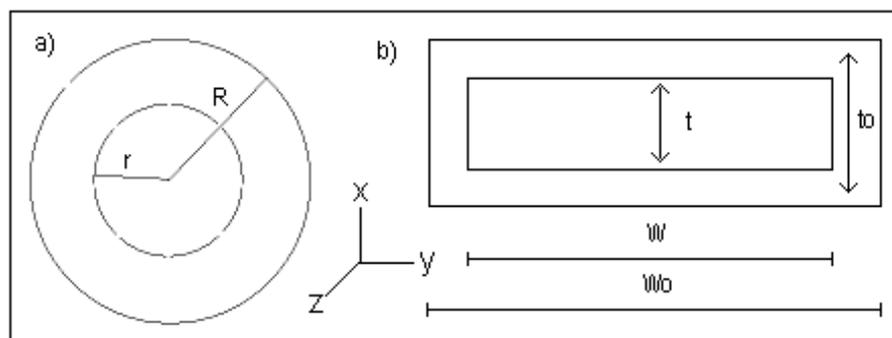


Figura 2.2: a) Variação de área na seção circular. b) Variação de área proporcional na seção retangular.

Das relações de área podemos determinar uma expressão que represente a variação de área

da seção circular dos corpos de prova tracionados, é sabido que:

$$A_0 = \pi \mathbf{R}^2 ; A = \pi r^2 \text{ e } r = \mathbf{R} - \Delta \mathbf{R}$$

então:

$$\Delta A = A_0 - A = \pi \mathbf{R}^2 - \pi (\mathbf{R} - \Delta \mathbf{R})^2$$

$$\Delta A = \pi \mathbf{R}^2 - \pi (\mathbf{R}^2 - 2\mathbf{R}\Delta \mathbf{R} + \Delta \mathbf{R}^2) =$$

$$\Delta A = \pi (\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R}\Delta \mathbf{R} - \Delta \mathbf{R}^2) =$$

$$\Delta A = \pi (2\mathbf{R}\Delta \mathbf{R} - \Delta \mathbf{R}^2)$$

portanto:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\pi (2\mathbf{R}\Delta \mathbf{R} - \Delta \mathbf{R}^2)}{\pi \mathbf{R}^2} =$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{2\mathbf{R}\Delta \mathbf{R}}{\mathbf{R}^2} - \frac{\Delta \mathbf{R}^2}{\mathbf{R}^2} =$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{2\Delta \mathbf{R}}{\mathbf{R}} - \left(\frac{\Delta \mathbf{R}}{\mathbf{R}} \right)^2 \quad (2.5)$$

sendo:

- \mathbf{R} é o raio inicial da seção transversal;
- r é o raio da seção transversal deformada;
- A_0 é área inicial da seção;
- A é área da seção deformada;
- ΔA é a variação da área da seção transversal;
- $\Delta \mathbf{R}$ é a variação do raio da seção.

A variação de área da seção retangular segue até o ponto de carregamento máximo com o mesmo padrão da variação para corpos de prova de seção circular (fig.2.2a), ou seja, ela

ocorre de forma proporcional sem que haja mudança no formato da seção transversal que irá permanecer retangular, fig.2.2b. Após ultrapassar este limite a redução de área passa a ter uma componente não-proporcional que pode ser atribuída ao encruamento ocorrido pela introdução de tensões transversais com o início da estrição, como será mostrado posteriormente.

Supondo que: $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ e a é a constante de proporcionalidade, então:

$$W_0 = at_0 \text{ e } W = at, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

assim, temos que:

$$A_0 = W_0 t_0 = at_0 t_0 = at_0^2$$

mas:

$$\Delta W = W_0 - W = a(t_0 - t) \quad (2.6)$$

$$t = t_0 - \Delta t \quad (2.7)$$

aplicando (2.6) em (2.7), a área deformada fica:

$$A = Wt = (W_0 - \Delta W)(t_0 - \Delta t) =$$

$$A = [at_0 - a(t_0 - t)](t_0 - \Delta t) =$$

$$A = at^2$$

desta forma:

$$\Delta A = A_0 - A = at_0^2 - at^2 = a[t_0^2 - (t_0 - \Delta t)^2] =$$

$$= a[t_0^2 - (t_0^2 - 2t_0\Delta t + \Delta t^2)] =$$

$$\Delta A = a(2t_0\Delta t + \Delta t^2)$$

logo,

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{a(2t_0\Delta t + \Delta t^2)}{at_0^2} =$$

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{2\Delta t}{t_0} - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)^2 \quad (2.8)$$

- W_0 é a largura inicial da seção transversal;
- W é a largura da seção transversal deformada;
- t_0 é a espessura inicial da seção transversal;
- t é a espessura da seção transversal deformada;
- A_0 é área inicial da seção;
- ΔW é a variação da largura da seção;
- Δt é a variação da espessura da seção;
- A é área da seção deformada.

No instante em que é alcançado o valor de carregamento máximo de tração, o formato da seção começa mudar por estar sofrendo influência da parcela de redução não-proporcional de área, fig.2.3. Nos ensaios de tração convencional [5] medindo-se a espessura efetiva t_e , eq.(2.9) o valor da área deformada efetiva, eq.(2.10) é calculada a cada instante. Porém como este procedimento é uma aproximação, ele pode desenvolver um considerável grau de discordância ao evento real, já que o ideal é obter o valor exato da redução de área para que a curva de escoamento seja o mais verdadeira possível.

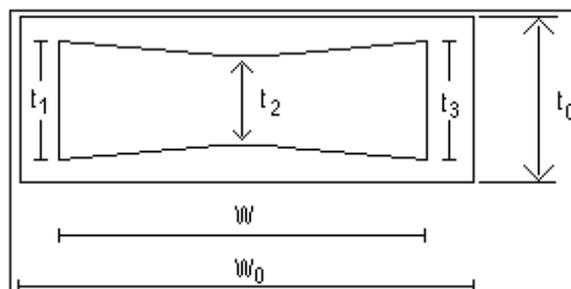


Figura 2.3: Deformação de área não-proporcional.

$$t_e = \frac{t_1 + 4t_2 + t_3}{6} \quad (2.9)$$

$$A_e = W_e t_e \quad (2.10)$$

O valor da largura efetiva W_e é calculado de forma análoga à espessura efetiva t_e e assim, segundo a norma norte-americana ASTM E-8M [5], é obtido o valor da área efetiva A_e para se determinar a variação da área na seção transversal mínima.

Outros métodos de medição empregam equipamentos mais sofisticados que possuem capacidade de registrar a evolução da variação da área da seção transversal, como o medidor cônico de raios e o projetor de contorno. Porém tais procedimentos tornam demasiadamente onerosa e, portanto pouco acessível a determinação da área deformada a cada incremento de carga. Segundo Souza [17], atualmente a determinação da curva de escoamento, por se tratar de um procedimento difícil, está confinado ao ambiente de pesquisa e de estudo de novos materiais. Situação que poderia se reverter com a simplificação dos métodos para a determinação destas propriedades.

2.2 Efeitos do Entalhe

Uma das propriedades inerentes aos metais é a capacidade de encruamento, que de maneira geral aumenta o valor da tensão necessária capaz de produzir um acréscimo de deformação dentro do regime plástico, [17]. Em contrapartida a esse fenômeno é verificada uma diminuição gradual da seção transversal do corpo de prova a medida que ocorre o alongamento do metal submetido a tração. A estrição é uma deformação localizada e começa a se formar ao ser atingida a carga máxima de tração, onde o aumento de tensão devido à diminuição da seção transversal se torna maior que o efeito de encruamento do material, ou seja, o metal continua a encruar, mas não de forma tão intensa para compensar a redução da seção transversal.

Assim é formada uma região de instabilidade de deformação que impossibilita o metal de encruar o suficiente para elevar a carga a fim de continuar a deformação ao longo do corpo de prova. Forma-se então uma deformação localizada na região da estrição que em última instância levará à ruptura do corpo de prova.

Segundo Dieter [10], uma descontinuidade geométrica como um entalhe ou um furo propicia o aparecimento de distribuição de tensões não-uniformes nas suas adjacências. Isto se deve ao fato do entalhe gerar uma concentração de tensão ao seu redor e por isso a tensão média nas adjacências é maior do que em pontos localizados fora da região entalhe. Para quantificar o fenômeno na região elástico-linear é definido o fator de concentração de tensão teórico K_t , eq.(2.11). Este fator relaciona a tensão máxima $\sigma_{m\acute{a}x}$ dividida pela tensão nominal $\sigma_{nominal}$ na seção resistente líquida ou seção reduzida. Porém outros autores que definem a tensão nominal seja baseada em toda a seção reta do componente numa região onde não exista um concentrador de tensão.

$$K_t = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_{nominal}} \quad (2.11)$$

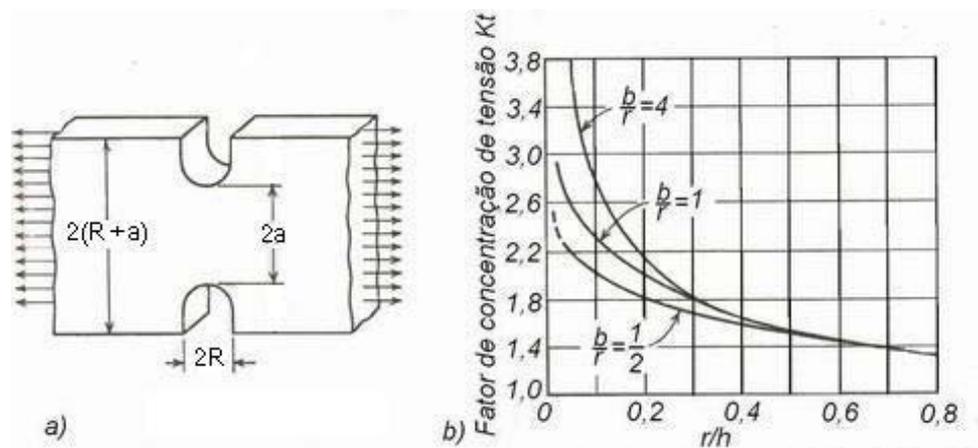


Figura 2.4: O gráfico mostra o comportamento do fator de concentração de tensão K_t em relação à geometria do corpo de prova. Fonte: [10].

Os elevados gradientes de tensão que se fazem presentes num entalhe também implicam na existência de acentuados gradientes de deformação. Apesar de não existir um método analítico para determinar a sua distribuição local de deformações num material que esteja sofrendo encruamento, a aproximação de Neuber [15] é muito útil para quantificar o fator de concentração de deformação K_ϵ , eq.(2.12).

$$K_\epsilon \cdot K_\sigma = K_t^2 \quad (2.12)$$

sendo:

- K_ε é o fator de concentração de deformação;
- K_σ é o fator de concentração de tensões no regime plástico;
- K_t é o fator de concentração de tensões no regime elástico.

Então o efeito do entalhe é produzir uma alta deformação localizada que com o conseqüente encruamento pode levar à produção de alvéolos que podem se transformar em trincas. Como o volume encruado plasticamente nos arredores do entalhe é pequeno, a concentração de deformações permite a fratura sem que haja necessidade de muito trabalho plástico. Também é importante lembrar que a taxa de deformação local será muito mais elevada que a taxa de deformação média.

O efeito de um concentrador de tensões (entalhe) se apresenta de forma mais proeminente em materiais frágeis do que em materiais dúcteis, pois nos materiais dúcteis, quando a tensão de escoamento é excedida ocorre a plastificação do material. Então um incremento de carga fará com que ocorra um aumento local da deformação na região tencionada que resultará num acúmulo de tensões nesta região em virtude de encruamento do material e se o material for dúctil o suficiente, a distribuição retornará a ser uniforme. Entretanto para materiais frágeis, com a ausência da redistribuição de tensões nas proximidades do entalhe, o valor de K_σ nestes materiais será bem próximo ao valor teórico, que deverá permanecer elevado.

No ensaio de tração axial é fundamental que a formação da estrição ocorra na região central do corpo de prova, caso contrário os valores obtidos podem não ser adequadamente representativos. Então, de acordo com Zhang *et al* [24], a fim de garantir que a estrição se forme exatamente no meio do corpo de prova serão feitos entalhes que reduzirão a largura dos corpos de prova e serão responsáveis pelo acúmulo de tensão nessa região. Contudo, é importante observar que os entalhes deverão ser pequenos o suficiente para que não acelerem excessivamente o processo de plastificação do material.

Resumindo, o entalhe ou concentrador de tensões encaminha o processo para a ruptura dúctil produzindo altas tensões localizadas e introduzindo um estado triaxial de tensões, sendo também responsável pela produção de alto encruamento localizado que propicia a formação de fissurações e um significativo aumento localizado da taxa de deformação.

2.3 Tensões e deformações no entalhe

Quando um elemento entalhado está tensionado elasticamente é possível produzir altos valores de tensão nas proximidades do entalhe. Essas tensões podem exceder a tensão de escoamento do material produzindo pequenas zonas plásticas. A distribuição de tensões dependerá fundamentalmente de como a deformação está ocorrendo, se num estado plano de tensão ou num estado plano de deformação, por exemplo.

Para ilustrar a distribuição de tensões elásticas numa placa fina, Dieter [10] fez uma analogia para este fenômeno imaginando uma série de pequenos corpos de prova na ponta do entalhe, sendo σ_{11} a tensão na direção do carregamento axial. Então se cada um dos corpos de prova fosse capaz de se deformar livremente, ele sofreria uma deformação ε_{11} em resposta ao valor local de σ_{11} . Mas como o valor de σ_{11} decresce rapidamente conforme se afasta da ponta do entalhe, existirá então um gradiente de deformação plástica abaixo do entalhe. Além do mais, cada deformação de tração ε_{11} estará associada com uma contração lateral ε_{22} devido ao efeito de Poisson. E ainda se todos os pequenos corpos de prova fossem livres para se deformar independentemente dos seus vizinhos com a relação $\varepsilon_{11} = -\nu \varepsilon_{22}$, então haveria uma ruptura de todas as interfaces dos pequenos corpos de prova.

Para evitar que isso aconteça e manter a continuidade, deve existir uma tensão trativa σ_{22} que é aumentada ao se distanciar do entalhe, mas diminui quando esta distância fica muito grande, pois a diferença na deformação longitudinal entre os elementos adjacentes se torna menor e a distribuição de σ_{11} se abranda para valores maiores que no eixo principal X_1 .

No estado plano de tensões a tensão axial de carregamento σ_{22} que começa com valores acentuadamente elevados vai decrescendo ao longo do eixo principal X_2 . A existência de tensões transversais eleva o valor da tensão longitudinal σ_{11} na qual ocorre o escoamento.

No estado plano de deformações ($\varepsilon_{33} = 0$), o escoamento tem início na extremidade do entalhe, simplesmente porque na superfície livre a tensão transversal (σ_{22}) é nula. Mas logo após o entalhe, a tensão longitudinal resultante é definida por $\sigma_{11} = \sigma_0 + \sigma_{22}$, figura 2.5.

A distribuição de tensões principais muda drasticamente quando o escoamento localizado ocorre na ponta do entalhe, o valor da tensão longitudinal σ_{11} cai para o valor da tensão de escoamento σ_0 como mostra a figura 2.5.

Quando o primeiro elemento do entalhe escoar ocorrerá a plastificação em volume constante

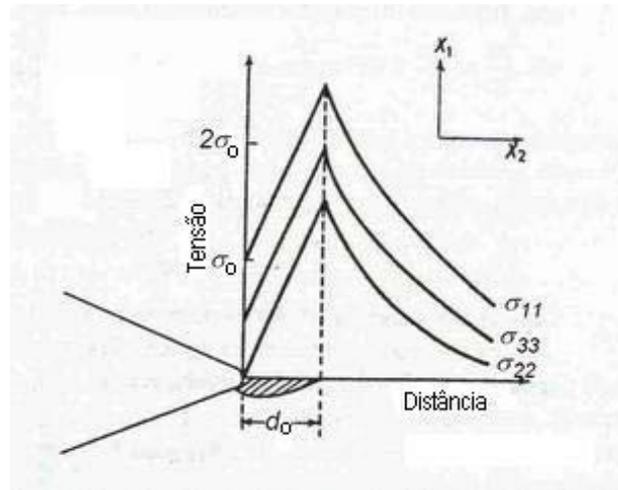


Figura 2.5: Distribuição esquemática de tensões ao redor do entalhe para o estado plano de deformações. Fonte[23].

com o coeficiente de Poisson $\nu = 0,5$ ao invés do valor elástico, $\nu = 0,3$. Desta forma, a tensão transversal σ_{22} fica maior do que no caso elástico e por isso valores mais elevados para a tensão transversal serão necessários para manter a coesão das interfaces do elemento. Por causa disto, conforme a zona plasticada se afasta da ponta da trinca em direção ao centro do corpo de prova, o valor da tensão longitudinal σ_{11} cresce de acordo com a equação (2.18), lembrando que o valor máximo da tensão transversal se encontrará na interface elasto-plástica.

A solução de problemas envolvendo deformações elásticas atuando em conjunto com deformações plásticas ao redor de entalhes no estado plano de tensões torna-se complicada, pois a compatibilidade entre elas deve ser respeitada. As relações entre incrementos de deformação plástica serão mostradas posteriormente, e no caso das deformações elásticas, as tensões deverão ser relacionadas de acordo com as equações (2.13) mostradas abaixo.

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{11} \text{ e } \sigma_{12} = \mu\tau_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}; \\ \sigma_{22} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{22} \text{ e } \sigma_{23} = \mu\tau_{23} = 2\mu\varepsilon_{23}; \\ \sigma_{31} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{31} \text{ e } \sigma_{31} = \mu\tau_{31} = 2\mu\varepsilon_{31}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

sendo:

- λ é a constante de Lamé;

- μ é o módulo de cisalhamento;
- Δ é deformação volumétrica originada pela soma das deformações principais ε_1 , ε_2 e ε_3 .

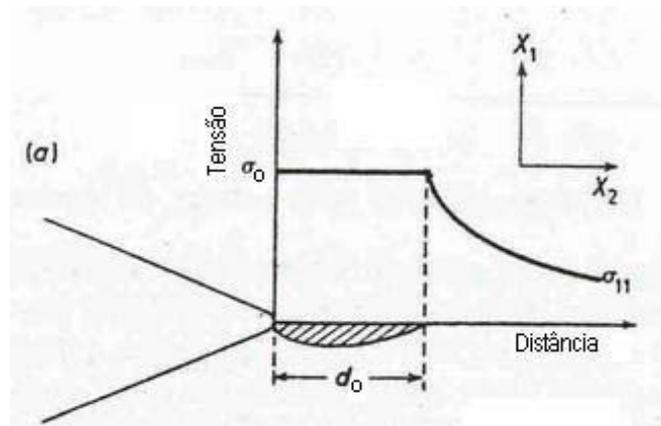


Figura 2.6: Distribuição de tensões num estado plano de tensões. Fonte: [23].

No estado plano de tensões (figura 2.6), a menor tensão principal σ_{33} está localizada na direção da espessura e o escoamento ocorre nos planos localizados a 45° dos eixos principais X_1 e X_3 . O critério de Tresca garante que o escoamento se desenvolve quando a tensão de cisalhamento máxima é igual ao valor crítico da constante τ_{11} através da zona plástica, onde τ_{11} é a tensão cisalhante e σ_{11} é a tensão uniaxial, como mostra a equação (2.16):

$$\text{Estado plano de tensões} \quad : \quad \sigma_{33} = 0 \quad (2.14)$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{33} = 2\tau_{11} = \sigma_0 \quad (2.15)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_0 \quad (2.16)$$

$$\text{Estado plano de deformações} \quad : \quad \varepsilon_{33} = 0 \quad (2.17)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_0 + \sigma_{22} \quad (2.18)$$

Segundo Knott [23], no desenvolvimento de soluções analíticas para deformação rígido-plástica é muito comum considerar as componentes elásticas nulas. Uma das formas mais aceitas para descrever o desenvolvimento da zona plástica ao redor de um entalhe circular é através das linhas de escorregamento (slip-lines). As linha de escorregamento que englobam dois tipos de arranjos distintos e ortogonais entre si, que são as linhas de tensão de cisalhamento constante

τ_0 e as linhas de descontinuidade de velocidades (velocity discontinuities) que satisfazem as condições de equilíbrio, condições de contorno e condições de compatibilidade do problema.

A introdução das linhas de escorregamento é muito útil para compreender como é feito o cálculo da carga de escoamento generalizado em corpos de prova entalhados. Por exemplo, o corpo de prova mostrado na figura 2.7 onde a seção mínima é limitada por dois entalhes circulares de raio R nas extremidades e $2(R+a)$ é a largura nominal do corpo de prova localizada na região não entalhada.

Integrando a equação (2.19) dada por [23] que é utilizada para calcular a tensão principal σ_{11} ao longo da largura a e espessura t entre os entalhes, tem-se a equação (2.20) para calcular o valor da carga de colapso plástico, P_{cp} .

$$\sigma_{11} = \sigma_0 \left[1 + \ln \left(1 + \frac{x}{R} \right) \right] \quad (2.19)$$

$$P_{cp} = 2\sigma_0 a t \left[1 + \frac{2R}{a} \right] \ln \left[1 + \frac{a}{2R} \right] \quad (2.20)$$

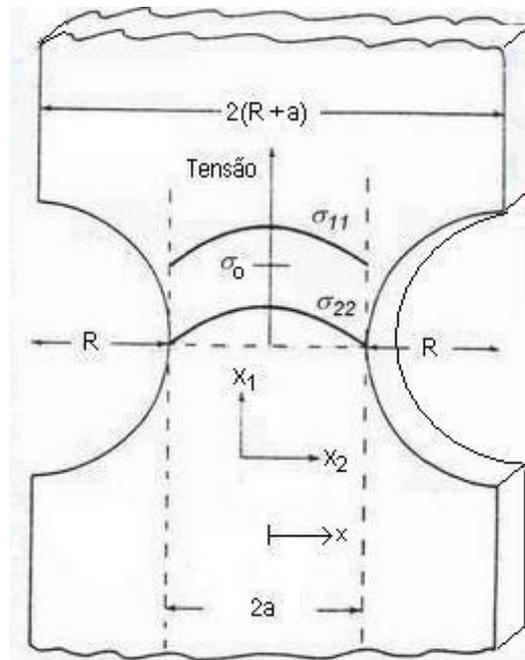


Figura 2.7: Distribuição da tensão longitudinal σ_{11} e da tensão transversal σ_{22} ao longo de um corpo de prova externamente entalhado no estado plano de deformação. Fonte: [23].

Pode-se observar na figura 2.7 que pela distribuição da tensão longitudinal σ_{11} e da tensão transversal σ_{22} as tensões de tração máximas e as tensões hidrostáticas máximas se concentram no centro do corpo de prova. Portanto é correto afirmar que o valor da tensão média calculada a partir do valor da carga de tração dividida pelo valor da área da seção transversal é mais elevada do que o valor da tensão axial verdadeira. Aronofsky [3], apresentou estudos que ilustram a distribuição das tensões na estrição em corpos de prova da chapa através da comparação paramétrica com resultados obtidos em corpos de prova de seção circular, na qual concluiu que existe equivalência entre os resultados obtidos pelos corpos de prova de seção circular e retangular para os mesmos materiais.

A fim de corrigir o valor da tensão média, Bridgman propôs uma variação da equação (2.20) baseada em análises matemáticas que resultaram na equação (2.21). Conforme Bridgman, seria necessário o acompanhamento da evolução do raio de curvatura da estrição e a diminuição da distância entre as extremidades da estrição, fato que torna a relação $a/2R$ de fundamental importância. Entretanto, quantificar a variação destes parâmetros só seria possível por meio de fotografias ou medição por raio laser.

Bridgman apresentou ainda uma fórmula empírica para descrever $a/2R$, porém ela se mostrou eficiente apenas para o aço. Em 1981 Le Roy *et al* [13] propôs uma fórmula empírica, eq.(2.22) mais abrangente para descrever o comportamento da relação $a/2R$, o que serviu para simplificar o uso da equação de Bridgman, eq.(2.21) na correção da tensão axial média.

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{média}}}{\left(\frac{1+2R}{a}\right) \left[\ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right)\right]} \quad (2.21)$$

Fórmula empírica apresentada por Le Roy *et al*:

$$\frac{a}{2R} = 0,555(\varepsilon - \varepsilon_{Q_{\text{máx}}}) \quad (2.22)$$

sendo:

- σ é a tensão verdadeira corrigida;
- $\sigma_{\text{média}}$ é a tensão média na estrição;
- R é o raio de curvatura da estrição;
- a é a largura entre o centro do corpo de prova e a borda da estrição;

- ε é a deformação verdadeira a cada passo de carga;
- $\varepsilon_{Q_{m\acute{a}x}}$ é o valor da deformação verdadeira correspondente à carga máxima Q de tração.

Entretanto Bridgman, ao propor a equação (2.21), fez algumas observações [10], são elas:

1. O contorno da estrição é aproximadamente um arco de círculo;
2. O critério de início de escoamento de von Mises é aplicável;
3. As deformações são constantes na seção transversal da estrição;
4. A seção transversal permanece circular durante o ensaio.

Assim, a correção de Bridgman seria aplicável somente para corpos de prova com seção transversal circular. Mas Zhang *et al* [24] demonstrou que se a variação de área puder ser calculada para corpos de prova com diferentes relações de forma, as curvas de tensão média-deformação verdadeira serão exatamente as mesmas.

Desta forma o procedimento de correção da tensão média através da equação de Bridgman (eq.2.21) pode ser realizado para corpos de prova de chapa apresentando resultados equivalentes aos obtidos com corpos de prova de seção circular.

2.4 Teoria da Plasticidade

Plasticidade é um fenômeno não-conservativo que depende do histórico de comportamento das deformações [16]. Em outras palavras, a sequência na qual os carregamentos são aplicados e as deformações plásticas são obtidas, afetam os resultados finais da solução do problema envolvendo plasticidade. Portanto o tensor de tensões deixa de ser função apenas do valor instantâneo da deformação.

2.4.1 Função constitutiva incremental

Considerando um modelo dependente de um histórico de tensão-deformação qualquer, a solução do problema do valor constitutivo inicial para uma determinada configuração de condições iniciais, é normalmente desconhecida para caminhos de deformação complexos $\varepsilon(t)$. Dessa

forma, o uso de um algoritmo numérico apropriado para integrar equações de taxas constitutivas torna-se essencial na simulação por elementos finitos de problemas envolvendo tais modelos.

A escolha de uma técnica em particular para a integração de uma relação constitutiva dependerá das características do modelo considerado. Em geral, algoritmos para integração de equações de taxas constitutivas são obtidos adaptando algum tipo de discretização no tempo (ou pseudo-tempo), junto com hipóteses sobre o caminho de deformações entre intervalos de tempo adjacentes.

Ainda no contexto da teoria puramente mecânica, se for considerado um intervalo de tempo $[te_n, te_{n+1}]$ e uma dada configuração α_n de variáveis internas em te_n , o tensor de deformações ε_{n+1} no tempo te_{n+1} determinará a tensão σ_{n+1} através da integração do algoritmo numérico. Esse algoritmo define então uma função constitutiva incremental $\hat{\sigma}$ para o tensor de tensões:

$$\sigma_{n+1} = \hat{\sigma}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1}) \quad (2.23)$$

sendo:

te_n é o tempo em n ;

te_{n+1} é o tempo em $n + 1$;

ε_{n+1} é o tensor de deformações;

σ_{n+1} é o tensor de tensões em $n + 1$;

$\hat{\sigma}$ é a função constitutiva incremental para o tensor de tensões.

O resultado obtido por σ_{n+1} , se encaminhará para a solução exata do problema evolutivo atual desaparecendo com os incrementos de pequenas deformações. A relação constitutiva numérica é não-linear no geral e dependente do histórico de deformações a cada incremento, por isso para cada incremento de tensão σ_{n+1} há uma função de deformação ε_{n+1} , analogamente à lei de elasticidade não-linear. O algoritmo de integração também define uma relação constitutiva incremental similar para as variáveis internas do modelo:

$$\alpha_{n+1} = \hat{\alpha}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1}) \quad (2.24)$$

2.4.2 Problema de condição de contorno incremental

Com a definição de uma relação constitutiva incremental genérica, é possível então estabelecer uma versão discretizada para o problema de condição de contorno incremental através do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Então, dada uma configuração α_n de variáveis internas no tempo te_n , é definido um campo de deslocamentos $u_{n+1} \in K_{n+1}$ tal que:

$$\int_{\Omega} [\hat{\sigma}(\alpha_n, \nabla^s u_{n+1}) : \nabla^s \eta - b_{n+1} \cdot \eta] dv - \int_{\partial\Omega_t} t_{n+1} \cdot \eta da = 0 \quad (2.25)$$

para qualquer $\eta \in V_{n+1}$ no tempo te_{n+1} , sendo:

- η é o deslocamento virtual;
- b_{n+1} é a força de corpo;
- t_{n+1} é o vetor de tensão na superfície.
- K_{n+1} é definido por:

$$K_{n+1} = \{u : \Omega \rightarrow U \mid u = \bar{u}_{n+1} \text{ em } \partial\Omega_u\} \quad (2.26)$$

sendo \bar{u}_{n+1} o deslocamento prescrito no tempo te_{n+1} .

2.4.3 Equação de Elementos Finitos (EF) não-linear incremental

Depois da discretização da eq.(2.25) por elementos finitos o problema se reduz a descobrir um vetor de deslocamentos u_{n+1} que satisfaça à equação de equilíbrio de EF incremental:

$$r(u_{n+1}) \equiv f^{int}(u_{n+1}) - f_{n+1}^{ext} = 0 \quad (2.27)$$

sendo que o vetor de forças internas $f^{int}(u_{n+1})$ e o vetor de forças externas f_{n+1}^{ext} do elemento descritos como:

$$f_{(e)}^{int} = \int_{\Omega(e)} B^T \hat{\sigma}(\alpha_n, \varepsilon(u_{n+1})) dv \quad (2.28)$$

$$f_{(e)}^{ext} = \int_{\Omega(e)} N^T b_{n+1} dv + \int_{\partial\Omega_{te}(e)} N^T b_{n+1} da \quad (2.29)$$

A equação (2.27) é não-linear e a fonte dessa não-linearidade é a não-linearidade da função constitutiva incremental que ocorre na definição do vetor de forças internas acima.

O carregamento proporcional é caracterizado pela força de corpo e os vetores de tensão na superfície, em instante te_{n+1} arbitrário, por:

$$b_{n+1} = \lambda_{n+1} \bar{b} \quad (2.30)$$

$$t_{n+1} = \lambda_{n+1} \bar{t} \quad (2.31)$$

O fator de carregamento λ_{n+1} é determinado para o instante te , juntamente com os campos prescritos \bar{b} e \bar{t} , constantes no tempo. Neste caso, o vetor de forças externas global fica reduzido:

$$f_{n+1}^{ext} = \lambda_{n+1} \bar{f}^{ext} \quad (2.32)$$

e \bar{f}^{ext} é computado no início do procedimento incremental, como a união de todos os vetores de elemento:

$$f_{(e)}^{ext} = \int_{\Omega(e)} N^T \bar{b} dv + \int_{\partial\Omega_{te}(e)} N^T \bar{t} da \quad (2.33)$$

2.4.4 Plasticidade independente de taxas

Plasticidade independente de taxas é caracterizada pela irreversibilidade das deformações que ocorrem num determinado material uma vez que um certo nível de tensão é atingido. É presumido que as deformações plásticas se desenvolvam instantaneamente independente do tempo, ou seja, independentemente das taxas de deformação e tensão.

Existem três quesitos fundamentais na teoria de plasticidade independente de taxas, são eles: Limite de escoamento, regra de escoamento e regra de encruamento.

2.4.5 Limite de escoamento

O limite de escoamento é o nível de tensão no qual o escoamento é iniciado. Para tensões definidas por mais de uma componente, ele é representado como uma função de componentes individuais $f(\{\sigma\})$, que pode ser interpretado como uma tensão equivalente, σ_e :

$$\sigma_e = f(\{\sigma\}) \quad (2.34)$$

Quando a tensão equivalente atingir a tensão de escoamento uniaxial σ_0 , no escoamento isotrópico, o material irá deformar-se plasticamente. Por outro lado, se σ_e for inferior a σ_0 o material permanecerá no regime elástico e as tensões se desenvolverão de acordo com as relações tensão-deformação elásticas. Deve-se notar que a tensão equivalente nunca poderá exceder o limite de escoamento sem que ocorram deformações plásticas instantaneamente, reduzindo os níveis de tensão para a tensão de escoamento.

$$f(\{\sigma\}) = \sigma_0 \quad (2.35)$$

2.4.6 Regra de escoamento

A regra de escoamento do material determina a direção em que a deformação plástica se desenvolverá e a sua intensidade, é representada por:

$$\{d\varepsilon^{pl}\} = \kappa \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.36)$$

sendo:

- κ é o coeficiente plástico (que indica qual o montante de deformação plástica);
- Q é a função da tensão em termos do potencial plástico (que determina a direção da deformação plástica).

Se Q for função do escoamento, como normalmente é pressuposta, a regra de escoamento é tomada como associativa e a deformação plástica ocorre na direção normal à superfície de escoamento.

2.4.7 Regra de encruamento

A regra de encruamento descreve as mudanças na superfície de escoamento durante o desenvolvimento do escoamento, estabelecendo assim as condições para o escoamento subsequente.

Existem dois modelos típicos para descrever a regra de encruamento: Encruamento isotrópico e encruamento cinemático, figura 2.8. No encruamento isotrópico, a região central da superfície de escoamento permanece localizada no centro do eixo de tensões principais e irá expandir-se na mesma proporção em que as deformações plásticas se desenvolvam. Por outro lado, no encruamento cinemático, a superfície de escoamento permanece com tamanho constante e ao passo que o escoamento prossegue, a superfície irá transladar-se no espaço de tensões.

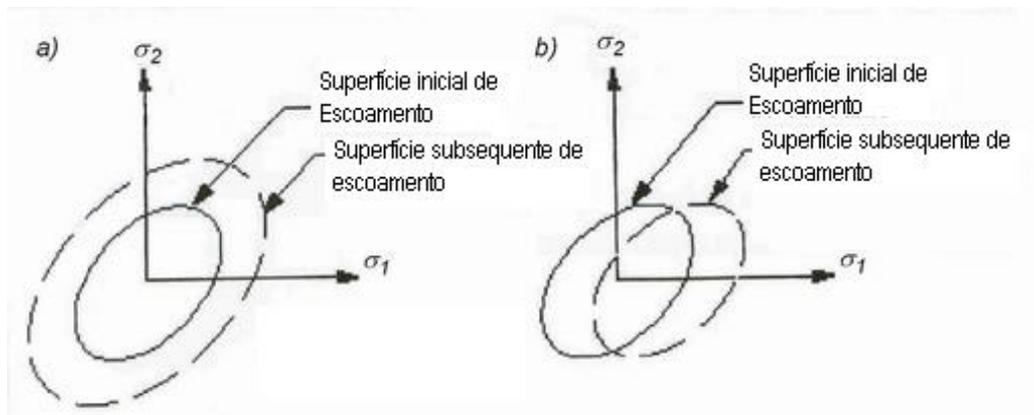


Figura 2.8: a) superfície de escoamento isotrópico. b) superfície de escoamento cinemático. Fonte:[23].

2.4.8 Incremento de deformação plástica

Como foi visto anteriormente, se a tensão equivalente computada através das propriedades elásticas exceder o limite de escoamento do material, então deverão ocorrer deformações plásticas. Neste caso, as deformações plásticas reduzem o estado de tensões para que o limite de escoamento seja respeitado.

A regra de encruamento determina que um limite de tensão evolua juntamente com o encruamento e dessa forma ocorre o escoamento do material. Assim se forem incorporadas essas propriedades na eq.(2.35) rearranjando-as, temos:

$$f(\sigma, \alpha) = 0 \quad (2.37)$$

sendo que $\{\alpha\}$ é o vetor de translação da superfície de escoamento.

A translação da superfície de escoamento é também dependente do histórico e é dada por:

$$\{\alpha\} = \int C\{d\varepsilon^{pl}\} \quad (2.38)$$

sendo:

- C é parâmetro característico do material;
- $d\varepsilon^{pl}$ é o incremento de deformação plástica
- $\{\alpha\}$ indica a localização do centro da superfície de escoamento (back stress).

O incremento de deformação total pode ser dividido em duas componentes: incremento de deformação elástica e de deformação plástica. Portanto podemos descrever o incremento de deformação elástica como a diferença entre o incremento de deformação total e o incremento de deformação plástica, eq.(2.39), e desta forma estabelecer uma relação entre o incremento de tensão e o incremento de deformação elástica, eq.(2.40):

$$\{d\varepsilon^{el}\} = \{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^{pl}\} \quad (2.39)$$

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon^{el}\} \quad (2.40)$$

2.4.9 Formulação de Elementos Finitos

O algoritmo do pacote comercial de EF utilizado neste estudo para o cálculo do incremento de deformação plástica segue os seguintes passos:

1. A tensão σ'_0 que iniciará o escoamento subsequente do material é determinada através da eq.(2.35) para o passo de tempo atual, em geral é tomada a tensão de escoamento na temperatura em que o corpo se encontra no momento, mas no caso particular deste estudo a variação de temperatura não foi levada em conta.

2. As tensões são computadas com base na deformação-guia $\{\varepsilon^g\}$, que será definida como a diferença entre a deformação total e a deformação plástica no tempo anterior, sendo ignorados quaisquer efeitos devidos à temperatura e demais fatores.

$$\{\varepsilon_n^g\} = \{\varepsilon_n\} - \{\varepsilon_{n-1}^{pl}\} \quad (2.41)$$

Os índices sobrescritos referem-se à notação e os subscritos ao passo no tempo. Como todos os termos estão definidos para o mesmo passo no tempo, eles podem ser omitidos. E a tensão-guia é obtida através de:

$$\{\sigma^g\} = [D] \{\varepsilon^g\} \quad (2.42)$$

3. Através da equação(2.34) são obtidos os valores da tensão equivalente σ_e . Se σ_e for inferior à tensão para o escoamento subsequente σ'_0 , então o material estará no regime elástico e nenhum incremento de deformação plástica será computado.

4. Se a tensão exceder para o escoamento subsequente σ'_0 do material, um coeficiente plástico κ será determinado utilizando o processo iterativo de Newton-Raphson.

5. O incremento de deformação plástica $\{\Delta\varepsilon^{pl}\}$ é aproximado por:

$$\{d\varepsilon^{pl}\} = \kappa \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.43)$$

6. Então a deformação plástica é atualizada.

$$\{\varepsilon_n^{pl}\} = \{\varepsilon_{n-1}^{pl}\} + \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \quad (2.44)$$

$$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon^g\} - \{\Delta\varepsilon^{pl}\} \quad (2.45)$$

sendo:

- ε_n^{pl} é a deformação plástica atual;
- ε^{el} é a deformação elástica computada.

7. A localização do centro da superfície de escoamento $\{\Delta\alpha\}$, que será atualizada por:

$$\{\alpha_n\} = \{\alpha_{n-1}\} + \{\Delta\alpha\} \quad (2.46)$$

sendo que o índice $n - 1$ refere-se ao passo de tempo anterior.

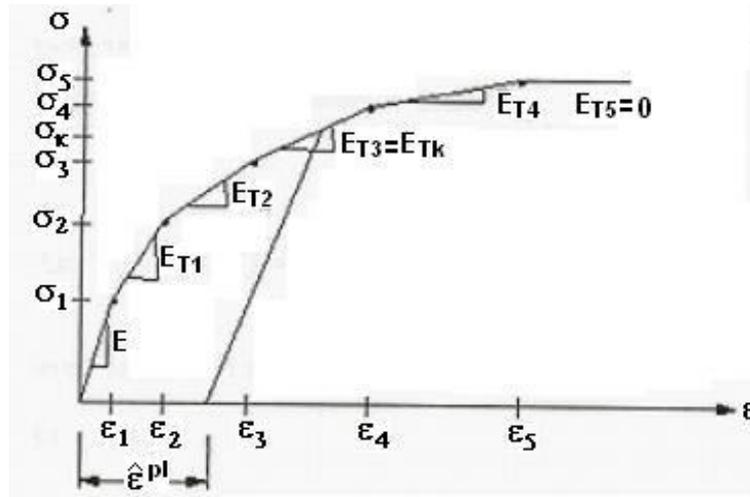


Figura 2.9: Determinação de σ_k no encruamento isotrópico multi-linear. Fonte [2].

8. O parâmetro N representa uma taxa de tensão, que indicará escoamento para valores iguais ou maiores que 1, e naturalmente, os valores menores que 1 indicam que o material permanece no estado elástico.

$$N = \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \quad (2.47)$$

sendo que os valores da tensão equivalente σ_e são calculados utilizando as tensões-guia σ^g , [2].

9. O incremento de deformação plástica equivalente é calculado por:

$$\Delta \hat{\varepsilon}^{pl} = \left(\frac{2}{3} \{ \Delta \varepsilon^{pl} \}^T [M] \{ \Delta \varepsilon^{pl} \} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.48)$$

A deformação plástica equivalente e os parâmetros de tensão equivalente são desenvolvidos de acordo com a opção de encruamento utilizado, que no caso deste estudo foi o modo de Encruamento Isotrópico Multi-linear (figura 2.9). Esta opção utiliza o critério de von Mises associado com a regra de escoamento e o encruamento isotrópico.

A tensão equivalente utilizada na regra de escoamento é calculada por:

$$\sigma_e = \left[\frac{3}{2} \{S\}^T [M] \{S\} \right]^{\frac{1}{2}}$$

a regra de escoamento RE é definida por:

$$RE = \left[\frac{3}{2} \{S\}^T [M] \{S\} \right]^{\frac{1}{2}} - \sigma_k = 0$$

O vetor de tensão deviatória $\{S\}$ dado pela equação(2.49), o escoamento é independente do estado de tensão hidrostática. Dessa forma, no encruamento isotrópico, σ_k é uma função do trabalho de encruamento realizado.

$$\{S\} = \{\sigma\} - \sigma_h [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.49)$$

$$\sigma_h = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.50)$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon^{el}\} \quad (2.51)$$

sendo:

- σ_h a tensão hidrostática;
- σ_k a tensão para o escoamento subsequente do passo atual;
- σ_x a tensão na direção do eixo x;
- σ_y a tensão na direção do eixo y;
- σ_z a tensão na direção do eixo z;
- $\{\sigma\}$ o tensor de deformação elástica;
- $[D]$ a matriz de tensão-deformação do elemento.

2.5 Formulação para grandes deformações

Quando as deformações em um dado material excedem algo em torno de 0,01, as mudanças da geometria devido a essas deformações não podem mais ser desprezadas.

Os tipos de análises capazes de descrever esses efeitos são chamadas de análises para Grandes Deformações ou análises de Deformações Finitas. A teoria para Grandes Deformações pode ser entendida definindo-se algumas grandezas físicas básicas (movimento e deformação) e suas correspondentes relações matemáticas.

O carregamento aplicado atuante em um corpo qualquer faz com que ele se movimente de uma posição a outra. Esta movimentação pode ser definida pelo estudo do vetor de posição na configuração deformada e indeformada. Sendo vetores de posição no estado deformado e indeformado sejam representados por $\{x\}$ e $\{X\}$, respectivamente, fig.2.10. Então o vetor de movimento (deslocamentos) $\{u\}$ é calculado através de:

$$\{u\} = \{x\} - \{X\} \quad (2.52)$$

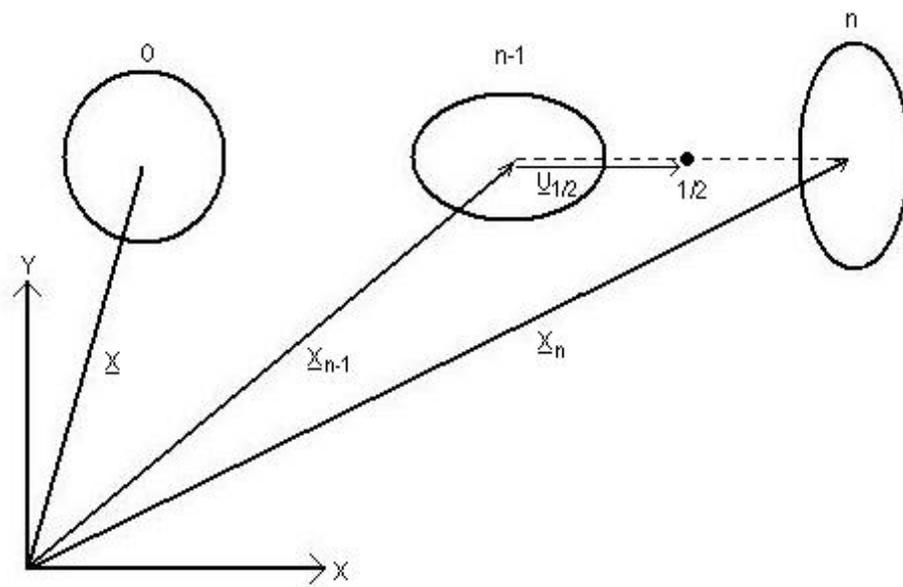


Figura 2.10: Configuração inicial, média e final.

O gradiente de deformação é definido pela expressão:

$$[F] = \frac{\delta \{x\}}{\delta \{X\}} \quad (2.53)$$

que também pode ser escrito em termos do deslocamento através da equação(2.52), sendo $[I]$ a matriz identidade:

$$[F] = [I] \frac{\delta \{x\}}{\delta \{X\}} \quad (2.54)$$

A informação contida no gradiente de deformação $[F]$ inclui mudança de volume, rotação e mudanças de formato no corpo deformado. A variação de volume a cada ponto é dada por:

$$\frac{dV}{dV_0} = \det [F] \quad (2.55)$$

sendo:

- V_0 o volume inicial;
- V o volume modificado a cada instante;
- $\det [F]$ o determinante do gradiente de deformação.

O gradiente de deformação pode ainda ser separado em mudança de forma e rotação usando o teorema de decomposição à direita:

$$[F] = [R] [U] \quad (2.56)$$

sendo:

- $[R]$ é o tensor de rotação ($[R]^T [R] = [I]$);
- $[U]$ é o tensor de alongamento, também conhecido como tensor de Cauchy-Green à direita.

O teorema da decomposição polar à direita, eq.(2.56) extrai a rotação $[R]$ que representa a rotação média do material em um dado ponto. E uma vez conhecido o tensor de alongamento, a deformação logarítmica ou medida de deformação de Hencky é definida por:

$$[\varepsilon] = \ln [U] \quad (2.57)$$

Mas $[\varepsilon]$ é apresentada na forma tensorial ao invés de forma vetorial usual $\{\varepsilon\}$, e como $[U]$ é um tensor de 2ª ordem a equação(2.57) pode ser reescrita através da decomposição espectral do tensor $[U]$.

$$[\varepsilon] = \sum_{i=1}^3 \ln \nu_i \{\varepsilon_i\} \{\varepsilon_i\}^T \quad (2.58)$$

sendo:

- ν_i os auto-valores do tensor $[U]$ (alongamentos principais);
- $\{\varepsilon_i\}$ os auto-vetores do tensor $[U]$ (direções principais).

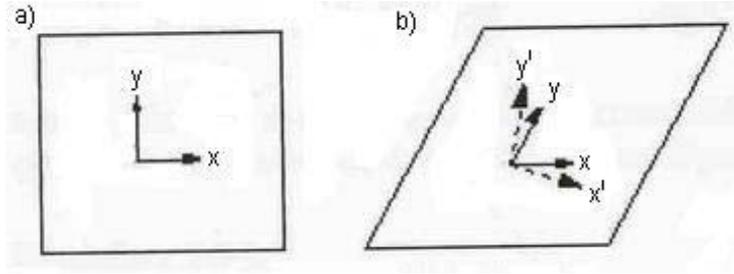


Figura 2.11: a) Estado plano indeformado. b) Estado plano deformado. Fonte: [2].

2.5.1 Implementação computacional

A implementação computacional para obtenção dos valores da deformação logarítmica, eq.(2.57) é feita através do seguinte procedimento de aproximação incremental:

$$[\varepsilon] = \int d[\varepsilon] \approx \sum [\Delta\varepsilon_n] \quad (2.59)$$

O incremento de deformação de Hencky é definido como o logaritmo neperiano do incremento do tensor de alongamento, tem-se:

$$[\Delta\varepsilon_n] = \ln[\Delta U] \quad (2.60)$$

e $[\Delta U_n]$ é calculado através do gradiente de deformação incremental. Analogamente $[\Delta F_n]$ é calculado pela equação (2.61), onde $[F_n]$ é o gradiente de deformação do passo atual de tempo e $[F_{n-1}]$ é o gradiente do passo anterior, e

$$[\Delta F_n] = [\Delta R_n] [\Delta U_n] \quad (2.61)$$

$$[\Delta F_n] = [F_n] [F_{n-1}]^{-1} \quad (2.62)$$

$[\Delta\varepsilon_n]$ é o incremento de deformação de rotação no passo de tempo. Para encontrar o valor de $[\Delta\varepsilon_n]$ será utilizada uma aproximação de cálculo de 2ª ordem, [12].

$$[\Delta\varepsilon_n] = [R_{1/2}]^T [\Delta\tilde{\varepsilon}_n] [R_{1/2}] \quad (2.63)$$

O incremento de deformação $\{\Delta\tilde{\varepsilon}_n\}$ também é calculado a partir da configuração intermediária:

$$\{\Delta\tilde{\varepsilon}_n\} = [B_{1/2}] \{\Delta u_n\} \text{ e } \{X_{1/2}\} = \frac{1}{2} (\{X_n\} + \{X_{n-1}\}) \quad (2.64)$$

O tensor de rotação $[R_{1/2}]$ é obtido da decomposição polar à direita do gradiente de deformação no ponto médio, nela $[F_{1/2}]$ pode ser reescrito no formato da eq.(2.54)

$$[F_{1/2}] = [R_{1/2}] [U_{1/2}] \quad (2.65)$$

assim como:

$$[F_{1/2}] = [I] + \frac{\partial \{u_{1/2}\}}{\partial \{X\}} \quad (2.66)$$

sendo que o deslocamento do ponto médio é dado pela eq.(2.67), onde $\{u_n\}$ é o deslocamento no passo atual de tempo e $\{u_{n-1}\}$ no deslocamento do passo anterior:

$$\{u_{1/2}\} = \frac{1}{2} (\{u_n\} + \{u_{n-1}\}) \quad (2.67)$$

Portanto a deformação é atualizada pelo incremento de deformação $\{\Delta\varepsilon_n\}$:

$$\{\varepsilon_n\} = \{\varepsilon_{n+1}\} + \{\Delta\varepsilon_n\} \quad (2.68)$$

Este método fornece uma excelente aproximação para a deformação de Hencky se os passos de deformação forem menores que 10%. Este é o método de aproximação utilizado em sólidos 2-D, 3-D e pelos elementos de casca no pacote comercial de elementos finitos utilizado para análise de grandes deformações neste estudo.

2.5.2 Formulação do elemento

As matrizes do elemento e os vetores de carga são obtidos utilizando uma formulação Lagrangeana atualizada que produz as seguintes equações:

$$[\bar{K}_i] \Delta u_i = \{F^{ap}\} - \{F^{nr}\} \quad (2.69)$$

sendo que a matriz tangencial $[\bar{K}_i]$ tem a forma:

$$[\bar{K}_i] = [K_i] + [S_i] \quad (2.70)$$

e $[K_i]$ é a matriz de rigidez usual e é obtida através de:

$$[K_i] = \int [B_i]^T [D_i] [B_i] d(vol) \quad (2.71)$$

sendo $[B_i]$ a matriz de deformação-deslocamentos em termos da geometria atual de $\{X_n\}$ e $[D_i]$ é a matriz de tensão-deformação atual.

$[S_i]$ é a contribuição de enrijecimento por tensão, simbolicamente descrito como:

$$[S_i] = \int [G_i]^T [\tau_i] [G_i] d(vol) \quad (2.72)$$

$[G_i]$ é uma matriz de função de forma deviatória e $[\tau_i]$ é o tensor de tensões de Cauchy atual, no sistema de coordenadas cartesianas global.

Finalmente, a componente de Newton-Raphson da força é calculada por:

$$[F^{nr}] = \int [B_i]^T [\sigma_i] d(vol) \quad (2.73)$$

2.6 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson possui algumas variações, e neste estudo será abordado o algoritmo na versão completa (Full Newton-Raphson Method). Devido às suas taxa quadráticas de convergência anisotrópica, ele tende a ser relativamente mais robusto e eficiente na solução de equações incrementais de elementos finitos não-lineares.

Uma iteração k no método de Newton-Raphson consiste em resolver a versão linearizada da equação de equilíbrio incremental para um vetor de deslocamento da iteração, [16].

$$K_T \delta u^{(k)} = -r^{(k-1)} \quad (2.74)$$

Sendo que o vetor residual $r^{(k-1)}$ é definido como a diferença entre as forças internas e

externas:

$$r^{(k-1)} = f^{int}(u_{n+1}^{(k-1)}) - f_{n+1}^{ext} \quad (2.75)$$

e K_T é a matriz de rigidez tangencial global,

$$K_T = \frac{\delta r}{\delta r_{n+1}} \Big|_{u_{n+1}^{(k-1)}} \quad (2.76)$$

de posse da solução $\delta u^{(k)}$ do sistema linear, é possível aplicar a correção de Newton para o deslocamento global,

$$u_{n+1}^{(k)} = u_{n+1}^{(k+1)} + \delta u^{(k)} \quad (2.77)$$

Na figura 2.12 está representado um esquema ilustrativo do funcionamento do método de Newton-Raphson. Nele é possível verificar que o processo iterativo se repete até que após uma iteração m , o critério de convergência é satisfeito por respeitar uma tolerância de convergência de equilíbrio ϵ_{tol} suficientemente pequena.

$$\frac{|r^{(m)}|}{f_{n+1}^{ext}} \leq \epsilon_{tol} \quad (2.78)$$

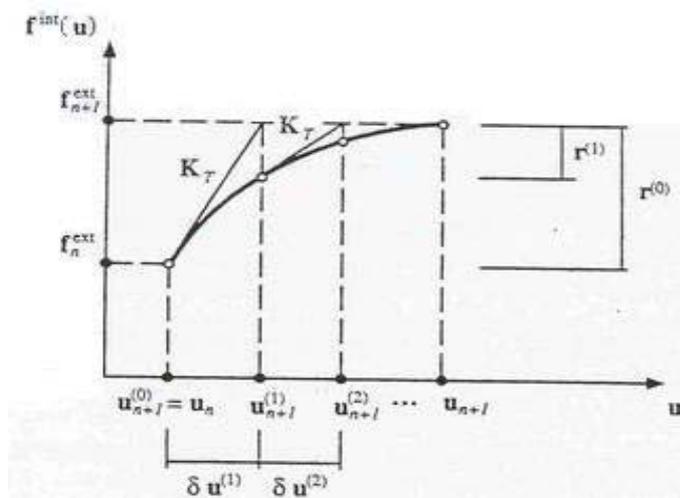


Figura 2.12: Algoritmo de Newton-Raphson para a equação de equilíbrio de elementos finitos incremental. Fonte: [16].

Desta forma o vetor de deslocamentos correspondente, $u_{n+1}^{(m)}$, é tomado como uma solução

suficientemente próxima da equação incremental de elementos finitos não-lineares, eq.(2.79):

$$u_{n+1} = u_{n+1}^{(m)} \quad (2.79)$$

Para iniciar o processo iterativo é necessário ainda uma estimativa inicial, $u_{(n+1)}^{(0)}$, que normalmente é tomada como sendo o vetor de deslocamentos convergido no final do incremento anterior a este, eq.(2.80):

$$u_{(n+1)}^{(0)} = u_n \text{ ou } u_{(n+1)}^{(0)} = 0 \quad (2.80)$$

2.7 Método de Arc-Length

No estudo de casos nos quais a configuração de equilíbrio por elementos finitos do sistema se caracteriza pela instabilidade logo após alcançar um determinado grau de deslocamento, como a perda de estabilidade por flambagem e os fenômenos de snap-through e snap-back.

É de fundamental importância a utilização de técnicas para a previsão do comportamento do par conjugado carga-deslocamento (λ, u) , afim de não comprometer a configuração de equilíbrio do sistema. Nestes casos o esquema de elementos finitos usual para controle de carga (load-controlled), onde o vetor de deslocamentos é descrito a partir de um fator de carga prescrito deixa de ser válido para níveis de deslocamento além de um ponto A , como indicado na fig.2.13.

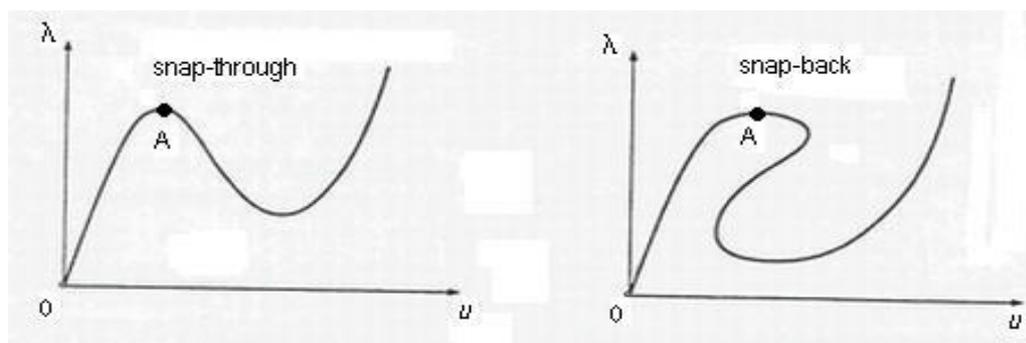


Figura 2.13: Equilíbrio instável: Comportamento de snap-through e snap-back. Fonte: [16].

Nesse sentido o método mais popularmente empregado é o método de Arc-Length. O método consiste basicamente em adicionar uma restrição extra na equação do argumento residual para limitar o comprimento da solução incremental. Ser considerado um intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$ e definido o fator de carga incremental $\Delta\lambda$ como sendo:

$$\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad (2.81)$$

Reescrevendo a equação de equilíbrio de elementos finitos e permitindo que o fator de carga incremental $\Delta\lambda$ seja uma variável, é definida a equação como sendo:

$$r(u_{n+1}, \Delta\lambda) \equiv f^{int}(u_{n+1}) - (\lambda_n + \Delta\lambda)f^{ext} = 0 \quad (2.82)$$

O método de Arc-Length possui dois modelos para determinar o comprimento l da solução incremental prescrita, a esférica e a cilíndrica. Na forma esférica, a equação de equilíbrio apresenta-se com a seguinte configuração:

$$\Delta u^T \Delta u + \Delta\lambda^2 \psi^2 \bar{f}^{extT} \bar{f}^{ext} - l^2 = 0 \quad (2.83)$$

sendo Δu e $\Delta\lambda$ são as grandezas incrementais convergidas, l é o comprimento de solução prescrita e ψ é o parâmetro de escala prescrito.

Já no método de Arc-Length na forma cilíndrica o parâmetro de escala ψ é tido como zero e a equação de restrição é reescrita simplesmente como:

$$\Delta u^T \Delta u = l^2 \quad (2.84)$$

Neste caso, a equação de restrição exige que a norma Euclidiana do deslocamento incremental convergido seja l , dessa forma a solução de equilíbrio no final do incremento ficará na intersecção entre o caminho da solução (solution path) e o círculo de raio l no espaço de deslocamentos nodais (cilindro no espaço $\lambda - u$) bem no centro da configuração de equilíbrio u_n localizada no início do incremento. A representação gráfica do método é mostrada na figura 2.14 para um sistema com dois graus de liberdade e as possíveis intersecções estão indicadas nos pontos A e B do gráfico.

De posse do comprimento l , é possível obter uma configuração de equilíbrio envolvendo u e $\Delta\lambda$ capaz de satisfazer a equação residual eq.(2.82) utilizando a forma esférica eq.(2.83) ou cilíndrica eq.(2.84) do método de Arc-Length.

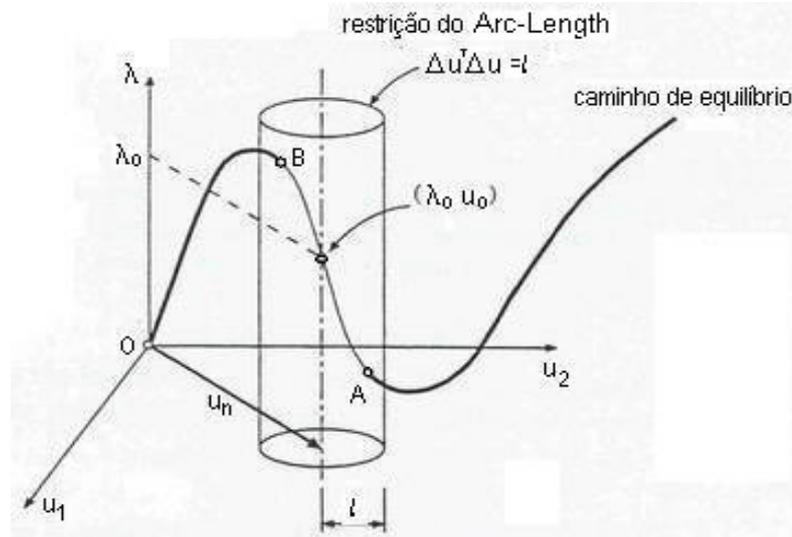


Figura 2.14: Método de Arc-Length cilíndrico. Fonte: [16].

2.8 Método de Newton-Raphson/Arc-Length combinado

O método de Newton-Raphson associado ao método de Arc-Length se caracteriza basicamente pela solução linearizada da eq.(2.82), combinada à restrição do Arc-Length na determinação do comprimento do raio de solução no caminho de equilíbrio do problema não-linear. Para a versão cilíndrica do método de Arc-Length, o sistema linearizado a ser resolvido afim de determinar o deslocamento incremental $\delta u^{(k)}$ e o fator de carga incremental $\delta \lambda^{(k)}$ na k -ésima iteração de Newton fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} K_T(u^{(k-1)}) & -\bar{f}^{ext} \\ 2\Delta u^{(k-1)T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u^{(k)} \\ \delta \lambda^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r(u^{(k-1)}, \Delta \lambda^{(k-1)}) \\ \Delta u^{(k-1)T} \Delta u^{(k-1)} - l^2 \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

aqui $n + 1$ foi suprimido por conveniência de notação.

Por medida de conveniência ao invés de resolver o sistema de equações (2.85), pode-se adotar o chamado esquema não-consistente, onde o sistema original a ser solucionado a cada iteração é substituído pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} K_T(u^{(k-1)}) & -\bar{f}^{ext} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u^{(k)} \\ \delta \lambda^{(k)} \end{Bmatrix} = -r(u^{(k-1)}, \Delta \lambda^{(k-1)}) \quad (2.86)$$

$$\Delta u^{(k)T} \Delta u^{(k)} = l^2$$

Nas iterações do sistema de equações(2.85), a restrição do Arc-Length garante suporte apenas nas soluções já convergidas. Já para o caso do esquema não-consistente, a restrição do Arc-Length é reforçada a cada iteração. E nos dois casos, os esquemas iterativos convergem para soluções de equilíbrio $\{\Delta\lambda, u\}$ idênticas. Assim, da equação(2.85)₁ temos que:

$$\delta u^{(k)} = \delta u^* + \delta\lambda\delta\bar{u} \quad (2.87)$$

sendo que δu^* é o deslocamento iterativo determinado através do método de Newton-Raphson para o esquema de carregamento controlado:

$$\delta u^* = -K_T^{-1}r^{(k-1)} \quad (2.88)$$

$\delta\bar{u}$ é a chamada solução tangencial definida por:

$$\delta\bar{u} = -K_T^{-1}\bar{f}^{ext} \quad (2.89)$$

A substituição do k -ésimo incremento de deslocamento $\delta u^{(k)}$ na equação do deslocamento, seguida pelo reforço da equação de restrição(eq.2.85)₂ resulta numa equação quadrática para o fator de carga iterativo $\delta\lambda^{(k)}$:

$$a\delta\lambda^{(k)2} + b\delta\lambda^{(k)} + c = 0 \quad (2.90)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} a &= \delta\bar{u}^T\delta\bar{u} \\ b &= 2(\Delta u^{(k-1)} + \delta u^*)^T\delta\bar{u} \\ c &= (\Delta u^{(k-1)} + \delta u^*)^T(\Delta u^{(k-1)} + \delta u^*) - l^2 \end{aligned} \quad (2.91)$$

Durante o processo iterativo o fator de carga é escolhido normalmente como a solução da equação quadrática que proporciona o ângulo mínimo localizado entre $\Delta u^{(k-1)}$ e $\Delta u^{(k)}$, [16].

O k -ésimo incremento de carga, $\delta\lambda^{(k)}$, é a solução da equação (2.90) que fornecerá o máximo valor do produto $\Delta u^{(k)T}\Delta u^{(k-1)}$, como é mostrado a seguir:

$$\delta\lambda^{(k)} = \arg \left[\max_{\delta\tilde{\lambda}|a\delta\lambda^{(k)2}+b\delta\lambda^{(k)}+c=0} \left\{ \left(\Delta u^{(k-1)} + \delta u^* + \delta\tilde{\lambda}\delta\tilde{u} \right)^T \Delta u^{(k-1)} \right\} \right] \quad (2.92)$$

sendo que o fator de carga incremental é atualizado por:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)} \quad (2.93)$$

2.8.1 Determinação do previsor de solução

Quando $k = 1$, o critério definido pela eq.(2.93) não pode ser utilizado para determinar uma raiz apropriada $\delta\lambda^{(k)}$, pois a estimativa inicial $\Delta u^{(0)} = 0$, não contém informação alguma a respeito de qual caminho está sendo seguido no momento pelo procedimento iterativo. Logo, é possível definir os possíveis valores do incremento de carga $\delta\lambda^{(1)}$ deste preditor de solução como:

$$\delta\lambda^{(1)} = \pm \frac{l}{\sqrt{\delta\tilde{u}^T \delta\tilde{u}}} \quad (2.94)$$

A escolha do sinal do fator de carga iterativo é fundamental para sucesso da técnica do cumprimento do caminho a ser seguido, a fim de manter o equilíbrio do processo, porque se uma escolha errada for tomada, o preditor de solução irá percorrer o traçado inverso ao sentido do caminho atual quando se deparar com um ponto de bifurcação no sentido do traçado de equilíbrio, [16]. Para escolher qual sinal de $\delta\lambda^{(1)}$ que segue na direção correta do traçado existem muitos critérios diferentes, a seguir estão listados as versões mais conhecidas:

(a) Determinante da matriz de rigidez (Stiffness determinant):

Neste critério, o sinal segue o mesmo sentido pelo determinante da matriz de rigidez, $|K^T(u^{(0)})|$, ou seja:

$$\text{Sinal}(\delta\lambda^{(1)}) = \text{Sinal}(|K^T(u^{(0)})|) \quad (2.95)$$

Este critério é largamente utilizado em pacotes comerciais de elementos finitos nas situações onde não se apresentem bifurcações no traçado de equilíbrio, pois na presença destas, é sabido

que o método tende a falhar na maioria dos casos. Este comportamento falho é decorrente da possibilidade de mudança do sinal de $|K^T|$ ao atravessar um ponto limitante ou um ponto de bifurcação qualquer. Neste caso, o preditor não consegue distinguir a diferença entre estas duas situações sem que análises complementares sejam conduzidas. Caso contrário, ao invés percorrer o traçado de equilíbrio, a solução ficará oscilando ao redor do ponto de bifurcação, [16].

(b) Trabalho Incremental (Incremental work):

$$\text{Sinal}(\delta\lambda^{(1)}) = \text{Sinal}(\delta\bar{u}^T \bar{f}^{ext}) \quad (2.96)$$

Este critério não "enxerga" os pontos de bifurcação e, portanto continua no traçado de equilíbrio seguindo o mesmo sinal do preditor de trabalho incremental. Contudo, este critério é ineficaz se o traçado da curva apresentar trechos decrescentes causados pela deflexão no sentido do carregamento, como acontece no caso de problemas envolvendo o fenômeno de snap-back.

Uma característica importante em comum aos critérios (a) e (b) é o fato de funcionarem exclusivamente com informações referentes ao último ponto de equilíbrio. Então a decisão se o incremento de carga $\delta\lambda$ será positivo ou negativo ocorre sem levar em consideração o histórico do caminho de equilíbrio no momento. Situações como estas podem resultar em previsões errôneas da direção do traçado de equilíbrio.

(c) Caminho Secante (Secant Path):

$$\text{Sinal}(\delta\lambda^{(1)}) = \text{Sinal}(\Delta u_n^T \delta\bar{u}) \quad (2.97)$$

Diferentemente dos critérios anteriores, o critério do caminho secante garante que o incremento de deslocamento Δu_n leve em consideração o histórico do caminho de equilíbrio corrente, dessa maneira ele transpassa facilmente pelos obstáculos enfrentados pelos critérios citados anteriormente.

Para uma melhor compreensão das vantagens deste critério é necessário o entendimento da sua interpretação geométrica no processo de determinação do traçado do caminho de equilíbrio. Inicialmente é necessário compreender o significado da solução tangencial proporcionada pelo vetor de deslocamentos $\delta\bar{u}$. Como é possível observar na fig.2.15, $\delta\bar{u}$ é um vetor tangente ao caminho de equilíbrio no espaço de deslocamentos e conforme a sua definição é dada pela

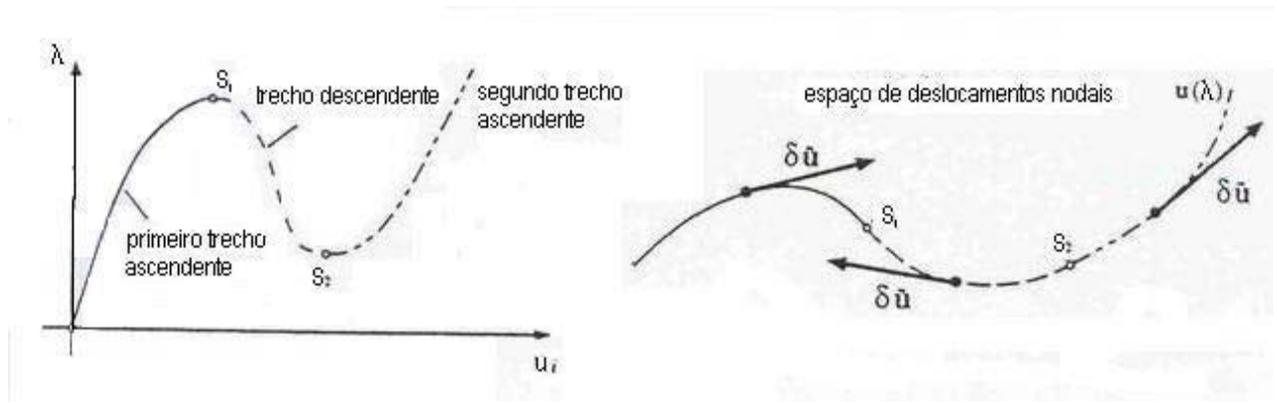


Figura 2.15: Solução tangencial, $\delta \bar{u}$. Fonte: [16].

equação (2.89), ele aponta na direção positiva do gradiente λ . Então $\delta \bar{u}$ fornece informações sobre a direção ao longo da qual o carregamento aumenta (direção associada à escolha de $\delta \lambda$ positivo).

É importante notar que $\delta \bar{u}$ não é definido nos pontos de reversão do carregamento (pontos S_1 e S_2 na fig.2.15) onde a matriz K^T é singular. Por outro lado, o deslocamento incremental Δu_n é secante ao caminho de equilíbrio e se ele for suficientemente pequeno, proporcionará uma boa aproximação para a curva no intervalo $[t_n, t_{n+1}]$. Em outras palavras, Δu_n fará a aproximação do histórico do caminho de equilíbrio corrente no dentro do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$.

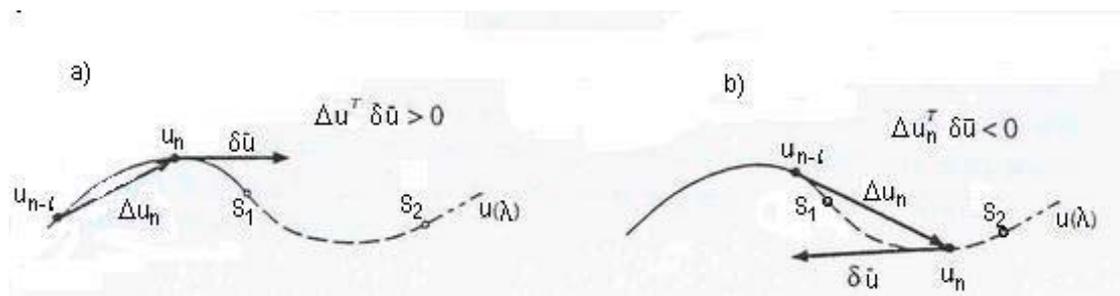


Figura 2.16: O critério do predictor de direção do caminho secante. a) O fator de carregamento é crescente, escolhendo $\delta \lambda > 0$; b) O fator de carregamento é decrescente, escolhendo $\delta \lambda < 0$. Fonte: [16].

Na figura 2.16 está uma representação esquemática onde é possível enxergar claramente que quando Δu_n é suficientemente pequeno, ele indica que a direção do caminho da solução em u_n é para frente. Para que o traçado do caminho continue progressivo, ou seja, sem retornar a pontos obtidos anteriormente, o critério requer que o incremento de deslocamento do predictor

de solução $\delta\lambda\delta\bar{u}$ permaneça com direção progressiva. Então:

$$\delta\lambda\Delta u_n^T\delta\bar{u} > 0 \quad (2.98)$$

A inequação acima é equivalente à inequação (2.97) pois na sua essência, se o produto de $\Delta u_n^T\delta\bar{u}$ for positivo isto indica que o valor do carregamento está crescendo e por isso um valor positivo para $\delta\lambda$ deveria ser definido afim de fazê-lo com que continue a seguir o caminho de equilíbrio (fig.2.16a). Da mesma forma, se o produto de $\Delta u_n^T\delta\bar{u}$ for negativo (fig.2.16b), o valor de $\delta\lambda$ também deverá ser negativo para que inequação (2.97) seja respeitada.

Em suma, o critério do caminho secante não é sensível à presença de bifurcações e se o incremento de deslocamento Δu_n for suficientemente pequeno, o critério não apresentará as deficiências dos critérios associados ao sinal da matriz de rigidez $|K^T|$. Nos casos onde houver ocorrência de trechos decrescentes devido ao fenômeno de snap-back, o previsor do caminho secante indicará que o carregamento estará decrescendo ($\delta\lambda$ negativo), transpondo assim as deficiências associadas ao critério de previsor do Trabalho Incremental.

Portanto garantir que o vetor de deslocamento incremental Δu_n seja suficientemente pequeno é extremamente importante para a veracidade da procedimento, no que se refere à obediência a uma direção progressiva ao percorrer o caminho de equilíbrio do sistema. Nesse sentido, é importante lembrar que o próprio algoritmo do método de Newton-Raphson já se encarrega de providenciar um limite máximo para Δu_n .

Se o raio de convergência do método de Newton-Raphson for inferior ao valor máximo de Δu_n , definido para produzir uma previsão confiável da direção, então não será necessária mais que nenhuma restrição quanto ao tamanho do incremento seja feita pelo critério de previsão pelo caminho secante. De fato, experimentos numéricos mostram que o tamanho do incremento máximo é geralmente determinado pelo próprio algoritmo do método de Newton-Raphson em detrimento às restrições impostas pelo critério do previsor de direção.

Capítulo 3

Materiais e métodos

3.1 Análise Numérica Proposta

A análise numérica foi conduzida com o propósito de simular o comportamento de um corpo de prova usinado a partir de chapa fina de material isotrópico, ao ser solicitado à tração, levando em consideração os efeitos de não-linearidade envolvidos no processo tais como: grandes deformações, formação de estrição e plasticidade. O objetivo é uma correlação entre a variação da espessura e a variação da área na seção transversal mínima e assim, viabilizar o cálculo da curva tensão-deformação verdadeira em corpos de prova de chapa fina.

Para isso foi necessário lançar mão de um software comercial de elementos finitos com capacidade para simular o comportamento do corpo de prova solicitado à tração axial.

3.1.1 Equipamento utilizado

Simular um corpo de prova pode parecer simples, porém o comportamento não-linear do corpo de prova eleva o custo computacional para este tipo de simulação. Assim, foi imprescindível empregar uma máquina capaz de realizar esta análise a contento. Segue abaixo a descrição dos equipamentos utilizados para a análise numérica:

- Micro-computador (processador AMD Athlon XP-2200 e 1.0GB de RAM);
- Software comercial de Elementos Finitos ANSYS release 7.0.

3.1.2 Método

- Definição das características mecânicas dos materiais: Nesta fase foram definidos o coeficiente de Poisson, Módulo de elasticidade, limite de escoamento e as curvas de encruamento para cada material.
- Definição geométrica dos corpos de prova: As dimensões dos corpos de prova foram definidas seguindo critérios observados em estudos publicados em revistas especializadas e normas técnicas nacionais e internacionais.
- Definição do tipo de elemento: Dentre as opções disponíveis pelo ANSYS 7.0 foi escolhido um elemento adequado para a realização da análise, SOLID 95.
- Definição de malha de elementos finitos: Foram simuladas várias configurações de malhas para avaliar qual delas fornecia melhor relação custo-benefício em termos do tempo de processamento e precisão.
- Definição dos parâmetros do método de Arc-Length: O valor de carga e comprimento de arco foram determinados com critérios semelhantes aos utilizados na definição da malha de elementos finitos.
- Monitoramento da área: Para monitorar o comportamento da área da seção transversal mínima foi necessário desenvolver um algoritmo para mapear os nós localizados na seção transversal e através de seus deslocamentos, foi possível calcular o valor da área a cada passo de carga.
- Cálculo das parcelas de variação proporcional e não-proporcional de área: Através do relacionamento entre a área total e suas parcelas proporcional e não-proporcional, foi possível quantificar a influência de cada parcela durante o desenvolvimento da estrição.
- Normalização das propriedades extraídas do modelo: Normalização da variação de área não-proporcional em relação à relação de forma na seção transversal, para representar o efeito da geometria dos corpos de prova. Normalização em função da deformação no carregamento máximo, relacionando características geométricas com as propriedades mecânicas do material.

- Formulação proposta da equação de redução de área: A partir das relações obtidos na análise numérica, é proposta uma formulação para o monitoramento durante ensaios experimentais da variação de área em corpos de prova de chapa fina.
- Ajuste das curvas de tensão real através da correção de Bridgman.

3.1.3 Materiais

Foram analisados materiais isotrópicos com encruamento independente de taxas, para os quais a regra de encruamento pode ser descrita através de um único parâmetro n , equação (3.1) que é uma variação do modelo de Ramberg-Osgood.

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}_p}{\varepsilon_0} \right)^n \quad (3.1)$$

sendo:

- $\bar{\varepsilon}_p$ = Deformação plástica equivalente;
- $\bar{\sigma}$ = Tensão correspondente à deformação plástica equivalente;
- σ_0 = Tensão de referência;
- ε_0 = Deformação de referência;
- n = Expoente de encruamento.

No desenvolvimento do modelo foram idealizados quatro tipos diferentes de material, mas foi definido que eles possuiriam os mesmos valores para o coeficiente de Poisson ν , tensão limite de escoamento σ_0 e módulo de elasticidade E .

A relação entre o módulo de elasticidade e a tensão limite de escoamento σ_0 foi estabelecida em $E/\sigma_0 = 500$ [24] e o coeficiente de Poisson definido como $\nu = 0,3$. Já o expoente de encruamento assumiu valores iguais a 0,05, 0,10, 0,15 e 0,20. Assim o parâmetro que efetivamente caracteriza os materiais é o expoente de encruamento n e a partir dele foi possível obter quatro curvas de encruamento diferentes (fig.3.1), para conseqüentemente, obter propriedades distintas relativas à formação de estrição e outros fatores correlatos como a variação de área proporcional, variação de área não-proporcional, valor de carga máxima e valor carga referente à redução de 50% da espessura.

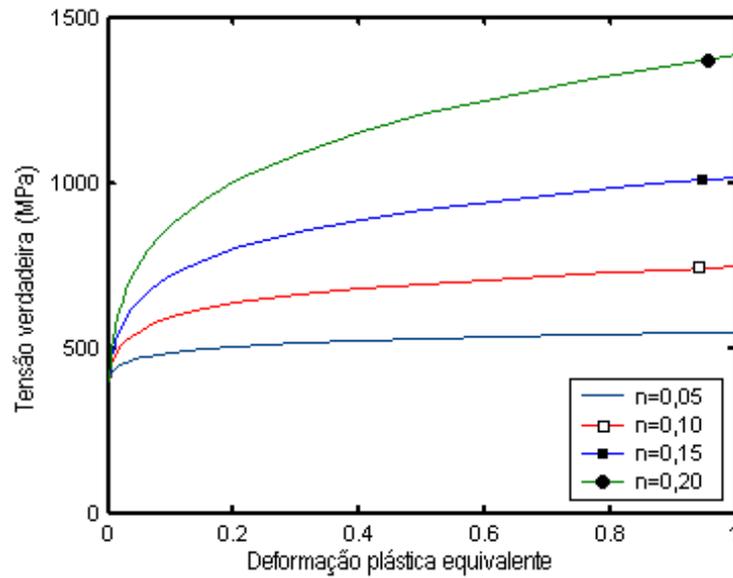


Figura 3.1: Curvas de escoamento obtidas através da equação (3.1).

3.1.4 Corpos de prova

As dimensões dos corpos de prova analisados foram determinadas seguindo os critérios observados no estudo realizado por Zhang *et al* [24] e nas normas técnicas ASTM E-8M [5], ASTM A-370 [4] e NBR-6152 [1]. Todas as medidas de largura L e comprimento C dos corpos de prova estão relacionadas com espessura t do corpos de prova, assim a largura dos corpos de prova é definida por meio de um coeficiente de relação de forma RF que assume valores de $RF = 2, 3, 4, 5$ e 8 .

O comprimento útil é definido como sendo $C = 24 * t$ para valores de RF variando de 2 a 5 e $C = 40 * t$ para $RF = 8$. Desta maneira, é mantida uma taxa comprimento/largura suficiente para satisfazer os critérios de proporcionalidade sugeridos nas normas técnicas consultadas. A tabela 1. trás um resumo das características geométricas dos cinco tipos de corpos de prova utilizados na simulação numérica.

Tabela 1. Resumo da geometria dos corpos de prova.

Relação de Forma	2	3	4	5	8
Espessura (mm)	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
Largura (mm)	3	4,5	6	7,5	12
Comprimento (mm)	36	36	36	36	60

Para garantir que o acúmulo de tensão ocorra na região central do corpo de prova, foram feitos 2 pequenos entalhes com profundidade inicial da ordem de 0,4% da largura do corpo de prova e raio de $12*t$. Testes mostram que a influência de entalhes dessa dimensão são suficientes apenas para promover o acúmulo de tensão que acelerará o processo de plastificação no local sem que os resultados obtidos sejam distorcidos por conta disto, [24].

O corpo de prova foi modelado para reproduzir da forma mais fiel possível o caso real, mas para isso foi necessário estimar alguns parâmetros para que o esforço computacional não tornasse o processo muito caro. Neste ponto, o fato do corpo de prova ser simétrico contribui muito, pois assim o modelo pôde ser simplificado a 1/8 do seu formato original como mostra a figura 3.2.

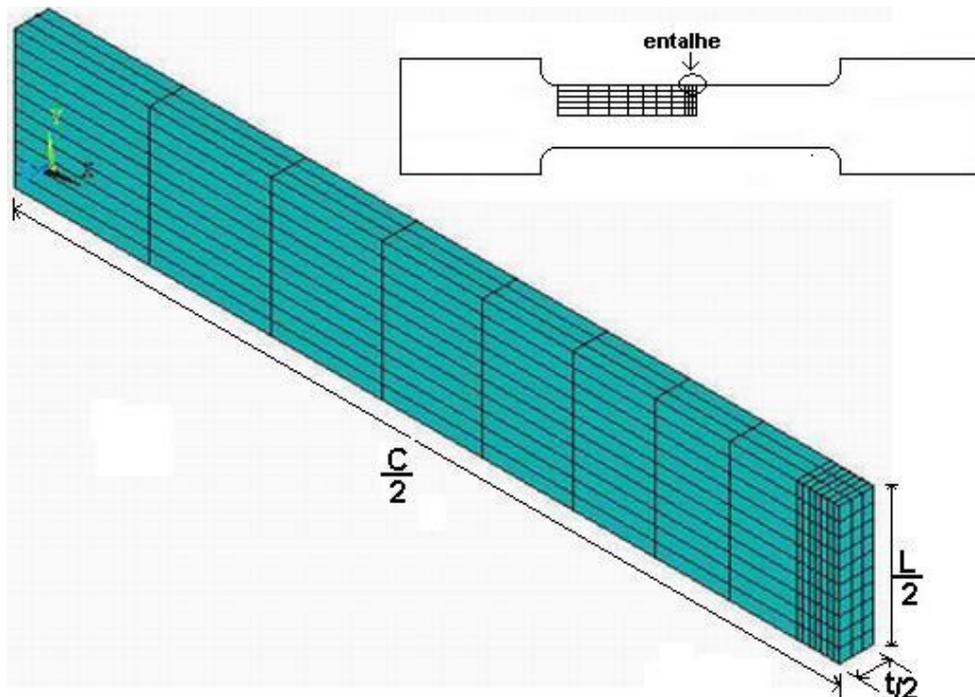


Figura 3.2: Modelo simplificado de 1/8 do corpo de prova. A malha é mais refinada na região do entalhe.

3.1.5 Tipo do elemento

O elemento mais adequado encontrado para este caso foi o SOLID95 (fig.3.3), por se tratar de um elemento que tolera irregularidades na geometria do modelo, como formas curvilíneas e reentrâncias sem que ocorra diminuição importante da precisão em seus resultados. O SOLID95

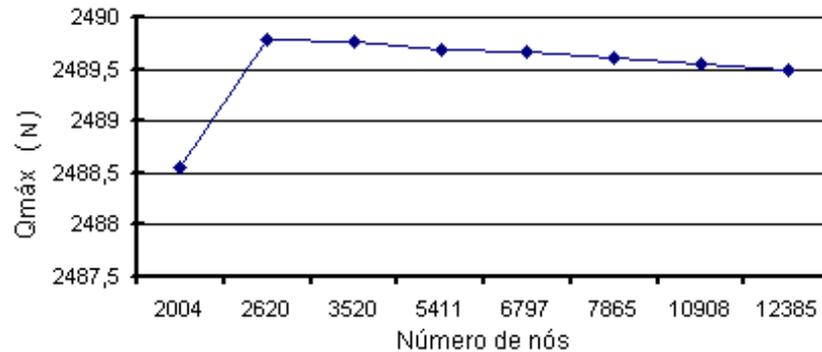


Figura 3.4: Carga máxima de tração obtida pelas diferentes malhas.

Para definir a versão final do modelo foi necessário avaliar a influência dos parâmetros de Arc-Length sobre os resultados da análise, por isso o passo seguinte foi definir quais seriam os valores mais adequados para serem utilizados na análise do modelo final.

O desvio-padrão (s) foi calculado através da equação (3.1), onde:

- n é o número total de variáveis a serem computadas;
- x_i é a variável i -ésima a ser computada;
- \bar{x} é o valor médio entre as variáveis analisadas.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (3.2)$$

O primeiro parâmetro de comparação foi a carga máxima de tração suportada pelo corpo de prova e os resultados estão plotados no gráfico da figura 3.4, nesse caso o valor médio foi de $\bar{Q}_{máx} = 2489,514$ MPa. Foi observado um desvio de 0,038% do valor médio para a malha de 2004 nós. Se desconsiderarmos o resultado da malha de 2004 nós, o maior desvio será da ordem de 0,011%. Portanto neste primeiro quesito foi descartada a malha de 2004 nós por estar fora da linha de tendência do conjunto avaliado.

O valor da espessura na seção transversal mínima, localizada no ponto de simetria do corpo de prova, também serviu como parâmetro na busca da malha mais adequada como ilustra a figura 3.5. O valor médio foi $\bar{t} = 0,66555$ mm e a malha apresentou-se fora da linha de tendência do conjunto avaliado foi a malha com 7865 nós, com desvio de 0,44%. Portanto, desta vez foi descartada a configuração com 7865 nós.

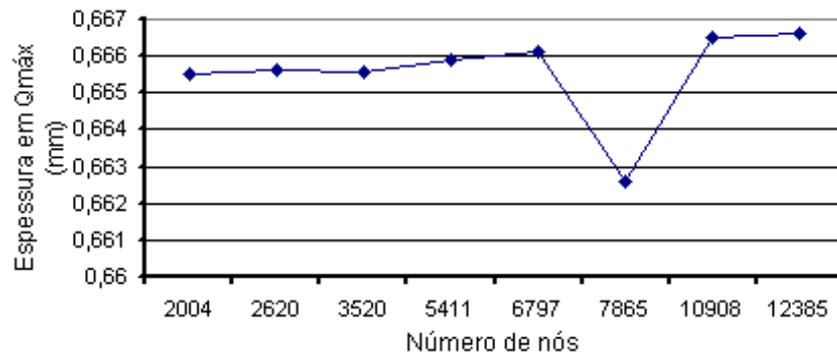


Figura 3.5: Espessura da seção mínima correspondente à carga máxima de tração.

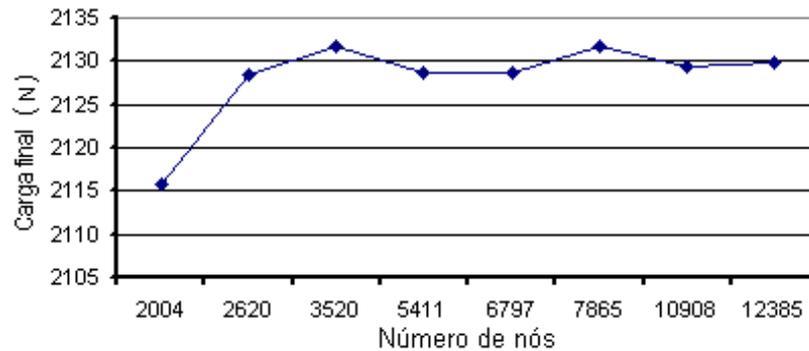


Figura 3.6: Carga de tração correspondente à redução de 50% na espessura da seção mínima.

O terceiro quesito analisado foi o valor da carga de tração referente à espessura com redução de 50%, os resultados estão plotados no gráfico da figura 3.6. Nele podemos constatar que as malhas de 2004, 7865 e 3520 nós apresentam desvios em torno de 0,56%, 0,18% e 0,17% respectivamente.

3.1.7 Parâmetros do método de Arc-Length

Fator de Arc-Length

A influência do fator de Arc-Length foi verificada seguindo os mesmos critérios utilizados para comparar os resultados obtidos na análise das malhas. Porém desta vez a análise foi conduzida fixando a carga inicial em $Q_i = 1000$ N e a malha utilizada foi a de 6797 nós, por se tratar de uma malha intermediária em relação a malha mais refinada (12385 nós) e a com menor grau de refino (2620 nós).

Para o valor da carga máxima de tração (figura 3.7) foi observado um desvio-padrão de

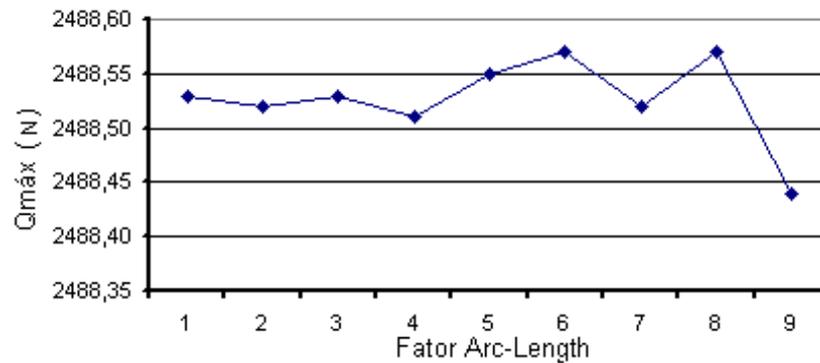


Figura 3.7: Carga máxima de tração para os diferentes fatores de Arc-Length.

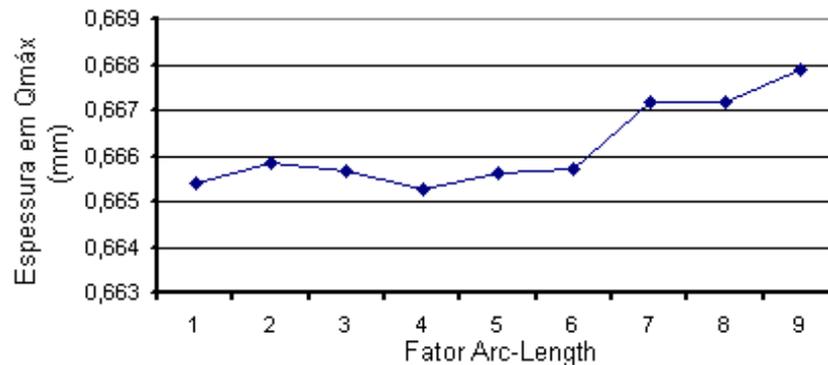


Figura 3.8: Espessura da seção mínima correspondente à carga máxima de tração para os diferentes fatores de Arc-Length.

apenas $s = 0,04$ N, o que representa $1,6 \times 10^{-6}$ do valor médio para a carga máxima. Mas avaliando o gráfico com os valores das cargas obtidas fica evidente que os fatores de Arc-Length iguais a 1, 2, 3, 4 e 7, apresentam os valores de carga mais similares entre si.

Para os valores da espessura do corpo de prova na seção transversal mínima, os resultados mais coesos foram observados para o fator Arc-Length variando de 1 até 6 (figura 3.8). Assim podemos excluir o fator igual a 7, por estar mais afastado da região onde se encontram os valores mais homogêneos. O desvio-padrão foi de $s = 0,00115$ mm, o que representa $4,6 \times 10^{-8}$ do valor média para espessura referente à carga máxima. Assim o fator de Arc-Length mais adequado estará entre 1 a 4.

Analisando os resultados obtidos para a carga de tração referente a uma redução de 50% na espessura (figura 3.9), é possível perceber um comportamento linear do valor da carga conforme o aumento do fator de Arc-Length. Como os valores com maior concordância foram obtidos para fatores entre 1 e 4 basta definir qual deles oferece melhores resultados. E como pode

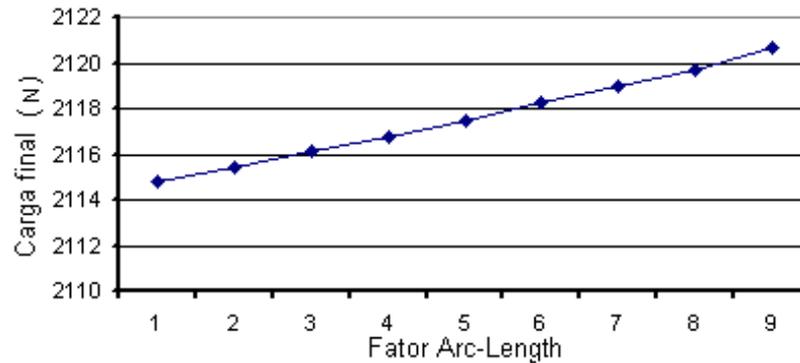


Figura 3.9: Carga de tração correspondente à redução de 50% na espessura da seção mínima para os diferentes fatores de Arc-Length.

ser visto na figura 3.9 o fator de Arc-Length igual a 4 fornece um valor da carga próximo aos obtidos com malhas mais refinadas.

Com estes resultados podemos concluir que embora as configurações de malha com 2620, 6797 e 12385 nós sejam muito diferentes em termos quantitativos no mapeamento do corpo de prova, eles apresentaram resultados muito semelhantes. Esta análise preliminar leva a crer que a utilização da malha de 2620 nós tem capacidade de fornecer resultados precisos com baixo custo computacional.

Carga Inicial

Um fator importante na utilização do método de Arc-Length é a escolha da carga inicial que será utilizada no primeiro loop do método iterativo e que definirá o fator de carga incremental aplicado no loop seguinte e assim por diante. Então foram feitas várias simulações com diferentes valores de carga inicial Q_i com objetivo de determinar a carga que oferece melhores resultados, ou seja, mais coesos dentro do espaço amostral analisado.

Para esta análise foram utilizadas apenas as configurações de malha com 2620 e 6797 nós, a malha com 12385 nós foi descartada pelo seu alto custo computacional. O fator de Arc-Length utilizado no modelo com 6797 nós foi igual a 4. Já a malha de 2620 nós foi testada com três fatores de Arc-Length diferentes para avaliar melhor sua influência sobre os resultados.

Os valores para o fator de Arc-Length para a malha de 2620 nós variaram de 3 a 5. A figura 3.10 ilustra o comportamento para a carga máxima dos quatro modelos testados. Nela é

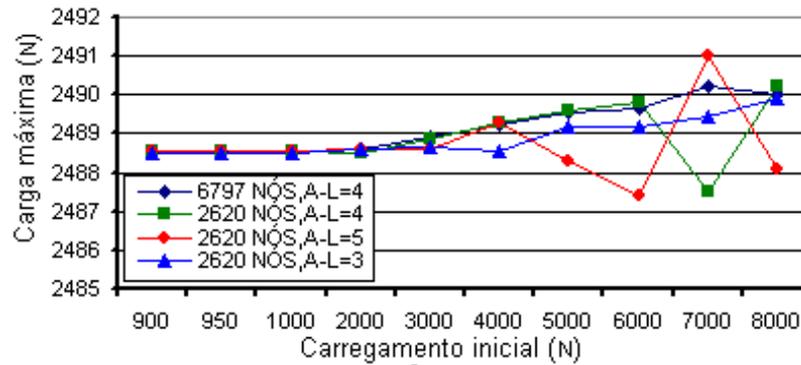


Figura 3.10: Carga máxima de tração para os diferentes valores de carregamento inicial.

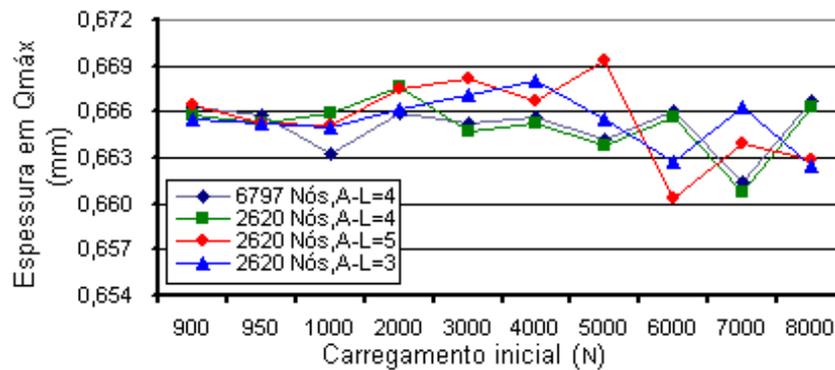


Figura 3.11: Espessura da seção mínima correspondente à carga máxima de tração para os diferentes carregamentos iniciais.

possível observar que para valores de carga inicial Q_i até 2000 N, os valores de carga máxima obtidos são praticamente os mesmos. O que indica uma tendência de dispersão nos resultados a partir de valores de carga iniciais maiores do que 2000 N.

Já para a espessura na carga máxima, o modelo de 2620 nós com fator de Arc-Length igual a 4 tem praticamente o mesmo comportamento que o modelo de 6797 nós e fator Arc-Length igual a 4, o que serve de indício para justificar que a malha de 2620 nós pode ser utilizada para simular o evento sem que haja perda de qualidade nos resultados, como pode ser visto na figura 3.11. Os valores obtidos para a carga referente à redução de 50% na espessura também confirmam que há compatibilidade entre os dois modelos (2620 e 6797 nós).

A determinação da carga máxima é de fundamental importância para quantificar a variação de área na seção transversal mínima, pois é a partir deste ponto que ocorre o início do processo de formação da estrição difusa, introdução do estado triaxial de tensões e a configuração da

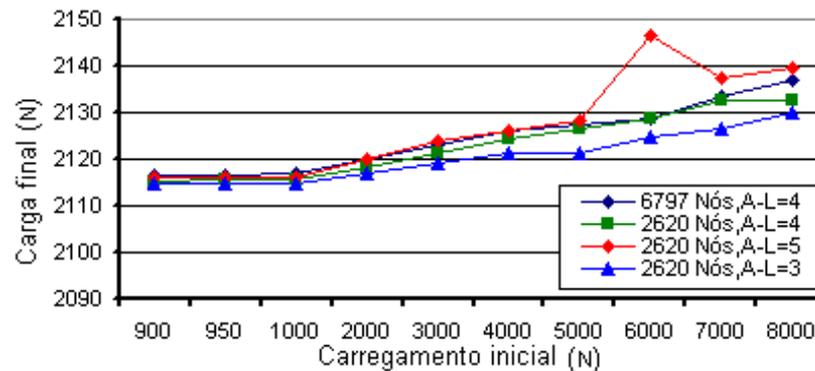


Figura 3.12: Carga de tração correspondente à redução de 50% na espessura da seção mínima para os diferentes carregamentos iniciais.

parcela de variação de área não-proporcional. E neste caso particular, os valores de carga inicial que ofereceram resultados com maior concordância entre si foram obtidos com as cargas de até 2000 N.

Comparando o tempo de processamento dos modelos para os diversos valores de carga inicial Q_i , fica evidente a economia de tempo proporcionada pelo uso de uma malha menos refinada. Foi verificado que esta economia ocorre sem que ocorram prejuízos na qualidade dos resultados obtidos pelo modelo mais simplificado de 2620 nós com $Q_i = 2000$ N e fator Arc-Length igual a 4. Isto representa uma grande economia de tempo, pois uma simulação feita no modelo de 6797 nós ($Q_i = 2000$ N e fator Arc-Length=4) levou exatamente 72 minutos e 30 segundos, enquanto a malha de 2620 nós nos mesmos parâmetros de carga e fator Arc-Length levou apenas 14 minutos e 46 segundos para finalizar a simulação. Isto representou uma economia de nada menos que 57 minutos e 44 segundos, uma redução da ordem de 80% no tempo de processamento.

3.1.8 Monitoramento da área

A maior dificuldade para se determinar a curva tensão-deformação verdadeira é monitorar a variação da área da seção transversal durante o ensaio de tração. Isto se deve à parcela não-proporcional de redução da área $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_o}\right)$ que se desenvolve devido à formação da estrição difusa e à introdução de um estado triaxial de tensões logo após ser atingida a carga máxima.

Com a formação da estrição difusa no instante em que a carga máxima de tração é atingida, a variação de área da seção transversal passa a ser formada por duas componentes: uma

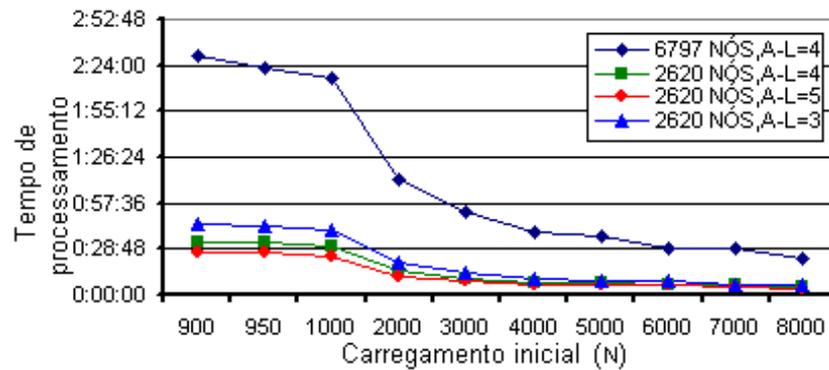


Figura 3.13: Esforço computacional exigido para a simulação.

componente de variação proporcional $\left(\frac{\Delta A_p}{A_o}\right)$ e outra de variação não-proporcional $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_o}\right)$.

Esta segunda componente reflete o comportamento não-linear originado pela formação da estrição difusa na região central do corpo de prova, neste caso o cálculo da área através da medição da base e altura da seção não tem sensibilidade para descrever as mudanças no formato da seção transversal mínima do corpo de prova. Por isso foi necessário implementar um algoritmo para mapear todos os nós localizados na seção transversal mínima e monitorar a redução de área através da utilização dos deslocamentos nos nós a cada passo de carga. Isto viabilizou o cálculo da tensão e deformação verdadeira do modelo numérico.

O monitoramento da área da seção transversal mínima é detalhado pelos passos relacionados abaixo. Os itens de 3 a 11 foram repetidos a cada passo de carga:

1. Seleção dos elementos localizados na face da seção transversal, ao todo 30 elementos foram selecionados.
2. Mapeamento dos nós por elemento, onde cada elemento possui 8 nós na face da seção transversal;
3. Cálculo da área inicial a partir da posição indeformada dos nós;
4. Obtenção das coordenadas da posição deformada de cada nó;
5. Cálculo dos pontos de integração e coeficientes de peso do Jacobiano;
6. Cálculo do Jacobiano;

7. Cálculo da área deformada utilizando o determinante do Jacobiano, multiplicado por seus respectivos coeficientes de peso;
8. Registro da variação de espessura a partir do deslocamento do nó localizado na extremidade da seção mínima;
9. Cálculo da variação na espessura;
10. Cálculo da variação na área proporcional e não-proporcional;
11. Registro do carregamento.

3.1.9 Variação de área

Todo o processo de variação que a área da seção transversal sofreu devido à solicitação do carregamento de tração axial foi registrado passo a passo. Assim foi possível descrever o efeito da estricção na geometria da seção transversal e determinar a curva de escoamento, ou curva tensão-deformação verdadeira, do material. Pode-se ainda relacionar a variação de espessura com a variação de área na seção transversal, o que simplifica significativamente a obtenção destas propriedades verdadeiras, em materiais com corpos de prova de chapa fina, avaliados através do ensaio de tração axial.

3.1.10 Variação de área proporcional

A variação de área proporcional foi calculada a partir da equação (3.3) que utiliza a variação de espessura para determiná-la, obedecendo o mesmo princípio da variação de área para seção circular, como foi visto anteriormente na revisão bibliográfica.

$$\frac{\Delta A_p}{A_0} = \frac{2\Delta t}{t_0} - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)^2 \quad (3.3)$$

sendo:

- $\frac{\Delta A_p}{A_0}$ é a variação de área proporcional;
- $\frac{\Delta t}{t_0}$ é a variação de espessura.

3.1.11 Variação de área não-proporcional (n-p)

A variação de área n-p pode ser calculada indiretamente, pois sabemos que a variação de área total após o ponto de carga máxima passa a ser formada pela parcela proporcional e a parcela não-proporcional, como mostra a equação (3.4):

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\Delta A_p}{A_0} - \frac{\Delta A_{np}}{A_0} \quad (3.4)$$

Substituindo a equação (3.3) em (3.4) e isolando a parcela não-proporcional, obtém-se a expressão (3.5) que é capaz de quantificar a variação de área n-p através apenas da variação de área total e a variação de espessura na seção transversal mínima.

$$\frac{\Delta A_{np}}{A_0} = \frac{2\Delta t}{t_0} - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)^2 - \frac{\Delta A}{A_0} \quad (3.5)$$

sendo:

- $\frac{\Delta A_{np}}{A_0}$ é a variação de área não-proporcional;
- $\frac{\Delta A}{A_0}$ é a variação total de área obtida diretamente através do modelo de Elementos Finitos.

3.1.12 Normalização da variação de área não-proporcional

No caso da simulação numérica onde o monitoramento do valor da área total é obtida diretamente, não há necessidade de estabelecer relações descrevendo o comportamento das componentes de variação de área para determinar a curva de escoamento do material, bastando empregá-la diretamente. Contudo, em um ensaio experimental não existe uma forma tão simples para se quantificar a variação de área total, por isso é necessário utilizar relações algébricas para determinar o valor de cada uma das parcelas.

A equação (3.3) relaciona a variação proporcional de área $\left(\frac{\Delta A_p}{A_0}\right)$ com a variação de espessura $\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)$ e como a variação da espessura pode ser monitorada durante o ensaio experimental, basta então estabelecer uma outra formulação algébrica com base nos resultados do modelo numérico capaz de quantificar a variação de área não-proporcional a partir dos dados disponíveis no ensaio experimental como a relação de forma, carregamento máximo e a própria variação de espessura na seção mínima.

Normalização da variação de área não-proporcional (n-p) pela relação de forma da seção transversal

As curvas de variação não-proporcional pela redução de espessura obtidas por meio da equação (3.5) revelaram que para uma dada redução de espessura, materiais com elevado encruamento apresentam menores níveis de variação não-proporcional do que materiais com baixo encruamento, ou seja, estes materiais apresentam maiores distorções na seção transversal mínima.

A relação de forma também exerce forte influência na evolução da parcela não-proporcional de redução de área. Seções transversais com baixa relação de forma apresentam menores níveis de variação não-proporcional, isto indica que a relação de forma é diretamente proporcional ao desenvolvimento da variação não-proporcional de área.

Dividindo a variação não-proporcional pelo valor correspondente à redução de 50% na espessura como mostra a equação (3.6), foram obtidas curvas (figura 3.14) que indicam um mesmo padrão de evolução para a variação de área não-proporcional. Este comportamento foi verificado para os quatro tipos de encruamento analisados, guardadas as devidas proporções.

$$\frac{\frac{\Delta A_{np}}{A_0}}{\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}} \quad (3.6)$$

sendo:

- $\frac{\Delta A_{np}}{A_0}$ é a variação de área n-p correspondente à uma redução de espessura qualquer;
- $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}$ é a variação de área n-p correspondente à uma redução de 50% na espessura.

$$\frac{\left[\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}^i\right]}{\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}^{i=4}} \quad (3.7)$$

sendo:

- $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}^i$ correspondente à relação de forma i ;
- $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0.5}^{i=4}$ correspondente à relação de forma, $RF = 4$.

A normalização é efetuada por (3.7) indica que para qualquer material, o valor da redução de área n-p referente a 50% da redução de espessura de qualquer relação de forma, pode ser previsto pelo correspondente valor para relação de forma $RF = 4$, (figura 3.15). Aproximando da curva resultante da normalização efetuada através da equação (3.7), é obtida a equação (3.8):

$$f_{rf}(RF) = 0.1994 + 0.5831 \ln(RF) \quad (3.8)$$

sendo:

- $f_{RF}(RF)$ é a função que descreve a influência da relação de forma na evolução de variação de área n-p;
- RF é referente a relação de forma da seção transversal do corpo de prova;
- Observação: Se RF for igual a 4, então $f_{RF}(4)$ será igual a 1.

Normalização da variação de área não-proporcional através da deformação no carregamento máximo

A normalização foi conduzida a partir dos valores de redução de área não-proporcional de corpos de prova com relação de forma $RF = 4$ dos materiais em questão (figura 3.16). O processo consistiu em deslocar a origem das curvas de redução de área n-p, que em virtude dos diferentes expoentes de encruamento, apresentavam o início da variação de área n-p em pontos distintos de redução de espessura (figura 3.17). Isto resulta em:

$$\frac{\Delta t^T}{t_0} = \frac{\Delta t}{t_0} - \left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{máx}} + \left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{máx}}^{n=0,15} \quad (3.9)$$

- $\frac{\Delta t^T}{t_0}$ é o valor da variação de espessura trasladado para o correspondente valor de onde a variação de área tem início no material com $n = 0,15$;
- $\frac{\Delta t}{t_0}$ é a variação de espessura de um material qualquer com expoente de encruamento n diferente de 0,15;
- $\left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{máx}}$ é a variação de espessura do material qualquer, correspondente à carga máxima se tração;

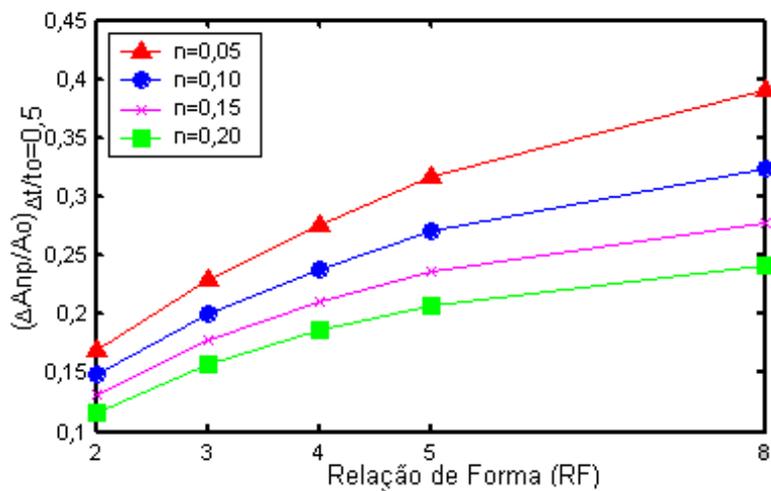


Figura 3.14: Variação de área n-p correspondente à redução de 50% na espessura mínima para as diferentes relações de forma da seção transversal mínima.

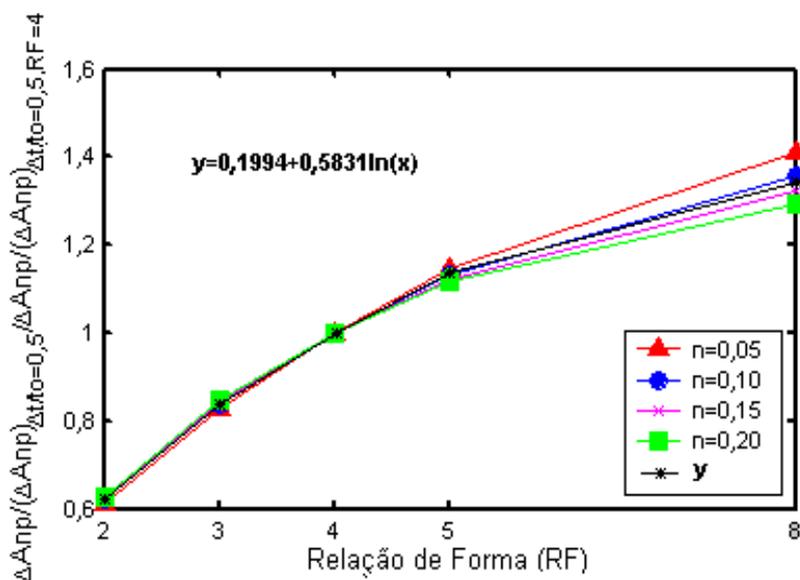


Figura 3.15: Variação de área n-p correspondente à redução de 50% na espessura mínima para as diferentes relações de forma da seção transversal mínima normalizadas pelo valor correspondente à relação de forma $RF = 4$.

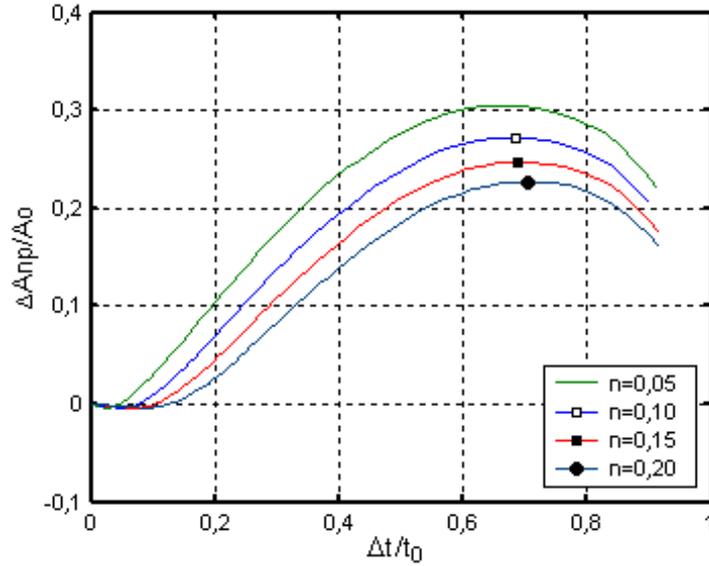


Figura 3.16: Variação de área n-p dos corpos de prova com $RF = 4$ dos diferentes materiais.

- $\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Qmáx}^{n=0,15}$ é a variação de espessura do material com $n = 0,15$, correspondente à carga máxima de tração.

O passo seguinte foi aplicar uma normalização semelhante à utilizada pela equação (3.6) através de equação (3.10), como mostra a figura 3.18. É importante notar que $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)^T$ refere-se ao valor da variação de espessura transladada pela equação (3.9).

$$\frac{\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)^T}{\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0,5}^T} \quad (3.10)$$

sendo:

- $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)^T$ é a variação de área n-p transformada correspondente à uma redução de espessura qualquer;
- $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0,5}^T$ é a variação de área n-p transformada correspondente à uma redução de 50% na espessura.

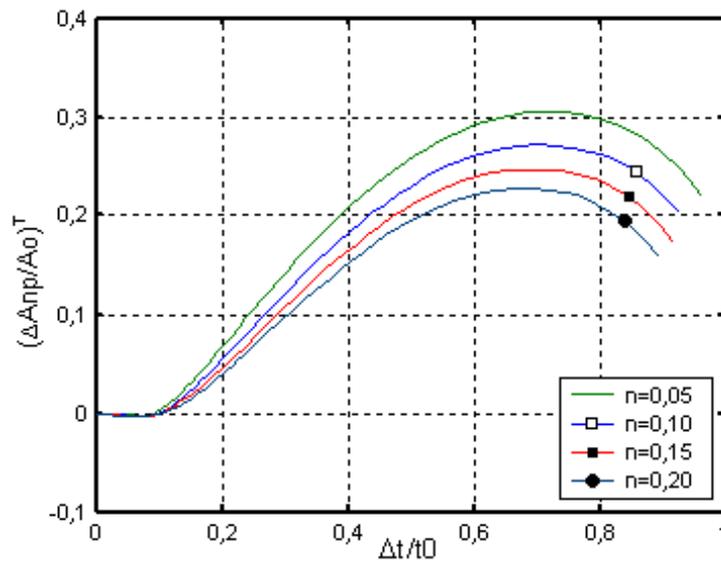


Figura 3.17: Variação de área n-p dos corpos de prova com $RF = 4$ dos diferentes materiais transladados pela equação (3.9).

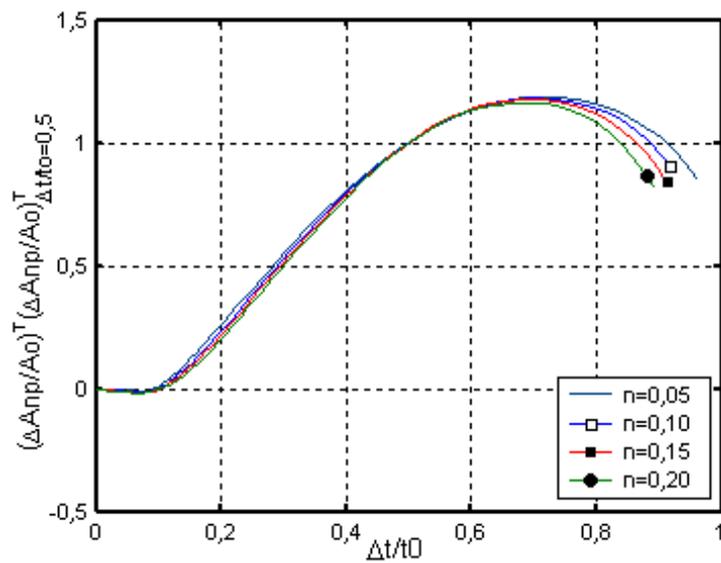


Figura 3.18: Variação de área n-p dos corpos de prova com $RF = 4$ dos diferentes materiais transladados pela equação (3.9) e normalizados pelos respectivos valores correspondentes de redução da espessura à 50%.

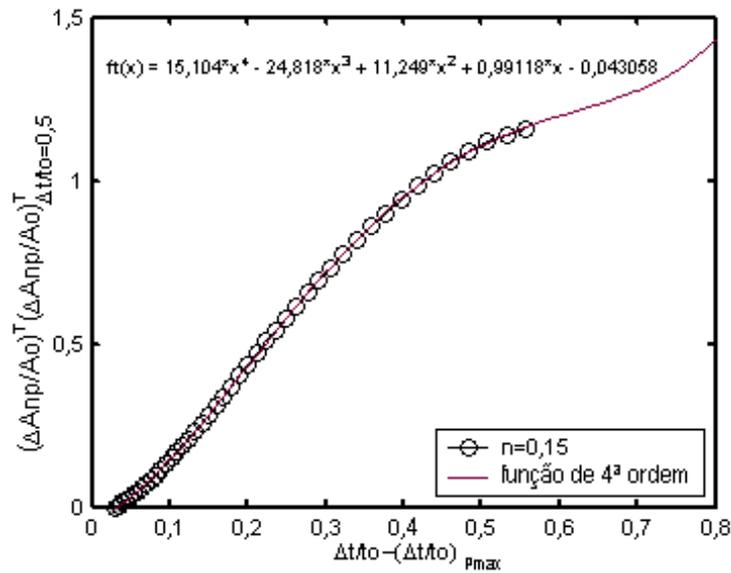


Figura 3.19: Variação de área n-p correspondente ao material com $n = 0,15$, transladada e normalizada pelos respectivos valores na redução de espessura em 50% e a equação de 4ª ordem que a reproduz.

O polinômio (3.11) descreve a distribuição de redução de área n-p versus $\frac{\Delta t}{t_0} - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Qmáx}$, como é mostrado na figura 3.19:

$$f_t(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \quad (3.11)$$

sendo $x = \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right) - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Qmáx}$:

- $f_t(x)$ é a função que descreve a influência da carga máxima de tração no comportamento da redução de espessura para a evolução da variação de área n-p;
- $c_0 = -0,04306$;
- $c_1 = 0,99118$;
- $c_2 = 11,249$;
- $c_3 = -24,818$;
- $c_4 = 15,104$.

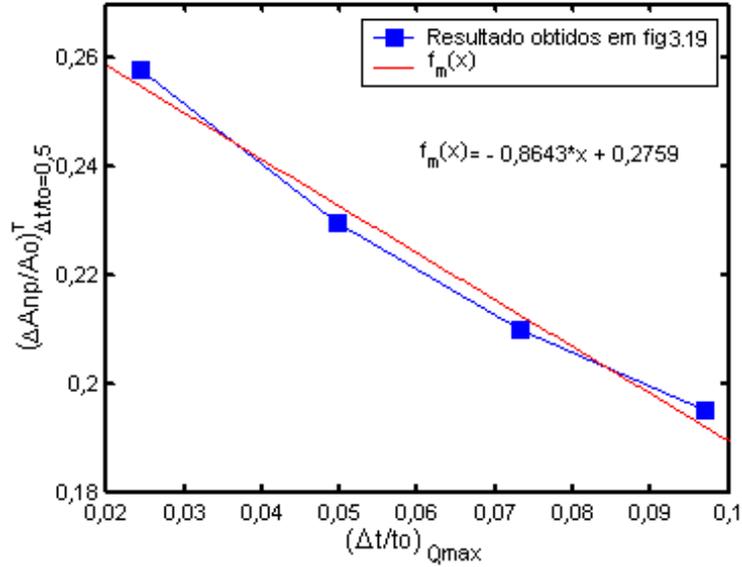


Figura 3.20: Função f_m que reproduz os valores de variação n-p transformada correspondentes à redução de 50% de espessura nas suas respectivas cargas máximas de tração.

Os valores de referência $(\frac{\Delta A_{np}}{A_0})_{\frac{\Delta t}{t_0}=0,5}^T$ de cada material e os valores de redução espessura na carga máxima $(\frac{\Delta t}{t_0})_{Q_{máx}}$, analisados graficamente (figura 3.20) apresentam um comportamento que pode ser representado pela equação (3.12):

$$f_m \left(\left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{máx}} \right) = 0,2759 - 0,8643 \left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{máx}} \quad (3.12)$$

3.1.13 Equação proposta de variação de área

Após a normalização da variação n-p de área é proposta uma equação de redução de área não-proporcional (3.13) baseada em características geométricas do corpo de prova, como a relação de forma RF , a evolução de variação de espessura $(\frac{\Delta t}{t_0})$ e propriedades mecânicas do material indicadas pelo valor de redução na espessura sofrido pela seção no instante em que a carga máxima é atingida.

$$\frac{\Delta A_{np}}{A_0} = f_{rf}(RF) * f_t(x) * f_m \left(\left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{máx}} \right) \quad (3.13)$$

Portanto a variação de área pode ser obtida diretamente em ensaios experimentais pela equação (3.14), desde que seja possível monitorar a redução de espessura na seção transversal

mínima do corpo de prova.

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\Delta A_p}{A_0} - \frac{\Delta A_{np}}{A_0} \quad (3.14)$$

sendo que:

- $\frac{\Delta A_p}{A_0} = \frac{2\Delta t}{t_0} - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)^2$;
- $\frac{\Delta A_{np}}{A_0} = f_{rf}(RF) * f_t(x) * f_m \left(\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Qmáx} \right)$.

3.1.14 Verificação da equação de variação de área proposta

Para descrever a evolução da variação da área a partir da equação (3.14), foram utilizadas informações sobre relação de forma, espessura correspondente à carga máxima e a evolução da variação de espessura retiradas do modelo numérico.

Em seguida foram calculadas as curvas de tensão-deformação verdadeira do material para corpos de prova com diferentes relações de forma e então comparadas à curva tensão-deformação real obtida a partir da variação de área, extraída diretamente do modelo de elementos finitos (figura 3.21). Por razões de praticidade para a obtenção dos dados de variação de espessura nos ensaios experimentais, a redução de espessura foi limitada a 50%, o que corresponde a uma deformação verdadeira em torno de 100%.

3.1.15 Correção de Bridgman

Os valores de tensão verdadeira obtidos após a formação da estrição difusa apresentam-se mais elevados pois sofrem a influência da introdução do estado triaxial de tensões, e por causa disto devem ser corrigidos.

$$\sigma = \frac{\sigma_{média}}{\left(\frac{1+2R}{a}\right) \left[\ln\left(1 + \frac{a}{2R}\right)\right]} \quad (3.15)$$

$$\frac{a}{2R} = 0,555(\varepsilon - \varepsilon_{pmax}) \quad (3.16)$$

Em corpos de prova de seção transversal circular, a correção de Bridgman, equação (3.15), é considerada muito eficiente. No caso de corpos de prova com seção retangular, os resultados obtidos mostram que para corpos de prova do mesmo material, mas com relações de forma diferentes, as curvas de escoamento apresentam o mesmo comportamento. Por isso segundo

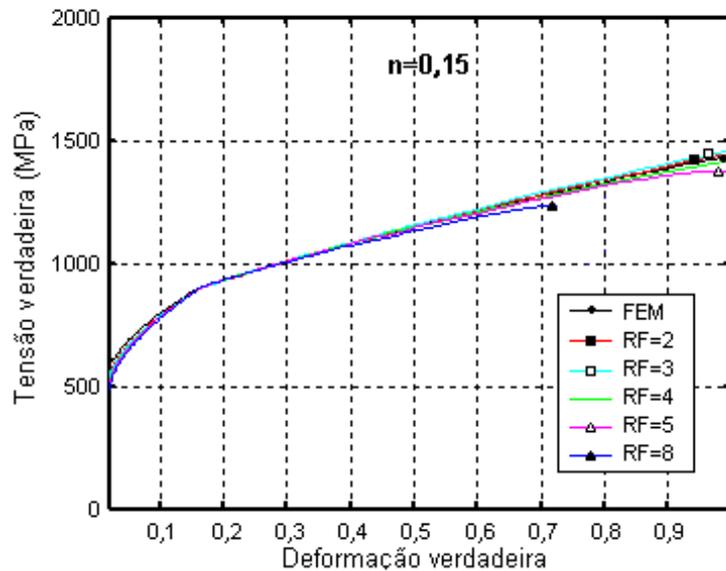


Figura 3.21: Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,15$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos.

[24], a correção de Bridgman pode ser utilizada de forma equivalente na correção da tensão verdadeira em corpos de prova retangulares, desde que a variação de área possa ser determinada.

Portanto é possível corrigir a tensão verdadeira após a carga máxima sem haver necessidade de entrar em maiores detalhes sobre a distribuição de tensões na estrição difusa. A maior dificuldade a partir deste ponto é determinar os parâmetros de geometria da estrição: O raio de curvatura R e raio da estrição a . Para contornar este desafio foi proposta por Le Roy *et al* [13] uma relação empírica para quantificar $\frac{a}{2R}$ em função da deformação real correspondente e a deformação real referente à carga máxima, equação (3.16).

3.2 Procedimento Experimental

Para avaliar a eficiência da metodologia proposta na análise numérica, foram conduzidos ensaios experimentais em corpos de prova de seção retangulares e circulares. Os resultados obtidos serviram de subsídio na validação da metodologia proposta pela equação (3.14).

Foi possível avaliar a eficiência da metodologia de duas maneiras distintas:

1. Através da comparação entre os resultados obtidos em ensaios experimentais e por simu-

lação numérica para corpos de prova retangulares.

2. Através da comparação entre os resultados obtidos em ensaios convencionais (corpos de prova cilíndricos) e ensaios experimentais segundo a metodologia proposta (corpos de prova retangulares).

3.2.1 Equipamento utilizado

A realização dos ensaios experimentais exigiu a utilização dos seguintes materiais:

- Máquina de tração: Modelo EMIC DL3000, capacidade de carga de 500 a 3000 kgf e faixa de velocidade de 0.02 a 500 mm/min. Cedida pelo GRANTE-UFSC;
- Célula de carga, 5000 kgf. Cedida pelo GRANTE-UFSC;
- Conjunto de mordentes para corpos de prova cilíndricos, ϕ de 0 a 15 mm. Cedido pelo GRANTE-UFSC;
- Conjunto de mordentes para corpos de prova retangulares, ϕ de 0 a 12 mm. Cedido pelo GRANTE-UFSC;
- Chapa de aço inox 316, espessura = 1,5 mm;
- Chapa de alumínio 3105-H14, espessura = 1,5 mm;
- Chapa de cobre CA122 (1/2 duro), espessura = 1,5 mm;
- Barra de aço inox 316, diâmetro = 12,7 mm;
- Barra de alumínio 6351, diâmetro = 15,9 mm;
- Barra de cobre CA110 (1/2 duro), diâmetro = 15,9 mm;
- Medidor de espessura para tubos (Mitutoyo NO.2046-08), com resolução de 0,01 mm e capacidade de curso de leitura de 0 a 11 mm. Cedido pela fundação CERTI;
- Paquímetro digital (Starrett Mod. 727), com resolução de 0,01 mm e capacidade de curso de leitura de 0 a 150 mm. Cedido pelo GRANTE-UFSC;

- Microcomputador interligado à máquina de tração. Cedido pelo GRANTE-UFSC;
- Notebook. Cedido pelo GRANTE-UFSC;
- Televisor. Cedido pelo GRANTE-UFSC;
- Câmera filmadora;
- Fitas de vídeo.

3.2.2 Método

O método utilizado para executar o procedimento experimental seguiu as seguintes etapas:

- Materiais: Determinação dos materiais utilizados para confecção dos corpos de prova;
- Corpos de prova: Definição do método de fabricação dos corpos de prova;
- Procedimento: Utilização dos equipamentos e peculiaridades do processo com relação à aplicação da metodologia proposta;

3.2.3 Materiais

O critério para a escolha dos materiais baseou-se puramente no comportamento mecânico destes materiais quando solicitados à tração. Em primeiro lugar procurou-se estudar materiais com diferentes níveis de resistência, sem entrar em maiores detalhes quanto à microestrutura dos mesmos. A capacidade de encruamento, ductilidade e a resistência à tração foram as propriedades que definiram a seleção dos materiais, portanto os materiais selecionados para serem submetidos a análise foram o aço inox 316 (barra e chapa), alumínio 3105-H14 (chapa), alumínio 6351 (barra), cobre CA122 (chapa) e cobre CA110 (barra).

Algumas peculiaridades foram observadas durante o estudo, por exemplo, para o aço inox 316 a tensão de escoamento assume valores diferentes de acordo com a bitola da barra, conforme as informações do próprio fabricante. O alumínio 3105-H14 e o cobre CA122 são comercializados apenas em chapas, não sendo possível assim uma comparação direta entre os resultados obtidos pelo ensaio convencional e o ensaio para corpos de prova retangulares proposto. O alumínio estrutural 6351 e o cobre CA110, são disponíveis apenas na forma de barras.

3.2.4 Corpos de prova

A usinagem dos corpos de prova retangulares seguiu as mesmas orientações utilizadas para o modelamento dos corpos de prova da análise numérica. Foram dimensionados corpos de prova com relação de forma igual a 2, 3, 4, 5, e 8. No caso desta análise em especial, apenas corpos de prova com relação de forma $RF = 4$ foram usinados em virtude da limitada precisão do equipamento utilizado na usinagem (Fresa com controle numérico). Outro fator limitante foram as dimensões microscópicas dos entalhes para relações de forma inferiores a quatro, pois como foi mostrado anteriormente, a profundidade do entalhe é diretamente proporcional à largura do corpo de prova. Como boa parte do processo de normalização da variação de área não-proporcional baseou-se na relação de forma $RF = 4$, ela pode ser considerada como o caso com maior grau de concordância com o modelo proposto.

Os corpos de prova cilíndricos foram dimensionados seguindo as orientações das normas ASTM - E 8M [5] e ASTM A-370 [4], para a confecção de corpos de prova de dimensões reduzidas, proporcionais ao modelo padrão (Ver o detalhamento dos corpos de prova no Apêndice). Nestes corpos de prova também foram introduzidos entalhes para garantir a formação da estrição na região central.

No total foram usinados 7 corpos de prova para cada tipo material (aço inox 316 em barra e chapa, alumínio 3105-H14, alumínio 6351, cobre CA110 e cobre CA122) totalizando 42 corpos de prova. Metade destes tinha seção transversal retangular e metade tinha seção transversal circular.

3.2.5 Procedimento

Os ensaios experimentais para corpos de prova cilíndricos e corpos de prova retangulares foram conduzidos com controle de deslocamento, que foi mantido em 1 mm/min (figura 3.22). O monitoramento dos dados coletados de carga e variação de espessura/diâmetro durante os ensaios foi realizado com o auxílio de uma câmera filmadora, usada para registrar a evolução do carregamento na tela do micro-computador conectado à máquina de tração, que registrava simultaneamente as leituras de variação de espessura/diâmetro dos corpos de prova. Assim foi possível armazenar os dados e efetuar o processamento posteriormente, minimizando consideravelmente o fator de erro por falha humana, já que desta forma todo o ensaio pode ser

conduzido por apenas um operador. Lembrando que todos os ensaios realizados permanecem documentados em vídeo.

Contudo, as diferenças no procedimento surgiram principalmente na forma com que foram coletadas as informações a respeito da geometria dos corpos de prova durante o processo experimental, neste momento o perfil das seções foi determinante para a escolha do equipamento compatível para cada caso. No caso dos corpos de prova cilíndricos foi utilizado um paquímetro digital, já para os corpos de prova retangulares, um medidor de espessura para tubos foi o instrumento mais apropriado.

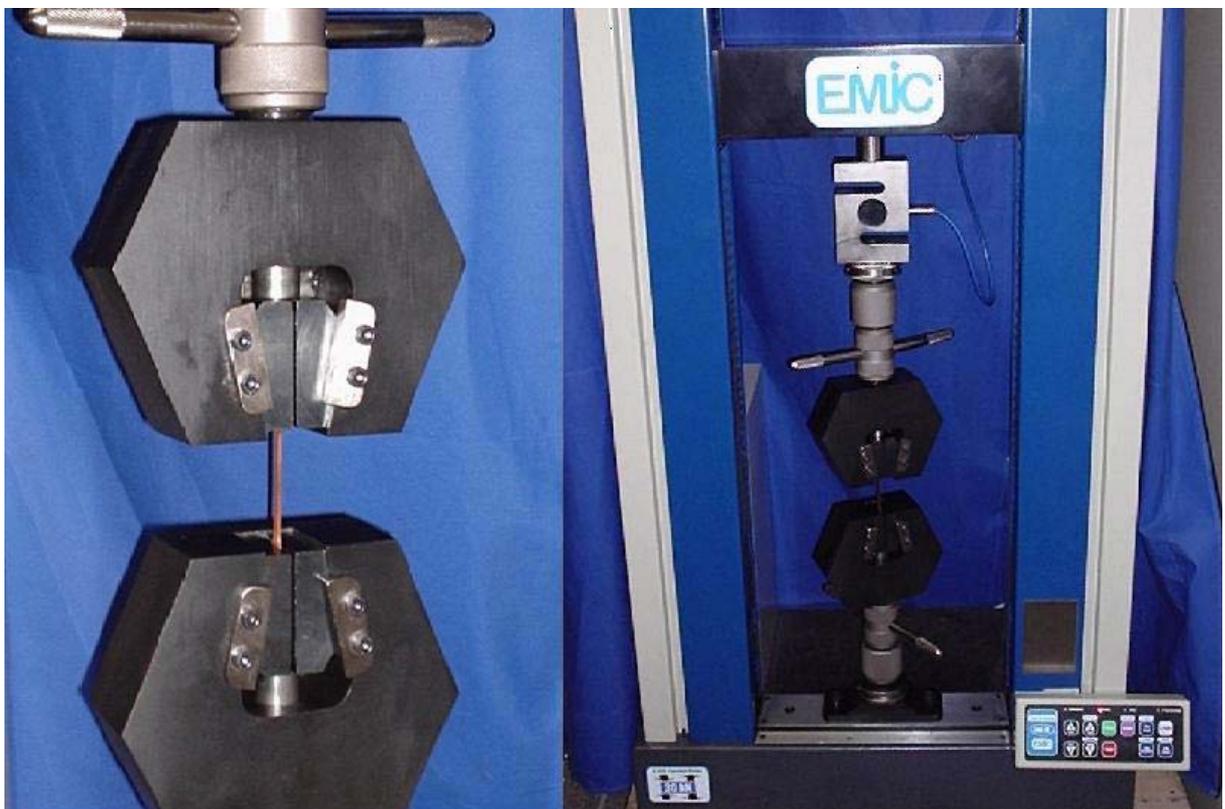


Figura 3.22: Máquina de tração utilizada nos ensaios experimentais. No detalhe, as garras fixando um corpo de prova de chapa fina de cobre CA122.

Corpos de prova cilíndricos

Nos ensaios convencionais para determinação da curva de escoamento a partir de corpos de prova cilíndricos, o monitoramento de variação do diâmetro na seção transversal mínima foi feito manualmente com a utilização de um paquímetro digital com resolução de 0,01 mm. Este

recurso se mostrou muito eficaz principalmente nos estágios finais do ensaio, onde a variação do diâmetro ocorria de forma muito rápida.

A duração do ensaio variou de acordo com o tipo de material, pois a velocidade do carregamento depende da deformação longitudinal e conseqüentemente do coeficiente de encruamento do material. No caso do aço inox 316 os ensaios tiveram duração de aproximadamente 55 minutos, para cobre CA122 os ensaios levaram em torno de 20 minutos.

As etapas de cálculo efetuadas estão indicadas abaixo, elas constituem o procedimento para a determinação das curvas de tensão-deformação para corpos de prova cilíndricos:

1. Inserção dos valores de carga e diâmetros coletados experimentalmente.
2. Cálculo da área deformada utilizando a equação (3.17):

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (3.17)$$

3. Cálculo da tensão verdadeira σ pela divisão da carga Q pela sua correspondente área deformada A a cada ponto, equação (2.3).
4. Cálculo da deformação de Hencky ε através do logaritmo neperiano de $\frac{A_0}{A}$ para valores de $\varepsilon > 0,02$; $0,05$, equação (2.4).
5. Cálculo do valor correspondente ao fator geométrico da estrição pela fórmula empírica, equação (3.16) proposta por Le Roy *et al.*
6. Correção dos valores de tensão verdadeira situados além do ponto de carga máxima através da equação de Bridgman, equação (3.15).

Corpos de prova retangulares

O monitoramento da variação de espessura nos corpos de prova retangulares seguiu em linhas gerais o mesmo procedimento utilizado para corpos de prova cilíndricos. Contudo, o processo de leitura da variação de espessura exigiu alguns cuidados extras para garantir que o ponto onde estas leituras estavam sendo feitas realmente correspondessem à localização da seção mínima.

O dispositivo utilizado para fazer estas leituras, um medidor de espessura para tubos (figura 3.23), possui nas suas extremidades pontas esféricas (uma fixa e outra móvel ligada a um relógio



Figura 3.23: Aparelho medidor de espessura de tubos utilizado para monitorar a variação de espessura durante os ensaios experimentais.

comparador) . Estas pontas esféricas tornam possível percorrer a superfície plana do corpo de prova e determinar com precisão a localização da seção mínima, uma vez que em virtude da deformação induzida pela estrição essa região deixa de ser plana e assume a forma de um entalhe suave [10] que é indicada quando o aparelho identifica a zona morta de leitura.

Assim como no caso do ensaio dos corpos de prova cilíndricos, o tempo gasto para realizar os ensaios foi diretamente proporcional ao grau de resistência à tração dos materiais. Variando entre 50 minutos para o aço inox 316, 30 minutos para o cobre CA122 e 20 minutos para o alumínio 3105-H14.

As etapas de cálculo efetuadas na planilha estão indicadas abaixo, elas constituem o procedimento para a determinação das curvas de tensão-deformação para corpos de prova retangulares:

1. Inserção dos valores de carga e espessura coletados experimentalmente.
2. Cálculo do incremento de variação de espessura através da equação (3.18), sendo t_o a espessura inicial e t a espessura deformada:

$$\frac{t_o - t}{t_o} \quad (3.18)$$

3. Cálculo da diferença entre a variação de espessura $\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)$ e a variação de espessura referente à carga máxima de tração $\left(\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}}\right)$ pela equação (3.19):

$$\frac{\Delta t}{t_0} - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}} \quad (3.19)$$

4. Cálculo da variação de área não-proporcional $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)$ através da equação (3.13).
5. Normalização dos valores da variação de área não-proporcional $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)$ obtidos através da equação (3.13) pelo valor da variação de área não-proporcional correspondente à redução de espessura à 50% $\left(\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\frac{\Delta t}{t_0}=0,5}\right)$, pela equação (3.6).
6. Cálculo da variação de área total $\left(\frac{\Delta A}{A_0}\right)$ pela equação (3.14).
7. Cálculo do valor da área deformada pela subtração do incremento de área total do valor da área inicial, equação (3.20):

$$A = A_0 - \frac{\Delta A}{A_0} * A_0 \quad (3.20)$$

8. Cálculo da tensão verdadeira (σ) pela divisão da carga (Q) pela correspondente área deformada (A) a cada ponto, equação (2.3).
9. Cálculo da deformação de Hencky (ε) através do logaritmo neperiano de $\frac{A_0}{A}$ para $\varepsilon > 0,02$; $0,05$, equação (2.4)
10. Cálculo do valor correspondente ao fator geométrico da estrição pela fórmula empírica, equação (3.16) proposta por Le Roy *et al.*
11. Correção dos valores de tensão verdadeira situados além do ponto de carga máxima através da equação de Bridgman, equação (2.21).

Capítulo 4

Resultados e discussão

A apresentação dos resultados seguirá a mesma ordem na qual o estudo foi conduzido, sendo assim, primeiramente serão apresentados os resultados obtidos pelo modelo numérico a partir dos materiais idealizados. Relembrando que para estes materiais, foram definidas as seguintes propriedades mecânicas:

- Coeficiente de Poisson, $\nu = 0,3$;
- Módulo de Elasticidade fictício, $E = 200000$ MPa;
- Tensão limite de escoamento, $\sigma_0 = 400$ MPa;
- Expoente de encruamento, $n = 0,05, 0,10, 0,15$ e $0,20$.

Os valores da tensão limite de escoamento σ_0 e do módulo de elasticidade E foram definidos para respeitar a mesma relação de $\frac{E}{\sigma_0} = 500$ indicada por Zhang *et al* [24].

Ao final desta fase serão expostos os resultados obtidos experimentalmente com a aplicação da metodologia e a análise paramétrica de seus resultados confrontados com os resultados obtidos numericamente para demonstrar a eficiência de método e suas limitações.

4.1 Modelo Numérico

4.1.1 Tensão de Engenharia

As curvas de tensão de engenharia-variação de espessura indicam que para um mesmo material, a relação de forma da seção transversal exerce significativa influência sobre o comportamento da

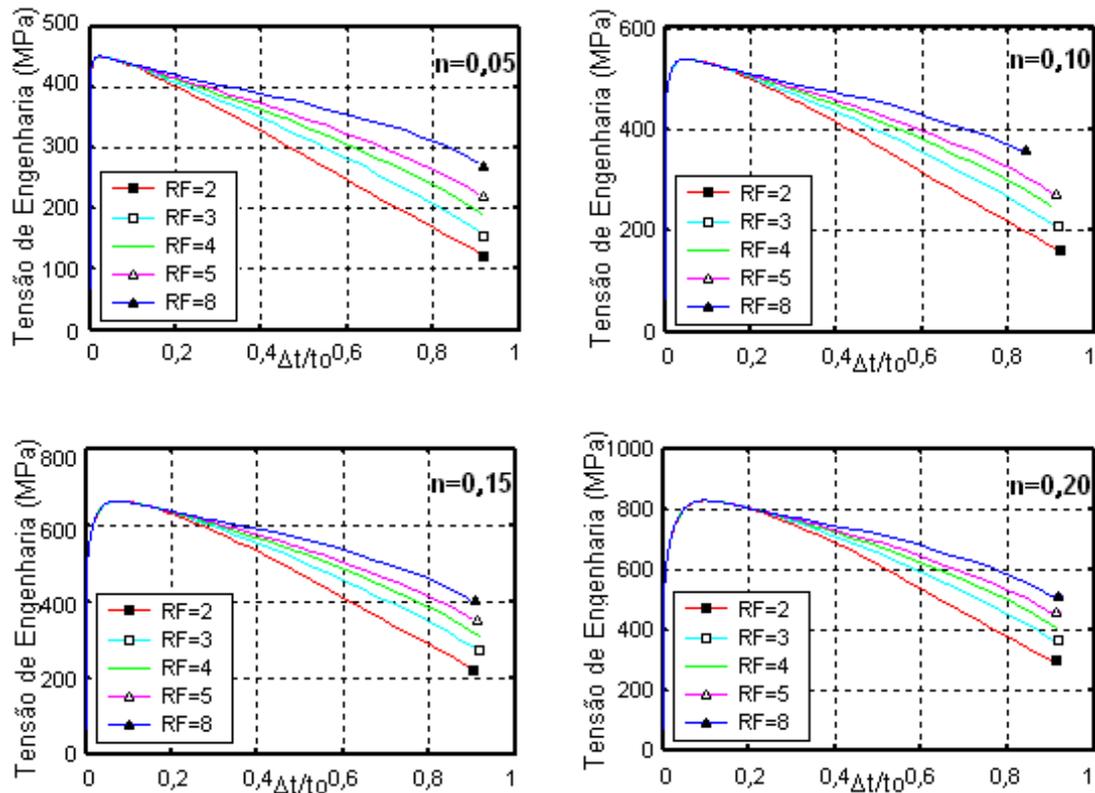


Figura 4.1: Tensão de engenharia.

tensão de engenharia. Podemos verificar através da figura 4.1 que após a formação de estricção, os corpos de prova com relação de forma menores apresentam valores de tensão de engenharia inferiores aos valores dos corpos de prova que possuem relação de forma maiores. Isto pode ser explicado pela influência do estado triaxial de tensões introduzido após ser atingida a carga máxima de tração, pois conforme visto na figura 2.7 da revisão bibliográfica, a influência da componente de tensão transversal σ_{22} depende da largura do corpo de prova.

Os resultados obtidos através do modelo numérico indicam que a espessura correspondente à carga máxima de tração está diretamente relacionada ao valor do expoente de encruamento do material, os resultados obtidos mostram que:

- Para os corpos de prova com $n = 0,05$ ao atingir a carga máxima de tração a redução de espessura correspondente é $\frac{\Delta t}{t_0} = 2,5\%$, que equivale a uma deformação verdadeira $\varepsilon = 0,05$;
- Para os corpos de prova com $n = 0,10$ ao atingir a carga máxima de tração a redução de espessura correspondente é $\frac{\Delta t}{t_0} = 4,9\%$, que equivale a uma deformação verdadeira

$$\varepsilon = 0,10;$$

- Para os corpos de prova com $n = 0,15$ ao atingir a carga máxima de tração a redução de espessura correspondente é $\frac{\Delta t}{t_0} = 7,4\%$, que equivale a uma deformação verdadeira $\varepsilon = 0,15$;
- Para os corpos de prova com $n = 0,20$ ao atingir a carga máxima de tração a redução de espessura correspondente é $\frac{\Delta t}{t_0} = 9,6\%$, que equivale a uma deformação verdadeira $\varepsilon = 0,21$;

4.1.2 Variação de área total

O comportamento não-linear das curvas de variação de área total (figura 4.2) exhibe claramente a influência da variação de área não-proporcional na redução da área da seção transversal.

Pois com o surgimento da estricção, logo após a carga máxima de tração, a variação de área total é afetada pela parcela não-proporcional que reduz o seu valor com a evolução da estricção.

Neste caso a variação de área total formada pelas componentes de variação de área proporcional e não-proporcional, assume valores maiores para corpos de prova com relação de forma menores. Este comportamento é decorrente dos altos valores que a componente não-proporcional impõe aos corpos de prova com relação de forma elevada, pois como é mostrado na equação (4.1), a variação de área total é resultado da subtração entre a componente proporcional e a componente não-proporcional de variação de área.

$$\frac{\Delta A}{A_0} = \frac{\Delta A_p}{A_0} - \frac{\Delta A_{np}}{A_0} \quad (4.1)$$

sendo que:

- $\frac{\Delta A}{A_0}$ é a variação total de área obtida diretamente através do modelo de Elementos Finitos.
- $\frac{\Delta A_p}{A_0}$ é a variação de área proporcional;
- $\frac{\Delta A_{np}}{A_0}$ é a variação de área não-proporcional.

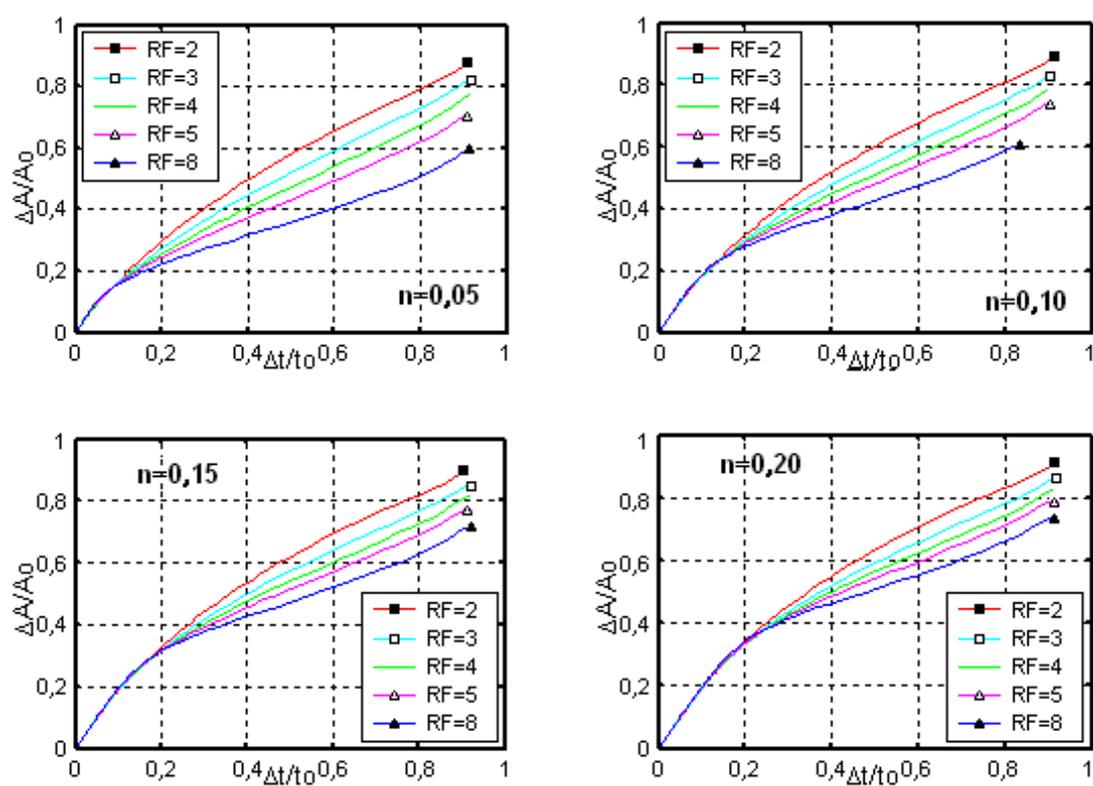


Figura 4.2: Variação de área total pela variação de espessura na seção mínima.

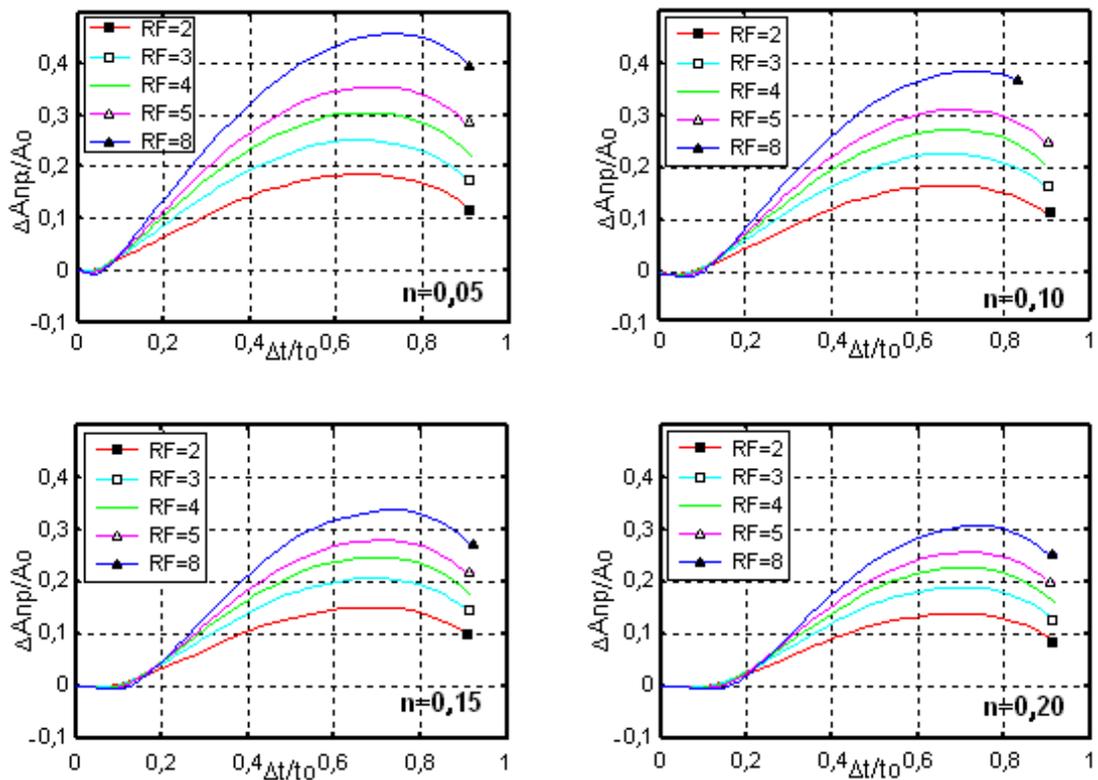


Figura 4.3: Variação de área não-proporcional pela variação de espessura.

4.1.3 Variação de área n-p

A variação de área não-proporcional se inicia com a formação da estricção e a introdução do estado triaxial de tensões ao ser atingida a carga máxima, portanto é natural que os gráficos da figura 4.3 evidenciem um patamar onde a variação de área n-p é nula. Este patamar também indica que a variação de área n-p ocorre prematuramente em materiais com baixa capacidade de encruamento.

Foi constatado que corpos de prova com elevadas relações de forma apresentam valores de variação de área n-p mais elevados. E que quanto menor for a capacidade de encruamento do material, mais elevados serão os valores da variação de área n-p dos corpos de prova com relação de forma RF maiores.

É possível concluir que os corpos de prova de materiais com elevada capacidade de encruamento estão menos propensos a apresentar elevados índices de variação de área não-proporcional do que corpos de prova com as mesmas características geométricas, porém constituídos de materiais com menor capacidade de encruamento.

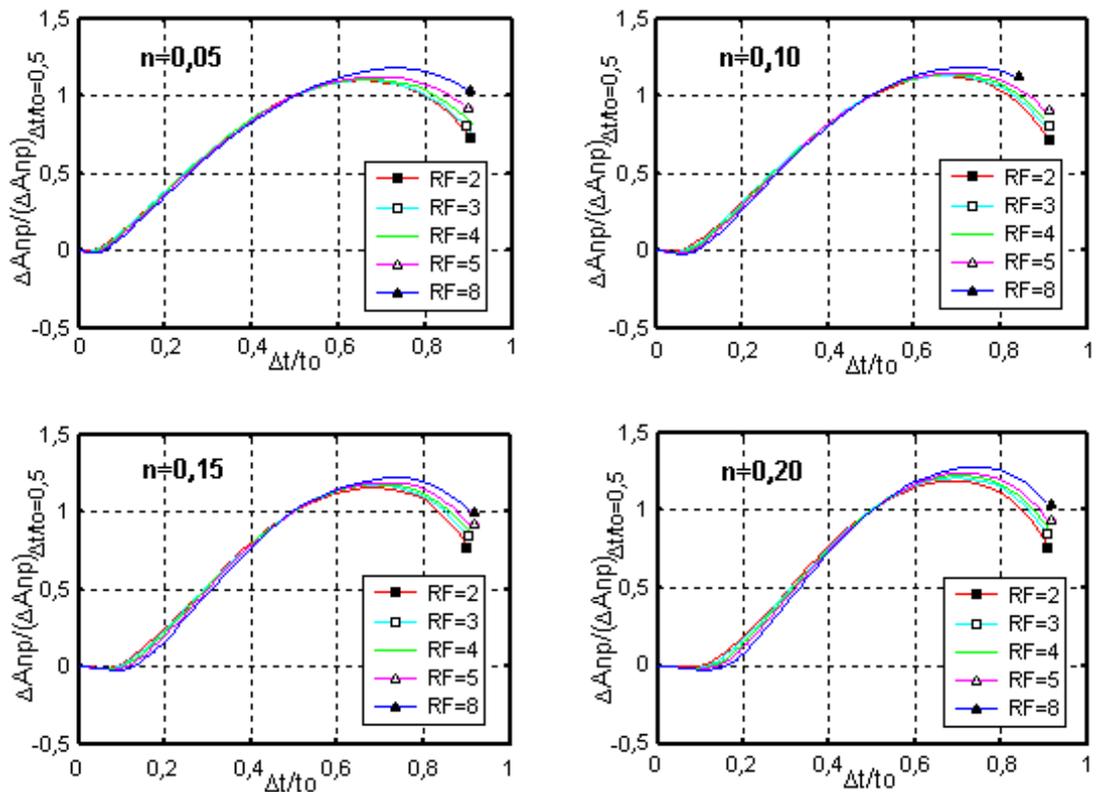


Figura 4.4: Variação de área não-proporcional normalizada pelo seu valor correspondente à redução de 50% de espessura.

4.1.4 Variação de área n-p normalizadas em relação ao valor de área n-p correspondente à redução de 50% da espessura

Uma etapa fundamental deste estudo foi a normalização da variação de área não proporcional pelo seu valor correspondente à redução da espessura em 50%. Esta normalização permitiu verificar que a variação de área n-p segue um mesmo padrão, independente da relação de forma que o corpo de prova possua.

A figura 4.4 mostra que para materiais com diferentes relações de forma, as curvas normalizadas tendem a fundirem-se, formando uma única curva. Essas curvas normalizadas são fundamentais para a determinação da relação da variação de área proposta neste estudo, pois a partir delas será conduzida a normalização da variação de área n-p pela relação de forma da seção transversal mínima.

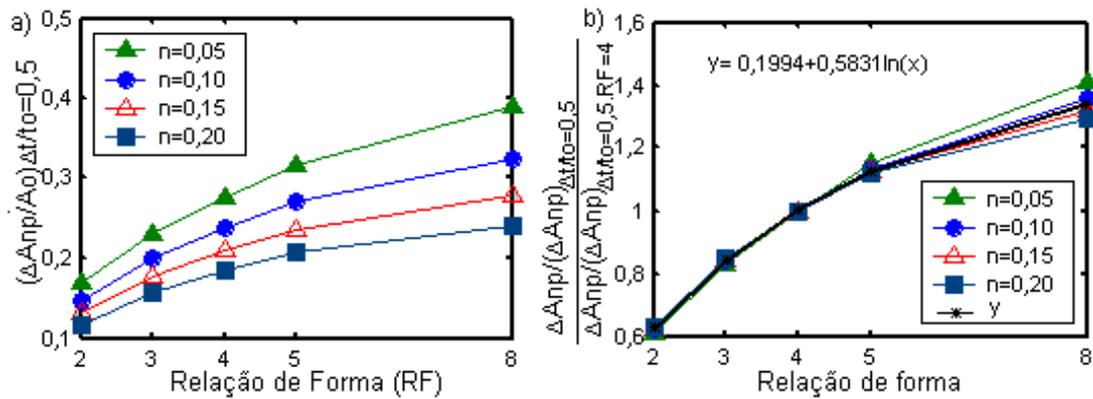


Figura 4.5: a) Valores de variação de área n-p correspondentes à redução de 50% da espessura na seção mínima pela relação de forma da seção transversal. b) Variação de área n-p em cada material normalizada pelo respectivo valor da variação n-p correspondente à redução de 50% na espessura do corpo de prova com relação de forma $RF = 4$.

4.1.5 Normalização da variação de área n-p pela relação de forma da seção

A figura 4.5a apresenta os valores de variação de área n-p correspondentes à redução de 50% da espessura na seção mínima pela relação de forma da seção transversal, para os diferentes materiais do modelo diferenciados aqui, pelos respectivos expoentes de encruamento n .

Como pode ser observado, os valores de variação de área n-p nos corpos de prova com relação de forma $RF = 2$ apresentam-se bem próximos uns aos outros, mas conforme esta relação aumenta, a distância entre os pontos da variação de área também cresce.

Também foi observado no decorrer da variação de área n-p de cada material um padrão crescente e a partir daí, foi possível normalizar a evolução da variação de área n-p em cada material pelo respectivo valor da variação n-p correspondente à redução de 50% na espessura do corpo de prova com relação de forma $RF = 4$.

Foi constatado que a variação de área n-p se desenvolve seguindo um padrão (figura 4.5b) que foi definido pela função logarítmica $f_{RF}(RF)$ (eq.4.2) e que agora pode ser prevista para corpos de prova com qualquer relação de forma a partir do correspondente valor para relação de forma $RF = 4$.

$$f_{rf}(RF) = 0,1994 + 0,5831 \ln(RF) \quad (4.2)$$

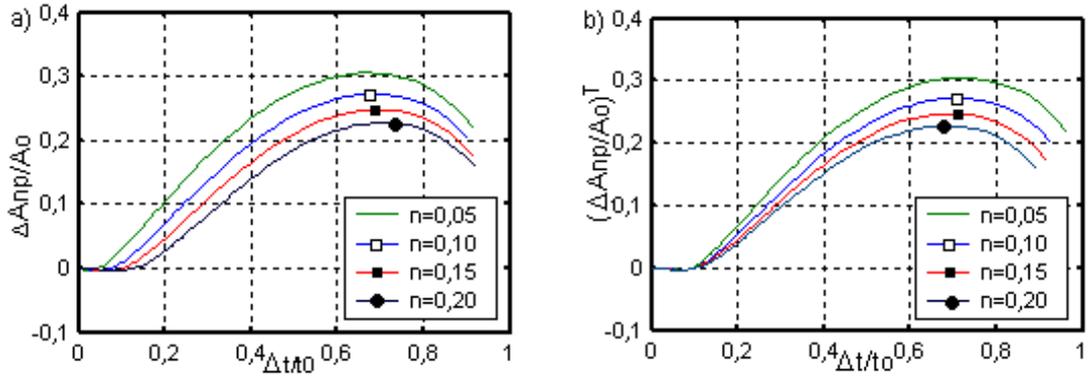


Figura 4.6: a) Variação de área n-p para $RF = 4$ com $n = 0,05, 0,10, 0,15$ e $0,20$. b) Curvas de variação de área n-p transladadas pela transformação da eq.4.3.

sendo que:

- $f_{RF}(RF)$ é a função que descreve a influência da relação de forma na evolução de variação de área n-p;
- RF é referente à relação de forma da seção transversal do corpo de prova;
- Observação: Se RF for igual a 4, então $f_{RF}(4)$ será igual a 1.

4.1.6 Normalização pela deformação na carga máxima

O comportamento evolutivo das curvas de variação de área n-p normalizadas pelos seus respectivos valores correspondentes à redução de 50% da espessura indicou que apesar de se iniciarem em estágios distintos de redução de espessura, estas curvas são muito semelhantes .

Para normalizar a variação n-p pela carga máxima foram selecionadas e plotadas as curvas $\Delta Anp/A_0$ (figura 4.6a dos corpos de prova com relação de forma $RF = 4$ de diferentes expoentes de encruamento ($n = 0,05, 0,10, 0,15$ e $0,20$). O passo seguinte foi transladar as curvas utilizando a equação (4.3), esta operação consiste em transformar as curvas fazendo com que todas tenham o mesmo valor de redução de espessura para o qual se inicia a variação n-p no material com $n = 0,15$.

$$\frac{\Delta t^T}{t_0} = \frac{\Delta t}{t_0} - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{m\acute{a}x}} + \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{m\acute{a}x}}^{n=0,15} \quad (4.3)$$

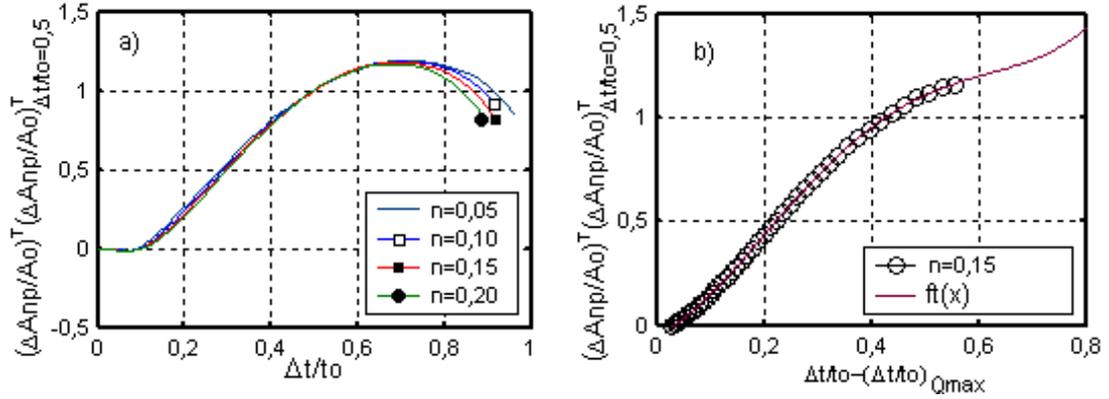


Figura 4.7: a) Variação de área n-p dos corpos de prova com $RF = 4$ dos diferentes materiais transladados pela equação (3.9) e normalizados pelos respectivos valores correspondentes de redução da espessura à 50%. b) Variação de área n-p correspondente ao material com $n = 0,15$, transladada e normalizada pelo respectivos valores na redução de espessura em 50% e a equação de 4ª ordem que a reproduz.

- $\frac{\Delta t}{t_0}^T$ é o valor da variação de espessura transladado para o correspondente valor de onde a variação de área tem início no material com $n = 0,15$;
- $\frac{\Delta t}{t_0}$ é a variação de espessura de um material qualquer com expoente de encuramento n diferente de 0,15;
- $\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}}$ é a variação de espessura do material qualquer, correspondente à carga máxima se tração;
- $\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}}^{n=0,15}$ é a variação de espessura do material com $n = 0,15$, correspondente à carga máxima se tração.

O último passo foi normalizar as curvas de variação de área transformadas $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)^T$ pelos seus respectivos valores correspondentes à redução de 50% da espessura $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)^T_{\frac{\Delta t}{t_0}=0,5}$. Este procedimento resultou em uma curva generalizada de variação de área n-p (figura 4.7a) gerada a partir da normalização pela deformação sofrida na carga máxima de tração, que está descrita pela equação (4.4). Como a variação de área n-p só se inicia após a carga máxima, no eixo das abcissas da figura 4.7b foi subtraído o valor correspondente à redução de espessura na carga máxima, $\frac{\Delta t}{t_0} - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{max}}$.

$$f_t(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \quad (4.4)$$

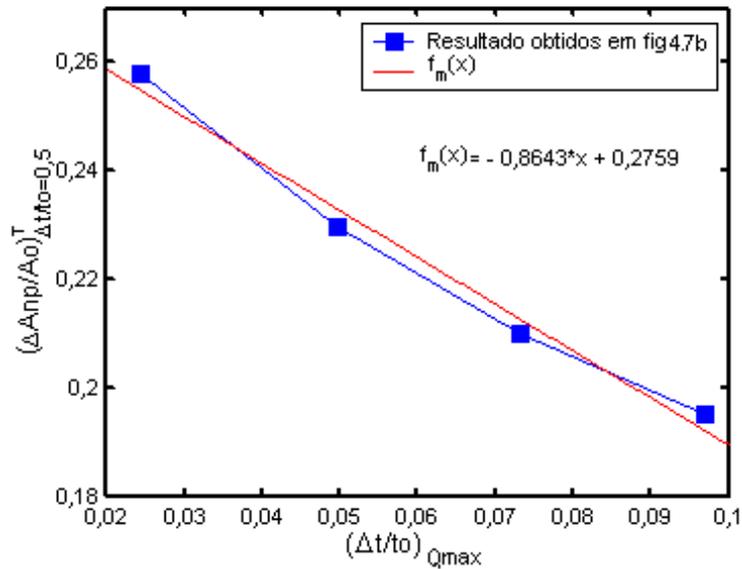


Figura 4.8: Função f_m que reproduz os valores de variação n-p transformada correspondentes à redução de 50% de espessura nas suas respectivas cargas máximas de tração.

Sendo $x = \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right) - \left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}}$:

- $f_t(x)$ é a função que descreve a influência da carga máxima de tração no comportamento da redução de espessura para a evolução da variação de área n-p;
- $c_0 = -0,04306$;
- $c_1 = 0,99118$;
- $c_2 = 11,249$;
- $c_3 = -24,818$
- $c_4 = 15,104$.

Os valores de variação de área n-p transformada $\left(\frac{\Delta A_{np}}{A_0}\right)_{\Delta t/t_0=0,5}^T$ e redução de espessura na carga máxima $\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}}$ utilizados para a normalização das curvas na figura 4.7 estão plotados na figura 4.8.

Então a equação (4.5) representa o efeito do encruamento do material na variação de área n-p pela caracterização do material através do parâmetro $\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}}$.

$$f_m \left(\left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{máx}} \right) = 0,2759 - 0,8643 \left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{máx}} \quad (4.5)$$

Sendo $\left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{máx}}$ o valor de redução de espessura correspondente à carga máxima de tração.

4.1.7 Comparação entre as curvas de tensão-deformação verdadeira obtidas por FEM e pela formulação dos materiais ideais

Para verificar a confiabilidade da formulação para a determinação da variação de área que foi proposta na equação (3.14), foram comparadas as curvas de tensão-deformação verdadeira calculadas utilizando os valores da área deformada obtidos diretamente pelo modelo de elementos finitos (exatas) e as curvas calculadas utilizando a equação (3.14) (aproximadas). Esta análise paramétrica foi conduzida nos materiais idealizados representados aqui pelos expoentes de encruamento $n = 0,05, 0,10, 0,15$ e $0,20$.

Com base nos gráficos apresentados pelas figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 podemos verificar que a equação (3.14) fornece boa concordância entre as aproximações dos valores de variação de área utilizados na determinação das curvas de tensão-deformação verdadeira.

Bastando ressaltar que os corpos de prova com relação de forma $RF = 8$ apresentam a formação da estrição localizada prematuramente, fato que impede a determinação do curva de tensão-deformação verdadeira além deste ponto.

4.1.8 Correção das curvas pela equação de Bridgman

Como foi comentado anteriormente as curvas tensão-deformação apresentam valores de tensão verdadeira um pouco acima da realidade, esta condição é resultado da influência do estado traixial de tensões introduzido ao ser atingida a carga máxima de tração, caracterizando o início da estrição difusa.

Para amenizar este desvio foi utilizada a equação de Bridgman [10] para corrigir os valores da tensão verdadeira afetados pela estrição e estas novas curvas foram comparadas com as curvas de escoamento extraídas através da equação (3.1) e introduzidas no modelo de elementos finitos para a simulação do ensaio de tração axial.

Os gráficos apresentados pelas figuras 4.14, 4.15 e 4.16 indicam concordância entre os seus

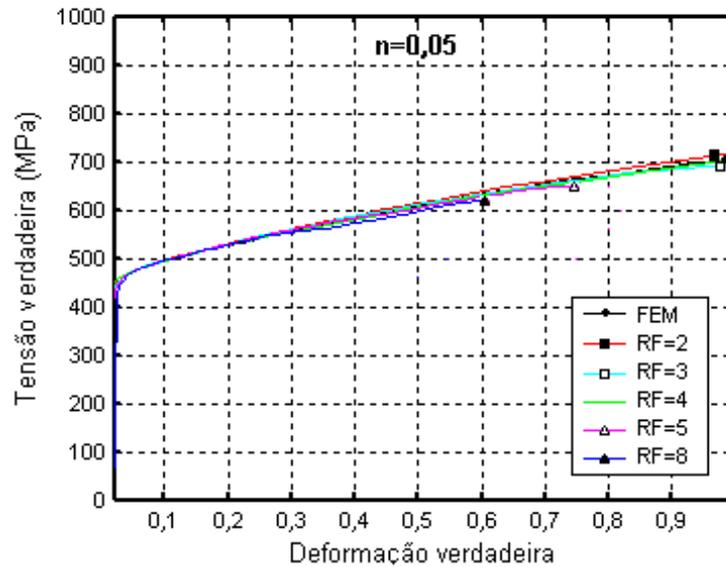


Figura 4.9: Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,05$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos.

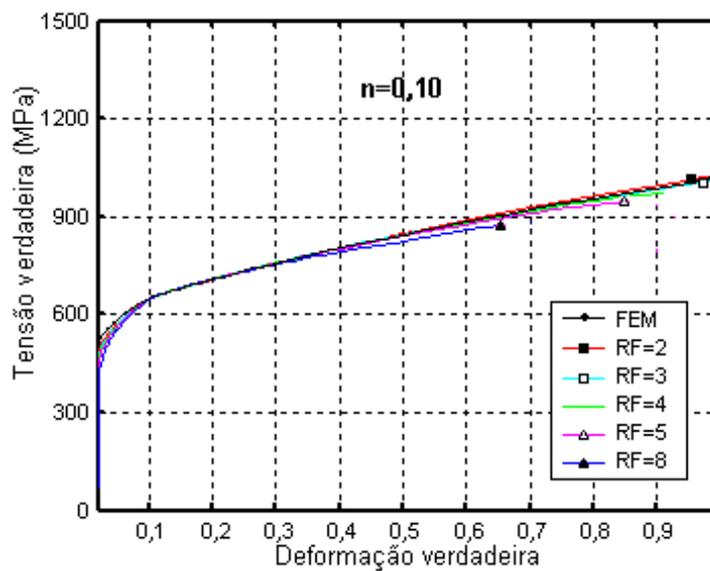


Figura 4.10: Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,10$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos.

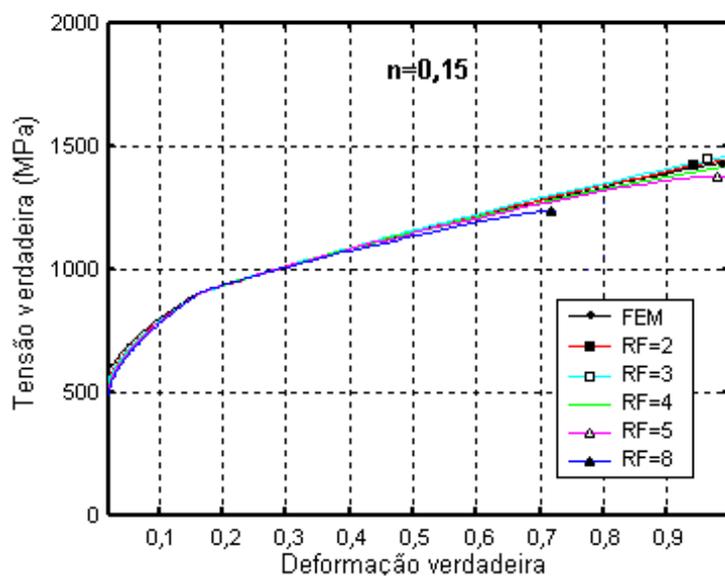


Figura 4.11: Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,15$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos.

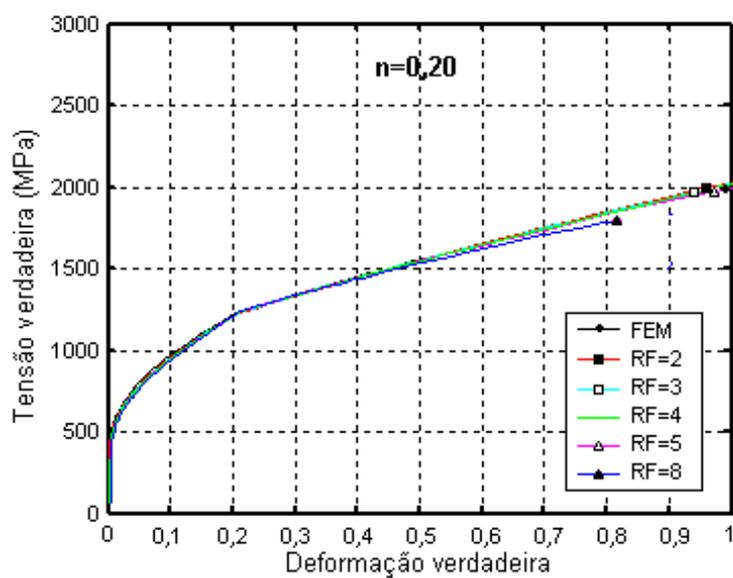


Figura 4.12: Curvas de tensão-deformação verdadeira do material com $n = 0,20$ obtidas através da formulação proposta comparadas com a curva extraída diretamente do modelo de elementos finitos.

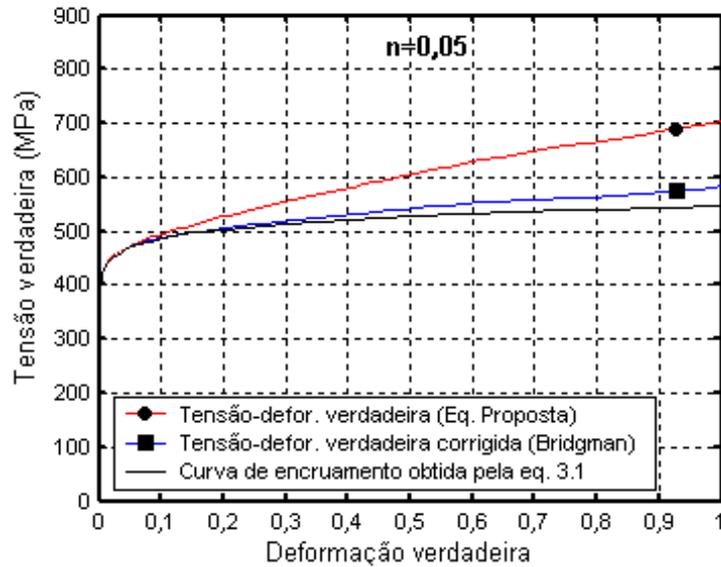


Figura 4.13: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de Elementos Finitos extraída da equação (3.1) para o material com $n = 0,05$.

resultados. Já para o material de baixo encruamento $n = 0,05$ a curva de tensão-deformação verdadeira não apresentou uma convergência tão boa quanto as demais, figura 4.13. Porém, ainda assim o desvio máximo foi 6,5%.

Podemos concluir que o modelo de elementos finitos implementado para simular o corpo de prova retangular submetido à tração axial forneceu subsídios coerentes com relação ao comportamento do corpo de prova sob o efeito da estrição no ensaio de tração axial.

4.2 Resultados experimentais

Os ensaios experimentais foram conduzidos visando o monitoramento da evolução de estrição através da variação de espessura na seção transversal mínima em função do acréscimo na carga de tração axial. A partir das informações coletadas experimentalmente foram levantadas as curvas de tensão-deformação verdadeira dos materiais submetidos ao ensaio de tração utilizando a formulação proposta na equação (3.14).

Estas curvas tensão-deformação verdadeiras experimentais foram então submetidas à correção de Bridgman (eq.3.15) e introduzidas no modelo de elementos finitos para que nele fossem geradas as informações sobre a variação de espessura e carregamento necessárias para a

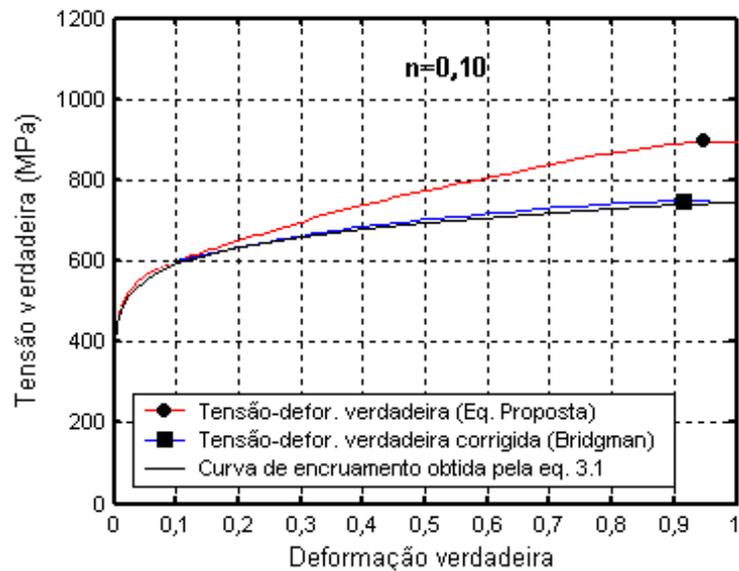


Figura 4.14: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de Elementos Finitos extraída da equação (3.1) para o material com $n = 0,10$.

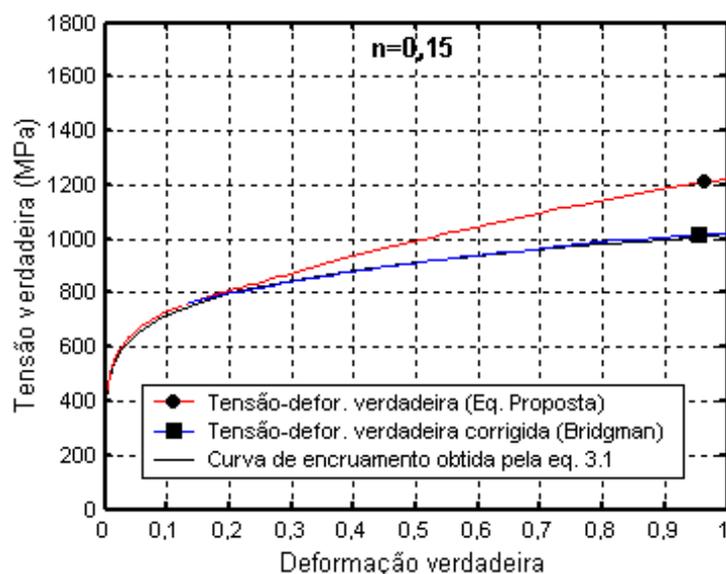


Figura 4.15: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de Elementos Finitos extraída da equação (3.1) para o material com $n = 0,15$.

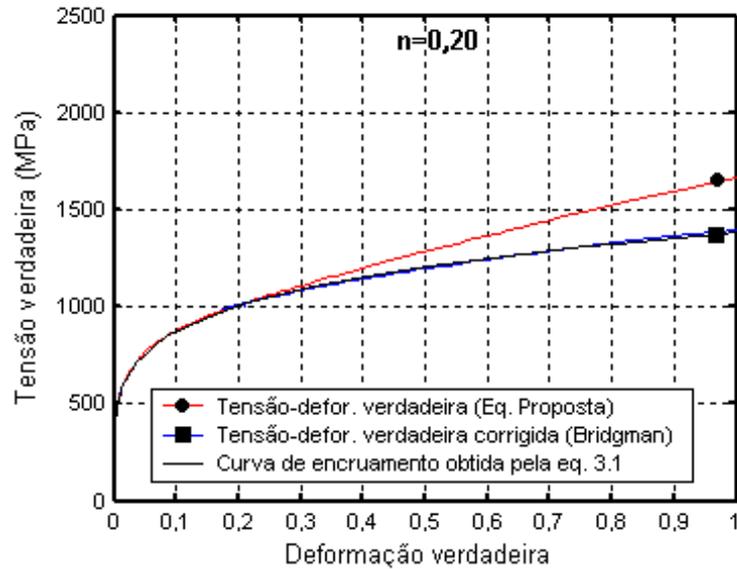


Figura 4.16: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de Elementos Finitos extraída da equação (3.1) para o material com $n = 0,20$.

verificação através da utilização da equação (3.14) e para a determinação da curvas tensão-deformação verdadeira (FEM) corrigidas pela equação de Bridgman, eq.(3.15).

Inicialmente visava-se comparar as curvas tensão-deformação verdadeiras obtidas experimentalmente por corpos de prova cilíndricos e retangulares, contudo a indisponibilidade de materiais com as mesmas características mecânicas na forma de barras e chapas inviabilizou uma análise paramétrica direta entre os procedimentos de ensaio de corpos de prova retangulares e cilíndricos. Por isso a forma encontrada para avaliar a representatividade da formulação foi levar as curvas experimentais obtidas para o modelo de elementos finitos e avaliar se as curvas extraídas após a simulação eram compatíveis com as mesmas.

Os resultados numéricos e experimentais obtidos para o aço inox 316 (chapa) apresentaram desvio máximo entre si de 5,5%, este desvio foi considerado pequeno visto que o material possui propriedades mecânicas (tensão de escoamento e expoente de encruamento) muito diferentes das observadas nos materiais idealizados que foram utilizados na construção da formulação proposta, eq.(3.14), é possível observar alto valor de $n = 0,53$, (calculado pela eq.(4.6), obtida da fig.4.8) e a carga máxima de tração que foi atingida para deformação verdadeira referente à $\varepsilon = 0,58$, fig.4.17.

$$n = -0,00131817 + 2,07053 * \left(\frac{\Delta t}{t_0} \right)_{Q_{m\acute{a}x}} \quad (4.6)$$

A chapa de aço inox 316 apresentou os seguintes resultados experimentais:

- Tensão máxima de engenharia, $S_{m\acute{a}x} = 646,9 \text{ MPa}$;
- Deformação de engenharia na tensão máxima, $e_{S_{m\acute{a}x}} = 0,4492$;
- Tensão verdadeira na carga máxima, $\sigma_{Q_{m\acute{a}x}} = 1173,1 \text{ MPa}$;
- Deformação verdadeira de colapso plástico, $\varepsilon_{Q_{m\acute{a}x}} = 0,5963$.

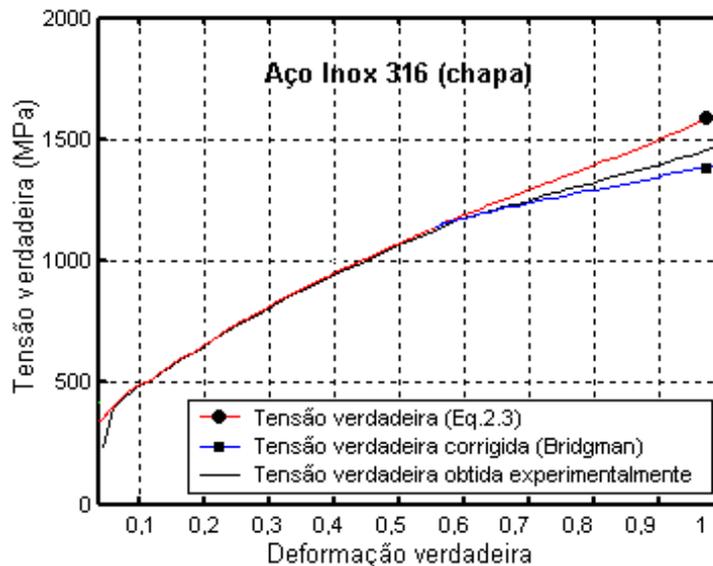


Figura 4.17: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o aço inox 316 (chapa).

O aço inox 316 (barra) apresentou resultados mais precisos, pois as curvas de tensão-deformação verdadeira ficaram praticamente sobrepostas com desvio máximo de 1,14%. Entretanto o registro de deformações superiores a $\varepsilon = 0,57$ foi impossibilitado em virtude da ruptura dos corpos de prova ao atingir tal limite, fig.4.19. A barra de aço inox 316 apresentou os seguintes resultados experimentais:

- Tensão máxima de engenharia, $S_{m\acute{a}x} = 794 \text{ MPa}$;

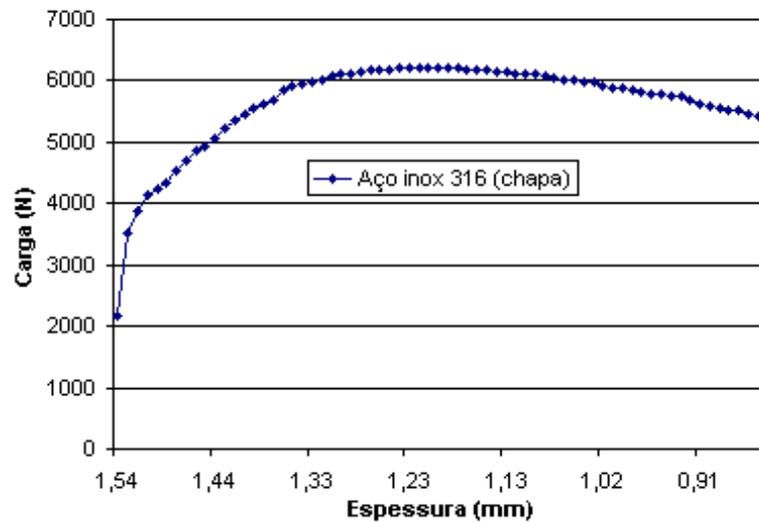


Figura 4.18: Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do aço inox 316 (chapa).

- Deformação de engenharia na tensão máxima, $e_{S_{m\acute{a}x}} = 0,3395$;
- Tensão verdadeira na carga máxima, $\sigma_{Q_{m\acute{a}x}} = 1202 \text{ MPa}$;
- Deformação verdadeira de colapso plástico, $\varepsilon_{Q_{m\acute{a}x}} = 0,4148$.

Para o alumínio 3105-H14 (chapa) o surgimento da estricção localizada também restringiu coleta de informações para a curva de tensão-deformação verdadeira experimental à deformação de $\varepsilon = 0,5$. Contudo, como o desvio máximo observado foi de apenas 3% é possível estimar que os valores de deformação verdadeira superiores a $\varepsilon = 0,5$ podem ser interpolados pelos valores extraídos do modelo numérico, fig.4.21. A chapa de alumínio 3105-H14 apresentou os seguintes resultados experimentais:

- Tensão máxima de engenharia, $S_{m\acute{a}x} = 150 \text{ MPa}$;
- Deformação de engenharia na tensão máxima, $e_{S_{m\acute{a}x}} = 0,0688$;
- Tensão verdadeira na carga máxima, $\sigma_{Q_{m\acute{a}x}} = 160,3 \text{ MPa}$;
- Deformação verdadeira de colapso plástico, $\varepsilon_{Q_{m\acute{a}x}} = 0,0713$.
- Expoente de encruamento experimental, $n = 0,054$.

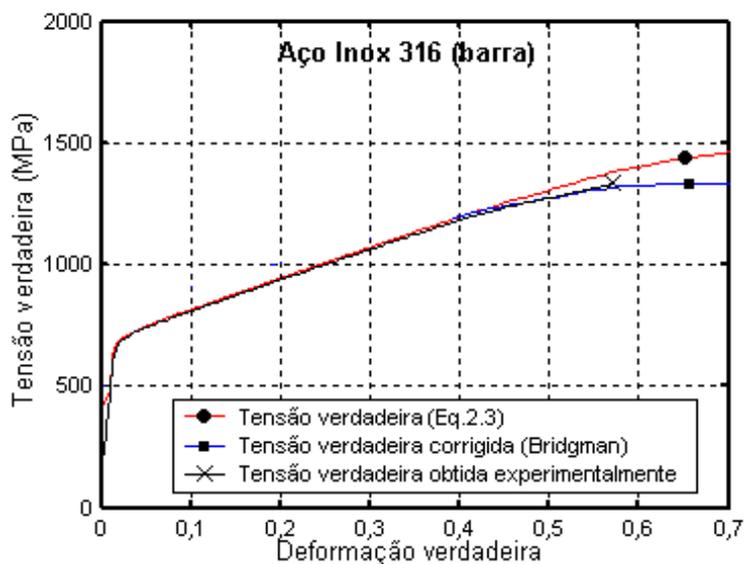


Figura 4.19: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o aço inox 316 (barra).

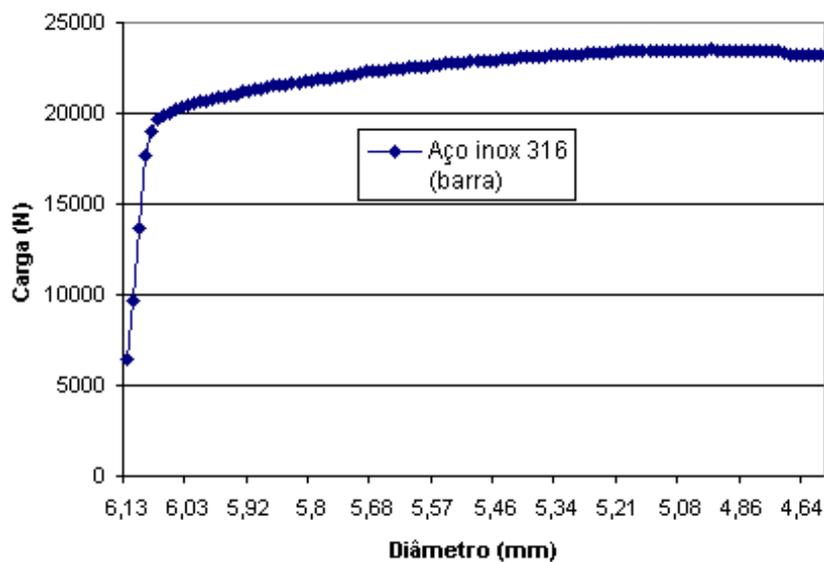


Figura 4.20: Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do aço inox 316 (barra).

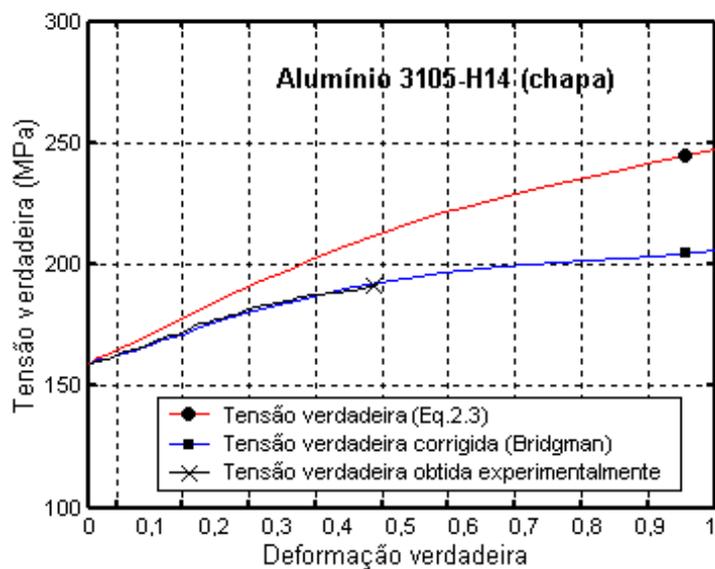


Figura 4.21: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o alumínio 3105-H14.

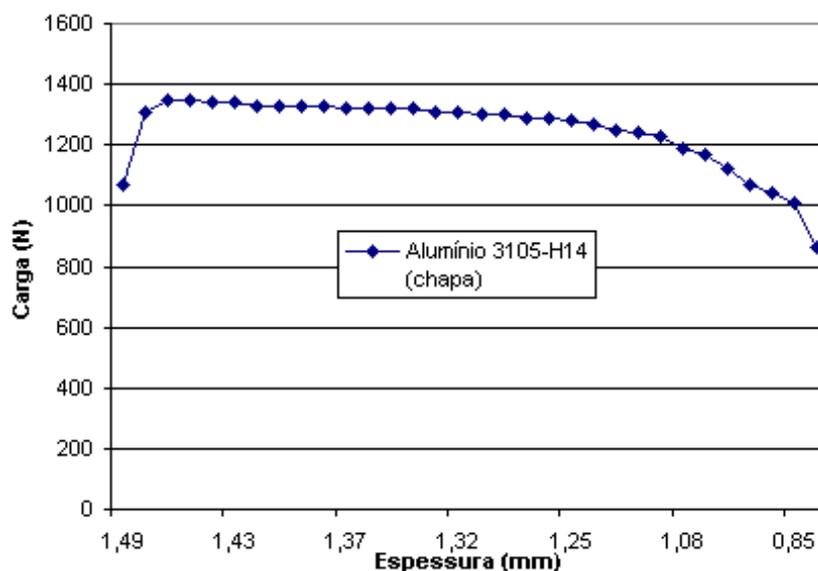


Figura 4.22: Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do alumínio 3105-H14 (chapa).

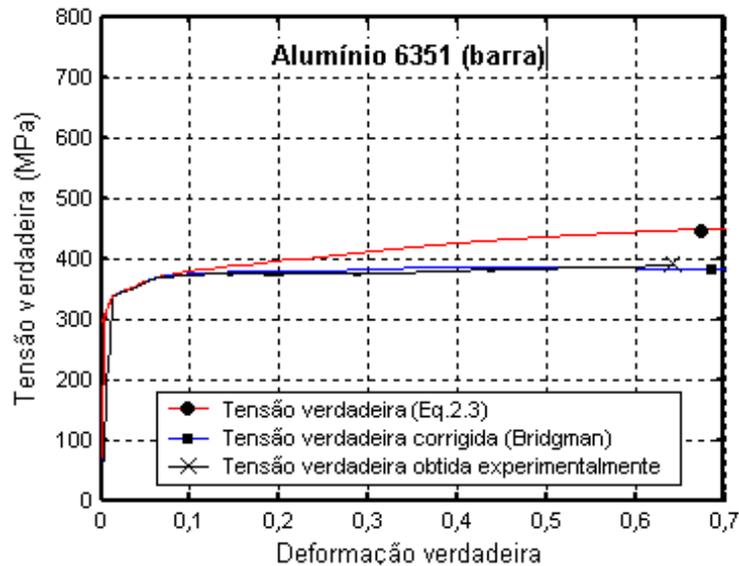


Figura 4.23: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o alumínio 6351.

O alumínio 6351 (barra) seguiu a mesma tendência e forneceu uma curva experimental restrita a deformações em torno de $\varepsilon = 0,64$. Este alumínio apesar de ser mais resistente a esforços de tração do que o 3105-H14, este apresentou um encruamento modesto e desvio máximo de 1,8%, fig.4.23. A barra de alumínio 6351 apresentou os seguintes resultados experimentais:

- Tensão máxima de engenharia, $S_{m\acute{a}x} = 343,4 \text{ MPa}$;
- Deformação de engenharia na tensão máxima, $e_{S_{m\acute{a}x}} = 0,0637$;
- Tensão verdadeira na carga máxima, $\sigma_{Q_{m\acute{a}x}} = 1173,1 \text{ MPa}$;
- Deformação verdadeira de colapso plástico, $\varepsilon_{Q_{m\acute{a}x}} = 0,0658$.

Para o cobre CA122 (chapa) o desvio máximo constatou-se irrisório ficando em apenas 0,25%. A fragilidade do cobre permitiu que o monitoramento da deformação verdadeira no corpo de prova fosse registrada até $\varepsilon = 0,58$, pois foi neste ponto que ocorreu a ruptura do material, fig.4.25. A chapa de cobre CA122 apresentou os seguintes resultados experimentais:

- Tensão máxima de engenharia, $S_{m\acute{a}x} = 285,6 \text{ MPa}$;
- Deformação de engenharia na tensão máxima, $e_{s_{m\acute{a}x}} = 0,1194$;

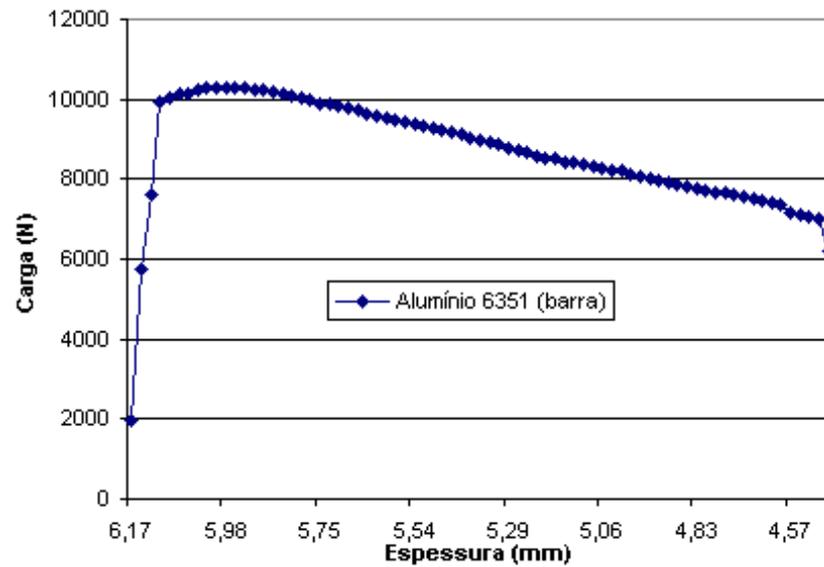


Figura 4.24: Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do alumínio 6351 (barra).

- Tensão verdadeira na carga máxima, $\sigma_{Q_{m\acute{a}x}} = 324,3 MPa$;
- Deformação verdadeira de colapso plástico, $\varepsilon_{Q_{m\acute{a}x}} = 0,1201$.
- Expoente de encruamento experimental, $n = 0,12$.

As amostras de cobre CA110 (barra) forneceram informações suficientes para monitorar a sua deformação verdadeira até $\varepsilon = 0,91$ e o desvio máximo registrado foi de 1,7%, fig.4.27. A chapa de cobre CA122 apresentou os seguintes resultados experimentais:

- Tensão máxima de engenharia, $S_{m\acute{a}x} = 310,1 MPa$;
- Deformação de engenharia na tensão máxima, $e_{s_{m\acute{a}x}} = 0,00971$;
- Tensão verdadeira na carga máxima, $\sigma_{Q_{m\acute{a}x}} = 313,1 MPa$;
- Deformação verdadeira de colapso plástico, $\varepsilon_{Q_{m\acute{a}x}} = 0,00976$.

Com base nestes resultados podemos afirmar que a formulação proposta na equação (3.14) fornece resultados consistentes para a determinação das curvas de tensão-deformação verdadeira, ainda que para materiais isotrópicos com propriedades mecânicas tão distintas entre si.

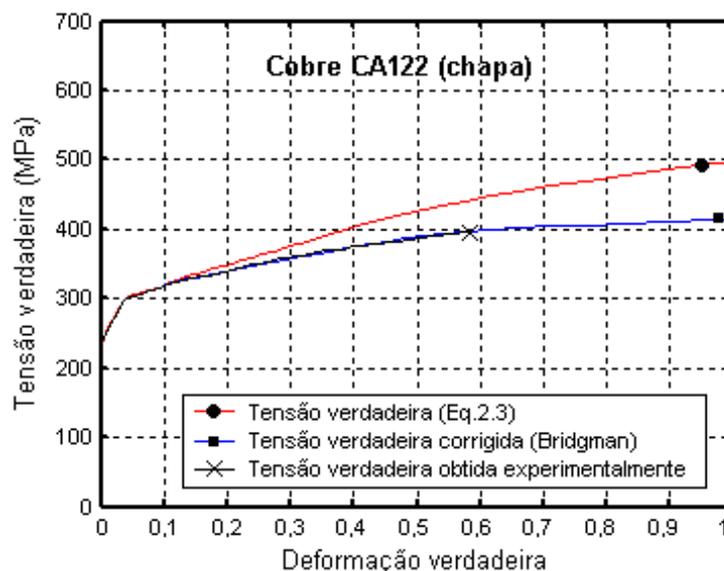


Figura 4.25: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o cobre CA122.

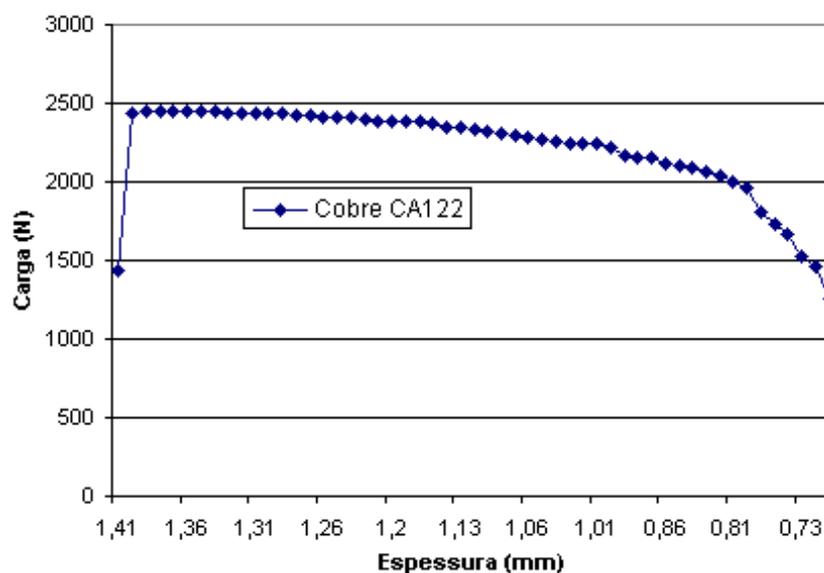


Figura 4.26: Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do cobre CA122 (chapa).

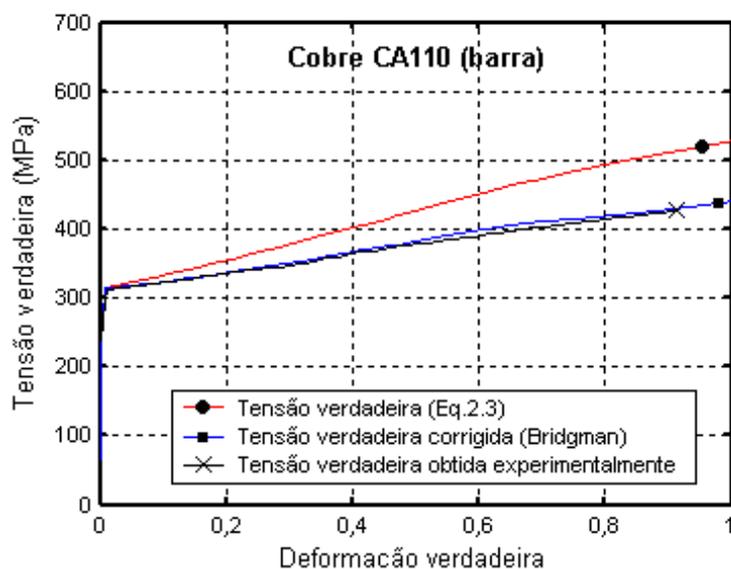


Figura 4.27: Comparação entre a curva de tensão-deformação verdadeira, tensão-deformação verdadeira corrigida pela equação de Bridgman e a curva de encruamento introduzida no modelo de elementos finitos obtida experimentalmente para o cobre CA110.

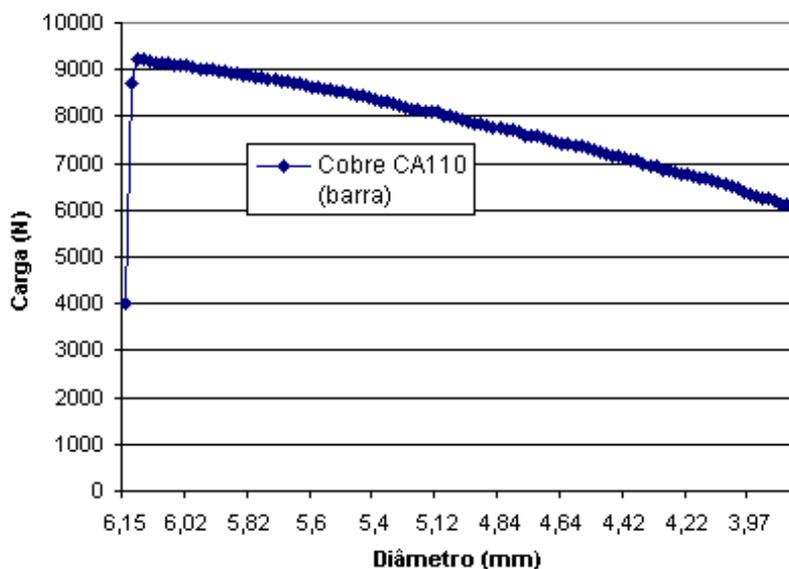


Figura 4.28: Dados brutos carga-espessura do ensaio de tração do cobre CA110 (barra).

Capítulo 5

Conclusão

A utilização de uma equação algébrica para descrever um fenômeno complexo como a variação de área da seção transversal em corpos de prova de chapa fina, simplifica valiosamente o processo de obtenção das propriedades da curva tensão-deformação verdadeira, fornecendo subsídios que poderão ser utilizados em análises de processos de estampagem ou ainda em análises de dano e fratura.

Obter informações confiáveis dos fornecedores a respeito de algumas propriedades mecânicas dos materiais submetidos aos ensaios experimentais foi um dos obstáculos enfrentados durante este estudo, dificultando em parte a comparação entre os resultados experimentais.

A correlação observada entre carga máxima de tração e variação de espessura foi fundamental para a determinação da curva tensão-deformação verdadeira através de corpos de prova de seção transversal retangular, pela relativa simplicidade em sua identificação e registro nos ensaios experimentais.

É correto afirmar também que a metodologia utilizada nos ensaios apresenta limitações quanto ao registro manual dos dados relativos à variação de espessura, por não se tratar de um método inteiramente automatizado, e sim manual. Contudo, a relação custo-benefício justifica a sua utilização por não fazer uso de equipamentos caros e frágeis, tornando viável a sua utilização fora do ambiente restrito da pesquisa científica. A utilização da equação (3.14) para o monitoramento da variação de área pré e pós-estricção juntamente com o modelo de elementos finitos que foi implementado para simular não-linearidade e grandes deformações impostas ao corpo de prova de seção retangular solicitado à tração axial para obter a curva

tensão-deformação verdadeira apresentaram resultados concordantes.

As imperfeições iniciais utilizadas para induzir a formação da estricção difusa, garantiram de fato, que o fenômeno se desenvolve no centro de simetria longitudinal dos corpos de prova, facilitando assim o posicionamento dos aparelhos de medição no decorrer dos ensaios experimentais.

Os resultados obtidos experimentalmente e numericamente corroboram a validade da utilização da equação de Bridgman para a correção das tensões longitudinais em corpos de prova retangulares.

A utilização de parâmetros geométricos dos corpos de prova e também dos parâmetros mecânicos característicos dos materiais, usados para normalizar as curvas de variação de área não-proporcional, simplifica a determinação das curvas de tensão-deformação verdadeiras. Podemos citar entre eles:

- Carga máxima de tração axial;
- Valor da variação de área não-proporcional correspondente à carga máxima de tração;
- Valor da variação de área não-proporcional correspondente à redução de 50% da espessura.

Com relação à aplicabilidade da equação de variação de área, foram obtidos resultados satisfatórios mesmo para materiais com características de encruamento superiores às que foram definidas para o estudo, como é o caso do aço inox 316, que apresenta $n = 0,53$.

As propostas para trabalhos futuros são:

- Extensão deste estudo a materiais ortotrópicos;
- Verificação do comportamento deformado em materiais não metálicos;
- Automação do processo de aquisição de dados na espessura dos corpos de prova;
- Testes adicionais em materiais com curvas de escoamento não conformes ao modelo para aferir a precisão da equação (4.6), que relaciona o expoente de encruamento n com a redução espessura na carga máxima de tração $\left(\frac{\Delta t}{t_0}\right)_{Q_{máx}}$;
- Determinação experimental do coeficiente de Poisson no regime de deformação plástica.

Bibliografia

- [1] ABNT, NBR-6152, *Materiais Metálicos - Determinação das propriedades mecânicas à tração*, 1980.
- [2] ANSYS 7.0 Release, Helpdesk
- [3] ARONOFSKY, J., *Evaluation of stress distribution in the symmetrical neck of flat tensile bars*, Journal of Applied Mechanics, vol.18, Dallas, U.S.,1951.
- [4] ASTM, A-370-77, *Mechanical testing of steel products*, 1977.
- [5] ASTM, E-8M, *Standart test methods for tension testing metallic materials [Metric]¹*,1997.
- [6] BATHE, K.-J. *Finite element procedures in engineering analysis*, Prentice-Hall, Inc., N.J., USA, 1982.
- [7] BUENO, J.C.C., *Vocabulário Internacional de Metrologia - INMETRO*, Portaria INMETRO nº 029, Brasil,1995.
- [8] CHEN, W.F., HAN, D.J., *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, New York, USA,1988.
- [9] COOK, R.D., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E. *Concepts and applications of finite element analysis*, John WKiley & Sons, N.Y., 1988.
- [10] DIETER, G.E.Jr.,*Mechanical Metallurgy*, International student edition, MacGraw-Hill,1961.
- [11] HINTON, E., OWEN, D.R.J., *Finite elements in plasticity*, Pineridge, Swansea,U.K.,1980.

-
- [12] HUGHES, T.H. *The finite element method - linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, Inc., N.J., 1987.
- [13] LE ROY, G., EMBURY, J.D., EDWARD, G., ASHBY, M.F., *A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids*, Acta Metallurgica, vol.29, p.1509 a 1522, Great Britain, U.K., 1981.
- [14] MALVERN, E.L. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, prentice-hall, Inc., N.J., 1969.
- [15] NEUBER, H., *Journal of Applied Mechanics*, vol.28, p.544, 1961.
- [16] OWEN, D.R.J., *Computation Plasticity: Small and Large Finite Element Analysis of Inelastic Solids*. U.S., Copyright 1997-2002.
- [17] SOUZA, S.A., *Ensaio mecânicos de materiais metálicos-fundamentos teóricos e práticos*, Ed. Edgard Blucher LTDA., 5ª edição, São Paulo, Brasil, 1982.
- [18] SZABÓ, B., BABUSKA, I. *Finite element analysis*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1991.
- [19] TIMOSHENKO, S. P., KRIEGER, W.S. *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
- [20] TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. *Theory of elastic stability*, 2nd Ed., McGraw-Hill International Book Co. 1985.
- [21] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 3rd. Ed., 1970.
- [22] YANG, T.Y. *Finite element structural analysis*, prentice Hall, Inc., N.J., USA, 1986.
- [23] KNOTT, J.F., *Fundamentals of fracture mechanics*, Butterworth, 3rd ed., Norwich, Great Britain, 1979.
- [24] ZHANG, Z.L., M.HAUGE, J. ODEGARD, C. THAULOW. *Determining material true stress-strain curve from tensile specimens with rectangular cross section*. International Journal of Solids and Structures, ., Trondheim, Norway, 1999.

-
- [25] ZHANG, Z.L.,M.HAUGE,J.ODEGARD,C.THAULOW., *A study on determining true stress-strain curve for anisotropic materials with rectangular tensile bars*. International Journal of Solids and Structures, Trondheim, Norway, 2000.

Apêndice A

Gráficos de distribuição de tensões no modelo de Elementos Finitos

Neste apêndice são apresentados os gráficos de distribuição das tensões de Von Mises atuantes nos modelos de Elementos Finitos, baseados nas informações obtidas através dos materiais testados experimentalmente. :

- Aço inox 316 (barra);
- Alumínio 6351 (barra);
- Cobre CA110 (barra);
- Cobre CA122 (chapa);
- Aço inox 316 (chapa);
- Alumínio 3105-H14 (chapa).

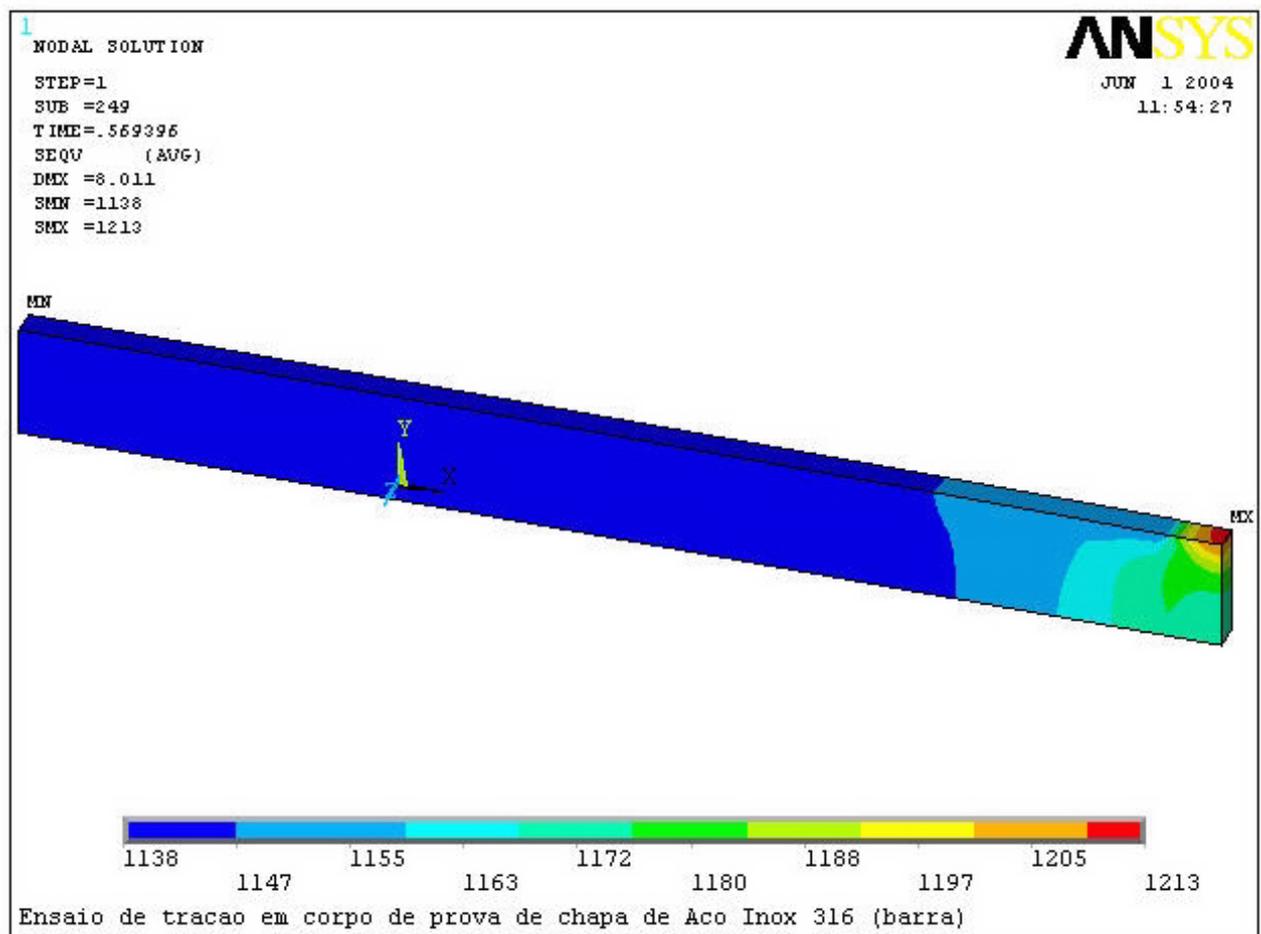


Figura A.1: Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no aço inox 316 (barra).

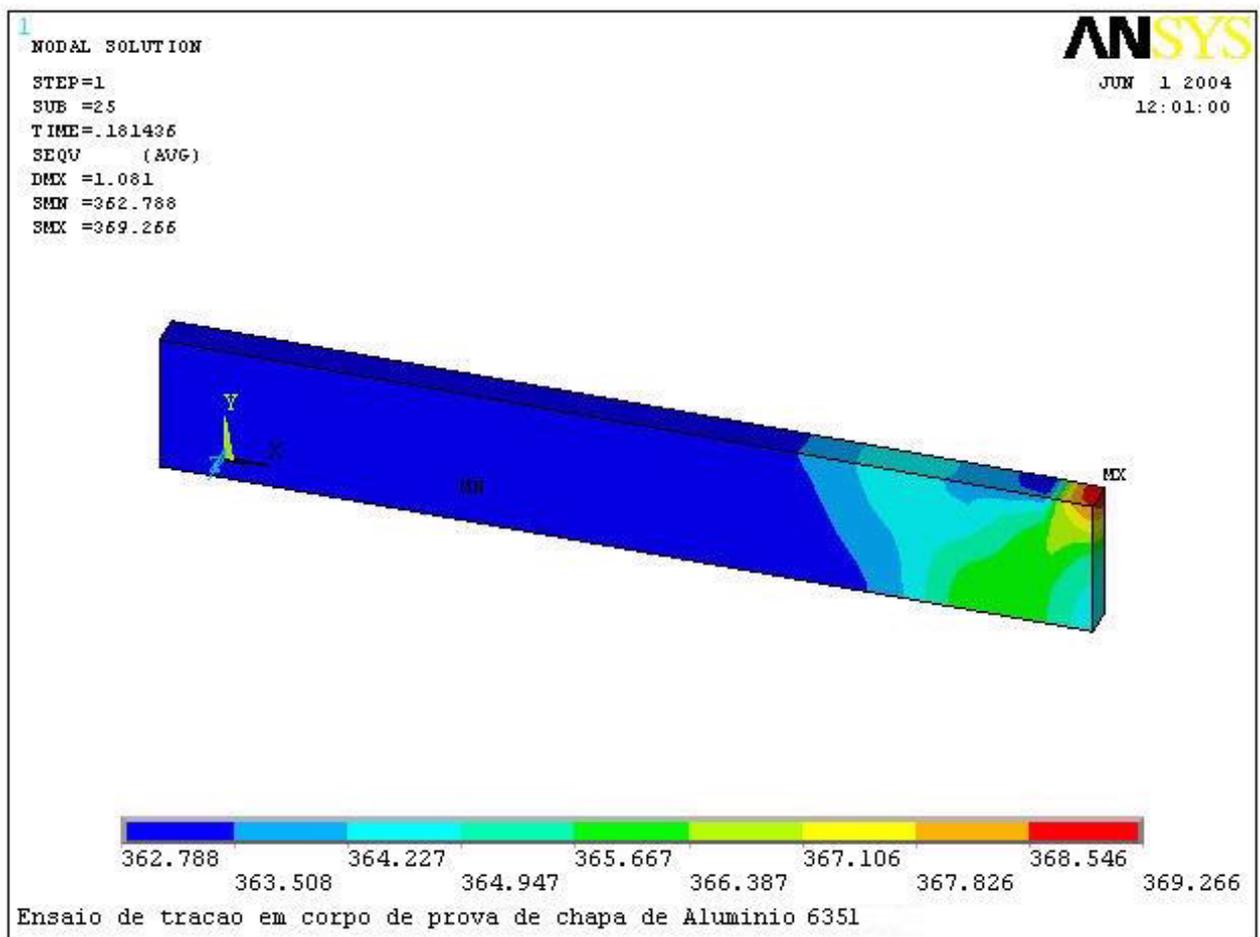


Figura A.2: Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no alumínio 6351 (barra).

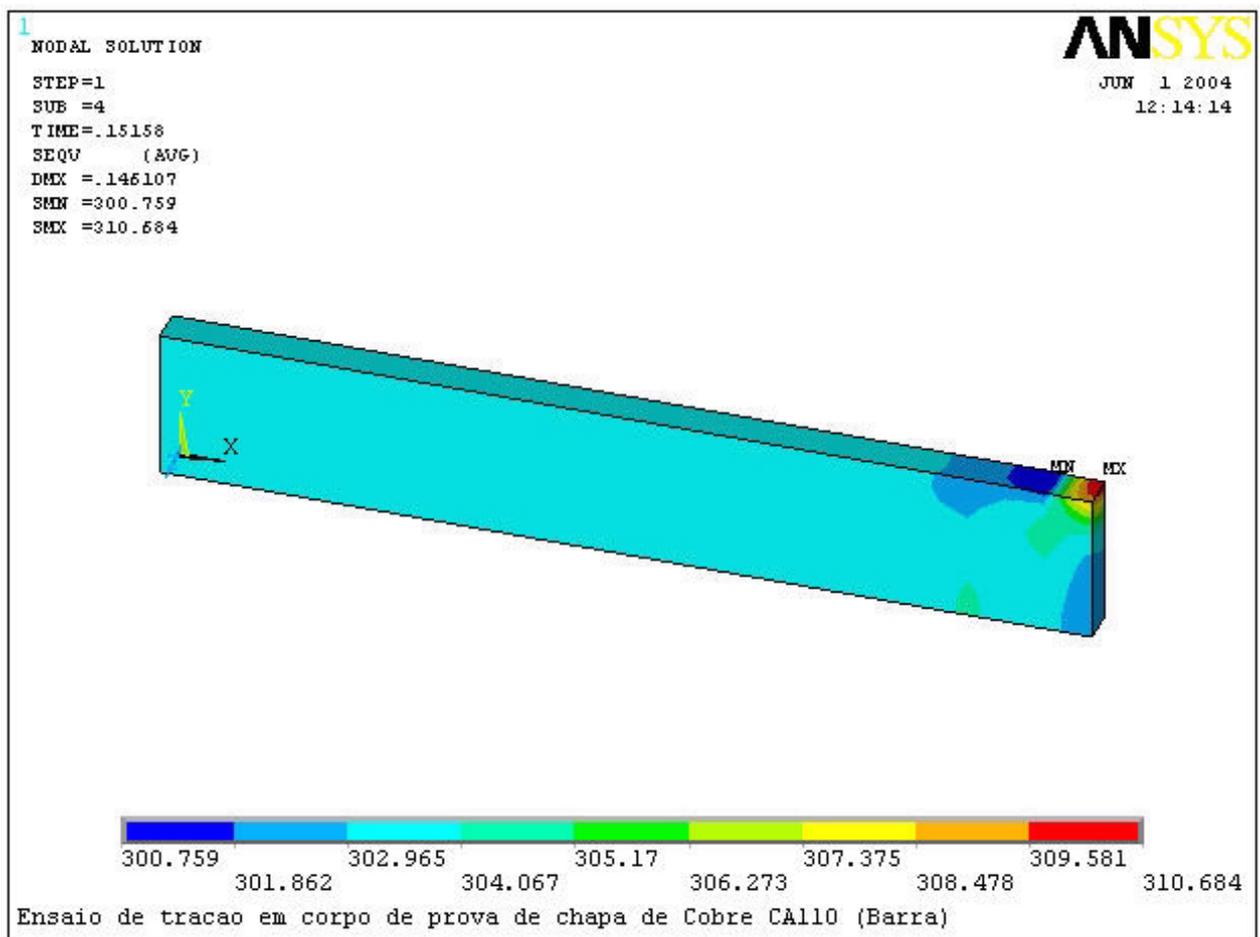


Figura A.3: Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no cobre CA110 (barra).

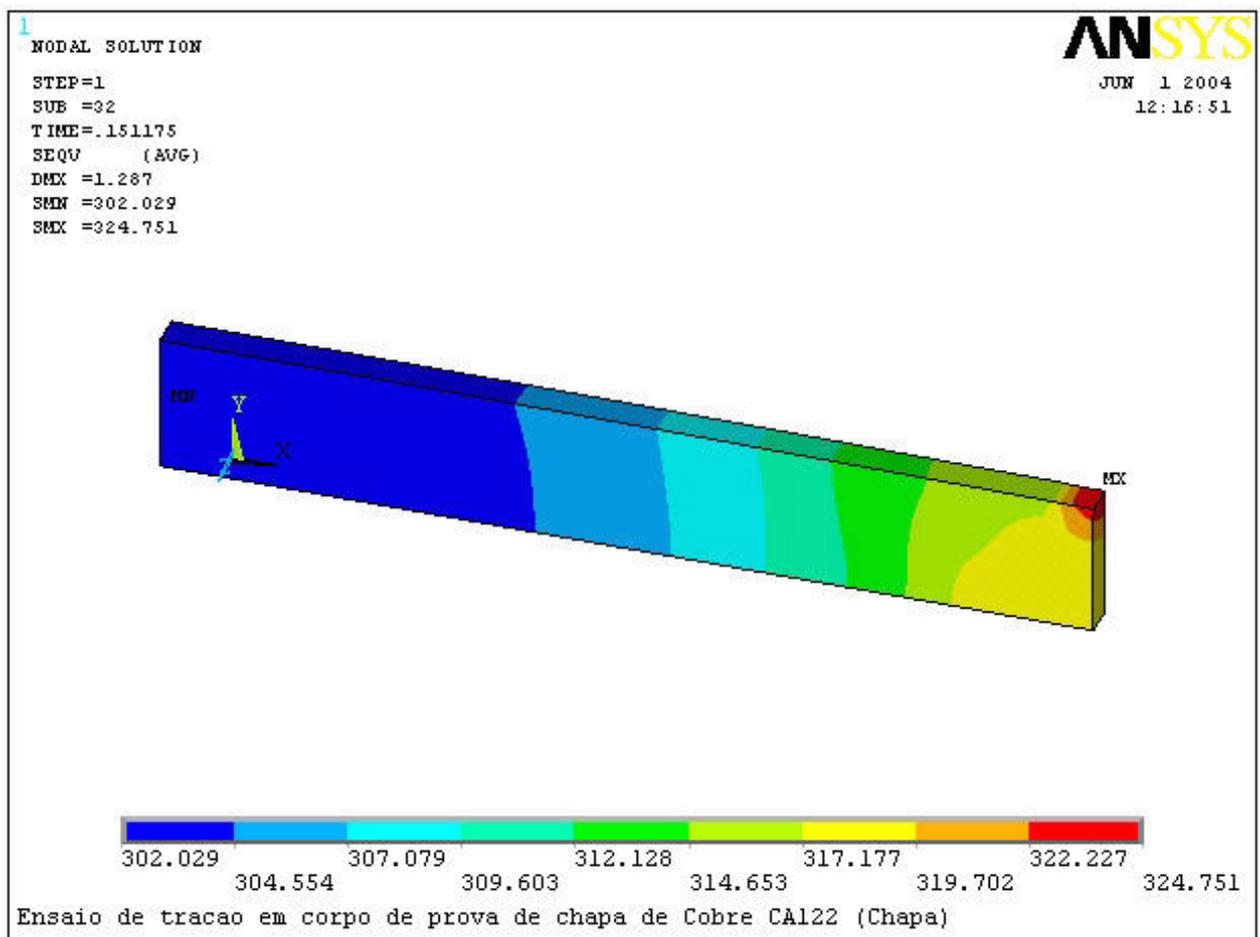


Figura A.4: Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no cobre CA122 (Chapa).

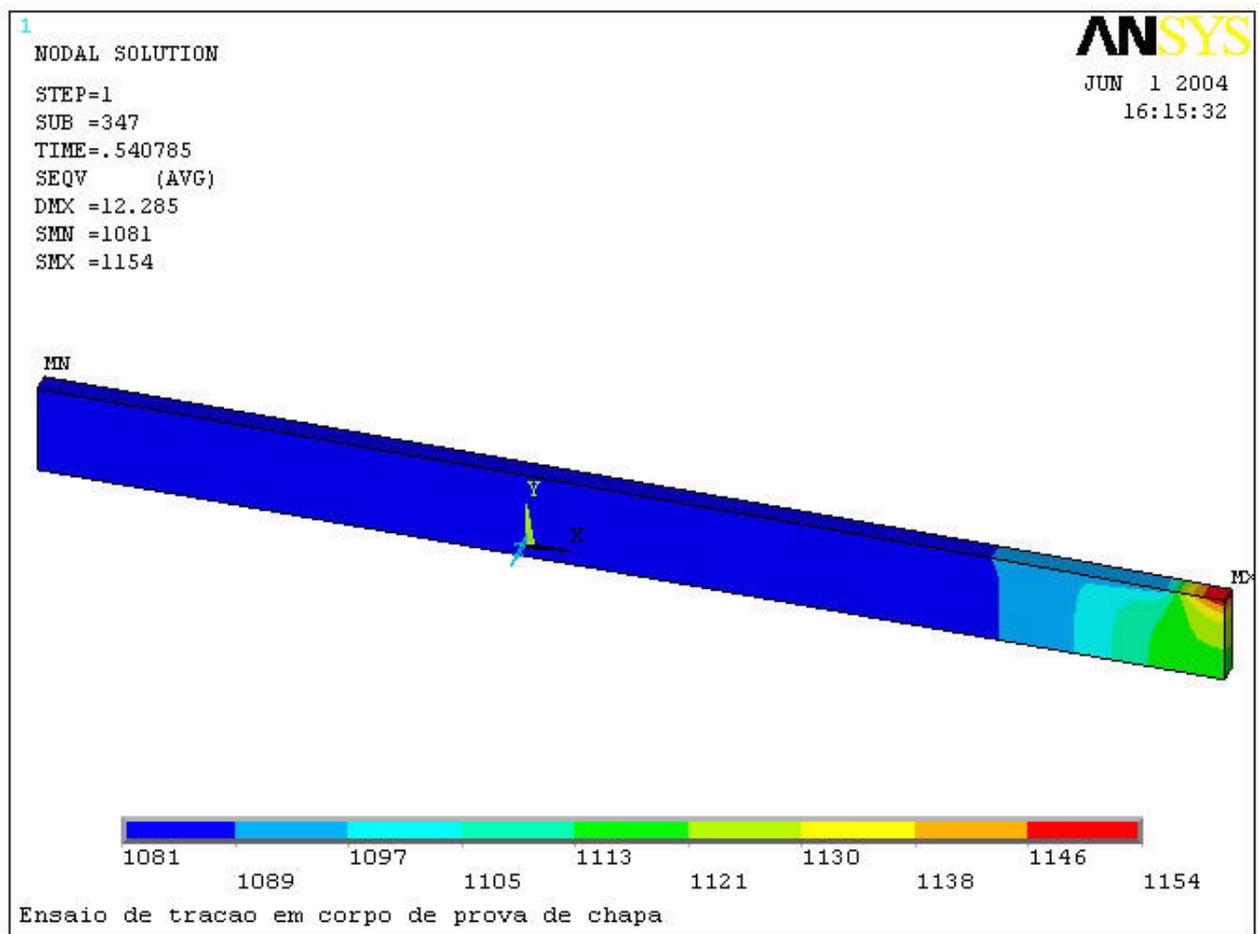


Figura A.5: Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no aço inox 316 (Chapa).

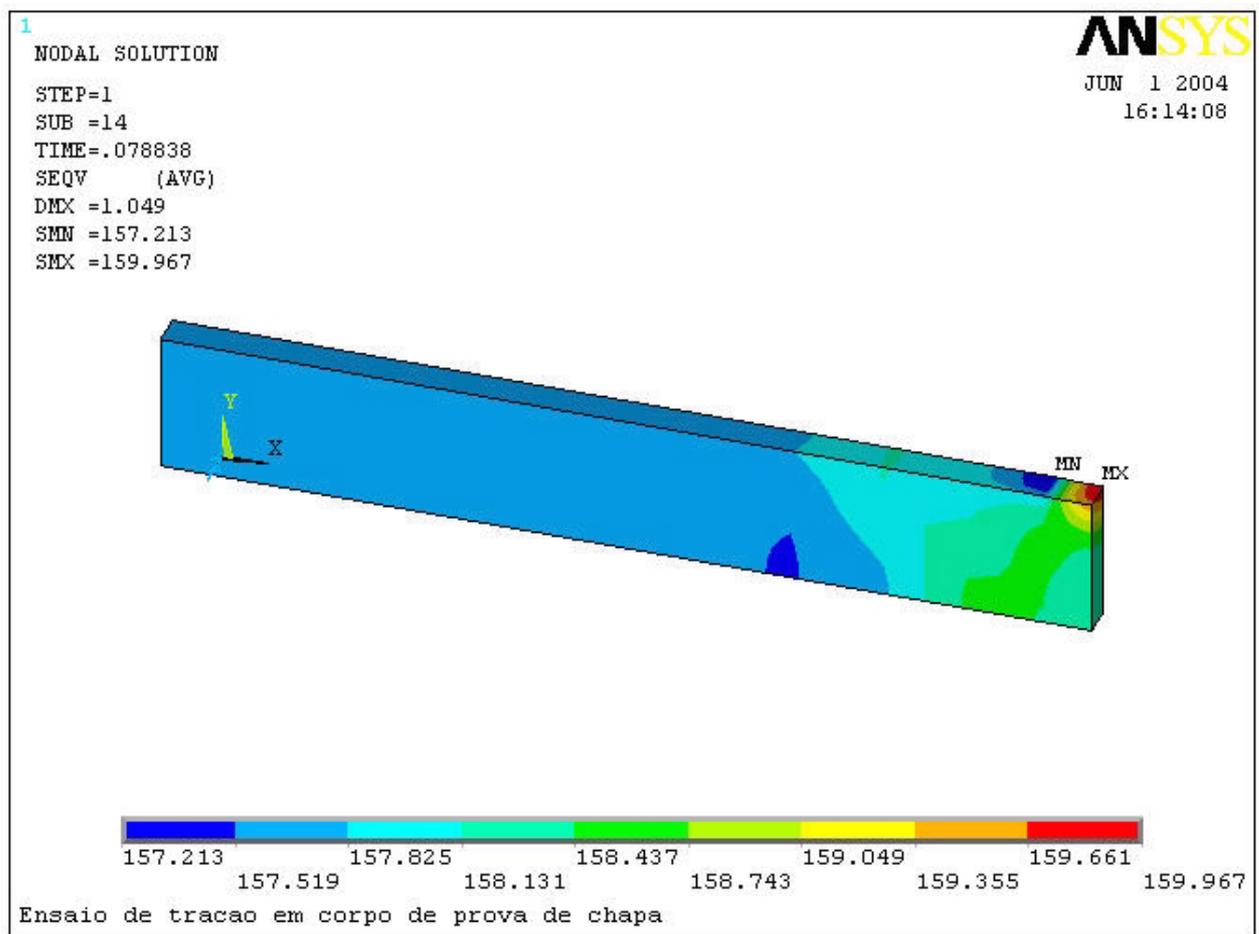


Figura A.6: Distribuição das tensões de von Mises atuantes ao atingir a carga máxima de tração axial no alumínio 3105-H14 (Chapa).

Apêndice B

Corpos de prova levados à ruptura

Neste apêndice estão expostas as fotografias dos corpos de prova utilizados nos ensaios experimentais, a partir delas é possível visualizar o alongamento decorrente da solicitação de tração axial. Elas são apresentadas na seguinte ordem:

- Corpos de prova retangulares de alumínio 3105-H14;
- Corpos de prova retangulares de aço inox 316;
- Corpos de prova retangulares de cobre CA122;
- Corpos de prova cilíndricos de aço Inox 316;
- Corpos de prova cilíndricos de alumínio 6351;
- Corpos de prova cilíndricos de cobre CA110.



Figura B.1: Corpos de prova retangulares de alumínio 3105-H14.



Figura B.2: Corpos de prova retangulares de aço inox 316.

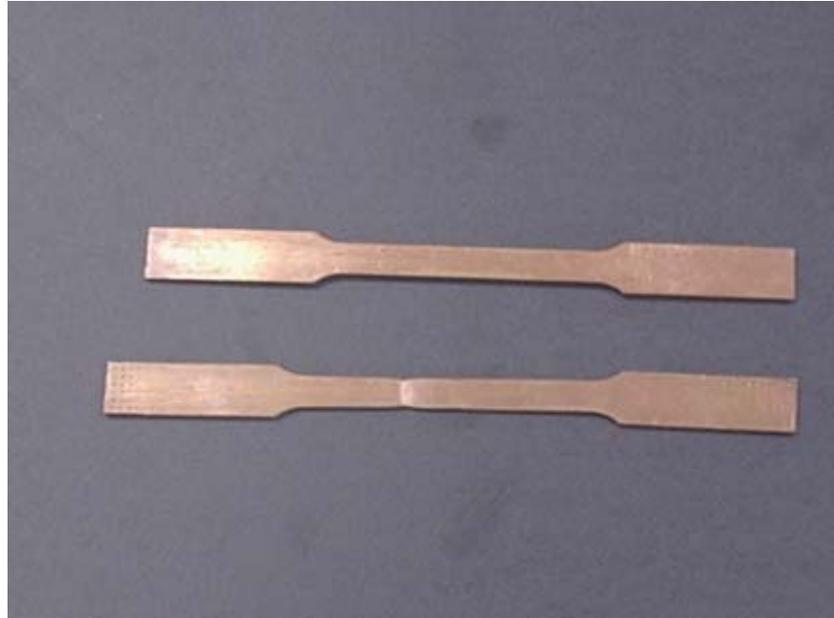


Figura B.3: Corpos de prova retangulares de cobre CA122.

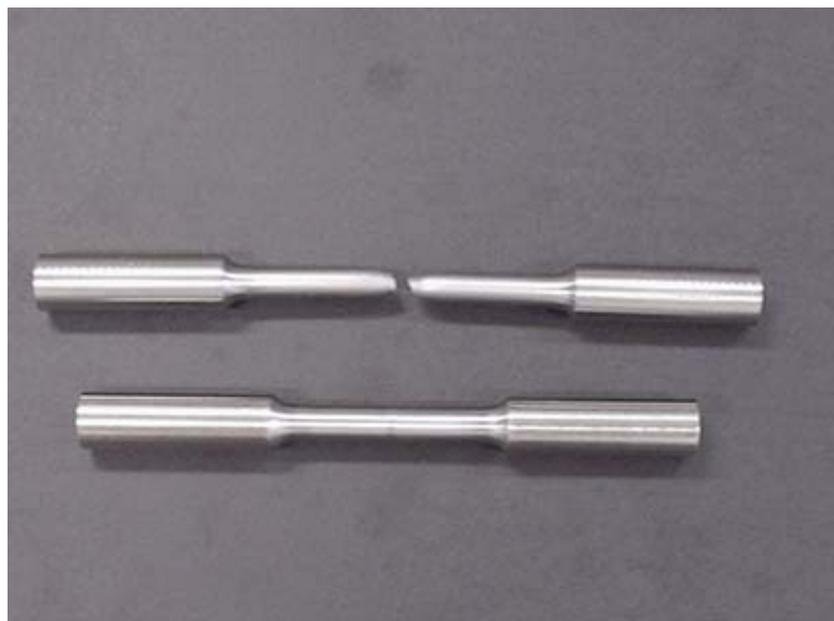


Figura B.4: Corpos de prova cilíndricos de aço inox 316.



Figura B.5: Corpos de prova cilíndricos de alumínio 6351.



Figura B.6: Corpos de prova cilíndricos de cobre CA110.

Apêndice C

Detalhamento dos corpos de prova

- Detalhamento do corpo de prova cilíndrico com diâmetro nominal, $D = 6,25$ mm;
- Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 4$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm;
- Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 2$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm;
- Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 5$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm;
- Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 8$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm.

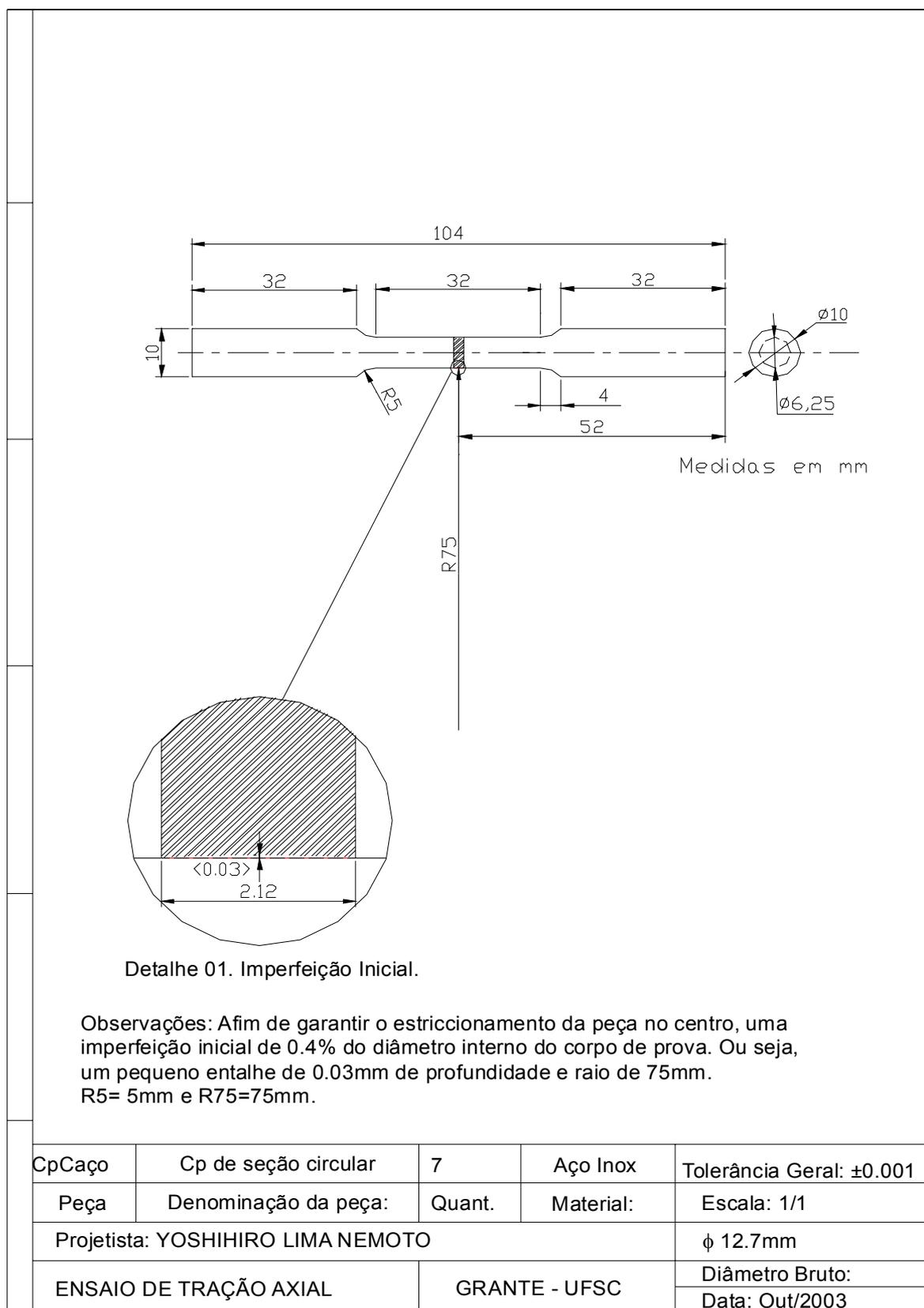


Figura C.1: Detalhamento do corpo de prova cilíndrico com diâmetro nominal, $D = 6,25$ mm

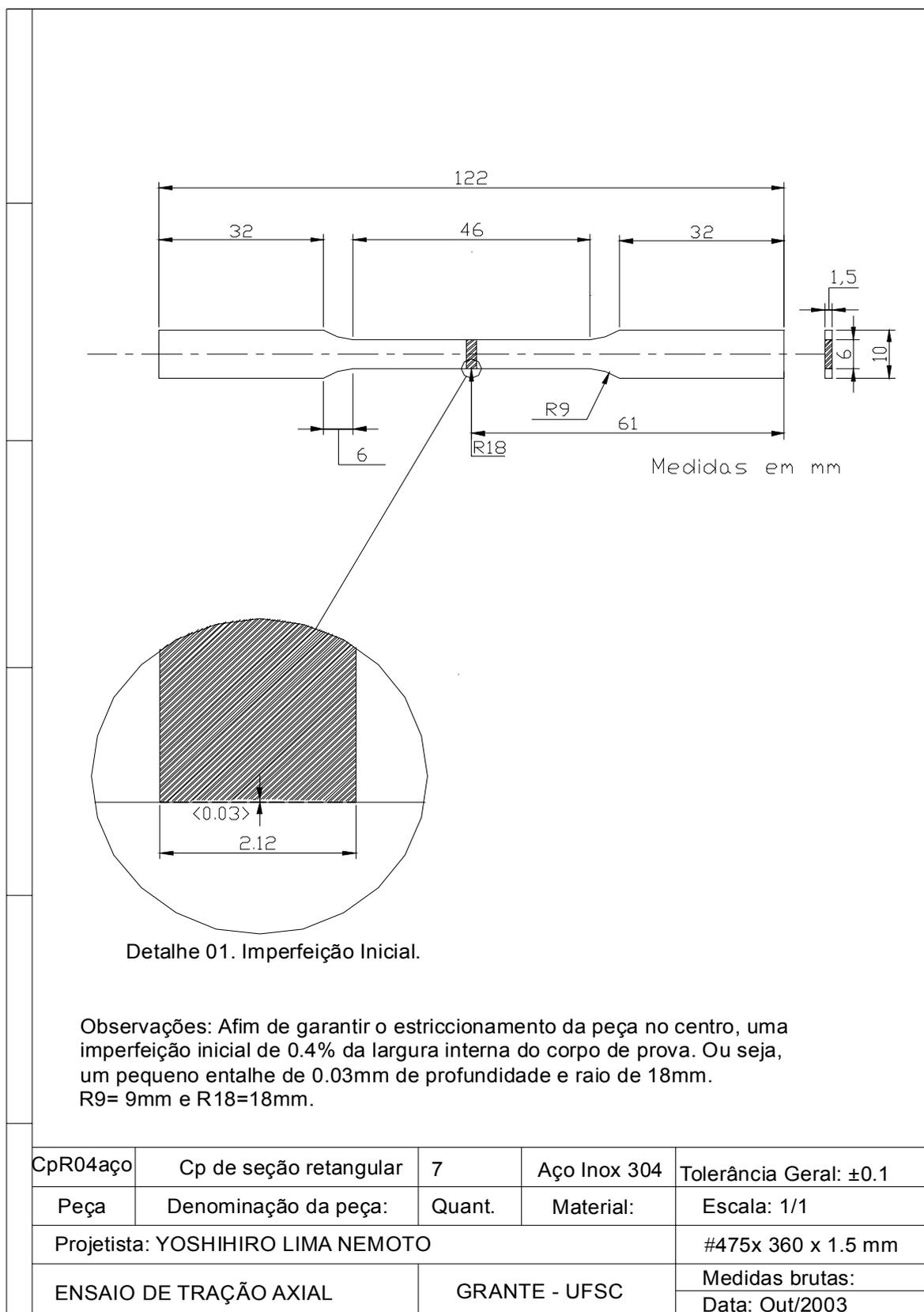


Figura C.2: Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 4$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm.

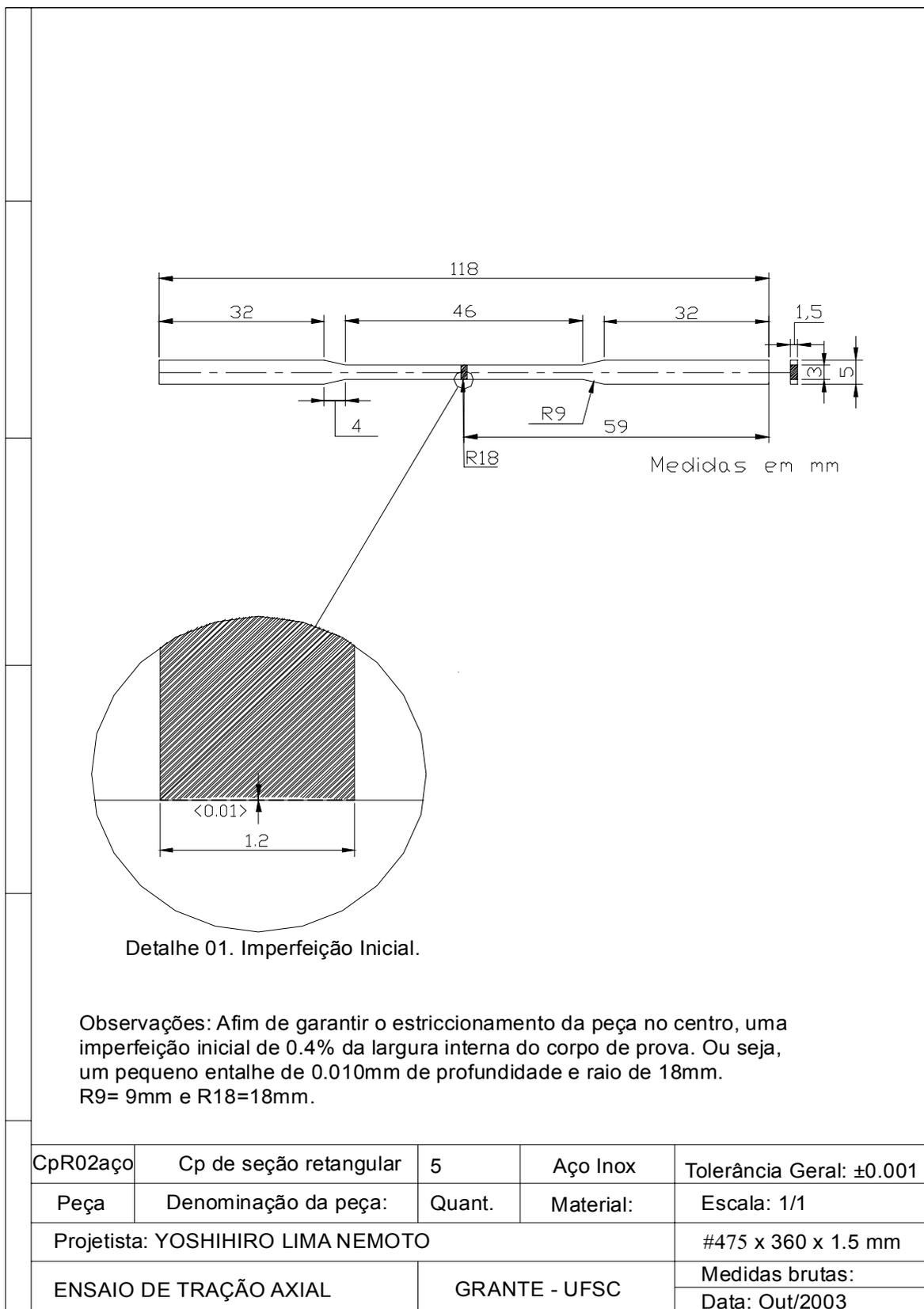


Figura C.3: Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 2$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm.

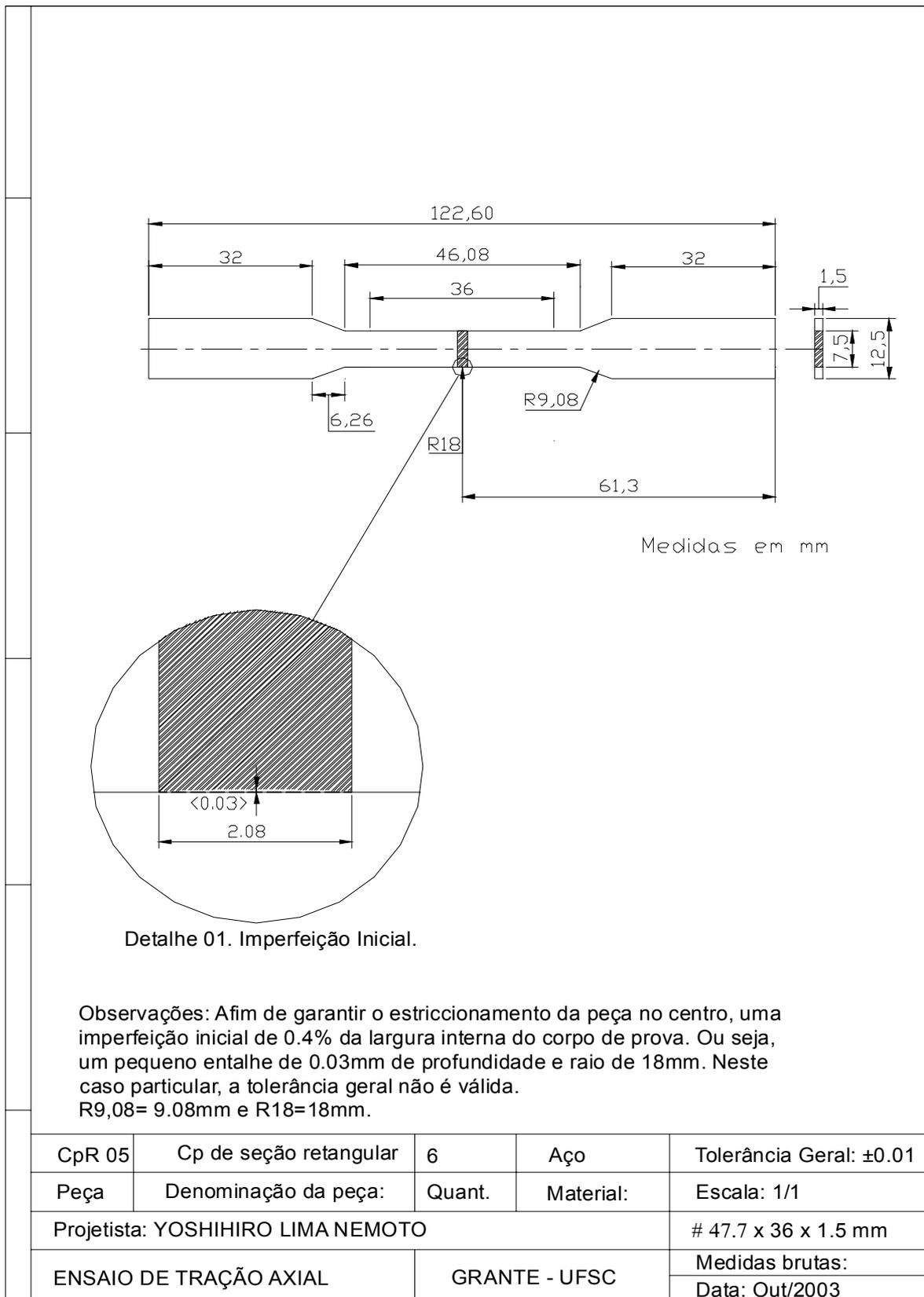


Figura C.4: Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 5$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm.

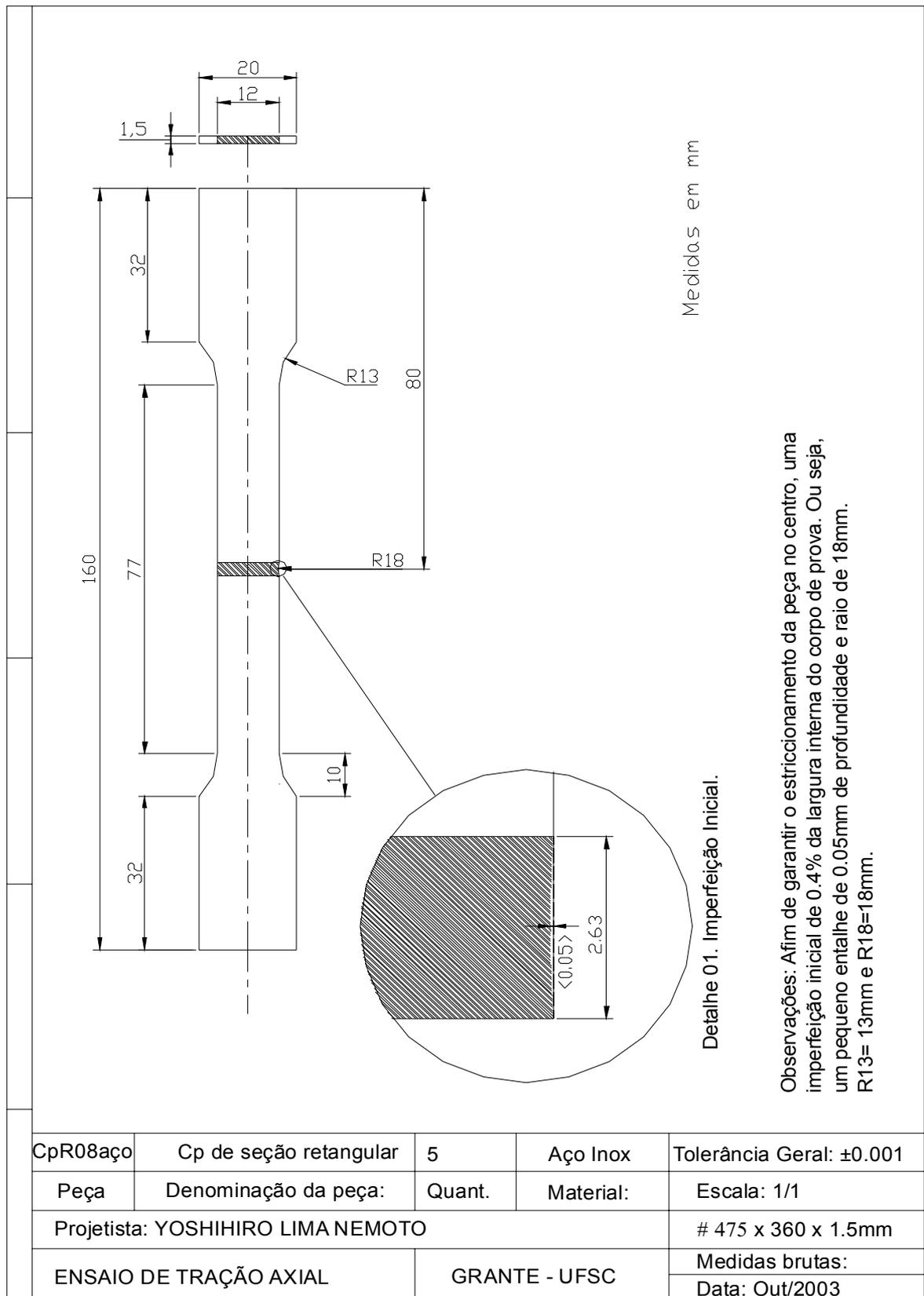


Figura C.5: Detalhamento do corpo de prova retangular com relação de forma $RF = 8$ e espessura nominal, $t = 1,5$ mm.

Apêndice D

Resumo de Vocabulário Internacional de Metrologia

As definições apresentadas a seguir foram reproduzidas a partir do Vocabulário Internacional de Metrologia publicado pelo Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial - INMETRO na Portaria INMETRO nº 029, de 10 de março de 1995.

Grandeza (mensurável)

Atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. O termo “grandeza” pode referir-se a uma grandeza em um sentido geral ou a uma grandeza específica. Grandezas em um sentido geral: comprimento, tempo, massa, temperatura, resistência elétrica, concentração de quantidade de matéria. Grandezas específicas: comprimento de uma barra ou a resistência elétrica de um fio.

Unidade (de medida)

Grandeza específica, definida e adotada por convenção, com a qual outras grandezas de mesma natureza são comparadas para expressar suas magnitudes em relação àquela grandeza. Unidades de medidas tem nomes e símbolos aceitos por convenção. Unidades de grandezas de mesma dimensão podem ter os mesmos nomes e símbolos, mesmo quando as grandezas não são de mesma natureza.

Valor verdadeiro (de uma grandeza)

Valor consistente com a definição de uma dada grandeza específica. É um valor que seria obtido por uma medição perfeita. Valores verdadeiros são, por natureza, indeterminados. O artigo indefinido “um” é usado, preferivelmente ao artigo “o” em conjunto com “valor verdadeiro”, porque podem haver muitos valores consistentes com a definição de uma dada grandeza específica.

Medição

Conjunto de operações que tem por objetivo determinar um valor de uma grandeza.

Procedimento de medição:

Conjunto de operações, descritas especificamente, usadas na execução de medições particulares de acordo com um dado método. Um procedimento de medição é usualmente registrado em um documento, que algumas vezes é denominado procedimento de medição (ou método de medição) e normalmente tem detalhes suficientes para permitir que um operador execute a medição sem informações adicionais.

Indicação (de um instrumento de medição)

Valor de uma grandeza fornecido por um instrumento de medição. O valor lido no dispositivo mostrador pode ser denominado de indicação direta, ele é multiplicado pela constante do instrumento para fornecer a indicação. A grandeza pode ser um mensurando, um sinal de medição ou uma outra grandeza à ser usada no cálculo do valor do mensurando. Para uma medida materializada a indicação é o valor à ela estabelecido.

Resultado não corrigido

Resultado de uma medição antes da correção devido aos erros sistemáticos.

Resultado corrigido

Resultado de uma medição após a correção devido aos erros sistemáticos.

Desvio padrão experimental

Para uma série de “ n ” medições de um mesmo mensurando, a grandeza “ s ”, que caracteriza a dispersão dos resultados é dada pela fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (\text{D.1})$$

Onde x_i representa o resultado da “ i ésima” medição e \bar{x} representa a média aritmética dos “ n ” resultados considerados.

Considerando uma série de “ n ” valores como uma amostra de uma distribuição, \bar{x} é uma estimativa não tendenciosa da média μ e s^2 é uma estimativa não tendenciosa da variância σ^2 , desta distribuição. A expressão s é uma estimativa do desvio padrão da distribuição e é denominada desvio padrão experimental da média. Desvio padrão experimental da média é algumas vezes denominado incorretamente erro padrão da média.

Incerteza de medição

Parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser fundamentalmente atribuídos a um mensurando.

O parâmetro pode ser, por exemplo, um desvio padrão (ou um múltiplo dele), ou a metade de um intervalo correspondente a um nível de confiança estabelecido.

A incerteza de medição compreende, em geral, muitos componentes. Alguns destes componentes podem ser estimados com base na distribuição estatística dos resultados das séries de medições e podem ser caracterizados por desvios padrão experimentais. Os outros componentes, que também podem ser caracterizados por desvios padrão, são avaliados por meio de distribuição de probabilidade assumidas baseadas na experiência ou em outras informações.

Entende-se que o resultado da medição é a melhor estimativa do valor do mensurando e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, como os componentes associados com correções e padrões de referência, contribuem para a dispersão.

Erro (de medição)

Resultado de uma medição menos o valor verdadeiro do mensurando. Uma vez que o valor verdadeiro não pode ser determinado, utiliza-se, na prática um valor verdadeiro convencional.

Quando for necessário distinguir “erro” de “erro relativo”, o primeiro é algumas vezes denominado erro absoluto da medição. Este termo não deve ser confundido com valor absoluto do erro, que é o módulo do erro.

Desvio

Valor menos seu valor de referência.

Correção

Valor adicionado algebricamente ao resultado não corrigido de uma medição para compensar um erro sistemático. A correção é igual ao erro sistemático estimado com sinal trocado. Uma vez que o erro sistemático não pode ser perfeitamente conhecido, a compensação não pode ser completa.

Faixa nominal

Faixa de indicação que se pode obter em uma posição específica dos controles de um instrumento de medição. Faixa nominal é normalmente definida em termos de seus limites inferior e superior, por exemplo, “100°C a 200°C”. Quando o limite inferior é zero, a faixa nominal é definida unicamente em termos do limite superior, por exemplo, a faixa nominal de 0 V a 100 V é expressa como “100 V”.

Valor nominal

Valor arredondado ou aproximado de uma característica de um instrumento de medição que auxilia na sua utilização.

Sensibilidade

Variação da resposta de um instrumento de medição dividida pela correspondente variação do estímulo.

Resolução (de um dispositivo mostrador)

Menor diferença entre indicações de um dispositivo mostrador que pode ser significativamente percebida.

Zona morta

Intervalo máximo no qual um estímulo pode variar em ambos os sentidos sem produzir variação na resposta de um instrumento de medição.

Exatidão de um instrumento de medição

Aptidão de um instrumento de medição para dar respostas próximas a um valor verdadeiro, exatidão é um conceito qualitativo.