



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

Aperfeiçoamento e Desenvolvimento de Ferramentas
do Controle Estatístico da Qualidade - Utilizando
Quartis para Estimar o Desvio Padrão

Edson Marcos Leal Soares Ramos

Orientador: Prof. Robert Wayne Samohyl, *Ph.D.*

Florianópolis, Abril de 2003

Edson Marcos Leal Soares Ramos

**Aperfeiçoamento e Desenvolvimento de Ferramentas
do Controle Estatístico da Qualidade - Utilizando
Quartis para Estimar o Desvio Padrão**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Produção.

Área de Concentração: **Gestão da Qualidade e Produtividade**
Orientador: **Prof. Robert Wayne Samohyl, *Ph.D.***

Florianópolis, Abril de 2003

FICHA CATALOGRÁFICA

R175a Ramos, Edson Marcos Leal Soares

Aperfeiçoamento e desenvolvimento de ferramentas do controle estatístico da qualidade - Utilizando quartis para estimar o desvio padrão / Edson Marcos Leal Soares; orientador Robert Wayne Samohyl. - Florianópolis, 2003.

130 f. : il. ; gráfs. ; tabs.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, 2003.

Inclui bibliografia.

1. Controle de qualidade - Métodos estatísticos. 2. Métodos gráficos. 3. Ferramentas - Desenvolvimento. 4. Quartis. I. Samohyl, Robert Wayne. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. III. Título.

CDU: 658.5

Edson Marcos Leal Soares Ramos

**Aperfeiçoamento e Desenvolvimento de Ferramentas
do Controle Estatístico da Qualidade - Utilizando
Quartis para Estimar o Desvio Padrão**

Esta tese foi julgada e aprovada para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Produção no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 15 de Abril de 2003

Prof. Edson Pacheco Paladini, *Dr.*
(Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção)

Banca Examinadora

Prof. Robert Wayne Samohyl, *Ph.D.*
Universidade Federal de Santa Catarina
Orientador

Prof. Gustavo Daniel Donatelli, *Dr.*
Universidade Federal de Santa Catarina
Moderador/Examinador

Prof. Manoel Raimundo de Sena Júnior, *Dr.*
Universidade Federal de Pernambuco
Examinador

Prof. Miguel Angel Verdinelli, *Dr.*
Universidade Federal de Santa Catarina
Examinador

Profa. Verônica Maria Costa Romão, *Dra.*
Universidade Federal de Pernambuco
Examinadora

À minha filha Yasmin

Agradecimentos

- ★ À Deus que me concedeu a vida e a inspiração necessária para chegar ao final deste trabalho;
- ★ Ao meu orientador, Professor Robert Samohyl, por acreditar em minha capacidade e pelo grande apoio dado em todos os momentos de dificuldade;
- ★ Aos professores do PPGEF-UFSC, que de alguma forma contribuíram para o crescimento de meu conhecimento, em especial aos professores Ana Lúcia e Miguel Verdinelli;
- ★ Aos professores e funcionários do Departamento de Estatística da UFPA, em especial aos professores Ely Ciqueira, Héilton e Regina Tavares, pelo apoio e confiança que sempre depositaram em mim;
- ★ Aos amigos de Pernambuco, Gauss Cordeiro, Cláudia Regina, Manoel Sena, Tatiene Correia, Enivaldo Rocha, Jacira, Cláudio, Valéria e Cristina Raposo, pelo estímulo e amizade;
- ★ Aos amigos Andréa, Edér, Berenice, Daniel, Rubson, Ivanete, Rodrigo, Rafael, Aauto, Wesley, Luciana, Ricardo, Luciano e Florence, pela amizade e pelos bons momentos em Floripa;
- ★ Aos amigos Michel Ferreira, Manoel Domingos e Telma Figueiró, pela amizade, amor, carinho e pela presença constante mesmo de tão longe;
- ★ À Patrícia Tavares, pela grande amizade, apoio, compreensão, amor, pelas longas horas de tradução e correções nos textos deste trabalho e pela presença nos bons momentos em Santa Catarina;
- ★ À Adrilayne Araújo, pela eterna amizade, incentivo, amor, presença constante e incalculável apoio para a realização deste trabalho;
- ★ Às minhas companheiras nesta jornada, Yasmin Ramos, Sílvia Almeida e Eliane Silva, pelo amor, compreensão, carinho e por terem participado de todos os momentos que levaram à realização deste trabalho;
- ★ Aos meus pais, irmãos e sobrinhos, por aceitarem a distância e sempre me demonstrarem confiança;
- ★ Finalmente, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

*“Há entre o tempo e o destino
um caso antigo, um elo, um par.
O que pode acontecer, menino,
se o tempo não passar?”.*

Vital Lima e Nilson Chaves

Resumo

RAMOS, Edson Marcos Leal Soares. Aperfeiçoamento e Desenvolvimento de Ferramentas do Controle Estatístico da Qualidade - Utilizando Quartis para Estimar o Desvio Padrão. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - PPGEP/UFSC, Florianópolis - SC, Brasil.

O objetivo deste trabalho é aperfeiçoar e desenvolver ferramentas do controle estatístico da qualidade, através da utilização de um estimador do desvio padrão σ baseado nos quartis. A teoria utilizada para estimar σ através dos quartis foi desenvolvida e o estimador do desvio padrão apresentado. Resultados de simulações demonstram que as estimativas de σ , obtidas a partir do estimador baseado nos quartis são, em geral, mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro do que as estimativas produzidas por \bar{R}/d_2 e \bar{S}/c_n . Quando o estimador proposto de σ for utilizado nas aplicações, a possível falta de capacidade do processo em atender às exigências, tende ser mais rapidamente detectada do que quando \bar{R}/d_2 é utilizado. Durante a aplicação verificou-se que os limites obtidos para os gráficos de controle reduzem a probabilidade de ocorrência de alarmes falsos (erro tipo I). Na presença de *outliers*, o estimador de σ proposto produz estimativas, para a linha central e para os limites de controle, mais robustas do que o método padrão de Shewhart. De fato, o método proposto detecta a presença de observações extremas no processo, enquanto que o método de Shewhart não o faz. Quatro índices de capacidade do processo e cinco gráficos de controle foram aperfeiçoados para monitorar o nível e a dispersão do processo. Tabelas com fatores empregados na construção dos gráficos de controle, quando σ é estimado a partir dos quartis, são apresentadas. E finalmente, duas novas ferramentas gráficas para o controle estatístico da qualidade foram desenvolvidas e apresentadas.

Palavras Chave: Controle Estatístico da Qualidade, Estimação e Quartis.

Abstract

RAMOS, Edson Marcos Leal Soares. Tools Improvement and Development of the Statistical Quality Control - Using Quartiles to Estimate the Standard Deviation. 2003. Thesis (Doctoral in Industrial Engineering) - PPGE/UFSC, Florianópolis - SC, Brazil.

The objective of this work is to improve and develop tools of the Statistical Quality Control, by using an estimator of the standard deviation σ based on the quartiles. The theory used to estimate σ through quartiles was developed and the standard deviation's estimator was presented. Results of simulations show that estimates of σ obtained from the estimator based on quartiles, are in general closer to the parameter's true value, than the estimates produced by \bar{R}/d_2 and \bar{S}/c_n . When the σ proposed estimator was used in applications, the possible lack of the process capability to meet the requirements tended to be more quickly detected than when \bar{R}/d_2 was used. During application it was noted that the limits obtained by the control charts reduces the probability of false alarms occurs (type I error). In the present of outliers, the σ proposed estimator produces estimates, for the central line and control limits, more robust than the pattern Shewhart's method. In fact, the σ proposed estimator detects the extreme observations present in the process, while Shewhart's method fails. Four process capability indices and five control charts were improved in order to monitor the level and the spread process. Tables with factors used in the control charts construction, when σ is estimated from the quartiles, are presented. Finally, two new graphic tools for the statistical quality control were developed and presented.

Key Words: Statistical Quality Control, Estimation and Quartiles.

Índice

Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de Tabelas	xii
Lista de Figuras	xiv
1 Introdução	1
1.1 Aspectos Gerais	1
1.2 Justificativa e Importância do Trabalho	3
1.3 A Hipótese Básica da Tese	4
1.4 Objetivos	4
1.4.1 Objetivo Geral	4
1.4.2 Objetivos Específicos	4
1.5 As Limitações do Trabalho	5
1.6 Estrutura do Trabalho	5
2 Visão Geral de Gráficos de Controle	7
2.1 Introdução	7
2.2 Algumas das Principais Pesquisas Envolvendo Gráficos de Controle	8
2.3 Princípios dos Gráficos de Controle	12
2.4 Gráfico de Controle na Prática	13
2.5 Planejamento de um Gráfico de Controle	15
2.6 Benefícios da Utilização dos Gráficos de Controle	17
2.7 Tipos de Gráficos de Controle	18
2.8 Teste de Hipótese e Gráficos de Controle	19
3 Gráficos de Controle para Variáveis	21
3.1 Introdução	21
3.2 Gráficos de Controle para Monitorar a Dispersão do Processo	23
3.2.1 Gráfico do Desvio Padrão (Gráfico S)	23
3.2.2 Gráfico da Variância (Gráfico S^2)	26
3.2.3 Gráfico da Amplitude (Gráfico R)	28
3.3 Gráficos de Controle para Monitorar o Nível do Processo	31
3.3.1 Gráfico da Média (Gráfico \bar{X})	32

3.3.2	Gráfico da Mediana (Gráfico \tilde{X})	35
4	Índices de Capacidade do Processo	42
4.1	Introdução	42
4.2	Índice C_p	43
4.2.1	Teste de Hipóteses e o Índice C_p	47
4.3	Índices C_{pu} , C_{pl} e C_{pk}	47
5	Princípios de Estimação em Controle Estatístico da Qualidade	50
5.1	Introdução	50
5.2	Propriedades dos Estimadores	51
5.3	Estimando a Dispersão do Processo	53
5.4	Estimando o Nível do Processo	55
6	Estimando o Desvio Padrão Amostral Através dos Quartis	58
6.1	Introdução	58
6.2	Função de Distribuição Amostral	61
6.3	Quantil Populacional e Quantil Amostral	62
6.4	Estimador do Desvio Padrão Amostral Baseado nos Quartis	64
6.5	Simulações	67
7	Aplicação	73
7.1	Introdução	73
7.2	\bar{Q} Aplicado aos Gráficos de Controle para Variáveis para Monitorar a Dispersão do Processo	74
7.2.1	\bar{Q} Aplicado ao Gráfico do Desvio Padrão	74
7.2.2	\bar{Q} Aplicado ao Gráfico da Variância	76
7.2.3	\bar{Q} Aplicado ao Gráfico da Amplitude	78
7.3	\bar{Q} Aplicado aos Gráficos de Controle para Variáveis para Monitorar o Nível do Processo	80
7.3.1	\bar{Q} Aplicado ao Gráfico da Média	80
7.3.2	\bar{Q} Aplicado ao Gráfico da Mediana	82
7.4	\bar{Q} Aplicado aos Índices de Capacidade	85
7.5	\bar{Q} Aplicado ao Desenvolvimento de Novas Ferramentas para o CEQ	87
7.5.1	Gráfico \bar{Q}	87
7.5.2	Gráfico Q_2	89
8	Considerações Finais e Recomendações	94
8.1	Considerações Finais	94
8.2	Recomendações	96
A	Tabelas dos Fatores para Construção de Gráficos de Controle	98
B	Tabelas com Exemplos para Aplicação	104
	Bibliografia	109

Lista de Tabelas

6.1	Médias Amostras das estimativas obtidas por \bar{R}/d_2 , $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ e \bar{S}/c_n para o desvio padrão σ , juntamente com seus respectivos erros quadráticos médios dentro de parênteses.	69
6.2	Médias Amostras das estimativas obtidas por \bar{S}^2 e \bar{Q}^2 para a Variância σ^2 , juntamente com seus respectivos erros quadráticos médios dentro de parênteses.	71
7.1	Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico S - Dados de medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$), apresentados na Tabela B.2 do Apêndice B.	76
7.2	Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico S^2 - Dados de medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$), mostrados na Tabela B.2 do Apêndice B.	78
7.3	Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico R - Dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B.	79
7.4	Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico \bar{X} - Dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B.	81
7.5	Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico \tilde{X} - Dados do exemplo da Tabela B.3 do Apêndice B.	85
7.6	Estimativas para os Índices de Capacidade C_{pl} e C_{pu} - Dados de medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, mostrados na Tabela B.3 do Apêndice B.	86
7.7	Fatores utilizados na construção do Gráfico Q_2	91
A.1	Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para dispersão do processo.	99
A.2	Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para dispersão do processo. (continuação)	100
A.3	Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para o nível do processo.	101
A.4	Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para a dispersão do processo.	102
A.5	Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para o nível do processo.	103

B.1	Medidas do diâmetro interno (mm) durante a fabricação de anéis de pistão.	105
B.2	Medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}\text{C}$) durante a produção de alumínio - Fevereiro/2003.	106
B.3	Medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}\text{C}$) do misturador durante a produção de alumínio - Fevereiro/2003.	107
B.4	Medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}\text{C}$) durante a produção de alumínio - Janeiro/2003.	108

Lista de Figuras

2.1	Gráfico de Controle de Shewhart com Linhas de Controle e Advertência Bilaterais.	14
4.1	Relação entre a dispersão permitida do processo e a dispersão natural do processo.	45
4.2	Relação entre a faixa de especificação utilizada, C_p e as unidades não-conformes produzidas.	46
6.1	Comparação de algumas medidas resistentes numa distribuição simétrica. . .	61
6.2	Comparação entre as estimativas de σ , obtidas a partir de $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ e \bar{R}/d_2 , para pequenos e moderados tamanhos amostrais ($n = 5, 6, 8$ e 10).	68
6.3	Comparação entre os erros quadráticos médios dos estimadores \bar{S}/c_n , \bar{R}/d_2 e $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$, considerando $\sigma^2 = 1$ e $m = n$, para tamanhos amostrais $n = 3, 4, \dots, 25$	70
6.4	Comparação entre as estimativas de σ , obtidas a partir de $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ e \bar{R}/d_2 , para grandes tamanhos amostrais ($n = 15, 30, 50$ e 100).	72
7.1	Gráfico S para medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$) - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$	75
7.2	Gráfico S^2 para medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$) - σ^2 estimado por \bar{S}^2 e $(\overline{I\bar{Q}}/\xi_n)^2$	77
7.3	Gráfico R para medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões - σ estimado por \bar{R}/d_2 e $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$	79
7.4	Gráfico \bar{X} para medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões - σ estimado por \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$	81
7.5	Gráfico \bar{X} para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$	82
7.6	Gráfico \bar{X} para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador - σ estimado por \bar{R}/d_2 e $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$	84
7.7	Histograma para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador. . . .	86
7.8	Gráfico S para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador.	88
7.9	Gráfico \bar{Q} para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador.	89
7.10	Gráfico da Distribuição Normal Padrão.	90
7.11	Gráfico Q_2 para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador. . . .	92

Capítulo 1

Introdução

1.1 Aspectos Gerais

Os métodos estatísticos cada vez mais vêm sendo reconhecidos como um importante instrumento para diagnosticar e otimizar a gestão e operação de diversos sistemas, desde os sistemas humanos aos mais complexos sistemas físicos. As aplicações destes vêm desempenhando um papel importante na solução de muitos problemas, da indústria à agricultura, passando pelos setores sócio-econômico, administrativo e de saúde. Grande parte das mais avançadas pesquisas científicas em diversas áreas do conhecimento dependem cada vez mais dos métodos estatísticos. Eles são cada vez mais empregados nas engenharias, sobretudo na Engenharia de Produção.

De fato, os métodos estatísticos aplicados à Engenharia de Produção, mais especificamente nas indústrias, não constituem novidade, eles são tão antigos como a própria indústria. Parte desses métodos, conhecidos como Controle da Qualidade, foram durante muito tempo aplicados sob a forma tradicional denominada “inspeção”. Somente a partir de 1924 [veja Shewhart (1931)], no entanto, é que se desenvolveu o Controle Estatístico da Qualidade (*CEQ*), cuja aplicação vem se tornando generalizada nos países industrializados.

Desde sua introdução por Shewhart, os gráficos de controle têm sido a ferramenta do *CEQ* mais amplamente utilizada para monitorar e manter o controle estatístico dos processos. Gráficos de controle são aplicados para distinguir num processo as variações que não podem ser economicamente identificadas e corrigidas (causas aleatórias), daquelas que podem ser (causas assinaláveis).

Dentre os diversos tipos de gráficos de controle, os gráficos de controle para variáveis são, certamente, os mais empregados no controle estatístico da qualidade, mais especificamente,

os gráficos desenvolvidos para monitorar o nível do processo, como por exemplo, o gráfico da média (gráfico \bar{X}), o gráfico da mediana (gráfico \tilde{X}) e os gráficos desenvolvidos para monitorar a dispersão do processo, como por exemplo, o gráfico do desvio padrão (gráfico S), o gráfico da variância (gráfico S^2) e o gráfico da amplitude (gráfico R).

Os índices de capacidade são outro exemplo de ferramentas bastante comuns do *CEQ*, utilizadas primordialmente para avaliar a habilidade de um processo em satisfazer às especificações exigidas. O controle estatístico da qualidade não é simplesmente uma coleção de técnicas estatísticas, mas uma forma de pensar que é essencial para a melhoria contínua da qualidade.

Comprovadamente, métodos estatísticos como o *CEQ* são ferramentas eficazes no processo de investigação, análise e inferências nos mais variados tipos de ocorrências nas diversas áreas do conhecimento humano. Por exemplo, parece razoável supor que a distribuição das alturas dos brasileiros adultos possa ser representada por um modelo normal. Mas esta afirmação não é suficiente para determinar qual a distribuição normal correspondente; seria necessário conhecer os parâmetros (média e variância) desta distribuição normal para que ela ficasse caracterizada. Se fosse possível medir a altura de todos os brasileiros adultos, haveriam meios de obter a sua distribuição exata e, daí, produzir os correspondentes parâmetros. Contudo, raramente se consegue obter a distribuição exata de alguma variável, ou porque isto é muito dispendioso, ou muito demorado ou às vezes porque consiste num processo destrutivo. Por exemplo, se fosse observada a durabilidade de lâmpadas e se todas fossem testadas até queimarem, não restaria nenhuma para ser vendida. Assim, a solução é selecionar parte dos elementos (amostra), analisá-los, obter estimativas para os parâmetros desejados e inferir propriedades para o todo (população).

Seguramente, no controle estatístico da qualidade, um dos maiores interesses é obter estimativas para o desvio padrão populacional σ . Logo, se o valor de σ da dispersão do processo não é conhecido, pode-se estimá-lo dos dados observados. Estimadores comuns de σ , utilizados no *CEQ*, baseiam-se no desvio padrão amostral S e na amplitude amostral R .

Entretanto, apesar da presença obrigatória dos métodos de estimação no controle estatístico de qualidade, lacunas no processo de estimação do desvio padrão σ , ainda precisam ser preenchidas. Assim, esse trabalho procura apresentar uma alternativa para es-

timação de σ através dos quantis amostrais, mais especificamente, baseando-se nos quartis amostrais.

O estimador proposto possui a vantagem de reduzir a probabilidade de ocorrência de alarmes falsos (erro tipo I), quando aplicado aos gráficos de controle para variáveis, e também de melhorar a sensibilidade do processo de avaliação de capacidade na detecção de um não atendimento dos processos às especificações exigidas. Ainda, novas ferramentas para o controle estatístico de qualidade podem ser desenvolvidas a partir do estimador de σ baseado nos quartis.

1.2 Justificativa e Importância do Trabalho

A pesquisa é justificada em virtude dos constantes avanços na tecnologia empregada nos processos produtivos industriais, que exigem, além de um quadro de pessoal qualificado, métodos de controle estatístico da qualidade capazes de monitorar, detectar e avaliar mudanças nas características de qualidade, durante o processo de produção, tão logo quanto possível.

A quantificação da dispersão do processo é fundamental para entender a qualidade das unidades produzidas num processo fabril. Infelizmente, a total falta de compreensão estatística, a respeito dos estimadores de σ , por alguns usuários do controle estatístico de qualidade, pode conduzir ao não comprometimento destes no processo de melhoria contínua dos processos industriais, não assegurando desta forma a qualidade das unidades produzidas.

A utilização de um estimador para σ baseado nos quartis melhora o entendimento dos usuários do *CEQ* a respeito do conceito de variabilidade do processo. Além disso, possibilita melhorias nas estimativas dos índices utilizados para avaliar a capacidade dos processos e nos tradicionais gráficos de controle Shewhart para variáveis.

Finalmente, a metodologia proposta possibilita aos usuários e pesquisadores do *CEQ* o desenvolvimento e aperfeiçoamento de muitas ferramentas para o controle estatístico da qualidade.

1.3 A Hipótese Básica da Tese

Parte-se da hipótese de que o estimador para σ , baseado nos quartis, reduz a probabilidade de ocorrência de alarmes falsos (erro tipo I), quando aplicado aos gráficos de controle para variáveis e também melhora a sensibilidade dos índices de capacidade em detectar um não atendimento dos processos às especificações exigidas. Ainda, possibilita o desenvolvimento de novas ferramentas para o controle estatístico de qualidade, contribuindo desta forma para o aperfeiçoamento e desenvolvimento do *CEQ*.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo aperfeiçoar e desenvolver ferramentas do controle estatístico da qualidade, através da utilização de um estimador para o desvio padrão σ baseado nos quartis.

1.4.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos podem-se enumerar:

- Dar uma visão geral a respeito de gráficos de controle;
- Demonstrar o processo de construção e avaliação dos gráficos de controle para variáveis;
- Desenvolver a teoria de estimação de σ através dos quartis;
- Mostrar a metodologia de construção e avaliação de gráficos de controle para monitorar o nível e a dispersão do processo, quando σ for estimado a partir dos quartis;
- Criar tabelas com fatores para construção dos gráficos de controle da média, mediana, amplitude, desvio padrão e variância, quando o estimador de σ é baseado nos quartis;
- Utilizar o estimador de σ baseado nos quartis, durante a avaliação da capacidade dos processos, pelos índices C_p , C_{pl} , C_{pu} e C_{pk} ;

- Avaliar o desempenho do estimador de σ baseado nos quartis, quando este for utilizado nos índices de capacidade e nos gráficos de controle;
- Apresentar um novo gráfico de controle para monitorar e avaliar o nível do processo, quando o estimador de σ baseado nos quartis é utilizado;
- Realizar a construção de um novo gráfico de controle para monitorar e avaliar a dispersão do processo, utilizando o estimador de σ baseado nos quartis.

1.5 As Limitações do Trabalho

Como principais limitações deste trabalho têm-se:

- A escassez de material bibliográfico referente à teoria dos quantis, mais especificamente referentes aos quartis;
- A falta de acompanhamento *in loco* da aplicação dos gráficos de controle e dos índices de capacidade desenvolvidos dificultou a interpretação e análise dos mesmos;
- A aplicação em poucos processos reduziu a capacidade de análise e interpretação da metodologia proposta.

1.6 Estrutura do Trabalho

Esta tese de doutorado encontra-se dividida em oito capítulos, a saber:

- Capítulo 1: refere-se à introdução do trabalho, onde são englobados a justificativa e importância do trabalho, a hipótese do trabalho, objetivos geral e específicos, além das suas limitações;
- Capítulo 2: traz uma visão geral a respeito dos gráficos de controle;
- Capítulo 3: mostra os gráficos para variáveis utilizados no monitoramento do nível e da dispersão do processo;
- Capítulo 4: apresenta os principais índices para avaliação da capacidade dos processos;

- Capítulo 5: faz uma breve apresentação dos princípios de estimação em controle estatístico da qualidade;
- Capítulo 6: traz toda estrutura de estimação do desvio padrão amostral através dos quartis;
- Capítulo 7: mostra a aplicação do estimador de σ baseado nos quartis, aos principais gráficos de controle para variáveis, índices de capacidade e na construção de novos gráficos de controle para monitorar o nível e a dispersão do processo;
- Capítulo 8: apresenta as considerações finais e recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Visão Geral de Gráficos de Controle

2.1 Introdução

A busca por métodos mais rigorosos de controle da qualidade que pudessem gerar mais confiança nos produtos e serviços conduziu à formação do Departamento de Engenharia e Inspeção dos laboratórios da Bell Telephone, em 1924. Neste mesmo ano, Walter Andrew Shewhart introduz o conceito de gráficos de controle através de um memorando técnico nos laboratórios Bell, nele Shewhart apresenta um gráfico de controle, o qual mais tarde veio a ser chamado o primeiro gráfico de controle de Shewhart [veja Banks, 1989].

Os gráficos de controle são instrumentos que mostram a evolução do nível de operação do processo e de sua variação ao longo do tempo. Além disso, os gráficos de controle são ferramentas extremamente úteis para identificar se as variações observadas num processo são decorrentes de causas comuns de variação, conseqüentemente, de pequena importância, ou decorrentes de causas especiais de variação, e portanto, de grande importância, que necessitam ser identificadas e eliminadas do processo. Um gráfico de controle é um registro gráfico da qualidade de uma característica particular de um produto.

O procedimento de construção de gráficos de controle envolve, de forma geral, tomar amostras de tamanhos fixos em intervalos amostrais e através destas, obter estimativas para o nível e para a dispersão do processo. Estas estimativas são então utilizadas para determinar os limites de controle (superior e inferior) e a linha central dos gráficos.

Avanços na tecnologia exigem dos usuários e pesquisadores dos gráficos de controle interesse em pôr estimadores cada vez mais precisos, tanto para o nível quanto para a dispersão do processo. Assim, uma das proposições deste trabalho é obter um estimador para a dispersão do processo baseado nos quartis para ser utilizado na construção de gráficos de controle.

Neste capítulo um breve relato dos diferentes tipos de gráficos de controle será feito, destacando a peculiaridade de cada um, mas considerando que eles têm o propósito primário de monitorar o processo. Para a utilização na prática, os aspectos básicos para se aplicar um gráfico de controle são descritos. É destacado na fase de planejamento de um gráfico de controle, o cuidado na escolha do tamanho amostral e da especificação dos limites de controle, dentre outros, visto que estes passos constituem-se como fundamentais para a correta aplicação desta ferramenta do controle estatístico da qualidade. Além disso, alguns dos benefícios advindos da aplicação dos gráficos de controle são citados.

Por fim, esse capítulo encontra-se estruturado em oito seções que discutirão os seguintes aspectos: a seção 2.2 apresentará algumas das principais pesquisas envolvendo a utilização e o desenvolvimento dos gráficos de controle; a Seção 2.3 tecerá breves considerações acerca dos princípios dos gráficos de controle; a Seção 2.4 abordará a utilização do gráfico de controle na prática; a Seção 2.5 falará sobre o planejamento de um gráfico de controle; a Seção 2.6 trará um breve relato acerca dos benefícios da utilização dos gráficos de controle; a Seção 2.7 mostrará os tipos de gráficos de controle e, finalmente, a Seção 2.8 enfocará brevemente a relação entre teste de hipótese e gráficos de controle.

2.2 Algumas das Principais Pesquisas Envolvendo Gráficos de Controle

A aceitação dos gráficos de controle de Shewhart nas indústrias é em parte devido à sua simplicidade. Seguramente, melhorar o desempenho destes gráficos e/ou propor novas metodologias de construção e utilização, tornou-se um desafio dos pesquisadores e usuários do controle estatístico da qualidade. Shewhart (1941), por exemplo, propõe testes adicionais para tornar os gráficos de controle sensíveis à pequenas mudanças na média do processo. Moore (1957) mostra o efeito da não-normalidade quando gráficos de controle são utilizados. Ennerson e Manning (1959) apresentam um gráfico de controle para avaliar o desempenho do processo de forma rápida e simples. Dentre as vantagens da utilização da metodologia proposta, verifica-se a redução do retrabalho e sucateamento, além da melhoria na confiabilidade do produto. Freud (1960) considera a utilização dos gráficos de controle de Shewhart na indústria química, comparando-os com gráficos de controle de aceitação.

O gráfico de controle de regressão é apresentado por DiPaola (1945) para descrever e representar o controle simultâneo das relações entre duas variáveis. Mandel (1969) utiliza o gráfico de controle de regressão para estudar as relações entre o número de homens-horas trabalhadas e o volume de cartas processadas nas 74 maiores agências de correios dos EUA. Mitra (1988) utiliza a amplitude amostral como estimador de σ para construção dos limites de controle do gráfico de regressão.

Comumente, durante a construção de gráficos de controle são utilizados tamanhos de amostras constantes. Mitra (1957) tabela valores para construção de limites de controle, onde o tamanho amostral n é constante, baseados na média e amplitude de uma população normal. Porém, existem situações em que o tamanho amostral n não é constante. Numa situação em que o tamanho amostral é variável, cada amostra pode conter um número diferente de observações. Neste contexto, Ferrell (1964) propõe construir gráficos de controle utilizando tamanhos de subgrupos variáveis. Neles são “*plotadas*” as amplitudes de variação do tamanho amostral, R_v , e as meias variações do tamanho amostral, M_v (uma medida de tendência central do subgrupo, um tipo de “média”, isto corresponde a “*plotar*” R e \bar{X} em gráficos de controle convencionais. Outra proposta, vista em Ferrell (1964), é utilizar a mediana das amplitudes de variação do tamanho amostral, \tilde{R}_v , e a mediana das meias variações do tamanho amostral, \tilde{M}_v , para estabelecer os limites de controle e estimar as características populacionais. Isto corresponde ao uso de \bar{R} e $\bar{\bar{X}}$ em gráficos de controle convencionais.

Segundo Alloway e Raghavachari (1991), os limites de controle destes gráficos convencionais são exatos somente se a característica do processo em consideração é normalmente distribuída. Entretanto, Burr (1967) verifica que os usuais limites de controle para os gráficos $\bar{X} - R$ são robustos às suposições de normalidade e podem ser empregados a menos que a população seja extremamente não-normal. Schilling e Nelson (1976) mostram que amostras de tamanhos quatro e cinco, para o gráfico \bar{X} , são suficientes para assegurar, razoavelmente, a robustez para a suposição de normalidade.

Contudo, se a verdadeira distribuição do processo é desconhecida, então, gráficos de controle que são baseados em suposições distribucionais menos restritivas são úteis. Comumente, muitas distribuições das características de qualidade monitoradas têm mais volume na cauda (distribuições caudalosas) do que a distribuição normal. Vários es-

tatísticos envolvidos na aplicação de gráficos de controle nos processos, por exemplo Gunter (1989), crêem que estas distribuições ocorrem mais freqüentemente na prática do que a distribuição normal. Conhecidamente, o desempenho de estimadores robustos e não-paramétricos são freqüentemente melhores estimadores do que estimadores tradicionais para distribuições caudalosas.

Um número limitado de gráficos de controle não-paramétricos tem sido relatado na literatura. Farnum e Stanton (1986) propõem a utilização de gráficos de controle baseados no teste de sinal. Considerações econômicas para um gráfico baseado em testes de sinais são apresentadas por Arnold (1986). Alloway e Raghavachari (1991) apresentam um gráfico de controle baseado no estimador Hodges-Lehmann associado com a estatística de *rank* de Wilcoxon, sua eficiência estatística é quase tão boa quanto a aproximação paramétrica se as suposições Gaussianas são consideradas, e pode ser mais eficiente quando a normalidade não é considerada. Saad e Reynolds (1979) utilizam uma estatística de *rank* para testar a simetria em torno de um nível fixado, enquanto que Hackl e Ledolter (1991) descrevem um procedimento baseado em ajustes exponencialmente “*rankeados*” para construção de limites de controle.

Outro fator relevante é que, freqüentemente, erros significantes de medidas estão presentes em aplicações de controle de qualidade. O efeito dos erros de medidas nas características monitoradas pelo gráfico \bar{X} , considerando que somente a média do processo muda, é discutida por Bennett (1954). O efeito de erros de medida sobre o poder do gráfico $\bar{X} - R$ em detectar mudanças no processo, quando a média e a variância do processo mudam, são apresentadas por Kanazuka (1986). Ele mostra que o poder dos gráficos de controle depende da magnitude da mudança do processo. Um grande erro de medida resulta na redução do poder, assim, a utilização de um tamanho de amostra maior e/ou redução dos erros de medida podem cobrir a perda. Tricker *et al.* (1998) mostram o efeito do erro de medida quando o gráfico R é utilizado. Linna e Woodall (2001) apresentam o efeito do erro de medida em gráficos de controle de Shewhart. Um modelo considerando o custo e um plano ótimo de amostragem também é dado.

Um problema comum na utilização de gráficos de controle é o baixo poder que estes apresentam em detectar pequenas mudanças na característica de qualidade monitorada. Uma solução para este problema é a utilização dos gráficos de controle *CUSUM* (soma

acumulada) e *EWMA* (médias móveis ponderadas exponencialmente), que possuem alta probabilidade de detectar pequenas mudanças. Entretanto, uma aproximação proposta por Burr (1969), que utiliza tamanhos amostrais adaptáveis, isto é, utiliza qualquer gráfico de controle permitindo que o tamanho amostral mude dependendo do valor estatístico, obtido em análises da amostra prévia, vem sendo utilizada por alguns pesquisadores como solução para este problema. Por exemplo, Daudin (1992) apresenta a primeira comparação entre os dois esquemas de construção de gráficos de controle (tamanhos amostrais fixos *versus* tamanhos amostrais adaptáveis). Prabhu *et al.* (1993) e Costa (1994) propõem esquemas similares àquele dos tamanhos amostrais de Daudin (1992), porém mais simples para operação do usuário.

O gráfico de controle T^2 de Hotelling [veja Hotelling (1947)], com tamanhos amostrais adaptáveis, é apresentado por Aparisi (1996). Seus resultados mostram intensa melhoria em comparação com esquemas de tamanhos amostrais univariados. Os ganhos de poder são até melhores que aqueles obtidos com gráficos de controle multivariados *CUSUM*, mostradas por Pignatiello e Runger (1990), e com gráficos de controle multivariados *EWMA*, apresentadas por Lowry *et al.* (1992), mas mantêm a simplicidade do gráfico T^2 de Hotelling.

Costa (1998) desenvolve um procedimento que utiliza os gráficos \bar{X} e R conjuntamente, quando os parâmetros são adaptáveis. Um modelo de Markov para determinar as propriedades da união dos gráficos de controle \bar{X} e R com tamanhos amostrais variáveis é visto em Costa (1999). O planejamento econômico do gráfico \bar{X} , quando os parâmetros são adaptáveis, é obtido por Costa e Rahim (2001). O esquema do tamanho amostral adaptável é utilizado por Aparisi *et al.* (2001) em gráficos de controle de variância generalizada $|S|$, para detectar mais rapidamente mudanças na matriz de variância-covariância. Epprecht e Costa (2001) apresentam uma metodologia para construção de gráficos de controle para atributos com amostras adaptáveis. Magalhães *et al.* (2001) mostram um modelo de custo da qualidade para um gráfico \bar{X} , quando todos os parâmetros de planejamento são adaptáveis. O modelo proposto viabiliza a seleção ótima e de forma econômica os parâmetros de planejamento do gráfico.

O gráfico de controle para proporções de duas variáveis desenvolvido por Spisak (1990), o gráfico de controle baseado na distribuição geométrica mostrado por Kaminsky *et al.*

(1992) e o gráfico de seleção de causas de Wade e Woodall (1993), são algumas das mais recentes linhas de pesquisa sobre gráficos de controle.

Finalmente, na última década, uma nova classe de gráficos de controle para a monitoração dos processos sujeitos a distúrbios moderados tem sido desenvolvida. Estes gráficos são chamados de dinâmicos porque alguns de seus parâmetros são permitidos variar durante a operação. Por enquanto, o tamanho das amostras varia entre dois tamanhos, grandes e pequenos, dependendo do que é observado do processo. Se um ponto amostral situa-se perto mas não fora dos limites de controle (indicando que o processo poderia ser ajustado), então a próxima amostra é escolhida para ser grande (para aperfeiçoar o poder do gráfico). Inversamente, se um ponto amostral situa-se perto ao alvo, então a próxima amostra é escolhida para ser pequena (para compensar grandes amostras). A motivação do esquema dinâmico é associada com o ganho em velocidade com o qual o gráfico sinalizará condições fora de controle.

2.3 Princípios dos Gráficos de Controle

A fabricação de um produto sempre envolve uma certa quantidade de variação nas condições de produção. De uma forma geral, diversos fatores são responsáveis pela variação estocástica das características de qualidade de interesse, observadas nas unidades produzidas. Num processo de produção implementado e planejado cuidadosamente, estas variações inerentes são pequenas e não podem ser atribuídas a fatores isolados controláveis. Sob estas condições diz-se que o processo de produção está sob controle estatístico ou que ocorre sem distúrbios. Durante a produção contínua, pode acontecer que estas variações aumentem ou excedam uma quantidade razoável, devido a mudanças significantes nos fatores controláveis do processo. Por exemplo, fadiga do pessoal ou desgaste de uma ferramenta poderia levar a uma mudança sistemática no nível do processo. Então conclui-se que o processo está fora de controle estatístico ou está perturbado.

Mantendo o foco nessas características, os gráficos de controle foram desenvolvidos com o propósito primário de monitorar continuamente se o processo de produção está sob controle estatístico. Quando trabalha-se com gráficos de controle sempre se supõe que o estado de controle estatístico é caracterizado por um processo que pode ser representado

por variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*). Em particular, esta suposição implica em falta de autocorrelação.

Os gráficos de controle são definidos através de estatísticas e se baseiam em certas distribuições de probabilidade, principalmente na distribuição normal. Assim, supõe-se que, quando um processo industrial está sob controle, uma característica de qualidade observável em saídas sucessivas se comporta como uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal de média μ e variância σ^2 , pelo menos aproximadamente.

2.4 Gráfico de Controle na Prática

Ao se aplicar um gráfico de controle, geralmente, extraem-se amostras de tamanhos fixos n de um processo de produção em pontos específicos de tempo. Os intervalos entre estes pontos de tempo são em geral constantes. Os valores observáveis X_1, X_2, \dots, X_n das características de qualidade monitoradas são resumidos no vetor amostral \mathbf{X} e são também utilizados nas suas formas originais ou são condensados numa estatística amostral, por exemplo, a soma amostral, a média amostral, a mediana amostral, a variância amostral, o desvio padrão amostral ou a amplitude amostral. Um gráfico de controle é uma figura gráfica desses resultados amostrais, construído de forma manual ou através do processamento eletrônico dos dados.

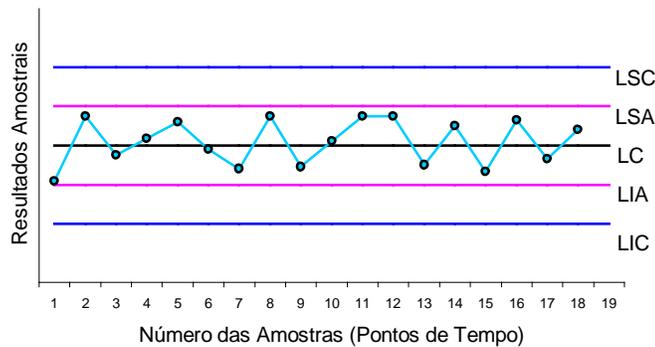
Os resultados são “*plotados*” no eixo vertical contra os pontos de tempo específicos de suas observações ou contra o número de índices amostrais no eixo horizontal. Em adição a esses dois eixos o sistema de coordenadas contém várias linhas fixas. Um gráfico de controle tipo Shewhart usualmente contém uma linha central paralela a abscissa. A altura desta linha central (*LC*) é dada pelo valor alvo do processo de produção. Este valor pode, por exemplo, ser um valor nominal exigido por lei, um padrão ou especificações de produção. Pode ser também um valor baseado na experiência passada do processo ou um valor estimado tomado de uma pré-produção do processo produtivo sob condições sem perturbações.

É absolutamente necessário um gráfico de controle possuir uma ou duas linhas de controle. Dependendo se é desejável monitorar os desvios das características de qualidade acima e abaixo do valor alvo ou somente desvios unilaterais, respectivamente, trabalha-se

com duas ou uma linha de controle. De acordo com isto há uma distinção entre gráficos de controle bilaterais e gráficos de controle unilaterais. As linhas de controle são chamadas de limite superior de controle e limite inferior de controle, abreviadas por *LSC* e *LIC*, respectivamente. Estas linhas têm o propósito de decidir se o processo está sob controle estatístico ou se distúrbios possam ter ocorrido. Além dessas linhas de controle, os gráficos de controle de Shewhart algumas vezes contêm uma ou duas linhas adicionais de advertência. Os níveis correspondentes a estas linhas são chamados limite de advertência superior e limite de advertência inferior (*LSA* e *LIA*, respectivamente) e a distância entre eles e a linha central é menor do que aquelas entre as linhas de controle *LSC* e *LIC*.

A Figura 2.1 mostra um gráfico de controle de Shewhart com linhas de controle e advertência bilaterais. Para facilitar a orientação os pontos amostrais são ligados por linhas retas.

Figura 2.1 *Gráfico de Controle de Shewhart com Linhas de Controle e Advertência Bilaterais.*



Durante a aplicação de um gráfico de controle existem três eventos possíveis para cada amostra. No primeiro, o resultado amostral pode situar-se dentro dos limites de advertência, neste caso assume-se que o processo de produção ocorre sob controle estatístico, daí não é necessário tomar qualquer ação particular. No segundo evento, o resultado amostral pode situar-se entre os limites de controle e os limites de advertência, havendo assim a suspeita de uma perturbação no processo. Neste caso, uma segunda amostra é extraída imediatamente, e se o novo resultado situar-se dentro dos limites de advertência, a suspeita é descartada, entretanto, se o novo resultado situar-se fora dos limites de advertência a suspeita justifica-se e uma ação corretiva deverá ser tomada objetivando tornar o processo produtivo sob controle estatístico. Finalmente, no terceiro evento, o resultado

amostral pode situar-se sobre ou fora dos limites de controle. Se isto ocorrer, uma intervenção no processo produtivo deverá ser feita imediatamente. Numa situação concreta, esta intervenção depende particularmente do processo produtivo, do conhecimento sobre ele e do tipo de perturbação indicada na inspeção. Sob certas circunstâncias pode até ser necessário separar todas as unidades que foram produzidas depois da última amostragem.

Quando gráficos de controle sem limites de advertência são utilizados, o primeiro evento refere-se aos limites de controle e o segundo evento é omitido.

Para Mittag e Rinne (1993) a utilização de limites de advertência modifica consideravelmente as propriedades estatísticas de um gráfico de controle. Em particular, não é possível controlar sua curva de poder.

2.5 Planejamento de um Gráfico de Controle

O planejamento de um gráfico de controle envolve principalmente a escolha adequada do tamanho da amostra, o intervalo de tempo entre amostras consecutivas e a especificação dos limites de controle e, quando apropriado, dos limites de advertência. Durante a fase de planejamento de um gráfico de controle, testes teóricos e considerações econômicas são importantes. Woodall (1985) planeja gráficos de controle, baseando-se no desempenho estatístico destes sobre algumas regiões de controle previamente especificadas. Caulcutt (1995) mostra os principais tipos de erros e acertos, usualmente cometidos por usuários dos gráficos de controle. Woodall (2000) afirma que o planejamento dos gráficos de controle desenvolvidos por Shewhart são bastante úteis em muitas aplicações atuais, entretanto, ele considera que a introdução de novas idéias relacionadas ao controle estatístico da qualidade, como por exemplo, métodos multivariados e planos amostrais, têm sido muito lentamente introduzidos no ambiente industrial.

Quando se quer determinar o tamanho da amostra e o intervalo amostral, pode-se utilizar critérios econômicos, como por exemplo, custos de inspeção, custos de produção parada devido à interrupção do processo para realizar ajustes necessários e custos de perturbações não detectadas. Na prática o tamanho amostral n e a frequência amostral são escolhidos arbitrariamente, geralmente, baseados em experiências passadas. O tamanho amostral n é raramente maior que 15 e, por razões numéricas, um número ímpar.

Proschan e Savage (1960) dão boas recomendações de como iniciar o processo de construção de gráficos de controle. Considerações a respeito do tamanho amostral ideal e do nível de significância utilizados no desenvolvimento dos limites de controle, também são mostradas.

A especificação dos limites de controle é o assunto central no planejamento de um gráfico de controle. Os limites de controle são especificados de forma que a estatística de teste $g(X)$ alcance ou exceda seus valores somente com uma pequena probabilidade α , quando o processo ocorre sem perturbações. Para um gráfico de controle, com ambos LSC e LIC , isto significa que:

$$P[g(X) \notin (LSC; LIC) | \text{processo está sob controle estatístico}] = \alpha. \quad (2.1)$$

Na prática utilizam-se testes estatísticos com distribuições simétricas e, conseqüentemente, sempre se procederá como descrito na Figura 2.1, especificando-se os limites LSC e LIC com a mesma distância da linha central (LC). A probabilidade (2.1) então consiste de duas probabilidades iguais, dadas por:

$$P[g(X) \geq LSC | \text{processo está sob controle estatístico}] = \alpha/2 \quad (2.2)$$

e

$$P[g(X) \leq LIC | \text{processo está sob controle estatístico}] = \alpha/2. \quad (2.3)$$

Quando se planeja um gráfico de controle unilateral se procede de forma análoga. Somente não se divide a probabilidade α em duas probabilidades e se determina o LSC ou LIC , respectivamente, através das seguintes equações:

$$P[g(X) \geq LSC | \text{processo está sob controle estatístico}] = \alpha \quad (2.4)$$

ou

$$P[g(X) \leq LIC | \text{processo está sob controle estatístico}] = \alpha. \quad (2.5)$$

É importante não especificar os limites de controle muito próximos da linha central, porque a variação natural no tempo, quando o processo está em estado de controle estatístico, pode induzir a uma intervenção. A probabilidade α de interferir num processo sem perturbações (alarme falso) aumenta, quando a distância entre os limites de controle diminui. Entretanto, se as linhas de controle estão muito distantes da linha central então ocorre o risco de se responder muito tarde a uma perturbação sistemática no processo.

A probabilidade de não interferir em um processo perturbado (alarme negligenciado) aumenta quando a distância entre as linhas de controle e a linha central aumenta. Geralmente, os limites de controle são calculados de forma que a estatística amostral $g(X)$ de um processo sem perturbações situe-se dentro das linhas de controle com probabilidade de 99%. Conseqüentemente, para determinação das linhas de controle geralmente estabelece-se um $\alpha = 0,01$ em (2.1) e, respectivamente, em (2.4) ou (2.5).

A estatística amostral $g(X)$, supostamente, possui uma distribuição simétrica e contínua, por exemplo a distribuição normal. Supõe-se também que sua densidade exista. Se o teste escalar $Y = g(X)$ possui condições sob controle e distribuição com esperança μ_Y (nível da linha central LC) e desvio padrão σ_Y , então os limites de controle LSC e LIC são colocados no nível $\mu_Y \pm 3\sigma_Y$.

2.6 Benefícios da Utilização dos Gráficos de Controle

Um gráfico de controle monitora a conformidade entre o estado desejado e o atual de um processo com relação a certas características de qualidade. A aplicação de um gráfico de controle supõe possuir o efeito de que mudanças indesejáveis no comportamento da característica de qualidade, por exemplo, uma mudança na média, um aumento na dispersão, um aumento no número de unidades não-conformes ou um aumento de não-conformidades, sejam descobertas e corrigidas tão logo quanto possível. Como conseqüência, a fração defeituosa do processo, ou respectivamente, a quantidade de reparos de não-conformidades é reduzida e conseqüentemente a produtividade aumenta.

Gráficos de controle que já cumpriram seu propósito como instrumento do controle de um processo, servem para a empresa como prova e documentação dos esforços da garantia da qualidade do produtor para o consumidor.

Finalmente, os gráficos de controle da qualidade podem também ser utilizados para avaliações internas da precisão do maquinário e ferramentas. Ainda, podem servir como auxílio nas decisões sobre investimentos adicionais ou na programação de manutenção e/ou vistorias gerais.

2.7 Tipos de Gráficos de Controle

Existem vários critérios utilizados para classificar os gráficos de controle, como por exemplo, quanto ao número de linhas de controle, os gráficos distinguem-se entre gráficos de controle unilaterais e bilaterais. Dependendo se os cálculos dos limites de controle envolvem ou não especificações técnicas, os gráficos de controle de Shewhart são classificados em clássicos ou modificados, respectivamente.

Um gráfico de controle é dito ser de rastreamento único, quando o gráfico contém somente um sistema de coordenadas no qual os resultados da inspeção, para monitorar um aspecto do processo de produção (locação ou dispersão), são introduzidos. Um gráfico de controle de rastreamento duplo contém dois sistemas de coordenadas para monitorar simultaneamente a locação e a dispersão. Gráficos de controle com rastreamento duplo são nada mais que dois gráficos de controle com rastreamento simples aplicados simultaneamente, ambos relacionados a mesma característica de qualidade. Diferentes destes, gráficos de controle multivariados monitoram várias características de qualidade ao mesmo tempo.

De acordo com o tipo de característica de qualidade, os gráficos de controle distinguem-se entre gráficos de controle para atributos e gráficos de controle para variáveis. Termos sinônimos são gráficos de controle para dados contáveis e gráficos de controle para medidas. Gráficos de controle para atributos sempre utilizam uma estatística de teste com distribuição discreta, enquanto a estatística amostral de um gráfico para variáveis possui uma distribuição contínua.

Finalmente, pode-se diferenciar os gráficos de controle dependendo se a decisão de interferir no processo é baseada unicamente no resultado amostral apresentado ou também em amostras precedentes. Gráficos de controle do tipo Shewhart somente utilizam o resultado amostral atual, sendo conhecidos como gráficos de controle sem memória. Gráficos de controle com memória, por exemplo *CUSUM* e *EWMA*, utilizam os resultados das amostras precedentes.

A notação dos gráficos de controle depende, freqüentemente, da estatística de teste e do tipo de rastreamento do gráfico. Na prática, as seguintes notações mais usuais foram estabelecidas:

- Gráfico X - Gráfico de controle simples para atributos onde a estatística teste acumula as não-conformidades por unidades produzidas ou o número de unidades não-conformes na amostra;
- Gráfico p - Gráfico de controle para atributos, o qual utiliza a proporção de unidades não-conformes na amostra como sua estatística de teste;
- Gráfico u - Gráfico de controle para atributos. Sua estatística de teste é o acúmulo de não-conformidades por unidade física;
- Gráfico de \bar{X} e Gráfico \tilde{X} - Gráficos de controle para variáveis com a média amostral e a mediana amostral, respectivamente, como a estatística de teste. Por conseguinte, estes gráficos são também chamados de gráfico da média e gráfico da mediana. Ambos têm o propósito de monitorar o nível do processo;
- Gráfico de R , Gráfico S e Gráfico S^2 - Gráficos de controle para variáveis onde a estatística de teste é a amplitude amostral, ou o desvio padrão amostral ou a variância amostral, respectivamente. Estes gráficos são também chamados de gráfico da amplitude, gráfico do desvio padrão e gráfico da variância, respectivamente. Eles monitoram a dispersão do processo de produção;
- Gráfico de $\bar{X} - S$, Gráfico $\bar{X} - R$, Gráfico $\bar{X} - \overline{MR}$, Gráfico $\tilde{X} - S$, Gráfico $\tilde{X} - R$ e Gráfico $\tilde{X} - \overline{MR}$ - Gráfico de controle para variáveis com rastreamento duplo e que utilizam a média amostral ou a mediana amostral para monitorar o nível do processo e o desvio padrão amostral, a amplitude amostral ou a amplitude móvel para controlar a dispersão do processo. Estes gráficos são apropriadamente chamados como acima, por exemplo, gráfico da média-amplitude no caso do gráfico $\bar{X} - R$.

2.8 Teste de Hipótese e Gráficos de Controle

Conforme mencionado na Seção 2.5, gráficos de controle são principalmente uma forma gráfica de uma estatística amostral $g(X)$ como uma função do tempo. Todos os gráficos de controle têm em comum que suas aplicações são equivalentes a repetidamente desempenhar um teste de hipóteses da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{ o processo produtivo está sob controle estatístico} \\ H_1 &: \text{ o processo produtivo está fora do controle estatístico.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se a realização da função amostral alcança ou excede os limites de controle LSC e LIC (gráficos de controle bilaterais) ou um deles (no caso de gráficos de controle unilaterais), então a hipótese H_0 é rejeitada e ajustes no processo são realizados. A região de aceitação (RA) para H_0 é dada pelo conjunto de todas as realizações da estatística de teste que se situam dentro dos limites de controle. Conseqüentemente, a região de rejeição (RR) para H_0 é definida como sendo o complementar de RA . Logo, a regra de decisão do teste lê-se como segue:

- Se a estatística de teste $g(X)$ situa-se sobre ou fora das linhas de controle, é necessário intervir no processo.
- Se a estatística de teste $g(X)$ situa-se dentro das linhas de controle, então não é necessário tomar nenhuma ação.

Numa dada situação a hipótese H_0 diz que um parâmetro de locação (μ , digamos) ou um parâmetro de dispersão (σ , digamos) da característica de qualidade monitorada concorda com um desejado valor. Este valor alvo pode ainda ser um valor nominal ou estimado de uma produção prévia do processo.

No que segue este trabalho estará restrito a gráficos de controle univariados para variáveis.

Este capítulo procurou proporcionar uma visão geral acerca dos gráficos de controle, destacando algumas das principais pesquisas envolvendo a utilização e o desenvolvimento destes gráficos. Além dos tipos, os princípios, a utilização na prática e o planejamento dos gráficos de controle, foram mostrados testes de hipóteses por trás da utilização de tal ferramenta, bem como, os seus benefícios.

Todos estes aspectos são de extrema importância, pois através deles serão obtidas melhores estimativas para o nível e dispersão do processo. Tais estimativas para a dispersão do processo, constituem um dos principais objetivos deste trabalho, ou seja, buscar por estimadores cada vez mais precisos a serem utilizados na construção de gráficos de controle.

Finalmente, este capítulo serve como embasamento para o entendimento a respeito dos gráficos de controle para variáveis implementado no próximo capítulo.

Capítulo 3

Gráficos de Controle para Variáveis

3.1 Introdução

Conforme pôde ser visto no capítulo anterior, existe um crescente interesse de pesquisadores e usuários de gráficos de controle na obtenção de estimadores cada vez melhores para o nível e dispersão do processo.

De fato, as características importantes de um processo produtivo, no controle para variáveis, são o nível e a dispersão natural do processo. Mudanças significativas no nível e/ou na dispersão do processo produtivo podem originar alterações significativas na fração não-conforme, por esta razão, no controle para variáveis, o nível e dispersão do processo, comumente são controlados simultaneamente. Isto é geralmente conseguido utilizando o gráfico \bar{X} ou o gráfico \tilde{X} , para o controle do nível e o gráfico S , o gráfico S^2 ou o gráfico R , para o controle da variabilidade. Quando utilizados em conjunto, estes gráficos constituem um procedimento razoavelmente eficiente para o controle de um processo. Os gráficos para dispersão monitoram a variabilidade dentro da amostra, enquanto que, os gráficos para o nível monitoram a variabilidade entre as amostras.

Deve ficar claro que para o controle da variabilidade (e indiretamente do nível) de um processo, a característica de qualidade deve ser normalmente distribuída. Nas aplicações práticas do controle da qualidade, esta restrição não é demasiadamente séria, uma vez que características qualitativas medidas em escala continua têm, em geral, distribuição normal ou aproximadamente normal. Se os gráficos de controle vão ser estabelecidos para um novo processo, do qual não se têm informações prévias, antes de procurar estabelecer os gráficos deve ser feito um teste de normalidade para a característica de interesse. Eventualmente pode ser necessário efetuar uma transformação na variável, visando a normalidade.

A indicação básica de falta de controle de um processo é a ocorrência de pontos fora

dos limites de controle, quer nos gráficos para o nível, quer nos gráficos para a dispersão. Porém, mesmo com todos os pontos entre os limites de controle, a presença de tendências, ciclos ou alguma outra configuração típica dos pontos pode revelar descontrole do processo.

Algumas recomendações práticas têm sido apresentadas por vários estudiosos, por exemplo Kume (1993) e Montgomery (2001), para a verificação do estado de controle de um processo. Segundo Bravo (1995), é geralmente aceito que no gráfico de um processo sob controle estatístico, cerca de $2/3$ do número total de pontos devem estar localizados no terço central do gráfico. Se para 25 amostras mais de 90% ou menos de 40% dos pontos estiverem situados no terço central do gráfico de controle, tem-se uma indicação de descontrole do processo. Evidências de deslocamento da média do processo ou de tendência dos pontos são geralmente aceitas se ocorrerem 7 pontos consecutivos de um dos lados da linha central do gráfico ou 7 pontos consecutivos não crescentes ou não decrescentes. Nelson (1984) apresenta oito testes gráficos simples para detectar falta de controle através do gráfico \bar{X} .

Durante o processo de construção dos gráficos de controle para variáveis, o gráfico para dispersão é construído em primeiro lugar, uma vez que ele fornece uma estimativa da variabilidade do processo, a qual é usada para construção do gráfico para o nível. Evidentemente, esta estimativa só deve ser usada quando o processo estiver sob controle em relação a variabilidade. Nas aplicações em conjunto, o gráfico para a dispersão é usualmente apresentado depois do gráfico para o nível.

Neste capítulo será abordado o processo de construção e implementação dos gráficos de controle para variáveis, mais especificamente, os gráficos para monitorar o nível e a dispersão do processo. O processo de obtenção dos limites de controle e da linha central para os gráficos do desvio padrão, da variância, da amplitude, da média e da mediana serão detalhadamente vistos. Tabelas com fatores para construção dos limites serão mostradas. Algumas das principais pesquisas envolvendo os gráficos de controle para variáveis serão apresentadas.

Portanto, nas seções seguintes serão abordados as seguintes classes de gráficos de controle para variáveis: a Seção 3.2 mostrará os três gráficos de controle mais comuns (gráfico do desvio padrão, gráfico da variância e gráfico da amplitude), utilizados no monitorea-

mento da dispersão do processo, e a Seção 3.3 apresentará o gráfico da média e o gráfico da mediana, ambos, utilizados no monitoramento do nível do processo.

3.2 Gráficos de Controle para Monitorar a Dispersão do Processo

Quando se constrói gráficos de controle para a dispersão do processo, tem-se que decidir primeiramente se o gráfico é para detectar mudanças em ambas as direções ou se somente numa direção. Neste último caso um gráfico de controle unilateral para dispersão do processo é utilizado.

Se o teste de hipótese é escolhido da seguinte forma

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma_t &\leq \sigma \\ H_1 : \sigma_t &> \sigma, \end{aligned} \tag{3.1}$$

somente é de interesse uma mudança crescente (gráfico de controle unilateral com limite superior), em um tempo t , na característica de qualidade monitorada \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$). Certamente, gráficos de controle que detectam mudanças na dispersão do processo em ambas as direções podem ser construídos. A aplicação de tal gráfico de controle corresponde a realização de um teste de hipóteses do tipo

$$\begin{aligned} H_0 : \sigma_t &= \sigma \\ H_1 : \sigma_t &\neq \sigma. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Finalmente, a seguir, três diferentes gráficos de controle para a dispersão do processo são apresentados. O gráfico do desvio padrão amostral, o gráfico da variância amostral e o gráfico da amplitude amostral.

3.2.1 Gráfico do Desvio Padrão (Gráfico S)

Com a relativa facilidade com que é possível calcular os desvios padrões utilizando calculadoras com funções embutidas, o gráfico S está crescendo em uso como gráfico de controle para medir a dispersão do processo. Davis (1999) fornece um programa computacional simples que determina o tamanho amostral ótimo e o limite superior de controle para gráficos S unilaterais. Logo, se algum desvio padrão amostral observado está acima do LSC , então o gráfico sinalizará que o processo pode ter problemas. Enquanto que, se o desvio padrão amostral observado estiver abaixo do LSC , sinais não serão gerados. Para

Montgomery (2001) o gráfico do desvio padrão oferece maior eficiência na estimação da dispersão e é mais flexível para aplicações que envolvam tamanhos de subgrupos maiores e/ou diferentes que o gráfico R .

Para determinar os limites de controle do gráfico S , é necessário supor que os valores observados da característica de qualidade monitorada são normalmente distribuídos com média μ e variância σ^2 . Se S_j é o desvio padrão amostral do j -ésimo subgrupo, então

$$S_j = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}. \quad (3.3)$$

No entanto, o desvio padrão amostral S_j não é um estimador não-viesado de σ (veja Capítulo 5). Como $(n-1)S_j^2/\sigma^2$ tem distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade, pode-se verificar que

$$\mu_{S_j} = E[S_j] = c_n \sigma \quad (3.4)$$

e

$$\sigma_{S_j} = \sqrt{\text{Var}[S_j]} = \sqrt{\sigma^2 - c_n^2 \sigma^2} = \sigma \sqrt{1 - c_n^2}, \quad (3.5)$$

onde n é o tamanho do subgrupo amostral e

$$c_n = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}. \quad (3.6)$$

Baseando-se nas fórmulas (3.4) e (3.5), a linha central e os limites de controle 3 sigmas para o gráfico S , quando um valor padrão é dado por σ , são obtidos através das seguintes expressões:

$$LSC = c_n \sigma + 3\sigma \sqrt{1 - c_n^2}$$

$$LC = c_n \sigma$$

$$LIC = c_n \sigma - 3\sigma \sqrt{1 - c_n^2}.$$

Comumente, defini-se

$$B_5 = c_n - 3\sqrt{1 - c_n^2}$$

e

$$B_6 = c_n + 3\sqrt{1 - c_n^2},$$

tal que, a linha central e os limites de controle para o gráfico S , quando um valor padrão é dado por σ , passam a ser expressos por

$$\begin{aligned}LSC &= B_6\sigma \\LC &= c_n\sigma \\LIC &= B_5\sigma.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Valores de c_n , B_5 e B_6 , obtidos a partir de Montgomery (2001), estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

Se nenhum padrão é dado para σ , então ele deve ser estimado. Logo, supõe-se que m amostras sejam analisadas, cada uma com tamanho n , e que S_j é o desvio padrão da j -ésima amostra. Assim, a média dos m desvios padrão é dada por

$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_j.\tag{3.8}$$

A estatística \bar{S}/c_n é um conhecido estimador não-viesado de σ . Portanto, a linha central e os limites de controle 3 sigmas do gráfico S , quando nenhum padrão é dado para σ , são

$$\begin{aligned}LSC &= \bar{S} + 3\frac{\bar{S}}{c_n}\sqrt{1 - c_n^2} \\LC &= \bar{S} \\LIC &= \bar{S} - 3\frac{\bar{S}}{c_n}\sqrt{1 - c_n^2}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Definindo-se as constantes

$$B_3 = 1 - \frac{3}{c_n}\sqrt{1 - c_n^2}$$

e

$$B_4 = 1 + \frac{3}{c_n}\sqrt{1 - c_n^2},$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico S , quando nenhum valor padrão é dado para σ , são

$$\begin{aligned}LSC &= B_4\bar{S} \\LC &= \bar{S} \\LIC &= B_3\bar{S}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Valores de B_3 e B_4 , obtidos a partir de Montgomery (2001), estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

3.2.2 Gráfico da Variância (Gráfico S^2)

O gráfico S , apresentado na seção anterior, é baseado na estatística S que é um estimador tendencioso de σ . Uma outra forma de monitorar a variabilidade de um processo consiste em controlar a variância σ^2 , e isto pode ser feito com base no seu estimador não-tendencioso S^2 . O gráfico resultante é denominado gráfico S^2 .

Wludyka e Nelson (1997) mostram um procedimento gráfico, baseado na variância amostral S^2 , para testar a hipótese de homogeneidade das variâncias de k -amostras, para amostras de populações normais. Wludyka *et al.* (2001) apresentam alguns aperfeiçoamentos realizados no teste gráfico de Wludyka e Nelson (1997). O novo procedimento utiliza um gráfico S^2 para determinar o poder do teste de homogeneidade de variâncias, para várias combinações de k , graus de liberdade (ν) e nível de significância (α). O poder dos gráficos é apresentado para $\alpha = 0,10; 0,05; 0,01$.

Em textos clássicos do controle estatístico da qualidade que abordam o gráfico S^2 , por exemplo em Duncan (1974) e Montgomery (2001), os limites de controle são determinados de forma probabilística, naturalmente supondo normalidade nos valores observados da característica de qualidade monitorada. Aqui os limites de controle são determinados como feito para o gráfico S . Portanto, novamente supõe-se que os valores observados da característica de qualidade monitorada são normalmente distribuídos com média μ e variância σ^2 . Se S_j^2 é a variância amostral do j -ésimo subgrupo, então

$$S_j^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}. \quad (3.11)$$

A partir da estatística $(n-1)S_j^2/\sigma^2$ que tem distribuição qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade, pode-se verificar que

$$\mu_{S_j^2} = E[S_j^2] = \sigma^2 \quad (3.12)$$

e

$$\sigma_{S_j^2}^2 = Var[S_j^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1}. \quad (3.13)$$

Se m amostras são analisadas, cada uma com tamanho n , e suas variâncias $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ calculadas, um estimador não-tendencioso de σ^2 é

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m S_j^2. \quad (3.14)$$

A partir de (3.13) e (3.14), um estimador não-tendencioso para o desvio padrão de S_j^2 é

$$\hat{\sigma}_{S_j^2} = \bar{S}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \quad (3.15)$$

Portanto, a linha central e os limites de controle 3 sigmas do gráfico S^2 são obtidos através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{S}^2 + 3\bar{S}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \\ LC &= \bar{S}^2 \\ LIC &= \bar{S}^2 - 3\bar{S}^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Definindo-se as constantes

$$B_7 = 1 - 3\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

e

$$B_8 = 1 + 3\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico \bar{S}^2 são dados por

$$\begin{aligned} LSC &= B_8 \bar{S}^2 \\ LC &= \bar{S}^2 \\ LIC &= B_7 \bar{S}^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Valores de B_7 e B_8 , obtidos a partir de Mittag e Rinne (1993), estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.2 do Apêndice A.

A linha central e os limites de controle probabilísticos para o gráfico \bar{S}^2 , são dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1;0,99865}^2 \\ LC &= \sigma^2 \\ LIC &= \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1;0,00135}^2, \end{aligned}$$

onde 0,99865 e 0,00135 são, respectivamente, os percentis $1 - \alpha/2$ e $\alpha/2$ da distribuição qui-quadrado com $(n - 1)$ graus de liberdade.

Quando o parâmetro σ^2 for desconhecido, pode-se estimá-lo através de (3.11). E utilizando os procedimentos anteriores, a linha central e os limites de controle probabilísticos para o gráfico \bar{S}^2 , são estimados por

$$\begin{aligned} LSC &= \frac{\bar{S}^2}{n-1} \chi_{n-1; 0,99865}^2 \\ LC &= \bar{S}^2 \\ LIC &= \frac{\bar{S}^2}{n-1} \chi_{n-1; 0,00135}^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2.3 Gráfico da Amplitude (Gráfico R)

Certamente, o mais comum dos gráficos de controle para medir a dispersão na distribuição básica de uma característica de qualidade é o gráfico da amplitude ou gráfico R . Sua popularidade é principalmente devido a facilidade com que as amplitudes são calculadas. Logo, quando métodos estatísticos são implementados em problemas industriais, seguramente um estimador bastante utilizado para σ é a amplitude amostral R .

Considerações a respeito da amplitude em controle de qualidade foram feitas inicialmente por Shewhart em 1924 com o surgimento dos gráficos de controle e a partir daí vêm sendo amplamente difundidas por vários pesquisadores na área de controle da qualidade. Um dos primeiros pesquisadores a fazer sérias considerações sobre o uso da amplitude amostral como medida de dispersão foi Tippett (1925), que tabula a amplitude média, em termos do desvio padrão populacional, para amostras de tamanho $n = 2, 3, \dots, 1000$, através de uma população normal. Uma extensão desse trabalho pode ser vista em Pearson (1926), que mostra como calcular valores modificados para β_1 e β_2 (pontos de um diagrama construído a partir da distribuição das amplitudes), para $n = 60$ e 100 .

Student (1927) ajusta as curvas de Pearson (1926) para os quatro primeiros momentos da amplitude para alguns valores de n . A partir dos resultados de Student (1927), com pequenas modificações, Pearson (1932) calcula pontos inferiores e superiores a 0,5%, 1%, 5% e 10%, para $n = 2, 3, \dots, 30$ e também para $n = 35, 40, 45, \dots, 100$. McKay e Pearson (1933) encontram a distribuição exata, para as amplitudes amostrais de tamanho 3, de uma população normal e dão novos resultados relativos à forma da curva da amplitude.

No artigo publicado por Pearson (1938), observa-se que o pioneiro na proposta de utilizar a razão da amplitude (amplitude padronizada ou amplitude relativa), $Q = W/\sigma_R$,

como uma estimativa do desvio padrão populacional foi Student. A proposta de usar a razão da amplitude, idealizada por Student, foi desenvolvida por Newman (1939), que tabula um número de pontos de 1% e 5% de Q , que ele obteve através da quadratura da distribuição de probabilidade aproximada de $W = R/\sigma_R$, onde W é a amplitude populacional dada por Pearson (1932), exceto para $n = 3$, cuja distribuição exata foi obtida por McKay e Pearson (1933). Newman (1939) propôs um método sistemático, aplicando a amplitude padronizada, para múltiplas comparações no tratamento de médias em experimentos.

A função de probabilidade da amplitude foi primeiro tabulada por Pearson e Hartley (1942), para $n = 2, 3, \dots, 20$. A base teórica computacional destes cálculos pode ser vista em Hartley (1942).

Nos trabalhos de Patnaik (1950), Hartley (1950) e David (1951), são constatadas aplicações da amplitude em análise de variância. Assim, uma das notáveis ocorrências para o aprimoramento teórico da amplitude foi o desenvolvimento de vários procedimentos de comparações múltiplas, baseados na amplitude padronizada. Tais procedimentos são encontrados no teste de Newman-Keuls [que é uma modificação feita por Keuls (1952) no teste proposto inicialmente por Newman (1939)], nos testes propostos por Tukey (1952) e em um teste para amplitudes múltiplas proposto por Ducan (1955).

Aplicações da amplitude amostral como estimador de σ , também, podem ser vistas em textos clássicos, por exemplo, Juran e Gryna (1992), Kume (1993) e Montgomery (2001). Recentemente, Ramos *et al.* (2002) fazem considerações sobre a amplitude amostral como estimador de σ e sua utilização no controle estatístico de qualidade. Resultados de simulações proporcionam uma discussão a respeito do tamanho de subgrupo ideal. Ainda, fornecem uma expansão da tabela dos fatores A , A_2 , A_3 , $d_2(n)$, $d_3(n)$, D_3 e D_4 , para $n = 2, 3, \dots, 100$, utilizados na construção de gráficos de controle para variáveis e também para os coeficientes de assimetria $\alpha_3(n)$ e curtose $\alpha_4(n)$.

Para determinar os limites de controle do gráfico R , é necessário supor que os valores observados da característica de qualidade monitorada são normalmente distribuídos com média μ e variância σ^2 . Se R é a amplitude amostral de uma amostra de tamanho n , então

$$R = X_{max} - X_{min}, \quad (3.19)$$

onde X_{max} é o maior valor observado na amostra e X_{min} é o menor valor observado na amostra.

Se m amostras são analisadas, cada uma com tamanho n , e suas amplitudes R_1, R_2, \dots, R_m obtidas, então a média das amplitudes é dada por

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}. \quad (3.20)$$

“Existe uma importante relação entre a amplitude amostral (R) e o desvio padrão (σ) de uma distribuição normal, dada por $W = R/\sigma_R$ e conhecida como amplitude relativa” [Montgomery, 2001]. A média e o desvio padrão de W são, respectivamente, as constantes d_2 e d_3 e são função do tamanho amostral n [veja Ramos *et al.* (2002)].

A partir da estatística W , obtém-se um estimador de σ da seguinte forma:

$$\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2}. \quad (3.21)$$

Wadsworth *et al.* (1986) mostram que a eficiência de (3.21) em estimar a dispersão do processo, principalmente para pequenos tamanhos de subgrupos, é quase tão alta quanto a do desvio padrão amostral.

Usando as propriedades de W e as equações (3.20) e (3.21), obtém-se

$$\mu_R = E[R] = \bar{R} \quad (3.22)$$

e

$$\sigma_R = \sqrt{Var[R]} = d_3\sigma = d_3\frac{\bar{R}}{d_2}. \quad (3.23)$$

Conseqüentemente, a linha central e os limites de controle 3 sigmas do gráfico R são

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{R} + 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2} \\ LC &= \bar{R} \\ LIC &= \bar{R} - 3d_3\frac{\bar{R}}{d_2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Definindo-se as constantes

$$D_3 = 1 - 3\frac{d_3}{d_2}$$

e

$$D_4 = 1 + 3\frac{d_3}{d_2},$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico R passam a ser estimados por

$$\begin{aligned}LSC &= D_4\bar{R} \\LC &= \bar{R} \\LIC &= D_3\bar{R}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Valores de d_2 , d_3 , D_3 e D_4 , obtidos a partir de Mittag e Rinne (1993), estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.2 do Apêndice A.

3.3 Gráficos de Controle para Monitorar o Nível do Processo

Antes de aplicar um gráfico de controle para o nível do processo μ , em um tempo t , tem-se que decidir se é desejável detectar mudanças crescentes e decrescentes ou uma mudança em somente uma direção, na característica de qualidade monitorada \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$). Se o interesse é no último caso, utiliza-se um gráfico de controle unilateral para o nível do processo.

O teste de hipótese escolhido para este gráfico é do tipo

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu_t \leq \mu \\H_1 &: \mu_t > \mu,\end{aligned}\tag{3.26}$$

ou

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu_t \geq \mu \\H_1 &: \mu_t < \mu,\end{aligned}\tag{3.27}$$

dependendo se é desejável uma mudança crescente ou decrescente, respectivamente, no processo. Entretanto, se movimentos crescentes e decrescentes no nível do processo são relevantes, então implementa-se um gráfico de controle bilateral para o nível do processo. Seu teste de hipóteses é da forma

$$\begin{aligned}H_0 &: \mu_t = \mu \\H_1 &: \mu_t \neq \mu.\end{aligned}\tag{3.28}$$

No que segue, dois diferentes gráficos de controle para o nível do processo são introduzidos. O gráfico da média e o gráfico da mediana, dependendo se a média amostral \bar{X} ou a mediana amostral \tilde{X} , respectivamente, é escolhida como estatística de teste.

3.3.1 Gráfico da Média (Gráfico \bar{X})

O mais comum dos gráficos de controle para estudar e controlar a tendência central na distribuição básica de uma característica de qualidade é o gráfico da média, ou gráfico \bar{X} . Sua relativa facilidade de cálculo e aplicação, aliada a sua excelente sensibilidade na detecção de mudanças na média da distribuição, contam para a sua popularidade.

Uma recomendação prevalecente é que, por fortes razões estatísticas, os limites de controle devem ser baseados no mínimo em 25 subgrupos amostrais, comumente com cinco observações cada. King (1954) mostra um procedimento para estabelecer limites de controle iniciais em gráficos \bar{X} , com o propósito de testar se o processo estava sob controle estatístico, enquanto os subgrupos iniciais estavam sendo extraídos.

Duncan (1956) faz o planejamento econômico do gráfico \bar{X} para monitorar o processo. Roberts (1959) utiliza o gráfico de controle \bar{X} para gerar médias móveis geométricas. O procedimento mostra que as observações ponderadas são pouco afetadas quando a suposição de normalidade não é satisfeita. Hill (1964) desenvolve a idéia de se utilizar limites de controle adaptáveis em gráficos \bar{X} .

Hiller (1964) apresenta um método para construção de limites de controle em gráficos \bar{X} baseado em um pequeno número de subgrupos amostrais. O método de Hiller (1964) proporciona a construção de limites de controle para gráficos \bar{X} estatisticamente fortes, independentes do pequeno número de subgrupos amostrais observados. A simplicidade do método exige somente a utilização de uma tabela, e a interpretação dos resultados é a mesma como para gráficos \bar{X} com limites de controle convencionais. Ott (1967) fornece um método gráfico, semelhante ao gráfico de controle de Shewhart, para avaliar a média amostral \bar{X} .

Ghosh *et al.* (1981) apresentam as propriedades do gráfico \bar{X} quando os limites de controle são construídos a partir da estimação de σ^2 das observações amostrais. Davis *et al.* (1993) desenvolvem um procedimento gráfico para determinar as chances do gráfico \bar{X} detectar uma mudança na média do processo. Klein (2000) fornece esquemas baseados nas seqüências amostrais “*plotadas*” nos gráficos de controle \bar{X} , para melhorar o desempenho na detecção de pontos fora dos limites de controle nestes gráficos. Nedumaran e Pignatiello (2001) propõem a construção de limites de controle para o gráfico \bar{X} , utilizando os pontos percentuais da distribuição *Run Length* (comumente, utilizada para determinar o número

de amostras selecionadas antes de um ponto situar-se fora dos limites de controle). Marcellus (2001) verifica as propriedades dos gráficos \bar{X} quando limites de controle assimétricos são utilizados.

O gráfico de controle de Shewhart para média é uma das mais importantes ferramentas do controle estatístico de qualidade. Podendo ser utilizado inicialmente para determinar a capacidade de um processo de produção em produzir consistentemente entre os limites de especificação pré-estabelecidos. Também é utilizado para indicar quando o processo está fora de controle estatístico, isto é, quando causas assinaláveis de flutuações irregulares entraram no processo.

Para o processo de construção de gráficos \bar{X} assume-se novamente, que a característica da qualidade monitorada \mathbf{X} é normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 . Se \bar{X} é a média de uma amostra de tamanho n , então

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (3.29)$$

Seja \bar{X}_i , $i = 1, 2, \dots$, denotando a média do i -ésimo subgrupo. Sabe-se que os \bar{X}_i são normalmente distribuídos com média e variância dadas por

$$E[\bar{X}_i] = \mu \quad (3.30)$$

e

$$Var[\bar{X}_i] = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (3.31)$$

Assim, segue-se que

$$Z = \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1). \quad (3.32)$$

Se o processo permanece em controle, então $\sqrt{n}(\bar{X}_i - \mu)/\sigma$ tem distribuição normal padrão. Portanto, demonstra-se que Z quase sempre estará entre -3 e 3 , pois $P[-3 < Z < 3] = 0,9973$.

Conseqüentemente,

$$P \left[-3 < \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_i - \mu)}{\sigma} < 3 \right] = 0,9973,$$

ou similarmente,

$$P \left[\frac{\mu - 3\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}_i < \frac{\mu + 3\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 0,9973. \quad (3.33)$$

O intervalo dentro dos colchetes em (3.33) é conhecido como intervalo de variação bilateral da estatística de teste \bar{X} com nível $1 - \alpha$, e possui a propriedade de que $(1 - \alpha)100\%$ de todas as realizações de \bar{X} são esperadas situarem-se dentro deste intervalo, no caso de uma produção sem perturbações. Desta forma, a linha central e os limites de controle do gráfico \bar{X} são dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ LC &= \mu \\ LIC &= \mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Considere agora que a média μ e o desvio padrão σ não sejam conhecidos inicialmente, logo eles terão de ser estimados a partir dos dados. Assim, suponha que m amostras são analisadas, cada uma com tamanho n , e suas médias $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ calculadas, então um estimador não-tendencioso de μ é a média das médias, obtida através de

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m}. \quad (3.35)$$

Para estimar σ , usualmente recorre-se às estatísticas \bar{S}/c_n e \bar{R}/d_2 , baseadas no desvio padrão amostral e na amplitude amostral, respectivamente.

Portanto, a linha central e os limites de controle 3 sigmas do gráfico \bar{X} , quando o desvio padrão amostral é usado para estimar σ são dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + 3\frac{\bar{S}}{c_n\sqrt{n}} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - 3\frac{\bar{S}}{c_n\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Definindo-se a constante

$$A_3 = \frac{3}{c_n\sqrt{n}},$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico \bar{X} passam a ser estimados por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Valores de A_3 , obtidos a partir de Montgomery (2001), estão tabulados para vários tamanhos amostrais na Tabela A.3 do Apêndice A.

Conseqüentemente, quando a amplitude amostral é utilizada para estimar σ , a linha central e os limites de controle 3 sigmas do gráfico X , são obtidos através de

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Definindo-se a constante

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}},$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico \bar{X} passam a ser estimados por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Valores de A_2 , obtidos a partir de Montgomery (2001), estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.3 do Apêndice A.

3.3.2 Gráfico da Mediana (Gráfico \tilde{X})

Outro gráfico que usa uma medida de tendência central da distribuição básica de uma característica de qualidade, utilizado para estudar e controlar o nível do processo é o gráfico da mediana ou gráfico \tilde{X} . O uso dos gráficos de controle da mediana e amplitude média, com tamanhos de subgrupos fixos, podem ser preferíveis ao habitual gráfico $\bar{X} - R$ para controlar certas situações, de acordo com Ferrel (1953). Clifford (1959) utiliza o gráfico de controle da mediana para estabelecer limites de controle através de um processo de medida e contagem. Osinski (1962) relata como a companhia borracheira de Chicago reduziu a variabilidade do processo em 30% e o desgaste do maquinário em 50%, através da utilização de gráficos \tilde{X} .

O gráfico da mediana é geralmente usado em conjunto com o gráfico das amplitudes,

para também monitorar a dispersão na distribuição básica de uma importante característica de qualidade. Conseqüentemente, o gráfico da mediana é freqüentemente associado com pequenos subgrupos amostrais, assim como os gráficos de controle \bar{X} e R . Segundo Dixon e Massey (1969) a eficiência da mediana em estimar a verdadeira média populacional cai com o aumento do tamanho da amostra ou do subgrupo amostral. Eles mostram que a eficiência é maior para tamanhos de números pares que para números ímpares. Para grandes tamanhos amostrais a eficiência aproximada é de 0,637 em comparação com a média aritmética. Isto é, a média amostral de uma amostra de tamanho 64 poderia ter a mesma precisão para estimar a média populacional como a mediana de uma amostra de tamanho 100.

Janacek e Meikle (1997) propõem modificações nos gráficos de controle da mediana quando distribuições não-normais são utilizadas. Apesar da perda de poder quando distribuições normais são utilizadas, o método é bastante robusto quando as características de qualidade monitoradas apresentam distribuições não-normais, além disso, possui a vantagem de não exigir cálculos trabalhosos do usuário. Porém, Ryan e Howley (1999) fazem duras críticas a metodologia proposta por Janacek e Meikle (1997), principalmente em relação a falta de demonstração de que a não-normalidade seja realmente um problema durante a utilização de gráficos de controle. Janacek e Meikle (1999) respondem as críticas através de um contra-exemplo, no qual a suposição de normalidade dos dados parece não ser a melhor escolha.

Nelson (1982) recomenda a utilização de gráficos de controle \tilde{X} , para monitorar o nível do processo, sempre que o cálculo da média for considerado trabalhoso para o usuário. Uma tabela comparando os erros padrão da mediana para populações normais em relação aos erros padrão da média e suas eficiências, para tamanhos amostrais $n = 3, 5, 7, 9$ e 11 , também é fornecida.

O gráfico da mediana possui várias vantagens, dentre as quais, pode-se citar:

- a folha dos dados e a aritmética envolvida em encontrar \bar{X} e R são eliminadas;
- desde que, ambas, a mediana de X e a mediana de R não sejam grandemente afetadas por observações fora de controle estatístico, os recálculos das linhas centrais e dos limites de controle praticamente nunca são necessários;

- a linha central no gráfico é a adequada para seqüências abaixo e acima da mediana;
- desde que os resultados individuais sejam “*plotados*”, é possível mostrar os limites de controle e os limites de especificação;
- comparações entre a capacidade do processo e a realização do processo são fáceis para realizar;
- o gráfico pode ser facilmente resumido;
- o gráfico de controle para medianas pode ser facilmente adaptado para um procedimento sem gráficos.

Assumindo que a característica de qualidade monitorada \mathbf{X} é normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 , e que \tilde{X} é a mediana de uma amostra de tamanho n , então pode-se defini-la como:

$$\tilde{X} = X_{(i)}, \quad i = \frac{1}{2}(n + 1) \quad (3.40)$$

onde $X_{(i)}$ representa o elemento de ordem i . Quando o número de observações é par, utiliza-se como mediana a média aritmética das duas observações centrais. Ou seja, a mediana é o valor que ocupa a posição central da série de observações, quando estas estão ordenadas segundo suas grandezas (em ordem crescente ou decrescente).

Seja $\tilde{X}_i, i = 1, 2, \dots$, denotando a mediana do i -ésimo subgrupo, sabe-se que as \tilde{X}_i são normalmente distribuídas com média e variância dadas por

$$E[\tilde{X}_i] = \mu \quad (3.41)$$

e

$$Var[\tilde{X}_i] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2. \quad (3.42)$$

Assim, segue-se que

$$Z = \frac{\tilde{X}_i - \mu}{\sqrt{\sigma^2 \pi^2 / 4n}} \sim N(0, 1). \quad (3.43)$$

Se o processo permanece em controle, então $2\sqrt{n}(\tilde{X} - \mu)/(\sigma\pi)$ tem distribuição normal padrão. Conseqüentemente, o intervalo de variação bilateral da estatística de teste \tilde{X} com nível $1 - \alpha$, que possui a propriedade de que $(1 - \alpha)100\%$ de todas as realizações de \tilde{X} sejam

esperadas situarem-se dentro deste intervalo, no caso de uma produção sem perturbações é da forma

$$P \left[\mu - Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{\pi}{2} \leq \tilde{X}_i \leq \mu + Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{\pi}{2} \right] = 1 - \alpha. \quad (3.44)$$

Portanto, a linha central e os limites de controle do gráfico \tilde{X} são dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{\pi}{2} \\ LC &= \mu \\ LIC &= \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Definindo-se a constante

$$h_n = \frac{\pi}{2\sqrt{n}}, \quad (3.45)$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico \tilde{X} passam a ser estimados por

$$\begin{aligned} LSC &= \mu + 3h_n\sigma \\ LC &= \mu \\ LIC &= \mu - 3h_n\sigma \end{aligned} \quad (3.46)$$

Valores de h_n são desenvolvidos neste trabalho e estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.3 do Apêndice A.

Considere agora que a mediana μ e o desvio padrão σ não sejam conhecidos inicialmente, logo eles terão de ser estimados a partir dos dados. Assim, supõe-se que m amostras são analisadas, cada uma com tamanho n , e suas medianas $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_m$ calculadas, então dois estimadores não-tendenciosos de μ são a média das medianas amostrais e a mediana das medianas amostrais, obtidas, respectivamente, através de

$$\bar{\tilde{X}} = \frac{\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_m}{m} \quad (3.47)$$

e

$$\tilde{X} = \tilde{X}_{(i)}; \quad i = \frac{1}{2}(m + 1), \quad (3.48)$$

onde $\tilde{X}_{(i)}$ representa a mediana de ordem i . Quando o número de amostras é par, utiliza-se como mediana das medianas amostrais a média aritmética das duas medianas centrais.

Para estimar σ , usualmente, recorre-se as estatísticas \bar{S}/c_n e \bar{R}/d_2 , baseadas no desvio padrão amostral e na amplitude amostral, respectivamente.

Portanto, a linha central e os limites de controle 3 sigmas do gráfico \tilde{X} , quando o desvio padrão é usado para estimar σ e a média das medianas amostrais ou mediana das medianas amostrais é usada para estimar μ , são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\tilde{X}} + 3h_n \frac{\bar{S}}{c_n} \\ LC &= \bar{\tilde{X}} \\ LIC &= \bar{\tilde{X}} - 3h_n \frac{\bar{S}}{c_n} \end{aligned} \quad (3.49)$$

ou

$$\begin{aligned} LSC &= \tilde{\tilde{X}} + 3h_n \frac{\bar{S}}{c_n} \\ LC &= \tilde{\tilde{X}} \\ LIC &= \tilde{\tilde{X}} - 3h_n \frac{\bar{S}}{c_n}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Definindo-se a constante

$$H_3 = \frac{3h_n}{c_n}, \quad (3.51)$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico \tilde{X} passam a ser estimados por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\tilde{X}} + H_3 \bar{S} \\ LC &= \bar{\tilde{X}} \\ LIC &= \bar{\tilde{X}} - H_3 \bar{S} \end{aligned} \quad (3.52)$$

ou

$$\begin{aligned} LSC &= \tilde{\tilde{X}} + H_3 \bar{S} \\ LC &= \tilde{\tilde{X}} \\ LIC &= \tilde{\tilde{X}} - H_3 \bar{S}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Valores de H_3 são desenvolvidos neste trabalho e estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.3 do Apêndice A.

Conseqüentemente, quando a amplitude amostral é utilizada para estimar σ , e a média das medianas amostrais ou mediana das medianas amostrais é usada para estimar μ , a

linha central e os limites de controle 3 sigmas são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + 3h_n \frac{\bar{R}}{d_2} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - 3h_n \frac{\bar{R}}{d_2} \end{aligned} \quad (3.54)$$

ou

$$\begin{aligned} LSC &= \tilde{\bar{X}} + 3h_n \frac{\bar{R}}{d_2} \\ LC &= \tilde{\bar{X}} \\ LIC &= \tilde{\bar{X}} - 3h_n \frac{\bar{R}}{d_2}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Definindo-se a constante

$$H_4 = \frac{3h_n}{d_2}, \quad (3.56)$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico \tilde{X} passam a ser estimados por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + H_4 \bar{R} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - H_4 \bar{R} \end{aligned} \quad (3.57)$$

ou

$$\begin{aligned} LSC &= \tilde{\bar{X}} + H_4 \bar{R} \\ LC &= \tilde{\bar{X}} \\ LIC &= \tilde{\bar{X}} - H_4 \bar{R}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Valores de H_4 são desenvolvidos neste trabalho e estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.3 do Apêndice A.

Neste capítulo foram apresentados os principais gráficos de controle para monitorar a dispersão e o nível do processo. Algumas das principais pesquisas responsáveis pelo desenvolvimento da teoria de construção e utilização destes gráficos foram mostradas. O processo de construção de cada gráficos também foi enfocado.

É importante salientar que o cumprimento de todas as fases, durante a construção dos

gráficos de controle para variáveis, será determinante para o êxito do emprego de tal ferramenta estatística, principalmente no estabelecimento dos estimadores.

Finalmente, no capítulo subsequente, tópicos acerca dos principais índices de capacidade do processo serão abordados. A ênfase será no método de construção e interpretação destes índices.

Capítulo 4

Índices de Capacidade do Processo

4.1 Introdução

Devido a sua simplicidade de obtenção e avaliação, os índices de capacidade são outro bom exemplo de ferramenta do controle estatístico de qualidade com ampla utilização industrial. Tal qual os gráficos de controle, a determinação da capacidade do processo depende de estimativas para a dispersão e para o nível (em alguns casos) do processo. Assim, a obtenção de estimadores para a dispersão do processo, capazes de melhorar a sensibilidade dos índices, são de grande interesse para pesquisadores e usuários dos índices de capacidade do processo.

A capacidade de um processo, segundo Prazeres (1996), pode ser definida como: “Habilidade intrínseca de um processo em desempenhar suas funções nas condições de trabalho, satisfazendo certas especificações e tolerâncias. É uma medida da uniformidade inerente ao processo”.

A quantificação do nível e da dispersão do processo é fundamental para entender a qualidade das unidades produzidas em um processo industrial. A utilidade dos limites de controle no estudo da capacidade do processo é mostrada por Bingham (1962), quando a amplitude e amplitude média são utilizadas. Kane (1986) apresenta algumas aplicações dos índices de capacidade, juntamente com considerações de amostragem estatística. Bissell (1990) obtém aproximações para o erro padrão e intervalos de confiança para alguns índices de capacidade.

Rodriguez (1992) utiliza métodos gráficos e outras técnicas estatísticas para mostrar a evolução da análise da capacidade do processo. Kushler e Hurley (1992) constroem limites de controle de confiança para alguns índices de capacidade, quando o tamanho amostral é pequeno. Shore (1997) analisa a capacidade do processo quando as observações

são autocorrelacionadas. Parlar e Wesolowsky (1999) fornecem um método simples para determinar os limites de especificação e os índices de capacidade do processo para fornecedores de componentes industriais, em termos do C_{pk} desejado num processo de montagem. Nelson (1999) mostra a importância da normalidade das observações quando índices de capacidade são utilizados. Testes para verificação da normalidade e simetria são sugeridos, considerações a respeito do tamanho amostral n também são feitas.

Basicamente, o estudo da capacidade visa verificar se o processo consegue atender às especificações, ou não. Ou seja, é avaliado se a dispersão natural (6σ) de um processo está dentro dos limites de especificação. Assim, considerando a situação onde a média do processo μ , e o desvio padrão σ , são desconhecidos e estimados por $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$, respectivamente, e que este processo comporta-se conforme a distribuição normal, pode-se imediatamente determinar a porcentagem de defeituosos a partir das especificações fornecidas e dos parâmetros μ e σ . Porém, é mais simples avaliar o processo através dos índices de capacidade.

Apesar da grande variedade de índices de capacidade [veja, por exemplo, Kotz e Lovelace (1998)], quatro índices são mais frequentemente utilizados para mensurar a capacidade de um processo em atender às especificações. Estes índices de capacidade são comumente conhecidos como C_p , C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} .

Este capítulo mostrará os quatro principais índices de capacidade utilizados na avaliação dos processos. Suas formas de obtenção e análise serão detalhadas e a necessidade de estimativas para σ , quando índices de capacidade são utilizados, será vista. Portanto, nas seções seguintes considerações a respeito destes índices serão abordadas. A Seção 4.2 apresentará o índice de capacidade do processo C_p e a Seção 4.3 mostrará os índices C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} .

4.2 Índice C_p

O C_p foi o primeiro dentre os cinco índices de capacidade do processo desenvolvidos pelos japoneses. Projetado para dar uma medida indireta da habilidade do potencial do processo em satisfazer as exigências (especificações). Sua definição é da forma

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma}, \quad (4.1)$$

onde LSE é o limite superior de especificação, LIE é o limite inferior de especificação e σ é o desvio padrão do processo. Finley (1992) refere-se a este índice como ICP , chamando-o de capacidade potencial ou índice de capacidade potencial. Montgomery (2001) refere-se ao C_p como PCP , denominando-o de proporção da capacidade do processo (para não confundí-lo com a estatística C_p de Mallow, utilizada na análise de regressão). O índice C_p pode ser redefinido de forma simples como

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{\text{Especificação do Produto}}{\text{Capacidade do Processo}} \\ &= \frac{\text{Dispersão Permitida do Processo}}{\text{Dispersão Natural do Processo}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

O numerador do C_p dá o tamanho da amplitude sobre a qual as observações do processo podem variar. O denominador dá o tamanho da amplitude sobre a qual o processo está atualmente variando. Obviamente, deseja-se que o processo monitorado possua um C_p tão grande quanto possível. Nem o numerador, nem o denominador, referem-se ao nível do processo, isto é, o C_p compara somente dispersões (amplitudes), não levando em conta onde o processo está centrado.

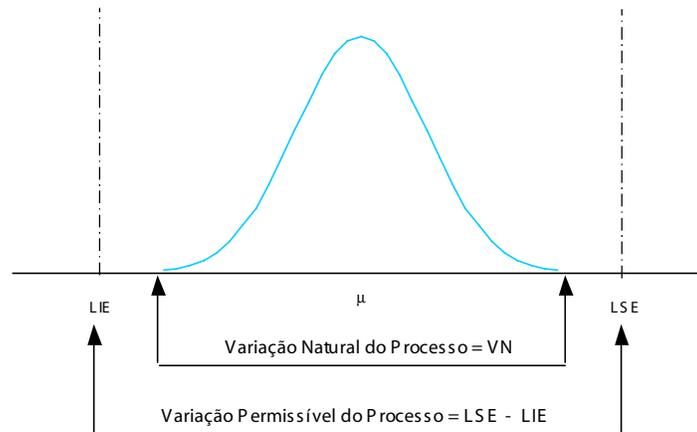
Kotz e Johnson (1993) alertam que o índice C_p deve ser utilizado somente para processo sob controle estatístico e cujas observações são independentes e normalmente distribuídas. Quando C_p é utilizado sob quaisquer outras condições estimativas incorretas da capacidade do processo serão produzidas.

A Figura 4.1 mostra claramente a desejada relação entre a dispersão permitida do processo e a dispersão natural do processo.

Para o processo ser considerado capaz, o índice C_p deve ser igual ou maior do que 1,00, o que equivale a dizer que pelo menos 99,73% das unidades produzidas serão conformes, admitindo-se a distribuição normal para a variabilidade das unidades produzidas e que a média do processo seja centralizada na especificação. Entretanto, $C_p = 1,00$ não é comumente usado como um valor mínimo aceitável. Uma estimativa de $C_p = 1,33$ se tornou o critério mais comumente aceito como limite inferior para determinação da capacidade de um processo. Esta estimativa assegura que os dados do processo utilizam aproximadamente 75% ou menos da amplitude de especificação. Isto assegura uma taxa muito baixa de rejeição (0,007%) e é, portanto uma estratégia efetiva para prevenção de itens defeituosos.

Usando 1,33 dá-se alguma garantia que um $C_p = 1,00$ será possível quando fontes adicionais de variação forem experimentadas no processo de produção. Juran e Gryna (1980), por exemplo, recomendam um valor mínimo do $C_p = 1,33$ para um processo produtivo contínuo. Entretanto, alguns processos exigem maior rigor com relação ao controle da variabilidade que outros, neste sentido Kotz e Johnson (1993) recomendam valores mínimos de 1,50 para processos existentes e 1,67 para novos processos. Montgomery (2001) cita valores mínimos de 1,33 para um processo existente e 1,50 para um novo processo.

Figura 4.1 *Relação entre a dispersão permitida do processo e a dispersão natural do processo.*



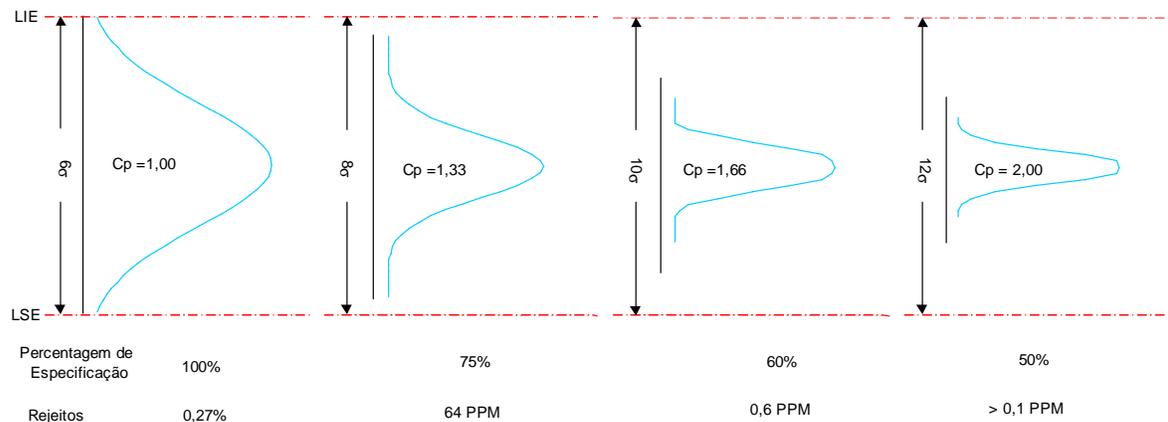
Entretanto, uma regra usual para a análise do índice de capacidade do processo é descrita da seguinte forma:

- $C_p < 1,00$ - A capacidade do processo é inadequada à especificação exigida. O processo é considerado vermelho. Nesta situação, o responsável pela produção deverá tentar diminuir a variabilidade do processo ou realizar o trabalho em outro processo que atenda as especificações;
- $1,00 \leq C_p \leq 1,33$ - A capacidade do processo está dentro da especificação exigida. O processo é considerado amarelo. Nesta situação, o responsável pela produção deverá tentar diminuir a variabilidade do processo. Gráficos de controle são úteis para manter o processo sob controle estatístico, evitando a produção de unidades não-conformes;
- $C_p > 1,33$ - A capacidade do processo é adequada à especificação exigida. O processo

é considerado verde. Nesta situação, o responsável pela produção não precisa tomar maiores cuidados com o processo, a menos que se queira reduzir a variabilidade para aumentar a qualidade dos produtos.

A Figura 4.2 mostra que quando a dispersão natural do processo utiliza toda a faixa de especificação (dispersão permitida do processo), $C_p = 1,00$ e é esperado que o processo produza 27 unidades não-conformes a cada 10000 unidades produzidas. Quando apenas 60% da faixa de especificação é utilizada pela dispersão natural do processo $C_p = 1,66$ e é esperado que o processo produza somente 6 unidades não-conformes a cada 10000000 de unidades produzidas.

Figura 4.2 *Relação entre a faixa de especificação utilizada, C_p e as unidades não-conformes produzidas.*



Contudo, o ponto de referência de 1,00 foi escolhido para relacionar C_p à variação natural seis sigmas usada nos gráficos de controle. Se um processo é exatamente capaz, então $LSC = LSE/\sqrt{n}$ e $LIC = LIE/\sqrt{n}$, onde n é o tamanho amostral.

Na Figura 4.2 a porcentagem da faixa de especificação utilizada é obtida através de $P = (1/C_p) \times 100\%$.

Testes de hipóteses apropriados devem ser utilizados para determinar se os valores do índice de capacidade verdadeiros excedem o limite inferior para determinação da capacidade.

4.2.1 Teste de Hipóteses e o Índice C_p

Na análise da capacidade do processo o interesse é desempenhar um teste de hipóteses da seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{ o processo não é capaz} \\ H_1 &: \text{ o processo é capaz.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para fazer isto, estima-se o valor do índice, \hat{C}_p , e compara-o com um limite inferior para determinação da capacidade, ψ . Isto é,

$$\begin{aligned} H_0 &: \hat{C}_p \leq \psi \\ H_1 &: \hat{C}_p > \psi, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde ψ é comumente 1,33, como mencionado anteriormente. A hipótese H_0 é rejeitada e a hipótese alternativa H_1 é aceita se $\hat{C}_p > \psi$.

4.3 Índices C_{pu} , C_{pl} e C_{pk}

O índice C_{pk} foi desenvolvido, também no Japão, para suprir algumas das lacunas deixadas pelo C_p , principalmente com relação ao fato de que o índice C_p mede a capacidade somente em termos da dispersão do processo e não leva o nível do processo em consideração.

A definição de C_{pk} obedece um procedimento de dois passos, conforme mostrado a seguir. Primeiro considere a situação de especificação unilateral, isto é, onde somente um limite de especificação é dado. Relacionando as dispersões natural e permitida do processo, dois novos índices são obtidos. Estes índices são definidos por

$$\begin{aligned} C_{pu} &= \frac{\text{Dispersão Superior Permitida no Processo}}{\text{Dispersão Superior Natural no Processo}} \\ &= \frac{LSE - \mu}{3\sigma} \end{aligned} \quad (4.5)$$

e

$$\begin{aligned} C_{pl} &= \frac{\text{Dispersão Inferior Permitida no Processo}}{\text{Dispersão Inferior Natural no Processo}} \\ &= \frac{\mu - LIE}{3\sigma}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde LSE é o limite superior de especificação, LIE é o limite inferior de especificação e

σ é o desvio padrão do processo. Estes índices são denominados de índices de capacidade superior e inferior, respectivamente.

Finalmente, a partir das Equações (4.5) e (4.6), um índice natural para o caso de especificação bilateral, denominado de C_{pk} , é definido por

$$\begin{aligned} C_{pk} &= \min\{C_{pu}, C_{pl}\} \\ &= \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $d = (LSE - LIE)/2$ é o comprimento da metade do intervalo de especificação e $M = (LSE + LIE)/2$ é o ponto médio do intervalo de especificação.

Observando a definição do C_{pk} , nota-se que este índice quantifica a capacidade em função da pior metade dos dados do processo. Isto é, o índice C_{pk} , além de avaliar a variabilidade natural do processo em relação a variabilidade permitida, verifica também a posição do processo em relação aos limites (superior e inferior) de especificação. Ou seja, o índice C_{pk} relaciona a distância escalar entre a média do processo e o limite de especificação mais próximo.

Para o processo ser considerado capaz, o C_{pk} deve ser igual ou superior a um. Os valores de C_p e C_{pk} estabelecidos como critério para ser o limite inferior durante a avaliação da capacidade de um processo, não possuem nenhum embasamento estatístico, são apenas uma margem de segurança que visa assegurar que os valores de C_p ou C_{pk} tenham alta probabilidade de serem no mínimo superiores a um.

Os índices C_{pu} e C_{pl} estão relacionados com C_p por $C_p = (C_{pu} + C_{pl})/2$, que é usado para medir capacidade do processo na situação de um único limite de especificação. Claro que, no caso de um único limite, por exemplo, $C_{pu} = 1,00$ implica numa metade com muitos itens não-conformes (0,136%) como quando $C_p = 1,00$ no caso dos dois limites (duas metades).

Este capítulo procurou proporcionar uma visão geral acerca dos principais índices utilizados para avaliar a capacidade de um processo, destacando suas metodologias de construção, formas de interpretação e algumas das principais pesquisas envolvendo a utilização e o desenvolvimento destes índices.

A correta avaliação da capacidade de um processo, que deve satisfazer certas especificações, será decisiva para a qualidade das unidades produzidas num processo industrial, daí sua importância na área do controle da qualidade e especificamente, neste trabalho.

Finalmente, o capítulo subsequente abordará os principais estimadores para a dispersão e para o nível do processo, bem como, as suas propriedades.

Capítulo 5

Princípios de Estimação em Controle Estatístico da Qualidade

5.1 Introdução

A estatística pode ser dividida didaticamente em duas partes: (1) estatística descritiva, que tem por objetivo descrever características importantes de dados populacionais conhecidos e (2) a estatística indutiva ou inferencial, que utiliza dados amostrais para fazer inferências (ou generalizações) sobre uma população. As duas principais aplicações da estatística inferencial envolvem a utilização de dados amostrais (a) para estimar o valor de um parâmetro populacional e (b) para formular uma conclusão sobre uma população.

Considerando X como sendo uma variável aleatória com função de densidade (ou de probabilidade) denotada por $f(x|\theta)$, onde θ é um parâmetro desconhecido, diz-se que uma população é o conjunto de valores de uma característica (observável) associada a uma coleção de indivíduos de interesse. Logo, uma seqüência X_1, \dots, X_n de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*) com função de densidade (*f.d.p.*) ou, no caso discreto, função de probabilidade (*f.p.*) é dita ser uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição X .

E qualquer característica dos elementos da população é chamada de parâmetro, isto é, uma quantidade numérica desconhecida (que se deseja estimar). Como por exemplo a média $\mu = E(X)$ ou a variância $\sigma^2 = Var(X)$. O conjunto Θ em que θ toma valores é denominado espaço paramétrico. Por exemplo, seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da variável X , onde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Se $\sigma^2 = 1$, então $\theta = \mu$ é o parâmetro desconhecido e $\Theta = \{\mu, -\infty < \mu < \infty\}$.

Qualquer estatística que assuma valores em Θ é um estimador para θ , isto é, estimador é uma estatística amostral (como a média amostral $\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$) utilizada para

obter uma aproximação de um parâmetro populacional. Estimativa é um valor específico, ou um intervalo de valores, usado para aproximar um parâmetro populacional.

Agora considere que, com base nos valores amostrais, se pretende estimar a média de uma determinada característica de qualidade de todos os produtos de um processo fabril qualquer. Poderia se utilizar uma estatística como a mediana amostral, o ponto médio, ou a moda como estimativa dessa média populacional μ , mas a média amostral \bar{X} em geral é a melhor estimativa de uma média populacional. A escolha de \bar{X} se baseia em um estudo e uma análise cuidadosa das distribuições das diferentes estatísticas que poderiam ser usadas como estimadores.

As razões que explicam porque uma média amostral é um melhor estimador de uma média populacional μ do que quaisquer outros estimadores, como a mediana e a moda, serão apresentadas mais adiante. Portanto, nas próximas seções breves considerações a respeito dos principais estimadores para a dispersão e para o nível do processo, bem como, as suas propriedades serão abordadas. A Seção 5.2 tecerá um breve relato acerca das propriedades dos estimadores. A Seção 5.3 mostrará os principais estimadores para a dispersão do processo e, finalmente, a Seção 5.4 apresentará os principais estimadores para o nível do processo.

5.2 Propriedades dos Estimadores

Na seção anterior iniciou-se uma discussão em torno de \bar{X} , como sendo um melhor estimador de uma média populacional μ do que outros estimadores. Basicamente, pode-se destacar a presença de importantes qualidades (propriedades) em \bar{X} que o torna um bom estimador para μ . Primeiro, para muitas populações, a distribuição de médias amostrais \bar{X} tende a ser mais consistente (apresenta menor variação) do que as distribuições de outras estatísticas amostrais.

Uma estatística $T(X) = (X_1, \dots, X_n)$ é consistente para θ se e somente se $P(|T(X) - \theta| > \epsilon) \rightarrow 0$, quando $n \uparrow \infty$, onde $\epsilon > 0$. Ou seja, $T(X) \xrightarrow{p} \theta$ ($T(X)$ converge em probabilidade para θ , veja James (1996)). Alternativamente, $T(X)$ é consistente para θ se e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} E[T(X)] = \theta$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} Var[T(X)] = 0$.

Considerando X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da variável $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\bar{X}] = \lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(n\mu) = \mu \quad (5.1)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Var[\bar{X}] = \lim_{n \rightarrow \infty} Var\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = 0. \quad (5.2)$$

Portanto, se médias amostrais são utilizadas para estimar a média populacional μ , essas médias amostrais terão menor desvio padrão do que outras estatísticas amostrais, tais como mediana ou a moda.

Outra propriedade importante é que, para todas as populações, diz-se que a média amostral \bar{X} é um estimador não-viesado da média populacional μ . Um estimador $T(X)$ é dito não-viesado (não-tendencioso) de θ se $E[T(X)] = \theta$, $\forall \theta$. A partir da expressão (5.1) pode-se verificar facilmente que \bar{X} é realmente um estimador não-tendencioso de μ . Basicamente, isto significa que a distribuição de médias amostrais tende a centrar-se em torno da média populacional μ . Isto é, as médias amostrais não tendem a sobreestimar nem a subestimar sistematicamente o valor de μ , ao contrário, tendem para o valor-alvo que é o próprio valor de μ .

Uma das formas comumente utilizada para se avaliar o desempenho de um estimador é através de seu erro quadrático médio (*EQM*), obtido por

$$EQM[\hat{\theta}] = Var[\hat{\theta}] + B^2(\hat{\theta}), \quad (5.3)$$

onde $B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$ é denominado o viés do estimador $\hat{\theta}$. Portanto, como \bar{X} é um estimador não-viesado da média populacional μ , seu *EQM* é avaliado por $EQM[\bar{X}] = Var[\bar{X}] = \sigma^2/n$.

A eficiência é outra importante propriedade dos estimadores. Assim, se $T(X)$ e $T'(X)$ são dois estimadores não-viesados de um mesmo parâmetro θ , e $Var[T(X)] < Var[T'(X)]$, então, $T(X)$ é dito mais eficiente do que $T'(X)$.

Conforme visto na Seção 3.3, $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ e $\tilde{X} \sim N(\mu, \pi\sigma^2/2n)$. Observa-se facilmente que \bar{X} e \tilde{X} são estimadores não-viesados de μ . Entretanto, $Var(\tilde{X})/Var(\bar{X}) = \pi/2$. Portanto $Var(\bar{X}) < Var(\tilde{X})$. Logo, \bar{X} é um estimador mais eficiente que \tilde{X} , para estimar a média populacional μ .

Por estas razões a média amostral \bar{X} é utilizada como a melhor estimativa da média populacional μ . Como a média amostral \bar{X} é um valor único que corresponde a um ponto na escala numérica, ela é comumente chamada de estimativa pontual. Isto é, um valor (ou ponto) único usado para aproximar um parâmetro populacional. Quando uma amplitude (ou um intervalo) de valores que tem probabilidade de conter o verdadeiro valor da população é determinada, esta é comumente denominada de intervalo de confiança (ou estimativa intervalar).

Um intervalo de confiança está associado a um nível de confiança que é uma medida da nossa certeza de que o intervalo contém o parâmetro populacional. O nível de confiança é a probabilidade $1 - \alpha$ (comumente expressa como o valor percentual equivalente) de o intervalo de confiança conter o verdadeiro parâmetro populacional. São escolhas comuns para o grau de confiança: 90% (com $\alpha = 0,10$), 95% (com $\alpha = 0,05$) e 99% (com $\alpha = 0,01$).

5.3 Estimando a Dispersão do Processo

No controle estatístico da qualidade, um dos maiores interesses é obter estimativas para o desvio padrão populacional σ . Logo, se os valores amostrais são conhecidos, pode-se calcular o desvio padrão amostral S . Contudo, como as habituais variâncias amostrais S^2 tendem a centrar-se no valor da variância populacional σ^2 , diz-se que S^2 também é um estimador não-tendencioso de σ^2 . Quando a suposição de normalidade nos dados observados é verificada, S^2 torna-se a melhor estimativa pontual de σ^2 . Portanto, seria natural esperar que S fosse o melhor estimador pontual de σ , mas isso não ocorre, porque S é um estimador tendencioso de σ . Entretanto, vale ressaltar que se o tamanho da amostra é grande, a tendenciosidade é tão pequena que pode-se utilizar S como uma estimativa razoavelmente boa de σ .

Outro estimador de σ bastante utilizado baseia-se na amplitude amostral R . Porém, apesar da presença obrigatória na literatura de controle estatístico da qualidade, sua definição, e ainda considerações a seu respeito deixam a desejar.

Portanto, se o valor de σ da dispersão do processo não é conhecido, pode-se estimá-lo dos dados observados. No que segue, quatro possibilidades para estimar σ serão apresentadas. Os estimadores $\hat{\sigma}$ de σ mostrados, são todos não-viesados, mas diferem com relação as suas variâncias.

- Primeiro Estimador - Desvio Padrão Amostral Corrigido

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da característica de qualidade \mathbf{X} , onde $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$. Se S_i , conforme Equação (3.3), é o desvio padrão amostral do i -ésimo subgrupo, então, a média e a variância de S_i são obtidas pela Equação (3.4) e $\sigma_{S_i}^2 = \sigma^2(1 - c_n^2)$, respectivamente. Facilmente, se verifica que S_i não é um estimador não-viesado de σ .

Assim, um estimador $\hat{\sigma}$ não-viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma}_I = \frac{S_i}{c_n}, \quad (5.4)$$

onde

$$Var[\hat{\sigma}_I] = Var\left[\frac{S_i}{c_n}\right] = (1 - c_n^2)\sigma^2. \quad (5.5)$$

Valores de c_n estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

- Segundo Estimador - Média dos Desvios Padrão Amostrais Corrigidos

Considera-se que m amostras da característica de qualidade \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$) são analisadas, cada uma com tamanho n , e que S_i seja o desvio padrão amostral da i -ésima amostra. Então \bar{S} , conforme Equação (3.8), é a média dos m desvios padrão amostrais.

Logo, um estimador $\hat{\sigma}$ não-viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma}_{II} = \frac{\bar{S}}{c_n}, \quad (5.6)$$

onde

$$Var[\hat{\sigma}_{II}] = Var\left[\frac{\bar{S}}{c_n}\right] = \frac{(1 - c_n^2)}{c_n^2}\sigma^2. \quad (5.7)$$

- Terceiro Estimador - Média das Amplitudes Amostrais Corrigidas

Supondo-se que m amostras da característica de qualidade \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$) são analisadas, cada uma com tamanho n , e que R_i seja a amplitude amostral da i -ésima amostra, então \bar{R} , conforme Equação (3.20), é a média das m amplitudes amostrais.

Portanto, um estimador $\hat{\sigma}$ não-viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma}_{III} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad (5.8)$$

onde

$$\text{Var} [\hat{\sigma}_{III}] = \text{Var} \left[\frac{\bar{R}}{d_2} \right] = \frac{d_3^2}{d_2^2} \sigma^2. \quad (5.9)$$

Valores de d_2 e d_3 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.2 do Apêndice A.

- Quarto Estimador - Mediana das Amplitudes Amostrais Corrigidas

Supondo-se que m amostras da característica de qualidade \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$) são analisadas, cada uma com tamanho n , e suas amplitudes R_1, \dots, R_m calculadas, então a amplitude mediana é obtida através de

$$\tilde{R} = R_{(i)}, \quad i = \frac{1}{2}(m + 1), \quad (5.10)$$

para m ímpar, onde $R_{(i)}$ representa a amplitude de ordem i . Quando o número de amplitudes é par, utiliza-se como mediana a média aritmética das duas amplitudes centrais, quando estas estão ordenadas segundo suas grandezas (em ordem crescente ou decrescente).

Portanto, um estimador $\hat{\sigma}$ não-viesado para σ é dado por

$$\hat{\sigma}_{IV} = \frac{\tilde{R}}{\tilde{d}_2}, \quad (5.11)$$

onde

$$\text{Var} [\hat{\sigma}_{IV}] = \text{Var} \left[\frac{\tilde{R}}{\tilde{d}_2} \right] = \frac{\sigma^2}{4\tilde{d}_2^2}. \quad (5.12)$$

Valores de \tilde{d}_2 e \tilde{d}_3 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.2 do Apêndice A.

5.4 Estimando o Nível do Processo

Se o valor μ do nível do processo não é conhecido, pode-se estimá-lo a partir dos dados observados. Existem várias possibilidades para fazer isto. A seguir, quatro métodos diferentes para estimar μ serão mostrados. Todos os estimadores $\hat{\mu}$ de μ , apresentados, são não-viesados e no mínimo distribuídos assintoticamente de modo normal. Entretanto, os estimadores $\hat{\mu}$ de μ possuem variâncias diferentes, isto significa que eles não têm a mesma eficiência em estimar o verdadeiro nível do processo μ .

- Primeiro Estimador - Média das Médias Amostrais

Considera-se que m amostras da característica de qualidade \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$) são analisadas, cada uma com tamanho n , e que suas médias amostrais $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ calculadas, a partir da Equação (3.29). Então, um estimador distribuído normalmente e não-viesado para μ é dado pela Equação (3.35). A variância de $\bar{\bar{X}}$ é obtida através de

$$Var [\bar{\bar{X}}] = \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i \right] = \frac{\sigma^2}{m}, \quad (5.13)$$

onde σ^2 é a variância do processo.

- Segundo Estimador - Mediana das Medianas Amostrais

Se m amostras de uma característica de qualidade \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$) são analisadas, cada uma com tamanho n , e suas medianas amostrais $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_m$ calculadas, a partir da Equação (3.40), para n ímpar e utilizando a média aritmética das duas observações centrais quando n for par, quando estas estão ordenadas segundo suas grandezas (em ordem crescente ou decrescente).

Assim, a Equação (3.48) apresenta um estimador com distribuição aproximadamente normal e não-viesado para μ , quando m é ímpar. Quando o número de amostras é par o estimador de μ é obtido utilizando-se a média aritmética das duas medianas centrais, quando estas estão ordenadas segundo suas grandezas (em ordem crescente ou decrescente).

A variância de $\tilde{\tilde{X}}$ é obtida através de

$$Var [\tilde{\tilde{X}}] = \frac{\sigma^2}{m} c_n^4, \quad (5.14)$$

onde σ^2 é a variância do processo e valores de c_n estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

- Terceiro Estimador - Média das Medianas Amostrais

Supondo-se que m amostras de uma característica de qualidade \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$) são analisadas, cada uma com tamanho n , e suas medianas amostrais $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_m$ calculadas, a partir da Equação (3.40) para n ímpar e utilizando a média aritmética das duas observações centrais quando n for par, quando estas estão ordenadas segundo suas grandezas (em ordem crescente ou decrescente).

Portanto, um estimador $\hat{\mu}$ distribuído aproximadamente normal e não-viesado para μ é dado pela Equação (3.47). A variância de $\bar{\bar{X}}$ é obtida através de

$$Var \left[\bar{\bar{X}} \right] = \frac{\sigma^2}{m} c_n^2, \quad (5.15)$$

onde σ^2 é a variância do processo e valores de c_n estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

- Quarto Estimador - Mediana das Médias Amostrais

Seja $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$ as médias amostrais de m amostras, cada uma com tamanho n , de uma característica de qualidade \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$), calculadas utilizando-se a Equação (3.29), então, um estimador $\hat{\mu}$ distribuído aproximadamente normal para μ é dado por

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = \bar{X}_{(i)}; \quad i = \frac{1}{2}(m + 1), \quad (5.16)$$

para m ímpar, onde $\bar{X}_{(i)}$ representa a média de ordem i . Quando o número de amostras é par, utiliza-se como mediana das médias amostrais a média aritmética das duas médias centrais, quando estas estão ordenadas segundo suas grandezas (em ordem crescente ou decrescente). A variância de $\bar{\bar{X}}$ é obtida através de

$$Var \left[\bar{\bar{X}} \right] = \frac{\sigma^2}{m} c_n^2, \quad (5.17)$$

onde σ^2 é a variância do processo e valores de c_n estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.1 do Apêndice A.

A escolha por um destes quatros estimadores $\hat{\mu}$ para μ , dependerá do critério de decisão adotado. Por exemplo, quando a eficiência do estimador é considerada, a média das médias deverá ser a escolha mais apropriada. Se o critério for a robustez do estimador, isto é, a sensibilidade com relação aos *outliers* (pontos extremos), a mediana das medianas será preferível.

Neste capítulo os princípios de estimação no controle estatístico da qualidade foram mostrados. As principais propriedades dos estimadores, bem como, os estimadores para o nível e para a dispersão do processo, também, foram abordados.

Finalmente, o capítulo servirá como suporte ao bom entendimento acerca do processo de estimação do desvio padrão, quando quartis são utilizados. Este assunto será apresentado no capítulo posterior.

Capítulo 6

Estimando o Desvio Padrão Amostrual Através dos Quartis

6.1 Introdução

A idéia de obter estimativas para o desvio padrão populacional σ , conforme abordado no capítulo anterior, é um dos maiores interesses entre os pesquisadores e estudiosos do controle estatístico da qualidade. Tippett (1950), por exemplo, mostra que tanto a amplitude R , como o desvio padrão S , são estimadores válidos de σ somente se os subgrupos são tomados ao acaso de uma população estável. Como é comum tomar subgrupos periodicamente e não ao acaso, há um risco de que a frequência de amostragem seja combinada com a ação de alguma variável desconhecida e produza uma amplitude ou desvio padrão irreal para σ . Entretanto, ele recomenda a utilização da amplitude R para tamanhos de subgrupos $n \leq 20$.

Juran e Gryna (1992) comentam que, se o tamanho de amostra for $n = 2$, o método da amplitude pode ser considerado como um bom estimador do desvio padrão σ , tal como é o habitual estimador S , uma vez que ambas as estatísticas utilizam todos os dados disponíveis. Para $n \geq 3$, S torna-se uma estatística mais eficiente, pois S usa todos os pontos de dados em cada subgrupo, enquanto que, a amplitude utiliza apenas os dois pontos extremos e assim ignora as informações centrais.

A aproximação padrão para estimar σ , durante a construção de gráficos de controle \bar{X} (gráficos de controle para observações individuais), é baseada em amplitudes móveis (\overline{MR}) de tamanho dois. Supondo que os dados observados possuem distribuição, pelo menos aproximadamente normal, os limites de controle são obtidos por $\bar{X} \pm 3(\overline{MR}/d_2)$, onde \bar{X} é a média das n observações, \overline{MR} é a média de $n - 1$ amplitudes móveis e

$d_2 = 1,128$ para subgrupos de tamanho dois. Cryer e Ryan (1990) mostram que \overline{MR}/d_2 é menos eficiente em estimar σ , do que o estimador não-viesado S/c_n .

Quando as observações são positivamente correlacionadas, \overline{MR}/d_2 pode subestimar muito σ . Se as observações são negativamente correlacionadas, \overline{MR}/d_2 tende a sobreestimar σ . Assim, Cryer e Ryan (1990) sugerem não utilizar \overline{MR}/d_2 e sim S/c_n para estimar σ , durante o processo de construção de limites em gráficos de controle X .

Supondo que o processo está sob controle e que as observações dentro de um subgrupo são normalmente e independentemente distribuídas com média μ e variância σ^2 , então entre todas as estatísticas com valor esperado igual a μ , \bar{X} possui a menor variância, σ^2/n , conforme visto no Capítulo 5. Por esta razão, o uso de \bar{X} como a medida estatística para a tendência central, faz com que o gráfico de controle possua limites mais apertados do que aqueles obtidos utilizando alguma estatística alternativa, imparcial para μ , quando as observações são extraídas de uma distribuição que é, pelo menos, aproximadamente normal.

Por esta razão, os limites dos gráficos \bar{X} , \tilde{X} , S , S^2 e R de Shewhart são baseados inteiramente sobre médias, especificamente sobre \bar{X} , \tilde{X} , \bar{S} , \bar{S}^2 e \bar{R} . Entretanto, aqui acredita-se que a melhor medida estatística para representar os subgrupos pode não ser a medida mais apropriada para calcular os limites de controle. Este argumento é baseado sobre a propriedade das medidas estatísticas chamada “resistência”. Uma estimação é chamada de resistente se não é indevidamente influenciada por algumas observações extremas. A amplitude, o desvio padrão e a média amostral são claramente não resistentes. Por exemplo, supondo que X_1, X_2, \dots, X_{n-1} são aproximadamente iguais a alguma constante, digamos zero, enquanto $X_n = \omega$, então $\bar{X} \simeq \omega/n$ e $R \simeq \omega$. Ou seja, se a maioria das observações são razoavelmente próximas uma das outras, enquanto uma observação difere, então a observação extrema possui grande influência no valor da média amostral e amplitude, particularmente se n não for grande.

Esta falta de resistência de \bar{X} , S e R torna-os especialmente úteis na “plotagem” de seqüências de pontos nos gráficos \bar{X} , S e R . A média amostral baseada sobre um pequeno número de observações é muito sensível a valores extremos, e é uma excelente escolha para identificar mudanças no nível do processo e observações fora de controle estatístico. Limites de controles derivados da eficiência de \bar{X} , baseados sobre a suposição que o pro-

cesso está sob controle, tornam a média amostral uma medida de subgrupo ideal para as médias do processo em gráficos de controle para variáveis. Argumentos similares podem ser considerados para o desvio padrão, S , e a amplitude amostral, R .

Por outro lado, a construção dos limites de controle não deve ser indevidamente influenciada por valores não usuais de subgrupos. Por esta razão, é vantajoso utilizar medidas mais resistentes no cálculo de tais limites.

Tukey (1977) sugere que cinco medidas sejam utilizadas para representar um conjunto de observações. Elas são: a mediana \tilde{X} , os extremos, isto é, $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$, o menor e o maior valor do conjunto de dados, respectivamente, e os quartis. O primeiro quartil (Q_1) é um valor que deixa um quarto dos dados abaixo e três quartos acima dele. Já o terceiro quartil (Q_3) é um valor que deixa três quartos dos dados abaixo e um quarto acima dele. O segundo quartil (Q_2) é a mediana.

Estas cinco medidas são chamadas estatísticas de ordem (estas não são as únicas; há outras) e são medidas resistentes de uma distribuição. Para ilustrar o fato de que, por exemplo, a mediana é uma medida resistente, considere o seguinte conjunto de dados: 5; 7; 8; 10; 12 e 15, dos quais obtemos $\bar{X} = 9,5$ e $\tilde{X} = 9,0$. Suponha agora, que o valor 15 passa a ser 150. Obtém-se então, $\bar{X} = 32$, enquanto a mediana não se altera. Observe que a média aumentou mais de duas vezes. Note ainda, que o desvio padrão para o primeiro caso é $S = 3,62$ e após a mudança de 15 para 150, tem-se $S = 57,86$, ou seja, aumentou mais de quinze vezes do anterior.

A comparação destas distâncias pode fornecer informações sobre a forma da distribuição. De fato, observe na Figura 6.1 como seriam estas distâncias para uma distribuição simétrica.

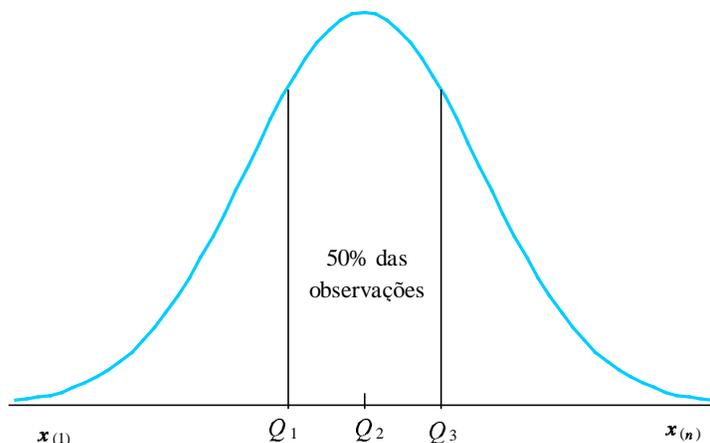
Espera-se, intuitivamente que: (a) a dispersão inferior seja aproximadamente igual a dispersão superior; (b) $Q_2 - Q_1 \cong Q_3 - Q_2$; (c) $Q_1 - X_{(1)} \cong X_{(n)} - Q_3$ e (d) as distâncias entre a mediana e os quartis sejam menores que as distâncias entre os extremos e os quartis.

Neste contexto, este trabalho propõe que os tradicionais estimadores de σ , como por exemplo, \bar{S}/c_n e \bar{R}/d_2 sejam substituídos por medidas mais resistentes. De imediato, espera-se que este procedimento reduza a influência dos valores extremos na construção dos limites de controle. Uma medida de dispersão mais resistente é o intervalo interquartil,

IQ. Onde

$$IQ = Q_3 - Q_1. \quad (6.1)$$

Figura 6.1 *Comparação de algumas medidas resistentes numa distribuição simétrica.*



Portanto, nas seções seguintes será abordada a construção de um estimador para o desvio padrão σ , baseado nos quartis amostrais, mais especificamente utilizando (6.1). Assim, a Seção 6.2 mostrará a função de distribuição amostral e suas propriedades; a Seção 6.3 enfocará os quantis populacionais e amostrais; a Seção 6.4 apresentará o estimador para o desvio padrão amostral baseado nos quartis e, finalmente, a Seção 6.5 trará resultados de simulações.

6.2 Função de Distribuição Amostral

Definição 6.2.1. *Seja X um valor real com f.d. (função distribuição) $F(x) : x \in \mathbb{R}$. Supondo que uma amostra de tamanho n , $\{X_1, \dots, X_n\}$, i.i.d. é extraída, a função de distribuição empírica associada a amostra acima é dada por*

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n} (\# \text{ de } X_i \leq x \text{ na amostra}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{(-\infty, x]}(X_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde \mathbf{I} é a função indicadora dada por

$$\mathbf{I}_{(-\infty, x]}(X_i) = \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}} = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i \leq x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O valor esperado e a variância de $F_n(x)$ são dados, respectivamente, por

$$E[F_n(x)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[\mathbf{I}_{\{X_i \leq x\}}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P\{X_i \leq x\} = F(x) \quad (6.3)$$

e

$$Var[F_n(x)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[\mathbf{I}_{\{X_i \leq x\}}] = \frac{F(x)[1 - F(x)]}{n} \leq \frac{1}{4n}. \quad (6.4)$$

Observe que $Var[F_n(x)] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Utilizando o teorema central do limite (veja, por exemplo, James (1986)), pode-se concluir facilmente, que para cada x fixado

$$\sqrt{n}\{F_n(x) - F(x)\} \xrightarrow{D} N(0, F(x)[1 - F(x)]). \quad (6.5)$$

6.3 Quantil Populacional e Quantil Amostral

Inicialmente, considere as três seguintes situações: (i) se F é contínua e não-decrescente, então F^{-1} é dada por

$$F^{-1}(p) = x, \quad (6.6)$$

quando $p = F(x)$, para $0 < p < 1$, onde p é o p -ésimo quantil; (ii) se F possui uma descontinuidade em x_0 , suponha que $F(x_0^-) < p < F(x_0) = F(x_0^+)$, neste caso, embora não exista x para que $p = F(x)$, $F^{-1}(p)$ é definida como sendo igual a x_0 ; (iii) (6.6) é ambígua quando F é decrescente, então, qualquer valor $a \leq x \leq b$ pode ser escolhido para $x = F^{-1}(p)$. A convenção neste caso é para definir

$$F^{-1}(p) = a,$$

isto é, como o menor valor x para que $F(x) = p$. Esta condição assegura que F^{-1} seja contínua à esquerda.

Estas três situações podem ser combinadas em uma simples definição dada a seguir.

Definição 6.3.1. *Seja $F(x)$ uma função distribuição para $0 < p < 1$. O p -ésimo quantil populacional de $F(x)$ é definido por*

$$Q_p = F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}. \quad (6.7)$$

Logo,

Definição 6.3.2. *Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$. Se F é contínua (sem saltos), então*

$$P = F(Q_p) = P(x \leq q_p). \quad (6.8)$$

Em particular, $q_{1/4}$, $q_{2/4}$, $q_{3/4}$ são, respectivamente, o 1º quartil, a mediana e o 3º quartil de F .

Agora considere que dada uma amostra aleatória *i.i.d.*, X_1, \dots, X_n de F , o p -ésimo quantil amostral $\hat{q}_{n,p}$, ($0 < p < 1$), é definido como o p -ésimo quantil da função empírica $F_n(x)$. Logo,

$$\hat{q}_{n,p} = \begin{cases} X_1, & \text{para } 0 < p \leq 1/n \\ X_2, & \text{para } 1/n < p \leq 2/n \\ X_3, & \text{para } 2/n < p \leq 3/n \\ \vdots & \vdots \\ X_{n-1}, & \text{para } (n-2)/n < p \leq (n-1)/n \\ X_n, & \text{para } (n-1)/n < p \leq 1. \end{cases} \quad (6.9)$$

A função de distribuição do p -ésimo quantil amostral, no caso discreto, é definida por

$$F_{\hat{q}_{n,p}}(x) = \sum_{i=[np]+1}^n \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}, \quad (6.10)$$

onde $F(x)$ é a função distribuição de X e $[np]$ denota o maior inteiro menor que $(n \times p)$.

Para o caso contínuo, a função de distribuição do p -ésimo quantil amostral, é dada por

$$F_{\hat{q}_{n,p}}(x) = k \binom{n}{k} \int_0^{F(x)} t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt, \quad (6.11)$$

onde $k = [np] + 1$.

Supondo F absolutamente contínua com *f.d.p.* f . Então, a *f.d.p.* de $\hat{q}_{n,p}$ é

$$\begin{aligned} f_{\hat{q}_{n,p}}(x) &= \frac{dF_{\hat{q}_{n,p}}(x)}{dx} \\ &= \frac{dF_{\hat{q}_{n,p}}(x)}{dF(x)} \times \frac{dF(x)}{dx} \\ &= n \binom{n-1}{k-1} [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Sen e Singer (1993) mostram que a consistência da seqüência $\{\hat{q}_{n,p}\}_{n \geq 1}$ é dada pela definição a seguir.

Definição 6.3.3. *Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com função distribuição F e $0 < p < 1$. Supondo que o p -ésimo quantil, q_p de F , seja o único ponto x , tal que $F(x^-) \leq p \leq F(x)$, ou seja, apenas q_p satisfaz*

$$\lim_{x \rightarrow q_p^-} F(x) = F(q_p^-) \leq p \leq F(q_p), \quad (6.13)$$

onde x aproxima-se de q_p pela esquerda. Então,

$$\hat{q}_{n,p} \xrightarrow{q.c.} q_{n,p}, \quad (6.14)$$

isto é, $\hat{q}_{n,p}$ converge quase certamente para $q_{n,p}$. Logo, converge em probabilidade, ou seja, $\hat{q}_{n,p} \xrightarrow{P} q_{n,p}$.

Segundo Cadwell (1952) para qualquer população contínua, o quantil de uma amostra de tamanho n possui distribuição assintoticamente normal. Lehmann (1999) mostra que a normalidade assintótica dos quantis multivariados é obtida através da definição dada a seguir.

Definição 6.3.4. *Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com função distribuição F e $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m < 1$. Suponha que F possua f.d.p., f contínua e estritamente positiva (> 0) em q_{p_1}, \dots, q_{p_m} . Logo,*

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{q}_{n,p_1} - q_{p_1} \\ \vdots \\ \hat{q}_{n,p_m} - q_{p_m} \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_m \left(\begin{matrix} 0 \\ \sim \\ \sim \end{matrix}, \Sigma \right), \quad (6.15)$$

onde $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$, com $\Sigma_{ij} = P_i(1 - P_j)/f(q_{p_i})f(q_{p_j})$ para $i \leq j$ ($P_i \leq p_j$), $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$, para $i \leq j$.

6.4 Estimador do Desvio Padrão Amostral Baseado nos Quartis

Considere inicialmente que,

$$\hat{\sigma}_q = \frac{IQ}{\xi_n} = \frac{\hat{q}_{3/4} - \hat{q}_{1/4}}{\xi_n}, \quad (6.16)$$

seja um estimador de σ cujas propriedades são desconhecidas. Onde $\hat{q}_{3/4}$ e $\hat{q}_{1/4}$ são o 3º e o 1º quartil, respectivamente, e ξ_n é uma constante que depende do tamanho amostral n .

Agora, suponha que X_1, \dots, X_n é uma amostra de tamanho n , *i.i.d.* com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Assim, utilizando (6.15), tem-se que

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{q}_{n,1/4} - q_{1/4} \\ \hat{q}_{n,3/4} - q_{3/4} \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{bmatrix} \right), \quad (6.17)$$

onde

$$F(q_{1/4}) = 1/4 = 0,25 \Rightarrow \frac{q_{1/4} - \mu}{\sigma} = Z_{(1/4)} \approx -0,67 \Rightarrow q_{1/4} \approx \mu - 0,67\sigma.$$

Analogamente, $q_{3/4} \approx \mu + 0,67\sigma$.

Portanto, as variâncias e covariâncias em (6.17), são obtidas por

$$\sum_{11} = \frac{1/4 \times (1 - 1/4)}{f^2(q_{1/4})} = \frac{1/4 \times 3/4}{f^2(q_{1/4})} = \frac{3}{16f^2(q_{1/4})}; \quad (6.18)$$

$$\sum_{12} = \frac{1/4 \times (1 - 3/4)}{f(q_{1/4})f(q_{3/4})} = \frac{1/4 \times 1/4}{f(q_{1/4})f(q_{3/4})} = \frac{1}{16f(q_{1/4})f(q_{3/4})}; \quad (6.19)$$

$$\sum_{21} = \sum_{12}; \quad (6.20)$$

$$\sum_{22} = \frac{3/4 \times (1 - 3/4)}{f^2(q_{3/4})} = \frac{3/4 \times 1/4}{f^2(q_{3/4})} = \frac{3}{16f^2(q_{3/4})}. \quad (6.21)$$

A variância do segundo quartil para $n = 3, 4$ e 5 foi obtida por Person e Adyanthāya (1928). Como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \\ f(q_{1/4}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (-0,67)^2 \right\}, \\ f(q_{3/4}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (-0,67)^2 \right\}, \\ f(q_{1/4}) &= f(q_{3/4}) \approx \frac{0,319}{\sigma}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Assim, substituindo (6.22) nas equações (6.18)-(6.21) obtém-se

$$\sum_{11} = \frac{1}{16} \times \frac{3\sigma^2}{0,102},$$

$$\sum_{12} = \sum_{21} = \frac{1}{16} \times \frac{\sigma^2}{0,102},$$

e

$$\sum_{22} = \frac{1}{16} \times \frac{3\sigma^2}{0,102}.$$

Portanto,

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{q}_{n,1/4} - q_{1/4} \\ \hat{q}_{n,3/4} - q_{3/4} \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \frac{\sigma^2}{1,625n} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right). \quad (6.23)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\xi_n} & \frac{1}{\xi_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_{n,1/4} - q_{1/4} \\ \hat{q}_{n,3/4} - q_{3/4} \end{pmatrix} &= \frac{\hat{q}_{n,3/4} - \hat{q}_{n,1/4}}{\xi_n} - \frac{q_{n,3/4} - q_{n,1/4}}{\xi_n} \\ &= \hat{\sigma} - \frac{q_{n,3/4} - q_{n,1/4}}{\xi_n}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Utilizando os resultados dos quantis multivariados, tem-se que

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\xi_n} & \frac{1}{\xi_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q}_{n,1/4} - q_{1/4} \\ \hat{q}_{n,3/4} - q_{3/4} \end{pmatrix} &= \left(\hat{\sigma} - \frac{q_{n,3/4} - q_{n,1/4}}{\xi_n} \right) \\ &= \left(\hat{\sigma} - \frac{2 \times 0,67 \times \sigma}{\xi_n} \right) \\ &= \left(\hat{\sigma} - \frac{1,34\sigma}{\xi_n} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{n} \left(\hat{\sigma} - \frac{1,34\sigma}{\xi_n} \right) \xrightarrow{D} N \left(\begin{bmatrix} -1/\xi_n & 1/\xi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \frac{\sigma^2}{1,625n} \begin{bmatrix} -1/\xi_n & 1/\xi_n \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\xi_n \\ 1/\xi_n \end{bmatrix} \right),$$

ou seja, quando $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \left(\hat{\sigma} - \frac{1,34\sigma}{\xi_n} \right) \xrightarrow{D} N \left(0; \frac{4\sigma^2}{1,625n\xi_n} \right). \quad (6.25)$$

Agora, observe que $4/1,625 \approx (\pi/2)^2$. Assim,

$$\sqrt{n} \left(\hat{\sigma} - \frac{1,34\sigma}{\xi_n} \right) \xrightarrow{D} N \left(0; \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\sigma^2}{n\xi_n^2} \right). \quad (6.26)$$

Conseqüentemente, para um tamanho de amostra finito, pode-se fazer, para o estimador de σ proposto na Equação (6.16), as seguintes aproximações:

$$E[\hat{\sigma}_q] \approx \sigma \quad (6.27)$$

e

$$Var[\hat{\sigma}_q] \approx \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\sigma^2}{n\xi_n^2}. \quad (6.28)$$

A partir da Equação (6.27) pode-se verificar que assintoticamente $\hat{\sigma}_q$ é um estimador não-viesado de σ . Observe ainda que, na Equação (6.28) quando $n \rightarrow \infty$ a $Var[\hat{\sigma}_q] \rightarrow 0$, ou seja, $\hat{\sigma}_q$ é um estimador consistente para σ .

Agora, supondo-se que m amostras da característica de qualidade \mathbf{X} ($\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$) são analisadas, cada uma com tamanho n , e seus desvios padrão $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_m$ obtidos a partir da Equação (6.16), então a média dos desvios padrão é estimada por

$$\bar{Q} = \bar{\sigma}_q = \frac{\hat{\sigma}_{q_1} + \hat{\sigma}_{q_2} + \dots + \hat{\sigma}_{q_m}}{m} = \frac{\sum_{j=1}^m IQ_j}{m\xi_n} = \frac{\overline{IQ}}{\xi_n}, \quad (6.29)$$

onde $\hat{\sigma}_{q_j} = (\hat{q}_{3/4;j} - \hat{q}_{1/4;j})/\xi_n$, $j = 1, \dots, m$.

Verifica-se facilmente que a média e a variância de \bar{Q} são expressas por

$$E[\bar{Q}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^m IQ_i}{m\xi_n}\right] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E\left[\frac{IQ_i}{\xi_n}\right] = \frac{1}{m} m E\left[\frac{\hat{q}_{3/4} - \hat{q}_{1/4}}{\xi_n}\right] = \sigma \quad (6.30)$$

e

$$\begin{aligned} Var[\bar{Q}] &= Var\left[\frac{\sum_{i=1}^m IQ_i}{m\xi_n}\right] = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m Var\left[\frac{IQ_i}{\xi_n}\right] \\ &= \frac{1}{m^2} m Var\left[\frac{\hat{q}_{3/4} - \hat{q}_{1/4}}{\xi_n}\right] = \frac{1}{m} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\sigma^2}{n\xi_n^2}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

A partir da Equação (6.30) pode-se verificar que \bar{Q} é um estimador não-viesado de σ . Observe ainda que, na Equação (6.31) quando $n \rightarrow \infty$ a $Var[\bar{Q}] \rightarrow 0$, ou seja, \bar{Q} é um estimador consistente para σ .

6.5 Simulações

Para o estudo da adequação do estimador do desvio padrão baseado nos quartis, apresentado na Equação (6.29), foram simuladas amostras com tamanhos $n = 5, 6, 8, 10, 15, 30, 50$, e 100 , supondo que são independentes e normalmente distribuídas com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

Para cada valor do tamanho amostral n fixado, foram geradas 5000 amostras, divididas em 200 seqüências amostrais, com 25 amostras cada. Daí foram calculadas R , S e IQ para cada amostra, de onde obtém-se \bar{R} , \bar{S} , \overline{IQ} , \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e \overline{IQ}/ξ_n . Para as 200 seqüências amostrais encontram-se as médias amostrais das estimativas obtidas por \bar{S}/c_n , \bar{R}/d_2 e

$\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ e seus erros quadráticos médios, calculados utilizando-se as Equações (5.7), (5.9) e (6.31), respectivamente. A simulação foi feita utilizando o simulador do aplicativo Minitab 13.0 for Windows, da Minitab Inc.

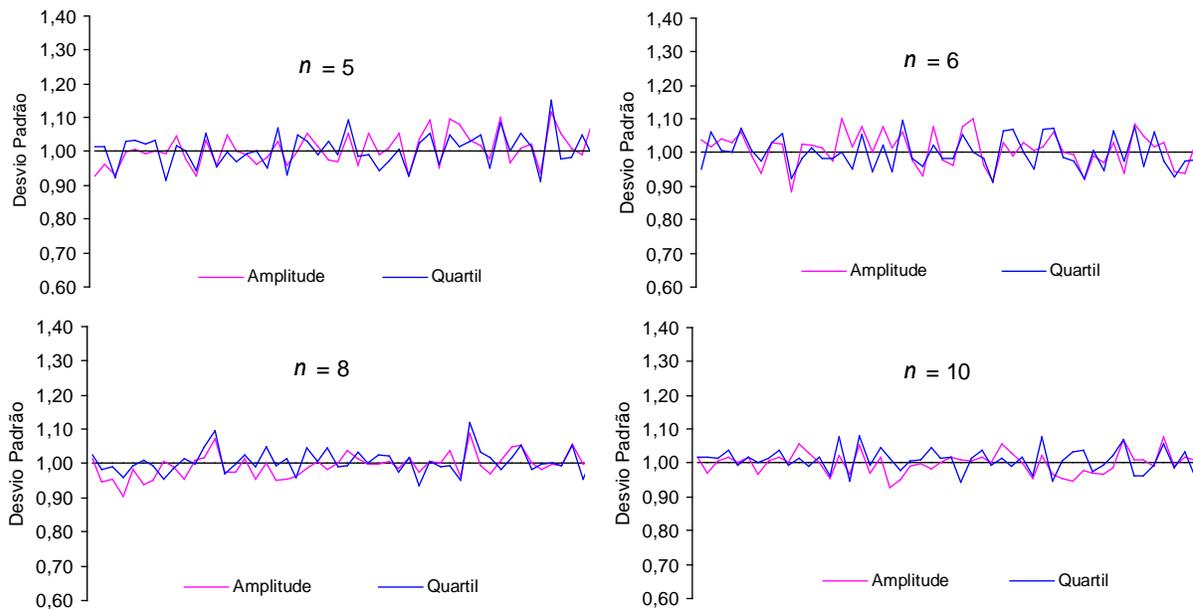
Utilizando procedimento similar, as médias amostrais das estimativas de σ^2 geradas a partir de \bar{S}^2 e \bar{Q}^2 , também foram obtidas e seus erros quadráticos médios calculados, respectivamente, pelas equações (3.13) e

$$\widehat{Var} [\bar{Q}^2] = 2 \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}^2}{mn\xi_n^2} \right]^2 + 4 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\hat{\sigma}^2}{mn\xi_n^2}. \quad (6.32)$$

Nas Figuras 6.2 e 6.4 as estimativas obtidas através do estimador baseado na amplitude amostral estão denominadas de “Amplitude”, enquanto que, as estimativas obtidas pelo estimador baseado nos quartis estão denominadas de “Quartil”.

A Figura 6.2 apresenta as estimativas de σ , obtidas a partir de $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ e \bar{R}/d_2 , para pequenos e moderados tamanhos amostrais ($n = 5, 6, 8$ e 10). A principal conclusão a partir dos dados desta figura é que as estimativas de ambos os estimadores apresentam comportamento semelhante. Entretanto, observa-se uma melhora no comportamento do estimador baseado nos quartis.

Figura 6.2 *Comparação entre as estimativas de σ , obtidas a partir de $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ e \bar{R}/d_2 , para pequenos e moderados tamanhos amostrais ($n = 5, 6, 8$ e 10).*



A Tabela 6.1 mostra as médias amostrais das estimativas obtidas por \bar{R}/d_2 , $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ e

\bar{S}/c_n para o desvio padrão σ , juntamente com seus respectivos erros quadráticos médios dentro de parênteses. A principal conclusão a partir desta tabela é que os resultados obtidos através de \overline{IQ}/ξ_n são, em média, mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro do que as produzidas por \bar{R}/d_2 e \bar{S}/c_n . Entretanto, a variabilidade das estimativas obtidas (medida através de seu erro quadrático médio) a partir de \overline{IQ}/ξ_n é, em geral, menor do que a variabilidade obtida por \bar{R}/d_2 e \bar{S}/c_n . Note que, a partir dos erros quadráticos médios, os valores obtidos por \overline{IQ}/ξ_n convergem mais rapidamente para o verdadeiro valor do parâmetro do que os produzidos por \bar{R}/d_2 e \bar{S}/c_n .

Tabela 6.1 *Médias Amostrais das estimativas obtidas por \bar{R}/d_2 , \overline{IQ}/ξ_n e \bar{S}/c_n para o desvio padrão σ , juntamente com seus respectivos erros quadráticos médios dentro de parênteses.*

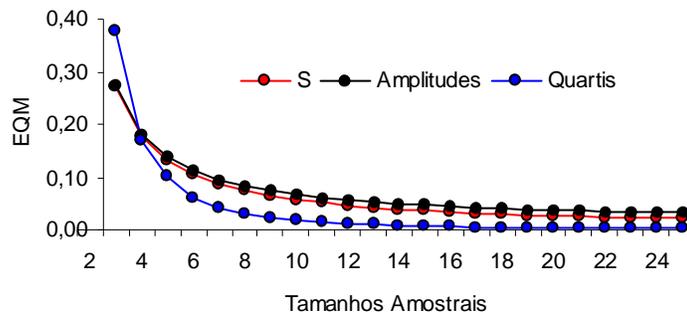
Tamanho amostral n	\bar{R}/d_2	\overline{IQ}/ξ_n	\bar{S}/c_n
5	1,007 (0,139)	1,005 (0,123)	1,009 (0,117)
6	1,006 (0,121)	1,000 (0,061)	1,004 (0,096)
8	1,000 (0,069)	1,000 (0,030)	1,000 (0,067)
10	1,000 (0,064)	1,009 (0,018)	1,001 (0,054)
15	1,000 (0,038)	1,000 (0,007)	1,000 (0,035)
30	1,000 (0,016)	1,000 (0,002)	1,001 (0,014)
50	1,000 (0,010)	1,000 (0,001)	1,000 (0,010)
100	1,000 (0,000)	1,000 (0,000)	1,000 (0,000)

Pode ser visto na Figura 6.4 que, para amostras de tamanhos grandes ($n = 15, 30, 50$ e 100), o estimador baseado nos quartis apesar de apresentar melhor comportamento, como esperado, não difere do estimador baseado na amplitude.

Os resultados sugerem que, quando $n \rightarrow \infty$ os estimadores apresentados são todos

equivalentes, ou seja, possuem a mesma eficiência para estimar o verdadeiro valor de σ . Entretanto, uma análise mais cuidadosa indica que o estimador baseado nos quartis produz melhores estimativas para σ . De fato, observando a Figura 6.3 construída utilizando os erros quadráticos médios de \bar{S}/c_n , \bar{R}/d_2 e \bar{IQ}/ξ_n , obtidos a partir das Equações (5.7), (5.9) e (6.31), respectivamente, considerando $m = n$ e $\sigma^2 = 1$ e utilizando os valores de c_n , d_2 e ξ_n dados nas Tabelas A.1, A.2 e A.4 do Apêndice A, constata-se que \bar{IQ}/ξ_n produz menores erros quadráticos médios do que \bar{S}/c_n e \bar{R}/d_2 . Além disso, estimativas do erro quadrático médio obtidas para \bar{IQ}/ξ_n convergem mais rapidamente para zero do que estimativas do erro quadrático médio obtidas para \bar{S}/c_n e \bar{R}/d_2 .

Figura 6.3 Comparação entre os erros quadráticos médios dos estimadores \bar{S}/c_n , \bar{R}/d_2 e \bar{IQ}/ξ_n , considerando $\sigma^2 = 1$ e $m = n$, para tamanhos amostrais $n = 3, 4, \dots, 25$.



Na Figura 6.3, os erros quadráticos médios obtidos para \bar{S}/c_n , \bar{R}/d_2 e \bar{IQ}/ξ_n estão denominados de “S”, “Amplitudes” e “Quartis”, respectivamente.

A Tabela 6.2 mostra as médias amostrais das estimativas obtidas por \bar{S}^2 e \bar{Q}^2 para a variância σ^2 , juntamente com seus respectivos erros quadráticos médios dentro de parênteses. A principal conclusão a partir desta tabela é que as estimativas obtidas através de \bar{Q}^2 são mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro quando o tamanho amostral é pequeno e que as estimativas obtidas utilizando \bar{S}^2 são mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro quando o tamanho amostral é moderado. Para grandes tamanhos amostrais \bar{Q}^2 e \bar{S}^2 são equivalentes.

Neste capítulo foi apresentado o estimador para o desvio padrão σ , baseado nos quartis. Tópicos a respeito da função de distribuição amostral e dos quantis populacionais e amostrais foram mostrados. Resultados de simulações demonstram que as estimativas obtidas são mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro, quando o estimador para

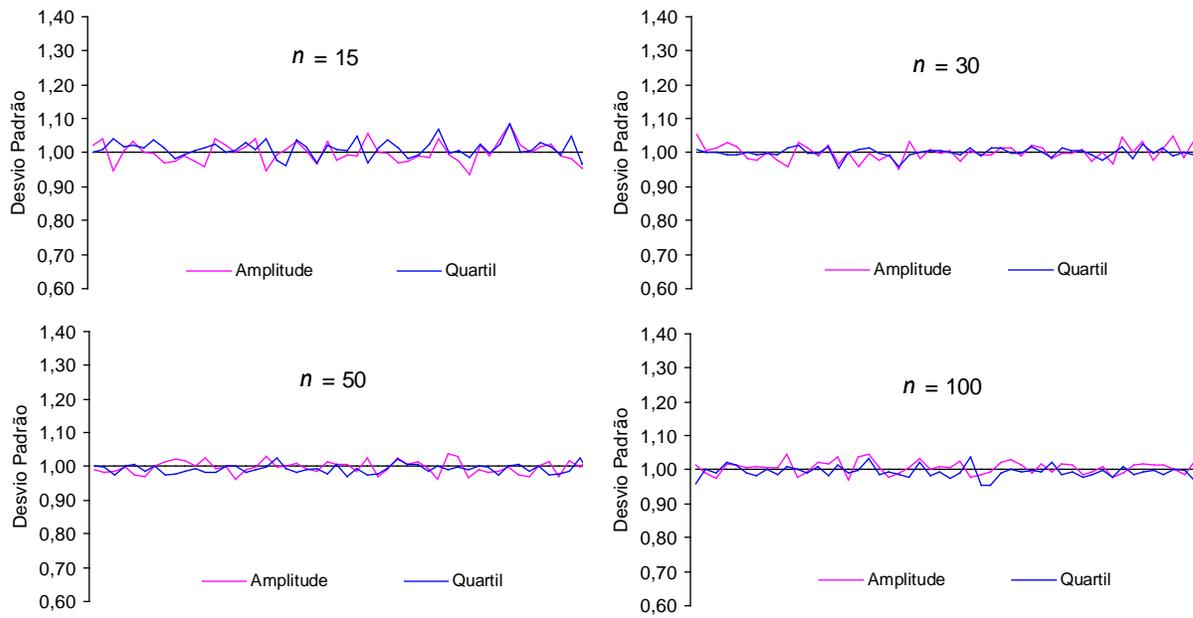
σ baseado nos quartis é utilizado, e que as estimativas para σ^2 obtidas a partir de \bar{Q}^2 são mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro para pequenos tamanhos amostrais, para moderados tamanhos, as estimativas produzidas utilizando \bar{S}^2 são mais próximas, e quando o tamanho amostral é grande ambos estimadores são equivalentes.

Tabela 6.2 *Médias Amostrais das estimativas obtidas por \bar{S}^2 e \bar{Q}^2 para a Variância σ^2 , juntamente com seus respectivos erros quadráticos médios dentro de parênteses.*

Tamanho amostral n	\bar{S}^2	\bar{Q}^2
5	1,017 (0,110)	1,000 (0,100)
6	1,008 (0,078)	1,000 (0,068)
8	1,007 (0,036)	1,003 (0,025)
10	1,000 (0,016)	1,000 (0,024)
15	1,001 (0,009)	1,000 (0,011)
30	1,000 (0,003)	1,000 (0,002)
50	1,000 (0,001)	1,000 (0,001)
100	1,000 (0,000)	1,000 (0,000)

Finalmente, no capítulo subsequente, as estatísticas mostradas neste capítulo serão aplicadas em conjuntos de dados reais e teóricos, através da utilização das ferramentas estatísticas, apresentadas nos Capítulos 3 e 4, para monitorar e avaliar o nível, a dispersão e a capacidade dos processos.

Figura 6.4 Comparação entre as estimativas de σ , obtidas a partir de \overline{IQ}/ξ_n e \bar{R}/d_2 , para grandes tamanhos amostrais ($n = 15, 30, 50$ e 100).



Capítulo 7

Aplicação

7.1 Introdução

Conforme visto na Seção 2.5, a probabilidade de ocorrer alarmes falsos (erro tipo I) aumenta quando a distância entre os limites de controle diminui. Comumente, os limites de controle são expressos como um múltiplo do desvio padrão. Por exemplo, se o múltiplo for igual a k , então os limites de controle são chamados limites k -sigmas, uma escolha comum é $k = 3$.

Se a estatística utilizada possui distribuição pelo menos aproximadamente normal, pode-se obter um α do erro tipo I para se escolher o múltiplo de sigma para construção dos limites de controle através de $k = Z_{\alpha/2}$, onde $Z_{\alpha/2}$ são os pontos percentuais superior da distribuição normal padrão. Utilizar limites 3-sigmas na construção de gráficos de controle, implica numa probabilidade $\alpha = 0,0027$ de ocorrência do erro tipo I.

Neste capítulo, quatro exemplos serão utilizados para ilustrar a aplicação de $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ para os gráficos de controle para variáveis apresentado no Capítulo 3. A capacidade dos processos também será avaliada e comparada quando o estimador de σ é baseado nos quartis e na amplitude. Os exemplos ilustrarão também, a apresentação do gráfico \bar{Q} , desenvolvido para monitorar a dispersão do processo, e do gráfico Q_2 , construído para monitorar o nível do processo.

Um dos exemplos é baseado sobre dados medidos dos diâmetros internos de anéis de pistões, retirados de Montgomery (2001, *p.* 213). Este conjunto de dados, mostrado na Tabela B.1 do Apêndice B, é utilizado para propósitos ilustrativos, pois não é conhecido se os dados foram obtidos de um processo controlado estatisticamente. O conjunto de dados consiste de 125 observações, agrupadas em 25 amostras, de 5 observações cada. As 25 médias, medianas, amplitudes, desvios padrão, variâncias e $I\bar{Q}$'s foram obtidas e são mostradas na Tabela B.1.

Outros dois exemplos, apresentados nas Tabelas B.2 e B.3 do Apêndice B, respectivamente, mostram dados de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$) e de temperaturas do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, ambas características de qualidade monitoradas no processo de produção de alumínio numa indústria brasileira. Os dados provêm da aplicação real da metodologia aqui proposta, durante o mês de Fevereiro de 2003. Cada conjunto de dados consiste de 200 observações, agrupadas em 25 amostras, de 8 observações cada. As 25 médias, medianas, amplitudes, desvios padrão, variâncias e IQ 's foram obtidas e também são mostradas nas Tabelas B.2 e B.3.

O exemplo apresentado na Tabela B.4 do Apêndice B, mostra dados de temperaturas do óleo ($^{\circ}C$) do misturador monitoradas no mês de Janeiro de 2003. Ao conjunto de dados reais foram adicionadas, de forma fictícia, duas amostras caracterizadas como *outliers*. Cada conjunto de dados consiste de 200 observações, agrupadas em 25 amostras, de 8 observações cada. As 25 médias, desvios padrão e IQ 's foram obtidas e também são mostradas na Tabela B.4.

Assim, a Seção 7.2 mostrará a aplicação de \bar{Q} aos gráficos de controle para variáveis para monitorar a dispersão do processo; a Seção 7.3 apresentará \bar{Q} aplicado aos gráficos de controle para variáveis para monitorar o nível do processo; a Seção 7.4 tratará da aplicação de \bar{Q} durante o processo de avaliação da capacidade do processo e, finalmente, a Seção 7.5 abordará a utilização de \bar{Q} no desenvolvimento de novas ferramentas para o *CEQ*.

7.2 \bar{Q} Aplicado aos Gráficos de Controle para Variáveis para Monitorar a Dispersão do Processo

7.2.1 \bar{Q} Aplicado ao Gráfico do Desvio Padrão

A partir das expressões dadas por (3.9), utilizadas para obtenção da linha central e dos limites de controle para o gráfico S , substitui-se \bar{S}/c_n por \overline{IQ}/ξ_n obtendo-se

$$\begin{aligned}LSC &= \bar{S} + 3 \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \sqrt{1 - c_n^2} \\LC &= \bar{S} \\LIC &= \bar{S} - 3 \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \sqrt{1 - c_n^2}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Definido-se a constante

$$E_3 = \frac{3}{\xi_n} \sqrt{1 - c_n^2},$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico S , quando σ é estimado por $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ são

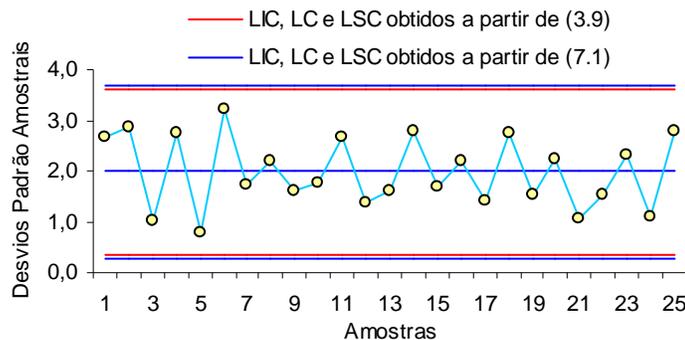
$$\begin{aligned} LSC &= \bar{S} + E_3 \overline{I\bar{Q}} \\ LC &= \bar{S} \\ LIC &= \bar{S} - E_3 \overline{I\bar{Q}}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Valores de E_3 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.4 do Apêndice A.

Considerando os dados de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$), mostrados na Tabela B.2 do Apêndice B, tem-se que $\bar{S} = 1,984$ e $\overline{I\bar{Q}} = 2,443$. Para amostras de tamanho $n = 8$, a partir das Tabelas A.1 e A.4 do Apêndice A, encontra-se $c_n = 0,965$, $\xi_n = 1,132$ e $E_3 = 0,695$.

O gráfico S , para os dados de medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$), quando os limites de controle são construídos a partir das expressões (3.9) e (7.1), ou seja, quando σ é estimado por \bar{S}/c_n e por $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$, respectivamente, é mostrado na Figura 7.1.

Figura 7.1 Gráfico S para medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$) - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$.



A partir desta figura, observa-se que os limites de controle do gráfico S são mais abertos quando σ é estimado por $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ do que quando estimado por \bar{S}/c_n . Esta característica reduz a probabilidade de ocorrência do erro tipo I durante a utilização do gráfico de controle

do desvio padrão no monitoramento da dispersão do processo. Observe que a dispersão do processo estudado (temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$)) está sob controle estatístico.

A Tabela 7.1 apresenta estimativas para a linha central e para os limites de controle do gráfico S , obtidas a partir das expressões (3.9) e (7.1), para os dados de medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$).

Tabela 7.1 *Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico S - Dados de medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$), apresentados na Tabela B.2 do Apêndice B.*

	Expressão Utilizada	
	(3.9)	(7.1)
LSC	3,601	3,682
LC	1,984	1,984
LIC	0,367	0,287

7.2.2 \bar{Q} Aplicado ao Gráfico da Variância

A partir das expressões dadas por (3.16), utilizadas para obtenção da linha central e dos limites de controle para o gráfico S^2 , substitui-se um dos \bar{S}^2 , na construção dos limites de controle, por $(\bar{I\bar{Q}}/\xi_n)^2$ obtendo-se

$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{S}^2 + 3 \left(\frac{\bar{I\bar{Q}}}{\xi_n} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \\
 LC &= \bar{S}^2 \\
 LIC &= \bar{S}^2 - 3 \left(\frac{\bar{I\bar{Q}}}{\xi_n} \right)^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}}.
 \end{aligned}
 \tag{7.3}$$

Definido-se a constante

$$E_6 = \frac{3}{\xi_n^2} \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico \bar{S}^2 são dados por

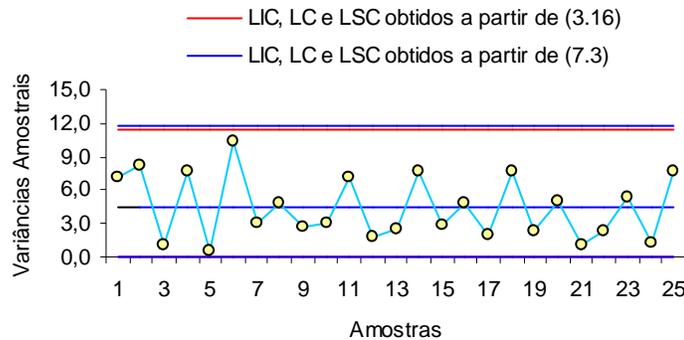
$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{S}^2 + E_6 \bar{I\bar{Q}}^2 \\
 LC &= \bar{S}^2 \\
 LIC &= \bar{S}^2 - E_6 \bar{I\bar{Q}}^2.
 \end{aligned}
 \tag{7.4}$$

Valores de E_6 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.4 do Apêndice A.

Considerando os dados de medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$), mostrados na Tabela B.2 do Apêndice B, tem-se que $\bar{S}^2 = 4,400$ e $\overline{I\bar{Q}}^2 = 5.760$. Para amostras de tamanho $n = 8$, a partir das Tabelas A.1 e A.4 do Apêndice A, encontra-se $c_n = 0,965$, $\xi_n = 1,130$ e $E_6 = 1,251$.

O gráfico S^2 , para os dados de medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$), quando os limites de controle são construídos a partir das expressões (3.16) e (7.3), ou seja, quando σ^2 é estimado por \bar{S}^2 e por $(\overline{I\bar{Q}}/\xi_n)^2$, respectivamente, é mostrado na Figura 7.2.

Figura 7.2 Gráfico S^2 para medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$) - σ^2 estimado por \bar{S}^2 e $(\overline{I\bar{Q}}/\xi_n)^2$.



A principal conclusão a partir desta figura é que a probabilidade de ocorrência de alarmes falsos é reduzida, quando os limites de controle para o gráfico S^2 é construído utilizando-se $(\overline{I\bar{Q}}/\xi_n)^2$ para estimar σ^2 em vez de \bar{S}^2 . Isto pode ser visto observando que os limites de controle do gráfico S^2 , são mais abertos quando σ^2 é estimado por $(\overline{I\bar{Q}}/\xi_n)^2$ do que quando estimado por \bar{S}^2 . Veja que a dispersão do processo estudado (temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$)) está sob controle estatístico.

A Tabela 7.2 apresenta estimativas para a linha central e para os limites de controle do gráfico S^2 , obtidas a partir das expressões (3.16) e (7.3), para os dados de medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$), mostrados na Tabela B.2 do Apêndice B.

Tabela 7.2 *Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico S^2 - Dados de medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$), mostrados na Tabela B.2 do Apêndice B.*

	Expressão Utilizada	
	(3.16)	(7.3)
<i>LSC</i>	11,462	11,869
<i>LC</i>	4,402	4,402
<i>LIC</i>	0,000	0,000

7.2.3 \bar{Q} Aplicado ao Gráfico da Amplitude

A partir das expressões dadas por (3.24), utilizadas para obtenção da linha central e dos limites de controle para o gráfico R , substitui-se \bar{R}/d_2 por $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ obtendo-se

$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{R} + 3d_3 \frac{\overline{I\bar{Q}}}{\xi_n} \\
 LC &= \bar{R} \\
 LIC &= \bar{R} - 3d_3 \frac{\overline{I\bar{Q}}}{\xi_n}.
 \end{aligned}
 \tag{7.5}$$

Definido-se a constante

$$E_2 = 3 \frac{d_3}{\xi_n},$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico S , quando σ é estimado por $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$, são

$$\begin{aligned}
 LSC &= \bar{R} + E_2 \overline{I\bar{Q}} \\
 LC &= \bar{R} \\
 LIC &= \bar{R} - E_2 \overline{I\bar{Q}}.
 \end{aligned}
 \tag{7.6}$$

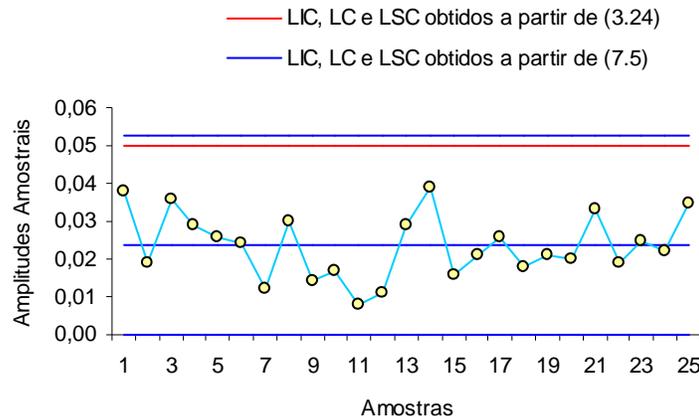
Valores de E_2 estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.4 do Apêndice A.

Considerando os dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B, tem-se que $\bar{R} = 0,024$ e $\overline{I\bar{Q}} = 0,011$. Para amostras de tamanho $n = 5$, a partir das Tabelas A.2 e A.4 do Apêndice A, encontra-se $d_2 = 2,326$, $d_3 = 0,864$, $\xi_n = 0,991$ e $E_2 = 2,616$.

O gráfico R , para os dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões,

quando os limites de controle são construídos a partir das expressões (3.24) e (7.5), é mostrado na Figura 7.3.

Figura 7.3 Gráfico R para medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões - σ estimado por \bar{R}/d_2 e $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$.



A partir desta figura, nota-se claramente, que os limites de controle do gráfico R , são mais abertos quando σ é estimado por $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ do que quando estimado por \bar{R}/d_2 . Esta característica reduz a probabilidade de ocorrência do erro tipo I durante a utilização do gráfico de controle da amplitude no monitoramento da dispersão do processo. Observe que a dispersão do processo estudado (diâmetro interno (mm) de anéis de pistões) está sob controle estatístico.

Tabela 7.3 Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico R - Dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B.

	Expressão Utilizada	
	(3.24)	(7.5)
LSC	0,050	0,053
LC	0,024	0,024
LIC	0,000	0,000

A Tabela 7.3 apresenta estimativas para a linha central e para os limites de controle do gráfico R , obtidas a partir das expressões (3.24) e (7.5), para os dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B.

7.3 \bar{Q} Aplicado aos Gráficos de Controle para Variáveis para Monitorar o Nível do Processo

7.3.1 \bar{Q} Aplicado ao Gráfico da Média

A partir das expressões dadas por (3.36) e/ou (3.38), utilizadas para obtenção da linha central e dos limites de controle para o gráfico \bar{X} , substitui-se \bar{S}/c_n e/ou \bar{R}/d_2 por $\bar{I}\bar{Q}/\xi_n$ obtendo-se

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + 3 \frac{\bar{I}\bar{Q}}{\xi_n \sqrt{n}} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - 3 \frac{\bar{I}\bar{Q}}{\xi_n \sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Definido-se a constante

$$E_{10} = \frac{3}{\xi_n \sqrt{n}},$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico \bar{X} são

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + E_{10} \bar{I}\bar{Q} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - E_{10} \bar{I}\bar{Q}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Valores de E_{10} estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.5 do Apêndice A.

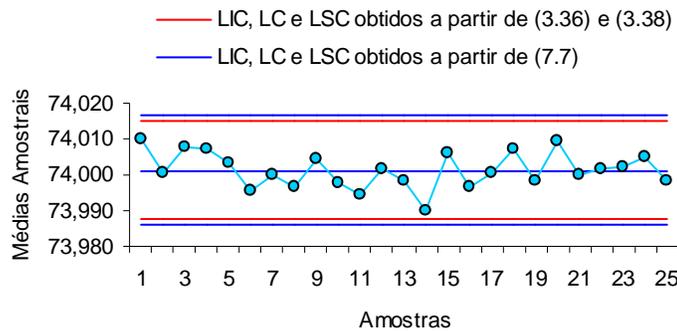
Considerando os dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B, tem-se que $\bar{\bar{X}} = 74,001$, $\bar{R} = 0,024$, $\bar{S} = 0,010$ e $\bar{I}\bar{Q} = 0,011$. Para amostras de tamanho $n = 5$, a partir das Tabelas A.1, A.2, A.4 e A.5 do Apêndice A, encontra-se $c_n = 0,940$, $d_2 = 2,326$, $A_2 = 0,577$, $\xi_n = 0,991$ e $E_{10} = 1,354$.

O gráfico \bar{X} , para os dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões, quando os limites de controle são construídos a partir das expressões (3.36), (3.38) e (7.7), é mostrado na Figura 7.4.

Observa-se nesta figura que a probabilidade de ocorrência do erro tipo I, durante a utilização do gráfico de controle da média no monitoramento do nível do processo, é menor

quando σ é estimado por $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ do que quando estimado por \bar{R}/d_2 ou por \bar{S}/c_n . Isto pode ser observado analisando a Figura 7.4, pois os limites de controle do gráfico \bar{X} , são mais abertos quando o estimador de σ é baseado nos quartis. Observe que o nível do processo estudado (diâmetro interno (mm) de anéis de pistões) está sob controle estatístico.

Figura 7.4 Gráfico \bar{X} para medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões - σ estimado por \bar{R}/d_2 , \bar{S}/c_n e $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$.



A Tabela 7.4 apresenta estimativas para a linha central e para os limites de controle do gráfico \bar{X} , obtidas a partir das expressões (3.36), (3.38) e (7.7), para os dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B.

Tabela 7.4 Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico \bar{X} - Dados de medidas do diâmetro interno (mm) de anéis de pistões, mostrados na Tabela B.1 do Apêndice B.

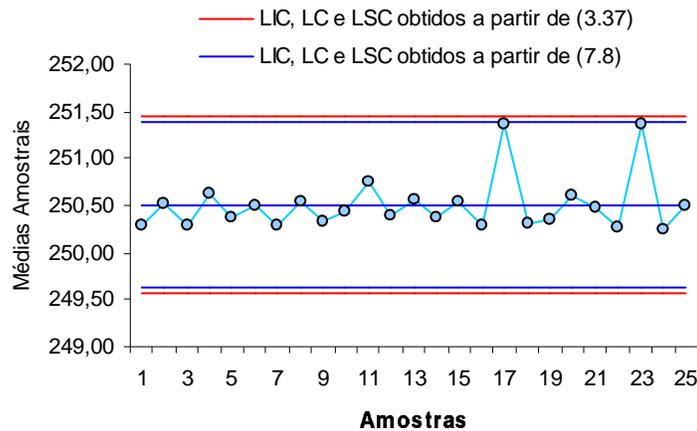
	Expressão Utilizada		
	(3.36)	(3.38)	(7.7)
LSC	74,015	74,015	74,016
LC	74,001	74,001	74,001
LIC	73,988	73,988	73,986

Agora, considerando os dados de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, mostradas na Tabela B.4 do Apêndice B, e observando que as amostras 17 e 23 foram modificadas por valores artificialmente produzidos, objetivando criar resultados discrepantes (*outliers*) no conjunto de dados em estudo, tem-se que $\bar{X} = 250,50$, $\bar{S} = 0,853$ e $\overline{I\bar{Q}} = 0,938$. Para amostras de tamanho $n = 8$, a partir da Tabelas A.1, A.3, A.4 e A.5 do Apêndice A, encontra-se $c_n = 0,965$, $A_3 = 0,110$, $\xi_n = 1,132$ e $E_{10} = 0,937$.

O gráfico \bar{X} , para os dados de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, quando os

limites de controle são construídos a partir das expressões (3.37) e (7.8), é mostrado na Figura 7.5.

Figura 7.5 Gráfico \bar{X} para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador - σ estimado por \bar{S}/c_n e $\bar{I}\bar{Q}/\xi_n$.



Observa-se nesta figura, que o conjunto de dados modificado artificialmente ilustra outra diferença entre os limites de controle construídos utilizando $\hat{\sigma} = \bar{I}\bar{Q}/\xi_n$ e os limites de controle construídos utilizando $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_n$. O fato dos pontos extremos não afetarem a construção dos limites de controle, quando $\bar{I}\bar{Q}/\xi_n$ é escolhido para estimar σ , produz limites de controle mais robustos do que quando \bar{S}/c_n é escolhido para estimar σ . De fato, nota-se que os limites obtidos a partir de (7.8) são mais apertados do que os limites correspondentes ao gráfico padrão de Shewhart para a média, construídos a partir de (3.37). O efeito destes limites mais apertados é que pontos extremos cairão fora dos limites de controle produzidos quando $\bar{I}\bar{Q}/\xi_n$ é utilizado para estimar σ , sinalizando desta forma, a necessidade de tomar medidas corretivas apropriadas. Observando a Figura 7.5 verifica-se que os dois pontos extremos artificialmente produzidos não foram detectados pelo método padrão de construção do gráfico \bar{X} .

7.3.2 \bar{Q} Aplicado ao Gráfico da Mediana

A partir das expressões dadas por (3.49) ou (3.50), utilizadas para obtenção da linha central e dos limites de controle para o gráfico \tilde{X} , quando o desvio padrão amostral é utilizado para estimar σ e a média das medianas amostrais, ou mediana das medianas

amostrais, é utilizada para estimar μ , substitui-se \bar{S}/c_n por \overline{IQ}/ξ_n obtendo-se

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{\bar{X}} + 3h_n \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \\ LC &= \bar{\bar{X}} \\ LIC &= \bar{\bar{X}} - 3h_n \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \end{aligned} \quad (7.9)$$

ou

$$\begin{aligned} LSC &= \tilde{\bar{X}} + 3h_n \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \\ LC &= \tilde{\bar{X}} \\ LIC &= \tilde{\bar{X}} - 3h_n \frac{\overline{IQ}}{\xi_n}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Definindo-se a constante

$$E_{11} = \frac{3h_n}{\xi_n}, \quad (7.11)$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico $\tilde{\bar{X}}$ passam a ser estimados por

$$\begin{aligned} LSC &= \tilde{\bar{X}} + E_{11} \overline{IQ} \\ LC &= \tilde{\bar{X}} \\ LIC &= \tilde{\bar{X}} - E_{11} \overline{IQ} \end{aligned} \quad (7.12)$$

ou

$$\begin{aligned} LSC &= \tilde{\tilde{X}} + E_{11} \overline{IQ} \\ LC &= \tilde{\tilde{X}} \\ LIC &= \tilde{\tilde{X}} - E_{11} \overline{IQ}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Valores de E_{11} estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.5 do Apêndice A.

Agora considere que, a partir das expressões dadas por (3.54) ou (3.55), utilizadas para obtenção da linha central e dos limites de controle para o gráfico $\tilde{\bar{X}}$, quando a amplitude amostral é utilizada para estimar σ , e a média das medianas amostrais, ou mediana das medianas amostrais, é utilizada para estimar μ , substitui-se \bar{R}/d_2 por \overline{IQ}/ξ_n obtendo-se

$$\begin{aligned} LSC &= \tilde{\bar{X}} + 3h_n \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \\ LC &= \tilde{\bar{X}} \\ LIC &= \tilde{\bar{X}} - 3h_n \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \end{aligned} \quad (7.14)$$

ou

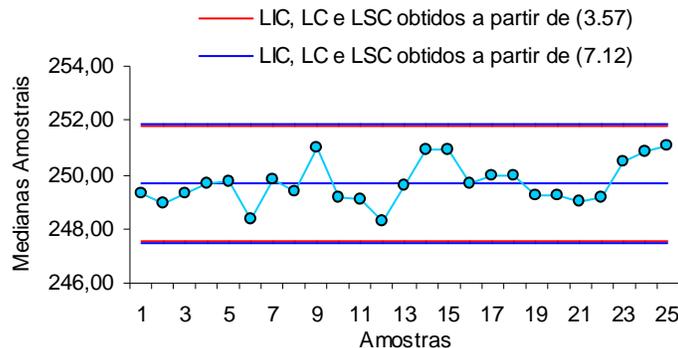
$$\begin{aligned}
 LSC &= \tilde{X} + 3h_n \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \\
 LC &= \tilde{X} \\
 LIC &= \tilde{X} - 3h_n \frac{\overline{IQ}}{\xi_n}.
 \end{aligned}
 \tag{7.15}$$

Observe que as expressões dadas por (7.14) e (7.15) são as mesmas que (7.9) e (7.10), respectivamente. Conseqüentemente, utilizando a constante E_{11} , a linha central e os limites de controle para o gráfico \tilde{X} passam a ser estimados por (7.12) ou (7.13).

Considerando os dados de medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, mostrados na Tabela B.3 do Apêndice B, tem-se que $\tilde{X} = 249,68$, $\bar{R} = 3,661$, $\bar{S} = 1,262$ e $\overline{IQ} = 1,511$. Para amostras de tamanho $n = 8$, a partir das Tabelas A.1, A.2, A.4 e A.5 do Apêndice A, encontra-se $c_n = 0,965$, $d_2 = 2,847$, $\xi_n = 1,132$ e $E_{11} = 1,092$.

O gráfico \tilde{X} , para os dados de medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, quando os limites de controle são construídos a partir das expressões (3.57) e (7.12), é mostrado na Figura 7.6.

Figura 7.6 Gráfico \tilde{X} para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador - σ estimado por \bar{R}/d_2 e \overline{IQ}/ξ_n .



Nota-se na Figura 7.6 que quando σ é estimado por \overline{IQ}/ξ_n , os limites de controle do gráfico \tilde{X} são mais abertos do que quando σ é estimado por \bar{R}/d_2 , isto reduz a probabilidade de ocorrer o erro tipo I durante a utilização do gráfico da mediana no monitoramento do nível do processo. Observe que o nível do processo estudado (temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador) está sob controle estatístico.

A Tabela 7.5 apresenta estimativas para a linha central e para os limites de controle do gráfico \tilde{X} , obtidas a partir das expressões (3.52), (3.57) e (7.12), para os dados de medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, mostrados na Tabela B.3 do Apêndice B.

Tabela 7.5 *Linha Central e Limites de Controle para o Gráfico \tilde{X} - Dados do exemplo da Tabela B.3 do Apêndice B.*

	Expressão Utilizada		
	(3.52)	(3.57)	(7.12)
<i>LSC</i>	251,82	251,86	251,90
<i>LC</i>	249,68	249,68	249,68
<i>LIC</i>	247,54	247,50	247,54

7.4 \bar{Q} Aplicado aos Índices de Capacidade

Considerando que $LSE = 260$ e $LIE = 240$ para a característica de qualidade monitorada (temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador), cujos dados são mostrados na Tabela B.3 do Apêndice B, e utilizando \bar{R}/d_2 ou $\bar{I}\bar{Q}/\xi_n$ para estimar σ na Equação (4.1), a capacidade do processo estudado é estimada como sendo

$$\hat{C}_p(\bar{R}/d_2) = \frac{LSE - LIE}{6\hat{\sigma}} = \frac{LSE - LIE}{6 \times \frac{\bar{R}}{d_2}} = \frac{260 - 240}{6 \times 1,286} = 2,592 \quad (7.16)$$

ou

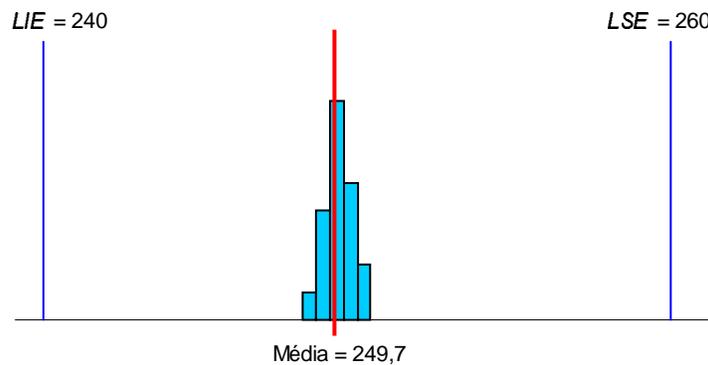
$$\hat{C}_p(\bar{I}\bar{Q}/\xi_n) = \frac{LSE - LIE}{6\hat{\sigma}} = \frac{LSE - LIE}{6 \times \frac{\bar{I}\bar{Q}}{\xi_n}} = \frac{260 - 240}{6 \times 1,335} = 2,497. \quad (7.17)$$

A partir das estimativas (7.16) e (7.17) para C_p , observa-se que o índice de capacidade obtido quando σ é estimado por $\bar{I}\bar{Q}/\xi_n$, apresenta uma estimativa menor do que quando σ é estimado por \bar{R}/d_2 . Essa característica de $\bar{I}\bar{Q}/\xi_n$ aumentará no usuário de índices de capacidade, a preocupação com a redução da variabilidade do processo, pois, conforme visto no exemplo acima, espera-se que quando um processo não for capaz de atender as especificações, $\hat{C}_p(\bar{I}\bar{Q}/\xi_n)$ detecte mais rapidamente do que o $\hat{C}_p(\bar{R}/d_2)$.

Note que (7.16) ou (7.17) indica que a temperatura do óleo ($^{\circ}C$) no misturador está adequada à especificação exigida, neste caso o processo é considerado um processo verde,

isto é, está sob controle estatístico. A Figura 7.7 mostra o histograma para a característica de qualidade monitorada (temperatura do óleo ($^{\circ}\text{C}$) do misturador). Verifique que o processo está centrado na média e sua variabilidade é muito baixa, de fato, somente $1/\hat{C}_p(\bar{R}/d_2) = 38,58\%$ ou $1/\hat{C}_p(\overline{IQ}/\xi_n) = 40,04\%$ da faixa especificação está sendo utilizada pela dispersão natural do processo.

Figura 7.7 *Histograma para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}\text{C}$) do misturador.*



Conforme apresentado na Seção 4.3, outra forma de medir a capacidade do processo é através do C_{pk} , assim para o exemplo acima, a Tabela 7.6 mostra as estimativas para os índices de capacidade C_{pl} e C_{pu} , necessários no processo de obtenção da estimativa para C_{pk} . Portanto, a partir da Tabela 7.6, tem-se

$$\hat{C}_{pk}(\bar{R}/d_2) = \min\{\hat{C}_{pl}(\bar{R}/d_2); \hat{C}_{pu}(\bar{R}/d_2)\} = 2,509 \quad (7.18)$$

ou

$$\hat{C}_{pk}(\overline{IQ}/\xi_n) = \min\{\hat{C}_{pl}(\overline{IQ}/\xi_n); \hat{C}_{pu}(\overline{IQ}/\xi_n)\} = 2,417. \quad (7.19)$$

Tabela 7.6 *Estimativas para os Índices de Capacidade C_{pl} e C_{pu} - Dados de medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}\text{C}$) do misturador, mostrados na Tabela B.3 do Apêndice B.*

	σ Estimado por	
	\bar{R}/d_2	\overline{IQ}/ξ_n
\hat{C}_{pl}	2,509	2,417
\hat{C}_{pu}	2,675	2,577

Observa-se claramente, que as estimativas para C_{pu} , C_{pl} e C_{pk} quando σ é estimado por \overline{IQ}/ξ_n apresentam a mesma característica que $\hat{C}_p(\overline{IQ}/\xi_n)$, isto é, $\hat{C}_{pl}(\overline{IQ}/\xi_n)$, $\hat{C}_{pu}(\overline{IQ}/\xi_n)$ e $\hat{C}_{pk}(\overline{IQ}/\xi_n)$ mostram estimativas um pouco menores do que $\hat{C}_{pl}(\bar{R}/d_2)$, $\hat{C}_{pu}(\bar{R}/d_2)$ e $\hat{C}_{pk}(\bar{R}/d_2)$. Assim, também espera-se que, quando um processo não for capaz de atender às especificações, as estimativas para C_{pl} , C_{pu} e C_{pk} , utilizando $\hat{\sigma}$ baseado nos quartis, detectem mais rapidamente esta falta de capacidade, do que as estimativas para C_{pl} , C_{pu} e C_{pk} utilizando $\hat{\sigma}$ baseado na amplitude.

7.5 \bar{Q} Aplicado ao Desenvolvimento de Novas Ferramentas para o CEQ

7.5.1 Gráfico \bar{Q}

O gráfico dos quartis, ou gráfico \bar{Q} , é uma gráfico para variáveis utilizado no monitoramento e avaliação da variabilidade de um processo. O gráfico dos quartis não é denominado de gráfico Q para não confundi-lo com o gráfico Q de Quesenberry [veja Quesenberry (1991)].

Para determinar os limites de controle do gráfico \bar{Q} é necessário supor que os valores observados da característica de qualidade monitorada são normalmente distribuídos com média μ e variância σ^2 .

A partir das expressões (6.30) e (6.31), a linha central e os limites de controle 3-sigmas para o gráfico \bar{Q} são dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{Q} + 3\bar{Q}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\xi_n\sqrt{mn}} \\ LC &= \bar{Q} \\ LIC &= \bar{Q} - 3\bar{Q}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\xi_n\sqrt{mn}}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

ou alternativamente,

$$\begin{aligned} LSC &= \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} + 3\frac{\overline{IQ}}{\xi_n}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\xi_n\sqrt{mn}} \\ LC &= \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} \\ LIC &= \frac{\overline{IQ}}{\xi_n} - 3\frac{\overline{IQ}}{\xi_n}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\xi_n\sqrt{mn}}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Definindo-se as constantes

$$E_{12} = \frac{1}{\xi_n} \left(1 - 3 \frac{\pi}{2} \frac{1}{\xi_n \sqrt{mn}} \right)$$

e

$$E_{13} = \frac{1}{\xi_n} \left(1 + 3 \frac{\pi}{2} \frac{1}{\xi_n \sqrt{mn}} \right),$$

a linha central e os limites de controle para o gráfico são

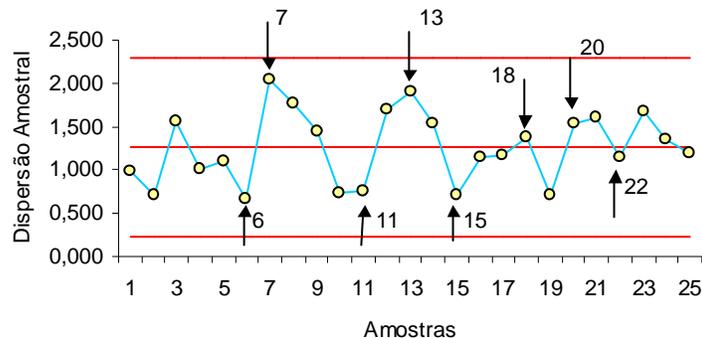
$$\begin{aligned} LSC &= \bar{I\bar{Q}}E_{13} \\ LC &= \frac{\bar{I\bar{Q}}}{\xi_n} \\ LIC &= \bar{I\bar{Q}}E_{12}. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Valores de E_{12} e E_{13} estão tabulados para alguns tamanhos amostrais na Tabela A.4 do Apêndice A.

Considerando os dados de medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, mostrados na Tabela B.3 do Apêndice B, sabe-se que $\bar{S} = 1,262$ e $\bar{I\bar{Q}} = 1,511$. Para amostras de tamanho $n = 8$, a partir das Tabelas A.1 e A.4 do Apêndice A, encontra-se $c_n = 0,965$, $B_3 = 0,185$, $B_4 = 1,815$, $\xi_n = 1,132$, $E_{12} = 0,424$ e $E_{13} = 1,343$.

A Figura 7.8 mostra o tradicional gráfico S de Shewhart, construído para monitorar os dados de medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, apresentados na Tabela B.3 do Apêndice B. Lembre que, na Seção 7.4, durante o estudo da capacidade deste processo, verificou-se a adequação do mesmo à especificação exigida.

Figura 7.8 Gráfico S para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador.



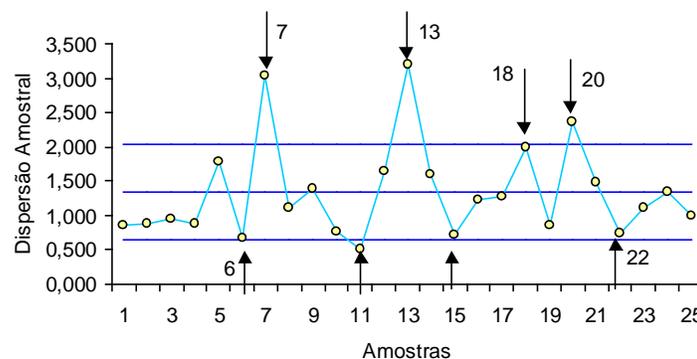
Usualmente, os responsáveis pelo controle dos processos concentram seus esforços sobre

processos cuja capacidade estimada é considerada baixa ao atendimento das especificações exigidas. Assim, quando causas assinaláveis ocorrem em processos refinados (processos com alta capacidade de atender as especificações), por exemplo, o processo apresentado na Figura 7.8, um grande esforço é exigido no sentido de buscar as prováveis causas. Uma recomendação comum é utilizar, em processos refinados, ferramentas que detectem pequenas mudanças na característica de qualidade monitorada. Gráficos de controle *CUSUM* e *EWMA* são boas opções para monitorar pequenas mudanças no nível do processo.

A partir do gráfico *S*, mostrado na Figura 7.8, observa-se que a característica de qualidade monitorada encontra-se sob controle estatístico. Agora, note que os pontos amostrais 6, 7, 11, 13, 15, 18, 20 e 22 indicam a possível presença de pequenas mudanças na dispersão do processo, entretanto maiores conclusões não podem ser tiradas baseando-se apenas no gráfico *S*.

A Figura 7.9 mostra o gráfico \bar{Q} para os dados de medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}\text{C}$) do misturador, apresentados na Tabela B.3 do Apêndice B. Observa-se a partir desta figura, que os pontos amostrais 6, 7, 11, 13, 15, 18, 20 e 22 estão fora e/ou sobre os limites de controle. Portanto, a principal conclusão a partir desta figura é que o gráfico \bar{Q} surge como uma simples ferramenta gráfica capaz de detectar pequenas mudanças na dispersão do processo.

Figura 7.9 Gráfico \bar{Q} para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}\text{C}$) do misturador.



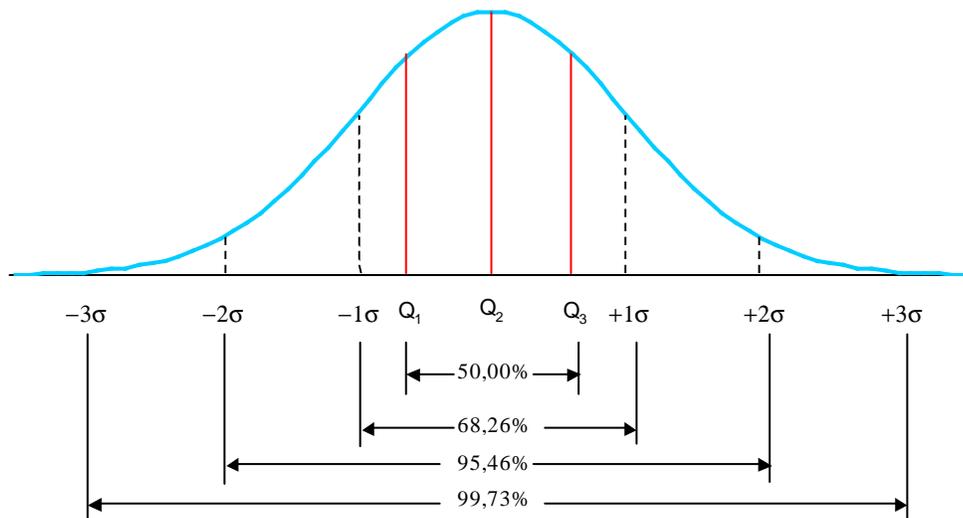
7.5.2 Gráfico Q_2

O gráfico da mediana baseado nos quartis, ou gráfico Q_2 , é um gráfico para variáveis desenvolvido para ser utilizado no monitoramento e avaliação do nível de um processo.

Para determinar os limites de controle do gráfico Q_2 é necessário supor que os valores observados da característica de qualidade monitorada são normalmente distribuídos com média μ e variância σ^2 .

Inicialmente, considere a Figura 7.10, uma curva normal com média zero e portanto, com mediana zero. Assim, utilizando a tabela das probabilidades da distribuição normal padrão, facilmente encontrada em livros de estatística, verifica-se que $q_{1/4} = Q_1 = 0,2500 \Rightarrow Z_{1/4} \simeq -0,6745$; $q_{2/4} = Q_2 = 0,0000 \Rightarrow Z_{2/4} \simeq 0,0000$, e que $q_{3/4} = Q_3 = 0,2500 \Rightarrow Z_{3/4} \simeq 0,6745$. A partir do valor esperado de $(q_{3/4} - q_{1/4})/\xi_n$, mostrado na Equação (6.27), tem-se que $IQ = Q_3 - Q_1 = 0,5000 \Rightarrow Z_{IQ} \simeq 1,349$.

Figura 7.10 Gráfico da Distribuição Normal Padrão.



Agora, observe que (i) $Z_{\alpha/2} = 3 = Q_3 + \phi IQ$ e que (ii) $Z_{\alpha/2} = -3 = Q_1 - \phi IQ$, onde $\phi = 1,7239$. A área entre estes dois pontos embaixo da curva é 0,9973, isto é, 99,73% da distribuição está entre estes dois valores. Valores para ϕ são obtidos por

$$\phi = \frac{Z_{\alpha/2} - Q_3}{IQ} = \frac{Z_{\alpha/2} - 0,6745}{1,349} \tag{7.23}$$

ou

$$\phi = \frac{Q_1 + Z_{\alpha/2}}{IQ} = \frac{-0,6745 + Z_{\alpha/2}}{1,349}. \tag{7.24}$$

A Tabela 7.7 mostra alguns valores $Z_{\alpha/2}$ e ϕ , com suas respectivas áreas embaixo da curva normal.

Tabela 7.7 Fatores utilizados na construção do Gráfico Q_2 .

$Z_{\alpha/2}$	ϕ	Área embaixo da curva normal
3,000	1,7239	99,73%
2,698	1,5000	99,30%
2,000	0,9826	95,46%
1,000	0,2410	68,26%

Supondo que \bar{Q}_1 é um estimador consistente de Q_1 , \bar{Q}_2 é um estimador consistente de Q_2 e que \bar{Q}_3 é um estimador consistente de Q_3 , a linha central e os limites de controle 3-sigmas do gráfico Q_2 são dados por

$$\begin{aligned} LSC &= \bar{Q}_3 + \phi\bar{I}\bar{Q} \\ LC &= \bar{Q}_2 \\ LIC &= \bar{Q}_1 - \phi\bar{I}\bar{Q}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

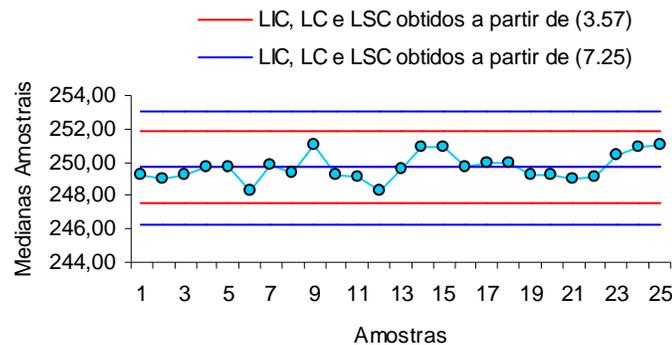
Limites de controle para o gráfico Q_2 utilizando $Z_{\alpha/2} = 2,698$ são recomendados para detectarem observações discrepantes (*outliers*).

O gráfico Q_2 , com limites 3-sigmas, para os dados de medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador, apresentados na Tabela B.3 do Apêndice B, é mostrado na Figura 7.11, juntamente com limites obtidos a partir das expressões padrão para o gráfico de controle da mediana, dadas pela Equação (3.57). A partir desta figura, observa-se que os limites de controle do gráfico Q_2 são mais abertos que os tradicionais limites do gráfico \tilde{X} . Esta característica reduz a probabilidade de ocorrência do erro tipo I durante a utilização do gráfico de controle da mediana no monitoramento do nível do processo. Observe que o nível do processo estudado (temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador) está sob controle estatístico. Entretanto, muitos pontos amostrais situam-se próximos dos limites de controle construídos a partir da Equação (3.57), caracterizando neste caso uma grande probabilidade de ocorrer alarmes falsos, pois de acordo com a Seção (7.4) este processo atende às especificações com uma certa folga operacional, conforme caracterizado pelos limites de controle construídos utilizando as expressões dadas por (7.25).

Este capítulo mostrou a aplicação do estimador de σ proposto, baseado nos quartis, no processo de construção de gráficos de controle para variáveis, utilizados no monitoramento do nível e da dispersão do processo. Em geral, os limites de controle obtidos, quando

$\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ é utilizado para estimar σ , são mais abertos do que quando construídos utilizando-se \bar{S}/c_n , \bar{R}/d_2 e \bar{S}^2 . Esta propriedade é traduzida nos gráficos de controle gerados, através da redução da probabilidade de ocorrência de alarmes falsos. Na presença de *outliers*, o estimador de σ proposto produz estimativas , para a linha central e para os limites de controle, mais robustas do que o método padrão de Shewhart. De fato, o método proposto detecta a presença de observações extremas no processo, enquanto que o método de Shewhart não o faz.

Figura 7.11 Gráfico Q_2 para medidas de temperatura do óleo ($^{\circ}C$) do misturador.



Estimativas para C_p , C_{pl} , C_{pu} e C_{pk} , durante a aplicação do estimador de σ baseado nos quartis, na avaliação da capacidade do processo, apresentaram valores um pouco menores do que quando \bar{R}/d_2 foi utilizado. A partir destes resultados, espera-se que, quando $\overline{I\bar{Q}}/\xi_n$ for utilizado como estimador de σ na avaliação da capacidade dos processos, uma possível falta de capacidade seja mais rapidamente percebida do que quando \bar{R}/d_2 for utilizado.

Portanto, quatro índices de capacidade do processo e cinco gráficos de controle para monitorar o nível e a dispersão do processo foram aperfeiçoados. Duas novas ferramentas para o controle estatístico da qualidade foram apresentadas. A primeira é um gráfico de controle para variáveis, denominado gráfico \bar{Q} , construído para ser utilizado em processos refinados. E a segunda, o gráfico Q_2 , um gráfico para variáveis, desenvolvido para monitorar o nível do processo, em especial a mediana amostral. Seus limites de controle são um pouco mais abertos do que os limites de controle do gráfico \bar{X} , esta característica do gráfico Q_2 reduz a probabilidade de ocorrência do erro tipo I, durante o monitoramento e avaliação do nível do processo.

Finalmente, tabelas com fatores para construção dos gráficos de controle da média,

mediana, amplitude, desvio padrão e variância, quando o estimador de σ é baseado nos quartis, e para o gráfico \bar{Q} foram obtidas a partir da simulação de 5000 amostras para cada tamanho amostral n .

Capítulo 8

Considerações Finais e Recomendações

8.1 Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo aperfeiçoar e desenvolver ferramentas do controle estatístico da qualidade, através da utilização de um estimador para o desvio padrão σ baseado nos quartis.

Para tanto, inicialmente, foi mostrada uma visão geral acerca dos gráficos de controle, destacando algumas das principais pesquisas envolvendo a utilização e o desenvolvimento desta ferramenta do *CEQ*. Além dos tipos, os princípios e o planejamento dos gráficos de controle, foram mostrados testes de hipóteses, por trás da utilização dos gráficos de controle, bem como, os seus benefícios.

Os principais gráficos de controle para monitorar a dispersão e o nível do processo foram vistos. Algumas das principais pesquisas responsáveis pelo desenvolvimento da teoria de construção e utilização destes gráficos foram mostradas. O processo de construção de cada gráficos também foi enfocado.

Além disso, os principais índices utilizados para avaliar a capacidade de um processo foram abordados, destacando suas metodologias de construção, formas de interpretação e algumas das principais pesquisas envolvendo a utilização e o desenvolvimento destes índices.

A teoria de estimação de σ através dos quartis foi desenvolvida e o estimador para o desvio padrão σ baseado nos quartis apresentado. Tópicos a respeito da função de distribuição amostral e dos quantis populacionais e amostrais foram vistos. Resultados de simulações sugerem que as estimativas de σ , obtidas através de \overline{IQ}/ξ_n são, em geral, mais

próximas do verdadeiro valor do parâmetro do que as estimativas produzidas por \bar{R}/d_2 e \bar{S}/c_n .

Princípios de estimação no controle estatístico da qualidade foram mostrados. As principais propriedades dos estimadores, bem como, os estimadores para o nível e para a dispersão do processo também foram abordados.

A aplicação do estimador de σ , baseado nos quartis, no processo de construção de gráficos de controle para variáveis, utilizados no monitoramento do nível e da dispersão do processo foi detalhadamente mostrada. Em geral, os limites de controle obtidos, quando \overline{IQ}/ξ_n é utilizado para estimar σ , são mais abertos do que quando construídos utilizando-se \bar{S}/c_n , \bar{R}/d_2 e \bar{S}^2 . Esta propriedade é traduzida nos gráficos de controle gerados, através da redução da probabilidade de ocorrência de alarmes falsos. Na presença de *outliers*, o estimador de σ proposto produz estimativas, para a linha central e para os limites de controle, mais robustas do que o método padrão de Shewhart. De fato, o método proposto detecta a presença de observações extremas no processo, enquanto que o método de Shewhart não o faz.

Foi visto que as estimativas para C_p , C_{pl} , C_{pu} e C_{pk} , durante a aplicação do estimador de σ baseado nos quartis, na avaliação da capacidade do processo, apresentaram valores um pouco menores do que quando \bar{R}/d_2 foi utilizado. A partir destes resultados, espera-se que, quando \overline{IQ}/ξ_n for utilizado como estimador de σ na avaliação da capacidade dos processos, uma possível falta de capacidade seja mais rapidamente percebida do que quando \bar{R}/d_2 for utilizado.

Quatro índices de capacidade do processo e sete gráficos de controle para monitorar o nível e a dispersão do processo foram aperfeiçoados.

Duas novas ferramentas para o controle estatístico da qualidade foram apresentadas. A primeira é um gráfico de controle para variáveis, denominado gráfico \bar{Q} , construído para ser utilizado no monitoramento da dispersão de processos refinados. E a segunda, o gráfico Q_2 , um gráfico para variáveis, desenvolvido para monitorar o nível do processo, em especial a mediana amostral. Seus limites de controle são um pouco mais abertos do que os limites de controle do gráfico \bar{X} , esta característica do gráfico Q_2 reduz a probabilidade de ocorrência do erro tipo I, durante o monitoramento e avaliação do nível do processo.

Finalmente, tabelas com fatores para construção dos gráficos de controle da média, mediana, amplitude, desvio padrão e variância, quando o estimador de σ é baseado nos quartis, e para o gráfico \bar{Q} foram obtidas a partir da simulação de 3000 amostras para cada tamanho amostral n .

8.2 Recomendações

Recomenda-se para trabalhos futuros:

- Obter o ARL (estatística que define o número de amostras selecionadas antes de ocorrer um sinal fora dos limites de controle) para os gráficos de controle da média, da mediana, da amplitude, do desvio padrão, da variância, quando o estimador de σ for baseado nos quartis;
- Avaliar o ARL para os gráfico de controle \bar{Q} e Q_2 ;
- Construir, quando o estimador de σ for baseado nos quartis, para os gráfico de controle da média, da mediana, da amplitude, do desvio padrão, da variância, as curvas características de operação (CCO), que indicam a probabilidade de ocorrência do erro tipo II, ou seja, a chance que um ponto amostral, que deveria estar fora dos limites de controle, possui de estar situado entre os limites de controle;
- Desenvolver as CCO para os gráfico de controle \bar{Q} e Q_2 ;
- Utilizar o estimador de σ baseado nos quartis para construção de limites de controle do gráfico de regressão;
- Criar gráficos de controle para monitorar o nível e a dispersão do processo quando os parâmetros de construção são adaptáveis e o estimador de σ é baseado nos quartis;
- Avaliar a influência do erro de medida sobre o poder dos gráficos \bar{X} e R , quando os quartis estiverem sendo utilizados para estimar σ ;
- Pesquisar a influência do estimador de σ baseado nos quartis na construção de limites de controle quando o processo for não-normal;
- Criar o gráfico de controle para a média quando o estimador de μ é a média aparada e o estimador de σ é \overline{IQ}/ξ_n ;

- Construir as curvas de poder para os gráficos de controle da média, da mediana, da amplitude, do desvio padrão e da variância, quando o estimador de σ for baseado nos quartis;
- Obter as curvas de poder para os gráficos de controle \bar{Q} e Q_2 ;
- E finalmente, estender a aplicação de \overline{IQ}/ξ_n a outros índices de capacidade, como por exemplo, o índice k e o índice C_{pm} .

Apêndice A

**Tabelas dos Fatores para Construção
de Gráficos de Controle**

Tabela A.1 *Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para dispersão do processo.*

n	Gráfico do Desvio Padrão					
	Fatores para os Limites de Controle				Fatores para Linha Central	
	B_3	B_4	B_5	B_6	c_n	$1/c_n$
2	0	3,267	0	2,606	0,798	1,253
3	0	2,568	0	2,276	0,886	1,128
4	0	2,266	0	2,088	0,921	1,085
5	0	2,089	0	1,964	0,940	1,064
6	0,030	1,970	0,029	1,874	0,915	1,051
7	0,118	1,882	0,113	1,806	0,959	1,042
8	0,185	1,815	0,179	1,751	0,965	1,036
9	0,239	1,761	0,232	1,707	0,969	1,032
10	0,284	1,716	0,276	1,669	0,973	1,028
11	0,321	1,679	0,313	1,637	0,975	1,025
12	0,354	1,646	0,346	1,610	0,978	1,023
13	0,382	1,618	0,374	1,585	0,979	1,021
14	0,406	1,594	0,399	1,563	0,981	1,019
15	0,428	1,572	0,421	1,544	0,982	1,018
16	0,448	1,552	0,44	1,526	0,984	1,017
17	0,466	1,534	0,458	1,511	0,985	1,016
18	0,482	1,518	0,475	1,496	0,985	1,015
19	0,497	1,503	0,49	1,483	0,986	1,014
20	0,51	1,490	0,54	1,470	0,987	1,013
21	0,523	1,477	0,516	1,459	0,988	1,013
22	0,534	1,466	0,528	1,448	0,988	1,012
23	0,545	1,455	0,539	1,438	0,989	1,011
24	0,555	1,445	0,549	1,429	0,989	1,011
25	0,565	1,435	0,559	1,420	0,990	1,011

Fonte: Montgomery (2001)

Tabela A.2 *Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para dispersão do processo. (continuação)*

n	Gráfico da Variância		Gráfico das Amplitudes						
	Fatores para os Limites de Controle		Fatores para Linha Central			Fatores para os Limites de Controle			
	B_7	B_8	d_2	$1/d_2$	\tilde{d}_2	d_3	\tilde{d}_3	D_3	D_4
2	0	5,243	1,128	0,886	0,954	0,853	0,450	0	3,267
3	0	4,000	1,693	0,591	1,588	0,888	0,435	0	2,575
4	0	3,449	2,059	0,486	1,978	0,880	0,445	0	2,282
5	0	3,121	2,326	0,430	2,257	0,864	0,457	0	2,115
6	0	2,897	2,534	0,395	2,472	0,848	0,468	0	2,004
7	0	2,732	2,704	0,370	2,645	0,833	0,477	0,076	1,924
8	0	2,604	2,847	0,351	2,791	0,820	4,870	0,136	1,864
9	0	2,500	2,970	0,337	2,915	0,808	0,495	0,184	1,816
10	0	2,414	3,078	0,325	3,024	0,797	0,503	0,223	1,777
11	0	2,342	3,173	0,315	3,121	0,787	0,509	0,256	1,744
12	0	2,279	3,258	0,307	3,207	0,778	0,515	0,283	1,717
13	0	2,225	3,336	0,300	3,285	0,770	0,521	0,307	1,693
14	0	2,177	3,407	0,294	3,356	0,763	0,527	0,328	1,672
15	0	2,134	3,472	0,288	3,422	0,756	0,532	0,347	1,653
16	0	2,095	3,532	0,283	3,382	0,750	-	0,363	1,637
17	0	2,061	3,588	0,279	3,538	0,744	-	0,378	1,622
18	0	2,029	3,640	0,275	3,591	0,739	-	0,391	1,609
19	0	2,000	3,689	0,271	3,640	0,733	-	0,404	1,596
20	0,027	1,973	3,735	0,268	3,686	0,729	-	0,415	1,585
21	0,051	1,949	3,778	0,265	-	0,724	-	0,425	1,575
22	0,074	1,926	3,819	0,262	-	0,720	-	0,435	1,565
23	0,095	1,905	3,858	0,259	-	0,716	-	0,443	1,557
24	0,115	1,885	3,895	0,257	-	0,712	-	0,452	1,548
25	0,134	1,866	3,931	0,254	-	0,708	-	0,459	1,541

Fonte: Mittag e Rinne (1993)

Tabela A.3 *Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para o nível do processo.*

n	Gráfico da Média			Gráfico da Mediana		
	Fatores para os Limites de Controle			Fatores para os Limites de Controle		
	A^*	A_2^*	A_3^*	h_n	H_3	H_4
2	2,121	1,880	2,659	1,111	4,176	2,954
3	1,732	1,023	1,954	0,907	3,070	1,607
4	1,500	0,729	1,628	0,785	2,557	1,144
5	1,342	0,577	1,427	0,702	2,242	0,906
6	1,225	0,483	1,287	0,641	2,022	0,759
7	1,339	0,419	1,182	0,594	1,856	0,659
8	1,061	0,373	0,110	0,555	1,727	0,585
9	1,000	0,337	1,032	0,524	1,621	0,529
10	0,949	0,308	0,975	0,497	1,532	0,484
11	0,905	0,285	0,927	0,474	1,457	0,448
12	0,866	0,266	0,886	0,453	1,392	0,418
13	0,832	0,249	0,850	0,436	1,334	0,392
14	0,802	0,235	0,817	0,420	1,284	0,370
15	0,775	0,223	0,789	0,406	1,239	0,350
16	0,750	0,212	0,763	0,393	1,198	0,334
17	0,728	0,203	0,739	0,381	1,161	0,319
18	0,707	0,194	0,718	0,370	1,127	0,305
19	0,688	0,187	0,698	0,360	1,096	0,293
20	0,671	0,180	0,680	0,351	1,068	0,282
21	0,655	0,173	0,663	0,343	1,041	0,272
22	0,640	0,167	0,647	0,335	1,017	0,263
23	0,626	0,162	0,633	0,328	0,994	0,255
24	0,612	0,157	0,619	0,321	0,972	0,247
25	0,600	0,153	0,606	0,314	0,952	0,240

Fonte: *Montgomery (2001)

Tabela A.4 *Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para a dispersão do processo.*

Fatores para os Limites de Controle						
Gráfico						
		Amplitude	Desvio Padrão	Variância	\bar{Q}	
n	ξ_m	E_2	E_3	E_6	E_{12}	E_{13}
2	0,564	4,535	3,206	13,338	0	9,180
3	0,852	3,128	1,631	4,133	0	3,338
4	0,953	2,770	1,224	2,697	0	2,346
5	0,991	2,616	1,033	2,160	0,049	1,969
6	1,064	2,391	0,867	1,676	0,246	1,634
7	1,121	2,230	0,755	1,378	0,356	1,428
8	1,132	2,173	0,695	1,251	0,424	1,343
9	1,174	2,064	0,628	1,088	0,472	1,232
10	1,178	2,030	0,591	1,019	0,509	1,188
11	1,193	1,980	0,554	0,943	0,537	1,139
12	1,194	1,956	0,529	0,897	0,562	1,113
13	1,210	1,910	0,501	0,837	0,579	1,074
14	1,212	1,889	0,480	0,801	0,596	1,054
15	1,234	1,838	0,455	0,745	0,604	1,017
16	1,229	1,831	0,442	0,725	0,619	1,009
17	1,235	1,807	0,426	0,695	0,628	0,991
18	1,250	1,773	0,409	0,659	0,632	0,968
19	1,252	1,758	0,397	0,638	0,640	0,957
20	1,260	1,735	0,384	0,613		0,942
21	1,250	1,738	0,377	0,607	0,656	0,944
22	1,273	1,697	0,361	0,571	0,653	0,918
23	1,272	1,688	0,354	0,559	0,660	0,913
24	1,271	1,681	0,346	0,548	0,665	0,908
25	1,275	1,667	0,338	0,533	0,668	0,900

Tabela A.5 *Fatores para construção de gráficos de controle para variáveis - Gráficos de controle para o nível do processo.*

n	Fatores para os Limites de Controle	
	Gráfico da Média	Gráfico da Mediana
	E_{10}	E_{11}
2	3,761	5,910
3	2,033	3,194
4	1,574	2,471
5	1,354	2,125
6	1,151	1,807
7	1,012	1,590
8	0,937	1,471
9	0,852	1,339
10	0,805	1,266
11	0,758	1,192
12	0,725	1,138
13	0,688	1,081
14	0,662	1,040
15	0,628	0,987
16	0,610	0,959
17	0,589	0,926
18	0,566	0,888
19	0,550	0,863
20	0,532	0,836
21	0,524	0,823
22	0,502	0,789
23	0,492	0,774
24	0,482	0,758
25	0,471	0,739

Apêndice B

**Tabelas com Exemplos para
Aplicação**

Tabela B.1 Medidas do diâmetro interno (mm) durante a fabricação de anéis de pistão.

Número da amostra	Observações																									\bar{x}	$\hat{\sigma}$	R_i	S_i	S_i^2	IQ_i
1	74,030	74,002	74,019	73,992	74,008	74,010	74,008	0,038	0,015	0,0002	0,017																				
2	73,995	73,992	74,001	74,011	74,004	74,001	74,001	0,019	0,008	0,0001	0,009																				
3	73,988	74,024	74,021	74,005	74,002	74,008	74,005	0,036	0,015	0,0002	0,019																				
4	74,022	73,996	73,993	74,015	74,009	74,007	74,009	0,029	0,012	0,0002	0,019																				
5	73,992	74,007	74,015	73,989	74,014	74,003	74,007	0,026	0,012	0,0001	0,022																				
6	74,009	73,994	73,997	73,985	73,993	73,996	73,994	0,024	0,009	0,0001	0,004																				
7	73,995	74,006	73,994	74,000	74,005	74,000	74,000	0,012	0,006	0,0000	0,010																				
8	73,985	74,003	73,993	74,015	73,988	73,997	73,993	0,030	0,012	0,0002	0,015																				
9	74,008	73,995	74,009	74,005	74,004	74,004	74,005	0,014	0,006	0,0000	0,004																				
10	73,998	74,000	73,990	74,007	73,995	73,998	73,998	0,017	0,006	0,0000	0,005																				
11	73,994	73,998	73,994	73,995	73,990	73,994	73,994	0,008	0,003	0,0000	0,001																				
12	74,004	74,000	74,007	74,000	73,996	74,001	74,000	0,011	0,004	0,0000	0,004																				
13	73,983	74,002	73,998	73,997	74,012	73,998	73,998	0,029	0,010	0,0001	0,005																				
14	74,006	73,967	73,994	74,000	73,984	73,990	73,994	0,039	0,015	0,0002	0,016																				
15	74,012	74,014	73,998	73,999	74,007	74,006	74,007	0,016	0,007	0,0001	0,013																				
16	74,000	73,984	74,005	73,998	73,996	73,997	73,998	0,021	0,008	0,0001	0,004																				
17	73,994	74,012	73,986	74,005	74,007	74,001	74,005	0,026	0,011	0,0001	0,013																				
18	74,006	74,010	74,018	74,003	74,000	74,007	74,006	0,018	0,007	0,0000	0,007																				
19	73,984	74,002	74,003	74,005	73,997	73,998	74,002	0,021	0,008	0,0001	0,006																				
20	74,000	74,010	74,013	74,020	74,003	74,009	74,010	0,020	0,008	0,0001	0,010																				
21	73,982	74,001	74,015	74,005	73,996	74,000	74,001	0,033	0,012	0,0001	0,009																				
22	74,004	73,999	73,990	74,006	74,009	74,002	74,004	0,019	0,007	0,0001	0,007																				
23	74,010	73,989	73,990	74,009	74,014	74,002	74,009	0,025	0,012	0,0001	0,020																				
24	74,015	74,008	73,993	74,000	74,010	74,005	74,008	0,022	0,009	0,0001	0,010																				
25	73,982	73,984	73,995	74,017	74,013	73,998	73,995	0,035	0,016	0,0003	0,029																				
	$\bar{x} = 74,001$																									$\hat{\sigma} = 74,002$	$\bar{R} = 0,024$	$\bar{S} = 0,010$	$\bar{S}^2 = 0,0001$	$\bar{I}Q = 0,011$	

Fonte: Montgomery (2001).

Tabela B.2 Medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}\text{C}$) durante a produção de alumínio - Fevereiro/2003.

Número da amostra	Observações										\bar{x}	\bar{x}	R_i	S_i	S_i^2	IQ_i
1	147,9	151,6	151,2	154,7	155,4	152,5	154,0	155,9	152,9	153,2	8,0	2,7	7,1	3,4		
2	154,3	153,4	154,7	154,7	150,6	146,8	149,3	151,8	151,9	152,6	7,9	2,9	8,3	4,1		
3	154,2	153,5	153,4	154,3	154,5	155,5	155,7	152,9	154,3	154,3	2,9	1,0	1,0	1,3		
4	151,6	153,1	154,7	154,6	158,0	149,7	151,0	150,5	152,9	152,4	8,3	2,8	7,6	3,8		
5	154,1	154,7	153,9	153,1	152,9	154,0	153,7	152,3	153,6	153,8	2,4	0,8	0,6	1,0		
6	149,6	148,0	148,6	150,5	149,9	154,5	155,0	156,4	151,6	150,2	8,4	3,2	10,4	5,3		
7	151,1	152,1	149,1	151,4	152,9	153,7	154,3	150,5	151,9	151,8	5,2	1,7	3,0	2,1		
8	152,3	152,7	152,9	153,3	156,3	149,7	150,6	155,5	152,9	152,8	6,5	2,2	4,8	1,9		
9	154,4	155,9	154,1	153,4	155,2	155,5	152,8	151,0	154,0	154,2	4,9	1,6	2,6	2,0		
10	152,9	152,3	152,7	151,4	152,9	154,3	149,7	155,5	152,7	152,8	5,8	1,7	3,0	1,2		
11	153,1	158,0	150,5	151,0	151,6	154,6	153,1	149,7	152,7	152,4	8,3	2,7	7,1	2,6		
12	152,3	151,4	150,6	150,1	152,6	152,4	154,5	151,9	152,0	152,1	4,4	1,4	1,8	1,3		
13	151,6	151,3	152,5	153,9	152,5	154,9	151,8	149,7	152,3	152,1	5,2	1,6	2,6	1,3		
14	154,6	153,1	154,7	158,0	150,5	149,7	151,0	151,6	152,9	152,3	8,3	2,8	7,7	3,7		
15	154,1	154,4	155,9	155,5	153,4	151,0	155,9	152,8	154,1	154,3	4,9	1,7	2,9	2,3		
16	156,3	150,6	149,7	155,5	153,3	152,9	152,7	153,4	153,0	153,1	6,6	2,2	4,9	1,7		
17	154,9	150,7	150,6	151,3	152,7	152,0	151,5	152,3	152,0	151,7	4,4	1,4	2,0	1,2		
18	153,1	154,7	151,6	158,0	154,6	150,5	149,7	151,0	152,9	152,4	8,3	2,8	7,6	3,8		
19	155,4	154,7	153,4	155,5	151,3	154,4	155,3	152,7	154,1	154,6	4,2	1,5	2,3	2,1		
20	152,7	152,3	152,9	149,7	153,3	150,6	155,5	156,3	152,9	152,8	6,6	2,2	4,9	2,0		
21	153,7	153,0	151,2	152,6	154,2	154,3	154,3	153,0	153,3	153,4	3,1	1,1	1,1	1,3		
22	153,5	155,7	154,7	153,8	152,7	152,0	151,9	155,7	153,7	153,6	3,9	1,5	2,3	2,4		
23	151,9	154,1	151,6	153,4	149,3	149,5	149,6	155,4	151,9	151,7	6,1	2,3	5,3	4,0		
24	154,3	153,7	153,2	152,3	155,6	153,5	152,6	152,5	153,5	153,4	3,3	1,1	1,2	1,3		
25	154,7	149,7	151,6	151,0	158,0	153,1	154,6	150,5	152,9	152,3	8,3	2,8	7,7	3,7		
	$\bar{x} = 152,9$										$\bar{x} = 152,8$	$\bar{S} = 2,0$	$\bar{S}^2 = 4,4$	$\bar{IQ} = 2,4$		

Tabela B.3 Medidas de temperatura do óleo (°C) do misturador durante a produção de alumínio - Fevereiro/2003.

Número da amostra	Observações										\bar{x}	\tilde{x}	R_i	S_i	S_i^2	IQ_i
1	250,0	249,6	249,0	251,3	248,3	249,0	249,8	248,3	249,3	249,4	249,3	3,0	1,0	1,0		
2	249,2	248,4	248,1	247,9	248,9	249,0	249,6	249,9	248,9	248,9	248,9	2,0	0,7	0,5		
3	249,9	253,0	249,0	248,3	249,6	248,0	248,7	249,6	249,3	249,5	249,3	5,0	1,6	2,5		
4	250,0	249,6	249,0	250,0	249,8	251,8	249,0	248,4	249,7	249,7	249,7	3,3	1,0	1,0		
5	250,5	248,0	248,0	249,8	249,7	250,6	250,0	248,1	249,3	249,3	249,7	2,6	1,1	1,2		
6	248,2	250,0	249,0	249,0	248,0	248,3	248,3	248,3	248,6	248,6	248,3	2,0	0,7	0,4		
7	247,9	252,4	248,4	247,3	247,7	251,2	251,6	251,1	249,7	249,7	249,8	5,0	2,0	4,2		
8	248,5	253,0	249,2	249,4	250,2	249,4	250,6	246,8	249,6	249,6	249,4	6,2	1,8	3,1		
9	251,0	251,0	252,7	248,5	250,8	251,9	252,0	249,0	250,9	250,9	251,0	4,2	1,4	2,1		
10	250,5	249,0	249,8	249,4	248,2	249,0	249,0	250,0	249,4	249,4	249,2	2,3	0,7	0,5		
11	251,0	248,8	249,3	249,1	249,0	248,8	248,7	249,4	249,3	249,3	249,1	2,3	0,8	0,6		
12	248,6	248,0	252,0	247,3	247,0	247,4	250,1	248,9	248,3	248,6	248,3	5,0	1,7	2,9		
13	251,9	247,7	251,8	247,7	251,1	250,4	248,7	247,6	249,6	249,6	249,6	4,3	1,9	3,6		
14	250,2	251,8	248,0	251,9	251,7	250,0	252,9	250,0	250,8	250,8	250,9	4,9	1,5	2,4		
15	250,0	250,6	251,3	251,3	251,0	250,8	249,3	251,3	250,7	250,7	250,9	2,0	0,7	0,5		
16	247,0	249,9	250,0	247,7	249,7	248,6	249,7	249,7	249,0	249,0	249,7	3,0	1,1	1,3		
17	252,0	248,8	250,0	249,0	250,0	251,8	250,0	251,0	250,3	250,3	250,0	3,2	1,2	1,4		
18	251,6	249,0	251,0	251,0	248,0	248,0	250,0	249,9	249,8	249,8	249,9	3,6	1,4	1,9		
19	249,5	248,3	248,8	249,0	250,3	249,0	249,8	250,3	249,4	249,4	249,3	2,0	0,7	0,5		
20	248,4	247,2	250,0	248,3	251,1	248,5	251,1	251,0	249,4	249,4	249,3	3,9	1,5	2,4		
21	249,2	246,0	251,0	250,0	248,0	249,1	247,0	248,9	248,7	248,7	249,0	5,0	1,6	2,6		
22	248,0	251,0	249,2	247,1	249,1	249,7	249,1	249,7	249,1	249,1	249,2	3,9	1,2	1,3		
23	248,3	248,1	250,2	250,6	251,0	250,3	253,4	251,0	250,4	250,4	250,5	5,3	1,7	2,8		
24	251,0	251,7	252,0	250,8	251,2	248,3	250,1	248,6	250,5	250,5	250,9	3,7	1,3	1,8		
25	251,1	250,4	251,0	248,7	252,6	249,8	251,3	251,4	251,1	250,8	251,1	3,9	1,2	1,4		
	$\bar{x} = 249,65$										$\bar{x} = 249,68$	$\bar{R} = 3,661$	$\bar{S} = 1,262$	$\bar{S}^2 = 1,757$	$\bar{IQ} = 1,511$	

Tabela B.4 *Medidas de temperatura do eletrodo ($^{\circ}C$) durante a produção de alumínio - Janeiro/2003.*

Número da amostra	Observações									\bar{x}	S_i	IQ_i
1	250,00	250,00	249,00	251,29	251,00	250,00	250,00	251,00	250,29	0,756	1,000	
2	249,20	251,00	251,00	249,00	250,00	251,00	252,00	251,00	250,53	1,031	1,200	
3	250,00	253,00	251,00	248,25	250,00	249,00	250,00	251,00	250,28	1,436	1,250	
4	250,00	251,00	251,00	251,00	251,00	251,00	249,00	251,00	250,63	0,744	0,250	
5	250,00	251,00	250,00	251,00	251,00	250,00	250,00	250,00	250,38	0,518	1,000	
6	251,00	251,00	251,00	251,00	251,00	251,00	249,00	249,00	250,50	0,926	0,500	
7	251,00	252,37	250,00	247,35	247,69	251,16	251,61	251,13	250,29	1,833	1,852	
8	251,00	250,00	252,00	249,38	250,00	251,00	251,00	250,00	250,55	0,845	1,000	
9	251,00	250,00	251,67	250,00	250,00	250,00	251,00	249,00	250,33	0,836	1,000	
10	250,50	251,00	251,00	251,00	250,00	250,00	250,00	250,00	250,44	0,496	1,000	
11	251,00	250,00	252,00	250,00	251,00	251,00	251,00	250,00	250,75	0,707	1,000	
12	251,00	250,00	252,00	250,00	250,00	250,00	250,11	250,00	250,39	0,737	0,333	
13	251,89	250,00	250,00	250,00	251,11	250,44	251,00	250,00	250,56	0,710	1,028	
14	250,17	250,00	251,50	249,00	251,67	251,60	250,00	249,00	250,37	1,105	1,775	
15	250,00	250,63	249,33	251,33	250,00	250,78	251,00	251,25	250,54	0,703	1,063	
16	251,00	250,00	250,00	249,00	250,68	250,00	252,00	249,71	250,30	0,912	0,831	
17	251,00	251,20	250,80	253,00	250,00	251,75	252,00	251,20	251,37	0,894	0,863	
18	251,56	250,00	251,00	251,00	249,00	250,00	250,00	249,89	250,31	0,818	1,028	
19	250,12	250,18	250,00	251,00	250,25	250,23	251,00	250,04	250,35	0,409	0,338	
20	250,00	250,22	250,00	250,30	251,11	251,14	251,11	251,00	250,61	0,525	0,946	
21	250,00	251,00	251,00	250,00	250,00	250,00	253,00	248,89	250,49	1,216	1,000	
22	250,00	251,00	250,00	250,00	251,40	250,00	250,00	249,67	250,26	0,602	0,250	
23	251,20	251,00	251,00	250,63	251,00	251,70	253,44	251,00	251,37	0,890	0,325	
24	251,00	250,00	252,00	249,00	251,17	249,00	250,14	249,63	250,24	1,072	1,569	
25	250,00	250,38	251,00	250,10	251,40	251,20	250,00	250,00	250,51	0,595	1,050	
$\bar{x} = 250,50$										$\bar{S} = 0,853$	$\overline{IQ} = 0,938$	

Bibliografia

- ALLOWAY Jr., James A. e RAGHAVACHARI, M. Control charts based on the Hodges-Lehmann estimator, **Journal of Quality Technology**, v. 23, n. 4, p. 336-347, October 1991.
- APARISI, Francisco. Hotelling's T^2 control chart with adaptive samples sizes. **International Journal of Production Research**, v. 34, p. 2853-2862, 1996.
- APARISI, Francisco; JABALOYES, José e CARRIÓN, Andrés. Generalized variance chart design with adaptive samples sizes. The bivariate case, **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v. 30, n. 4, p. 931-948, 2001.
- ARNOLD, B. F. Comparison of the approximate and exact optimum economic design of control charts basing on the sign test, **Statistische Hefte**, v. 27, p. 239-241, 1986.
- BANKS, J. **Principles of Quality Control**, New York: John Wiley & Sons, 1989.
- BENNETT, C. A. Effect of measurement error on chemical process control, **Industrial Quality Control**, v. 10, n. 4, p. 17-20, 1954.
- BINGHAM Jr., R. S. Tolerance limits and process capability studies, **Industrial Quality Control**, v. 19, n. 1, p. 36-40, July 1962.
- BISSEL, A. F. How reliable is your capability index?, **Applied Statistics**, v. 39, n. 3, p. 331-340, 1990.
- BRAVO, Paulo C. Controle estatístico de qualidade, In: 40^a Reunião Anual da Região Brasileira da Sociedade Internacional de Biometria (RBRAS) e 6^o Simpósio de Estatística Aplicada à Experimentação Agronômica (SEAGRO), Ribeirão Preto - São Paulo, 18-21/07/1995. **Anais da 40^a RBRAS e 6^o SEAGRO**, UNESP - Faculdade de ciências agrárias, Ribeirão Preto, 1995. 1 Livro.
- BURR, Irving W. The effect of non-normality on constants for \bar{X} and R charts, **Industrial Quality Control**, v. 23, n. 11, p. 563-569, May 1967.
- BURR, Irving W. Control charts for measurements with varying samples sizes, **Journal of Quality Technology**, v. 1, n. 3, p. 167-163, July 1969.
- CADWELL, J. H. The distributions of quantiles of small samples, **Biometrika**, v. 39, p. 207-211, 1952.
- CAULCUTT, Roland. The rights and wrongs of control charts, **Applied Statistics**, v.

- 44, n. 3, p. 279-288, 1995.
- CLIFFORD, P. C. Control charts without calculations - some modifications and extensions, **Industrial Quality Control**, v. 15, n. 11, p. 40-44, May 1959.
- COSTA, Antônio F. B. \bar{X} Charts with variable sample size, **Journal of Quality Technology**, v. 26, n. 3, p. 155-163, July 1994.
- COSTA, Antônio F. B. Joint X and R charts with variable parameters, **IIE Transactions**, v. 30, p. 505-514, June 1998.
- COSTA, Antônio F. B. Joint \bar{X} and R charts with variable sample sizes and sampling intervals, **Journal of Quality Technology**, v. 31, n. 4, p. 387-397, October 1999.
- COSTA, A. F. B. e RAHIM, M. A. Economic design of X charts with variable parameters: the Markov chain approach, **Journal of Applied Statistics**, v. 28, n. 7, p. 875-885, 2001.
- CRYER, Jonathan D. e RYAN, Thomas P. The estimation of sigma for an X chart: \bar{MR}/d_2 or S/c_4 ?, **Journal of Quality Technology**, v. 22, n. 3, p. 187-192, July 1990.
- DAUDIN, J. J. Double Sampling \bar{X} charts, **Journal of Quality Technology**, v. 24, n. 2, p. 78-87, April 1992.
- DAVID, H. A. Further applications of range to the analysis of variance, **Biometrika**, v. 38, p. 393-407, 1951.
- DAVIS, Robert B. Designing S -charts with two average run length constraints, **Journal of Quality Technology**, v. 31, n. 2, p. 249-250, April 1999.
- DAVIS, Robert D.; KAMINSKY, Frank C. e BURKE, Richard J. Detecting process shifts with X -bar charts, **Production and Inventory Management Journal**, First Quarter, p. 25-30, 1993.
- DIPAOLA, P. P. Use of correlation in quality control, **Industrial Quality Control**, v. 2, n. 1, p. 10-14, July 1945.
- DIXON, W. J. e MASSEY, F. J. **Introduction to Statistical Analysis**, New York: McGraw-Hill, 3th. ed., 1969. p. 238-239.
- DUCAN, D. B. Multiple range and multiple F tests, **Biometrics**, v. 11, p. 1-42, 1955.
- DUNCAN, Acheson J. The economic design of X charts used to maintain current control of a process, **Journal of the American Statistical Association**, v. 51, n. 274, p. 228-242, June 1956.
- DUNCAN, Acheson J. **Quality Control and Industrial Statistics**, Richard D. Irwin Inc., Homewood, Ill., 1974.
- ENNERSON, Fred Jr. e MANNING, Mark. Test performance charts, **Industrial Quality Control**, v. 16, n. 2, p. 8-9, September 1959.

- EPPRECHT, E. K. e COSTA, Antônio F. B. Adaptive sample size control charts for attributes, **Quality Engineering**, v. 13, n. 3, p. 465-473, 2001.
- FARNUM, N. R. e STANTON, L. W. Using counts to monitor a process mean, **Journal of Quality Technology**, v. 18, n. 1, p. 22-28, January 1986.
- FERRELL, Enoch B. Control charts using midranges and medians, **Industrial Quality Control**, v. 10, n. 5, p. 30-34, March 1953.
- FERRELL, Enoch B. A median, midrange chart using run-size subgroups, **Industrial Quality Control**, v. 20, n. 10, p. 22-25, April 1964.
- FINLEY, J. C. What is capability? Or what is C_p and C_{pk} , **ASQC Congress Transactions**, Nashville, p. 186-191, 1992.
- FREUD, Richard A. A reconsideration of the variables control charts - with special reference to the chemical industries, **Industrial Quality Control**, v. 16, n. 11, p. 35-41, May 1960.
- GHOSH, B. K.; REYNOLDS, M. R. Jr. e HUI, Y. V. Shewhart \bar{X} -charts with estimated process variance, **Communications in Statistics - Theory and Methods**, v. A10, n. 18, p. 1797-1822, 1981.
- GUNTER, B. H. The use and abuse of C_{pk} Part 2, **Quality Progress**, v. 22, n. 3, p. 108-109, 1989.
- HACKL, P. e LEDOLTER, J. A control chart based ranks, **Journal of Quality Technology**, v. 23, n. 2, p. 117-124, April 1991.
- HARTLEY, H. O. The range in random samples, **Biometrika**, v. 32, p. 334-348, 1942.
- HARTLEY, H. O. Use of range in analysis of variance, **Biometrika**, v. 37, p. 271-280, 1950.
- HILL, David. Modified control limits, **Applied Statistics**, v. 5, n. 1, p. 12-19, March 1964.
- HILLER, Frederick S. \bar{X} Chart control limits based on a small number of subgroups, **Industrial Quality Control**, v. 20, n. 8, p. 24-29, February 1964.
- HOTELLING, H. **Multivariate Quality Control - Illustrated by the Air Testing of Sample Bombsights, in Techniques of Statistical Analysis**, Eisenhart C., Hastay M. W. and Wallis W. A., eds., New York: McGraw-Hill, 1947. p. 111-184.
- JAMES, Barry R. **Probabilidade um Curso em Nível Intermediário**, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 1996.
- JANACEK, G. J. e MEIKLE, S. E. Control charts based on medians, **Statistician**, v. 46, n. 1, p. 19-31, 1997.
- JANACEK, G. J. e MEIKLE, S. E. Control charts based on medians - Response, **Journal**

-
- of the **Royal Statistical Society - Series D - The Statistician**, v. 48, n. 3, p. 443-444, 1999.
- JURAN, J. M. e GRZYNA, F. M. **Quality Planning and Analysis**, London: Chapman & Hall, 2nd. Ed., 1980.
- JURAN, J. M. e GRZYNA, F. M. **Controle de Qualidade Handbook**, São Paulo: Makron Books, v. VI, 1992.
- KAMINSKY, Frank C.; BENNEYAN, James C.; DVAIS, Robert D. e BURKE, Richard J. Statistical control charts based on a geometric distribution, **Journal of Quality Technology**, v. 24, n. 2, p. 63-69, April 1992.
- KANAZUKA, Takazi. The effect of measurement error on the power of $\bar{X} - R$ charts, **Journal of Quality Technology**, v. 18, n. 2, p. 91-985, April 1986.
- KANE, Victor E., Process capability indices, **Journal of Quality Technology**, v. 18, n. 1, p. 41-52, January 1986.
- KEULS, M. The Use of the 'studentized range' in connection with an analysis of variance, **Euphytica**, v. 1, p. 112-122, 1952.
- KING, Edgar P. Probability limits for the average chart when process standards are unspecified, **Industrial Quality Control**, v. 10, n. 6, p. 62-64, May 1954.
- KLEIN, Morton. Two alternatives to the Shewhart X control charts limits, **Journal of Quality Technology**, v. 32, n. 4, p. 427-431, October 2000.
- KOTZ, S. e JOHNSON, N. L. **Process Capability Indices**, London: Chapman & Hall, 1993.
- KOTZ, S. e LOVELACE, C. R. **Process Capability Indices in Theory and Practice**, New York: Arnold, 1998.
- KUME, H. **Métodos Estatísticos para Melhoria da Qualidade**, São Paulo: Gente, 1993.
- KUSHLER, Robert H. e HURLEY, Paul. Confidence bounds for capability indices, **Journal of Quality Technology**, v. 24, n. 4, p. 188-195, October 1992.
- LEHMANN, Erich L. **Elements of Large-Sample Theory**, New York: Springer-Verlag, 1999.
- LINNA, Kenneth W. e WOODALL, William H. Effect of measurement error on Shewhart control charts, **Journal of Quality Technology**, v. 33, n. 2, p. 213-222, April 2001.
- LOWRY, C. A.; WOODALL, W. H.; CHAMP, C. W. e RIGDON, S. E. A multivariate exponentially weighted moving average control chart, **Technometrics**, v. 34, p. 46-53, 1992.
- MAGALHÃES, Maysa S.; EPPRECHT, Eugenio K. e COSTA, Antônio F. B. Economic

- design of a $Vp \bar{X}$ chart, **International Journal of Production Economics**, v. 74, p. 191-200, 2001.
- MANDEL, B. J. The regression control chart, **Journal of Quality Technology**, v. 1, n. 1, p. 1-9, January 1969.
- MARCELLUS, Richard L. Operating characteristics of \bar{X} -bar charts with asymmetric control limits, **IIE Transactions**, v. 33, p. 1059-1069, December 2001.
- McKAY, A. T. e PEARSON, E. S. A note on the distribution of range in samples of n , **Biometrika**, v. 25, p. 415-420, 1933.
- MITRA, Amitava. **Quality Control and Improvement**, 2nd. ed., New Jersey: Prentice Hall, Upper Saddle River, 1988.
- MITRA, S. K. Tables for tolerance limits for a normal population based on sample mean and range or mean range, **Journal of the American Statistical Association**, v. 52, n. 277, p. 88-94, March 1957.
- MITTAG, H. J. e RINNE, H. **Statistical Methods of Quality Assurance**, London: Chapman & Hall, 1993.
- MONTGOMERY, Douglas. C. **Introduction to Statistical Quality Control**. New York: John Wiley & Sons, 4th. ed., 2001.
- MOORE, Peter G. Normality in quality control charts, **Applied Statistics**, v. 6, n. 3, p. 171-179, November 1957.
- NEDUMARAN, Gunabushanam e PIGNATIELLO Jr., Joseph J. On estimating \bar{X} control charts limits, **Journal of Quality Technology**, v. 33, n. 2, p. 206-212, April 2001.
- NELSON, Lloyd S. Control chart for medians, **Journal of Quality Technology**, v. 14, n. 4, p. 226-227, October 1982.
- NELSON, Lloyd S. The Shewhart control chart - tests for special causes, **Journal of Quality Technology**, v. 16, n. 4, p. 237-239, October 1984.
- NELSON, Lloyd S. The calculation of process capability indices, **Journal of Quality Technology**, v. 31, n. 2, p. 249-250, April 1999.
- NEWMAN, D. The distribution of range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation, **Biometrika**, v. 31, p. 20-30, 1939.
- OSINSKI, Ralph V. Use of median charts in the rubber industry, **Industrial Quality Control**, v. 19, n. 2, p. 5-8, August 1962.
- OTT, Ellis R. Analysis of means - a graphical procedure, **Industrial Quality Control**, v. 23, n.14, p. 101-109, August 1967.
- PARLAR, Mahmut e WESOLOWSKY, George. Specification limits capability, indices

- and process centering in assembly manufacture, **Journal of Quality Technology**, v. 31, n. 3, p. 317-325, July 1999.
- PATNAIK, P. B. The use of mean range in statistical tests, **Biometrika**, v. 37, p. 78-87, 1950.
- PEARSON, E. B. 'Student' as statistician, **Biometrika**, v. 30, p. 210-250, 1938.
- PEARSON, E. B. e HARTLEY, H. O. The probability integral of the range in samples of n observations from a normal population, **Biometrika**, v. 32, p. 301-310, 1942.
- PEARSON, Egon S. A further note on the distribution of range in samples taken from a normal population, **Biometrika**, v. 18, p. 173-194, 1926.
- PEARSON, Egon S. The percentage limits for the distribution of range in samples from a normal population ($n \leq 100$), **Biometrika**, v. 24, p. 404-417, 1932.
- PEARSON, Egon S. e ADYANTHĀYA, N. K. The distribution of frequency constants in small samples from symmetrical populations, **Biometrika**, v. 20A, p. 356-360, 1928.
- PIGNATIELLO Jr., J. J. e RUNGER, G. C. Comparisons of multivariate *CUSUM* charts, **Journal of Quality Technology**, v. 22, n. 3, p. 173-186, July 1990.
- PRABHU, S. S.; RUNGER, G. C. e HEATS, J. B. \bar{X} Charts with adaptive sample sizes, **International Journal of Production Research**, v. 31, p. 2895-2909, 1993.
- PRAZERES, Paulo M. **Dicionário de Termos da Qualidade**. São Paulo: Atlas, 1996. p. 56-58.
- PROSCHAN, F. e SAVAGE, I. R. Starting a control chart, **Industrial Quality Control**, v. 17, n. 3, p. 12-13, September 1960.
- QUESENBERY, Charles P. SPC Q for start-up process and short or long runs, **Journal of Quality Technology**, v. 23, n. 3, p. 213-224, July 1991.
- RAMOS, Edson M. L. S.; SILVA, Luciana S. C. V.; SAMOHYL, Robert W.; ALMEIDA, Silvia dos S. Utilização da amplitude amostral como estimador do desvio padrão: discussão e revisão teórica. In: 15^o Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística, Águas de Lindóia - São Paulo, 29/07 a 02/08/2002. **Anais do 15^o SINAPE**, v. 1, p. 207, São Paulo, 2002.
- ROBERTS, S. W. Control charts tests based on geometric moving averages, **Technometrics**, v. 1, n. 3, p. 239-250, August 1959.
- RODRIGUEZ, Robert N. Recent developments in process capability analysis, **Journal of Quality Technology**, v. 24, n. 4, p. 176-187, October 1992.
- RYAN, T. e HOWLEY, Peter P. Control charts based on medians - Correspondence, **Journal of the Royal Statistical Society - Series D - The Statistician**, v. 48, n. 3, p. 441-442, 1999.

-
- SAAD, T. B. e REYNOLDS, R. A nonparametric procedure for process control, **Technometrics**, v. 21, p. 175-183, 1979.
- SCHILLING, E. G. e NELSON, P. R. The effect of non-normality on the control limits of X charts, **Journal of Quality Technology**, v. 10, n. 5, p. 30-33, May 1976.
- SEN, Pranab K. e SINGER, Júlio M. **Methods in Statistics - An Introduction with Applications**, New York: Chapman & Hall, 1993.
- SHEWHART, Walter A. **Economic Control of Quality of Manufactured Product**, Princeton: Van Nostrand Reinhold, 1931.
- SHEWHART, Walter A. **Contributions of Statistics to the Science of Engineering**, University of Pennsylvania Press, Philadelphia, PA, 1941.
- SHORE, Haim. Process capability analysis when data are autocorrelated, **Quality Engineering**, v. 9, n. 4, p. 615-626, June 1997.
- SPISAK, Andrew W. A control chart for ratios, **Journal of Quality Technology**, v. 22, n. 1, p. 34-37, January 1990.
- STUDENT. Errors of routine analysis, **Biometrika**, v. 19, p. 151-164, 1927.
- TIPPETT, L. H. C. On the extreme individuals and the range of samples taken from a normal population, **Biometrika**, v. 17, p. 364-387, 1925.
- TIPPETT, L. H. C. **Technological Applications of Statistics**, New York: John Wiley & Sons, 1950.
- TRICKER, A.; COATES, E. e OKELL, E. The effect on the R chart of precision of measurement, **Journal of Quality Technology**, v. 30, n. 3, p. 232-239, July 1998.
- TUKEY, J. W. **Allowances for Various Types of Error Rates**, unpublished invited address presented at Blacksburg meeting of Institute of Mathematical Statistics, 1952.
- TUKEY, J. W. **Exploratory Data Analysis**, Reading Addison Wesley, Massachusetts, 1977.
- WADE, Mark R. e WOODALL, William H. A review and analysis of cause-selecting control charts, **Journal of Quality Technology**, v. 25, n. 3, p. 161-169, July 1993.
- WADSWORTH Jr., H. ; STEPHENS, K. S. e GODFREY, A. B. **Modern Methods for Quality Control and Improvement**, New York: John Wiley & Sons, 1986.
- WLUDYKA, Peter S. e NELSON, Peter R. Analysis of means type tests for variances from normal populations, **Technometrics**, v. 39, p. 274-285, 1997.
- WLUDYKA, Peter S., NELSON, Peter R. e SILVA, Peter R. Power curves for the analysis of means for variances, **Journal of Quality Technology**, v. 33, n. 1, p. 60-65, January 2001.
- WOODALL, William H. The statistical design of quality control charts, **The Statisti-**

cian, v. 34, p. 155-160, 1985.

WOODALL, William H. Controversies and contradictions in statistical process control, **Journal of Quality Technology**, v. 32, n. 4, p. 341-350, October 2000.