

**LUIZ FERNANDO NUNES**

**UM ALGORITMO HEURÍSTICO PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
DE GRANDE ESCALA DE LOCALIZAÇÃO DE INSTALAÇÕES COM  
HIERARQUIAS**

**Tese apresentada ao Curso de Pós-  
Graduação em Engenharia de Produção,  
Universidade Federal de Santa  
Catarina, como requisito parcial à  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia.**

**Orientador: Prof. Dr. Sérgio Fernando  
Mayerle.**

**FLORIANÓPOLIS**

**2002**

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**LUIZ FERNANDO NUNES**

### **UM ALGORITMO HEURÍSTICO PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GRANDE ESCALA DE LOCALIZAÇÃO DE INSTALAÇÕES COM HIERARQUIAS**

Tese Aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Edson Pacheco Paladini, Dr.  
COORDENADOR

BANCA EXAMINADORA:

Orientador: Prof. Sérgio Fernando Mayerle, Dr.  
Departamento de Engenharia de Produção, UFSC

Prof. Antônio Sérgio Coelho, Dr.  
Departamento de Engenharia de Produção, UFSC

Prof. Celso Carnieri, Dr.  
Departamento de Matemática, UFPR (Examin. Externo)

Prof.<sup>a</sup> Maria Teresinha Arns Steiner, Dra.  
Departamento de Matemática, UFPR (Examin. Externa)

Prof.<sup>a</sup> Mirian Buss Gonçalves, Dra.  
Departamento de Matemática, UFSC

Prof. Norberto Hochheim, Dr.  
Departamento de Engenharia Civil, UFSC (Moderador)

Florianópolis (SC), 04 de dezembro de 2002

Dedico este trabalho à minha esposa  
Simone e à minha filha Juliana.

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Sérgio Fernando Mayerle, pela paciência, participação e verdadeira orientação, que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

À minha esposa Simone Berndt Nunes e a minha filha Juliana Berndt Nunes, pelo incentivo e pela compreensão pelas horas de estudo que não pude lhes dedicar.

Aos meus pais Antonio Mauro Nunes e Mafalda Wiltuschnig Nunes e ao meu irmão José Carlos Nunes pelo constante incentivo e por sempre acreditarem que este sonho se tornaria realidade.

A todos os amigos, especialmente ao amigo Lauro César Galvão, pelo companheirismo, incentivo e pelas tantas horas de estudo que compartilhamos.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, especialmente para os colegas do Departamento de Matemática que permitiram a realização deste trabalho.

À Prof.<sup>a</sup> Dra. Maria Teresinha Arns Steiner, da Universidade Federal do Paraná, sempre pronta para motivar e colaborar com meus estudos.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....</b>	<b>VII</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>VIII</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>X</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>XI</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO .....	1
1.2 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO.....	3
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	3
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>5</b>
2.1 UM SISTEMA DE CLASSIFICAÇÃO .....	6
2.1.1 Quanto a Relação entre os Níveis Hierárquicos .....	7
2.1.1.1 Instalações sucessivamente inclusivas.....	7
2.1.1.2 Instalações sucessivamente exclusivas .....	7
2.1.1.3 Instalações localmente inclusivas-sucessivamente exclusivas .....	9
2.1.1.4 Uma proposta de generalização .....	9
2.1.2 Quanto ao Fluxo no Grafo Associado .....	12
2.1.2.1 Os problemas de localização-alocação $k/I/U$ .....	14
2.1.2.2 Os problemas de localização-alocação $k/I/M$ .....	16
2.1.2.3 Os problemas de localização-alocação $k/D/M$ .....	17
2.1.2.4 Os problemas de localização-alocação $k/D/U$ .....	19
2.1.3 Quanto às Capacitações das Instalações .....	19
2.1.3.1 Problemas com instalações capacitadas.....	19
2.1.3.2 Problemas com instalações não capacitadas .....	19
2.1.3.3 Problemas com instalações mistas.....	20
2.2 ALGUMAS TÉCNICAS PARA SOLUÇÃO ENCONTRADAS NA LITERATURA .....	20
2.2.1 Relaxação Lagrangeana.....	20
2.2.1.1 A modelagem de TRAGANTALERNGSAK et al. (1997).....	23
2.2.2 Algoritmos <i>Branch-and-Bound</i> .....	40
2.2.2.1 A modelagem de HINDI e BASTA (1994) .....	42
2.2.2.2 A modelagem de GAO e ROBINSON (1992).....	48
2.2.2.3 A modelagem de TCHA e LEE (1984) .....	51
2.2.2.4 A modelagem de RO e TCHA (1984).....	54
2.2.3 Outras Técnicas ou Modelagens.....	57
2.2.3.1 A modelagem de MOORE e REVELLE (1982).....	58
2.2.3.2 A modelagem de JACOBSEN e MADSEN (1980).....	61
2.2.3.3 A modelagem de NARULA e OGBU (1979).....	64
2.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE A REVISÃO DE LITERATURA.....	70
<b>3 OS PROBLEMAS PROPOSTOS .....</b>	<b>72</b>
3.1 PARTICULARIDADES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS .....	72
3.1.1 Uma Metodologia para Cálculo dos Custos .....	73
3.1.2 As Funções de Custos Utilizadas Neste Trabalho .....	75
3.2 FORMULAÇÃO PARA PROBLEMAS COM NÚMERO FIXO DE INSTALAÇÕES.....	75
3.3 FORMULAÇÃO PARA PROBLEMAS COM NÚMERO LIVRE DE INSTALAÇÕES .....	78
<b>4 OS MÉTODOS SUGERIDOS PARA RESOLVER OS PROBLEMAS PROPOSTOS....</b>	<b>80</b>
4.1 UM MÉTODO PARA PROBLEMAS COM NÚMERO FIXO DE INSTALAÇÕES .....	80
4.1.1 Obtenção de Uma Aproximação Inicial para a Solução .....	81
4.1.2 Efetuando as Re-Atribuições.....	84

4.1.2.1	Re-atribuições das instalações do segundo nível.....	85
4.1.2.2	Re-atribuições dos clientes.....	85
4.1.3	As Melhorias Locais.....	86
4.1.3.1	As melhorias locais para as instalações do segundo nível.....	87
4.1.3.2	As melhorias locais para as instalações do primeiro nível.....	89
4.1.4	Ilustração dos Passos do Algoritmo $p$ - $q$ -Median-Heur.....	90
4.2	UM MÉTODO PARA PROBLEMAS COM NÚMERO LIVRE DE INSTALAÇÕES.....	97
4.2.1	Características da Função de Custos Totais.....	98
4.2.2	O Algoritmo Median-Heur.....	107
4.3	AVALIAÇÃO DAS PERFORMANCES DOS MÉTODOS PROPOSTOS.....	109
4.3.1	Avaliação do Algoritmo $p$ - $q$ -Median-Heur.....	110
4.3.2	Avaliação do Algoritmo Median-Heur.....	113
<b>5</b>	<b>OS RESULTADOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS.....</b>	<b>117</b>
5.1	RESULTADOS OBTIDOS COM O ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR.....	117
5.1.1	Resultados de Problemas Diversos.....	117
5.1.2	Resultados de Simulações Repetidas de Diversos Problemas.....	125
5.1.3	Avaliação da Qualidade das Soluções.....	129
5.2	RESULTADOS OBTIDOS COM O ALGORITMO MEDIAN-HEUR.....	137
5.3	UM EXEMPLO PRÁTICO DE APLICAÇÃO DO ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR.....	139
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>145</b>
6.1	CONCLUSÕES SOBRE O ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR.....	145
6.1.1	Quanto à estabilidade do método.....	146
6.1.2	Quanto à qualidade das soluções.....	147
6.2	CONCLUSÕES SOBRE O ALGORITMO MEDIAN-HEUR.....	149
6.3	CONCLUSÕES FINAIS.....	150
<b>7</b>	<b>SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>151</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>152</b>
	<b>ANEXO 1 - ALGUNS CONCEITOS ASSOCIADOS AOS TRANSPORTES.....</b>	<b>157</b>
	<b>ANEXO 2 - O ALGORITMO DE TEITZ E BART.....</b>	<b>164</b>
	<b>ANEXO 3 - CONJUNTOS CONVEXOS E FUNÇÕES CONVEXAS.....</b>	<b>167</b>
	<b>ANEXO 4 - FLUXOGRAMAS DE ALGUNS ALGORITMOS CITADOS NO TEXTO.....</b>	<b>170</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 -	APLICAÇÃO DE MELHORIAS LOCAIS PARA UMA INSTALAÇÃO DO SEGUNDO NÍVEL: (a) SITUAÇÃO ANTES; (b) SITUAÇÃO DEPOIS .....	88
FIGURA 2 -	APLICAÇÃO DE MELHORIAS LOCAIS PARA UMA INSTALAÇÃO DO PRIMEIRO NÍVEL: (a) SITUAÇÃO ANTES; (b) SITUAÇÃO DEPOIS .....	90
FIGURA 3 -	PROBLEMA COM 2000 PONTOS GERADOS ALEATORIAMENTE, REPRESENTANDO OS CLIENTES.....	91
FIGURA 4 -	SOLUÇÃO ALEATÓRIA PARA O PROBLEMA DE 18 MEDIANAS APLICADO AOS PONTOS DA FIGURA 3 .....	92
FIGURA 5 -	SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA DE 18 (15 + 3) MEDIANAS, OBTIDA COM O ALGORITMO DE TEITZ E BART MODIFICADO .....	93
FIGURA 6 -	SOLUÇÃO ALEATÓRIA PARA O PROBLEMA DE 3 MEDIANAS, DENTRE AS 18 INSTALAÇÕES DA FIGURA 5 .....	93
FIGURA 7 -	SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA DE 3 MEDIANAS, OBTIDA COM O ALGORITMO ORIGINAL DE TEITZ E BART .....	94
FIGURA 8 -	SOLUÇÃO FINAL PARA UM PROBLEMA DE 3 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 15 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL, COM $\theta = 1$ .....	95
FIGURA 9 -	SOLUÇÃO FINAL PARA UM PROBLEMA DE 3 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 15 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL COM $\theta = 0,3$ .....	96
FIGURA 10 -	SOLUÇÃO FINAL PARA UM PROBLEMA DE 3 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 15 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL COM $\theta = 0,3$ E FUNÇÕES DE CUSTOS DIFERENTES DAQUELAS UTILIZADAS NA FIGURA 9.....	96
FIGURA 11 -	GRÁFICO DA VARIAÇÃO DOS CUSTOS TOTAIS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE INSTALAÇÕES EM CADA NÍVEL, PARA O CASO 1.....	99
FIGURA 12 -	GRÁFICOS DOS CUSTOS COM TRANSPORTE (EM AZUL), COM AS INSTALAÇÕES (EM VERDE) E DOS CUSTOS TOTAIS (EM VERMELHO), FIXANDO EM 4 O NÚMERO DE INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL E VARIANDO A QUANTIDADE DE INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL.....	101
FIGURA 13 -	GRÁFICOS DOS CUSTOS COM TRANSPORTE (EM AZUL), COM AS INSTALAÇÕES (EM VERDE) E DOS CUSTOS TOTAIS (EM VERMELHO) FIXANDO EM 5 O NÚMERO DE INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E VARIANDO A QUANTIDADE DE INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL.....	102
FIGURA 14 -	GRÁFICO DA VARIAÇÃO DOS CUSTOS TOTAIS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE INSTALAÇÕES EM CADA NÍVEL, PARA O CASO 2.....	105
FIGURA 15 -	GRÁFICO DA VARIAÇÃO DOS CUSTOS TOTAIS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE INSTALAÇÕES EM CADA NÍVEL, PARA O CASO 3.....	106
FIGURA 16 -	OS BARICENTROS DOS BAIRROS DA CIDADE DE CURITIBA (PR) .....	143
FIGURA 17 -	A SOLUÇÃO OBTIDA PARA A INSTALAÇÃO DE 3 HOSPITAIS E 7 POSTOS DE SAÚDE.....	144
FIGURA 18 -	UMA PROPRIEDADE DAS SECANTES À CURVA DE UMA FUNÇÃO CONVEXA.....	168
FIGURA 19 -	EXEMPLO DE QUE A SOMA DE FUNÇÕES CONVEXAS É UMA FUNÇÃO CONVEXA.....	169
FIGURA 20 -	FLUXOGRAMA DO ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR .....	170
FIGURA 21 -	FLUXOGRAMA DO ALGORITMO DE TEITZ E BART .....	171
FIGURA 22 -	FLUXOGRAMA PARA O ALGORITMO DE TEITZ E BART MODIFICADO PARA $p$ -MEDIANAS .....	172
FIGURA 23 -	FLUXOGRAMA PARA O ALGORITMO MEDIAN-HEUR.....	173
FIGURA 24 -	FLUXOGRAMA PARA O ALGORITMO DE SUBGRADIENTE .....	174

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - COMPARAÇÕES ENTRE PROBLEMAS SIMPLES E HIERÁRQUICOS.....	16
TABELA 2 - RESULTADOS DE PROBLEMAS COM ATÉ 10 INSTALAÇÕES POR NÍVEL PARA O CASO 1 .....	99
TABELA 3 - RESULTADOS DE PROBLEMAS COM ATÉ 20 INSTALAÇÕES POR NÍVEL PARA O CASO 2 .....	103
TABELA 4 - RESULTADOS DE PROBLEMAS COM ATÉ 10 INSTALAÇÕES POR NÍVEL PARA O CASO 3 .....	106
TABELA 5A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 1 .....	119
TABELA 5B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 1 .....	119
TABELA 6A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 2 .....	120
TABELA 6B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 2 .....	120
TABELA 7A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 3 .....	121
TABELA 7B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 3 .....	121
TABELA 8A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 4 .....	122
TABELA 8B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 4 .....	122
TABELA 9A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 5 .....	123
TABELA 9B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 5 .....	123
TABELA 10A- CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 6 .....	124
TABELA 10B- TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 6 .....	124
TABELA 11 - SIMULAÇÕES REPETIDAS DE DIVERSOS PROBLEMAS COM 1 INSTALAÇÃO DO PRIMEIRO NÍVEL E 3 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL .....	126
TABELA 12 - SIMULAÇÕES REPETIDAS DE DIVERSOS PROBLEMAS COM 2 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 5 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL .....	127
TABELA 13 - SIMULAÇÕES REPETIDAS DE DIVERSOS PROBLEMAS COM 2 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 5 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL, COM CLIENTES GERADOS ALEATORIAMENTE, PORÉM NÃO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDOS .....	128
TABELA 14 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 10 A 35 CLIENTES, COM UMA E TRÊS INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE .....	130
TABELA 15 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO $p_1$ - $p_2$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 10 A 35 CLIENTES, UMA OU DUAS INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E QUATRO DO SEGUNDO NÍVEL .....	131
TABELA 16 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO $p_1$ - $p_2$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 10 A 25 CLIENTES, UMA OU DUAS INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E TRÊS OU QUATRO INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL .....	132

TABELA 17 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 1000 CLIENTES, DUAS E CINCO INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE .....	133
TABELA 18 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 300 CLIENTES, DUAS INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E CINCO OU SETE INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL .....	134
TABELA 19 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 300 CLIENTES, DUAS E CINCO INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE .....	135
TABELA 20 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 300 CLIENTES GERADOS ALEATORIAMENTE, PORÉM NÃO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDOS, DUAS E CINCO INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE .....	136
TABELA 21 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 200 CLIENTES E CUSTOS DE 1.000,00 PARA INSTALAÇÕES DE AMBOS OS NÍVEIS .....	137
TABELA 22 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 200 CLIENTES E CUSTOS DE 3.000,00 E 5.000,00 PARA INSTALAÇÕES DO SEGUNDO E PRIMEIRO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE.....	138
TABELA 23 - BAIRROS DE CURITIBA (PR) COM SUAS COORDENADAS CARTESIANAS E POPULAÇÕES (DADOS DE 1996). .....	140
TABELA 24 - OS CUSTOS FIXOS MENSIS DE UMA CARRETA VOLVO NL 10 340.....	160
TABELA 25 - OS CUSTOS VARIÁVEIS MENSIS DE UMA CARRETA VOLVO NL 10 340 .....	161
TABELA 26 - SIMULAÇÃO DE FRETE PARA UMA CARRETA VOLVO NL 10 340.....	161
TABELA 27 - OS CUSTOS FIXOS MENSIS DE UM VEÍCULO DO TIPO TRUCK MB L-1218 .....	162
TABELA 28 - OS CUSTOS VARIÁVEIS MENSIS DE UM VEÍCULO DO TIPO TRUCK MB L-1218 .....	162
TABELA 29 - SIMULAÇÃO DE FRETE PARA UM VEÍCULO DO TIPO TRUCK MB L-1218 .....	163

## RESUMO

Muitos sistemas que oferecem serviços de atendimento, distribuição ou coleta, são constituídos por diferentes tipos de instalações, apresentando algum relacionamento hierárquico entre as mesmas. Assim, o objetivo deste trabalho é discutir e resolver de forma aproximada, uma classe de problemas de localização de instalações com dois níveis de hierarquias, incluindo problemas de grande escala. Dentre os problemas práticos que podem ser resolvidos com a técnica proposta, estão sistemas para tratamento de saúde, compostos por hospitais e postos de saúde. Nestes sistemas os clientes devem buscar tratamento em um posto de saúde ou diretamente em um hospital, sendo que uma fração  $\theta$  dos clientes atendidos inicialmente em um posto de saúde são transferidos para um hospital para complementar o tratamento. Também podem ser resolvidos os problemas que envolvem produção/distribuição de mercadorias, como aqueles compostos por fábricas e armazéns. Neste caso, mercadorias são transportadas das fábricas para os clientes, passando ou não por armazéns intermediários. Os problemas são modelados de forma que os custos com transporte, entre as instalações do primeiro e segundo nível, podem diferir dos custos com transporte entre os clientes e as instalações. Além disto, não são consideradas as capacidades das instalações e cada cliente tem sua localização e demanda bem definidos, sendo atendido por exatamente uma instalação do primeiro ou segundo nível. Em qualquer caso, busca-se minimizar os custos com transporte ou transporte e abertura das instalações, caso as quantidades destas não estejam impostas pelo problema. Em linhas gerais a técnica proposta utiliza um algoritmo conhecido por *Forward p-Median* para gerar uma solução inicial para o problema. Neste algoritmo utiliza-se uma versão modificada do algoritmo de Teitz e Bart, para o problema das  $p$ -medianas. Sobre esta solução inicial, são então efetuadas melhorias que incluem procedimentos de troca. A avaliação da qualidade das soluções obtidas é feita com o uso de limites inferiores, obtidos através de relaxação Lagrangeana.

Palavras-chave: Problema das  $p$ -Medianas, Problemas de Localização/Alocação com Hierarquias, Problemas de Localização de Instalações.

## ABSTRACT

Many systems that offer attendance services, distribution or collects, are constituted by different types of facilities, presenting some hierarchical relationship among the same ones. Thus, the objective of this work is to discuss and solve by the approximate way, a class of facilities location problems with two echelons of hierarchies, including problems of great scale. Among the practical problems that can be solved with the technique proposal, there are systems for health treatment, composed by hospitals and health centers. In these systems the customers should be treated in a health center or directly in a hospital, and a fraction  $\theta$  of the customers assisted initially in a health center is transferred to a hospital to complement the treatment. This technique also can solve the problems that involve production/distribution of goods, as those compositions by factories and warehouses. In this case, goods are transported from the factories to the customers, passing or not by intermediary warehouses. The problems are modeled so that the costs with transport, between the facilities of the first and second echelon, can differ from the costs with transport between the customers and the facilities. Besides, the capacities of the facilities are not considered and each customer has its location and its demands well defined, being assisted for exactly an installation of the first or second echelon. The objective is minimize the costs with transport or transport and opening of facilities, when the amount of these it is not imposed by the problem. In general lines the technique proposal uses the Forward  $p$ -Median algorithm to generate an initial solution for the problem. In this algorithm a modified version of Teitz and Bart algorithm is used, for the  $p$ -median problems. In this initial solution the technique also makes improvements that include change procedures. The evaluation of the quality of the obtained solutions is made with the use of inferior limits, obtained through Lagrangean relaxation.

Key-words:  $p$ -Median Problems, Hierarchical Location/Alocation Problems, Facility Location Problems.

# 1 INTRODUÇÃO

Muitos sistemas que oferecem serviços de atendimento, distribuição ou coleta são constituídos por diferentes tipos de instalações, apresentando algum relacionamento hierárquico entre as mesmas. Dentre estes sistemas, estão aqueles para atendimento de saúde (centros médicos, hospitais, postos de saúde), sistemas de produção/distribuição de mercadorias (fábricas, armazéns, lojas), sistemas de atendimento bancário (agências bancárias, postos de atendimento, caixas eletrônicos), sistemas de serviços postais (agências de correios, postos de atendimento, caixas de correio), sistemas de distribuição de energia elétrica, dentre outros. Considerando que os problemas de grande escala são intratáveis por métodos exatos, surge a necessidade de técnicas aproximadas que permitam encontrar bons resultados, em tempos computacionais aceitáveis.

## 1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é discutir e resolver de forma aproximada, uma classe de problemas de localização de instalações com dois níveis de hierarquias, incluindo problemas de grande escala.

Para os casos onde são impostas as quantidades de instalações que devem ser implantadas em cada nível, isto é, quando estas quantidades são pré-fixadas pelo problema, este trabalho propõe um algoritmo chamado de  $p$ - $q$ -Median-Heur, que permite identificar de forma aproximada, porém rápida, as localizações para as  $p$  e  $q$  instalações do primeiro e segundo nível, respectivamente, além de efetuar a designação dos clientes para estas instalações.

Se a quantidade de instalações em cada nível for livre, isto é, se além dos objetivos anteriores busca-se determinar também as quantidades destas instalações, é proposta uma técnica heurística chamada de Median-Heur, que incorpora o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur.

Dois exemplos práticos de problemas que podem ser resolvidos com os algoritmos propostos são:

- a) Um sistema para tratamento de saúde composto por hospitais e postos de saúde, onde clientes devem buscar tratamento em um posto de saúde ou diretamente em um hospital, sendo que uma fração  $\theta$  dos clientes atendidos inicialmente em um posto de saúde são transferidos para um hospital para complementar o tratamento. Neste caso as instalações do primeiro nível são os hospitais, enquanto que as instalações do segundo nível são os postos de saúde.
- b) Um sistema de produção/distribuição composto por fábricas e armazéns, onde mercadorias são transportadas das fábricas para os clientes, passando ou não por armazéns intermediários. Aqui as instalações do primeiro nível são as fábricas, enquanto que as instalações do segundo nível são os armazéns.

Nos problemas tratados neste trabalho, cada cliente tem sua localização e demanda bem definidos. As possíveis localizações onde serão implantadas as instalações são os pontos onde se localizam os clientes. Se as quantidades de instalações são impostas pelo problema, o objetivo é encontrar as localizações destas instalações de forma a minimizar os custos com transporte. Caso contrário, busca-se encontrar as quantidades e localizações destas instalações que minimizam os custos com transporte e implantação destas instalações.

Os problemas são modelados de forma que os custos com transporte, entre as instalações do primeiro e segundo nível, podem diferir dos custos com transporte entre os clientes e as instalações.

Neste estudo não são consideradas as capacidades das instalações, isto é, as capacidades são consideradas ilimitadas.

## 1.2 IMPORTÂNCIA DO TRABALHO

Conforme NARULA (1984), os problemas de localização de instalações que envolvem hierarquias são significativamente maiores que os problemas de localização de instalações em um único nível.

Considerando a complexidade para resolver estes problemas combinatoriais, apenas instâncias de pequeno porte dos mesmos são resolvidas com algoritmos exatos. Assim sendo, as técnicas heurísticas constituem uma alternativa para fornecer soluções aproximadas para os problemas de grande escala, bastante comuns em situações práticas.

Desta forma, a importância deste trabalho reside no fato de discutir e apresentar uma alternativa de solução para problemas práticos, onde não existem técnicas ou pacotes computacionais capazes de apresentar soluções exatas, em um tempo computacional aceitável.

A relevância do trabalho está no fato de tais problemas fazerem parte de diversos ramos como o da economia e dos transportes, carecendo de técnicas que permitam obter boas soluções, visando uma diminuição de custos e/ou recursos.

## 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho encontra-se dividido em 7 capítulos, incluindo esta introdução.

O segundo capítulo traz uma revisão de literatura dos diversos tipos de problemas de localização de instalações que envolvem hierarquias, incluindo classificações, formulações e métodos para solução, mostrando o atual “estado da arte” para estes problemas.

O terceiro capítulo apresenta os problemas particulares que o presente trabalho se propõe a discutir, incluindo as formulações matemáticas para os mesmos.

O quarto capítulo mostra as técnicas propostas neste estudo para resolver estes problemas e também as relaxações Lagrangeanas utilizadas para avaliar o desempenho destes algoritmos.

O quinto capítulo traz os resultados computacionais obtidos.

O sexto capítulo apresenta as conclusões deste trabalho.

Finalmente, o sétimo capítulo traz algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

O problema das  $p$ -medianas e o problema de  $p$ -centros têm sido amplamente estudados na literatura.

No problema das  $p$ -medianas, o objetivo é localizar  $p$  instalações dentre  $n$  ( $n \geq p$ ) possíveis localizações, de forma que o total das distâncias viajadas seja minimizado. Este critério é conhecido como critério minisum.

No problema de  $p$ -centros, o objetivo é encontrar  $p$  instalações dentre  $n$ , de forma que a máxima distância viajada seja minimizada. Este critério é conhecido como critério minimax.

O problema das  $p$ -medianas tem sido estudado em relação a problemas de localizações de armazéns, depósitos, e outras, enquanto que o problema de  $p$ -centros tem sido mais associado a serviços emergenciais. Em ambos os problemas, é assumido que as  $p$  instalações são de um mesmo tipo.

Na prática, entretanto, sistemas que fornecem produtos ou serviços, geralmente consistem de  $k$  ( $k \geq 2$ ) distintos tipos de instalações. Por exemplo, sistemas de atendimento para cuidados com saúde pré-natal, conforme GALVÃO, ESPEJO e BOFFEY (2002).

Em alguns destes sistemas, centros médicos oferecem serviços mais completos do que aqueles disponíveis em hospitais e postos de saúde. Similarmente, hospitais oferecem mais serviços que os postos de saúde. Assim, um cliente que não puder ser tratado em um posto de saúde, pode ser enviado para um hospital ou a um centro médico e, se necessário, um cliente que foi primeiramente encaminhado para um hospital pode ser transferido para um centro médico. Um centro médico é equipado para atender todos os casos.

Um outro exemplo, considera o sistema de produção-distribuição de produtos, que são produzidos em fábricas e estocados em armazéns. Dos armazéns são transportados para as lojas onde são vendidos aos clientes. Estes dois sistemas são similares, porém, diferem em diversos aspectos.

Um sistema que consiste de  $k \geq 2$  distintos tipos de instalações e que

coletivamente oferecem produtos ou serviços são chamados de sistemas com  $k$ -hierarquias.

Um problema de localização-alocação com  $k$ -hierarquias pode ser estabelecido como: determinar as localizações-alocações para  $p_i$  instalações do tipo  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , dentre  $n$  ( $n \geq \sum_{i=1}^k p_i$ ) possíveis localizações de instalações, tal que um certo critério seja otimizado.

Se as instalações são de um único tipo e o critério minimax é utilizado, o problema de localização-alocação com  $k$ -hierarquias se reduz ao problema das  $p$ -medianas, mas se o critério minimax for adotado, o problema se reduz ao problema de  $p$ -centros. Segundo NARULA (1984), até então nenhum pesquisador havia utilizado o critério minimax para problemas com  $k \geq 2$  distintos tipos de instalações.

## 2.1 UM SISTEMA DE CLASSIFICAÇÃO

Até 1984 (NARULA, 1984), a literatura em problemas de localização-alocação de instalações, com sistemas constituídos de  $k \geq 2$  tipos de instalações não era muita extensa. NARULA (1984) cita que poucos pesquisadores, por exemplo: BANERJI e FISHER (1974), CALVO e MARKS (1973), DOKMECI (1973), HARVEY, HUNG e BROWN (1973), NARULA e OGBU (1978, 1979), SCHULTZ (1970) e SCOTT (1971), haviam publicado nesta área. Estes pesquisadores analisaram diferentes versões para o problema de localização-alocação com hierarquias, mas até aquela data nenhuma sistemática de classificação para estes tipos de problemas havia sido desenvolvida.

Na seqüência são apresentadas algumas formas de classificação para os problemas de localização de instalações com hierarquias, quanto a relação entre os níveis hierárquicos, quanto aos fluxos nos nós e arcos do grafo associado ao problema e quanto às capacidades das instalações.

### 2.1.1 Quanto a Relação entre os Níveis Hierárquicos

Em um sistema com  $k$ -hierarquias, é importante especificar a relação que existe entre os vários tipos de instalações. Normalmente os problemas são considerados de acordo com dois tipos de hierarquias entre as instalações: (i) instalações hierárquicas sucessivamente inclusivas e (ii) instalações hierárquicas sucessivamente exclusivas.

Alguns autores, por exemplo MIRCHANDANI (1987), consideram também uma terceira categoria de problemas, em relação a hierarquia entre os diferentes níveis de instalações. Nesta terceira categoria, as instalações são ditas: (iii) localmente inclusivas-sucessivamente exclusivas. TIEN, EL-TELL e SIMONS (1983) se referem a estes tipos de instalações simplesmente como "localmente inclusivas". Estes três grupos de problemas são detalhados na seqüência.

#### 2.1.1.1 Instalações sucessivamente inclusivas

SCHULTZ (1970), citado em NARULA (1984), define que as instalações hierárquicas são sucessivamente inclusivas, se um tipo  $m$  de instalações ( $m = 1, 2, \dots, k$ ) oferece serviços de ordem  $1, 2, \dots, m$ .

O sistema de atendimento para cuidados com saúde, citado anteriormente, é um exemplo que possui instalações hierárquicas sucessivamente inclusivas. Outros exemplos são: sistemas de atendimento bancário (caixas eletrônicos, postos de atendimento, agências bancárias), sistemas de serviços postais (caixas de correio, postos de atendimento, agências de correios), alguns sistemas educacionais, e outros.

#### 2.1.1.2 Instalações sucessivamente exclusivas

Em um sistema de instalações hierárquicas sucessivamente exclusivas, cada instalação de tipo  $m$ , oferece um serviço único. O sistema de produção-distribuição citado no início deste capítulo é um destes exemplos. Outros exemplos são sistemas de distribuição de energia elétrica, sistemas de telefonia, sistemas de coleta e distribuição postais, e outros.

TIEN, EL-TELL e SIMONS (1983) apresentam um exemplo de modelo que trata da localização de instalações para tratamento de saúde, com instalações hierárquicas sucessivamente exclusivas. Naquele modelo o número dos diferentes níveis de instalações, bem como a quantidade de instalações em cada nível foi fixada, assim como as possíveis localizações para as mesmas. Estas possíveis localizações contêm números determinados de clientes, com demandas determinadas para cada tipo de serviço. Não foram consideradas as capacidades para as instalações. O referido modelo é descrito na seqüência.

### Um modelo de problema com instalações hierárquicas sucessivamente exclusivas

Sendo:

$s$  = número total de tipos de instalações (ou serviços),

$n$  = número total de possíveis localizações,

$m_k$  = número de instalações do tipo  $k$ , para serem locadas ( $k = 1, 2, \dots, s$ ),

$a_{ik}$  = número de indivíduos residindo na localização  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), que requerem o tipo  $k$  de serviço ( $k = 1, 2, \dots, s$ ),

$d_{ij}$  = distância entre a localização  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e a localização  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),

e as variáveis de decisão:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se os indivíduos na localização } i \text{ (} i = 1, 2, \dots, n \text{) e requerentes} \\ & \text{do tipo de serviço } k \text{ (} k = 1, 2, \dots, s \text{), são designados à localização} \\ & j \text{ (} j = 1, 2, \dots, n \text{), onde um tipo de instalação } k \text{ está locada,} \\ 0, & \text{se não ocorre tal designação.} \end{cases}$$

o modelo fica estabelecido como:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \sum_{k=1}^s a_{ik} x_{ijk} \quad (1)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^s x_{ijk} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$

$$x_{jjk} \geq x_{ijk}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ik} = m_k, \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (5)$$

$$x_{ijk} = 0, 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, s, \quad (6)$$

A função objetivo (1) traz o somatório das distâncias, multiplicadas pelas respectivas demandas que deverá ser minimizado. As restrições (2) garantem que os indivíduos que requerem diferentes tipos de serviços, não podem obter estes serviços da mesma instalação. As restrições (3) garantem que cada serviço de cada cliente será atendido por exatamente uma instalação. As restrições (4) evitam a possibilidade de designação de indivíduos residindo em uma localização  $i$  e requerentes de um tipo de instalação  $k$ , para uma localização  $j$ , onde não exista tal instalação. As restrições (5) especificam o número de instalações, por tipo, que devem ser designadas nas  $n$  possíveis localizações e as restrições (6) indicam as variáveis binárias.

### 2.1.1.3 Instalações localmente inclusivas-sucessivamente exclusivas

As instalações são ditas localmente inclusivas-sucessivamente exclusivas, quando um tipo  $k$  de instalações, serve às demandas de 1 até  $k$ , localmente (isto é, as demandas do próprio nó onde se localiza a instalação), mas serve somente demandas do tipo  $k$  de outras localidades (isto é, de outros nós).

### 2.1.1.4 Uma proposta de generalização

MIRCHANDANI (1987) propõe um modelo que generaliza os problemas de localização-alocação de instalações hierárquicas, embora não tenha, em seu trabalho, apresentado procedimentos para solucionar os problemas, nem considerado casos que tratam de instalações capacitadas.

No modelo, os sistemas com instalações hierárquicas sucessivamente

inclusivas, sucessivamente exclusivas e localmente inclusivas-sucessivamente exclusivas são casos especiais.

### O modelo matemático

Sejam:

$k$  = índice para os tipos de instalações,

$s$  = número de tipos de instalações ( $k=1, 2, \dots, s$ ),

$l$  = índice para os tipos de demandas ou serviços ( $l=1, 2, \dots, s$ ),

$i$  = índice para as localizações das demandas,

$j$  = índice para as localizações das instalações,

$d_{ij}$  = a distância entre as localizações  $i$  e  $j$ ,

$a_{il}$  = o número de clientes na localização  $i$ , com demandas para o tipo de serviço  $l$ ,

$m_k$  = o número de instalações do tipo  $k$  para serem locadas,

$m$  = o número de localizações para as demandas ( $i=1, 2, \dots, m$ ),

$n$  = o número de possíveis localizações para as instalações ( $j=1, 2, \dots, n$ ),

$s_{kl}$  = os custos *in-facility*, para uma instalação do tipo  $k$  servir uma demanda do tipo  $l$ ,

$c_{ijkl}$  = o custo total em servir uma demanda do tipo  $l$ , localizada em  $i$ , por uma instalação do tipo  $k$ , localizada em  $j$ , isto é  $c_{ijkl} = d_{ij} + s_{kl}$ ,

e as variáveis de decisão:

$$x_{ijkl} = \begin{cases} 1, & \text{se uma demanda do tipo } l, \text{ em um ponto } i, \text{ é servida por uma} \\ & \text{instalação do tipo } k, \text{ situada em } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se um tipo de instalação } k \text{ é locada em } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

o modelo fica estabelecido como:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s a_{il} c_{ijkl} x_{ijkl} \quad (7)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^s x_{ijkl} = 1, \quad \text{para todo } i, l, \quad (8)$$

$$y_{jk} \geq x_{ijkl}, \quad \text{para todo } i, j, k, l, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n y_{jk} = m_k, \quad \text{para todo } k, \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^s y_{jk} \leq 1, \quad \text{para todo } j, \quad (11)$$

$$y_{jk}, x_{ijkl} \in \{0, 1\}, \quad \text{para todo } i, j, k, l. \quad (12)$$

A função objetivo (7) traz os custos totais que devem ser minimizados. As restrições (8) garantem que as demandas para cada tipo de serviço de cada cliente são atendidas por exatamente uma instalação. As restrições (9) garantem que as atribuições somente são feitas para instalações abertas. As restrições (10) especificam as quantidades de instalações por tipo. As restrições (11) impedem que mais de uma instalação seja aberta na mesma localização. As restrições (12) indicam as variáveis binárias.

O ponto crucial da generalização, é a separação das variáveis de demanda (indexadas por  $l$ ), das variáveis dos tipos de instalações (indexadas por  $k$ ), e a introdução do chamado custo de serviço *in-facility*, o que vem a permitir vários esquemas de alocação.

### Instalações hierárquicas sucessivamente inclusivas

Fazendo  $c_{ijkl} \rightarrow \infty$  (ou um número muito grande) quando  $k < l$ , instalações do tipo  $k$  somente servirão demandas de 1 até  $k$ , fazendo com que o modelo se torne um modelo com instalações hierárquicas sucessivamente inclusivas.

Se uma instalação do tipo  $k$  é estabelecida na localidade  $i$ , o modelo permite situações onde não é exigido que as demandas inferiores de  $i$  (isto é,  $l=1, 2, \dots, k-1$ ) sejam atendidas por esta instalação. Por exemplo, com relação a instalações para tratamento de saúde, pode ser mais barato para um cliente ir a uma clínica em qualquer

outra localização, do que ser atendido em um centro médico, na porta de sua casa.

### Instalações hierárquicas sucessivamente exclusivas

Fazendo  $s_{kl} = M$  (um número muito grande) quando  $k \neq l$ , somente instalações do tipo  $k$  servirão às demandas do tipo  $k$ . Desde que  $c_{ijkl}$  inclui os custos das distâncias  $d_{ij}$ , estes tipos de instalações  $k$  serão localizadas somente com base nos custos das distâncias e das demandas  $a_{ik}$ , como em um modelo com instalações hierárquicas sucessivamente exclusivas.

### Instalações localmente inclusivas-sucessivamente exclusivas

Fazendo  $c_{ijkl} = 0$ , para  $i = j$  e  $k \geq l$ , uma instalação de tipo  $k$ , estabelecida em  $j$ , é forçada a servir a todas as demandas do tipo 1 até  $k$  desta localização (isto é, demandas localmente inclusivas). Para  $i \neq j$  e  $k \neq l$ , temos que  $s_{kl} = M$  na expressão de  $c_{ijkl}$ . Isto prevenirá que um tipo de instalação  $k$  sirva as demandas de outras localidades que não sejam do tipo  $k$  (isto é, demandas sucessivamente exclusivas).

Para salientar a generalização do modelo, deve-se notar que uma instalação de um tipo  $k$ , é definida por uma habilidade em servir algum subconjunto específico de tipos de demandas, dito  $D_k$ , e pode-se fazer com que os valores  $s_{kl} \rightarrow \infty$  para  $l \notin D_k$  na formulação do problema. Os elementos de  $D_k$  não precisam estar na hierarquia com respeito a  $k$ . Por exemplo, se um tipo de instalações  $k$  pode servir as demandas do tipo  $l = k - 3, k, e k + 2$ , então  $D_k = \{ k - 3, k, k + 2 \}$ .

#### 2.1.2 Quanto ao Fluxo no Grafo Associado

NARULA (1984) estabeleceu um critério de classificação para os problemas de localização de instalações com hierarquias, de acordo com a quantidade de tipos de instalações e os fluxos nos nós e arcos do grafo associado ao problema. Antes da apresentação desta classificação, serão dadas algumas definições para um melhor entendimento do assunto.

A discussão que foi feita do problema de localização-alocação com  $k$ -hierarquias, foi referente a um grafo  $G$ , com um conjunto de nós  $N$ , com  $n$  vértices e pesos  $W_i$ ,  $i \in N$ . A correspondência entre o grafo e o problema de localização-alocação com  $k$ -hierarquias é que os vértices (nós) correspondem às localizações das demandas, os pesos  $W_i$  às magnitudes dessas demandas e os arcos que conectam os vértices as possíveis rotas de transporte.

O termo fluxo, denotará o fenômeno de transporte entre os nós. A viagem de um cliente para um posto de saúde é um fluxo, assim como o movimento de um produto de uma fábrica para um armazém. Assume-se que os tipos de instalações (níveis  $0, 1, \dots, k$ ) são arranjados de forma que o fluxo de produtos e serviços ocorre do menor para o maior nível, ou do maior para o menor nível.

Foi então definido que o fluxo será integrado ( $I$ ), se o mesmo ocorrer de um nível  $m$  ( $= 0, 1, 2, \dots, k-1$ ) para um nível de instalações mais alto ( $m+1, \dots, k$ ). Neste caso, não é necessário que uma demanda seja atendida pelo nível imediatamente superior. Da mesma maneira, definiu-se que o fluxo será discriminante ( $D$ ) quando ocorrer de um nível de instalações  $m$  para o próximo nível  $m+1$ . Estas definições especificam os fluxos nos arcos.

Quanto ao fluxo nos nós, os fluxos são definidos como de único caminho ( $U$ ) se o grau de saída de cada nó, na solução do problema, é menor ou igual a um. Se o grau de saída de pelo menos um nó do grafo, na solução do problema, for maior ou igual a dois, o fluxo é dito de múltiplos caminhos ( $M$ ).

Usando estes conceitos, NARULA (1984) estabeleceu um esquema para classificação de problemas de localização-alocação com  $k$ -hierarquias. Para isto, leva em consideração o número de diferentes tipos de instalações, e os tipos de fluxos nos nós e arcos do grafo.

Foi proposta uma classificação que divide os problemas em quatro grupos, designados:

- (i) problemas de localização-alocação  $k/I/U$ ,
- (ii) problemas de localização-alocação  $k/I/M$ ,
- (iii) problemas de localização-alocação  $k/D/M$  e

(iv) problemas de localização-alocação  $k/D/U$ .

Cada uma destas categorias é detalhada a seguir:

#### 2.1.2.1 Os problemas de localização-alocação $k/I/U$

Na rede que representa uma solução para este tipo de problema, o grau de saída de cada nó é menor ou igual a um, e o fluxo ocorre de uma instalação do tipo  $m$  para uma instalação qualquer de nível mais alto  $m + 1, \dots, k$ .

Esta classe de problemas de localização-alocação é sugerida principalmente para problemas com instalações hierárquicas sucessivamente inclusivas. Desde que somente uma instalação pode servir um usuário qualquer, uma demanda insatisfeita em certo nível pode ser atribuída para um nível de instalações mais alto.

Nestes tipos de problemas a alocação ótima de uma determinada demanda não é feita, necessariamente, para a instalação mais próxima, mesmo quando as instalações são não capacitadas.

Um sistema com dois níveis hierárquicos para tratamento de saúde, composto de postos de saúde e hospitais, no qual clientes são alocados a um posto de saúde ou a um hospital, e se necessário, transferidos de um posto de saúde para um hospital, é um exemplo de um problema de localização-alocação  $2/I/U$ .

Estes problemas podem ser chamados de problemas de localização de medianas com  $k$ -hierarquias em um grafo direcionado integrado de único caminho.

De acordo com NARULA (1984), esta é a classe dos problemas de localização de medianas envolvendo hierarquias, que tem sido mais amplamente estudada. Propostas de procedimentos heurísticos para resolver variações deste problema foram apresentadas por NARULA e OGBU (1979).

Assim, define-se que o conjunto  $\{x^0, y^0\}^1$ , é uma solução para um problema do tipo  $2/I/U$ , de medianas em um grafo direcionado integrado de único caminho, se

---

<sup>1</sup> O par ordenado  $\{x^0, y^0\}$  denota o conjunto das duas medianas, sendo que  $x^0$  representa uma instalação do tipo 1 e  $y^0$  uma instalação do tipo 2.

para qualquer outro conjunto  $\{x, y\}$ <sup>2</sup>, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n W_i \text{Min} \left\{ d(i, x^0) + \theta d(x^0, y^0); d(i, y^0) \right\} \leq \sum_{i=1}^n W_i \text{Min} \left\{ d(i, x) + \theta d(x, y); d(i, y) \right\}$$

onde  $\theta$  representa a fração da demanda transportada de uma instalação do tipo 1 para uma instalação do tipo 2 e  $d(x, y)$  denota a distância entre  $x$  e  $y$ .

Da mesma maneira, define-se que o par ordenado de conjuntos  $\{X^0, Y^0\}$ <sup>3</sup>, com  $|X^0| = p_1$  e  $|Y^0| = p_2$ , é uma solução para um problema do tipo  $2/I/U_{(p_1, p_2)}$ , de medianas em um grafo direcionado integrado de único caminho, se para qualquer outro par ordenado de conjuntos  $\{X, Y\}$ <sup>4</sup>, com  $|X| = p_1$  e  $|Y| = p_2$ , tem-se:

$$\sum_{i=1}^n W_i \text{Min} \left\{ \underset{\substack{x^0 \in X^0 \\ y^0 \in Y^0}}{\text{Min}} (d(i, x^0) + \theta d(x^0, y^0)); \underset{y^0 \in Y^0}{\text{Min}} d(i, y^0) \right\} \leq$$

$$\sum_{i=1}^n W_i \text{Min} \left\{ \underset{\substack{x \in X \\ y \in Y}}{\text{Min}} (d(i, x) + \theta d(x, y)); \underset{y \in Y}{\text{Min}} d(i, y) \right\}$$

Desta forma, o número de combinações possíveis de soluções para um problema do tipo  $2/I/U_{(p_1, p_2)}$ , de medianas em um grafo, pode ser muito grande, sendo

dado por:  $\frac{n!}{p_1! p_2! (n - p_1 - p_2)!}$ .

O tamanho do problema pode ser apreciado, comparando com o número de combinações possíveis de soluções para um problema equivalente de  $p$  ( $= p_1 + p_2$ ) medianas em um mesmo nível. Este número de combinações, e a razão entre estes dois

---

<sup>2</sup> No par ordenado  $\{x, y\}$ , os elementos  $x$  e  $y$  representam localizações candidatas para receber instalações do tipo 1 e 2, respectivamente.

<sup>3</sup> No par ordenado de conjuntos  $\{X^0, Y^0\}$ ,  $X^0$  e  $Y^0$  são os conjuntos das  $p_1$  medianas que representam instalações do tipo 1 e das  $p_2$  medianas que representam instalações do tipo 2, respectivamente.

<sup>4</sup> No par ordenado de conjuntos  $\{X, Y\}$ ,  $X$  e  $Y$  indicam conjuntos candidatos de localizações para receber as  $p_1$  instalações do tipo 1 e as  $p_2$  instalações do tipo 2, respectivamente.

números são dados respectivamente por:  $\frac{n!}{(p_1 + p_2)!(n - p_1 - p_2)!}$  e  $\frac{(p_1 + p_2)!}{(p_1!p_2!)}$ .

Para alguns valores pequenos de  $p_1$  e  $p_2$  esta razão é dada na tabela 1:

TABELA 1 - COMPARAÇÕES ENTRE PROBLEMAS SIMPLES E HIERÁRQUICOS

$p_1$	$p_2$	$(p_1 + p_2)!/(p_1!p_2!)$
6	2	28
6	3	84
7	4	330
7	5	792
8	4	495
8	5	1287
8	6	3003
9	4	1815
9	5	2002
9	6	5005
10	5	3003
10	6	8008
10	7	19448

Estes resultados são válidos também para problemas do tipo  $2/I/M$ ,  $2/D/M$  e  $2/D/U$ .

### 2.1.2.2 Os problemas de localização-alocação $k/I/M$

Na rede que representa uma solução para este tipo de problema, o grau de saída de pelo menos um nó é maior ou igual a dois e o fluxo ocorre de uma instalação do tipo  $m$  para uma instalação qualquer de nível mais alto  $m + 1, \dots, k$ .

Esta classe de problemas de localização-alocação também é sugerida principalmente para problemas com instalações hierárquicas sucessivamente inclusivas. Como o fluxo nos nós é do tipo múltiplos caminhos ( $M$ ), o ótimo seria alocar cada demanda para a instalação mais próxima com o nível de serviço exigido por esta demanda. Portanto, nestes sistemas não existe necessidade de re-alocar uma demanda.

Um sistema de atendimento para cuidados com saúde com dois níveis hierárquicos, onde alguns clientes necessitam de cuidados primários e outros tratamentos mais específicos, pode ser um exemplo desta categoria de problemas.

Estes problemas podem ser chamados de problemas de localização de

medianas com  $k$ -hierarquias em um grafo direcionado integrado de múltiplos caminhos. CALVO e MARKS (1973) formularam um problema 3/I/M como um problema de programação inteira zero-um. Entretanto, eles não propuseram nenhum algoritmo para solução que explorasse a estrutura especial do problema.

Assim, define-se que o conjunto  $\{x^0, y^0\}$ , é uma solução para um problema do tipo 2/I/M, de medianas em um grafo direcionado integrado de múltiplos caminhos, se para qualquer outro conjunto  $\{x, y\}$ , tem-se:

$$\sum_{i=1}^n W_i \text{Min} \left\{ \theta d(i, x^0) + (1 - \theta) d(i, y^0); d(i, y^0) \right\} \leq$$

$$\sum_{i=1}^n W_i \text{Min} \left\{ \theta d(i, x) + (1 - \theta) d(i, y); d(i, y) \right\}$$

onde  $\theta$  representa a fração da demanda satisfeita por uma instalação do tipo 1 e  $(1 - \theta)$  a fração da demanda satisfeita por uma instalação do tipo 2.

Da mesma maneira, define-se que o par ordenado de conjuntos  $\{X^0, Y^0\}$ , com  $|X^0| = p_1$  e  $|Y^0| = p_2$ , é uma solução para um problema do tipo 2/I/M<sub>(p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>)</sub>, de medianas em um grafo direcionado integrado de múltiplos caminhos, se para qualquer outro par ordenado de conjuntos  $\{X, Y\}$ , com  $|X| = p_1$  e  $|Y| = p_2$ , tem-se:

$$\sum_{i=1}^n W_i \text{Min} \left\{ \text{Min}_{\substack{x^0 \in X^0 \\ y^0 \in Y^0}} (\theta d(i, x^0) + (1 - \theta) d(i, y^0)); \text{Min}_{y^0 \in Y^0} d(i, y^0) \right\} \leq$$

$$\sum_{i=1}^n W_i \text{Min} \left\{ \text{Min}_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} (\theta d(i, x) + (1 - \theta) d(i, y)); \text{Min}_{y \in Y} d(i, y) \right\}$$

### 2.1.2.3 Os problemas de localização-alocação $k/D/M$

Na rede que representa uma solução para este tipo de problema, o grau de saída de pelo menos um nó é maior ou igual a dois e o fluxo ocorre de uma instalação do tipo  $m$  ( $= 0, 1, \dots, k-1$ ) para uma instalação do grau seguinte  $m + 1$ .

Esta classe de problemas de localização-alocação, é sugerida principalmente para problemas com instalações hierárquicas sucessivamente exclusivas. Um sistema com  $k$  hierarquias não capacitadas, no qual a demanda de cada localização é satisfeita pelo nível hierárquico posterior, é um exemplo de um sistema que pertence a esta classe de problemas.

Um sistema de produção-distribuição de um produto, composto de fábricas, armazéns e lojas, é um exemplo de problema do tipo  $3/D/M$ . Outros exemplos são: alguns sistemas de produção e distribuição de energia elétrica, alguns sistemas de coleta e distribuição postais, sistemas de remoção de detritos e outros.

Estes problemas podem ser chamados de problemas de localização de medianas com  $k$ -hierarquias, em um grafo direcionado discriminante de múltiplos caminhos.

Assim, define-se que o conjunto  $\{x^0, y^0\}$ , é uma solução para um problema do tipo  $2/D/M$ , de medianas em um grafo direcionado discriminante de múltiplos caminhos, se para qualquer outro conjunto  $\{x, y\}$ , tem-se:

$$\sum_{i=1}^n W_i \{ d(i, x^0) + \theta d(x^0, y^0) \} \leq \sum_{i=1}^n W_i \{ d(i, x) + \theta d(x, y) \}$$

onde  $\theta$  representa a fração da demanda enviada de uma instalação do tipo 1 para uma instalação do tipo 2.

Da mesma maneira, define-se que o par ordenado de conjuntos  $\{X^0, Y^0\}$ , com  $|X^0| = p_1$  e  $|Y^0| = p_2$ , é uma solução para um problema do tipo  $2/D/M_{(p_1, p_2)}$ , de medianas em um grafo direcionado discriminante de múltiplos caminhos, se para qualquer outro par ordenado de conjuntos  $\{X, Y\}$ , com  $|X| = p_1$  e  $|Y| = p_2$ , tem-se:

$$\sum_{i=1}^n W_i \left\{ \underset{\substack{x^0 \in X^0 \\ y^0 \in Y^0}}{\text{Min}} (d(i, x^0) + \theta d(x^0, y^0)) \right\} \leq \sum_{i=1}^n W_i \left\{ \underset{\substack{x \in X \\ y \in Y}}{\text{Min}} (d(i, x) + \theta d(x, y)) \right\}$$

#### 2.1.2.4 Os problemas de localização-alocação $k/D/U$

Na rede que representa uma solução para este tipo de problema, o grau de saída de todos os nós é menor ou igual a um e o fluxo ocorre de uma instalação do tipo  $m$  ( $= 0, 1, \dots, k - 1$ ) para uma instalação do grau seguinte  $m + 1$ .

Esta classe de problemas de localização-alocação também é sugerida principalmente para problemas com instalações hierárquicas sucessivamente exclusivas. Um sistema com  $k$  hierarquias não capacitadas, no qual a demanda de cada localização é satisfeita pelo nível hierárquico posterior, é um exemplo de um sistema que pertence a esta classe de problemas.

Estes problemas podem ser chamados de problemas de localização de medianas com  $k$ -hierarquias em um grafo direcionado discriminante de único caminho.

As mesmas expressões utilizadas para exemplificar um problema do tipo  $2/D/M$ , podem ser usadas para um problema do tipo  $2/D/U$ .

#### 2.1.3 Quanto às Capacitações das Instalações

Destacam-se aqui, três tipos de problemas, quanto ao tipo de capacitação das instalações. São os problemas com instalações capacitadas, não capacitadas e mistas, conforme a descrição que segue:

##### 2.1.3.1 Problemas com instalações capacitadas

Esta classe de problemas inclui aqueles onde são consideradas as capacidades das instalações em todos níveis hierárquicos. Por exemplo, os trabalhos desenvolvidos por NARULA e OGBU (1979), HINDI e BASTA (1994) e JAYARAMAN, GUPTA e PIRKUL (2002).

##### 2.1.3.2 Problemas com instalações não capacitadas

Esta classe de problemas inclui aqueles onde não são consideradas as capacidades das instalações, em nenhum dos níveis hierárquicos. Isto é, as capacidades

são consideradas ilimitadas. Por exemplo, os trabalhos desenvolvidos por MIRCHANDANI (1987), GAO e ROBINSON (1992), ALMINYANA, BORRÁS e PASTOR (1998) e GALVÃO, ESPEJO e BOFFEY (2002).

### 2.1.3.3 Problemas com instalações mistas

Nesta categoria, se incluem os problemas que possuem alguns níveis com instalações capacitadas e outros níveis com instalações não capacitadas. Por exemplo, se encontra nesta categoria o trabalho desenvolvido por TRAGANTALERNGSAK, HOLT e RONNQVIST (1997).

## 2.2 ALGUMAS TÉCNICAS PARA SOLUÇÃO ENCONTRADAS NA LITERATURA

As principais técnicas encontradas na literatura para resolver os problemas de localização de instalações com hierarquias, são técnicas que utilizam relaxação Lagrangeana, procedimentos *branch-and-bound* ou algumas técnicas heurísticas.

### 2.2.1 Relaxação Lagrangeana

Relaxação Lagrangeana é uma das técnicas mais amplamente utilizadas para resolver problemas de otimização combinatória (TRAGANTALERNGSAK, HOLT e RONNQVIST, 1997). A relaxação Lagrangeana de um problema de otimização combinatória com restrições é obtido removendo (relaxando) um conjunto de restrições e incluindo as mesmas na função objetivo, multiplicadas por parâmetros de penalidades, também chamados de multiplicadores de Lagrange.

A relaxação Lagrangeana obtida, é mais fácil de resolver que o problema original, porque algumas estruturas especiais das restrições remanescentes podem ser exploradas.

O valor ótimo da função objetivo de uma relaxação Lagrangeana, para um dado conjunto de multiplicadores, é um limite inferior (no caso de minimização) para

a solução ótima do problema original.

O melhor limite inferior pode ser obtido escolhendo como multiplicadores de Lagrange a solução do dual do problema original.

Um limite superior para o ótimo do problema original, pode ser derivado do uso de informações obtidas da relaxação Lagrangeana, para construir uma solução factível para o problema original. Isto normalmente se faz aplicando algumas heurísticas.

A partir dos limites inferior e superior pode-se obter um *GAP* que permite uma avaliação da qualidade da solução obtida, determinando a distância máxima que a mesma se encontra do ótimo global.

Estas técnicas foram aplicadas por GEOFFRION e MACBRIDE (1978), GALVÃO e RAGGI (1989), para problemas de localização de instalações não capacitadas; por BEASLEY (1988, 1993), para problemas de localização de instalações capacitadas; BARCELO e CASANOVAS (1984), KLINCEWICZ e LUSS (1986), PIRKUL (1987) e SRIDHARAN (1993) para problemas conhecidos como *single-source capacitated facility location problem*, que são casos especiais de problemas de localização de instalações capacitadas, onde cada cliente deve ser atendido por exatamente uma instalação. Todos estes autores foram citados em TRAGANTALERNGSAK, HOLT e RONNQVIST (1997).

Relaxações Lagrangeanas também foram utilizadas por JAYARAMAN, GUPTA e PIRKUL (2002), além GALVÃO, ESPEJO e BOFFEY (2002). Estes últimos resolveram problemas de até 400 vértices com três níveis de hierarquias e quantidades fixas de instalações em cada nível, utilizando duas relaxações Lagrangeanas diferentes, além de um procedimento heurístico, comparando os resultados entre si.

### Definição do Problema Primal

Considere um problema de otimização combinatorial formulado como programação inteira da seguinte forma:

(P) :

$$\min f(x) \quad (13)$$

s.a.

$$g_i(x) \leq 0, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (14)$$

$$x \in S, \quad (15)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in Z_+^n \quad (16)$$

onde  $f(x)$  e  $g_i(x) \leq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) são funções arbitrárias,  $S$  é um conjunto discreto finito  $S = \{x^{(1)}, \dots, x^{(r)}\}$  e  $x^{(k)}$  ( $k = 1, \dots, r$ ) é uma solução de (P).

$S$  é chamado o conjunto das soluções do problema. Uma solução viável  $x \in S$  é uma solução que também satisfaz as restrições (14), (15) e (16).

Muitos problemas combinatoriais difíceis de resolver encaixam-se na estrutura do problema (P).

A cada restrição  $g_i(x) \leq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), associa-se um número real  $u_i \geq 0$ , chamado Multiplicador de Lagrange e define-se a função Lagrangeana como sendo  $F(x, u) = f(x) + u \cdot g(x)$  onde  $u = (u_1, \dots, u_m)$  e  $g(x) = [g_1(x), \dots, g_m(x)]^T$ .

Como o problema de programação inteira pode ser colocado de várias maneiras na forma de uma função Lagrangeana, deve-se assumir que esta função Lagrangeana satisfaz a condição de que para todo  $u \in \mathfrak{R}_+^m$  existe um bom algoritmo para computar:  $L(u) = \min_{x \in S} \{F(x, u)\}$ , chamada de função dual.

### Definição do Problema Dual

Por definição, o problema dual de (P) é:

$$\max_{u \in \mathfrak{R}_+^m} \min_{x \in S} \{F(x, u)\} \quad \text{ou} \quad \max_{u \in \mathfrak{R}_+^m} L(u) \quad (D).$$

### Propriedade – Limite Inferior

Para qualquer  $u \in \mathfrak{R}_+^m$ , e para todas as soluções viáveis  $x$  de (P), tem-se

$$L(u) \leq f(x).$$

Em particular,  $L(u) \leq f(x^*)$ , onde  $x^*$  é um ótimo global de  $(P)$ .

Demonstração:

Por definição, tem-se que:

$$L(u) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m u_i \cdot g_i, \forall u \geq 0, \forall x \in S.$$

Como  $u_i \geq 0$  e  $g_i \leq 0$ , para todas as soluções viáveis  $x$  de  $(P)$ , temos  $L(u) \leq f(x)$ .

Em particular, para  $x^*$ , um mínimo absoluto de  $(P)$ , e se  $u^*$  é um ótimo de  $(D)$ ,  $L(u) \leq L(u^*) \leq f(x^*)$ .

Uma consequência imediata desta propriedade é a seguinte: se o dual  $(D)$  tem um ótimo ilimitado, então o primal  $(P)$  não tem solução.

Na seqüência é apresentado um dos trabalhos envolvendo relaxação Lagrangeana encontrado na literatura. Este trabalho, desenvolvido por TRAGANTALERNGSAK, HOLT e RONNQVIST (1997), serviu de base para o algoritmo utilizado no presente trabalho para encontrar limites inferiores e avaliar as qualidades das soluções do método heurístico proposto.

#### 2.2.1.1 A modelagem de TRAGANTALERNGSAK et al. (1997)

TRAGANTALERNGSAK, HOLT e RONNQVIST (1997) desenvolveram um trabalho para resolver uma classe particular de problemas de localização-alocação com 2 níveis de instalações hierárquicas sucessivamente exclusivas.

Cada uma das instalações do segundo nível (referidas apenas por instalações) tem sua capacidade limitada e pode ser suprida por somente uma instalação do primeiro nível (referidas por depósitos) e cada cliente somente pode ser servido por uma instalação do segundo nível. As quantidades e as localizações das instalações em ambos os níveis, bem como as alocações dos clientes para as instalações do segundo nível, são determinadas simultaneamente.

Foi proposto um modelo matemático para o problema, e consideradas seis

heurísticas baseadas em relaxação Lagrangeana para a solução. Para resolver o problema dual foi utilizado o método de otimização por subgradiente.

### O modelo matemático

Sendo:

$I = \{1, \dots, m\}$ , o conjunto das possíveis localizações para as instalações,

$J = \{1, \dots, n\}$ , o conjunto dos clientes,

$K = \{1, \dots, nn\}$ , o conjunto das possíveis localizações para os depósitos,

$a_j =$  a demanda do cliente  $j$ ,  $\forall j \in J$ ,

$b_i =$  a capacidade da instalação  $i$ ,  $\forall i \in I$ ,

$f_{ik} =$  o custo de designação da instalação  $i$  para o depósito  $k$ ,  $\forall i \in I, k \in K$ ,

$c_{ijk} =$  o custo para uma instalação  $i$ , suprida pelo depósito em  $k$ , servir o cliente localizado em  $j$ ,  $\forall i \in I, j \in J, k \in K$ ,

$g_k =$  o custo para instalar um depósito em  $k$ ,  $\forall k \in K$ ,

e as variáveis de decisão:

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se a instalação em } i \text{ é aberta e suprida pelo depósito em } k, \forall i \in I, \\ & k \in K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se a instalação em } i, \text{ suprida pelo depósito em } k, \text{ servir o cliente} \\ & j, \forall i \in I, j \in J, k \in K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{se existe um depósito em } k, k \in K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

o modelo fica estabelecido como:

(P) :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{nn} \sum_{j=1}^n c_{ijk} x_{ijk} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{nn} f_{ik} y_{ik} + \sum_{k=1}^{nn} g_k z_k \quad (17)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i \in I, k \in K, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{nn} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in J, \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^{nn} y_{ik} \leq 1, \quad \forall i \in I, \quad (20)$$

$$x_{ijk} \leq y_{ik}, \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K, \quad (21)$$

$$y_{ik} \leq z_k, \quad \forall i \in I, k \in K, \quad (22)$$

$$x_{ijk}, y_{ik}, z_k \in \{0, 1\}. \quad (23)$$

A função objetivo (17) representa o custo total, constituído pelo custo de designação dos clientes às instalações, o custo de designação das instalações e o custo de abertura dos depósitos. As restrições (18) encerram que as demandas dos clientes são atendidas sem que as capacidades das instalações sejam excedidas. As restrições (19) garantem que cada cliente é servido por exatamente uma instalação. As restrições (20) fazem com que cada instalação seja suprida por um único depósito e as restrições (21) fazem com que as atribuições sejam feitas somente para instalações abertas. As restrições (22) garantem que se não existe um depósito aberto na localização  $k$ , nenhuma instalação pode ser suprida por este depósito e as restrições (23) indicam as variáveis binárias.

O problema acima é um problema de programação inteira de tamanho considerável. O número de variáveis zero-um em potencial é  $m.n.nn + m.nn + nn$ , que pode ser grande, mesmo quando  $n$ ,  $m$  e  $nn$  são relativamente pequenos.

### A formulação dual do problema original

O problema de encontrar o melhor limite inferior, se resume em resolver o dual do problema original, que será chamado de Lagrangeano dual do problema. Para simplificar a descrição deste processo, foi introduzida a seguinte notação: Seja  $w^T = (x^T, y^T, z^T)$  e  $nvar = n + m + nn$ . O problema original ( $P$ ), pode ser reescrito

com a seguinte formulação geral:

Primal:

$$\min f^T w \quad (24)$$

s.a.

$$Gw \leq 0, \quad (25)$$

$$Hw = 0, \quad (26)$$

$$w \in W. \quad (27)$$

onde  $w$  e  $f$  são os vetores de dimensão  $nvar$  que representam as variáveis de decisão e seus coeficientes da função objetivo, respectivamente. Fazendo  $nicon$  e  $necon$  representarem as quantidades de restrições de desigualdades e igualdades, respectivamente, então  $G$  e  $H$  são as matrizes das restrições, com dimensões  $nicon \times nvar$  e  $necon \times nvar$ , respectivamente.

Assim sendo, os multiplicadores de Lagrange (ou variáveis duais)  $v \in \mathfrak{R}^{nicon}$  e  $\pi \in \mathfrak{R}^{necon}$ , são associados com as restrições de desigualdades e igualdades, respectivamente. O chamado Lagrangeano dual para o problema primal é então definido como:

Dual:

$$\max \Theta(v, \pi) \quad (28)$$

s.a.

$$v \geq 0, \quad (29)$$

onde  $\Theta(v, \pi)$  é definido como a solução do então chamado subproblema Lagrangeano, ou *SUB*:

*SUB*:

$$\min f^T w + v^T Gw + \pi^T Hw \quad (30)$$

s.a.

$$w \in W. \quad (31)$$

Escolhendo diferentes definições para o conjunto  $W$  (que pode conter restrições de igualdades e desigualdades), são geradas diferentes relaxações Lagrangeanas e diferentes subproblemas, com vários tipos de estruturas e

separabilidades. A seleção de uma relaxação adequada, é um importante fator que deve ser considerado. A facilidade para obter a solução, depende dos métodos disponíveis para resolver o subproblema *SUB*. No caso do problema abordado pelos autores, os métodos envolvem designação generalizada, semidesignação e/ou problemas da mochila.

A possibilidade de se gerar problemas pequenos e fáceis, em comparação com o problema original, depende da estrutura do problema original e do grau de separabilidade obtida da relaxação de certas restrições. Geralmente, relaxações que dão limites melhores, exigem grandes tempos computacionais, enquanto que relaxações que são resolvidas com facilidade, provavelmente gerarão limites mais pobres.

Uma importante tática, que pode ser utilizada para fortalecer as relaxações Lagrangeanas, isto é, fornecer bons limites inferiores, é impor restrições adicionais redundantes ao problema original. Quando algumas restrições são relaxadas, este conjunto poderá tornar-se não redundante. Supondo que o conjunto factível original seja denotado por  $F$ , então, incluindo um novo conjunto  $\bar{W}$ , tal que  $F \subset \bar{W} \subset W$ , pode-se aumentar o limite inferior obtido pelo relaxamento.

A principal propriedade do problema dual, é que a função dual é sempre côncava, BAZARAA e SHERALI (1981). Assim, uma solução ótima local, será também uma solução ótima global. As restrições são apenas restrições de não negatividade dos multiplicadores de Lagrange (ou variáveis duais) associados com as restrições de desigualdades. No caso da formulação de um problema de programação inteira, tem-se também que a função dual é não diferenciável. Neste caso, métodos ascendentes, baseados em gradiente, não podem ser utilizados para encontrar uma solução. Existem muitos métodos que podem ser utilizados, levando em conta a não diferenciabilidade da função dual. Destes métodos os autores optaram pelo método de otimização por subgradiente.

## O método de otimização por subgradiente

O método de otimização por subgradiente permite resolver problemas não diferenciáveis, tomando um passo de comprimento fixo na direção do subgradiente.

Na seqüência, será descrito o algoritmo de subgradiente, onde  $LBD$  e  $UBD$  denotam os limites inferior e superior para o valor ótimo da função objetivo, respectivamente. O parâmetro  $t$  é um contador de iterações e  $d_t$  é o comprimento do passo na iteração  $t$ .

## O algoritmo de subgradiente

**Passo 1.** Inicialize:

Faça  $LBD \rightarrow -\infty$ ,  $t = 0$ ,  $d_0 \in (0, 2]$ . Estabeleça o critério de convergência  $\varepsilon$  e  $t_{\max}$ . Inicialize  $v^0$  e  $\pi^0$ . Encontre um limite superior  $UBD$ .

**Passo 2.** Resolva o subproblema Lagrangeano:

Resolva o subproblema  $SUB$ , e faça  $w^t$  ser a solução. Faça  $LBD = \max \{LBD, \Theta(v^t, \pi^t)\}$ .

**Passo 3.** Encontre uma solução factível:

Aplique uma heurística para encontrar uma solução factível, a partir da solução do subproblema  $SUB$ .

**Passo 4.** Cheque a convergência:

Se o  $GAP = (UBD - LBD) / LBD < \varepsilon$  ou  $t = t_{\max}$  (critério de convergência), então PARE. A solução dual corrente é escolhida como ótima e a solução correspondente para o melhor  $UBD$  é escolhida como a solução primal ótima.

**Passo 5.** Calcule o subgradiente:

Calcule o subgradiente como:  $\gamma^T = ((Gw^t)^T, (Hw^t)^T)$ .

**Passo 6.** Encontre o tamanho do passo:

Calcule  $T_t = d_t (UBD - \Theta(v^t, \pi^t)) / \|\gamma\|^2$ .

**Passo 7.** Atualize os multiplicadores de Lagrange:

Faça  $(v^{t+1}, \pi^{t+1}) = (v^t, \pi^t) + T_t \gamma$  e ajuste  $(v^{t+1})$ , fazendo  $v^{t+1} = \max\{v^{t+1}, 0\}$ .

**Passo 8.** Atualize o contador de iterações:

Faça  $t = t + 1$  e volte ao passo 2.

Na implementação computacional, os autores efetuaram algumas modificações sugeridas por BEASLEY (1993). Estas modificações são as seguintes:

(1) No **Passo 5**, existe a condição  $\gamma_i = 0$ , se  $v_i = 0$  e  $(Gw^t)_i < 0$ ,  $i \in nicon$ .

(2) No **Passo 6**, foi usado 1,05 *UBD*, ao invés de *UBD*.

Para melhorar a convergência,  $d_t$  é normalmente decrescido, sempre que o *LBD* não tiver sido melhorado em um número fixo de iterações ( $N$ ). Para gerar o *UBD* do passo 3 (e para inicializar *UBD* do passo 1) uma heurística adequada deve ser escolhida. Esta seleção depende da estratégia de relaxamento escolhida. Para o trabalho desenvolvido, este procedimento foi baseado em uma técnica para resolver problemas de designação generalizada. Embora existam muitos métodos disponíveis para isto, os autores optaram pela heurística desenvolvida por PIRKUL (1987), que é descrita a seguir.

#### Gerando soluções factíveis (para determinar o limite superior *UBD*)

Um importante aspecto de um procedimento heurístico baseado em relaxação Lagrangeana, é a qualidade das soluções factíveis obtidas no passo 3 do algoritmo de otimização por subgradiente. A melhor solução factível obtida é considerada a solução “ótima”. Uma solução factível, candidata a ser a solução ótima, pode ser construída resolvendo um problema de designação generalizada, em que os clientes são atribuídos a um subconjunto de instalações pré-selecionadas, as quais, são pré-designadas para um subconjunto de depósitos.

Uma solução factível inicial é encontrada usando combinações de instalações e depósitos pré-selecionados, escolhidos como segue:

Um depósito de mínimo custo fixo é aberto ( $k''$ ), e então as instalações de menor custo vão sendo designadas ao depósito  $k''$ , até que a capacidade total das instalações exceda a demanda total dos clientes. Esta condição é necessária, porém não

suficiente para a existência de soluções factíveis. Considere  $I'$  o conjunto de instalações abertas e resolva o seguinte problema de designação generalizada:

(P1) :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ijk''} x_{ijk''} \quad (32)$$

s.a.

$$\sum_i x_{ijk''} = 1, \forall i \in I', j \in J, \quad (33)$$

$$\sum_j a_j x_{ijk''} \leq b_i, \forall i \in I', j \in J, \quad (34)$$

$$x_{ijk''} \in \{0,1\}, \forall i \in I', j \in J. \quad (35)$$

Se uma solução factível não puder ser encontrada para este problema, instalações adicionais servidas pelo depósito  $k''$  são abertas, e o problema acima é resolvido novamente. O limite superior inicial é calculado adicionando ao custo de designação total, o custo total de abertura dos depósitos e o custo total de abertura das instalações.

Neste esquema, é necessário resolver um problema de designação generalizada. Para isto, os autores escolheram a heurística sugerida por PIRKUL (1987), a qual é descrita na seqüência.

### A heurística para gerar soluções factíveis

Seja  $\tilde{I}$  o conjunto de instalações abertas<sup>5</sup> e  $\tilde{K}$  o conjunto de depósitos abertos.

**Passo 1.** Seja  $J_F$  o conjunto de clientes ainda não designados a nenhuma instalação, ou designados a múltiplas instalações (clientes livres). Para um dado  $j \in$

---

<sup>5</sup> Instalações abertas são instalações implantadas. Idem para depósitos, armazéns e facilidades em geral.

$J_F$ , calcule a diferença  $d_j$  entre o menor e o segundo menor valor de  $c_{\tilde{i}\tilde{j}\tilde{k}}$  para  $\tilde{i} \in \tilde{I}$ ,  $\tilde{k} \in \tilde{K}$  e  $y_{\tilde{i}\tilde{k}} = 1$ . Calcule as penalidades por unidade de demanda  $w_j = d_j / a_j$ ,  $\forall j \in J_F$ .

**Passo 2.** Coloque os clientes livres em ordem decrescente de  $w_j$ . Designe cada cliente  $j \in J_F$ , nesta ordem, para as instalações abertas com mínimo custo de designação. Se um cliente  $j$  não puder ser designado para esta instalação, porque esta instalação não possui capacidade suficiente, determine um novo  $w_j$  para o cliente  $j$ , ignorando esta instalação. Os clientes livres são colocados em uma nova ordem decrescente de  $w_j$ , e a designação continua de acordo com esta nova ordem.

### Algumas relaxações Lagrangeanas utilizadas

TRAGANTALERNGSAK, HOLT e RONNQVIST (1997) consideraram seis modelos de relaxações Lagrangeanas. Os limites superiores são obtidos através da aplicação de uma heurística que faz uso das soluções dos problemas relaxados. Quanto a notação utilizada,  $v(P)$  representa o valor ótimo da função objetivo para  $(P)$  e  $(RL)$  denota um problema de relaxação Lagrangeana.  $(RL_{xy})$  denota um subproblema Lagrangeano com variáveis  $x$  e  $y$ .

Na seqüência, são apresentadas as duas relaxações Lagrangeanas que apresentaram melhor performance, com respeito ao  $GAP$ <sup>6</sup> e ao tempo computacional médios.

### A relaxação Lagrangeana 1

No problema  $(P)$ , o conjunto de restrições (22) conecta as variáveis  $y$  e  $z$ . Se estas restrições são relaxadas, o problema  $(P)$  pode ser separado em dois

---

<sup>6</sup>  $GAP = \frac{UBD - LBD}{LBD} * 100.$

subproblemas, um problema com as variáveis  $x$  e  $y$  e outro com as variáveis  $z$ . Além disto, as restrições (19) combinam todas as variáveis  $x$  em termos de clientes e depósitos. Por relaxação de (19), pode-se separar esta dependência de clientes-depósitos. Isto significa que são relaxadas as restrições que exigem que cada cliente seja designado a exatamente uma instalação. Relaxando as restrições (19) e (22) com multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  e  $\omega$ , respectivamente, obtém-se a primeira relaxação:

(RL1) :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{mn} \sum_{j=1}^n (c_{ijk} - \lambda_j) x_{ijk} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{mn} (f_{ik} + \omega_{ik}) y_{ik} + \sum_{k=1}^{mn} (g_k - \sum_{i=1}^m \omega_{ik}) z_k + \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (36)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i \in I, k \in K, \quad (37)$$

$$\sum_{k=1}^{mn} y_{ik} \leq 1, \quad \forall i \in I, \quad (38)$$

$$x_{ijk} \leq y_{ik}, \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K, \quad (39)$$

$$x_{ijk}, y_{ik}, z_k \in \{0, 1\}. \quad (40)$$

O modelo (RL1) é separado nos dois subproblemas que seguem:

(RL1<sub>xy</sub>) :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{mn} \sum_{j=1}^n (c_{ijk} - \lambda_j) x_{ijk} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{mn} (f_{ik} + \omega_{ik}) y_{ik} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (41)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i \in I, k \in K, \quad (42)$$

$$\sum_{k=1}^{mn} y_{ik} \leq 1, \quad \forall i \in I, \quad (43)$$

$$x_{ijk} \leq y_{ik}, \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K, \quad (44)$$

$$x_{ijk}, y_{ik} \in \{0, 1\}. \quad (45)$$

e

( $RL1_z$ ) :

$$\min \sum_{k=1}^m (g_k - \sum_{i=1}^m \omega_{ik}) z_k \quad (46)$$

s.a.

$$z_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K. \quad (47)$$

Para resolver o problema ( $RL1_{xy}$ ), os autores fizeram a seguinte observação, que permite reformular o problema como segue. Suponha que a instalação  $i$  é aberta, e suprida pelo depósito  $k$ , isto é,  $y_{ik} = 1$  e  $y_{ir} = 0$ ,  $\forall r \neq k$ . Então a contribuição para o valor ótimo da função objetivo, envolvendo esta combinação, é  $v1_{ik}$ , que é dado por:

( $KN_x$ ) :

$$v1_{ik} = \min \sum_{j=1}^n (c_{ijk} - \lambda_j) x_{ijk} + (f_{ik} + \omega_{ik}) \quad (48)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i \in I, k \in K, \quad (49)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}. \quad (50)$$

O problema ( $RL1_{xy}$ ) agora pode ser reformulado como:

( $KN_y$ ) :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m v1_{ik} y_{ik} + \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (51)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^m y_{ik} \leq 1, \quad \forall i \in I, \quad (52)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\}. \quad (53)$$

Para encontrar  $v1_{ik}$  é necessário resolver um problema de programação linear inteira zero-um, conhecido como problema da mochila.

Seja  $x'_{ijk}$  a solução ótima para o problema da mochila ( $KN_x$ ). A solução ótima para o problema ( $RL1_{xy}$ ) pode ser determinada como:

(1) Para cada  $i$ , faça  $v'_i = \min\{v_{ik}, k \in K\}$  e  $ik_i =$  o índice do  $\min_k \{v_{ik}\}$ .

(2) Se  $v'_i \leq 0$ , então faça  $y_{i,ik_i} = 1$ ,  $x_{i,j,ik_i} = x'_{i,j,ik_i}$ . Caso contrário, faça ambos iguais a zero.

O problema  $(RL1_z)$  pode ser resolvido por inspeção.

$$\text{Faça } z_k = \begin{cases} 1, & \text{se } (g_k - \sum_{i=1}^m \omega_{ik}) \leq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um limite inferior para o problema  $(P)$  pode ser calculado como  $v(RL1_{xy}) + v(RL1_z)$ .

Um limite superior pode ser encontrado usando as soluções de  $(RL1_{xy})$  e  $(RL1_z)$ , da seguinte maneira:

Seja  $x_1, y_1$  a solução do problema  $(RL1_{xy})$  e  $z_1$  a solução do problema  $(RL1_z)$ . Considere ainda o conjunto dos depósitos abertos  $K_1$ , o conjunto dos depósitos fechados  $K_0$ , o conjunto das instalações abertas  $I_1$  e o conjunto das instalações fechadas  $I_0$ , que são criados como:

$$K_1 = \{k / z_{1k} = 1 \text{ e existe algum } y_{1ik} = 1\},$$

$$K_0 = K \setminus K_1,$$

$$I_1 = \{i / y_{1ik} = 1 \text{ e } z_{1k} = 1 \text{ para algum } k\},$$

$$I_0 = I \setminus I_1.$$

Os valores de  $y_1$  e  $z_1$  são ajustados de acordo com estes conjuntos. A capacidade total das instalações abertas é checada com a demanda total dos clientes. Se não existir capacidade suficiente, mais depósitos e instalações (causando o menor acréscimo no limite inferior) são abertas. Depois, os clientes são designados às instalações abertas. Os detalhes deste procedimento são os seguintes:

**Passo 1.** Para cada instalação fechada  $i \in I_0$ , calcular o aumento no custo, se  $i$  é suprida pelo depósito  $k$ , ( $cust_{ik}$ ).

$$cust_{ik} = \begin{cases} v_{ik}, & \text{se } k \in K_1, \\ v_{ik} + g_{1k}, & \text{se } k \in K_0. \end{cases} \quad \text{onde } g_{1k} = g_k - \sum_{i=1}^m \omega_{ik}.$$

**Passo 2.** Faça  $cust_{i^*k^*} = \min\{cust_{ik}\}$ . Se  $k^* \in K_1$ , adicione a instalação  $i^*$

ao depósito  $k^*$ , isto é, faça  $y_{1_{i^*k^*}} = 1$ . Se  $k^* \in K_0$ , abra o depósito  $k^*$  e atribua a instalação  $i^*$  ao depósito  $k^*$ , isto é, faça  $z_{1_{k^*}} = 1$  e  $y_{1_{i^*k^*}} = 1$ .

**Passo 3.** Ajuste  $K_1$ ,  $K_0$ ,  $I_1$  e  $I_0$ .

**Passo 4.** Repita os passos de 1 a 3 até que a capacidade total seja maior que a demanda total que é dada por:  $(\sum_{i \in I_1} b_i \geq \sum_{j=1}^n a_j)$ .

**Passo 5.** Atribua os clientes às instalações abertas. Faça  $x_{1_{\tilde{i}\tilde{k}}}$  ser a solução de  $(RL1_{xy})$ , onde  $\tilde{i} \in I_1$ ,  $\tilde{k} \in K_1$  e  $y_{1_{\tilde{i}\tilde{k}}} = 1$ . Desta solução, nenhuma restrição de capacidade é violada, mas pode ocorrer que alguns clientes  $j$  tenham sido designados para múltiplas instalações, ou não tenham sido designados a nenhuma instalação. Um problema de designação generalizada é construído para estes clientes, do conjunto de instalações abertas  $\tilde{i}$  e são ajustadas as capacidades das instalações abertas. Estes clientes são re-atribuídos resolvendo um problema de designação generalizada, sendo que pode ser usada a heurística de PIRKUL (1987), descrita anteriormente.

### A relaxação Lagrangeana 2

Para a relaxação Lagrangeana 2, os autores adicionaram a restrição abaixo, que faz com que pelo menos um depósito seja aberto.

$$\sum_{k=1}^{mn} z_k \geq 1. \quad (54)$$

Foi também incluída outra restrição que força a abertura de instalações suficientes para atender todas as demandas dos clientes, isto é:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{mn} y_{ik} b_i \geq \sum_{j=1}^n a_j \quad (55)$$

Como em  $(RL1)$ , as restrições (19) e (22) são relaxadas e então o problema é separado em dois subproblemas  $(RL2_{xy})$  e  $(RL2_z)$ , conforme segue:

( $RL2_z$ ) :

$$\min \sum_{k=1}^{mn} (g_k - \sum_{i=1}^m \omega_{ik}) z_k \quad (56)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^{mn} z_k \geq 1, \quad (57)$$

$$z_k \in \{0, 1\}, \forall i \in I, k \in K, \quad (58)$$

( $RL2_{xy}$ ) :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{mn} \sum_{j=1}^n (c_{ijk} - \lambda_j) x_{ijk} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{mn} (f_{ik} + \omega_{ik}) y_{ik} \quad (59)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i \in I, k \in K, \quad (60)$$

$$\sum_{k=1}^{mn} y_{ik} \leq 1, \quad \forall i \in I, \quad (61)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{mn} b_i y_{ik} \geq \sum_{j=1}^n a_j \quad (62)$$

$$x_{ijk} \leq y_{ik}, \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K, \quad (63)$$

$$x_{ijk}, y_{ik} \in \{0, 1\}. \quad (64)$$

$$\text{Seja } g1_k = g_k - \sum_{i=1}^m \omega_{ik}.$$

O problema ( $RL2_z$ ) pode ser resolvido por inspeção:

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{se } g1_k \leq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No caso onde todo  $g1_k > 0$ , faça  $z_{k'} = 1$ , onde  $g1_{k'} = \min_k \{g1_k\}$  e  $z_k = 0$ ,  $k \neq k'$ .

O problema ( $RL2_{xy}$ ) pode ser resolvido seguindo uma idéia similar ao ( $RL1_{xy}$ ), podendo ser reformulado como:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{nn} v2_{ik} y_{ik} \quad (65)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^{nn} y_{ik} \leq 1, \quad \forall i \in I, \quad (66)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{nn} b_i y_{ik} \geq \sum_{j=1}^n a_j \quad (67)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\}, \quad (68)$$

Onde  $v2_{ik}$  é o valor ótimo da função objetivo do seguinte problema de programação linear inteira zero-um, que é também um problema da mochila:

$$v2_{ik} = \min \sum_{j=1}^n (c_{ijk} - \lambda_j) x_{ijk} + (f_{ik} + \omega_{ik}) \quad (69)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n a_j x_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i \in I, k \in K, \quad (70)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}. \quad (71)$$

O problema  $(RL2_{xy})$  é agora um problema que envolve todas as instalações. Entretanto, notando que cada instalação aberta será suprida por exatamente um depósito, o problema pode ser reescrito na forma do seguinte problema de programação linear inteira zero-um (novamente um problema da mochila), onde  $v2_i = \min_k \{v2_{ik}\}$ :

$$\min \sum_{i=1}^m v2_i u_i \quad (72)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m b_i u_i \geq \sum_{j=1}^n a_j, \quad (73)$$

$$u_i \in \{0, 1\}. \quad (74)$$

O limite inferior para o problema  $(P)$  é então dado por  $v(RL2_{xy}) + v(RL2_z)$ .

O limite superior pode ser encontrado da solução do problema  $(RL2_z)$ , da

seguinte maneira:

Seja  $z_k^*$  a solução do problema  $(RL2_z)$  e  $\tilde{K} = \{k / z_k^* = 1\}$ . Resolver o problema  $(RL2_{xy})$  novamente, considerando os depósitos abertos ( $\tilde{K}$ ). Esta solução é então usada para encontrar uma solução factível. Considere  $u^*$  a solução para este problema e  $\tilde{I} = \{i / u_i^* = 1\}$ . Então,

$$y_{ik}^* = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in \tilde{I} \text{ e } k \in \tilde{K}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A correspondente solução  $x^*$  é obtida das soluções dos problemas  $v2_{ik}$ , se  $i \in \tilde{I}$ ,  $k \in \tilde{K}$ ,  $y_{ik}^* = 1$ . Caso contrário,  $x_{ijk}^* = 0$ .

Usando estas soluções, nenhuma restrição de capacidade é violada, mas pode ocorrer que alguns clientes  $j$  sejam designados a múltiplas instalações abertas, ou não sejam designados a nenhuma instalação. Um problema de designação generalizada é construído com estes clientes, as instalações abertas e as capacidades remanescentes das instalações abertas. Estes clientes são re-designados, resolvendo um problema do mesmo modo que em  $(RL1)$ .

### Resultados computacionais obtidos pelos autores

Cinco conjuntos de problemas testes foram construídos, com vinte problemas em cada conjunto.

Para os conjuntos 1 e 2, as coordenadas para as localizações, bem como as demandas para os clientes e as capacidades para as instalações, foram geradas aleatoriamente em intervalos pré-definidos, seguindo uma distribuição uniforme de probabilidades. Cada problema para os conjuntos 1 e 2 tem 20 clientes, 4 possíveis localizações para depósitos e 10 possíveis localizações para instalações.

Para os conjuntos de 3 a 5, as coordenadas para as localizações, bem como as demandas para os clientes foram retiradas de bancos de provas de trabalhos de SOLOMON (1987), citado pelos autores. As capacidades para as instalações, foram geradas aleatoriamente em intervalos pré-definidos, seguindo uma distribuição

uniforme de probabilidades. Cada problema para os conjuntos de 3 a 5 tem 100 clientes, 5 possíveis localizações para depósitos e 10 possíveis localizações para instalações.

A heurística de TEITZ e BART (1968), para o problema das  $p$ -medianas, foi usada para especificar as localizações em potencial para os depósitos e instalações. Os algoritmos propostos foram programados na linguagem FORTRAN 77 e testados em uma máquina DEC2000 300AXP Workstation.

No método de otimização por subgradiente, foram utilizados os parâmetros  $\varepsilon = 0,001$  e  $t_{\max} = 800$ , para critérios de convergência. Foram testados diferentes valores iniciais para os parâmetros  $d_t$  e  $N$ . Para as relaxações Lagrangeanas 1 e 2, foram utilizados  $d_0 = 1$  e  $N = 15$ .

Para a relaxação Lagrangeana 1, os tempos computacionais médios variaram de 3,9 até 18,9 segundos, enquanto que o  $GAP$  médio variou de 5,57 até 14,23. Para a relaxação Lagrangeana 2 os tempos computacionais médios variaram de 3,8 até 18,4 segundos, e o  $GAP$  médio variou de 5,28 até 17,69.

### Conclusões dos autores

Das seis relaxações Lagrangeanas originalmente propostas, as duas apresentadas neste trabalho se mostraram mais promissoras, em termos de performance, com respeito ao  $GAP$  médio e ao tempo computacional médio.

Os limites inferiores obtidos das relaxações Lagrangeanas 1 e 2 são significativamente mais altos que aqueles obtidos com relaxações Lagrangeanas tradicionais. O tempo computacional necessário para obter os limites inferiores e superiores para estas relaxações, são aproximadamente a metade do tempo que seria necessário para resolver o problema através de relaxações Lagrangeanas tradicionais.

### 2.2.2 Algoritmos *Branch-and-Bound*

De acordo com ZIONTS (1974), um primeiro artigo usando um método *branch-and-bound*, foi publicado em 1960, no trabalho de LAND e DOIG (1960).

Os algoritmos *branch-and-bound*, para resolver problemas de programação inteira ou inteira-mista, caracterizam-se por possuir três tipos de estratégias: uma estratégia para encontrar um bom limite inferior para a função objetivo (se o problema for de minimização), uma estratégia de ramificação e uma estratégia de busca.

O propósito de realizar uma estratégia de limite inferior para o problema de programação inteira, é computar um limitante inferior  $LI \leq Z(x)$ , para todas as soluções factíveis do problema, onde  $Z(x)$  é a função objetivo a ser minimizada. Isto é realizado resolvendo um problema relaxado (*PR*) associado ao problema original (este relaxamento é realizado sobre as restrições de integralidade). Se o problema relaxado (*PR*) tem solução ótima, então o valor ótimo do problema relaxado (*PR*), é um limite inferior para o valor ótimo do problema original.

A estratégia de ramificação, particiona o conjunto de soluções factíveis do problema em dois subconjuntos. Cada subconjunto na partição, é um conjunto de soluções factíveis de um problema obtido impondo restrições adicionais simples ao problema que está sendo ramificado, denominadas de restrições de ramificação.

#### O algoritmo branch-and-bound

Um algoritmo *branch-and-bound* geral, pode ser dado pelos seguintes passos:

#### Inicialização

Aplique uma estratégia de limite inferior para o problema de programação inteira original. Se a solução ótima para o problema relaxado (*PR*) satisfaz as restrições de integralidade, então ela é também solução ótima para o problema de programação inteira original, e o algoritmo termina. Se o problema relaxado (*PR*) é infactível, então PARE, pois o problema original também é infactível. Se nenhum

destes casos ocorre, coloque este problema em uma lista  $L$  e vá ao passo geral;

### Passo Geral

Se a lista  $L$  não estiver vazia, utilize uma estratégia de busca para retirar da mesma um problema candidato. Aplique sobre este problema selecionado uma estratégia de ramificação. Aplique uma estratégia de limite inferior em cada um dos subproblemas candidatos gerados pela ramificação.

Se algum destes subproblemas candidatos tem solução ótima inteira, então atualize o valor do limite superior (a melhor solução ótima inteira conhecida, constituirá um limite superior para o valor ótimo da função objetivo).

Elimine os problemas candidatos que são infactíveis ou que possuem valor para a função objetivo (limite inferior) maior que a melhor solução inteira conhecida (limite superior).

Se nenhum destes casos ocorre, adicione o subproblema na lista  $L$ , e repita o passo geral.

Se a lista  $L$  estiver vazia, a melhor solução inteira encontrada é a solução para o problema original. No caso de nenhuma solução inteira ter sido encontrada, o problema de programação linear inteira original não possui solução.

Um algoritmo *branch-and-bound* mais específico, pode ser visto em ZIONTS (1974) e possui os seguintes passos:

**Passo 1.** Resolva o problema de programação linear obtido com o relaxamento das restrições de integralidade do problema de programação linear inteira original. Se o problema relaxado ( $PR$ ) é infactível, então PARE, pois o problema original também é infactível.

**Passo 2.** Se a solução deste problema satisfaz as restrições de integralidade, então PARE, pois esta é também a solução ótima do problema original.

**Passo 3.** Escolha uma variável inteira  $x_k$  cujo valor solução é o valor não inteiro  $y_k$ .

**Passo 4.** Resolva dois problemas de programação linear, cada um obtido do

problema anterior, adicionando uma das seguintes restrições:  $x_k \leq [y_k]$  e  $x_k \geq [y_k] + 1$ . Onde  $[y_k]$  indica o maior número inteiro menor que  $y_k$ . Exclua quaisquer soluções inviáveis.

**Passo 5.** Inclua na lista  $L$ , os problemas cujas soluções são melhores que a melhor solução inteira conhecida.

**Passo 6.** Retire da lista  $L$  o problema com o melhor valor para a função objetivo e volte ao passo 2. Se a lista estiver vazia, então PARE, não existe nenhuma solução inteira viável para o problema original.

Na seqüência, são apresentados os trabalhos desenvolvidos por HINDI e BASTA (1994), GAO e ROBINSON (1992), TCHA e LEE (1984) e RO e TCHA (1984), que utilizaram procedimentos do tipo *branch-and-bound*.

#### 2.2.2.1 A modelagem de HINDI e BASTA (1994)

HINDI e BASTA (1994) desenvolveram um trabalho para resolver problemas de distribuição-localização com dois estágios e múltiplos produtos. Neste trabalho, clientes são servidos com diferentes produtos, de um certo número de fábricas, através de um certo número de armazéns intermediários. Cada possível localização para armazéns, tem um custo fixo para abertura, um custo operacional e uma capacidade máxima. A demanda de cada cliente para cada produto é conhecida, bem como os custos de frete das fábricas para os armazéns e destes para os clientes. É requerido determinar as localizações onde serão abertos os armazéns e um *schedule* de transporte de tal forma que os custos totais sejam minimizados.

O problema é modelado como um problema de programação inteira-mista e resolvido por um procedimento *branch-and-bound*.

#### O modelo matemático

Os clientes são indexados por  $l \in L$  e são servidos por fábricas  $j \in J$ , através de armazéns indexados por  $k \in K$ . A demanda de cada cliente para cada

produto é conhecida. Cada fábrica tem uma capacidade limitada de produção para cada produto, e o limite de capacidade para os armazéns, em cada possível localização também é conhecida.

Sendo:

$c_{ijk}$  = o custo unitário de frete para o produto  $i$ , da fábrica  $j$  para o armazém  $k$ ,

$d_{ikl}$  = o custo unitário de frete para o produto  $i$ , do armazém  $k$  para o cliente  $l$ ,

$D_{il}$  = a demanda do produto  $i$  do cliente  $l$ ,

$f_k$  = os custos fixos de abertura de um armazém na localização  $k$ ,

$g_k$  = os custos operacionais, por unidade de produto, do armazém situado em  $k$ ,

$Q_k$  = a capacidade do armazém situado em  $k$ ,

$S_{ij}$  = a capacidade da fábrica  $j$  para o produto  $i$ ,

e as variáveis de decisão:

$x_{ijk}$  = a quantidade do produto  $i$ , transportado da fábrica  $j$  para o armazém  $k$ ,

$y_{ikl}$  = a quantidade do produto  $i$ , transportado do armazém  $k$  para o cliente  $l$ ,

$z_k = \begin{cases} 1, & \text{se um armazém é aberto em } k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

o modelo fica estabelecido como:

$$\min \sum_{ijk} c_{ijk} x_{ijk} + \sum_{ikl} d_{ikl} y_{ikl} + \sum_{ijk} g_k x_{ijk} + \sum_k f_k z_k \quad (75)$$

s.a.

$$\sum_{ij} x_{ijk} \leq z_k Q_k, \quad \forall k, \quad (76)$$

$$\sum_k x_{ijk} \leq S_{ij}, \quad \forall i, j, \quad (77)$$

$$\sum_j x_{ijk} = \sum_l y_{ikl}, \quad \forall i, k, \quad (78)$$

$$\sum_k y_{ikl} = D_{il}, \quad \forall i, l, \quad (79)$$

$$x_{ijk}, y_{ikl} \geq 0, \quad \forall i, j, k, l, \quad (80)$$

$$z_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k. \quad (81)$$

A função objetivo (75) encerra os custos totais que devem ser minimizados. As restrições (76) são restrições de capacidade dos armazéns; as restrições (77) são restrições de capacidade das fábricas. As restrições (78) são de conservação de fluxo e as restrições (79) são as restrições das demandas para os clientes. As restrições (80) e (81) são restrições de não negatividade e variáveis binárias, respectivamente.

Como foi proposto um procedimento por *branch-and-bound*, as ramificações correspondem a abertura e fechamento de armazéns. Neste caso é vantajoso definir a variável  $\alpha_{ik}$  que representa o montante do produto  $i$  que passa através do armazém  $k$  e refazer a modelagem matemática como segue:

(P) :

$$\min A = \sum_{ijk} c_{ijk} x_{ijk} + \sum_{ikl} d_{ikl} y_{ikl} + \sum_{ik} g_k \alpha_{ik} + \sum_k f_k z_k \quad (82)$$

s.a.

$$\sum_i \alpha_{ik} \leq z_k Q_k, \quad \forall k, \quad (83)$$

$$\sum_k x_{ijk} \leq S_{ij}, \quad \forall i, j, \quad (84)$$

$$\sum_j x_{ijk} = \alpha_{ik}, \quad \forall i, k, \quad (85)$$

$$\sum_l y_{ikl} = \alpha_{ik}, \quad \forall i, k, \quad (86)$$

$$\sum_k y_{ikl} = D_{il}, \quad \forall i, l, \quad (87)$$

$$x_{ijk}, y_{ikl}, \alpha_{ik} \geq 0, \quad \forall i, j, k, l, \quad (88)$$

$$z_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k. \quad (89)$$

### Esquema de solução

É proposto resolver o problema ( $P$ ) por *branch-and-bound*, com ramificação nas variáveis  $z_k$ . Na seqüência, são apresentados os procedimentos para cálculo dos limites inferiores, geração de boas soluções factíveis (limites superiores), e as regras de ramificação e sondagem.

### Cálculo dos limites inferiores

$Z_0$  = é o conjunto dos armazéns fechados, isto é :  $Z_0 = \{k / z_k = 0\}$ ;

$Z_1$  = é o conjunto dos armazéns abertos, isto é :  $Z_1 = \{k / z_k = 1\}$ ;

$Z_f$  = é o conjunto dos armazéns não comprometidos (livres), isto é:

$$Z_f = \{k / 0 < z_k < 1\};$$

Então, o custo associado a cada localização não comprometida, não pode ser maior que  $(g_k + f_k / Q_k)\alpha_{ik}$ . Assim, com  $M$  suficientemente grande, considera-se a variável  $h_k$ , tal que:

$$h_k = \begin{cases} M, & \text{se } k \in Z_0, \\ g_k, & \text{se } k \in Z_1, \\ g_k + \frac{f_k}{Q_k}, & \text{se } k \in Z_f. \end{cases}$$

A solução do seguinte problema fornecerá um limite inferior para  $A$ , dados os conjuntos  $Z_0$  e  $Z_1$ .

( $PR$ ) :

$$\min \sum_{ijk} c_{ijk} x_{ijk} + \sum_{ikl} d_{ikl} y_{ikl} + \sum_{ik} h_k \alpha_{ik} + \sum_{k \in Z_1} f_k \quad (90)$$

s.a.

$$\sum_i \alpha_{ik} \leq Q_k, \quad \forall k, \quad (91)$$

e (84), (85), (86), (87) e (88)

O problema ( $PR$ ) é um problema de fluxos de multi-produtos em uma rede

com restrição de capacidade (91) e pode ser resolvido eficientemente pelo processo de decomposição de Dantzig-Wolfe, resultando em subproblemas que são problemas de transbordo, um para cada produto.

### Gerando limites superiores

Para cada nó da árvore *branch-and-bound* a solução do problema (*PR*), se factível, satisfaz as restrições de (84) a (88), inclusive. Pode-se também considerar que satisfaz as restrições de (83) a (89) e assim será uma solução factível para o problema global, simplesmente considerando:

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_i \alpha_{ik}^* > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad \text{onde } \alpha_{ik}^* \text{ é o valor ótimo de } \alpha_{ik}.$$

$$UB = LB + \sum_{k \in K_0} \left(1 - \frac{\sum_i \alpha_{ik}^*}{Q_k}\right) f_k \quad \text{onde:}$$

$UB$  = limite superior,

$LB$  = limite inferior, isto é, o valor ótimo para a função objetivo do problema (*PR*),

$K_0$  = o conjunto de armazéns não comprometidos (livres), para os quais:

$$\sum_i \alpha_{ik}^* > 0.$$

### Regra de ramificação

Como é conhecido, a eficiência computacional de um procedimento de pesquisa através de uma árvore *branch-and-bound*, é intensificada, adotando racionalmente uma regra de ramificação, isto é, a regra que escolherá quais as variáveis se tornarão inteiras em cada nó da árvore de pesquisa. No referido trabalho, diversas estratégias foram testadas, sendo que em média, os melhores resultados foram obtidos com a seguinte regra: para cada armazém não comprometido em aberto ou

fechado, calcular a razão de uso das capacidades:  $(\sum_i \frac{\alpha_{ik}}{Q_k})$ .

O armazém com a menor razão poderá ser fechado. Se nenhum candidato para fechamento existir, então o nó corrente será dito sondado.

### Sondagem

Um nó é considerado sondado, nos seguintes casos: se o limite inferior for correspondente a um problema infactível; se o limite inferior for maior ou igual ao limite superior ou se nenhum armazém puder ser fechado.

### Resultados computacionais obtidos pelos autores

Foram considerados 48 problemas divididos em seis classes. Os membros de cada classe possuem o mesmo número de produtos, fábricas, possíveis localizações para armazéns e clientes, bem como os mesmos custos de transportes, capacidades das fábricas e demandas dos clientes, mas diferem nos custos operacionais e fixos dos armazéns e nas suas capacidades. Foram considerados nestes problemas uma quantidade de 3 ou 10 produtos, 10 ou 20 fábricas, 10 ou 15 possíveis localizações para os armazéns e um número de 20, 30 ou 40 clientes.

Os custos de frete para todas as rotas e as demandas  $D_{it}$  foram gerados aleatoriamente em intervalos pré-definidos. Os custos operacionais foram gerados aleatoriamente em intervalos criados em função dos custos médios dos fretes, enquanto que as capacidades individuais dos armazéns foram geradas em um intervalo que é função da capacidade total dos armazéns. Em todos os casos foi usada uma distribuição uniforme de probabilidade. Os custos fixos foram gerados em função das capacidades dos armazéns e dos custos médios dos fretes.

Os programas foram escritos na linguagem Pascal e o processamento efetuado em uma máquina AMDAHL 5890.

### Conclusões dos autores

Um esquema de solução *branch-and-bound* computacionalmente eficiente para um problema de localização/distribuição em dois estágios foi apresentado. Os limites inferiores foram calculados relaxando as restrições de integralidade das variáveis inteiras binárias e modificando a estrutura de custos, resultando em um problema de fluxos em redes, com mínimo custo e multi-produtos com restrições de capacidades. Este problema foi resolvido através do processo de decomposição Dantzig-Wolfe. Os subproblemas oriundos da decomposição são problemas de transbordo.

Os resultados mostraram que o modelo é eficiente computacionalmente e é capaz de resolver grandes problemas em tempos razoáveis. O aumento do número de possíveis localizações para os armazéns, aumenta drasticamente o tempo computacional. Isto é esperado, desde que o número de variáveis binárias no modelo é igual ao número destas localizações. Aumentando o número de produtos, aumenta o número de problemas de transbordo e leva a um aumento relativamente moderado do tempo computacional. Aumentando o número de fábricas ou o número de clientes, aumenta o tamanho dos problemas de transbordo e leva também a um aumento relativamente suave do tempo computacional.

#### 2.2.2.2 A modelagem de GAO e ROBINSON (1992)

GAO e ROBINSON (1992) desenvolveram um procedimento de solução, para resolver problemas de localização de instalações não capacitadas, com dois níveis de hierarquias.

Neste método, procedimentos baseados na formulação dual do problema (chamados de *dual ascent* e *dual adjustment*), são utilizados para fornecer uma “boa” solução para o dual do problema de programação linear obtido do relaxamento do problema original. O valor da função objetivo da solução deste problema dual, fornece um limite inferior para o valor da função objetivo do problema original. Em seguida, uma solução factível para o problema original é construída da solução dual, aplicando

as condições das folgas complementares e uma heurística “*DROP*”. O valor desta solução factível, é um limite superior para o valor da função objetivo do problema proposto.

Estes limites, inferior e superior, podem ser utilizados como uma heurística, ou incorporados em um procedimento *branch-and-bound*.

### O modelo matemático

Na formulação matemática para o problema proposto,  $m$  é o número de centros de distribuição candidatos;  $n$  é o número de armazéns candidatos e  $q$  é o número de zonas de clientes.

Sendo:

$$i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } k \in \{1, 2, \dots, q\},$$

$F_i$  = custo fixo para abertura de um centro de distribuição em  $i$ ,

$G_{ij}$  = custo fixo para abertura de um armazém em  $j$ , suprido pelo centro de distribuição em  $i$ ,

$t_{ijk}$  = custo de processamento, por unidade, do centro de distribuição em  $i$  e armazém em  $j$ , e custos de transporte do centro de distribuição em  $i$ , através do armazém em  $j$ , até a zona  $k$ ,

$d_k$  = demanda total da zona  $k$ ,

$C_{ijk}$  = custo para servir a demanda da zona  $k$ , através de um centro de distribuição em  $i$  e armazém em  $j$ , onde  $C_{ijk} = t_{ijk}d_k$ ,

e as variáveis de decisão:

$Z_i$  = variável binária de decisão, para abertura de um centro de distribuição em  $i$ ,

$Y_{ij}$  = variável binária de decisão, para abertura de um armazém em  $j$ , suprido por um centro de distribuição em  $i$ ,

$X_{ijk}$  = variável contínua da fração da demanda da zona  $k$ , que é servida através de um centro de distribuição em  $i$  e de um armazém em  $j$ ,

o modelo fica estabelecido como:

$$\min Z = \sum_{i=1}^m F_i Z_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n G_{ij} Y_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q C_{ijk} X_{ijk} \quad (92)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ijk} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (93)$$

$$-Z_i + Y_{ij} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (94)$$

$$-Y_{ij} + X_{ijk} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (95)$$

$$Z_i \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (96)$$

$$Y_{ij} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (97)$$

$$X_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, q. \quad (98)$$

A função objetivo (92) encerra os custos totais que devem ser minimizados. O conjunto de restrições (93) garante que toda a demanda é atendida. As restrições (94) garantem que um centro de distribuição somente atende um armazém se este centro de distribuição estiver aberto. As restrições (95) garantem que se um centro de distribuição e um armazém atendem algum cliente, então eles devem estar abertos. As restrições (96) e (97) indicam a não negatividade e as variáveis inteiras. As restrições (98) indicam a não negatividade das variáveis  $X_{ijk}$ .

### Resultados computacionais obtidos pelos autores

Ao todo foram gerados 35 conjuntos de problemas testes, com 12 problemas cada um, perfazendo um total de 420 testes. Os custos fixos para os centros de distribuição variaram de \$30.000 à \$50.000 e os custos fixos para os armazéns variaram de \$10.000 até o custo fixo do centro de distribuição.

Os algoritmos foram programados em FORTRAN V, e o processamento foi efetuado em um computador CDC Cyber 170/855 da Universidade de Indiana. Os problemas testes tiveram os valores de  $m$  variando de 3 a 25,  $n$  variando de 10 a 25 e  $q$  variando de 25 a 50.

Problemas com  $m = n = 25$  e  $q = 35$ , os quais resultam em 650 variáveis inteiras e 21.875 variáveis contínuas foram resolvidos em 2,4 segundos.

Em mais de 74% dos 420 problemas testes, não foi necessário o uso do procedimento *branch-and-bound*.

Problemas ainda maiores, com  $m = n = 25$  e  $q = 50$ , que possuem 650 variáveis inteiras e 31.250 variáveis contínuas não foram resolvidos por exceder a memória central do computador que estava disponível para os experimentos.

### Conclusões dos autores

A eficiência computacional do algoritmo foi considerada impressionante pelos autores do trabalho, sendo que foram considerados problemas significativamente maiores que os problemas reportados na literatura da época.

#### 2.2.2.3 A modelagem de TCHA e LEE (1984)

TCHA e LEE (1984) discutiram o problema de localização de instalações com múltiplos níveis, onde produtos são transportados de suas origens para seus destinos, através de um número de níveis intermediários de instalações. O objetivo é determinar o conjunto ótimo de instalações para serem abertas em cada nível, minimizando os custos totais de distribuição, incluindo os custos fixos associados com a abertura destas instalações.

Os autores citam que problemas de localização de instalações, tem atraído a atenção de um grande número de pesquisadores, mas que problemas de localização física, com diferentes níveis de fábricas e/ou armazéns, haviam sido pouco estudados até então. A maioria dos trabalhos se concentrava em problemas de simples localização de armazéns intermediários. Citam também KAUFMAN, EEDE e HANSEN (1977) que teriam dado especial atenção a um caso mais geral de localização simultânea de fábricas e armazéns em um sistema de dois níveis.

Foi considerada uma versão destes problemas, em que caminhos que passam por todas as instalações devem ser localizados. Entregas que não passam por todos os

níveis intermediários, mas saltam alguns destes níveis, podem facilmente ser incorporadas ao modelo, com o estabelecimento de instalações fictícias. Todas as instalações foram assumidas como de capacidade ilimitada, como em KAUFMAN, EEDE e HANSEN (1977).

O problema foi formulado como um problema de programação linear inteiramista, e resolvido por um método de solução *branch-and-bound*, que incorporou uma heurística desenvolvida por ERLINKOTTER (1978) e BILDE e KRARUP (1977). Esta heurística utiliza o dual do problema para gerar os limites inferiores. Foi também aplicada uma heurística que utiliza a formulação primal do problema, para promover melhorias nas soluções já obtidas, gerando limites superiores. Alguns procedimentos para simplificação dos nós da árvore de busca *branch-and-bound* também foram adotados.

Embora o procedimento possa ser aplicado em casos de múltiplos níveis, os experimentos computacionais foram efetuados para dois níveis e puderam ser comparados com outros procedimentos. Experiências computacionais de alguns problemas de pequena escala, com três níveis de instalações também são reportados.

### O modelo matemático

Sejam:

$J$  = o conjunto dos pontos de demanda,

$K$  = o número de níveis de distribuição,

$I_k (k = 1, \dots, K)$  = o conjunto de todas as possíveis localizações para as instalações  $i_k$ 's, para o nível  $k$ ,

$P$  = o conjunto de todos os caminhos  $p$ 's que percorrem as instalações (isto é:

$$P = \{(i_1, \dots, i_K) / i_k \in I_k, k = 1, \dots, K\},$$

$P(i_k)$  = o conjunto de todos os possíveis caminhos que atravessam a localização  $i_k$  no  $k$ -ésimo nível. Note que  $P(i_k)$  é um subconjunto de  $P$ ,

$c(p, j)$  = o custo total variável (produção e distribuição) para suprir toda a demanda de  $j$ 's ( $\in J$ ) através do caminho de instalações  $p$ ,

$f(i_k)$  = o custo fixo de estabelecimento da instalação  $i_k$ ,

e as variáveis de decisão:

$x(p, j)$  = a fração da demanda de  $j$ 's ( $\in J$ ) suprida através do caminho  $p$ ,

$y(i_k) = \begin{cases} 1, & \text{se é aberta a instalação } i_k, \text{ no nível } k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

o modelo fica estabelecido como:

$$\min Z = \sum_{j \in J} \sum_{p \in P} c(p, j)x(p, j) + \sum_{k=1}^K \sum_{i_k \in I_k} f(i_k)y(i_k) \quad (99)$$

s.a.

$$\sum_{p \in P} x(p, j) = 1, \quad j \in J, \quad (100)$$

$$x(p, j) \leq y(i_k), \quad p \in P(i_k), \quad j \in J \quad \text{e} \quad i_k \in I_k \quad (k = 1, \dots, K), \quad (101)$$

$$y(i_k) \in \{0, 1\}, \quad i_k \in I_k \quad (k = 1, \dots, K), \quad (102)$$

$$x(p, j) \geq 0, \quad p \in P, \quad j \in J, \quad (103)$$

A função objetivo (99) traz os custos totais que devem ser minimizados. As restrições (100) garantem que todas as demandas são atendidas. As restrições (101) indicam que se uma fração da demanda é transportada por um caminho  $p$  que passa por uma instalação  $i_k$ , no nível  $k$ , tal instalação é aberta. As restrições (102) e (103) especificam as variáveis que são binárias e não negativas, respectivamente.

### Resultados computacionais obtidos pelos autores

O procedimento de solução *branch-and-bound* foi programado na linguagem FORTRAN IV e o processamento efetuado em um computador CDC CYBER 174-16. Embora o método possa ser aplicado para problemas que envolvam muitos níveis, somente foram efetuados testes em problemas de dois e três níveis. Ao todo foram efetuados 20 testes, sendo que 14 com problemas de dois níveis e 6 com problemas de três níveis. As dimensões para os problemas de dois níveis  $|I_1| \times |I_2| \times |J|$  variaram entre  $4 \times 6 \times 20$  e  $5 \times 25 \times 50$  e para os problemas de três níveis  $|I_1| \times |I_2| \times |I_3| \times |J|$  variaram entre  $3 \times 5 \times 7 \times 50$  e  $4 \times 6 \times 8 \times 50$ .

Os tempos computacionais para os problemas de dois níveis variaram entre 0,37 e 41,83 segundos, enquanto que para os problemas de três níveis esta variação foi entre 5,24 e 15,85 segundos.

### Conclusões dos autores

Os resultados computacionais obtidos foram comparados, para o caso de dois níveis, com os resultados apresentados por KAUFMAN, EEDE e HANSEN (1977), cujos tempos computacionais variaram entre 1,58 e 180,00 segundos. Tal comparação mostrou claramente a superioridade deste processo em relação ao trabalho desenvolvido por KAUFMAN, EEDE e HANSEN (1977).

#### 2.2.2.4 A modelagem de RO e TCHA (1984)

RO e TCHA (1984) trataram de um problema de localização com mínimo custo total, de fábricas e armazéns, em um sistema de dois níveis de distribuição, onde os produtos são entregues das fábricas aos clientes, diretamente ou indiretamente através de armazéns. Algumas restrições adicionais são impostas ao problema, as quais representam uma relação de interdependência entre alguns armazéns e fábricas.

Foi proposto um procedimento *branch-and-bound*, empregando um conjunto de artifícios para gerar os limites inferiores, e simplificações que são obtidas explorando a função objetivo e a estrutura especial das restrições adicionais.

Os autores trabalharam com a localização simultânea de fábricas e armazéns, nos dois níveis do sistema. O modelo é formulado de modo que um conjunto de instalações está sujeito a restrições adicionais, que representam a interdependência entre uma fábrica e seus armazéns associados, de modo que se uma fábrica é aberta, também é requerido que seus armazéns associados sejam abertos, mas não vice-versa. Segundo RO e TCHA (1984), isto freqüentemente aparece em sistemas de distribuição de dois níveis, onde alguns armazéns são usados principalmente como centros de distribuição primários para certas fábricas. Estes armazéns foram chamados de “armazéns adjuntos”, enquanto que os outros foram chamados de “armazéns

separados”.

Para intensificar a flexibilidade do modelo, não é requerido que os produtos oriundos de uma fábrica, passem através de seus armazéns associados. Estes produtos podem ser fretados diretamente das fábricas para seus destinos, introduzindo armazéns adjuntos fictícios para estas fábricas. Para todas as instalações (fábricas e armazéns), é assumido que as capacidades são ilimitadas e suas possíveis localizações são conhecidas.

Os autores citam que KAUFMAN, EEDE e HANSEN (1977) também consideram relações entre fábricas e seus armazéns adjuntos, porém, impõem que os conjuntos de armazéns adjuntos de cada fábrica são unitários, isto é, formados por um único armazém. Além disso, naquele trabalho foi exigido que os produtos originados em uma fábrica passassem, necessariamente, por seu armazém adjunto.

### O modelo matemático

Sejam:

$I, J$  = os conjuntos das possíveis localizações para as fábricas e armazéns, respectivamente,

$K$  = o conjunto dos clientes,

$J_i^a$  = o conjunto dos armazéns adjuntos da fábrica  $i$ ,

$J^s$  = o conjunto dos armazéns separados,

$(J^a \cup J^s = J, \text{ onde } J^a = \cup_{i \in I} J_i^a)$ ,

$f_i$  = os custos fixos de abertura da fábrica  $i$ ,

$g_j$  = os custos fixos de abertura do armazém  $j$ ,

$c_{ijk}$  = os custos variáveis, para satisfazer a totalidade da demanda do cliente

$k$ , de uma fábrica em  $i$ , através de um armazém em  $j$ ,

e as variáveis de decisão:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se a fábrica na localização } i \text{ é aberta,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{se o armazém na localização } j \text{ é aberto,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$x_{ijk}$  = a fração da demanda do cliente  $k$ , satisfeita pela fábrica  $i$ , através do armazém  $j$ ,

o modelo fica estabelecido como:

$$\min Z = \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} g_j z_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk} \quad (104)$$

s.a.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} = 1, \quad k \in K, \quad (105)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ijk} \leq y_i, \quad i \in I, \quad k \in K, \quad (106)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ijk} \leq z_j, \quad j \in J, \quad k \in K, \quad (107)$$

$$y_i \leq z_j, \quad i \in I, \quad j \in J_i^a. \quad (108)$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \quad (109)$$

$$y_i, z_j \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (110)$$

A função objetivo (104) minimiza os custos totais, incluindo os custos fixos de abertura de instalações e custos variáveis de alocação das fábricas até os clientes via armazéns. As restrições (105) requerem que toda a demanda de cada cliente seja atendida. As restrições (106) e (107) garantem que a demanda de cada cliente é atendida somente por fábricas e armazéns abertos, respectivamente. As restrições (108) garantem que se uma fábrica é aberta, seus armazéns adjuntos também o serão. Note que para  $J_i^a = \emptyset, \forall i \in I$ , o problema se reduz a um problema de localização de instalações com dois níveis puro. As restrições (109) e (110) são restrições de não negatividade e variáveis binárias, respectivamente.

### Resultados computacionais obtidos pelos autores

O algoritmo *branch-and-bound* foi implementado na linguagem FORTRAN IV, e o processamento foi efetuado em uma máquina CYBER 174-016. Foram testados 15 problemas, com custos fixos de frete (por milha), das fábricas para os armazéns e destes para os clientes. As distâncias entre as possíveis instalações foram geradas aleatoriamente em um intervalo definido, bem como os custos fixos para abertura de fábricas e armazéns e as demandas dos clientes. As dimensões dos problemas testes  $|I| \times |J| \times |K|$ , variaram entre  $5 \times 5 \times 50$  e  $10 \times 20 \times 50$ . Para cada problema teste, todos os conjuntos de armazéns adjuntos foram considerados unitários.

Os tempos computacionais gastos pelo algoritmo proposto para resolver os problemas testes variaram de 0,37 a 64,33 segundos.

### Conclusões dos autores

Embora não tenha sido possível efetuar comparações, pois não estavam disponíveis outras publicações que tratassem do mesmo tipo de problema de localização, o algoritmo se mostrou eficiente, dado o pequeno tempo computacional exigido para se chegar nas soluções.

#### 2.2.3 Outras Técnicas ou Modelagens

Além das tradicionais técnicas que utilizam relaxações Lagrangeanas ou procedimentos do tipo *branch-and-bound*, diversos métodos heurísticos têm sido propostos para resolver problemas de localização de instalações que envolvem hierarquias. MOORE e REVELLE (1982) e MARIANOV e SERRA (2001) trataram os problemas como problemas de cobertura de conjuntos; JACOBSEN e MADSEN (1980) resolveram problemas de distribuição de jornais com três técnicas oriundas de combinações de outras heurísticas conhecidas; NARULA e OGBU (1979) apresentaram cinco métodos heurísticos e compararam os resultados entre si; ALMINYANA, BORRÁS e PASTOR (1998) apresentaram um método para resolver problemas com dois níveis de hierarquias, chamado de *directed branching heuristic*

(DBH); OKABE, OKUNUKI e SUZUKI (1997) utilizaram diagramas de Voronoi, e GALVÃO, ESPEJO e BOFFEY (2002) resolveram problemas com três níveis de hierarquias, com quantidades fixas de instalações por nível, utilizando, além das relaxações Lagrangeanas já mencionadas, uma heurística que consiste em localizar sucessivamente os níveis 1, 2 e 3 de instalações, seguido de aplicações de melhorias.

Na seqüência são apresentados os trabalhos desenvolvidos por MOORE e REVELLE (1982), JACOBSEN e MADSEN (1980) e NARULA e OGBU (1979).

### 2.2.3.1 A modelagem de MOORE e REVELLE (1982)

MOORE e REVELLE (1982) modelaram um problema de localização de serviços hierárquicos como um problema de cobertura de conjuntos. O trabalho foi desenvolvido para resolver problemas de planejamento de serviços de saúde com hierarquias, em Honduras.

Foi considerado um sistema com  $N$  tipos de instalações, provendo  $N$  níveis de serviços. Um dado nível de serviços, é um conjunto de funções ou serviços que estão seguramente disponíveis no correspondente tipo de instalação e nos tipos de instalações mais altos, mas não em uma instalação de nível inferior. Assim, o problema pode ser estabelecido como: localizar um número fixo de instalações, para cada nível  $N$ , de modo que minimize a população não coberta por um ou mais componentes de serviços.

#### O modelo matemático

O problema ocorre em uma rede de arcos e nós, onde  $d_{ij}$  é a distância mínima (ou tempo mínimo) do nó  $i$  ao nó  $j$ . Define-se uma instalação do tipo \*, como uma instalação que oferece um nível de serviço do tipo \*. Uma instalação será do tipo \*\*, se oferece serviços dos tipos \* e \*\*.

Sejam:

$a_i$  = a população do nó  $i$ ,

$I$  = o conjunto dos nós de demanda,

$J$  = o conjunto das possíveis localizações para as instalações,

$p^*$  = o número de instalações do tipo  $*$ ,

$p^{**}$  = o número de instalações do tipo  $**$ ,

$N_i^* = \{j / d_{ij} \leq R^*\}$  = o conjunto dos pontos  $j$ , dentro do círculo de centro  $i$  e raio  $R^*$ ,

$M_i^{**} = \{j / d_{ij} \leq S^*\}$  = o conjunto dos pontos  $j$ , dentro do círculo de centro  $i$  e raio  $S^*$ ,

$N_i^{**} = \{j / d_{ij} \leq R^{**}\}$  = o conjunto dos pontos  $j$ , dentro do círculo de centro  $i$  e raio  $R^{**}$ ,

e as variáveis de decisão:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se o nó de demanda } i \text{ está descoberto,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_j^* = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma instalação do tipo } *, \text{ no nó } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$x_j^{**} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma instalação do tipo } **, \text{ no nó } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

o modelo fica estabelecido como:

$$\min \sum_{i \in I} a_i y_i \quad (111)$$

s.a.

$$\sum_{j \in N_i^*} x_j^* + \sum_{j \in M_i^{**}} x_j^{**} + y_i \geq 1, \quad \forall i \in I, \quad (112)$$

$$\sum_{j \in N_i^{**}} x_j^{**} + y_i \geq 1, \quad \forall i \in I, \quad (113)$$

$$\sum_{j \in J} x_j^{**} = p^{**}, \quad \sum_{j \in J} x_j^* = p^*, \quad (114)$$

$$x_j^*, x_j^{**}, y_i = \{0, 1\} \quad (115)$$

A função objetivo (111) indica o total da população descoberta que se deseja

minimizar. As restrições do tipo (112) indicam que a demanda do ponto  $i$  está descoberta de um nível de serviço do tipo  $*$  ( $y_i=1$ ) se não existir nenhuma instalação do tipo  $*$ , dentro do raio  $R^*$  ou uma instalação do tipo  $**$  dentro do raio  $S^*$  ( $S^* > R^*$ ). As restrições do tipo (113) indicam que a demanda do ponto  $i$  está descoberta de um nível de serviço do tipo  $**$  ( $y_i=1$ ) se não existir nenhuma instalação do tipo  $**$ , dentro do raio  $R^{**}$ . As restrições do tipo (112) e (113), juntas, garantem que se para um nó  $i$  falta um tipo de serviço  $*$ , um tipo de serviço  $**$ , ou ambos, o nó  $i$  está descoberto, isto é,  $y_i$  é forçado a assumir o valor 1. As restrições do tipo (114) limitam os investimentos em instalações, por tipo e as restrições (115) indicam que as variáveis de decisão são binárias.

Outra maneira de limitar os investimentos em instalações, seria utilizar a seguinte restrição:

$$\sum_{j \in J} c^* x_j^* + \sum_{j \in J} c^{**} x_j^{**} \leq B, \quad (116)$$

onde  $c^*$  e  $c^{**}$ , são os custos de instalações do tipo  $*$  e  $**$ , respectivamente, e  $B$  é o limite do orçamento para estas instalações.

Os autores acrescentam, que a formulação pode ser estendida para múltiplos níveis de serviços e múltiplos tipos de instalações.

MOORE e REVELLE (1982) explicam também, que programação linear pode ser usada efetivamente para gerar as soluções globais para estes problemas de localização de serviços. Nesta formulação, as restrições zero-um são relaxadas para simples restrições de não-negatividade. Na solução ótima, nenhuma variável  $y_i$  terá valor maior do que um, desde que elas poderiam sempre ser reduzidas, sem violar nenhuma restrição, e tais reduções melhorariam o valor da função objetivo. Quando na solução ótima deste problema relaxado ocorrer alguma solução fracionária (para alguma variável  $x_j^*$ ,  $x_j^{**}$  ou  $y_i$ ), um método *branch-and-bound* pode ser utilizado para produzir as soluções inteiras.

### Resultados computacionais obtidos pelos autores

Os testes foram desenvolvidos considerando os dados de uma província de Honduras, sendo que a rede considerada consistia de 144 nós de demanda, com populações entre 12 e 4.724 indivíduos. A população total de região era de 15.805. Os serviços abrangiam raios de  $R^* = 2$  Km,  $S^* = 3$  Km e  $R^{**} = 6,25$  Km. Os possíveis locais para as instalações consistiam de 62 desses nós (aqueles nós, cuja demanda total era superior a 50 pessoas).

A rede representa a distribuição de uma população rural em um país subdesenvolvido. O número de instalações estava limitado a alguns nós, porque nem os usuários, nem os provedores dos serviços estavam dispostos a aceitar localizações de instalações em vilarejos muito pequenos.

Foi utilizado o pacote computacional *Mathematical Programming System Extended (MPSX)*, para obter as soluções ótimas para o problema de localização de serviços hierárquicos. Um programa em FORTRAN IV também foi desenvolvido para ler a matriz das distâncias e o vetor de demandas. O computador utilizado para o processamento foi um IBM 370.

### Conclusões dos autores

O problema de localização de serviços hierárquicos estudado, pode ser usado para análise de decisões referentes a estratégia organizacional, como número de instalações, montante de investimento e localização das instalações em um sistema com dois níveis de hierarquias, com tempos computacionais considerados razoáveis.

#### 2.2.3.2 A modelagem de JACOBSEN e MADSEN (1980)

JACOBSEN e MADSEN (1980) desenvolveram um trabalho para resolver um problema de localização-roteirização, com dois níveis de instalações hierárquicas, que compara três técnicas oriundas da combinação de heurísticas bem conhecidas, para problemas de localização de instalações e roteirização de veículos. O estudo comparativo foi realizado para resolver o problema de distribuição de jornais na

Dinamarca.

O sistema de impressão de jornais corrente na época, naquele país, se iniciava às 6h15min da manhã e continuava até às 8h45min da manhã, em uma produção constante de 1.000 jornais por minuto. Os 150.000 jornais eram transferidos por 26 veículos primários (pequenos caminhões), com capacidade máxima de 12.000 jornais cada um. Da gráfica, os veículos saíam em uma ordem estabelecida, em direção a pontos conhecidos por pontos de transferência, sendo que cada um dos veículos primários, servia de um a três destes pontos de transferência, que eram num total de 42 pontos distribuídos ao longo do país. Estas rotas foram chamadas de rotas primárias.

Nenhuma instalação especial era requerida para os pontos de transferência. Assim, eles poderiam ser localizados em qualquer lugar da malha viária, e até mesmo trocados de um dia para outro.

Dos pontos de transferência, veículos secundários (vans ou veículos menores) transportavam os jornais para os pontos de venda, em rotas conhecidas por rotas secundárias. No sistema que estava sendo utilizado, existiam 190 destas rotas secundárias.

Existiam 4.510 pontos de venda, e cada rota secundária servia em média 24 destes pontos. Os jornais deveriam estar disponíveis nos pontos de venda até às 11h30min da manhã, mas devido a algumas condições especiais, diversos pontos de venda necessitavam dos jornais mais cedo, enquanto que para alguns destes pontos de venda, um pequeno atraso poderia ser considerado aceitável. O custo diário do sistema de distribuição que estava em uso era de 35.000 Dkr.

O problema foi então modelado, com o objetivo de minimizar os custos totais do sistema de distribuição, sendo que foram mantidos os pontos de venda correntes. Conseqüentemente, as decisões a serem tomadas foram: a localização dos pontos de transferência; as conexões da gráfica com os pontos transferência, formando as rotas primárias; as conexões dos pontos de transferência com os pontos de venda, formando as rotas secundárias e as seqüências das rotas primárias, isto é, a ordem em que os veículos primários deixam a gráfica.

Embora tenha sido tratado como um problema de localização-roteirização

com dois níveis, o problema busca localizar apenas um nível intermediário de instalações (os pontos de transferência) entre a gráfica (fixa) e os pontos de venda (fixos).

O problema foi então, resolvido por três técnicas:

- (a) um procedimento de construção de rotas que foi chamado de *The Tree-Tour Heuristic (TTH)* e traz, implicitamente, os pontos de transferência;
- (b) um procedimento que foi chamado de *Alternate Location-Allocation (ALA-SAV)*, que localiza os pontos de transferência e em seguida efetua a roteirização, utilizando um método de *savings* de CLARK e WRIGHT (1964) ;
- (c) um procedimento chamado de *SAV-DROP* composto de três estágios. O primeiro estabelece as rotas secundárias, usando os *savings* de CLARK e WRIGHT (1964), seguido de um método “*DROP*”, desenvolvido por FELDMAN, LEHRER e RAY (1966), citados pelos autores e utilizado para a localização das instalações (pontos de transferência). Finalmente, a determinação das rotas primárias, novamente aplicando o método dos *savings*.

### Resultados computacionais e conclusões dos autores

Os programas foram efetuados na linguagem FORTRAN IV e FORTRAN G e o processamento foi efetuado em um computador IBM 370/165.

Dos três algoritmos testados, o *TTH* apresentou os piores resultados, com custos 30 % acima da solução que estava sendo utilizada. As soluções obtidas pelos métodos *ALA-SAV* e *SAV-DROP* mostraram-se promissoras e muito similares, sendo impossível distingui-los quanto a qualidade das soluções apresentadas.

A conclusão do estudo é que boas soluções para o problema proposto podem ser encontradas, combinando algumas heurísticas bem conhecidas para localização e roteirização.

### 2.2.3.3 A modelagem de NARULA e OGBU (1979)

NARULA e OGBU (1979) desenvolveram um trabalho que considera a localização-alocação de  $p_1$  centros de saúde e  $p_2$  hospitais dentre  $n$  ( $\geq p_1 + p_2$ ) centros populacionais. Trata-se portanto, de um problema com dois níveis de hierarquias. Os hospitais oferecem todos os serviços dos centros de saúde, além de serviços adicionais.

O objetivo é minimizar as distâncias totais ponderadas de viagens, sendo que foram levadas em consideração as capacidades máximas de atendimento nestes hospitais e centros de saúde.

#### O modelo matemático

Sejam:

$W_i$  = número de clientes na localização  $i$ ,

$p_1$  = número de centros de saúde,

$p_2$  = número de hospitais,

$\theta$  = fração de clientes de um centro de saúde, transferidos para um hospital  
( $0 \leq \theta \leq 1$ ),

$C^1$  = capacidade de um centro de saúde,

$C^2$  = capacidade de um hospital,

$d_{ij}$  = distância mínima de viagem entre as localizações  $i$  e  $j$ ,

e as variáveis de decisão:

$X_{ij}^{01}$  = número de clientes na localização  $i$ , sem nenhuma instalação, alocados para a localização  $j$ , em um centro de saúde,

$X_{ij}^{02}$  = número de clientes na localização  $i$ , sem nenhuma instalação, alocados para a localização  $j$ , em um hospital,

$X_{ij}^{12}$  = número de clientes na localização  $i$ , em um centro de saúde, alocados (transferidos) para a localização  $j$ , em um hospital,

$$Y_j^1 = \begin{cases} 1, & \text{se um centro de saúde é locado em } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$Y_j^2 = \begin{cases} 1, & \text{se um hospital é locado em } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

o modelo fica estabelecido como:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} (X_{ij}^{01} + X_{ij}^{02} + X_{ij}^{12}) \quad (117)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n (X_{ij}^{01} + X_{ij}^{02}) = W_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (118)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n X_{ij}^{12} = \theta \sum_{j=1}^n X_{ji}^{01}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (119)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij}^{01} \leq C^1 Y_j^1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (120)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij}^{02} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n X_{ij}^{12} \leq C^2 Y_j^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (121)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_j^1 = p_1, \quad (122)$$

$$\sum_{j=1}^n Y_j^2 = p_2, \quad (123)$$

$$Y_j^1 + Y_j^2 \leq 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (124)$$

$$0 \leq X_{ij}^{01} \leq W_i, \quad 0 \leq X_{ij}^{02} \leq W_i, \quad 0 \leq X_{ij}^{12} \leq \theta C^1, \quad (125)$$

$$Y_j^1 = 0 \text{ ou } 1, \quad Y_j^2 = 0 \text{ ou } 1. \quad (126)$$

A função objetivo (117) traz o total das distâncias percorridas pelos clientes. As restrições (118) garantem que todos os centros populacionais são alocados a alguma instalação de saúde. As restrições (119) indicam que uma fração  $\theta$  dos clientes alocados aos centros de saúde são transferidos para um hospital. As restrições (120) e (121) garantem que as alocações para centros de saúde e hospitais somente são feitas

para locais que possuem tais instalações, respeitando suas capacidades. As restrições (122) e (123) indicam que exatamente  $p_1$  centros de saúde e  $p_2$  hospitais serão selecionados. As restrições (124) impedem que na mesma localização existam simultaneamente um hospital e um centro de saúde. As restrições (125) são de não negatividade e limites máximos, enquanto que as restrições (126) indicam as variáveis binárias. Observa-se que os limites máximos nas restrições (125) são redundantes, pois os mesmos já são garantidos pelas restrições anteriores.

Assim, o problema fica estabelecido como um problema de programação linear inteira-mista, com  $2n$  variáveis inteiras zero-um,  $3n^2$  variáveis contínuas e  $5n+2$  restrições.

Para resolver o problema sem considerar as capacidades das instalações, basta fazer  $C^1$  e  $C^2$  suficientemente grandes.

### Métodos Heurísticos propostos

Apesar de ser possível solucionar o problema com pacotes computacionais para programação linear inteira-mista, isto pode não ser aconselhável, pois o problema pode ser grande, mesmo que o valor de  $n$  seja moderado. Assim, os autores propuseram cinco heurísticas para resolvê-lo de forma aproximada.

#### a) Forward $p$ -median heuristic

Primeiro é resolvido um problema de  $(p_1 + p_2)$ -medianas. Estas  $p_1 + p_2$  medianas (localizações) são usadas para localizar os centros de saúde e hospitais. A seguir, usa-se as  $p_1 + p_2$  medianas para resolver um problema de  $p_2$ -medianas. Estas  $p_2$  medianas são usadas para localizar os hospitais e as  $p_1$  medianas remanescentes (das  $p_1 + p_2$  medianas) são usadas para localizar os centros de saúde.

Segundo os autores, este procedimento foi primeiro proposto por HARVEY, HUNG e BROWN (1973), para  $\theta = 0$ .

NARULA e OGBU (1979) modificaram o procedimento para introduzir  $\theta$

da seguinte maneira:

Seja  $N$  o conjunto de centros populacionais, isto é,  $N = \{i / i=1, 2, \dots, n\}$ .

**Passo 1.** Resolver um problema de  $(p_1 + p_2)$ -medianas. O conjunto  $V_{(p_1+p_2)}$  denota as  $p_1 + p_2$  medianas;

**Passo 2.** Faça:

$$F_j = \left\{ i \in N / d_{ij} = \min_{j \in V_{(p_1+p_2)}} d_{ij} \right\} \text{ isto é, } F_j \text{ é o conjunto de centros}$$

populacionais servidos pela instalação  $j$ .

**Passo 3.** Para todo  $j$  tal que:

$$j \in V_{(p_1+p_2)}, \text{ compute: } W_j = W_j + \sum_{i \in F_j} \theta W_i, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

**Passo 4.** Resolver um problema de  $p_2$ -medianas nas  $p_1 + p_2$  medianas usando os pesos computados no passo 3. Os  $p_2$  hospitais são locados nestas  $p_2$  medianas e os  $p_1$  centros de saúde são locados nas  $p_1$  medianas remanescentes.

#### b) Backward $p$ -median heuristic

Este procedimento é o inverso do procedimento *Forward  $p$ -median heuristic*. Primeiro é resolvido um problema de  $p_2$ -medianas. Estas  $p_2$  medianas são usadas para alojar os hospitais. A seguir é resolvido um problema de  $p_1$ -medianas para os pontos que não possuem nenhuma das  $p_2$  medianas. Estes  $p_1$  medianas são usadas para os centros de saúde.

#### c) Add heuristic

Este procedimento é essencialmente uma extensão da *Add heuristic* de KUEHN e HAMBURGUER (1963), citados nesse trabalho de NARULA e OGBU (1979), para o problema das  $p$ -medianas.

O procedimento consiste em selecionar uma instalação por vez, até que todas

as instalações tenham sido selecionadas. Para um problema de localização de instalações com dois níveis de hierarquias, seleciona-se uma localização por vez para os hospitais, até que as  $p_2$  localizações tenham sido selecionadas. Então, é selecionada uma localização por vez, para cada centro de saúde, até que todos os  $p_1$  centros de saúde tenham sido localizados.

d) Drop heuristic

Esta heurística é essencialmente uma extensão da *drop heuristic* de FELDMAN, LEHRER e RAY (1966), também citados nessa obra, para o problema das  $p$ -medianas e funciona como o inverso da *add heuristic*. É também um procedimento similar à *drop heuristic*, proposta por SCOTT (1971), para um problema de instalações com hierarquias composto de fábricas, armazéns e pontos de venda.

Esta técnica se inicia assumindo que existe um centro de saúde e um hospital em cada localização. Um hospital é fechado por vez até que somente sejam deixados os  $p_2$  hospitais requeridos. Então os centros de saúde vão sendo fechados, um-a-um, até que restem somente os  $p_1$  centros de saúde exigidos.

e) Greedy interchange heuristic

Esta heurística começa com uma solução inicial composta de  $p_1$  centros de saúde e  $p_2$  hospitais localizados. Em seguida, são buscadas melhorias nesta solução. Os melhoramentos podem ser obtidos através de tentativas de trocas de instalações por outras localizações onde não existam instalações ou trocas de localizações entre centros de saúde e hospitais.

Assim,  $Z_{ij}^{st}$  ( $s = 0, 1$  e  $t = 1, 2$ ) representa o melhoramento obtido pela substituição de um tipo de instalação  $s$  em uma localização  $i$ , por um tipo de instalação  $t$  em uma localização  $j$  ( $s = 0$  significa que não existem instalações).

Este método, é essencialmente uma extensão da bem conhecida heurística proposta por TEITZ e BART (1968) para o problema das  $p$ -medianas. Entretanto, uma

diferença importante entre estes dois procedimentos é o critério usado para as trocas. Para cada  $i$ , TEITZ e BART (1968) efetuam uma troca para  $\max Z_{ij}^{st}$ . Este critério é similar ao critério utilizado pelo método simplex, para selecionar variáveis. Já o critério utilizado por NARULA e OGBU (1979), é o de efetuar a troca sempre que  $Z_{ij}^{st}$  é estritamente positivo, isto é, sempre que uma melhoria é obtida. Em virtude deste critério, o procedimento foi chamado de *greedy*.

É importante observar que estes procedimentos heurísticos proporcionam limites superiores  $Z_u$  para a solução do problema.

### Resultados computacionais obtidos pelos autores

Foram gerados 18 problemas testes com diferentes dimensões  $(n; p_1; p_2; \theta)$ , sendo que cada um deles foi resolvido pelas cinco heurísticas propostas. Os valores para  $W_i$  e as coordenadas das localizações das demandas foram gerados aleatoriamente com uma distribuição uniforme de probabilidades entre 1 e 20 e 1 e 200, respectivamente. Os problemas tinham  $n = 10$  ou  $20$ ,  $p_1 = 1, 2, 3$  ou  $6$  e  $p_2 = 2, 4$  ou  $8$ , enquanto que os valores de  $\theta$  foram de  $0,1; 0,2$  e  $0,4$ .

Para comparar as qualidades dos limites superiores  $Z_u$ , fornecidos pelos algoritmos, foram utilizados limites inferiores  $Z_l$ , obtidos resolvendo relaxações Lagrangeanas dos problemas, através de um procedimento de otimização por subgradiente. Assim, para cada heurística foi computado  $R = (1 - Z_l / Z_u)100$ , ou seja, a diferença percentual entre os limites superiores e inferiores.

Em termos de qualidade das soluções, as heurísticas foram classificadas na seguinte ordem decrescente de preferência: (1) *Greedy Interchange heuristic*, (2) *Forward p-median heuristic*, (3) *Add heuristic*, (4) *Backward p-median heuristic* e (5) *Drop heuristic*. Como esperado, observou-se que a diferença percentual  $R$  decresce a medida que  $\theta$  decresce.

Em termos do tempo computacional requerido, as heurísticas foram classificadas na seguinte ordem decrescente de preferência: (1) *Forward p-median*

*heuristic*, (2) *Backward p-median heuristic*, (3) *Add heuristic*, (4) *Greedy Interchange heuristic* e (5) *Drop heuristic*.

Os tempos computacionais, em segundos, para a técnica *Forward p-median heuristic* foram de 0,21; 0,19 e 0,21 segundos para problemas de dimensões (10; 1; 2; 0,4), (10; 1; 2; 0,2) e (10; 1; 2; 0,1), respectivamente e de 0,34; 0,53 e 0,54 segundos para problemas de dimensões (20; 6; 8; 0,4), (20; 6; 8; 0,2) e (20; 6; 8; 0,1), respectivamente. O processamento foi efetuado em um computador CYBER 173.

### Conclusões dos autores

Os autores acrescentam que embora tenham desenvolvido estas pesquisas para localizações de instalações de saúde, os resultados são aplicáveis a inúmeros outros sistemas, como sistemas educacionais, sistemas bancários e sistemas postais.

Os resultados computacionais levam os autores a recomendar as heurísticas *Greedy Interchange heuristic* e *Forward p-median heuristic*, pela qualidade das soluções apresentadas e pelo tempo computacional requerido, respectivamente.

### 2.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE A REVISÃO DE LITERATURA

Ao longo da revisão de literatura apresentada, percebe-se que as principais técnicas utilizadas, são aplicações de relaxações Lagrangeanas e/ou métodos baseados em procedimentos do tipo *branch-and-bound*. Pelas características destas técnicas, e dada a complexidade computacional dos problemas combinatoriais de grande escala, apenas pequenas instâncias dos problemas de localização de instalações com hierarquias têm sido tratadas. Geralmente, o conjunto de possíveis localizações para as instalações, em cada nível hierárquico, não tem sido superior a 25 pontos.

Também não foram encontrados trabalhos que considerassem funções de custos de transporte diferenciadas, entre os diferentes níveis hierárquicos, que possam permitir uma economia de escala, de acordo com o modal de transporte a ser escolhido, o que é uma das propostas do presente trabalho.

Desta forma, a Pesquisa Operacional continua carecendo de uma técnica

capaz de fornecer boas soluções, dentro de um tempo computacional aceitável, para estes problemas combinatoriais de grandes proporções, o que torna promissor o desenvolvimento de um trabalho que apresente tal técnica.

### 3 OS PROBLEMAS PROPOSTOS

Neste capítulo são apresentadas algumas particularidades dos problemas que o presente trabalho se propõe a resolver. Nestas particularidades estão incluídas as definições destes problemas, a forma para cálculo dos custos com transporte e as formulações matemáticas que são feitas através de modelos de programação inteira zero-um.

#### 3.1 PARTICULARIDADES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

Conforme foi citado na seção 1.1, existem situações onde as quantidades de instalações que devem ser implantadas em cada nível são fixadas pelo problema. Nestes casos busca-se encontrar as localizações para as mesmas, bem como efetuar a designação dos clientes para estas instalações. Isto deve ser feito, de forma a minimizar os custos com transporte. Se a quantidade de instalações em cada nível for livre, deve-se também encontrar a quantidade ideal de instalações para serem implantadas em cada nível.

No exemplo citado no item "a" da seção 1.1, onde clientes devem buscar tratamento em um posto de saúde ou diretamente em um hospital, sendo que uma fração  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 1$ ) dos clientes atendidos inicialmente em um posto de saúde são transferidos para um hospital para complementar o tratamento, o fluxo de transporte pode ocorrer das seguintes maneiras:

- (i) no sentido: clientes  $\rightarrow$  hospitais, ou
- (ii) no sentido: clientes  $\rightarrow$  postos de saúde  $\rightarrow$  hospitais

Neste caso os hospitais são ditos instalações do primeiro nível, enquanto que os postos de saúde são chamados de instalações do segundo nível. Este problema é classificado, de acordo com NARULA (1984), como um problema de localização de instalações  $2/I/U$ , com dois níveis de medianas, em um grafo direcionado integrado de único caminho.

No caso citado no item "b" da seção 1.1, em que mercadorias são transportadas das fábricas para os clientes, passando ou não por armazéns

intermediários, o fluxo de transporte pode ocorrer das seguintes maneiras:

(iii) no sentido: fábricas → clientes, ou

(iv) no sentido: fábricas → armazéns → clientes

Aqui as fábricas são ditas instalações do primeiro nível, enquanto que os armazéns são chamados de instalações do segundo nível. Tem-se também que  $\theta = 1$ , isto é, 100% das mercadorias transportadas das fábricas para armazéns são transferidas para os clientes.

Nos problemas que este trabalho se propõe a resolver, cada cliente tem sua localização/demanda pré-fixados e deve ser atendido por exatamente uma instalação do segundo ou primeiro nível. As possíveis localizações onde serão implantadas as instalações são os próprios pontos onde se localizam estes clientes.

Neste estudo não são consideradas as capacidades das instalações, isto é, as capacidades são consideradas ilimitadas.

As instalações destes problemas possuem, com relação a hierarquia entre as mesmas, as propriedades de instalações hierárquicas sucessivamente inclusivas.

Os problemas são modelados de forma que os custos com transporte, entre as instalações do primeiro e segundo nível, podem diferir dos custos com transporte entre os clientes e as instalações. Assim, estes problemas diferem do problema apresentado em NARULA e OGBU (1979), por não considerar as capacidades das instalações e por utilizar dois tipos de funções de custos de transporte. A forma de calcular estes custos é apresentada na seção que segue.

### 3.1.1 Uma Metodologia para Cálculo dos Custos

Observando a metodologia de cálculo para os custos de fretes nas planilhas da Confederação Nacional do Transporte - CNT, conforme o anexo 1, pode-se deduzir a seguinte expressão geral, para cálculo dos custos de um frete, em função da distância percorrida e da carga transportada:

$$\text{Custo}(AU, AN) = \left[ \left( \frac{AR \cdot AP}{AO \cdot AT} \right) + \left( \frac{AR}{AQ \cdot AO \cdot AT} + \frac{AM}{T \cdot AT} \right) \cdot AU \right] \cdot AN$$

onde:

$AU$  = Distância do percurso,

$AN$  = Carga para transportar,

$AR$  = Custo fixo mensal,

$AP$  = Tempo de carga e descarga,

$AO$  = Horas trabalhadas por mês,

$AT$  = Capacidade de carga do veículo,

$AQ$  = Velocidade comercial na estrada,

$AM$  = Total dos custos variáveis,

$T$  = Quilometragem mensal estimada.

Fazendo:

$$AU = d, \quad AN = c, \quad \frac{AR \cdot AP}{AO \cdot AT} = a \quad \text{e} \quad \left( \frac{AR}{AQ \cdot AO \cdot AT} + \frac{AM}{T \cdot AT} \right) = b,$$

tem-se a função de custos definida por  $\text{Custo}(d,q) = [a + b \cdot d] \cdot c$ .

Os parâmetros  $a$  tem unidade:

$$\frac{\text{Custo}}{\text{Volume de demanda}},$$

e representam os custos por unidade de demanda que independem da distância percorrida, enquanto que os parâmetros  $b$  tem unidade:

$$\frac{\text{Custo}}{(\text{Volume de demanda}) \cdot (\text{Distância percorrida})},$$

representando portanto, os custos por unidade de demanda que dependem da distância percorrida.

Assim, conforme informações da CNT, para uma carreta do tipo Volvo NL 10 340, tem-se os seguintes parâmetros e fórmula para o cálculo dos custos com transporte (em R\$), considerando as cargas (em toneladas) e as distâncias (em quilômetros):

$$a = 2,7636 \quad \text{e} \quad b = 0,0359$$

$$\text{Custo}(d,q) = [a + b \cdot d] \cdot c = [2,7636 + 0,0359 \cdot d] \cdot c$$

Da mesma maneira, para um veículo do tipo Truck MB L-1218, tem-se os

seguintes parâmetros e fórmula para o cálculo dos custos com transporte:

$$a = 4,5495 \text{ e } b = 0,0546$$

$$\text{Custo}(d,q) = [a + b.d].c = [4,5495 + 0,0546.d].c$$

Para estes valores, as unidades dos parâmetros  $a$  e  $b$  são, (R\$/ton) e (R\$/(ton.Km)), respectivamente.

### 3.1.2 As Funções de Custos Utilizadas Neste Trabalho

Com base na metodologia para cálculo de custos de transporte apresentada na seção anterior, o presente trabalho utiliza as funções de custos  $C1$  e  $C2$  descritas na seqüência.

Os custos para transportar  $c$  unidades de demanda, por uma distância  $d$ , entre uma instalação do primeiro nível e uma instalação do segundo nível, são dados pela função custos de transporte  $C1$ , tal que:

$$C1(d,c) = \begin{cases} 0, & \text{se } d = 0, \\ (a_1 + b_1.d).c, & \text{se } d \neq 0. \end{cases}$$

Os custos para transportar  $c$  unidades de demanda, por uma distância  $d$ , entre um cliente e uma instalação do segundo nível, ou entre um cliente e uma instalação do primeiro nível, são dados pela função custos de transporte  $C2$ , tal que:

$$C2(d,c) = \begin{cases} 0, & \text{se } d = 0, \\ (a_2 + b_2.d).c, & \text{se } d \neq 0. \end{cases}$$

## 3.2 FORMULAÇÃO PARA PROBLEMAS COM NÚMERO FIXO DE INSTALAÇÕES

Sejam:

$I = \{1, \dots, m\}$ , o conjunto dos pontos onde se localizam os clientes e também o conjunto das possíveis localizações para as instalações (em ambos os níveis),

$c_i$  = a demanda do ponto  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$p$  = a quantidade de instalações no primeiro nível,

$q$  = a quantidade de instalações no segundo nível,

$g_{jk}$  = o custo de abertura de uma instalação do segundo nível em  $j, j = 1, \dots, m$ , suprida por uma instalação do primeiro nível em  $k, k = 1, \dots, m$ ; (Se  $j = k$  o valor de  $g_{jk} \rightarrow$  infinito).

$h_k$  = o custo de abertura de uma instalação do primeiro nível em  $k, k = 1, \dots, m$ ,

$e_{ijk}$  = o custo para que a demanda do ponto  $i$ , seja atendida por uma instalação do segundo nível localizada em  $j$ , suprida por uma instalação do primeiro nível situada em  $k$ . Este custo é definido conforme abaixo, sendo que as funções  $C1$  e  $C2$  estão descritas na seção anterior:

$$e_{ijk} = \begin{cases} C2(d_{ij}, c_i) + C1(d_{jk}, \theta.c_i) & \text{se } i \neq j, j \neq k, i \neq k, \\ C1(d_{ik}, \theta.c_i) & \text{se } i = j \text{ e } j \neq k, \\ \text{infinito} & \text{se } (i = k \text{ e } j \neq k) \text{ ou se } j = k. \end{cases}$$

$\theta$  = a fração da demanda que é transferida entre as instalações do segundo nível e as instalações do primeiro nível,

$f_{ik}$  = o custo para que a demanda do ponto  $i$ , seja atendida diretamente por uma instalação do primeiro nível situada em  $k$ . Este custo é definido conforme abaixo:

$$f_{ik} = \begin{cases} C2(d_{ik}, c_i) & \text{se } i \neq k, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e as variáveis de decisão:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se a demanda do ponto } i, i = 1, \dots, m, \text{ é atendida por uma} \\ & \text{instalação do segundo nível localizada em } j, j = 1, \dots, m, \text{ suprida} \\ & \text{por uma instalação do primeiro nível situada em } k, k = 1, \dots, m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$w_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{se a demanda do ponto } i, i = 1, \dots, m, \text{ é atendida por uma} \\ & \text{instalação do primeiro nível situada em } k, k = 1, \dots, m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{se é aberta uma instalação do segundo nível em } j, \quad j = 1, \dots, m, \\ & \text{suprida pela instalação do primeiro nível em } k, \quad k = 1, \dots, m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{se é aberta uma instalação do primeiro nível em } k, \quad k = 1, \dots, m, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

o modelo fica estabelecido como:

(P) :

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m e_{ijk} x_{ijk} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m f_{ik} w_{ik} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m g_{jk} y_{jk} + \sum_{k=1}^m h_k z_k \quad (127)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_{ijk} + \sum_{k=1}^m w_{ik} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (128)$$

$$x_{ijk} \leq y_{jk}, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad (129)$$

$$y_{jk} \leq z_k, \quad j, k = 1, \dots, m, \quad (130)$$

$$w_{ik} \leq z_k, \quad i, k = 1, \dots, m, \quad (131)$$

$$\sum_{k=1}^m y_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (132)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m y_{jk} = q \quad (133)$$

$$\sum_{k=1}^m z_k = p, \quad (134)$$

$$x_{ijk}, w_{ik}, y_{jk}, z_k \in \{0, 1\}. \quad (135)$$

A função objetivo (127) representa o custo de designação dos clientes às instalações, além dos custos de abertura das mesmas. As restrições (128) garantem que cada cliente é servido por exatamente uma instalação. As restrições (129) impedem que um cliente seja atribuído para uma instalação do segundo nível onde não exista tal instalação. As restrições (130) garantem que se não existe uma instalação do primeiro nível aberta na localização  $k$ , nenhuma instalação do segundo nível pode ser suprida por ela. As restrições (131) garantem que se algum cliente é atribuído diretamente para

uma instalação do primeiro nível, tal instalação existe nesta localização. As restrições (132) e (133) juntas, garantem que são abertas exatamente  $q$  instalações do segundo nível. As restrições (134) garantem que são abertas exatamente  $p$  instalações do primeiro nível e as restrições (135) indicam que as variáveis do modelo são todas binárias.

Neste modelo tem-se  $m^3$  variáveis do tipo  $x_{ijk}$ ,  $m^2$  variáveis do tipo  $w_{ik}$ ,  $m^2$  variáveis do tipo  $y_{jk}$  e  $m$  variáveis  $z_k$ . Assim, o número total de variáveis, que será chamado de  $nvar$  é igual a  $m^3 + 2.m^2 + m$ , que é um número grande mesmo quando  $m$  é relativamente pequeno.

O número total de restrições do modelo é igual a  $m^3 + 2.m^2 + 2.m + 2$ , além das restrições de integralidade das variáveis binárias.

Nos problemas que o presente trabalho se propõe a resolver, os custos de abertura das instalações são constantes em cada nível, independentemente da localização das mesmas. Desta forma, as parcelas 3 e 4 da função objetivo (127) são constantes, podendo ser desconsideradas quando da resolução dos problemas.

Um método heurístico para solucionar os problemas desta formulação é apresentado na seção 4.1.

### 3.3 FORMULAÇÃO PARA PROBLEMAS COM NÚMERO LIVRE DE INSTALAÇÕES

Considerando os mesmos índices, parâmetros e variáveis definidos para o modelo anterior, uma formulação para problemas com número livre de instalações em cada nível, pode ser obtido retirando daquela formulação os conjuntos de restrições (132), (133) e (134).

Diferentemente do modelo anterior, as parcelas 3 e 4 da função objetivo (127) não mais constituem uma constante, não podendo ser desconsideradas do modelo, haja vista que a quantidade de instalações em cada nível não é pré-fixada pelo problema.

Neste novo modelo, constituído pela função objetivo (127) e pelos conjuntos de restrições de (128) até (131), além das restrições que indicam as variáveis binárias (135), tem-se o mesmo número de variáveis do modelo anterior, porém, o número total de restrições do modelo é igual a  $m^3 + 2 \cdot m^2 + m$ , além das restrições de integralidade.

Um método heurístico para solucionar os problemas desta formulação é apresentado na seção 4.2.

## 4 OS MÉTODOS SUGERIDOS PARA RESOLVER OS PROBLEMAS PROPOSTOS

Neste capítulo são detalhadas as técnicas sugeridas neste trabalho, para resolver os problemas propostos.

Primeiramente, na seção 4.1 é proposta uma técnica para resolver os problemas onde as quantidades de instalações em cada nível são pré-fixadas, ou seja, uma técnica heurística que permita localizar as  $p$  instalações do primeiro nível e as  $q$  instalações do segundo nível, dentre os  $m$  clientes fixos, bem como atribuir estes clientes às instalações. O algoritmo desenvolvido para resolver estes problemas foi chamado de  $p$ - $q$ -Median-Heur.

Depois disso, na seção 4.2, é apresentada a técnica sugerida para resolver problemas onde as quantidades de instalações em cada nível não são pré-fixadas, isto é, uma técnica que permite também encontrar de forma aproximada as quantidades ideais de instalações em cada um dos níveis hierárquicos. Este método incorpora o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur descrito na seção 4.1 e foi chamado de Median-Heur.

Para avaliar a qualidade das soluções obtidas com estes algoritmos, são obtidos limites inferiores através de relaxação Lagrangeana, utilizando o método dos subgradientes. Estes processos são descritos na seção 4.3.

### 4.1 UM MÉTODO PARA PROBLEMAS COM NÚMERO FIXO DE INSTALAÇÕES

As localizações das  $p$  instalações do primeiro nível e das  $q$  instalações do segundo nível, dentre os  $m$  clientes fixos, assim como as atribuições dos clientes às instalações, e das instalações do segundo nível às instalações do primeiro nível, são feitas conforme o algoritmo que segue, denominado de  $p$ - $q$ -Median-Heur.

Os passos do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, detalhados adiante, são os seguintes:

**Passo 1.** Inicialização: Obter uma aproximação inicial para a solução do problema;

**Passo 2.** Re-Atribuições: Re-atribua as instalações do segundo nível e os clientes, com base nas funções de custos  $CI$  e  $C2$ ;

**Passo 3.** Melhorias: Efetuar melhorias locais para as instalações do segundo e primeiro níveis;

**Passo 4.** Teste de parada: Se nenhuma melhoria foi obtida nos passos 2 e 3, PARE. Caso contrário, volte ao passo 2.

Um fluxograma para o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur pode ser visto na figura 20 do anexo 4.

#### 4.1.1 Obtenção de Uma Aproximação Inicial para a Solução

No passo 1 do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, deve-se obter uma solução inicial para o problema. Para isto utilizou-se a *Forward  $p$ -median heuristic* de NARULA e OGBU (1979), apresentada anteriormente na seção 2.2.3.3. No passo 3 dessa heurística, os cálculos dos pesos foram substituídos por:

$$\text{Para todo } j \text{ tal que: } j \in V_{(p_1+p_2)}, \text{ compute: } W_j = W_j + \sum_{i \in F_j} W_i,$$

isto é, nesta fase inicial não é levado em consideração o parâmetro  $\theta$  que representa a fração da demanda que é transferida entre as instalações do segundo nível e as instalações do primeiro nível.

Nesta fase também não são utilizadas as funções de custos  $CI$  e  $C2$ , sendo consideradas somente as distâncias euclidianas entre os vértices, e os pesos associados às demandas dos mesmos.

Para solucionar os problemas de  $p$ -medianas do passo 1 da *Forward  $p$ -median heuristic*, é utilizada uma versão modificada do algoritmo de Teitz e Bart, enquanto que para os problemas de  $p$ -medianas do passo 4 da *Forward  $p$ -median heuristic*, utiliza-se a versão original do algoritmo de Teitz e Bart, que é apresentada no anexo 2.

Um fluxograma para o algoritmo de Teitz e Bart é apresentado na figura 21 do anexo 4.

O algoritmo de Teitz e Bart modificado para  $p$ -medianas, difere do algoritmo

original, por possuir dois estágios distintos.

Num primeiro estágio, os vértices que não são medianas são percorridos um-a-um, da mesma maneira que o algoritmo original, isto é, buscando-se melhorias oriundas da substituição do vértice considerado, por qualquer uma das medianas.

Quando o número de vértices analisados torna-se maior que uma fração  $\alpha$  do total de vértices (esta fração é um dos parâmetros do algoritmo) a busca por estas substituições passa a ser localizada. Neste segundo estágio, a tentativa da substituição de um determinado vértice, somente será feita com a mediana mais próxima a ele, e somente se a distância entre este vértice e sua mediana for inferior ao raio médio da referida mediana.

Adotando este procedimento, o algoritmo se torna significativamente mais rápido que o algoritmo de Teitz e Bart original, com resultados muito próximos daqueles que seriam obtidos pelo mesmo.

De fato, o primeiro estágio deste algoritmo modificado é necessário, para que a solução aleatória inicialmente obtida, que em geral é bastante ruim, seja melhorada com trocas que levem em consideração todos os nós do grafo, o que não é mais necessário após um certo número de iterações, quando se observa que as melhorias promovidas pelo algoritmo de Teitz e Bart limita-se a trocas de vértices não medianas com vértices medianas localizados muito próximos entre si.

Antes da apresentação do algoritmo de Teitz e Bart modificado, será definido o conceito de número de transmissão  $\sigma$ , sendo que maiores detalhes podem ser vistos no anexo 2.

Seja  $V$  o conjunto das possíveis localizações para as medianas. Considere também,  $S$  um sub-conjunto do conjunto de vértices  $V$ , que possui  $p$  elementos, isto é,  $|S|=p$ . Define-se ainda,

$$d(v_j, S) = \min_{v_i \in S} [d(v_j, v_i)]$$

onde  $d(v_j, S)$  e  $d(v_j, v_i)$  indicam as distâncias do vértice  $v_j$  até o sub-conjunto  $S$  e até o vértice  $v_i$ , respectivamente.

Assim, o número de transmissão para o conjunto  $S$ , é estabelecido da

seguinte forma:

$$\sigma(S) = \sum_{v_j \in V} c_j \cdot d(v_j, S)$$

onde  $c_j$  é um peso associado a demanda do vértice  $j$ .

Além destes conceitos, o raio médio de uma mediana  $p'$ , chamado de  $\bar{R}(p')$  é definido como a média aritmética das distâncias entre esta mediana e os vértices associados a ela, isto é:

$$\bar{R}(p') = \frac{\sum_{v_k \in F_{p'}} d(p', v_k)}{|F_{p'}|}, \text{ onde } F_{p'} = \left\{ v_k \in V / d(v_k, p') = \min_{v_l \in S} d(v_k, v_l) \right\} \text{ isto}$$

é,  $F_{p'}$  é o conjunto dos vértices  $v_k$  que tem  $p'$  como a mediana mais próxima.

Assim sendo, a descrição do algoritmo de Teitz e Bart modificado é a seguinte:

Inicialmente escolhe-se um conjunto  $S \subset V$ , formado por  $p$  vértices, considerado como uma aproximação do conjunto  $V_p$  das  $p$ -medianas. Percorre-se os vértices  $v_i$  ( $i = 1, \dots, |V|$ ) e se  $v_i \in V - S$ , verifica-se se  $v_i$  pode substituir, com vantagem, algum dos vértices  $v_j \in S$  (ou o vértice  $v_j \in S$  mais próximo de  $v_i$ , no caso de  $i > |V| \cdot \alpha$  e  $d(v_j, v_i) < \text{raio médio de } v_j$ ), produzindo um novo conjunto  $S'$  tal que:  $S' = S \cup \{v_i\} - \{v_j\}$  e  $\sigma(S') < \sigma(S)$ . Se isto for possível, substitui-se os  $v_j$  por  $v_i$  e  $S'$  é considerado uma nova aproximação para o conjunto  $V_p$ . O algoritmo prossegue até que se obtenha um conjunto  $S$ , onde nenhuma substituição de vértices produza um número de transmissão menor.

Os passos para este algoritmo são os seguintes:

**Passo 1.** Construa um conjunto inicial  $S$ , com  $p$  elementos de  $V$ ;

**Passo 2.** Faça  $i = 1$ ;

**Passo 3.** Se o vértice  $v_i \notin S$  e  $i \leq |V| \cdot \alpha$ , faça:

- a) Calcule a redução  $\Delta_{ij}$  do número de transmissão,  $\forall v_j \in S$ :  $\Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{v_i\} - \{v_j\})$ ;

b) Faça  $\Delta_{ij_o} = \max_{v_j \in S} [\Delta_{ij}]$ ;

c) Se  $\Delta_{ij_o} > 0$  faça  $S \leftarrow S \cup \{v_i\} - \{v_{j_o}\}$ ;

d) Vá ao passo 5.

**Passo 4.** Se o vértice  $v_i \notin S$ ,  $i > |V| \cdot \alpha$  e  $d(v_i, v_j) < \bar{R}(v_j)$ , sendo que  $v_j \in S$  é a mediana mais próxima do vértice  $v_i$ , faça:

a) Calcule a redução  $\Delta_{ij}$  do número de transmissão:  $\Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{v_i\} - \{v_j\})$ ;

b) Se  $\Delta_{ij} > 0$  faça  $S \leftarrow S \cup \{v_i\} - \{v_j\}$ ;

**Passo 5.** Se  $i < |V|$ , faça  $i = i+1$  e volte ao passo 3.

**Passo 6.** Se durante a execução dos passos anteriores ocorrerem modificações no conjunto  $S$ , volte ao passo 2. Caso contrário PARE. O conjunto  $S$  será uma aproximação para o problema das  $p$ -medianas.

Um fluxograma para o algoritmo de Teitz e Bart modificado para  $p$ -medianas é apresentado na figura 22 do anexo 4.

#### 4.1.2 Efetuando as Re-Atribuições

Na aproximação inicial obtida no passo 1 do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, as instalações do segundo nível são atribuídas às instalações do primeiro nível mais próximas, enquanto que os clientes são atribuídos à instalação mais próxima, seja ela uma instalação do primeiro ou segundo nível, utilizando para isso as distâncias euclidianas.

As atribuições ótimas dos clientes às instalações, para uma dada configuração das mesmas, não são feitas, necessariamente, para as instalações mais próximas. Isto ocorre, porque os custos dependem de características das funções  $C1$  e  $C2$ , sendo que melhorias podem, eventualmente, ser promovidas através da re-atribuição dos clientes.

Desta forma, estas re-atribuições buscam encontrar as designações ótimas,

dos clientes para as instalações do primeiro ou segundo nível, para dados conjuntos de  $p$  instalações do primeiro nível e  $q$  instalações do segundo nível, localizados entre os  $m$  clientes.

Antes das re-atribuições dos clientes, são efetuadas as re-atribuições das instalações do segundo nível para as instalações do primeiro nível, pois os passos 2 e 3 do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur podem mudar a condição de que cada instalação do segundo nível é atribuída à instalação do primeiro nível mais próxima a ela.

Descrições detalhadas destes processos de re-atribuições são apresentadas nas seções 4.1.2.1 e 4.1.2.2.

#### 4.1.2.1 Re-atribuições das instalações do segundo nível

As instalações do segundo nível são percorridas uma-a-uma, e atribuídas às instalações do primeiro nível que impliquem no menor custo de transporte, isto é, às instalações do primeiro nível mais próximas das mesmas.

Sejam  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$  e  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_q\}$ , os conjuntos das instalações do primeiro e segundo nível, respectivamente. Cada instalação do segundo nível  $s_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ), é atribuída para a instalação do primeiro nível  $\hat{r} \in R$  mais próxima a ela, de modo que para cada par de instalações  $s_j$  e  $\hat{r}$ , verifica-se que  $d(s_j, \hat{r}) \leq d(s_j, r_k)$ , ( $k = 1, \dots, p$ ).

#### 4.1.2.2 Re-atribuições dos clientes

Os clientes  $i$  são percorridos um-a-um e atribuídos à instalação que implique no menor custo total de transporte, que será igual a:

$$\text{Min} \left\{ \text{Min}_{\substack{s_j \in S \\ r_k \in R}} \{C1(d(s_j, r_k), \theta \cdot c_i) + C2(d(i, s_j), c_i)\}, \text{Min}_{r_k \in R} \{C2(d(i, r_k), c_i)\} \right\}$$

Se nesta atribuição ótima, um cliente  $i$  for atribuído à uma instalação do primeiro nível, certamente será para a instalação do primeiro nível mais próxima a ele.

Se tal atribuição ocorrer para uma instalação do segundo nível, esta não será necessariamente a instalação do segundo nível mais próxima do cliente considerado.

Os passos do algoritmo para as re-atribuições dos clientes, são os seguintes:

**Passo 1.** Para cada instalação do segundo nível  $s_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ), considere a instalação do primeiro nível mais próxima  $\hat{r} \in R$ , tal que  $d(s_j, \hat{r}) \leq d(s_j, r_k)$ , ( $k = 1, \dots, p$ );

**Passo 2.** Para cada cliente  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) faça:

- a) para cada instalação do segundo nível  $s_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ), calcula-se o custo com transporte, caso o cliente  $i$  seja atendido por esta instalação, isto é:  $CT2(i, s_j) = C1(d(s_j, \hat{r}), \theta.c_i) + C2(d(i, s_j), c_i)$ . Seja  $s^* \in S$  a instalação do segundo nível tal que  $CT2(i, s^*) \leq CT2(i, s_j)$ , ( $j = 1, \dots, q$ );
- b) para cada instalação do primeiro nível  $r_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ), calcula-se o custo com transporte, caso o cliente  $i$  seja atendido diretamente por esta instalação, isto é:  $CTI(i, r_k) = C2(d(i, r_k), c_i)$ . Seja  $r^* \in R$  a instalação do primeiro nível tal que  $CTI(i, r^*) \leq CTI(i, r_k)$ , ( $k = 1, \dots, p$ );
- c) se  $CT2(i, s^*) \leq CTI(i, r^*)$ , atribua o cliente  $i$  à instalação do segundo nível  $s^*$ . Caso contrário, atribua o cliente  $i$  diretamente à instalação do primeiro nível  $r^*$ .

#### 4.1.3 As Melhorias Locais

Nesta seção são descritos os procedimentos para as melhorias locais do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur. Estas melhorias são efetuadas separadamente, para as instalações do segundo nível e para as instalações do primeiro nível e tem por objetivo reduzir os custos de transporte entre os clientes e as instalações ou entre as instalações do primeiro nível e as instalações do segundo nível.

Estas duas técnicas para melhorias locais são detalhadas e ilustradas na seqüência.

#### 4.1.3.1 As melhorias locais para as instalações do segundo nível

O procedimento de melhorias locais para as instalações do segundo nível tem por característica percorrer cada instalação do segundo nível, analisando as melhorias oriundas da substituição de localização da mesma pela localização de algum cliente que tenha sido atribuído a ela. A localização da referida instalação é então substituída, pela posição que proporcionar maior vantagem. Desta forma, as localizações das instalações tendem a ficar em posições mais excêntricas, conforme pode ser observado na figura 1.

Nos passos do algoritmo de melhorias locais para as instalações do segundo nível, considera-se para cada  $s_j \in S$  ( $j = 1, \dots, q$ ), o conjunto  $C_j$  dos clientes atendidos por  $s_j$  e  $\hat{r}$  a instalação do primeiro nível mais próxima da mesma. Então, para cada instalação do segundo nível  $s_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ), faça:

**Passo 1.** Para cada cliente  $i \in C_j$ , calcula-se a redução de custos no caso da instalação  $s_j$  passar a ocupar a posição deste cliente  $i$ :

$$\begin{aligned} \Delta_i = & \sum_{l \in C_j} [C2(d(l, s_j), c_1)] - \sum_{l \in C_j} [C2(d(l, i), c_1)] + \\ & + CI(d(\hat{r}, s_j), \theta \cdot \sum_{l \in C_j} c_1) - CI(d(\hat{r}, i), \theta \cdot \sum_{l \in C_j} c_1); \end{aligned}$$

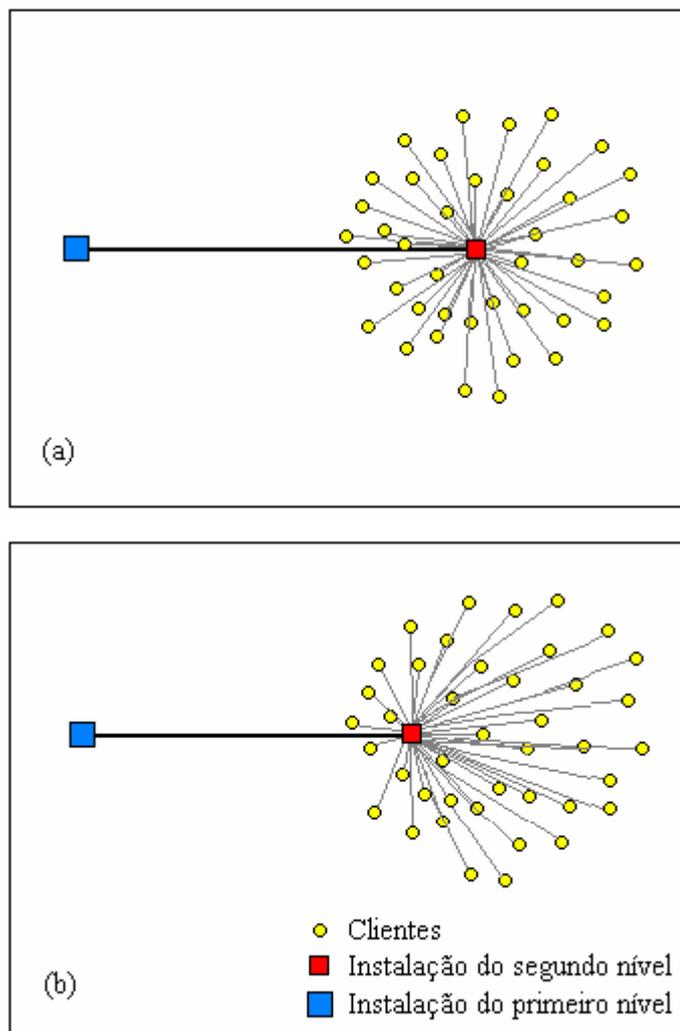
**Passo 2.** Encontre a maior redução de custos:

$$\Delta_{i^*} = \max_{i \in C_j} [\Delta_i];$$

**Passo 3.** Teste:

Se  $\Delta_{i^*} > 0$  substitua a localização da instalação  $s_j$  pela localização de  $i^*$ .

FIGURA 1 - APLICAÇÃO DE MELHORIAS LOCAIS PARA UMA INSTALAÇÃO DO SEGUNDO NÍVEL: (a) SITUAÇÃO ANTES; (b) SITUAÇÃO DEPOIS



Nas figuras 1 e 2, as instalações do primeiro nível são representadas pelos quadrados maiores de cor azul, as instalações do segundo nível são indicados por quadrados menores na cor vermelha e os clientes por círculos amarelos. As linhas mais espessas, de cor preta, unem as instalações do primeiro nível às instalações do segundo nível, e tem custos com transporte dados pela função  $C1$ , enquanto que os clientes são ligados às instalações por linhas mais estreitas de cor cinza, e tem custos com transporte dados pela função  $C2$ .

#### 4.1.3.2 As melhorias locais para as instalações do primeiro nível

O procedimento de melhorias locais para as instalações do primeiro nível, tem por característica, percorrer todas as instalações do primeiro nível analisando as melhorias oriundas da substituição da localização das mesmas, pela localização de algum cliente que tenha sido atribuído diretamente a ela.

Novamente as instalações do primeiro nível passam a ocupar as posições que oferecem maior ganho. Assim, da mesma forma que ocorreu com as melhorias locais para as instalações do segundo nível, as localizações das instalações do primeiro nível também tendem a ficar em posições mais excêntricas, conforme pode ser observado na figura 2.

Nos passos do algoritmo de melhorias locais para as instalações do primeiro nível, considera-se para cada instalação do primeiro nível  $r_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ), o conjunto  $E_k$  dos clientes  $i$  atendidos diretamente por  $r_k$  e o conjunto  $D_k$  das instalações do segundo nível associadas a  $r_k$ . Para cada instalação do segundo nível  $s_j \in D_k$ , considere ainda o conjunto  $C_j$  dos clientes atendidos pela mesma.

Para cada instalação do primeiro nível  $r_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ), faz-se:

**Passo 1.** Para cada cliente  $i \in E_k$  calcula-se a redução de custos no caso da instalação  $r_k$  passar a ocupar a posição deste cliente  $i$ :

$$\begin{aligned} \Delta_i = & \sum_{l \in E_k} [C2(d(l, r_k), c_l)] - \sum_{l \in E_k} [C2(d(l, i), c_l)] + \\ & + \sum_{s_j \in D_k} [C1(d(s_j, r_k), \theta \cdot \sum_{o \in C_j} c_o)] - \sum_{s_j \in D_k} [C1(d(s_j, i), \theta \cdot \sum_{o \in C_j} c_o)]; \end{aligned}$$

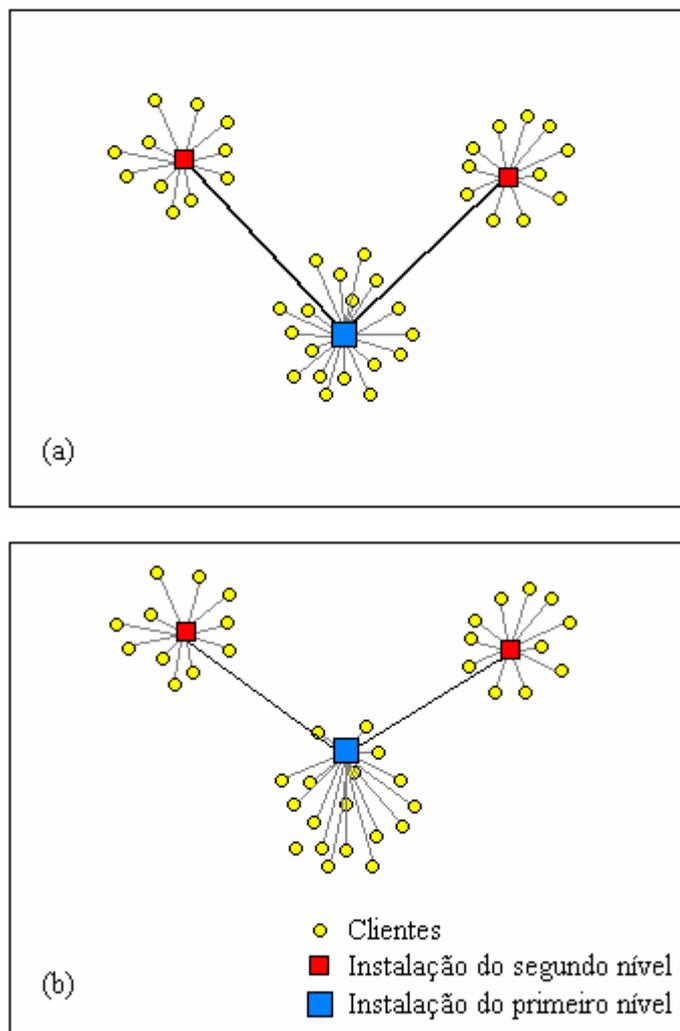
**Passo 2.** Encontre a maior redução de custos:

$$\Delta_{i^*} = \max_{i \in E_k} [\Delta_i];$$

**Passo 3.** Teste:

Se  $\Delta_{i^*} > 0$  substitua a localização da instalação  $r_k$  pela localização de  $i^*$ .

FIGURA 2 - APLICAÇÃO DE MELHORIAS LOCAIS PARA UMA INSTALAÇÃO DO PRIMEIRO NÍVEL: (a) SITUAÇÃO ANTES; (b) SITUAÇÃO DEPOIS



#### 4.1.4 Ilustração dos Passos do Algoritmo $p$ - $q$ -Median-Heur

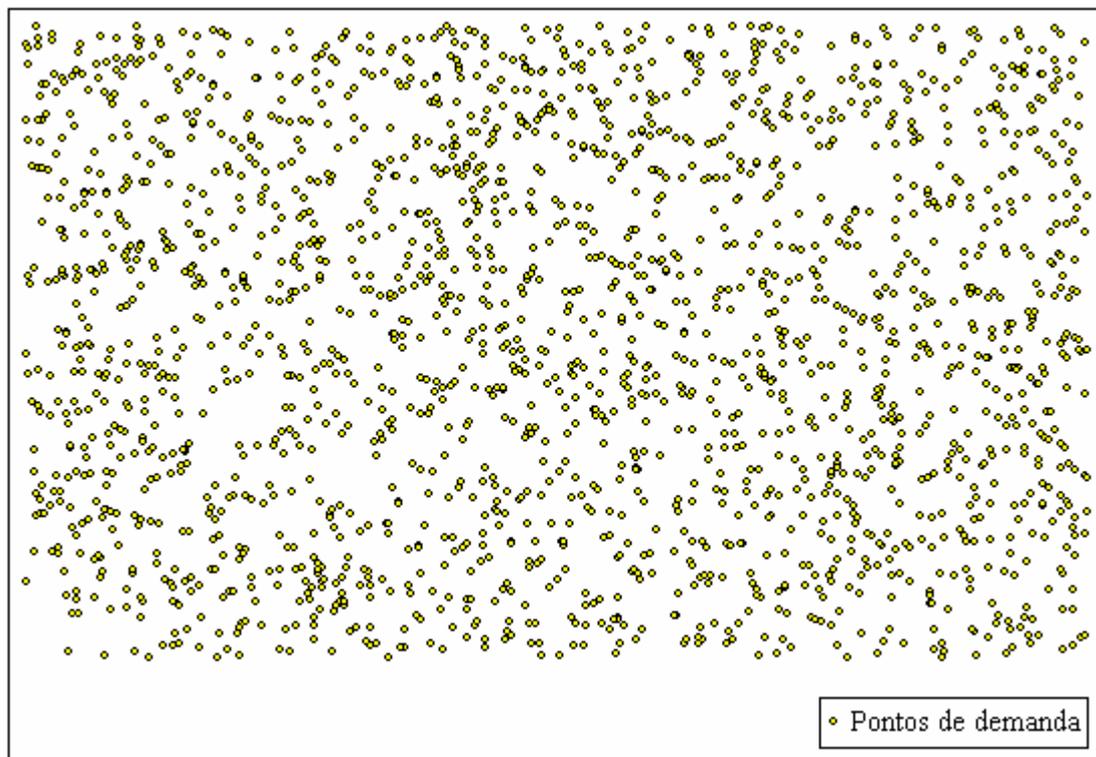
Nesta seção é apresentada uma série de figuras que ilustram as etapas do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, para um problema em particular.

O objetivo da apresentação destas figuras, é dar uma idéia gráfica de cada uma das etapas do processo que está sendo proposto neste trabalho, permitindo, uma avaliação prévia e intuitiva da qualidade das soluções.

Neste problema ilustrativo, 2000 clientes deverão ser atendidos por 15 instalações do segundo nível ou por 3 instalações do primeiro nível. Estas 15 instalações do segundo nível são atribuídas às 3 instalações do primeiro nível. Nas

figuras que seguem, os clientes são representados por pequenos círculos amarelos. As instalações do segundo nível são representados por quadrados pequenos de cor vermelha. As instalações do primeiro nível são indicadas por quadrados maiores de cor azul. Cada cliente é ligado a uma instalação do segundo nível ou a uma instalação do primeiro nível por segmentos de reta finos de cor cinza. As instalações do primeiro nível são ligadas às instalações do segundo nível por segmentos de reta mais espessos de cor preta.

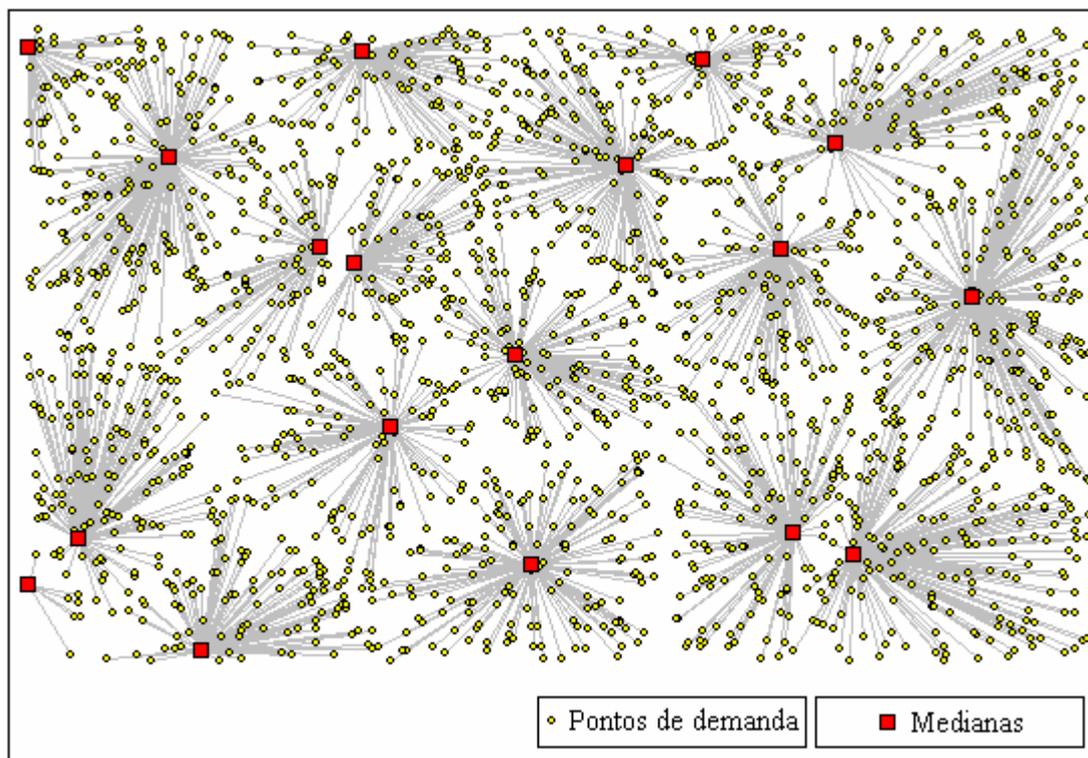
FIGURA 3 - PROBLEMA COM 2000 PONTOS GERADOS ALEATORIAMENTE, REPRESENTANDO OS CLIENTES



A figura 3 apresenta os 2000 pontos gerados aleatoriamente, de acordo com uma distribuição uniforme de probabilidades, representando os 2000 clientes, com demandas variando entre 1 e 100. Estes pontos representam também as possíveis localizações para as instalações.

Na figura 4, as 18 (15 + 3) instalações iniciais são escolhidas aleatoriamente, entre os 2000 pontos da figura anterior. Nesta etapa, cada cliente se dirige à instalação mais próxima a ele. Esta é uma solução inicial para um problema de 18 medianas.

FIGURA 4 - SOLUÇÃO ALEATÓRIA PARA O PROBLEMA DE 18 MEDIANAS APLICADO AOS PONTOS DA FIGURA 3



Na figura 5, o algoritmo de Teitz e Bart modificado para  $p$ -medianas é utilizado para resolver o problema de 18 medianas. Neste algoritmo foi utilizado um parâmetro  $\alpha = 0,05$ , onde  $\alpha$  é o parâmetro utilizado para distinguir o algoritmo de Teitz e Bart modificado do algoritmo de Teitz e Bart convencional, conforme descrito na seção 4.1.1.

FIGURA 5 - SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA DE 18 (15 + 3) MEDIANAS, OBTIDA COM O ALGORITMO DE TEITZ E BART MODIFICADO

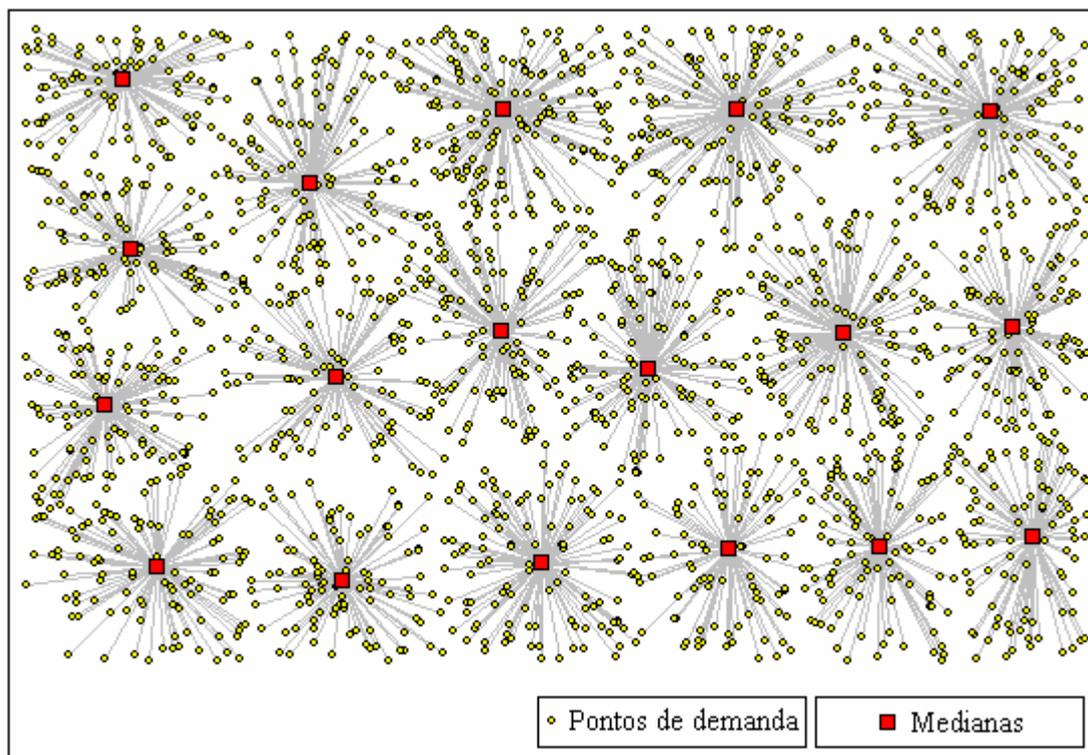
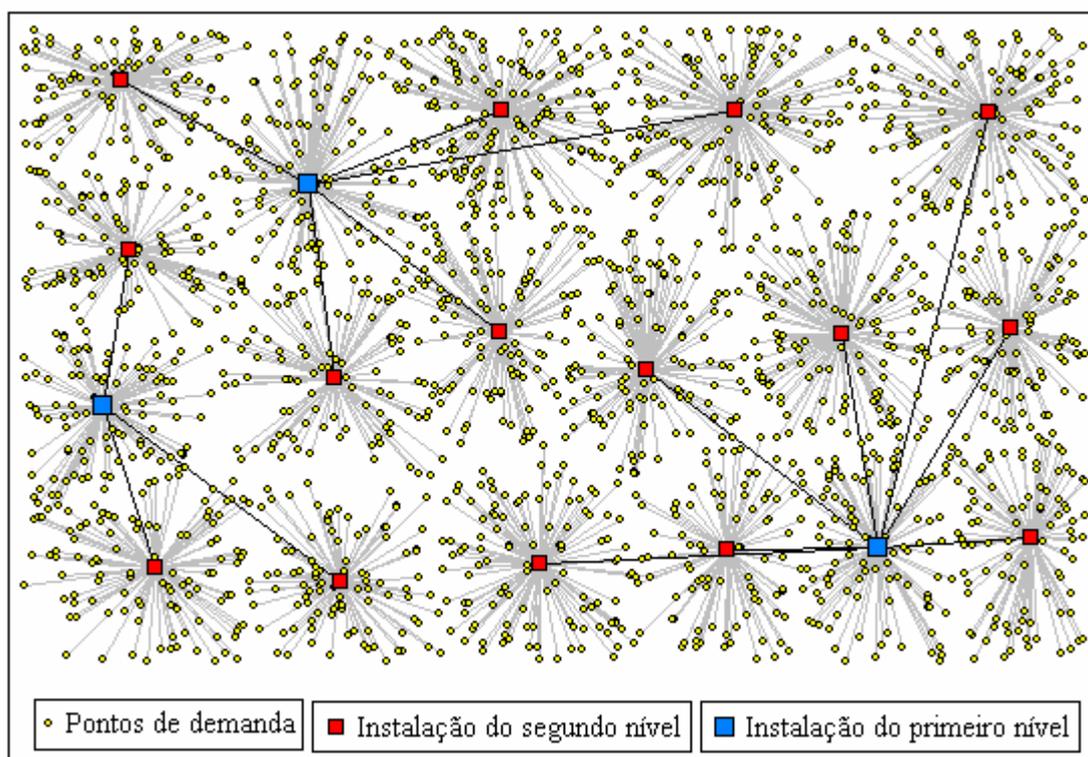


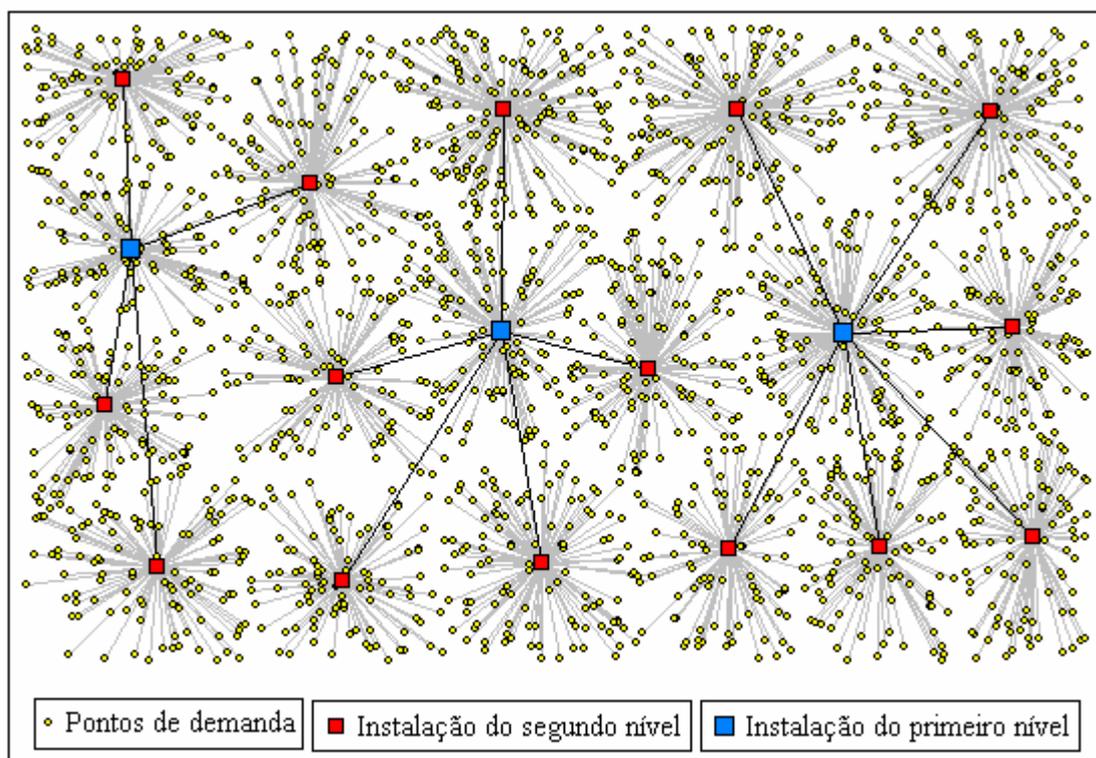
FIGURA 6 - SOLUÇÃO ALEATÓRIA PARA O PROBLEMA DE 3 MEDIANAS, DENTRE AS 18 INSTALAÇÕES DA FIGURA 5



Na figura 6, são sorteados aleatoriamente, dentre as 18 instalações da etapa precedente, as 3 instalações do primeiro nível iniciais. Estes pontos passam a ser representados por quadrados maiores azuis. Os 15 quadrados vermelhos remanescentes, representam as instalações do segundo nível iniciais.

Na figura 7, da mesma maneira que ocorreu na figura 5, é apresentada uma solução aproximada para o problema de 3 medianas, dentre os 18 pontos, utilizando agora o algoritmo original de Teitz e Bart para  $p$ -medianas.

FIGURA 7 - SOLUÇÃO APROXIMADA DO PROBLEMA DE 3 MEDIANAS, OBTIDA COM O ALGORITMO ORIGINAL DE TEITZ E BART



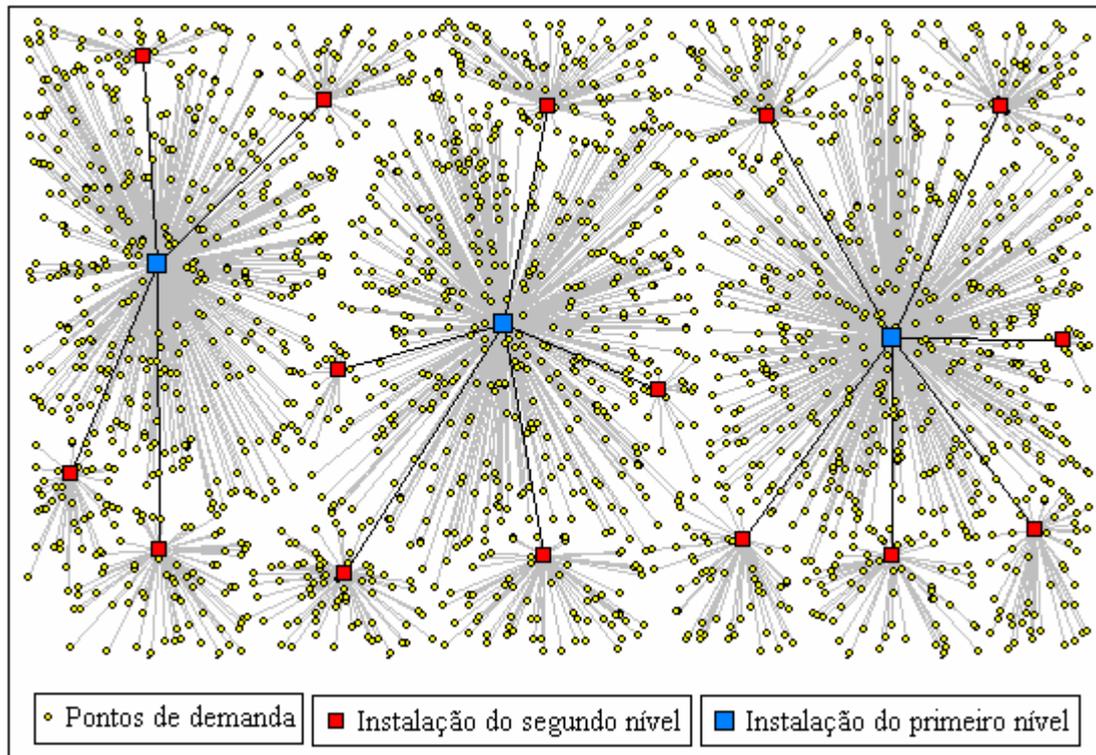
Na figura 8, é apresentado o aspecto final da solução, após aplicação das etapas de re-atribuições para os clientes e instalações do segundo nível e melhorias locais para as instalações de ambos os níveis, conforme o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur.

Na solução apresentada nesta figura 8, foram consideradas as funções de custos de transporte  $C1$ , para transporte entre instalações do primeiro nível e instalações do segundo nível e  $C2$  para transporte entre clientes e instalações, tais que:  $a_1 = 2,7636$ ;  $b_1 = 0,0359$ ;  $a_2 = 7,4894$  e  $b_2 = 0,0830$ .

Além disto, o fluxo entre cada instalação do segundo nível e sua instalação

correspondente no primeiro nível é de 100 % do somatório das demandas de todos os clientes que são atendidos por esta instalação do segundo nível (isto é,  $\theta = 1$ ).

FIGURA 8 - SOLUÇÃO FINAL PARA UM PROBLEMA DE 3 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 15 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL, COM  $\theta = 1$



Nas figuras 9 e 10, são apresentados os resultados gráficos de novas simulações, onde são repetidas as etapas de re-atribuições e melhorias locais para as instalações, utilizando para isto novos parâmetros nas funções de custos com transportes e/ou mudança na taxa de transferência das demandas entre as instalações do primeiro e segundo nível.

Na simulação apresentada na figura 9, foram utilizadas para as funções de custos os mesmos parâmetros da simulação apresentada na figura 8, tendo sido alterada apenas a taxa de transferência que passou a ser de 30 %.

Na simulação apresentada na figura 10, utilizou-se uma taxa de transferência de 30 %, e para as funções de custos utilizou-se parâmetros tais que:  $a_1 = 0$ ;  $b_1 = 1$ ;  $a_2 = 0$  e  $b_2 = 1$ .

FIGURA 9 - SOLUÇÃO FINAL PARA UM PROBLEMA DE 3 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 15 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL COM  $\theta = 0,3$

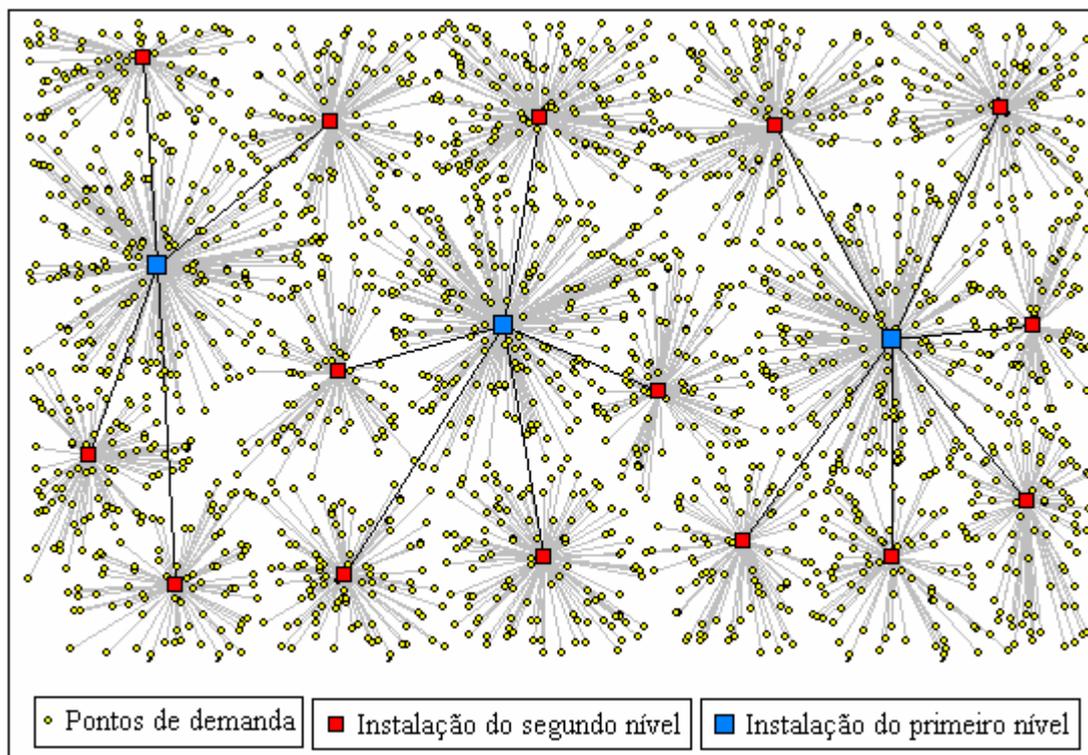
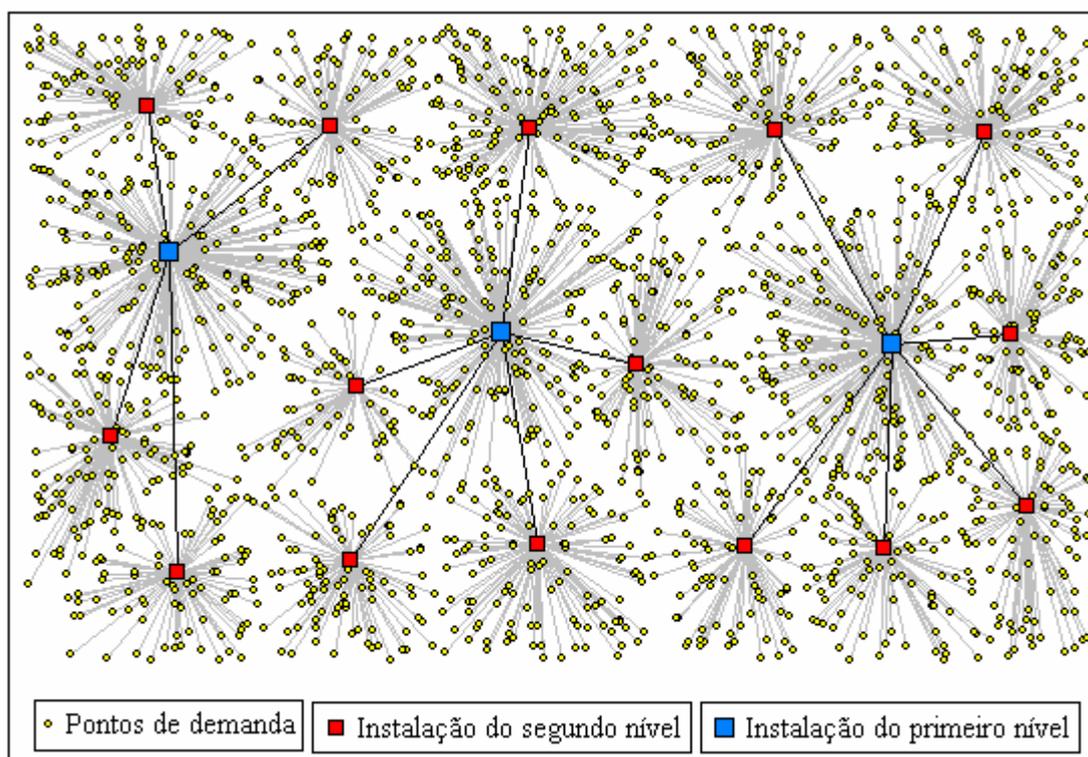


FIGURA 10 - SOLUÇÃO FINAL PARA UM PROBLEMA DE 3 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 15 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL COM  $\theta = 0,3$  E FUNÇÕES DE CUSTOS DIFERENTES DAQUELAS UTILIZADAS NA FIGURA 9



## 4.2 UM MÉTODO PARA PROBLEMAS COM NÚMERO LIVRE DE INSTALAÇÕES

Nesta seção é apresentado um método heurístico que permite identificar de forma aproximada as quantidades de instalações que são abertas em cada nível. Este método pode ser utilizado para resolver os problemas que possuem livres as quantidades de instalações em cada nível, conforme a formulação matemática apresentada na seção 3.3.

Antes da referida heurística, será definida a função de custos totais  $F$  e apresentada uma importante propriedade observada no gráfico da mesma.

Seja  $F$  uma função de custos totais definida de  $N^* \times N^*$  em  $\mathfrak{R}$ , que associa cada par ordenado  $(p, q) \in N^* \times N^*$  ( $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ), com os custos da solução ótima de um problema com  $p$  e  $q$  instalações do primeiro e segundo níveis, respectivamente. Estes custos são dados pela função objetivo (138) do modelo da seção 3.2, sendo que nestes estudos os custos para abertura das instalações são constantes em cada nível, independentemente de sua localização.

A referida propriedade é que o gráfico desta função  $F$ , que é formado por um conjunto discreto de pontos  $X \subset \mathfrak{R}^3$ , possui um formato tal, que pode ser bem ajustado por uma função convexa, o que permite o desenvolvimento de um algoritmo de descida que explore esta propriedade.

Convém observar que esta função  $F$  não satisfaz a definição convencional de função convexa (ver o anexo 3), considerando que seu domínio ( $N^* \times N^*$ ) não é um conjunto convexo.

Na seção 4.2.1 é ilustrado, com o auxílio de alguns exemplos, o gráfico desta função  $F$ , enquanto que na seção 4.2.2 é apresentado o algoritmo de descida Median-Heur que, fazendo uso da propriedade mencionada, bem como do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, permite encontrar de forma aproximada as quantidades de instalações que são abertas em cada nível.

#### 4.2.1 Características da Função de Custos Totais

Nesta seção são apresentados três casos particulares para ilustrar o gráfico da função de custos totais  $F$ .

Como não existem métodos exatos capazes de fornecer soluções ótimas, em tempos computacionais aceitáveis, para os problemas de grande escala de localização de instalações com hierarquias, onde são fixadas as quantidades de instalações em cada nível (conforme a formulação matemática da seção 3.2), as imagens dos pontos do domínio da função de custos totais  $F$  são obtidas de forma aproximada com a aplicação do algoritmo heurístico  $p$ - $q$ -Median-Heur.

Assim, nos exemplos apresentados nas figuras 11, 14 e 15, a convexidade de uma função que se ajusta aos pontos do gráfico da função de custos totais  $F$  pode não ser perfeita. Os pontos pertencentes ao conjunto  $X \subset \mathbb{R}^3$ , do gráfico da função de custos totais  $F$  seriam ajustados por uma função perfeitamente convexa, se os problemas fossem resolvidos por um método exato.

Nestes três casos, no algoritmo de Teitz e Bart modificado utilizado na heurística  $p$ - $q$ -Median-Heur utilizou-se um parâmetro  $\alpha = 0,05$ .

##### a) Caso 1

No primeiro caso foram considerados 100 problemas, onde o número de clientes é igual a 500, com demandas variando entre 1 e 100. Estes dados foram gerados aleatoriamente, de acordo com uma distribuição uniforme de probabilidades.

Neste primeiro caso, foram consideradas as funções de custos com transporte  $C1$ , entre instalações no primeiro nível e instalações no segundo nível e  $C2$  para transporte entre clientes e instalações no segundo nível, ou entre clientes e instalações no primeiro nível, tais que:  $a_1 = 0$ ;  $b_1 = 0,05$ ;  $a_2 = 0$  e  $b_2 = 0,05$ .

A taxa percentual de transferência das demandas dos clientes, entre instalações no segundo nível e instalações no primeiro nível é de 10 %, isto é,  $\theta = 0,1$ .

Os custos unitários considerados para as instalações, foram de 5.000 para instalações no segundo nível e de 8.000 para as instalações no primeiro nível.

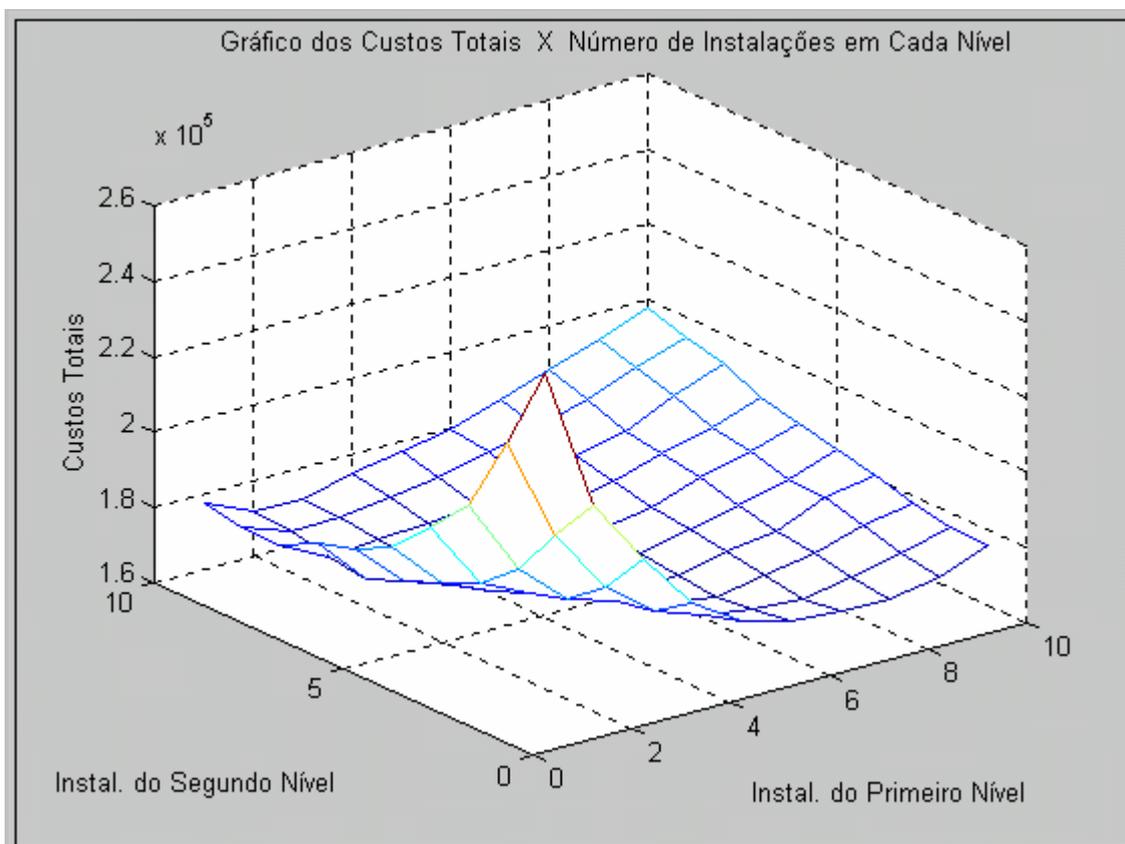
Os resultados para estes problemas estão indicados na tabela 2, que traz os custos totais (custo de transporte + custo de abertura das instalações em ambos os níveis), para quantidades de instalações variando de 1 a 10 em cada nível.

TABELA 2 - RESULTADOS DE PROBLEMAS COM ATÉ 10 INSTALAÇÕES POR NÍVEL PARA O CASO 1

INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,5299	2,1477	1,9687	1,8185	1,7346	1,7012	1,6906	1,6843	1,7085	1,7613
2	2,2990	2,0227	1,8492	1,7499	1,7051	1,6859	1,6775	1,7020	1,7296	1,7618
3	2,0920	1,8841	1,7692	1,7326	1,6877	1,6720	1,6953	1,7160	1,7553	1,7807
4	1,9890	1,8018	1,7422	1,6992	1,6688	1,6847	1,7095	1,7325	1,7826	1,8076
5	1,8902	1,7547	1,6997	1,6706	1,6833	1,6986	1,7242	1,7546	1,7857	1,8297
6	1,8348	1,7144	1,6731	1,6807	1,7033	1,7144	1,7388	1,7813	1,8152	1,8564
7	1,8047	1,6771	1,6866	1,6891	1,7089	1,7294	1,7590	1,8006	1,8340	1,8801
8	1,7564	1,6873	1,7006	1,7072	1,7213	1,7461	1,7831	1,8144	1,8700	1,9216
9	1,7566	1,7134	1,7129	1,7294	1,7498	1,7845	1,8141	1,8523	1,9022	1,9455
10	1,7760	1,7168	1,7172	1,7483	1,7725	1,7934	1,8407	1,8825	1,9286	1,9776

NOTA: Estes valores relativos aos custos, devem ser multiplicados pelo fator  $1.0e+005$ .

FIGURA 11 - GRÁFICO DA VARIAÇÃO DOS CUSTOS TOTAIS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE INSTALAÇÕES EM CADA NÍVEL, PARA O CASO 1



Nesta tabela 2, é destacado (na cor vermelha) o menor valor de custos totais

encontrado, e como pode ser observado, o ideal seria construir 4 instalações no segundo nível e 5 instalações no primeiro nível.

A figura 11 traz o gráfico da função dos custos totais  $F$ , em função do número de instalações em cada nível. Pode-se observar que os pontos do gráfico desta função  $F$  podem ser bem ajustados por uma função convexa.

Observa-se que a função de custos totais  $F$  pode ser decomposta na soma da função de custos com transporte  $f$ , com a função de custos com abertura das instalações  $g$ , ou seja:  $F(p,q) = f(p,q) + g(p,q)$ .

Fixando-se o número de instalações de qualquer um dos níveis, os custos com transporte diminuem à medida que se abrem novas instalações do outro nível. Assume-se que o impacto desta redução diminui, à medida que novas instalações são abertas<sup>7</sup>. Por exemplo, fixando em  $\bar{p}$  a quantidade de instalações do primeiro nível e variando a quantidade de instalações do segundo nível, assume-se que:

$$f(\bar{p}, q) - f(\bar{p}, q+1) > f(\bar{p}, q+1) - f(\bar{p}, q+2), \quad q = 1, 2, \dots$$

Do mesmo modo, fixando em  $\bar{q}$  a quantidade de instalações do segundo nível e variando a quantidade de instalações do primeiro nível, assume-se que:

$$f(p, \bar{q}) - f(p+1, \bar{q}) > f(p+1, \bar{q}) - f(p+2, \bar{q}), \quad p = 1, 2, \dots$$

Seja uma função  $\tilde{f}: [1, \infty[ \rightarrow \mathfrak{R}$ , cujo gráfico é o conjunto dos segmentos com extremos nos pontos:  $(1, f(\bar{p}, 1))$  e  $(2, f(\bar{p}, 2))$ ;  $(2, f(\bar{p}, 2))$  e  $(3, f(\bar{p}, 3))$ ;  $(3, f(\bar{p}, 3))$  e  $(4, f(\bar{p}, 4))$ ; ..... , ou o conjunto dos segmentos com extremos nos pontos:  $(1, f(1, \bar{q}))$  e  $(2, f(2, \bar{q}))$ ;  $(2, f(2, \bar{q}))$  e  $(3, f(3, \bar{q}))$ ;  $(3, f(3, \bar{q}))$  e  $(4, f(4, \bar{q}))$ ; .....

Verifica-se que os segmentos de reta que formam o gráfico desta função  $\tilde{f}$  são segmentos consecutivos de inclinação crescente. Em virtude disto, esta função  $\tilde{f}$  é uma função convexa.

Seja agora uma função  $\tilde{g}: [1, \infty[ \rightarrow \mathfrak{R}$ , cujo gráfico é o conjunto dos

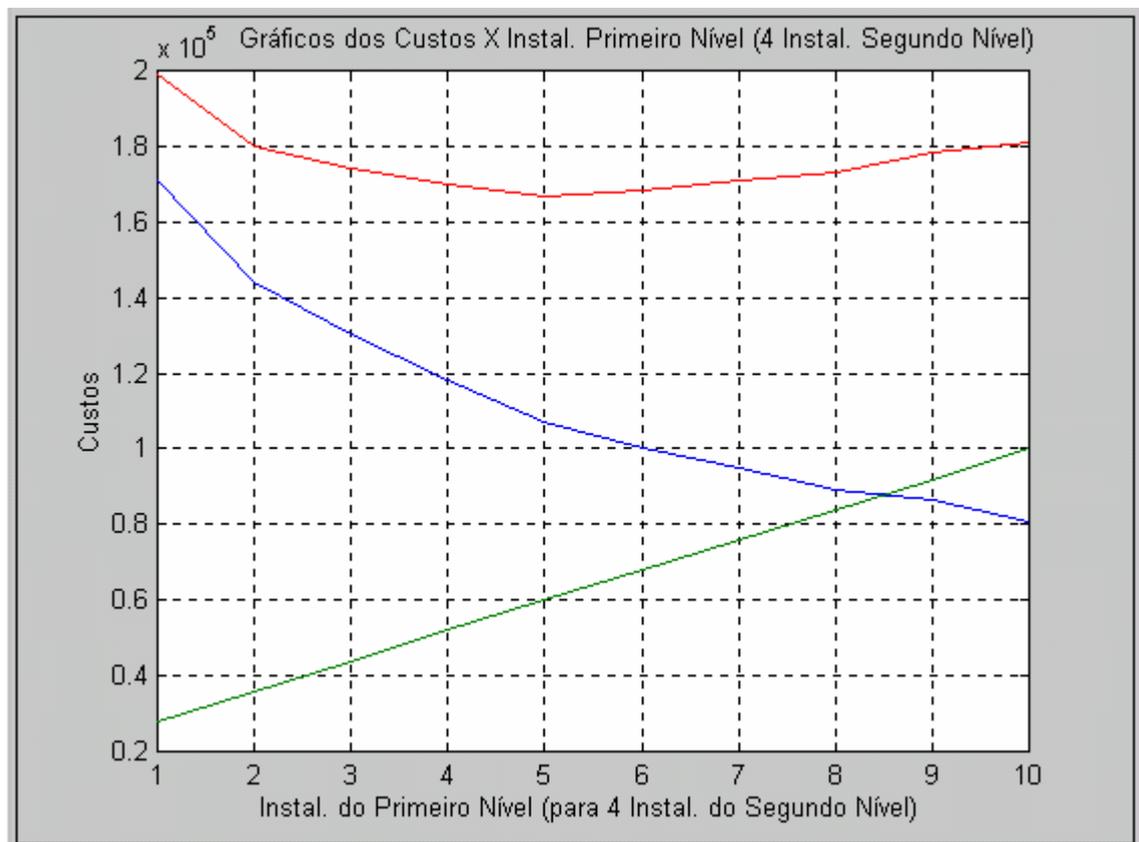
---

<sup>7</sup> Embora não tenha sido apresentada uma prova formal desta afirmação, é razoável supor que as variações na curva de custos de transportes sejam decrescentes com o incremento de novas instalações.

segmentos com extremos nos pontos:  $(1, g(\bar{p},1))$  e  $(2, g(\bar{p},2))$ ;  $(2, g(\bar{p},2))$  e  $(3, g(\bar{p},3))$ ;  $(3, g(\bar{p},3))$  e  $(4, g(\bar{p},4))$ ; ..... , ou o conjunto dos segmentos com extremos nos pontos:  $(1, g(1,\bar{q}))$  e  $(2, g(2,\bar{q}))$ ;  $(2, g(2,\bar{q}))$  e  $(3, g(3,\bar{q}))$ ;  $(3, g(3,\bar{q}))$  e  $(4, g(4,\bar{q}))$ ; .....

Verifica-se que os segmentos que formam o gráfico desta função  $\tilde{g}$  são segmentos consecutivos que formam uma reta de inclinação positiva. Logo, esta função  $\tilde{g}$  é uma função convexa.

FIGURA 12 - GRÁFICOS DOS CUSTOS COM TRANSPORTE (EM AZUL), COM AS INSTALAÇÕES (EM VERDE) E DOS CUSTOS TOTAIS (EM VERMELHO), FIXANDO EM 4 O NÚMERO DE INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL E VARIANDO A QUANTIDADE DE INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL.

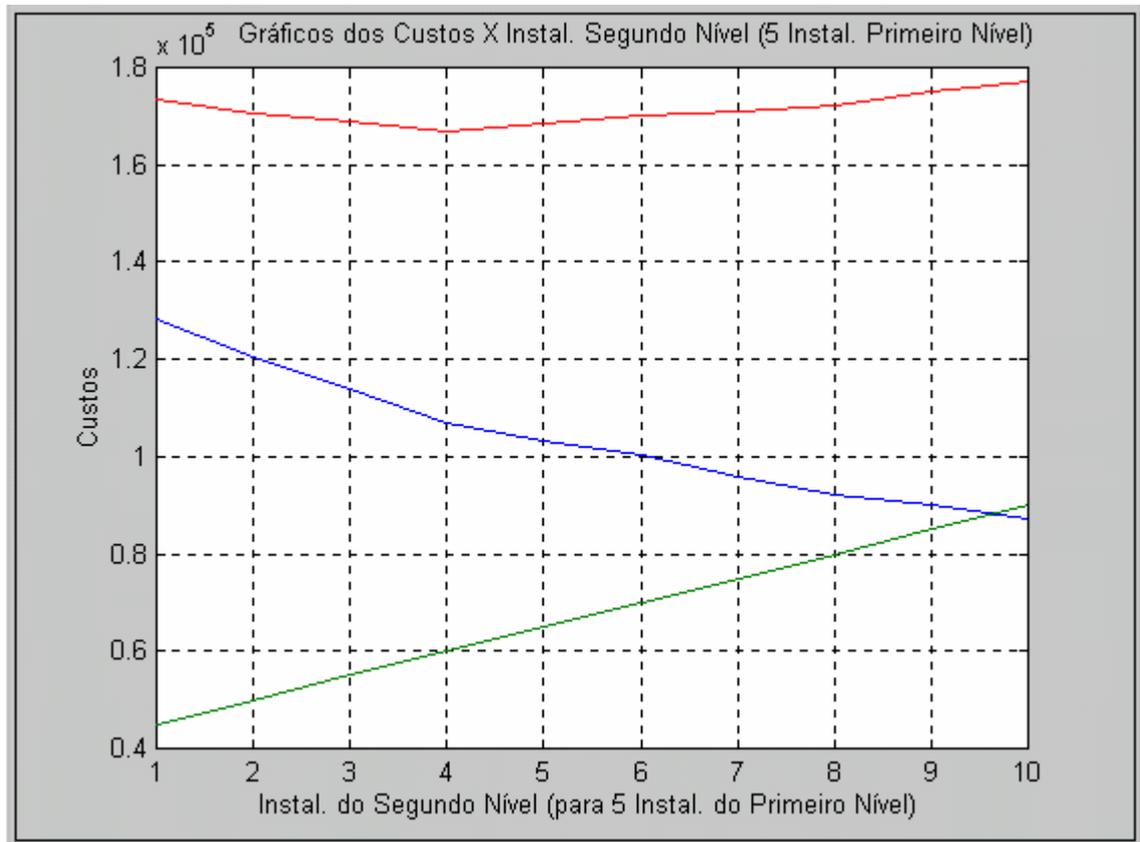


Assim, a função obtida pela soma das funções  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  possui um gráfico também formado por segmentos consecutivos, sendo que os extremos destes segmentos são pontos cujas ordenadas indicam os custos totais, quando se fixa o número de instalações de qualquer um dos níveis e se varia a quantidade de instalações do outro. Conseqüentemente, a função dada pela soma das funções  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  é também

uma função convexa, pois a mesma é definida pela soma de duas funções convexas.

Os gráficos das figuras 12 e 13 ilustram as funções  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$ , além da função dada pela soma das mesmas, para situações particulares do caso apresentado na figura 11. Nestas figuras, o gráfico da função  $\tilde{f}$  (que representa os custos de transportes) é indicado na cor azul. O gráfico da função  $\tilde{g}$  (que representa os custos com as instalações) é indicado na cor verde e o gráfico da função  $\tilde{f} + \tilde{g}$  (que representa os custos totais) é indicado na cor vermelha.

FIGURA 13 - GRÁFICOS DOS CUSTOS COM TRANSPORTE (EM AZUL), COM AS INSTALAÇÕES (EM VERDE) E DOS CUSTOS TOTAIS (EM VERMELHO) FIXANDO EM 5 O NÚMERO DE INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E VARIANDO A QUANTIDADE DE INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL.



Conforme já mencionou-se anteriormente, as convexidades das funções representadas nestas figuras podem não ser perfeitas, em virtude do uso de uma técnica heurística para a obtenção dos custos com transporte.

Observa-se também que os custos com abertura das instalações são proporcionais às quantidades destas, sendo que no presente trabalho os custos unitários

das instalações são constantes em cada nível, independentemente da localização das mesmas.

Na figura 12, tem-se fixo em 4 o número de instalações do segundo nível, enquanto que as instalações do primeiro nível variam entre 1 e 10.

Na figura 13, tem-se fixo em 5 o número de instalações do primeiro nível, enquanto que as instalações do segundo nível variam entre 1 e 10.

### b) Caso 2

No segundo caso, foram utilizados os mesmos dados relativos aos clientes do caso anterior. No entanto, aqui foram consideradas as funções de custos com transporte  $C1$ , entre instalações no primeiro nível e instalações no segundo nível e  $C2$  para transporte entre clientes e instalações no segundo nível, ou entre clientes e instalações no primeiro nível, tais que:  $a_1 = 2,7636$ ;  $b_1 = 0,0359$ ;  $a_2 = 4,5495$  e  $b_2 = 0,0546$ . Estes parâmetros são os mesmos obtidos das planilhas de cálculo de custos da CNT para os veículos do tipo Carreta Volvo NL 10 340 e Truck MB L-1218.

TABELA 3 - RESULTADOS DE PROBLEMAS COM ATÉ 20 INSTALAÇÕES POR NÍVEL PARA O CASO 2

INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4,7602	3,8025	3,5205	3,3530	3,2290	3,1568	3,1467	3,1517	3,1458	3,2029
2	4,7962	3,8483	3,5868	3,4074	3,2754	3,2177	3,2058	3,1940	3,2132	3,2535
3	4,8152	3,8865	3,6706	3,4454	3,3567	3,2533	3,2447	3,2427	3,2481	3,2917
4	4,8283	3,9281	3,6846	3,5124	3,3893	3,3007	3,3046	3,2891	3,2925	3,3513
5	4,8639	3,9713	3,7384	3,5715	3,4337	3,4071	3,3457	3,3378	3,3444	3,3849
6	4,8780	4,0174	3,7644	3,6150	3,4861	3,4050	3,4103	3,4226	3,3944	3,4397
7	4,9071	4,0643	3,8388	3,6780	3,5181	3,4608	3,4469	3,4385	3,4771	3,4969
8	4,9559	4,1043	3,8728	3,7131	3,5748	3,5047	3,4883	3,4853	3,4834	3,5282
9	4,9880	4,1489	3,9686	3,7537	3,6320	3,5471	3,5502	3,5523	3,5408	3,5863
10	5,0226	4,1908	3,9240	3,7955	3,6483	3,6662	3,5868	3,5824	3,5807	3,6309
11	5,0701	4,2361	4,0180	3,8902	3,7192	3,6760	3,6418	3,6757	3,6349	3,7001
12	4,1280	4,2850	4,0740	3,8841	3,7602	3,6899	3,6782	3,6995	3,6716	3,7280
13	5,1378	4,3146	4,1163	3,9378	3,7961	3,7586	3,7167	3,7339	3,7320	3,7752
14	5,2009	4,3669	4,1077	4,0252	3,8579	3,7948	3,7714	3,7668	3,7698	3,8336
15	5,2206	4,4096	4,1555	4,0199	3,8884	3,8372	3,8102	3,8256	3,8250	3,9006
16	5,2391	4,4565	4,2402	4,0559	3,9343	3,8773	3,8743	3,8621	3,8640	3,9393
17	5,3153	4,5020	4,2695	4,0950	3,9787	3,9580	3,9650	3,9504	3,9212	3,9601
18	5,3596	4,5603	4,3248	4,1426	4,0536	3,9755	3,9611	3,9735	3,9653	4,0177
19	5,3780	4,5960	4,3817	4,2152	4,0811	4,0216	4,0309	4,0101	4,0201	4,0642
20	5,4321	4,6396	4,4210	4,2577	4,1279	4,1169	4,0562	4,0796	4,0581	4,1007

- continua -

INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3,2561	3,2990	3,3556	3,4025	3,4767	3,5337	3,6309	3,6869	3,7447	3,8309
2	3,2960	3,3581	3,4117	3,4666	3,5306	3,5928	3,6545	3,7247	3,7972	3,8646
3	3,3424	3,4076	3,4562	3,5194	3,5570	3,6417	3,7031	3,7738	3,8498	3,9142
4	3,3970	3,4404	3,5019	3,5656	3,6233	3,6908	3,7422	3,8169	3,8818	3,9647
5	3,4674	3,4872	3,5563	3,6029	3,6717	3,7397	3,7990	3,8562	3,9425	4,0026
6	3,4918	3,5386	3,6010	3,6529	3,7236	3,7833	3,8659	3,9081	3,9743	4,0527
7	3,5495	3,5872	3,6543	3,7139	3,7709	3,8329	3,8896	3,9775	4,0273	4,0999
8	3,5898	3,6497	3,6954	3,7529	3,8212	3,8612	3,9439	4,0072	4,0746	4,1503
9	3,6546	3,7040	3,7471	3,8012	3,8658	3,9318	4,0063	4,0529	4,1324	4,2019
10	3,7027	3,7386	3,8025	3,8528	3,9218	3,9810	4,0420	4,1074	4,1744	4,2403
11	3,7371	3,7727	3,8225	3,8910	3,9665	4,0130	4,0680	4,1421	4,2408	4,2918
12	3,7792	3,8485	3,8958	3,9495	4,0028	4,0562	4,1274	4,2431	4,2950	4,3371
13	3,8222	3,8903	3,9420	3,9954	4,0641	4,1082	4,1801	4,2652	4,3192	4,3973
14	3,8790	3,9242	4,0007	4,0458	4,1094	4,1765	4,2460	4,3029	4,3768	4,4485
15	3,9178	3,9992	4,0244	4,0882	4,1397	4,2012	4,3058	4,3482	4,4252	4,5043
16	3,9764	4,0438	4,0898	4,1351	4,2025	4,2755	4,3188	4,3918	4,4651	4,5447
17	4,0327	4,0789	4,1323	4,1898	4,2446	4,3230	4,3844	4,4540	4,5136	4,5980
18	4,0628	4,1174	4,1884	4,2304	4,3131	4,3584	4,4347	4,4954	4,5857	4,6361
19	4,1169	4,1831	4,2327	4,2824	4,3348	4,4211	4,4703	4,5379	4,6210	4,6893
20	4,1663	4,2113	4,2804	4,3472	4,3758	4,4662	4,5290	4,5858	4,6616	4,7454

NOTA: Estes valores relativos aos custos, devem ser multiplicados pelo fator 1.0e+005.

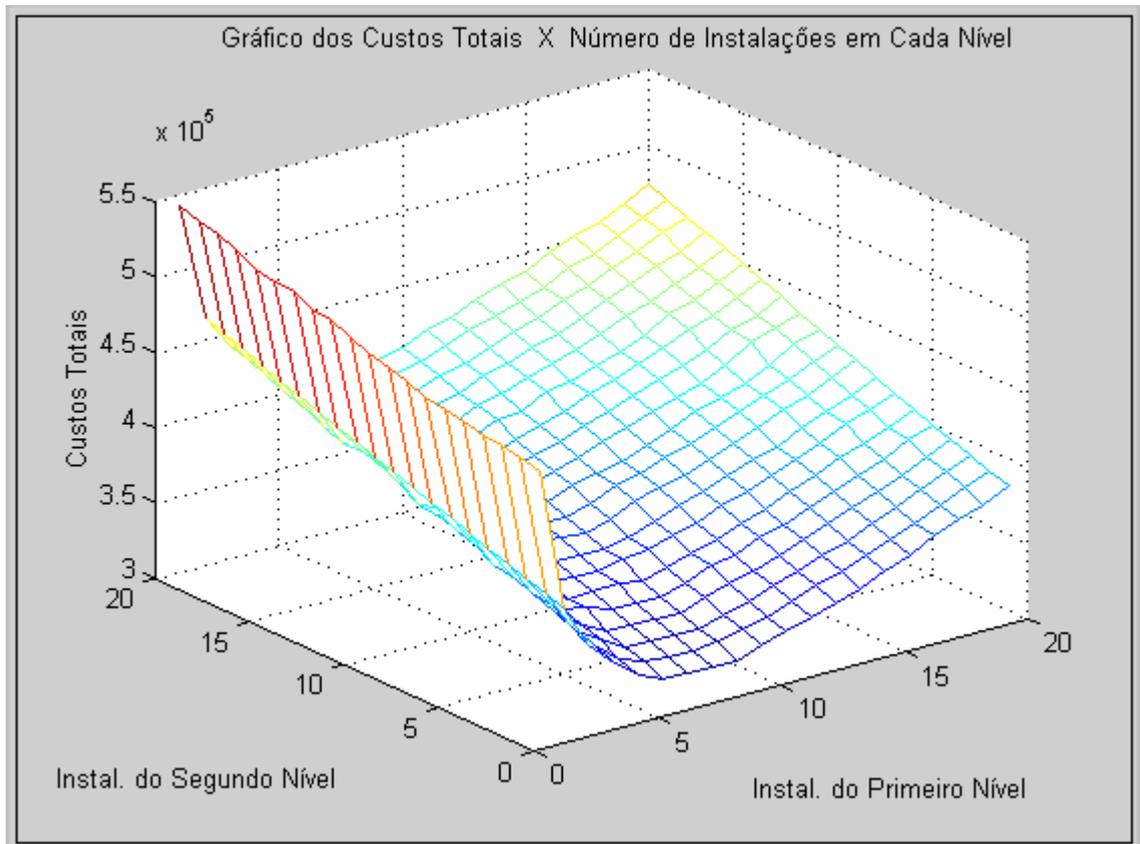
A taxa percentual de transferência da demanda dos clientes, entre instalações no segundo nível e instalações no primeiro nível é de 100 %, isto é  $\theta = 1$ .

Os custos unitários considerados para as instalações, foram de 5.000 para instalações no segundo nível e de 10.000 para instalações no primeiro nível.

Os resultados para estes problemas estão indicados na tabela 3, que traz os custos totais (custo de transporte + custo de abertura das instalações em ambos os níveis), para quantidades de instalações variando de 1 a 20 em cada nível.

Nesta tabela 3, é destacado (na cor vermelha) o menor valor de custos totais encontrado para os parâmetros utilizados, o que significa que o ideal seria construir uma instalação do segundo nível e 9 instalações do primeiro nível. Estes resultados estão representados graficamente na figura 14, onde observa-se novamente que os pontos do gráfico da função de custos totais  $F$  podem ser bem ajustados por uma função convexa.

FIGURA 14 - GRÁFICO DA VARIAÇÃO DOS CUSTOS TOTAIS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE INSTALAÇÕES EM CADA NÍVEL, PARA O CASO 2



### c) Caso 3

No terceiro caso, foram novamente considerados 100 problemas, onde o número de clientes é de 1000, com demandas variando entre 1 e 100. Estes dados também foram gerados aleatoriamente, de acordo com uma distribuição uniforme de probabilidades. No entanto, aqui foram consideradas as funções de custos com transporte  $C1$ , entre instalações no primeiro nível e instalações no segundo nível e  $C2$  para transporte entre clientes e instalações no segundo nível, ou entre clientes e instalações no primeiro nível, tais que:  $a_1 = 1$ ;  $b_1 = 0,01$ ;  $a_2 = 10$  e  $b_2 = 0,1$ .

A taxa percentual de transferência da demanda dos clientes, entre instalações no segundo nível e instalações no primeiro nível é de 100 %, isto é,  $\theta = 1$ .

Os custos unitários considerados para as instalações, foram de 25.000 para instalações no segundo nível e de 50.000 para instalações no primeiro nível.

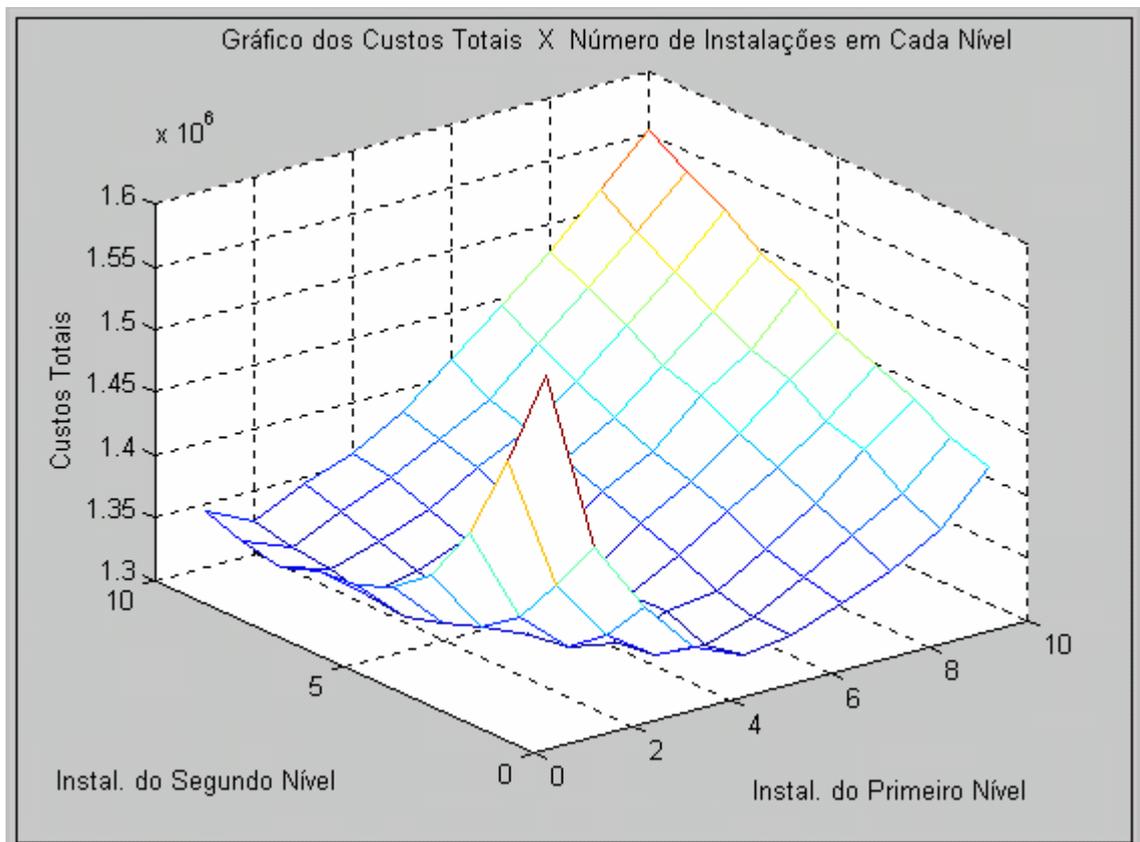
Os resultados para estes problemas estão indicados na tabela 4, que traz os custos totais (custo de transporte + custo de abertura das instalações em ambos os níveis), para quantidades de instalações variando de 1 a 10 em cada nível.

TABELA 4 - RESULTADOS DE PROBLEMAS COM ATÉ 10 INSTALAÇÕES POR NÍVEL PARA O CASO 3

INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,5761	1,4284	1,3713	1,3290	1,3111	1,3170	1,3319	1,3471	1,3703	1,4078
2	1,4949	1,3848	1,3345	1,3080	1,3065	1,3177	1,3387	1,3623	1,3853	1,4190
3	1,4239	1,3461	1,3115	1,3036	1,3191	1,3246	1,3468	1,3734	1,4062	1,4351
4	1,3765	1,3239	1,3079	1,3030	1,3185	1,3396	1,3633	1,3878	1,4141	1,4484
5	1,3529	1,3133	1,3091	1,3192	1,3233	1,3504	1,3736	1,4020	1,4334	1,4624
6	1,3409	1,3043	1,3093	1,3191	1,3347	1,3636	1,3845	1,4176	1,4442	1,4824
7	1,3377	1,3077	1,3170	1,3328	1,3472	1,3743	1,3981	1,4279	1,4613	1,4970
8	1,3275	1,3148	1,3271	1,3428	1,3646	1,3843	1,4130	1,4462	1,4789	1,5179
9	1,3352	1,3195	1,3375	1,3531	1,3736	1,3952	1,4287	1,4628	1,4969	1,5334
10	1,3443	1,3266	1,3457	1,3588	1,3824	1,4132	1,4446	1,4784	1,5159	1,5538

NOTA: Estes valores relativos aos custos, devem ser multiplicados pelo fator 1.0e+006.

FIGURA 15 - GRÁFICO DA VARIAÇÃO DOS CUSTOS TOTAIS EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE INSTALAÇÕES EM CADA NÍVEL, PARA O CASO 3



Nesta tabela 4, é destacado (na cor vermelha) o menor valor de custos totais

encontrado, o que significa que o ideal seria construir 4 instalações no segundo nível e 4 instalações no primeiro nível.

Estes resultados estão representados graficamente na figura 15. Assim como nos casos 1 e 2, os pontos do gráfico da função de custos totais  $F$  podem ser bem ajustados por uma função convexa.

#### 4.2.2 O Algoritmo Median-Heur

A base para a construção do algoritmo Median-Heur é a convexidade da função que ajusta os pontos do gráfico da função de custos totais  $F$ .

Nos passos do algoritmo Median-Heur que segue, um problema de localização de  $p$  e  $q$  instalações do primeiro e segundo nível, respectivamente, será denotado por  $Z_{pq}$  e o valor da solução do mesmo, obtido de forma aproximada, será indicado por  $Z_{pq}^*$ . Neste algoritmo, o valor de  $Z_{pq}^*$  é calculado pela soma dos custos com transporte, obtido aproximadamente com o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, com os custos de abertura das instalações.

Assim, a idéia do algoritmo Median-Heur é resolver, de acordo com os passos seguintes, um pequeno número de problemas  $Z_{pq}$ , conforme a modelagem da seção 3.2, dentre aqueles definidos no domínio  $P \times Q$ , onde  $P = \{1, 2, \dots, |P|\}$  e  $Q = \{1, 2, \dots, |Q|\}$  são os conjuntos das possíveis quantidades de instalações do primeiro e segundo nível, respectivamente, e  $|P|$  e  $|Q|$  indicam as quantidades máximas de instalações em cada um destes níveis, que serão consideradas nos problemas  $Z_{pq}$ .

Estes problemas são resolvidos sucessivamente no sentido do decrescimento dos custos totais das soluções destes problemas, até que se chegue a uma solução para o problema. Tal procedimento é possível, considerando que os pontos do gráfico da função de custos totais  $F$  podem ser bem ajustados por uma função convexa.

O algoritmo é iniciado com a resolução de um problema de localização com uma instalação em cada nível. Na seqüência, são resolvidos os problemas possíveis de se obter aumentando uma instalação no primeiro nível, aumentando uma instalação no segundo nível e em ambos os níveis. Destes problemas, considera-se o de menor valor

solução. A partir dele, resolve-se os problemas que são possíveis de se obter aumentando ou diminuindo uma instalação por nível. Novamente obtêm-se o de menor valor, e assim sucessivamente, até a obtenção de uma solução aproximada para o problema. Os passos deste algoritmo são detalhados na seqüência.

### Os passos do algoritmo Median-Heur

**Passo 1.** Faça  $i = j = 1$  e inicialize o conjunto de problemas como sendo  $L = \{ Z_{11} \}$ . Faça também  $\hat{Z} = Z_{11}$ .

**Passo 2.** Considere os conjuntos auxiliares:  $I = \{i-1, i, i+1\} \cap N^*$  e  $J = \{j-1, j, j+1\} \cap N^*$ . Utilizando o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, resolva e inclua no conjunto  $L$  os problemas do conjunto  $K$ , tal que  $K = \{ Z_{xy} / x \in I, y \in J \text{ e } Z_{xy} \notin L \}$ ,

**Passo 3.** Dos problemas resolvidos no conjunto  $K$  do passo anterior, obtenha  $Z_{x'y'}$  tal que  $Z_{x'y'}^* \leq Z_{xy}^*, \forall x \in I, y \in J$ .

**Passo 4.** Se  $Z_{x'y'}^* \leq \hat{Z}^*$ , faça  $i = x', j = y', \hat{Z} = Z_{x'y'}$ , e volte ao passo 2. Caso contrário PARE, pois as quantidades ideais de instalações para o primeiro e segundo nível são  $i$  e  $j$ , respectivamente, e o valor da solução para um problema com esta quantidade de instalações é igual a  $\hat{Z}^*$ .

No final do processo, a cardinalidade do conjunto  $L$  indica o total de problemas resolvidos. No caso da existência de alguma restrição orçamentária, limitando em números pequenos as quantidades de instalações em ambos os níveis, a quantidade de problemas a serem resolvidos com o algoritmo Median-Heur também será pequena.

Um fluxograma para o algoritmo Median-Heur é apresentado na figura 23 do anexo 4.

### 4.3 AVALIAÇÃO DAS PERFORMANCES DOS MÉTODOS PROPOSTOS

Com o objetivo de avaliar a performance dos algoritmos  $p$ - $q$ -Median-Heur e Median-Heur propostos, são utilizadas relaxações Lagrangeanas para a obtenção de limites inferiores para os valores da função objetivo. O método de otimização por subgradiente foi utilizado neste processo.

Estas relaxações são semelhantes à aquelas utilizadas em TRAGANTALERNNGSAK et al. (1997) e detalhados na seção 2.2.1.1.

Na seqüência, será descrito o algoritmo de subgradiente, onde  $LBD$  e  $UBD$  denotam os limites inferior e superior para o valor ótimo da função objetivo, respectivamente. O parâmetro  $t$  é um contador de iterações e  $d_t$  é o comprimento do passo na iteração  $t$ .

#### O algoritmo de subgradiente

A partir de um limite superior  $UBD$ , obtido com as técnicas propostas no presente trabalho, faz-se:

**Passo 1.** Inicialize:

Faça  $LBD \rightarrow -\infty$ ,  $t = 0$ ,  $d_0 \in (0, 2]$ ,  $t_{\max} = 800$  e inicialize  $\lambda^0$  e  $\omega^0$ .

**Passo 2.** Resolva o problema relaxado ( $RL$ ):

Resolva o problema relaxado ( $RL$ ), e faça  $w^t$  ser a solução. Faça  $LBD = \max \{LBD, \Theta(\lambda^t, \omega^t)\}$ .

**Passo 3.** Cheque a convergência:

Se  $d_t < 0,005$  ou  $t = t_{\max}$  (critério de convergência), então PARE.

**Passo 4.** Calcule o subgradiente:

Calcule o subgradiente como:  $\gamma^T = ((Hw^t)^T, (Gw^t)^T)$ .

Se  $\|\gamma\| = 0$ , então PARE.

**Passo 5.** Encontre o tamanho do passo:

Calcule  $T_t = d_t(UBD - \Theta(\lambda^t, \omega^t)) / \|\gamma\|^2$ .

**Passo 6.** Atualize os multiplicadores de Lagrange:

Faça  $(\lambda^{t+1}, \omega^{t+1}) = (\lambda^T, \omega^T) + T_t \gamma$  e ajuste  $(\lambda^{t+1})$ , fazendo  $\lambda^{t+1} = \max\{\lambda^{t+1}, 0\}$ .

**Passo 7.** Atualize o contador de iterações:

Faça  $t = t + 1$  e volte ao passo 2.

Na implementação computacional, são efetuadas algumas modificações sugeridas por BEASLEY (1993). Estas modificações são as seguintes:

No **Passo 4**, existe a condição  $\gamma_i = 0$ , se  $\lambda_i = 0$  e  $(Gw^t)_i < 0$ ,  $i \in nicon$ .

No **Passo 5**, foi usado 1,05 *UBD*, ao invés de *UBD*.

Para melhorar a convergência,  $d_t$  é normalmente decrescido, sempre que o *LBD* não tiver sido melhorado em um número fixo de 15 iterações.

Um fluxograma para este algoritmo de subgradiente é apresentado na figura 24 do anexo 4.

#### 4.3.1 Avaliação do Algoritmo *p-q*-Median-Heur

Relaxando as  $m$  restrições (128) e as  $m.m$  restrições (130), no modelo apresentado na seção 3.2, com multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  e  $\omega$ , respectivamente, a função objetivo do problema relaxado será igual a função objetivo (127), sem as parcelas 3 e 4 e acrescentada de:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \left(1 - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_{ijk} - \sum_{k=1}^m w_{ik}\right) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_{jk} (y_{jk} - z_k)$$

Assim, o problema relaxado fica igual a:

(*RL*):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (e_{ijk} - \lambda_i) \cdot x_{ijk} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (f_{ik} - \lambda_i) w_{ik} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_{jk} \cdot y_{jk} - \\ & - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_{jk} \cdot z_k + \sum_{i=1}^m \lambda_i \end{aligned} \quad (136)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^m y_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (137)$$

$$x_{ijk} \leq y_{jk}, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad (138)$$

$$w_{ik} \leq z_k, \quad i, k = 1, \dots, m, \quad (139)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m y_{jk} = q, \quad (140)$$

$$\sum_{k=1}^m z_k = p, \quad (141)$$

$$x_{ijk}, w_{ik}, y_{jk}, z_k \in \{0, 1\}. \quad (142)$$

Desta forma, o problema (RL) pode ser desmembrado nos dois subproblemas que seguem:

#### Subproblema (RL<sub>xy</sub>)

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (e_{ijk} - \lambda_i) \cdot x_{ijk} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_{jk} \cdot y_{jk} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (143)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^m y_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (144)$$

$$x_{ijk} \leq y_{jk}, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad (145)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m y_{jk} = q, \quad (146)$$

$$x_{ijk}, y_{jk} \in \{0, 1\}. \quad (147)$$

#### Subproblema (RL<sub>wz</sub>)

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (f_{ik} - \lambda_i) w_{ik} - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_{jk} \cdot z_k \quad (148)$$

s.a.

$$w_{ik} \leq z_k, \quad i, k = 1, \dots, m, \quad (149)$$

$$\sum_{k=1}^m z_k = p, \quad (150)$$

$$w_{ik}, z_k \in \{0, 1\}. \quad (151)$$

### Resolução do subproblema ( $RL_{xy}$ )

O problema ( $RL_{xy}$ ) pode ser resolvido como segue:

Suponha que a instalação do segundo nível em  $j$  é aberta e suprida pela instalação do primeiro nível em  $k$ , isto é,  $y_{jk} = 1$  e  $y_{jr} = 0, \forall r \neq k$ , então, a contribuição para o valor ótimo da função objetivo, envolvendo esta combinação será  $v_{jk}$ , que é dado por:

$$v_{jk} = \min \sum_{i=1}^m (e_{ijk} - \lambda_i) \cdot x_{ijk} + \omega_{jk} \quad (152)$$

s.a.

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad (153)$$

Este problema pode ser resolvido por inspeção, fazendo:

$$x_{ijk} = 1 \text{ se } (e_{ijk} - \lambda_i) \leq 0 \text{ e } x_{ijk} = 0 \text{ caso contrário.}$$

O problema ( $RL_{xy}$ ) fica:

$$\min \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m v_{jk} \cdot y_{jk} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (154)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^m y_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (155)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m y_{jk} = q, \quad (156)$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\} \quad (157)$$

Assim, a solução ótima para o ( $RL_{xy}$ ) é obtida da seguinte forma:

(a) para cada  $j$ , faça  $v_j = \min (v_{jk}, \forall k \neq j)$  e  $jK_j = \text{índice do } \min_k (v_{jk})$ .

Seja ainda  $x_{i,j,jK_j}^{v_j}$  a solução de cada problema  $v_j$ ;

(b) para cada um dos  $q$  menores valores de  $v_j$ , faça  $y_{j,jK_j} = 1$  e

$x_{i,j,jK_j} = x_{i,j,jK_j}^{v_j}$ . Nos outros casos, faça ambos iguais a zero.

### Resolução do subproblema ( $RL_{wz}$ )

O problema ( $RL_{wz}$ ) pode ser resolvido como segue:

Suponha que a instalação do primeiro nível em  $k$  é aberta, isto é,  $z_k = 1$ , então a contribuição para o valor ótimo da função objetivo, envolvendo esta instalação será  $v_k$ , que é dado por:

$$v_k = \min \sum_{i=1}^m (f_{ik} - \lambda_i) \cdot w_{ik} - \sum_{j=1}^m \omega_{jk} \quad (158)$$

s.a.

$$w_{ik} \in \{0, 1\} \quad (159)$$

Este problema pode ser resolvido por inspeção, fazendo:

$$w_{ik} = 1 \text{ se } (f_{ik} - \lambda_i) \leq 0 \text{ e } w_{ik} = 0 \text{ caso contrário.}$$

Desta forma, sendo  $w'_{ik}$  a solução de (158), para os  $p$  menores valores de  $v_k$  faz-se  $z_k = 1$  e  $w_{ik} = w'_{ik}$ . Nos outros casos, faça ambos iguais a zero.

O valor ótimo do problema relaxado ( $RL$ ) é obtido da soma dos valores ótimos dos subproblemas Lagrangeanos ( $RL_{xy}$ ) e ( $RL_{wz}$ ).

### 4.3.2 Avaliação do Algoritmo Median-Heur

Relaxando as  $m$  restrições do tipo (128) e as  $m.m$  restrições do tipo (130), no modelo apresentado na seção 3.3, com multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  e  $\omega$ , respectivamente, a função objetivo do problema relaxado será igual a função objetivo (127), acrescentada de:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (1 - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_{ijk} - \sum_{k=1}^m w_{ik}) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_{jk} (y_{jk} - z_k)$$

Além disto, são incluídas as restrições:

$$\sum_{k=1}^m y_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m;$$

que garantem que cada instalação aberta no segundo nível é suprida por uma única instalação do primeiro nível. Embora este conjunto de restrições seja redundante no modelo original ( $P$ ), ele deixa de ser redundante no modelo relaxado.

Assim, o problema relaxado fica igual a:

( $RL$ ):

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (e_{ijk} - \lambda_i) \cdot x_{ijk} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (f_{ik} - \lambda_i) w_{ik} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (g_{jk} + \omega_{jk}) \cdot y_{jk} + \\ + \sum_{k=1}^m (h_k - \sum_{j=1}^m \omega_{jk}) \cdot z_k + \sum_{i=1}^m \lambda_i \end{aligned} \quad (160)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^m y_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (161)$$

$$x_{ijk} \leq y_{jk}, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad (162)$$

$$w_{ik} \leq z_k, \quad i, k = 1, \dots, m, \quad (163)$$

$$x_{ijk}, w_{ik}, y_{jk}, z_k \in \{0, 1\}. \quad (164)$$

Desta forma, o problema ( $RL$ ) pode ser desmembrado nos dois subproblemas abaixo:

### Subproblema ( $RL_{xy}$ )

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (e_{ijk} - \lambda_i) \cdot x_{ijk} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (g_{jk} + \omega_{jk}) \cdot y_{jk} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (165)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^m y_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (166)$$

$$x_{ijk} \leq y_{jk}, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad (167)$$

$$x_{ijk}, y_{jk} \in \{0, 1\}. \quad (168)$$

### Subproblema ( $RL_{wz}$ )

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (f_{ik} - \lambda_i) w_{ik} + \sum_{k=1}^m (h_k - \sum_{j=1}^m \omega_{jk}) \cdot z_k \quad (169)$$

s.a.

$$w_{ik} \leq z_k, \quad i, k = 1, \dots, m, \quad (170)$$

$$w_{ik}, z_k \in \{0, 1\}. \quad (171)$$

### Resolução do subproblema ( $RL_{xy}$ )

O problema ( $RL_{xy}$ ) pode ser resolvido como segue:

Suponha que a instalação do segundo nível em  $j$  é aberta e suprida pela instalação do primeiro nível em  $k$ , isto é,  $y_{jk} = 1$  e  $y_{jr} = 0, \forall r \neq k$ , então, a contribuição para o valor ótimo da função objetivo, envolvendo esta combinação será  $v_{jk}$ , que é dado por:

$$v_{jk} = \min \sum_{i=1}^m (e_{ijk} - \lambda_i) \cdot x_{ijk} + (g_{jk} + \omega_{jk}) \quad (172)$$

s.a.

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad (173)$$

Este problema pode ser resolvido por inspeção, fazendo:

$$x_{ijk} = 1 \text{ se } (e_{ijk} - \lambda_i) \leq 0 \text{ e } x_{ijk} = 0 \text{ caso contrário.}$$

O problema ( $RL_{xy}$ ) fica:

$$\min \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m v_{jk} \cdot y_{jk} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \quad (174)$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^m y_{jk} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m, \quad (175)$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\} \quad (176)$$

Seja  $x'_{ijk}$  a solução de (172). Assim, a solução ótima para o  $(RL_{xy})$  é obtida como:

- (a) para cada  $j$ , faça  $v'_j = \min(v_{jk}, \forall k \neq j)$  e  $jK_j =$  o índice do  $\min_k(v_{jk})$ ;  
 (b) se  $v'_j \leq 0$ , faça  $y_{j,jK_j} = 1$  e  $x_{i,j,jK_j} = x'_{i,j,jK_j}$ . Caso contrário, faça ambos iguais a zero.

### Resolução do subproblema $(RL_{wz})$

O problema  $(RL_{wz})$  pode ser resolvido como segue:

Suponha que a instalação do primeiro nível em  $k$  é aberta, isto é,  $z_k = 1$ , então a contribuição para o valor ótimo da função objetivo, envolvendo esta instalação será  $v_k$ , que é dado por:

$$v_k = \min \sum_{i=1}^m (f_{ik} - \lambda_i) \cdot w_{ik} + (h_k - \sum_{j=1}^m \omega_{jk}) \quad (177)$$

s.a.

$$w_{ik} \in \{0, 1\} \quad (178)$$

Este problema pode ser resolvido por inspeção, fazendo:

$$w_{ik} = 1 \text{ se } (f_{ik} - \lambda_i) \leq 0 \text{ e } w_{ik} = 0 \text{ caso contrário.}$$

O problema  $(RL_{wz})$  pode ser resolvido como segue:

Seja  $w'_{ik}$  a solução de (177), assim, a solução ótima para o  $(RL_{wz})$  é obtida fazendo  $z_k = 1$  e  $w_{ik} = w'_{ik}$ , se  $v_k \leq 0$ . Caso contrário, faça ambos iguais a zero.

O valor ótimo do problema relaxado  $(RL)$  é obtido da soma dos valores ótimos dos subproblemas Lagrangeanos  $(RL_{xy})$  e  $(RL_{wz})$ .

## 5 OS RESULTADOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS

Nas seções 5.1 e 5.2 que seguem, são apresentados diversos resultados computacionais obtidos com o uso dos algoritmos  $p$ - $q$ -Median-Heur e Median-Heur, respectivamente.

Os algoritmos  $p$ - $q$ -Median-Heur e Median-Heur foram programados na linguagem DELPHY 5.0, e o processamento foi efetuado em um computador INTEL-Celeron 333 Mhz, com 64 Mb de memória RAM.

### 5.1 RESULTADOS OBTIDOS COM O ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR

Na seção 5.1.1 são apresentados os resultados de seis conjuntos de problemas testes, onde foi variada de 1 a 10 a quantidade de instalações em cada nível. A seção 5.1.2 contém os resultados de diversos problemas resolvidos diversas vezes com o objetivo de mostrar a pequena variabilidade de uma solução para outra. Na seção 5.1.3 são mostrados os resultados de diversos problemas resolvidos com o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur e com o software LINGO, que é uma ferramenta computacional que permite resolver problemas de programação linear e não-linear. Também foram obtidos limites inferiores através das relaxações Lagrangeanas, descritas na seção 4.3.

#### 5.1.1 Resultados de Problemas Diversos

Nesta seção são apresentados os resultados de seis conjuntos de problemas testes, sendo que em cada um destes conjuntos, a quantidade de instalações em cada nível variou de 1 a 10. Desta forma, tem-se um total 600 problemas testes, cujos resultados computacionais estão dispostos nas seis tabelas seguintes.

Em cada conjunto de testes, foram considerados problemas, onde as localizações dos clientes foram geradas aleatoriamente, assim como suas demandas (estas geradas aleatoriamente entre 1 e 100), conforme uma distribuição uniforme de probabilidades.

Adotou-se um parâmetro  $\alpha = 0,05$  para o algoritmo de Teitz e Bart modificado, utilizado na *Forward p-median heuristic* do passo 1 do algoritmo *p-q-Median-Heur*.

Nas tabelas 5A, 6A, 7A, 8A, 9A e 10A que seguem, são apresentados apenas os custos com transporte, não estando incluídos aqueles relativos a abertura das instalações. Estes custos foram apresentados para mostrar a tendência da redução de custos dos mesmos, conforme já era esperado, a medida que se aumenta a quantidade de instalações em cada nível, demonstrando a consistência do método proposto. O fato de tal redução não ter sido verificada em alguns casos, se justifica pelo fato do método utilizado não ser um método exato.

O objetivo da apresentação dos tempos computacionais nas tabelas 5B, 6B, 7B, 8B, 9B e 10B, foi somente para que se possa fazer uma avaliação do desempenho do algoritmo, no que diz respeito a este quesito.

### Conjunto de testes 1

Para este primeiro conjunto de testes, foi considerado um total de 500 clientes.

As funções de custos com transporte  $C1$ , entre instalações no primeiro nível e instalações no segundo nível e  $C2$  para transporte entre clientes e instalações no segundo nível, ou entre clientes e instalações no primeiro nível, são tais que:  $a_1 = 0$ ;  $b_1 = 0,05$ ;  $a_2 = 0$  e  $b_2 = 0,05$ .

A taxa percentual de transferência da demanda, entre instalações no segundo nível e instalações no primeiro nível é de 30 %, isto é  $\theta = 0,3$ .

Os resultados computacionais para este conjunto de testes 1 se encontram nas tabelas 5A e 5B.

TABELA 5A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 1

CUSTOS COM TRANSPORTE										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,7123	2,0497	1,7510	1,5125	1,3394	1,2048	1,1075	1,0330	0,9522	0,9219
2	2,5288	1,9435	1,6552	1,4423	1,2900	1,1758	1,0907	1,0055	0,9398	0,8939
3	2,3089	1,8131	1,5694	1,4008	1,2496	1,1461	1,0680	0,9779	0,9232	0,8720
4	2,1616	1,7444	1,5083	1,3750	1,2114	1,1210	1,0444	0,9645	0,9118	0,8630
5	2,0566	1,6300	1,4465	1,2994	1,1890	1,1067	1,0180	0,9439	0,8784	0,8446
6	1,9755	1,5724	1,3906	1,2694	1,1728	1,0803	0,9949	0,9517	0,8746	0,8314
7	1,8941	1,5006	1,3708	1,2343	1,1429	1,0540	0,9746	0,9234	0,8551	0,8168
8	1,8196	1,4683	1,3497	1,2143	1,1062	1,0091	0,9524	0,8811	0,8462	0,8154
9	1,7856	1,4441	1,3037	1,1938	1,0886	1,0305	0,9349	0,8928	0,8353	0,7830
10	1,7582	1,4072	1,2626	1,1773	1,0723	0,9812	0,9298	0,8706	0,8186	0,7795

NOTA: Estes valores relativos aos custos, devem ser multiplicados pelo fator 1.0e+005.

TABELA 5B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 1

TEMPOS COMPUTACIONAIS (EM SEGUNDOS)										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,2200	0,2200	0,2200	0,3300	0,3900	0,3300	0,4400	0,3800	0,3900	0,3800
2	0,2700	0,2800	0,2200	0,2700	0,4400	0,3300	0,3900	0,3300	0,3800	0,3900
3	0,3200	0,2800	0,3300	0,3300	0,3800	0,3900	0,3300	0,4900	0,3900	0,4400
4	0,2700	0,3300	0,3800	0,3900	0,4400	0,3800	0,3900	0,4400	0,4900	0,4400
5	0,3300	0,3800	0,3900	0,3800	0,3900	0,3800	0,5000	0,4900	0,5500	0,5500
6	0,3300	0,3800	0,3300	0,3300	0,5000	0,4900	0,4900	0,5500	0,6100	0,5500
7	0,4400	0,4400	0,4900	0,3900	0,4900	0,3800	0,5500	0,3900	0,5500	0,4400
8	0,3800	0,3900	0,4300	0,4400	0,5000	0,8200	0,6100	0,4900	0,6600	0,4400
9	0,3300	0,6000	0,4400	0,4400	0,5000	0,4400	0,3300	0,3800	0,6600	0,5000
10	0,3800	0,5000	0,5500	0,6600	0,5400	0,4400	0,5500	0,5500	0,6100	0,6000

## Conjunto de testes 2

Para o conjunto de testes 2, foi considerado um total de 1000 clientes.

Os parâmetros das funções de custos com transporte  $C1$  e  $C2$ , são os mesmos utilizados no conjunto de testes 1, assim como o valor do parâmetro  $\theta$ .

Os resultados computacionais para este conjunto de testes 2 se encontram nas tabelas 6A e 6B.

TABELA 6A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 2

CUSTOS COM TRANSPORTE										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5,4786	4,1208	3,5255	3,0417	2,6939	2,4460	2,2763	2,0905	1,9669	1,8891
2	5,0976	3,8824	3,3129	2,8918	2,5988	2,3932	2,2205	2,0709	1,9308	1,8407
3	4,6658	3,6552	3,1656	2,8067	2,5943	2,3040	2,1505	2,0064	1,9242	1,8207
4	4,3487	3,4845	3,0555	2,7090	2,4827	2,3047	2,1536	1,9891	1,8534	1,7799
5	4,1221	3,3748	2,9548	2,6706	2,4018	2,2454	2,0719	1,9487	1,8402	1,7419
6	3,9796	3,2196	2,8780	2,5934	2,3380	2,2078	2,0406	1,9061	1,8035	1,7280
7	3,8622	3,1532	2,8139	2,5289	2,3041	2,1371	1,9807	1,8872	1,7595	1,6779
8	3,7108	3,0059	2,7324	2,4595	2,2817	2,0997	1,9795	1,8358	1,7330	1,6674
9	3,6259	2,9186	2,6767	2,4248	2,2281	2,0261	1,9048	1,7904	1,7199	1,6483
10	3,5864	2,8558	2,6128	2,3483	2,1401	2,0168	1,8870	1,7745	1,6913	1,6330

NOTA: Estes valores relativos aos custos, devem ser multiplicados pelo fator  $1.0e+005$ .

TABELA 6B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 2

TEMPOS COMPUTACIONAIS (EM SEGUNDOS)										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,4900	1,2600	1,9200	1,3200	1,5400	1,8700	2,0800	1,9800	2,6400	2,5800
2	1,7600	2,0800	1,3800	1,9200	1,4300	2,0300	2,4700	2,1400	2,6400	2,1400
3	1,3200	1,9200	1,9200	2,3700	2,0300	2,5200	2,1500	2,6300	2,2000	2,6400
4	2,4100	2,0400	2,2500	2,5200	2,5900	2,1400	2,1400	2,2000	2,2500	2,8000
5	1,9200	2,4200	2,5300	2,6900	3,2400	2,6900	3,1300	2,2500	2,6900	2,6900
6	2,4200	1,5400	2,6400	3,1800	2,2000	2,7400	3,1900	2,2000	1,7500	2,3100
7	2,5300	2,1400	2,6400	2,2500	2,2000	2,6300	2,8600	3,2900	2,8600	2,3600
8	2,0900	2,0900	3,6800	2,3000	2,2000	3,1900	2,8500	4,7300	2,8000	3,0200
9	3,1800	3,1900	2,2000	2,7400	2,7500	2,3000	2,8600	2,9700	3,4600	3,4600
10	2,1400	2,2000	2,8000	3,7300	2,2000	2,3600	2,4200	3,5100	3,0800	3,5700

### Conjunto de testes 3

Para o conjunto de testes 3, foi considerado um total de 2000 clientes.

Os parâmetros das funções de custos com transporte  $C1$  e  $C2$ , são os mesmos utilizados nos conjuntos de testes 1 e 2, assim como o valor do parâmetro  $\theta$ .

Os resultados computacionais para este conjunto de testes 3 se encontram nas tabelas 7A e 7B.

TABELA 7A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 3

CUSTOS COM TRANSPORTE										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,0878	0,8219	0,6960	0,6015	0,5341	0,4857	0,4497	0,4216	0,3956	0,3774
2	0,9792	0,7754	0,6563	0,5790	0,5196	0,4735	0,4418	0,4122	0,3890	0,3678
3	0,9189	0,7327	0,6323	0,5563	0,5055	0,4655	0,4310	0,4042	0,3838	0,3600
4	0,8553	0,7341	0,6152	0,5419	0,4913	0,4509	0,4220	0,3964	0,3756	0,3554
5	0,8128	0,6690	0,5915	0,5272	0,4829	0,4379	0,4145	0,3948	0,3744	0,3506
6	0,7848	0,6447	0,5621	0,5154	0,4666	0,4393	0,4107	0,3886	0,3618	0,3514
7	0,7628	0,6160	0,5548	0,5006	0,4555	0,4233	0,3991	0,3804	0,3578	0,3419
8	0,7453	0,5995	0,5442	0,4935	0,4505	0,4168	0,3885	0,3750	0,3544	0,3380
9	0,7198	0,5809	0,5254	0,4741	0,4393	0,4107	0,3835	0,3666	0,3493	0,3318
10	0,7064	0,5647	0,5160	0,4683	0,4317	0,4080	0,3802	0,3635	0,3434	0,3299

NOTA: Estes valores relativos aos custos, devem ser multiplicados pelo fator 1.0e+006.

TABELA 7B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 3

TEMPOS COMPUTACIONAIS (EM SEGUNDOS)										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7,5300	10,4900	7,3600	8,5700	6,9200	8,8900	13,5200	11,7500	9,5600	9,8300
2	10,1600	9,2800	15,3300	6,3700	8,8400	11,3700	7,0900	7,1900	14,3900	9,8300
3	9,4000	8,6700	8,6800	11,6500	9,2200	11,6500	9,5500	9,7300	12,0200	12,0900
4	15,9800	10,7700	8,8400	13,9000	9,5500	12,0900	11,8100	9,9900	12,4700	10,2700
5	15,6600	11,5800	9,1800	16,0900	9,7800	12,1400	12,3000	10,2200	10,1600	10,7100
6	7,0800	16,1000	9,7200	12,0300	10,0500	12,1400	9,9400	14,9900	10,4400	14,9400
7	13,7800	9,4000	12,0800	12,0800	9,9400	9,7800	10,1600	10,6000	10,6000	13,1900
8	7,3000	12,0300	9,7200	12,2000	9,9400	15,0500	12,6300	15,4300	13,1300	15,9300
9	9,8900	9,8300	10,1600	12,3000	15,0000	12,9000	13,2400	10,9900	15,9200	11,3700
10	10,1100	10,1600	10,4400	12,5800	12,4600	10,7700	11,0400	13,7300	9,2300	18,5600

### Conjunto de testes 4

Para o conjunto de testes 4, foi considerado um total de 500 clientes.

As funções de custos com transporte  $C1$ , entre instalações no primeiro nível e instalações no segundo nível e  $C2$  para transporte entre clientes e instalações no segundo nível, ou entre clientes e instalações no primeiro nível, são tais que:  $a_1 = 2,7636$ ;  $b_1 = 0,0359$ ;  $a_2 = 4,5495$  e  $b_2 = 0,0546$ .

A taxa percentual de transferência da demanda, entre instalações no segundo nível e instalações no primeiro nível é de 100 %, isto é  $\theta = 1$ .

Os resultados computacionais para este conjunto de testes 4 se encontram nas tabelas 8A e 8B.

TABELA 8A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 4

CUSTOS COM TRANSPORTE										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4,6102	3,5525	3,1705	2,9030	2,6790	2,5068	2,3967	2,3017	2,1958	2,1529
2	4,5962	3,5426	3,1966	2,9052	2,6754	2,5035	2,4058	2,2958	2,1981	2,1445
3	4,5652	3,5365	3,1884	2,8939	2,7067	2,5033	2,3982	2,2938	2,1952	2,1386
4	4,5018	3,5228	3,1846	2,9642	2,6893	2,5086	2,4003	2,3031	2,1860	2,1366
5	4,5139	3,5221	3,1863	2,9215	2,7233	2,5363	2,3975	2,2891	2,1934	2,1385
6	4,5030	3,5158	3,1644	2,9174	2,6668	2,5556	2,3991	2,2943	2,1941	2,1626
7	4,4659	3,5143	3,2259	2,9116	2,6765	2,5148	2,3970	2,3033	2,1854	2,1360
8	4,4559	3,5078	3,2246	2,9176	2,6711	2,5084	2,4152	2,2777	2,1887	2,1648
9	4,4571	3,4955	3,1826	2,9433	2,6756	2,6147	2,3990	2,3264	2,2141	2,1286
10	4,4328	3,4933	3,1196	2,9121	2,6980	2,5108	2,4000	2,2835	2,1807	2,1283

NOTA: Estes valores relativos aos custos, devem ser multiplicados pelo fator 1.0e+005.

TABELA 8B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 4

TEMPOS COMPUTACIONAIS (EM SEGUNDOS)										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,3200	0,2200	0,2800	0,3300	0,3800	0,3300	0,4400	0,4400	0,3900	0,3800
2	0,2700	0,2800	0,2700	0,2800	0,4400	0,3800	0,3900	0,3300	0,4400	0,3800
3	0,3300	0,2700	0,3900	0,3800	0,3900	0,3800	0,3900	0,4900	0,4400	0,3900
4	0,3800	0,3800	0,3900	0,3800	0,5000	0,4400	0,4400	0,4400	0,4900	0,4400
5	0,3800	0,3900	0,4400	0,3800	0,3900	0,4400	0,4900	0,4900	0,6100	0,4900
6	0,3900	0,4400	0,3800	0,3300	0,5500	0,4900	0,5500	0,6100	0,6600	0,4900
7	0,5000	0,4900	0,5500	0,4400	0,4900	0,4400	0,5500	0,4400	0,6100	0,4900
8	0,3800	0,4400	0,4400	0,4400	0,5000	0,8800	0,6500	0,5500	0,6600	0,5000
9	0,3800	0,6100	0,4400	0,4900	0,5500	0,4400	0,3800	0,4400	0,7200	0,4900
10	0,3900	0,5400	0,6100	0,7100	0,5500	0,5000	0,6000	0,6000	0,6100	0,6600

### Conjunto de testes 5

Para o conjunto de testes 5, foi considerado um total de 1000 clientes.

Os parâmetros das funções de custos com transporte  $C1$  e  $C2$ , são os mesmos utilizados no conjunto de testes 4, assim como o valor do parâmetro  $\theta$ .

Os resultados computacionais para este conjunto de testes 5 se encontram nas tabelas 9A e 9B.

TABELA 9A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 5

CUSTOS COM TRANSPORTE										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9,2475	7,1228	6,4081	5,8330	5,4284	5,0934	4,8476	4,6587	4,5214	4,4293
2	9,1635	7,1142	6,4018	5,8367	5,4196	5,0958	4,8598	4,6930	4,5096	4,3954
3	9,1396	7,1016	6,4038	5,8411	5,4195	5,0632	4,8387	4,6616	4,5142	4,4207
4	9,0896	7,0822	6,3971	5,8251	5,4217	5,0813	4,8504	4,6936	4,5148	4,4336
5	9,0771	7,0681	6,4712	5,8277	5,4408	5,0702	4,8773	4,6509	4,5095	4,4112
6	9,0168	7,0645	6,3768	5,8371	5,3844	5,1400	4,9265	4,6583	4,5192	4,3947
7	9,0123	7,0641	6,4822	5,8039	5,4307	5,0644	4,8612	4,7009	4,5025	4,3889
8	8,9585	7,0465	6,4287	5,8614	5,4066	5,1197	4,8587	4,6385	4,4958	4,4204
9	8,9147	7,0407	6,4355	5,8675	5,3961	5,0731	4,8975	4,6504	4,5481	4,4202
10	8,8864	7,0350	6,4225	5,8544	5,3950	5,1058	4,8275	4,6887	4,5310	4,4510

NOTA: Estes valores relativos aos custos, devem ser multiplicados pelo fator 1.0e+005.

TABELA 9B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 5

TEMPOS COMPUTACIONAIS (EM SEGUNDOS)										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2,0900	1,4800	2,0300	1,4300	1,3200	1,8700	2,0300	2,0300	2,6400	2,5800
2	2,4100	2,3700	1,5300	1,9300	1,4200	2,2000	2,5800	2,2000	2,6900	2,2000
3	2,0300	2,1400	2,0900	2,4700	2,3100	2,8500	2,1500	2,6400	2,4700	2,6400
4	3,0200	2,1900	2,1500	2,5800	2,6900	2,3100	2,1400	2,3000	2,2000	2,9700
5	2,2500	3,0200	2,6900	2,9100	3,4600	2,8600	3,2400	2,3100	2,7400	2,7500
6	2,9700	1,9200	2,7400	3,4100	2,2500	3,0200	3,3500	2,3100	1,8700	2,3600
7	3,0200	2,5300	3,0700	2,5300	2,3600	2,8600	2,9100	3,5700	2,9100	2,4700
8	2,3600	2,4200	3,9000	2,3100	2,4100	3,3500	3,0200	4,8400	2,9100	3,0200
9	3,7300	3,5200	2,4700	3,0200	3,0800	2,4100	2,9700	2,9700	3,4600	3,5700
10	2,7400	2,7500	2,9100	3,9000	2,4200	2,5200	2,5300	3,5200	3,1300	3,6200

### Conjunto de testes 6

Para o conjunto de testes 6, foi considerado um total de 2000 clientes.

Os parâmetros das funções de custos com transporte  $C1$  e  $C2$ , são os mesmos utilizados nos conjuntos de testes 4 e 5, assim como o valor do parâmetro  $\theta$ .

Os resultados computacionais para este conjunto de testes 6 se encontram nas tabelas 10A e 10B.

TABELA 10A - CUSTOS COM TRANSPORTE OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 6

CUSTOS COM TRANSPORTE										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,8289	1,4125	1,2705	1,1547	1,0750	1,0055	0,9653	0,9295	0,9021	0,8776
2	1,8182	1,4099	1,2727	1,1557	1,0795	1,0079	0,9658	0,9293	0,9002	0,8793
3	1,8042	1,4108	1,2744	1,1652	1,0727	1,0051	0,9675	0,9289	0,9011	0,8763
4	1,7942	1,4118	1,2791	1,1709	1,0695	1,0044	0,9621	0,9281	0,9020	0,8766
5	1,7895	1,4048	1,2792	1,1742	1,0737	1,0044	0,9686	0,9314	0,9131	0,8798
6	1,7802	1,4048	1,2664	1,1707	1,0704	1,0078	0,9681	0,9312	0,9010	0,8821
7	1,7821	1,4039	1,2695	1,1510	1,0763	1,0078	0,9675	0,9366	0,9060	0,8794
8	1,7760	1,4036	1,2765	1,1530	1,0808	1,0039	0,9664	0,9376	0,9016	0,8797
9	1,7617	1,4010	1,2690	1,1518	1,0746	1,0060	0,9650	0,9278	0,9004	0,8768
10	1,7661	1,3981	1,2659	1,1498	1,0776	1,0306	0,9676	0,9371	0,9060	0,8805

NOTA: Estes valores relativos aos custos, devem ser multiplicados pelo fator 1.0e+006.

TABELA 10B - TEMPOS COMPUTACIONAIS OBTIDOS PARA O CONJUNTO DE TESTES 6

TEMPOS COMPUTACIONAIS (EM SEGUNDOS)										
INSTAL. DO SEGUNDO NÍVEL	INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	16,8100	12,4100	8,7300	8,7900	7,4200	8,8400	13,4000	11,5400	9,4400	9,7800
2	13,5700	11,6400	15,6600	8,3400	9,1800	11,8100	7,0300	8,1800	14,9900	10,0600
3	14,9900	11,9700	9,7800	12,6900	9,3900	12,1900	10,2200	10,6000	12,8500	12,6900
4	19,3900	13,4600	10,5400	14,7200	10,3300	12,4700	12,7400	10,9800	12,8600	10,7600
5	19,7800	15,4300	10,9300	17,3000	10,3300	12,5800	12,9000	11,4800	11,3200	10,8700
6	10,9300	20,2700	12,0800	14,0600	10,7700	13,0700	11,6500	16,0900	10,8700	16,1500
7	16,4800	13,7900	15,3200	16,5900	10,8200	10,9300	10,9800	11,3200	10,8700	13,4100
8	10,6500	15,3800	11,8100	13,7900	10,9800	15,6000	13,0200	15,9300	13,6700	16,3700
9	14,7200	12,6300	11,7600	14,0600	16,0900	13,9500	13,7300	12,2500	16,4200	11,7000
10	12,3600	12,5200	11,5900	13,8400	13,4600	11,4800	11,5900	14,3900	9,7200	18,5600

### 5.1.2 Resultados de Simulações Repetidas de Diversos Problemas

Os testes computacionais cujos resultados são apresentados nas tabelas 11, 12 e 13 que seguem, foram efetuados com o objetivo de mostrar a pequena variabilidade de uma solução para outra, quando o mesmo problema é resolvido diversas vezes sucessivas com os mesmos parâmetros, utilizando o algoritmo *p-q-Median-Heur*. Isto é necessário uma vez que o referido algoritmo incorpora componentes aleatórios, como a geração de soluções iniciais aleatórias.

Nestas tabelas, a coluna *GAP's* indica a diferença percentual entre o maior e o menor dos valores obtidos nas diversas simulações dos problemas, sendo calculado pela fórmula:

$$GAP = \frac{\text{Maior Valor} - \text{Menor Valor}}{\text{Maior Valor}} * 100$$

Em todos os problemas das tabelas 11 e 12, as localizações dos clientes, bem como as suas demandas (estas variando entre 1 e 100), foram geradas aleatoriamente de acordo com uma distribuição uniforme de probabilidades.

Na tabela 11, são apresentados 16 problemas, numerados de A1 a A16, onde se busca a localização de uma instalação do primeiro nível e três instalações do segundo nível, sendo que a quantidade de clientes variou de 50 a 1000. Cada um destes problemas foi resolvido 100 vezes. Esta tabela traz o menor valor obtido, o maior valor obtido, o valor médio e o desvio padrão dos 100 valores encontrados para estes problemas, além de outras informações. O parâmetro  $\theta$  indica a fração da demanda que é transferida entre as instalações do segundo nível e as instalações do primeiro nível, conforme os modelos matemáticos das seções 3.2 e 3.3. O parâmetro  $\alpha$  é aquele utilizado no algoritmo de Teitz e Bart modificado e que permite distingui-lo do algoritmo de Teitz e Bart convencional, conforme a seção 4.1.1.

TABELA 11 - SIMULAÇÕES REPETIDAS DE DIVERSOS PROBLEMAS COM 1 INSTALAÇÃO DO PRIMEIRO NÍVEL E 3 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$				
PROBLEMA NÚMERO	CLIENTES / INSTALAÇÕES	MENOR VALOR OBTIDO	MAIOR VALOR OBTIDO	VALOR MÉDIO OBTIDO
A1	50/3/1	43.141,52	44.067,11	43.187,79
A2	50/3/1	43.141,52	44.067,11	43.187,79
A3	50/3/1	48.044,74	48.321,43	48.307,60
A4	50/3/1	48.044,74	48.321,43	48.307,60
A5	100/3/1	88.608,32	89.102,63	88.672,58
A6	100/3/1	88.608,32	89.452,13	88.684,26
A7	100/3/1	97.547,85	98.076,96	97.616,64
A8	100/3/1	97.547,85	98.268,40	97.612,70
A9	500/3/1	479.622,57	486.866,62	483.667,75
A10	500/3/1	479.622,57	486.866,62	483.667,75
A11	500/3/1	526.128,91	534.525,61	530.899,22
A12	500/3/1	526.128,91	534.525,61	530.899,22
A13	1000/3/1	969.690,48	973.425,64	971.367,97
A14	1000/3/1	969.690,48	973.425,64	971.367,97
A15	1000/3/1	1.060.904,03	1.068.131,85	1.064.485,79
A16	1000/3/1	1.060.904,03	1.068.131,85	1.064.485,79

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$					
PROBLEMA NÚMERO	DESVIO PADRÃO	$GAP's$	TEMPO COMPUTACIONAL MÉDIO (EM SEG.)	$\theta$	$\alpha$
A1	202,75	2,1004	0,0076	0,1	1
A2	202,74	2,1004	0,0049	0,1	0,3
A3	60,61	0,5726	0,0077	0,3	1
A4	60,61	0,5726	0,0055	0,3	0,3
A5	167,08	0,5548	0,0312	0,1	1
A6	242,70	0,9433	0,0170	0,1	0,3
A7	178,84	0,5395	0,0319	0,3	1
A8	207,25	0,7332	0,0181	0,3	0,3
A9	3.460,06	1,4879	1,3956	0,1	1
A10	3.460,06	1,4879	0,3768	0,1	0,3
A11	4.093,07	1,5709	1,3610	0,3	1
A12	4.093,07	1,5709	0,4207	0,3	0,3
A13	1.041,86	0,3837	10,0817	0,1	1
A14	1.041,86	0,3837	2,5216	0,1	0,3
A15	1.961,17	0,6767	9,9607	0,3	1
A16	1.961,17	0,6767	2,4690	0,3	0,3

Na tabela 12, são apresentados outros 16 problemas, numerados de B1 a B16, onde se busca a localização de duas instalações do primeiro nível e cinco instalações do segundo nível, sendo que a quantidade de clientes variou de 50 a 1000. Cada um destes problemas foi resolvido 100 vezes. Novamente a referida tabela traz o menor valor obtido, o maior valor obtido, o valor médio e o desvio padrão dos 100

valores encontrados para estes problemas, além de outras informações. Os parâmetros  $\theta$  e  $\alpha$  são os mesmos da tabela anterior.

TABELA 12- SIMULAÇÕES REPETIDAS DE DIVERSOS PROBLEMAS COM 2 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 5 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$					
PROBLEMA NÚMERO	CLIENTES / INSTALAÇÕES	MENOR VALOR OBTIDO	MAIOR VALOR OBTIDO	VALOR MÉDIO OBTIDO	
B1	50/5/2	33.047,44	33.599,36	33.241,13	
B2	50/5/2	33.047,44	34.524,81	33.586,23	
B3	50/5/2	36.229,55	37.304,55	36.292,86	
B4	50/5/2	36.229,55	38.069,20	36.682,64	
B5	100/5/2	68.825,42	70.404,33	68.929,14	
B6	100/5/2	67.930,51	71.063,47	68.996,25	
B7	100/5/2	74.770,12	77.810,83	74.923,30	
B8	100/5/2	74.770,12	77.810,83	75.082,71	
B9	500/5/2	397.878,28	401.833,56	399.149,32	
B10	500/5/2	397.878,28	401.833,56	399.148,24	
B11	500/5/2	431.739,17	436.179,29	434.357,06	
B12	500/5/2	431.739,17	436.179,29	434.370,61	
B13	1000/5/2	805.400,33	808.258,46	806.889,80	
B14	1000/5/2	805.400,33	808.258,46	806.889,80	
B15	1000/5/2	876.152,49	884.566,67	878.126,06	
B16	1000/5/2	876.152,49	884.566,67	878.126,06	

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$					
PROBLEMA NÚMERO	DESVIO PADRÃO	$GAP's$	TEMPO COMPUTACIONAL MÉDIO (EM SEG.)	$\theta$	$\alpha$
B1	108,74	1,6426	0,0116	0,1	1
B2	290,08	4,2791	0,0071	0,1	0,3
B3	109,09	2,8817	0,0122	0,3	1
B4	443,34	4,8324	0,0077	0,3	0,3
B5	363,63	2,2426	0,0319	0,1	1
B6	599,80	4,4087	0,0290	0,1	0,3
B7	535,53	3,9078	0,0302	0,3	1
B8	833,96	3,9078	0,0143	0,3	0,3
B9	848,94	0,9843	2,8990	0,1	1
B10	842,23	0,9843	0,5778	0,1	0,3
B11	1.464,50	1,0180	3,1114	0,3	1
B12	1.467,98	1,0180	0,5701	0,3	0,3
B13	620,19	0,3536	20,3372	0,1	1
B14	620,19	0,3536	3,3487	0,1	0,3
B15	2.106,76	0,9512	19,0575	0,3	1
B16	2.106,76	0,9512	3,4954	0,3	0,3

Na tabela 13, são apresentados resultados de problemas semelhantes aos problemas das tabelas 11 e 12. A diferença é que nestes casos as localizações dos clientes (que possuem demandas variando entre 1 e 100), não são uniformemente

distribuídas. Para gerar estes dados foi desenvolvido um programa gerador de dados aleatórios onde são criadas uma ou mais regiões onde a concentração de clientes é maior, como na região central de algumas cidades.

TABELA 13- SIMULAÇÕES REPETIDAS DE DIVERSOS PROBLEMAS COM 2 INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E 5 INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL, COM CLIENTES GERADOS ALEATORIAMENTE, PORÉM NÃO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDOS

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$				
PROBLEMA NÚMERO	CLIENTES / INSTALAÇÕES	MENOR VALOR OBTIDO	MAIOR VALOR OBTIDO	VALOR MÉDIO OBTIDO
C1	50/5/2	33.707,48	34.482,62	33.788,35
C2	50/5/2	33.689,17	36.541,78	34.752,33
C3	50/5/2	36.499,67	37.365,16	36.604,23
C4	50/5/2	36.499,67	39.692,04	37.620,41
C5	100/5/2	71.968,13	73.773,40	72.178,99
C6	100/5/2	71.968,13	75.135,27	72.768,99
C7	100/5/2	77.892,56	79.291,62	78.207,10
C8	100/5/2	77.892,56	82.976,17	79.425,52
C9	500/5/2	363.248,65	369.206,33	363.827,57
C10	500/5/2	363.248,65	369.206,33	363.986,64
C11	500/5/2	389.837,22	395.749,41	390.215,50
C12	500/5/2	389.837,22	395.749,41	390.415,05
C13	1000/5/2	717.366,10	718.438,32	718.142,42
C14	1000/5/2	717.366,10	718.438,32	718.142,42
C15	1000/5/2	766.936,96	771.000,45	770.167,98
C16	1000/5/2	766.936,96	771.000,45	770.167,98

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$					
PROBLEMA NÚMERO	DESVIO PADRÃO	$GAP's$	TEMPO COMPUTACIONAL MÉDIO (EM SEG.)	$\theta$	$\alpha$
C1	209,50	2,2566	0,0104	0,1	1
C2	775,16	7,8064	0,0067	0,1	0,3
C3	254,40	2,3163	0,0104	0,3	1
C4	837,48	8,0428	0,0072	0,3	0,3
C5	501,94	2,4470	0,0539	0,1	1
C6	851,54	4,2152	0,0181	0,1	0,3
C7	455,27	1,7645	0,0550	0,3	1
C8	1.154,50	6,1266	0,0175	0,3	0,3
C9	1.463,96	1,6136	3,2434	0,1	1
C10	1.593,04	1,6136	0,6816	0,1	0,3
C11	1.260,95	1,4939	3,4779	0,3	1
C12	1.499,45	1,4939	0,6932	0,3	0,3
C13	291,17	0,1492	18,2177	0,1	1
C14	291,17	0,1492	3,6970	0,1	0,3
C15	1.259,33	0,5270	18,2677	0,3	1
C16	1.259,33	0,5270	3,7942	0,3	0,3

### 5.1.3 Avaliação da Qualidade das Soluções

Nas tabelas 14, 15 e 16 desta seção, são apresentados os resultados computacionais de diversos problemas resolvidos com o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur e com o software LINGO. Também são apresentados limites inferiores obtidos através de relaxação Lagrangeana. Na coluna *GAP's* existem dois valores por linha. O primeiro destes valores se refere ao *GAP* percentual entre a solução encontrada com o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur e a solução encontrada com o software LINGO. O segundo valor é o *GAP* percentual entre a solução encontrada com o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur e o limite inferior obtido pela relaxação Lagrangeana. A quantidade de clientes variou entre 10 a 35. Os problemas destas tabelas possuem 1 e 3, 1 e 4, e 2 e 4 instalações do primeiro e segundo nível, respectivamente. Problemas com mais de 35 clientes não foram resolvidos com o software LINGO, por exceder a capacidade do computador utilizado. O parâmetro  $\theta$  novamente indica a fração da demanda que é transferida entre as instalações do segundo nível e as instalações do primeiro nível.

Em todos os problemas das tabelas 14, 15 e 16, as localizações dos clientes, bem como as suas demandas (estas variando entre 1 e 100), foram geradas aleatoriamente de acordo com uma distribuição uniforme de probabilidades.

Para todos os problemas desta seção, assim como na seção 5.2, adotou-se um parâmetro  $\alpha = 1$  para o algoritmo de Teitz e Bart modificado, utilizado na *Forward p-median heuristic* do passo 1 do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur. Isto significa que o algoritmo de Teitz e Bart modificado tornou-se equivalente ao algoritmo de Teitz e Bart original.

TABELA 14 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO  $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 10 A 35 CLIENTES, COM UMA E TRÊS INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636, \quad b_1 = 0,0359, \quad a_2 = 7,4894, \quad b_2 = 0,0830$					
PROBLEMA NÚMERO	NÚMERO DE CLIENTES E INSTALAÇÕES	SOLUÇÃO OBTIDA COM O SOFTWARE LINGO	LIMITE INFERIOR OBTIDO ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	SOLUÇÃO DO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR	
D1	10/3/1	3.905,05	3.842,63	3.904,56	
D2	10/3/1	4.668,80	4.451,71	4.668,36	
D3	15/3/1	9.087,98	8.918,63	9.087,43	
D4	15/3/1	10.506,80	9.899,21	10.506,15	
D5	20/3/1	15.073,63	13.967,81	15.074,54	
D6	20/3/1	17.398,60	13.886,15	17.400,21	
D7	25/3/1	20.398,09	19.274,22	20.531,54	
D8	25/3/1	23.349,40	20.415,23	23.350,72	
D9	30/3/1	26.326,26	25.722,99	26.325,76	
D10	30/3/1	29.844,20	27.210,98	29.925,95	
D11	35/3/1	28.647,67	27.939,47	28.959,78	

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636, \quad b_1 = 0,0359, \quad a_2 = 7,4894, \quad b_2 = 0,0830$					
PROBLEMA NÚMERO	$GAP$ 's	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA O LINGO HH/MM/SS	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA HH/MM/SS	NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	$\theta$
D1	0,0125 – 1,6116	00:00:12	menos que 1 seg.	96	0,1
D2	0,0094 – 4,8668	00:00:15	menos que 1 seg.	70	0,3
D3	0,0061 – 1,8927	00:00:16	menos que 1 seg.	140	0,1
D4	0,0062 – 6,1312	00:00:26	menos que 1 seg.	202	0,3
D5	0,0060 – 7,9234	00:01:58	menos que 1 seg.	125	0,1
D6	0,009 – 25,3063	00:01:41	menos que 1 seg.	136	0,3
D7	0,6542 – 6,5233	00:11:07	menos que 1 seg.	172	0,1
D8	0,0057 – 14,3789	00:17:47	menos que 1 seg.	161	0,3
D9	0,0019 – 2,3433	00:17:03	00:00:01	180	0,1
D10	0,2739 – 9,9775	03:17:48	00:00:02	263	0,3
D11	1,0895 – 3,6518	00:15:09	00:00:03	256	0,1

NOTA:  $GAP = \frac{|\text{Solução Lingo ou Limite Inferior} - \text{Solução Heurística}|}{\text{Solução Lingo ou Limite Inferior}} * 100$

TABELA 15 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO  $p_1$ - $p_2$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 10 A 35 CLIENTES, UMA OU DUAS INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E QUATRO DO SEGUNDO NÍVEL

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$					
PROBLEMA NÚMERO	NÚMERO DE CLIENTES E INSTALAÇÕES	SOLUÇÃO OBTIDA COM O SOFTWARE LINGO	LIMITE INFERIOR OBTIDO ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	SOLUÇÃO DO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR	
E1	10/4/1	3.704,20	3.326,92	3.652,38	
E2	15/4/1	8.592,60	7.658,49	8.592,23	
E3	20/4/1	15.373,10	13.749,81	15.374,47	
E4	25/4/1	20.022,30	17.512,40	20.023,77	
E5	30/4/1	26.517,10	23.987,74	26.517,90	
E6	10/4/2	2.473,04	2.247,13	2.421,29	
E7	15/4/2	5.888,00	5.498,00	5.888,17	
E8	20/4/2	12.083,00	11.220,83	12.138,69	
E9	25/4/2	15.558,10	14.412,41	15.559,14	
E10	30/4/2	21.714,10	20.576,32	21.714,66	
E11	35/4/2	24.593,60	23.209,33	24.595,76	

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$					
PROBLEMA NÚMERO	$GAP$ 's	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA O LINGO HH/MM/SS	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA HH/MM/SS	NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	$\theta$
E1	1,3990 – 9,7826	00:00:05	menos que 1 seg.	78	0,3
E2	0,0043 – 12,1922	00:00:23	menos que 1 seg.	76	0,3
E3	0,0089 – 11,8158	00:03:20	menos que 1 seg.	254	0,3
E4	0,0073 – 14,3406	00:18:28	menos que 1 seg.	181	0,3
E5	0,0030 – 10,5477	03:29:34	00:00:01	243	0,3
E6	2,0926 – 7,7501	00:00:04	menos que 1 seg.	115	0,3
E7	0,0029 – 7,0966	00:00:12	menos que 1 seg.	106	0,3
E8	0,4609 – 8,1800	00:00:41	menos que 1 seg.	190	0,3
E9	0,0067 – 7,9566	00:03:35	menos que 1 seg.	73	0,3
E10	0,0026 – 5,5323	00:18:32	00:00:01	155	0,3
E11	0,0088 – 5,9736	00:54:43	00:00:03	221	0,3

NOTA:  $GAP = \frac{|\text{Solução Lingo ou Limite Inferior} - \text{Solução Heurística}|}{\text{Solução Lingo ou Limite Inferior}} * 100$

TABELA 16 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO  $p_1$ - $p_2$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 10 A 25 CLIENTES, UMA OU DUAS INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E TRÊS OU QUATRO INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 0,$ $b_1 = 1,$ $a_2 = 0,$ $b_2 = 1$				
PROBLEMA NÚMERO	NÚMERO DE CLIENTES E INSTALAÇÕES	SOLUÇÃO OBTIDA COM O SOFTWARE LINGO	LIMITE INFERIOR OBTIDO ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	SOLUÇÃO DO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR
F1	10/3/1	33.136,30	31.237,24	33.137,13
F2	15/3/1	73.161,00	67.774,26	73.161,55
F3	20/3/1	123.978,00	111.843,21	123.991,78
F4	25/3/1	167.280,60	146.781,79	167.686,71
F5	10/4/2	14.317,50	12.938,85	14.318,87
F6	15/4/2	35.817,00	32.311,24	35.816,75
F7	20/4/2	81.142,30	72.707,27	81.155,73
F8	25/4/2	99.284,50	88.017,26	98.613,18

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 0,$ $b_1 = 1,$ $a_2 = 0,$ $b_2 = 1$					
PROBLEMA NÚMERO	$GAP$ 's	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA O LINGO HH/MM/SS	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA HH/MM/SS	NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	$\theta$
F1	0,0025 – 6,0821	00:00:04	menos que 1 seg.	93	0,1
F2	0,0008 – 7,9489	00:00:12	menos que 1 seg.	141	0,1
F3	0,0111 – 10,8621	00:01:47	menos que 1 seg.	188	0,1
F4	0,2428 – 14,2422	00:04:57	00:00:01	228	0,1
F5	0,0096 – 10,6657	00:00:04	menos que 1 seg.	94	0,1
F6	0,0007 – 10,8492	00:00:11	menos que 1 seg.	69	0,1
F7	0,0166 – 11,6198	00:03:57	menos que 1 seg.	116	0,1
F8	0,6762 – 12,0385	00:10:28	menos que 1 seg.	74	0,1

NOTA:  $GAP = \frac{|\text{Solução Lingo ou Limite Inferior} - \text{Solução Heurística}|}{\text{Solução Lingo ou Limite Inferior}} * 100$

Nas tabelas 17, 18 e 19, são apresentados os resultados computacionais de diversos problemas resolvidos com o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur e os limites inferiores obtidos através de relaxação Lagrangeana. A quantidade de clientes variou entre 50 a 1000. Os problemas destas tabelas possuem 2 e 5, e 2 e 7 instalações do primeiro e segundo nível, respectivamente. Para o parâmetro  $\theta$  foram utilizados valores iguais a 0,1 e 0,3. Em todos estes problemas, as localizações dos clientes, bem como as suas demandas (estas variando entre 1 e 100), foram geradas aleatoriamente de acordo com uma distribuição uniforme de probabilidades.

TABELA 17 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO  $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 1000 CLIENTES, DUAS E CINCO INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$				
PROBLEMA NÚMERO	NÚMERO DE CLIENTES E INSTALAÇÕES	LIMITE INFERIOR OBTIDO ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	SOLUÇÃO DO $p$ - $q$ -MEDIAN- HEUR	$GAP$ 's
G1	50/5/2	32.409,58	33.286,83	2,7068
G2	50/5/2	34.008,75	36.288,65	6,7039
G3	100/5/2	67.374,76	68.825,42	2,1531
G4	100/5/2	70.023,10	74.770,12	6,7792
G5	150/5/2	114.891,81	117.730,49	2,4707
G6	150/5/2	119.118,57	128.254,11	7,6693
G7	200/5/2	157.593,84	162.085,95	2,8504
G8	200/5/2	163.046,53	175.883,15	7,8730
G9	250/5/2	195.347,83	201.502,71	3,1507
G10	250/5/2	201.783,16	219.805,42	8,9315
G11	300/5/2	231.688,87	239.545,56	3,3911
G12	300/5/2	239.283,97	260.630,65	8,9211
G13	500/5/2	385.044,77	398.781,44	3,5676
G14	500/5/2	395.869,80	434.113,13	9,6606
G15	1000/5/2	777.641,27	806.962,46	3,7705

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$				
PROBLEMA NÚMERO	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA HH/MM/SS	NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	$\theta$	
G1	00:00:09	240	0,1	
G2	00:00:09	222	0,3	
G3	00:01:24	233	0,1	
G4	00:01:20	224	0,3	
G5	00:05:19	247	0,1	
G6	00:06:39	306	0,3	
G7	00:14:13	273	0,1	
G8	00:13:27	261	0,3	
G9	00:25:43	250	0,1	
G10	00:28:57	276	0,3	
G11	00:43:34	242	0,1	
G12	00:57:37	310	0,3	
G13	03:17:14	310 *	0,1	
G14	01:30:07	297 **	0,3	
G15	17:40:20	330 **	0,1	

NOTAS: Vide próxima página.

NOTAS: (1)  $GAP = \frac{|\text{Limite Inferior} - \text{Solução Heurística}|}{\text{Limite Inferior}} * 100$

(2) \* Resultado obtido com o uso de um computador com processador INTEL Pentium 4 com 1.4 GHz e 516 Mb de memória RAM.

(3) \* \* Resultado obtido com o uso de um computador com processador INTEL Pentium 3 com 1.0 GHz e 320 Mb de memória RAM.

(4) Nos outros casos usou-se um computador CELERON com 333 MHz e 64 Mb de memória RAM.

TABELA 18 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO  $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 300 CLIENTES, DUAS INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL E CINCO OU SETE INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 2,7636, \quad b_1 = 0,0359, \quad a_2 = 4,5495, \quad b_2 = 0,0546$				
PROBLEMA NÚMERO	NÚMERO DE CLIENTES E INSTALAÇÕES	LIMITE INFERIOR OBTIDO ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	SOLUÇÃO DO $p$ - $q$ -MEDIAN- HEUR	$GAP$ 's
H1	50/5/2	20.855,64	21.675,97	3,9334
H2	100/5/2	43.153,66	44.666,50	3,5057
H3	150/5/2	73.678,98	76.638,08	4,0162
H4	200/5/2	100.853,71	105.084,79	4,1953
H5	250/5/2	125.027,72	131.098,21	4,8553
H6	300/5/2	148.103,68	155.873,11	5,2459
H7	50/7/2	18.112,55	18.865,58	4,1575
H8	100/7/2	39.011,47	40.837,12	4,6798
H9	150/7/2	67.382,34	70.967,87	5,3212
H10	200/7/2	92.999,11	97.649,67	5,0007
H11	250/7/2	115.242,51	121.311,27	5,2661
H12	300/7/2	136.898,80	143.884,64	5,1029

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$			
$a_1 = 2,7636, \quad b_1 = 0,0359, \quad a_2 = 4,5495, \quad b_2 = 0,0546$			
PROBLEMA NÚMERO	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA HH/MM/SS	NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	$\theta$
H1	00:00:10	260	0,1
H2	00:01:09	193	0,1
H3	00:04:40	217	0,1
H4	00:12:29	244	0,1
H5	00:34:09	322	0,1
H6	00:48:48	274	0,1
H7	00:00:09	232	0,1
H8	00:01:25	241	0,1
H9	00:05:07	239	0,1
H10	00:15:37	304	0,1
H11	00:30:52	308	0,1
H12	00:44:54	232	0,1

NOTA:  $GAP = \frac{|\text{Limite Inferior} - \text{Solução Heurística}|}{\text{Limite Inferior}} * 100$

TABELA 19 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO  $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 300 CLIENTES, DUAS E CINCO INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 0,$ $b_1 = 1,$ $a_2 = 0,$ $b_2 = 1$				
PROBLEMA NÚMERO	NÚMERO DE CLIENTES E INSTALAÇÕES	LIMITE INFERIOR OBTIDO ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	SOLUÇÃO DO $p$ - $q$ -MEDIAN- HEUR	$GAP$ 's
I1	50/5/2	207.960,78	227.529,76	9,4099
I2	100/5/2	409.579,22	456.155,16	11,3717
I3	150/5/2	718.839,54	811.002,50	12,8211
I4	200/5/2	977.599,72	1.096.650,89	12,1779
I5	250/5/2	1.203.123,01	1.374.595,08	14,2522
I6	300/5/2	1.409.600,55	1.616.882,88	14,7050

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 0,$ $b_1 = 1,$ $a_2 = 0,$ $b_2 = 1$				
PROBLEMA NÚMERO	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA HH/MM/SS	NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	$\theta$	
I1	00:00:10	265	0,1	
I2	00:01:16	213	0,1	
I3	00:05:48	268	0,1	
I4	00:17:07	321	0,1	
I5	00:29:32	287	0,1	
I6	01:02:52	326	0,1	

NOTA:  $GAP = \frac{|\text{Limite Inferior} - \text{Solução Heurística}|}{\text{Limite Inferior}} * 100$

Na tabela 20, são apresentados resultados de problemas semelhantes aos problemas das tabelas 17, 18 e 19. Nestes casos, assim como na tabela 13, as localizações dos clientes (com demandas variando entre 1 e 100), não são uniformemente distribuídas.

TABELA 20 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO  $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 300 CLIENTES GERADOS ALEATORIAMENTE, PORÉM NÃO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDOS, DUAS E CINCO INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO E SEGUNDO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 2,7636, \quad b_1 = 0,0359, \quad a_2 = 7,4894, \quad b_2 = 0,0830$				
PROBLEMA NÚMERO	NÚMERO DE CLIENTES E INSTALAÇÕES	LIMITE INFERIOR OBTIDO ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	SOLUÇÃO DO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR	$GAP$ 's
J1	50/5/2	33.208,06	33.704,48	1,4949
J2	100/5/2	70.793,43	72.165,23	1,9378
J3	150/5/2	110.018,19	113.049,14	2,7550
J4	200/5/2	146.289,93	150.322,05	2,7563
J5	250/5/2	181.766,53	186.488,98	2,5981
J6	300/5/2	217.650,45	226.498,37	4,0652

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$			
$a_1 = 2,7636, \quad b_1 = 0,0359, \quad a_2 = 7,4894, \quad b_2 = 0,0830$			
PROBLEMA NÚMERO	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA HH/MM/SS	NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	$\theta$
J1	00:00:08	217	0,1
J2	00:01:32	259	0,1
J3	00:05:06	236	0,1
J4	00:15:47	305	0,1
J5	00:38:10	362	0,1
J6	00:58:25	314	0,1

NOTA:  $GAP = \frac{|\text{Limite Inferior} - \text{Solução Heurística}|}{\text{Limite Inferior}} * 100$

## 5.2 RESULTADOS OBTIDOS COM O ALGORITMO MEDIAN-HEUR

Nas tabelas 21 e 22 são apresentados os resultados computacionais de diversos problemas resolvidos com o algoritmo Median-Heur e os limites inferiores obtidos através de relaxação Lagrangeana. A quantidade de clientes variou entre 50 a 200, com demandas variando entre 1 e 100, conforme uma distribuição uniforme de probabilidades. Para o parâmetro  $\theta$  foram utilizados valores iguais a 0,1 e 0,3.

TABELA 21 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 200 CLIENTES E CUSTOS DE 1.000,00 PARA INSTALAÇÕES DE AMBOS OS NÍVEIS

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$					
CUSTOS UNITÁRIOS COM INSTALAÇÕES					
INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL = 1.000,00 - INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL = 1.000,00					
PROBLEMA NÚMERO	NÚMERO DE CLIENTES	QUANTIDADE DE INSTALAÇÕES ABERTAS COM O MEDIAN-HEUR	LIMITE INFERIOR OBTIDO ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	SOLUÇÃO DO MEDIAN-HEUR	
K1	50	13/1	33.254,09	36.737,41	
K2	50	12/2	36.590,88	40.849,95	
K3	100	19/2	60.958,24	65.510,22	
K4	100	14/7	65.336,31	71.704,56	
K5	150	28/3	94.754,04	99.377,26	
K6	150	17/10	99.953,23	108.244,11	
K7	200	30/5	122.057,93	129.741,89	
K8	200	13/14	129.739,75	141.840,77	

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$					
$a_1 = 2,7636,$ $b_1 = 0,0359,$ $a_2 = 7,4894,$ $b_2 = 0,0830$					
CUSTOS UNITÁRIOS COM INSTALAÇÕES					
INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL = 1.000,00 - INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL = 1.000,00					
PROBLEMA NÚMERO	$GAP's$	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA HH/MM/SS	NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	$\theta$	
K1	10,4749	00:00:05	144	0,1	
K2	11,6397	00:00:05	128	0,3	
K3	7,4674	00:00:53	158	0,1	
K4	9,7469	00:00:47	140	0,3	
K5	4,8792	00:04:28	218	0,1	
K6	8,2948	00:03:56	192	0,3	
K7	6,2953	00:08:20	171	0,1	
K8	9,3272	00:09:26	194	0,3	

NOTA:  $GAP = \frac{|\text{Limite Inferior} - \text{Solução Heurística}|}{\text{Limite Inferior}} * 100$

TABELA 22 - AVALIAÇÃO DO ALGORITMO MEDIAN-HEUR PARA PROBLEMAS DE 50 A 200 CLIENTES E CUSTOS DE 3.000,00 E 5.000,00 PARA INSTALAÇÕES DO SEGUNDO E PRIMEIRO NÍVEL, RESPECTIVAMENTE

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 2,7636, \quad b_1 = 0,0359, \quad a_2 = 7,4894, \quad b_2 = 0,0830$				
CUSTOS UNITÁRIOS COM INSTALAÇÕES				
INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL = 5.000,00 - INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL = 3.000,00				
PROBLEMA NÚMERO	NÚMERO DE MERCADOS	QUANTIDADE DE INSTALAÇÕES ABERTAS COM O MEDIAN-HEUR	LIMITE INFERIOR OBTIDO ATRAVÉS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	SOLUÇÃO DO MEDIAN-HEUR
L1	50	4/1	55.190,87	56.341,52
L2	50	3/2	57.435,80	59.967,52
L3	100	5/2	91.118,86	93.825,42
L4	100	3/4	95.219,21	98.833,12
L5	150	10/2	133.940,37	137.592,17
L6	150	3/7	140.964,79	145.871,10
L7	200	11/2	170.991,62	175.335,36
L8	200	2/9	179.241,33	185.363,41

COEFICIENTES DAS FUNÇÕES DE CUSTOS $C1$ E $C2$				
$a_1 = 2,7636, \quad b_1 = 0,0359, \quad a_2 = 7,4894, \quad b_2 = 0,0830$				
CUSTOS UNITÁRIOS COM INSTALAÇÕES				
INSTALAÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL = 5.000,00 - INSTALAÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL = 3.000,00				
PROBLEMA NÚMERO	$GAP's$	TEMPOS COMPUTACIONAIS PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA HH/MM/SS	NÚMERO DE ITERAÇÕES PARA A RELAXAÇÃO LAGRANGEANA	$\theta$
L1	2,0849	00:00:13	325	0,1
L2	4,4079	00:00:07	195	0,3
L3	2,9704	00:03:10	550	0,1
L4	3,7954	00:01:46	309	0,3
L5	2,7264	00:10:01	475	0,1
L6	3,4805	00:09:35	452	0,3
L7	2,5403	00:33:27	680	0,1
L8	3,4156	00:17:28	353	0,3

NOTA:  $GAP = \frac{|\text{Limite Inferior} - \text{Solução Heurística}|}{\text{Limite Inferior}} * 100$

### 5.3 UM EXEMPLO PRÁTICO DE APLICAÇÃO DO ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR

Nesta seção é apresentado um exemplo prático de aplicação do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur.

O problema trata da localização de 7 postos de saúde 24 horas (chamados de unidades de saúde 24 horas) e 3 hospitais, na cidade de Curitiba (PR), de forma que cada posto de saúde 24 horas deve se reportar a algum destes 3 hospitais para encaminhar os casos não solucionados no próprio posto.

De acordo com o sistema de atendimento emergencial implantado pela prefeitura, estes postos de saúde 24 horas devem funcionar em parceria com os três principais hospitais universitários da cidade (Hospital do Cajuru, Hospital de Clínicas e Hospital Evangélico). Pelo programa intitulado "Sistema de atenção à emergência e urgência clínica", os três hospitais atenderão os casos de maior complexidade.

Atualmente os postos de saúde 24 horas situam-se nos bairros da Fazendinha, Boa Vista, Sítio Cercado, Campo Comprido, Boqueirão, Cajuru e Pinheirinho.

O Hospital de Clínicas da Universidade Federal do Paraná, localiza-se no bairro Alto da Glória e supervisiona os serviços prestados nas unidades de saúde 24 horas dos Bairros de Fazendinha e Boa Vista. O Hospital Evangélico localiza-se no bairro do Bigorrião e é responsável pelos postos de saúde dos bairros de Sítio Cercado e Campo Comprido. O Hospital do Cajuru, localizado no bairro do mesmo nome, atende aos postos de saúde dos bairros do Boqueirão, Cajuru e Pinheirinho.

Para exemplificar de forma prática o método proposto neste trabalho, foi realizada uma simulação com o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, e os resultados indicam as localizações onde deveriam ser instalados os 3 hospitais e os 7 postos de saúde 24 horas (caso os mesmos ainda não tivessem sido construídos).

Para simplificar o problema, considerou-se que as demandas localizam-se nos baricentros geométricos dos 75 bairros da cidade de Curitiba (PR), conforme ilustrado na figura 16. As coordenadas destes baricentros, bem como as populações dos bairros foram obtidas em ROSÁRIO (2002) e são apresentados na tabela 23.

TABELA 23 - BAIRROS DE CURITIBA (PR) COM SUAS COORDENADAS CARTESIANAS E POPULAÇÕES (DADOS DE 1996).

BAIRROS	NÚMERO DO BAIRRO	ABSCISSA (X)	ORDENADA (Y)	POPULAÇÃO
ABRANCHES	1	163	35	9494
ÁGUA VERDE	2	153	127	49863
AHÚ	3	172	71	10194
ALTO BOQUEIRÃO	4	197	215	47619
ALTO DA GLÓRIA	5	173	90	5788
ALTO DA RUA XV	6	183	97	8683
ATUBA	7	227	54	11230
AUGUSTA	8	65	147	3151
BACACHERI	9	205	69	23080
BAIRRO ALTO	10	226	79	38034
BARREIRINHA	11	177	36	16167
BATEL	12	147	112	11665
BIGORRILHO	13	138	101	25331
BOA VISTA	14	187	54	29288
BOM RETIRO	15	158	78	5890
BOQUEIRÃO	16	196	179	66462
BUTIATUVINHA	17	81	64	8997
CABRAL	18	185	76	8987
CACHOEIRA	19	177	20	6615
CAJURU	20	227	132	84286
CAMPINA DO SIQUEIRA	21	127	110	7177
CAMPO COMPRIDO	22	105	122	20134
CAMPO DE SANTANA	23	111	280	6895
CAPÃO DA IMBUIA	24	218	107	19639
CAPÃO RASO	25	138	179	33424
CASCATINHA	26	124	82	1651
CAXIMBA	27	88	305	1790
CENTRO	28	166	102	35845
CENTRO CÍVICO	29	167	84	5167
CIDADE INDUSTRIAL	30	95	167	95841
CRISTO REI	31	191	105	12291
FANNY	32	165	155	8346
FAZENDINHA	33	112	154	25364
GANCHINHO	34	176	253	5847
GUABIROTUBA	35	191	136	10379
GUAIRÁ	36	161	142	13988
HAUER	37	182	152	12936
HUGO LANGE	38	189	87	3406
JARDIM BOTÂNICO	39	190	114	6670
JARDIM DAS AMÉRICAS	40	204	131	12906
JARDIM SOCIAL	41	199	88	6055
JUVEVÊ	42	178	85	11223
LAMENHA PEQUENA	43	101	31	648
LINDÓIA	44	157	152	8213
MERCÊS	45	143	91	14613
MOSSUNGUÊ	46	111	107	4436
NOVO MUNDO	47	138	162	40770
ORLEANS	48	71	95	6126
PAROLIN	49	171	135	11880
PILARZINHO	50	148	57	25497

PINHEIRINHO	51	142	200	48036
PORTÃO	52	134	144	40581
PRADO VELHO	53	181	124	7822
REBOUÇAS	54	170	115	15166
RIVIERA	55	56	105	217
SANTA CÂNDIDA	56	203	32	24003
SANTA FELICIDADE	57	109	67	23154
SANTA QUITÉRIA	58	125	133	11248
SANTO INÁCIO	59	110	95	5727
SÃO BRAZ	60	87	84	21944
SÃO FRANCISCO	61	159	92	7470
SÃO JOÃO	62	125	59	2624
SÃO LOURENÇO	63	169	58	5726
SÃO MIGUEL	64	75	178	2895
SEMINÁRIO	65	131	119	7650
SÍTIO CERCADO	66	166	220	89034
TABOÃO	67	156	38	2326
TARUMÃ	68	211	97	6838
TATUQUARA	69	114	243	19469
TINGUI	70	214	54	11123
UBERABA	71	217	161	45676
UMBARÁ	72	147	260	12003
VILA ISABEL	73	140	128	10408
VISTA ALEGRE	74	141	76	9751
XAXIM	75	167	183	50237

Para as funções de custos com transporte  $C1$ , entre instalações no primeiro nível e instalações no segundo nível e  $C2$  para transporte entre clientes e instalações no segundo nível, ou entre clientes e instalações no primeiro nível, foram utilizados os seguintes parâmetros:  $a_1 = 0$ ;  $b_1 = 1$ ;  $a_2 = 0$  e  $b_2 = 1$ .

A taxa percentual de transferência da demanda entre instalações no segundo nível e instalações no primeiro nível é de 10 %, isto é  $\theta = 0,1$ . Este número indica que 10 % dos clientes primeiramente atendidos em uma unidade de saúde 24 horas são encaminhados para um hospital universitário para complementar o tratamento.

Os resultados obtidos sugerem a instalação de hospitais nos bairros Centro, Portão e Sítio Cercado e postos de saúde 24 horas nos bairros Boa Vista, Bairro Alto e Cajuru (associados com o hospital no Centro), Boqueirão e Pinheirinho (associados com o hospital do Sítio Cercado) e nos bairros de Cidade Industrial e São Braz (associados com o Hospital do Portão). O valor dos custos com transporte obtidos com o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, utilizando estes parâmetros, foi de 28.491.491,15. Estes resultados podem ser vistos na figura 17.

Utilizando estes mesmos parâmetros e critérios, a designação dos clientes

dos 75 bairros para as localizações reais dos postos de saúde e hospitais existentes atualmente na cidade de Curitiba (PR), implica em um custo de 36.944.683,91. Nesta solução existe um posto de saúde e um hospital localizados no mesmo bairro (bairro do Cajuru). No modelo simplificado adotado neste exemplo, estas duas instalações estão localizadas no mesmo ponto (no baricentro geométrico do bairro), situação que não ocorre com a utilização do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur.

Comparando as localizações sugeridas pelo algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur com as localizações atuais dos hospitais e postos de saúde 24 horas observa-se que:

- a) nas duas situações existem unidades de saúde 24 horas nos bairros da Boa Vista, Boqueirão, Cajuru e Pinheirinho;
- b) o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur sugere a instalação de um hospital no bairro do Sítio Cercado, onde atualmente se situa um posto de saúde 24 horas;
- c) o algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur indica a instalação de um hospital no Centro, sendo que na realidade existe um hospital no bairro Alto da Glória que é um bairro vizinho ao Centro de Curitiba (PR);

Estes resultados mostram que as localizações reais dos postos de saúde 24 horas e hospitais existentes atualmente na cidade de Curitiba (PR) são semelhantes as localizações sugeridas pelo algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, possuindo inclusive algumas coincidências com os resultados obtidos nesta simulação.

FIGURA 16 - OS BARICENTROS DOS BAIRROS DA CIDADE DE CURITIBA (PR)

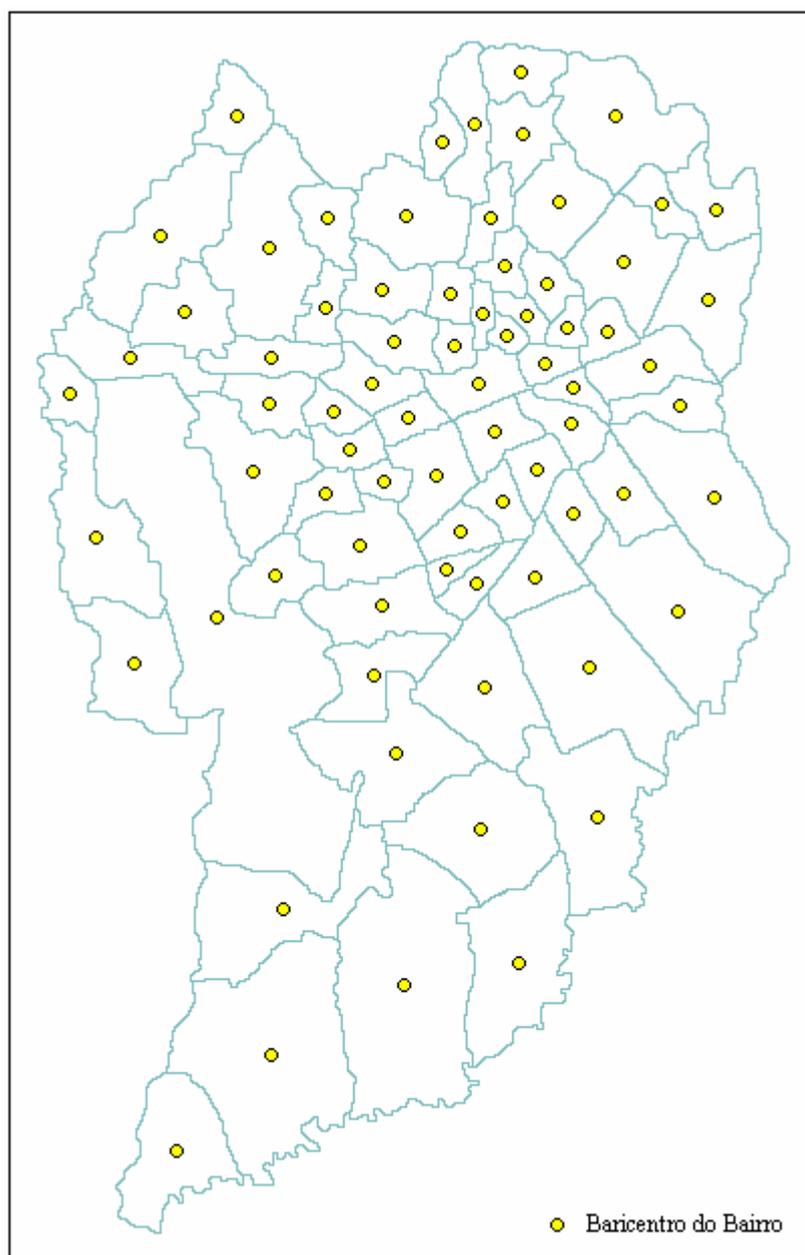
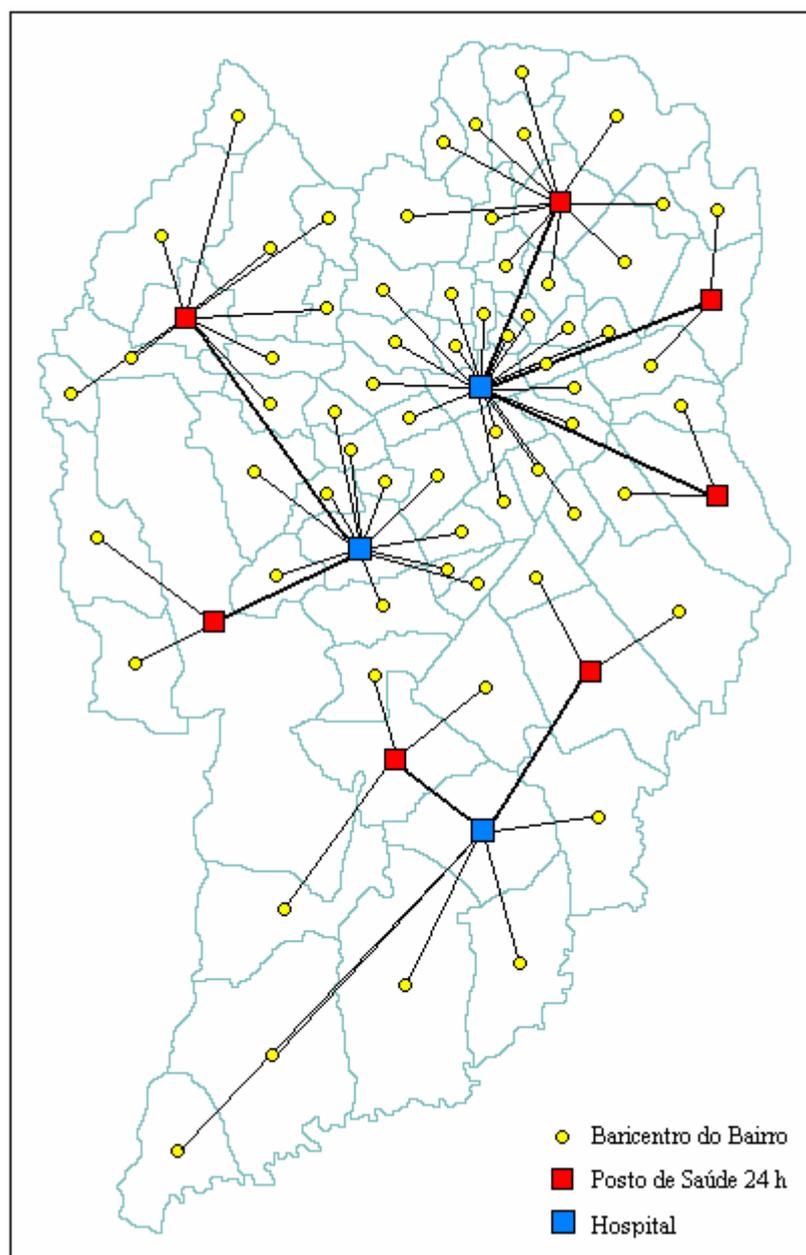


FIGURA 17 - A SOLUÇÃO OBTIDA PARA A INSTALAÇÃO DE 3 HOSPITAIS E 7 POSTOS DE SAÚDE



## 6 CONCLUSÕES

Os problemas de localização de instalações, apresentando algum relacionamento hierárquico entre as mesmas, têm sido bastante freqüentes nas mais diversas áreas, como em sistemas que oferecem serviços de atendimento, distribuição ou coleta. Destacam-se os sistemas para atendimento de saúde, sistemas de produção/distribuição de mercadorias, sistemas de atendimento bancário, sistemas de serviços postais, sistemas de distribuição de energia elétrica, dentre outros.

Neste trabalho, dois procedimentos heurísticos eficientes, chamados de  $p$ - $q$ -Median-Heur e Median-Heur, são sugeridos para resolver problemas de localização de instalações com hierarquias, onde as quantidades de instalações em cada nível são fixas ou variáveis, respectivamente. Estas duas técnicas heurísticas permitem encontrar soluções próximas do ótimo e em tempos computacionais aceitáveis.

Os resultados obtidos com as técnicas apresentadas foram comparados com limites inferiores obtidos através de relaxação Lagrangeana, sendo que os melhores limites inferiores foram obtidos com o método do subgradiente. Alguns problemas de pequeno porte também foram solucionados com o software LINGO e os resultados foram muito próximos daqueles obtidos com as heurísticas propostas.

Os detalhes e conclusões a respeito dos testes computacionais realizados com os algoritmos propostos e apresentados nas tabelas do capítulo 5, estão descritos nas subseções que seguem.

### 6.1 CONCLUSÕES SOBRE O ALGORITMO $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR

Em cada uma das tabelas numeradas de 5A até 10A, são apresentados os resultados de 100 problemas, onde foi variada de 1 à 10 a quantidade de instalações em cada nível. Observa-se a tendência da redução de custos com transporte, conforme já era esperado, a medida que se aumenta a quantidade de instalações em cada nível, demonstrando a consistência do método proposto.

As tabelas numeradas de 5B até 10B trazem os tempos computacionais exigidos para resolver os problemas das tabelas 5A até 10A, respectivamente.

Considerando as grandes dimensões dos problemas abordados, chegando a 2000 clientes (e possíveis localizações para as instalações em cada nível), os tempos computacionais podem ser considerados baixos, principalmente comparando com as dimensões e tempos computacionais dos problemas encontrados na literatura.

### 6.1.1 Quanto à estabilidade do método

Para verificar a estabilidade do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur, isto é, para mostrar a pequena variação de uma solução para outra, quando o mesmo problema é resolvido sucessivas vezes com o referido algoritmo, considerando soluções iniciais aleatórias diferentes, foram construídas as tabelas 11, 12 e 13.

Na tabela 11 foram resolvidos 16 problemas, numerados de A1 até A16. Nestes problemas a quantidade de clientes variou de 50 até 1000, com uma instalação do primeiro nível e 3 instalações do segundo nível. Para estes problemas, o maior  $GAP$  percentual obtido foi de 2,10 %, e o  $GAP$  médio foi de 1,02 %, o que mostra que para estes parâmetros não existem grandes variações entre simulações repetidas para o mesmo problema.

Quanto aos tempos computacionais, observa-se que quando se utiliza o parâmetro  $\alpha = 0,3$ , os mesmos diminuem consideravelmente, chegando a 1/4 dos tempos necessários para resolver o mesmo problema com  $\alpha = 1$ , sem diferença significativa na qualidade das soluções apresentadas. Observa-se que este parâmetro  $\alpha$  é aquele utilizado no algoritmo de Teitz e Bart modificado, no passo 1 do algoritmo  $p$ - $q$ -Median-Heur. Quando  $\alpha = 1$ , este algoritmo torna-se equivalente ao algoritmo de Teitz e Bart original.

Na tabela 12 foram resolvidos 16 problemas, agora numerados de B1 até B16. A diferença é que nestes casos foram consideradas duas e cinco instalações para o primeiro e segundo nível, respectivamente. Para estes problemas, o maior  $GAP$  percentual obtido foi de 4,83 %, mas o  $GAP$  médio foi de 2,17 %, mostrando novamente a estabilidade do algoritmo.

Quanto aos tempos computacionais, novamente verificou-se a vantagem em

se utilizar o parâmetro  $\alpha = 0,3$ , haja vista que em alguns casos o tempo computacional chegou a ser inferior a 1/5 daquele exigido quando  $\alpha = 1$ .

A tabela 13 reúne um grupo de problemas onde os clientes novamente foram gerados de forma aleatória, porém, não uniformemente distribuídos, de maneira a formar concentrações de clientes em alguma região. Apesar disto, os resultados novamente foram satisfatórios quanto a estabilidade do método, sendo que o maior *GAP* percentual obtido foi de 8,04 %, porém, com um *GAP* médio de 2,66 %.

As conclusões quanto aos tempos computacionais são as mesmas daquelas apresentadas para as tabelas 11 e 12.

### 6.1.2 Quanto à qualidade das soluções

Com o objetivo de verificar a qualidade das soluções fornecidas pelo algoritmo *p-q-Median-Heur*, foram efetuados diversos testes computacionais com o uso do mesmo.

Na tabela 14 foram resolvidos 11 problemas, numerados de D1 até D11. A quantidade de clientes variou de 10 até 35, tendo sido considerada uma instalação do primeiro nível e três instalações do segundo nível. Estes problemas foram resolvidos com o algoritmo *p-q-Median-Heur* e com o software LINGO. Além disto, foram obtidos limites inferiores através de relaxação Lagrangeana, conforme foi detalhado na seção 4.3.

Os valores obtidos com o software LINGO são bastante próximos aos encontrados com o algoritmo *p-q-Median-Heur*, sendo que algumas vezes foram encontradas as mesmas soluções, diferindo apenas por um pequeno erro numérico.

Os *GAP's* verificados entre as soluções do algoritmo *p-q-Median-Heur* e os limites inferiores variaram de 1,61 % à 25,31 %. Embora este último percentual possa ser considerado elevado, conclui-se pela baixa qualidade do limite inferior obtido neste caso, pois o *GAP* entre as soluções do mesmo problema obtidas pelo algoritmo *p-q-Median-Heur* e pelo LINGO foi de apenas 0,01 %.

Na tabela 15, novamente foram resolvidos 11 problemas, agora numerados

de E1 até E11. As quantidades de clientes foram as mesmas da tabela 15, e foram considerados uma e duas instalações do primeiro nível e quatro instalações do segundo nível. Assim como no caso anterior, as soluções apresentadas pelo LINGO foram muito próximas daquelas fornecidas pelo algoritmo em teste. Novamente os *GAP's* verificados entre os limites inferiores obtidos por relaxação Lagrangeana e as soluções dadas pelo algoritmo *p-q-Median-Heur* foram relativamente altos.

Na tabela 16 foram resolvidos apenas oito problemas, com uma quantidade de clientes variando entre 10 e 25, tendo uma ou duas instalações do primeiro nível e três ou quatro instalações do segundo nível. Além disto foram alterados os parâmetros que definem as funções de custos com transporte. Para estes problemas as conclusões não foram diferentes daquelas relativas aos problemas das tabelas 14 e 15.

Conforme pode ser verificado nas tabelas apresentadas, os limites inferiores obtidos pela relaxação Lagrangeana sugerida não foram de boa qualidade para problemas pequenos, haja vista que estes *GAP's* médios diminuem bastante para problemas maiores.

Nas tabelas 17, 18, 19 e 20 são apresentados problemas com uma quantidade de clientes variando entre 50 e 1000, com duas instalações do primeiro nível e cinco ou sete instalações do segundo nível. Tais problemas não puderam ser resolvidos pelo software LINGO, haja vista as suas dimensões, o tempo computacional e memória do computador que seriam necessários. Assim, as comparações foram feitas apenas entre as soluções obtidas pelo algoritmo *p-q-Median-Heur* e pelos limites inferiores das relaxações Lagrangeanas. Como pode ser visto na tabela 17, este *GAP* foi de apenas 3,77 %, para um problema com 1000 clientes, duas instalações do primeiro nível e cinco instalações do segundo nível. Isto significa dizer que a solução obtida está, no máximo, a 3,77 % do ótimo global. Convém lembrar também que as 1000 localizações dos clientes são também as 1000 possíveis localizações para as instalações em qualquer nível. Estas comparações não foram efetuadas para problemas ainda maiores, devido ao grande tempo computacional para a obtenção dos limites inferiores (17h40min20s para este último problema).

A tabela 20 traz ainda, a exemplo do que foi feito na tabela 13, problemas

onde os clientes foram gerados de forma aleatória, porém, não uniformemente distribuídos. Nestes casos, problemas com quantidades de clientes variando entre 50 a 300, duas instalações do primeiro nível e cinco instalações do segundo nível, foram resolvidos com soluções distantes, no máximo, entre 1,49 % e 4,07 %, do ótimo global.

## 6.2 CONCLUSÕES SOBRE O ALGORITMO MEDIAN-HEUR

Para testar o desempenho do algoritmo Median-Heur foram realizados diversos testes computacionais, sendo que as tabelas 21 e 22 trazem alguns destes resultados. A quantidade de clientes para estes problemas variou de 50 até 200.

Para os problemas da tabela 21, os custos unitários considerados para abertura das instalações em qualquer dos níveis foi de 1.000,00. Os *GAP's* encontrados entre as soluções heurísticas e os limites inferiores obtidos através de relaxação Lagrangeana, conforme a seção 4.3, variaram entre 6,30 % e 11,64 %.

Para os problemas da tabela 22, os custos unitários foram de 5.000,00 para as instalações do primeiro nível e 3.000,00 para as instalações do segundo nível. Para estes casos os *GAP's* variaram entre 2,08 % e 4,41 %.

Estes *GAP's* podem ser considerados baixos, se comparados, por exemplo, com os *GAP's* obtidos em TRAGANTALERNGSAK et al. (1997), conforme descrito na seção 2.2.1.1, embora esta comparação não seja perfeita, considerando que estes problemas possuem características diferentes.

Convém lembrar que o algoritmo heurístico Median-Heur incorpora o algoritmo *p-q*-Median-Heur, que fornece soluções aproximadas. Desta forma, a eficiência do algoritmo Median-Heur é diretamente dependente da eficiência do algoritmo *p-q*-Median-Heur.

### 6.3 CONCLUSÕES FINAIS

Analisando os resultados computacionais obtidos, e levando em consideração principalmente as dimensões dos problemas que podem ser resolvidos, os métodos propostos pelo presente trabalho podem ser considerados válidos, haja vista que fornecem soluções rápidas e próximas do ótimo.

Embora não seja garantida a otimalidade das soluções, os resultados aproximados para estes problemas combinatoriais de grande porte são muito importantes, dada a complexidade dos referidos problemas, o que torna muitas vezes impossível a tarefa de se encontrar uma solução exata.

## 7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para dar continuidade a estes estudos, são apresentadas neste capítulo algumas sugestões para trabalhos futuros:

- a) Passar a considerar as capacidades das instalações em um ou mais níveis hierárquicos;
- b) Ampliar a quantidade de níveis hierárquicos;
- c) Efetuar mudanças nos algoritmos de modo que em cada arco do grafo associado ao problema possa ser considerado o veículo mais adequado para este transporte. Tal veículo seria escolhido dentre um conjunto pré-definido de veículos, em função da carga ou quantidade de passageiros e do comprimento da rota correspondente;
- d) Adaptar a técnica para considerar instalações pré-existentes, ou regiões onde as mesmas não possam ser implantadas;
- e) Passar a utilizar uma terceira função de custos  $C_3$ . Desta forma, seria possível diferenciar os custos com transporte entre clientes e instalações do primeiro nível dos custos com transporte entre clientes e instalações do segundo nível, além dos custos com transporte entre as instalações. Tal procedimento também permitiria, com a escolha de parâmetros adequados, considerar problemas com fluxo integrado ou discriminado, conforme a nomenclatura usada por NARULA (1984) e descrita na seção 2.1.2.
- f) Investigar os resultados que seriam obtidos se os custos com abertura das instalações variassem de acordo com as localizações das mesmas.

## REFERÊNCIAS

1. ALMINYANA, M.; BORRÁS, F.; PASTOR, J. T. A new directed branching heuristic for the pq-median problem. *Location Science*, n. 6, p. 1-23, 1998.
2. BANERJI, S. H.; FISHER, H. B. Hierarchical location analysis for integrated area planning in rural India. *Papers Regional Science Assoc.*, n. 33, p. 177-194, 1974.
3. BARCELO, J.; CASANOVAS, J. A heuristic Lagrangian algorithm for the capacitated plant location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 15, p. 212-226, 1984.
4. BARROS, A. I.; LABBE, M. Multi-level uncapacitated facility location problem is not submodular. *European Journal of Operational Research*, v. 72, n. 3, p. 607-609, Feb. 1994.
5. BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D. On the choice of step size in subgradient optimization. *European Journal of Operational Research*, v. 7, p. 380-388, 1981.
6. BEASLEY, J. E. An algorithm for solving capacitated warehouse location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 33, p. 314-325, 1988.
7. BEASLEY, J. E. Lagrangian heuristic for location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 65, p. 383-399, 1993.
8. BILDE, O.; KRARUP, J. Sharp lower bounds and efficient algorithm for the simple plant location problem. *Annals of Discrete Mathematics*, n.1, 1977.
9. BRANDEAU, M. L.; CHIU, S. S. An overview of representative problems in location research. *Management Science*, n. 35, p. 645-674, 1989.
10. CALVO, A. B.; MARKS, D. H. Location of health care facilities: An analytic approach. *Socio-Econom. Planning Sci.*, p. 407-484, 1973.
11. CHRISTOFIDES, N. *Graph Theory - An algorithmic approach*. London, New York: Academic Press Inc, 1975.
12. CLARKE, G.; WRIGHT, J. W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research*, n. 12, p. 568-581, 1964.
13. DOKMECI, V. F. An optimization model for a hierarchical spatial system. *J. Regional Sci.*, n. 13, p. 439-452, 1973.
14. ERLINKOTTER, D. A dual based procedure for uncapacitated facility location. *Operations Research*, v. 26, n. 6, 1978.
15. FELDMAN, E.; LEHRER, F. A.; RAY, T. L. Warehouse locations under continuous economies of scale. *Management Science*, n. 12, p. 670-684, 1966.
16. FRIEDLANDER, ANA. *Elementos de Programação Não-Linear*. Editora da UNICAMP, 1994.

17. GALVÃO, R. D.; ESPEJO, L. G. A.; BOFFEY, B. A hierarchical model for the location of perinatal facilities in the municipality of Rio de Janeiro. *European Journal of Operational Research*, n. 138, p. 495-517, 2002.
18. GALVÃO, R. D.; RAGGI, L. A. A method for solving to optimality uncapacitated location problem. *Annals of Operations Research*, v. 18, p. 225-244, 1989.
19. GAO, L. *A revised formulation and two complementary optimization procedures for the two-echelon uncapacity facility location problem*. Bloomington, 1988. Ph.D. Dissertation, School of Business, Indiana University, IN.
20. GAO, L.; ROBINSON JR., E. P. A dual-based optimization procedure for the two-echelon uncapacitated facility location problem. *Naval Research Logistics*, n. 39, p. 191-212, 1992.
21. GEOFFRION, A. M.; MACBRIDE, R. Lagrangian relaxation applied to capacitated facility location problem. *AIIE Transactions*, v. 10, p. 40-47, 1978.
22. HARVEY, M. S.; HUNG, M. S.; BROWN, J. R. The application of a  $p$ -median algorithm to the identification of nodal hierarchies and growth centers. *Econom. Geogr.*, n. 50, p. 187-202, 1973.
23. HINDI, K. S.; BASTA, T. Computationally Efficient Solution of a Multiproduct, Two-Stage Distribution-Location Problem. *Journal of Operational Research Society*, v. 45, n. 11, p. 1316-1323, 1994.
24. INFANTE-MACIAS, R.; MUNOZ-PEREZ, J. Competitive location with rectilinear distances. *European Journal of Operational Research*, v. 80, n. 1, p. 77-85, Jan. 1995.
25. JACOBSEN, S. K.; MADSEN, O. B. G. A comparative study of heuristics for a two-level routing-location problem. *European Journal of Operational Research*, n. 5, p. 378-387, 1980.
26. JAGANNATHAN, R. et al. A nested Dual Approach to the Generalized Hierarchical Location Model. In: *TIMS / ORSA Meeting*, Los Angeles, April, 1986.
27. JAYARAMAN, V.; GUPTA, R.; PIRKUL, H. Selecting hierarchical facilities in a service-operations environment. *European Journal of Operational Research*, artigo em publicação, 2002.
28. JAYARAMAN, V.; PIRKUL, H.; GUPTA, R. Hierarchical location-allocation model to site commercial service facilities. In: *Proceedings - Annual Meeting of the Decision Sciences Institute*, v. 2, Decis Sci Inst.: Nov. 24-26, 1996. p. 1058-1060
29. JAYARAMAN, V.; SRIVASTAVA, R. Service Logistics model for simultaneous siting of facilities and multiple levels of equipment. *Computers & Operations Research*, v. 22, n. 2, p. 191-204, Feb. 1995.
30. KAUFMAN, L.; EEDE, M. V.; HANSEN, P. A plant and warehouse location problem. *Operational Research Quarterly*, v. 28, n. 3, p. 547-554, 1977.
31. KLINCEWICZ, F. G.; LUSS, H. A dual-based algorithm for multiproduct uncapacitated facility location. *Transportation Science*, n. 21, p. 198-206, 1987.

32. KLINCEWICZ, F. G.; LUSS, H. A Lagrangian relaxation heuristic for capacitated facility location with single source constraints. *Journal of Operational Research Society*, v. 37, p. 495-500, 1986.
33. KUEHN, A. A.; HAMBURGUER, M. J. A heuristic program for locating warehouses. *Management Science*, v. 9, p. 643-666, 1963.
34. LAND, A. H.; DOIG, A. G. An automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica*, n. 28, p. 497-520, 1960.
35. LIMA, E. L. *Curso de Análise - Vol. 2*. Segunda Edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA/CNPq, 1985.
36. LIMA, E. L. *Análise Real - Vol. 1*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA/CNPq, 1989.
37. LORENA, L. A. N.; SENNE, E. L. F. Lagrangean/Surrogate Heuristic for Uncapacitated Facility Location Problems, In: *Annals of the 8<sup>th</sup> Latin-Iberian-American Congress on Operations Research and System Engineering, Anais do 28<sup>o</sup> Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Agosto 1996, Rio de Janeiro, p. 854-859.
38. LORENA, L. A. N.; SENNE, E. L. F. Improving traditional subgradient scheme for Lagrangean relaxation: an application to location problems, *International Journal of Mathematical Algorithms*, n. 1, p. 133-151, 1999.
39. LUENBERGER, D. G. *Linear and nonlinear programming*. Segunda Edição. Editora Addison – Wesley Publishing Company, 1986.
40. MARIANOV, V.; SERRA, D. Hierarchical location-allocation models for congested system. *European Journal of Operational Research*, n. 135, p. 195-208, 2001.
41. MAZZOLA, J. B.; NEEBE, A. W. Lagrangian-relaxation-based solution procedures for a multiproduct capacitated facility location problem with choice of facility type. *European Journal of Operational Research*, v. 115, n. 2, p. 285-299, 1999.
42. MIRCHANDANI, P. B. Generalized hierarchical facility locations. *Transportation Science*, v. 21, n. 2, p. 123-129, May. 1987.
43. MOORE, G.; REVELLE, C. The hierarchical service location problem. *Management Science*, n. 28, p. 775-780, 1982.
44. NARULA, S. C. Hierarchical location-allocation problems: a classification scheme. *European Journal of Operational Research*, v. 15, n. 1, p. 93-99, Jan. 1984.
45. NARULA, S. C.; OGBU, U. I. A 2-hierarchical location-allocation problem, *Research Report*, n. 37-78-P2, School of Management, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, 1978.
46. NARULA, S. C.; OGBU, U. I. An hierarchical location-allocation problem. *Omega*, v. 7, n. 2, p. 137-143, 1979.
47. NARULA, S. C.; OGBU, U. I. A lagrangean relaxation approach to an hierarchical location-allocation problem. *Research Report*, n. 37-82-P12, School of Management, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, 1982.

48. NARULA, S. C.; OGBU, U. I.; SAMUELSSON, H. M. An algorithm for the  $p$ -median problem. *Operations Research*, v. 25. p. 709-713, 1977.
49. OGBU, U. I. *Uncapacitated  $k$ -hierarchical system location problems*. Buffalo, 1978. Ph.D Dissertation, State University of New York at Buffalo.
50. OKABE, A.; OKUNUKI, K.; SUZUKI, T. A computacional method for optimizing the hierarchy and spatial configuration of sucessively inclusive facilities on a continous plane. *Location Science*, v. 5, n. 4, p. 255-268, 1997.
51. OLSON, C. F. Parallel algorithms for hierarchical clustering. *Parallel Computing*, v. 21, n. 8, p. 1313-1325, Aug. 1995.
52. PIRKUL, H. Efficient algorithm for the capacitated concentrator location problem. *Computer Operations Research*, v. 14. p. 197-208, 1987.
53. PIRKUL, H. Uncapacitated facility location problem with primary and secondary facility requirements. *IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers)*, v. 21, n. 4, p. 337-348, Dec. 1989.
54. PIRKUL, H.; NARASIMHAN, S.; DE, P. Locating Concentrators for Primary and Secondary Coverage in a Computer Communications Network. *IEEE Transactions on Communications*, v. 36, n. 4, p. 450-458, 1988.
55. RAHMAN, S.; SMITH, D. K. Use of location-allocation models in health service development planning in developing nations. *European Journal of Operational Research*, n. 123, p. 437-452, 2000.
56. RO, H.; TCHA, D. Branch and bound algorithm for the two-level uncapacitated facility location problem with some side constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 18, n. 3, p. 349-358, Dec. 1984.
57. ROBINSON JUNIOR, E. P.; GAO, L. A new formulation and linear programming based optimization procedure for the two-echelon uncapacitated facility location problem. *Annals of the Society of Logistics Engineers*, n. 2, p. 39-59, 1992.
58. ROSÁRIO, R. R. L. *Proposta de solução para o problema das  $p$ -medianas na localização de unidades de saúde 24 horas*. Curitiba, 2002, Dissertação de Mestrado, UFPR.
59. ROSS, A.; VENKATARAMANAN, M. A. Multi commodity-multi echelon distribution planning: A DSS approach with application. In: *Proceedings - Annual Meeting of the Decision Sciences Institute*, v. 3, Decis Sci Inst , Nov 22-25, 1997-1998, p. 1489-1491.
60. SCHULTZ, G. P. The logic of health care facility planning. *Socio-Econom. Planning Sci.*, n. 4, p. 383-393, 1970.
61. SCOTT, A. J. Operational analisys of nodal hierarchies in network system. *Operational Research Quarterly*, n. 22, p. 25-36, 1971.
62. SERRA, D.; MARIANOV, V.; REVELLE, C. Maximum-capture hierarchical location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 62, n. 3, p. 363-371, Nov. 1992.

63. SOLOMON, M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problem with time window constraints. *Operations Research*, v. 35, p. 254-265, 1987.
64. SRIDHARAN, R. A Lagrangian heuristic for the capacitated plant location problem with single source constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 66, p. 305-312, 1993.
65. TCHA, D.; LEE, B. Branch-and-bound algorithm for the multi-level uncapacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 18, n. 1, p. 35-43, Oct. 1984.
66. TEITZ, M. B.; BART, P. Heuristic method for estimating the general vertex median of weighted graph. *Operations Research*, n. 16, p. 955-961, 1968.
67. TIEN, J. M.; EL-TELL, K.; SIMONS, G. R. Improved formulations to the hierarchical health facility location - allocation problem. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* v. SMC-13, n. 6, p. 1128-1132, Nov./Dec. 1983.
68. TRAGANTALERNGSAK, S.; HOLT, J.; RONNQVIST, M. Lagrangian heuristics for the two-echelon, single-source, capacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, v. 102, n. 3, p. 611-625, Nov. 1997.
69. ZIONTS, S. *Linear and Integer Programming*. New Jersey, Prentice-Hall, Eaglewood Cliffs, 1974.

## **ANEXO 1 - ALGUNS CONCEITOS ASSOCIADOS AOS TRANSPORTES**

Neste anexo, são apresentados alguns conceitos importantes associados aos custos no setor de transportes, além de alguns exemplos de cálculo de custos com transporte, obtidos da Confederação Nacional do Transporte – CNT, no endereço eletrônico <<http://www.cnt.org.br/>>.

### Despesas

Uma empresa ou indivíduo incorre em despesas, quando gasta dinheiro ou paga dívidas. Por exemplo quando é comprado um pneu ou paga uma taxa, como o IPVA por exemplo.

### Custos

Uma empresa ou indivíduo incorre em custos, quando consome aquilo que já foi adquirido. Por exemplo, o consumo de combustível ou pneus.

Fazer esta distinção entre despesas e custos é muito importante, pois muitas vezes as empresas lembram das despesas, porém esquecem de considerar alguns custos.

No que diz respeito aos custos, existem também duas categorias distintas: os custos variáveis e os custos fixos.

### Custos fixos

São aqueles que não dependem da quilometragem rodada. Por exemplo: IPVA, seguro, e outros. Desta forma, o custo mensal será o mesmo, independente da quilometragem rodada.

São exemplos de custos fixos:

a) Depreciação

A depreciação é um custo que muitas vezes não se percebe no dia-a-dia, mas é muito importante no setor de transportes. Ele se refere ao desgaste e, por consequência, à desvalorização de um veículo. Por exemplo, se um veículo foi adquirido por R\$ 60.000,00 e será utilizado por 10 anos (120 meses), a cada mês ele estará desvalorizando o equivalente a R\$ 500,00 (R\$ 60.000,00 dividido por 120 meses).

b) Remuneração do capital

A remuneração do capital é o valor mensal que se deveria receber, se ao invés de comprar um veículo, o dinheiro tivesse sido aplicado em algum investimento financeiro, como caderneta de poupança ou outra forma de investimento.

c) Licenciamento

É a soma dos valores pagos de impostos como IPVA, seguros e outros., dividida por 12 meses.

d) Salários e encargos

Estes custos incluem os valores dos salários pagos aos motoristas dos veículos utilizados no transporte, incluindo os encargos sociais.

e) Hora do veículo parado

Mesmo quando um veículo está sendo carregado ou descarregado, estão incorrendo custos e, por isto, o tempo em que um veículo deverá ficar parado, para carga e descarga, deve ser considerado ao se efetuar um orçamento de transporte.

Por exemplo, se um motorista rodar 260 horas por mês, pode-se calcular o custo da hora parada, dividindo o “custo fixo mensal” do veículo, pelas 260 horas mensais e, o resultado, dividido pela capacidade do mesmo (tonelagem).

f) Outros custos fixos

São os custos oriundos de outros itens como alimentação, hospedagens, e outros.

## Custos variáveis

Os custos variáveis são aqueles que variam de acordo com a quilometragem rodada, ou seja, quanto mais um veículo rodar, maiores serão os seus custos mensais. Por exemplo: os custos com combustíveis ou pneus são proporcionais à quilometragem rodada.

São exemplos de custos variáveis:

### a) Combustíveis

Os custos variáveis com combustíveis, são calculados dividindo a quilometragem mensal, pelo consumo (que é a quantidade de quilômetros que o veículo roda com um litro de combustível), multiplicado pelo preço do combustível.

### b) Lavagem e lubrificação

Aqui são considerados os gastos com lavagem e lubrificação geral de um veículo.

### c) Pneus e câmaras

Para este item, o Conselho Nacional de Transporte - CNT considera os preços: pneu, câmara, protetor e uma recauchutagem. Este total é dividido pela quilometragem média de vida de um pneu, e o resultado é multiplicado pela quilometragem mensal. Disto resulta o custo variável mensal em pneus e câmaras, para cada roda do veículo.

### d) Peças e acessórios

Segundo o Conselho Nacional de Transporte – CNT, este é o item mais difícil de ser calculado, tendo em vista as suas muitas variáveis. Aquele órgão considera um valor de custo médio mensal aceito no setor que é de 1,35 % do valor total do veículo.

### e) Lubrificantes

São considerados os custos com óleo do motor, câmbio e diferencial, de acordo com o modelo de veículo utilizado no transporte.

### Alguns exemplos de cálculos de custos

Na sequência são apresentados exemplos para cálculos de custos fixos e custos variáveis, para dois tipos diferentes de veículos. Esta foi a metodologia para cálculo de custos com transportes, utilizada nos problemas propostos neste trabalho.

#### a) Planilhas de custos para uma Carreta Volvo NL 10 340

A planilha para cálculo dos custos fixos mensais, para um veículo do tipo Carreta Volvo NL 10 340, é apresentada a seguir na tabela 24.

TABELA 24 - OS CUSTOS FIXOS MENSAIS DE UMA CARRETA VOLVO NL 10 340

CUSTOS MENSAIS FIXOS / DESCRIÇÃO	UNIDADE	ITEM	EXEMPLO
PREÇO DE COMPRA DO VEÍCULO COM RODOAR	R\$	A	117.100,86
VALOR RESIDUAL DO VEÍCULO (32,9003 %)	R\$	B	38.526,69
VALOR A DEPRECIAR (A - B)	R\$	C	78.574,17
PREÇO DO SEMI-REBOQUE	R\$	D	19.500,00
VALOR RESIDUAL DO SEMI-REBOQUE (11,3043 %)	R\$	E	2.204,35
VALOR A DEPRECIAR (D - E)	R\$	F	17.295,65
VALOR TOTAL A DEPRECIAR (C + F)	R\$	G	95.869,82
VIDA ÚTIL DO VEÍCULO	meses	H	120
CUSTO DE DEPRECIÇÃO (G/H)	R\$	I	798,92
TAXA PERCENTUAL MENSAL DE JUROS	%	J	1,08
CUSTO DA REMUNERAÇÃO DO CAPITAL ((A+D).J/100)	R\$	K	1.475,29
DPVAT	R\$/Ano	L	55,43
IPVA	R\$/Ano	M	1.600,85
TAXA DE LICENCIAMENTO	R\$/Ano	N	9,26
SEGURO FACULTATIVO	R\$/Ano	O	4.200,00
CUSTO DE SEGURO E LICENCIAMENTO (L+M+N+O)/12	R\$	P	488,80
SALÁRIO DO MOTORISTA + ENCARGOS (20 %)	R\$	Q	617,14
CUSTOS DIVERSOS	R\$	R	500,00
TOTAL DOS CUSTOS FIXOS MENSAIS (I+K+P+Q+R)	R\$	S	3.880,15

A planilha para cálculo dos custos variáveis mensais, para um veículo do tipo Carreta Volvo NL 10 340, é apresentada a seguir na tabela 25.

TABELA 25 - OS CUSTOS VARIÁVEIS MENSAIS DE UMA CARRETA VOLVO NL 10 340

CUSTOS MENSAIS VARIÁVEIS / DESCRIÇÃO	UNIDADE	ITEM	EXEMPLO
QUILOMETRAGEM MENSAL ESTIMADA	Km	T	10.000
CAPACIDADE DO VEÍCULO	Ton	U	27
PREÇO DO LITRO DO DIESEL	R\$	V	0,773
CONSUMO DO VEÍCULO	KM/litro	W	2,10
CUSTO DOS COMBUSTÍVEIS $(T/W).V$	R\$	X	3.680,95
LAVAGEM E LUBRIFICAÇÃO MENSAL	R\$	Y	180,00
NÚMERO DE PNEUS	uni	Z	18
VIDA MÉDIA ÚTIL DE UM PNEU	Km	AA	117.000
PREÇO PNEU + CÂMARA + PROTETOR + RECAUCH.	R\$	AB	837,21
CUSTO DE PNEUS $((AB/AA).Z.T)$	R\$	AC	1.288,01
ÍNDICE DE MANUTENÇÃO	%	AD	1,35
CUSTO DE MANUTENÇÃO $((A+D).(AD/100))$	R\$	AE	1.844,11
PREÇO DO ÓLEO MOTOR	R\$/litro	AF	2,44
CUSTO ÓLEO MOTOR $(T/400).AF$	R\$	AG	61,00
PREÇO ÓLEO CÂMBIO	R\$/litro	AH	5,75
CUSTO ÓLEO CÂMBIO $(T/1000).AH$	R\$	AI	57,50
PREÇO ÓLEO DIFERENCIAL	R\$/litro	AJ	5,75
CUSTO ÓLEO DIFERENCIAL $(T/1250).AJ$	R\$	AK	46,00
CUSTO TOTAL DE LUBRIFICANTES $(AG+AI+AK)$	R\$	AL	164,50
TOTAL DOS CUSTOS VARIÁVEIS $(X+AC+AE+AL)$	R\$	AM	6.977,57

Na tabela 26 que segue, é feita uma simulação do custo de uma viagem de 1000 quilômetros com um veículo do tipo Carreta Volvo NL 10 340.

TABELA 26 - SIMULAÇÃO DE FRETE PARA UMA CARRETA VOLVO NL 10 340

DADOS OPERACIONAIS	UNIDADE	ITEM	EXEMPLO
CARGA PARA TRANSPORTAR	Ton	AN	27
HORAS TRABALHADAS POR MÊS	Horas	AO	260
TEMPO DE CARGA E DESCARGA	Horas	AP	5
VELOCIDADE COMERCIAL NA ESTRADA	Km/h	AQ	55
CUSTO FIXO MENSAL (S)	R\$	AR	3.880,15
CUSTO VARIÁVEL POR QUILOMETRO $(AM/T)$	R\$	AS	0,69776
CAPACIDADE DE CARGA (U)	Ton	AT	27
DISTÂNCIA DO PERCURSO	Km	AU	1.000
TEMPO VIAGEM + CARGA E DESCARGA $(AU/AQ+AP)$	Horas	AV	23,18
NÚMERO DE VIAGENS/MÊS $(AO/AV)$	viagens	AW	11
QUILOMETRAGEM TOTAL MENSAL $(AW.AU)$	Km	AX	11.216
CUSTO FIXO MENSAL POR TON KM $(AR/AX/AT)$	R\$	AY	0,012813
CUSTO VARIÁVEL POR TON KM $(AS/AT)$	R\$	AZ	0,025843
CUSTO TOTAL POR TON KM $(AY+AZ)$	R\$	BA	0,038656
CUSTO POR TON NESTA DISTÂNCIA $(BA.AU)$	R\$	BB	38,66
CUSTO FINAL NESTA DISTÂNCIA $(BB.AN)$	R\$	BC	1.043,82

## b) Planilhas de custos para um veículo Truck MB L-1218

A planilha para cálculo dos custos fixos mensais, para um veículo do tipo Truck MB L-1218, é apresentada a seguir na tabela 27.

TABELA 27 - OS CUSTOS FIXOS MENSAIS DE UM VEÍCULO DO TIPO TRUCK MB L-1218

CUSTOS MENSAIS FIXOS / DESCRIÇÃO	UNIDADE	ITEM	EXEMPLO
PREÇO DE COMPRA DO VEÍCULO COM RODOAR	R\$	A	85.547,71
VALOR RESIDUAL DO VEÍCULO (45,9426 %)	R\$	B	39.302,84
VALOR A DEPRECIAR ( $A - B$ )	R\$	C	46.244,87
VIDA ÚTIL DO VEÍCULO	meses	H	120
CUSTO DE DEPRECIAÇÃO ( $C/H$ )	R\$	I	385,37
TAXA PERCENTUAL MENSAL DE JUROS	%	J	1,08
CUSTO DA REMUNERAÇÃO DO CAPITAL ( $A.J/100$ )	R\$	K	923,92
DPVAT	R\$/Ano	L	59,82
IPVA	R\$/Ano	M	963,23
TAXA DE LICENCIAMENTO	R\$/Ano	N	9,93
SEGURO FACULTATIVO	R\$/Ano	O	3.561,53
CUSTO SEGURO+LICENCIAM. ( $L+M+N+O$ )/12	R\$	P	382,88
SALÁRIO DO MOTORISTA + ENCARGOS (20 %)	R\$	Q	607,06
CUSTOS DIVERSOS	R\$	R	539,63
TOTAL CUSTOS FIXOS MENSAIS( $I+K+P+Q+R$ )	R\$	S	2.838,86

A planilha para cálculo dos custos variáveis mensais, para um veículo do tipo Truck MB L-1218, é apresentada a seguir na tabela 28.

TABELA 28 - OS CUSTOS VARIÁVEIS MENSAIS DE UM VEÍCULO DO TIPO TRUCK MB L-1218

CUSTOS MENSAIS VARIÁVEIS / DESCRIÇÃO	UNIDADE	ITEM	EXEMPLO
QUILOMETRAGEM MENSAL ESTIMADA	Km	T	8.712
CAPACIDADE DO VEÍCULO	Ton	U	12
PREÇO DO LITRO DO DIESEL	R\$	V	0,773
CONSUMO MÉDIO DO VEÍCULO	Km/litro	W	3,10
CUSTO DOS COMBUSTÍVEIS ( $T/W$ ).V	R\$	X	2.172,38
LAVAGEM E LUBRIFICAÇÃO MENSAL	R\$	Y	151,10
NÚMERO DE PNEUS	uni	Z	10
VIDA MÉDIA ÚTIL DE UM PNEU	Km	AA	105.000
PREÇO PNEU + CÂMARA + PROTETOR + RECAUCHUTAGEM	R\$	AB	707,57
CUSTO DE PNEUS ( $AB/AA$ ).Z.T	R\$	AC	587,08
ÍNDICE DE MANUTENÇÃO	%	AD	1,35
CUSTO DE MANUTENÇÃO ( $A.AD/100$ )	R\$	AE	1.154,89
PREÇO DO ÓLEO MOTOR	R\$/litro	AF	2,63
CUSTO ÓLEO MOTOR ( $T/1000$ ).AF	R\$	AG	22,91
PREÇO ÓLEO CÂMBIO	R\$/litro	AH	6,21
CUSTO ÓLEO CÂMBIO ( $T/5000$ ).AH	R\$	AI	10,82
PREÇO ÓLEO DIFERENCIAL	R\$/litro	AJ	6,21
CUSTO ÓLEO DIFERENCIAL ( $T/2000$ ).AJ	R\$	AK	27,05
CUSTO TOTAL DE LUBRIFICANTES ( $AG+AI+AK$ )	R\$	AL	60,78
TOTAL DOS CUSTOS VARIÁVEIS ( $X+AC+AE+AL$ )	R\$	AM	3.975,13

Na tabela 29 que segue, é feita uma simulação do custo de uma viagem de 50 quilômetros com um veículo do tipo Truck MB L-1218.

TABELA 29 - SIMULAÇÃO DE FRETE PARA UM VEÍCULO DO TIPO TRUCK MB L-1218

DADOS OPERACIONAIS	UNIDADE	ITEM	EXEMPLO
CARGA PARA TRANSPORTAR	Ton	AN	12
HORAS TRABALHADAS POR MÊS	Horas	AO	260
TEMPO DE CARGA E DESCARGA	Horas	AP	5
VELOCIDADE COMERCIAL NA ESTRADA	Km/h	AQ	55
CUSTO FIXO MENSAL	R\$	AR	2.838,86
CUSTO VARIÁVEL POR QUILOMETRO ( $AM/T$ )	R\$	AS	0,45628
CAPACIDADE DE CARGA DO VEÍCULO	Ton	AT	12
DISTÂNCIA DO PERCURSO	Km	AU	50
TEMPO VIAGEM + CARGA E DESCARGA ( $AU/AQ+AP$ )	Horas	AV	5,91
NÚMERO DE VIAGENS/MÊS ( $AO/AV$ )	viagens	AW	44
QUILOMETRAGEM TOTAL MENSAL ( $AW.AU$ )	Km	AX	2.200
CUSTO FIXO MENSAL POR TON KM ( $AR/AX/AT$ )	R\$	AY	0,107533
CUSTO VARIÁVEL POR TON KM ( $AS/AT$ )	R\$	AZ	0,038023
CUSTO TOTAL POR TON KM ( $AY+AZ$ )	R\$	BA	0,145556
CUSTO POR TON NESTA DISTÂNCIA ( $BA.AU$ )	R\$	BB	7,28
CUSTO FINAL NESTA DISTÂNCIA ( $BB.AT$ )	R\$	BC	87,33

## ANEXO 2 - O ALGORITMO DE TEITZ E BART

Neste anexo são apresentadas algumas definições sobre as  $p$ -medianas e o algoritmo de Teitz e Bart para resolver o problema das  $p$ -medianas.

### Algumas definições sobre as $p$ -medianas

Para um grafo  $G(V,E)$ , define-se número de *out*-transmissão e *in*-transmissão, para cada vértice  $v_i \in V$ , como sendo, respectivamente, CHRISTOFIDES (1975):

$$\sigma_o(v_i) = \sum_{v_j \in V} \theta_j \cdot d(v_i, v_j) \quad \text{e} \quad \sigma_t(v_i) = \sum_{v_j \in V} \theta_j \cdot d(v_j, v_i)$$

onde  $d(v_i, v_j)$  é a menor distância entre o vértice  $v_i$  e  $v_j$ ,  $\theta_j$  é o peso associado ao vértice  $v_j$ . Conforme CHRISTOFIDES (1975), são chamadas de *out*-mediana e *in*-mediana de um grafo, respectivamente, aos vértices  $v_o$  e  $v_t$  que satisfazem as seguintes condições:

$$\sigma_o(v_o) = \min_{v_i \in V} [\sigma_o(v_i)] \quad \text{e} \quad \sigma_t(v_t) = \min_{v_i \in V} [\sigma_t(v_i)]$$

Para generalizar estes conceitos de *out*-transmissão e *in*-transmissão para  $p$ -medianas, considera-se  $V_p$  um sub-conjunto do conjunto de vértices  $V$  do grafo  $G(V,E)$ , que possui  $p$  elementos, isto é,  $|V_p| = p$ . Define-se ainda,

$$d(V_p, v_j) = \min_{v_i \in V_p} [d(v_i, v_j)] \quad \text{e} \quad d(v_j, V_p) = \min_{v_i \in V_p} [d(v_j, v_i)]$$

onde  $d(V_p, v_j)$  representa a distância do sub-conjunto de vértices  $V_p$  até o vértice  $v_j$  e  $d(v_j, V_p)$  indica a distância do vértice  $v_j$  até o sub-conjunto  $V_p$ .

Analogamente ao que foi feito para um só vértice, define-se os números de *out*-transmissão e *in*-transmissão, respectivamente, para o conjunto  $V_p$ , da seguinte forma:

$$\sigma_o(V_p) = \sum_{v_j \in V} \theta_j \cdot d(V_p, v_j) \quad \text{e} \quad \sigma_t(V_p) = \sum_{v_j \in V} \theta_j \cdot d(v_j, V_p)$$

Finalmente, chama-se de *p-out-mediana* e *p-in-mediana* aos conjuntos  $V_{po}$  e  $V_{pt}$ , respectivamente, para os quais:

$$\sigma_o(V_{po}) = \min_{V_p \subset V} [\sigma_o(V_p)] \quad \text{e} \quad \sigma_o(V_{pt}) = \min_{V_p \subset V} [\sigma_o(V_p)]$$

### O algoritmo de Teitz e Bart das p-medianas

Inicialmente escolhe-se um conjunto  $S$  formado por  $p$  vértices, considerado como uma aproximação do conjunto  $V_p$  das  $p$ -medianas. Verifica-se se algum vértice  $v_i \in V - S$  pode substituir, de acordo com o algoritmo abaixo, algum vértice  $v_j \in S$ , produzindo um novo conjunto  $S'$  tal que:  $S' = S \cup \{v_i\} - \{v_j\}$  e  $\sigma(S') < \sigma(S)$ . Se isto for possível, substituímos  $v_j$  por  $v_i$  e  $S'$  é considerado uma nova aproximação para o conjunto  $V_p$ . O algoritmo prossegue até que se obtenha um conjunto  $S$ , onde nenhuma substituição de vértices produza um número de transmissão menor.

Os passos para este algoritmo são os seguintes:

**Passo 1.** Construa um conjunto inicial  $S$ , com  $p$  elementos de  $V$ ;

**Passo 2.** Rotule todos os vértices  $v_i \notin S$  como “não analisados”;

**Passo 3.** Enquanto existirem vértices “não analisados” no conjunto  $V - S$ ,

faça:

a) Selecione um vértice “não analisado”  $v_i \in V - S$ , e calcule a redução

$$\Delta_{ij} \text{ do número de transmissão, } \forall v_j \in S: \Delta_{ij} = \sigma(S) - \sigma(S \cup \{v_i\} - \{v_j\});$$

b) Faça  $\Delta_{ij_o} = \max_{v_j \in S} [\Delta_{ij}]$ ;

c) Se  $\Delta_{ij_o} > 0$  faça  $S \leftarrow S \cup \{v_i\} - \{v_{j_o}\}$  rotulando  $v_{j_o}$  como “analisado”;

d) Se  $\Delta_{ij_o} \leq 0$  rotule  $v_i$  como “analisado”.

**Passo 4.** Se durante a execução do passo anterior ocorrerem modificações no conjunto  $S$ , volte ao passo 2. Caso contrário PARE. O conjunto  $S$  será uma

aproximação para o problema das  $p$ -medianas.

Um fluxograma para o algoritmo de Teitz e Bart é apresentado na figura 21 do anexo 4.

## ANEXO 3 - CONJUNTOS CONVEXOS E FUNÇÕES CONVEXAS

### CONJUNTOS CONVEXOS

Definição 1: Um subconjunto  $S \subset \mathfrak{R}^n$  é convexo se, e somente se, para todo  $x, y \in S$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , se verifica que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$ . (FRIEDLANDER, 1994).

Proposição 1: Todo subespaço vetorial  $E \subset \mathfrak{R}^n$  é um conjunto convexo. (LIMA, 1985).

### FUNÇÕES CONVEXAS

Definição 2: Uma função  $f$ , definida em um conjunto convexo  $S \subset \mathfrak{R}^n$  é convexa se, e somente se, para todo  $x, y \in S$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , se verifica que  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ . Se para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$  e  $x \neq y$ , vale que  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ , diz-se que  $f$  é estritamente convexa. (FRIEDLANDER, 1994).

Proposição 2: Seja  $H(f) = \{ (x, y) \in S \times \mathfrak{R} ; y \geq f(x) \}$ . Então a função  $f$  é convexa se, e somente se  $H(f)$  é um subconjunto convexo de  $\mathfrak{R}^{n+1}$ . (LIMA, 1985).

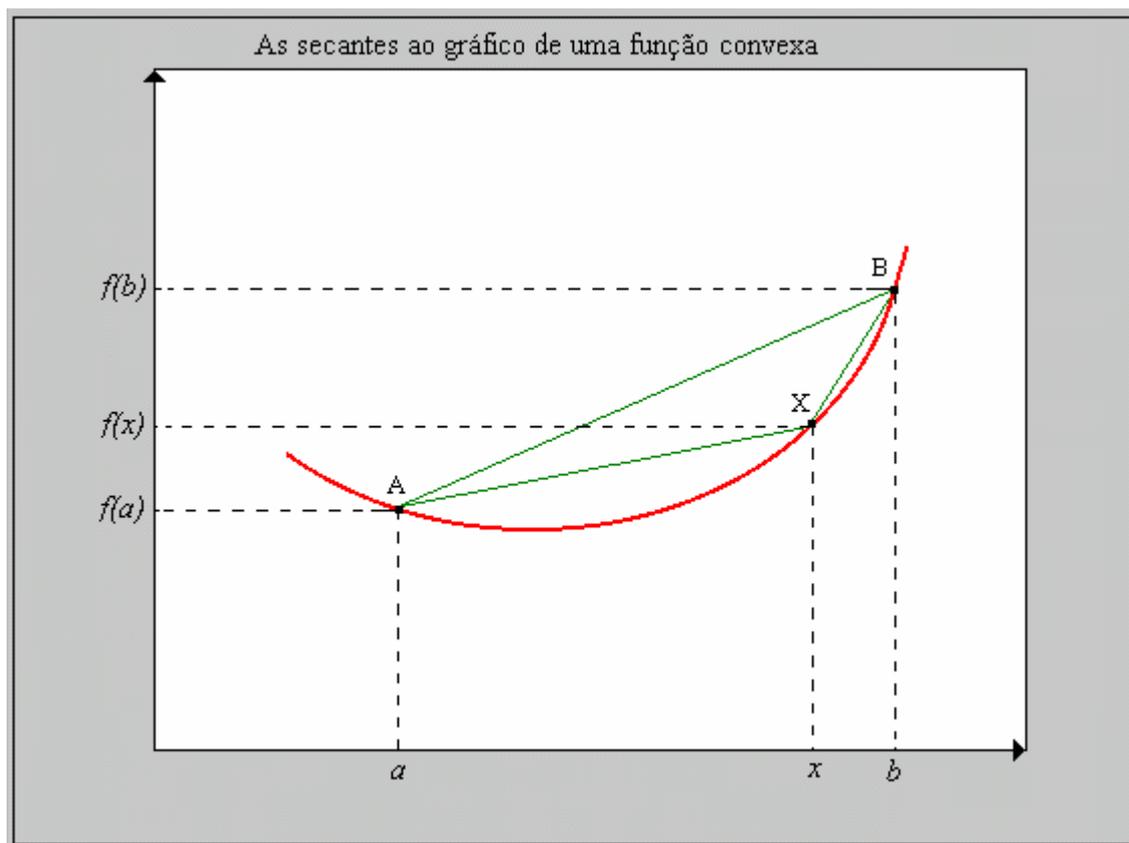
Proposição 3: Se  $f$  é uma função convexa definida em um conjunto convexo  $S$ , então qualquer minimizador local de  $f$  é um minimizador global de  $f$ . (FRIEDLANDER, 1994).

Proposição 4: Seja  $I \subset \mathfrak{R}$  um intervalo. Então  $f: I \rightarrow \mathfrak{R}$  é convexa no intervalo  $I$  se, e somente se, valem as desigualdades fundamentais (LIMA, 1989):

$$a < x < b \text{ em } I \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

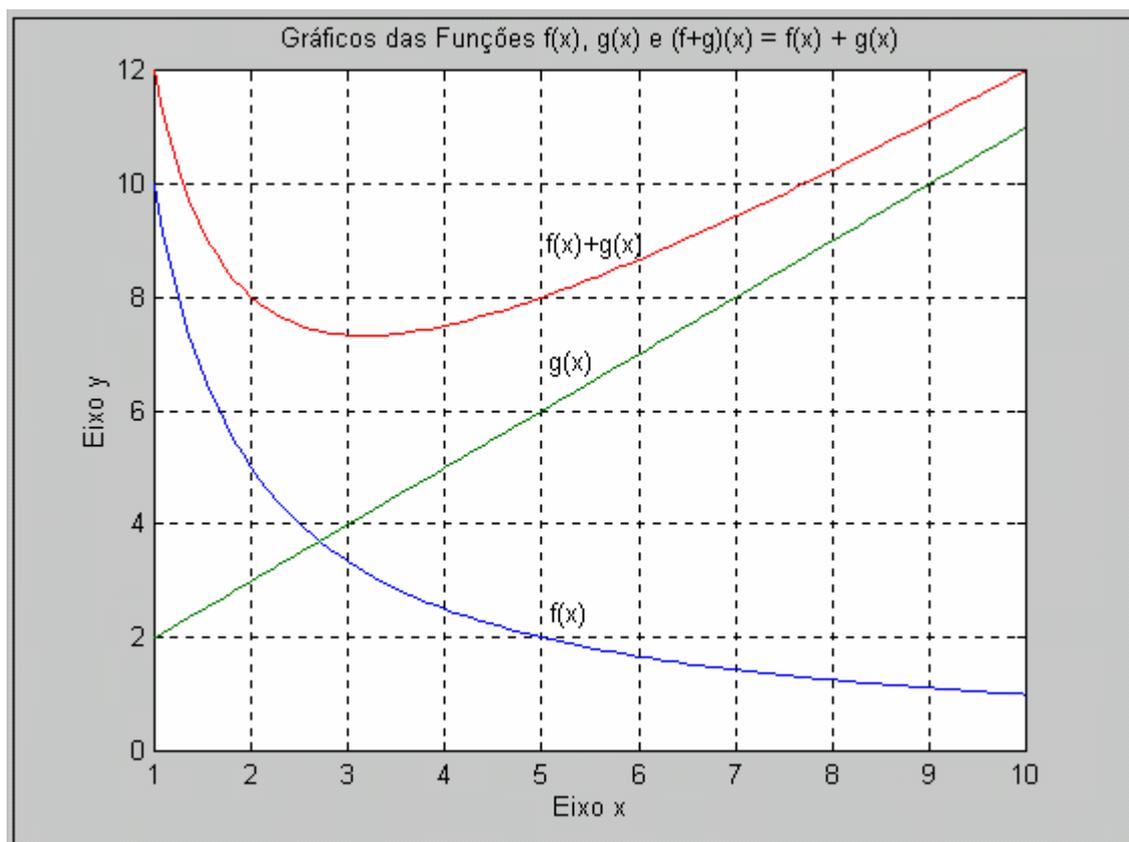
Qualquer uma das duas desigualdades implica na outra. Elas significam que para  $a, x, b \in I$ ,  $a < x < b$ , a secante que passa por  $A = (a, f(a))$  e  $X = (x, f(x))$  tem inclinação menor que a secante por  $A = (a, f(a))$  e  $B = (b, f(b))$  e esta, por sua vez, tem inclinação menor do que a secante por  $X = (x, f(x))$  e  $B = (b, f(b))$ , conforme ilustrado na figura 18.

FIGURA 18 - UMA PROPRIEDADE DAS SECANTES À CURVA DE UMA FUNÇÃO CONVEXA



**Proposição 5:** Se as funções  $f(x)$  e  $g(x)$  são convexas em um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$ , então a função  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , também é convexa neste conjunto  $S$ . (Ver exemplo na figura 19).

FIGURA 19 - EXEMPLO DE QUE A SOMA DE FUNÇÕES CONVEXAS É UMA FUNÇÃO CONVEXA



## ANEXO 4 - FLUXOGRAMAS DE ALGUNS ALGORITMOS CITADOS NO TEXTO

FIGURA 20 - FLUXOGRAMA DO ALGORITMO  $p$ - $q$ -MEDIAN-HEUR

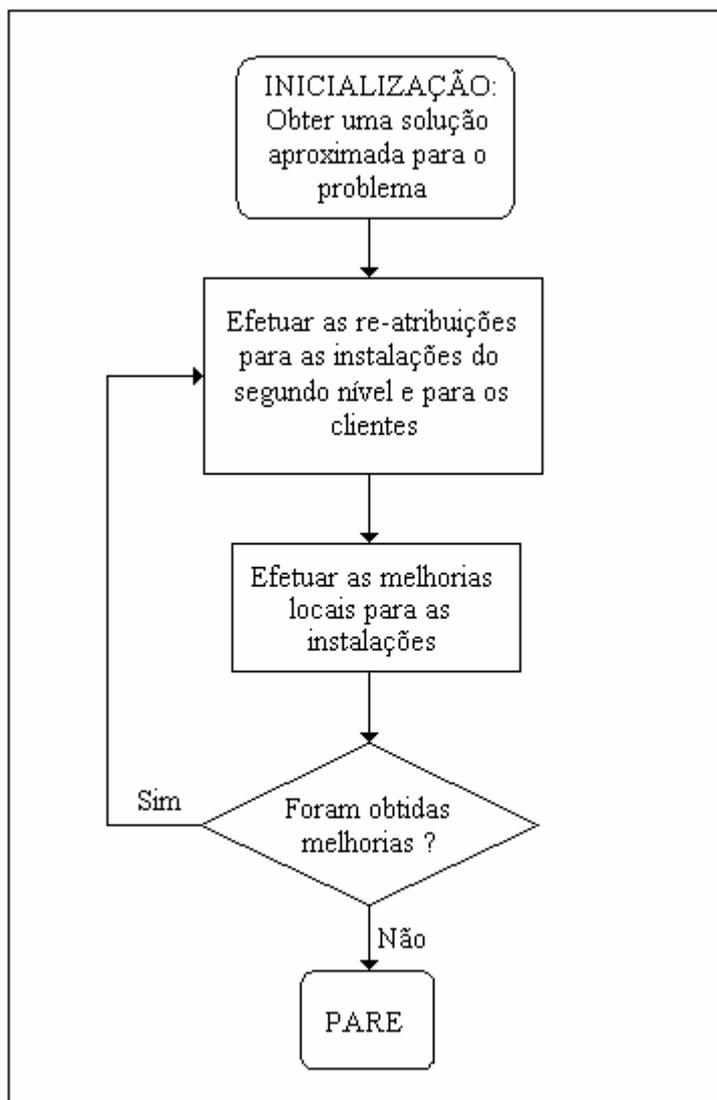


FIGURA 21 - FLUXOGRAMA DO ALGORITMO DE TEITZ E BART

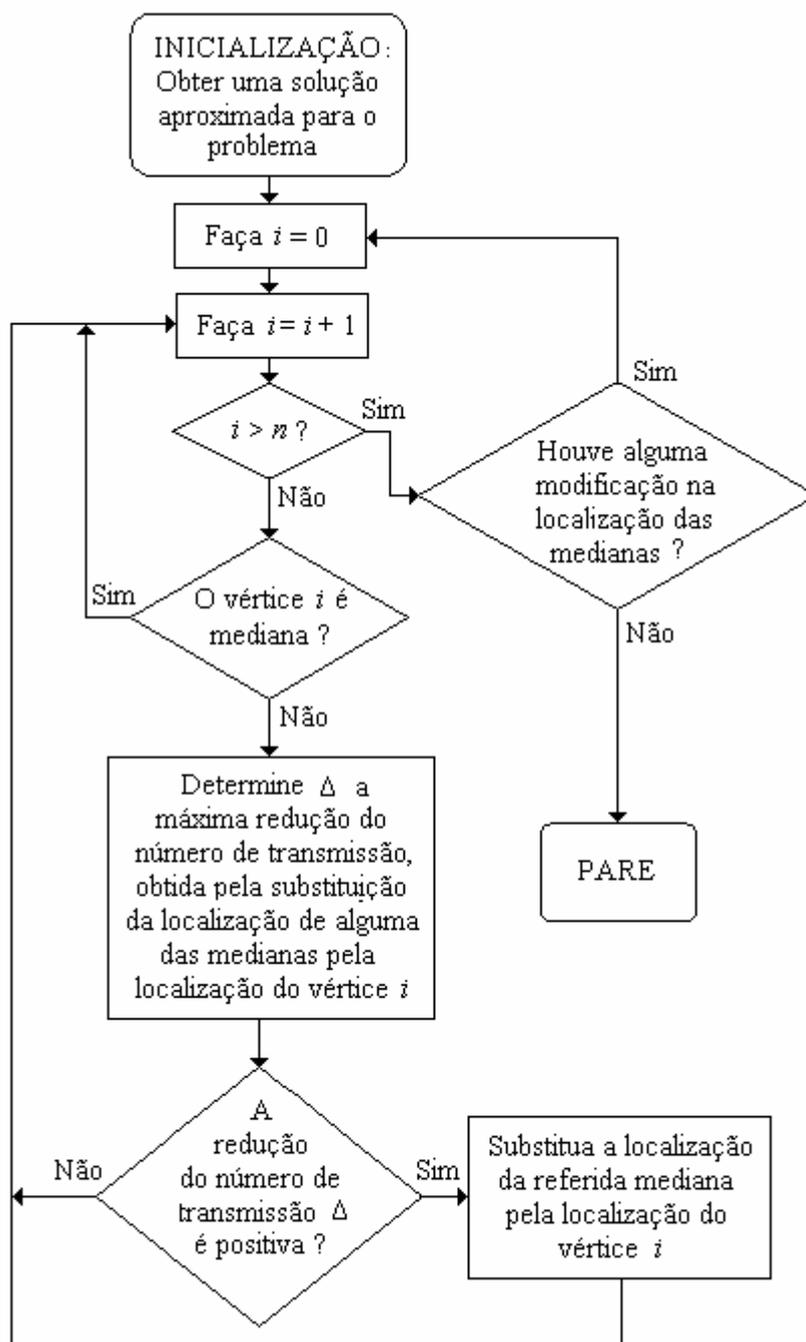


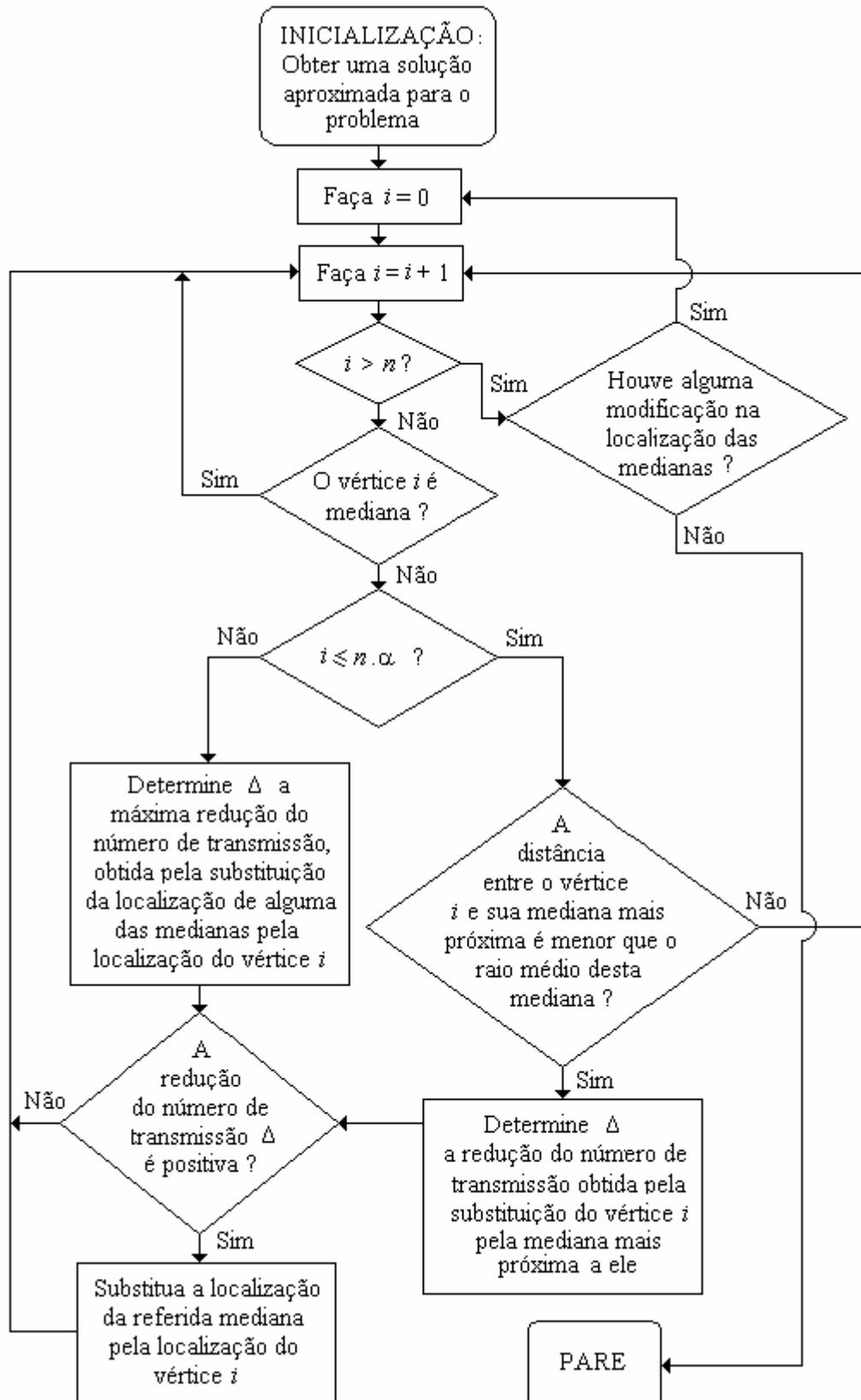
FIGURA 22 - FLUXOGRAMA PARA O ALGORITMO DE TEITZ E BART MODIFICADO PARA  $p$ -MEDIANAS

FIGURA 23 - FLUXOGRAMA PARA O ALGORITMO MEDIAN-HEUR

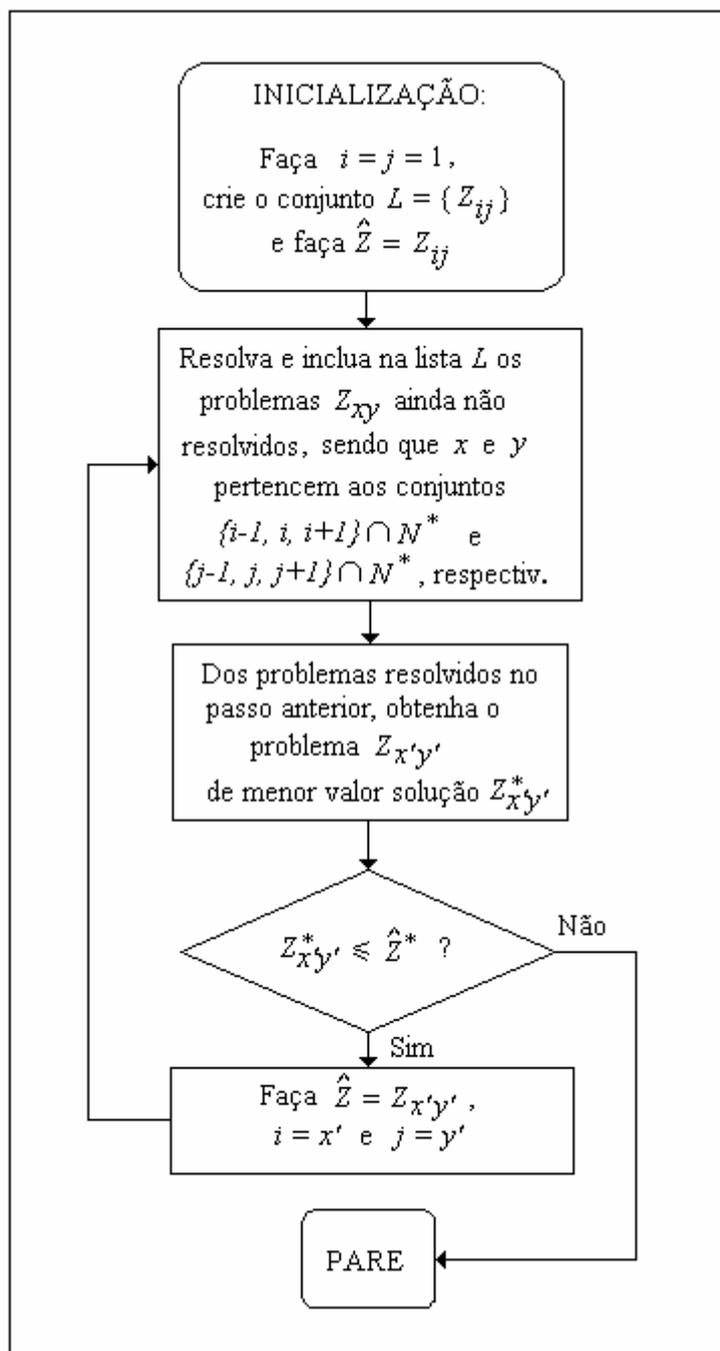


FIGURA 24 - FLUXOGRAMA PARA O ALGORITMO DE SUBGRADIENTE

