



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO –  
PPGEP

TESE DE DOUTORADO



03415084

**REGRA DE DECISÃO ESTOCÁSTICA NÃO LINEAR  
DINÂMICA PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO  
AGREGADO DA PRODUÇÃO**

**DOUTOR:** ANDERSON DE BARROS DANTAS

**ORIENTADOR:** PROF<sup>o</sup>. ROBERT WAYNE SAMOHYL, Ph.D.

**MEMBROS:**

- ANTONIO CEZAR BÓRNIA, DR. (MODERADOR/UFSC)
- ADRIANO MENDONÇA SOUZA, DR. (UFSC)
- PEDRO ALBERTO BARBETTA, DR. (UFSC)
- PEDRO PAULO BALESTRASSI, DR. (EFEI)
- ROBERTO MEURER, DR. (UFSC)



FLORIANÓPOLIS – FEVEREIRO DE 2002

**REGRA DE DECISÃO ESTOCÁSTICA NÃO LINEAR DINÂMICA  
PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO AGREGADO DA  
PRODUÇÃO**


**ANDERSON DE BARROS DANTAS**

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
"DOUTOR EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO" PELA UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
SANTA CATARINA.

---

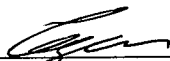
Ricardo Miranda Barcia, Ph.D.  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA



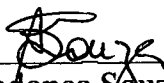
---

Robert Wayne Samohyl, Ph.D.  
Orientador



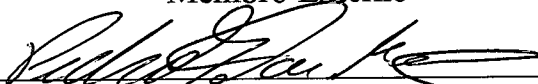
---

Antonio Cezar Bornia, Dr. (UFSC)  
Moderador



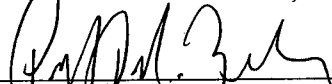
---

Adriano Mendonça Souza, Dr. (UFSM)  
Membro Externo



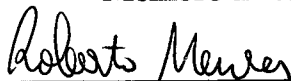
---

Pedro Alberto Barbetta, Dr. (UFSC)



---

Pedro Paulo Balestrassi, Dr. (EFEI)  
Membro Externo



---

Roberto Meurer, Dr. (UFSC)

## AGRADECIMENTOS

- Ao CNPq que através de seus programas auxiliaram financeiramente a realização deste trabalho;
- À Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, pelas condições técnicas propiciada ao estudante;
- Ao professor Robert Wayne Samohyl (Bob), pela orientação, amizade e apoio em todas as etapas desta pesquisa;
- Ao professor Robert Meurer, por estar sempre à disposição na solicitação de dúvidas, atuando praticamente como um co-orientador;
- Ao professor Antonio Cezar Bornia pela sua participação na banca examinadora como moderador e pelas suas sugestões valiosas no exame de qualificação;
- Ao professor Pedro Alberto Barbetta, pela sua participação na banca examinadora e pelas suas sugestões valiosas no exame de qualificação;
- Ao professor Pedro Paulo Balestrassi, pela sua participação na banca examinadora como membro externo;
- Ao professor Adriano Mendonça Souza, pela sua participação na banca examinadora como membro externo;
- Ao professor Antônio Fernando de Andrade Oliveira pela belíssima biblioteca, fonte de pesquisa para esta tese;
- A todos os professores acima citados pela amizade e cooperação encontrada ao longo do curso;
- Ao pessoal da secretaria da pós-graduação e da graduação que sempre desempenharam suas atividades com dignidade, facilitando a vida dos que sempre os solicita;
- A minha esposa, Fernanda Lopes Dantas, pela paciência e apoio;
- A meus pais Cliver de Barros e Silva e Maria das Graças Dantas dos Santos;
- Aos meus irmãos, tios e primos que me deram apoio;
- Aos amigos que de uma forma direta ou indireta contribuíram para a construção deste trabalho: Wesley e família, Carminha, Luciana, Helga, Dinara, Cassandra, Amilton e família, Adriano e família, Pedro e família, Fernanda Cristina, Edson e família, Luis Felipe e família, Cida, Rosane, Omar, Tânia, Sheila, Cláudia, Luciano, Welington, Marcio, Arnóbio Cavalcante e muitos outros que devem, por ser meus amigos, se sentir citados neste trabalho;

*“Viva, comova-se, experimente, aprofunde sua experiência vital ao máximo. Depois, ensine aos outros.” (Lidia Maria Riba, 2001).*

## SUMÁRIO

<b>LISTAS DE TABELAS</b> .....	vii
<b>LISTAS DE QUADROS</b> .....	viii
<b>LISTAS DE FIGURAS</b> .....	ix
<b>RESUMO</b> .....	xi
<b>ABSTRACT</b> .....	xii
<b>CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO</b> .....	01
1.1 INTRODUÇÃO AO TEMA .....	01
1.2 ESCOLHA E RELEVÂNCIA DO TEMA .....	02
1.3 PROBLEMÁTICA .....	03
1.4 OBJETIVO DO TRABALHO .....	03
1.4.1 Geral .....	03
1.4.2 Específico .....	04
1.5 ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA .....	04
1.6 LIMITES DA TESE .....	05
1.7 DEFINIÇÕES DOS PRINCIPAIS TEMAS .....	05
<b>CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	09
2.1 INTRODUÇÃO .....	09
2.2 O PLANEJAMENTO AGREGADO DA PRODUÇÃO .....	09
2.3 A PREVISÃO DE DEMANDA .....	31
2.4 CONCLUSÃO .....	40
<b>CAPÍTULO 3 – DECISÕES COM INCERTEZA</b> .....	41
3.1 INTRODUÇÃO .....	41
3.2 ANÁLISE DA UTILIDADE .....	42
3.3 UTILIDADE, RETORNO E RISCO .....	43
3.4 FUNÇÕES UTILIDADES COMUNS AO PRINCÍPIO DA MÉDIA-VARIÂNCIA	47
3.4.1 Função Utilidade Quadrática .....	48
3.4.2 Função Utilidade Logarítmica .....	50
3.4.3 Função de Força .....	52
3.4.4 Função Exponencial .....	54
3.5 ASSIMETRIA: O TERCEIRO MOMENTO DA DISTRIBUIÇÃO .....	55
3.6 FUNÇÕES QUE INCORPORAM A ASSIMETRIA .....	62
3.7 INCORPORANDO DA ASSIMETRIA POR EXPANSÃO DE TAYLOR .....	70
3.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	73

<b>CAPÍTULO 4 – UMA REGRA DE DECISÃO NÃO-LINEAR, DINÂMICA E ESTOCÁSTICA</b> .....	74
4.1 INTRODUÇÃO .....	74
4.2 MÉTODOS CIENTÍFICOS ADOTADOS .....	74
4.3 MODELO MATEMÁTICO .....	75
4.4 ALGORITMO PROPOSTO .....	79
4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	83
<b>CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO EMPÍRICA: ESTUDO DE CASO</b> .....	85
5.1 INTRODUÇÃO .....	85
5.2 DADOS .....	85
5.3 PERFORMANCE DA EMPRESA ( <i>PE</i> ) .....	87
5.4 PERFORMANCE DA EMPRESA ( <i>PE</i> ) X REGRA DE DECISÃO DETERMINÍSTICA ( <i>RDD</i> ) COM PREVISÃO PERFEITA ( <i>PP</i> ) .....	91
5.5 REGRA DE DECISÃO DETERMINÍSTICA ( <i>RDD</i> ) COM PREVISÃO IMPERFEITA ( <i>PI</i> ) .....	94
5.6 REGRA DE DECISÃO ESTOCÁSTICA ( <i>RDE</i> ) .....	106
<b>CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	117
6.1 CONCLUSÃO .....	117
6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	119
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	121
<b>ANEXOS</b> .....	125

## LISTAS DE TABELAS

<b>Tabela 3.1:</b> Valor de $b$ para fraca aversão ao risco, dado $a$ e $c$ , média, variância e assimetria .....	64
<b>Tabela 3.2:</b> Valor de $b$ para forte aversão ao risco, dado $a$ e $c$ , média, variância e assimetria .....	64
<b>Tabela 3.3:</b> Valor de $b$ , dado $a$ e $c$ , média, variância e assimetria, com $AAR$ positiva .....	65
<b>Tabela 3.4:</b> Valor de $a = 3,87 > E(W)$ , considerando baixa aversão ao risco ....	69
<b>Tabela 3.5:</b> Valor de $a = 7 > E(W)$ , considerando forte aversão ao risco .....	69
<b>Tabela 3.6:</b> Valor de $a = 8 > E(W)$ , representa forte aversão ao risco .....	69
<b>Tabela 5.1:</b> Dados coletados para estudo de caso .....	86
<b>Tabela 5.2:</b> Performance da empresa com previsão perfeita .....	91
<b>Tabela 5.3:</b> Custos da performance da empresa com previsão perfeita .....	92
<b>Tabela 5.4:</b> Regra de decisão determinística com previsão perfeita .....	92
<b>Tabela 5.5:</b> Custos da regra de decisão determinística com previsão perfeita ...	93
<b>Tabela 5.6:</b> Comparação dos desempenhos da $PE$ e $RDD$ com previsão perfeita	93
<b>Tabela 5.7:</b> Regra de decisão determinística com $SES$ .....	95
<b>Tabela 5.8:</b> Custos da regra de decisão determinística com $SES$ .....	95
<b>Tabela 5.9:</b> Regra de decisão determinística com Holt .....	95
<b>Tabela 5.10:</b> Custos da regra de decisão determinística com Holt .....	96
<b>Tabela 5.11:</b> Regra de decisão determinística com Holt-Winters .....	96
<b>Tabela 5.12:</b> Custos da regra de decisão determinística com Holt-Winters .....	96
<b>Tabela 5.13:</b> Regra de decisão determinística com $MA(2)$ .....	97
<b>Tabela 5.14:</b> Custos da regra de decisão determinística com $MA(2)$ .....	97
<b>Tabela 5.15:</b> Regra de decisão determinística com $WMA(2)$ .....	97
<b>Tabela 5.16:</b> Custos da regra de decisão determinística com $WMA(2)$ .....	98
<b>Tabela 5.17:</b> Regra de decisão determinística com $ARIMA$ .....	99
<b>Tabela 5.18:</b> Custos da regra de decisão determinística com $ARIMA$ .....	100
<b>Tabela 5.19:</b> Fator de desvio da regra para os diversos modelos de previsão ..	105
<b>Tabela 5.20:</b> Comparação dos desempenhos da $PE$ , $RDD-PE$ , $RDD-PI$ .....	106
<b>Tabela 5.21:</b> Passos do algoritmo por diversas funções – grande $AAR$ e $ARR$ ..	107
<b>Tabela 5.22:</b> Passos do algoritmo por diversas funções – baixa $AAR$ e $ARR$ .....	107
<b>Tabela 5.23:</b> Regra de decisão estocástica com alta aversão ao risco .....	108
<b>Tabela 5.24:</b> Custos da regra de decisão estocástica – alta aversão ao risco ...	108
<b>Tabela 5.25:</b> Regra de decisão estocástica com baixa aversão ao risco .....	116
<b>Tabela 5.26:</b> Custos da regra de decisão estocástica – baixa aversão ao risco	116

## **LISTA DE QUADROS**

<b>Quadro 2.1:</b> Previsão para as vendas por alguns métodos tradicionais para a indústria .....	39
<b>Quadro 3.1:</b> Interpretação das derivadas primeiras da aversão absoluta e relativa ao risco .....	46
<b>Quadro 3.2:</b> Tipos de função utilidade e sua caracterização quanto ao risco absoluto e relativo .....	47
<b>Quadro 3.3:</b> Conjunto de retornos possíveis e seus três primeiros momentos ...	57
<b>Quadro 3.4:</b> Conjunto de retornos possíveis e seus três primeiros momentos ...	57
<b>Quadro 3.5:</b> Conjunto de retornos possíveis e seus três primeiros momentos ...	58
<b>Quadro 3.6:</b> Estatísticas para o investimento $X$ .....	71
<b>Quadro 3.7:</b> Estatísticas para o investimento $Y$ .....	71
<b>Quadro 3.8:</b> Comparação entre funções utilidades para os dois investimentos $X$ e $Y$ .....	72
<b>Quadro 4.1:</b> Um algoritmo para controle ótimo estocástico não-linear .....	83



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1:</b> Comparação entre abordagem de custos por programação línea e custos mais reais .....	15
<b>Figura 3.1:</b> Investidor com aversão ao risco .....	44
<b>Figura 3.2:</b> Investidor amante do risco .....	44
<b>Figura 3.3:</b> Investidor indiferente ao risco .....	45
<b>Figura 3.4:</b> Área praticável da função utilidade quadrática .....	49
<b>Figura 3.5:</b> Isoquanta da utilidade para pares de risco e retorno .....	50
<b>Figura 3.6:</b> Função utilidade logarítmica .....	51
<b>Figura 3.7:</b> Função utilidade força com $b = 0,2$ .....	53
<b>Figura 3.8:</b> Função utilidade força com $b = 0,8$ .....	53
<b>Figura 3.9:</b> Função utilidade raiz quadrada .....	54
<b>Figura 3.10:</b> Função utilidade exponencial para $b$ relativamente grande .....	55
<b>Figura 3.11:</b> Função utilidade exponencial para $b$ relativamente menor .....	55
<b>Figura 3.12:</b> Distribuição assimétrica positiva dos dados .....	57
<b>Figura 3.13:</b> Distribuição simétrica dos dados .....	58
<b>Figura 3.14:</b> Distribuição assimétrica negativa dos dados .....	58
<b>Figura 3.15:</b> Comportamento da utilidade de Borch em três momentos .....	66
<b>Figura 4.1:</b> Fluxo de resolução do problema através do algoritmo .....	82
<b>Figura 5.1:</b> Formato da curva de custo para estocagem .....	89
<b>Figura 5.2:</b> Regra de produção para milho .....	101
<b>Figura 5.3:</b> Regra de produção para café .....	101
<b>Figura 5.4:</b> Regra de produção para colorau .....	102
<b>Figura 5.5:</b> Regra do nível de trabalho .....	102
<b>Figura 5.6:</b> Regra do estoque para milho .....	103
<b>Figura 5.7:</b> Regra do estoque para café .....	103
<b>Figura 5.8:</b> Regra do estoque para colorau .....	104
<b>Figura 5.9:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para produção de milho .....	109
<b>Figura 5.10:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para produção de café .....	110
<b>Figura 5.11:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para produção de colorau .....	110
<b>Figura 5.12:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para estoque de milho .....	111

<b>Figura 5.13:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para estoque de café .....	111
<b>Figura 5.14:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para estoque de colorau .....	112
<b>Figura 5.15:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para atrasos de milharina .....	112
<b>Figura 5.16:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para atrasos de café .....	113
<b>Figura 5.17:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para atrasos de colorau .....	113
<b>Figura 5.18:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para nível de trabalho .....	114
<b>Figura 5.19:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para hora extra .....	114
<b>Figura 5.20:</b> Comparação da regra determinística e estocástica para hora ociosa .....	115

## **RESUMO**

Este trabalho é uma proposta metodológica acerca do tema de tomada de decisões nas empresas com medidas diferenciadas de risco, para aqueles que já se consideram avessos ao risco. Toda uma discussão sobre a aversão ao risco é debatida no trabalho, e várias funções utilidades são testadas para levar em consideração os três primeiros momentos da distribuição – a média, a variância e a assimetria.

Mais especificadamente, o trabalho está interessado em aperfeiçoar o processo de tomada de decisões no planejamento agregado da produção, para isso, parte-se do pioneiro estudo de Holt et al. (1955), o qual elabora uma regra de decisão determinística para esse tipo de planejamento.

Para atingir tal objetivo, o trabalho elabora uma regra estocástica não linear dinâmica. Esta, cuja participação do algoritmo proposto por Cuthbertson et al. (1992) é fundamental, possibilita que o gerenciador de decisões escolha, entre opções alternativas de risco, as variáveis que levam ao controle ótimo.

## **ABSTRACT**

This work is a discussion about how to making decisions in the firms, in which are different measures of risk for those that have aversion risk. All discussion about the risk aversion has been studied in this research.

This research is interest to improve the process of decision making in aggregated planning production, for this purpose, it begins from the original Holt's et al. (1955) study, which elaborates a deterministic rule decision for this kind of planning.

To reach such goal, the work elaborates a stochastic dynamic no linear rule. This rule, which use the Cuthbertson's et al. (1992) algorithm is fundamental, to be able the choice by maker decisions among alternatives risk options, the variables which to run optimal control.

### 1.1 INTRODUÇÃO AO TEMA

Desde o trabalho pioneiro de Holt et al. (1955), muito conhecido pelas siglas iniciais dos autores – HMMS, o qual através de uma regra de decisão linear tinha como objetivo a combinação de diversas variáveis de controle (produção, trabalho, estoques etc.) para a minimização de custos, vários autores têm diversificado a sua aplicação na busca de torná-lo disseminado no meio empresarial. Trabalhos como os de Bowman (1963), Welan (1975), Schwarz and Johnson (1978), Mellichamp and Love (1978), Kamien and Li (1990), entre outros autores mencionados na revisão bibliográfica, são exemplos na literatura com esta finalidade.

Estes, por sua vez, como em HMMS, apesar das diversas versões, tratavam o problema como determinístico, sendo que em alguns trabalhos a preocupação com questões de não-linearidade já estava presente, pois sistemas lineares podem se afastar bastante da realidade.

Nos trabalhos de Love e Turner (1993), Shen (1994) e Samohyl (1997) existe a preocupação extra em considerar o problema como não determinístico. Em sistemas não lineares a solução determinística e estocástica não são mais equivalentes. Assim, esses autores buscam aplicar o controle ótimo, partindo do original de HMMS, cujo problema leve em consideração a parte estocástica, e/ou a parte dinâmica e/ou a parte não linear.

Os trabalhos com controle ótimo estocástico se mostram extremamente complicados para a sua compreensão. No caso ainda da Regra de Decisão Linear de HMMS, muitas críticas são levantadas pela falta da difusão da técnica no mundo empresarial, questionando-se muito as aproximações quadráticas feitas no modelo. Considerações de não-linearidade podem tornar o problema de difícil resolução. Contudo, o avanço da informática tem ajudado muito no tratamento destas questões.

## 1.2 ESCOLHA E RELEVÂNCIA DO TEMA

Diante da crescente guerra competitiva em que se encontram as organizações empresariais, a definição de uma regra que ajude o processo de planejamento é sempre relevante quando reduz custos ou aumenta lucros. A escolha, então, é consequência da tentativa de tornar o assunto muito mais compreensivo e amigável aos olhos de uma leva maior de pesquisadores e empreendedores, que necessariamente não são conhecedores na área de modelagem matemática.

A pesquisa também é justificada diante do crescente interesse que o controle ótimo vem alcançando nas mais diversas áreas, especialmente na área de ciências sociais. Até então, o assunto era de tal complexidade matemática que só despertava interesse de matemáticos, engenheiros e poucos economistas. A teoria do controle ótimo não é mais um assunto inacessível a maioria dos profissionais e alunos de pós-graduação que utilizam a matemática aplicada no seu cotidiano de estudo e pesquisa. Como mencionado anteriormente, o avanço da informática tem facilitado muito a compreensão deste tipo de problema. Dentro desta proposta, procura-se produzir uma documentação mais acessível para aqueles que venham a trabalhar futuramente com essa ferramenta poderosa.

Neste projeto, uma versão modificada de um algoritmo proposto por Cuthbertson et al. (1992) será utilizada e, no que for possível, melhorada. Esse algoritmo tem sido bastante utilizado para buscar soluções estocásticas não-lineares em modelos macroeconômicos de porte médio. A pretensão é mostrar que a sua adaptação para este caso é bastante coerente, podendo o seu resultado ser confiável.

O algoritmo faz iterações em torno de dois passos básicos:

- 1) Faz uma otimização dinâmica através de conceitos determinísticos;
- 2) Incorpora-se o elemento estocástico através de simulação de Monte Carlo para encontrar a média, variância e demais momentos, se necessário.

Alguns resultados já se mostram favoráveis a esta metodologia como em Samohyl (1997), onde se trabalha com uma função critério de três momentos, e em Dantas e Samohyl (1998), onde se trabalha com uma função critério com dois momentos. Nestes dois trabalhos os resultados são apresentados de maneira mais simples, inclusive pode ser trabalhado utilizando planilha eletrônica, a qual é bastante conhecida no meio empresarial.

### **1.3 PROBLEMÁTICA**

No processo de tomada de decisões duas grandes preocupações cercam o administrador: 1) quanto é possível ganhar ou deixar de perder com uma decisão; 2) qual o risco que se incorre por determinada decisão ser assumida.

A grande questão que se põe neste trabalho é:

*Será possível elaborar uma regra de decisão que, além de incorporar o retorno esperado com a decisão, incorpore também o risco (mensurado pela variância e assimetria da distribuição) associado a essa decisão? Será possível ainda escolher por níveis de risco diferenciados?*

### **1.4 OBJETIVO DO TRABALHO**

#### **1.4.1 Geral:**

O objetivo geral do trabalho é formular uma regra de decisão estocástica não linear para multi-produtos, possibilitando optar por situações que reflitam níveis diferenciados de aversão ao risco.

#### 1.4.2 Específico:

- Utilizar o segundo e o terceiro momento da distribuição (no caso deste trabalho o lucro) como medida de risco;
- Testar técnicas usuais de previsão de demanda para empresas;
- Aplicar o modelo em uma empresa pré-selecionada;

### 1.5 ORGANIZAÇÃO DA PESQUISA

Este trabalho é dividido em seis capítulos. A primeira parte apresenta uma breve apresentação do assunto. Em seguida, colocam-se os motivos pelos quais se resolveu trabalhar com o presente tema e a relevância do mesmo. A problemática apresenta a grande questão a ser resolvida e os objetivos tentam solucioná-la. A organização da pesquisa conduz o leitor a um resumo esquematizado, seguido pelos limites do trabalho e definição dos principais conceitos. Este é o capítulo 1.

No capítulo 2 é descrita a revisão bibliográfica de dois assuntos importantes para a tese: 1) o planejamento agregado da produção – alicerce básico para construção da regra; e 2) ferramentas de previsão de demanda para empresas – condução para um maior ou menor erro da tomada de decisão.

O capítulo 3 apresenta: 1) a base para a nova função critério do algoritmo de Cuthbertson et al. (1992); 2) ferramentas para incorporação ponderada do segundo momento da distribuição do lucro (variância) e do terceiro momento dessa distribuição (assimetria). Nele, então, são discutidas toda a teoria do risco-retorno e as diversas funções utilidades usadas na literatura.

O capítulo 4 apresenta o modelo matemático. A metodologia é discutida neste capítulo, pois a partir dela serão propostos alguns esquemas. O algoritmo é a complementação para que a não linearidade e a parte estocástica sejam incluídas na regra de decisão.



No quinto capítulo, os resultados com a regra proposta na forma determinística e na forma estocástica são apresentados. Aqui são testadas as melhores funções utilidades pré-selecionadas anteriormente, bem como são testadas as diversas funções de previsão da demanda.

O capítulo 6 conclui o trabalho e apresenta as recomendações para pesquisas futuras. Segue a bibliografia e os anexos do trabalho.

## **1.6 LIMITES DA TESE**

- A dificuldade de levantamento de dados que refletissem os custos envolvidos nesta análise impediu a aplicação e a comparação em outras empresas;
- Mesmo a empresa que decidiu contribuir com este trabalho não tinha com precisão algumas das informações necessárias para o mesmo. Logo, alguns valores apresentados são aproximados ao que seriam efetivamente reais;
- O uso de planilha eletrônica (Excel), apesar de simples, deve ser cuidadoso para problemas de otimização cuja quantidade de variáveis de controle e de restrições são grandes, bem como para horizontes de planejamentos extensos. Vários pontos de partida devem ser testados, o que torna o processo final lento.

## **1.7 DEFINIÇÕES DOS PRINCIPAIS TEMAS**

- a) Período – Refere-se ao intervalo de tempo em que os dados serão trabalhados. Podem ser trimestrais, mensais, semanais, diários ou qualquer outra unidade, dependendo do tipo de fábrica e problema que se está lidando. Duas coisas, segundo os autores supracitados, definem o período: a força da previsão e a velocidade que a empresa pode se ajustar a mudanças no mercado.

- b) Horizonte de Planejamento – Número futuro de períodos em que você deseja fazer o planejamento. Por exemplo, para os próximos sete dias da semana, para o próximo trimestre, para o próximo semestre entre outros. Porém, o mais comum é um período de 12 meses.
- c) Unidade de Produção – A produção será representada por uma unidade comum, por exemplo, galões, toneladas etc.
- d) Desagregação – Esta procura fazer um planejamento da quantidade de cada modelo de produto, quando uma fábrica produz vários bens ou serviços. Esta é uma situação mais realista para com o ambiente empresarial.
- e) Programa Mestre – Define os modelos e as quantidades que serão produzidas. Advém da desagregação.
- f) Custos da Produção – Normalmente se compõem por custos dos materiais, inventário de matéria-prima em processo, sobras, refugo, estrago etc.
- g) Custos da Força de Trabalho – Custo médio por empregado para um período de tempo regular na produção. Estão compostos por: salários, impostos, benefícios etc.
- h) Custos do Inventário – São custos associados ao montante de dinheiro que se reverteria ao estoque de produtos e que poderiam estar rendendo dinheiro no mercado financeiro. Soma-se a isto o custo de armazenagem, seguros e obsolescência para os produtos.
- i) Custos de Pedidos Atrasados – São custos relacionados à falha no atendimento da demanda, o que acarreta na perda do cliente e/ou na perda da confiança do consumidor. Esses custos não são muito fáceis de serem definidos dentro da empresa. Dependerá da experiência dos administradores. Sabe-se apenas que são menores se os consumidores são pacientes ou se a parcela que faltar for pequena no pedido geral. Porém, são enormes caso em contrário.

- j) Custos da Contratação – Custos relacionados ao acréscimo de mais uma unidade de trabalho. Normalmente são formados pelo custo do departamento de pessoal e pelo custo de treinamento.
- k) Custos da Demissão – Custos relacionados à legislação (férias proporcional, aviso prévio, indenização etc.), que dependem da localização regional da empresa. Custo do efeito moral nos trabalhadores restantes devem também ser computados.
- l) Custos de Hora Extra – São custos de utilizar cada hora além da carga normal de trabalho. Normalmente existe um percentual definido por legislação específica.
- m) Custos com a Ociosidade – Custos relacionados ao pagamento do trabalho quando a fábrica possui capacidade ociosa.
- n) Custos de Subcontratação – Custos pagos para processar algo fora da fábrica. Devem incluir custos de diferença na qualidade, bem como os de completar e de controlar uma subcontratação.
- o) HMMS – Regra de decisão linear elaborada inicialmente por Holt, Modigliani e Simon (1955) e reorganizada por Holt, Modigliane, Muth e Simon (1960).
- p) Controle Ótimo – Técnicas de otimização composta por variáveis de controle, variáveis de estado, variáveis exógenas e um erro associado.
- q) Variável de Controle – Variáveis que serão alteadas na busca de um menor custo ou maior retorno nas variáveis de estado.
- r) Variável de Estado – Variáveis resultantes compostas por funções alimentadas pelas variáveis de controle.

- s) Variável Exógena – São variáveis sem nenhum controle no sistema, mas que o afeta de maneira direta.
- t) Sistema – Conjunto de variáveis e equações que representam, neste trabalho, o ambiente da empresa que se quer estudar.
- u) Estocástico – Significa que qualquer erro que alimenta o sistema não deverá ser considerado nulo em termos de esperança. Logo, precisará ser simulado e incorporado ao mesmo.
- v) Determinístico – O erro médio que alimenta o sistema será considerado nulo.
- w) Regra de Decisão – Esquema matemático que guia a resolução de problemas dentro da empresa, numa área específica. No caso desta tese, o planejamento agregado da produção.

## **CAPÍTULO 2 – PLANEJAMENTO E PREVISÃO DA PRODUÇÃO**

---

### **2.1 INTRODUÇÃO**

O estudo de planejamento agregado da produção é um tema interessante, pois remota inicialmente da década de cinquenta e ainda hoje é muito discutido. Deveria não só estar presente em capítulos complementares de livros sobre a administração da produção, mas também ser objeto de livros completos, como foi o caso do estudo de Holt et al. (1960). Este fato se deve à grande importância do planejamento, principalmente em épocas competitivas como as dos dias atuais, onde as decisões empresariais trabalham sobre constantes e fortes pressões:

O problema basicamente está em tomar algumas decisões quanto ao ajuste de algumas variáveis agregadas do produto (produção, estoques, nível de trabalho etc.) com relação às flutuações na demanda. Este procedimento tem o objetivo de minimizar custos ou maximizar lucros.

Com esta preocupação, este capítulo procura apresentar o que se tem proposto para este tipo de problema e sua evolução sempre dedicada ao aumento do realismo do ambiente empresarial. Também é fundamental, este capítulo, para sintonizar o marco referencial e por onde se encaminha a proposta desta pesquisa, dividi-lo em duas seções: a primeira é exclusiva do problema do planejamento agregado, enquanto a segunda é exclusiva das técnicas de estimação da demanda.

### **2.2 O PLANEJAMENTO AGREGADO DA PRODUÇÃO**

Os modelos matemáticos tiveram bastante impacto na literatura de planejamento agregado da produção. Estudos de programação linear foram os mais utilizados no início e possuíam grande simplificação com relação às equações de custos envolvidas nas soluções dos seus problemas.

De acordo com Vollman et al. (1997: 613-614) a programação linear é basicamente estabelecida como o esquema descrito a seguir:

Minimizar:

$$\sum_{t=1}^m (C_H H_t + C_F F_t + C_R P_t + C_{OT} OT_t + C_I I_t + C_U U_t) \quad (2.2.1)$$

Sujeito a:

1) Restrição do Inventário:

$$I_{t-1} + P_t + OT_t - I_t = D_t \quad (2.2.2)$$

$$I_t \geq B_t \quad (2.2.3)$$

2) Restrição para o Tempo Regular de Produção:

$$P - A_1 W_t + U_t = 0 \quad (2.2.4)$$

3) Restrição da Hora Extra (OT):

$$OT_t - A_2 W_t + S_t = 0 \quad (2.2.5)$$

4) Restrição para Variação do Nível da Força de Trabalho:

$$W_t - W_{t-1} - H_t + F_t = 0 \quad (2.2.6)$$

5) Restrições Iniciais:

$$\begin{aligned} W_0 &= A_3 \\ I_0 &= A_4 \\ W_m &= A_5 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

onde:

$A_{1t}$  = Número máximo de horas permitidas para o tempo regular de produção por período;

$A_{2t}$  = Número máximo de horas permitidas para a hora extra por período;

$A_3$  = Nível de emprego inicial;

$A_4$  = Nível de inventário inicial;

$A_5$  = Número de empregados desejados no período  $m$  (último período do horizonte de planejamento);

$B_t$  = Número mínimo de produtos/horas a ser estocado no período  $t$ ;

$C_H$  = Custo de contratação de um empregado;

$C_F$  = Custo de demissão de um empregado;

$C_R$  = Custo da hora trabalhada na produção em tempo regular;

$C_{OT}$  = Custo da hora trabalhada na produção por hora extra;

$C_I$  = Custo mensal de manter uma unidade de produto no estoque em termos de hora trabalhada;

$C_U$  = Custo da hora perdida de trabalho na produção em tempo regular;

$D_t$  = Horas de produção a ser vendida no período  $t$ ;

$F_t$  = Número de empregados demitidos no período  $t$ ;

$H_t$  = Número de empregados contratados no período  $t$ ;

$I_t$  = Produtos/horas estocados no fim do período  $t$ ;

$m$  = Número de períodos no horizonte de planejamento;

$OT_t$  = Hora extra utilizada na produção no período  $t$ ;

$P_t$  = Produção em tempo regular transformado em horas no período  $t$ ;

$S_t$  = Número de hora extra não usada daquilo que seria possível no período  $t$ ;

$U_t$  = Número de horas não utilizadas da produção regular no período  $t$ ;

$W_t$  = Número de pessoas empregadas no período  $t$ ;

O estudo clássico de Holt et al. (1955) procura fazer uma evolução em relação ao modelo de programação linear. Nele é proposta uma regra de decisão linear (RDL) que busca o nível agregado de produção e o nível agregado de trabalho que minimizem os custos envolvidos no sistema produtivo. A principal diferença entre este modelo e o anterior está no fato de considerar algumas aproximações quadráticas para representar as curvas de custo.

A sua representação segue o modelo abaixo:

Custos de folha de pagamento:

$$CRP_t = C_1 W_t \quad (2.2.8)$$

Custos de empregar ou demitir:

$$CHL_t = C_2 (W_t - W_{t-1})^2 \quad (2.2.9)$$

Custos de hora extra:

$$COT_t = C_3 (P_t - kW_t)^2 + C_4 P_t - C_5 W_t \quad (2.2.10)$$

Custos de estoques:

$$CINV_t = C_6 (I_t - I_t^*)^2 \quad (2.2.11)$$

Custo total ( $CT_t$ ) para cada período é a soma dos custos individuais:



$$CT_t = CRP_t + CHL_t + COT_t + CINV_t \quad (2.2.12)$$

onde:

$$C_1 = 340,00;$$

$$C_2 = 64,30;$$

$$C_3 = 0,20;$$

$$C_4 = 51,2;$$

$$C_5 = 281;$$

$$C_6 = 0,0825;$$

$I_t$  = nível de inventário líquido;

$I_t^*$  = inventário líquido ótimo;

$k$  = produtividade média do período estudado = 5.67;

$P_t$  = nível de produção;

$W_t$  = nível de trabalhadores;

Em todas as equações  $t$  significa o período de um mês e as constantes  $C_1$  até  $C_6$  são definidas na observação do processo produtivo, por especialistas da área. Em HMMS  $t = 1, \dots, N=12$  representando o horizonte de planejamento da fábrica. O estudo desses autores compreende uma série temporal de janeiro de 1949 a dezembro de 1954, sendo que o ano de 1954 serviu como o horizonte de planejamento, possibilitando uma comparação da regra com os verdadeiros valores.

A agregação de todos os custos e todos os períodos é denominada de  $C_N$ .

$$C_N = \sum_{t=1}^N CT_t \quad (2.2.13)$$

O problema de otimização, então, seria minimizar os custos durante o período de planejamento:

$$\underset{W_t, P_t}{\text{min}} C_N = \sum CT_t \quad (2.2.14)$$

Sujeito à restrição:

$$I_{t-1} + P_t - S_t = I_t \quad (2.2.15)$$

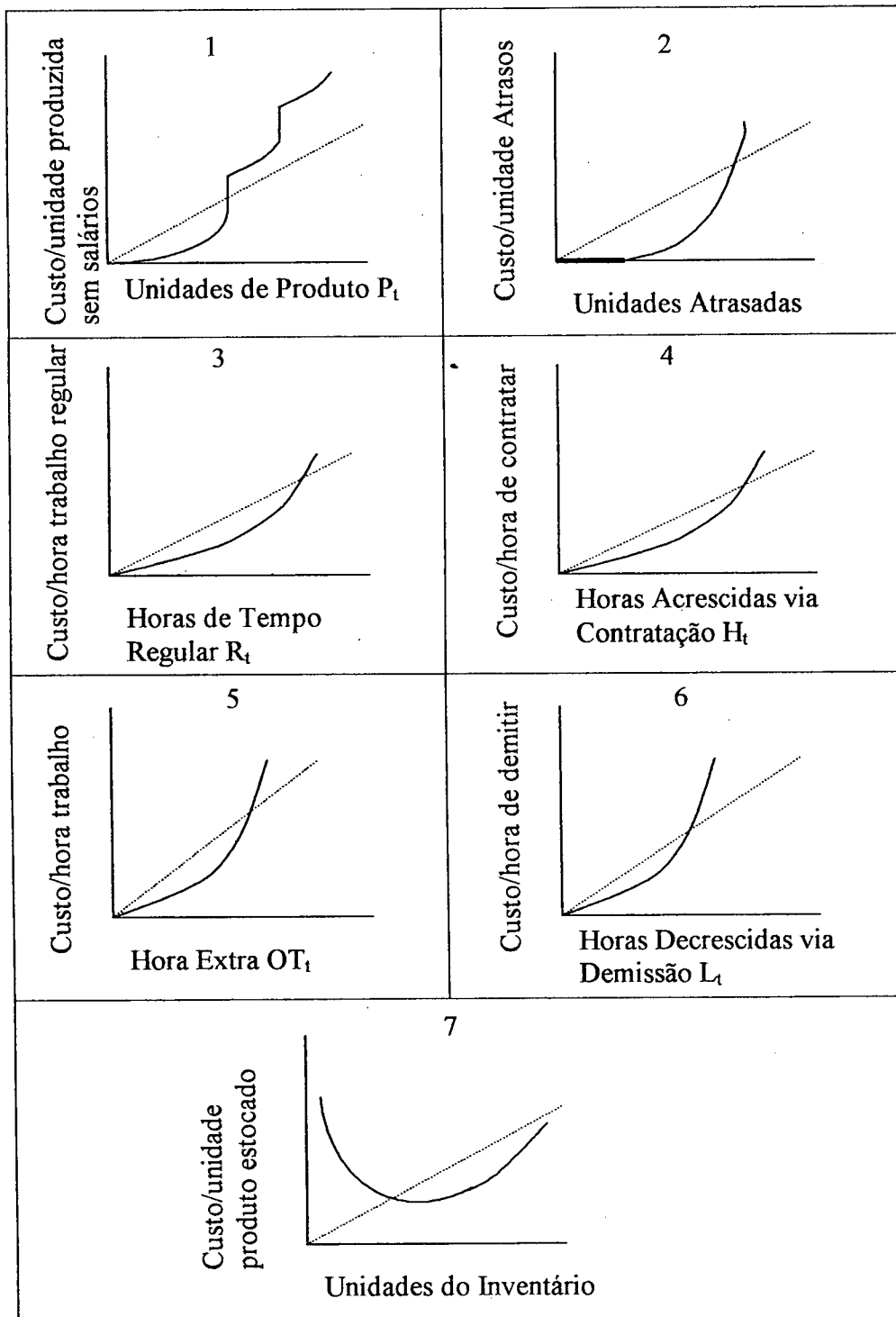
onde  $S_t$  representa as vendas no período  $t$ , sendo a única variável exógena no sistema.

A forma quadrática também foi utilizada como artifício matemático que ajuda na resolução do sistema. Naquela época a falta do desenvolvimento da informática tornava este artifício obrigatório. A solução se dava através das derivadas parciais com respeito a cada variável de decisão. Assim, obtinha-se um sistema de equações lineares, onde sua solução é dada pela inversão da matriz destas equações.

Em se tratando de discussão sobre o formato das equações de custo Bedworth e Bailey (1982: 153) traz em um esquema gráfico para apresentar as possíveis diferenças entre os custos lineares e o que poderia ser a verdadeira representação destes (Ver figura 01).

Cada uma das curvas de custo abaixo representa apenas uma sugestão alternativa buscando uma melhor representação. Por vezes, a simplificação determinística será a única possível para o trabalho que vai ser proposto. Em outros casos, novas representações de custos serão propostas.

Quando se trabalha com um único produto, os modelos como o de programação linear e a regra de decisão linear de HMMS são bastante adequados, respeitando as suas limitações. Porém, muitas firmas se deparam com uma multiplicidade de produtos a serem produzidos numa mesma planta. Esta característica se deve ao fato do aproveitamento das facilidades em comum.



**Figura 2.1:** Comparação entre abordagem de custos por programação linear e custos mais reais.

Fonte: David D. Bedworth e James E. Bailey (1982: 153).

Por exemplo, na fabricação de canos de várias espessuras nada se muda a não ser as especificações de determinadas máquinas envolvidas na fabricação (isso é ainda mais comum nos dias atuais, onde o projeto tecnológico de várias máquinas tem a função de ser multiuso). Também na fabricação de macarrão vários tipos podem ser processados apenas com ajustes em determinadas máquinas. Enfim, não é muito difícil imaginar vários processos que detenham características assemelhadas. Para este tipo de característica é dado o nome de grupos de produtos composto por “ $n$  famílias” (linhas de produto).

Para esse tipo de problema, o método de programação integrada mista é o que mais se adapta para prover a solução matemática. Um estudo que descreve bem este tipo de modelo é o de Chung e Krajewski (1984:392-393). O esquema segue abaixo:

Minimizar:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m [C_{Si} \theta(P_{it}) + C_{mi} P_{it} + C_{Ii} I_{it}] + \sum_{t=1}^m [C_H H_t + C_F F_t + C_{OT} OT_t + A_{1t} C_R W_t] \quad (2.2.16)$$

Sujeito a:

1) Restrição do Inventário:

$$I_{i,t-1} + P_{it} - I_{it} = D_{it} \quad (2.2.17)$$

(para  $i = 1, \dots, n$  e  $t = 1, \dots, m$ )

2) Restrição da Produção e do Tempo de Preparação:

$$A_{1t} W_t + OT_t - \sum_{i=1}^n P_{it} - \sum_{i=1}^n \beta_i \theta(P_{it}) \geq 0 \quad (2.2.18)$$

(para  $t = 1, \dots, m$ )

3) Restrição da Hora Extra ( $OT$ ):

$$OT_t - A_{2t}W_t \leq 0 \quad (2.2.19)$$

(para  $t = 1, \dots, m$ )

4) Restrição para Variação do Nível da Força de Trabalho:

$$W_t - W_{t-1} - H_t + F_t = 0 \quad (2.2.20)$$

(para  $t = 1, \dots, m$ )

5) Restrição para Preparação:

$$-Q_i\theta(P_{it}) + P_{it} \leq 0 \quad (2.2.21)$$

(para  $i = 1, \dots, n$  e  $t = 1, \dots, m$ )

6) Restrição Binária para Preparação:

$$\theta(P_{it}) = \begin{cases} 1 & \text{se } P_{it} > 0 \\ 0 & \text{se } P_{it} = 0 \end{cases} \quad (2.2.22)$$

7) Restrições não Negativas:

$$P_{it}, I_{it}, H_t, F_t, OT_t, W_t \geq 0 \quad (2.2.23)$$

onde:

$C_H, C_F, C_R, C_{OT}, H_t, F_t, OT_t, W_t, A_{1t}, A_{2t}, m$  têm o mesmo significado daquele apresentado anteriormente em programação linear;

$C_{it}$  = Custo mensal de manter uma unidade de produto da família  $i$  no estoque em termos de hora trabalhada;

$C_{si}$  = Custo de preparação para o produto  $i$ ;

$C_{mi}$  = Custo da matéria-prima por hora de produção do produto  $i$ ;

$D_{it}$  = Horas de produção do produto  $i$  a ser vendida no período  $t$ ;

$I_{it}$  = Produtos/horas estocados do produto  $i$  no fim do período  $t$ ;

$n$  = Número de produtos;

$P_{it}$  = Produção da família  $i$  em tempo regular transformado em horas no período  $t$ ;

$Q_i$  = Um número grande usado para garantir os efeitos da variável de preparação binária, que é:

$$Q_i \geq \sum_{t=1}^m D_{it}$$

$\theta(P_{it})$  = Variável binária de preparação para o produto  $i$  no período  $t$ ;

$\beta_i$  = Tempo de preparação para o produto  $i$ ;

Tendo este modelo em mente, outras restrições podem ser incorporadas do mesmo tipo que foi apresentada no modelo de programação linear (valores iniciais para inventário, trabalho, força desejada no fim do horizonte de planejamento etc).

Um estudo metodologicamente diferente e bastante citado em praticamente todas as bibliografias desta revisão é aquele desenvolvido por Bowman (1963). Este artigo apresenta idéias sobre uma regra de decisão baseada na experiência passada da administração, assim ele ficou conhecido como modelo de coeficientes da administração (*The Management Coefficients Model*).

O raciocínio deste autor começa de maneira mais simples possível, onde a produção deve seguir as vendas do mesmo período:

$$P_t = S_t \quad (2.2.24)$$

O problema dessa equação é que a produção deve assumir todas as flutuações da demanda, que é uma variável exógena ao sistema. Um aprimoramento da equação (2.2.24) serve para ajustar as possíveis flutuações.

$$P_t = S_t + x(P_{t-1} - S_t) \quad (2.2.25)$$

onde  $x$  é um valor entre 0 e 1. Quando próximo a 1 indica pouca flutuação (a produção hoje não difere muito da realizada ontem) e quando próximo a 0 fica próximo à equação (2.2.24), ou seja, sujeito a muitas variações. O ajuste permitido na equação (2.2.25) deve causar flutuação no inventário. Desta forma, o controle do inventário deve estar na fórmula. Assim:

$$P_t = S_t + x(P_{t-1} - S_t) + y(I_N - I_{t-1}) \quad (2.2.26)$$

onde o coeficiente  $y$  deve também estar entre 0 e 1, sendo  $I_N$  = inventário normal (segurança ou aquele considerado ótimo) e  $I_{t-1}$  = inventário do período anterior. Por fim, este autor sugere que vendas futuras também estejam presentes em (2.2.26), o que gera:

$$P_t = \sum_{i=t}^{i=t+n} \alpha_i S_i + x(P_{t-1} - S_t) + y(I_N - I_{t-1}) \quad (2.2.27)$$

onde os  $\alpha_i$  representam pesos para as vendas estimadas.

Os coeficientes, bem como o  $I_N$ , são muito importantes, pois definem o comportamento da regra. A estimação dos coeficientes poderia ser alcançada via três mecanismos: a) simulação; b) análise; c) fornecida pelos administradores. Bowman (op. Cit.) utilizava-se de análise de regressão para obter os parâmetros para uma equação mais generalizada. Esta era inspirada na regra de decisão de Holt et al. (1955:17):

$$P_t = \sum_{i=t}^{i=t+n} \alpha_i S_i + \beta_1 W_{t-1} - \beta_2 I_{t-1} + C \quad (2.2.28)$$

onde,

$P_t$  = Produção no período  $t$ ;

$W_{t-1}$  = Força do trabalho no período anterior;

$I_{t-1}$  = Inventário final no período anterior;

$S_t$  = Previsão das vendas em vários períodos em t até t+n;

$C, \alpha, \beta_1, \beta_2$  = são constantes

A diferença é lógica, pois Holt et al. (op. Cit.) chegavam a seus parâmetros pela observação cuidadosa do processo produtivo e através de relações matemáticas. Bowman, além de conseguir seus parâmetros através de relações com os dados passados (regressão estatística), não possuía funções explícitas de custo na sua regra.

Os resultados do seu estudo estão na aplicação do seu método em quatro companhias, inclusive no estudo de Holt et al. (RDL para fábrica de tintas), comparando com a regra de decisão linear (RDL), para o trabalho desse autor, e com o desempenho da administração. Na página 315 do seu artigo original ele mostra que foi melhor em dois dos casos, perdendo as outras duas para a regra de decisão linear (inclusive a da fábrica de tintas) e para o desempenho da gerência.

Jones (1967), acreditando na dificuldade de encontrar, no mundo real, situações onde as técnicas de programação linear, programação quadrática e programação integrada mista sejam aplicadas, propõe um modelo heurístico que parte do melhoramento do estudo de Bowman (op. Cit.). Este modelo é conhecido na literatura como Planejamento Paramétrico da Produção (PPP – *Parametric Production Planning*).

*“Parametric Production Planning postulates the existence of two linear feedback rules. One rule provides the number of workers and the second the production rate. Each rule contains two parameters. The rules are formulated to include the full range of possible decisions. This approach searches the four-dimensional universe of possible parameters to select the set of which gives the lowest cost over time to the particular firm. Many sets of parameters are applied to a likely sequence of forecast and sales to provide many series of work force and production level decisions. The evaluation of each set of parameters is performed by costing out the series of decisions by the cost*



*structure of particular firm. The cost structure is not limited to linear functions, quadratic functions, or any other single type. It should be the best quantitative representation possible of the firm in question.*" (Jones, 1967: 844).

Fica claro no trabalho de Jones (op. Cit.) que é importante definir uma regra para o longo prazo e outra para o curto prazo. No estabelecimento de regras de *feedback*, o importante é definir a base pela qual poderá haver desvio do nível desejado. Para o trabalho de Jones (op. Cit.) a força de trabalho seria esta base. Sendo que a força de trabalho em mãos, no fim do período imediatamente anterior, guia a força de trabalho de hoje em cima do desvio em relação à força de trabalho ótima. Como a base de desvio para a regra de produção seria a produção real em relação à produção ótima, esta última depende da força de trabalho em mãos definida anteriormente. Por isso, Jones (op. Cit.) começa definindo primeiro a regra para a força do trabalho. Seu raciocínio começa da seguinte maneira:

$$W_R = (1 - A)W_0 + AW_D \quad (2.2.29)$$

onde:

$A$  = Parâmetro entre 0 e 1;

$W_0$  = Força de trabalho em mãos;

$W_D$  = Força de trabalho desejada para satisfazer as vendas futuras;

$W_R$  = Força de trabalho resultante do uso da regra;

A equação (2.2.29) é dita uma regra de longo prazo. Valores altos para o custo de contratação fazem com que  $A$  assuma um valor baixo, caso contrário,  $A$  provavelmente atinge o seu valor máximo 1. PPP pressupõe que  $A$  é constante, podendo ser aplicado cada vez na decisão da força do trabalho. Assim, o método procura ajustar o melhor valor para  $A$ . Outra suposição é que existe um  $A$  para cada estrutura de custo, logo se a estrutura de custo mudar  $A$  tem que ser novamente calculado.

O problema agora está em determinar  $W_D$ . Deve ser definida uma função  $K(F_i)$  que transforma a previsão das vendas em número ótimo de trabalhadores. Desenvolvendo (2.2.29), obtém-se:

$$W_1 = W_0 + A \left( \frac{\sum_{i=1}^B B^i K(F_i)}{\sum_{i=1}^E B^i} - W_0 \right) \quad (2.2.30)$$

onde,

$A$  = Parâmetro que determina a proporção de variação na força do trabalho a ser alcançada (entre 0 e 1);

$B$  = Parâmetro que determina o peso relativo das vendas futuras (entre 0 e 1);

$E$  = Número de períodos a ser levado em consideração;

$F_i$  = Previsão do número de unidades a ser vendido no  $i^{th}$  período;

$i$  = Designação de tempo onde o período imediatamente anterior é 0;

$K(F_i)$  = Número ótimo de trabalhadores para a produção de  $F_i$  unidades;

$W_1$  = Força de trabalho determinada pela regra para o período em questão;

$W_0$  = Força de trabalho em mãos referente ao fim do período anterior;

Uma evolução da equação (2.2.30) é feita com o objetivo de captar os desvios proporcionados pelo inventário em relação ao nível de inventário ótimo:

$$W_1 = W_0 + A \left[ \sum b_i K(F_i) - W_0 + b_1 K(I_1^* - I_0) \right] \quad (2.2.31)$$

A regra de produção é apresentada abaixo e tem a mesma fundamentação do que já foi discutido, porém difere na base de discrepância. Nesta equação, a produção sugerida para o período em questão é a capacidade de produzir, dada a regra gerada em (2.2.31), mais uma proporção do desvio das vendas futuras ponderadas em relação a esta capacidade e, por fim, soma-se uma proporção do ajuste do inventário em relação àquele valor considerado ótimo.

$$P_1 = K^{-1}(W_1) + C \left[ \sum_{i=1}^B (d_i F_i) - K^{-1}(W_1) + d_1 (I_1^* - I_0) \right] \quad (2.2.32)$$

Onde na equação 2.2.31  $b_i = \frac{B^i}{\sum_{i=1}^E B^i}$  e na equação 2.2.32  $d_i = \frac{D^i}{\sum_{i=1}^E D^i}$ .  $A, B, E, F_i, i,$

$K(F_i), W_1$  e  $W_0$  já foram definidos anteriormente;

$b_i$  = Peso aplicado para as vendas futuras no  $i$ -ésimo período futuro;

$C$  = Parâmetro entre 0 e 1, indicando a proporção da produção desejada crescente ou decrescente a ser alcançada;

$D$  = Parâmetro entre 0 e 1 determinando o peso relativo da previsão das vendas para cada período futuro do horizonte de planejamento;

$d_i$  = Peso aplicado para as vendas previstas para o  $i$ -enésimo período no futuro;

$I_0$  = Inventário dos bens em mãos;

$I_1^*$  = Inventário ótimo ao final do período imediatamente futuro;

$K^{-1}(w)$  = Número de unidades as quais podem ser produzidas por  $w$  trabalhadores ao custo mínimo unitário;

$P_1$  = Quantidade de produção determinada pela regra;

O problema, então, é definir os melhores valores para  $A, B, C$  e  $D$  que proporcionarão os menores custos por unidade de produto.

Taubert (1968) propõe outro método heurístico denominado de regra de busca de decisão (*SDR – Search Decision Rule*). Este método, como no de Jones (op. Cit) procura superar os problemas de limitação imposta por modelos de custos lineares ou quadráticos, tornando-se uma abordagem mais geral e realística para o mundo empresarial.

A regra de decisão linear (LDR – HMMS) foi utilizada por Taubert (op. Cit) para testar a proposta apresentada na SDR (é bem comum em qualquer estudo melhorado sobre planejamento agregado a utilização de comparação com o estudo da regra de decisão

linear). Segundo este autor, o resultado mostrou-se satisfatório, pois para o acréscimo da realidade (complexidade), o modelo excedeu os custos da LDR em apenas 0,1%.

O procedimento de Taubert (op. Cit) utiliza-se de métodos matemáticos de busca (gradiente conjugado, métrico variável, entre outros tantos) para encontrar entre planos alternativos aquele que representará o plano de custo mínimo. Neste caso, a solução ótima não é garantida, porém está sempre próxima. As vantagens neste método são: aceita custos não lineares e descontínuos, aceita trabalhar com múltiplos produtos, aceita subcontratação, aceita restrições no capital, hora-extra etc.

Pode-se, também, mencionar um método conhecido como planejamento da produção hierárquico (*HPP – Hierarchical Production Planning*). Apesar de se ter muita gente trabalhando com essa técnica o leitor poderia se reportar ao estudo de Hax and Meal (1975) para uma mais detalhada compreensão. O estudo de Hax and Meal (op. Cit.) procura dar base para o procedimento de desagregação do planejamento da produção. A desagregação tem um processo de implementação inverso ao do planejamento agregado, porém com a mesma finalidade (o conceito de desagregação já foi discutido anteriormente).

O HPP funciona, como o próprio nome sugere, como um esquema de hierarquia. Existe um plano maior com vários subplanos detalhados. Parte do planejamento agregado da produção para a fábrica, passando para a programação de cada produto, que precisa da programação para cada item e que, por fim, necessita da programação de cada parte de componente do item. Na parte superior pode ser utilizada qualquer técnica já difundida. No estágio intermediário pode ser utilizado, entre outros, o MPS (*Master production Schedule*). No estágio mais detalhado, pode ser usado, entre outros, o MRP (*Material Requirements Planning*).

Todos esses trabalhos anteriores estavam sempre preocupados em mostrar a pouca aplicabilidade de técnicas de programação linear e da LDR de Holt et al. (1955). O trabalho de Mellichamp e Love (1978) também compartilha desta idéia:

*“A number of approaches to the aggregate planning problem have been proposed in the literature, yet experience suggests that industrial concerns seldom use these models in actual planning situations.”* (Mellichamp e Love, 1978: 1242)

Por essa razão, esses autores buscaram implementar uma produção de mudanças heurísticas, onde existiriam três níveis diferentes de inventário, os quais determinariam três níveis diferentes de produção. Através de simulação, eles determinam esses três níveis e escolhem a combinação de custo mínimo. Depois existe uma aplicação do que eles chamaram de PSH (*Production Switching Heuristic*) nos dados originais de HMMS.

Mellichamp e Love (op. cit.) concluíram que seu modelo é mais flexível, pois, além de chegar a resultados próximos ao de HMMS, permitem a utilização de funções de custo mais parecidas com as encontradas no mundo real. Além de que, ocorrem poucas variações de um período ao outro na composição da força de trabalho, na produção e no inventário, que segundo os autores consiste com a inclinação própria dos administradores.

Mais recentemente, alguns trabalhos têm procurado explorar mais explicitamente os aspectos da não-linearidade em algumas funções de custo, bem como da parte estocástica decorrente da incerteza advinda de algumas estimações.

Em Love e Turner (1993), a idéia é primeiro estimar um modelo econométrico para a firma do qual é resguardada a matriz de variância-covariância das estimativas. Com essa matriz incorporada ao modelo, pode-se minimizar o valor esperado ao invés de considerar a solução determinística como sendo igual à estocástica. Ou ainda, não considerar o equivalente certeza.

Por fim, eles usam conceito de controle ótimo estocástico, buscando minimizar uma função objetivo no tempo. Essa função objetivo é composta dos estados estimados pelo modelo econométrico, os quais são influenciados pelos estados defasados, pelas variáveis de controle, pelas variáveis exógenas e por um termo erro, então são diminuídos das metas a

serem alcançadas e, ainda, sofrem penalidades, onde valores maiores representam penalidades maiores.

Na aplicação dessa metodologia em HMMS, os resultados, segundo Love e Turner (op. cit.), foram muito parecidos, o que levou a duas conclusões: a primeira, que a ferramenta de controle ótimo estocástico funciona muito bem para esse tipo de análise; a segunda foi que, neste caso especial, deve não ter existido uma covariância muito forte entre os parâmetros estimados. Logo, o resultado é muito próximo ao determinístico.

Nessa mesma linha segue o trabalho de Shen (1994). Mais especificamente, ele considera os erros envolvidos no sistema (incerteza no sistema), os erros nos próprios parâmetros da equação estimada (incerteza nos parâmetros) e erros de variáveis de controle que têm que ser estimadas (incerteza na medida).

Então, o autor tem uma função objetivo quadrática que foi convertida para os valores originais de HMMS e, depois, aplicado o operador de esperança. Essa função é minimizada sujeita às seguintes restrições: o sistema de equações com a incorporação do termo erro; as equações que estimam a(s) variável(is) de controle e o seu termo erro; e a equação que estima os parâmetros e o seu termo erro. Esses três tipos de erros são considerados normais e com variância constante.

No seu trabalho, Shen (op. cit.) trabalha com três conceitos diferentes em controle ótimo estocástico: Equivalente certeza, Aprendizado passivo e Aprendizado ativo. Para melhor entendimento desses três conceitos, o leitor pode se reportar a Kendrick (1981).

Em Samohyl (1997), tem-se um estudo em controle ótimo estocástico, o qual utiliza as equações de HMMS com algumas adaptações para torná-las mais realistas com a comparação prática do mundo real.

De acordo com a averiguação em cima dos resultados originais, este autor decidiu continuar com a equação (2.2.8) da folha de pagamento, porém dividiu o custo de empregar e demitir em duas novas equações.

Custos para empregar:

$$CH_t = 180 (W_t - W_{t-1}) \geq 0; \quad (2.2.32)$$

Custos para demitir:

$$CLO_t = 360 (W_{t-1} - W_t) \geq 0; \quad (2.2.33)$$

Ainda em cima dos dados originais, os custos de hora extra são reestimados na busca de uma melhor representação.

$$COT_t = 0,0943 COT_{t-1} + 0,0886 (P_t - 5,67 W_t)^2 + 28,22 P_t - 0,00307 (P_t)^2 - 130,36 W_t + e_t \quad (2.2.34)$$

Também por deduções diretas do texto de HMMS, estoques e pedidos a realizar tomam a seguinte forma:

Custos de estoques brutos:

$$CINV_t = 20 GI_t \quad (2.2.35)$$

Custo de pedidos a realizar:

$$CBO_t = 100 BO_t \quad (2.2.36)$$

Somando-se todos os custos individuais, tem-se:

$$CT_t = CRP_t + CH_t + CLO_t + COT_t + CINV_t + CBO_t \quad (2.2.37)$$

A restrição (2.2.15), por fim, fica em termos de pedidos a realizar (BO) e estoques brutos (GI):

$$GI_{t-1} - BO_{t-1} + P_t - S_t = GI_t - BO_t \quad (2.2.38)$$

Aqui, como em HMMS, o problema é a minimização dos custos para todos os períodos.

$$\underset{W_t, P_t}{min} C_N = \sum_{t=1}^N CT_t \quad (2.2.39)$$

No seu trabalho, Samohyl (op. Cit.) propõe uma função utilidade que incorpora a parte estocástica do sistema. Esta parte estocástica é incorporada por uma função utilidade (devidamente aplicado o seu operador de esperança). Através de um sistema de interação entre simulação e otimização o autor chega ao que seria a regra de decisão ótima estocástica não linear.

O trabalho de Dantas (1999) procurou seguir a mesma linha de Samohyl (op. Cit.). Determinou-se algumas novas relações de custo, sendo sua representação lógica como dada a seguir:

O custo da folha de pagamento permanece o mesmo como no original. Acontece, como em Samohyl (1997), a separação do custo de empregar e demitir. Porém, um novo detalhe para o seu perfeito funcionamento é incorporado, o auxílio de uma função lógica. A função lógica (atuando como uma restrição) pode ser programada para retornar um valor que seja especificado como verdadeiro - no caso das equações (2.2.32) e (2.2.33) – e um outro valor se for avaliado como falso (aqui o valor escolhido é o zero dado na restrição).

O funcionamento é simples. Sabendo que as duas equações lidam com trabalhadores de um período e do período anterior e, ainda, restringindo que a diferença deles tem que ser



positiva ou nula, então, quando uma atinge valores positivos a outra encontra valores negativos. Isso força a mão-de-obra a permanecer invariável. Logo, a função lógica anula os resultados negativos e faz com que eles assumam valores iguais a zero, permitindo assim a variação da mão-de-obra, caso necessário.

Os custos de hora extra são:

$$COT_t = 3,19 OT \quad (2.2.40)$$

O valor de 3,19 em (2.2.40) é uma constante encontrada através de alguns cálculos aritméticos nos dados originais e algumas suposições. As suposições dizem respeito à carga horária semanal trabalhada na fábrica de tintas do estudo de HMMS - que será considerada de 40 horas semanais - e que o custo de hora extra é acrescido de 50% do valor da hora normal. As 40 horas semanais equivalem a um total de 160 horas mensais. Dado que o custo individual médio da folha de pagamento é \$ 340,00, o custo de uma única hora é \$ 2,125 (vindo de 340,00/160) que acrescido dos 50% dará igual a \$ 3,19 (ou seja, 2,125\*1,50).

O *OT* (Over Time) tem duas estimações: uma por OLS e outra por variáveis truncadas (Modelo Tobit - Eatwell et al. (1990)). A segunda estimativa se deve ao fato de evitar que a hora extra assumira valor negativo, o que vinha acontecendo na simulação estocástica do modelo.

$$OT_{t(OLS)} = 0,28734OT_{t-1} + 0,53537OT_{t-2} + 75,383DW_t + 73,763DW_{t-2} - 0,045435DPW_{t-2} - 0,021542DPW_{t-3} + 0,0038621DP_t^2 + e_t \quad (2.2.41)$$

$$OT_{t(TOBIT)} = 0,2566OT_{t-1} + 0,4129OT_{t-2} + 92,98DW_t + 38,17DW_{t-2} - 0,039924DPW_{t-2} - 0,011207DPW_{t-3} + 0,0070966DP_t^2 + e_t \quad (2.2.42)$$

onde  $e_t$  é iid  $N(0; 789,058)$

Com a mesma configuração de Samohyl (1997), ficam estoques e pedidos a realizar. Somando-se todos os custos individuais, tem-se:

$$CT_t = CRP_t + CH_t + CLO_t + COT_t + CINV_t + CBO_t \quad (2.2.43)$$

Aqui, diferentemente de HMMS e Samohyl (1997), o problema de minimização dos custos para todos os períodos tem quatro variáveis de controle ao invés de duas. As duas novas variáveis são inventário bruto e pedidos atrasados (não atendidos - *backorders*). Anteriormente, a minimização era feita apenas com produção e trabalhadores.

$$\underset{W_t, P_t, GI_t, BO_t}{Min} C_N = \sum_{t=1}^N CT_t \quad (2.2.44)$$

Sujeito às restrições:

$$GI_{t-1} - BO_{t-1} + P_t - S_t = GI_t - BO_t \quad (2.2.45)$$

$$W_t \geq \frac{\{P_t - [(OT/160) \times 5,67]\}}{5,67} \quad (2.2.46)$$

$$OT \leq 0,5 \times 160 \times W_t \quad (2.2.47)$$

A nova equação para  $S_t$  (vendas) na restrição (2.2.45) foi encontrada com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_t = & 0.47866S_{t-1} - 0.22733S_{t-2} + 423.33Jan + 383.66Fev + 482.42Mar + 447.21Abril \\ & + 407.44Maio + 439.47Jun + 465.33Jul + 256.93Ago + 357.34Set + 417.50Out \\ & + 212.71Nov + 670.67Dez + e_v \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

onde  $e_v$  (erro das vendas) é iid  $\equiv N(0; 118,092)$ .

Por fim, na apresentação da nova versão, os níveis de custos totais (CT) e o seu somatório (CN) foram apresentados de duas maneiras: uma sem correção financeira (como apresentada em todos os trabalhos até então) e a outra com o valor presente deles, dando o desconto inflacionário possível (fato bem real no mundo dos negócios).

### **2.3 A PREVISÃO DA DEMANDA**

Muito dos problemas que as firmas vão enfrentar durante todo o processo de planejamento está associado com a previsão da demanda. A mesma pode viabilizar um excelente planejamento como pode condenar a regra de decisão elaborada. O que tem sido verificado em estudos preliminares é que, uma projeção muito distante do verdadeiro valor inviabiliza diretamente a regra de decisão para estoques ou atrasos (Dantas, 1999). Sendo assim, os custos envolvidos ficam distorcidos, o que provoca viés nos lucros projetados.

Algumas técnicas para previsão de demanda em fábricas são apresentadas a seguir. Estas técnicas são comuns na literatura e não são muito difíceis de serem compreendidas. Todas podem ser tratadas com a metodologia ARIMA, nas suas mais diversas configurações. Um conjunto de dados será utilizado para comparar os diversos modelos utilizados e, por fim, será selecionado o modelo que provém a melhor adequação no sistema de decisões.

Deve-se ter em mente que uma boa previsão deve ter quatro aspectos básicos: 1) Não-tendenciosidade – garante que o valor esperado, ou média do estimador, seja igual ao do valor verdadeiro; 2) Eficiência – garante que o estimador tem variância mínima se comparada a outras; 3) Consistência – indica que no limite o estimador tende para o valor verdadeiro; 4) Parcimônia – que prefere a utilização de poucas variáveis explicativas (o mínimo de quantas forem necessárias).

Muitos dos conjuntos de dados associados com previsão de demanda precisam, inicialmente, sofrer algumas transformações dos dados para garantir algumas condições mais gerais exigidas pelos modelos apresentados. Estas transformações dizem respeito a logaritmizar, extrair raiz, diferenciar etc. para garantir um ajustamento correto dos

parâmetros que vão ser estimados nas equações. Naturalmente estes procedimentos impedem o aparecimento dos problemas mais comuns como heterocedasticidade, erros autoregressivos e raiz unitária. Contudo, a transformação dos dados só será necessária se realmente for comprovado tais problemas.

Falando especificamente sobre raiz unitária, há um bom tempo, os profissionais de economia começaram a perceber que os seus modelos, quando ajustados com o problema de raiz unitária, poderiam ter boas conclusões, porém com resultados inválidos. É que, com raiz unitária, os testes para a significância do(s) parâmetro(s) não são mais confiáveis e a série em análise possui característica explosiva. Em termos conceituais, diz-se que um processo é estacionário quando esse possui média e variância constantes ao longo do tempo (MADALLA, 1992).

Considere  $X_t$  qualquer uma das séries utilizadas numa análise de regressão, onde:

$$X_t = \alpha X_{t-1} + U_t \quad (2.3.1)$$

$$\text{e } U_t \sim \text{iid } (0, \sigma^2)$$

Assumindo  $X_0 = 0$  e  $\alpha = 1$ , tem-se:

$$X_1 = U_1$$

$$X_2 = U_1 + U_2$$

$$X_3 = U_1 + U_2 + U_3$$

⋮

$$X_t = \sum_{j=1}^t U_j \quad (2.3.2)$$

onde:

$$\text{Var}(X_t) = \sum_{j=1}^t \text{Var}(U_j)$$

$$\text{Var}(X_t) = t \sigma^2 \quad (2.3.3)$$

Logo, em (2.3.3) a série é não estacionária, pois a variação de  $X_t$  é crescente com o tempo. Na equação (2.3.1) se  $|\alpha| < 1$ , tem-se um caminho aleatório convergente. Caso contrário, em  $|\alpha| \geq 1$ , tem-se um caminho aleatório explosivo.

A averiguação de um modelo não estacionário é obtida através de três artifícios comuns: plotagem do gráfico da série no tempo; plotagem do gráfico das autocorrelações (Função de Autocorrelação e Autocorrelação Parcial) e, por fim, o teste estatístico de Dickey-Fuller (DF) e Dickey-Fuller Aumentado (ADF).

A plotagem do gráfico é um artifício que possibilita ver o comportamento da série ao longo do tempo. Esta observação já dá uma idéia intuitiva para a série, identificando se ela possui média e variância constante ao longo do tempo, princípios que garantem teoricamente a estacionariedade.

A função de autocorrelação (ACF) – 2.3.4 – e a função de autocorrelação parcial (ACFP) – 2.3.5 – possuem as seguintes configurações equacionais:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2} \quad (2.3.4)$$

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_k Y_{t-k} \quad (2.3.5)$$

Uma característica destas funções é que elas podem ser monitoradas por seus desvios. Os limites são construídos com base na sua distribuição amostral. Estas equações podem ser aproximadas pela normal, com média zero e desvio padrão igual a  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , onde  $n$  é o número de observações na série (Makridakis et al., 1998:317).

Especificamente, quando existe raiz unitária<sup>1</sup>, estas funções têm o seguinte comportamento:

ACF  $\Rightarrow r_1$  é um valor muito grande e positivo;  $r_2$  é um valor muito grande e positivo, porém  $r_2 < r_1$ ;  $r_3$  é um valor muito grande e positivo, porém  $r_3 < r_2$  e assim sucessivamente até chegar em  $r_k$ .

ACFP  $\Rightarrow \alpha_1$ , ou seja, a primeira defasagem, é um valor muito grande e positivo, próximo de 1.

Segundo Madalla (1992), os testes DF e ADF se baseiam, respectivamente, nas seguintes regressões:

$$DF \Rightarrow \Delta X_t = \beta X_{t-1} + U_t \quad (2.3.6)$$

$$ADF \Rightarrow \Delta X_t = \beta X_{t-1} + \sum \lambda_j \Delta X_{t-j} + U_t \quad (2.3.7)$$

onde  $\lambda_j$  é a ponderação dada para variáveis defasadas.

E testa-se as seguintes hipóteses:

---

<sup>1</sup> Dito para séries que não possuem média e variância constante ao longo do tempo, não sendo estacionárias o que ocasiona problemas na especificação dos testes  $t$  e  $F$ .

$H_0: \beta \geq 0 \rightarrow X_t$  é pelo menos integrada de ordem 1, representada por I(1), ou seja, não estacionária.

$H_1: \beta < 0 \rightarrow X_t$  é I(0), ou seja, integrada de ordem zero, ou ainda, estacionária.

A ordem de integração de uma variável significa quantas diferenciações são necessárias para que a série se torne estacionária. Logo, I(0) representa uma série estacionária em nível, I(1) diz que a série é estacionária com a primeira diferença, e assim por diante.

Os testes DF e ADF têm distribuição próxima à de *t-student*, entretanto, a distribuição foi construída por Dickey e Fuller através de simulação de Monte Carlo. A aplicação de OLS (Mínimos Quadrados Ordinários) em séries que possuem o problema de raiz unitária conduzirá a resultados ineficientes, embora não tendenciosos.

#### Modelos ARIMA ( $p, d, q$ ) e suas Configurações:

Existem muitas configurações para o modelo ARIMA, dependendo de cada grau dado aos componentes  $p, d$  e  $q$ .

O componente  $p$  ajusta uma parte autoregressiva ao modelo, ou seja, ajusta quantas defasagens será dada na variável como componente de explicação da equação. A parte  $d$  ajusta a ordem de integração utilizada para alcançar a estacionariedade da série. Por fim, a parte  $q$  ajusta o modelo para funcionar com um componente de médias móveis e quantas defasagens deverão ser levadas em consideração.

$$Y_t^* = \alpha_1 Y_{t-1}^* + \dots + \alpha_p Y_{t-p}^* + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q} \quad (2.3.8)$$

Onde  $Y^*$  representam processos estacionários (Box-Jenkins, 1970) e  $e_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$ .

Modelos AR(p) – Autoregressivos de ordem  $p$ . Ocorrem simplesmente pela desconsideração da segunda e terceira parte do modelo ARIMA, ou mais especificamente associando valores nulos para  $d$  e  $q$  – ARIMA  $(p, 0, 0)$ .

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + e_t \quad (2.3.9)$$

Onde,  $p = 1$  significa autoregressivo de ordem 1,  $p = 2$  significa autoregressivo de ordem 2 e assim sucessivamente.

Modelo MA – Médias móveis de ordem  $q$ . Ocorrem com o desprezo da primeira e da segunda parte do modelo ARIMA, ou ainda podem ser escritos como ARIMA(0, 0,  $q$ ).

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q} + e_t \quad (2.3.10)$$

Onde,  $q = 1$  significa médias móveis de ordem 1,  $q = 2$  significa médias móveis de ordem 2 e assim sucessivamente.

Modelo ARIMA(0, 0, 0) – Este não leva em consideração nenhum dos componentes estudados. Torna-se então um ruído branco.

Modelo ARIMA(0, 1, 0) – Estes só possuem o componente  $Y_t - Y_{t-1} = e_t$ , ou seja, são modelos de passeio aleatório.

#### Modelos de Alisamento Exponencial:

Muitas das empresas conhecem e trabalham efetivamente com estes tipos de metodologias que serão citadas adiante, pois elas são de aplicabilidade mais fácil dentro da empresa, bem como estão disponíveis para resolução em excel e não em pacotes específicos de estatística.



Média – pega-se a média contabilizada de toda a série passada e prevê um período adiante.

Média Móvel (MA) – Este é um processo diferente do abordado no ARIMA(0, 0, q). Naquele falava-se em médias móveis dos erros, neste fala-se em médias móveis da variável. Diferente também do processo da média, este procura limitar um número específico de defasagens a serem utilizadas na composição da média em determinado tempo futuro.

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-k+1}}{k} \quad (2.3.11)$$

Onde,  $\hat{Y}_{t+1}$  é a previsão e  $k$  é a quantidade de defasagem levada em consideração.

Média Móvel Ponderada (WMA) – Neste modelo são utilizados pesos  $w_i$  para as variáveis passadas que farão composição do cálculo do valor futuro  $\hat{Y}_{t+1}$ . O somatório dos pesos  $w_i$  é igual a 1 e  $0 < w_i < 1$ .

$$\hat{Y}_{t+1} = w_1 Y_t + w_2 Y_{t-1} + \dots + w_k Y_{t-k} \quad (2.3.12)$$

Alisamento Exponencial Simples (SES) – Também trabalha com a ponderação dos dados passados, porém obrigatoriamente o valor do peso decresce exponencialmente.

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha)Y_{t-1} + (1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \dots + (1-\alpha)^n Y_{t-n} + \dots \quad (2.3.13)$$

Método de Holt – É uma técnica muitas vezes efetiva para prever séries que exibem uma tendência linear. Ou seja, esta técnica é apropriada para modelos não estacionários. Duas componentes são importantes neste método: o valor

esperado no nível e a taxa esperada de crescimento ou decrescimento por período.

$$\hat{Y}_{t+1} = E_t + kT_t \quad (2.3.14)$$

Onde,

$$E_t = \alpha Y_t + (1 - \alpha)(E_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(E_t - E_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}, \text{ e os valores de } \alpha \text{ e } \beta \text{ estão entre 0 e 1.}$$

Método de Holt-Winters – É de idéia idêntica ao método anteriormente apresentado, porém uma nova informação é adicionada, a sazonalidade. Este também é um método que não necessita da estacionariedade dos dados. Existem dois modos de apresentação: 1) Multiplicativa – mais comum e 2) Aditiva – não muito comum.

$$1) \quad \hat{Y}_{t+k} = (E_t + kT_t)S_{t+k-p} \quad (2.3.15)$$

$$\text{Onde, } E_t = \alpha \frac{Y_t}{S_{t-p}} + (1 - \alpha)(E_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(E_t - E_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

$$S_t = \gamma \frac{Y_t}{E_t} + (1 - \gamma)S_{t-p}$$

E os valores  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  têm que estar entre zero e 1.

$$2) \quad \hat{Y}_{t+k} = E_t + kT_t + S_{t+k-p} \quad (2.3.16)$$

$$\text{Onde, } E_t = \alpha(Y_t - S_{t-p}) + (1 - \alpha)(E_{t-1} + T_{t-1})$$

$$T_t = \beta(E_t - E_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$

$$S_t = \gamma(Y - E_t) + (1 - \gamma)S_{t-p}$$

Se algum leitor estiver interessado no aprofundamento destes temas, recomenda-se a leitura detalhada de Makridakis et al. (1998, Cap. 4) Ragsdale (1995, Cap. 11). Algumas dessas técnicas de alisamento exponencial podem ter resultados muito aproximados de modelos ARIMA, Makridakis et al. (op. Cit.:373).

Tomando os dados históricos das vendas de um dos produtos utilizados no planejamento, fez-se as previsões respectivas para cada unidade apresentada nas seções anteriores. Esses resultados são apresentados no quadro a seguir.

No quadro 01, tem-se o resultado apenas de alguns métodos dito tradicionais na previsão industrial. Foram colocados no fim do horizonte de previsão o erro quadrado médio (*MSE*) como medida de desempenho das previsões. Nota-se que a metodologia de Holt-Winters foi a que obteve o melhor desempenho, pois obteve o menor *MSE* das séries apresentadas.

**Quadro 2.3.1:** Previsão para as vendas por alguns métodos tradicionais para indústria.

Colorau	Previsão do Colorau						
	Vendas	SES	Holt	Holt-Winter	MA(2)	MA(4)	WMA(2)
Jan/99	85,3	95,25	92,29	75,34	103,80	93,88	105,42
Fev/99	86,5	92,27	93,12	89,26	100,35	95,25	98,24
Mar/99	85,6	90,54	93,39	83,71	85,90	94,85	85,98
Abr/99	84,9	89,04	92,84	100,97	86,03	93,19	85,97
Mai/99	66,7	87,81	91,57	85,48	85,25	85,58	85,21
Jun/99	92,8	81,49	86,37	82,72	75,84	80,94	74,57
Jul/99	90,6	84,88	84,87	76,72	79,77	82,51	81,59
Ago/99	77,6	86,61	83,83	76,50	91,72	83,78	91,57
Set/99	81,6	83,91	81,03	77,82	84,13	81,95	83,22
Out/99	90,3	83,22	78,96	86,15	79,61	85,66	79,89
Nov/99	95,5	85,34	78,99	93,11	85,95	85,04	86,56
Dez/99	119,3	88,39	81,02	124,63	92,90	86,25	93,26
<b>MSE</b>		<b>136,71</b>	<b>170,08</b>	<b>135,56</b>	<b>153,11</b>	<b>145,05</b>	<b>152,45</b>

## 2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo procurou levantar todas as informações possíveis sobre planejamento agregado da produção, mostrando principalmente seu aspecto evolutivo enquanto desenvolvimento teórico.

A evolução basicamente se deve ao fato principal deste trabalho que é construir uma metodologia que seja utilizada pelos empresários, tentando conciliar realismo e compreensão por parte daqueles que tomarão as decisões no setor industrial ou no setor de prestação de serviços. Ainda assim, as complexidades existem para que a regra se aproxime o mais que possível do ambiente real dos negócios.

Este capítulo também serviu para discutir algumas técnicas utilizadas na indústria para previsão de demanda. Tomados todos os cuidados iniciais, pode-se proceder a estimações confiáveis. Um grupo composto por *SES*, *Holt*, *Holt-Winters*, *MA* e *WMA* foi considerado como técnicas tradicionais, o restante foi considerado como séries temporais, também utilizadas pelas empresas. Outras técnicas também tradicionais não foram expostas, porém o leitor pode se reportar a muitos autores como Makridakis et al. (1998), Ragsdale (1995), Tubino (1997), entre outros.

A previsão é efetivamente importante para o planejamento agregado da produção, pois alimentará a regra como variável exógena. Logo, sendo ela muito ruim inviabilizará a programação real.

O próximo capítulo fará referência a presença do risco no processo decisório. Assim, ele está preocupado em mostrar a incorporação do segundo e terceiro momento da distribuição e seu inter-relacionamento com o indivíduo avesso ao risco.

## CAPITULO 3 – DECISÕES COM INCERTEZA

---

### 3.1 INTRODUÇÃO

No âmbito da teoria da decisão, os caminhos seguidos, no mundo real, não são exatamente previsíveis. Existem incertezas quanto à realização do que foi planejado. Por muitas vezes, o desconhecido pode receber probabilidades associadas conhecidas e, assim, o risco pode ser mensurado. Cabe observar que incerteza e risco não são conceitos idênticos. O primeiro diz respeito a muitos resultados possíveis com probabilidades desconhecidas, enquanto o segundo diz respeito a muitos resultados possíveis com as probabilidades conhecidas.

Normalmente o que é planejado se reflete em uma variável que pode assumir valores. Dadas às circunstâncias, essa variável é denominada de aleatória, pois ela pode assumir diversos valores. Com todas as possibilidades possíveis, um valor médio é esperado através da multiplicação das probabilidades (que servem como peso) e os vários valores assumidos pela variável aleatória. Esse valor médio é conhecido também como primeiro momento da distribuição e está associado ao retorno médio das possibilidades de decisão. A palavra retorno aqui é utilizada em referência a finanças, pois é onde essa teoria é mais difundida. Toda lógica teórica dessa área será encaixada perfeitamente neste trabalho, sem nenhum prejuízo para sua estrutura. Os valores verdadeiros, evidentemente, não serão todos iguais a essa média.

Existirão desvios para mais e para menos. Esses desvios representarão a variabilidade dos acontecimentos e são conhecidos também como variância e segundo momento da distribuição. Por fim, outro fator ainda pode ocorrer: os valores verdadeiros podem acontecer concentradamente ou acima da média ou abaixo dela. Esse fenômeno é conhecido como assimetria e, é também denominado de terceiro momento da distribuição. Como o primeiro momento está associado ao retorno, o segundo e o terceiro momento estão associados ao risco, principalmente o segundo. Maiores momentos podem ser considerados, porém até então não se encontrou, nem teórico e nem empírico, algum significado para a sua utilização.

Este capítulo constará da seguinte estrutura: uma introdução sobre o tema; uma análise da

utilidade – sua importância, onde começou e quais suas premissas básicas; como utilidade e retorno se comportam, dadas condições de risco; algumas funções utilidades da literatura são apresentadas e caracterizadas quanto à adequação teórica; a importância da assimetria é discutida no processo de decisão envolvendo risco; e, por fim, apresentará uma breve conclusão do tema do capítulo.

### 3.2 ANÁLISE DA UTILIDADE

A utilidade é a representação aproximada, através de funções matemáticas, das preferências das pessoas. Neste trabalho ela será utilizada para medir o montante de risco que o tomador de decisões deseja incorrer.

Alguns axiomas acerca da análise da utilidade serão resumidos a seguir, conforme o do trabalho de von Neumann e Morgenstern (apud Francis e Archer, 1979:245).

- a) Os indivíduos têm preferências completas e consistentes – eles podem, entre opções diferentes, dizer qual a que mais lhe satisfaz.
- b) Princípio de transitividade – se uma pessoa escolhe  $A$  ao invés de  $B$  e prefere  $B$  ao invés de  $C$ , então  $A$  será preferido no lugar de  $C$ .
- c) Utilidades iguais são indiferentes perante a escolha do consumidor – se  $U(A) = U(D)$  e  $U(A) > U(B)$ , então  $U(D) > U(B)$ .
- d) Se  $U(A) > U(B)$  e  $U(B) > U(C)$  existe alguma utilidade entre  $A$  e  $C$  tão satisfatória quanto  $B$ . Ou ainda,

$$P(A) * U(A) + P(C) * U(C) = U(B)$$

Onde,  $P(A)$  e  $P(C)$  são probabilidades de  $A$  e  $C$ .

- e) Caso haja uma classificação, por exemplo,  $U(A) > U(B)$ , a soma de qualquer objeto a esta classificação não mudará a classificação original,

$$U(A) + U(E) > U(B) + U(E)$$

- f)  $E(U) = \sum_{i=1}^n p(x_i) * U(x_i)$

Este último deriva do próprio conceito de esperança matemática, já que a utilidade é uma variável aleatória, dependendo de cada  $x$ , com sua respectiva probabilidade.

Autores como Kahneman e Tversky (apud Bernstein, 1997:269-283) desenvolveram pesquisas para defender a chamada Teoria das Perspectivas. Essa teoria dita que uma ordenação de preferência pode ser alterada de acordo com a perspectiva em que se analisa. Os seus trabalhos, sobre o mesmo problema, foram colocados com duas perspectivas contrárias, uma com idéia de ganho e outra com idéia de perda. Os resultados de preferência foram invertidos quando se passava de uma perspectiva para outra. Isso foi denominado pelos autores como falta de invariância.

Por exemplo, sob a perspectiva da perda, uma tomada de decisão que envolva uma probabilidade alta de matar todos os 30 pacientes terminais que sofram de determinada doença, não será muito preferida. Contudo, sob a perspectiva do ganho, a mesma tomada de decisão anterior representa a chance certa de salvar 10 dos 30 pacientes terminais, o que mudaria consideravelmente a utilidade das pessoas envolvidas na decisão.

A perspectiva deste trabalho é sobre a óptica do ganho. Porém, no mundo empresarial o ganho e a perda já são tecnicamente bem definidos. Quando se pensa em um é porque o outro já foi previamente analisado, praticamente estão no mesmo princípio de decisão. Logo, a falta de invariância não causaria muitos problemas.

### **3.3 UTILIDADE, RETORNO E RISCO**

A primeira coisa a ser constatada é que o aumento dos retornos deverá sempre propiciar uma melhor satisfação, ou seja, uma utilidade maior. Não se espera que uma pessoa racional reaja negativamente com o acúmulo de riqueza. Porém, quando a riqueza varia, ela traz consigo um fator de risco associado a oportunidades de investimentos. De três formas pode se expressar um indivíduo quanto ao risco associado a essa variação:

a) Comportamento de Aversão ao Risco:

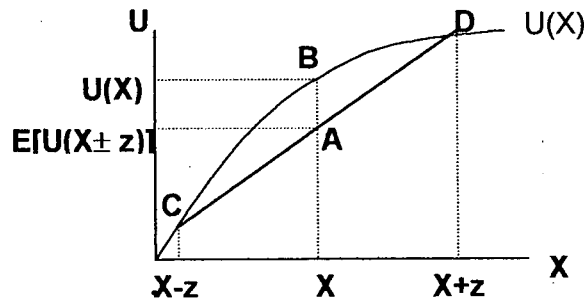


Figura 3.1: Investidor com aversão ao risco.

A figura acima representa que quando  $X$  (riqueza) aumenta a utilidade de  $X$  (satisfação) total é maior. Porém, nota-se que isso ocorre a taxas cada vez menores. Os economistas chamam esse fato de utilidade marginal decrescente. No que concerne a informação de aversão ao risco, o valor esperado entre apostar em  $C$  (diminuir a riqueza) e  $D$  (aumentar a riqueza) é  $A$ , o que é menor do que a segurança de obter  $B$  sem apostar. Sendo assim,  $B$  será preferido a  $A$ .

b) Preferência Pelo Risco:

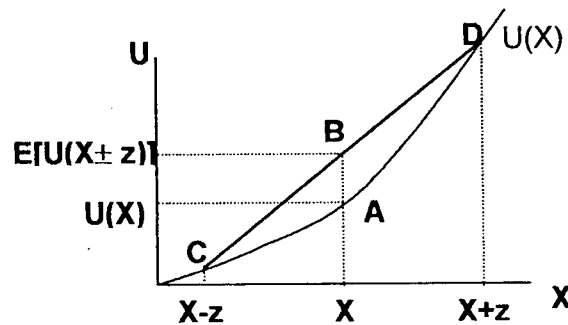


Figura 3.2: Investidor amante do risco.

Este é o caso onde o acréscimo da riqueza provocará aumentos cada vez maiores na satisfação. Essa ação é também denominada de utilidade marginal crescente. Nesse tipo de caso, o valor esperado da utilidade de apostar no ponto  $B$  é maior que o valor da utilidade sem aposta, ponto  $A$ . As pessoas com esse comportamento arriscarão entre  $C$  ou  $D$ .



c) Indiferença pelo Risco:

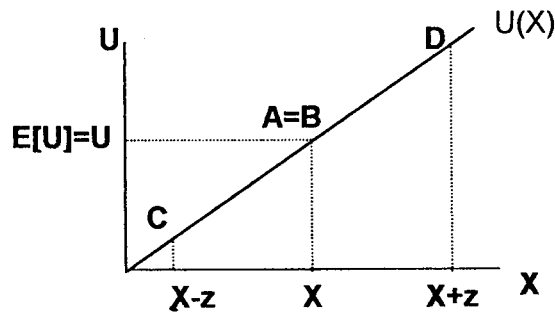


Figura 3.3: Investidor indiferente ao risco.

Pessoas com esse tipo de comportamento têm utilidade marginal constante. Para eles é indiferente decidir pela esperança matemática da utilidade ou pela própria utilidade. Ou seja, tanto faz apostar ou não.

Podem existir casos específicos onde o indivíduo se sintoniza nos três conceitos, ou em apenas dois deles, à medida que sua riqueza cresce. Na hipótese de Friedman-Savage (Friedman e Savage, 1948) os indivíduos estão diante de uma situação de aversão e amor ao risco ao mesmo tempo. Esses autores ficaram intrigados com o fato de que os indivíduos compram seguros e também apostam em bilhetes de loterias. Isso não parece o mesmo caso da perspectiva apontado anteriormente, porém parece que alguma coisa daquela teoria pode ser aqui utilizada. Pode-se dizer que o problema de Friedman e Savage também passa pela idéia de ponto de vista, quando o que se avalia é perda ou ganho.

Duas medidas que ajudam a analisar o comportamento das funções anteriormente apresentadas são aquelas formuladas por Arrow-Pratt, medida de aversão absoluta ao risco (AAR) e medida de aversão relativa ao risco (ARR).

$$AAR(W) = \frac{-U''(W)}{U'(W)}$$

$$ARR(W) = \frac{-WU''(W)}{U'(W)}$$

Onde,  $W$  é a riqueza,  $U'(W)$  é a primeira derivada da função utilidade da riqueza e  $U''(W)$  é a segunda derivada da função utilidade da riqueza.

Deve-se entender a interpretação de cada medida anteriormente citada. Para Francis (1991:617), um esquema desta interpretação é realizado através das primeiras derivadas de  $AAR'(W)$  e  $ARR'(W)$ .

**Quadro 3.1:** Interpretação das derivadas primeiras da aversão absoluta e relativa ao risco.

Condição	Definição	Conclusão
1) $AAR'(W) > 0$	Aversão ao Risco Absoluto Crescente.	Menos dinheiro é mantido em ativos arriscados quando $W$ cresce.
2) $AAR'(W) = 0$	Aversão ao Risco Absoluto Constante.	Mesma quantidade em dinheiro é mantida nos ativos arriscados quando $W$ cresce.
3) $AAR'(W) < 0$	Aversão ao Risco Absoluto Decrescente.	Mais dinheiro é mantido em ativos arriscados quando $W$ cresce.
4) $ARR'(W) > 0$	Aversão ao Risco Relativo Crescente.	Menor proporção da riqueza é mantida em ativos arriscados quando $W$ cresce.
5) $ARR'(W) = 0$	Aversão ao Risco Relativo Constante.	Igual proporção riqueza é mantida em ativos arriscados quando $W$ cresce.
6) $ARR'(W) < 0$	Aversão ao Risco Relativo Decrescente.	Maior proporção da riqueza é mantida em ativos arriscados quando $W$ cresce.

Fonte: Francis (1991: 617).

Para investidores racionais, parece razoável esperar que estes assumam posições de aceitar um maior risco à medida que sua riqueza aumenta, mesmo que eles sejam avessos ao risco. Este posicionamento deixa espaço apenas para aquelas funções de utilidade que atendam a condição número 3 do quadro acima. Quanto as posições em 4, 5 e 6, sobre a aversão relativa ao risco, não existe um censo comum entre os pesquisadores da área, porém, diante da proposição enunciada de aversão absoluta decrescente, parece mais racional está situado em aversão relativa ao risco constante ou decrescente (condições número 5 e 6).

*“Although economists generally agree that reasonable utility of wealth functions should exhibit (1) positive but diminishing marginal utility, and (2) decreasing absolute risk aversion, there is no consensus about whether realistic relative risk-aversion measures should increase, remain constant, or decrease.”*  
(Francis e Archer, 1979:270).

Segundo o mesmo autor, as funções que possuem aversão relativa constante ao risco são consideradas altamente razoáveis, pois à medida que a riqueza de uma pessoa cresce, a sua disposição em experimentar um tamanho maior de risco, desde que a sua proporção seja igual a anterior.

**Quadro 3.2:** Tipos de função utilidade e sua caracterização quanto ao risco absoluto e relativo.

Função Utilidade	Aversão Absoluta ao Risco	Aversão Relativa ao Risco	Condição
Quadrática $u = W + aW^2$	Crescente $AAR = 2a/(1,0 - 2aW) > 0$	Crescente $ARR = 2aW/(1,0 - 2aW) > 0$	$a > 0$ $W < 1 - 2aW$
Logarítmica $u = \ln W$	Decrescente $AAR = 1,0/W$	Constante $ARR = 1,0$	Nenhuma
Força Positiva $u = W^b$	Decrescente $AAR = (1,0 - b)/W$	Constante $ARR = 1,0 - b$	$0 < b < 1,0$
Raiz Quadrada $u = \sqrt{W}$	Decrescente $AAR = 0,5/W$	Constante $ARR = 0,5$	Nenhuma
Exponencial $u = -e^{-bW}$	Constante $AAR = b$	Positiva $ARR = bW$	$b > 0$

Fonte: Francis (1991: 618) e Francis e Archer (1979:270).

Pelo resumo exposto no quadro acima e as considerações anteriormente mencionadas, chega-se à conclusão que as funções logarítmicas, de força e raiz quadrada são as que estão adequadas para um investidor com aversão ao risco.

### 3.4 FUNÇÕES UTILIDADES COMUNS AO PRINCÍPIO DA MÉDIA-VARIÂNCIA

As funções que são apresentadas a seguir já foram introduzidas no tópico anterior, quanto as suas características de aversão absoluta ao risco e aversão relativa ao risco. Outras características serão exploradas neste tópico, para o uso da mesma no princípio da média-variância.

Diversas são as formas de representar o comportamento do tomador de decisões com esquemas matemáticos. As funções utilidades, em especial, têm a característica de modelar a satisfação dos indivíduos diante de diversas possibilidades, seja ela de ganho ou de perda.

### 3.4.1 Função Utilidade Quadrática

Dentre as mais comuns, esta é a que levanta maiores polêmicas quanto ao seu uso. Contudo, a sua característica quadrática facilita muito nos cálculos de otimização de sistemas. Pode-se, então, apresentá-la da seguinte forma:

$$U = aX + bX^2 \quad (3.4.1.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas.

Aplicando operadores de esperança matemática, tem-se:

$$E(U) = E(aX - bX^2) = aE(X) - bE(X^2) \quad (3.4.1.2)$$

Sabendo que,

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E\{[X - E(X)]^2\} \\ \sigma_X^2 &= E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] \\ \sigma_X^2 &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ \sigma_X^2 &= E(X^2) - E(X)^2 \\ E(X^2) &= \sigma_X^2 + E(X)^2 \end{aligned} \quad (3.4.1.3)$$

Substituindo 3.4.1.3 em 3.4.1.2, obtém-se:

$$E(U) = aE(X) - b[\sigma_X^2 + E(X)^2] \quad (3.4.1.4)$$

Ou seja, a decisão é tomada sobre o critério da média e da variância em 3.4.1.4 – decisão em cima dos dois primeiros momentos da distribuição. Derivando parcialmente 3.4.1.4 em função do retorno e da variância de  $X$ , obtém-se as restrições necessárias para  $a$  e  $b$ .

$$\frac{\partial E(U)}{\partial E(X)} = a - 2bE(X) > 0 \quad (3.4.1.5)$$

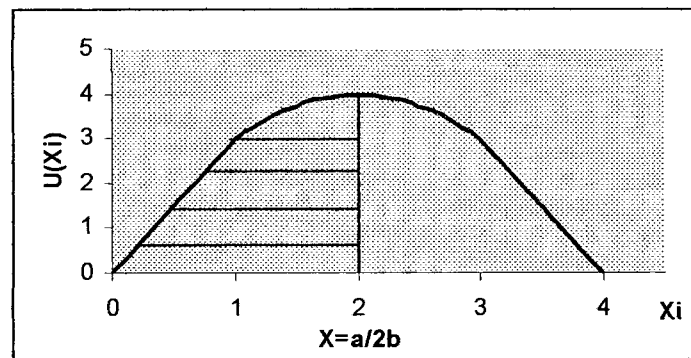
$$\frac{\partial E(U)}{\partial \sigma^2} = b > 0 \quad (3.4.1.6)$$

Como já foi mencionado  $a$  e  $b$  são positivos para garantir utilidades marginais decrescentes, então:

$$-2bE(X) > -a$$

$$2bE(X) < a$$

$$E(X) < \frac{a}{2b} \quad (3.4.1.7)$$



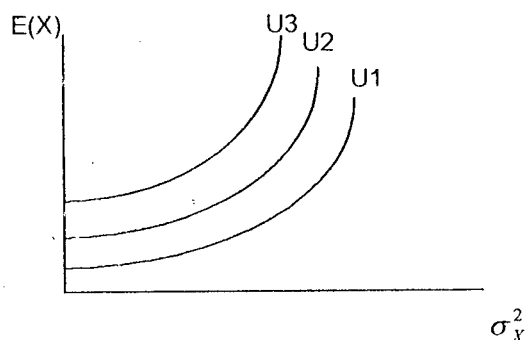
**Figura 3.4:** Área praticável da função utilidade quadrática.

Para entender o relacionamento entre retorno e variância numa situação de aversão ao risco, toma-se a equação 3.4.1.4 e isola o valor da variância.

$$b\sigma_x^2 = -E(U) + aE(X) - bE(X)^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{-E(U)}{b} + \frac{a}{b}E(X) - E(X)^2 \quad (3.4.1.8)$$

Dados alguns valores para  $E(X)$  em 3.3.1.8 e considerando o primeiro termo do lado direito da mesma equação como uma constante, obtém-se as curvas isoquantas para determinados pares de risco e retorno.



**Figura 3.5:** Isoquanta da utilidade para pares de risco e retorno.

Em verdade, existe uma família de curvas isoquantas, onde sendo considerado apenas U1, U2 e U3, deve-se concluir que  $U1 < U2 < U3$ .

### 3.4.2 Função Utilidade Logarítmica

São funções que permitem a separação da riqueza inicial  $W_0$  da taxa de retorno (ganho)  $x$  conforme segue abaixo. Tome-se uma das várias formas que ela pode assumir:

$$\begin{aligned}
 U(W_T) &= \ln(W_T) \\
 &= \ln[W_0(1+r)] \\
 &= \ln(W_0) + [\ln(1+r)]
 \end{aligned}
 \tag{3.4.2.1}$$

Tomando um exemplo apresentado em Francis e Archer (1979:266), pode-se verificar o formato da curva.

$W_T$	1	5	10	100	500	2000	10000	100000	250000	1000000
$U$	0	1,6	2,3	4,6	6,4	7,59	9,20	11,50	12,42	13,80

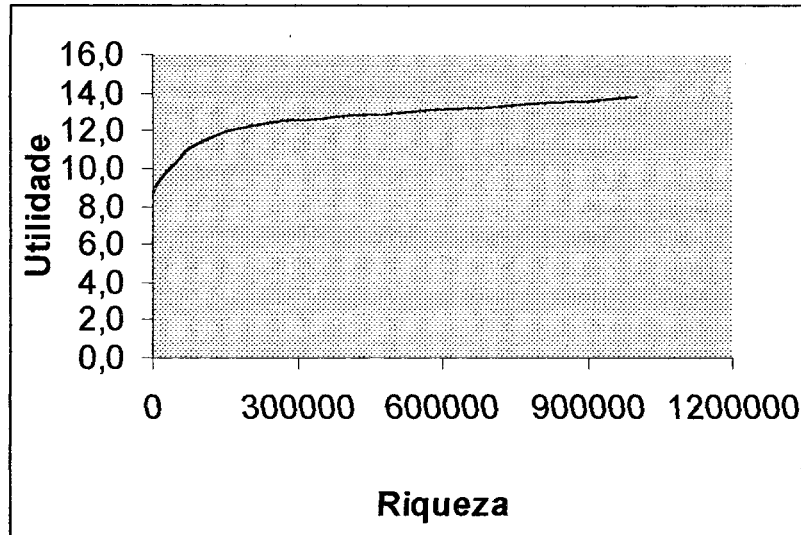


Figura 3.6: Função utilidade logarítmica.

As propriedades que satisfazem as características econômicas já levantadas são provadas com suas respectivas derivadas.

$$\frac{\partial U}{\partial W_T} = \frac{1}{W_T} > 0 \quad (3.4.2.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial W_T} = \frac{1}{1+r} > 0 \quad (3.4.2.3)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial W_T^2} = \frac{-1}{W_T^2} < 0 \quad (3.4.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{-1}{(1+r)^2} < 0 \quad (3.4.2.5)$$

As duas primeiras condições confirmam que um aumento na riqueza ou no retorno traz uma satisfação maior, enquanto as duas últimas mostram que esse aumento de satisfação é decrescente.

Um caso especial e interessante dessa classe de funções, segundo Levi e Sarnat (1972:197), é a função utilidade de Bernoulli, a qual também incorpora a suposição de utilidade marginal decrescente. Esse autor foi o responsável pela troca de análise do princípio máximo esperado do retorno para a análise da utilidade esperada máxima. Ver Bernstein (1997:99-114).

$$U(X) = b \log \frac{X}{a} \quad (3.4.2.6)$$

Ou ainda, na forma:

$$U(X) = b \log X - b \log a \quad (3.4.2.7)$$

Onde  $X$  é o montante de dinheiro e  $a$  e  $b$  são constantes positivas. Sendo que as primeiras e segundas derivadas das equações 3.3.2.6 e 3.3.2.7 são:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{b}{X} \geq 0 \quad (3.4.2.8)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = -\frac{b}{X^2} \leq 0 \quad (3.4.2.9)$$

### 3.4.3 Função de Força

Esse tipo tem a prerrogativa de assumir duas formas também bem conhecidas na literatura de finanças, sendo sua caracterização mais geral:

$$U(X) = X^{1-a} \quad (3.4.3.1)$$

Se  $0 < a < 1$

ou ainda,

$$U(X) = X^b \quad (3.4.3.2)$$

onde  $b = 1 - a$ , logo  $0 < b < 1$ .

Suas derivadas são:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = bX^{b-1} > 0 \quad \text{para } X > 0 \quad (3.4.3.3)$$



$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = b(b-1)X^{(b-1)-1} < 0 \quad \text{para } X < 0 \quad (3.4.3.4)$$

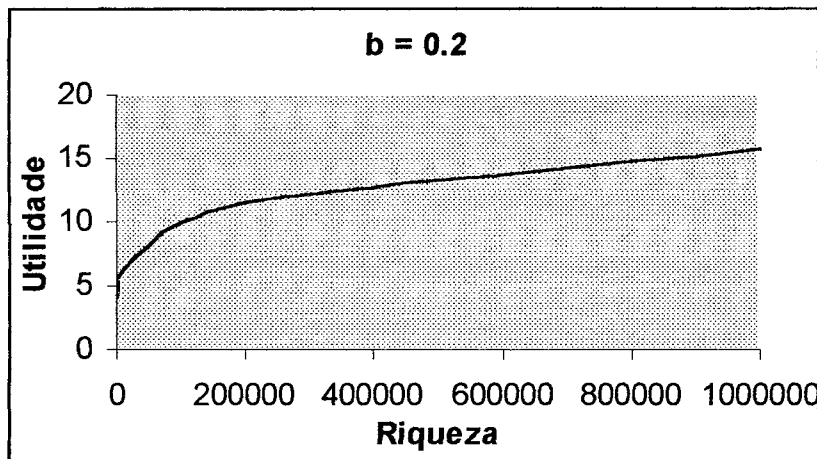


Figura 3.7: Função utilidade força com  $b = 0,2$ .

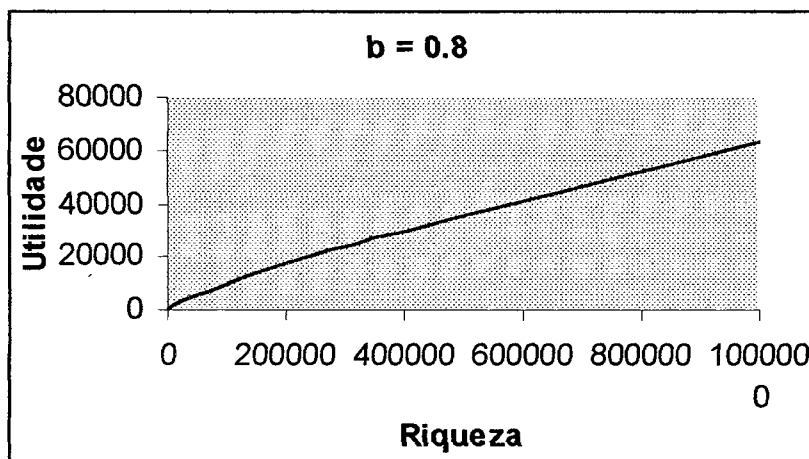


Figura 3.8: Função utilidade força com  $b = 0,8$ .

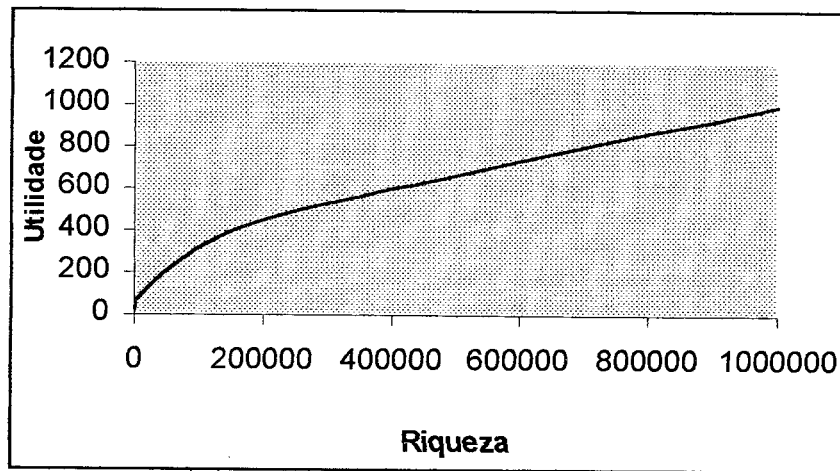
Especialmente quando  $a = 0,5$ , em 3.3.3.1, é obtida a função de Cramer:

$$U(X) = \sqrt{X} \quad (3.4.3.5)$$

Derivando,

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{1}{2} X^{-1/2} > 0 \quad \text{para } X > 0 \quad (3.4.3.6)$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial^2 X} = -\frac{1}{4} X^{-3/2} < 0 \quad \text{para } X > 0 \quad (3.4.3.7)$$



**Figura 3.9:** Função utilidade raiz quadrada.

Essa função é conhecida também como raiz quadrada. Ver Levi e Sarnat (1972:200).

### 3.4.4 Função Exponencial

Entre os diversos tipos que ela pode assumir, um considerado de uso comum é da forma:

$$U(X) = a - \exp^{-bX} \quad (3.4.4.1)$$

Onde  $a$  e  $b$  são positivos e  $a \geq 1$ . Assim, derivando 3.4.4.1, encontra-se:

$$\frac{\partial U}{\partial X} = b \exp^{-bX} > 0 \quad (3.4.4.2)$$

$$\frac{\partial U^2}{\partial^2 X} = -b^2 \exp^{-bX} < 0 \quad (3.4.4.3)$$

A satisfação pelo aumento do dinheiro, neste tipo de utilidade, depende de  $b$  em relação a  $a$ . Nos gráficos abaixo isso fica evidente. Definindo  $a = 1$  e vários valores para  $b$ , desde de que  $b < a$ , tem-se:

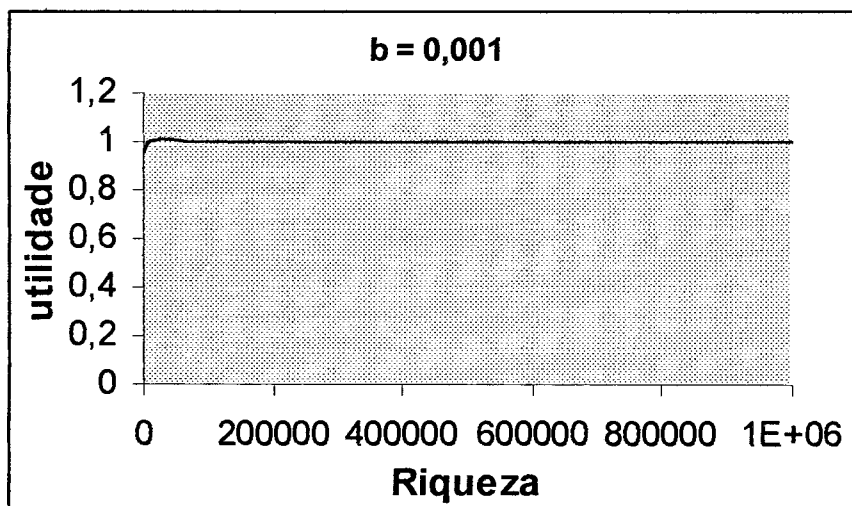


Figura 3.10: Função utilidade exponencial para  $b$  relativamente grande.

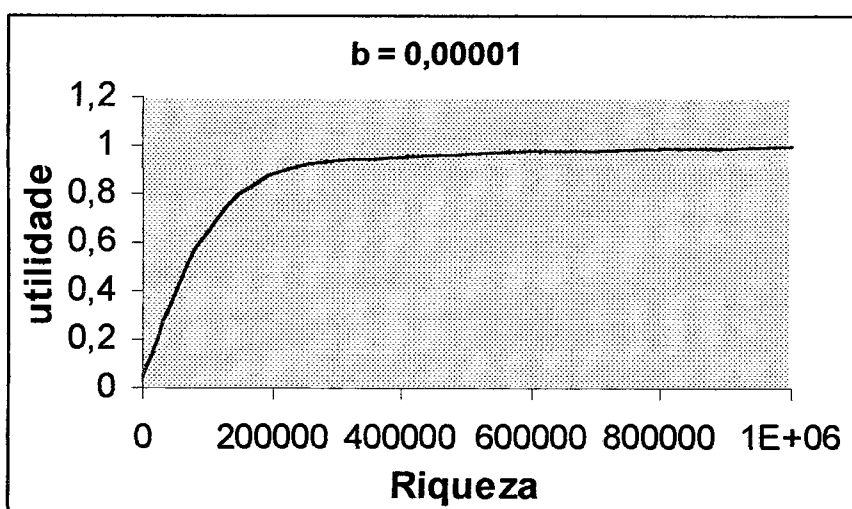


Figura 3.11: Função utilidade exponencial para  $b$  relativamente menor.

A segunda figura mostra que a satisfação do investidor precisa de uma quantia maior em dinheiro para que ela cresça. Na primeira figura quantias menores já atingem os mesmos níveis de satisfação.

### 3.5 ASSIMETRIA: O TERCEIRO MOMENTO DA DISTRIBUIÇÃO

Todas as funções anteriormente apresentadas dão suporte a análise de decisão através do princípio da média-variância, sendo que a função quadrática parece a mais restrita entre todas. Porém, evidências de que a assimetria também é importante na análise de risco se tornaram

cada vez mais fortes de acordo com os autores que serão abaixo discutidos.

A análise do risco, evidenciando apenas o segundo momento da distribuição, é válida dentro de um leque de suposições não muito fácil de ser encontrado na prática. Muitos são os autores que expressam esse tipo de preocupação.

Hirshleifer (1970:282-283) argumenta que a tendência à normalidade é dada quando as variáveis randômicas individuais são normais (ou tendem a elas) e quanto mais as mesmas são independentemente distribuídas umas das outras. Não parece ser o que acontece com os retornos na prática. Variáveis financeiras que expressam retorno tendem a ter uma concentração simétrica positiva, fato verificado por alguns autores que serão posteriormente citados.

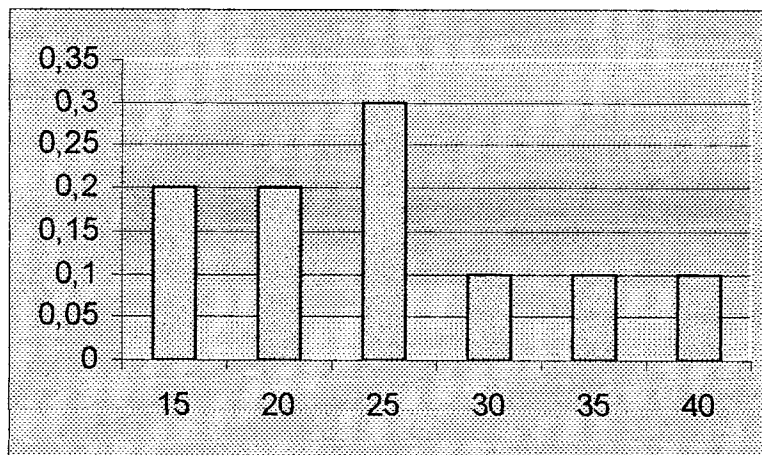
E mesmo que fossem, na maioria das vezes os problemas de decisão são constituídos de sistemas relativamente complexos, com muitas variáveis envolvidas. Ainda aparentando um comportamento normal em cada uma das variáveis em questão, a independência entre elas seria muito difícil de ocorrer, o que levaria a não normalidade do comportamento do sistema. Isso já tem sido detectado em Dantas e Samohyl (1999) na simulação do comportamento de um sistema que otimiza custos.

Para uma percepção mais palpável do problema da assimetria pode-se reportar a um exemplo prático que foi desenvolvido em Haley e Schall (1973). Nele são apresentadas duas distribuições discretas com mesma média e mesma variância: uma assimétrica positiva e outra assimétrica negativa. Para completar o raciocínio foi desenvolvida mais uma distribuição (também com mesma média e variância) sem assimetria.

**Quadro 3.3:** Conjunto de retornos possíveis e os seus três primeiros momentos.

Assimétrica Positiva				
		Média	Variância	Assimetria
$X_i$	$p(X_i)$	$E(X)$	$[X_i - E(X)]^2 * p(X_i)$	$[X_i - E(X)]^3 * p(X_i)$
15	0,2	3	20	-200
20	0,2	4	5	-25
25	0,3	7,5	0	0
30	0,1	3	2,5	12,5
35	0,1	3,5	10	100
40	0,1	4	22,5	337,5
<b>SOMA</b>	<b>1,0</b>	<b>25</b>	<b>60</b>	<b>225</b>

Fonte: adaptado de Haley e Schall (1973).



**Figura 3.12:** Distribuição assimétrica positiva dos dados.

**Quadro 3.4:** Conjunto de retornos possíveis e os seus três primeiros momentos.

Simétrica				
		Média	Variância	Assimetria
$X_i$	$p(X_i)$	$E(X)$	$[X_i - E(X)]^2 * p(X_i)$	$[X_i - E(X)]^3 * p(X_i)$
12,5	0,11875	1,484375	18,5546875	-231,9335938
17,5	0,18125	3,171875	10,1953125	-76,46484375
22,5	0,2	4,5	1,25	-3,125
27,5	0,2	5,5	1,25	3,125
32,5	0,18125	5,890625	10,1953125	76,46484375
37,5	0,11875	4,453125	18,5546875	231,9335938
<b>SOMA</b>	<b>1,0</b>	<b>25</b>	<b>60</b>	<b>0</b>

Fonte: adaptado de Haley e Schall (1973).

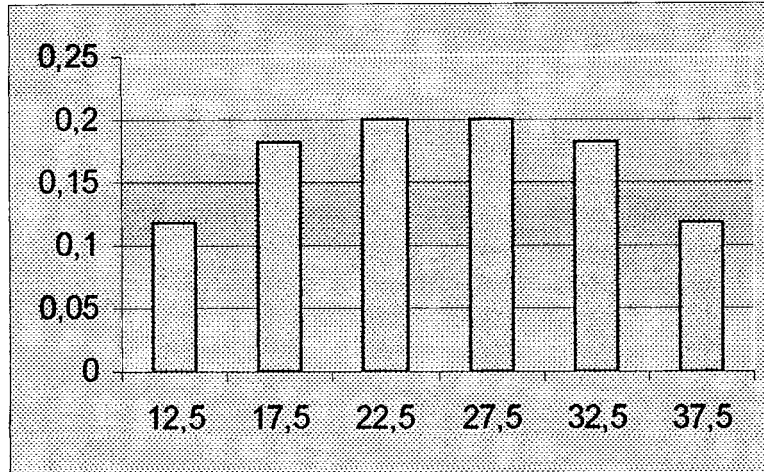


Figura 3.13: Distribuição simétrica dos dados.

Quadro 3.5: Conjunto de retornos possíveis e os seus três primeiros momentos.

Assimétrica Negativa				
		Média	Variância	Assimetria
$X_i$	$p(X_i)$	$E(X)$	$[X_i - E(X)]^2 * p(X_i)$	$[X_i - E(X)]^3 * p(X_i)$
10	0,1	1	22,5	-337,5
15	0,1	1,5	10	-100
20	0,1	2	2,5	-12,5
25	0,3	7,5	0	0
30	0,2	6	5	25
35	0,2	7	20	200
<b>SOMA</b>	<b>1,0</b>	<b>25</b>	<b>60</b>	<b>-225</b>

Fonte: adaptado de Haley e Schall (1973).

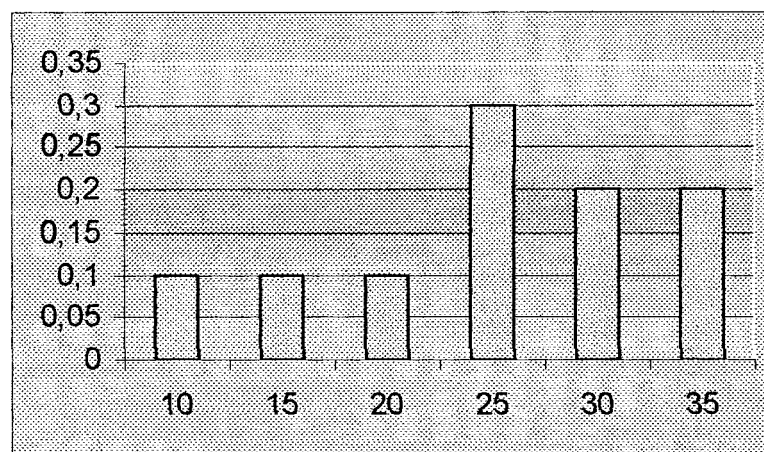


Figura 3.14: Distribuição assimétrica negativa dos dados.

A curva assimétrica positiva, figura 3.12, é caracterizada pela maior concentração dos valores no seu lado esquerdo, ou seja, sua cauda é mais alongada do lado direito da curva. Nesta distribuição a moda é menor que a mediana, que por sua vez é menor que a média.

A curva assimétrica negativa, figura 3.14, é caracterizada pela maior concentração dos valores no seu lado direito, ou seja, sua cauda é mais alongada do lado esquerdo da curva. Nesta distribuição a moda é maior que a mediana, que por sua vez é maior que a média. Ocorre o inverso da curva assimétrica positiva.

Por fim, uma curva simétrica, figura 3.13, os valores estão concentrado no centro da curva. Ou seja, os dois lados da curvas são iguais. Sendo assim, a moda, a mediana e a média possuem o mesmo valor.

A conclusão que se pode chegar, na observação desses quadros e figuras acima, é que apesar de possuírem mesma média e mesma variância a distribuição assimétrica positiva tem uma maior chance de que o valor randômico seja muito superior ao da média, podendo atingir um retorno de 40 (o que não é possível na assimétrica negativa). No outro extremo, a distribuição assimétrica negativa tem uma maior chance de obter valores muito abaixo da média, podendo atingir 10 (o que não é possível na assimétrica positiva).

Muitos são os autores que defendem a inclusão da assimetria na análise risco retorno. O trabalho de Arditti e Levi (1975) considera muito restrita a suposição da distribuição normal dos retornos, por isso ele recomenda a inclusão de momentos superiores. Para esses autores, quando o horizonte de planejamento aumenta, num *portfolio* dinâmico, particularmente a um aumento da assimetria.

*“... with short investment horizons skewness of portfolio returns can be ignored since existing empirical evidence indicates that these distributions are symmetric; however, for investors with longer horizons the distribution's skewness may be significant and therefore becomes a relevant variable in investment decision-making.”*(Arditti e Levi, 1975: 799).

Scott e Horvath (1980), bem como Arditti (1967), provam que a preferência pela assimetria é

positiva ( $U''' > 0$ ) para investidores cuja condição de aversão ao risco leva-os a exibirem utilidade marginal positiva ( $U' > 0$ ) e consistente aversão ao risco ( $U'' < 0$ ). A prova disto segue abaixo.

Tem sido mostrado, anteriormente, que para um investidor avesso ao risco, sua AAR deve ser não crescente:

$$d[-U''/U']dw \leq 0 \quad (3.5.1)$$

Pela regra da derivada em 3.5.1, tem-se:

$$d[-U''/U']dw = \frac{[-U'U''' + (U'')^2]}{(U')^2} \leq 0 \quad (3.5.2)$$

Desenvolvendo 3.5.2, obtém-se:

$$\frac{-U'U'''}{(U')^2} + \frac{(U'')^2}{(U')^2} \leq 0$$

$$\frac{-U'''}{U'} \leq -\frac{(U'')^2}{(U')^2}$$

$$-U''' \leq -\frac{(U'')^2}{(U')^2} \times U'$$

$$-U''' \leq -\frac{(U'')^2}{U'} \quad \times (-1)$$

$$U''' \geq \frac{(U'')^2}{U'} \quad (3.5.3)$$

Sabendo que  $U' > 0$  e  $U'' < 0$ , toda a expressão do lado direito da equação 3.5.3 também será positiva. Isso condiciona  $U'''$  a ser positiva.



$$U''' \geq \frac{(U'')^2}{U'} > 0 \quad (3.5.4)$$

*“If an investor is assumed to have a negative preference for the third moment,  $\mu_3$ , it is easy to see that this would prefer less wealth to more wealth.” (Scott e Horvath, 1980: 917).*

Kraus e Litzenberger (1976) têm buscado evidências empíricas a respeito da significância da assimetria na composição do *portfolio*. Para isso, eles utilizaram uma regressão onde o excesso de retorno médio era dependente de um termo constante, de um termo que representa a variância e de um termo que representa a assimetria. Os resultados foram significantes, sendo que o termo da variância ficou com sinal positivo e termo da assimetria com sinal negativo. Significa dizer que para assumir uma maior variância o investidor precisa ser compensado com maior retorno, enquanto uma maior assimetria não.

Conine e Tamarkin (1981: 1114) sugerem que intuitivamente a assimetria positiva poderia ser explicada pelo fato de que a perda da riqueza do investidor não poderia ser superior a 100 %, enquanto os ganhos relativos a ela poderiam ser ilimitados. O mesmo raciocínio é abordado em Lee, Finnerty e Wort (1990:233):

*“One reason for returns being positively skewed is the instability of the investor to lose more than 100 percent of his or her investment, effectively creating a lower bound to portfolio returns. This is called the limited-liability constraint. But since capital gains and dividends could conceivably be infinite, the upper tail of the distribution of returns has no upper bounds.”*

Simkowitz e Beedles (1978) também incorporaram assimetria nos seus estudos, demonstrando que com os três primeiros momentos da distribuição a diversificação do *portfolio*, para a redução do risco, não é necessariamente desejada.

Em Brockett e Kahane (1992) e Brockett e Garven (1998) tem sido argüido exaustivamente que  $U'' < 0$  e  $U''' > 0$  não implicam necessariamente em evitar variância e preferir assimetria, respectivamente. Eles têm demonstrado, sobre a óptica de algumas funções utilidades

comumente usadas, exemplos em que, entre dois investimentos alternativos com mesma média e assimetria, o investimento com maior variância é escolhido. Ou ainda, entre dois investimentos concorrentes é escolhido aquele que possui menor média, maior variância e menor assimetria positiva.

Esse é um fato conflitante dentro da lógica que se pretende manter neste trabalho, porém em nenhum momento é argüido pelos autores que a assimetria não é importante na análise. Na seção 3.5 serão apresentadas algumas contra-argumentações contra essas possíveis falhas.

### 3.6 FUNÇÕES QUE INCORPORAM A ASSIMETRIA

Existem funções utilidades que possuem a característica de incorporar diretamente a assimetria, quando da aplicação de operadores de esperança. Estas são as funções utilidades de forma cúbica. Esse tipo de função também sofre algumas restrições que devem ser analisadas para que as características de investidor avesso ao risco sejam mantidas.

Modelo mais comum:

$$U = aW + bW^2 + cW^3 \quad (3.6.1)$$

Aplicando-se os operadores de esperança, obtém-se:

$$E(U) = aE(W) + bE(W^2) + cE(W^3) \quad (3.6.2)$$

Onde,

$$E(W^2) = \sigma_w^2 + E(W)^2; \quad (3.6.3)$$

$$E(W^3) = \text{assimetria} + 3E(W)\sigma_w^2 + E(W)^3; \quad (3.6.4)$$

$$\text{Assimetria} = E\left[(W - E(W))^3\right]; \quad (3.6.5)$$

Substituindo (3.6.3), (3.6.4) e (3.6.5) em (3.6.2):

$$E(U) = aE(W) + b\{\sigma_w^2 + E(W)^2\} + c\{\text{assimetria} + 3E(W)\sigma_w^2 + E(W)^3\}; \quad (3.6.6)$$

De 3.6.1:

$$U' = a + 2bW + 3cW^2 > 0 \quad (3.6.1.1)$$

$$U'' = 2b + 6cW < 0 \quad (3.6.1.2)$$

$$U''' = 6c > 0 \quad (3.6.1.3)$$

Sendo  $a = 1$ , as condições para  $b$  e  $c$  retiradas de 3.6.1.1, 3.6.1.2 e 3.6.1.3 são:

$$-3cW > b > \frac{-3cW^2 - 1}{2W} \quad (3.6.7)$$

$$c > 0 \quad (3.6.8)$$

De 3.6.2 e suas transformações:

$$U' = a + 2bE(W) + 3c\sigma^2 + 3cE(W)^2 > 0 \quad (3.6.2.1)$$

$$U'' = 2b + 6cE(W) < 0 \quad (3.6.2.2)$$

$$U''' = 6c > 0 \quad (3.6.2.3)$$

Sendo  $a = 1$ , as condições para  $b$  e  $c$  retiradas de 3.6.2.1, 3.6.2.2 e 3.6.2.3 são:

$$-3cE(W) > b > \frac{-3cE(W)^2 - 3c\sigma^2 - 1}{2E(W)} \quad (3.6.9)$$

$$c > 0 \quad (3.6.10)$$

Além disso, a AAR (equação 3.6.9 ou 3.6.10) dessa função precisa ser decrescente quando  $W$  cresce.

De 3.6.1.1 a 3.6.1.3:

$$AAR = -\frac{2b + 6cW}{a + 2bW + 3cW^2} \quad (3.6.11)$$

De 3.6.2.1 a 3.6.2.3:

$$AAR = \frac{2b + 6cE(W)}{a + 2bE(W) + 3c\sigma^2 + 3cE(W)^2} \quad (3.6.12)$$

Esse tipo de função cúbica tem um problema idêntico ao da função quadrática, existem segmentos desta curva cuja aversão absoluta ao risco não é decrescente quando a riqueza cresce. Assim, os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  devem ser escolhidos de modo a garantir essa condição que garante o comportamento de investidor avesso ao risco. Nas tabelas a seguir são apresentadas algumas simulações que demonstram quando esses parâmetros são viáveis, além de atenderem às relações discutidas nas equações 3.6.7 até 3.6.10.

**Tabela 3.1:** Valor de  $b$  para fraca aversão ao risco, dado  $a$  e  $c$ , média, variância e assimetria.

Valor Esperado da Equação Polinomial do 3º											
E(U)	E(W)	Variância	Assimetria	a	b	c	U'	U''	U'''	AAR	ARR
3,70	3,70	6,92	-2,48	1	-5,8E-08	5,00E-09	1,00	-0,0000000050	0,00000003	0,000000003	0,000000002
3,72	3,72	6,92	-2,48	1	-5,8E-08	5,00E-09	1,00	-0,0000000044	0,00000003	0,000000004	0,000000002
3,74	3,74	6,92	-2,48	1	-5,8E-08	5,00E-09	1,00	-0,0000000038	0,00000003	0,000000004	0,000000001
3,76	3,76	6,92	-2,48	1	-5,8E-08	5,00E-09	1,00	-0,0000000032	0,00000003	0,000000003	0,000000001
3,78	3,78	6,92	-2,48	1	-5,8E-08	5,00E-09	1,00	-0,0000000026	0,00000003	0,000000003	0,000000001
3,80	3,80	6,92	-2,48	1	-5,8E-08	5,00E-09	1,00	-0,0000000020	0,00000003	0,000000002	0,000000001
3,82	3,82	6,92	-2,48	1	-5,8E-08	5,00E-09	1,00	-0,0000000014	0,00000003	0,000000001	0,000000001
3,84	3,84	6,92	-2,48	1	-5,8E-08	5,00E-09	1,00	-0,0000000008	0,00000003	0,000000001	0,000000000
3,86	3,86	6,92	-2,48	1	-5,8E-08	5,00E-09	1,00	-0,0000000002	0,00000003	0,000000000	0,000000000

**Tabela 3.2:** Valor de  $b$  para forte aversão ao risco, dado  $a$  e  $c$ , média, variância e assimetria.

Valor Esperado da Equação Polinomial do 3º Grau											
E(U)	E(W)	Variância	Assimetria	a	b	c	U'	U''	U'''	AAR	ARR
3,70	3,70	6,92	-2,48	1	-7E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001398890	0,00000003	0,0001399615	0,00051786
3,72	3,72	6,92	-2,48	1	-7E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001398884	0,00000003	0,0001399612	0,00052066
3,74	3,74	6,92	-2,48	1	-7E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001398878	0,00000003	0,0001399610	0,00052345
3,76	3,76	6,92	-2,48	1	-7E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001398872	0,00000003	0,0001399608	0,00052625
3,78	3,78	6,92	-2,48	1	-7E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001398866	0,00000003	0,0001399606	0,00052905
3,80	3,80	6,92	-2,48	1	-7E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001398860	0,00000003	0,0001399604	0,00053185
3,82	3,82	6,92	-2,48	1	-7E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001398854	0,00000003	0,0001399602	0,00053465
3,84	3,84	6,92	-2,48	1	-7E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001398848	0,00000003	0,0001399600	0,00053745
3,86	3,86	6,92	-2,48	1	-7E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001398842	0,00000003	0,0001399598	0,00054024

As tabelas acima mostram a aversão absoluta ao risco decrescente, quando a riqueza cresce, para valores simulados da média, variância e assimetria. Os valores escolhidos para  $b$  nas tabelas 3.1 e 3.2 são, respectivamente, praticamente os limites impostos pela equação 3.6.9, quando  $a = 1$  e  $c$  é positivo (definido na tabela). As condições de primeira derivada positiva, segunda derivada negativa e terceira derivada positiva são atendidas.

**Tabela 3.3:** Valor de  $b$ , dado  $a$  e  $c$ , média, variância e assimetria, com AAR positiva.

Valor Esperado da Equação Polinomial do 3°											
E(U)	E(W)	Variância	Assimetria	a	b	c	U'	U''	U'''	AAR	ARR
3,70	3,70	6,92	-2,48	1	-9E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001798890	0,00000003	0,0001800088	0,00066603
3,72	3,72	6,92	-2,48	1	-9E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001798884	0,00000003	0,0001800089	0,00066963
3,74	3,74	6,92	-2,48	1	-9E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001798878	0,00000003	0,0001800089	0,00067323
3,76	3,76	6,92	-2,48	1	-9E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001798872	0,00000003	0,0001800090	0,00067683
3,78	3,78	6,92	-2,48	1	-9E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001798866	0,00000003	0,0001800090	0,00068043
3,80	3,80	6,92	-2,48	1	-9E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001798860	0,00000003	0,0001800091	0,00068403
3,82	3,82	6,92	-2,48	1	-9E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001798854	0,00000003	0,0001800091	0,00068763
3,84	3,84	6,92	-2,48	1	-9E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001798848	0,00000003	0,0001800092	0,00069124
3,86	3,86	6,92	-2,48	1	-9E-05	5,00E-09	1,00	-0,0001798842	0,00000003	0,0001800092	0,00069484

A tabela 3.3 mostra que apesar de  $b$  está dentro do limite que é imposto pela equação 3.6.9, não possui aversão absoluta ao risco decrescente, condicionando  $b$  a um intervalo menor do que o esperado pelas condições de convergência para os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Logicamente, valores diferentes para média, variância e assimetria, daqueles apresentados nas tabelas acima, conduzem a estimação de novos limites para  $b$ , dado  $a$  e  $c$ .

Modelo de Karl Borch:

Um trabalho pioneiro desenvolvido por Borch (1963) procura esclarecer os ditames matemáticos por trás das suposições teóricas desenvolvidas em trabalhos que incluem a aversão ao risco. Esse trabalho surge para explicar o porquê das restrições impostas em trabalhos do tipo desenvolvido por Markowitz (1952).

Num primeiro momento o autor desenvolve todo o instrumental a partir da equação do tipo quadrática:

$$U(x) = x - ax^2 \tag{3.6.13}$$

Aplicando operadores de esperança, obtém-se:

$$E(U) = E(x) - a[E(x^2)] \tag{3.6.14}$$

Dado que:

$$E(x^2) = \sigma^2 + E(x)^2 \quad (3.6.15)$$

Substituindo (3.6.15) em (3.6.14), tem-se:

$$E(U) = E(x) - a\sigma^2 - aE(x)^2 \quad (3.6.16)$$

Para o autor bem como para nosso trabalho o método tem como principal limitação à utilização apenas dos dois primeiros momentos para o conjunto da distribuição de probabilidade.

*“There seems to be good reason for bringing in the third moment, and thus assuming that the skewness of the probability distributions is considered in decision-making under uncertainty.” Borch (1963: 700).*

A nova função sugerida naquele texto é do tipo:

$$U(x) = (x - a)^3 \quad (3.6.17)$$

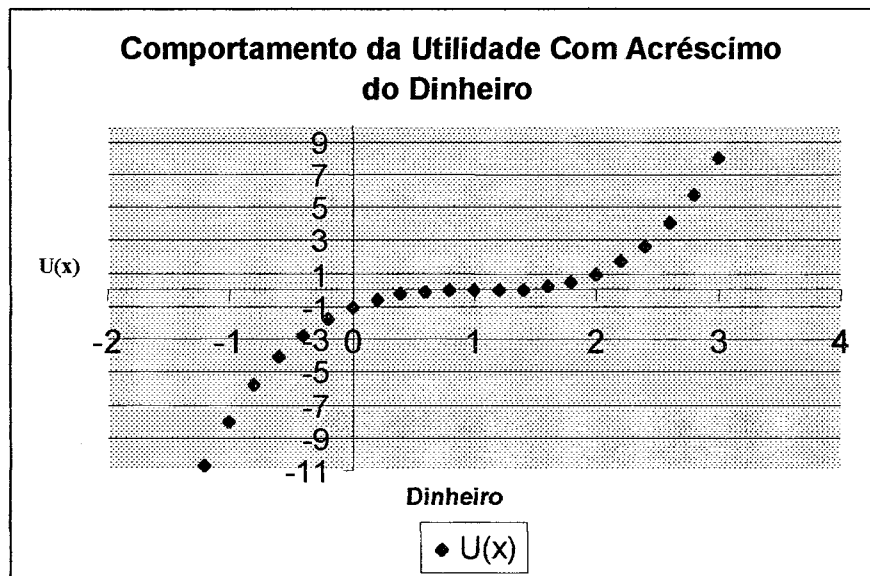


Figura 3.15: Comportamento da utilidade de Borch em três momentos.

Tomando-se alguns valores para  $x$  e definindo  $a = 1$  é possível obter a curva que representa o comportamento da utilidade para cada unidade de riqueza adquirida (como na figura 3.15). Chega-se a conclusão que unidades crescentes de riqueza proporciona elevações da satisfação menos que proporcionalmente em um primeiro momento até que a satisfação, num patamar maior de riqueza, comece a crescer de maneira mais que proporcional a taxas cada vez maiores. Parece bem coerente com a vida real. Para investidores avessos ao risco a teoria diz que só o primeiro momento que interessa.

Aplicando o desenvolvimento matemático e operadores de esperança em (3.6.17), obtém-se:

$$E(U) = 3a^2 2E(x) - 3a[E(x^2)] + E(x^3) - a^3 \quad (3.6.18)$$

onde:

$$E(x^3) = \mu_3 + 3E(x)\sigma^2 + E(x)^3 \quad (3.6.19)$$

Senso  $\mu_3 =$  assimetria. Considerando, agora, as equações (3.6.15) e (3.6.19), pode-se transformar (3.6.18) para:

$$E(U) = 3a^2 2E(x) - 3a[\sigma^2 + E(x)^2] + \mu_3 + 3E(x)\sigma^2 + E(x)^3 - a^3 \quad (3.6.20)$$

Essa equação, diferentemente da que já foi apresentada na seção anterior, tem apenas um único fator de ponderação,  $a$ . Nota-se, assim, que esse fator de ponderação é o mesmo para a média e a variância, porém relativamente todas as variáveis, inclusive a assimetria, terão pesos dentro da equação e serão, portanto, controladas pelos tomadores de decisões.

As funções mencionadas aqui são para consumidores avessos ao risco o que impõe algumas restrições para o funcionamento destas equações. O princípio segue o mesmo discutido na seção anterior em que a primeira derivada da utilidade (ou de sua esperança) tem de ser positiva, a segunda derivada da utilidade (ou de sua esperança) tem que ser negativa e a terceira derivada da utilidade (ou de sua esperança) tem que ser positiva.

Assim, de 3.6.17:

$$U' = 3a^2 - 6ax + 3x^2 > 0 \quad (3.6.17.1)$$

$$U'' = -6a + 6x < 0 \quad (3.6.17.2)$$

$$U''' = 6 > 0 \quad (3.6.17.3)$$

Da condição 3.6.17.2, tem-se que  $a > x$  para que essa função seja válida. Pode também ser visto que de 3.6.20, tem-se:

$$E(U)' = 3a^2 - 6aE(x) + 3\sigma^2 + 3E(x)^2 > 0 \quad (3.6.20.1)$$

$$E(U)'' = -6a + 6E(x) < 0 \quad (3.6.20.2)$$

$$E(U)''' = 6 > 0 \quad (3.6.20.3)$$

Também  $a > x$  para que a função seja válida, pela condição 3.6.20.2.

Como na seção anterior, a AAR (aversão absoluta ao risco) deve ser decrescente quando a riqueza cresce. Sendo assim, de 3.6.17.1 e 3.6.17.2 é obtida a sua AAR:

$$AAR = -\frac{-6a + 6x}{6a^2 - 6ax + 3x^2} \quad (3.6.21)$$

E por 3.6.20.1 e 3.6.20.2:

$$AAR = -\frac{-6a + 6E(x)}{6a^2 - 6aE(x) + 3E(x)^2 + 3\sigma^2} \quad (3.6.22)$$

Como na seção anterior, um processo de simulação da média, variância e assimetria de um sistema de produção (o lucro que é variável de estado final é considerada aqui como  $W$ ), o qual é proveniente do estudo de caso desta tese, pode-se mostrar valores de  $a$  para diversos níveis de aversão, conforme tabelas 3.4, 3.5 e 3.6.



**Tabela 3.4:** Valor de  $a = 3,87 > E(W)$ , considerando uma fraca aversão ao risco.

Valor Esperado da Equação Polinomial do 3º Grau - Borch									
E(U)	E(W)	Variância	Assimetria	a	U'	U''	U'''	AAR	ARR
-6,014	3,70	6,92	-2,48	3,87	65,78	-1,02	6	0,0155	0,0574
-5,597	3,72	6,92	-2,48	3,87	65,76	-0,90	6	0,0137	0,0509
-5,181	3,74	6,92	-2,48	3,87	65,74	-0,78	6	0,0119	0,0444
-4,765	3,76	6,92	-2,48	3,87	65,73	-0,66	6	0,0100	0,0378
-4,349	3,78	6,92	-2,48	3,87	65,72	-0,54	6	0,0082	0,0311
-3,934	3,80	6,92	-2,48	3,87	65,71	-0,42	6	0,0064	0,0243
-3,518	3,82	6,92	-2,48	3,87	65,70	-0,30	6	0,0046	0,0174
-3,103	3,84	6,92	-2,48	3,87	65,69	-0,18	6	0,0027	0,0105
-2,688	3,86	6,92	-2,48	3,87	65,69	-0,06	6	0,0009	0,0035

**Tabela 3.5:** Valor de  $a = 7 > E(W)$ , considerando uma forte aversão ao risco.

Valor Esperado da Equação Polinomial do 3º Grau - Borch									
E(U)	E(W)	Variância	Assimetria	a	U'	U''	U'''	AAR	ARR
-106,93	3,70	6,92	-2,48	7	200,43	-19,80	6	0,0988	0,3655
-105,86	3,72	6,92	-2,48	7	200,04	-19,68	6	0,0984	0,3660
-104,80	3,74	6,92	-2,48	7	199,64	-19,56	6	0,0980	0,3664
-103,75	3,76	6,92	-2,48	7	199,25	-19,44	6	0,0976	0,3668
-102,71	3,78	6,92	-2,48	7	198,87	-19,32	6	0,0972	0,3672
-101,68	3,80	6,92	-2,48	7	198,48	-19,20	6	0,0967	0,3676
-100,65	3,82	6,92	-2,48	7	198,10	-19,08	6	0,0963	0,3679
-99,64	3,84	6,92	-2,48	7	197,72	-18,96	6	0,0959	0,3682
-98,63	3,86	6,92	-2,48	7	197,34	-18,84	6	0,0955	0,3685

**Tabela 3.6:** Valor de  $a = 8 > E(W)$ , representa uma forte aversão ao risco.

Valor Esperado da Equação Polinomial do 3º Grau - Borch									
E(U)	E(W)	Variância	Assimetria	a	U'	U''	U'''	AAR	ARR
-171,26	3,70	6,92	-2,48	8	268,23	-25,80	6	0,0962	0,3559
-169,74	3,72	6,92	-2,48	8	267,72	-25,68	6	0,0959	0,3568
-168,23	3,74	6,92	-2,48	8	267,20	-25,56	6	0,0957	0,3578
-166,73	3,76	6,92	-2,48	8	266,69	-25,44	6	0,0954	0,3587
-165,24	3,78	6,92	-2,48	8	266,19	-25,32	6	0,0951	0,3596
-163,76	3,80	6,92	-2,48	8	265,68	-25,20	6	0,0949	0,3604
-162,29	3,82	6,92	-2,48	8	265,18	-25,08	6	0,0946	0,3613
-160,83	3,84	6,92	-2,48	8	264,68	-24,96	6	0,0943	0,3621
-159,38	3,86	6,92	-2,48	8	264,18	-24,84	6	0,0940	0,3629

Nas três tabelas, garante-se a condição de que para qualquer valor da média, o valor de  $a$  é sempre maior. Também, é possível notar que, em todas as tabelas, a aversão absoluta ao risco é decrescente.

Um primeiro fato interessante, que ocorre com o tipo de função analisada, é que a esperança da sua utilidade é negativa, o que representa um processo de desutilidade. Na primeira tabela, cada nível de aversão absoluta ao risco, relacionada com um respectivo lucro, mostra-se muito

inferior àqueles apresentados na segunda e terceira tabelas, mantendo-se os mesmos lucros. Isso a caracteriza como de menor aversão ao risco.

Na condição acima mencionada, percebe-se que o aumento de níveis de lucro significa uma grande diminuição na condição de aversão absoluta ao risco. Ou seja, na condição de baixa aversão ao risco, aumento da riqueza (lucro) significa um grande aumento da disposição a assumir risco.

A diferença entre a segunda e terceira tabela está no fato de que  $a = 7$  é o valor limite de maior aversão absoluta ao risco, quando valores superiores a este provocam um retrocesso na tendência de aumento de aversão. Vale ressaltar que, como se trata de um processo simulado, valores diferentes da média, variância e assimetria deverão apresentar nova simulação, também, para  $a$ , contudo, que atenda a todas as restrições já discutidas.

### 3.7 INCORPORAÇÃO DA ASSIMETRIA POR EXPANSÃO DE TAYLOR

O processo de expansão de Taylor sobre o ponto  $(W + Ex)$  é feito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 U(W + x) = & U(W + Ex) + U'(W + Ex) * [W + x - (W + Ex)] \\
 & + \frac{U''}{2!} (W + Ex) * [W + x - (W + Ex)]^2 \\
 & + \frac{U'''}{3!} (W + Ex) * [W + x - (W + Ex)]^3 \\
 & + \frac{U^{(4)}}{4!} (W + Ex) * [W + x - (W + Ex)]^4 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

Desde que é conhecido que o investidor maximizará a sua utilidade esperada, então:

$$\begin{aligned}
 EU(W + x) = & U(W + x) + \frac{U''}{2!} (W + x) \sigma^2 + \frac{U'''}{3!} (W + x) \mu_3 + \frac{U^{(4)}}{4!} (W + x) \mu_4 + \dots \\
 & + \frac{U^{(k)}}{n!} (W + x) \mu_n
 \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

Onde,

- $U''' =$  Quarta derivada da utilidade;
- $\mu_4 =$  Curtose da distribuição;
- $U^k =$  k derivada da utilidade;
- $\mu_n =$  n-ésimo momento da distribuição;

Truncando a série nos três primeiros momentos, tem-se:

$$EU(W + x) = U(W + x) + \frac{U''}{2!}(W + x)\sigma^2 + \frac{U'''}{3!}(W + x)\mu_3 \quad (3.7.3)$$

Logo, pode-se escolher qualquer uma das funções utilidades apresentadas (ou qualquer uma das suas derivações) desde que atendam aos pré-requisitos de aversão absoluta ao risco decrescente e aversão relativa ao risco não crescente. Pega-se a seguir, um dos exemplos sugeridos por Brockett e Garven (1998) a fim de demonstrar que é possível utilizar qualquer das funções escolhidas anteriormente, desde que variância e assimetria sejam utilizadas explicitamente com Série de Taylor, contrariando as expectativas desses autores que utilizam apenas a média explicitamente.

**Quadro 3.6:** Estatísticas para o investimento X.

Investimento X				
X	P(x)	Média	Variância	Assimetria
3,6	0,5	1,8	0,98	-1,372
6,4	0,5	3,2	0,98	1,372
		<b>5</b>	<b>1,96</b>	<b>0</b>

Fonte: Brockett e Garven (1998).

**Quadro 3.7:** Estatísticas para o investimento Y.

Investimento Y				
Y	P(y)	Média	Variância	Assimetria
0	0,02	0	0,5	-2,5
5	0,96	4,8	0	0
10	0,02	0,2	0,5	2,5
		<b>5</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

Fonte: Brockett e Garven (1998).

Os quadros 3.6 e 3.7 apresentam a média, variância e assimetria para dois tipos de investimentos diferentes,  $X$  e  $Y$ . Porém, os dois possuem médias e assimetrias iguais, o que levaria ao tomador de decisões optar por aquele que possui menor variância, o investimento  $Y$ . Assim, com o uso das funções utilidades estudadas que não incorporam a variância e assimetria explicitamente (excluem-se as polinomiais), pode-se pré-julgar funções adequadas para o modelo de aversão ao risco.

**Quadro 3.8:** Comparação entre funções utilidades para os dois investimentos  $X$  e  $Y$ .

	Utilidade Esperada de X	Utilidade Esperada de Y	Parâmetro
Raiz	2,213594	2,209871	
Logarítmica	2,364401	2,362870	
Força Positiva	3,600763	3,605134	$b = 0,8$
Exponencial	0,931591	0,932155	$b = 0,6$
Com Expansão de Taylor			
Raiz	2,210912	2,224888	
Logarítmica	1,564438	1,589438	
Força Positiva	3,597806	3,612302	$b = 0,8$
Exponencial	0,754278	0,766829	$b = 0,3$

No quadro 3.8 (parte superior), percebe-se que as funções de força positiva e exponencial tomam decisões acertadas para o parâmetro  $b$  pré-definido. Neste caso, qualquer valor acima destes trazem resultados coerentes, onde  $U(Y) > U(X)$ . Nas outras funções a  $U(X) > U(Y)$ , o que não é coerente.

Na parte inferior do quadro 3.8 é observado um comportamento diferente e mais robusto. Nesta parte, as funções utilidades são expandidas por Série de Taylor para incorporar diretamente a variância e a assimetria. Neste caso específico, todas as funções tiveram resultados coerentes.

Sendo assim, a argumentação de Brockett e Garven (1998) poderia ter sustentação em funções do tipo raiz e logarítmica, casos específicos onde apenas as médias aparecem explicitamente. Porém, em funções do tipo força positiva e exponencial (dependendo do valor de  $b$ ) não.

Quando se inclui explicitamente a média, a variância e a assimetria, a argumentação desses autores já não parece mais válida. Brockett e Garven (1998) também não concordam com a truncagem da série de Taylor, argumentando que pode ser perdida muita informação com isso. Porém, a maioria dos autores que escrevem na área não vê muita utilidade em incorporar maiores momentos da distribuição na análise.

### **3.8 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

A conclusão deste capítulo é que: no processo decisório que incorpore risco, a variância e a assimetria devem ser incorporadas para representar uma maior realidade. Funções utilidades podem ser utilizadas para incorporar essas duas informações. Para investidores com características de aversão ao risco, algumas funções possuem uma melhor representação. Essas são aquelas que possuem aversão absoluta ao risco decrescente e aversão relativa ao risco constante ou decrescente. Especificamente, funções do tipo raiz, logarítmica, força positiva e exponencial atendem a esses pré-requisitos.

Devido a algumas argumentações contraditórias em Brockett e Garven (1998), as funções de força positiva e exponencial seriam mais robustas (dependendo do  $b$  utilizado) quando apenas a média é apresentada explicitamente. Caso contrário, e argumentado neste trabalho, quaisquer das funções mencionadas, neste trabalho, nos parágrafos anteriores, seriam suficientes para o tratamento do risco. Contudo, a função força positiva e exponencial possui um parâmetro  $b$  que permite associar um risco maior ou menor a função.

## **CAPÍTULO 4 – UMA REGRA DE DECISÃO NÃO-LINEAR, DINÂMICA E ESTOCÁSTICA**

---

### **4.1 INTRODUÇÃO**

Existe todo um conjunto de ferramentas que darão suporte a este trabalho. A agregação dessas ferramentas comporá a metodologia adotada para análise de um modelo que propõe uma regra de decisão não linear, dinâmica e estocástica.

### **4.2 MÉTODOS CIENTÍFICOS ADOTADOS**

Realizou-se uma pesquisa bibliográfica acerca dos três tópicos principais deste trabalho: planejamento da agregação da produção, previsão de demanda para firmas e funções utilidades para investidores avessos a risco.

Um estudo de caso é realizado para testar se os objetivos deste trabalho são alcançados. A entrevista não estruturada e não dirigida, a qual é entendida por Lakatos e Marconi (2001:197) como aquela onde o entrevistador pode expressar opinião e que leva o informante a falar sobre o assunto de interesse, foi utilizada para entender o processo em estudo.

Simulação e experimentação de vários cenários possíveis, com diversas funções utilidades e diversas funções de previsão de demanda em firmas, são utilizadas para identificar quais situações se apresentam mais robustas para o problema. A exploração estatística e a modelagem matemática dão o tom de conduta dos experimentos realizados neste trabalho.

A planilha eletrônica Excel será a principal ferramenta para montagem do sistema, simulação dos erros (ferramenta geração de números aleatórios), cálculo dos três primeiros momentos da distribuição (ferramentas de análises) e otimização do sistema (ferramenta Solver).

### 4.3 MODELO MATEMÁTICO

Dentre os vários modelos discutidos no capítulo 2, uma combinação do modelo de Dantas (1999) e do modelo de Chung and Krajewski (1984) para multi-produtos é utilizada. Segue modelo proposto:

Maximizar:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m (P_{it} D_{it}) - \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m [C_{si} \theta(P_{it}) + CP_{it} + CINV_{it} + CBO_{it}] + \sum_{t=1}^m [CH_t + CF_t + CHE_t + CHO_t + CRP_t] \right\} \quad (4.2.1)$$

Sendo,

$$\text{Custo de Produção/unidade do produto } i: CP_{it} = C_{mi} P_{it} \quad (4.2.2)$$

$$\text{Custo de Estocar/unidade do produto } i: CINV_{it} = C_{Ii} INV_{it} \quad (4.2.3)$$

$$\text{Custo de Atrasar/unidade do produto } i: CBO_{it} = C_{BOi} BO_{it} \quad (4.2.4)$$

$$\text{Custo da Folha de Pagamento: } CRP_t = C_{RP} W_t \quad (4.2.5)$$

$$\text{Custo de Contratação: } CH_t = C_H H_t \quad (4.2.6)$$

$$\text{Custo de Demissão: } CF_t = C_F F_t \quad (4.2.7)$$

$$\text{Custo da Hora Extra: } CHE_t = C_{HE} HE_t \quad (4.2.8)$$

$$\text{Custo da Hora Ociosa: } CHO_t = C_{HO} HO_t \quad (4.2.9)$$

As equações de (4.2.2) até (4.2.9) podem assumir outras configurações não lineares, dependendo do que acontece com os verdadeiros custos da empresa. Desta forma, evitaria a simplificação e tornaria o sistema mais realista.

Seguem as restrições do modelo:

1) Restrição do Inventário e dos Pedidos Atrasados:

$$INV_{i,t-1} - INV_{it} - BO_{i,t-1} + BO_{it} + P_{it} = D_{it} \quad (4.2.10)$$

(para  $i = 1, \dots, n$  e  $t = 1, \dots, m$ )

2) Restrição da Produção e Tempo de Preparação

$$TRT_t + HE_t - HO_t - \sum_{i=1}^n (P_{it} THP_t) - \sum_{i=1}^n \beta_i \theta(P_{it}) \geq 0 \quad (4.2.11)$$

(para  $i = 1, \dots, n$  e  $t = 1, \dots, m$ )

3) Restrição da Modificação do Nível da Força de Trabalho:

$$W_t - W_{t-1} - H_t + F_t = 0 \quad (4.2.12)$$

(para  $t = 1, \dots, m$ )

4) Restrição da Hora Extra:

$$HE_t - A_t W_t \leq 0 \quad (4.2.13)$$

(para  $t = 1, \dots, m$ )

5) Restrição da Preparação (*Setup*):

$$-Q_i \theta(P_{it}) + P_{it} \leq 0 \quad (4.2.14)$$

(para  $i = 1, \dots, n$  e  $t = 1, \dots, m$ )

6) Restrição para a Preparação (*Setup*):

$$\theta(P_{it}) = \begin{cases} 1 & \text{se } P_{it} > 0 \\ 0 & \text{se } P_{it} = 0 \end{cases} \quad (4.2.15)$$



(para  $i = 1, \dots, n$  e  $t = 1, \dots, m$ )

7) Restrições Não Negativas:

$$P_{it}, INV_{it}, BO_{it}, H_{it}, F_{it}, HE_{it}, HO_{it}, W_t \geq 0$$

sendo,

$$TRT_t = TR_t * W_t \quad (4.2.16)$$

$$THPT_t = \sum_{i=1}^n P_{it} * THP_t \quad (4.2.17)$$

$$THP_t = \frac{TR_t}{Pme_t} \quad (4.2.18)$$

onde,

$THPT_t$  = Tempo de horas/produto total (fator de conversão do nível de produção em horas)  
no período  $t$ ;

$THP_t$  = Tempo de horas/produto para cada unidade produzida no período  $t$ ;

$TRT_t$  = Tempo regular total para a produção disponível no período  $t$ ;

$TR_t$  = Tempo regular por trabalhador (deve estar de acordo com a legislação específica) no  
período  $t$ ;

$Pme_t$  = Produtividade média utilizada no período  $t$ ;

$P_{it}$  = Produção do produto  $i$  no período  $t$ ;

$INV_{it}$  = Estoque do produto  $i$  no período  $t$ ;

$BO_{it}$  = Pedidos atrasados do produto  $i$  no período  $t$ ;

$D_{it}$  = Vendas do produto  $i$  no período  $t$ ;

$W_t$  = Número de pessoas empregadas em tempo regular no período  $t$ ;

$H_t$  = Número de pessoas contratadas no período  $t$ ;

$F_t$  = Número de pessoas demitidas no período  $t$ ;

$HE_t$  = Hora extra utilizada no período  $t$ ;

$HO_t$  = Hora ociosa (não utilizada do tempo regulamentar total) no período  $t$ ;

$C_H$  = Custo mensal de manter uma unidade de produto  $i$  em estoque;

$C_{BOi}$  = Custo mensal de não atender a uma unidade de pedido do produto  $i$ ;

$C_{si}$  = Custo de preparação para o produto  $i$ ;

$C_{mi}$  = Custo da matéria-prima para produzir uma unidade do produto  $i$ ;

$C_{RP}$  = Custo unitário por empregado

$C_H$  = Custo para contratar um empregado;

$C_F$  = Custo para demitir um empregado;

$C_{HE}$  = Custo de utilizar uma hora extra;

$\theta(P_{it})$  = Variável binária de preparação para o produto  $i$  no período  $t$ ;

$\beta_i$  = Tempo de preparação para o produto  $i$ ;

$Q_i$  = Um número grande usado para garantir os efeitos da variável de preparação binária, que é:

$$Q_i \geq \sum_{t=1}^m D_{it}$$

$A_{1t}$  = Número máximo de hora extra permitida por empregado no período  $t$ ;

$n$  = Número de produtos;

$m$  = Número de meses no horizonte de planejamento;

Para o desenvolvimento deste trabalho, apenas a equação de hora extra ( $HE$ ) assume uma forma não linear, enquanto as outras serão assumidas como lineares. O tipo de problema que é tratado neste trabalho não exige tempo de preparação, pois se trata de um problema onde são agregados três produtos com processo independente de produção. A formulação apresentada anteriormente é dita como a maneira mais geral do problema de multi-produto. Considerando a não existência do *setup*, isto é  $\theta(P_{it}) = 0$ , e então, a equação (4.2.1) perde o

primeiro componente da 2ª parte, enquanto a equação (4.2.10) perde o último termo. Por fim, as restrições 5 e 6 deixam de existir.

#### 4.4 ALGORITMO PROPOSTO

Cuthbertson et al. (1992) apresentou um algoritmo capaz de interagir as simulações estocásticas necessárias para deixar o sistema mais realista e o processo de otimização que buscaria a melhor regra de decisão. Conforme o seu raciocínio, tem-se:

$$Y_i^{STO} = f_i\{Z, U, \beta, e\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4.1)$$

onde,

$Y_i$  = variáveis de estado;

$Z$  = variáveis exógenas;

$U$  = variáveis de controle;

$\beta$  = matriz de coeficientes;

$e$  = termo de erro;

A função critério, que, segundo Stoppler (1979), pode assumir várias outras formas, como, por exemplo, a forma utilizada neste trabalho nas seções anteriores (função utilidade cúbica), é escrita originalmente da seguinte forma:

$$E(C) = E \left[ \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i^D)^2 * G_i \right] \quad (4.4.2)$$

Que é novamente formulada como:

$$E(C) = \sum_{i=1}^n \{ \sigma_i^2 + [E(Y_i) - Y_i^D]^2 \} * G_i \quad (4.4.3)$$

onde  $\sigma_i^2$  é a variância de  $Y_i$  e  $G_i$  são pesos dados por especialistas da área e sua função é similar àquelas de  $a$ ,  $b$  e  $c$  nas funções apresentadas anteriormente.

A função critério posta dessa forma é conhecida como um problema de *tracking* (Kendrick, 1981), pois a solução está sempre procurando por valores desejados ou metas. Assim, essa função critério é minimizada para produzir caminhos ótimos para as variáveis de controles e, conseqüentemente, as de estado.

Como discutido, os aspectos da diferença entre linearidade e não linearidade fazem com que  $E(Y_i)$  seja diferente de  $Y_i$ . Essa diferença é encontrada através do fator de correção. Este, por sua vez, é a diferença entre o  $Y_i^{STO}$  e o  $Y_i^{DET}$ .

$$\text{Fator de Correção}_i = FC = Y_i^{STO} - Y_i^{DET} \quad (4.4.4)$$

onde  $Y_i^{DET} = f_i(Y_{i-1}, X_i, Z_i, e)$  considerando o valor de  $e$  igual a zero.  $Y$  é a variável de estado,  $X$  é variável de controle,  $Z$  é variável exógena e  $e$  é o termo de erro.

Isolando o valor de  $Y_i^{STO}$ , que representa a esperança de  $Y_i$ , e substituindo em (4.4.3) a equação fica:

$$E(C) = \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma_i^2 + [(Y_i^E + FC) - Y_i^{DET}]^2 \right\} * G_i \quad (4.4.5)$$

O algoritmo gira em torno de dois passos básicos, descritos a seguir:

1° Passo:

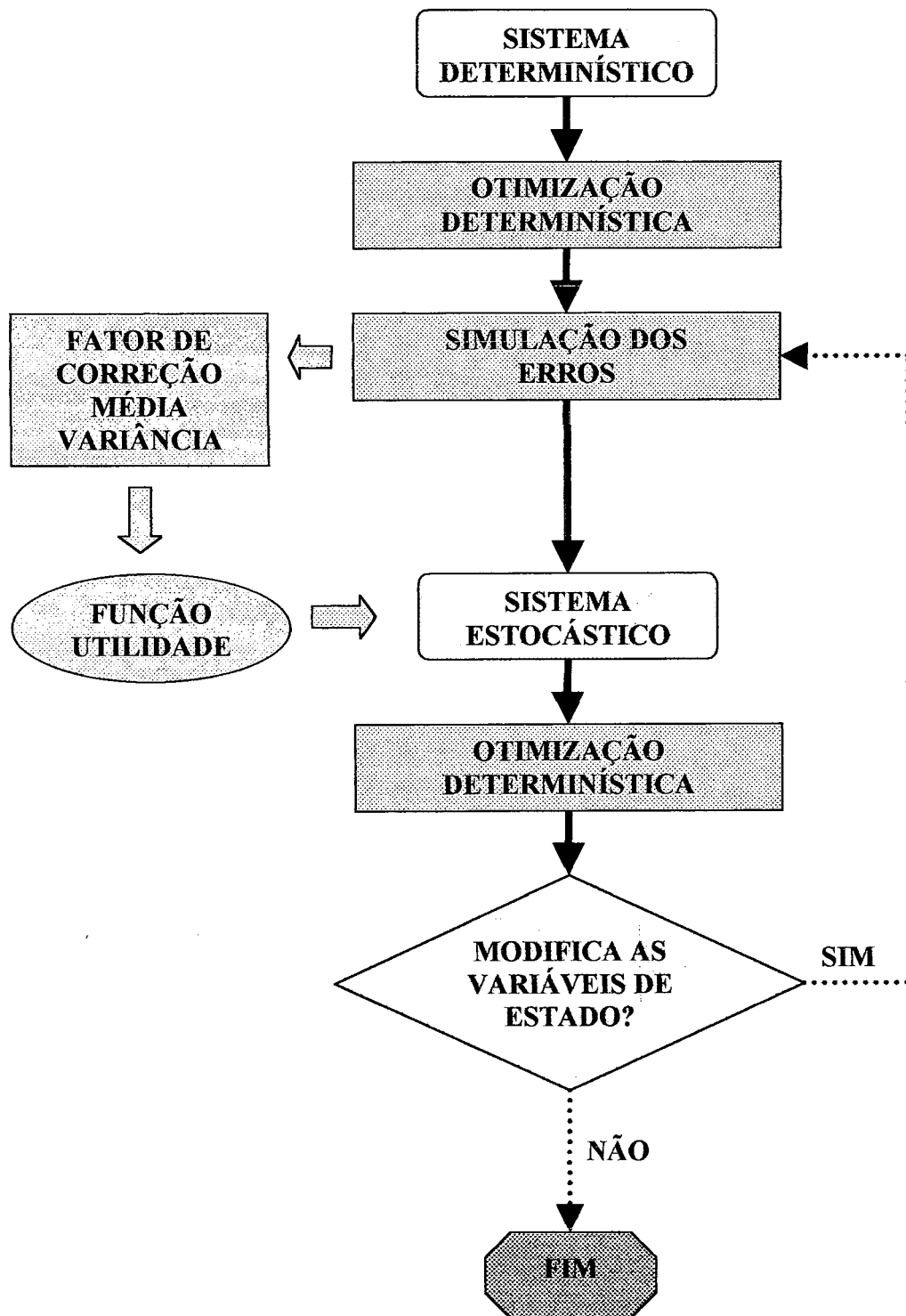
- a) Minimizar a função critério da equação (4.4.5) considerando o  $FC$ , a variância e o erro iguais a zero. Este procedimento encontra as variáveis ótimas determinísticas de controle e de estado;

- b) Utilizar os controles ótimos determinísticos do procedimento anterior e valores simulados para  $e$  (erro) para calcular a  $E(Y_i)$  e a  $Var(Y)$ . Com esse valor em mãos, encontra-se o valor de  $FC$ .

2° Passo:

- a) Com os valores calculados para  $FC$  e a variância (b - 1° Passo), repete-se a primeira etapa do 1° Passo (a). Com a nova minimização, encontram-se novas variáveis de controle ótimas (funciona como uma otimização determinística);
- b) Com os novos valores determinísticos, faz-se uma nova geração dos erros  $e$  para calcular a nova  $E(Y_i)$ , a nova  $Var(Y)$  e o novo  $FC$ .

Os passos se repetem até que as variáveis de estado entre um passo e outro tenham uma diferença ínfima, determinada pela pessoa que usa o algoritmo. Uma melhor apresentação do algoritmo encontra-se no quadro 4.1:



**Figura 4.1:** Fluxo de resolução do problema através do algoritmo.

**Quadro 4.1:** Um algoritmo para controle ótimo estocástico não-linear

PASSO	INSUMO	PROCEDIMENTO	PRODUTO
1 a.	$FC = 0$ $\sigma^2 = 0$ $e = 0$	Otimização	$X(1)_i^{DET}$ $Y(1)_i^{DET}$
2 b.	$X(1)_i^{DET}$ $e = \text{erro simulado}$	Simulação	$E(1)(Y_i)$ $\sigma(1)^2_i$ e $FC(1) = E(1)(Y_i) - Y(1)_i^{DET}$
2 a.	$FC(1)$ $\sigma(1)^2_i$ $e = 0$	Otimização	$X(2)_i^{DET}$ $Y(2)_i^{DET}$
2 b.	$X(2)_i^{DET}$ $e = \text{erro simulado}$	Simulação	$E(2)(Y_i)$ $\sigma(2)^2_i$ e $FC(2) = E(2)(Y_i) - Y(2)_i^{DET}$
3 a.	Igual a 2 a.		
3 b.	Igual a 2 b.		
....	<b>CRITÉRIO DE PARADA SATISFEITO</b>		

Fonte: Samohyl (1996).

O sistema interage entre duas complementaridades, otimização determinística e incorporação da parte estocástica com o uso de funções utilidades como a nova função critério adotada neste trabalho.

A figura 4.1 mostra que dada a montagem das relações matemáticas, o sistema, utiliza-se de técnicas de otimização para atingir a melhor regra, que depois, por processo de simulação dos erros, torna o sistema estocástico para uma nova otimização. Se a otimização for satisfatória, então ocorre o processo de parada. Caso contrário, novas simulações deverão preceder novas otimizações.

#### 4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os pontos abordados serão utilizados como ferramentas para montar toda a estrutura do trabalho aqui estudado. Deve-se, agora, partir para os resultados encontrados, onde, por vezes, serão detalhados alguns procedimentos.

Experiências iniciais se mostram bem satisfatórias em termos do algoritmo. No trabalho de Dantas (1999) ele se mostrou convergente rapidamente, utilizando a função utilidade quadrática, ou seja, com os dois primeiros momentos. Contudo, o problema agora envolve um planejamento para três produtos de uma única vez com um momento a mais na distribuição, a assimetria.

A nova configuração do problema de otimização, juntamente com a função critério, parece dar uma maior sustentabilidade para este progresso. Teoricamente, o trabalho evoluiu. Este é o desafio a ser aplicado no próximo capítulo desta tese.



## CAPÍTULO 5 – APLICAÇÃO EMPÍRICA: ESTUDO DE CASO

---

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo o objetivo é manusear os dados reais, apresentando seu desempenho no período de janeiro a dezembro de 1999, o que vai ser chamado neste trabalho de desempenho da fábrica. Alternativamente, serão apresentados os resultados através do modelo de otimização proposto para: 1) multiproduto de forma determinística – essa será chamada de regra de decisão determinística; 2) multiproduto de forma estocástica – essa será chamada de regra de decisão estocástica.

Nos dois casos haverá uma subdivisão do estudo: a) com previsão perfeita – usa-se os verdadeiros dados das vendas; b) com modelos mais tradicionais de previsão – usa-se o valor estimado para as vendas com funções do tipo médias móveis, Holt-Winters, alisamento exponencial simples etc.; c) modelos considerados mais sofisticados – usa-se os modelos ARIMA ( $p, d, q$ ).

A análise ocorrerá dentro do ano de 1999 para poder haver uma comparação. A planilha eletrônica do Excel se adaptou com muita facilidade para o desempenho dos cálculos aqui requisitados. A ferramenta *Solver* (ferramenta de otimização deste aplicativo) também se mostrou bastante eficaz na solução encontrada. Pela complexidade do sistema o computador deveria ter uma boa capacidade para processamento para convergir com maior rapidez para o ponto de ótimo.

### 5.2 DADOS

A análise será feita com dados reais coletados de uma indústria alimentícia que se situa no estado de Alagoas. Por questões profissionais ela será sempre denominada de empresa ALI Ltda., não sendo revelada a sua verdadeira identidade.

Alguns dados foram coletados com o departamento contábil e o departamento de produção, através de um levantamento de séries temporais. Outros, mais subjetivos, tiveram de ser deduzidos juntamente com a direção comercial, de vendas e de produção através da entrevista anteriormente mencionada. A apresentação do mesmo segue em tabela abaixo.

**Tabela 5.1: Dados coletados para estudo de caso.**

	Vendas			Produção			W	PDV	Estoque1	Estoque2	Estoque3	Atraso1	Atraso2	Atraso3
	Milharina	Café	Colorau	Milharina	Café	Colorau								
jan/96	401,09	250,93	54,80	376,00	385,57	90,40	265,66	2,66	137,95	221,48	18,77	0,00	0,00	10,43
fev/96	312,87	282,54	70,99	417,12	227,02	83,28	288,78	2,31	242,20	165,96	20,63	0,00	0,00	0,00
mar/96	424,86	378,96	64,34	235,82	290,29	62,75	264,46	3,28	53,16	77,29	27,85	0,00	0,00	8,81
abr/96	406,63	261,72	80,20	465,91	229,20	77,08	276,08	2,71	112,44	44,77	24,80	0,00	0,00	8,88
mai/96	326,29	346,31	66,16	254,17	311,66	78,49	319,61	2,31	40,32	10,12	38,48	0,00	0,00	10,23
jun/96	410,92	373,92	80,49	522,20	504,09	48,98	286,58	3,02	151,60	140,29	15,21	0,00	0,00	18,47
jul/96	359,96	334,20	67,24	378,67	299,91	76,96	286,01	2,66	170,31	106,00	13,92	0,00	0,00	7,46
ago/96	338,03	346,52	67,25	192,12	354,53	91,29	241,41	3,11	24,40	114,01	32,60	0,00	0,00	2,10
set/96	365,95	354,02	66,29	446,55	350,29	61,07	269,08	2,92	105,00	110,28	29,58	0,00	0,00	4,30
out/96	376,96	344,05	76,05	393,28	351,13	63,34	293,62	2,71	121,32	117,36	20,54	0,00	0,00	7,97
nov/96	559,45	343,19	71,10	552,43	261,13	69,31	281,03	3,46	114,30	35,30	26,19	0,00	0,00	15,41
dez/96	428,45	337,28	98,00	547,35	405,68	115,58	288,68	2,99	233,20	103,70	43,24	0,00	0,00	14,88
jan/97	494,69	296,93	82,28	426,06	219,27	63,84	263,96	3,31	164,57	26,04	16,34	0,00	0,00	6,42
fev/97	373,27	330,79	76,37	359,13	387,02	84,02	273,83	2,85	150,43	82,27	23,90	0,00	0,00	6,33
mar/97	393,12	329,85	72,99	423,13	400,08	67,62	303,05	2,63	180,44	152,50	12,20	0,00	0,00	0,00
abr/97	307,35	366,89	84,39	182,99	431,93	118,90	295,12	2,57	56,08	217,54	46,71	0,00	0,00	0,00
mai/97	422,15	319,26	71,50	400,99	182,19	29,02	272,15	2,99	34,92	80,47	11,10	0,00	0,00	6,87
jun/97	480,40	289,14	72,52	581,50	298,97	88,82	272,75	3,09	136,02	90,30	28,42	0,00	0,00	7,89
jul/97	449,91	300,13	86,91	468,86	428,74	83,46	281,81	2,97	154,97	218,91	26,00	0,00	0,00	8,92
ago/97	371,78	352,41	72,65	234,06	396,88	67,11	282,85	2,82	17,25	263,38	28,33	0,00	0,00	16,79
set/97	342,67	378,26	79,50	440,42	229,07	61,89	285,74	2,80	115,00	114,19	14,19	0,00	0,00	20,26
out/97	426,71	402,53	71,00	453,71	342,10	87,45	293,50	3,07	142,00	53,76	26,17	0,00	0,00	15,79
nov/97	423,82	406,33	87,90	417,82	478,82	93,36	272,39	3,37	136,00	126,25	30,12	0,00	0,00	14,28
dez/97	441,99	298,24	110,00	401,32	313,15	103,68	275,06	3,09	95,33	141,16	30,09	0,00	0,00	20,57
jan/98	408,69	299,67	77,30	356,74	345,18	82,08	260,68	3,01	43,38	186,67	21,23	0,00	0,00	6,93
fev/98	507,83	383,04	84,20	548,09	309,34	82,10	280,92	3,47	83,64	112,97	12,20	0,00	0,00	0,00
mar/98	387,85	323,65	79,50	388,54	401,94	71,63	309,17	2,56	84,33	191,26	16,15	0,00	0,00	11,82
abr/98	520,90	348,70	77,80	535,61	326,49	76,48	280,57	3,38	99,04	169,05	11,26	0,00	0,00	8,25
mai/98	402,87	392,09	79,97	439,68	363,75	85,09	266,03	3,29	135,85	140,71	22,58	0,00	0,00	14,45
jun/98	408,60	381,67	96,80	425,71	438,03	111,40	273,98	3,24	152,96	197,07	23,90	0,00	0,00	1,17
jul/98	521,12	317,50	85,40	502,51	139,38	59,78	271,56	3,40	134,35	18,95	12,53	0,00	0,00	15,42
ago/98	397,47	346,38	79,20	430,90	411,11	81,71	301,00	2,73	167,78	83,68	12,60	0,00	0,00	12,98
set/98	408,97	406,05	79,80	474,21	461,45	106,68	286,42	3,12	233,02	139,08	38,30	0,00	0,00	11,80
out/98	479,77	285,37	88,10	429,11	262,81	71,44	285,31	2,99	182,36	116,52	23,14	0,00	0,00	13,30
nov/98	429,48	352,49	92,20	290,47	332,81	82,58	301,00	2,90	250,00	189,00	50,00	0,00	0,00	16,15
dez/98	478,46	373,55	115,40	354,53	235,71	77,30	298,00	3,25	198,00	141,80	29,80	0,00	0,00	0,00
jan/99	406,15	337,08	85,30	356,69	299,81	75,05	278,00	2,98	148,58	104,51	19,50	0,00	0,00	0,00
fev/99	387,53	291,89	86,50	377,49	330,78	76,24	268,00	2,86	138,51	143,39	15,50	0,00	0,00	6,30
mar/99	365,26	356,39	85,56	368,78	402,53	79,40	245,00	3,29	142,01	189,50	23,10	0,00	0,00	20,10
abr/99	354,23	388,44	84,94	371,21	366,26	85,60	250,00	3,31	159,00	167,31	15,90	0,00	0,00	12,20
mai/99	401,25	289,35	66,74	418,04	290,07	100,50	276,00	2,74	175,80	168,03	37,50	0,00	0,00	0,00
jun/99	502,36	291,28	92,80	490,79	212,90	62,43	300,00	2,95	164,20	89,63	15,30	0,00	0,00	8,20
jul/99	448,75	323,71	90,64	414,30	298,60	79,50	297,00	2,91	129,70	64,50	16,20	0,00	0,00	20,20
ago/99	397,35	274,81	77,62	392,00	270,00	78,60	278,00	2,70	124,30	59,70	15,70	0,00	0,00	18,70
set/99	378,25	393,62	81,60	357,30	383,40	97,23	264,00	3,23	103,35	49,50	20,40	0,00	0,00	7,80
out/99	364,29	363,04	90,30	343,60	347,70	79,93	262,00	3,12	82,70	34,20	20,00	0,00	0,00	17,80
nov/99	433,25	365,85	95,50	378,40	381,90	101,50	289,00	3,10	27,80	50,20	21,80	0,00	0,00	13,60
dez/99	498,30	393,25	119,30	480,50	353,09	121,10	302,00	3,35	10,00	10,00	10,00	0,00	0,00	0,00

Os dados são em toneladas e cobrem o período de janeiro de 1996 até dezembro de 1999, perfazendo uma série histórica de 48 informações – produção, estoques, vendas, pedidos atrasados.

### 5.3 PERFORMANCE DA EMPRESA (PE)

A idéia deste trabalho também é tornar a regra de decisão a mais realista possível, para que possa ser aplicada no mundo empresarial. Partindo desse pressuposto, algumas novas relações para o sistema devem ser incorporadas, além das restrições já determinadas no capítulo 4.

O custo da folha de pagamento permanecerá o mesmo, sendo que o custo individual médio por trabalhador é  $C_{RP} = 641,8$ . Também permanecerão com as configurações anteriores o custo da demissão e da contratação, sendo que seus fatores são  $C_C = 400,00$  e  $C_D = 941,00$ . Esses valores, como já mencionados no capítulo 4, foram discutidos na empresa estudada.

O custo da hora extra assume a seguinte forma:

$$CHE_t = 1,5 * \frac{w}{TR_t} * HE_t \quad (5.2.1)$$

$$HE_t = SE(THPT_t - TRT_t > 0; THPT_t - TRT_t; 0) \quad (5.2.2)$$

onde,  $w = C_{RP} = 641,8$  e  $HE_t$ ,  $TR_t$ ,  $THPT_t$ ,  $TRT_t$  já foram citados no capítulo anterior.

A expressão  $w/TR_t$  em (5.2.1) representa o salário médio de cada hora utilizada de trabalho.

O fator 1,5 multiplicando  $w/TR_t$  indica que a hora extra deve representar 50% a mais que a hora normal, como determina a legislação trabalhista atual. As duas primeiras expressões representam o  $C_{HE}$ . Na equação (5.2.2) é implementada uma função lógica para garantir que

o total da produção transformado em horas menos o total de horas advindas do tempo regular seja positivo, o que se transforma em hora extra (caso contrário seria hora ociosa). O valor de  $A_i$ , na restrição 4, do capítulo 4, é igual a 2 (número máximo de hora extra permitida por trabalhador), pois é o que também é regulamentado por lei.

O custo da hora ociosa tenta seguir o mesmo raciocínio para ficar um tanto quanto simplificado:

$$CHO_t = \frac{w}{TR_t} * HO_t \quad (5.2.3)$$

$$HO_t = SE(TRT_t - THPT_t, > 0; TRT_t - THPT_t, 0) \quad (5.2.4)$$

O que foi pago e não trabalhado, também foi desperdiçado e se reverte em custos. Logicamente o cálculo do custo (5.2.3) já está indiretamente computado na folha de pagamento, porém o que se pretende é uma penalização extra para o não uso. A equação (5.2.4) é o contrário do que acontece em (5.2.2), lembrando que foram utilizadas funções separadas para garantir a positividade da variável.

O custo do estoque ( $INV$ ) é posto de uma forma não linear. Assim, para cada mês:

$$CINV_t = b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n X_i - b_2 \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 + b_3 \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^3 + r \left( \sum_{i=1}^n X_i p_i \right) \quad (5.2.5)$$

onde,

$CINV_t$  = custo do inventário no período  $t$ ;

$b_0$  = 1.000 = aluguel pago pelo galpão;

$b_1$  = 150 = estimador do parâmetro;

$b_2$  = 1,9 = estimador do parâmetro;

$b_3$  = 0,015 = estimador do parâmetro;

$X_i$  = estoque físico do produto  $i$ , no período  $t$ ;

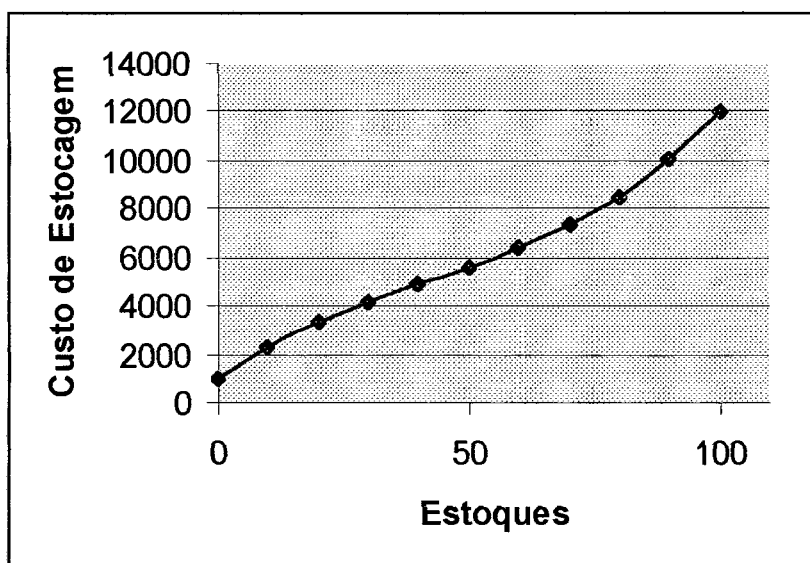
$r = 0,02 = 2\%$  = taxa de retorno no mercado para esta empresa;

$p_i$  = preço do produto  $i$  no período  $t$ , em toneladas;

$n$  = número de produtos planejados;

Para este estudo existem três produtos: farinha de milho ( $P_1$ ), café ( $P_2$ ) e colorau ( $P_3$ ), sendo seus valores médios respectivos, para o ano de 1999, R\$ 1,50, R\$ 4,00 e R\$ 1,10 o quilograma, ou seja, R\$ 1.500,00, R\$ 4.000,00 e R\$ 1.100,00 a tonelada, respectivamente.

Assim, assumindo esse comportamento, os custos de estocagem se comportam como no gráfico abaixo:



**Figura 5.1:** Formato da curva de custo para estocagem.

Logicamente, o custo total de estocagem é:

$$CINV_T = \sum_{t=1}^m CINV_t$$

onde  $m$  = período de planejamento, ou ainda, horizonte de planejamento.

Mais duas relações lineares se seguem, a dos custos de atrasos ( $BO_t$ ) e a dos custos de Produção ( $CMP_t$ ).

$$CBO_t = \sum_{i=1}^n BO_i * p_i \quad (5.2.6)$$

$$CMP_t = \sum_{i=1}^n P_i * C_{MP_i} \quad (5.2.7)$$

Todas as variáveis destas duas equações já foram em algum momento identificadas. Basta aqui dizer que se existem três variáveis de produção para o planejamento, existirão também três  $C_{MP_i}$  = custos da matéria-prima, sendo o primeiro 0,90, o segundo 2,40 e o terceiro 0,66 para cada quilo fabricado. Note que os valores equivalem a 60% do preço de venda do quilo. Não implica em lucros de 40%, pois ainda não foram incorporados os outros custos. Esses valores também foram identificados na empresa, na coleta dos dados.

Considerações finais devem ser feitas para começar a análise. O primeiro ponto é que um valor foi definido para os atrasos dos três produtos, no fim do horizonte de planejamento. Essa medida foi tomada visando garantir a própria política da empresa. O valor definido para cada atraso no fim do período é de 0 toneladas.

A produtividade média considerada para o problema foi de 2,7, de acordo com o histórico de trabalho da empresa. Considerou-se aqui a mão-de-obra polivalente. Segundo Tubino (1997), no mundo dos negócios modernos o sistema de produção deve se mostrar bastante flexível para enfrentar a competição que o espera. Logo, espera-se que a mão-de-obra seja o mais flexível de todos os fatores produtivos utilizados em questão.

O *setup* para este trabalho não existe, pois os produtos possuem linha de produção independente só escalonando a mão-de-obra. Sendo assim, seu custo é zero e as restrições 5 e 6 do capítulo 4 ficam nulas.

As restrições da empresa para a capacidade de produção são: 650 toneladas/mês para a farinha de milho, 600 toneladas/mês para o café e 200 toneladas/mês para o colorau. A capacidade de estocagem do armazém alugado é de 100 toneladas de qualquer produto. Esses dados foram passados pela gerência de produção da ALI Ltda. A regra será definida pela maximização do lucro total bruto (receita total bruta – vendas vezes preço – menos custo total bruto – somatório de todos os custos considerados em todos os períodos).

#### 5.4 PERFORMANCE DA EMPRESA (PE) X REGRA DE DECISÃO DETERMINÍSTICA (RDD) COM PREVISÃO PERFEITA (PP)

As duas primeiras tabelas apresentadas a seguir representam a *PE* da empresa com previsão perfeita, a qual foi levantada com o verdadeiro conjunto de dados para o ano de 1999. Os custos foram calculados conforme as equações definidas, as quais exprimem os relatórios e os critérios adotados pela empresa.

**Tabela 5.2:** Performance da empresa com previsão perfeita.

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	406,2	337,1	85,3	441,2	376,3	100,0	338,0	25,0	50,0	25,0	17,0	8,0	5,5	322,3	0,0
fev/99	387,5	291,9	86,5	387,5	299,9	82,2	301,0	25,0	50,0	25,0	17,0	0,0	9,8	0,0	2677,4
mar/99	365,3	356,4	85,6	378,8	356,4	89,4	312,0	25,0	50,0	25,0	3,5	0,0	6,0	0,0	1321,5
abr/99	354,2	388,4	84,9	357,7	376,3	88,6	305,0	25,0	50,0	25,0	0,0	12,2	2,3	0,0	59,3
mai/99	401,3	289,4	66,7	401,3	300,1	69,0	298,0	25,0	50,0	25,0	0,0	1,5	0,0	0,0	2336,1
jun/99	502,4	291,3	92,8	490,8	277,9	82,4	312,0	25,0	50,0	25,0	11,6	14,9	10,4	592,2	0,0
jul/99	448,8	323,7	90,6	444,3	328,6	89,5	317,0	25,0	50,0	25,0	16,1	10,0	11,5	468,8	0,0
ago/99	397,4	274,8	77,6	412,0	280,0	78,6	308,0	25,0	50,0	25,0	1,5	4,8	10,5	0,0	4341,3
set/99	378,3	393,6	81,6	367,3	393,4	92,1	315,0	25,0	50,0	25,0	12,5	5,0	0,0	153,3	0,0
out/99	364,3	363,0	90,3	363,6	368,0	79,9	299,0	25,0	50,0	25,0	13,2	0,0	10,4	281,3	0,0
nov/99	433,3	365,9	95,5	437,5	365,9	101,5	336,0	25,0	50,0	25,0	9,0	0,0	4,4	0,0	152,6
dez/99	498,3	393,3	119,3	507,3	393,3	123,7	376,0	25,0	50,0	25,0	0,0	0,0	0,0	657,6	0,0

**Tabela 5.3:** Custos da performance da empresa com previsão perfeita.

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO	
jan/99	216928	15200	0	1724	0	17300	76260	1366116	1693528	2051391	357862	
fev/99	193182	0	34817	0	10228	17300	43536	1122815	1421879	1844039	422160	
mar/99	200242	4400	0	0	4241	17300	14220	1255248	1495650	2067569	571919	
abr/99	195749	0	6587	0	216	17300	61596	1283457	1564905	2178557	613652	
mai/99	191256	0	6587	0	8148	17300	7200	1126833	1357325	1832687	475362	
jun/99	200242	5600	0	3098	0	17300	106128	1163048	1495416	2020752	525336	
jul/99	203451	2000	0	2303	0	17300	92160	1247543	1564756	2067710	502954	
ago/99	197674	0	8469	0	14512	17300	39600	1094631	1372186	1780650	408464	
set/99	202167	2800	0	802	0	17300	46500	1335471	1605040	2231655	626615	
out/99	191898	0	15056	1505	0	17300	37488	1263185	1526432	2097959	571527	
nov/99	215645	14800	0	0	556	17300	22008	1338863	1609173	2218347	609175	
dez/99	241317	16000	0	3230	0	17300	0	1482019	1759866	2451692	691826	
<b>TOTAL</b>										18466156	24843008	6376852

Também com previsão perfeita, seguem nas tabelas abaixo os resultados referentes à otimização. O fato é que como em Dantas (1999) e diferentemente dos outros estudos citados neste trabalho, as variáveis de controle, ou seja, aquelas que formarão a regra de decisão, são produção, trabalho, estoques e atrasos (uma regra específica para cada produto, excluindo o nível de trabalho por ser considerado polivalente).

**Tabela 5.4:** Regra de decisão determinística com previsão perfeita.

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	406,2	337,1	85,3	433,2	334,3	80,5	310,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	621,3	0,0
fev/99	387,5	291,9	86,5	397,6	292,8	109,0	296,1	10,2	1,0	22,6	0,1	0,0	0,0	0,0	5,9
mar/99	365,3	356,4	85,6	364,0	356,6	78,9	296,1	8,8	1,2	15,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
abr/99	354,2	388,4	84,9	345,4	387,6	69,3	297,2	0,2	0,3	0,3	0,2	0,0	0,0	1,7	0,0
mai/99	401,3	289,4	66,7	409,6	289,7	131,5	307,0	8,4	0,7	65,0	0,0	0,0	0,0	123,8	0,0
jun/99	502,4	291,3	92,8	502,4	291,1	44,4	307,0	8,6	0,5	16,6	0,2	0,0	0,0	614,0	0,0
jul/99	448,8	323,7	90,6	440,0	323,3	74,1	307,0	0,1	0,1	0,1	0,4	0,0	0,0	614,0	0,0
ago/99	397,4	274,8	77,6	409,2	275,7	117,9	297,3	11,5	0,9	40,4	0,0	0,0	0,0	0,0	2,5
set/99	378,3	393,6	81,6	367,5	393,2	42,0	297,3	0,8	0,5	0,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
out/99	364,3	363,0	90,3	363,9	362,7	89,9	302,4	0,3	0,2	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
nov/99	433,3	365,9	95,5	448,5	366,2	125,0	348,0	15,6	0,6	29,9	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
dez/99	498,3	393,3	119,3	482,8	392,7	89,5	353,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	707,6	0,0



Tabela 5.5: Custos da regra de decisão determinística com previsão perfeita.

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO
jan/99	216928	15200	0	1724	0	17300	76260	1366116	1693528	2051391	357862
fev/99	193182	0	34817	0	10228	17300	43536	1122815	1421879	1844039	422160
mar/99	200242	4400	0	0	4241	17300	14220	1255248	1495650	2067569	571919
abr/99	195749	0	6587	0	216	17300	61596	1283457	1564905	2178557	613652
mai/99	191256	0	6587	0	8148	17300	7200	1126833	1357325	1832687	475362
jun/99	200242	5600	0	3098	0	17300	106128	1163048	1495416	2020752	525336
jul/99	203451	2000	0	2303	0	17300	92160	1247543	1564756	2067710	502954
ago/99	197674	0	8469	0	14512	17300	39600	1094631	1372186	1780650	408464
set/99	202167	2800	0	802	0	17300	46500	1335471	1605040	2231655	626615
out/99	191898	0	15056	1505	0	17300	37488	1263185	1526432	2097959	571527
nov/99	215645	14800	0	0	556	17300	22008	1338863	1609173	2218347	609175
dez/99	241317	16000	0	3230	0	17300	0	1482019	1759866	2451692	691826
<b>TOTAL</b>									<b>17421921</b>	<b>24843008</b>	<b>7421087</b>

Pode-se notar, pela comparação das tabelas 5.2 a 5.5 que, como esperado, as regras definidas para as quatro variáveis de controle são diferentes. O fato mais relevante, na diferença desses dois sistemas, é que o nível de estoques não está mais rígido e os atrasos praticamente se anularam na *RDD*. Sendo assim, libera um pouco de custos, o que eleva os lucros da *RDD* em relação a *PE*.

No estoque, a *RDD* é muito variável chegando a períodos até mesmo de estoques nulo. Não existe muito problema em estoques nulos, contudo demanda uma boa programação nos planos mais detalhados de fabricação (por exemplo, filosofia *just-in-time*). A *RDD*, porém, é maleável e aceitaria sem nenhum problema mais uma restrição, a qual determinaria um estoque mínimo (estoque de segurança).

O nível de trabalho em *PE* varia de período a período, seja contratando ou demitindo pessoas. O nível de trabalho em *RDD* procura agrupar alguns períodos com o mesmo nível de mão-de-obra. No mundo real, é preciso entender se essa mão-de-obra é muito especializada ou não. Caso sim, é preciso estimar melhor os custos adotados pela empresa e pela otimização, se bem que a *PE* e *RDD* parecem já mostrar isso.

Os atrasos são aceitos na *PE*, porém a *RDD* não sugere a prática dessa política. De fato, não parece muito lógico ter estoques e atrasos ao mesmo tempo como ocorre com o desempenho da empresa.

Os custos, a receita e o lucro são apresentados na tabela 5.3.5, mostrando o melhor desempenho para a regra de decisão linear *RDD* proposta para este trabalho. A regra de decisão determinística proporciona um montante de lucro 16,38% superior ao desempenho da empresa.

**Tabela 5.6:** Comparação dos desempenhos da *PE* e *RDD* com previsão perfeita

	<b>CT</b>	<b>RT</b>	<b>LT</b>
<b>PE</b>	100,00%	100,00%	100,00%
<b>RDD</b>	94,35%	100%	116,38%

### **5.5 REGRA DE DECISÃO DETERMINÍSTICA (*RDD*) COM PREVISÃO IMPERFEITA (*PI*)**

O próximo passo é incorporar uma previsão para as vendas através de um dos métodos propostos no capítulo 3. Assim, pode-se testar a robustez de cada equação de previsão e definir qual delas deve ser usada para a regra estocástica.

As tabelas abaixo trazem os resultado da regra de decisão determinística com a previsão obtida pelos modelos considerados tradicionais no uso industrial: alisamento exponencial simples (*SES*); Holt; Holt-Winters; Médias Móveis (*MA*); Médias Móveis Ponderadas (*WMA*).

**Tabela 5.7:** Regra de decisão determinística com *SES*.

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	451,8	353,8	95,3	478,8	351,0	90,5	337,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	674,2	0,0
fev/99	438,1	348,8	92,3	438,1	348,8	92,3	321,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	643,6	0,0
mar/99	423,0	331,7	90,5	423,5	334,9	91,1	311,5	0,5	3,2	0,6	0,0	0,0	0,0	623,0	0,0
abr/99	405,6	339,1	89,0	405,1	357,0	88,5	311,5	0,0	21,2	0,0	0,0	0,0	0,0	623,0	0,0
mai/99	390,2	353,9	87,8	390,4	332,8	102,9	302,6	0,1	0,0	15,1	0,0	0,0	0,0	605,3	0,0
jun/99	393,5	334,5	81,5	404,3	338,4	75,1	302,6	10,9	3,9	8,6	0,0	0,0	0,0	45,1	0,0
jul/99	426,2	321,6	84,9	430,7	318,5	76,2	302,6	15,4	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	605,3	0,0
ago/99	433,0	322,2	86,6	417,5	321,4	86,6	302,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	605,3	0,0
set/99	422,3	308,0	83,9	422,3	309,0	84,5	302,1	0,0	1,0	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
out/99	409,1	333,7	83,2	409,4	332,7	82,7	302,1	0,3	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	604,3	0,0
nov/99	395,6	342,5	85,3	395,5	343,9	85,3	305,4	0,2	1,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
dez/99	406,9	349,5	88,4	406,7	348,1	88,4	309,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	618,3	0,0

**Tabela 5.8:** Custos da regra de decisão determinística com *SES*.

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO
jan/99	216348	14838	0	3606	0	1000	0	1332994	1568786	2197636	628850
fev/99	206523	0	14405	3688	0	1000	0	1292258	1517874	2153763	635889
mar/99	199931	0	9666	2999	0	1898	0	1245075	1459568	2060845	601277
abr/99	199931	0	0	3408	0	5157	0	1279923	1488420	2062862	574443
mai/99	194226	0	8365	3167	0	3227	0	1217820	1426805	2097571	670766
jun/99	194225	0	0	236	0	4484	0	1225553	1424500	2018106	593606
jul/99	194225	0	0	2973	0	3516	0	1202301	1403015	2018900	615885
ago/99	194225	0	0	3035	0	1000	0	1204423	1402683	2033543	630859
set/99	193904	0	472	0	0	1322	0	1177377	1373075	1957675	584600
out/99	193904	0	0	3232	0	1071	0	1221494	1419700	2039869	620169
nov/99	196034	1327	0	0	0	1358	0	1237615	1436334	2057296	620962
dez/99	198404	1477	0	3037	0	1000	0	1259785	1463702	2105611	641909
<b>TOTAL</b>									17384462	24803677	7419215

**Tabela 5.9:** Regra de decisão determinística com modelo Holt.

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	471,5	345,8	92,3	498,5	343,0	146,5	361,9	0,0	0,0	59,0	0,0	0,0	0,0	723,8	0,0
fev/99	460,1	335,6	93,1	460,1	335,6	34,1	312,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	904,9
mar/99	441,5	317,9	93,4	441,5	317,9	93,4	312,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	625,4	0,0
abr/99	415,6	311,9	92,8	415,6	311,9	92,8	300,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	600,9	0,0
mai/99	385,7	316,7	91,6	385,7	316,7	91,6	290,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	581,8	0,0
jun/99	364,9	308,5	86,4	364,9	308,5	86,4	278,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	556,7	0,0
jul/99	368,6	299,8	84,9	368,6	299,8	84,9	276,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	552,4	0,0
ago/99	373,8	297,4	83,8	373,8	297,4	83,8	276,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	553,6	0,0
set/99	375,5	288,3	81,0	375,5	288,3	81,0	272,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	545,8	0,0
out/99	375,4	301,5	79,0	375,4	301,5	79,0	276,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	553,7	0,0
nov/99	372,8	315,8	79,0	372,8	315,8	79,0	281,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	562,3	0,0
dez/99	382,9	333,5	81,0	382,9	333,5	81,0	292,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	584,7	0,0

**Tabela 5.10:** Custos da regra de decisão determinística com modelo Holt.

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO	
jan/99	232279	24767	0	3871	0	7617	0	1368594	1637130	2192045	554915	
fev/99	200702	0	46298	0	3457	1000	0	1242009	1493466	2134942	641475	
mar/99	200702	0	0	3011	0	1000	0	1221979	1426692	2036632	609940	
abr/99	192815	0	11564	3287	0	1000	0	1183975	1392640	1973291	580651	
mai/99	186684	0	8989	3044	0	1000	0	1167514	1367231	1945857	578626	
jun/99	178655	0	11772	2913	0	1000	0	1125837	1320176	1876394	556218	
jul/99	177263	0	2042	2713	0	1000	0	1107406	1290423	1845676	555253	
ago/99	177642	236	0	2776	0	1000	0	1105625	1287279	1842709	555429	
set/99	175159	0	3640	2856	0	1000	0	1083448	1266103	1805747	539643	
out/99	177691	1578	0	2962	0	1000	0	1113548	1296778	1855913	559135	
nov/99	180427	1705	0	3075	0	1000	0	1145687	1331894	1909478	577584	
dez/99	187638	4495	0	2872	0	1000	0	1198514	1394519	1997523	603004	
<b>TOTAL</b>										16504332	23416207	6911874

**Tabela 5.11:** Regra de decisão determinística com modelo Holt-Winters.

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	401,1	298,9	75,3	428,1	296,1	70,5	294,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
fev/99	311,3	384,1	89,3	311,3	384,1	89,3	294,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	620,2
mar/99	344,5	368,3	83,7	344,5	368,3	83,7	295,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
abr/99	379,7	333,9	101,0	379,7	333,9	101,0	301,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
mai/99	322,7	417,6	85,5	322,7	417,6	85,5	305,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
jun/99	432,0	352,8	82,7	432,0	352,8	82,7	317,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	635,7	0,0
jul/99	503,2	281,2	76,7	503,2	281,2	76,7	317,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	217,0	0,0
ago/99	407,8	322,4	76,5	407,8	322,4	76,5	298,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
set/99	437,3	285,8	77,8	437,3	285,8	77,8	298,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	394,2
out/99	468,1	289,8	86,1	468,1	289,8	86,1	312,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
nov/99	467,5	362,5	93,1	467,5	362,5	93,1	338,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	676,1	0,0
dez/99	414,3	343,2	124,6	414,3	343,2	124,6	326,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

**Tabela 5.12:** Custos da regra de decisão determinística com modelo Holt-Winters.

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO	
jan/99	188892	0	5348	0	0	1000	0	1142338	1337578	1879876	542298	
fev/99	188892	0	1	0	2369	1002	0	1260985	1453249	2101624	648374	
mar/99	189342	281	0	0	0	1000	0	1249253	1439877	2082107	642231	
abr/99	193626	2670	0	0	0	1000	0	1209721	1407017	2016201	609184	
mai/99	196303	1668	0	0	0	1002	0	1349205	1548179	2248657	700478	
jun/99	203996	4794	0	3326	0	1000	0	1290166	1503282	2150295	647013	
jul/99	203996	0	0	1066	0	1000	0	1178500	1384561	1964166	579605	
ago/99	191762	0	17937	0	0	1000	0	1191299	1401999	1985499	583501	
set/99	191758	0	5	0	1375	1002	0	1130824	1324964	1884689	559724	
out/99	200623	5525	0	0	0	1002	0	1173628	1380777	1956046	575269	
nov/99	216958	10181	0	3698	0	1000	0	1352134	1583970	2253575	669604	
dez/99	209697	0	10645	0	0	1000	0	1278850	1500192	2131416	631224	
<b>TOTAL</b>										17265647	24654151	7388504

**Tabela 5.13: Regra de decisão determinística com modelo MA(2).**

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	454,0	363,0	103,8	481,0	360,2	99,0	344,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	688,8	0,0
fev/99	442,3	355,3	100,4	442,3	355,3	100,4	328,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	657,3	0,0
mar/99	396,8	314,5	85,9	396,8	314,5	85,9	295,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
abr/99	376,4	324,1	86,0	376,4	324,1	86,0	295,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	694,3
mai/99	359,7	372,4	85,3	359,7	372,4	85,3	299,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	599,0	0,0
jun/99	377,7	338,9	75,8	377,7	338,9	75,8	290,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	580,7	0,0
jul/99	451,8	290,3	79,8	451,8	290,3	79,8	301,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	602,7	0,0
ago/99	475,6	307,5	91,7	475,6	307,5	91,7	320,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	641,3	0,0
set/99	423,1	299,3	84,1	423,1	299,3	84,1	298,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
out/99	387,8	334,2	79,6	387,8	334,2	79,6	298,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	321,7
nov/99	371,3	378,3	86,0	371,3	378,3	85,9	306,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	612,0	0,0
dez/99	398,8	364,5	92,9	398,8	364,5	92,9	313,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	627,8	0,0

**Tabela 5.14: Custos da regra de decisão determinística com modelo MA(2).**

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO	
jan/99	221031	17757	0	3684	0	1000	0	1362747	1606220	2247225	641006	
fev/99	210942	0	14792	3767	0	1002	0	1317080	1547584	2195115	647532	
mar/99	189503	0	31435	0	0	1000	0	1168618	1390555	1947715	557160	
abr/99	189503	0	0	0	2532	1000	0	1173482	1366517	1955804	589287	
mai/99	192215	1691	0	3134	0	1002	0	1273849	1471891	2123063	651172	
jun/99	186347	0	8604	3038	0	1000	0	1203362	1402351	2005622	603271	
jul/99	193393	4391	0	2960	0	1000	0	1156032	1357776	1926720	568943	
ago/99	205794	7729	0	3216	0	1000	0	1226539	1444278	2044231	599953	
set/99	191697	0	20669	0	0	1002	0	1154519	1367887	1924180	556292	
out/99	191697	0	0	0	1147	1002	0	1203692	1397538	2006153	608615	
nov/99	196382	2920	0	3347	0	1000	0	1298873	1502522	2164807	662285	
dez/99	201448	3158	0	3083	0	1000	0	1294892	1503582	2158153	654572	
<b>TOTAL</b>										17358699	24698787	7340088

**Tabela 5.15: Regra de decisão determinística com modelo WMA(2).**

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	457,4	364,5	105,4	484,4	361,7	100,6	346,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	693,6	0,0
fev/99	437,2	352,8	98,2	437,2	352,8	98,2	325,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	650,2	0,0
mar/99	395,5	311,3	86,0	395,5	311,3	86,0	293,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
abr/99	374,8	328,7	86,0	374,8	328,7	86,0	293,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	219,9
mai/99	359,0	374,7	85,2	359,0	374,7	85,2	300,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	600,0	0,0
jun/99	381,0	332,0	74,6	381,0	332,0	74,6	288,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	577,1	0,0
jul/99	458,9	290,5	81,6	458,9	290,5	81,6	304,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	609,3	0,0
ago/99	471,8	309,8	91,6	471,8	309,8	91,6	320,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	640,1	0,0
set/99	419,5	295,8	83,2	419,5	295,8	83,2	299,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	704,8
out/99	386,5	342,5	79,9	386,5	342,5	79,9	299,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
nov/99	370,3	376,2	86,6	370,3	376,2	86,6	305,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	610,1	0,0
dez/99	403,6	364,6	93,3	403,6	364,6	93,3	315,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	631,7	0,0

**Tabela 5.16:** Custos da regra de decisão determinística com modelo WMA(2).

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO	
jan/99	222566	18713	0	3709	0	1000	0	1370443	1616431	2260051	643620	
fev/99	208659	0	20390	3726	0	1002	0	1305008	1538784	2174994	636210	
mar/99	188461	0	29614	0	0	1000	0	1159909	1378984	1933200	554216	
abr/99	188460	0	2	0	802	1000	0	1182871	1373134	1971451	598317	
mai/99	192551	2550	0	3139	0	1002	0	1278510	1477753	2130832	653079	
jun/99	185190	0	10792	3019	0	1000	0	1188836	1388838	1981411	592574	
jul/99	195520	6438	0	2993	0	1000	0	1163931	1369880	1939884	570004	
ago/99	205410	6164	0	3210	0	1000	0	1228511	1444295	2047518	603223	
set/99	192270	0	19266	0	2459	1002	0	1142463	1357459	1904086	546627	
out/99	192276	3	0	0	0	1002	0	1222634	1415915	2037723	621808	
nov/99	195792	2192	0	3337	0	1000	0	1293258	1495579	2155448	659869	
dez/99	202716	4316	0	3103	0	1000	0	1299948	1511083	2166580	655498	
<b>TOTAL</b>										17368135	24703179	7335044

Algumas técnicas são consideradas menos tradicionais dentro das empresas, para prever a demanda futura dos seus produtos. Porém, estas técnicas podem significar alguns ganhos de informações para a empresa. Modelos econométricos ou de séries de tempos são os mais difundidos no meio acadêmico para a incrementação desse possível ganho. Nesta tese, será utilizado o modelo ARIMA ( $p,d,q$ ) como um método alternativo de previsão de vendas.

1) Demanda da Farinha de Milho –  $D_{1t}$ : (5.4.1)

$$D_{1t} = -0,30685D_{t-12} + 569,94Jan + 545Fev + 505,41Mar + 520,47Abr + 526,52Mai \\ + 596,75Jun + 609,41Jul + 502,12Ago + 490,94Set + 554,87Out + 573,35Nov \\ + 610,89Dez + e_t \\ e_t \cong N(0,47,73)$$

2) Demanda do Café –  $D_{2t}$ : (5.4.2)

$$D_{2t} = -0,53632D_{t-5} + 498,11Jan + 538,75Fev + 521,12Mar + 565,03Abr + 513,97Mai \\ + 487,62Jun + 493,58Jul + 505,08Ago + 590,03Set + 529,22Out + 546,89Nov \\ + 52,31Dez + e_t \\ e_t \cong N(0,34,15)$$

3) Demanda do Colorau –  $D_{3t}$ : (5.4.3)

$$D_{3t} = 0,32729D_{t-3} + 0,33306D_{t-4} + 0,23053D_{t-10} + 14,267Jan + 10,217Fev + 17,138Jun \\ + 16,925Jul + 7,174Ago + 8,175Set + 18,822Nov + 44,158Dez + e_t$$

$$e_t \equiv N(0;5,078)$$

Esses são modelos ARIMA ( $p, d, q$ ) com sazonalidade incluída em variáveis *dummy* (binárias). Os testes e as outras estatísticas constam em anexo no fim deste trabalho. A demanda por farinha de milho é da ordem (12, 0, 0), a do café é da ordem (5, 0, 0) e a do colorau é da ordem (10, 0, 0) o que tornam esses modelos todos apenas autoregressivos ou AR( $p$ ) com sazonalidade.

Tabela 5.17: Regra de decisão determinística com ARIMA.

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	463,0	300,0	89,4	490,0	297,2	84,6	319,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	638,8	0,0
fev/99	392,9	335,2	89,1	399,2	335,9	103,5	310,6	6,4	0,8	14,5	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
mar/99	396,6	374,0	89,0	390,3	373,2	74,5	310,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0
abr/99	366,7	369,9	90,8	366,9	370,2	91,0	310,4	0,2	0,3	0,3	0,1	0,0	0,0	0,0	649,8
mai/99	404,2	325,4	77,7	410,5	325,7	116,1	312,3	6,5	0,6	38,7	0,0	0,0	0,0	624,6	0,0
jun/99	455,2	314,3	91,9	459,8	314,2	78,3	312,3	11,2	0,5	25,1	0,1	0,0	0,0	624,6	0,0
jul/99	451,9	344,2	92,3	440,8	343,8	67,3	312,3	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	624,6	0,0
ago/99	372,3	333,3	77,2	386,8	334,1	80,4	296,8	14,5	0,8	3,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
set/99	360,0	375,5	81,5	346,3	375,2	79,0	296,8	0,8	0,5	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	47,6
out/99	430,7	380,0	87,8	430,3	379,7	87,5	332,4	0,5	0,3	0,5	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
nov/99	444,6	403,4	93,4	444,1	403,1	92,9	344,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	688,6	0,0
dez/99	447,7	327,8	115,2	447,7	327,8	115,3	329,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

**Tabela 5.18:** Custos da regra de decisão determinística com ARIMA.

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO
jan/99	204977	7751	0	3416	0	1021	19	1210255	1427440	1992840	565400
fev/99	199346	0	8256	0	0	4080	185	1233839	1445705	2028160	582455
mar/99	199210	0	199	1	0	1000	27	1296185	1496621	2188800	692179
abr/99	199209	0	0	0	2370	1152	179	1278736	1481647	2129530	647883
mai/99	200427	759	0	3268	0	6415	37	1227762	1438667	1993370	554703
jun/99	200429	2	0	3268	0	5616	119	1219599	1429032	2041090	612058
jul/99	200429	0	0	3068	0	1028	129	1266144	1470797	2156180	685383
ago/99	190467	0	14606	0	0	3800	42	1202964	1411879	1976570	564691
set/99	190467	0	0	0	166	1396	2	1264370	1456401	2131650	675249
out/99	213353	14264	0	0	0	1228	44	1356410	1585298	2262630	677332
nov/99	220970	4747	0	3767	0	1000	70	1428550	1659104	2383240	724136
dez/99	211749	0	13520	0	0	1015	0	1265800	1492084	2109470	617386
<b>TOTAL</b>									<b>17794678</b>	<b>25393530</b>	<b>7598852</b>

Os custos fornecidos anteriormente (tabelas 5.8, 5.10, 5.12, 5.14, 5.16 e 5.18) estão, tecnicamente, próximos. Logicamente, suas variações são em função das variações nas previsões e na mudança de regras para as variáveis de controle.

Assim, as regras para produção, estoques, atrasos e trabalho, apresentadas nas tabelas acima, 5.7, 5.9, 5.11, 5.13, 5.15 e 5.17, precisam ser analisadas com maior atenção para todos os modelos de previsões sugeridos, pois elas podem identificar qual modelo deve se ajustar melhor. A melhor forma de procurar o melhor modelo é comparar a regra vinda das previsões com a regra das verdadeiras vendas. Os gráficos abaixo demonstram essas comparações. Cada gráfico representa a comparação da regra individual de cada variável de controle, para facilitar a conclusão.



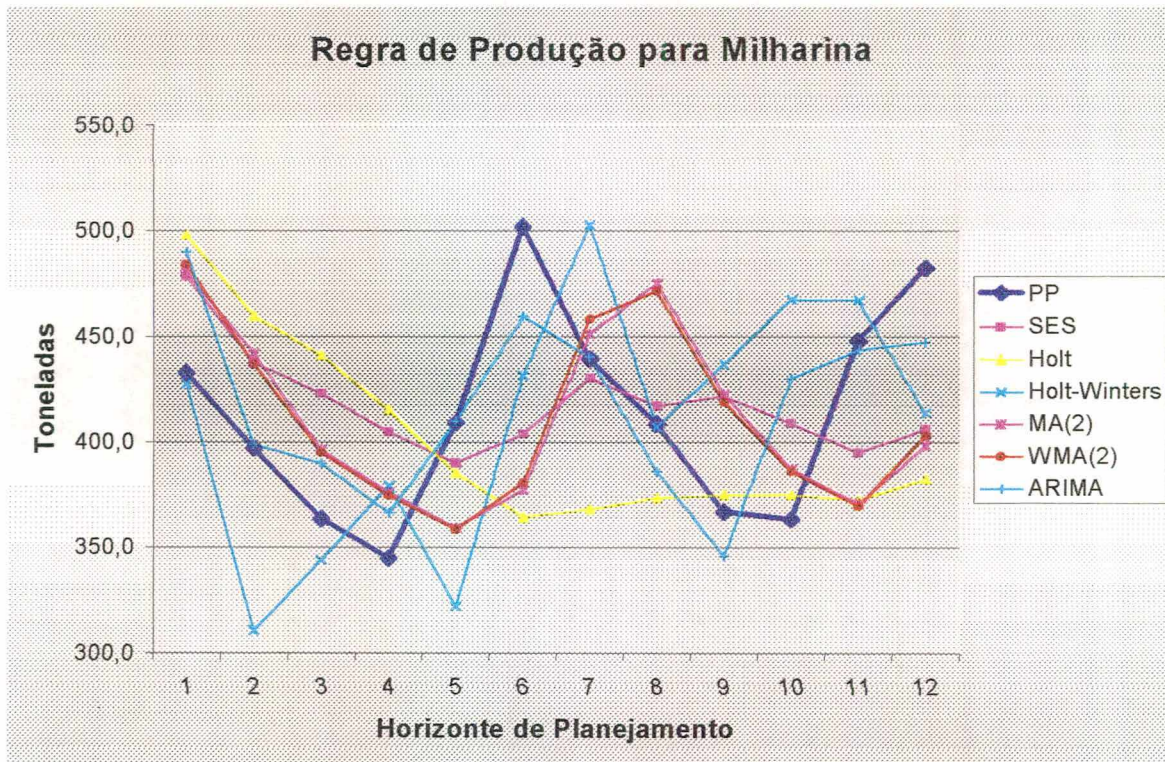


Figura 5.2: Regra de produção para milho.

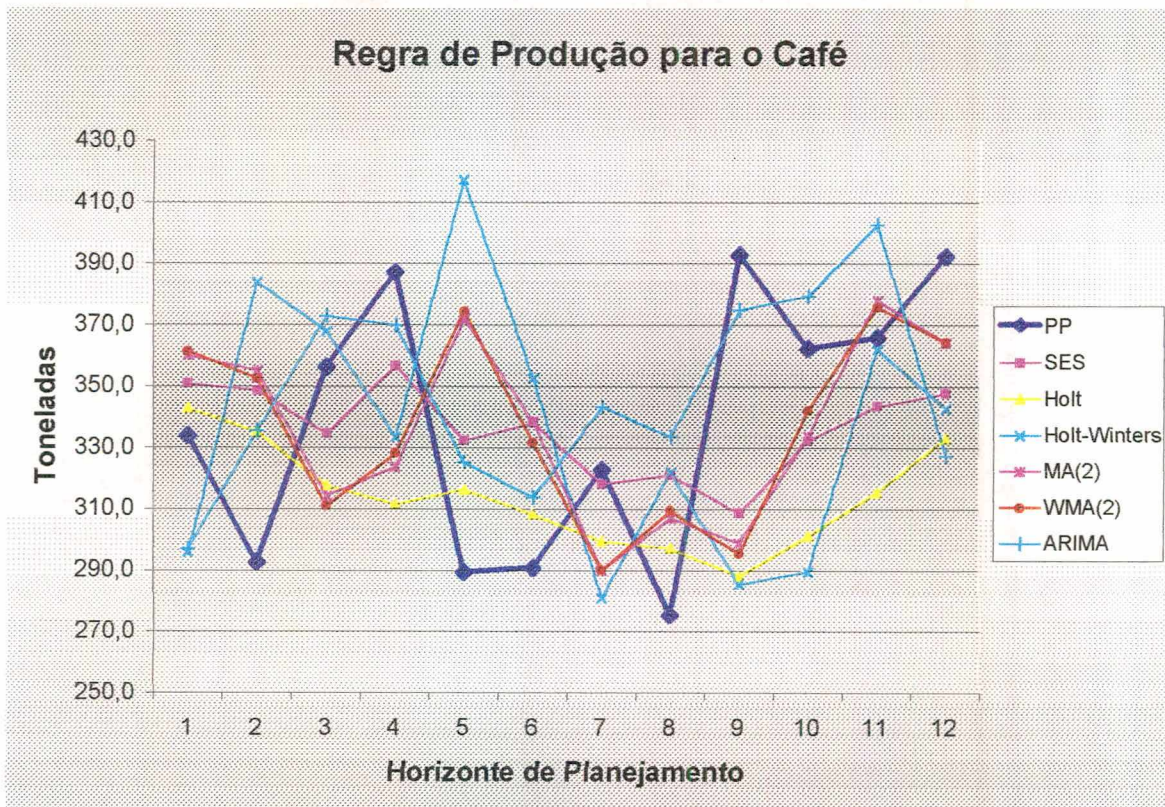


Figura 5.3: Regra de produção para café.

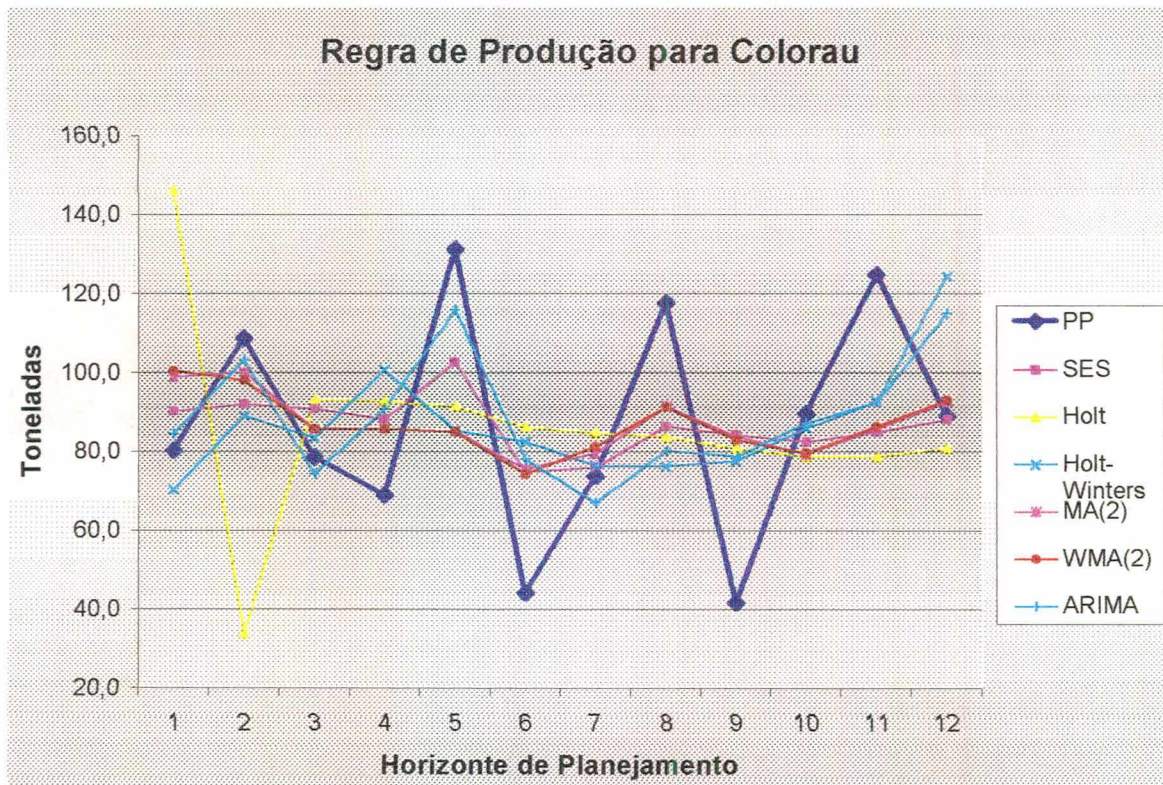


Figura 5.4: Regra de produção para colorau.

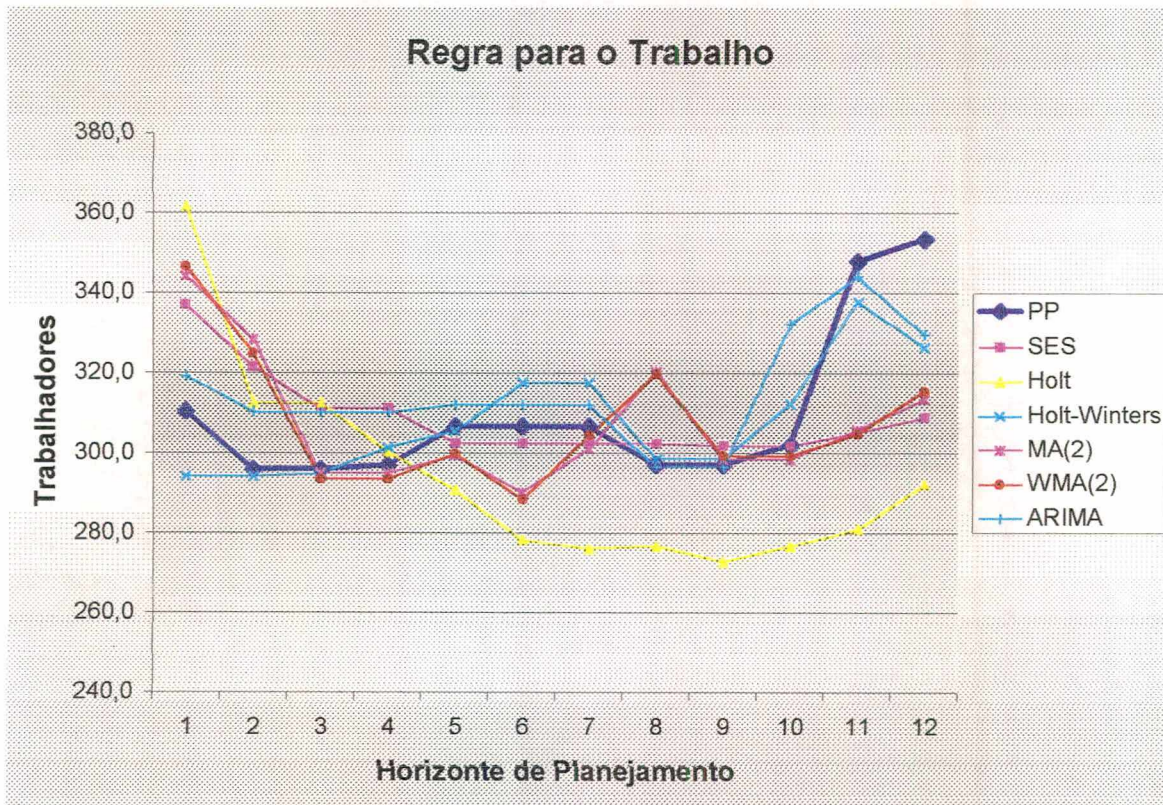


Figura 5.5: Regra do nível de trabalho.

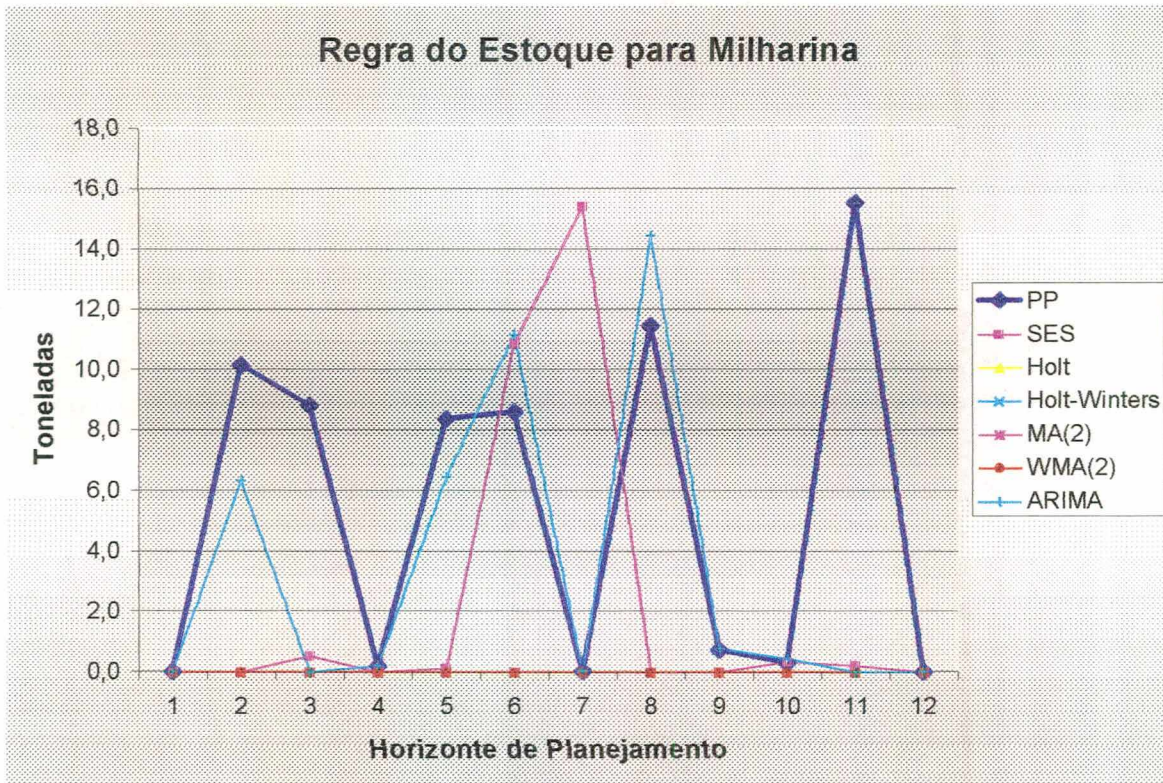


Figura 5.6: Regra do estoque para milho.

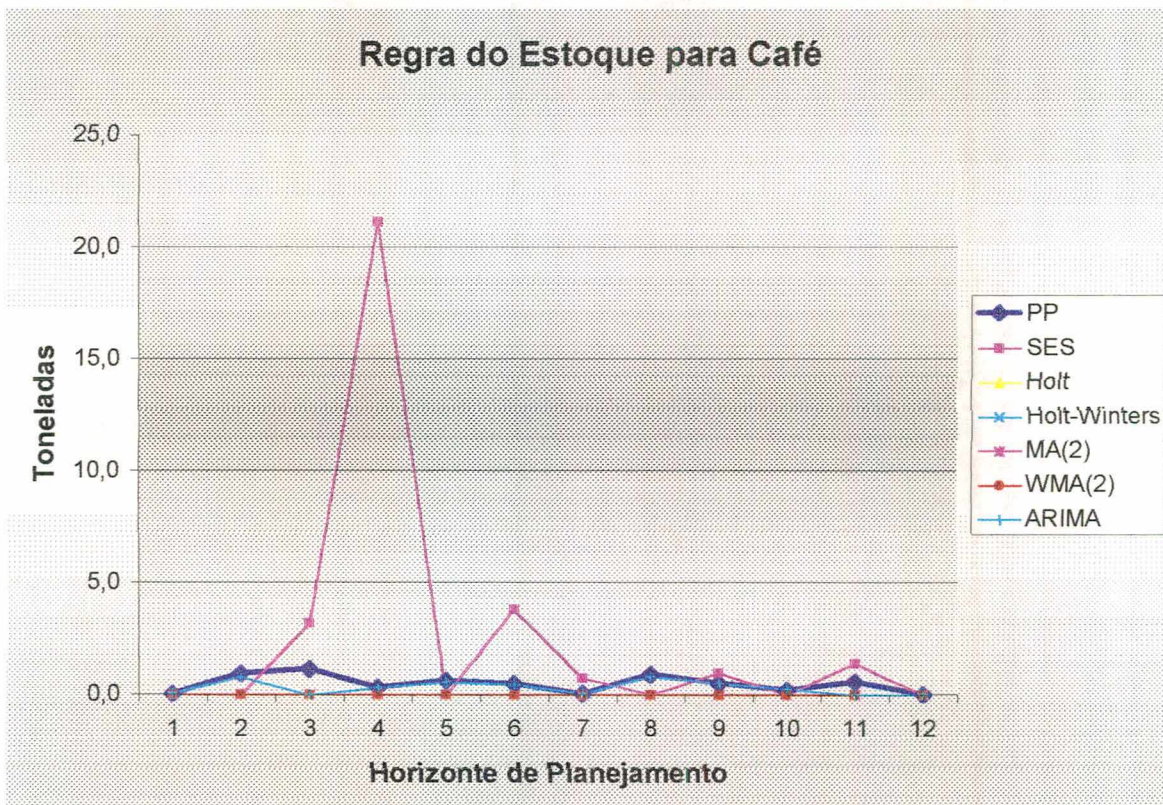


Figura 5.7: Regra do estoque para café.

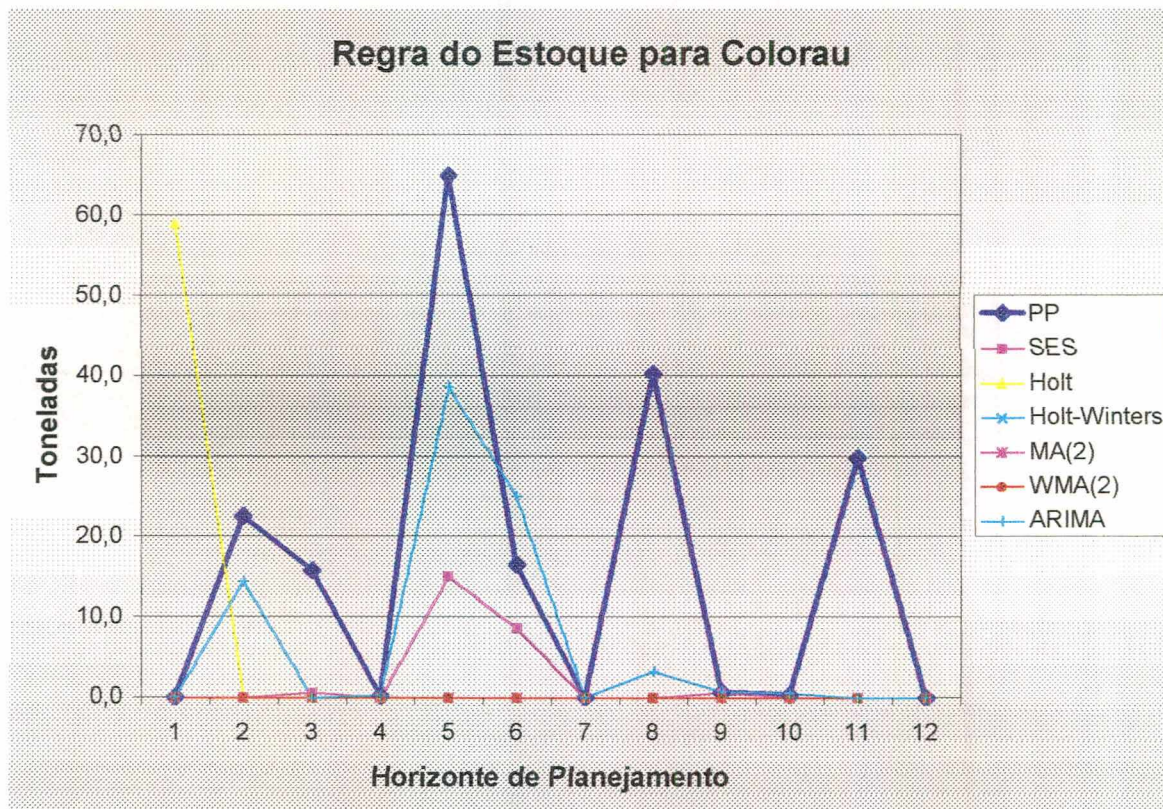


Figura 5.8: Regra do estoque para colorau.

Como os atrasos praticamente se anularam tanto na regra com previsão perfeita (verdadeira vendas) como nas regras com todas as previsões imperfeitas (todos os modelos sugeridos de previsão), não é preciso mostrar a comparação dos pedidos atrasados.

As figuras 5.2, 5.3 e 5.4 demonstram que o modelo ARIMA ( $p,d,q$ ) possui uma regra para produção mais parecida com aquela fornecida pela regra com os verdadeiros dados. É muito mais evidente a semelhança entre os pontos de subida e descida das curvas com *PP* (previsão perfeita) e com ARIMA.

Esse fato se repete quando se analisa o nível de trabalho na figura 5.5 e os níveis de estoques nas figuras 5.6, 5.7 e 5.8. Isso pode levar a conclusão de que a regra com o modelo ARIMA será preferida às demais, por se aproximar da verdadeira regra.

Outra maneira de enxergar isso é através da captação dos desvios de cada regra individual. Ou seja, pega-se a regra individual da produção da milharina para o modelo *SES* e calcula o seu desvio, período a período, com relação à regra com previsão perfeita. Toma-se depois o somatório do horizonte de planejamento para essa variável de controle. O mesmo procedimento deve ser feito para todas as outras variáveis de controle (produção do café, produção do colorau, nível de trabalho, estoque da milharina etc.). Por fim, somam-se os somatórios dos desvios.

O procedimento deve ser repetido para a regra com o modelos Holt, Holt-Winters, MA(2), WMA(2) e ARIMA(*p,d,q*) e os seus resultados devem ser comparados. O menor resultado final será o preferido (aquele que se aproxima de zero). Uma maneira de representar essa idéia matematicamente é:

$$FDR = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^m (Y_{it}^* - Y_{it}) \quad (5.4.4)$$

onde,

*FDR* = Fator de desvio da regra;

$Y_{it}^*$  = Variável de controle *i* da regra com previsão perfeita no tempo *t*;

$Y_{it}$  = Variável de controle *i* da regra com previsão imperfeita no tempo *t*;

Aplicando a equação 5.4.4 para os dados estudados, obtém-se a tabela 5.19, abaixo, que reflete o mesmo sentimento já expressado pela análise gráfica: a regra com o modelo ARIMA é aquele que apresenta um menor fator de desvio da regra (*FDR*), conseqüentemente, é a preferida diante das outras.

**Tabela 5.19:** Fator de desvio da regra para os diversos modelos de previsão.

	<b>SES</b>	<b>Holt</b>	<b>Holt-Winters</b>	<b>MA(2)</b>	<b>WMA(2)</b>	<b>ARIMA</b>
<b>FDR</b>	-167,50	-854,10	-361,50	-344,30	-343,00	113,80

Depois de selecionar o modelo de previsão que representará a melhor regra, aquela que se aproxima ao máximo da regra com previsão perfeita, uma avaliação sobre a variação dos resultados (lucros) é interessante.

A tabela 5.20 mostra o desempenho dos custos para todas as opções disponíveis até o momento.

**Tabela 5.20:** Comparação dos desempenhos da *PE*, *RDD-PE*, *RDD-PI*.

	<i>CT</i>	<i>RT</i>	<i>LT</i>
<i>PE</i>	18466156,00	24843008,00	6376852,00
<i>RDD-PP</i>	17421921,00	24843008,00	7421087,00
<i>RDD-PI</i>	17794677,85	25393530,00	7598852,15
	INDICE		
<i>PE</i>	100,00	100,00	100,00
<i>RDD-PP</i>	94,35	100,00	116,38
<i>RDD-PI</i>	96,36	102,22	119,16

Na tabela acima *CT* = custo total, *RT* = receita total, *LT* = lucro total, *PE* = performance da empresa, *RDD-PP* = regra de decisão com previsão perfeita e *RDD-PI* = regra de decisão com previsão imperfeita. Os resultados desta tabela corroboram para o bom desempenho das equações de previsão. A diferença, aproximadamente, de 3 pontos percentuais que existe na receita total (*RT*), derivada de diferenças na previsão e na veracidade das vendas, praticamente se transferem para os custos totais e para o lucro total.

## 5.6 REGRA DE DECISÃO ESTOCÁSTICA (*RDE*)

Já foi discutido anteriormente que a solução determinística e estocástica divergem quando se tratam de sistemas que se comportam (ou são) de maneira não linear. Assim, este tópico procura dar este tratamento ao sistema estudado, por se tratar de uma regra de decisão não linear. Também, nesta seção, formas de ponderação da parte estocástica são implementadas. Nesta seção será usada a abordagem apresentada no capítulo 4.

Utilizando-se da previsão de vendas escolhida anteriormente, das técnicas metodológicas do capítulo 4 e das funções utilidades apresentadas no capítulo 3, pode-se escolher a função utilidade que melhor represente a regra de decisão estocástica para investidores que são avessos ao risco e, conseqüentemente, achar a regra a ser praticada para níveis diferenciados de riscos assumidos.

Depois de diversas simulações, para diferentes conjuntos de erros do modelo ARIMA, vários resultados foram guardados nas tabelas 5.21 e 5.22 para comparação das diversas funções utilidades apresentadas, utilizando-se do algoritmo proposto e de níveis maiores e menores de aversão absoluta ao risco, em casos de tomadores de decisão com aversão ao risco.

**Tabela 5.21: Passos do algoritmo por diversas funções – grande AAR e ARR.**

Funções para Grande Aversão Absoluta e Relativa ao Risco - AAR e ARR						
	Força	Exponencial	Raiz	Logarítmica	Cúbica	Karl Borch
a	-	-	-	-	1	7500
b	1E-10	0,072000	-	-	-0,00011	-
c	-	-	-	-	0,000000005	-
AAR	0,000247142375	0,0720	0,0001	0,0003	0,0002	0,0004
ARR	0,999999999900	291,3300	0,5000	1,0000	0,9095	1,5989
Lucro Original	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521
Lucro 1° Passo	7464,0106	7464,0106	7598,8521	7598,8521	7573,5688	7598,8521
Lucro 2° Passo	7464,0106	7464,0106	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521
Lucro 3° Passo	7464,0106	7464,0106	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521

**Tabela 5.22: Passos do algoritmo por diversas funções – baixa AAR e ARR.**

Funções para Baixa Aversão Absoluta e Relativa ao Risco - AAR e ARR						
	Força	Exponencial	Raiz	Logarítmica	Cúbica	Karl Borch
a	-	-	-	-	1	4200
b	0,000000001	0,005	-	-	-0,00009	-
c	-	-	-	-	0,000000005	-
AAR	0,000247142375	0,0050	0,0001	0,0003	0,0001	0,0001
ARR	0,999999999900	20,2313	0,5000	1,0000	0,3949	0,2231
Lucro Original	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521
Lucro 1° Passo	7559,6713	7590,2096	7598,8521	7598,8521	7573,5688	7598,8521
Lucro 2° Passo	7559,6713	7590,2096	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521
Lucro 3° Passo	7559,6713	7590,2096	7598,8521	7598,8521	7598,8521	7598,8521

O que se conclui da observância das tabelas acima é que as funções força e exponencial funcionam a contento para o algoritmo, aceitando níveis diferentes de risco, quando um  $b$

diferente é escolhido. As outras funções se mostraram rígidas para este tipo de problema, o que leva esta pesquisa a não fazer uso das mesmas.

Das funções que devem ser escolhidas, força e exponencial podem ser selecionadas indistintamente para esta pesquisa, pois elas, no seu maior grau de aversão ao risco, conduziram ao mesmo lucro (tabela 5.21) e a mesma regra de decisão estocástica (tabela 5.23 e 5.24). Os valores de  $b$  que representam o maior grau de aversão ao risco, para essas funções, foram os apresentados na tabela 5.21, pois valores superiores aqueles não alterariam mais os resultados.

Tabela 5.23: Regra de decisão estocástica com alta aversão ao risco.

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	463,0	300,0	89,4	490,0	297,2	84,6	334,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2063,3
fev/99	392,9	335,2	89,1	399,2	335,9	103,5	310,6	6,4	0,8	14,5	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
mar/99	396,6	374,0	89,0	390,3	373,2	74,5	310,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0
abr/99	366,7	369,9	90,8	366,9	370,2	91,0	310,4	0,2	0,3	0,3	0,1	0,0	0,0	0,0	649,8
mai/99	404,2	325,4	77,7	410,5	325,7	116,1	327,0	6,5	0,6	38,7	0,0	0,0	0,0	0,0	2074,3
jun/99	455,2	314,3	91,9	459,9	314,2	78,3	327,0	11,2	0,5	25,1	0,1	0,0	0,0	0,0	2074,2
jul/99	451,9	344,2	92,3	440,8	343,8	67,3	327,9	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	2436,1
ago/99	372,3	333,3	77,2	386,8	334,1	80,4	296,8	14,5	0,8	3,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
set/99	360,0	375,5	81,5	346,3	375,2	79,0	296,8	0,8	0,5	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	47,6
out/99	430,7	380,0	87,8	430,3	379,7	87,5	332,4	0,5	0,3	0,5	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0
nov/99	444,6	403,4	93,4	444,1	403,1	92,9	361,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2314,3
dez/99	447,7	327,8	115,2	447,7	327,8	115,3	329,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

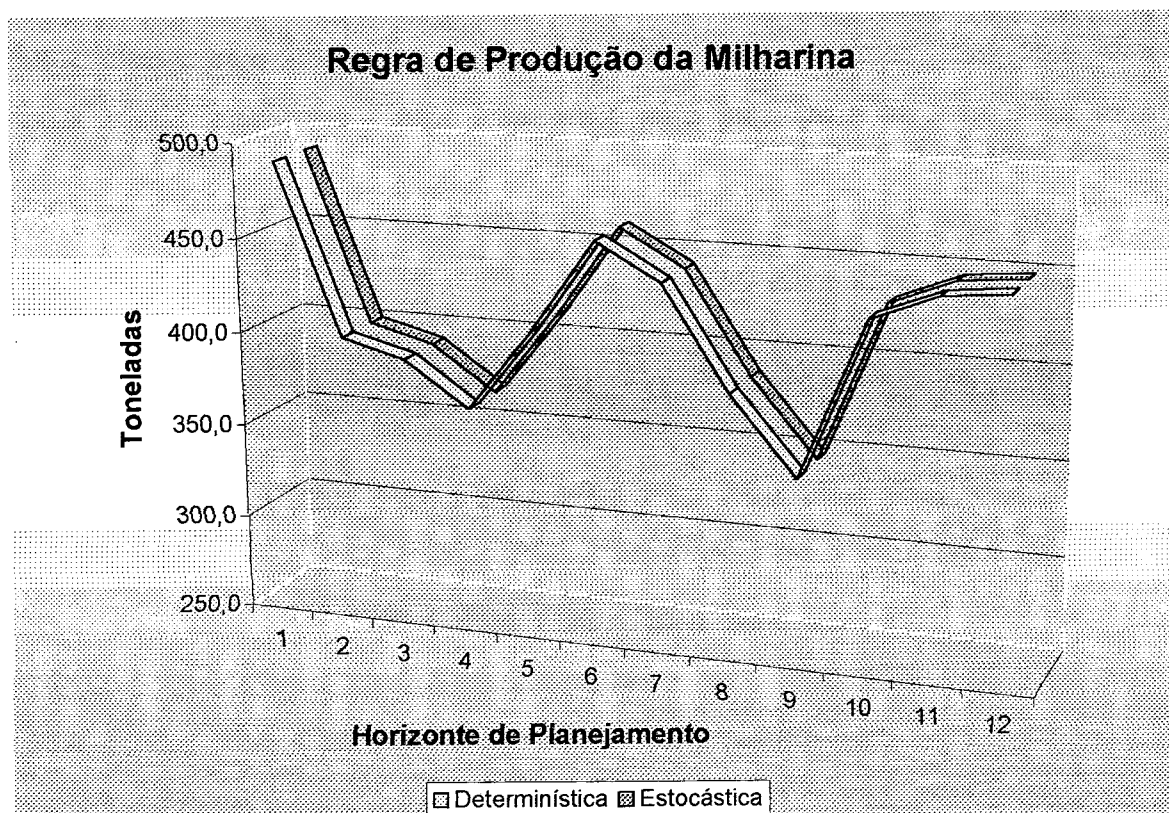
Tabela 5.24: Custos da regra de decisão estocástica com alta aversão ao risco.

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO
jan/99	214611	13756	0	0	7357	1021	19	1210255	1447019	1992840	545821
fev/99	199346	0	22382	0	0	4080	185	1233839	1459831	2028160	568329
mar/99	199210	0	199	1	0	1000	27	1296185	1496621	2188800	692179
abr/99	199209	0	0	0	2370	1152	179	1278736	1481647	2129530	647883
mai/99	209841	6626	0	0	7235	6415	37	1227762	1457916	1993370	535454
jun/99	209843	2	0	0	7235	5616	119	1219601	1442416	2041090	598674
jul/99	210451	379	0	0	7977	1028	129	1266142	1486105	2156180	670075
ago/99	190467	0	29300	0	0	3800	42	1202964	1426573	1976570	549997
set/99	190467	0	0	0	166	1396	2	1264370	1456401	2131650	675249
out/99	213353	14264	0	0	0	1228	44	1356410	1585298	2262630	677332
nov/99	231921	11572	0	0	8439	1000	70	1428550	1681553	2383240	701687
dez/99	211749	0	29575	0	0	1015	0	1265800	1508140	2109470	601330
<b>TOTAL</b>									<b>17929519</b>	<b>25393530</b>	<b>7464011</b>

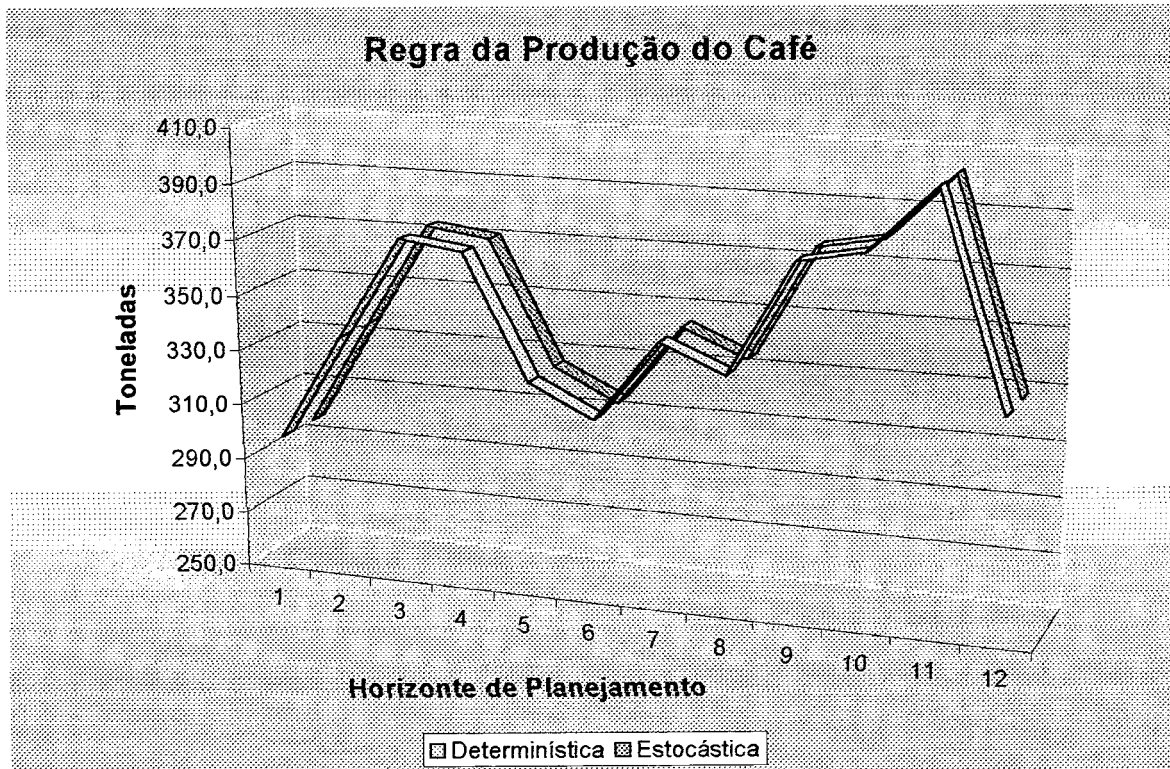


Observando a tabela 5.24 o custo total aumenta, conseqüentemente, o lucro total cai na regra de decisão estocástica, o que é perfeitamente compreensível, dado que um menor risco deve atentar para uma regra menos maleável. A diferença no lucro total é da ordem de R\$ 134.841,15, que representa o custo de incorrer em riscos muito menores.

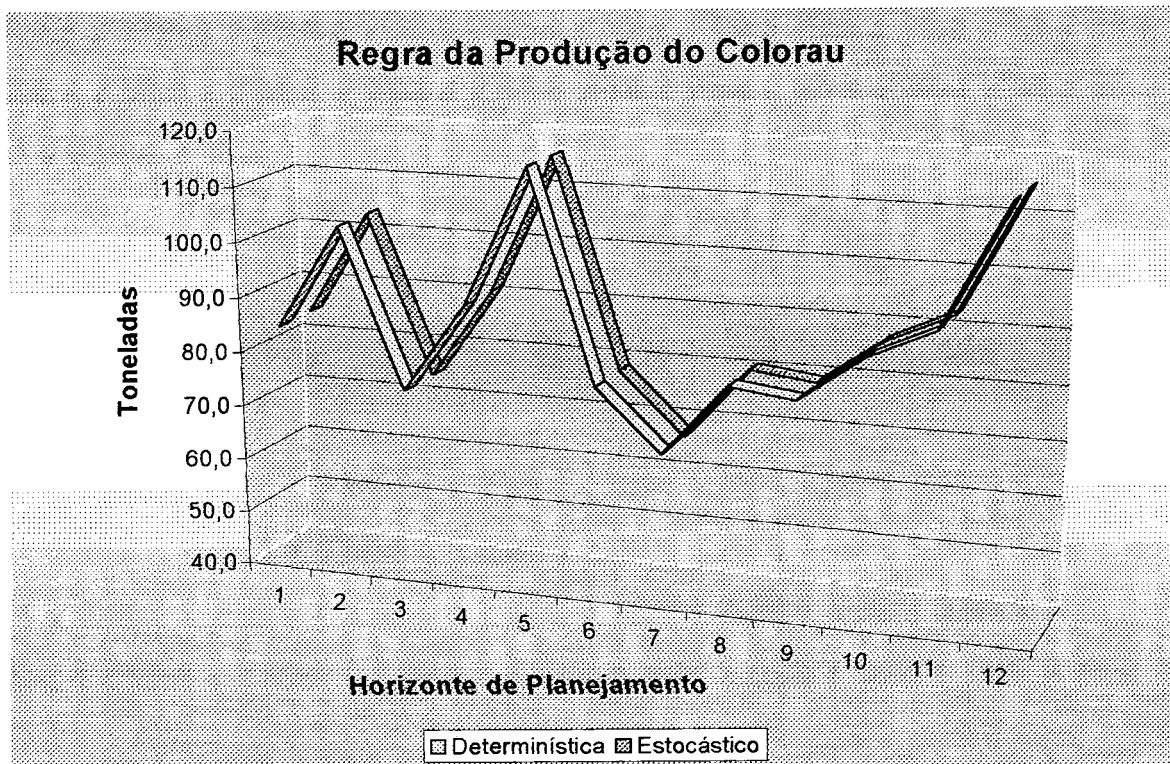
As figuras seguintes apresentarão como a regra de decisão estocástica se diferencia da regra de decisão determinística para uma alta aversão absoluta ao risco. Assim, pode-se perceber onde a empresa pratica os seus ajustes para tornar o sistema menos volátil e mais assimétrico positivamente.



**Figura 5.9:** Comparação da regra determinística e estocástica para produção de milho.



**Figura 5.10:** Comparação da regra determinística e estocástica para produção de café.



**Figura 5.11:** Comparação da regra determinística e estocástica para produção de colorau.

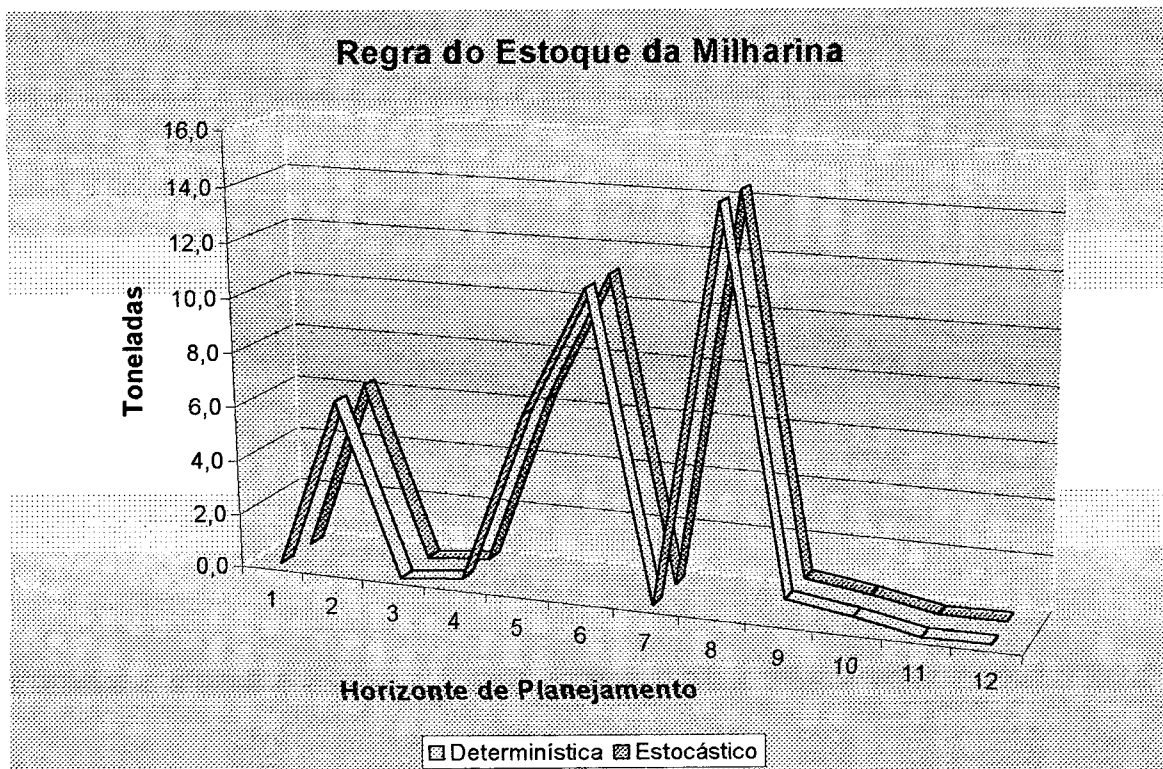


Figura 5.12: Comparação da regra determinística e estocástica para estoque de milho.

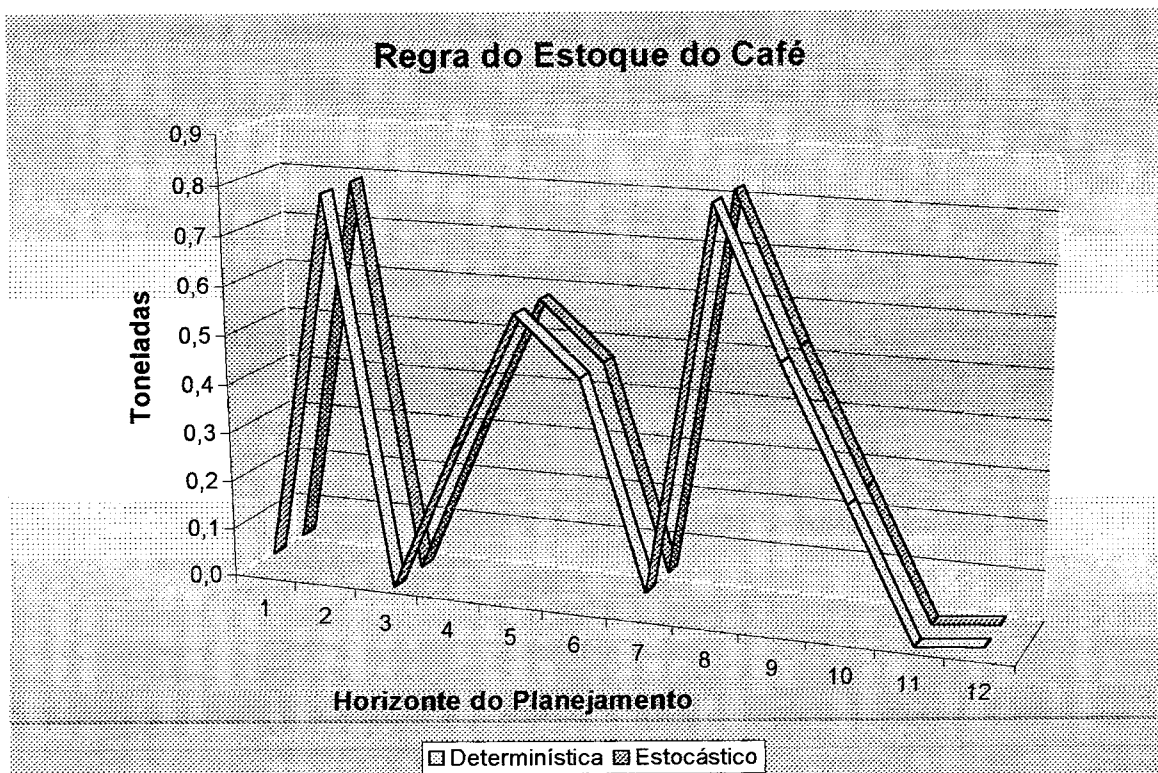
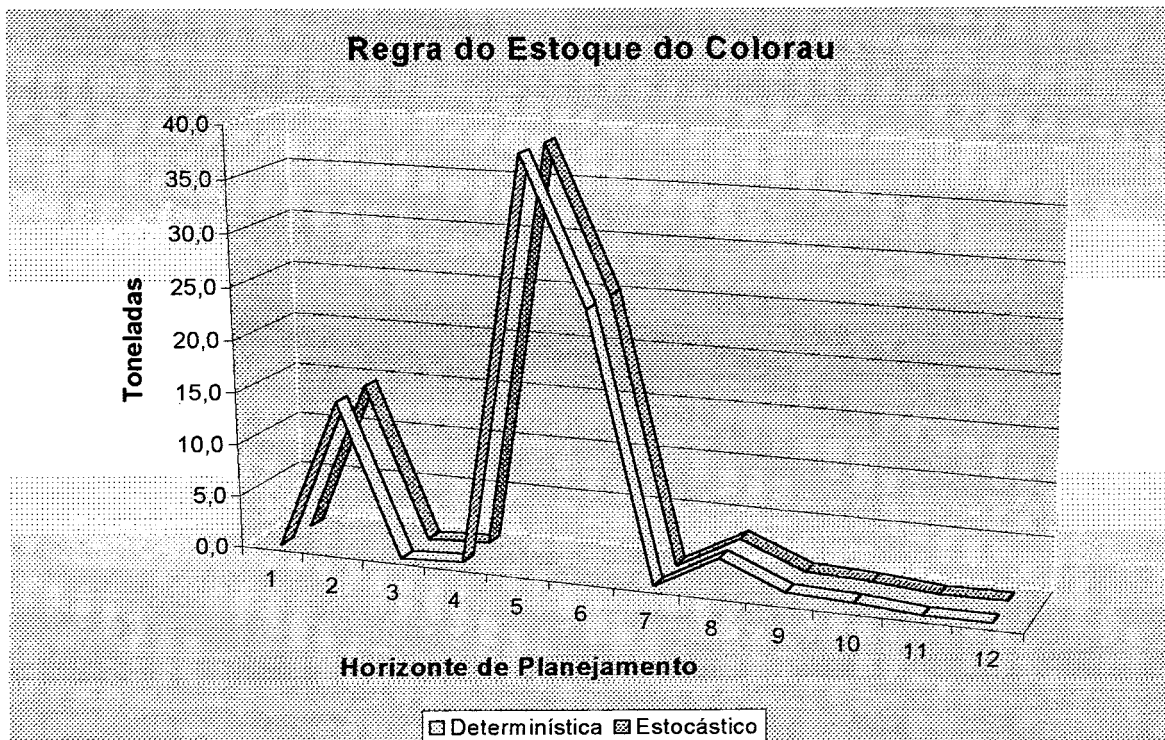
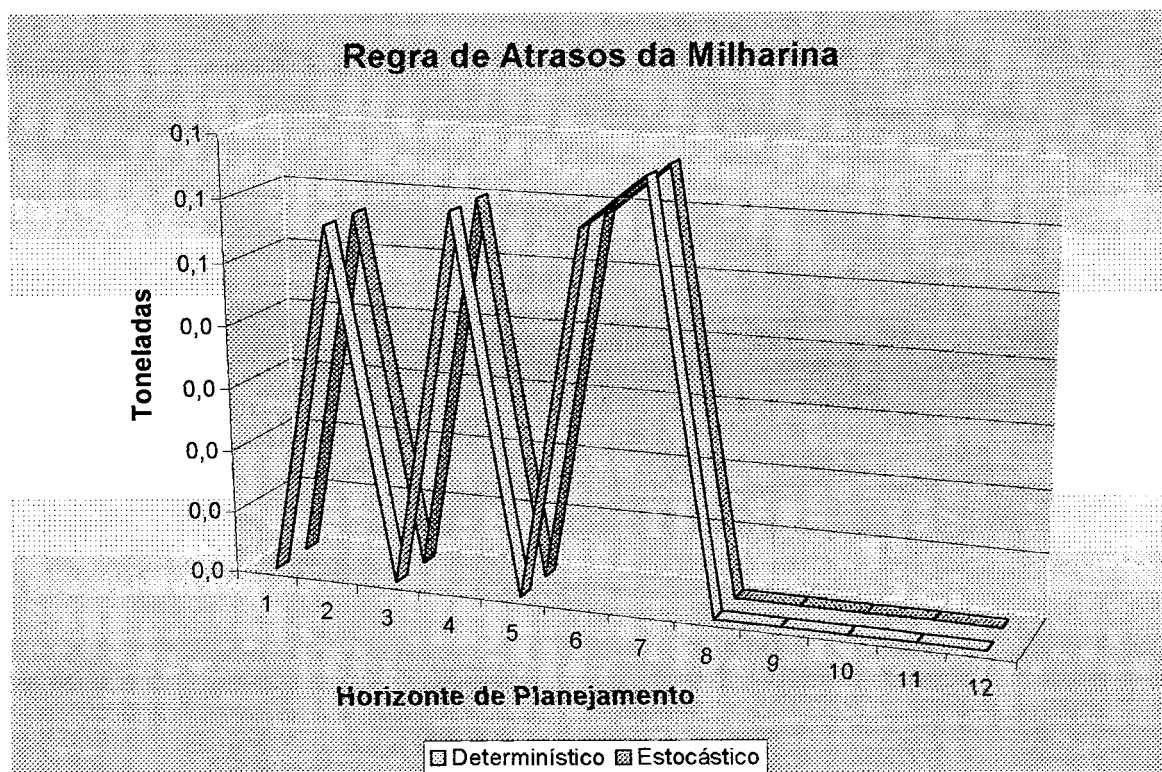


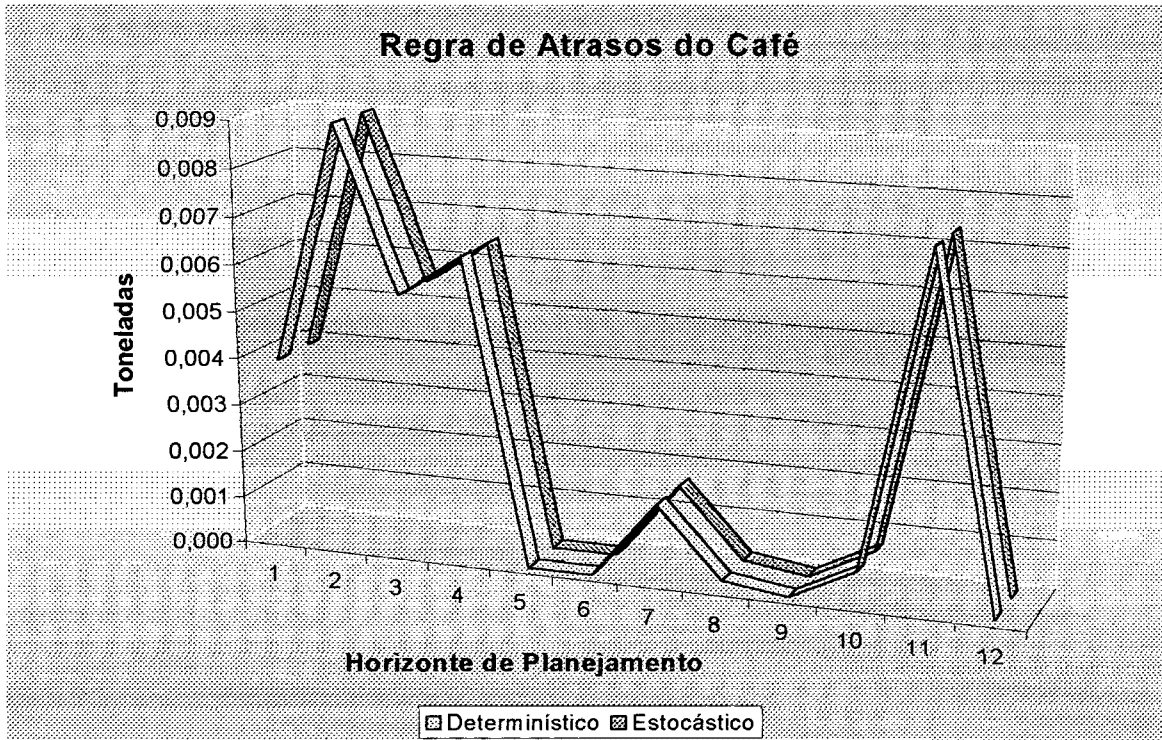
Figura 5.13: Comparação da regra determinística e estocástica para estoque de café.



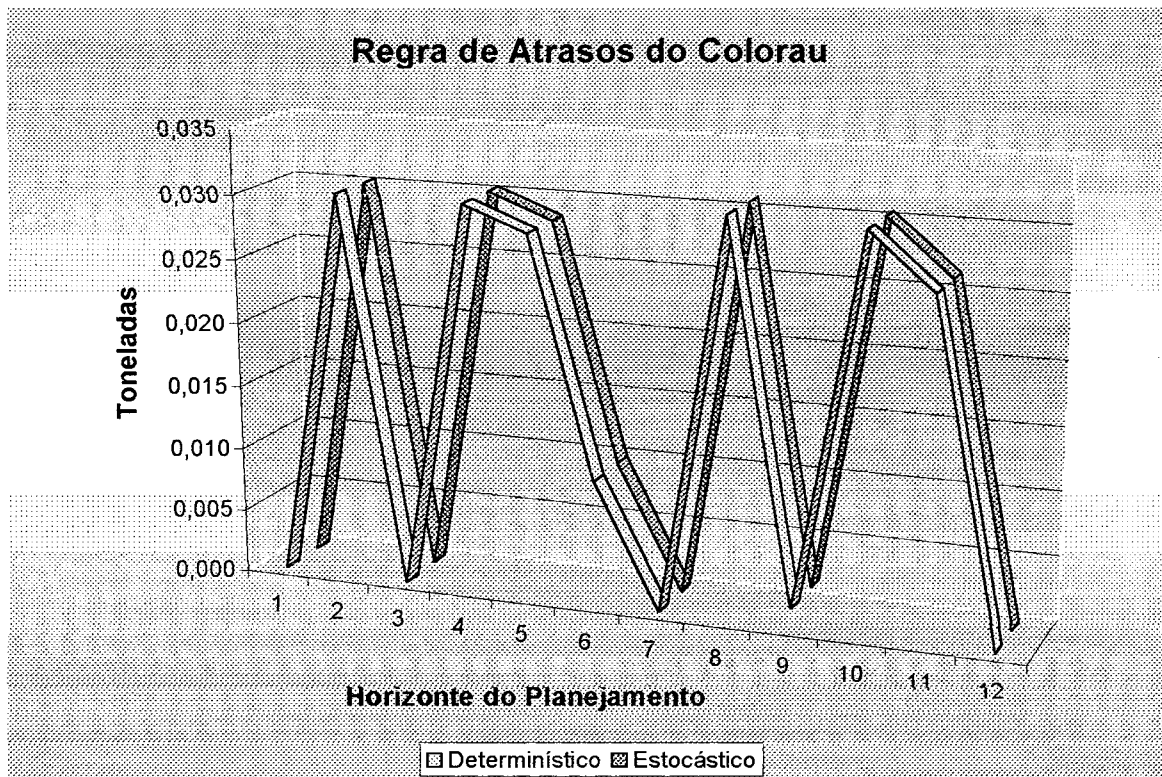
**Figura 5.14:** Comparação da regra determinística e estocástica para estoque do colorau.



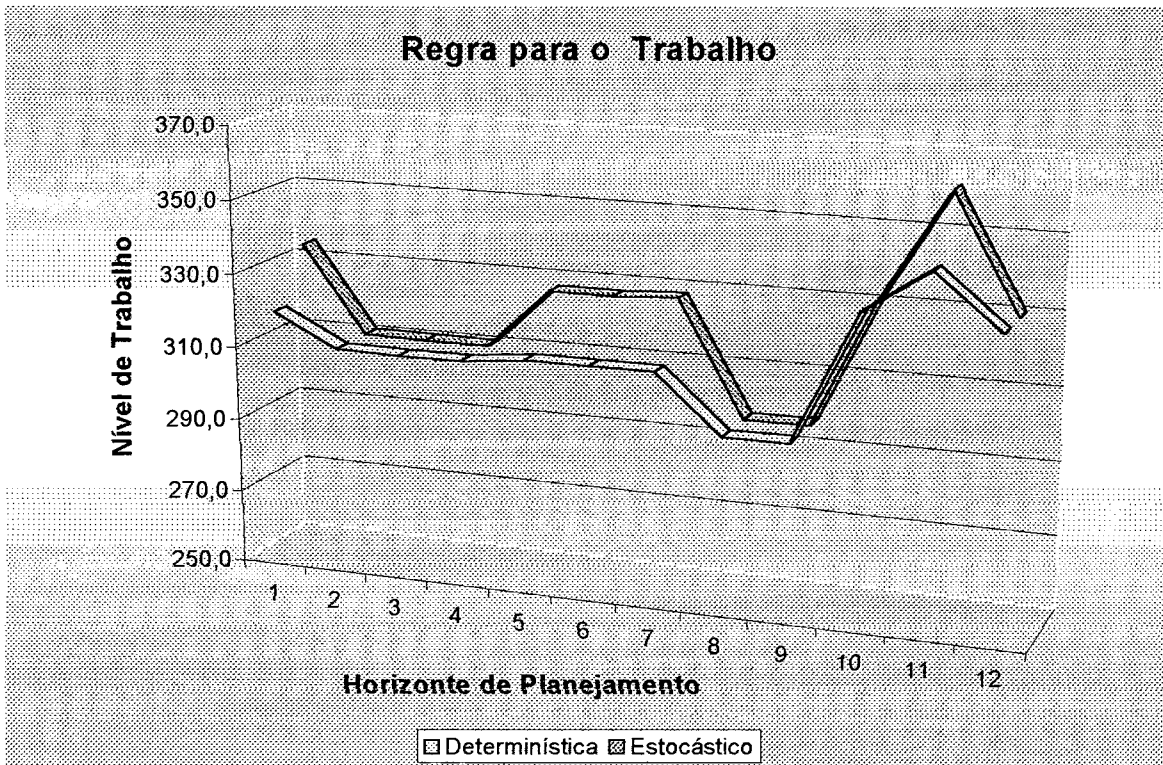
**Figura 5.15:** Comparação da regra determinística e estocástica para atrasos da milharina.



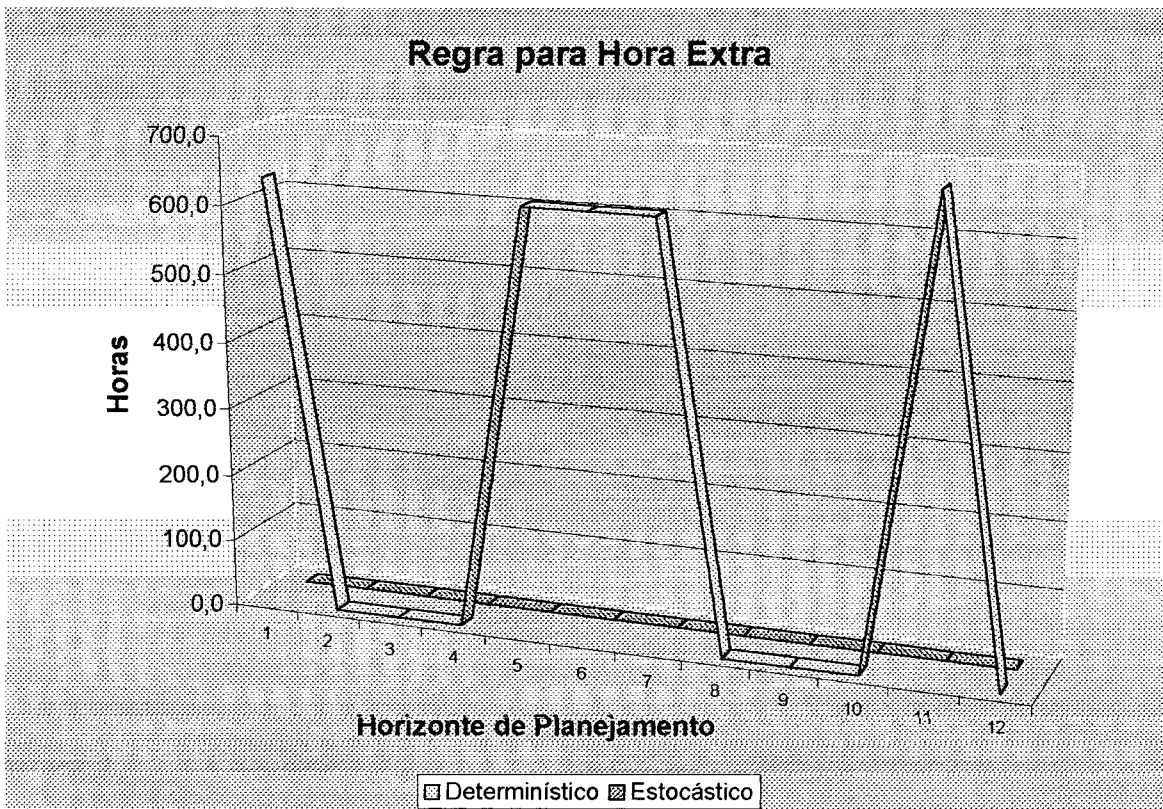
**Figura 5.16:** Comparação da regra determinística e estocástica para atrasos do café.



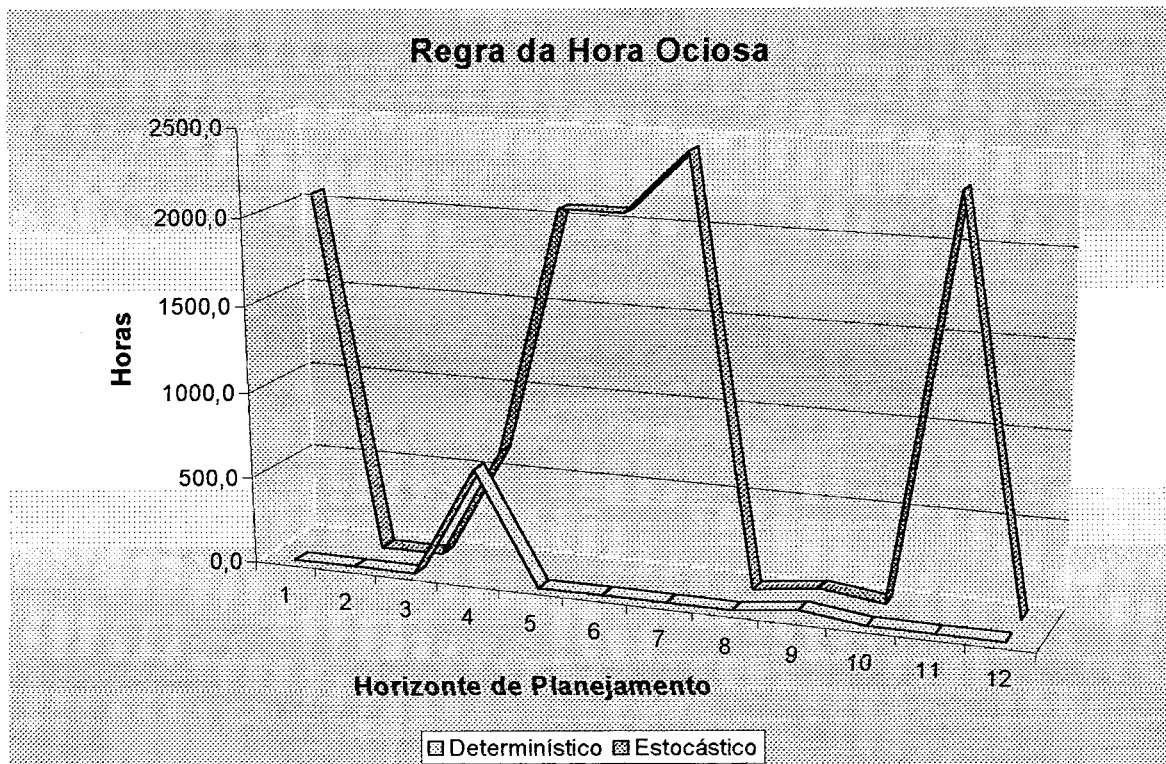
**Figura 5.17:** Comparação da regra determinística e estocástica para atrasos do colorau.



**Figura 5.18:** Comparação da regra determinística e estocástica para nível de trabalho.



**Figura 5.19:** Comparação da regra determinística e estocástica para hora extra.



**Figura 5.20:** Comparação da regra determinística e estocástica para hora ociosa.

Pela comparação das séries, fica claro que a diferença das regras não é derivada de modificações na produção, figuras 5.9 a 5.11, no estoque, figuras 5.12 a 5.14, e no atraso, figuras 5.15 a 5.17, pois elas são exatamente iguais. Todo o ajuste é praticado no nível de trabalho, figura 5.18, que, por consequência, modifica a proporção de hora extra e hora ociosa utilizada na regra estocástica com relação à regra determinística (figuras 5.19 e 5.20, respectivamente).

Pela indiferença vista anteriormente, trata-se a seguir de um caso de aversão baixa ao risco para apenas uma das funções estudadas, a exponencial. Nela, definiu-se como um parâmetro de baixa aversão absoluta ao risco quando o  $b = 0,005$ . A regra de decisão estocástica encontrada está apresentada na tabela abaixo.

**Tabela 5.25:** Regra de decisão estocástica com baixa aversão ao risco.

	D1	D2	D3	P1	P2	P3	W	E1	E2	E3	A1	A2	A3	HE	HO
jan/99	463,0	300,0	89,4	490,0	297,2	84,6	319,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	638,8	0,0
fev/99	392,9	335,2	89,1	399,2	335,9	103,5	310,3	6,4	0,8	14,5	0,1	0,0	0,0	46,6	0,0
mar/99	396,6	374,0	89,0	390,3	373,2	74,5	308,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	376,4	0,0
abr/99	366,7	369,9	90,8	366,9	370,2	91,0	309,1	0,2	0,3	0,3	0,1	0,0	0,0	0,0	418,2
mai/99	404,2	325,4	77,7	410,5	325,7	116,1	317,0	6,5	0,6	38,7	0,0	0,0	0,0	0,0	248,7
jun/99	455,2	314,3	91,9	459,8	314,2	78,3	316,6	11,2	0,5	25,1	0,1	0,0	0,0	0,0	162,1
jul/99	451,9	344,2	92,3	440,8	343,8	67,3	315,1	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	80,8	0,0
ago/99	372,3	333,3	77,2	386,8	334,1	80,4	297,1	14,5	0,8	3,3	0,0	0,0	0,0	0,0	56,7
set/99	360,0	375,5	81,5	346,4	375,2	79,0	296,6	0,8	0,5	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	9,9
out/99	430,7	380,0	87,8	430,3	379,7	87,5	331,1	0,5	0,3	0,5	0,0	0,0	0,0	241,0	0,0
nov/99	444,6	403,4	93,4	444,1	403,1	92,9	344,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	688,6	0,0
dez/99	447,7	327,8	115,2	447,7	327,8	115,3	330,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	86,6

**Tabela 5.26:** Custos da regra de decisão estocástica com baixa aversão ao risco.

	CFP	CC	CD	CHE	CHO	CE	CA	CMP	CT	R	LUCRO
jan/99	204977	7751	0	3416	0	1021	19	1210255	1427440	1992840	565400
fev/99	199167	0	8518	267	0	4079	185	1233836	1446053	2028160	582107
mar/99	198003	0	1706	1812	0	1000	27	1296187	1498735	2188800	690065
abr/99	198365	226	0	0	1525	1152	179	1278736	1480183	2129530	649347
mai/99	203471	3182	0	0	868	6414	37	1227756	1441727	1993370	551643
jun/99	203175	0	433	0	566	5616	119	1219604	1429512	2041090	611578
jul/99	202210	0	1414	397	0	1028	129	1266145	1471323	2156180	684857
ago/99	190655	0	16942	0	190	3799	42	1202958	1414586	1976570	561984
set/99	190337	0	466	0	35	1396	2	1264375	1456612	2131650	675038
out/99	212494	13809	0	1289	0	1228	44	1356410	1585273	2262630	677357
nov/99	220970	5283	0	3767	0	1000	70	1428550	1659640	2383240	723600
dez/99	212033	0	13104	0	284	1015	0	1265800	1492235	2109470	617235
<b>TOTAL</b>									<b>17803320</b>	<b>25393530</b>	<b>7590210</b>

Mais uma vez, pela observação da tabela 5.25, confirma-se que o ajustamento da diferença das regras é feito através da modificação do nível de trabalho e dos ajustamentos da hora extra e da hora ociosa. Logicamente, uma baixa aversão ao risco leva a perdas menores no lucro total. O custo de evitar um pouco mais o risco é de aproximadamente R\$ 8.600,00, diferença entre o lucro total de aversão mais baixa possível e lucro total do nível escolhido.



## CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

---

### 6.1 CONCLUSÃO

Este trabalho formulou uma regra de controle ótimo estocástico não linear para o caso de produção de multiprodutos. No estudo de caso, observou-se que essa regra converge rapidamente, em menos de dois passos. Ela incorpora a escolha subjetiva, por parte dos tomadores de decisões, de níveis diferenciados de riscos.

Várias etapas foram cumpridas anteriormente para que a regra estocástica se completasse. Diante das muitas possibilidades de previsão de demanda, um modelo com previsão ARIMA, mais especificamente um AR, foi escolhido como de melhor ajuste, em função dos desvios da sua regra determinística e da regra determinística com previsão perfeita.

Outra etapa importante foi a escolha da melhor função utilidade, dentre as mais utilizadas na literatura de finanças, que se adaptasse ao caso do planejamento agregado da produção. A função utilidade permite a incorporação da parte estocástica no controle ótimo.

As funções de força e exponencial foram as que atenderam as expectativas desta tese, incorporando os riscos (variância e assimetria) e permitindo um intervalo de variação para escolha, entre esse intervalo, que representasse uma situação de mais ou menos risco para quem já é avesso ao mesmo.

As funções raiz e logarítmica, apesar de incorporarem o fator de risco, não permitem uma escolha alternativa de cenários diferentes, assim, não atendiam aos objetivos levantados nesta tese.

As funções polinomiais de terceiro grau (cúbicas), apesar delas possuírem uma estrutura que já incorpore a variância e a assimetria na análise, têm restrições fortes para um

investidor avesso ao risco (aversão absoluta ao risco crescente com o aumento do nível de riqueza). Ficou demonstrado nos capítulos 3 e 5 que existe uma região em que essas limitações podem ser eliminadas (região em que a aversão absoluta ao risco é decrescente), porém os valores que ponderam o risco nessa região são pouco sensíveis, o que leva a regra a ter sempre a mesma resposta, seja ela com parâmetros que representam um risco maior ou menor.

A função cúbica sugerida por Karl Børch (op. Cit) não possui o problema colocado acima, quando suas condições básicas são atendidas. Ou seja, apesar de ser polinomial, ela não possui aversão absoluta ao risco crescente com o aumento do nível de riqueza. Contudo, seus parâmetros proporcionam indiferenças na avaliação de níveis de riscos diferentes.

Sobre o estudo de caso, o desempenho da empresa fica muito aquém dos resultados praticados pelo novo planejamento agregado da produção recomendado nesta tese. Lembrando que se o sistema consegue refletir de maneira aproximada a realidade da empresa, levantada por entrevistas e observações nas visitas a fábrica, o ganho é bastante significativo, representando cerca de 16% quando as vendas verdadeiras são utilizadas e cerca de 19% quando as vendas são previstas com modelos estatísticos.

Logicamente, um esquema matemático serve unicamente como orientação, pois nunca refletirá perfeitamente todas as relações complexas de um ambiente empresarial, apesar de o esquema desta tese ter procurado incorporar custos de oportunidade e impostos trabalhistas. Porém, num acréscimo de ganho dessa magnitude levantam suspeitas de um planejamento falho para a performance da empresa.

Quanto às diferenças da regra estocástica e da regra determinística, observou-se que depende muito da estrutura que o sistema foi montado (custos, equações, relações etc.). Nesse caso específico, os ajustes para esse sistema acontecem exclusivamente no nível de trabalho.

Entre a maior e a menor aversão, o que se percebeu foi um ajuste de contratação ou

demissão de trabalhadores, inclusive com grandes conseqüências para a hora extra e a hora ociosa praticadas nas regras. Empresários mais avessos guardarão uma maior mão-de-obra para eventuais ajustes na produção, mesmo que isso signifique gente parada em alguns momentos, ou seja, um maior custo da hora ociosa no planejamento.

O trabalho se mostrou original por se tratar de um estudo derivado de HMMS para uma situação multiproduto, onde é levado em consideração a parte estocástica, dinâmica e não-linear do sistema. É inédito por incorporar o terceiro momento da distribuição (coeficiente de assimetria) no processo de decisão para o planejamento agregado da produção.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Logicamente, quanto mais estudos de casos houver para testar a metodologia proposta mais confiante ela se apresentará para a utilização prática, por isso, novos estudos de casos são importantes na validação do modelo.

A planilha eletrônica do Excel funcionou com certas restrições, devida a complexidade do sistema proposto. Vários pontos de partida tiveram que ser utilizados exaustivamente, tornando o trabalho moroso e cansativo. Isso poderia inviabilizar a metodologia do trabalho quando utilizada por alguém que acredita cegamente no primeiro resultado encontrado. Recomenda-se, então, três possibilidades futuras: o uso de um *software* mais robusto, para otimização, que o módulo *Solver* do Excel; a representação mais simplificada, porém realista das equações, das equações e usar o próprio excel para otimizar; encontrar uma forma de montar o sistema no excel, onde, tecnicamente, pareça existir menos variáveis de controle e menos restrições para o *Solver*.

Percebeu-se, no trabalho, que mesmo uma função polinomial do terceiro grau pode ser caracterizada, com algumas restrições, com aversão absoluta ao risco decrescente (condição essencial para investidores avessos ao risco). Como elas incorporam diretamente a variância e a assimetria na função elas são equações interessantes. Sendo assim, recomenda-se o estudo de novas funções cúbicas daquelas apresentadas neste trabalho, com

a finalidade de investigar a possibilidade de encontrar alguma que efetivamente se encaixe neste tipo de trabalho.

O caso tratado neste trabalho descreve uma fábrica que não possui *setup* entre os muitos produtos estudados. Assim, estudos futuros deveriam verificar o funcionamento da metodologia para multiprodutos com um *setup* envolvido na troca de fabricação de produtos.

Para finalizar, um estudo nessa área demandaria algum trabalho futuro que implementasse a regra determinística e estocástica em um pacote computacional, ou seja, poderia ser feito um software que incorporasse toda a pesquisa e facilitasse a utilização dos futuros usuários desta metodologia em uma empresa.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

---

- ARDITTI, F. D. and LEVI, H. Portfolio efficiency analysis in three moments: the multiperiod case. *The journal of finance*. June, 1975. Vol. XXX, n. 3.
- BERENSTEIN, P. L. *Desafio ao deuses: a fascinante história do risco*. Rio de Janeiro: Campus, 1997.
- BEDWORTH, D. D. and BAILEY, J. E. *Integrated production control systems*. New York: John Wiley & Sons, 1982.
- BORCH, Karl. A note on utility and attitudes to risk. *Management Science*, 1963. Pp. 697-700, v. 9, n. 2.
- BOX, G. E. P. and JENKINS, G. M. *Time series analysis, forecast and control*. San Francisco: Holden-Day, 1976.
- BOWMAN, E. H. Consistency and optimality in managerial decision making. *Management Science*, 1963. Pp. 310-321, v. 9, n.2.
- BROCKETT, P. L. and GARVEN, J. R. A reexamination of the relationship between preferences and moment orderings by rational risk averse investors. [www.utexas.edu.us](http://www.utexas.edu.us). 1998.
- BRONSON, R. *Pesquisa operacional*. São Paulo: McGraw-Hill, 1985.
- CHIANG, A. C. *Matemática para economistas*. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.
- CHOW, G. C. *Analysis and control of dynamic economic systems*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- CHUNG, C. and KRAJEWSKI, L. J. Planning horizons for master production scheduling. *Journal of Operations Management*. 1984. Pp. 389-406.
- CONINE, T. E. and TAMARKIN, M. J. On diversification given asymmetry in returns. *The journal of finance*. December, 1981. Vol. XXXVI, n. 5.
- CUTHBERTSON, K., HALL, S. G. and TAYLOR M. P. *Applied econometric techniques*. UK: Harvester Wheatsheaf, 1992.
- DANTAS, A. B. and SAMOHYL, R. W. A aplicação of the optimal control in Planning Production Agregate. *Discussion paper*. 2000.
- DANTAS, Anderson de Barros. Uma aplicação de controle ótimo estocástico não linear ao caso do planejamento agregado da produção. *Dissertação de Mestrado*. Florianópolis: UFSC, fevereiro de 1999.

- DIXIT, Avinash K. *Optimization in economic theory*. New York: Oxford University Press, 1990.
- DOORNICK, J. A. and HENDRY, D. F. *PcGive 8.0: an interactive econometric modeling system*. London: Chapman & Hall, 1995.
- EATWELL, J., MILGATE, M. and NEWMAN, P. *Econometrics*. New York: W.W. Norton & Company, 1990.
- FAMA, E. F. and MILLER, M. H. *The Theory of Finance*. Illinois: Dryden Press, 1972.
- FRANCIS, J. C. *Investments Analysis and Management*. New York: McGrawHill, 1991. 5 ed.
- FRANCIS, J. C. and ARCHER, S. H. *Portfolio Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, 1979. 2 ed.
- HAITH, Douglas A. *Environmental systems optimization*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1982.
- HALEY, C. W. and SCHALL, L. D. *The Theory of Financial Decisions*. New York: McGraw-Hill, 1973.
- HAX, A. and MEAL, H. Hierarchical integration of production planning and scheduling. *Studies in the management science*. New York: North-Holland, 1975.
- HIRSHLEIFER, J. *Investment, Interest, and Capital*. New Jersey: Prentice-Hall, 1970.
- HOLT, C., MODIGLIANI, F., SIMON, H. A linear decision rule for production and employment scheduling. *Management Science*, 1955. Pp. 1-30.
- HOPP, W. J. and SPEARMAN, M. L. *Factory physics: foundations of manufacturing management*. New York: McGraw-Hill, 1996.
- INTRILIGATOR, M. D., BODKIN, R. G. and HSIAO, Cheng. *Econometric models, techniques and applications*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1996.
- JONES, C. H. Parametric production planning. *Management Science*, 1967. Pp. 843-866, v. 13, n. 11.
- KAMIEN, M. I. and LI, L. Subcontracting, coordination, flexibility, and production smoothing in aggregate planning. *Management Science*, 1990. Pp. 1352-1363, v. 36.
- KENNEDY, Peter. *A guide to econometrics*. The MIT Press, 1994.
- KENDRICK, David. *Stochastic control for economic models*. New York: McGraw-Hill, 1981.
- KING, J. R. *Production planning and control: an introduction to quantitative methods*. Pergamon Press, 1975.
- KRAUS, A. and LITZENBERGER, R. H. Skewness preference and the valuation of risk

- assets. *The journal of finance*. September, 1976. Vol. XXXI, n. 4.
- LAKATOS, E. M. e MARCONI, M. de A. *Fundamentos de Metodologia Científica*. São Paulo: Atlas, 2001.
- LEE, C. F. FINNERTY, J. E. and WORT, D. A. *Security Analysis and Portfolio Management*. Illinois: Scott, Foresman/little, Brown Higher Education, 1990.
- LEVI, H. and SARNAT, M. *Investment and Portfolio Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1972.
- LOVE, C. E. and TURNER, M. Note on utilizing stochastic optimal control in aggregate production planning. *Europe Journal of Op. Research*, 1993. Pp. 199-206, v. 65.
- MADDALA, G. S. *Introduction to econometrics*. New Jersey: Prentice-Hall, 1992.
- MAKRIDAKIS, S., WHEELWRIGHT, S. C. and HYNDMAN, R. J. *Forecasting: methods and applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- MATOS, O. C. *Econometria básica: teoria e aplicações*. São Paulo: Atlas, 1995.
- MARKLAND, R. E. and SWEGART, J. R. *Quantitative methods: applications to managerial decision making*. New York: J. Wiley, 1987.
- MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 1952.
- MCCUTCHEN, Thomas W. Um software para resolver o problema quadrático linear determinístico discreto de controle ótimo. *Dissertação de Mestrado*, UFSC, agosto de 1990.
- MELlichamp, J. M. and LOVE, R. M. Production switching heuristics for the aggregate planning problem. *Management Science*, 1978. Pp. 1242-1251, v. 24.
- MOREIRA, D. Augusto. *Administração da produção e operações*. São Paulo: Pioneira, 1996.
- RAGSDALE, C. T. *Spreadsheet modeling and decision analysis: a practical introduction to management science*. Course Technology, Inc., 1995.
- RENWWICK, F. B. *Introduction to investments and finance*. New York: MacMillan, 1971.
- SACHS, J. D. e LARRAIN, F. B. *Macroeconomia*. São Paulo: Makron Books, 1995.
- SAMOHYL, R. W.. Applications of stochastic optimal control through simulation. *Congresso Nacional de Pesquisa Operacional*, Florianópolis, 3/12/ 1994.
- SAMOHYL, R. W., Controle ótimo estocástico não-linear: desenvolvimento teórico, aplicações e software. *Projeto integrado de pesquisa – CNPq*. Fev/1996.
- SAMOHYL, R. W.. A monte-carlo approach to nonlinear stochastic optimal control with an example using the HMMS data. *Conference on Management and Control of Production and Logistics*. Campinas: September, 1997.

- SCHWARZ, L. B. and JOHNSON, R. E.. An appraisal of the empirical performance of the linear decision rule for aggregate planning. *Management Science*, 1978. Pp. 844-849, v. 24.
- SCOTT, R. C. and HORVATH, P. A. On the direction of preference for moments of higher order than the variance. *The journal of finance*. September, 1990. Vol. XXXV, n. 4.
- SHEN, R. F. C.. Aggregate production planning by stochastic control. *Europe Journal of O. R.*, 1994. Pp. 346-359, v. 73.
- SIMKOWITZ, M. A. and BEEDLES, W. L. Diversification in a three-moment world. *Journal of finance and quantitative analysis*. December, 1978.
- STARR, Martin K. *Systems management of operations*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1971.
- STOPPLER, S.. Risk minimization by linear feedback. *Kyber*, 1979. Pp. 171-184, v. 8.
- TAUBERT, W. H. A search decision rule for the aggregate scheduling problem. *Management Science*, 1968. Pp. 343-358, v.14, n.6.
- THEIL, H.. *Optimal decision rules for government and industry*. Amsterdam: North-Holland, 1964.
- TUBINO, Dalvio Ferrari. *Manual de planejamento e controle da produção*. São Paulo: Atlas, 1997.
- VARIAN, Hal R. *Microeconomic analysis*. New York: W. W. Norton & Company, Inc., 1992.
- VOLLMAN, T. E., BERRY, W. L. and WHYBARK, D. C. *Manufacturing planning and control systems*. New York: McGraw-Hill, 1997.
- WELAN, U. P.. Multi-item production smoothing models with almost closed form solutions. *Management Science*, 1975. Pp. 1021-1028, v. 2.



# ANEXO

----- PcGive 9.00 session started at 15:55:47 on Wednesday 16 August 2000 -----

EQ(13) Modelling Cafe by OLS  
The present sample is: 2 (1) to 4 (12)

Variable	Coefficient	Std.Error	t-value	t-prob	PartR^2
Caf_5	-0.53632	0.19256	-2.785	0.0105	0.2522
Janeiro	498.11	69.933	7.123	0.0000	0.6881
Fevereiro	538.75	75.681	7.119	0.0000	0.6878
Março	521.12	69.111	7.540	0.0000	0.7120
Abril	565.03	73.432	7.695	0.0000	0.7202
Mai	513.97	67.705	7.591	0.0000	0.7147
Junho	487.62	63.091	7.729	0.0000	0.7220
Julho	493.58	67.499	7.312	0.0000	0.6992
Agosto	505.08	67.755	7.455	0.0000	0.7073
Setembro	590.03	73.557	8.021	0.0000	0.7367
Outubro	529.22	67.191	7.876	0.0000	0.7295
Novembro	546.89	64.826	8.436	0.0000	0.7558
Dezembro	523.31	63.558	8.233	0.0000	0.7467

R^2 = 0.993753 \sigma = 34.1503 DW = 1.58  
\* R^2 does NOT allow for the mean \*  
RSS = 26823.63972 for 13 variables and 36 observations

AR 1- 3 F( 3, 20) = 1.4768 [0.2510]  
ARCH 3 F( 3, 17) = 0.48798 [0.6952]  
Normality Chi^2(2) = 0.071245 [0.9650]  
RESET F( 1, 22) = 0.16948 [0.6846]

Analysis of 1-step forecasts

Date	Actual	Forecast	Y-Yhat	Forecast SE	t-value
4 1	337.084	299.986	37.0983	47.0467	0.788541
4 2	291.898	335.213	-43.3148	48.8622	-0.886467
4 3	356.390	374.565	-18.1747	55.3389	-0.328426
4 4	388.444	369.914	18.5296	47.6120	0.389179
4 5	289.350	325.350	-36.0002	50.5424	-0.712278
4 6	291.283	314.327	-23.0444	48.7616	-0.472594
4 7	323.717	344.173	-20.4561	51.7415	-0.395352
4 8	274.812	333.286	-58.4739	48.0512	-1.21691
4 9	393.630	375.500	18.1301	48.1205	0.376765
4 10	363.048	380.024	-16.9751	51.9249	-0.326917
4 11	365.852	403.411	-37.5586	49.2594	-0.762465
4 12	393.250	327.798	65.4519	47.2943	1.38393

Tests of parameter constancy over: 4 (1) to 4 (12)  
Forecast Chi^2(12) = 10.782 [0.5477]  
Chow F(12, 11) = 0.5989 [0.8043]

EQ(26) Modelling Milhar by OLS (using testeteseldados.in7)  
The present sample is: 2 (1) to 4 (12)

Variable	Coefficient	Std.Error	t-value	t-prob	PartR^2
Milhar_12	-0.30685	0.15659	-1.960	0.0623	0.1431
Janeiro	569.94	73.456	7.759	0.0000	0.7236
Fevereiro	545.00	68.144	7.998	0.0000	0.7355

Março	505.41	68.711	7.356	0.0000	0.7017
Abril	520.47	70.103	7.424	0.0000	0.7056
Mai	526.52	66.114	7.964	0.0000	0.7339
Junho	596.75	73.237	8.148	0.0000	0.7427
Julho	609.41	74.742	8.154	0.0000	0.7430
Agosto	502.12	64.032	7.842	0.0000	0.7278
Setembro	490.94	64.518	7.609	0.0000	0.7157
Outubro	554.87	72.440	7.660	0.0000	0.7184
Novembro	573.35	78.724	7.283	0.0000	0.6975
Dezembro	610.89	75.611	8.079	0.0000	0.7395

R<sup>2</sup> = 0.991977 \sigma = 47.7345 DW = 2.15  
 \* R<sup>2</sup> does NOT allow for the mean \*  
 RSS = 52407.39555 for 13 variables and 36 observations

AR 1- 3 F( 3, 20) = 0.60181 [0.6214]  
 ARCH 3 F( 3, 17) = 2.0587 [0.1438]  
 Normality Chi<sup>2</sup>(2) = 1.9185 [0.3832]  
 RESET F( 1, 22) = 0.88928 [0.3559]

Analysis of 1-step forecasts

Date	Actual	Forecast	Y-Yhat	Forecast SE	t-value
4 1	406.150	463.030	-56.8797	77.3868	-0.735005
4 2	387.530	392.914	-5.38417	94.3567	-0.0570619
4 3	365.260	396.600	-31.3402	76.5814	-0.409241
4 4	354.230	366.736	-12.5061	94.1885	-0.132778
4 5	401.250	404.230	-2.97956	76.8587	-0.0387667
4 6	502.360	455.222	47.1379	77.2668	0.610066
4 7	448.758	451.927	-3.16904	85.7333	-0.0369639
4 8	397.350	372.320	25.0297	77.5891	0.322593
4 9	378.250	360.018	18.2324	78.4470	0.232417
4 10	364.290	430.710	-66.4199	80.6542	-0.823515
4 11	433.259	444.625	-11.3658	79.0796	-0.143726
4 12	498.308	447.724	50.5840	77.6312	0.651594

Tests of parameter constancy over: 4 (1) to 4 (12)  
 Forecast Chi<sup>2</sup>(12) = 3.7932 [0.9869]  
 Chow F(12, 11) = 0.21011 [0.9939]

EQ(42) Modelling Colórau by OLS (using testeteseldados.in7)  
 The present sample is: 2 (1) to 4 (12)

Variable	Coefficient	Std.Error	t-value	t-prob	PartR <sup>2</sup>
Janeiro	14.267	3.1913	4.470	0.0001	0.4443
Fevereiro	10.217	3.2573	3.137	0.0043	0.2824
Junho	17.138	3.2296	5.306	0.0000	0.5297
Julho	16.925	3.2176	5.260	0.0000	0.5253
Agosto	7.1743	3.2640	2.198	0.0374	0.1620
Setembro	8.1751	3.4595	2.363	0.0262	0.1826
Novembro	18.822	3.3068	5.692	0.0000	0.5645
Dezembro	44.158	3.2823	13.453	0.0000	0.8786
Colorau_3	0.32729	0.073521	4.452	0.0002	0.4422
Colorau_4	0.33306	0.084813	3.927	0.0006	0.3815
Colorau_10	0.23053	0.080759	2.855	0.0085	0.2458

R<sup>2</sup> = 0.997569 \sigma = 5.0753 DW = 2.08  
 \* R<sup>2</sup> does NOT allow for the mean \*  
 RSS = 643.9660494 for 11 variables and 36 observations

AR 1- 3 F( 3, 22) = 0.23181 [0.8732]  
 ARCH 3 F( 3, 19) = 0.13252 [0.9395]  
 Normality Chi^2(2)= 0.88064 [0.6438]  
 Xi^2 F(14, 10) = 0.69039 [0.7444]  
 RESET F( 1, 24) = 0.90807 [0.3501]

Analysis of 1-step forecasts

Date	Actual	Forecast	Y-Yhat	Forecast SE	t-value
4 1	85.3000	89.4047	-4.10467	7.43515	-0.552063
4 2	86.5000	89.1237	-2.62373	7.71100	-0.340258
4 3	85.5625	88.9837	-3.42118	7.14880	-0.478567
4 4	84.9427	90.7993	-5.85654	7.18072	-0.815591
4 5	66.7385	77.7318	-10.9934	6.42605	-1.71075
4 6	92.8000	91.9350	0.865037	7.40424	0.116830
4 7	90.6388	92.2844	-1.64560	7.41197	-0.222019
4 8	77.6170	77.1818	0.435250	7.75844	0.0561002
4 9	81.6000	81.5230	0.0770383	7.79579	0.00988203
4 10	90.3000	87.8044	2.49556	7.45603	0.334704
4 11	95.5000	93.3738	2.12622	7.40183	0.287256
4 12	119.300	115.208	4.09216	7.41214	0.552089

Tests of parameter constancy over: 4 (1) to 4 (12)

Forecast Chi^2(12)= 6.0901 [0.9115]  
 Chow F(12, 13) = 0.39058 [0.9433]