

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Centro Tecnológico

Programa de Pós-graduação em Metrologia Científica e Industrial

Antonio Carlos Xavier de Oliveira

**Modelagem de Características Dinâmicas de  
Instrumentos de Medição**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para  
obtenção do grau de Mestre em Metrologia

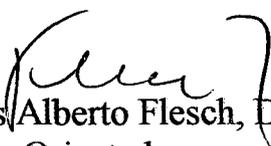
Prof. Carlos Alberto Flesch, Dr. Eng.  
Orientador

Florianópolis, dezembro de 2001

# Modelagem de Características Dinâmicas de Instrumentos de Medição

Antonio Carlos Xavier de Oliveira

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de  
**Mestre em Metrologia**  
e aprovada na sua forma final pelo  
Programa de Pós-graduação em Metrologia Científica e Industrial da UFSC.

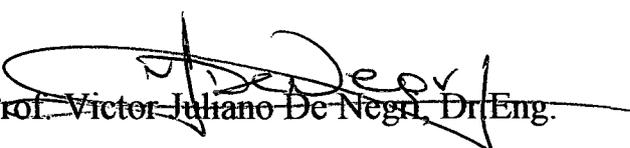
  
Prof. Carlos Alberto Flesch, Dr. Eng.  
Orientador

  
Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr. Eng.  
Coordenador do Programa de Pós-graduação em Metrologia Científica e Industrial da  
UFSC

**Banca Examinadora:**

  
Prof. Arcanjo Lenzi, Ph.D.

  
Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Junior, Dr.Eng

  
Prof. Victor Juliano De Negri, Dr.Eng

À minha esposa Vera e meus filhos Luciana, Felipe,  
Bruno e Rafael.

A Deus.

# Agradecimentos

À minha família pela compreensão, paciência e incentivo.

Ao meu orientador Professor Carlos Alberto Flesch pela ajuda, apoio, amizade, orientação e paciência, sem o que não seria possível a conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr, Coordenador do PósMCI e excelente professor, pela oportunidade que me deu de fazer o mestrado.

Ao Professor Carlos Aurélio Faria da Rocha, do Departamento de Engenharia Elétrica da UFSC, pelas valiosas informações que me foram fornecidas, na disciplina ministrada e ao longo deste trabalho.

À parceira e amiga Sílvia Regina Darrigo pelas trocas de idéias e contribuições que enriqueceram este trabalho.

Aos estagiários Alberto Régio Gomes, Alex Scheuer, Augusto De Nardin, Eduardo Nickel da Silva e Rodrigo Coral, que formaram uma equipe harmoniosa, cujo empenho e excelentes contribuições facilitaram o desenvolvimento deste trabalho.

Ao colega José Ricardo de Menezes pelo incentivo e, especialmente, pelo apoio dado na preparação da arte final da apresentação oral deste trabalho.

A todos os colegas das turmas 1999 e 2000 pelas contribuições e companheirismo.

À Rosana Magali Vieira, secretária do PósMCI, pela atenção, organização e estrutura disponibilizada.

Ao Labmetro pelo excelente quadro de professores e pelas boas instalações.

À CAPES que através do Programa de Apoio à Integração Graduação/Pós-graduação (PROIN) disponibilizou os recursos materiais necessários à realização deste trabalho.

A todos os demais que colaboraram para a realização desta conquista.

# Sumário

<b>Índice de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Índice de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xii</b>
<b>Resumo</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiv</b>
<b>Capítulo 1</b>	
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos do trabalho .....	1
1.2 Estrutura de apresentação do trabalho .....	1
<b>Capítulo 2</b>	
<b>CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE INSTRUMENTOS</b>	<b>3</b>
2.1 Sinais .....	4
2.1.1 Sinais estáticos e sinais dinâmicos .....	4
2.1.2 Sinais analógicos e sinais discretos .....	5
2.2 Sistemas de ordem zero, 1ª ordem e 2ª ordem .....	6
2.2.1 Sistema de ordem zero .....	7
2.2.2 Sistema de 1ª ordem .....	7
2.2.3 Sistema de 2ª ordem .....	8
2.3 Parâmetros representativos do comportamento dinâmico de instrumentos .....	9
2.3.1 Constante de tempo .....	10
2.3.2 Frequência de corte .....	11
2.3.3 Tempo de resposta ( <i>settling time</i> ) .....	11
2.3.4 Frequência de ressonância .....	13
2.3.5 Razão de amortecimento .....	14
2.3.6 Sensibilidade .....	14
2.3.7 <i>Slew-rate</i> .....	15
2.3.8 Impedâncias de entrada e de saída .....	17
2.3.9 Razão de rejeição de modo comum .....	18
2.3.10 Ruído .....	18

<b>Capítulo 3</b>	
<b>MÉTODO DE MODELAGEM DO COMPORTAMENTO DINÂMICO</b>	
<b>DE INSTRUMENTOS</b>	<b>25</b>
3.1 Modelo genérico de uma característica dinâmica .....	26
3.1.1 Sistema de 1ª ordem .....	27
3.1.2 Sistema de 2ª ordem .....	40
3.1.3 Filtros passa todas ( <i>all pass</i> ) de 1ª e de 2ª ordem (equalizador de fase) .....	56
3.2 Implementação de modelos de parâmetros característicos de instrumentos .....	59
3.2.1 Slew-rate .....	59
3.2.2 Impedância de entrada .....	60
3.2.3 Impedância de saída .....	62
3.2.4 Tempo de resposta .....	63
3.2.5 Sensibilidade .....	63
3.2.6 Razão de rejeição de modo comum .....	65
3.2.7 Ruído .....	71
<b>Capítulo 4</b>	
<b>MODELOS DE INSTRUMENTOS</b>	<b>75</b>
4.1 Termistor .....	76
4.1.1 Análise das especificações .....	76
4.1.2 Característica dinâmica .....	77
4.1.3 Modelo .....	79
4.1.4 Ensaios .....	80
4.2 Amplificador de instrumentação .....	84
4.2.1 Análise das especificações .....	85
4.2.2 Características dinâmicas .....	87
4.2.3 Modelo .....	91
4.2.4 Ensaios .....	98
<b>Capítulo 5</b>	
<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>104</b>
5.1 Conclusões .....	104
5.2 Sugestões para futuros trabalhos .....	105
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>107</b>

# Índice de Figuras

Figura 2.1	- Simulação com sinais discretos .....	3
Figura 2.2	- Classificação de sinais .....	4
Figura 2.3	- Sinais determinísticos .....	4
Figura 2.4	- Sinal não determinístico .....	5
Figura 2.5	- Curva da resistência versus temperatura de um termistor .....	6
Figura 2.6	- Sinal discreto .....	6
Figura 2.7	- Constante de tempo .....	10
Figura 2.8	- Frequência de corte .....	11
Figura 2.9	- Resposta do sistema de 1ª ordem ao degrau unitário .....	12
Figura 2.10	- Resposta ao degrau unitário de um sistema de 2ª ordem subamortecido .....	12
Figura 2.11	- Frequência de ressonância .....	14
Figura 2.12	- Respostas do sistema de 2ª ordem ao degrau unitário .....	14
Figura 2.13	- Gráfico do ganho versus a frequência para o amplificador INA102 da Burr-Brown .....	15
Figura 2.14	- <i>Slew-rate</i> .....	16
Figura 2.15	- Distorção da tensão de saída de um amplificador .....	17
Figura 2.16	- Impedância equivalente .....	17
Figura 2.17	- RRMC versus frequência RTI .....	18
Figura 2.18	- Regiões de domínio dos ruídos branco e <i>flicker</i> .....	19
Figura 2.19	- Ruído pipoca ( <i>popcorn noise</i> ) .....	23
Figura 3.1	- Etapas de obtenção de equações de diferenças .....	27
Figura 3.2	- Módulo do sistema de 1ª ordem .....	28
Figura 3.3	- Sinais discretos .....	30
Figura 3.4	- Ensaio do sistema de 1ª ordem com degrau crescente .....	33
Figura 3.5	- Ensaio do sistema de 1ª ordem com degrau decrescente .....	35
Figura 3.6	- Resposta do sistema de 1ª ordem a rampa .....	36
Figura 3.7	- Resposta a um sinal senoidal .....	37
Figura 3.8	- Resposta ao impulso com área $A = 1$ e $T = 2$ s .....	40
Figura 3.9	- Resposta ao impulso com área $A = 1$ e $T = 2$ ms .....	40
Figura 3.10	- Módulo do sistema de 2ª ordem .....	42

Figura 3.11	- Ensaio do sistema de 2ª ordem com degrau crescente .....	48
Figura 3.12	- Respostas à rampa .....	50
Figura 3.13	- Resposta à rampa cortada .....	52
Figura 3.14	- Respostas em frequência .....	53
Figura 3.15	- Respostas ao impulso .....	55
Figura 3.16	- Módulo do filtro passa todas de 1ª ordem .....	57
Figura 3.17	- Módulo do filtro passa todas de 2ª ordem .....	59
Figura 3.18	- Módulo do <i>slew-rate</i> .....	59
Figura 3.19	- Resposta do modelo do <i>slew-rate</i> .....	60
Figura 3.20	- Impedância de entrada .....	60
Figura 3.21	- Módulo de impedância de entrada .....	62
Figura 3.22	- Cadeia de medição .....	62
Figura 3.23	- Impedância de saída .....	63
Figura 3.24	- Gráfico ganho versus frequência .....	64
Figura 3.25	- Módulo de 1ª ordem do ganho versus frequência .....	64
Figura 3.26	- Módulo da sensibilidade .....	65
Figura 3.27	- RRMC em função da frequência .....	66
Figura 3.28	- Módulo da RRMC .....	66
Figura 3.29	- Pontos de ensaios do módulo da RRMC .....	67
Figura 3.30	- Ajuste do filtro passa todas de 1ª ordem .....	67
Figura 3.31	- Resposta do filtro passa todas de 1ª ordem .....	68
Figura 3.32	- Tensão devido à RRMC com e sem equalizador - ( 0 e 150 ) Hz .....	68
Figura 3.33	- Tensão devido à RRMC com e sem equalizador - ( 0 e 1000 ) Hz .....	69
Figura 3.34	- Resposta do filtro passa todas de 2ª ordem .....	69
Figura 3.35	- Tensão de RRMC com e sem equalizador até 150 Hz .....	70
Figura 3.36	- Tensão de RRMC com e sem equalizador até 1000 Hz .....	70
Figura 3.37	- Gráfico das tensões dos pontos 1, 2 e 3 da Figura 3.29 .....	71
Figura 3.38	- Tensão de saída com e sem equalizador de fase .....	71
Figura 3.39	- Função densidade de probabilidade para ruído .....	72
Figura 3.40	- Normal truncada .....	72
Figura 3.41	- Módulo da tensão de ruído <i>flicker</i> .....	73
Figura 3.42	- Módulo da corrente de ruído <i>flicker</i> .....	74
Figura 3.43	- Módulo da tensão de ruído branco .....	74
Figura 3.44	- Módulo da corrente de ruído branco .....	74
Figura 4.1	- Circuito de ensaio da constante e tempo do termistor .....	78
Figura 4.2	- Modelo da constante de tempo do termistor Omega 44007 .....	79
Figura 4.3	- Modelo do termistor OMEGA44007 .....	79
Figura 4.4	- Ensaio do termistor OMEGA tipo 44007 número de série 001 .....	81
Figura 4.5	- Degrá 0°C a 75°C, ponto 2 do diagrama da Figura 4.4, saída em tensão .....	82

Figura 4.6	- Degrau 0°C a 75°C, ponto 1 do diagrama da Figura 4.4, saída em temperatura ....	82
Figura 4.7	- Degrau 0°C a 75°C, ponto 3 do diagrama da Figura 4.4, saída auto-aquecimento .	83
Figura 4.8	- Degrau 0°C a 75°C, ponto 4 do diagrama da Figura 4.4, saída ruído térmico .....	83
Figura 4.9	- Degrau 75°C a 0°C, ponto 1, saída em temperatura .....	83
Figura 4.10	- Degrau 75°C a 0°C, ponto 3, saída auto-aquecimento .....	84
Figura 4.11	- Ruído térmico, degrau 75°C a 0°C .....	84
Figura 4.12	- Ganho versus frequência ( -3 dB ) – AD624A .....	88
Figura 4.13	- Gráfico da RRMC versus frequência .....	90
Figura 4.14	- Densidade espectral de ruído em tensão e corrente .....	91
Figura 4.15	- Diagrama do amplificador .....	93
Figura 4.16	- Bloco de entrada do amplificador AD624A .....	94
Figura 4.17	- Bloco de ruído do amplificador AD624A .....	95
Figura 4.18	- Módulo de saturação .....	97
Figura 4.19	- Bloco de saída do amplificador AD624A .....	97
Figura 4.20	- Tempo de resposta para ganho 1 .....	99
Figura 4.21	- Tempo de resposta para ganho 100 .....	100
Figura 4.22	- Tempo de resposta para ganho 200 .....	100
Figura 4.23	- Tempo de resposta para ganho 500 .....	100
Figura 4.24	- Tempo de resposta para ganho 1000 .....	100
Figura 4.25	- Ganho versus frequência .....	101
Figura 4.26	- Resposta do <i>slew rate</i> ao degrau .....	102
Figura 4.27	- Resposta do <i>slew rate</i> a senóide .....	102
Figura 4.28	- Ensaio modelo completo com RRMC .....	103
Figura 4.29	- Defasagem do modelo do amplificador .....	103
Figura 4.30	- Resposta ao degrau do modelo do amplificador AD624A .....	103

# Índice de Tabelas

Tabela 2.1 - Associação dos parâmetros dos modelos de 1ª e de 2ª ordem às formas de modelagem .....	10
Tabela 3.1 - Associação entre características e módulos propostos.....	26
Tabela 4.1 - Especificação de fabricantes de termistor .....	76
Tabela 4.2 - Amplificadores de instrumentação – especificações .....	85
Tabela 4.3 - Resposta em frequência para pequenos sinais do AD624A .....	89
Tabela 4.4 - Ajustes de um exemplar do amplificador AD624A .....	98
Tabela 4.5 - Tempo de resposta.....	99
Tabela 4.6 - Frequências de corte especificadas e medidas .....	101

# Lista de Abreviaturas

- RRMC - Razão de rejeição de modo comum
- $NA_{\tau}$  - Número de amostras em uma constante de tempo
- $NA_{T_n}$  - Número de amostras em um período natural não amortecido
- $\zeta$  - Razão de amortecimento
- $\tau$  - Constante de tempo
- $\omega_n$  - Frequência natural não amortecida
- DAQ - Placa de aquisição de dados
- FET - Transistor de efeito de campo
- K - Sensibilidade estática
- n - Número da amostra
- RTI - Dado especificado em relação à entrada
- RTO - Dado especificado em relação à saída
- $T_a$  - Intervalo de tempo entre amostras consecutivas
- VIM - Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia

# Resumo

O presente trabalho teve como objetivo desenvolver um método para modelar as características dinâmicas de instrumentos de medição. Esta atividade faz parte de um conjunto de trabalhos que vêm sendo executados junto ao Laboratório de Metrologia e Automatização da UFSC visando desenvolver um sistema de simulação de instrumentos de medição.

Os valores das características do comportamento dinâmico são obtidos das especificações dos fabricantes de instrumentos. Esses valores, após passarem por um processo de escolha, são as entradas dos modelos dessas características. Esses foram feitos de forma modular, visando otimizar a sua utilização em diversos modelos de instrumentos.

Foram implementados através de equações de diferenças, possibilitando sua simulação em ambientes discretos.

Foi feita comparação entre a aplicação de sinais padronizados em tais modelos e nos correspondentes modelos matemáticos tradicionais que empregam equações diferenciais. Quantificaram-se as diferenças entre os resultados obtidos através das duas formas de abordagem. Foi constatada a plena adequação dos modelos propostos.

Como exemplos do método foram implementados, utilizando-se a linguagem LabView, dois modelos de instrumentos: um termistor, composto por uma única característica dinâmica e um amplificador de instrumentação, composto de várias características dinâmicas.

# Abstract

The objective of the present work was to develop a method to model the dynamic behavior characteristics of measurement instruments. This activity is part of a body of work that has been developed by the UFSC Metrology and Automation Laboratory as a tool to implement an instrument measurement simulation system.

The characteristic's values that represents the dynamic behavior are obtained from the manufacturer's specifications (the data sheet). Those values were selected to be input to the respective dynamic characteristic model, using a statistical process.

The dynamic models were developed in a modular shape in order to reduce effort on different instrument's implementation.

The dynamic characteristic models were developed using equations of differences, making possible your simulation in discrete environment.

Applying standard signals to the dynamic models and to the corresponding mathematical models that uses differential equation, it was possible to compare the results. The differences were quantified among the data obtained from the two analysis forms. The proposed models can be verified because the results of the two methods have **good correlation**.

Finally, two models are provided as examples of the aforementioned implementation method. These are: a thermistor, comprised of only one dynamic characteristic, and an amplifier instrumentation, comprised by several dynamic characteristics. These models were implemented using Labview's language.

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Este trabalho integra um conjunto de atividades, desenvolvidas junto ao Labmetro – Laboratório de Metrologia e Automatização, da UFSC, direcionadas ao desenvolvimento de recursos de simulação aplicáveis a Metrologia.

A este trabalho coube a investigação sobre formas de tratar o comportamento dinâmico de instrumentos de medição sob a óptica da modelagem, com ênfase na aplicação de equações de diferenças.

### 1.1 Objetivos do trabalho

O objetivo deste trabalho é estabelecer um método de modelagem das características dinâmicas de instrumentos de medição, utilizando como parâmetros as especificações fornecidas pelo fabricante. O método deve permitir que modelos representativos do estado da arte de características dinâmicas de instrumentos possam ser implementados através de softwares.

Os modelos devem ser implantados de forma modular, para possibilitar a sua utilização na modelagem do comportamento dinâmico de diferentes instrumentos de medição.

### 1.2 Estrutura de apresentação do trabalho

No capítulo 2 são apresentados os principais tipos de sinais e de sistemas e os parâmetros representativos do comportamento dinâmico de instrumentos que serão utilizados ao longo deste trabalho.

No capítulo 3 é apresentado um método de modelagem de características dinâmicas através de equações de diferenças. É também feita a modelagem das principais características que estabelecem o comportamento dinâmico de instrumentos.

No capítulo 4 são mostrados exemplos modelagem de instrumentos, sendo escolhidos dois instrumentos: um composto por uma única característica dinâmica e outro composto por diversas características dinâmicas.

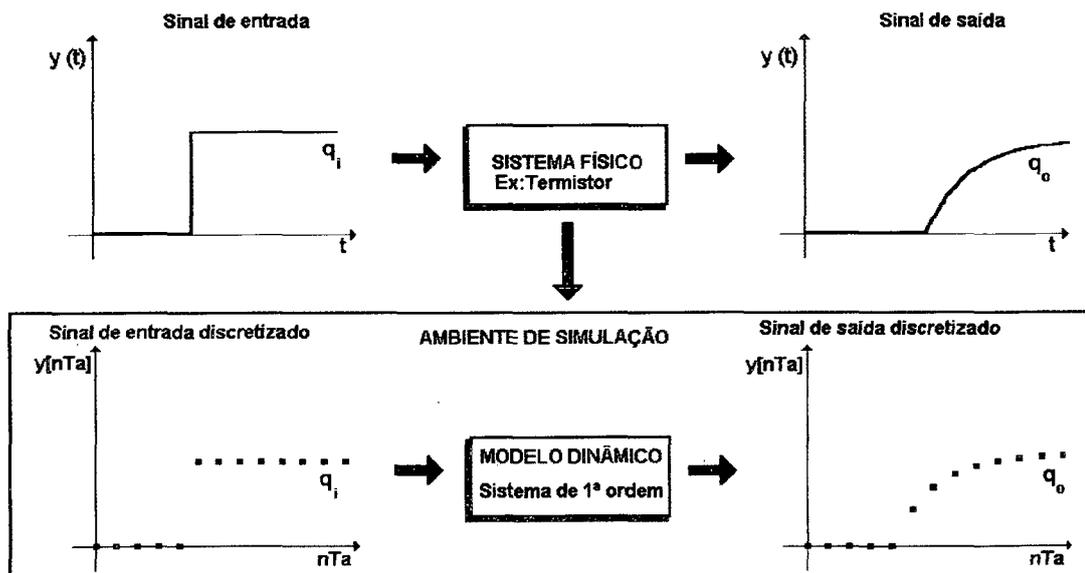
No capítulo 5 são apresentadas as conclusões deste trabalho descrevendo os objetivos alcançados. Conclui-se pela viabilidade do método na implantação de futuros modelos e sugere-se a pesquisa de novas ferramentas para agilizar o desenvolvimento de novos modelos, através de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# CARACTERIZAÇÃO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE INSTRUMENTOS

Neste capítulo são definidos os tipos de sinais, os sistemas e as principais características dinâmicas especificadas por fabricantes de instrumentos.

A Figura 2.1 mostra um exemplo da utilização de sinais e sistemas na análise, modelagem e na simulação do comportamento dinâmico de um instrumento simples.



### Legenda:

- $q_i$  - Sinal de entrada;
- $q_o$  - Sinal de saída;
- $t$  - tempo;
- $nTa$  - número da amostra vezes o tempo entre amostras.

Figura 2.1 - Simulação com sinais discretos

Os sinais definidos neste trabalho são os principais sinais padronizados utilizados para ensaios e modelagem de instrumentos e de cadeias de medição. Esses sinais padronizados são normalmente empregados na definição de parâmetros característicos

que representam o comportamento dinâmico de instrumentos.

São definidos os sistemas de 1ª e de 2ª ordem. Eles são utilizados para a modelagem do comportamento dinâmico de instrumentos. Além dos sistemas de 1ª e de 2ª ordem são utilizadas outras formas de modelagem, tais como: equações algébricas e distribuições de probabilidades.

Adicionalmente são comentados os critérios utilizados para escolha dos parâmetros representativos das características dinâmicas de instrumentos fornecidos por fabricantes.

## 2.1 Sinais

São definidos os tipos de sinais relacionados a sistemas físicos que são utilizados nos ensaios e análises das respostas dos modelos desses sistemas físicos.

### 2.1.1 Sinais estáticos e sinais dinâmicos

Os sinais podem ser classificados conforme a Figura 2.2 [1].

Sinais estáticos são os que não variam com o tempo [1].

Sinais dinâmicos são definidos como sinais dependentes do tempo [1].



Figura 2.2 - Classificação de sinais

Sinal determinístico é o que pode ser definido por uma expressão matemática, por uma tabela de dados ou por uma regra bem definida [1] [25]. São exemplos de sinais determinísticos: senóide, degrau e rampa (Figura 2.3).

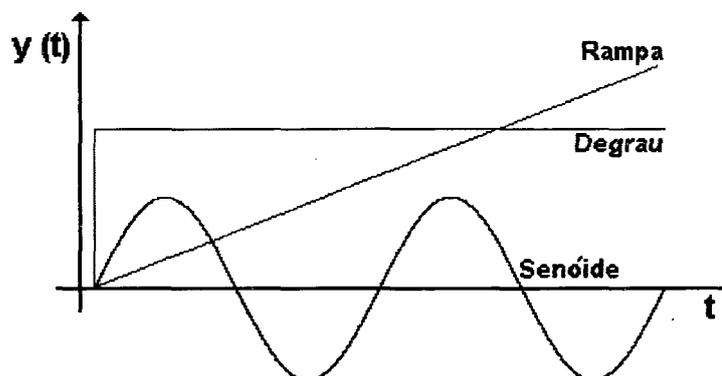


Figura 2.3 - Sinais determinísticos

Sinal não determinístico é o que não pode ser determinado antes que ocorra, apesar de que certas características do sinal possam ser conhecidas antecipadamente [1]. Como exemplo, pode-se considerar o ruído térmico, do qual se conhece o seu valor máximo, mas não se pode determinar quando este valor irá ocorrer. A Figura 2.4 mostra um exemplo de um sinal não determinístico.



Figura 2.4 - Sinal não determinístico

Sinal periódico é o sinal em que o valor instantâneo do sinal se repete em intervalos regulares de tempo. Pode-se citar como exemplos o movimento de um pêndulo ideal ou a variação da temperatura no cilindro de uma máquina de combustão interna, sob condições de operação constantes [1].

Sinais periódicos podem ser classificados como monofreqüenciais ou multifreqüenciais [1]. Sinais periódicos simples são os que contêm uma única freqüência. Sinais periódicos complexos contêm múltiplas freqüências e podem ser representados como uma superposição de múltiplos sinais periódicos simples.

Sinais não periódicos são usados para descrever sinais determinísticos que não se repetem em intervalos regulares, como por exemplo a função degrau [1].

### 2.1.2 Sinais analógicos e sinais discretos

A grande maioria dos sinais envolvidos em sistemas físicos é analógico. A denominação analógico deriva do fato de tal sinal ser análogo ao sinal físico que ele representa [24]. Sinais analógicos são sinais definidos para qualquer valor de tempo, exibindo uma variação contínua.

Matematicamente esses sinais podem ser representados por funções contínuas de uma variável. São exemplos de sinais analógicos  $x_1 = \cos \pi t$  ou  $x_2 = e^{-|t|}$ , para  $-\infty < t < \infty$  [24] [25]. Um exemplo prático é a variação da resistência de um termistor com a temperatura, mostrado na Figura 2.5.

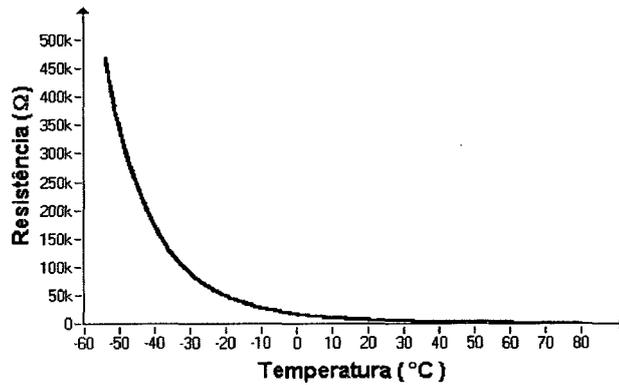


Figura 2.5 - Curva da resistência versus temperatura de um termistor

Sinais discretos são sinais definidos somente para certos instantes de tempo [1] (Figura 2.6).

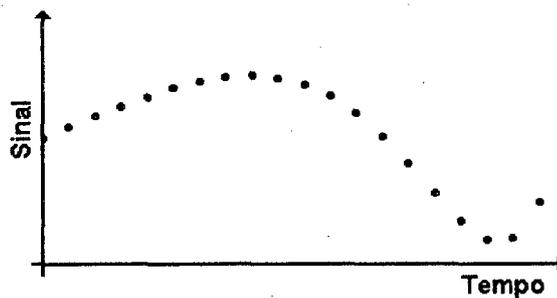


Figura 2.6 - Sinal discreto

Um exemplo de um sinal discreto no tempo é o sinal  $x(nT_a) = e^{-nT_a}$  no qual  $n$  é o número da amostra, variando de 0 a  $\infty$  e  $T_a$  é o tempo entre amostras. Exemplos práticos são o número de pulsos por minuto da saída de um *encoder* e o sinal de saída de um conversor analógico digital.

## 2.2 Sistemas de ordem zero, 1ª ordem e 2ª ordem

Um modelo matemático, largamente utilizado, para estudo de respostas dinâmicas de instrumentos de medição é a equação diferencial linear ordinária com coeficientes constantes [2].

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i \quad (2.1)$$

Onde:  $q_i$  - sinal de entrada;

$q_o$  - sinal de saída;

$t$  - tempo;

$a$ 's e  $b$ 's são combinações dos parâmetros físicos do instrumento, considerados constantes.

Em análises, projetos e aplicações de sistemas de medição, o conceito de função de transferência operacional é muito útil [2]. Para encontrar a equação que define esse importante conceito, aplica-se o operador diferencial  $D = \frac{d}{dt}$  na Equação 2.1:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) q_o = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0) q_i \quad (2.2)$$

Aplicando-se à Equação 2.2, um tratamento como se fosse uma equação algébrica chega-se a uma relação entre saída e entrada. Essa relação entre a saída  $q_o$  e a entrada  $q_i$  é a função de transferência operacional, conforme mostra a Equação 2.3 [2].

$$\frac{q_o}{q_i}(D) = \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0} \quad (2.3)$$

### 2.2.1 Sistema de ordem zero

É um sistema que pode ser modelado por um caso particular da Equação 2.1 em que todos os coeficientes, exceto  $a_0$  e  $b_0$ , são iguais a zero, transformando a equação diferencial em uma simples equação algébrica [2].

$$a_0 q_o = b_0 q_i \quad (2.4)$$

$$q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i = K q_i \quad (2.5)$$

Onde:  $K = \frac{a_0}{b_0}$  - sensibilidade estática, ou ganho no regime estático.

Qualquer instrumento que obedece em toda a sua faixa de operação à Equação 2.5 é definido como instrumento de ordem zero [2].

Como esta é uma equação algébrica, a saída  $q_o$  do instrumento segue perfeitamente a entrada sem distorção ou defasagem. Por isso, o instrumento de ordem zero apresenta comportamento dinâmico ideal.

### 2.2.2 Sistema de 1ª ordem

É um sistema que pode ser modelado por um caso particular da Equação 2.1 em que todos os coeficientes são iguais a zero, exceto  $a_0$ ,  $a_1$ , e  $b_0$ , transformando-a em uma equação diferencial de 1ª ordem.

$$a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i \quad (2.6)$$

Qualquer instrumento que obedece em toda a sua faixa de operação à Equação 2.6 é definido como instrumento de 1ª ordem [2] [27].

Dividindo-se todos os termos da Equação 2.6 por  $a_0$ , com a finalidade de fazer o coeficiente de  $q_o$  ser igual a 1, é obtida a Equação 2.7:

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dq_o}{dt} + q_o = \frac{b_0}{a_0} q_i \quad (2.7)$$

Fazendo-se:  $\frac{b_0}{a_0} = K$  - sensibilidade estática, ou ganho no regime estático;

$$\frac{a_1}{a_0} = \tau - \text{constante de tempo.}$$

A constante de tempo  $\tau$  é sempre especificada em unidade de tempo, enquanto a sensibilidade estática  $K$  é especificada pela unidade resultante da saída dividida pela entrada. Para qualquer ordem de sistema  $K$  é definido como  $\frac{b_0}{a_0}$  e tem sempre o mesmo significado físico. A sensibilidade estática  $K$  é a relação da quantidade de saída por unidade de entrada quando a entrada é estática (constante), pois nessa condição todos os termos da equação diferencial são zero [2].

Substituindo-se  $\tau$  e  $K$  na Equação 2.7, é obtida a forma mais usual da equação que define o sistema de 1ª ordem, que é a Equação 2.8:

$$\tau \frac{dq_o}{dt} + q_o = Kq_i \quad (2.8)$$

Pode-se observar que os parâmetros  $K$  e  $\tau$  definem completamente o sistema de 1ª ordem.

São exemplos de instrumentos que têm um comportamento dinâmico que pode ser modelado por um sistema de 1ª ordem: termômetro de bulbo, termistor e termorresistor [1].

### 2.2.3 Sistema de 2ª ordem

É um sistema que pode ser modelado por um caso particular da Equação 2.1 em que todos os coeficientes são iguais a zero, exceto  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $b_0$ , transformando-a em uma equação diferencial de 2ª ordem.

$$a_2 \frac{d^2 q_o}{dt^2} + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_0 q_i \quad (2.9)$$

Qualquer instrumento que obedece em toda a sua faixa de operação à Equação 2.9 é definido como instrumento de 2ª ordem [2].

Como nos instrumentos de 1ª ordem, uma forma mais usual, amplamente aceita da Equação 2.9, é definida e utilizada para a modelagem de instrumentos [1].

Dividindo-se todos os termos da Equação 2.9 por  $a_0$  com a finalidade de fazer o coeficiente de  $q_0$  ser igual a 1, vem:

$$\frac{a_2}{a_0} \frac{d^2 q_0}{dt^2} + \frac{a_1}{a_0} \frac{dq_0}{dt} + q_0 = \frac{b_0}{a_0} q_i \quad (2.10)$$

Onde:  $K = \frac{b_0}{a_0}$  - sensibilidade estática ou ganho no regime estático;

$$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} - \text{frequência natural não amortecida (rad/s);}$$

$$\zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} - \text{razão de amortecimento (adimensional).}$$

Substituindo-se esses parâmetros na Equação 2.10, é obtida a forma mais usual da equação que define o sistema de 2ª ordem, que é a Equação 2.11:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_0}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dq_0}{dt} + q_0 = Kq_i \quad (2.11)$$

Estes três parâmetros:  $K$ ,  $\omega_n$  e  $\zeta$ , definem completamente um sistema de 2ª ordem.

Os sistemas de 2ª ordem, que modelam os instrumentos, podem ser classificados em três tipos, dependendo do valor do amortecimento [37]:

- subamortecido, quando  $0 \leq \zeta < 1$
- sobreamortecido, quando  $\zeta > 1$
- criticamente amortecido, quando  $\zeta = 1$

São exemplos de instrumentos que têm um comportamento dinâmico que pode ser modelado por um sistema de 2ª ordem: transdutores de pressão com diafragma e acelerômetros [1].

### 2.3 Parâmetros representativos do comportamento dinâmico de instrumentos

A especificação dos parâmetros representativos das características dinâmicas dos instrumentos, por parte dos fabricantes, é feita a partir de modelos matemáticos. O instrumento é tratado como um sistema, recebendo o tratamento matemático da teoria de sistemas, conforme abordado no item 2.2. Os parâmetros característicos são obtidos de respostas a entradas padronizadas. Tais modelos matemáticos podem estar representando o comportamento dinâmico do instrumento como um todo ou somente efeitos decorrentes de situações específicas [62].

Adicionalmente aos modelos de 1ª e 2ª ordem é usual que informações complementares sejam fornecidas. Nos itens 2.3.7 e 2.3.10 são tratadas essas informações complementares.

A Tabela 2.1 mostra a associação entre parâmetros característicos fornecidos por fabricantes e formas usuais de modelagem:

Tabela 2.1 - Associação dos parâmetros dos modelos de 1ª e de 2ª ordem às formas de modelagem

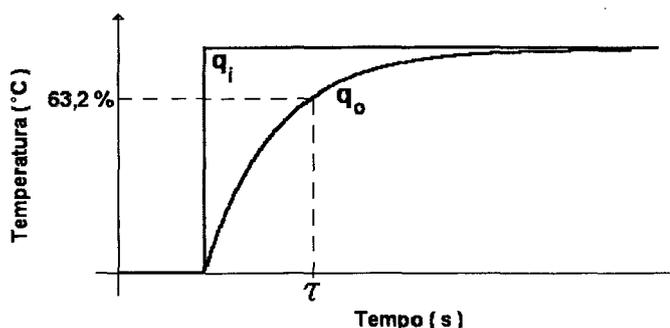
Parâmetros representativos	Forma de modelagem associada
Impedância de entrada	Sistema de 1ª ordem
Impedância de saída	Sistema de 1ª ordem
Sensibilidade	Sistema de 1ª e de 2ª ordem
Razão de rejeição de modo comum	Sistema de 1ª ordem
Constante de tempo	Sistema de 1ª ordem
Tempo de resposta	Sistema de 1ª e de 2ª ordem
Frequência de corte	Sistema de 1ª e de 2ª ordem
Frequência de ressonância	Sistema de 2ª ordem
Razão de amortecimento	Sistema de 2ª ordem

A seguir são mostrados os principais parâmetros representativos do comportamento dinâmico de instrumentos.

### 2.3.1 Constante de tempo

É o tempo necessário para que a resposta de um instrumento de 1ª ordem alcance 63,2% do valor final na sua saída, quando é aplicado um degrau na sua entrada [2] [26] [43]. É o parâmetro que define um sistema de 1ª ordem.

A Figura 2.7 mostra a resposta de um termistor a um degrau de temperatura. Cabe ressaltar que, sendo uma característica física do sistema, a constante de tempo independente do tamanho do degrau de temperatura.



**Legenda:**  
 $\tau$  - Constante de tempo;  
 $q_i$  - sinal de entrada;  
 $q_o$  - sinal de saída.

Figura 2.7 - Constante de tempo

### 2.3.2 Frequência de corte

É a frequência na qual a amplitude do sinal de saída de um instrumento apresenta uma queda de 3 dB em relação à amplitude do sinal de saída na frequência zero [41].

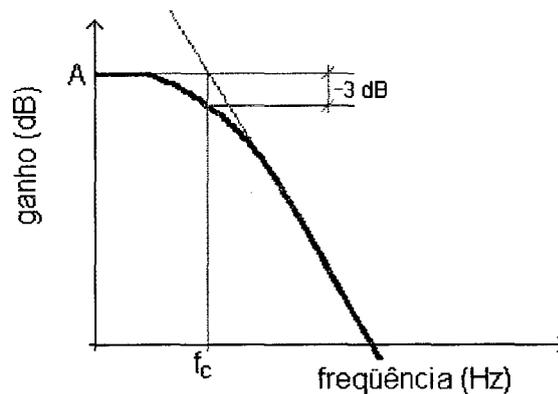
Nos sistemas de 1ª ordem a frequência de corte está relacionada com a constante de tempo através da Equação 2.12. Pode-se concluir que quanto maior for a frequência de corte, menor será a constante de tempo.

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (2.12)$$

Onde:  $f_c$  - frequência de corte;

$\tau$  - constante de tempo.

A Figura 2.8 mostra a frequência de corte de um amplificador.



Legenda:  
 $f_c$  - Frequência de corte.

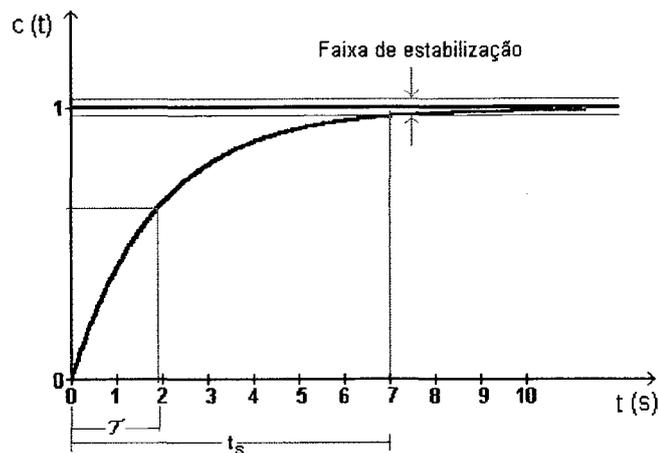
Figura 2.8 - Frequência de corte

### 2.3.3 Tempo de resposta (settling time)

A definição desse parâmetro dada pelo Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia - VIM é: "Intervalo de tempo entre o instante em que um estímulo é submetido a uma variação brusca e o instante em que a resposta atinge e permanece dentro de limites especificados em torno do seu valor final estável".

Os limites especificados em torno do seu valor final estável é chamado de faixa de estabilização (*tolerance band*). A largura dessa faixa é especificada por uma porcentagem absoluta do valor final (normalmente de 0,01% a 5%) [2] [3] [13][36].

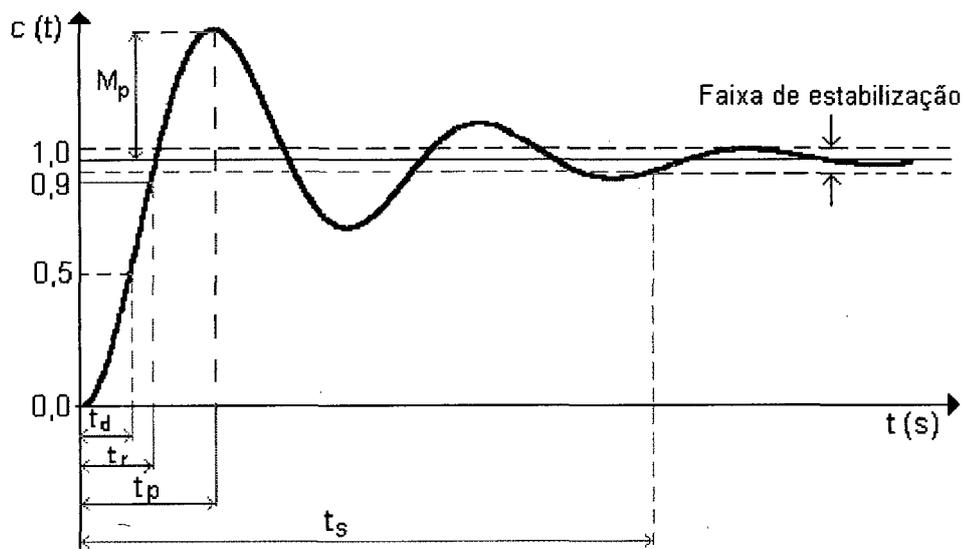
O tempo de resposta  $t_s$  é uma característica de instrumentos de 1ª e de 2ª ordem. A Figura 2.9 mostra o tempo de resposta para um instrumento de 1ª ordem e a Figura 2.10 para um de 2ª ordem.



**Legenda:**

$t_s$  - tempo de resposta.

**Figura 2.9** - Resposta do sistema de 1ª ordem ao degrau unitário



**Legenda:**

$t_s$  - Tempo de resposta (*settling time*);

$t_r$  - Tempo de subida (*rising time*);

$t_d$  - Tempo de atraso (*delay time*);

$t_p$  - Instante de pico (*peak time*);

$M_p$  - Sobre-sinal máximo (*overshoot*).

**Figura 2.10** - Resposta ao degrau unitário de um sistema de 2ª ordem subamortecido

Outras características relacionadas com o tempo de resposta do sistema de 2ª ordem são:

**a. Tempo de subida (*rising time*) –  $t_r$**

De acordo com diferentes definições [3] [13] [36] é o tempo necessário para a resposta de um instrumento passar de 10% a 90%, 5% a 95% ou de 0 a 100% do seu valor final, após ser aplicado um degrau na entrada. Para instrumentos de 2ª ordem subamortecidos, usa-se a faixa de 10% a 90% para definir o tempo de subida [13] (Figura 2.10).

**b. Tempo de atraso (*delay time*) -  $t_d$** 

É o tempo necessário para a resposta de um instrumento alcançar a metade do valor final, após a aplicação de um degrau na entrada [13] (Figura 2.10).

**c. Instante de pico (*peak time*) –  $t_p$** 

É o tempo necessário para a resposta de um instrumento alcançar o primeiro pico do sobre-sinal, após a aplicação de um degrau na entrada [13] (Figura 2.10).

**d. Sobre-sinal máximo (percentual) (*overshoot*) -  $M_p$** 

O sobre-sinal máximo de um instrumento é o máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor final (Figura 2.10). A Equação 2.13 define a sua forma mais usual que é o máximo sobre-sinal percentual [13].

$$M_p \% = \frac{M_p - \text{Valorfinal}}{\text{Valorfinal}} \cdot 100\% \quad (2.13)$$

Onde:  $M_p$  - valor do sobre-sinal;

Valorfinal - valor da resposta após o tempo de resposta.

**2.3.4 Freqüência de ressonância**

A freqüência de ressonância de um instrumento é a freqüência do sinal de entrada aplicada ao instrumento que produz uma resposta de máxima amplitude [23].

Para um sistema elétrico, por exemplo um circuito RLC série ou paralelo, a freqüência de ressonância é dada pela Equação 2.14.

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.14)$$

Onde:  $f_r$  - freqüência de ressonância (Hz);

L - indutância (H);

C - capacitância (F).

Para um sistema mecânico com um grau de liberdade, a freqüência de ressonância é dada pela Equação 2.15.

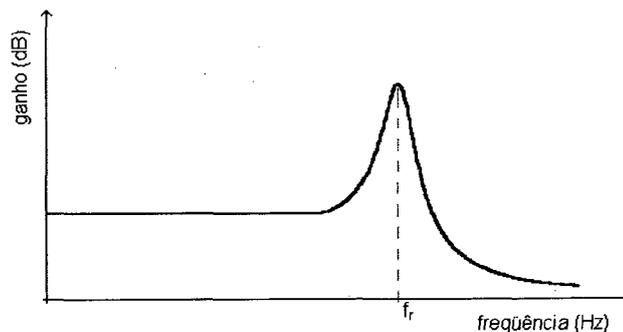
$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.15)$$

Onde:  $f_r$  - freqüência de ressonância (Hz);

k - constante de mola (N/m);

m - massa (kg).

A freqüência de ressonância está mostrada na Figura 2.11, na qual pode-se verificar que quanto maior for o seu valor maior será a resposta plana do instrumento. Um exemplo da utilização dessa característica é na definição da faixa de operação de acelerômetros.



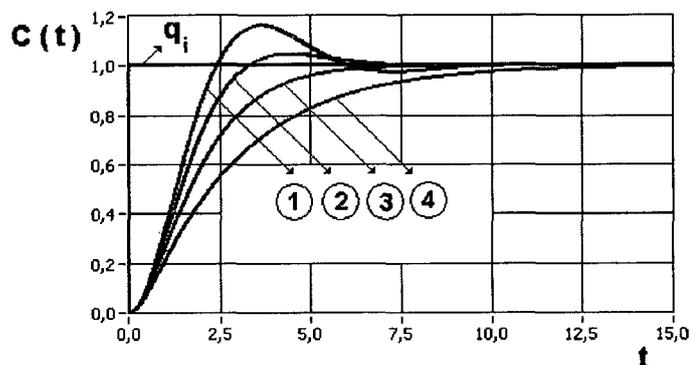
**Legenda:**

$f_r$  - Frequência de ressonância.

**Figura 2.11 - Frequência de ressonância**

### 2.3.5 Razão de amortecimento

É um parâmetro dos sistemas de 2ª ordem [1] [2] [13] [27] [36]. O valor da razão de amortecimento é normalmente determinado a partir da especificação requerida de overshoot máximo (*overshoot*) [13]. A Figura 2.12 mostra as respostas de um sistema de 2ª ordem, a um degrau unitário, para diversos valores da razão de amortecimento.



**Legenda:**

$q_i$  - sinal de entrada;

1 -  $\zeta = 0,5$  (Subamortecido);

2 -  $\zeta = 0,7$  (Subamortecido);

3 -  $\zeta = 1$  (Criticamente amortecido);

4 -  $\zeta = 1,5$  (Sobreamortecido).

**Figura 2.12 - Respostas do sistema de 2ª ordem ao degrau unitário**

### 2.3.6 Sensibilidade

De acordo com o VIM, sensibilidade é: “Variação da resposta de um instrumento de medição dividida pela correspondente variação do estímulo”.

Um exemplo dessa característica é o ganho do amplificador para pequenos sinais. A Figura 2.13 mostra a variação dos diversos ganhos de um amplificador versus a frequência do sinal de entrada.

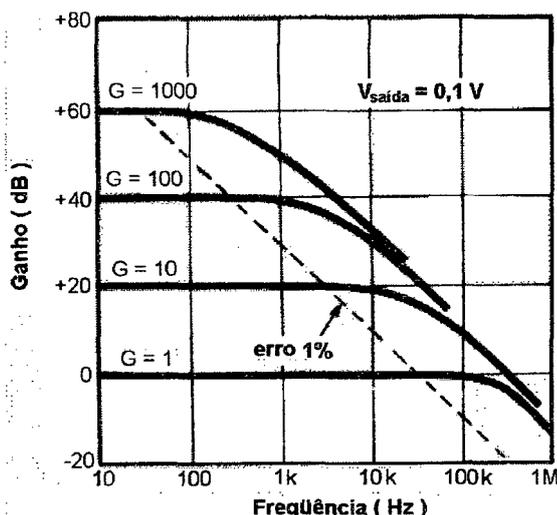


Figura 2.13 - Gráfico do ganho versus a frequência para o amplificador INA102 da Burr-Brown [50]

É usual que, essa característica, no caso de amplificadores seja chamada função de transferência do amplificador [24]. A Equação 2.16 mostra a função de transferência nominal do amplificador que é a razão entre a amplitude do sinal de saída e a amplitude do sinal de entrada, para cada frequência do sinal de entrada.

$$G(f) = \frac{|e_o(f)|}{|e_i(f)|} \quad (2.16)$$

Onde:  $G(f)$  - função de transferência do amplificador (ganho em função da frequência);  
 $e_o(f)$  - amplitude do sinal de saída para uma determinada frequência (V);  
 $e_i(f)$  - amplitude do sinal de entrada para uma determinada frequência (V).

### 2.3.7 Slew-rate

É a máxima taxa de variação do sinal de saída por unidade de tempo admitida por um instrumento [41]. A Equação 2.17 define esse parâmetro.

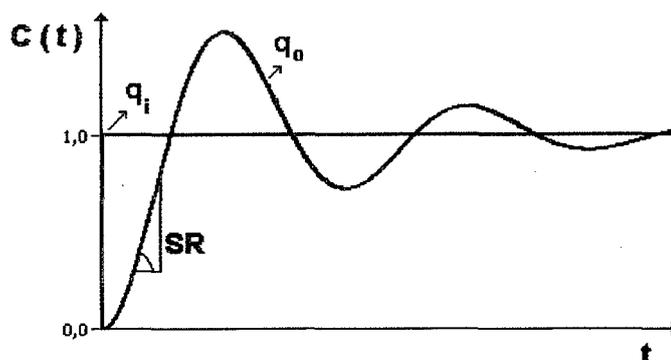
$$SR = \left. \frac{dq_o}{dt} \right|_{\text{máx}} \quad (2.17)$$

Onde: SR - *slew-rate*

$q_o$  - sinal de saída;

t - tempo (s).

A Figura 2.14 mostra o *slew-rate* de um instrumento, ao ser aplicado um degrau unitário na sua entrada.



Legenda:

SR - *Slew-rate*;

$q_i$  - Sinal de entrada;

$q_o$  - Sinal de saída.

Figura 2.14 - *Slew-rate*

Em textos escritos em português costuma-se traduzir *slew-rate*, por taxa de subida, taxa de resposta ou taxa de giro [41]. Por falta de padronização e por ser um termo de uso bastante freqüente adotou-se, neste trabalho, o termo em inglês.

Quanto maior for o *slew-rate*, melhor será a capacidade do instrumento de responder de forma mais exata a sinais dinâmicos. Por exemplo, considere-se um sinal senoidal colocado na entrada de um amplificador. O sinal de saída será um sinal senoidal correspondente, dado pela Equação 2.18.

$$V_o = V_p \cdot \text{sen } \omega t \quad (2.18)$$

O *slew-rate* desse amplificador estabelece a máxima taxa de variação que esse sinal senoidal pode apresentar.

Aplicando a Equação 2.17 na Equação 2.18, vem:

$$SR = V_p \cdot \omega \cdot \cos \omega t \Big|_{\omega t=0} \quad (2.19)$$

Então:

$$SR = 2\pi f V_p \quad (2.20)$$

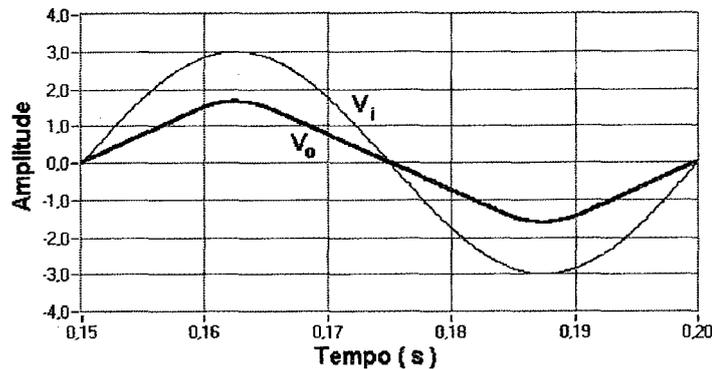
Onde: SR - *slew-rate*

$f$  - freqüência do sinal (Hz);

$V_p$  - amplitude máxima ou valor de pico do sinal senoidal de saída (V).

Analisando a Equação 2.20 nota-se que existe uma relação entre as variáveis  $f$  e  $V_p$ . Pode-se fixar o valor máximo da amplitude do sinal de entrada e calcular a freqüência máxima para que não haja distorção na saída, ou fixar o valor da freqüência máxima e calcular o valor máximo do sinal de entrada. Caso a freqüência do sinal for maior do que o valor máximo calculado pela Equação 2.20, o sinal de saída sofrerá uma distorção, conforme mostra a Figura 2.15. No exemplo da Figura 2.15 é mostrado um sinal tensão

senoidal de 20 Hz de frequência e 3 V de pico que é colocado na entrada de um amplificador de ganho unitário, com um *slew-rate* de 150 V/s. O sinal de saída mostra distorção provocada pelo *slew-rate* do amplificador.



Legenda:

- $V_i$  - Tensão de entrada;
- $V_o$  - Tensão de saída.

Figura 2.15 - Distorção da tensão de saída de um amplificador

### 2.3.8 Impedâncias de entrada e de saída

A impedância de entrada de um instrumento é a impedância equivalente do circuito passivo conectado entre os seus terminais de entrada. Em geral são satisfatoriamente representados por resistores e capacitores [26]. A impedância de saída tem a mesma definição, em relação à saída. A Figura 2.16 mostra um exemplo desse parâmetro, no qual o valor da impedância equivalente é calculado pela Equação 2.21.

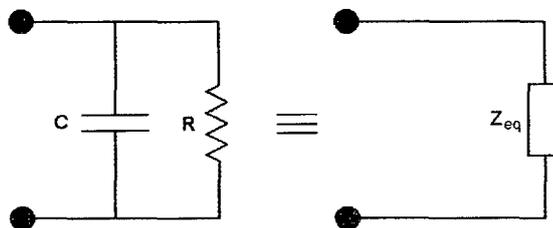


Figura 2.16 - Impedância equivalente

$$Z_{eq} = \frac{R}{1 + j2\pi fRC} \tag{2.21}$$

Onde:  $Z_{eq}$  - impedância equivalente ( $\Omega$ );

$f$  - frequência (Hz);

$R$  - resistência ( $\Omega$ );

$C$  - capacitância (F).

### 2.3.9 Razão de rejeição de modo comum

É a razão, em decibel (dB), entre a tensão de modo comum nos terminais de entrada e o efeito produzido na saída, referido à entrada, de um instrumento [26] [63] (Equação 2.22).

$$RRMC = 20 \log \left| \frac{V_{MC_{entrada}} \cdot G}{V_{MC_{saída}}} \right| \quad (2.22)$$

Onde:  $V_{MC_{entrada}}$  - tensão de modo comum na entrada;

$G$  - ganho do amplificador;

$V_{MC_{saída}}$  - tensão de modo comum na saída.

A curva que relaciona a razão de rejeição de modo comum, RRMC, com a frequência do sinal de modo comum é sempre fornecida por fabricantes na documentação de circuitos integrados lineares.

A Figura 2.17 mostra o gráfico da variação da RRMC, para diversos ganhos, em função da frequência do sinal de modo comum para o amplificador AD624, com (0 a 1) k $\Omega$  de desbalanceamento na fonte.

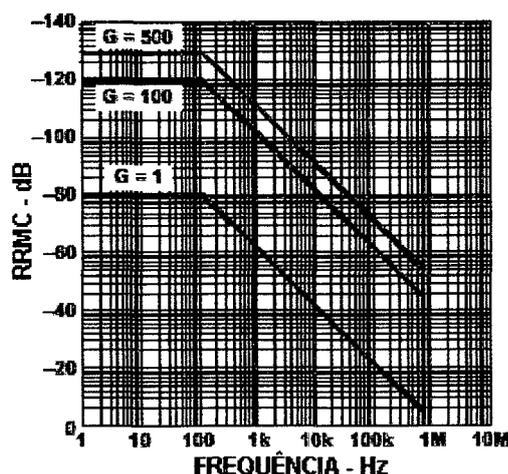


Figura 2.17 - RRMC versus frequência RTI [32]

### 2.3.10 Ruído

É um sinal elétrico não desejado, do tipo não determinístico, que produz um efeito indesejável em circuitos de sistemas de controle nos quais eles ocorrem [26].

Analisando-se diversas referências [3] [4] [20] [21] [34] [38], assumiu-se a divisão de ruídos em duas categorias:

**Ruídos intrínsecos, ou internos:** são os que surgem de flutuações aleatórias dentro de sistemas físicos. Esse ruído é causado pela agitação térmica dos elétrons em

elementos resistivos, por exemplo, um termistor.

**Ruídos externos:** são os ruídos causados por fontes externas. Neste trabalho os ruídos externos são chamados de interferência. Motores, chaves e transmissores são exemplos de fontes de interferência.

Neste trabalho são analisados somente os ruídos intrínsecos, que se dividem em ruídos *flicker* e branco [21]. A Figura 2.18 mostra as regiões de domínio dos ruídos *flicker* e branco em função da frequência e os principais tipos desses ruídos. Essas duas regiões, embora tenham os ruídos *flicker* e branco, geralmente em instrumentação um deles tem valor predominante [34]. Por exemplo, de (0 até 100) Hz o ruído *flicker* tem um valor predominante em relação ao ruído branco. Para frequências maiores que 100 Hz há uma inversão, passando a predominar o valor do ruído branco.

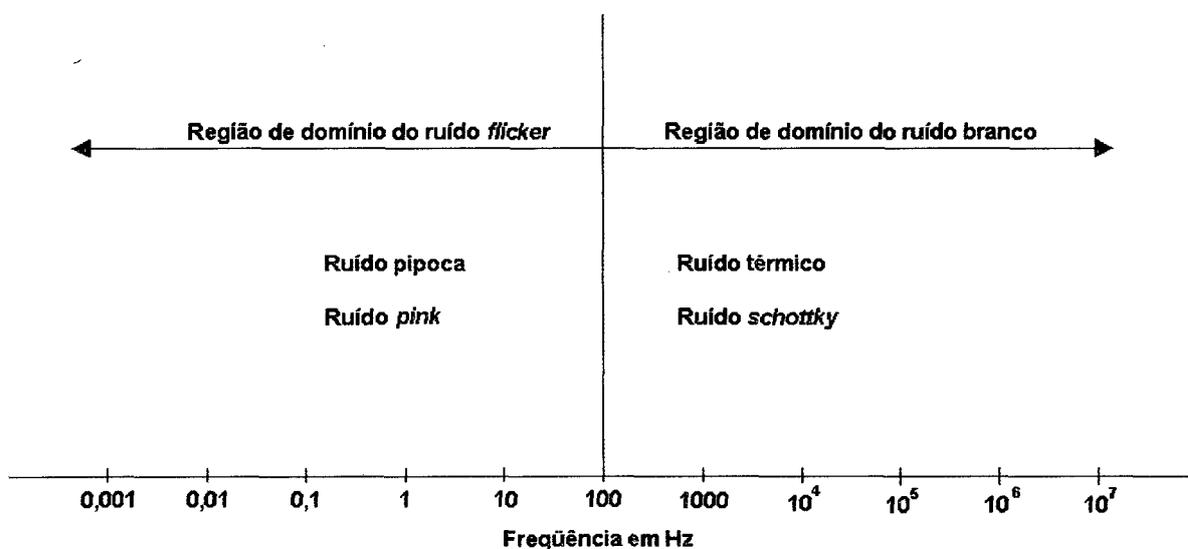


Figura 2.18 - Regiões de domínio dos ruídos branco e *flicker*

Antes da análise desses ruídos intrínsecos, faz-se necessária a definição de uma especificação, bastante utilizada por fabricantes de componentes eletrônicos, que é a densidade espectral de ruído.

É usual que as especificações de ruído sejam dadas em densidade espectral de ruído, que é definida como a raiz quadrada da derivada do quadrado da tensão (ou corrente) de ruído em relação à frequência [20] [34]. A Equação 2.23 e a Equação 2.24 expressam a densidade espectral de ruído de tensão e corrente, respectivamente.

$$e_n = \sqrt{\frac{d}{df} (E_{n_{rms}})^2} \quad (2.23)$$

$$i_n = \sqrt{\frac{d}{df} (I_{n_{rms}})^2} \quad (2.24)$$

Onde:  $e_n$  - densidade espectral de ruído em tensão;

$i_n$  - densidade espectral de ruído em corrente;

$V_{n_{rms}}$  - tensão total de ruído;

$I_{n_{rms}}$  - corrente total de ruído.

Das Equações 2.23 e 2.24 pode-se tirar, para uma determinada banda de freqüência, os valores de ruído em tensão e corrente, respectivamente.

$$V_{n_{rms}} = \sqrt{\int_{f_L}^{f_H} e_n^2 df} \quad (2.25)$$

$$I_{n_{rms}} = \sqrt{\int_{f_L}^{f_H} i_n^2 df} \quad (2.26)$$

Onde:  $e_n$  - densidade espectral de ruído em tensão ( $V/\sqrt{Hz}$ );

$i_n$  - densidade espectral de ruído em corrente ( $A/\sqrt{Hz}$ );

$V_{n_{rms}}$  - tensão total de ruído (V);

$I_{n_{rms}}$  - corrente total de ruído (A);

$f_H$  - limite de freqüência superior (Hz);

$f_L$  - limite de freqüência inferior (Hz).

Os ruídos intrínsecos podem ser divididos em:

- a. **Fontes de ruído branco** são definidas como tendo um valor eficaz de ruído igual para cada variação unitária da freqüência, ou seja, a densidade espectral de ruído é constante ao longo da largura de banda.

Pela definição acima pode-se reescrever a Equação 2.25 e a Equação 2.26, para fontes de ruído branco:

$$V_{BR_{rms}} = e_n \sqrt{f_H - f_L} \quad (2.27)$$

$$I_{BR_{rms}} = i_n \sqrt{f_H - f_L} \quad (2.28)$$

Onde:  $V_{BR_{rms}}$  - tensão de ruído branco (V);

$I_{BR_{rms}}$  - corrente de ruído branco (A);

$e_n$  - densidade espectral de ruído em tensão ( $V/\sqrt{Hz}$ );

$i_n$  - densidade espectral de ruído em corrente ( $A/\sqrt{Hz}$ );

$f_H$  - limite de freqüência superior (Hz);

$f_L$  - limite de frequência inferior (Hz).

Os exemplos mais importantes de fontes de ruído branco são: ruído térmico, ou *Johnson*, e ruído *shot*.

- **Ruído térmico (ou *Johnson*)**

É um ruído que tem uma relação linear entre a potência do ruído e sua banda de frequência; por esse motivo é um ruído branco. Em instrumentação de medição é um dos mais importantes ruídos, pois está presente em todos os dispositivos que possuem resistência. É gerado pela agitação térmica dos elétrons nos dispositivos condutores [21] [3].

As Equações 2.29 e 2.30 expressam o ruído térmico de tensão e corrente, respectivamente [4].

$$V_{T_{rms}} = \sqrt{4KTBR} \quad (2.29)$$

$$I_{T_{rms}} = \sqrt{\frac{4KTBR}{R}} \quad (2.30)$$

Onde:  $V_{T_{rms}}$  - tensão total de ruído (V);

$I_{T_{rms}}$  - corrente total de ruído (A);

K - constante de Boltzmann ( $1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K);

T - temperatura absoluta (K);

B - largura de banda de ruído (Hz);

R - resistência ( $\Omega$ ).

- **Ruído *shot***

Esse ruído está presente em válvulas e semicondutores [4] [21]. É relacionado com o fluxo de corrente através de uma barreira de potencial. O ruído *Shot* é gerado pela flutuação de corrente em torno do valor médio resultante da emissão aleatória de elétrons (ou lacunas). Esse comportamento descontínuo do fluxo de corrente explica o nome *Shot* ("tiro" em inglês) [4] [21].

O ruído *shot* é calculado pela Equação 2.31 [21].

$$I_{sh} = \sqrt{2qI_{cc}B} \quad (2.31)$$

Onde:  $I_{sh}$  - corrente de ruído *shot* (A);

q - carga do elétron ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  C);

$I_{cc}$  - corrente contínua (A);

B - largura de banda do ruído (Hz).

Devido à relação linear entre a potência do ruído e sua banda de frequência o ruído *shot* é um ruído branco [4].

### b. Fontes de ruído *flicker*

São causadas por fluxo de portadores de carga num meio descontínuo, ocorrendo em válvulas, resistores de carbono, diodos, transistores, termistores e dispositivos de filme fino (*thin-film*) [4]. As fontes de ruído *flicker* são inversamente proporcionais à frequência e começam a ser importantes abaixo de 1 kHz para instrumentos construídos com transistores bipolar e FET's [4]. Como pode ser visto na Equação 2.32 a tensão de ruído aumenta quando a frequência diminui. As fontes de ruído *flicker* prevalecem sobre as de ruído branco em frequências menores que 100 Hz e estão relacionadas com o fluxo de corrente contínua [4].

Caso seja necessário calcular a corrente de ruído, basta dividir a Equação 2.32 por R, resultando na Equação 2.33 [4]:

$$V_{1/f_{rms}} = \sqrt{KI_{cc}^a \left(\frac{1}{f}\right)^\alpha R^2 B} \quad (2.32)$$

$$I_{1/f_{rms}} = \sqrt{KI_{cc}^a \left(\frac{1}{f}\right)^\alpha B} \quad (2.33)$$

Onde:  $V_{1/f_{rms}}$  - tensão de ruído (V);

$I_{1/f_{rms}}$  - corrente de ruído (A);

K - constante dependente do dispositivo;

$I_{cc}$  - corrente contínua (A);

a - constante com valor entre 0,5 e 2;

B - largura de banda (Hz);

R - resistência equivalente pela qual circula a corrente ( $\Omega$ );

$\alpha$  - constante com valor entre 0,8 e 1,3;

f - frequência (Hz).

Os exemplos mais importantes de fontes de ruído *flicker* são os ruído rosa (*pink*) e o ruído pipoca (*popcorn*).

- **Ruído rosa (*pink*)**

É uma fonte de ruído *flicker*, onde  $\alpha$ , nas Equações 2.32 e 2.33, é igual a 1 [4]. É caracterizado por ter potência de ruído igual por oitava [4].

O ruído rosa pode ser calculado pela Equação 2.34.

$$V_{n_{rms}} = K \sqrt{\ln\left(\frac{f_H}{f_L}\right)} \quad (2.34)$$

Onde:  $V_{n_{rms}}$  - tensão de ruído (V);

$K$  - valor da densidade espectral de ruído na frequência de 1 Hz ( $\frac{V}{\sqrt{\text{Hz}}}$ );

$f_H$  - limite de frequência superior (Hz);

$f_L$  - limite de frequência inferior (Hz).

- **Ruído pipoca (*popcorn*)**

Também chamado ruído explosão (*burst*) [21], foi primeiro descoberto em diodos semicondutores e, recentemente em circuitos integrados. Se o ruído pipoca for amplificado e alimentar um alto-falante, seu som lembra o do estouro do milho de pipoca, com o ruído térmico de fundo formando um som de fritura; daí o nome de ruído pipoca [21].

Esse ruído é causado por um defeito na junção, usualmente uma impureza metálica num dispositivo semicondutor. O ruído pipoca ocorre em explosões e causam mudança acentuada no nível de tensão, conforme pode ser observado na Figura 2.19. A largura do ruído pipoca varia de microssegundos a segundos. A taxa de repetição, que não é periódica, varia de várias centenas de pulsos por segundo até menos de 1 pulso por minuto. Para uma amostra escolhida de um dispositivo, a amplitude do ruído é fixa, pois é função da característica do defeito da junção. Tipicamente, sua amplitude é de 2 a 100 vezes a do ruído térmico [21].

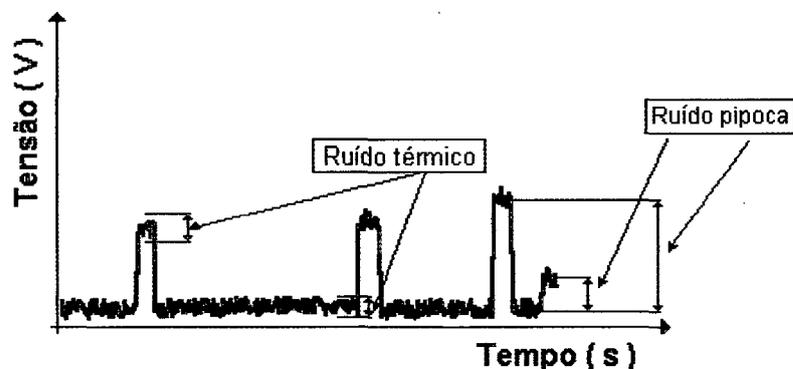


Figura 2.19 - Ruído pipoca (*popcorn noise*)

A densidade de potência do ruído pipoca tem a característica  $(1/f)^n$ , onde  $n$  é igual a 2. Como o ruído pipoca é um fenômeno relacionado com a corrente, a tensão do ruído pipoca é maior em circuitos de alta impedância; por exemplo, o circuito de entrada de um amplificador operacional.

Diferente de outras fontes de ruído discutidas neste capítulo, o ruído pipoca é devido a um defeito de fabricação do componente, e pode ser minimizado pela melhoria dos processos de fabricação. Por ser um defeito no instrumento esse tipo de ruído não será modelado neste trabalho.

## Capítulo 3

# MÉTODO DE MODELAGEM DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE INSTRUMENTOS

O método adotado, neste trabalho, é o de modelar individualmente cada uma das características dinâmicas do instrumento. Assumiu-se chamar módulo, cada modelo de característica dinâmica de um instrumento.

Os instrumentos são classificados neste trabalho em simples e compostos.

Instrumentos simples são os que têm o seu comportamento dinâmico representado por somente uma característica dinâmica. Um exemplo é o termistor, cujo comportamento dinâmico pode ser representado por um sistema de 1ª ordem.

Instrumentos compostos são os que têm o seu comportamento dinâmico representado por várias características dinâmicas, por exemplo: o amplificador.

Desse modo, o modelo do comportamento dinâmico de um instrumento simples é constituído por um único módulo de comportamento dinâmico, enquanto o modelo de um instrumento composto é constituído por vários módulos de comportamento dinâmico.

Neste capítulo são modeladas as características dinâmicas tratadas no capítulo 2. Exemplos de modelos de instrumentos são mostrados no capítulo 4.

A Tabela 3.1 mostra a relação entre as características e parâmetros do comportamento dinâmico analisadas no capítulo 2 e os módulos implementados neste capítulo. Dos treze módulos implementados somente cinco não são modelados por sistemas de 1ª ou de 2ª ordem, ou combinações desses. O *slew-rate* é modelado através de uma derivada e os diversos tipos de ruído são modelados através de equações algébricas e distribuições de probabilidades.

Tabela 3.1 - Associação entre características e módulos propostos

Módulo proposto	Função representada	Componentes do modelo
Sistema de 1ª ordem	Comportamento dinâmico de um sistema físico de 1ª ordem	Equação de diferenças de 1ª ordem
Sistema de 2ª ordem	Comportamento dinâmico de um sistema físico de 2ª ordem	Equação de diferenças de 2ª ordem
Filtro passa todas de 1ª ordem	Equalização de fases	Equação de diferenças de 1ª ordem
Filtro passa todas de 2ª ordem	Equalização de fases	Equação de diferenças de 2ª ordem
Sensibilidade	Sensibilidade versus frequência	Equações algébricas Equação de diferenças de 2ª ordem
Impedância de entrada	Impedância de entrada	Equação de diferenças de 1ª ordem
Impedância de saída	Impedância de saída	Equação de diferenças de 1ª ordem
RRMC	RRMC	Equação algébrica Equações de diferenças de 1ª e 2ª ordem
Ganho	Ganho versus frequência	Equação de diferenças de 1ª ordem
<i>Slew-rate</i>	<i>Slew-rate</i>	Derivada
Tensão de ruído <i>flicker</i>	Tensão de ruído <i>flicker</i>	Equações algébricas Distribuição de probabilidade
Corrente de ruído <i>flicker</i>	Corrente de ruído <i>flicker</i>	Equações algébricas Distribuição de probabilidade
Tensão de ruído branco	Tensão de ruído branco	Equações algébricas Distribuição de probabilidade
Corrente de ruído branco	Corrente de ruído branco	Equações algébricas Distribuição de probabilidade

### 3.1 Modelo genérico de uma característica dinâmica

As principais dificuldades para implementar os modelos de sistemas de 1ª e de 2ª ordem em computador são:

- desconhecimento do sinal de entrada;
- conversão dos sinais contínuos em sinais discretos.

No item 2.2 foram mostradas as equações diferenciais que modelam os sistemas de 1ª e 2ª de ordem. Prevê-se a aplicação dos modelos em ambientes de simulação com sinais discretos, desse modo é necessário achar uma equação que represente a equação diferencial no domínio discreto. Essa transformação segue os passos mostrados na Figura 3.1, no qual o resultado final é a equação de diferenças que representa, no domínio discreto, a equação diferencial que modela um determinado sistema físico.

Para fazer a transformação do domínio contínuo para o discreto, foram analisados

os seguintes tipos de transformação: Método da Invariância da Resposta ao Impulso, Forward Euler, Backward Euler, Bilinear (Método Trapezoidal) e Método do Ponto Central [72] [73]. Escolheu-se a transformação bilinear devido as suas propriedades de seletividade, não entrelaçamento de espectros, facilidade de compensação de distorção, não modificação da atenuação e *ripple* na banda passante e não modificação da amplitude do sinal na banda de rejeição considerada [72] [73].



Figura 3.1 - Etapas de obtenção de equações de diferenças

### 3.1.1 Sistema de 1ª ordem

Na Equação 2.8, que é a forma mais usual da equação diferencial que define o sistema de 1ª ordem, aplica-se os passos mostrados na Figura 3.1.

$$\tau \frac{dq_o(t)}{dt} + q_o(t) = Kq_i(t) \quad (3.1)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na Equação 3.1, vem:

$$\tau s Q_o(s) + Q_o(s) = K Q_i(s) \quad (3.2)$$

$$Q_o(s) * (\tau s + 1) = K Q_i(s) \quad (3.3)$$

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (3.4)$$

Como  $\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)}$  é a função de transferência do sistema  $H(s)$ , substituindo-se na Equação 3.4 [14]:

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (3.5)$$

Para mudar do domínio contínuo ( $s$ ) para o discreto ( $z$ ), aplica-se a transformação bilinear [14] [15] [19] [25] [54], Equação 3.6, na Equação 3.5:

$$s = \frac{2}{T_a} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (3.6)$$

Substituindo a Equação 3.6 na Equação 3.5, vem:

$$H(z) = \frac{K}{\frac{2}{T_a} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \tau + 1}$$

$$H(z) = \frac{KT_a(1+z^{-1})}{2\tau(1-z^{-1})+T_a(1+z^{-1})} \quad (3.7)$$

Onde:  $T_a$  é o tempo entre amostras.

Como  $H(z)$  é a função de transferência do sistema de 1ª ordem [14]:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.8)$$

Calcula-se a equação de diferenças substituindo-se a Equação 3.8 na Equação 3.7

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{KT_a(1+z^{-1})}{2\tau(1-z^{-1})+T_a(1+z^{-1})}$$

$$Y(z)[2\tau+T_a] - Y(z)z^{-1}[2\tau-T_a] = KT_a[X(z) + X(z)z^{-1}] \quad (3.9)$$

Finalmente, aplicando-se as propriedades da anti-transformada ( $z$ ) na Equação 3.9, é obtida a equação de diferenças, Equação 3.10 [14] [15]:

$$y[n][2\tau+T_a] - y[n-1][2\tau-T_a] = KT_a[x[n] + x[n-1]]$$

$$y[n] = \frac{KT_a[x[n] + x[n-1]] + y[n-1][2\tau-T_a]}{2\tau+T_a} \quad (3.10)$$

- Onde:  $x[n]$  - sinal de entrada;
- $y[n]$  - sinal de saída;
- $\tau$  - constante de tempo;
- $T_a$  - tempo entre amostras.

A Equação 3.10 é a equação de diferenças que modela o comportamento dinâmico de um sistema de 1ª ordem. O modelo do comportamento dinâmico de um sistema de 1ª ordem é o módulo mostrado na Figura 3.2

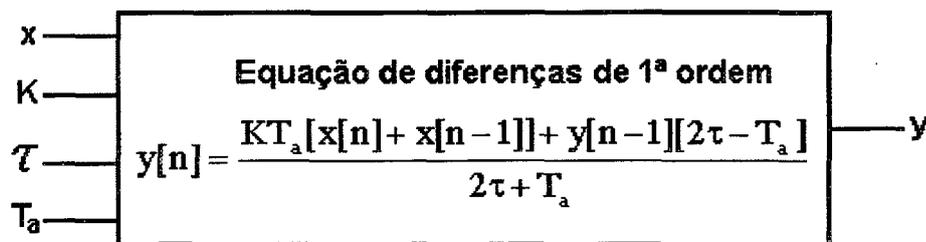


Figura 3.2 - Módulo do sistema de 1ª ordem

- Onde:  $x$  - sinal de entrada;
- $K$  - sensibilidade estática;
- $\tau$  - constante de tempo;
- $T_a$  - tempo entre amostras;
- $y$  - sinal de saída.

### a) Ensaios

Ensaios foram realizados com os seguintes objetivos:

- comparar a forma da curva de resposta do modelo discreto - equação de diferenças, em relação ao modelo contínuo - equação diferencial.
- determinar a incerteza do modelo discreto - equação de diferenças, em relação ao modelo contínuo - equação diferencial.

Definiu-se como erro, neste trabalho, a diferença entre a amostra do modelo discreto e a do modelo contínuo, sendo esta última portanto, considerada a referência.

O ensaio de erro do modelo discreto - equação de diferenças, em relação ao modelo contínuo - equação diferencial, é feito através do cálculo do erro, conforme a Equação 3.11.

$$E = y_{Da}[nT_a] - y_{Dl}(nT_a) \quad (3.11)$$

Onde: E - erro;

$y_{Da}[nT_a]$  - resposta da equação de diferenças;

[n] - número da n-ésima amostra;

$(nT_a)$  - tempo correspondente à n-ésima amostra;

$y_{Dl}(nT_a)$  - resposta da equação diferencial.

Na equação de diferenças o número da amostra [n] foi multiplicado pelo tempo entre amostras –  $T_a$ , passando a relacionar o número da amostra ao tempo  $[nT_a]$ . Na equação diferencial foi substituído o tempo t por  $(nT_a)$ , para permitir calcular no tempo o valor da resposta da equação diferencial  $y_{Dl}(nT_a)$  correspondente a resposta da amostra  $y_{Da}[nT_a]$  da equação de diferenças. Desse modo, é traçada uma curva de erros em que cada ponto dessa curva corresponde ao erro entre o valor da equação de diferenças e o valor da equação diferencial no mesmo instante de tempo. Dessa curva é selecionado o erro máximo para o  $T_a$  selecionado. Repetindo-se esse procedimento para vários  $T_a$  traça-se a curva de erros máximos em função do  $T_a$ .

Durante todos os ensaios a sensibilidade estática K é sempre igual a 1, ou seja para uma entrada constante a saída será igual à entrada.

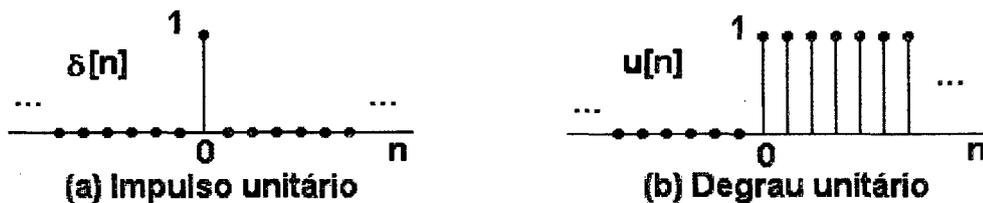
Nos ensaios foram utilizados os sinais degrau, rampa, senóide e impulso como entradas das equações de diferenças e diferenciais. A utilização desses sinais padronizados é devida à simplicidade de obtenção das equações de resposta da equação diferencial, facilitando a implementação do modelo contínuo.

Para o ensaio de comparação de curvas de respostas entre os dois modelos, foram

utilizados os sinais padrões relacionados anteriormente. Determinou-se a função da resposta da equação diferencial para um determinado sinal padronizado de entrada, e mostrou-se em um gráfico o sinal de entrada e as curvas de resposta da equação diferencial e da equação de diferenças. Pode-se observar que nessa representação gráfica as curvas de respostas das equações se sobrepõem, pois os erros entre elas são muito pequenos.

Os sinais de impulso unitário e degrau unitário são os sinais mais rigorosos para o ensaio de determinação da incerteza do modelo do sistema de 1ª ordem. São com esses sinais que os modelos apresentam os maiores erros. Para os ensaios dos modelos discretos podem ser usados o impulso ou o degrau unitário, Figuras 3.3 (a) e (b) respectivamente. Os erros são os mesmos tanto para o impulso unitário como para o degrau unitário. A explicação se deve ao fato que o impulso discreto unitário pode também ser representado por uma subtração de dois degraus discretos unitários, conforme Equação 3.12. Como a resposta da equação da diferencial ao degrau é uma função de  $t/\tau$  foi escolhido o degrau unitário para possibilitar a normalização das curvas de erros máximos em função de  $t/\tau$ .

$$\delta[n] = u[n] - u[n - 1] \tag{3.12}$$



Legenda:  
n – número da amostra.

Figura 3.3 - Sinais discretos

Definiu-se o  $T_a$  através da Equação 3.13:

$$T_a = \frac{\tau}{NA_\tau} \tag{3.13}$$

Onde:  $T_a$  - tempo entre amostras;

$\tau$  - constante de tempo;

$NA_\tau$  - número de amostras em uma constante de tempo.

Substituindo-se o  $T_a$  na equação de diferenças e na função da resposta ao degrau da equação diferencial transforma-se a equação de erros entre amostras numa função do número de amostras em uma constante de tempo –  $NA_\tau$ .

A curva de erros máximos do modelo discreto é traçada repetindo-se várias vezes o

cálculo do erro entre amostras para cada valor do  $NA_\tau$ . Para cada valor do número de amostras contidas em uma constante de tempo escolhe-se o valor do erro máximo entre amostras e coloca-se no eixo das ordenadas do gráfico denominado “Curva de erros máximos” e o  $NA_\tau$  é colocado no eixo das abscissas.

A utilização desse gráfico é feita para determinar o valor do tempo entre amostras para que se tenha uma determinada incerteza no modelo. O valor do tempo entre amostras é função da incerteza do modelo, sendo determinado do seguinte modo:

- especifica-se a incerteza ao degrau unitário, erro máximo, que será admitida no modelo, eixo das ordenadas;
- com o valor da incerteza determina-se através da curva a relação do número de amostras em uma constante de tempo, eixo das abscissas;
- com o valor da relação do  $NA_\tau$  e o valor da constante de tempo  $\tau$  especificado pelo fabricante é calculado o tempo entre amostras, utilizando-se a Equação 3.13.

#### a.1) Resposta ao degrau unitário crescente

A Equação 3.14 é a resposta da equação diferencial  $y_{DI}$  ao degrau unitário crescente, sendo a resposta da equação de diferenças  $y_{Da}$  obtida através da Equação 3.10.

$$y_{DI} = KA_D(1 - e^{-\frac{nT_a}{\tau}}) \quad (3.14)$$

A curva de erros por amostra é obtida pela Equação 3.15, que é a diferença entre a resposta da equação de diferenças e a resposta da equação diferencial.

$$E = \frac{KT_a[x[nT_a] + x[nT_a - T_a]] + y[nT_a - T_a][2\tau - T_a]}{2\tau + T_a} - KA_D(1 - e^{-\frac{nT_a}{\tau}}) \quad (3.15)$$

Onde: E - valor do erro entre amostras;

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

K - sensibilidade estática;

$T_a$  - tempo entre amostras;

$\tau$  - constante de tempo;

n - número da amostra;

$A_D$  - amplitude do degrau.

Substituindo-se na Equação 3.15 o  $T_a$  por  $\frac{\tau}{NA_\tau}$ , transforma-se a equação da curva de erros em uma função do  $NA_\tau$ .

$$E = \frac{K[x[nT_a] + x[nT_a - T_a]] + y[nT_a - T_a][2NA_\tau - 1]}{2NA_\tau + 1} - KA_D(1 - e^{-\frac{n}{NA_\tau}}) \quad (3.16)$$

Onde: E - valor do erro de cada amostra;

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

K - sensibilidade estática;

n - número da amostra;

$NA_\tau$  - número de amostras em uma constante de tempo;

$A_D$  - amplitude do degrau.

Da Equação 3.16 pode-se concluir que o erro máximo ocorre no instante  $t = 0$  s, quando o valor da resposta da equação diferencial é zero e o da equação de diferenças é diferente de zero, pois como o sinal de entrada é um degrau unitário, no instante  $t = 0$  s, o valor do sinal de entrada  $x[0] = 1$ . O erro da 1ª amostra é dado pela Equação 3.17.

$$E_{\text{máx}} = \frac{KT_a}{2\tau + T_a} \quad (3.17)$$

Onde:  $E_{\text{máx}}$  - valor do erro da 1ª amostra;

K - sensibilidade estática;

$T_a$  - tempo entre amostras;

$\tau$  - constante de tempo.

Substituindo-se na Equação 3.17 a sensibilidade estática K por 1 e o tempo entre amostra  $T_a$  por  $\frac{\tau}{NA_\tau}$ , obtem-se a Equação 3.18 que é uma função do número de amostras em uma constante de tempo  $NA_\tau$ .

$$|E_{\text{máx}}| = \frac{1}{2NA_\tau + 1} \quad (3.18)$$

Onde:  $E_{\text{máx}}$  - valor do erro máximo entre amostras;

$NA_\tau$  - número de amostras em uma constante de tempo.

A Figura 3.4 (a) mostra o ensaio de comparação entre a resposta da equação de diferenças  $y_{Da}$  e a resposta da equação diferencial  $y_{Dl}$ . Foram utilizados os seguintes valores:

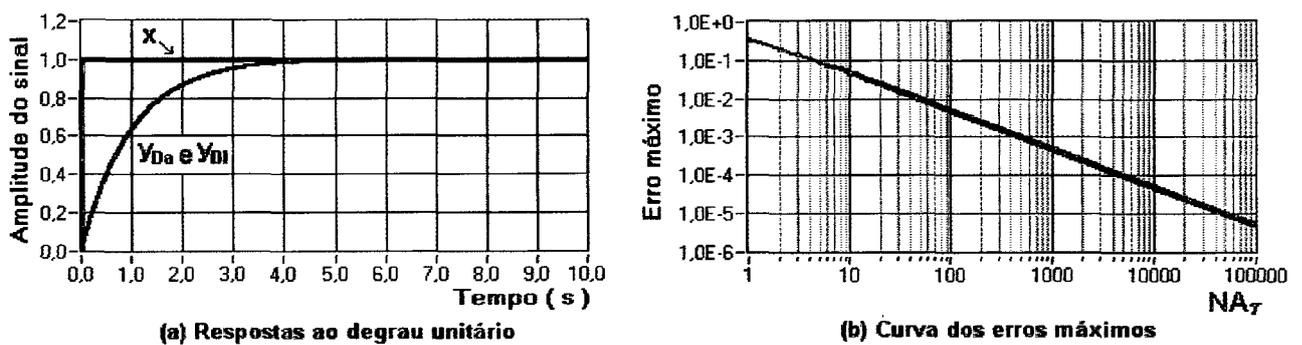
$$K = 1;$$

$$T_a = 1 \text{ ms};$$

$$\tau = 1 \text{ s};$$

Pode-se constatar que as respostas apresentam comportamentos semelhantes, com diferenças imperceptíveis no gráfico. Para se avaliação quantitativa há necessidade de se analisar numericamente as diferenças entre as duas curvas.

A Figura 3.4 (b) mostra a curva de erros máximos por  $NA_\tau$ . Este gráfico é obtido através da Equação 3.18 ou pela Equação 3.16 variando-se o  $NA_\tau$  e escolhendo-se o erro máximo para cada valor do  $NA_\tau$ .



Legenda:

- x - Sinal de entrada;
- $y_{Da}$  - Resposta da equação de diferenças;
- $y_{DI}$  - Resposta da equação diferencial;
- $NA_\tau$  - Número de amostras em uma constante de tempo.

Figura 3.4 - Ensaio do sistema de 1ª ordem com degrau crescente

### a.2) Resposta ao degrau unitário decrescente

A Equação 3.19 é a resposta da equação diferencial  $y_{DI}$  ao degrau decrescente, sendo a resposta da equação de diferenças  $y_{Da}$  obtida através da Equação 3.10.

$$y_{DI} = KA_D e^{-\frac{nT_a}{\tau}} \tag{3.19}$$

A curva de erros, mostrada na Figura 3.5 (b), é dada pela Equação 3.20.

$$E = \frac{KT_a [x[nT_a] + x[nT_a - T_a]] + y[nT_a - T_a] [2\tau - T_a]}{2\tau + T_a} - KA_D e^{-\frac{nT_a}{\tau}} \tag{3.20}$$

Onde: E - valor do erro de cada amostra;

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

K - sensibilidade estática;

$T_a$  - tempo entre amostras;

$\tau$  - constante de tempo;

$n$  - número da amostra;

$A_D$  - amplitude do degrau.

Na Equação 3.20 foi substituído o  $T_a$  por  $\frac{\tau}{NA_\tau}$ , transforma-se a equação da curva de erros em uma função da relação do número de amostras em uma constante de tempo  $NA_\tau$ .

$$E = \frac{K[x[nT_a] + x[nT_a - T_a]] + y[nT_a - T_a][2NA_\tau - 1]}{2NA_\tau + 1} - KA_D e^{-\frac{n}{NA_\tau}} \quad (3.21)$$

Onde:  $E$  - valor do erro;

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

$K$  - sensibilidade estática;

$n$  - número da amostra;

$NA_\tau$  - número de amostras em uma constante de tempo;

$A_D$  - amplitude do degrau.

Da Equação 3.21 pode-se concluir que o erro máximo ocorre no instante  $t = 0$  s, no qual a resposta da equação diferencial  $y_{DI}$  é igual a 1 e a resposta da equação de diferenças  $y_{Da}$  é diferente de zero. O erro para o instante  $t = 0$  s é dado pela Equação 3.22, que foi obtida da Equação 3.20, substituindo-se a sensibilidade estática  $K$  e a amplitude do sinal  $A_D$  por 1 e os valores nas equações de diferenças e diferencial para o instante  $t = 0$ .

$$E_{\text{máx}} = \frac{2\tau}{2\tau + T_a} - 1 \quad (3.22)$$

Onde:  $E_{\text{máx}}$  - valor do erro da 1ª amostra;

$T_a$  - tempo entre amostras;

$\tau$  - constante de tempo.

Substituindo-se na Equação 3.22 o  $T_a$  por  $\frac{\tau}{NA_\tau}$ , obtem-se a Equação 3.23 que é uma função do número de amostras em uma constante de tempo  $NA_\tau$ .

$$|E_{\text{máx}}| = \frac{2NA_\tau}{2NA_\tau + 1} - 1 \quad (3.23)$$

Onde:  $E_{\text{máx}}$  - valor do erro máximo entre amostras;

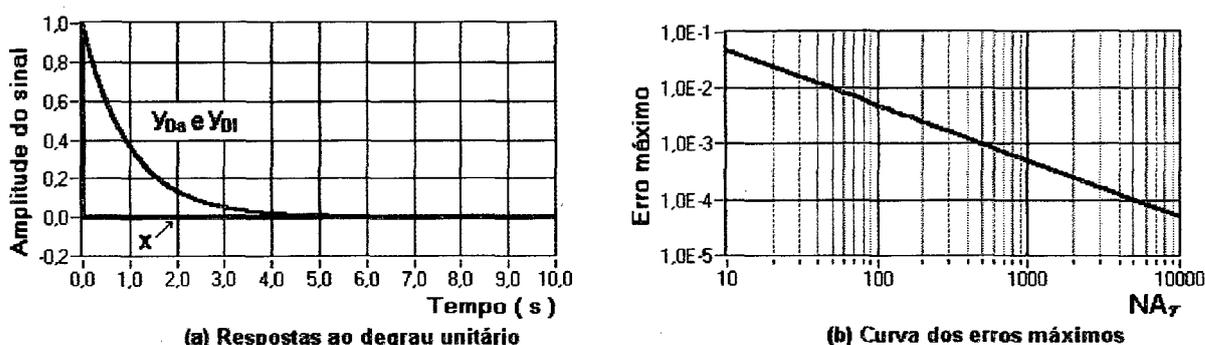
$NA_\tau$  - número de amostras em uma constante de tempo.

O erro máximo é calculado em módulo para permitir ser traçado um gráfico com

escalas logarítmicas.

A Figura 3.5(a) mostra o ensaio de comparação entre a resposta da equação de diferenças  $y_{Da}$  e a resposta da equação diferencial  $y_{Di}$ , pode-se constatar que as respostas apresentam o mesmo comportamento e os erros são muito pequenos.

A Figura 3.5(b) mostra a curva de erros máximos por  $NA_\tau$ . Este gráfico é obtido através da Equação 3.23 ou pela Equação 3.21 variando-se o  $NA_\tau$  e escolhendo-se o erro máximo para cada valor do  $NA_\tau$ .



Legenda:

- x - Sinal de entrada;
- $y_{Da}$  - Resposta da equação de diferenças;
- $y_{Di}$  - Resposta da equação diferencial;
- $NA_\tau$  - Número de amostras em uma constante de tempo. ↯

Figura 3.5 - Ensaio do sistema de 1ª ordem com degrau decrescente

### a.3) Resposta à rampa

Os ensaios foram feitos aplicando-se uma rampa com inclinação de 45°.

A Equação 3.24 é a resposta da equação diferencial  $y_{Di}$  à rampa, sendo a resposta da equação de diferenças  $y_{Da}$  obtida através da Equação 3.10.

$$y_{Di} = K \frac{dV}{dt} \left( \tau e^{-\frac{nT_a}{\tau}} + nT_a - \tau \right) \quad (3.24)$$

O erro entre amostras é obtido através da curva de erros que é dada pela Equação 3.25.

$$E = \frac{KT_a [x[nT_a] + x[nT_a - T_a]] + y[nT_a - T_a][2\tau - T_a]}{2\tau + T_a} - K \frac{dV}{dt} \left( \tau e^{-\frac{nT_a}{\tau}} + nT_a - \tau \right) \quad (3.25)$$

Onde: E - valor do erro entre amostras;

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

K - sensibilidade estática;

$T_a$  - tempo entre amostras;

$\tau$  - constante de tempo;

$n$  - número da amostra;

$\frac{dV}{dt}$  - inclinação da rampa.

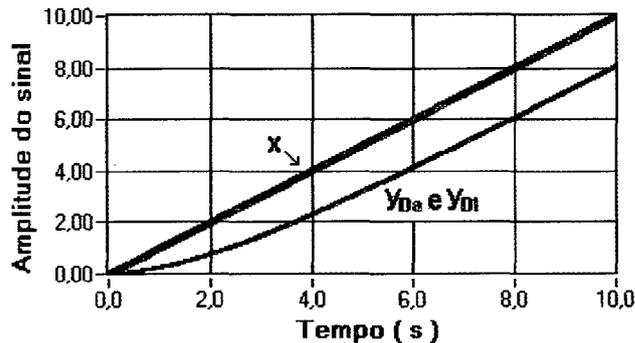
A Figura 3.6 mostra as respostas à rampa das equações de diferença e da diferencial. Neste ensaio foram usados os seguintes valores:

$K = 1$ ;

$T_a = 1 \text{ ms}$ ;

$\tau = 2 \text{ s}$ ;

$\frac{dV}{dt} = 1$ .



Legenda:

$x$  - Sinal de entrada;

$y_{Da}$  - Resposta da equação de diferenças;

$y_{DI}$  - Resposta da equação diferencial.

Figura 3.6 - Resposta do sistema de 1ª ordem a rampa

#### a.4) Resposta à senóide

A Equação 3.24 é a resposta da equação diferencial  $y_{DI}$  a uma entrada senoidal, sendo a resposta da equação de diferenças  $y_{Da}$  obtida através da Equação 3.10.

$$y_{DI} = \frac{KV_m}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} \text{sen}(\omega n T_a + a \tan(-\omega \tau)) \quad (3.26)$$

Onde:  $y_{DI}$  - resposta da equação diferencial;

$K$  - sensibilidade estática;

$T_a$  - tempo entre amostras;

$\tau$  - constante de tempo;

$\omega$  - frequência angular;

$n$  - número da amostra;

$V_m$  - valor máximo da variação senoidal.

O erro entre amostras é obtido através da Equação 3.27.

$$E = \frac{KT_a[x[nT_a] + x[nT_a - T_a]] + y[nT_a - T_a][2\tau - T_a]}{2\tau + T_a} - \frac{KV_m}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \text{sen}(\omega nT_a + a \tan(-\omega\tau)) \quad (3.27)$$

Onde: E - valor do erro de cada amostra;

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

K - sensibilidade estática;

$T_a$  - tempo entre amostras;

$\tau$  - constante de tempo;

$\omega$  - freqüência angular;

n - número da amostra;

$V_m$  - valor máximo da variação senoidal.

A Figura 3.7 mostra as respostas da equação de diferenças e da equação diferencial a uma entrada senoidal. Neste ensaio foram usados os seguintes valores:

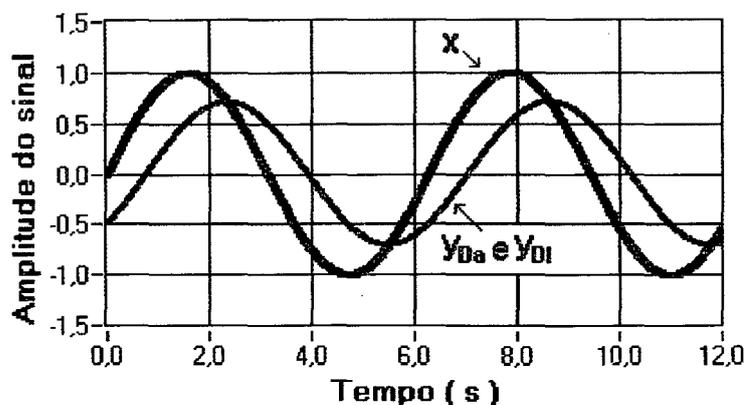
$$K = 1;$$

$$T_a = 1,8 \text{ ms};$$

$$\tau = 1 \text{ s};$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s};$$

$$V_m = 1.$$



Legenda:

x - Sinal de entrada;

$y_{Da}$  - Resposta da equação de diferenças;

$y_{Di}$  - Resposta da equação diferencial.

Figura 3.7 - Resposta a um sinal senoidal

### a.5) Resposta ao impulso

Devido à impossibilidade de implementação de um impulso, com amplitude infinita e tempo de duração zero, foram feitos ensaios com pulsos variando os tempos de duração  $T$  e mantendo sua área  $A$  constante, igual a 1. A amplitude do pulso é dada pela divisão da área  $A$  pelo tempo de duração  $T$ .

Basicamente o ensaio de resposta ao impulso pode ser separado em dois, um degrau crescente e um degrau decrescente.

A Equação 3.28 é a resposta da equação diferencial ao impulso relativo ao degrau decrescente.

$$y_{DI} = \frac{KA_p}{T} \left(1 - e^{-\frac{nT_a}{\tau}}\right) \quad (3.28)$$

Onde:  $y_{DI}$  - resposta da equação diferencial;

$A_p$  - área do pulso;

$K$  - sensibilidade estática;

$T_a$  - tempo entre amostras;

$T$  - tempo de duração do pulso;

$\tau$  - constante de tempo;

$n$  - número da amostra.

A Equação 3.29 é a resposta da equação diferencial ao impulso relativo ao degrau decrescente.

$$y_{DI} = \frac{KA_p \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right) e^{-\frac{nT_a}{\tau}}}{T e^{-\frac{T}{\tau}}} \quad (3.29)$$

Onde:  $y_{DI}$  - resposta da equação diferencial;

$A_p$  - área do pulso;

$K$  - sensibilidade estática;

$T_a$  - tempo entre amostras;

$T$  - tempo de duração do pulso;

$\tau$  - constante de tempo;

$n$  - número da amostra.

A resposta da equação de diferenças é obtida através da Equação 3.10.

A curva de erros é dada por duas equações. A curva de erros relativa ao degrau crescente, para  $nT_a \leq T$ , sendo  $T$  o tamanho do pulso, é dada pela Equação 3.30. A

relativa ao degrau decrescente, para  $nT_a \geq T$ , é dada pela Equação 3.31. A descontinuidade na curva de erros é devida à forma de simulação, que envolve duas curvas: um degrau crescente e um degrau decrescente. Na transição entre os dois degraus ocorre a descontinuidade.

$$E = \frac{KT_a[x[nT_a] + x[nT_a - T_a]] + y[nT_a - T_a][2\tau - T_a]}{2\tau + T_a} - \frac{KA_p}{T} (1 - e^{-\frac{nT_a}{\tau}}) \quad (3.30)$$

$$E = \frac{KT_a[x[nT_a] + x[nT_a - T_a]] + y[nT_a - T_a][2\tau - T_a]}{2\tau + T_a} - \frac{KA_p(1 - e^{-\frac{T}{\tau}})e^{-\frac{nT_a}{\tau}}}{\frac{T}{Te^{-\frac{T}{\tau}}}} \quad (3.31)$$

Onde: E - valor do erro entre amostras;

$A_p$  - área do pulso

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

K - sensibilidade estática;

$T_a$  - tempo entre amostras;

T - tempo de duração do pulso;

$\tau$  - constante de tempo;

n - número da amostra.

O primeiro ensaio, mostrado na Figura 3.8, é feito com um pulso com tempo de duração T de 2 s e de 0,5 de amplitude, e o segundo, mostrado na Figura 3.9, é feito com o menor pulso possível,  $T = T_a$ , resultando numa amplitude  $\frac{1}{T_a}$ , sendo esse o melhor modo de simular um impulso.

Nestes ensaios foram usados os seguintes valores:

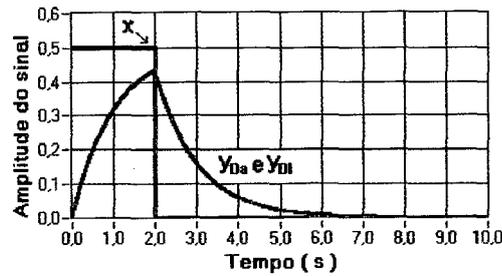
$$K = 1;$$

$$T_a = 1 \text{ ms};$$

$$\tau = 1 \text{ s};$$

$$A_p = 1;$$

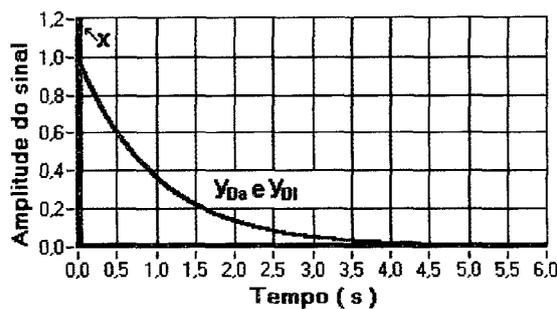
T = 2 s e 2 ms, para o primeiro e segundo ensaio respectivamente.



Legenda:

- x - Sinal de entrada;
- y<sub>Da</sub> - Resposta da equação de diferenças;
- y<sub>Di</sub> - Resposta da equação diferencial.

Figura 3.8 - Resposta ao impulso com área do pulso  $A_p = 1$  e  $T = 2$  s



Legenda:

- x - Sinal de entrada;
- y<sub>Da</sub> - Resposta da equação de diferenças;
- y<sub>Di</sub> - Resposta da equação diferencial.

Figura 3.9 - Resposta ao impulso com área do pulso  $A_p = 1$  e  $T = 2$  ms

### b) Análise dos ensaios

- a incerteza do modelo pode ser especificada através dos gráficos do degrau unitário crescente ou do decrescente, pois os erros calculados para os dois sinais são iguais, Figura 3.4(b) e Figura 3.5(b) respectivamente.

- a incerteza escolhida para o modelo e a constante de tempo do instrumento fornecida pelo fabricante definem o tempo entre amostras  $T_a$ . Por exemplo, especificada uma incerteza para o modelo de  $E_{m\acute{a}x} = \pm 1,0 \cdot 10^{-5}$  entra-se com esse dado na curva de erros máximos e obtem-se o número de amostras em uma constante de tempo, ou seja  $NA_\tau = 40000$ . Para uma constante de tempo  $\tau = 1$  s, aplicando-se a Equação 3.13, obtem-se um tempo entre amostras  $T_a = 25 \mu s$ .

- a incerteza do modelo para os demais sinais padronizados é determinada pela equação da curva de erros de cada um desses sinais.

### 3.1.2 Sistema de 2ª ordem

Analogamente, ao sistema de 1ª ordem, da Equação 2.11, item 2.3.3, que é a mais

usual para modelar os instrumentos de 2ª ordem [24]:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 q_0(t)}{dt^2} + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} \frac{dq_0(t)}{dt} + q_0(t) = Kq_i(t) \quad (3.32)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na Equação 3.32, vem:

$$\frac{1}{\omega_n^2} s^2 Q_0(s) + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} s Q_0(s) + Q_0(s) = KQ_i(s) \quad (3.33)$$

$$\frac{Q_0(s)}{Q_i(s)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1} \quad (3.34)$$

Como  $H(s) = \frac{Q_0(s)}{Q_i(s)}$ , substituindo-se na Equação 3.34:

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.35)$$

Utilizando-se a Equação 3.6 da transformação bilinear na Equação 3.35 para passar do domínio contínuo (s) para o discreto (z):

$$H(z) = \frac{K\omega_n^2}{\frac{4}{T_a^2} \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} + 2\zeta\omega_n \frac{2}{T_a} \frac{(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})^2} + \omega_n^2} \quad (3.36)$$

Como  $H(z)$  é igual a  $\frac{Y(z)}{X(z)}$  substituindo-se na Equação 3.36, vem:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{K\omega_n^2 T_a^2 (1+z^{-1})^2}{4(1-2z^{-1}+z^{-2}) + 4\zeta\omega_n T_a (1-z^{-2}) + \omega_n^2 T_a^2 (1+2z^{-1}+z^{-2})} \quad (3.37)$$

Finalmente, aplicando-se as propriedades da anti-transformada (z) na Equação 3.37, é obtida a equação de diferenças 3.10 [14] [15]:

$$y[n] = \frac{Ax[n] + 2Ax[n-1] + Ax[n-2] + Cy[n-1] - Dy[n-2]}{B} \quad (3.38)$$

Onde:

$$A = K\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.39)$$

$$B = 4 + 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.40)$$

$$C = 8 - 2\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.41)$$

$$D = 4 - 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.42)$$

$x[n]$  - sinal de entrada;

- $y[n]$  - sinal de saída;
- $K$  - sensibilidade estática;
- $\zeta$  - razão de amortecimento;
- $\omega_n$  - frequência natural não amortecida;
- $T_a$  - tempo entre amostras.

A Equação 3.38 é a equação de diferenças que modela o comportamento dinâmico de um sistema de 2ª ordem. O modelo do comportamento dinâmico de um sistema de 2ª ordem é o módulo mostrado na Figura 3.10.

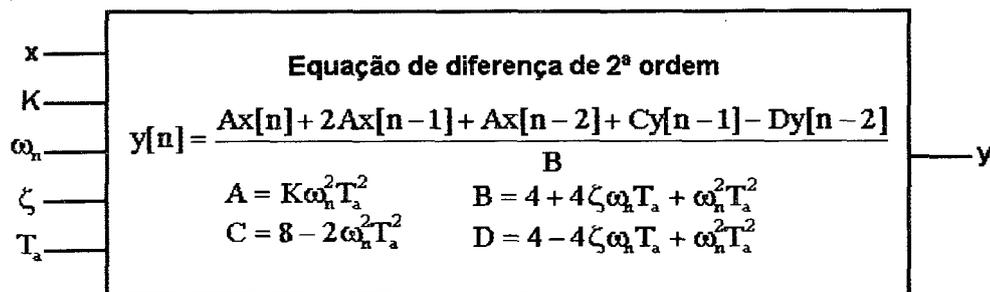


Figura 3.10 - Módulo do sistema de 2ª ordem

- Onde:  $x[n]$  - sinal de entrada;
- $y[n]$  - sinal de saída;
- $K$  - sensibilidade estática;
- $\zeta$  - razão de amortecimento;
- $\omega_n$  - frequência angular natural não amortecida;
- $T_a$  - tempo entre amostras.

### a) Ensaios

Foi utilizada a mesma filosofia dos ensaios dos sistemas de 1ª ordem. Foram feitos ensaios com os sinais padronizados degrau unitário, rampa, rampa cortada, senóide e impulso.

Os ensaios foram realizados com os seguintes objetivos:

- comparar a forma da curva de resposta do modelo discreto – equação de diferenças, em relação ao modelo contínuo – equação diferencial.
- determinar a incerteza do modelo discreto – equação de diferenças, em relação ao modelo contínuo – equação diferencial.

O erro é calculado de forma idêntica ao do sistema de 1ª ordem, sendo utilizado a Equação 3.11.

Na equação de diferenças e no procedimento para traçar os gráficos de comparação

e de erros máximos foram utilizados os mesmos procedimentos do sistema de 1ª ordem.

Nos ensaios foram utilizados os sinais degrau unitário, rampa cortada, rampa, senóide e impulso unitário como entradas das equações de diferença e diferenciais.

Durante todos os ensaios a sensibilidade estática  $K$  é sempre igual a 1, ou seja para uma entrada constante a saída será igual a entrada. Para a razão de amortecimento foram utilizados os seguintes valores:

$\zeta = 1,5$ , para sistema sobreamortecido;

$\zeta = 1,0$ , para sistema criticamente amortecido;

$\zeta = 0,5$ , para sistema subamortecido.

O degrau unitário foi o sinal entrada escolhida para traçar a curva de erros máximos pelos mesmos motivos explicados no item 3.1.1.

Definiu-se o  $T_a$  igual ao período natural não amortecido –  $T_n$  dividido pelo número de amostras em um período natural não amortecido –  $NA_{T_n}$ , Equação 3.43

$$T_a = \frac{T_n}{NA_{T_n}} \quad (3.43)$$

Onde:  $T_a$  - tempo entre amostras;

$T_n$  - período natural não amortecido;

$NA_{T_n}$  - número de amostras em um período natural não amortecido.

Substituindo-se o  $T_a$  na equação de diferenças e na fórmula da resposta ao degrau da equação diferencial transforma-se a equação de erros entre amostras numa função do  $NA_{T_n}$ .

A curva de erros máximos do modelo discreto é traçada repetindo-se várias vezes o cálculo do erro entre amostras para cada valor do  $NA_{T_n}$ . Para cada valor do  $NA_{T_n}$  escolhe-se o valor do erro máximo entre amostras e coloca-se no eixo das ordenadas do gráfico denominado “Curva de erros máximos” e o  $NA_{T_n}$  é colocado no eixo das abscissas.

A utilização desse gráfico é feita para determinar o valor do tempo entre amostras para que se tenha uma determinada incerteza no modelo. O valor do tempo entre amostras é função da incerteza do modelo, sendo determinado do seguinte modo:

- especifica-se a incerteza ao degrau unitário, erro máximo, que será admitida no modelo, eixo das ordenadas;
- com o valor da incerteza determina-se através da curva a relação do  $NA_{T_n}$ , eixo das abscissas;

- com o valor da relação do  $NA_{T_n}$  e a frequência angular não amortecida especificada pelo fabricante, calcula-se o período natural não amortecido  $-T_n$  e depois o  $T_a$ , utilizando-se a Equação 3.43.

**a.1) Resposta ao degrau unitário**

A resposta da equação de diferenças é obtida através da Equação 3.38 e a resposta da equação diferencial ao degrau depende do amortecimento.

- Sistemas sobreamortecidos:

$$y_{DI} = KA_D \left\{ 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n n T_a} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n n T_a} \right\} \quad (3.44)$$

- Sistemas criticamente amortecidos:

$$y_{DI} = KA_D \{ 1 - (1 + \omega_n n T_a) e^{-\omega_n n T_a} \} \quad (3.45)$$

- Sistemas subamortecidos:

$$y_{DI} = KA_D \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n n T_a}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n n T_a + a \text{sen} \sqrt{1 - \zeta^2}) \right\} \quad (3.46)$$

Onde:  $y_{DI}$  - resposta da equação diferencial;

$A_D$  - amplitude do degrau;

$K$  - sensibilidade estática;

$\zeta$  - razão de amortecimento;

$\omega_n$  - frequência natural não amortecida;

$n$  - número da amostra;

$T_a$  - tempo entre amostras.

Para traçar as curvas de erros utilizam-se as seguintes equações:

- Para sistemas sobreamortecidos

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - KA_D \left\{ 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n n T_a} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n n T_a} \right\} \quad (3.47)$$

- Para sistemas criticamente amortecidos

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - KA_D \{ 1 - (1 + \omega_n n T_a) e^{-\omega_n n T_a} \} \quad (3.48)$$

• Para sistemas subamortecidos

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - KA_D \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n n T_a}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n n T_a + a \operatorname{sen} \sqrt{1-\zeta^2}) \right\} \quad (3.49)$$

Onde:

$$A = K\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.50)$$

$$B = 4 + 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.51)$$

$$C = 8 - 2\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.52)$$

$$D = 4 - 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.53)$$

E - erro entre amostras;

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

$A_D$  - amplitude do degrau;

K - sensibilidade estática;

$\zeta$  - razão de amortecimento;

n - número da amostra;

$\omega_n$  - frequência natural não amortecida;

$T_a$  - tempo entre amostras.

Como o período natural não amortecido  $T_n$  é igual a:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (3.54)$$

Substituindo-se o período natural não amortecido  $T_n$  na Equação 3.43:

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_n NA_{T_n}} \quad (3.55)$$

Onde:  $T_a$  - tempo entre amostras;

$\omega_n$  - frequência de ressonância;

$NA_{T_n}$  - número de amostras em um período natural não amortecido.

Substituindo-se o  $T_a$  nas Equações 3.47, 3.48, 3.49, 3.50, 3.51, 3.52 e 3.53, obtêm-se equações em função do número de amostras em um período natural não amortecido.

• Para sistemas sobreamortecidos:

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - KA_D \left\{ 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \frac{2n\pi}{NA_{T_n}}} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \frac{2n\pi}{NA_{T_n}}} \right\} \quad (3.56)$$

• Para sistemas criticamente amortecidos:

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - KA_D \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{2n\pi}{NA_{T_n}} \right) e^{-\frac{2n\pi}{NA_{T_n}}} \right\} \quad (3.57)$$

• Para sistemas subamortecidos:

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - KA_D \left\{ 1 - \frac{e^{-\frac{2\zeta n\pi}{NA_{T_n}}}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left[ \text{sen}\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \frac{2n\pi}{NA_{T_n}} + a \text{sen}\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \right] \right\} \quad (3.58)$$

Onde:

$$A = K \left( \frac{2\pi}{NA_{T_n}} \right)^2 \quad (3.59)$$

$$B = 4 + \frac{8\zeta\pi}{NA_{T_n}} + \left( \frac{2\pi}{NA_{T_n}} \right)^2 \quad (3.60)$$

$$C = 8 - 2 \left( \frac{2\pi}{NA_{T_n}} \right)^2 \quad (3.61)$$

$$D = 4 - \frac{8\zeta\pi}{NA_{T_n}} + \left( \frac{2\pi}{NA_{T_n}} \right)^2 \quad (3.62)$$

E - erro entre amostras;

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

$A_D$  - amplitude do degrau;

n - número da amostra;

K - sensibilidade estática;

$\zeta$  - razão de amortecimento;

$NA_{T_n}$  - número de amostras em um período natural não amortecido.

A Figura 3.11(a) mostra o ensaio de comparação entre a resposta da equação de diferenças  $q_{oDa}$  e a resposta da equação diferencial  $q_{oDI}$ . Foram utilizadas as Equações 3.56, 3.57 e 3.58 e os seguintes valores:

$$K = 1;$$

$$T_a = 1 \text{ ms};$$

$$\zeta = 1,5, \text{ para sistemas sobreamortecido};$$

$$\zeta = 1,0, \text{ para sistemas criticamente amortecidos};$$

$$\zeta = 0,5, \text{ para sistemas subamortecidos};$$

$$\omega_n = 10 \text{ rad/s};$$

$$A_D = 1.$$

Pode-se constatar que as respostas apresentam comportamentos semelhantes, com diferenças imperceptíveis no gráfico. Para se avaliação quantitativa há necessidade de se analisar numericamente as diferenças entre as duas curvas.

A Figura 3.11 (b) mostra as curva de erros máximos por número de amostras em um período natural não amortecido  $NA_{T_n}$  para três valores de amortecimento. Este gráfico é obtido através das Equações 3.56, 3.57 e 3.58, variando-se o número de amostras em um período natural não amortecido  $NA_{T_n}$  e escolhendo-se o erro máximo para cada valor do número de amostras em um período natural não amortecido  $NA_{T_n}$ .

Nesses ensaios foram usados os seguintes valores:

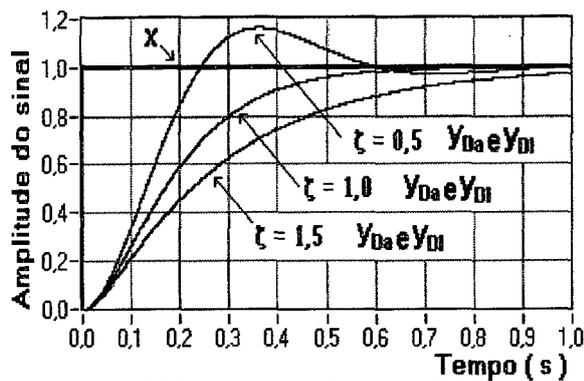
$$K = 1;$$

$$\zeta = 1,5, \text{ para sistemas sobreamortecido};$$

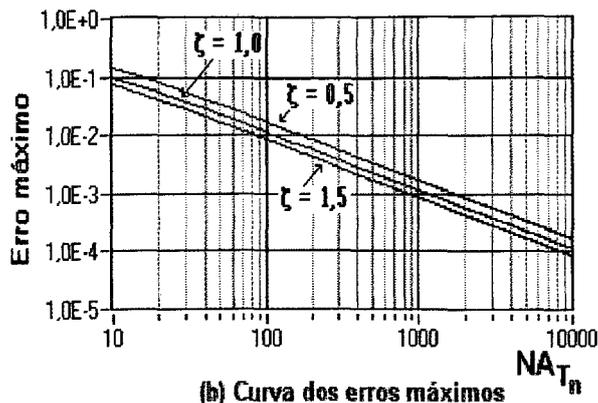
$$\zeta = 1,0, \text{ para sistemas criticamente amortecidos};$$

$$\zeta = 0,5, \text{ para sistemas subamortecidos};$$

$$A_D = 1.$$



(a) Respostas ao degrau unitário



(b) Curva dos erros máximos

Legenda:

- X - Sinal de entrada;
- y<sub>Da</sub> - Resposta da equação de diferenças;
- y<sub>DI</sub> - Resposta da equação diferencial;
- ζ - Razão de amortecimento.

Figura 3.11 - Ensaio do sistema de 2ª ordem com degrau crescente

### a.2) Resposta à rampa

A resposta da equação de diferenças é obtida através da Equação 3.38 e a resposta da equação diferencial a rampa depende do amortecimento.

- **Sistemas sobreamortecidos:**

$$y_{DI} = K \left[ \frac{dV}{dt} nT_a - \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dV}{dt} \left( 1 + \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n nT_a} + \frac{-2\zeta^2 + 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n nT_a} \right) \right] \quad (3.63)$$

- **Sistemas criticamente amortecidos:**

$$y_{DI} = K \left\{ \frac{dV}{dt} nT_a - \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dV}{dt} \left[ 1 - e^{-\omega_n nT_a} \left( 1 + \frac{\omega_n nT_a}{2} \right) \right] \right\} \quad (3.64)$$

- **Sistemas subamortecidos:**

$$y_{DI} = K \left\{ \frac{dV}{dt} nT_a - \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dV}{dt} \left[ 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n nT_a}}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n nT_a + a \tan \frac{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1}) \right] \right\} \quad (3.65)$$

Utilizam-se para traçar as curvas de erros as seguintes equações:

• **Para sistemas sobreamortecidos**

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - K \left[ \frac{dV}{dt} nT_a - \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dV}{dt} \left( 1 + \frac{2\zeta^2 - 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n nT_a} + \frac{-2\zeta^2 + 1 - 2\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}}{4\zeta\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n nT_a} \right) \right] \quad (3.66)$$

• **Para sistemas criticamente amortecidos**

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - K \left\{ \frac{dV}{dt} nT_a - \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dV}{dt} [1 - e^{-\omega_n nT_a} (1 + \frac{\omega_n nT_a}{2})] \right\} \quad (3.67)$$

• **Para sistemas subamortecidos**

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - K \left\{ \frac{dV}{dt} nT_a - \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dV}{dt} \left[ 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n nT_a}}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n nT_a + a \tan \frac{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}{2\zeta^2 - 1}) \right] \right\} \quad (3.68)$$

Onde:

$$A = K\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.69)$$

$$B = 4 + 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.70)$$

$$C = 8 - 2\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.71)$$

$$D = 4 - 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.72)$$

$x[n]$  - sinal de entrada;

$y[n]$  - sinal de saída;

$\frac{dV}{dt}$  - inclinação da rampa;

$K$  - sensibilidade estática;

$\zeta$  - razão de amortecimento;

$n$  - número da amostra;

$\omega_n$  - frequência natural não amortecida;

$T_a$  - tempo entre amostras.

Os ensaios foram feitos aplicando-se uma rampa com inclinação de 45°.

A Figura 3.12 mostra o sinal de entrada e as respostas da equação de diferenças  $y_{Da}$  e da diferencial  $y_{DI}$ . Nestes ensaios foram usados os seguintes valores:

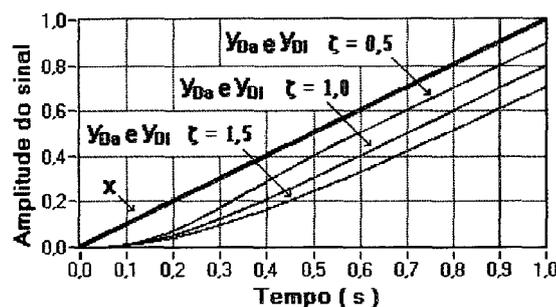
$$K = 1;$$

$$\zeta = 0,5, \text{ para sistemas subamortecidos};$$

$$T_a = 1 \text{ ms};$$

$$\omega_n = 10 \text{ rad/s};$$

$$\frac{dV}{dt} = 1.$$



Legenda:

- x - Sinal de entrada;
- $y_{Da}$  - Resposta da equação de diferenças;
- $y_{DI}$  - Resposta da equação diferencial;
- $\zeta$  - Razão de amortecimento.

Figura 3.12 - Respostas à rampa

### a.3) Resposta à rampa cortada

A resposta da equação de diferenças é obtida através da Equação 3.38 e a resposta da equação diferencial a rampa cortada é dividida em duas partes.

Para o tempo de duração  $T$  entre  $0 \leq nT_a \leq T$ :

$$y_{DI} = K \left[ nT_a \frac{dV}{dt} - \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n nT_a} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n nT_a + 2a \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \right] \quad (3.73.)$$

Para o tempo de duração  $T$  entre  $T \leq nT_a \leq \infty$ :

$$y_{DI} = K \left\{ \frac{dV}{dt} \left[ nT_a - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n nT_a} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n nT_a + 2a \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) \right] - \left[ nT_a \frac{dV}{dt} - 1 - \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n (nT_a - T)} \text{sen}[\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n (nT_a - T) + 2a \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}] \right] \right\} \quad (3.74)$$

Utilizam-se para traçar as curvas de erros as seguintes equações:

Para a rampa, com o tempo de duração  $T$  entre  $0 \leq nT_a \leq T$ , foi utilizada a Equação 3.75.

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - K[nT_a \frac{dV}{dt} - \frac{dV}{dt} \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{dV}{dt} \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n nT_a} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n nT_a + 2a \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})] \quad (3.75)$$

Para a parte cortada, com o tempo de duração T entre  $T \leq nT_a \leq \infty$ , utiliza-se a Equação 3.76.

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - K\left\{ \frac{dV}{dt} [nT_a - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n nT_a} \text{sen}(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n nT_a + 2a \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})] - \{nT_a \frac{dV}{dt} - 1 - \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dt} \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n (nT_a - T)} \text{sen}[\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n (nT_a - T) + 2a \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}] \} \right\} \quad (3.76)$$

Onde:

$$A = K\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.77)$$

$$B = 4 + 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.78)$$

$$C = 8 - 2\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.79)$$

$$D = 4 - 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.80)$$

$x[n]$  - sinal de entrada;

$y[n]$  - sinal de saída;

$\frac{dV}{dt}$  - inclinação da rampa;

K - sensibilidade estática;

$\zeta$  - razão de amortecimento;

$\omega_n$  - frequência natural não amortecida;

$T_a$  - tempo entre amostras.

A Figura 3.13 mostra o sinal de entrada e as respostas da equação de diferenças  $q_{oDa}$  e da diferencial  $q_{oDI}$ . Nestes ensaios foram usados os seguintes valores:

$$K = 1;$$

$$\zeta = 1,5, \text{ para sistemas sobreamortecido;}$$

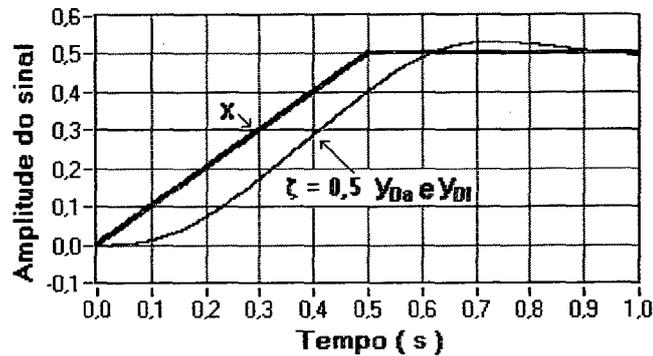
$$\zeta = 1,0, \text{ para sistemas criticamente amortecidos;}$$

$$\zeta = 0,5, \text{ para sistemas subamortecidos;}$$

$$T_a = 1 \text{ ms;}$$

$$\omega_n = 10 \text{ rad/s};$$

$$\frac{dV}{dt} = 1.$$



Legenda:

- x - Sinal de entrada;
- y<sub>Da</sub> - Resposta da equação de diferenças;
- y<sub>DI</sub> - Resposta da equação diferencial;
- ζ - Razão de amortecimento.

Figura 3.13 - Resposta à rampa cortada

#### a.4) Resposta à senóide

A resposta da equação de diferenças é obtida através da Equação 3.38 e a resposta da equação diferencial a uma entrada senoidal é dada pela Equação 3.81.

$$y_{DI} = \frac{KV_{\text{máx}}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}} \text{sen}\left(\omega nT_a + a \tan \frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}}\right) \quad (3.81)$$

Onde:  $V_{\text{máx}}$  - valor máximo da variação senoidal;

K - sensibilidade estática;

ζ - razão de amortecimento;

$\omega_n$  - freqüência natural não amortecida;

$T_a$  - tempo entre amostras.

Utiliza-se para traçar as curvas de erros a Equação 3.81:

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - 1] + Ax[nT_a - 2] + Cy[nT_a - 1] - Dy[nT_a - 2]}{B} - \frac{KV_{\text{máx}}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \frac{4\zeta^2\omega^2}{\omega_n^2}}} \text{sen}\left(\omega nT_a + a \tan \frac{2\zeta}{\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}}\right) \quad (3.82)$$

Onde:

$$A = K\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.83)$$

$$B = 4 + 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.84)$$

$$C = 8 - 2\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.85)$$

$$D = 4 - 4\zeta\omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.86)$$

$V_{\text{máx}}$  - valor máximo da variação senoidal do sinal de entrada;

$x[nT_a]$  - sinal de entrada;

$y[nT_a]$  - sinal de saída;

$K$  - sensibilidade estática;

$\zeta$  - razão de amortecimento;

$\omega$  - freqüência angular do sinal de entrada;

$\omega_n$  - freqüência natural não amortecida;

$T_a$  - tempo entre amostras.

A Figura 3.14 mostra o sinal de entrada e as respostas da equação de diferenças  $q_{oDa}$  e da diferencial  $q_{oDI}$ . Nestes ensaios foram usados os seguintes valores:

$K = 1;$

$\zeta = 1,5$ , para sistemas sobreamortecido;

$\zeta = 1,0$ , para sistemas criticamente amortecidos;

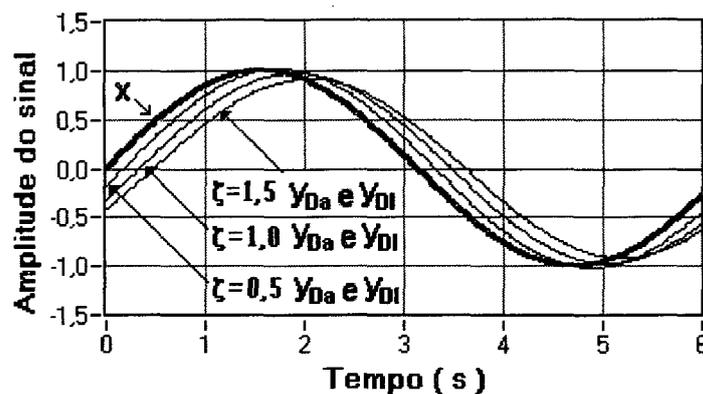
$\zeta = 0,5$ , para sistemas subamortecidos;

$T_a = 1 \text{ ms};$

$\omega = 1 \text{ rad/s};$

$\omega_n = 10 \text{ rad/s};$

$V_{\text{máx}} = 1.$



**Legenda:**

$x$  - Sinal de entrada;

$y_{Da}$  - Resposta da equação de diferenças;

$y_{DI}$  - Resposta da equação diferencial.

**Figura 3.14 - Respostas em freqüência**

### a.5) Resposta ao impulso

A resposta da equação de diferenças é obtida através da Equação 3.38 e a resposta da equação diferencial ao impulso depende do amortecimento.

- **Sistemas sobreamortecidos:**

$$y_{DI} = \frac{KA_p \omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n n T_a} - e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n n T_a} \right) \quad (3.87)$$

- **Sistemas criticamente amortecidos:**

$$y_{DI} = KA_p \omega_n^2 n T_a e^{-\omega_n n T} \quad (3.88)$$

- **Sistemas subamortecidos:**

$$y_{DI} = \frac{KA_p \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n n T_a} \text{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n n T_a) \quad (3.89)$$

Utilizam-se para traçar as curvas de erros as seguintes equações:

- **Para sistemas sobreamortecidos**

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - \frac{KA_p \omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left( e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n n T_a} - e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n n T_a} \right) \quad (3.90)$$

- **Para sistemas criticamente amortecidos**

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - KA_p \omega_n^2 n T_a e^{-\omega_n n T} \quad (3.91)$$

- **Para sistemas subamortecidos**

$$E = \frac{Ax[nT_a] + 2Ax[nT_a - T_a] + Ax[nT_a - 2T_a] + Cy[nT_a - T_a] - Dy[nT_a - 2T_a]}{B} - \frac{KA_p \omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n n T_a} \text{sen}(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n n T_a) \quad (3.92)$$

Onde:

$$A = K \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.93)$$

$$B = 4 + 4\zeta \omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.94)$$

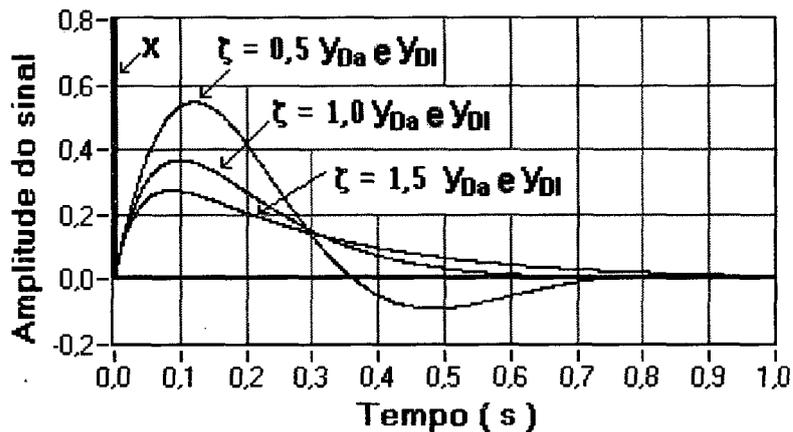
$$C = 8 - 2\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.95)$$

$$D = 4 - 4\zeta \omega_n T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.96)$$

- $x[nT_a]$  - sinal de entrada;
- $y[nT_a]$  - sinal de saída;
- $K$  - sensibilidade estática;
- $\zeta$  - razão de amortecimento;
- $A_p$  - área do pulso;
- $\omega_n$  - frequência natural não amortecida;
- $T_a$  - tempo entre amostras.

A Figura 3.15 mostra o sinal de entrada e as respostas da equação de diferenças  $q_{oDa}$  e da diferencial  $q_{oDI}$ . Nestes ensaios foram usados os seguintes valores:

- $K = 1$ ;
- $\zeta = 1,5$ , para sistemas sobreamortecido;
- $\zeta = 1,0$ , para sistemas criticamente amortecidos;
- $\zeta = 0,5$ , para sistemas subamortecidos;
- $T_a = 1$  ms;
- $\omega_n = 10$  rad/s.



Legenda:

- $x$  - Sinal de entrada;
- $y_{Da}$  - Resposta da equação de diferenças;
- $y_{DI}$  - Resposta da equação diferencial;
- $\zeta$  - Razão de amortecimento.

Figura 3.15 - Respostas ao impulso

### a.6) Análise dos ensaios

- a incerteza do modelo é especificada através do gráfico do degrau unitário crescente ou decrescente, Figura 3.11.
- a incerteza escolhida para o modelo, o amortecimento e a frequência natural não amortecida do instrumento fornecida pelo fabricante definem o tempo entre

amostras –  $T_a$ . Por exemplo, especificada uma incerteza para o modelo de  $E_{\text{máx}} = \pm 1,0 \cdot 10^{-3}$ , com um amortecimento  $\zeta = 0,5$ , entra-se com esses dados no gráfico da curva de erros máximos, Figura 3.11, e obtém-se o número de amostras em uma constante de tempo  $NA_{T_n} = 1800$ . Para uma frequência angular não amortecida  $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ , calcula-se o período natural não amortecido, junto com o valor do  $NA_{T_n}$  substitui-se na fórmula da Equação 3.43, obtém-se um tempo entre amostras  $T_a = 111 \mu\text{s}$ .

- a incerteza do modelo para os demais sinais padronizados é determinada pela equação da curva de erros de cada um desses sinais.

### 3.1.3 Filtros passa todas (*all pass*) de 1ª e de 2ª ordem (equalizador de fase)

As principais características desse filtro é de ter o ganho igual a 1 e o ângulo é função da frequência do sinal. Esse módulo é utilizado para equalizar a fase de sinais, para uma determinada faixa de frequência de interesse, possibilitando operações matemáticas com pequeno ângulo de defasagem. Caso a frequência dos sinais seja constante é possível zerar o ângulo de defasagem.

#### a) Filtro passa todas de 1ª ordem

Para achar a equação de diferenças do filtro, inicia-se pela equação da função de transferência do filtro passa todas de 1ª ordem[56]:

$$H(j\omega) = \frac{1 - j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \quad (3.97)$$

Onde:  $H(j\omega)$  função de transferência;

$\omega$  - frequência angular;

$\omega_c$  - frequência angular de corte.

Aplicando a transformada de Laplace na Equação 3.97:

$$H(s) = \frac{1 - s/\omega_c}{1 + s/\omega_c} \quad (3.98)$$

Utilizando-se a Equação 3.6 da transformação bilinear na Equação 3.98 para passar do domínio contínuo ( $s$ ) para o discreto ( $z$ ):

$$H(z) = \frac{1 - \frac{2(1-z^{-1})}{T_a\omega_c(1+z^{-1})}}{1 + \frac{2(1-z^{-1})}{T_a\omega_c(1+z^{-1})}} \quad (3.99)$$

Como  $H(z)$  é igual a  $\frac{Y(z)}{X(z)}$  substituindo-se na Equação 3.99 e fazendo-se simplificações, vem:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T_a\omega_c(1+z^{-1}) - 2(1-z^{-1})}{T_a\omega_c(1+z^{-1}) + 2(1-z^{-1})} \quad (3.100)$$

Finalmente, aplicando-se as propriedades da anti-transformada  $(z)$  na Equação 3.100, é obtida a equação de diferenças 3.10 [14] [15]:

$$y[n] = \frac{Ax[n] + Bx[n-1] - Cy[n-1]}{D} \quad (3.101)$$

Onde:

$$A = C = T_a\omega_c - 2 \quad (3.102)$$

$$B = D = T_a\omega_c + 2 \quad (3.103)$$

$x[n]$  - sinal de entrada;

$y[n]$  - sinal de saída;

$\omega_c$  - frequência angular de corte;

$T_a$  - tempo entre amostras.

O módulo dessa característica está mostrado na Figura 3.16:

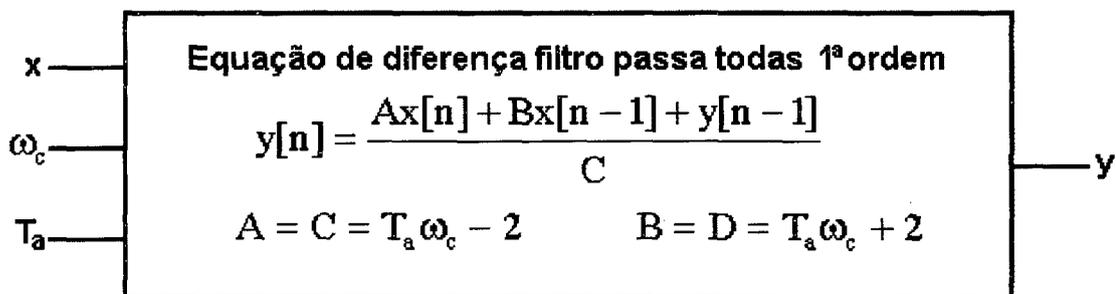


Figura 3.16 - Módulo do filtro passa todas de 1ª ordem

### b) Filtro passa todas de 2ª ordem

Para achar a equação de diferenças desse filtro, inicia-se pela equação da função de transferência do filtro passa todas de 2ª ordem[56]:

$$H(j\omega) = \frac{(j\frac{\omega}{\omega_n})^2 - j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} + 1}{(j\frac{\omega}{\omega_n})^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} + 1} \quad (3.104)$$

Onde:  $H(j\omega)$  - função de transferência;

$\omega$  - frequência angular;

$\omega_n$  - frequência natural não amortecida;

$\zeta$  - razão de amortecimento.

Aplicando a transformada de Laplace na Equação 3.104:

$$H(s) = \frac{s^2 - 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2} \quad (3.105)$$

Utilizando-se a Equação 3.6 da transformação bilinear na Equação 3.105 para passar do domínio contínuo (s) para o discreto (z):

$$H(z) = \frac{\frac{4}{T_a^2} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 - \frac{4\omega_n\zeta}{T_a} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + \omega_n^2}{\frac{4}{T_a^2} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \frac{4\omega_n\zeta}{T_a} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + \omega_n^2} \quad (3.106)$$

Como  $H(z)$  é igual a  $\frac{Y(z)}{X(z)}$  substituindo-se na Equação 3.106 e fazendo-se

simplificações, vem:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(4 + 4\omega_n\zeta T_a + \omega_n^2 T_a^2)z^{-2} - (8 - 2\omega_n^2 T_a^2)z^{-1} + 4 - 4\omega_n\zeta T_a + \omega_n^2 T_a^2}{(4 - 4\omega_n\zeta T_a + \omega_n^2 T_a^2)z^{-2} - (8 - 2\omega_n^2 T_a^2)z^{-1} + 4 + 4\omega_n\zeta T_a + \omega_n^2 T_a^2} \quad (3.107)$$

Finalmente, aplicando-se as propriedades da anti-transformada (z) na Equação 3.107, é obtida a equação de diferenças 3.10 [14] [15]:

$$y[n] = \frac{Cx[n] - Bx[n-1] + Ax[n-2] + By[n-1] - Cy[n-2]}{A} \quad (3.108)$$

Onde:

$$A = 4 + 4\omega_n\zeta T_a + \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.109)$$

$$B = 8 - 2\omega_n^2 T_a^2 \quad (3.110)$$

$$C = 4 - 4\omega_n\zeta T_a - \omega_n^2 T_a^2 \quad (3.111)$$

$x[n]$  - sinal de entrada;

$y[n]$  - sinal de saída;

$\zeta$  - razão de amortecimento;

$\omega_n$  - frequência natural não amortecida;

$T_a$  - tempo entre amostras.

O módulo dessa característica está mostrado na Figura 3.17.

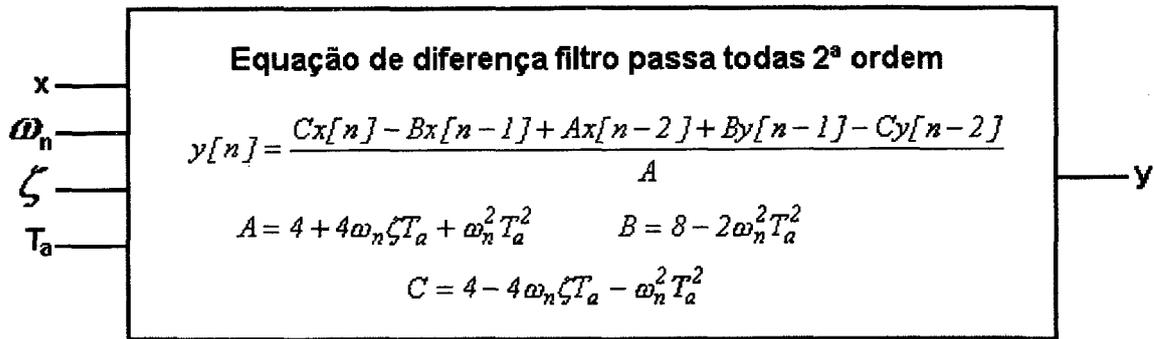


Figura 3.17 - Módulo do filtro passa todas de 2ª ordem

### 3.2 Implementação de modelos de parâmetros característicos de instrumentos

#### 3.2.1 Slew-rate

O *slew-rate*, conforme item 2.4.2 do capítulo 2, é a derivada máxima do sinal de saída pelo tempo. O módulo dessa característica está mostrado na Figura 3.18.

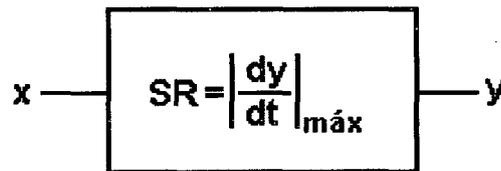


Figura 3.18 - Módulo do *slew-rate*

A implementação do *slew-rate* é feita através da comparação de amostras consecutivas. Cada amostra é subtraída da amostra anterior, caso o módulo dessa diferença seja maior do que o valor do *slew-rate* especificado, a resposta terá valor numérico igual à soma do valor da amostra anterior com o produto do *slew-rate* pelo tempo entre amostras, caso contrário, o valor da amostra será mantido. A Figura 3.19 (a) mostra que o módulo da diferença entre duas amostras consecutivas é menor que o *slew-rate*, então a resposta é a própria amostra, ponto B. A Figura 3.19 (b) mostra que o módulo da diferença entre duas amostras consecutivas é maior que o *slew-rate*, então a resposta é o próprio *slew-rate* mais o valor da amostra anterior, ponto C.

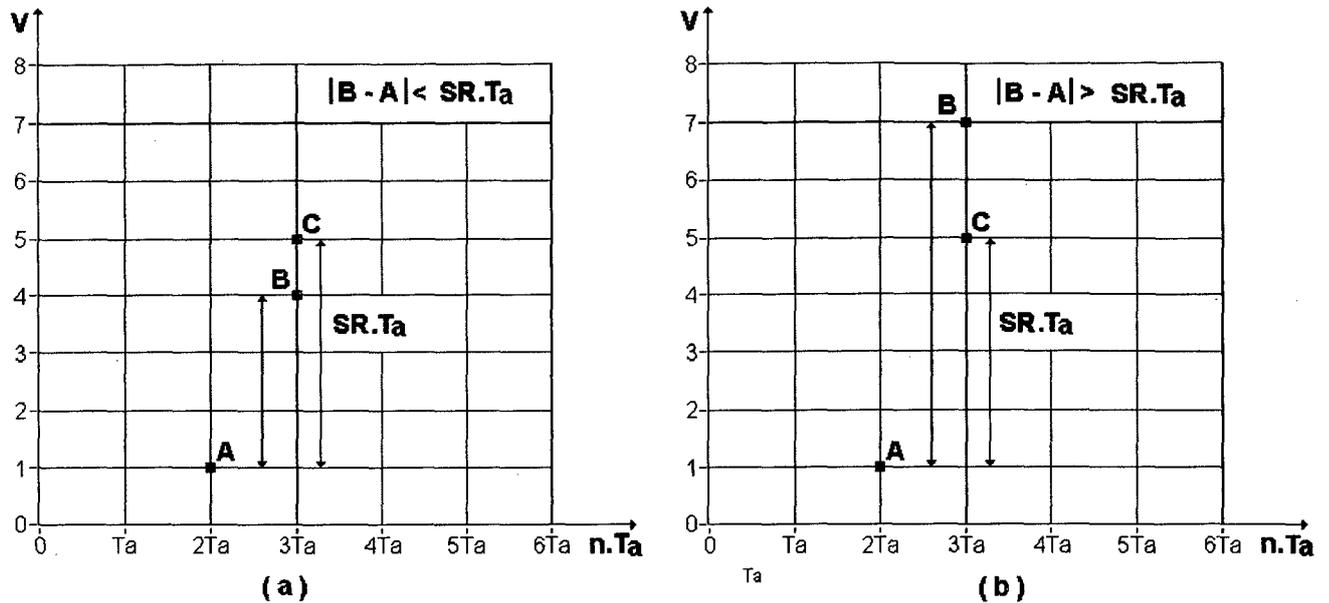
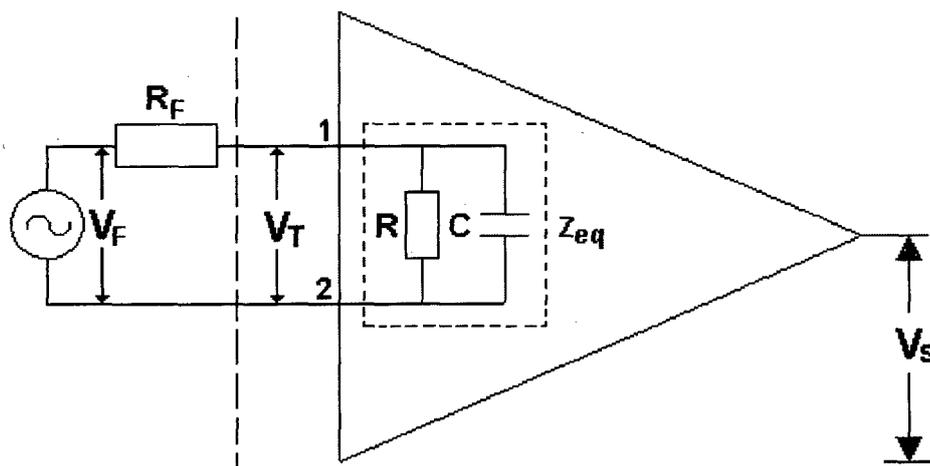


Figura 3.19 - Resposta do modelo do slew-rate

### 3.2.2 Impedância de entrada

O circuito considerado para a modelagem da impedância de entrada é o mostrado na Figura 3.20. Para facilitar os cálculos foi considerada uma resistência como impedância da fonte.



**Legenda**

- $V_F$  - tensão da fonte;
- $C$  - capacitância de entrada;
- $R$  - resistência de entrada;
- $R_F$  - resistência da fonte;
- $V_T$  - tensão nos terminais de entrada;
- $V_S$  - tensão de saída.

Figura 3.20 - Impedância de entrada

Aplicando a transformada de Laplace para cálculo da impedância equivalente de entrada (circuito RC paralelo), vem:

$$Z_{eq}(s) = \frac{\frac{1}{Cs} * R}{\frac{1}{Cs} + R} \quad (3.112)$$

Reescrevendo de outra forma a Equação 3.112:

$$Z_{eq}(s) = \frac{R}{RCs + 1} \quad (3.113)$$

Onde:  $Z_{eq}$  - impedância equivalente de entrada;

R - resistência de entrada;

C - capacitância de entrada.

A função de transferência do circuito é dada por:

$$H(s) = \frac{V_T(s)}{V_F(s)} = \frac{Z_{eq}(s)}{Z_{eq}(s) + R_F} \quad (3.114)$$

Substituindo-se a Equação 3.113 na Equação 3.114, vem:

$$H(s) = \frac{\frac{R}{sRC + 1}}{\frac{R}{sRC + 1} + R_F} \quad (3.115)$$

Reescrevendo de outra forma a Equação 3.115:

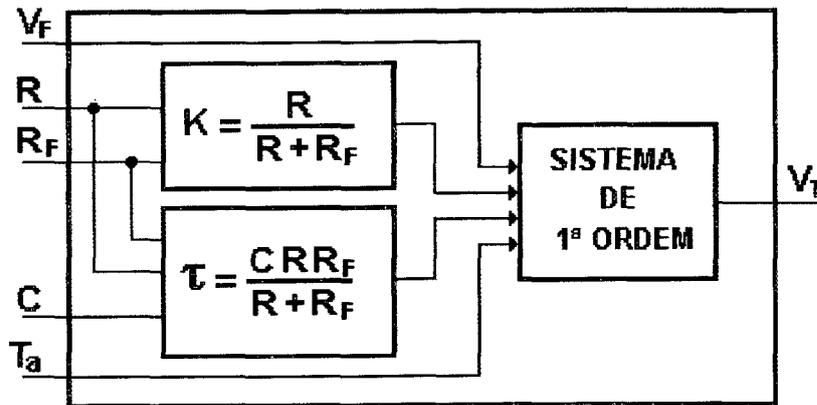
$$H(s) = \frac{R}{\frac{R + R_F}{s \frac{CRR_F}{R + R_F} + 1}} \quad (3.116)$$

A Equação 3.116 é a função de transferência do sistema de 1ª ordem, no qual a sensibilidade estática K é dada pela Equação 3.117 e a constante de tempo  $\tau$  é dada pela Equação 3.118.

$$K = \frac{R}{R + R_F} \quad (3.117)$$

$$\tau = \frac{CRR_F}{R + R_F} \quad (3.118)$$

O módulo de impedância de entrada do circuito da Figura 3.20 está mostrado na Figura 3.21.



**Legenda:**

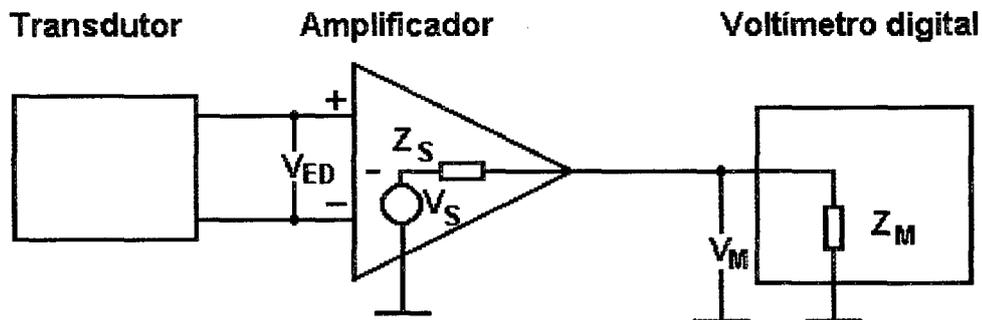
- $V_F$  - tensão da fonte;
- $C$  - capacitância de entrada;
- $R$  - resistência de entrada;
- $R_F$  - resistência da fonte;
- $T_a$  - tempo entre amostras;
- $V_T$  - tensão nos terminais de entrada.

**Figura 3.21 - Módulo de impedância de entrada**

**3.2.3 Impedância de saída**

A impedância elétrica nos terminais de saída de um circuito ou dispositivo, que este apresenta para o circuito que usa o sinal de saída [26].

A impedância de saída é utilizada quando o instrumento está ligado a outro instrumento, por exemplo, em uma cadeia de medição composta de um amplificador e um medidor digital, mostrado na Figura 3.22.



**Legenda:**

- $V_{ED}$  - tensão de entrada diferencial;
- $Z_S$  - impedância de saída;
- $V_S$  - tensão de saída;
- $V_M$  - tensão nos terminais do medidor;
- $Z_M$  - impedância do medidor.

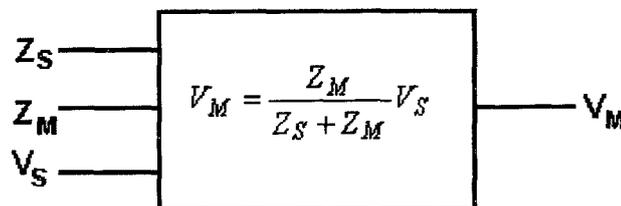
**Figura 3.22 - Cadeia de medição**

Este modelo é a relação de impedâncias de saída com a de entrada de dois instrumentos subseqüentes de uma cadeia de medição.

O tratamento é o mesmo dado a impedância de entrada, isto é, leva-se em

consideração os valores de resistência, capacitância, indutância e configurações do circuito.

O módulo dessa característica é mostrado na Figura 3.23 de uma forma ilustrativa, sem detalhar os componentes das impedâncias.



Legenda:

- $Z_s$  - impedância de saída;
- $V_s$  - tensão de saída;
- $V_M$  - tensão nos terminais do medidor;
- $Z_M$  - impedância do medidor.

Figura 3.23 - Impedância de saída

### 3.2.4 Tempo de resposta

O tempo de resposta é representado por um módulo de 1ª ou de 2ª ordem, sendo necessário ajustá-los conforme suas especificações.

O tempo de resposta, quando modelado por um sistema de 1ª ordem, é definido pela constante de tempo.

O ajuste do módulo do tempo de resposta de 2ª ordem é feito através de variações do amortecimento e da frequência de ressonância até que seja alcançado o valor especificado.

Um exemplo desse ajuste está no tempo de resposta (*settling time*) do modelo do amplificador mostrado no capítulo 4.

### 3.2.5 Sensibilidade

A sensibilidade de instrumento pode ser modelada por um sistema de 1ª ou de 2ª ordem.

Um exemplo de modelagem através de sistemas de 1ª e de 2ª ordem é a característica do ganho do amplificador em função da frequência para pequenos sinais. A maioria dos fabricantes de amplificadores fornece o gráfico do ganho para pequenos sinais em função da frequência, ou a frequência de corte para cada ganho selecionado. Algumas vezes ambos. Um exemplo desse tipo de gráfico é mostrado na Figura 3.24, no qual são mostrados as respostas de amplitude em função da frequência.

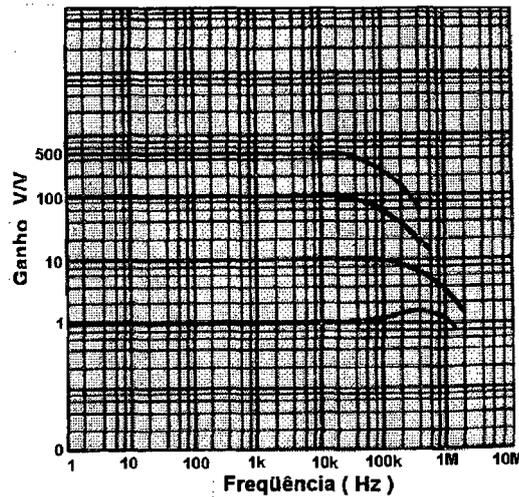
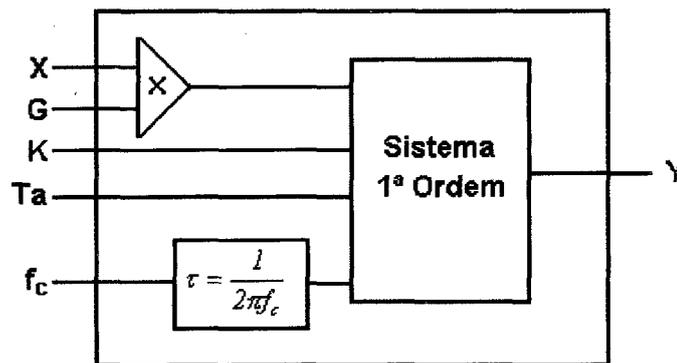


Figura 3.24 - Gráfico ganho versus freqüência

Caso se assuma o modelamento por um sistema de 1ª ordem, a constante de tempo será calculada através da Equação 3.119, na qual a freqüência de corte  $f_c$  é especificada pelo fabricante e a sensibilidade estática  $K$  é igual a 1. O módulo é mostrado na Figura 3.25.

$$\tau = \frac{1}{2\pi f_c} \tag{3.119}$$



Legenda:

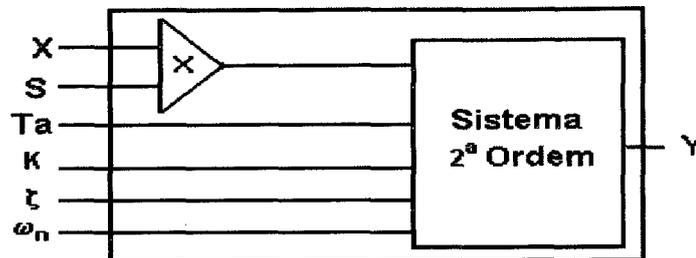
- X - sinal de entrada;
- G - ganho selecionado;
- K - sensibilidade estática;
- T<sub>a</sub> - tempo entre amostras;
- f<sub>c</sub> - freqüência de corte;
- Y - sinal de saída.

Figura 3.25 - Módulo de 1ª ordem do ganho versus freqüência

Caso se assuma o modelamento por um sistema de 2ª ordem, o módulo será simplesmente o próprio sistema de 2ª ordem. Neste caso deve ser verificada a freqüência de corte do sistema de 2ª ordem, sendo que esta deve ter o mesmo valor da freqüência de corte especificada pelo fabricante. O ajuste do valor da freqüência de corte especificada pelo fabricante é feito pela variação da freqüência natural não amortecida e da razão de

amortecimento.

Um outro exemplo de modelamento através de sistema de 2ª ordem é a sensibilidade de um acelerômetro. O módulo dessa característica é mostrado na Figura 3.26.



**Legenda:**

- X - sinal de entrada;
- S - sensibilidade;
- K - sensibilidade estática;
- $T_a$  - tempo entre amostras;
- $\zeta$  - razão de amortecimento;
- $\omega_n$  - frequência natural não amortecida;
- Y - sinal de saída.

**Figura 3.26 - Módulo da sensibilidade**

### 3.2.6 Razão de rejeição de modo comum

Esta característica varia com a frequência, conforme se pode observar na Figura 3.27. A curva de variação é idêntica ao sistema de 1ª ordem. O procedimento para a modelagem dessa característica é semelhante ao adotado no módulo do ganho em função da frequência, item 3.2.5. Mas a sua saída é inversa, pois enquanto o ganho diminui quando a frequência aumenta, a tensão devida a razão de rejeição de modo comum resultante –  $V_{RRMC}$  aumenta quando a frequência aumenta.

O módulo da razão de rejeição de modo comum RRMC, Figura 3.28, é composto por dois módulos: um sistema de 1ª ordem e um de equalizador de fases, filtro passa todas de 1ª ou de 2ª ordem.

Da curva do ganho em função da frequência mostrado na Figura 3.27 obtém-se a frequência de corte para cada ganho selecionado.

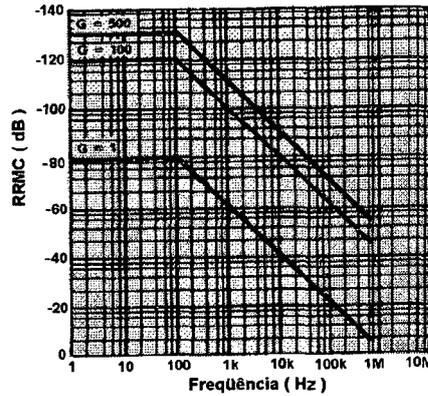
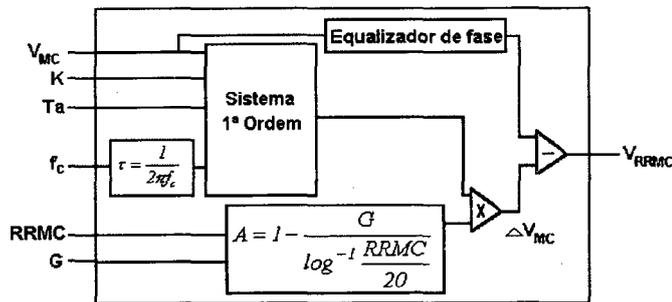


Figura 3.27 - RRMCM em função da frequência

Com o valor da frequência de corte, calcula-se a constante de tempo do sistema de 1ª ordem, através da Equação 3.119.



Legenda:

- $V_{MC}$  - sinal de entrada;
- $K$  - sensibilidade estática;
- $T_a$  - tempo entre amostras;
- $f_c$  - frequência de corte;
- $RRMC$  - razão de rejeição de modo comum;
- $G$  - ganho selecionado;
- $V_{RRMC}$  - tensão de rejeição de modo comum.

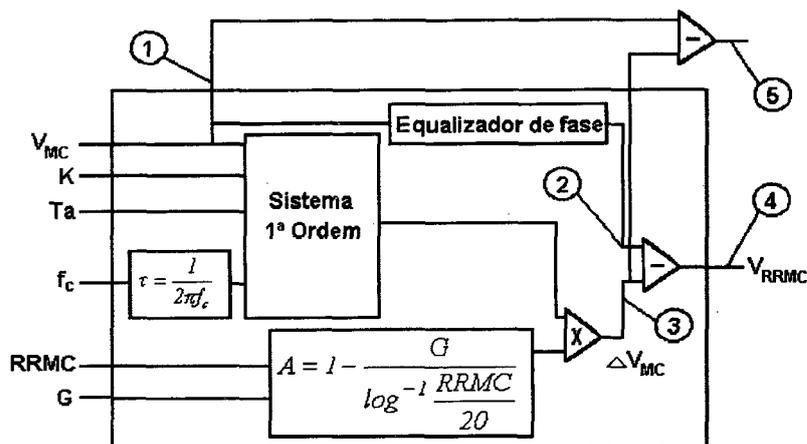
Figura 3.28 - Módulo da RRMCM

A tensão de modo comum  $V_{MC}$  entra no sistema de 1ª ordem e no equalizador de fase. A saída do equalizador de fase tem o mesmo valor em amplitude e aproximadamente a mesma fase da saída do módulo do sistema de 1ª ordem, para uma determinada faixa de frequência.

A saída do sistema de 1ª ordem é multiplicada pela equação que calcula o valor a ser atenuado para cada ganho selecionado. O valor dessa saída  $\Delta V_{MC}$  diminui a medida que a frequência aumenta. Como esse sinal  $\Delta V_{MC}$  é subtraído da saída do equalizador de fase, a medida que a frequência aumenta a saída do módulo  $V_{RRMC}$  também aumenta.

- **Ensaio**

Nos ensaios foram monitorados os cinco pontos mostrados na Figura 3.29, sendo realizados ensaios com o equalizador utilizando filtros passa todas de 1ª e de 2ª ordem.

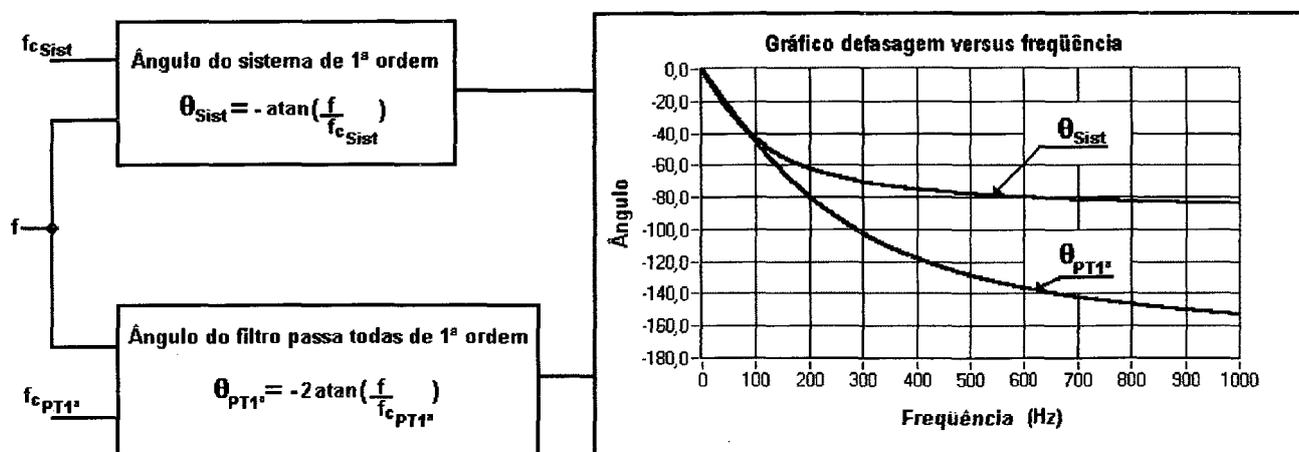


**Legenda:**

- Ponto 1 - tensão de modo comum;
- Ponto 2 - saída do equalizador;
- Ponto 3 - parcela da tensão modo comum rejeitada;
- Ponto 4 - tensão de RRMC;
- Ponto 5 - tensão de RRMC sem equalizador.

**Figura 3.29 - Pontos de ensaios do módulo da RRMC**

Antes da realização dos ensaios com o módulo da RRMC é necessário ajustar o equalizador de fases para uma determinada faixa de frequência. Essa faixa foi assumida ser de zero até a frequência de corte da RRMC. O ajuste do filtro passa todas é feito através de variações da sua frequência de corte, comparando o ângulo do filtro passa todas com o ângulo do sistema de 1ª ordem para toda a faixa de frequência de interesse. O esquema para ajustar o equalizador de fases é mostrado na Figura 3.30. Pode-se observar no gráfico que para frequências até aproximadamente 120 Hz os sinais encontram-se em fase.



**Legenda:**

- $f_c$  - frequência do ensaio
- $f_{cSist}$  - frequência de corte do sistema de 1ª ordem
- $f_{cPT1ª}$  - frequência de corte do filtro de 1ª ordem
- $\theta_{Sist}$  - ângulo do sistema de 1ª ordem
- $\theta_{PT1ª}$  - ângulo do filtro passa todas de 1ª ordem

**Figura 3.30 - Ajuste do filtro passa todas de 1ª ordem**

Nos ensaios do módulo da RRMCC com o equalizador, utilizando um filtro passa todas de 1ª ordem, foram utilizados os seguintes ajustes:

Módulo da RRMCC

RRMC = 74,92 dB

$f_{cSist1^a} = 105$  Hz

$G = 1$

$K = 1$

$V_{MC} = 1$  V

Filtro passa todas de 1ª ordem

$f_{cPT1} = 238$  Hz

$K = 1$

A Figura 3.31 mostra os ângulos do sistema de 1ª ordem e do filtro passa todas de 1ª ordem, sendo este o melhor ajuste conseguido para a faixa de frequência (0 a 105) Hz.

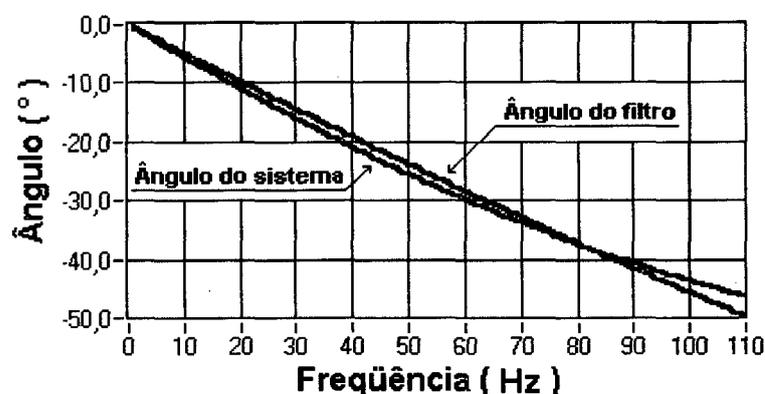


Figura 3.31 - Resposta do filtro passa todas de 1ª ordem

Com o equalizador ajustado foi ensaiado o módulo da RRMCC, sendo mostrado na Figura 3.32 e Figura 3.33 os ensaios até as frequências de 150 Hz e 1000 Hz, respectivamente. O sinal com o equalizador é o ponto 4 e o sinal sem equalizador é o ponto 5 da Figura 3.29.

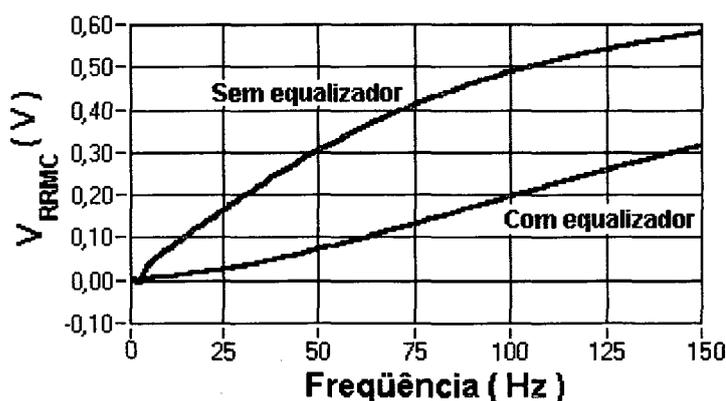


Figura 3.32 - Tensão devido à RRMCC com e sem equalizador - (0 e 150) Hz

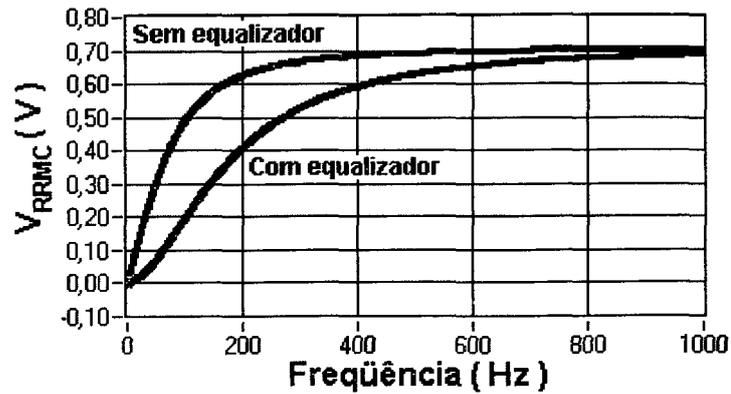


Figura 3.33 - Tensão devido à RRM C com e sem equalizador - ( 0 e 1000 ) Hz

Nos ensaios com o equalizador, utilizando um filtro passa todas de 2ª ordem, foram utilizados os seguintes ajustes:

Módulo da RRM C

RRMC = 74,92 dB

$f_{cSist}^a = 105$  Hz

$G = 1$

$K = 1$

$V_{MC} = 1$  V

Filtro passa todas de 2ª ordem

$\zeta = 1,42$

$f_{nPT2} = 687$  Hz

$K = 1$

A Figura 3.34 mostra os ângulos do sistema de 1ª ordem e do filtro passa todas de 2ª ordem, sendo este o melhor ajuste conseguido para a faixa de frequência (0 a 105) Hz.

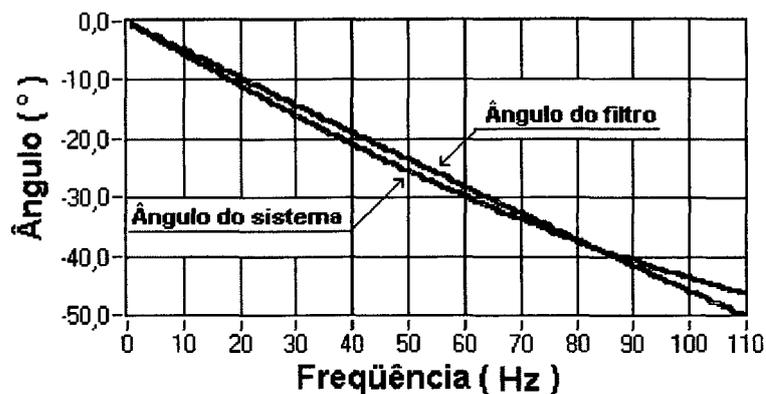


Figura 3.34 - Resposta do filtro passa todas de 2ª ordem

Com o equalizador ajustado é ensaiado o módulo da RRM C, sendo mostrado na Figura 3.35 e Figura 3.36 os ensaios até as frequências de 150 Hz e 1000 Hz, respectivamente. O sinal com o equalizador é o ponto 4 e o sinal sem equalizador é o

ponto 5 da Figura 3.29

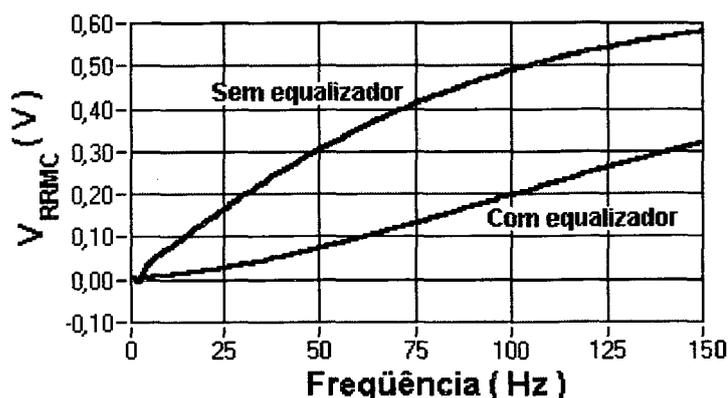


Figura 3.35 - Tensão de RRMCM com e sem equalizador até 150 Hz

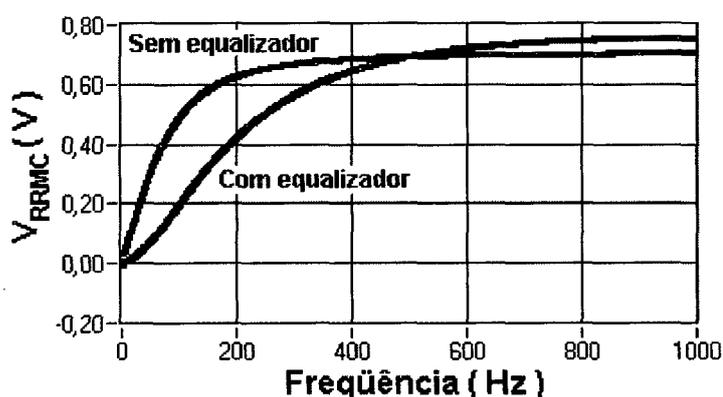


Figura 3.36 - Tensão de RRMCM com e sem equalizador até 1000 Hz

Existem poucas diferenças no desempenho do equalizador de fase ao se utilizar um filtro passa todas de 1ª ou de 2ª ordem. O filtro passa todas de 2ª ordem tem uma descontinuidade na curva do ângulo em função da frequência, quando a frequência da tensão de modo comum for igual à frequência natural não amortecida, conforme mostra a Equação 3.120.

$$\phi = -2 \arctan \frac{2\zeta}{\frac{\omega_n}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_n}} \quad (3.120)$$

Onde:  $\phi$  - ângulo do filtro passa todas de 2ª ordem;

$\zeta$  - razão de amortecimento;

$\omega_n$  - frequência natural não amortecida;

$\omega$  - frequência da tensão de modo comum.

Devido a essa descontinuidade foi utilizado no modelo da RRMCM o equalizador de fase com filtro passa todas de 1ª ordem.

O gráfico mostrado na Figura 3.37 é de um ensaio feito com um sinal senoidal de

amplitude igual a 1 V e frequência de 85 Hz no módulo da RRMCM utilizando um filtro passa todas de 1ª ordem. São mostrados a tensão de modo comum  $V_{MC}$  (ponto 1), o sinal na saída do filtro (ponto 2) e o sinal da parcela da tensão de modo comum que é rejeitada,  $\Delta V_{MC}$  (ponto 3). Pode-se observar que o sinal da saída do equalizador está, praticamente, em fase com o  $\Delta V_{MC}$ , tendo para essa frequência um comportamento adequado.

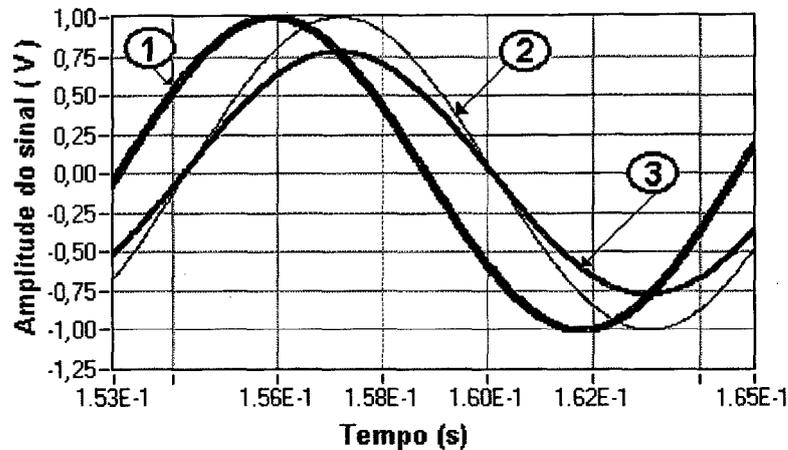


Figura 3.37 - Gráfico das tensões dos pontos 1, 2 e 3 da Figura 3.29

O gráfico da Figura 3.38 mostra o comportamento do módulo da RRMCM dos sinais com o equalizador e sem o equalizador pontos 4 e 5 da Figura 3.29, respectivamente. No ensaio é utilizado um sinal tensão de modo comum de 1 V e com a frequência variando entre 1 Hz e 150 Hz. Pode-se observar o comportamento adequado do sinal com equalizador, ponto 4, tanto nas frequências baixas como nas altas.

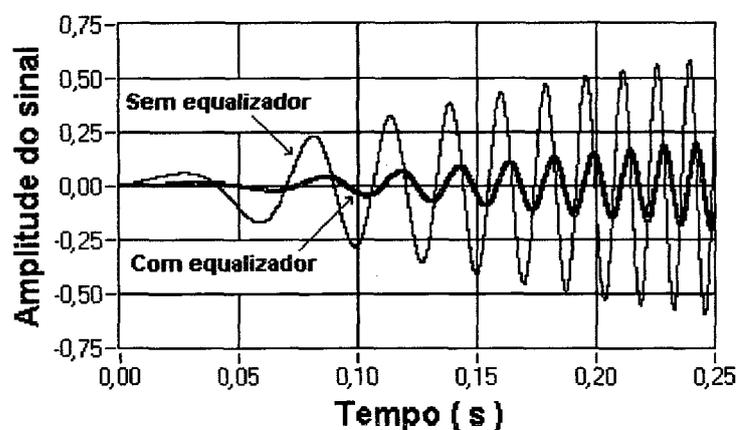


Figura 3.38 - Tensão de saída com e sem equalizador de fase

### 3.2.7 Ruído

Geralmente as especificações dos fabricantes fornecem os ruídos para duas faixas de frequência. Na faixa baixa de (0,1 a 100) Hz identifica-se o ruído *flicker*, que é

especificado em valores de tensão e/ou corrente. A faixa alta, acima de 100 Hz identifica o ruído branco, que é especificado em densidade espectral de tensão e/ou corrente. Além de valores, muitas vezes também são fornecidos gráficos da densidade espectral de tensão e de corrente de ruído.

O modelo do ruído é definido pela sua equação matemática. Apesar da tensão, ou corrente, do ruído ser bem definida, o valor instantâneo só pode ser avaliado em termos de probabilidade [21]. A amplitude instantânea da tensão ou corrente de ruído tem uma distribuição normal, onde a média  $\mu$  é igual a zero e o desvio padrão  $\sigma$  é o valor dado pelas equações matemáticas, conforme mostra a Figura 3.39.

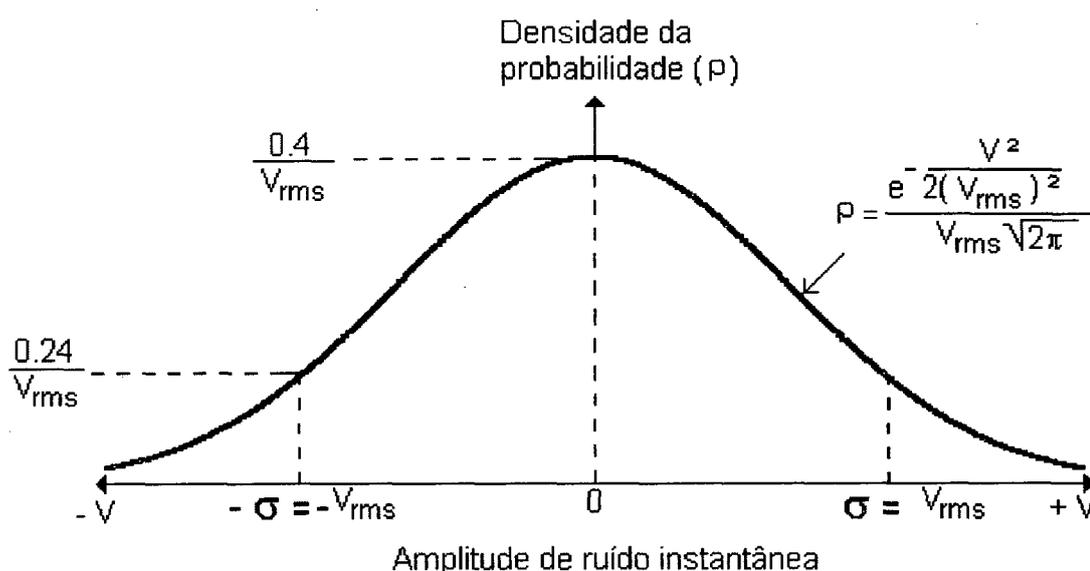


Figura 3.39 - Função densidade de probabilidade para ruído

Nos modelos de ruídos, *flicker* ou branco, é adotado como representação da distribuição, a normal truncada mostrada na Figura 3.40. O limite inferior é representado por  $-n\sigma$  e o superior por  $+n\sigma$ . O valor de  $n$  adotado foi de 3,3 resultando num nível de confiança de 99,9% [16][32].

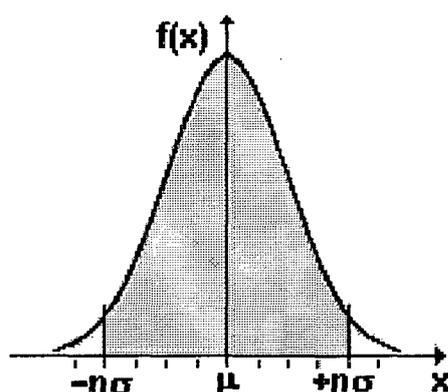


Figura 3.40 - Normal truncada

**a) Ruído flicker**

A quantidade de ruído *flicker* é igual em cada década da largura de banda. Desse modo o ruído total *flicker* pode ser calculado se o ruído em uma década é conhecido. A equação matemática utilizada para modelar a tensão de ruído *flicker* é a Equação 3.121, que é a mesma do ruído *pink*.

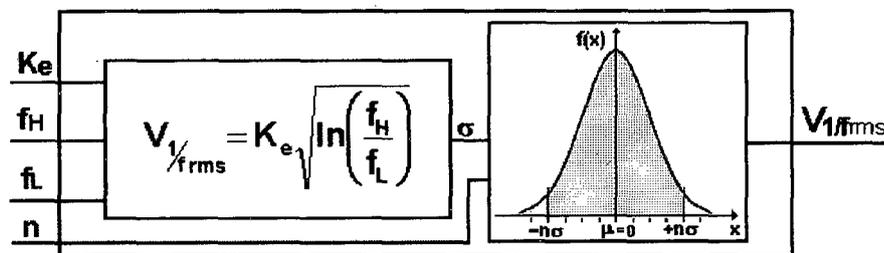
$$E_{1/f\text{rms}} = K_e \sqrt{\ln\left(\frac{f_H}{f_L}\right)} \quad (3.121)$$

Onde:  $E_{1/f\text{rms}}$  - tensão de ruído *flicker* (V);

$K_e$  - valor da densidade espectral de tensão de ruído na frequência de 1 Hz  
 ( $\frac{V}{\sqrt{\text{Hz}}}$ );

$f_L, f_H$  - frequências inferior e superior respectivamente, da largura de banda de interesse (Hz).

O módulo da tensão de ruído *flicker* é mostrado na Figura 3.41.



**Legenda:**

- $f_H$  - frequência superior da largura de banda de interesse;
- $f_L$  - frequência inferior da largura de banda de interesse;
- $K_e$  - valor da densidade de tensão espectral de ruído para 1 Hz;
- $E_{1/f\text{rms}}$  - tensão de ruído *flicker*;
- $n$  - fator do nível de confiança.

**Figura 3.41 - Módulo da tensão de ruído flicker**

A equação matemática utilizada para modelar o ruído de corrente flicker é a Equação 3.122.

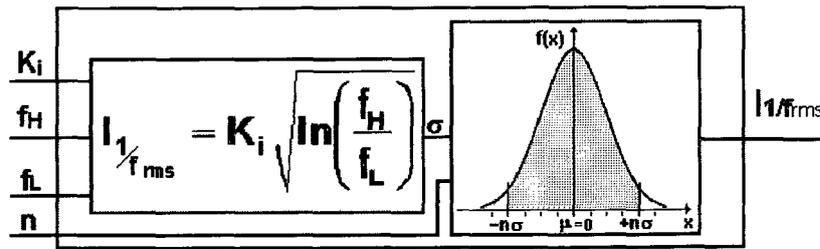
$$I_{1/f\text{rms}} = K_i \sqrt{\ln\left(\frac{f_H}{f_L}\right)} \quad (3.122)$$

Onde:  $I_{1/f\text{rms}}$  - corrente de ruído flicker (V);

$K_i$  - valor da densidade espectral de corrente de ruído na frequência de 1 Hz  
 ( $\frac{V}{\sqrt{\text{Hz}}}$ );

$f_L, f_H$  - frequências inferior e superior respectivamente, da largura de banda de interesse (Hz).

O módulo de ruído de corrente flicker é mostrado na Figura 3.42.



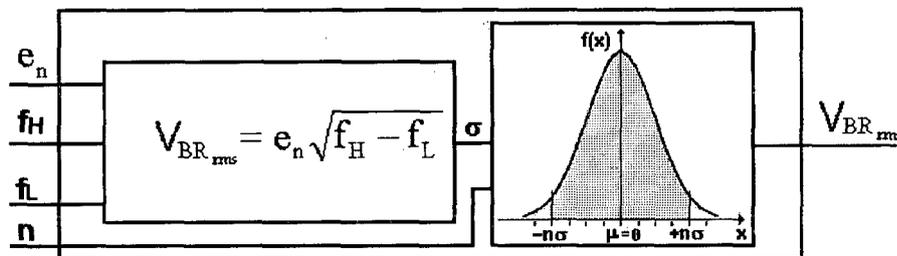
Legenda:

- $f_H$  - frequência superior da largura de banda de interesse;
- $f_L$  - frequência inferior da largura de banda de interesse;
- $K_i$  - valor da densidade de corrente espectral de ruído para 1 Hz;
- $E_{1/f_{rms}}$  - tensão de ruído flicker;
- $n$  - fator do nível de confiança.

Figura 3.42 - Módulo da corrente de ruído flicker

### b) Ruído branco

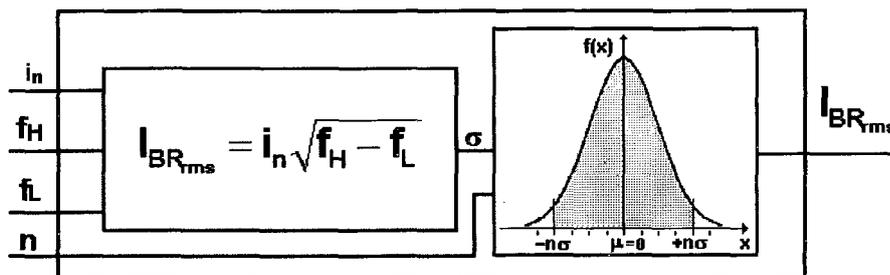
Foram utilizadas a Equação 2.27 e a Equação 2.28, do capítulo 2, para modelar os ruídos branco de tensão e corrente. Seus módulos são mostrados na Figura 3.42 e na Figura 3.43, respectivamente.



Legenda:

- $f_H$  - frequência superior da largura de banda de interesse;
- $f_L$  - frequência inferior da largura de banda de interesse;
- $E_m$  - densidade espectral de tensão de ruído;
- $E_{R_{rms}}$  - tensão de ruído branco;
- $N$  - fator do nível de confiança.

Figura 3.43 - Módulo da tensão de ruído branco



Legenda:

- $f_H$  - frequência superior da largura de banda de interesse;
- $f_L$  - frequência inferior da largura de banda de interesse;
- $i_n$  - densidade espectral de corrente de ruído;
- $I_{R_{rms}}$  - corrente de ruído branco;
- $N$  - fator do nível de confiança.

Figura 3.44 - Módulo da corrente de ruído branco

## Capítulo 4

# MODELOS DE INSTRUMENTOS

Neste capítulo são modelados dois instrumentos. Faz-se necessário comentar alguns passos para que se possa ter um modelo com comportamento o mais próximo possível do comportamento real do instrumento.

Como o modelo é baseado nas especificações dos fabricantes, o primeiro passo consistiu em analisar as especificações de diversos fabricantes e escolher o instrumento para o qual foram fornecidas as especificações mais detalhadas. Cabe ressaltar que a maior dificuldade para fazer essa análise decorre do fato de não haver padronização nas especificações dos instrumentos.

O passo seguinte consistiu na análise de todas as características dinâmicas do instrumento. Para fazer essa análise é necessário um bom conhecimento do princípio de funcionamento do instrumento.

Neste trabalho os instrumentos são classificados em simples e compostos. Instrumento simples é o que pode ser modelado por somente uma característica dinâmica. Caso exija mais de uma característica dinâmica é denominado instrumento composto.

Nos diagramas dos modelos de instrumentos constam as especificações fornecidas pelo fabricante e os dados que virão do experimento que for simulado com o modelo. Foram padronizadas três colunas na entrada do modelo chamadas "**Experimento**", "**Especificação do fabricante**" e "**Cria**".

Na coluna "**Experimento**" estão os dados necessários para o modelo representar o comportamento do instrumento quando este estiver fazendo parte de um experimento. Neste caso, usa-se a sigla "**EXP**", significando que o dado provem do experimento.

Na coluna "**Especificação do fabricante**" estão os dados fornecidos pelo fabricante do instrumento.

Os blocos constantes na coluna "**Cria**" representam o procedimento de escolha dos

valores dos parâmetros na representação de um particular instrumento. Esse procedimento é aplicado na fase de particularização do modelo e está descrito na referência [44]. Sua função é criar diversos instrumentos de um mesmo tipo com valores diferentes de suas características, mas dentro dos valores especificados pelo fabricante. Por exemplo, termistor Omega modelo 44007, número de série A001 é um termistor que tem os valores escolhidos para suas características diferentes do número de série A002, porém ambos estão de acordo com as especificações do fabricante do componente.

## 4.1 Termistor

É um dos mais usuais transdutores utilizados para medir temperaturas na faixa de  $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $150\text{ }^{\circ}\text{C}$  [9] [45] [46].

O termistor não responde instantaneamente a uma variação da temperatura, sendo a sua resposta dependente da sua massa e do tipo de material do qual é feito. O termistor troca energia com o ambiente até que os dois estejam na mesma temperatura, armazenando energia durante a troca. A temperatura do termistor varia com o tempo até que o equilíbrio seja alcançado. A taxa com a qual a temperatura varia com o tempo pode ser modelada por um sistema de 1ª ordem [1] [2], sendo essa a característica de comportamento dinâmico do termistor.

### 4.1.1 Análise das especificações

Foram analisadas especificações de vários fabricantes, sendo selecionados os que se encontram na Tabela 4.1 por serem os que apresentaram as especificações mais completas, embora não sigam uma padronização.

Tabela 4.1 - Especificação de fabricantes de termistor

FABRICANTE	OMEGA	AMETHERM	THERMOMETRICS
MODELO	44007	NT03 50291	TK95F302W
Tipo	Encapsulado com resina epoxy	Encapsulado com silicone	Encapsulado com resina epoxy
Resistência Nominal (25°C)	5 k $\Omega$	5 k $\Omega$	3 k $\Omega$
Tolerância da Temperatura (1)	Temperatura: $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$ Resistência: $\pm 2\%$ (0 a $+75^{\circ}\text{C}$ )	5% ( $-40$ a $+150^{\circ}\text{C}$ )	$\pm 0,2^{\circ}\text{C}$ (0 a $+100^{\circ}\text{C}$ )
Beta		3950 K (curva L) (2)	curva F (3)
Faixa nominal	( $-80$ a $+150^{\circ}\text{C}$ )	( $-40$ a $+150^{\circ}\text{C}$ )	(0 a $+100^{\circ}\text{C}$ )
Faixa de operação	150°C	( $-40$ a $+150^{\circ}\text{C}$ )	( $-80$ a $+150^{\circ}\text{C}$ )
Constante de tempo	10 s máx (ar parado) 25 s máx (ar parado, teflon) 1 s máx (óleo) 2,5 s máx (óleo, teflon)	10 s	10 s (ar) 10 s (óleo)
Constante de dissipação	1 mW/°C (ar parado) 8 mW/°C (óleo)	3,5 mW/°C	1 mW/°C (ar parado) 8 mW/°C (óleo)

FABRICANTE	OMEGA		AMETHERM	THERMOMETRICS
MODELO	44007		NT03 50291	TK95F302W
Deriva térmica no tempo	10 meses	100 meses		alta estabilidade
0°C	< 0,01°C	< 0,01°C		
25°C	< 0,01°C	0,02°C		
100°C	0,2°C	0,32°C		
150°C	1,5°C	NA		

Obs: a tabela não segue o Sistema Internacional – SI, mas foi mantida para retratar fielmente a forma de especificação.

Da análise da Tabela 4.1 tiram-se as seguintes conclusões:

- o fabricante AMETHERM especifica a constante de tempo em 10 s, não discriminando se é no ar ou em óleo, nem se é máximo ou típico [45].
- o fabricante THERMOMETRICS especifica a constante de tempo em 10 s para o ar e 1 s para o óleo, mas não informa se esses valores são típicos ou máximos [46].
- o fabricante OMEGA [9] especifica a constante de tempo como tempo de resposta, o que segundo o VIM é uma característica diferente. No catálogo do fabricante páginas D-5 e Z-9 [9] o tempo de resposta tem a mesma definição da constante de tempo.

Alguns fabricantes fornecem as tabelas de resistência em função da temperatura para intervalos de temperatura de 1°C, outros de 5°C, de 10°C. Outros fabricantes fornecem apenas a curva de temperatura em função da resistência.

Foram analisados três termistores de fabricantes diferentes, sendo escolhido o OMEGA tipo 44007, por fornecer a especificação com maiores detalhes. Embora ainda não seja o ideal, pois muitos dados não são bem especificados, como por exemplo, a constante de tempo.

#### 4.1.2 Característica dinâmica

O termistor é um instrumento simples, e sua característica dinâmica pode ser modelada por um sistema de 1ª ordem. O parâmetro que define o sistema de 1ª ordem é a constante de tempo, sendo seu valor uma característica intrínseca de cada termistor.

O fabricante fornece a constante de tempo com valor máximo de 10 s. Essa especificação não define o tipo de modelo para essa característica, por esse motivo foram feitos ensaios com a finalidade de se obter um modelo que possibilitasse escolher um valor para a constante de tempo, o mais próximo do valor verdadeiro.

O ensaio foi feito só para a constante de tempo no ar. O circuito para a execução do ensaio é o mostrado na Figura 4.1. É composto do termistor OMEGA tipo 44007, uma fonte

de luz, uma lente, uma fonte de corrente de  $100 \mu\text{A}$  do multímetro da Hewlett Packard modelo 34401A, uma placa de aquisição de dados DAQ1200 da National Instruments com taxa de amostragem de 400 amostras por segundo, um termômetro Microzelle tipo LR03 e um computador Pentium III 400 MHz.

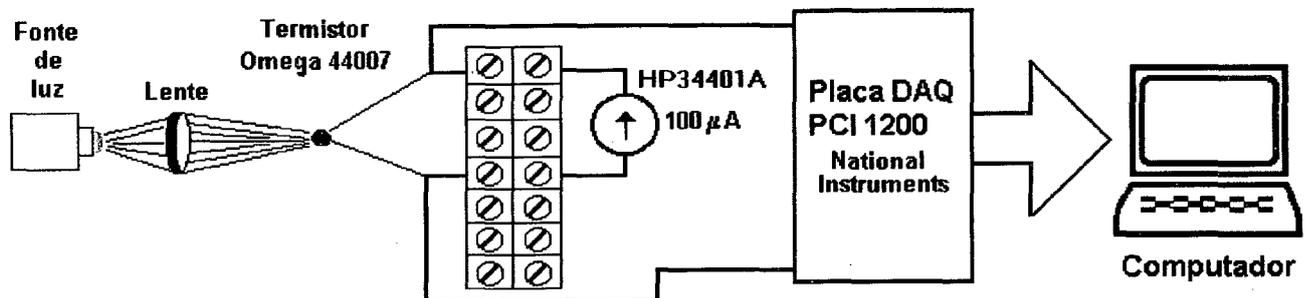


Figura 4.1 - Circuito de ensaio da constante e tempo do termistor

O ensaio consiste em convergir os feixes de luz sobre o termistor através da lente provocando um aquecimento pontual sobre a sua superfície. Após a temperatura se estabilizar, um anteparo corta instantaneamente a luz, provocando, dessa forma, um degrau decrescente de temperatura.

O software LabView da National Instruments foi utilizado para trabalhar os dados adquiridos pela placa DAQ1200. Foi feito um programa que converte os valores de tensão adquiridos pela placa DAQ1200 em temperatura, através de tabela fornecida pelo fabricante. Com os valores de temperatura é gerado um gráfico da temperatura versus tempo, do qual é calculado o valor da constante de tempo.

O método utilizado para o cálculo da constante de tempo dos termistores foi o de importar os dados para o Matlab, traçar um gráfico da temperatura versus o tempo e calcular a constante de tempo.

Foram ensaiados dez termistores tipo 44007 da Omega, dos quais não se conhece se pertencem ou não a um mesmo lote de fabricação. Em cada termistor foram feitos seis ensaios. No ensaio da constante de tempo foi aplicado um degrau decrescente de temperatura de  $45 \text{ }^\circ\text{C}$ , com a temperatura inicial de  $65 \text{ }^\circ\text{C}$  e final de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . A média dos valores da constante de tempo foi de  $8,5 \text{ s}$ . O modelo sugerido para esse parâmetro é o de uma distribuição normal com média  $8,5 \text{ s}$  e truncada em  $(7,5 \text{ e } 10) \text{ s}$ , conforme mostra a Figura 4.2.

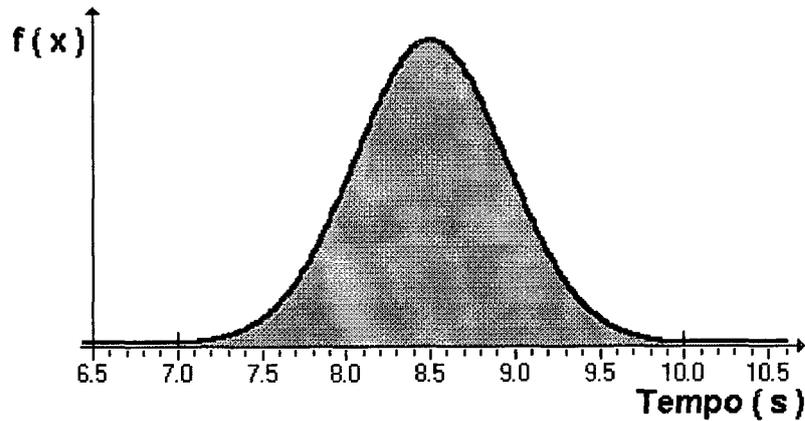
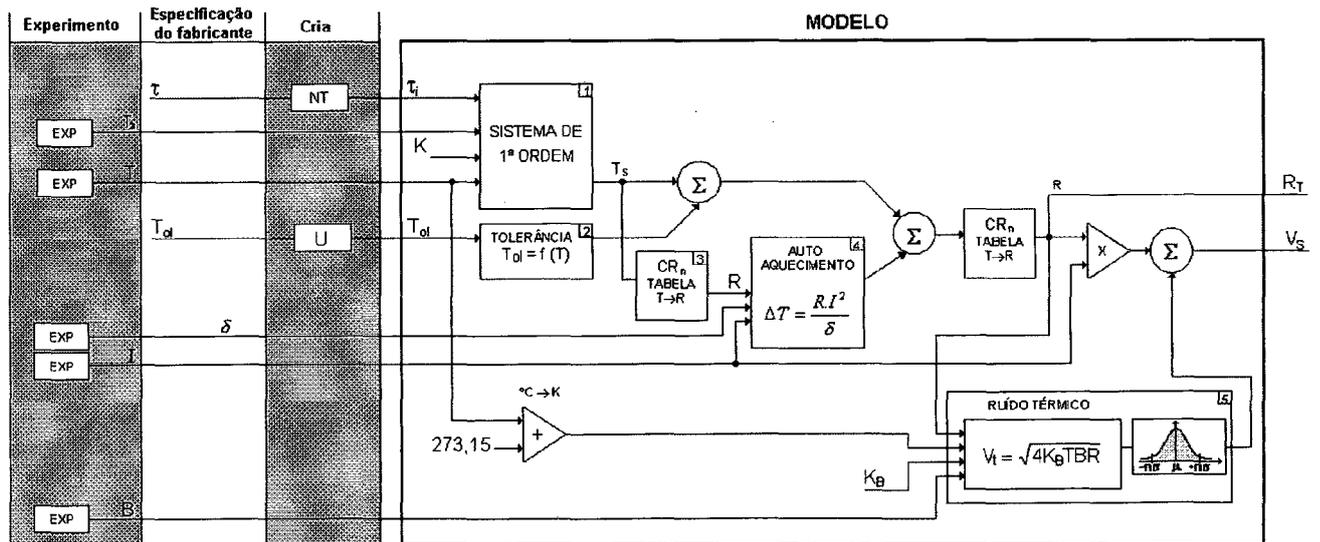


Figura 4.2 - Modelo da constante de tempo do termistor Omega 44007

Caso se deseje um modelo que represente a constante de tempo com maior exatidão, é necessário fazer um maior número de ensaios em vários componentes de lotes diferentes, para que se possa determinar o tipo de distribuição que melhor representa o valor dessa característica.

### 4.1.3 Modelo

O modelo do termistor Omega 44007 é mostrado na Figura 4.3.



**Legenda:**

- |  |  |
|--|--|
| $\Delta T$ - Variação de temperatura ( $^{\circ}C$ ) | $K_B$ - Constante de Boltzmann [ $1,38 \times 10^{-23} J/K$ ]      |
| $\delta$ - Constante de dissipação (mW/K)            | $R$ - Resistência ( $\Omega$ )                                     |
| $\tau$ - Constante de tempo especificada (s)         | $R_T$ - Resistência do termistor à temperatura $T_M$ ( $\Omega$ )  |
| $\tau_i$ - Constante de tempo escolhida (s)          | $T$ - Temperatura ( $^{\circ}C$ )                                  |
| $B$ - Largura de banda (Hz)                          | $T_{ol}$ - Tolerância especificada pelo fabricante ( $^{\circ}C$ ) |
| $BT$ - Distribuição Beta                             | $T_M$ - Temperatura a medir (mensurando) ( $^{\circ}C$ )           |
| $CR_n$ - Característica de resposta nominal          | $T_{oli}$ - Tolerância escolhida para o modelo ( $^{\circ}C$ )     |
| $EXP$ - Experimento                                  | $T_S$ - Temperatura do sensor ( $^{\circ}C$ )                      |
| $I$ - Corrente de alimentação (A)                    | $U$ - Distribuição U   |
| $K$ - Sensibilidade estática                         | $V_S$ - Tensão de saída (V)  |

Figura 4.3 - Modelo do termistor OMEGA44007

Os módulos que formam o modelo do transdutor mostrado na Figura 4.3 são:

- **Sistema de 1ª ordem**

Este bloco modela o comportamento dinâmico do termistor e como regra geral, está sempre na entrada do modelo do instrumento.

As entradas do sistema de 1ª ordem são temperatura, constante de tempo  $\tau$  e o tempo entre amostras  $T_a$ . A sensibilidade estática  $K$  em todos os modelos será sempre igual a 1.

- **Característica de resposta**

É uma tabela ou um algoritmo que converte o valor da temperatura da saída do sistema de 1ª ordem, em resistência.

- **Auto-aquecimento**

É a elevação de temperatura causada pela corrente de alimentação do termistor. Suas entradas são a corrente de alimentação, a constante de dissipação e o valor instantâneo de resistência do termistor. Sua saída é uma variação de temperatura.

- **Ruído térmico**

É uma característica aleatória. Suas entradas são temperatura, resistência instantânea do termistor, a constante de Boltzmann e a largura de banda. Sua saída é um valor em tensão.

Na saída do modelo são somadas as influências do auto-aquecimento e do ruído térmico ao valor do sinal de medição. A saída do modelo é dada por tensão ou resistência. A saída em resistência é o modelo do termistor sem corrente de alimentação.

#### **4.1.4 Ensaios**

O objetivo do ensaio é verificar se o modelo representa o comportamento real do termistor Omega tipo 44007.

Para execução dos ensaios foi “criado” o termistor OMEGA modelo 44007, número de série 001. Cada característica do termistor é analisada e modelada conforme a especificação fornecida pelo fabricante.

A constante de tempo  $\tau$  foi definida através de uma escolha aleatória de um valor da distribuição normal truncada definida anteriormente.

O constante de dissipação é um dado do experimento, tendo um valor para medidas de temperatura no ar parado ou no óleo. Os ensaios simulam medições de temperatura no ar.

A tolerância, por ser uma característica estática, é escolhida conforme critérios definidos na referência [44].

A corrente de alimentação é um dado selecionado pelo experimento, não devendo ser muito alta para evitar erros provocados pelo auto-aquecimento.

A largura de banda é definida pelos filtros do experimento.

O modelo do termistor Omega tipo 44007 número de série 001 foi implementado através do software LabView da National Instruments, com os seguintes ajustes:

Constante de tempo  $\tau = 8,5$  s;

Constante de dissipação  $\delta = 1$  mW/°C;

Tempo entre amostras  $T_a = 1$  ms;

Tolerância  $T_{ol} = 0,13$ °C;

Corrente de alimentação  $I = 100$   $\mu$ A;

Largura de banda  $B = 100$  Hz.

A Figura 4.4 mostra o esquema de ensaio com um degrau de temperatura sendo aplicado na entrada "T" e os pontos do modelo que foram monitorados. Na saída de tensão, ponto 2 do modelo, foi colocado um divisor. A divisão da tensão pela corrente resulta no valor da resistência do termistor, que é convertida para temperatura através de uma tabela, possibilitando monitorar a saída em temperatura.

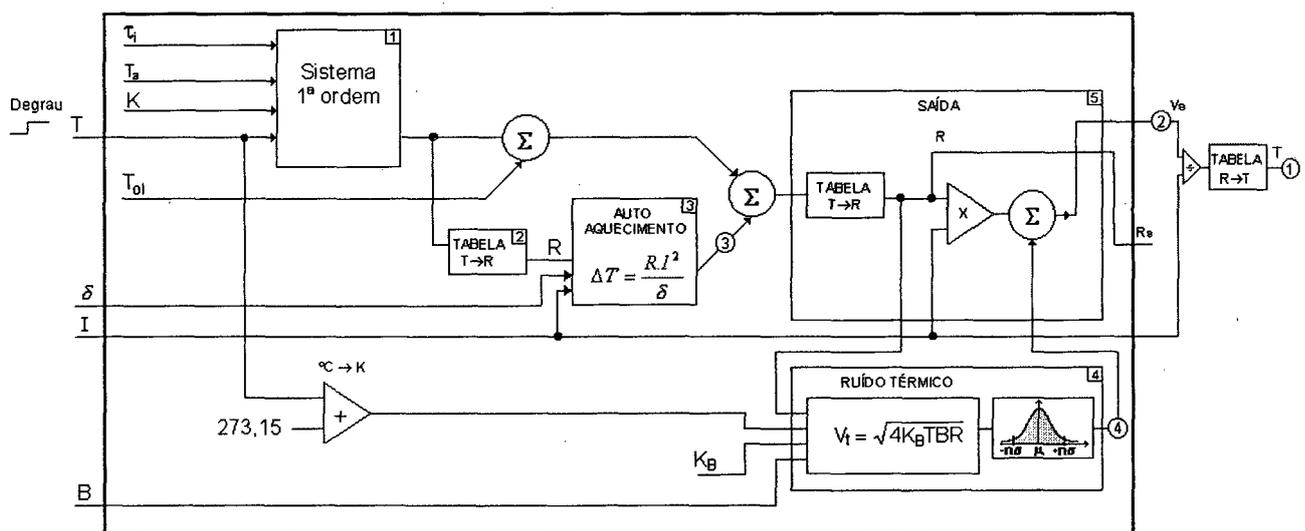


Figura 4.4 - Ensaio do termistor OMEGA tipo 44007 número de série 001

Foi simulada a aplicação de dois degraus de temperatura no termistor, o primeiro crescente de 0°C para 75°C e o segundo decrescente de 75°C para 0°C.

- **Degrau de 0°C para 75°C**

A resposta em tensão ao degrau, ponto 2 da Figura 4.4 é mostrado na Figura 4.5. Este gráfico mostra a característica do termistor da resistência variar inversamente com a

temperatura. Embora sendo uma exponencial o valor da constante de tempo  $\tau$  especificado pelo fabricante é relativo a resposta em temperatura, ponto 1 da Figura 4.4.

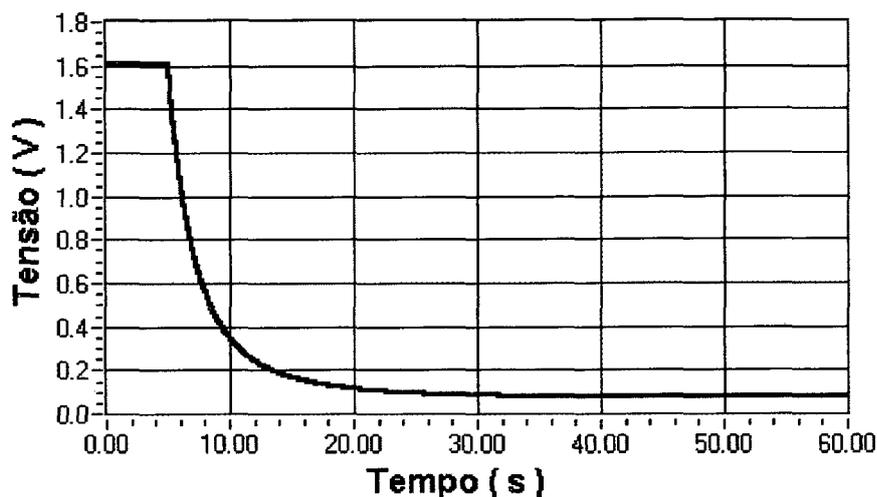


Figura 4.5 - Degrau 0°C a 75°C, ponto 2 do diagrama da Figura 4.4, saída em tensão

A resposta em temperatura ao degrau, ponto 1 da Figura 4.4, é mostrado na Figura 4.6. Este sinal foi obtido dividindo-se o valor da saída em tensão pela corrente para obter o valor em resistência, depois convertido através de uma tabela para temperatura. Pode-se observar que a resposta é uma exponencial com constante de tempo  $\tau$  igual 8,5 s.

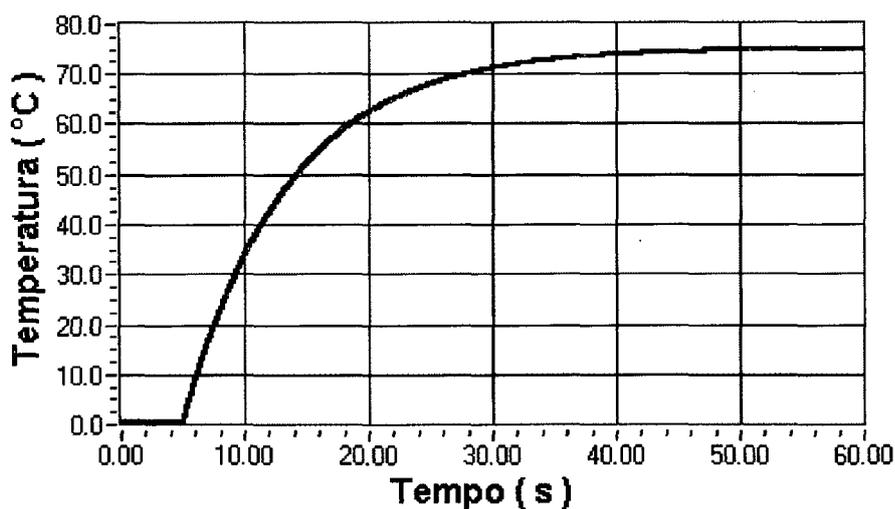


Figura 4.6 - Degrau 0°C a 75°C, ponto 1 do diagrama da Figura 4.4, saída em temperatura

O efeito do auto aquecimento, ponto 3 da Figura 4.4, é mostrado na Figura 4.7. Pode-se observar que esse efeito é maior nas baixas temperaturas, quando as resistências são maiores.

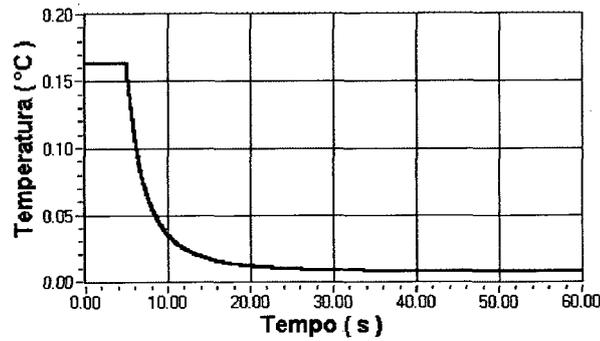


Figura 4.7 - Degrau 0°C a 75°C, ponto 3 do diagrama da Figura 4.4, saída auto-aquecimento

O efeito do ruído térmico, ponto 4 da Figura 4.4, é mostrado na Figura 4.8 (a), no qual pode-se observar que a sua contribuição é maior para baixas temperaturas, valores altos de resistências. A Figura 4.8 (b) destaca a faixa na qual o ruído térmico alcança os maiores valores.

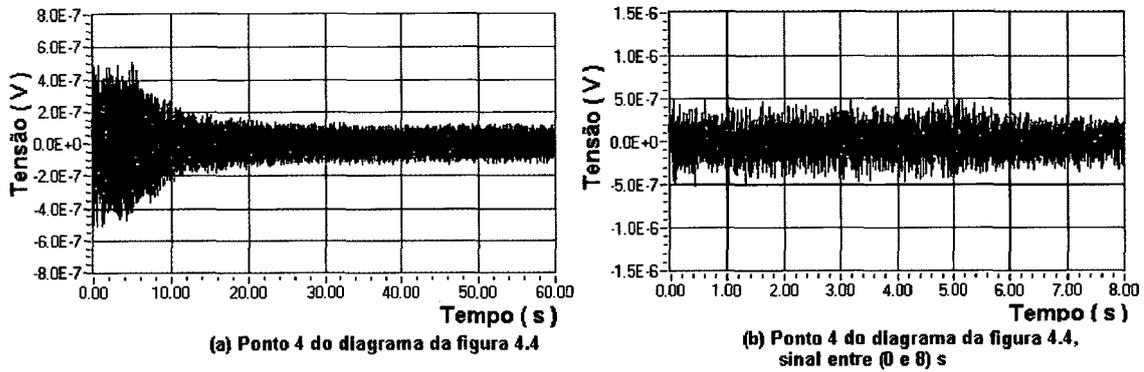


Figura 4.8 - Degrau 0°C a 75°C, ponto 4 do diagrama da Figura 4.4, saída ruído térmico

- **Degrau de 75°C para 0°C**

As observações feitas no ensaio do degrau crescente de 0°C para 75°C, também são válidas para o degrau decrescente.

A resposta em temperatura ao degrau decrescente, ponto 1 da Figura 4.4, é mostrado na Figura 4.9. Pode-se observar que a resposta é uma exponencial com constante de tempo  $\tau$  igual a 8,5 s.

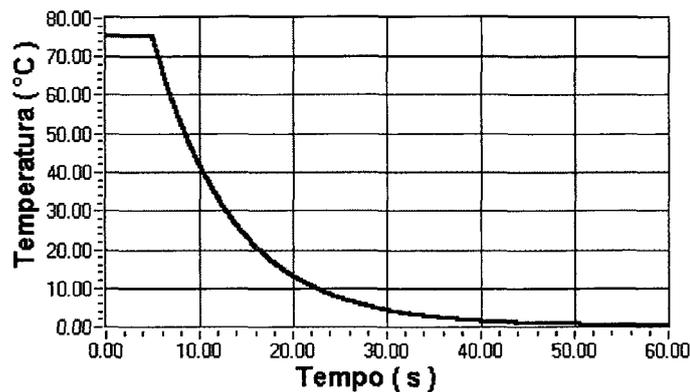


Figura 4.9 - Degrau 75°C a 0°C, ponto 1, saída em temperatura

A saída do auto aquecimento é mostrada na Figura 4.10. Pode-se observar, novamente, que esse efeito é maior nas baixas temperaturas, quando as resistências são maiores.

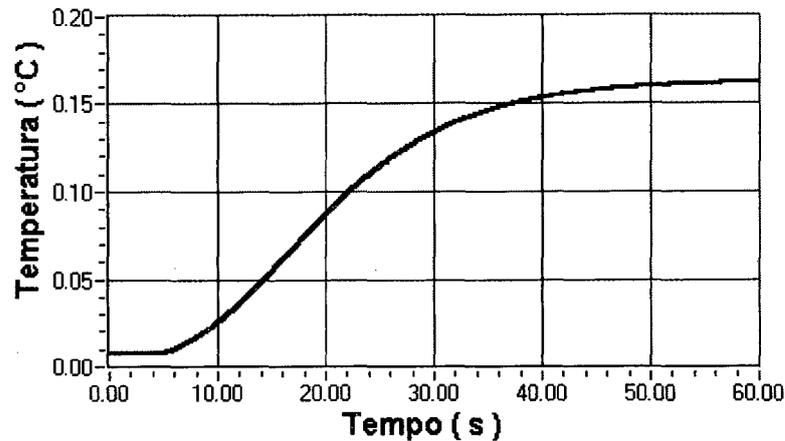


Figura 4.10 - Degrau 75°C a 0°C, ponto 3, saída auto-aquecimento

O efeito do ruído térmico, ponto 4 da Figura 4.4, é mostrado na Figura 4.11 (a). Pode-se observar, novamente, que a sua contribuição é maior para baixas temperaturas, onde o termistor apresenta valores altos de resistências. A Figura 4.11 (b) destaca a faixa na qual o ruído térmico alcança os maiores valores.

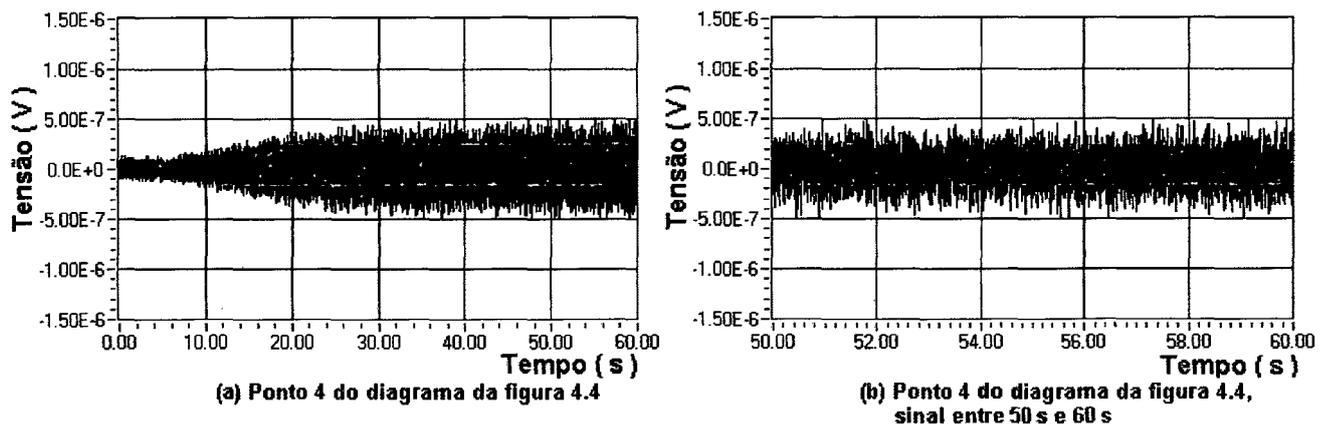


Figura 4.11 - Ruído térmico, degrau 75°C a 0°C

## 4.2 Amplificador de instrumentação

O amplificador é um instrumento com diversas características dinâmicas, sendo classificado como instrumento composto. Para modelar o amplificador é necessário analisar cada uma de suas características, modelando-as individualmente. Após feito todos os modelos de suas características dinâmicas, esses devem ser ordenados, quanto à posição e ajustes dos valores de seus parâmetros para minimizar a influência de um modelo de uma determinada característica na resposta do modelo de outra característica.

### 4.2.1 Análise das especificações

Os fabricantes especificam as características dos componentes fornecendo valores típicos, mínimos ou máximos.

Foram analisados amplificadores de vários fabricantes, sendo escolhido o AD624A da Analog Devices. O critério de escolha foi baseado na quantidade, qualidade e confiabilidade das especificações do catálogo do fabricante, para que o modelo possa representar da melhor forma possível o comportamento real do amplificador. A Tabela 4.2 mostra os amplificadores, as especificações e os fabricantes selecionados para a análise.

Tabela 4.2 - Amplificadores de instrumentação – especificações

ESPECIFICAÇÕES	ANALOG DEVICES AD624A	BURR BROWN INA102AG	NATIONAL LM0036C
Condições	=25°C, $R_L=2\text{ k}\Omega$ , $V_{ai}=\pm 15\text{ V}$	$T=25^\circ\text{C}$ , $V_{ai}=\pm 15\text{ V}$	$T=(-25\text{ a }+85)^\circ\text{C}$ , $V_{ai}=\pm 15\text{ V}$
Equação ganho	$\left[ \frac{40000}{R_G} + 1 \right] \pm 20\%$	$\left[ \frac{40000}{R_G} + 1 \right] \pm 20\%$	$\left[ \frac{50000}{R_G} + 1 \right]$
Erro do ganho G=1 G=100 G=200/500 G=1000	$\pm 0,05\%$ máx $\pm 0,25\%$ máx $\pm 0,5\%$ máx $\pm 1,0\%$ máx	25°C G=1 0,1% máx G=10 0,1% máx G=100 0,25% máx G=1000 0,75% máx  (-25 a +85)°C G=1 0,16% máx G=10 0,19% máx G=100 0,37% máx G=1000 0,93% máx	G=1 a 1000 $\pm 1\%$ típ, $\pm 3\%$ máx
Erro linearidade ganho G=1 G=100/200 G=500/1000	$\pm 0,005\%$ máx $\pm 0,005\%$ máx $\pm 0,005\%$ máx	25°C G=1 0,03% FS máx G=10 0,03% FS máx G=100 0,05% FS máx G=1000 0,1% FS máx  (-25 a +85)°C G=1 0,045 %FS máx G=10 0,045 %FS máx G=100 0,075 %FS máx G=1000 0,15 %FS máx	0,03% típ
Deriva térmica ganho G=1 G=100/200 G=500/1000	5 ppm/°C máx 10 ppm/°C máx 25 ppm/°C máx	G=1 10 ppm/°C máx G=10 15 ppm/°C máx G=100 20 ppm/°C máx G=1000 30 ppm/°C máx	
<b>Entrada</b> Tensão de offset ( $V_{OSE}$ )  Deriva térmica $V_{OSE}$	$\pm 200\ \mu\text{V}$ máx  $\pm 2\ \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ máx	25°C $\pm 300\ \mu\text{V}$ máx <sup>1</sup> $\pm 300/G\ \mu\text{V}$ máx <sup>2</sup>  $\pm 5\ \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ máx <sup>1</sup> $\pm 10/G\ \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ máx <sup>2</sup>	25°C, $R_L=1\text{ k}\Omega$ (1,0/2,0) mV (típ/máx) (-25 a +85)°C 3 mV máx  $\pm 1\ \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ típ
<b>Saída</b> Tensão de offset ( $V_{OSS}$ )  Deriva térmica $V_{OSS}$	5 mV máx  $\pm 50\ \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ máx		25°C, $R_L=2\text{ k}\Omega$ (5/10) mV (típ/máx) (-25 a +85)°C 12 mV máx  15 $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$ típ

Tabela 4.2 - Amplificadores de instrumentação – especificações (continuação)

ESPECIFICAÇÕES	ANALOG DEVICES AD624A	BURR BROWN INA102AG	NATIONAL LM0036C
Offset ref. Entrada x alimentação G=1 G=100/200 G=500/1000	70 dB mín 95 dB mín 100 dB mín		
Deriva no tempo		$\pm \left[ 20 + \frac{30}{G} \right] \mu\text{V/mês}$	
Deriva alimentação		$\pm 40 \mu\text{V}/V_{\text{al}} \text{ máx}^1$ $\pm 50/G \mu\text{V}/V_{\text{al}} \text{ máx}^2$	
<b>Entrada</b> Corrente de bias ( $I_{\text{bias}}$ )	$\pm 50 \text{ nA máx}$	$(-25 \text{ a } +85)^\circ\text{C}$ $(25/50) \text{ nA (típ/máx)}$	$(50/125) \text{ nA (típ/máx)} 25^\circ\text{C}$ $200 \text{ nA máx}$
Deriva térmica $I_{\text{bias}}$	$\pm 50 \text{ pA}/^\circ\text{C}$ típ	$\pm 0,1 \text{ nA}/^\circ\text{C}$ típ	
Corrente offset ( $I_{\text{offE}}$ )	$\pm 35 \text{ nA máx}$	$(\pm 2,5/\pm 15) \text{ nA (típ/máx)}$	$(20/50) \text{ nA (típ/máx)} 25^\circ\text{C}$ $100 \text{ nA máx}$
Deriva térmica $I_{\text{offE}}$	$\pm 20 \text{ pA}/^\circ\text{C}$ típ	$\pm 0,1 \text{ nA}/^\circ\text{C}$	
Deriva alimentação $I_{\text{bias}}$		$\pm 0,1 \text{ nA/V}$ típ	
<b>Entrada</b> Impedância de entrada $R_{\text{ent.Dif}}$ $C_{\text{ent.Dif}}$ $R_{\text{MC}}$ $C_{\text{MC}}$	$10^9 \Omega$ típ $10 \text{ pF}$ típ $10^9 \Omega$ típ $10 \text{ pF}$ típ	$10^{10} \Omega$ típ <sup>3</sup> $2 \text{ pF}$ típ <sup>3</sup> $10^{10} \Omega$ típ <sup>3</sup> $2 \text{ pF}$ típ <sup>3</sup>	$300 \text{ M}\Omega$  $300 \text{ M}\Omega$ (estimado)
Faixa da tensão entrada Máxima $V_{\text{ED}}$	$\pm 10 \text{ V}$ mín	$(-25 \text{ a } +85)^\circ\text{C}$ $\pm ( V_{\text{CC}}  - 4,5) \text{ V}$	$\pm (10/12) \text{ V (mín/típ)}$
Máxima $V_{\text{MC}}$	$12V - \left(\frac{G}{2} * V_D\right)$		$\pm (10/12) \text{ V (mín/típ)}$
RRMC G=1 G=100/200 G=500/1000	Dc a 60 Hz, $Z_{\text{desb}} = 1\text{k}\Omega$ 70 dB mín 100 dB mín 110 dB mín	Dc a 60 Hz, $Z_{\text{desb}} = 1\text{k}\Omega$ G=1 80/94 dB (mín/típ) G=10 80/100 dB (mín/típ) G=10 a 1000 80/100 dB (mín/típ)	Dc a 100 Hz, $Z_{\text{desb}} = 1\text{k}\Omega$ G=1 (2,5/5) mV/V (típ/máx) G=10 (0,25/0,50) (típ/máx) G=100 (50/100) (típ/máx)
<b>Resposta dinâmica</b> Pequenos sinais -3db G=1 G=100 G=200 G=500 G=1000	1 MHz típ 150 kHz típ 100 kHz típ 50 kHz típ 25 kHz típ	G=1 30 kHz típ G=10 3 kHz típ G=100 0,3 kHz típ G=1000 0,03 kHz típ	$R_L = 10 \text{ k}\Omega$ G=1 350 kHz típ G=10 35 kHz típ G=100 3,5 kHz típ G=1000 350 Hz típ
Largura de banda total		G=1a100, $V_s = 10\text{V}$ , $R_L = 10\text{k}\Omega$ (1,7/2,5) kHz (mín/típ)	G=1, $V_s = \pm 10 \text{ V}$ , $R_L = 10 \text{ k}\Omega$ 5,0 kHz típ
Slew rate	5,0 V/ $\mu\text{s}$ típ	G=1a100, $V_s = 10\text{V}$ , $R_L = 10\text{k}\Omega$ (0,1/0,15) V/ $\mu\text{s}$ (mín/típ)	G=1, $V_E = \pm 10 \text{ V}$ , $R_L = 10 \text{ k}\Omega$ 0,3 V/ $\mu\text{s}$ típ
Settling time G=1 a 200 G=500 G=1000	0,01%, $20V_{\text{step}}$ 15 $\mu\text{s}$ típ 35 $\mu\text{s}$ típ 75 $\mu\text{s}$ típ	0,1%, $10 V_{\text{step}}$ G=1 50 $\mu\text{s}$ típ G=100 360 $\mu\text{s}$ típ G=1000 3300 $\mu\text{s}$ típ	$\Delta V_s = \pm 1.0\text{V}$ , $\pm 10 \text{ mV}$ , $R_L = 10\text{k}\Omega$ G=1 3,8 $\mu\text{s}$ típ G=100 180 $\mu\text{s}$ típ

**Tabela 4.2 - Amplificadores de instrumentação – especificações (continuação)**

ESPECIFICAÇÕES	ANALOG DEVICES AD624A	BURR BROWN INA102AG	NATIONAL LM0036C
		0,01%, 10 V <sub>step</sub> G=1 60 μs típ G=100 500 μs típ G=1000 4500 μs típ	
<b>Ruído</b> Ruído em tensão, 1kHz RTI RTO RTI (0,1 A 10) Hz G=1 G=100 G=200/500/1000 Ruído em corrente (0,1 – 10) Hz	4 nV/√Hz típ 75 nV/√Hz típ  10 μV <sub>PP</sub> típ 0,3 μV <sub>PP</sub> típ 0,2 μV <sub>PP</sub> típ  60 pA <sub>PP</sub> típ	G=1000 F=10 Hz 30 nV/√Hz típ F=100 Hz 25 nV/√Hz típ F=1 kHz 25 nV/√Hz típ  (0,01 a 10) Hz 1,0 μV <sub>PP</sub> típ  (0,01 a 10) Hz 25 pA <sub>PP</sub> típ F=10 Hz 0,30 pA/√Hz típ F=100 Hz 0,20 pA/√Hz típ F=1 kHz 0,15 pA/√Hz típ	R <sub>S</sub> = 50 Ω RTI (0,1 – 10) kHz 20 μV <sub>PP</sub> típ
<b>Entrada sense</b> R <sub>E</sub> I <sub>E</sub> Faixa de tensão Ganho para saída	(8/10/12) kΩ (mín/típ/máx) 30 μA típ ±10 V mín 1% típ		
<b>Entrada referência</b> R <sub>E</sub> I <sub>E</sub> Faixa de tensão Ganho para saída	(16/20/24) kΩ (mín/típ/máx) 30 μA típ ±10 V mín 1% típ	±10 V	
Temperatura operação Temperatura de armazenagem	(-25 a +85)°C (-65 a +150)°C	R <sub>L</sub> > 50 kΩ (-25 a +85)°C <sup>4</sup> (-65 a +150)°C	(-25 a +85)°C
Tensão de alimentação  I <sub>quiescente</sub>	±(6/15/18) V (mín/típ/máx)  (3,5/5) mA (típ/máx)	V <sub>E</sub> = 0 V ±(3,5/15/18) V (mín/típ/máx)  ±(500/750) μA (típ,máx)	± 18 V (400/600) μA (típ/máx)

Obs: a tabela não segue o Sistema Internacional – SI, mas foi mantida para retratar fielmente a forma de especificação.

#### 4.2.2 Características dinâmicas

Todos os valores dos parâmetros representativos são escolhidos por procedimentos próprios de acordo com a referência [44].

### a) Impedância de entrada

Conforme mostrado no capítulo 3 o modelo é um sistema de 1ª ordem. Os valores da constante de tempo e da sensibilidade estática são definidos pelos valores da resistência e capacitância de entrada, fornecidos pelo fabricante e pelo valor da impedância da fonte definida no experimento.

Para efeitos de ensaios foi considerada a impedância da fonte como sendo composta somente de uma resistência no valor de  $1 \Omega$ . A resistência de entrada foi fixada em  $10^9 \Omega$  e a capacitância de entrada em  $10 \text{ pF}$ . Conforme o modelo mostrado no item 3.2.2 esses valores definem uma constante de tempo da ordem de  $10^{-11} \text{ s}$  e sensibilidade estática que se afasta somente de  $10^{-9}$  do valor 1.

### b) Ganho em função da frequência para pequenos sinais e tempo de resposta (*settling time*).

Como as duas características estão relacionadas a um mesmo comportamento, optou-se por modelar as duas características num único módulo.

Pela análise do gráfico da Figura 4.12, e dos valores da frequência de corte fornecido pelo fabricante não é possível identificar qual o sistema que modela essa característica.

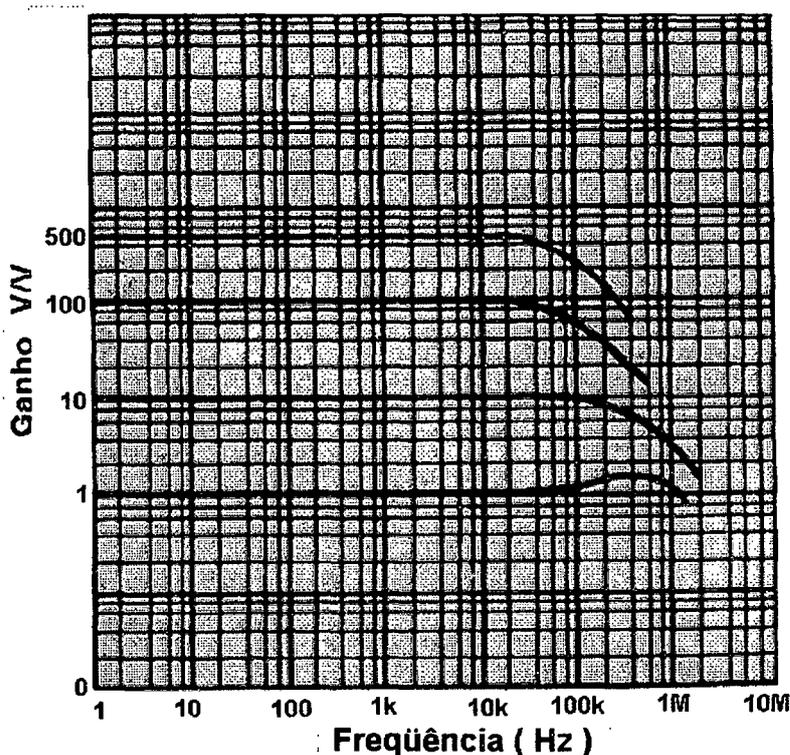


Figura 4.12 - Ganho versus frequência ( -3 dB ) - AD624A

Caso as duas características sejam modeladas por um sistema de 1ª ordem, a constante de tempo será definida pela frequência de corte especificada pelo fabricante, conforme Tabela 4.. O tempo de resposta (*settling time*) é somente verificado, já que este é definido pela constante de tempo.

Tabela 4.3 - Resposta em frequência para pequenos sinais do AD624A

Especificações do AD624A Analog Devices		Constante de Tempo $\tau$ (s)
Ganho	Frequência de Corte	
1	1 MHz	$\frac{1}{2\pi 10^6}$
100	150 kHz	$\frac{1}{3\pi 10^5}$
200	100 kHz	$\frac{1}{2\pi 10^5}$
500	50 kHz	$\frac{1}{\pi 10^5}$
1000	25 kHz	$\frac{1}{5\pi 10^4}$

Caso se opte por um modelo através de sistema de 2ª ordem, ajusta-se esse sistema variando-se a frequência natural não amortecida e a razão de amortecimento até que o valor tempo de resposta (*settling time*) especificado pelo fabricante seja atingido. A frequência de corte é somente verificada, já que esta é definida pelos valores ajustados da frequência natural não amortecida e da razão de amortecimento.

Na maioria das vezes esse modelo será utilizado em frequências muito menores do que a frequência natural não amortecida e a frequência de corte. Em função disso, preocupação com o tempo de resposta normalmente é muito mais justificável do que a frequência natural não amortecida e de corte. Sendo assim, optou-se por modelar o ganho em função da frequência e o tempo de resposta (*settling time*) por um sistema de 2ª ordem.

### c) *Slew-rate*

O *slew-rate* é a máxima taxa de variação do sinal de saída admitida pelo amplificador. Por esse motivo o modelo dessa característica é o último módulo, colocado antes da saída do amplificador. No modelo do amplificador está colocado logo depois do tempo de resposta (*settling time*). O valor do *slew-rate* é de 5 V/ $\mu$ s e foi escolhido aleatoriamente de uma distribuição normal truncada conforme referência [44].

#### d) Razão de rejeição de modo comum – RRMC

Essa característica tem valores diferentes para cada ganho selecionado. O fabricante fornece os valores e também o gráfico, Figura 4.12, com curvas da RRMC para cada ganho selecionado em função da frequência. Desse gráfico é que são tirados os valores das frequências de corte, que são usados como entrada do modelo da RRMC.

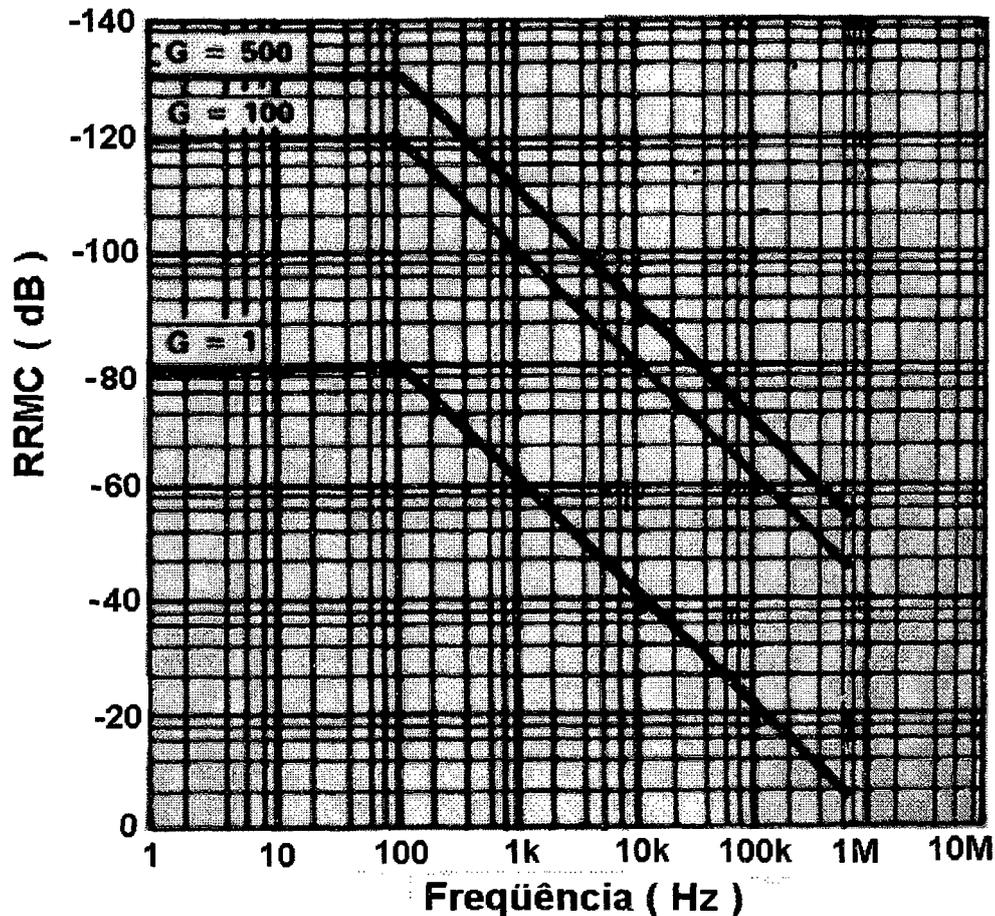


Figura 4.13 - Gráfico da RRMC versus frequência

#### e) Ruído

O ruído pode estar especificado em relação à entrada, RTI, e em relação à saída, RTO ou conjuntamente das duas formas.

Os dois tipos básicos de ruído associados a amplificadores são: ruído branco e ruído *flicker* ( $1/f$ ).

A maioria dos fabricantes fornece os valores de ruído de tensão e de corrente tabelado em função do ganho e de faixas de frequências. Permite assim que se identifique os valores dos ruídos *flicker* e branco. Alguns fornecem também os gráficos da densidade espectral de tensão e de corrente, conforme mostram as Figura 4.14 (a) e (b), respectivamente.

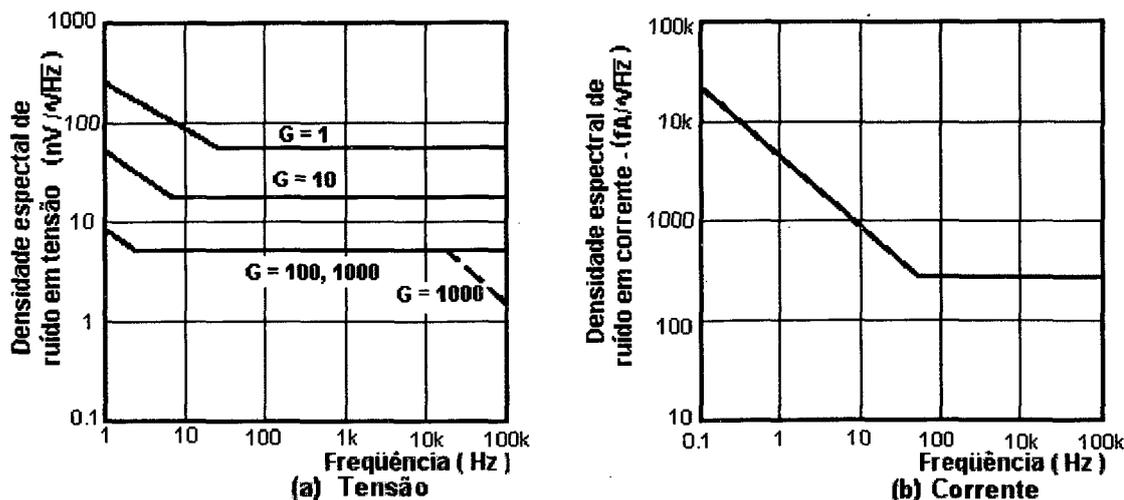


Figura 4.14 - Densidade espectral de ruído em tensão e corrente

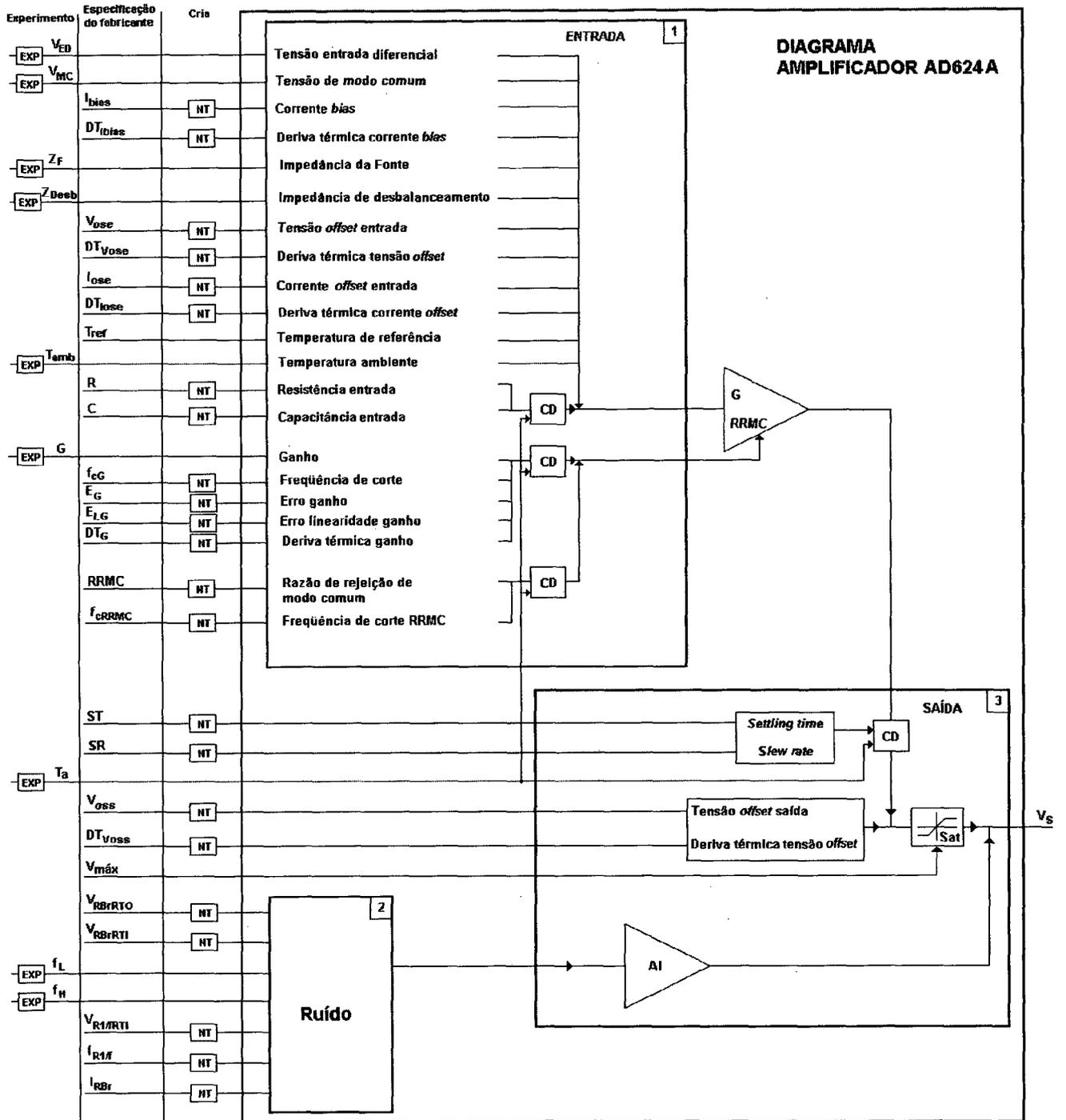
### 4.2.3 Modelo

O amplificador é um instrumento composto, possuindo várias características dinâmicas, que são modeladas por sistemas de 1ª ordem e de 2ª ordem. Devido a essa complexidade o modelo do amplificador é formado por um conjunto de quatro desenhos, um diagrama geral e três outros, nos quais estão os modelos de características estáticas e dinâmicas.

#### a) Diagrama geral

O diagrama geral do amplificador, Figura 4.15, mostra em quantos blocos foi dividido o modelo. A divisão em blocos tem a finalidade de facilitar o entendimento do modelo. Cada bloco corresponde a um desenho que contém tanto características estáticas como dinâmicas.

Os dados da coluna "Experimento" entram diretamente no modelo. A entrada mais importante da coluna é o tempo entre amostras  $T_a$ . É através do seu valor se definem os erros dos modelos.



**Legenda:**

AI	- Amplificador ideal	NT	- Distribuição normal truncada
Amp	- Amplificador real	R	- Resistência de entrada
C	- Capacitância de entrada	RRMC	- Razão de rejeição de modo comum
CD	- Característica dinâmica	RTI	- Referido à entrada
DT <sub>G</sub>	- Deriva térmica do ganho	RTO	- Referido à saída
DT <sub>Ibias</sub>	- Deriva térmica da corrente de <i>bias</i>	Sat	- Saturação
DT <sub>IOSE</sub>	- Deriva térmica da corrente de <i>offset</i> entrada	SR	- <i>Slew rate</i>
DT <sub>VOSE</sub>	- Deriva térmica da tensão de <i>offset</i> entrada	ST	- Tempo de resposta ( <i>settling time</i> )
DT <sub>VOSS</sub>	- Deriva térmica da tensão de <i>offset</i> saída	T <sub>a</sub>	- Tempo entre amostras
E <sub>G</sub>	- Erro máximo do ganho	T <sub>amb</sub>	- Temperatura ambiente
E <sub>LG</sub>	- Erro máximo da linearidade do ganho	T <sub>ref</sub>	- Temperatura de referência
EXP	- Experimento	V <sub>ED</sub>	- Tensão da entrada diferencial
f <sub>cG</sub>	- Frequência de corte do ganho	V <sub>MC</sub>	- Tensão de modo comum
F <sub>cRRMC</sub>	- Frequência de corte da RRMC	V <sub>OSE</sub>	- Tensão de <i>offset</i> entrada
f <sub>H</sub>	- Frequência superior	V <sub>OSS</sub>	- Tensão de <i>offset</i> saída
f <sub>L</sub>	- Frequência inferior	V <sub>RI/RTI</sub>	- Tensão de ruído 1/f RTI (0,1 a 10) Hz
G	- Ganho	V <sub>RBrTI</sub>	- Densidade espectral de ruído RTI (1 kHz)
I <sub>bias</sub>	- Corrente de <i>bias</i>	V <sub>RBrRTO</sub>	- Densidade espectral de ruído RTO (1 kHz)
I <sub>OSE</sub>	- Corrente de <i>offset</i> entrada	V <sub>S</sub>	- Tensão de saída
I <sub>R1/f</sub>	- Corrente de ruído 1/f	V <sub>máx</sub>	- Máxima tensão de saída
I <sub>RBr</sub>	- Densidade espectral de ruído branco	Z <sub>Desb</sub>	- Impedância de desbalanceamento
NR/R	- Entrada não referenciada / referenciada	Z <sub>F</sub>	- Impedância da fonte

Figura 4.15 - Diagrama do amplificador

**b) Bloco 1 – Entrada** - estão modeladas as características estáticas da entrada e as dinâmicas: ganho, impedância de entrada e a razão de rejeição de modo comum.

A metodologia de interligação entre os desenhos é feita da seguinte forma:

- A filosofia utilizada é que o sinal que sai do desenho indica para que desenho vai. O sinal que chega no desenho indica de onde veio
- Por exemplo, o sinal  $\Delta T[1,3]$  vai para o mesmo desenho e também para o desenho número 3, mostrado pelos números 1 e 3 entre colchetes [1,3].
- No desenho 3 o sinal é descrito como  $\Delta T[1]$ , indicando que vem do desenho 1.

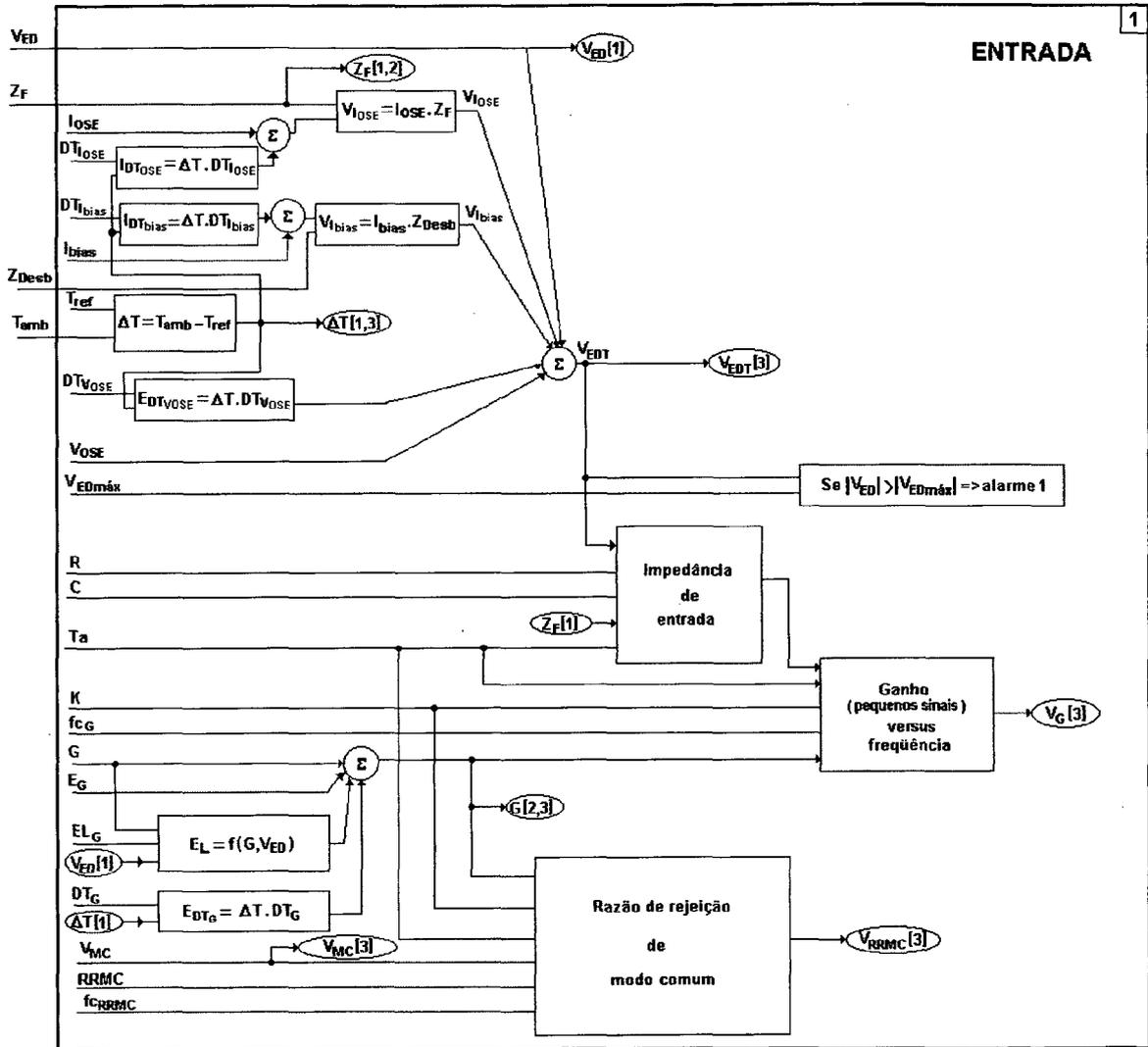
No desenho 1, mostrado na Figura 4.16, são modeladas as características estáticas da entrada e três características dinâmicas. A modelagem das características estáticas está detalhada na referência [44].

Os modelos das características dinâmicas desse bloco são:

- Impedância de entrada – esse modelo é o mostrado na Figura 3.21 do item 3.2.3 no capítulo 3.
- Ganho versus frequência – esse modelo pode ser representado por sistemas de 1ª ou de 2ª ordem mostrados no item 3.2.5 do capítulo 3. Conforme explicado no item 4.2.2 esta característica é modelada junto com a característica do tempo de resposta (*settling time*).

- Razão de rejeição de modo comum – RRMCM - esse modelo é o mostrado na Figura 3.28 do item 3.2.6 no capítulo 3.

O alarme 1 tem a função de avisar toda vez que a tensão de entrada diferencial ultrapassar o valor especificado pelo fabricante.



**Legenda:**

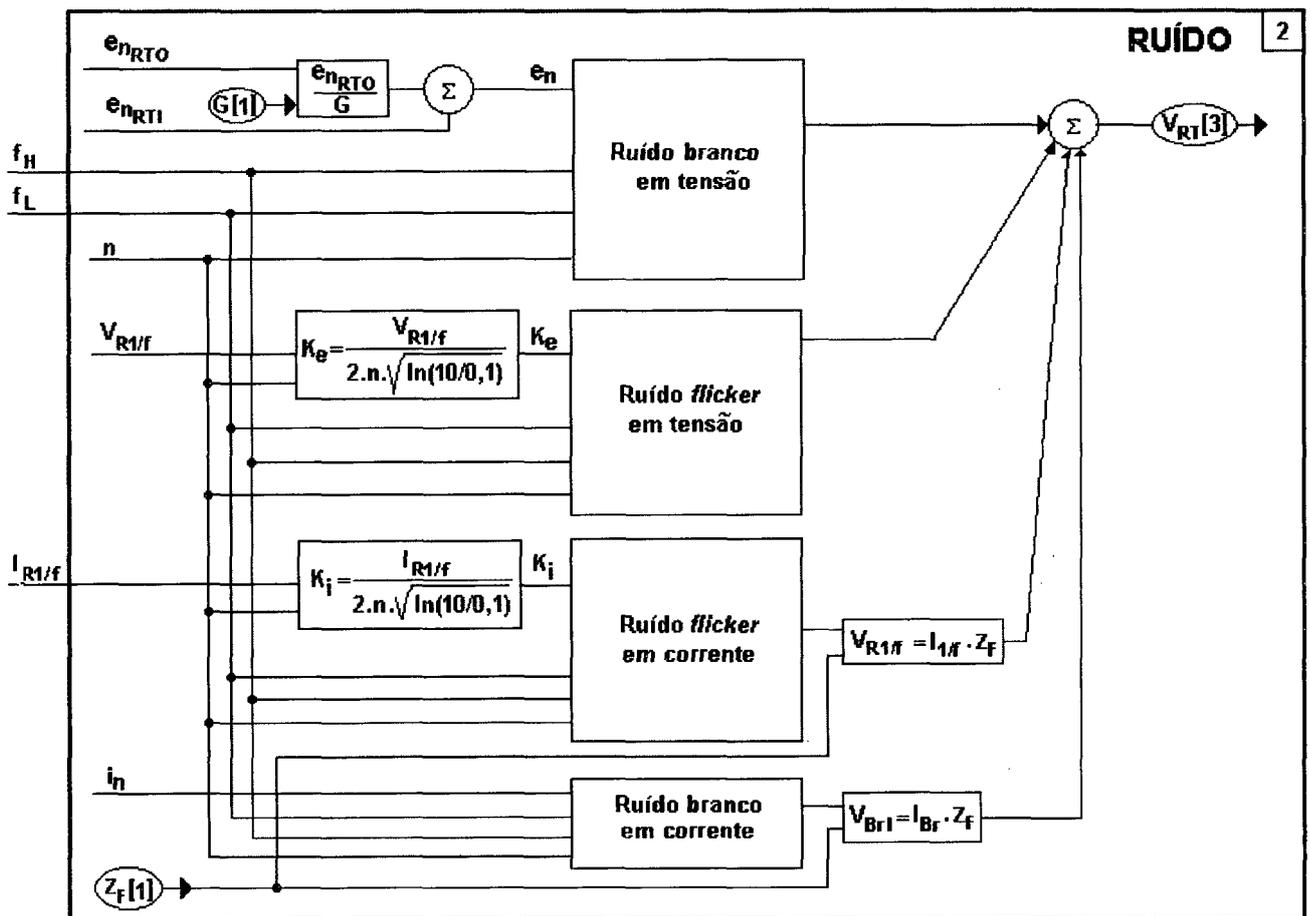
- C - Capacitância de entrada
- DT<sub>G</sub> - Deriva térmica do ganho
- DT<sub>bias</sub> - Deriva térmica da corrente de bias
- DT<sub>I<sub>OSE</sub></sub> - Deriva térmica da corrente de offset entrada
- DT<sub>V<sub>OSE</sub></sub> - Deriva térmica da tensão de offset entrada
- E<sub>G</sub> - Erro máximo do ganho
- E<sub>LG</sub> - Erro máximo da linearidade do ganho
- f<sub>cG</sub> - Frequência de corte do ganho
- f<sub>cRRMC</sub> - Frequência de corte da RRMCM
- G - Ganho
- I<sub>bias</sub> - Corrente de bias
- I<sub>OSE</sub> - Corrente de offset entrada
- I<sub>bias</sub> - Corrente de bias
- I<sub>OSE</sub> - Corrente de offset entrada
- K - Sensibilidade estática

- R - Resistência de entrada
- RRMC - Razão de rejeição de modo comum
- T<sub>a</sub> - Tempo entre amostras
- T<sub>amb</sub> - Temperatura ambiente
- T<sub>ref</sub> - Temperatura de referência
- V<sub>EDmáx</sub> - Tensão da entrada diferencial máxima
- V<sub>ED</sub> - Tensão da entrada diferencial
- V<sub>EDT</sub> - Tensão de entrada diferencial total
- V<sub>G</sub> - Tensão na saída do módulo do ganho versus frequência
- V<sub>MC</sub> - Tensão de modo comum
- V<sub>OSE</sub> - Tensão de offset entrada
- V<sub>RRMC</sub> - Tensão da razão de rejeição de modo comum
- Z<sub>Desb</sub> - Impedância de desbalanceamento
- Z<sub>F</sub> - Impedância da fonte

Figura 4.16 - Bloco de entrada do amplificador AD624A

c) **Bloco 2 – Ruído** - neste bloco estão modelados os ruídos de corrente e tensão, tanto *flicker* como branco. Todos esses modelos são mostrados no item 3.2.7 do capítulo 3. A Figura 4.17 mostra o desenho do “Bloco 2 – Ruído”.

O ruído branco, tanto em tensão, vide Figura 3.43, como em corrente, vide Figura 3.44, é fornecido pelo fabricante na forma de densidade espectral de ruído. O fabricante fornece o ruído branco em tensão relativa à entrada (RTI) e relativa à saída (RTO). O ruído branco em tensão relativa à saída (RTO) é dividido pelo ganho selecionado e somado ao ruído branco em tensão relativa à entrada (RTI). Esses ruídos são somados e formam a entrada  $e_n$  do modelo “ruído branco em tensão”.



**Legenda:**

- |  |   |
|--|---|
| $f_H$ - Frequência superior  | RTI - Referido à entrada  |
| $f_L$ - Frequência inferior  | RTO - Referido à saída  |
| G - Ganho  | $V_{R1/RTI}$ - Tensão de ruído 1/f RTI (0,1 a 10) Hz            |
| $i_{R1/f}$ - Corrente de ruído 1/f   | $e_{nRTI}$ - Densidade espectral de ruído em tensão RTI (1 kHz) |
| $i_n$ - Densidade espectral de ruído em corrente                             | $e_{nRTO}$ - Densidade espectral de ruído em tensão RTO (1 kHz) |
| $K_e$ - Valor da densidade espectral de ruído em tensão na frequência 1 Hz   | $V_{RT}$ - Tensão de ruído total                                |
| $K_i$ - Valor da densidade espectral de ruído em corrente na frequência 1 Hz | $Z_F$ - Impedância da fonte                                     |
| n - fator de abrangência   |   |

Figura 4.17 - Bloco de ruído do amplificador AD624A

Para os ruídos *flicker* em tensão e em corrente, os valores da densidade espectral de ruído em tensão na frequência de 1 Hz –  $K_e$  e da densidade espectral de ruído em corrente –  $K_i$  são calculadas pelas Equação 4.1 e Equação 4.2 respectivamente.

$$K_e = \frac{V_{R\frac{1}{f}}}{2.n\sqrt{\ln(10/0,1)}} \quad (4.1)$$

Onde:  $K_e$  - densidade espectral de ruído em tensão na frequência de 1 Hz;

$V_{R\frac{1}{f}}$  - tensão de ruído *flicker*.

$$K_i = \frac{I_{R\frac{1}{f}}}{2.n\sqrt{\ln(10/0,1)}} \quad (4.2)$$

Onde:  $K_i$  - densidade espectral de ruído em corrente na frequência de 1 Hz;

$I_{R\frac{1}{f}}$  - corrente de ruído *flicker*.

Assumiu-se ser de 3,3 o valor do fator de abrangência –  $n$ . Este fator multiplicado pelo desvio padrão  $\sigma$  define um nível de confiança de 99,9%.

A saída dos ruídos *flicker* e branco em corrente são multiplicados pela impedância da fonte passando para tensão para possibilitar achar o valor total de ruído em tensão.

**d) Bloco 3 – Saída** - estão modeladas: uma característica estática e as características dinâmicas, tempo de resposta (*settling time*) e *slew rate*.

O tempo de resposta (*settling time*) foi modelado por um sistema de 2ª ordem, representando também a característica do ganho versus a frequência para pequenos sinais, conforme explicado no item 4.22.

O *slew rate* está colocado na saída do módulo do tempo de resposta (*settling time*). A função dessa característica é limitar a taxa de variação do sinal de saída do amplificador, conforme definição descrita no item 2.3.7 do capítulo 2.

A característica de saturação do amplificador está colocada na saída do *slew rate*. O modelo dessa característica é um limitador da tensão de saída. Caso a tensão de entrada multiplicada pelo ganho, ultrapasse a tensão máxima de saída especificada pelo fabricante, o limitador irá atuar, mantendo a tensão de saída no valor máximo.

O módulo dessa característica está mostrado na Figura 4.18 e a faixa foi ajustada em  $\pm 15$  V.

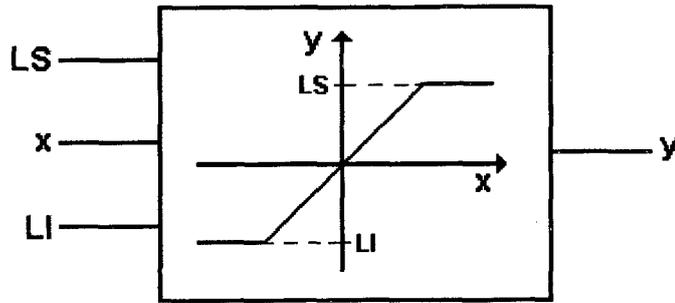
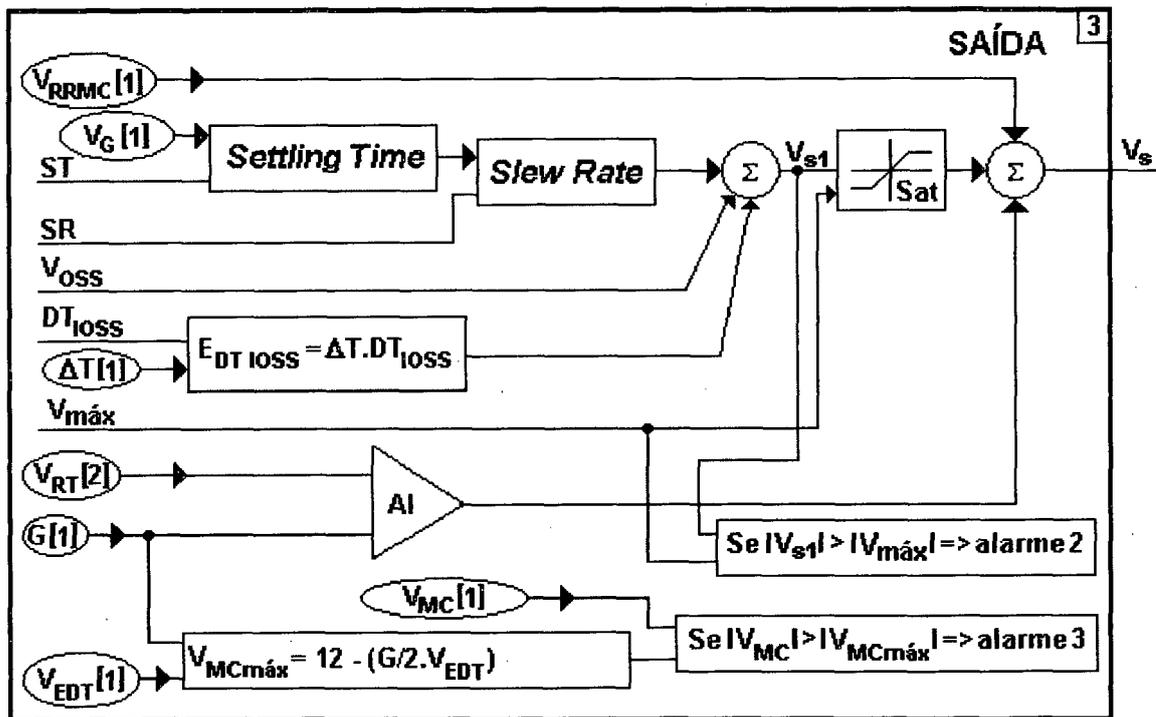


Figura 4.18 - Módulo de saturação

O sinal de saída do amplificador é a soma da tensão de modo comum  $V_{RRMC}$  [1], com o sinal do ruído total  $V_{RT}$  [2] multiplicado pelo ganho selecionado e com o sinal de saída do módulo da saturação.



Legenda:

- |             |   |             |  |
|-------------|---|-------------|--|
| AI          | - Amplificador ideal                              | $V_{MCmáx}$ | - Máxima tensão de modo comum                          |
| $DT_{VOSS}$ | - Deriva térmica da tensão de <i>offset</i> saída | $V_{OSS}$   | - Tensão de <i>offset</i> saída                        |
| G           | - Ganho   | $V_{RRMC}$  | - Tensão da razão de rejeição de modo comum            |
| SR          | - <i>Slew rate</i>                                | $V_{RT}$    | - Tensão de ruído total                                |
| ST          | - Tempo de resposta ( <i>settling time</i> )      | $V_s$       | - Tensão de saída                                      |
| $V_{EDT}$   | - Tensão da entrada diferencial total             | $V_{Sat}$   | - Tensão de saturação                                  |
| $V_{MC}$    | - Tensão de modo comum                            | $V_G$       | - Tensão na saída do módulo do ganho versus frequência |

Figura 4.19 - Bloco de saída do amplificador AD624A

Dois alarmes estão previstos: um caso haja a saturação do amplificador e outro caso a tensão de modo comum ultrapasse o valor máximo especificado pelo fabricante.

#### 4.2.4 Ensaios

Os ensaios foram realizados no amplificador AD624A. Este amplificador foi gerado pela coluna “Cria” e todos os seus parâmetros estão de acordo com as especificações do fabricante e foram escolhidos conforme a referência [44].

São os seguintes os ajustes do amplificador AD624A:

Tabela 4.4 - Ajustes de um exemplar do amplificador AD624A

Parâmetros	Ajustes	Parâmetros	Ajustes
G=1 G=100 G=200 G=500 G=1000	Erro do ganho -2.6146 E-4 -1.9295 E-1 6.9114 E-1 -1.8676 E+0 8.7341 E+0	RRMC G=1 G=100 G=200 G=500 G=1000	Dc a 60 Hz, $Z_{desb} = 1k\Omega$ 74.92 dB 107.10 dB 108.65 dB 114.62 dB 116.63 dB
G=1 G=100 G=200 G=500 G=1000	Erro linearidade ganho -2.34110 E-5 4.19398 E-3 4.97289 E-3 1.33261 E-2 -2.92878 E-2	<b>Resposta dinâmica</b> Pequenos sinais -3db G=1 G=100 G=200 G=500 G=1000	880 kHz 110 kHz 105 kHz 46 kHz 22 kHz
G=1 G=100 G=200 G=500 G=1000	Deriva térmica do ganho 4.010 E-7 /°C 9.330 E-7 /°C 6.570 E-7 /°C 2.110 E-6 /°C 1.740 E-6 /°C	<i>Slew-rate</i>	5,0 V/μs
Tensão de offset ( $V_{OSE}$ )	0.1134 mV	<i>Tempo de resposta</i> G=1 G=100 G=200 G=500 G=1000	0,01%, $20V_{step}$ 15.04 μs 14.97 μs 15.12 μs 35.00 μs 74.20 μs
Deriva térmica $V_{OSE}$	1.794 μV/°C	Ruído em tensão, 1 kHz RTI RTO	4 nV/√Hz 75 nV/√Hz
Tensão de offset ( $V_{OSS}$ )	2.719 mV	RTI (0,1 A 10) Hz G=1 G=100 G=200 G=500 G=1000	10 μV <sub>PP</sub> 0,3 μV <sub>PP</sub> 0,2 μV <sub>PP</sub> 0,2 μV <sub>PP</sub> 0,2 μV <sub>PP</sub>
Deriva térmica $V_{OSS}$	38.48 μV/°C	Ruído em corrente (0,1 – 10) Hz	60 pA <sub>PP</sub>
Corrente de bias ( $I_{bias}$ )	-25.9820 nA	Ruído em corrente, 1 kHz	0.3 pV/√Hz
Deriva térmica $I_{bias}$	-0.0415 nA/°C	Fator de abrangência n	3.3
Corrente offset ( $I_{OSE}$ ) Deriva térmica $I_{OSE}$	-16.0130 nA -0.019206 nA/°C	Faixa da tensão entrada Máxima $V_{ED}$	±10 V
Impedância de entrada $R_{ent.Dif}$ $C_{ent.Dif}$ $R_{MC}$ $C_{MC}$	$10^9 \Omega$ 10 pF $10^9 \Omega$ 10 pF		

O valor do ruído branco em corrente foi retirado do gráfico fornecido pelo fabricante.

O modelo foi implementado através do software LabView da National Instruments, sendo realizados os seguintes ensaios:

**a) Resposta em frequência e tempo de resposta (*settling time*)**

Assumiu-se modelar essas duas características por um sistema de 2ª ordem. O tempo de resposta especificado pelo fabricante é ajustado através da variação dos valores da frequência natural não amortecida e da razão de amortecimento.

Após o ajuste do tempo de resposta verifica-se o valor da frequência de corte para pequenos sinais.

Os ajustes são feitos colocando-se um degrau de -10 V a 10 V na entrada do modelo do amplificador e mede-se o tempo de resposta para a faixa de estabilização especificada pelo fabricante, neste caso 0,01%. Para um degrau de 20 V o valor da faixa de estabilização é de  $(10 \pm 0,002)$  V.

Foram feitos ensaios para ajustar os tempos de resposta para cada ganho. A Tabela 4. mostra os valores ajustados do tempo de resposta para cada ganho.

Tabela 4.5 - Tempo de resposta

Tempo de resposta especificado ( $\mu\text{s}$ )	Tempo de resposta ajustado ( $\mu\text{s}$ )
G=1	15,04
G=100	14,97
G=200	15,12
G=500	15
G=1000	74,2

As Figura 4.20 (a) e (b), Figura 4.21 (a) e (b), Figura 4.22(a) e (b), Figura 4.23(a) e (b) e Figura 4.24(a) e (b) mostram os tempos de resposta que foram ajustados para os ganhos 1, 100, 200, 500 e 1000, respectivamente.

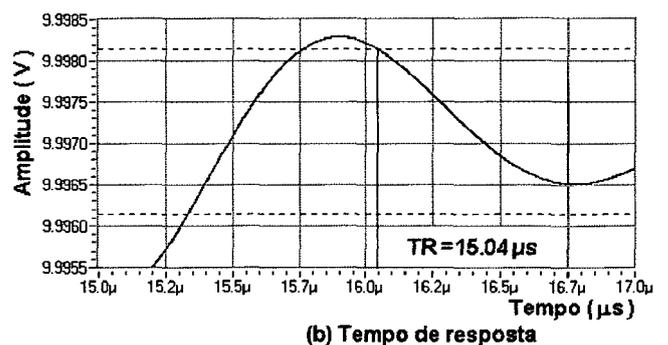
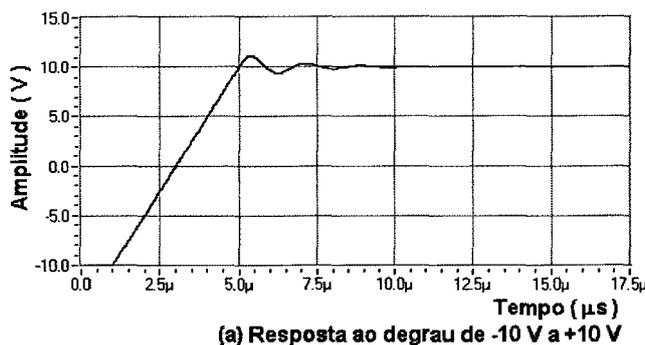


Figura 4.20 - Tempo de resposta para ganho 1

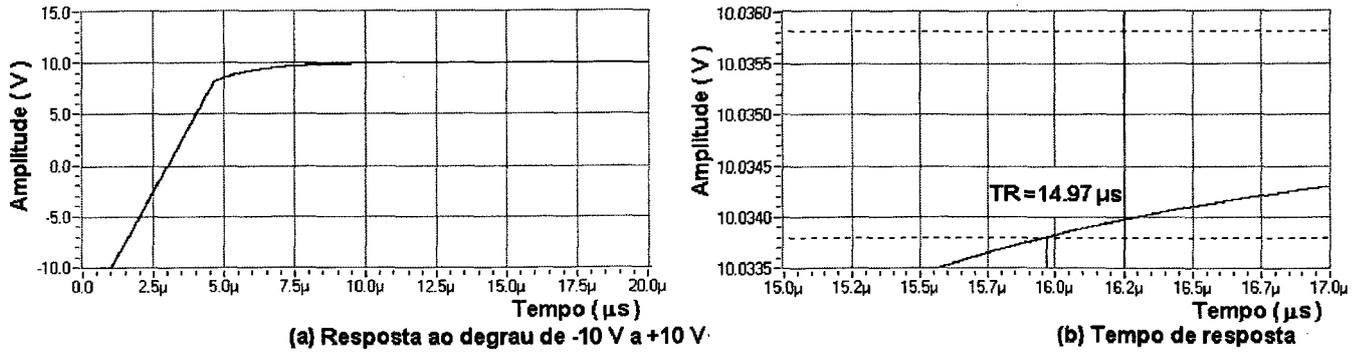


Figura 4.21 - Tempo de resposta para ganho 100

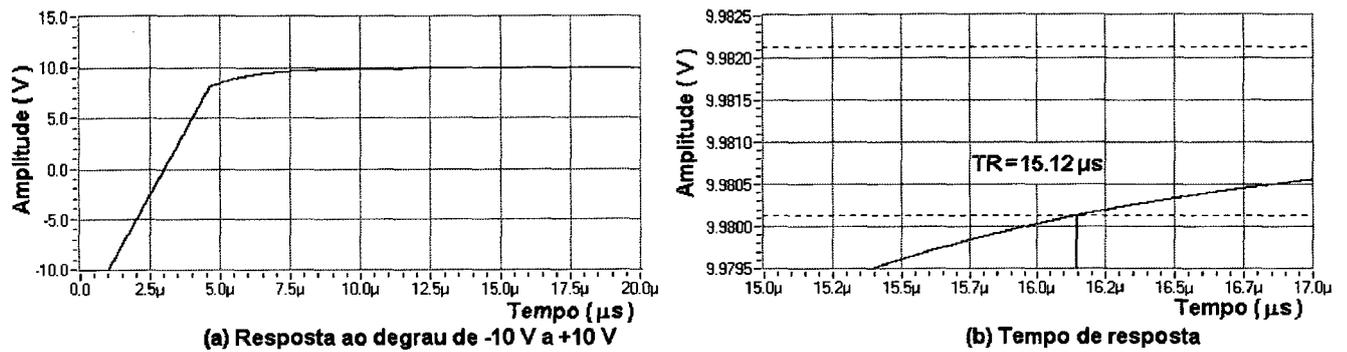


Figura 4.22 - Tempo de resposta para ganho 200

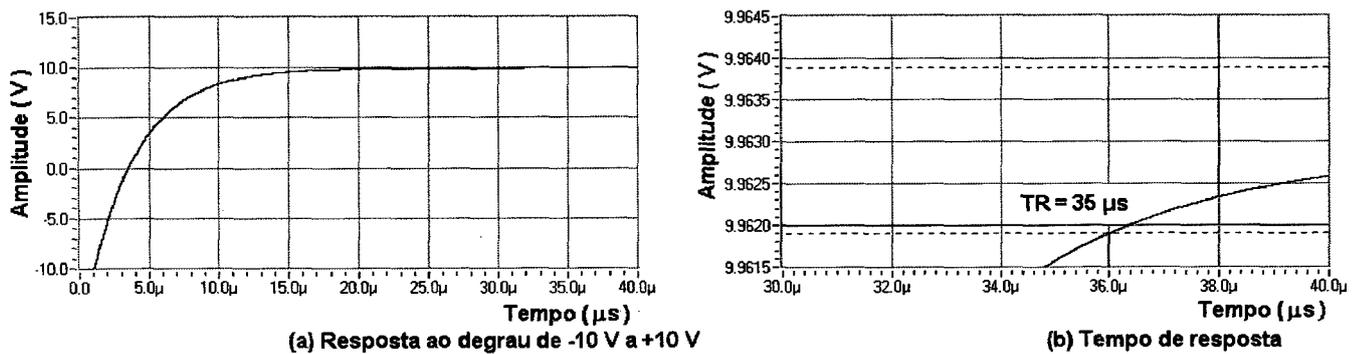


Figura 4.23 - Tempo de resposta para ganho 500

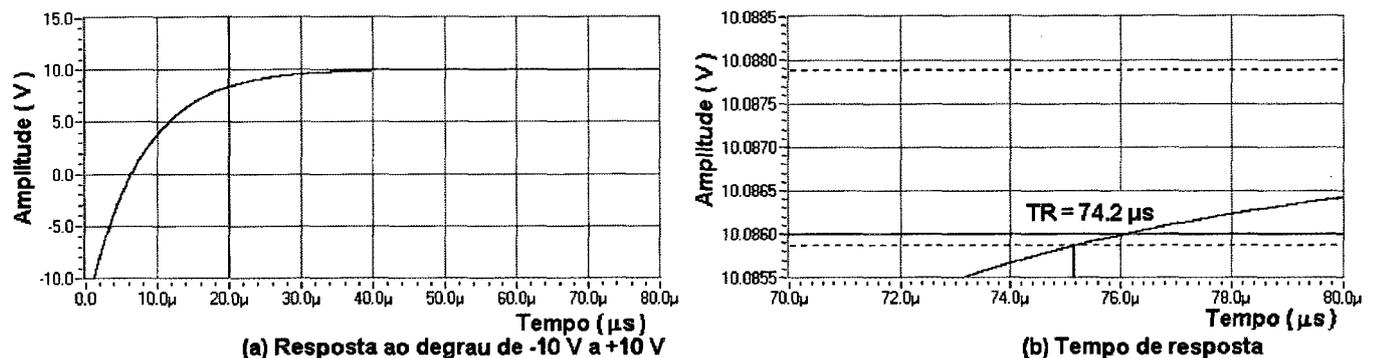


Figura 4.24 - Tempo de resposta para ganho 1000

O gráfico para pequenos sinais, mostrado na Figura 4.25 (a), é obtido pela aplicação de uma senóide na entrada com uma amplitude que resulta na saída uma senóide com amplitude de 0,1 V, sendo este valor insuficiente para sensibilizar o *slew-rate*. O ganho é obtido dividindo-se a amplitude do sinal da saída pela amplitude do sinal de entrada. Repete-se esse procedimento para cada frequência do sinal de ensaio e traça-se a curva do gráfico.

A Figura 4.25 (b) mostra os ganhos para uma tensão de saída senoidal com amplitude de 10 V. Pode-se observar que para esses sinais o *slew-rate* atua modificando as curvas de resposta em frequência.

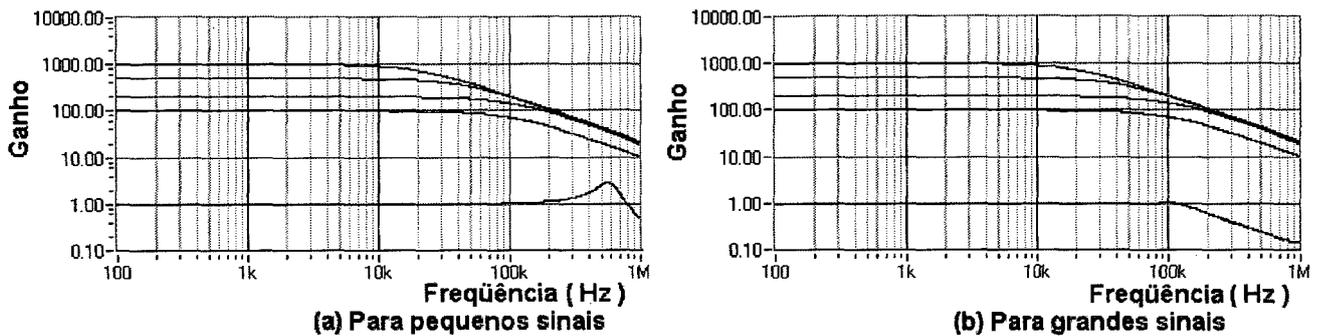


Figura 4.25 - Ganho versus frequência

A Tabela 4.6 mostra os valores das frequências de corte para pequenos sinais obtidos após o ajuste do tempo de resposta e os valores especificados pelo fabricante.

Tabela 4.6 - Frequências de corte especificadas e medidas

Ganho	Frequência de corte especificada	Frequência de corte medida
1	1 MHz	880 kHz
100	150 kHz	110 kHz
200	100 kHz	105 kHz
500	50 kHz	46 kHz
1000	25 kHz	22 kHz

**b) Ensaio de *slew-rate***

Foram feitos dois ensaios do *slew-rate* um através da aplicação de um degrau e outro com um sinal senoidal de alta frequência. O *slew-rate* do modelo foi ajustado um de 5 V/ $\mu$ s.

O ensaio aplicando o degrau de -10 V a 10 V tem como objetivo avaliar o ajuste do *slew-rate*. Para esse ensaio o ganho selecionado foi o 1, sendo retiradas do modelo do amplificador as características de impedância de entrada, ganho em função da frequência e tempo de resposta, ficando somente o módulo do *slew-rate*. Na Figura 4.26 pode-se observar que o valor do *slew-rate* é de 5 V/ $\mu$ s.

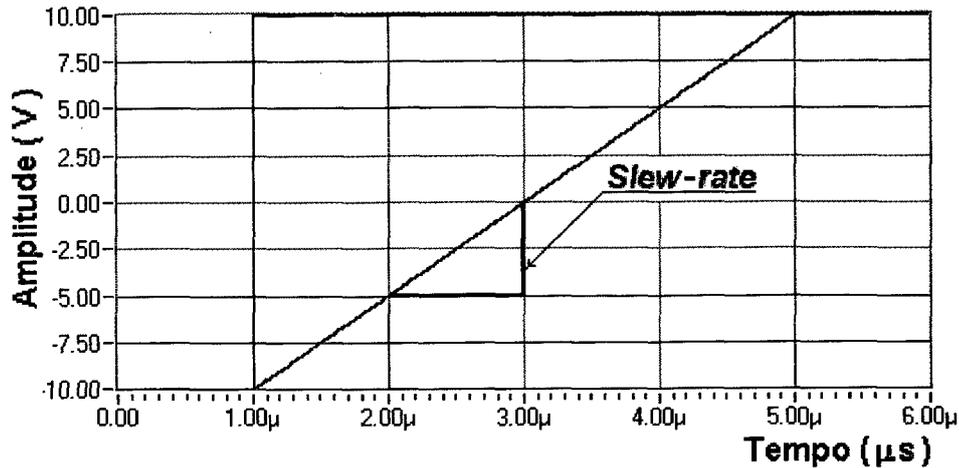


Figura 4.26 - Resposta do *slew-rate* ao degrau

No ensaio com um sinal senoidal com alta frequência foi colocado na entrada do amplificador, com ganho 1, um sinal senoidal com amplitude de 10 V e frequência de 1,2 MHz. Como a frequência do sinal é maior que a frequência de corte do sistema que modela o tempo de resposta, o sinal será atenuado e será distorcido pelo *slew-rate*, conforme mostra a Figura 4.27 (a). A Figura 4.27 (b) mostra o sinal de saída amplificado.

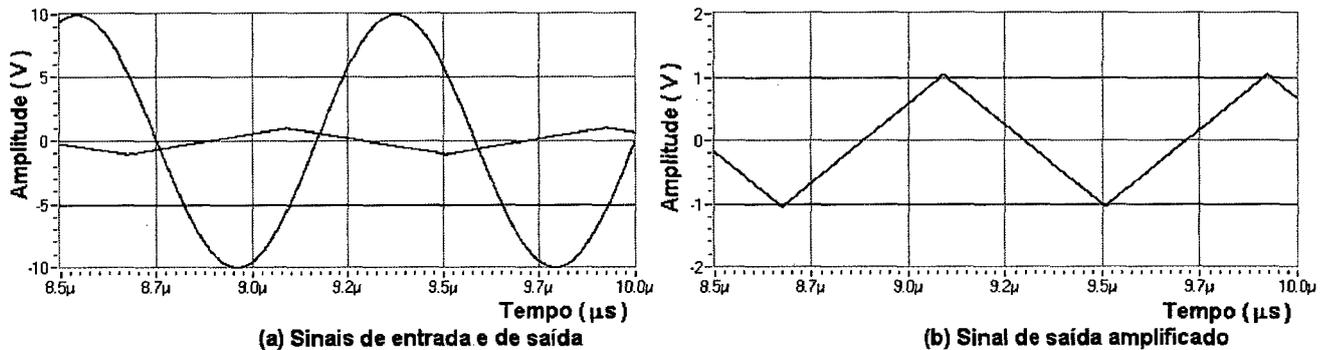


Figura 4.27 - Resposta do *slew-rate* a senóide

Os ensaios a seguir foram feitos com o modelo do amplificador completo, ou seja com todos os ajustes para ganho 1 mostrados na Tabela 4..

A Figura 4.28 mostra a resposta do amplificador, no qual foi colocada uma tensão de 1 V de amplitude com uma frequência de 20 Hz, na entrada diferencial e na entrada de tensão de modo comum. A Figura 4.28 (a) mostra que os sinais de entrada e saída são praticamente coincidentes. A Figura 4.28 (b) amplia os sinais de entrada e saída podendo-se observar um acréscimo no sinal de saída devido à tensão de rejeição de modo comum, bem como o de outras características como por exemplo erro do ganho e tensão de *off set*.

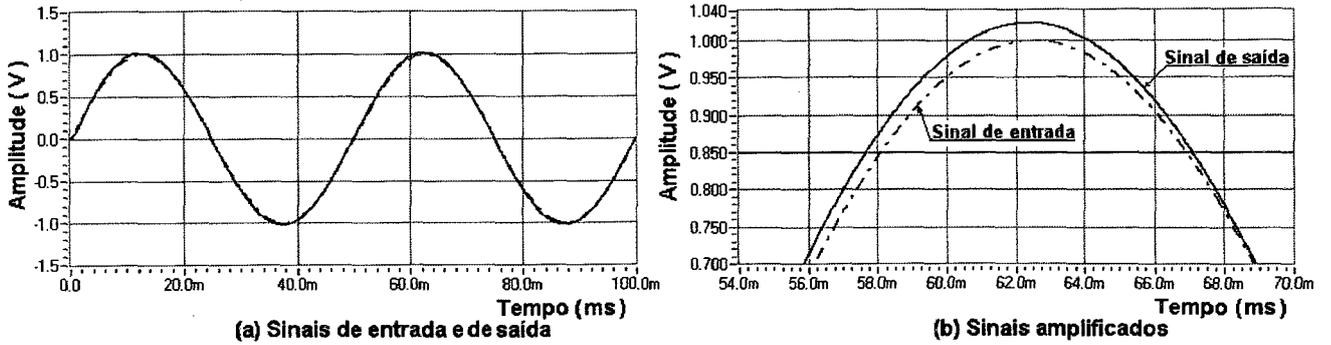


Figura 4.28 - Ensaio modelo completo com RRC

A defasagem do modelo pode ser observada na Figura 4.29 (a), que mostra a resposta do modelo do amplificador com ganho 1, para um sinal senoidal de amplitude 1 V e frequência de 200 kHz. A Figura 4.29 (b) mostra os sinais ampliados, com uma defasagem de 8,6°.

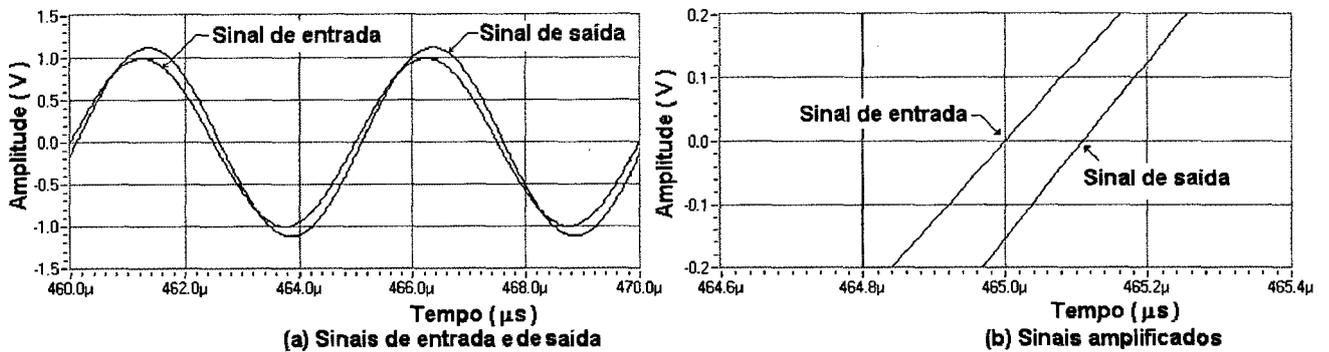


Figura 4.29 - Defasagem do modelo do amplificador

A Figura 4.28 (a) mostra a resposta do modelo do amplificador com ganho 1, para um degrau de -10V a 10 V, podendo-se observar o *slew-rate* durante a transição do sinal de saída. A Figura 4.28 (b) amplia os sinais para a faixa de tempo entre (30 e 40) µs, mostrando todas as características do modelo do amplificador juntas, destacando o ruído.

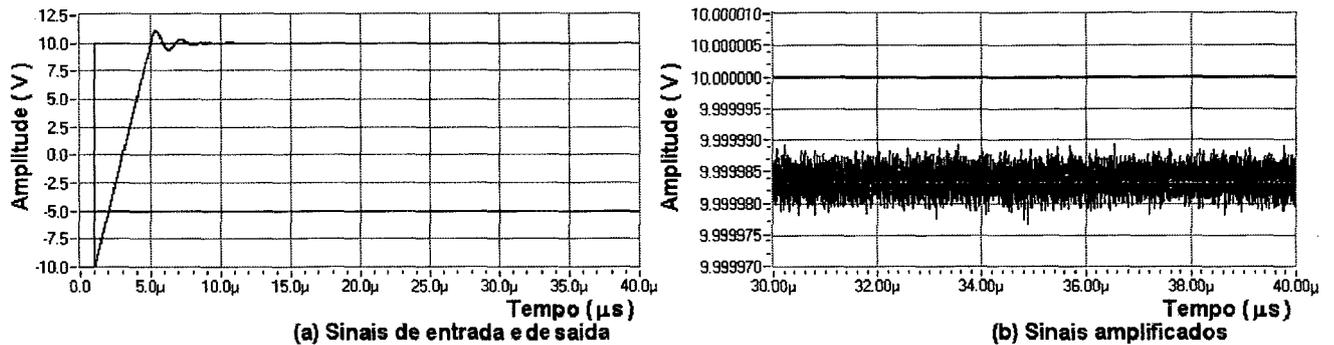


Figura 4.30 - Resposta ao degrau do modelo do amplificador AD624A

## Capítulo 5

# CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

### 5.1 Conclusões

O objetivo principal foi alcançado, tendo sido modeladas as principais características do comportamento dinâmico de instrumentos de medição.

Foram propostos modelos das características dinâmicas, as quais individualmente ou em conjunto, dependendo do caso, irão compor modelos de instrumentos.

Na literatura foi encontrada a modelagem dessas características usando a forma tradicional através da transformada de Fourier. A utilização de equações de diferenças para essa função não foi encontrada.

A modelagem tradicional é baseada em circuitos elétricos e eletrônicos, diferente do que foi baseada neste trabalho. Toda a modelagem está baseada nas informações do fabricante e no conhecimento do princípio de funcionamento do instrumento de medição.

As principais dificuldades encontradas foram:

- falta de padronização na terminologia relativa a especificações dos fabricantes;
- falta confiabilidade dos dados dos fabricantes;
- falta de normalização com relação aos dados informados pelos fabricantes de instrumentos;
- escassez de normas técnicas sobre especificações de instrumentos.

A forma de superar essas dificuldades foi assumir valores para determinados parâmetros das especificações de fabricantes, sem que isso acarretasse problemas ao modelo. Quando esses valores forem conhecidos com confiabilidade adequada, basta

efetuar a substituição para que se tenha um modelo mais representativo do comportamento real dos instrumentos.

## **5.2 Sugestões para futuros trabalhos**

### **a) Avaliação da incerteza dos modelos dos instrumentos**

Foi feita somente a avaliação da incerteza dos modelos de sistema de 1ª e de 2ª ordem. Quando é modelado um instrumento, por exemplo um termistor, são utilizados diversos módulos além do sistema de 1ª ordem. Desse modo torna-se necessário avaliar a incerteza do modelo em comparação com o próprio instrumento.

### **b) Padronização das especificações e confiabilidade dos dados do fabricante.**

Padronizar especificações, tipos de ensaios e níveis de confiança dos valores dos parâmetros de instrumentos, viabilizando uma otimização do das características do instrumento.

### **c) Determinação experimental de parâmetros característicos de instrumentos.**

Este trabalho visa comparar as especificações do fabricante do instrumento com os valores obtidos experimentalmente.

### **d) Equalizador de fase com ângulo ajustável em função da frequência.**

Desenvolvimento de um equalizador de fases com ângulo ajustável em função da frequência com a finalidade de permitir minimizar erros decorrentes de operações de soma e subtração de sinais que passam através de módulos de 1ª ou de 2ª ordem.

### **e) Obtenção do modelo através da curva do certificado de calibração do instrumento.**

Desenvolver método de modelagem de instrumentos de medição através da curva de calibração, utilizando-se equações de diferenças.

### **f) Realizar um estudo comparativo entre a modelagem através de equações de diferenças e formas alternativas usuais.**

Implementar modelos equivalentes propostos neste trabalho, porém empregando formas alternativas, como por exemplo a transformada de Fourier para

decomposição em frequência do sinal de entrada e a antitransformada para composição do sinal de saída.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FIGLIOLA, R. S.; BEASLEY, D.E. **Theory and Design for Mechanical Measurements**. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- [2] DOEBELIN, E.O. **Measurement Systems: Application and Design**. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 1990.
- [3] CHEN, W.K. **The Circuit and Filters Handbook**. New York: CRC Press, 1995.
- [4] PUTTEN, A. D. O. V. **Electronic Measurement Systems. Theory & Practice**. 2. ed. Bristol: Institute of Physics Publishing, 1996.
- [5] DALLY, J. W.; RILEY, W. F.; McCONNELL, K. G. **Instrumentation for Engineering Measurements**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- [6] BIPM;IEC;IFCC;ISO;IUPAC;IUPAP;OIML. **Guia para a Expressão da Incerteza de Medição**. 2ª Edição Brasileira do "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements". Rio de Janeiro: Programa RH-Metrologia, 1998.
- [7] FLESCH, C. A. **Medição de Grandezas Mecânicas. 1ª Parte: Metrologia**. Depto. Eng. Mecânica. Universidade Federal de Santa Catarina. 1999.
- [8] NATIONAL INSTRUMENTS. **The Measurement and Automation. Catálogo do fabricante**. <http://www.ni.com>. Austin: National Instruments, 2000.
- [9] OMEGA ENGINEERING. **The Temperature Handbook**. v. 28. Stamford: Omega Press, 1995.
- [10] OMEGA ENGINEERING. **The Pressure Strain and Force Handbook**. v. 29. Stamford: Omega Press, 1995.
- [11] HEWLETT PACKARD. **Test & Measurement Catalog**. Catálogo do fabricante. 1999.
- [12] FLUKE. **Calibration: Philosophy in Practice**. 2. ed. Everett: Fluke, Apr 1994.
- [13] OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 2. ed. Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1993.

- [14] OPPEINHEIM, A.V; WILLSKY, A.S. **Signals & Systems**. 2. ed. Prentice-Hall International Editions, 1997.
- [15] OPPEINHEIM, A.V. **Discrete Time Signal Processing**. 2. ed. Prentice-Hall International Editions, 1975.
- [16] ALBERTAZZI, A.G. J. **Apostila de Metrologia, Parte I**. Laboratório de Metrologia e Automatização. Departamento de Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Santa Catarina.
- [17] HEWLETT PACARD. **The Fundamentals of Signal Analysis**. Application Note 243.
- [18] HEWLETT PACARD. **Dynamic Signal Analyzer Applications**. Effective Machinery Maintenance. Application Note 243-1.
- [19] KODOSKY, J; PÉREZ E. **Linear Systems in LabView**. National Instruments. Application Note 039.
- [20] SMITH, L.; SHEINGOLD, D. H. **AN-358 - Noise and Operational Amplifiers Circuits**. Disponível na Internet. [http://www.analog.com/techsupt/application\\_notes/application\\_notes.html](http://www.analog.com/techsupt/application_notes/application_notes.html). Norwood: Analog Devices, 1984.
- [21] OTT, HENRY.W; **Noise Reduction Techniques in Electronic Systems**. Wiley-Interscience Publication, 1976.
- [22] WAIT, J.V; HUELSMAN, L. P; KORN, G.A; **Introduction to Operational Amplifier Theory and Applications**. New York: McGraw-Hill, 1975.
- [23] HAYT, WILLIAM H. J; KEMMERLY JACK E; **Análise de Circuitos em Engenharia**. McGraw-Hill do Brasil, 1978.
- [24] SEDRA, ADEL S, SMITH, KENNETH C, **Microeletrônica Vol I e II**. MAKRON Books do Brasil Editora Ltda, 1995.
- [25] PROAKIS, JOHN G, MANOLAKIS, DIMITRIS G, **Digital Signal Processing Principles, Algorithms, and Applications**. Prentice Hall Third Edition.
- [26] IEEE – INSTITUTE OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS ENGINEERS, **The IEEE Dictionary of Electrical and Electronics Terms**. Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. Sixth Edition, 1996.
- [27] DOEBELIN, E.O. **Systems Dynamics: Modeling and Response**. A Bell & Howell Company, Columbus, Ohio, 1972.

- [28] BARP, A. M. **Metodologia de avaliação e de gerenciamento da Incerteza de sistemas de medição de temperatura**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, Florianópolis – SC: 2000.
- [29] BLANK, Martim. **Sistematização das Especificações Metrológicas em Sistemas Automatizados de Aquisição de Sinais**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis – SC: 1996.
- [30] CAMARANO, Denise das Mercês. **Procedimentos Aplicáveis à Garantia da Qualidade Metrológica dos Resultados na Termometria Automatizada com Termopar e Sensores Resistivos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis – SC: 1993.
- [31] JOHNSON, Richard A. **Miller and Freund's Probability and Statistics for Engineers**. Fifth Edition. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall International, 1994.
- [32] ANALOG DEVICES, Inc. **Orientation – Operational Amplifiers**. Amplifier Reference Manual. 1992.
- [33] NASH, E. **AN-539 - Errors and Error Budget Analysis in Instrumentation Amplifiers Applications**. Disponível na Internet. [http://www.analog.com/techsupt/application\\_notes/application\\_notes.html](http://www.analog.com/techsupt/application_notes/application_notes.html). Norwood: Analog Devices, Aug 1999.
- [34] PHILIPS COMPONENTS. **AN164 – Explanation of Noise**. Book IC11 Data Handbook – Linear Products. Netherlands: Philips Components, 1989.
- [35] INMETRO. **Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia**. Versão Brasileira do “Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology” publicado em 1993 pela ISO/IEC/OIML/BIPM. Rio de Janeiro, RJ, 1995.
- [36] ADADE, Alberto F. **Análise de Sistemas Dinâmicos**. Centro Técnico Aeroespacial, Instituto Tecnológico da Aeronáutica. São José dos Campos, SP, Agosto 1999.
- [37] DEMROW, Robert I. **AN-359 – Settling Time of Operational Amplifiers**. Disponível na Internet. [http://www.analog.com/techsupt/application\\_notes/application\\_notes.html](http://www.analog.com/techsupt/application_notes/application_notes.html). Norwood: Analog Devices, Jan 1970.
- [38] CLARKE, Bob. **NA-253 – Find Op Amp Noise with Spreadsheet**. Disponível na Internet. [http://www.analog.com/techsupt/application\\_notes/application\\_notes.html](http://www.analog.com/techsupt/application_notes/application_notes.html). Norwood: Analog Devices, Dec 1990.

- [39] RISKIN, Jeffrey R. **NA-244 – A User's Guide to IC Instrumentation Amplifiers**. Disponível na Internet. [http://www.analog.com/techsupt/application\\_notes/application\\_notes.html](http://www.analog.com/techsupt/application_notes/application_notes.html). Norwood: Analog Devices.
- [40] STATA, Ray. **User's Guide to Applying and Measuring Operational Amplifier Specifications**. Disponível na Internet. [http://www.analog.com/techsupt/application\\_notes/application\\_notes.html](http://www.analog.com/techsupt/application_notes/application_notes.html). Norwood: Analog Devices, Mar 1967.
- [41] PERTENCE, Antonio J. **Amplificadores Operacionais e Filtros Ativos**. MAKRON Books do Brasil Editora Ltda, 3ª Edição 1990.
- [42] KERCHNER Russel M, CORCORAN George F. **Circuitos de Corrente Alternada**. Editora Globo, Porto Alegre, RS, 1968.
- [43] DOEBELLIN, Ernest, O. **Engineering Experimentation: Planning, Execution, Reporting**. McGraw-Hill, Inc, USA, 1995.
- [44] DARRIGO, Sílvia Regina. **Desenvolvimento de modelos do comportamento metrológico estático de instrumentos de medição**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, Florianópolis – SC: 2001.
- [45] AMETHERM. **Circuit Protection and Thermal Management**. Disponível na internet [http://www.ametherm.com/ntc\\_thermistors.htm](http://www.ametherm.com/ntc_thermistors.htm).
- [46] TERMOMETRICS, Inc. **NTC Thermistors**. Disponível na internet <http://www.thermometrics.com/assets/images/tk95.pdf>.
- [47] ENDEVCO, Corporation. **Catálogo de Fabricante**. Disponível na Internet. <http://www.endevco.com>. 1997.
- [48] SENSOTEC, Inc. **Catálogo de Fabricante**. Disponível na Internet. <http://www.sensotec.com>. 2000.
- [49] NATIONAL, Semiconductor Corporation. **Linear Databook**. Santa Clara, California, USA. 1982.
- [50] BURR-BROWN, Corporation. **Integrated Circuits Databook**. Tucson, Arizona, USA, 1986.
- [51] BROCH, Jens Trampe. **Application of Brüel & Kjaer to Mechanical Vibration and Shock Measurements**. Printed Denmark. Maio 1972.
- [52] BROCH, Jens Trampe. **Application of Brüel & Kjaer to Mechanical Vibration and Shock Measurements**. Printed Denmark.

- [53] BRÜEL & KJAER. **Accelerometers Instructions and Applications**. Printed in Copenhagen, Denmark, Outubro 1974.
- [54] ELLIS, George **Control System Design Guide**. Academic Press, New York. 2º ed. Junho 2000
- [55] OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 2. ed. Prentice-Hall International Editions, 1990
- [56] SEDRA, ADEL S, SMITH, KENNETH C, **Microeletronics Circuits**. Saunders College Publishing, Third Edition, USA, 1990.
- [57] NASH, E. **Common Mode and instrumentation Amplifiers**. Disponível na Internet. [http://www.analogdevices.com/new/ads/html/ad627inamps/common\\_mode.html](http://www.analogdevices.com/new/ads/html/ad627inamps/common_mode.html). Norwood: Analog Devices, 30/06/2000.
- [58] CARVALHO, Delmar Broglio. **Equalização de fase baseada no atraso de fase**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis – SC: 1997.
- [59] HOUPIS Constantine H, LUBELFELD Jerzy. **Pulse Circuits**, Simon and Schuster, New York, 1970.
- [60] HILDEBRAND Francis B. **Advanced Calculus for Applications**, Prentice Hall, New Jersey, 1960.
- [61] PEZZOTTA, C.A. **Desenvolvimento de um Simulador de Cadeias de Medição para Utilização em um Laboratório Virtual**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Pós-Graduação em Metrologia Científica e Industrial, Florianópolis – SC: 2001.
- [62] FLESCH C. A., BARP A. M. **Avaliação a priori da incerteza em sistemas modulares de medição de temperatura**. IV Congresso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica CIDIM/99. Anais em CDROM. Santiago de Chile, 23 a 26 Nov. 1999.
- [63] BARP, A., FLESCH, C. A. **Avaliação da incerteza de medição durante o projeto de cadeias de medição**. III SEMETRO – Seminário Internacional de Metrologia Elétrica. Anais em CD-ROM. Rio de Janeiro, 15 a 17 Set. 1998.
- [64] BLANK, M., FLESCH, C. A. **Sistematização da análise de erros na multiplexação automatizada de transdutores piezoelétricos convencionais**. XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. Anais em CDROM. Bauru, SP, Dez. 1997.
- [65] CAMARANO, D. M., FLESCH, C. A. **Erros na multiplexação automatizada de transdutores de temperatura tipo termopar, termorresistor e termistor**. Anais do V Congresso Nacional de Ingeniería Mecánica, Punta Arenas (Chile), Dez. 1992.

- [66] FLESCHE, C. A., CAMARANO, D. M. **Proposta de metodologia de seleção dos módulos físicos e lógicos de um processo de medição automatizado de temperatura com transdutores dos tipos termopar, termorresistor e termistor.** XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. v.3, p.269-274. Brasília: Dez. 1993.
- [67] HECKMANN, J. R., FLESCHE, C. A. **Minimização de incertezas em circuitos de linearização de transdutores através de algoritmos genéticos.** III SEMETRO – Seminário Internacional de Metrologia Elétrica. Anais em CDRom. Rio de Janeiro, 15 a.17 Set. 1998.
- [68] CAMARANO, D. M., FLESCHE, C. A. **Garantia da qualidade metrológica de sistemas automatizados de medição de temperatura com transdutores elétricos.** Anais do Congresso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica, V.1, p.407-413, Madri (Espanha) Set. 1993.
- [69] FLESCHE, C. A., SOARES JR, L. **A methodology for unification in the treatment of metrological aspects in the quality assuring systems.** Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (COBEM 99). Anais em CD-ROM. Águas de Lindóia: 22 a 26 Nov. 1999.
- [70] FLESCHE, C. A. **Metrologia. Apostila da disciplina Metrologia e Eletrônica para Experimentação, do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da UFSC.** Florianópolis (SC): Laboratório de Metrologia e Automatização da UFSC, 1997.
- [71] FLESCHE, Carlos. A. **Estruturação de um sistema de simulação de instrumentos de medição.** Florianópolis/SC, novembro de 2000. 115p. Proposta de tese de doutoramento. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina.
- [72] ROCHA, Carlos Aurélio Faria da. **Anotações de aula da disciplina de Sinais e Sistemas Lineares do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFSC.** Florianópolis/SC, 1999. Laboratório de Instrumentação Eletrônica: Circuitos e Processamento de Sinais, LINSE.
- [73] ANTONIOV, **A Digital Filters: Analysis and Design .** McGraw Hill, 1979.