

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Controle de Posição de Robôs  
Manipuladores Rígidos e com  
Transmissões Flexíveis  
utilizando Controladores na  
Estrutura de Dois Graus de  
Liberdade**

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina  
como requisito parcial à obtenção do grau de

**Mestre em Engenharia Elétrica**

**Carlos José Venturo Bisso**

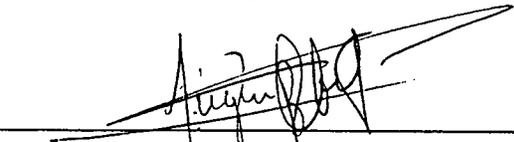
Florianópolis, Março de 1999

# Controle de Posição de Robôs Manipuladores Rígidos e com Transmissões Flexíveis utilizando Controladores na Estrutura de Dois Graus de Liberdade

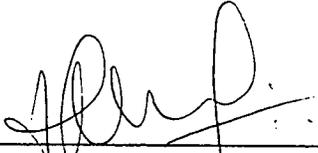
Carlos José Venturo Bisso

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia na especialidade Engenharia Elétrica, área de concentração Controle, Automação e Informática Industrial, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, Março de 1999.



Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
orientador

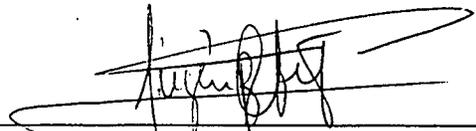


Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.  
co-orientador

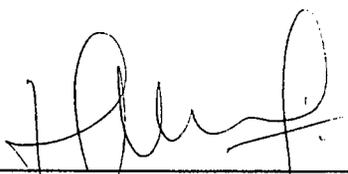


Prof. Ildemar Cassana Decker, D.Sc.  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

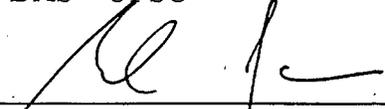
## Banca Examinadora



Prof. Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr.  
DAS - UFSC



Prof. Edson Roberto de Pieri, Dr.  
DAS - UFSC



Prof. Raul Guenther, D.Sc.  
EMC - UFSC



Prof. Werner Kraus Júnior, Ph.D.  
DAS - UFSC



Prof. Marcelo Ricardo Stemmer, Dr.  
DAS - UFSC

*A Deus, pois, sem Ele nada tem sentido.*

*Aos meus pais, Maria Elena e Carlos,  
às minhas irmãs, Claudia e Paola,  
ao meu irmão, Luis Alberto.*

## Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer aos meus pais, Maria Elena e Carlos, por serem mais do que eu mereço e representarem um exemplo de honestidade, lealdade, humildade e dedicação.

À minha família, especialmente aos meus irmãos, que me incentivou e me deu forças para realizar este trabalho.

Aos meus orientadores prof. Eugênio de Bona Castelan Neto e prof. Edson Roberto de Pieri pela paciência, confiança e pelos conhecimentos transmitidos.

A Miguel Chocos Ruiz por ter representado minha família no Brasil.

A Aline Ribeiro Lima e à sua família pelo convívio e amizade.

Aos amigos e colegas do LCMI com os quais compartilhei bons momentos dentro e fora da Universidade. Em especial ao Howard Herrera, Karina Barbosa, Marcos Mendes, Cesar Torrico, Jorge Souza de Oliveira, Pierre Alibert Marchi e Sandro Battistella.

À UFSC e CAPES pelo suporte material e financeiro.

Finalmente, gostaria também de agradecer a todos aqueles que de alguma forma colaboraram para elaboração deste trabalho.

## Resumo

O objetivo principal deste trabalho é utilizar controladores na estrutura de Dois Graus de Liberdade (2DOF) com alocação ótima de pólos para o controle de posição de robôs manipuladores rígidos e de robôs com transmissões flexíveis. O modelo não-linear do robô rígido é simplificado até se obter um modelo linear e desacoplado para cada junta. Os controladores 2DOF são projetados usando estes modelos lineares. São feitas simulações e a implementação prática num robô SCARA de 4 juntas. No caso do robô com transmissões flexíveis é usado o controle em cascata baseado na dinâmica inversa do robô. Os controladores projetados são simulados no caso de um robô planar de duas juntas. Os resultados experimentais e das simulações mostram que com controladores 2DOF é obtido um erro nulo em regime permanente apesar da existência de variações paramétricas, perturbações nos atuadores e variações de carga no efetuador final, além de uma resposta dinâmica apropriada.

Palavras-chave : Controlador de Dois Graus de Liberdade, robô manipulador, transmissões flexíveis, controle em cascata, *LQR* com alocação de pólos

## Abstract

The aim of this work is to use Two-Degree-of-Freedom (2DOF) controllers with an *LQR* optimal pole placement scheme to control the position of rigid and flexible joint robotic manipulators. The nonlinear model of the robot dynamic is simplified in order to obtain a decoupled linear model for each joint. The 2DOF controllers are designed using these linear models. A simulation example with a planar two-link robotic manipulator is performed. The controllers are tested with a four-joint SCARA robot in a practical application. To control flexible joint robots, a cascade control technique based on the inverse dynamic is presented. The designed controllers are simulated with a planar two-link robot. The experimental and simulation results show that zero steady-state error can be obtained using 2DOF controllers in spite of plant parameter variations, disturbances applied to the actuators and load variations.

Key words : Two-Degree-of-Freedom controllers, robotic manipulator, flexible joints, cascade control, *LQR* optimal pole placement scheme

## Resumen

El objetivo principal de este trabajo es utilizar controladores en la estructura de Dos Grados de Libertad (2DOF) con posicionamiento óptimo de polos para controlar la posición de robots manipuladores rígidos y de robots con transmisiones flexibles. El modelo no lineal del robot rígido es simplificado hasta obtener un modelo lineal y desacoplado para cada junta. Los controladores 2DOF son diseñados usando estos modelos lineales. Son realizadas simulaciones y la implementación práctica en un robot SCARA de 4 juntas. En el caso del robot con transmisiones flexibles es usado el control en cascada basado en la dinámica inversa del robot. Los controladores diseñados son simulados con un robot plano de dos juntas. Los resultados experimentales y de las simulaciones muestran que con controladores 2DOF es obtenido un error nulo en estado estacionario a pesar de las variaciones paramétricas, perturbaciones en los actuadores y variaciones de carga en el efector final, además de una respuesta dinámica adecuada.

Palabras-chave : Controlador de Dos Grados de Libertad, robot manipulador, transmisiones flexibles, control en cascada, *LQR* con posicionamiento óptimo de polos

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelos Dinâmicos de Robôs Manipuladores</b>	<b>6</b>
2.1	Introdução . . . . .	6
2.2	Modelo dinâmico de um robô manipulador rígido . . . . .	7
2.2.1	Regulação . . . . .	9
2.2.2	Trajectoria senoidal . . . . .	9
2.3	Modelo dinâmico de um robô manipulador com transmissões flexíveis . . . . .	11
2.3.1	Modelo simplificado de Spong . . . . .	13
2.4	Conclusões . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Controlador de Dois Graus de Liberdade</b>	<b>15</b>
3.1	Introdução . . . . .	15
3.2	Problema geral de controle . . . . .	16
3.3	Definições e propriedades . . . . .	18
3.4	Requerimentos de malha . . . . .	20
3.4.1	Estabilidade robusta ante variações paramétricas . . . . .	20
3.4.2	Estabilidade robusta ante dinâmicas não modeladas . . . . .	24
3.4.3	Rejeição da perturbação e atenuação do ruído . . . . .	26
3.4.4	Desempenho robusto de malha . . . . .	28
3.5	Requerimentos de resposta . . . . .	29
3.6	Projeto de controle . . . . .	31
3.6.1	Procedimento geral . . . . .	31
3.6.2	Controlador ótimo LQR . . . . .	33
3.6.3	Procedimento de projeto LQR com erro nulo e robusto . . . . .	35
3.7	Exemplo de projeto e aplicação . . . . .	37
3.7.1	Projeto do controlador . . . . .	38
3.7.2	Resultados das simulações . . . . .	40
3.8	Conclusões . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Controle de Posição de Robôs Rígidos</b>	<b>44</b>
4.1	Introdução . . . . .	44
4.2	Estrutura geral de controle . . . . .	45
4.3	Controle de um robô planar de duas juntas : simulações . . . . .	45
4.3.1	Modelo linear . . . . .	45
4.3.2	Projeto dos controladores . . . . .	48
4.3.3	Resultados das simulações . . . . .	49
4.4	Controle de um robô SCARA de 4 juntas : resultados experimentais . .	52
4.4.1	Modelo linear . . . . .	53
4.4.2	Projeto dos controladores . . . . .	53
4.4.3	Resultados das simulações . . . . .	55
4.4.4	Resultados experimentais . . . . .	57
4.5	Conclusões . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Controle de Posição de Robôs com Transmissões Flexíveis</b>	<b>62</b>
5.1	Introdução . . . . .	62
5.2	Controle de robôs com transmissões flexíveis . . . . .	63
5.3	Controle em cascata baseado na dinâmica inversa . . . . .	64
5.3.1	Modelo . . . . .	65
5.3.2	Etapas de controle . . . . .	65
5.3.3	Projeto dos controladores . . . . .	69
5.3.4	Resultados das simulações . . . . .	70
5.4	Conclusões . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Robô SCARA de 4 Juntas</b>	<b>77</b>
A.1	Descrição geral do robô . . . . .	77
A.2	Modelagem cinemática . . . . .	78
A.3	Modelagem dinâmica . . . . .	79
A.4	Valores dos parâmetros . . . . .	80
<b>B</b>	<b>Controladores Digitais</b>	<b>81</b>
B.1	Transformações . . . . .	82
B.2	Controlador 2DOF digital . . . . .	82
B.3	Controladores PD e PID digitais . . . . .	84

<b>C</b>	<b>Programas no XOberon</b>	<b>85</b>
C.1	Módulo Main3.Mod . . . . .	85
C.2	Módulo StateCtrl.Mod . . . . .	86

# Capítulo 1

## Introdução

Uma definição geral de um robô manipulador foi estabelecida pelo *RIA* (Robot Institute of America) [KCN89] : *um robô industrial é um manipulador reprogramável e multifuncional, projetado para mover materiais, peças, ferramentas ou dispositivos especializados, através de movimentos variáveis programados para a execução de diversas tarefas.* Baseado nesta definição um robô manipulador deve ser capaz, em particular, de operar automaticamente.

Apesar de que as estruturas mecânica, elétrica e computacional dos diferentes robôs podem variar consideravelmente, a maioria deles são constituídas de quatro componentes principais [KCN89] : manipulador ou unidade mecânica, um ou mais sensores, o sistema de controle e a unidade de conversão de energia. Estes componentes são apresentados na figura 1.1.

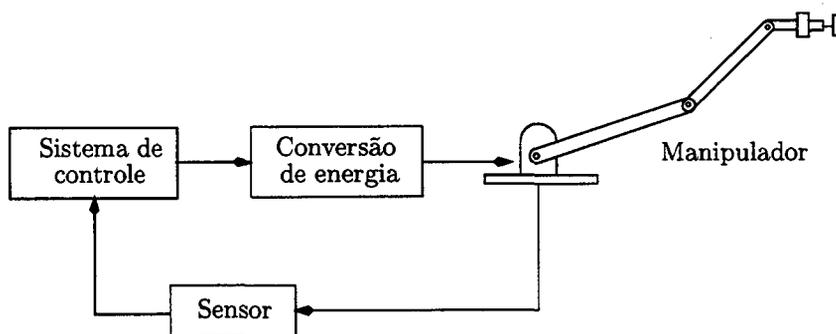


Figura 1.1: Principais componentes de um robô manipulador

O manipulador consiste de uma seqüência de elos conectados através de juntas. As

juntas podem ser de revolução (movimento de rotação) ou de translação (movimento linear). Cada junta do robô define um grau de liberdade. Assim, o número total de graus de liberdade do robô é igual ao número de juntas [dWSB96]. Em geral o manipulador é constituído de três elementos : braço, punho e efetuador final. Além dos componentes mecânicos, os manipuladores possuem atuadores encarregados de movimentar cada junta. Os atuadores podem ser elétricos, pneumáticos ou hidráulicos.

A principal função do sistema de controle é garantir a correta execução do movimento desejado do efetuador final. Este sistema gera sinais de controle que são aplicados nos atuadores. O sistema de controle é constituído de um gerador de trajetórias e da lei de controle que gera os sinais a partir das informações dos sensores e da tarefa especificada.

A unidade de conversão de energia tem como finalidade fornecer a energia necessária aos atuadores do manipulador. Pode ser um amplificador de potência, no caso de atuadores elétricos, ou um compressor, no caso de atuadores pneumáticos ou hidráulicos.

A utilização de robôs manipuladores na indústria tem crescido consideravelmente nas últimas décadas. Tarefas que exigem rapidez na execução com alto grau de precisão, atividades de caráter perigoso ou repetitivo, bem como tarefas de manipulação de cargas são comumente desempenhadas por robôs manipuladores. Tudo isto trouxe como consequência um desenvolvimento rápido da ciência e da tecnologia da robótica, especialmente da área do controle de robôs.

O controle de robôs manipuladores permite realizar tarefas com um determinado desempenho. Existem tarefas onde é preciso movimentar o manipulador de uma posição a outra sem requerer uma grande precisão durante o movimento entre as duas posições. Este caso é conhecido como *regulação* ou *controle ponto a ponto* onde o objetivo de controle é regular as variáveis das juntas numa configuração determinada apesar da presença de perturbações. Outras tarefas, como pintura e soldagem, exigem o seguimento de uma determinada trajetória variante no tempo. Este é o *controle de trajetória* onde o objetivo de controle é eliminar assintoticamente o erro de seguimento apesar de perturbações e dinâmicas não modeladas [dWSB96].

Existem tarefas como esmerilhamento, montagem e polimento onde é requerido que o robô manipulador estabeleça um contato com seu meio ambiente de maneira controlada. Neste caso além de controlar a posição do efetuador final é também preciso controlar a força de interação com o meio. Estas forças podem ser controladas explicitamente ou indiretamente controlando-se a posição do efetuador final. Em ambos os

casos, a especificação de força é complementada com especificações relativas ao movimento do efetuador final, sendo que o problema de controle tem, em geral, objetivos distintos [dWSB96]. Esta estratégia é chamada de *controle de força* e não será considerada neste trabalho.

Geralmente os elos e as juntas de um robô manipulador são construídos os mais rígidos possíveis com a finalidade de obter uma alta precisão no controle de posição [dWSB96]. Muitos robôs industriais apresentam flexibilidade, tanto nos elementos de transmissão de movimento como nos elos, sendo que a maior parcela de flexibilidade é atribuída às transmissões [GR98, CdSL98]. Este tipo de flexibilidade pode trazer como consequência erros de posição (deslocamento variante no tempo entre a posição do elo e a posição do rotor), aumento do tempo de estabilização, comportamento oscilatório e instabilidade. Assim, é importante considerar as flexibilidades nas transmissões tanto na modelagem do robô como no projeto de controle. O modelo de robôs com transmissões flexíveis tem  $2n$  graus de liberdade sendo  $n$  correspondentes à posição das juntas e os outros  $n$  à posição dos rotores [Rea94], conforme será visto no capítulo 2. O objetivo de controle é anular as vibrações induzidas pela transmissão assim como anular o erro de posição em forma rápida. Uma parte desta dissertação é destinada ao controle de posição de robôs manipuladores com transmissões flexíveis.

Um sistema de controle no espaço das juntas utiliza como variáveis de controle as diversas variáveis associadas às juntas (posição, velocidade, etc.). A maioria dos controladores comerciais de robôs são projetados no espaço das juntas e usam o controle proporcional e derivativo (PD) para controlar cada junta em forma independente [KW91, LAD93]. Este controlador tem como desvantagem não garantir erro nulo de seguimento quando o robô está afetado por forças gravitacionais, não rejeita perturbações externas e o erro de seguimento aumenta quando é aplicada uma carga no efetuador final. Os controladores proporcional, integral e derivativo (PID) são localmente estáveis e garantem erro nulo em regime permanente para regulação. Uma desvantagem deste controlador é que, se é requerido o mesmo comportamento transitório no controle ponto a ponto, então seus ganhos devem variar de acordo com os valores dos termos gravitacionais e a direção do movimento. Uma outra desvantagem é que pode causar oscilações na presença de atrito estático [dWSB96].

Outros algoritmos de controle usam métodos de linearização para linearizar e desacoplar a dinâmica não-linear do robô manipulador, mas o desempenho destes controladores é deteriorado quando existem erros na modelagem. Isto ocorre basicamente porque, na existência desses erros, o desacoplamento da dinâmica não é completamen-

te obtido [KW91]. Na maioria destes algoritmos só é garantida a estabilidade do robô manipulador mas o erro de seguimento não converge a zero [ZP94]. Existem também algoritmos de controle robusto não-lineares tais como controle robusto baseado na dinâmica inversa do robô e o controle robusto baseado na passividade [dWSB96]. As leis de controle destes algoritmos são complexas, precisam de muitos dados e, do ponto de vista da implementação digital, têm um tempo de processamento maior do que o utilizado pelos controladores lineares para controlar a posição de robôs manipuladores. Um outro controlador robusto é o controlador a estrutura variável que, dependendo da estratégia usada, pode produzir o efeito *chattering* no controle [ZP94], [dWSB96], [LAD93].

Uma estrutura de controladores lineares que é utilizada na teoria de controle linear é a estrutura de Dois Graus de Liberdade (2DOF)<sup>1</sup> a qual permite projetar o controlador considerando independentemente as especificações de desempenho de malha e de resposta [Wol95, Che93]. Em particular o projeto com alocação ótima de pólos fornece ao sistema certas características de robustez que fazem que este tipo de controladores seja usado para controlar sistemas lineares com variações paramétricas, perturbações e com dinâmicas não modeladas [Wol95]. Os principais requerimentos de malha são a estabilidade nominal, estabilidade ante variações paramétricas, rejeição de perturbação e atenuação de ruído. Um requerimento de resposta é obter erro nulo robusto de seguimento de uma determinada trajetória.

Assim torna-se importante o projeto de controladores lineares que apresentem características de robustez e cuja implementação digital seja relativamente simples. Portanto o objetivo desta dissertação é utilizar os controladores na estrutura de Dois Graus de Liberdade (2DOF) com alocação ótima de pólos para controlar a posição de robôs manipuladores no espaço das juntas. Serão controlados dois tipos de manipuladores: manipuladores totalmente rígidos e manipuladores com transmissões flexíveis. No primeiro caso sobre o modelo não-linear e acoplado do robô são feitas suposições e simplificações até se obter um modelo linear e desacoplado. São feitas simulações e a implementação prática sobre um robô manipulador SCARA de quatro graus de liberdade (4DOF). No caso do robô com transmissões flexíveis é usado o controle em cascata baseado na dinâmica inversa e os controladores são testados através de simulações. Em ambos os casos as simulações são feitas considerando incertezas paramétricas, perturbações na entrada de controle e variações de carga no efetuador final e os resultados são comparados com o desempenho de controladores PD e PID.

---

<sup>1</sup>Do termo em inglês *Two-Degree-of-Freedom*

O presente trabalho é, então, dividido como segue :

No capítulo 2 são apresentados os modelos dinâmicos dos robôs manipuladores rígidos e dos robôs com elos rígidos e com transmissões flexíveis. No primeiro caso, além do modelo não-linear completo, são obtidos os modelos lineares e desacoplados de cada junta. No segundo caso, são apresentados o modelo completo e o modelo simplificado.

O capítulo 3 é destinado a estudar os controladores lineares na estrutura 2DOF. São feitas definições e estabelecidos os requerimentos de malha e de resposta. É também apresentado o projeto geral de controle e o projeto com alocação ótima de pólos. Um sistema de segunda ordem cujos pólos estão movendo-se no plano complexo e afetado por perturbações é usado como exemplo de aplicação do projeto do controlador.

O controle de posição de robôs rígidos é estudado no capítulo 4. Primeiro é apresentada a estrutura geral de controle. Depois são projetados controladores para controlar um manipulador planar de 2 juntas e são mostrados os resultados das simulações. Com a finalidade de fazer uma implementação prática e validar estes controladores, é feito o projeto para controlar duas juntas de um robô manipulador SCARA de 4 juntas (4DOF). Finalmente são apresentados os resultados experimentais e comparados com o desempenho de controladores PD e PID.

No capítulo 5 é estudado o controle de posição de manipuladores com transmissões flexíveis. É utilizado o controle em cascata baseado na dinâmica inversa sendo que o controlador na estrutura 2DOF é utilizado nas duas etapas do projeto. Resultados de simulações para os controladores projetados são ilustrados e comparados com os resultados de controladores PD.

O capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas e as perspectivas e propostas para trabalhos futuros.

O apêndice A é destinado a apresentar as principais características do robô SCARA 4DOF (modelos dinâmico e cinemático e os valores nominais de seus parâmetros).

No apêndice B são apresentadas técnicas para obter controladores digitais a partir de controladores analógicos. É encontrado o equivalente digital de controladores 2DOF, PD e PID a serem implementados no robô SCARA de 4 juntas.

Finalmente, o programa utilizado para implementar os controladores no robô SCARA é apresentado no anexo C. A linguagem de programação é a X0beron.

# Capítulo 2

## Modelos Dinâmicos de Robôs Manipuladores

### 2.1 Introdução

A modelagem dinâmica de um robô manipulador consiste em encontrar a relação entre as forças exercidas sobre a estrutura do manipulador e as posições, velocidades e acelerações das juntas. Esta relação pode ser expressa por um conjunto de equações diferenciais, chamadas de *equações de movimento*, que determinam a resposta dinâmica do manipulador aos sinais de controle. Duas formulações são comumente utilizadas para obter o modelo dinâmico: a formulação de Lagrange e a de Newton-Euler. A primeira delas é mais simples e mais sistemática descrevendo o comportamento dinâmico em função do trabalho e da energia usando coordenadas generalizadas. As equações de movimento são compactas e expressas numa forma fechada. A segunda descreve a dinâmica em termos da força e momentos sendo mais eficiente do ponto de vista computacional [AS86].

A presença da flexibilidade nas juntas é um aspecto comum em muitos robôs de uso industrial. Quando elementos de transmissão de movimento tais como *harmonic drives*, correias de transmissão, engrenagens e eixos são usados, um deslocamento variante no tempo é introduzido entre a posição do atuador e a posição do seu elo.

A disponibilidade de um modelo dinâmico é muito útil para o projeto mecânico da estrutura, a escolha dos atuadores, a determinação das estratégias de controle e as simulações do movimento do manipulador. Este capítulo é dedicado a apresentar o

modelo dinâmico de robôs manipuladores. Primeiro é apresentado o modelo dinâmico de um robô manipulador rígido. Depois são feitas algumas suposições e simplificações até obter um modelo linear para cada elo. Como a maioria dos algoritmos de controle projetados para robôs rígidos tem desempenho insatisfatório em robôs com transmissões flexíveis [dWSB96] apresenta-se também o modelo para este tipo de manipuladores visando a obtenção de controladores mais adequados para este caso.

## 2.2 Modelo dinâmico de um robô manipulador rígido

Baseado nas equações dinâmicas de Lagrange o modelo dinâmico de um robô manipulador rígido é descrito em termos das seguintes  $n$  equações diferenciais não-lineares e acopladas de segunda ordem ([AS86], [QD96], [LAD93], [dWSB96]) :

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + T_d = u \quad (2.1)$$

onde  $q$  é o vetor ( $n \times 1$ ) das coordenadas generalizadas das juntas,  $H(q)$  é a matriz ( $n \times n$ ) simétrica positiva definida conhecida como matriz de inércia do robô,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  é o vetor ( $n \times 1$ ) das forças de Coriolis e centrífugas,  $G(q)$  é o vetor ( $n \times 1$ ) das forças gravitacionais,  $T_d$  é o vetor ( $n \times 1$ ) das perturbações ou dinâmicas não-modeladas e  $u$  é o vetor ( $n \times 1$ ) dos torques de controle aplicados às juntas. Estas equações dinâmicas não consideram os efeitos do atrito dinâmico, atrito estático nem a dinâmica do atuador.

Em [AS86], [LAD93], [Cra86] é apresentado o procedimento detalhado com o qual é obtido o modelo dinâmico do robô (2.1) e são analisadas as suas principais propriedades. Estas propriedades são importantes para projetar determinados controladores e provar a sua estabilidade.

Nota-se que o sistema (2.1) é *totalmente acionado* porque existe um torque (ou força) de controle para cada junta ou grau de liberdade. Para uma junta de translação o atuador respectivo exerce uma força linear ao longo de seu eixo e para uma junta de revolução o atuador aplica um torque para movimentar o elo. Neste trabalho o vetor  $u$  de (2.1) será chamado de *torque de controle* independentemente do tipo da junta.

Em [AS86], [LAD93] cada equação da dinâmica do manipulador (2.1) é expressa da

seguinte maneira :

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i + T_{d_i} = u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

onde  $H_{ij}$  é o componente  $(i, j)$  da matriz  $H(q)$ , os termos  $G_i$ ,  $T_{d_i}$  e  $u_i$  são os elementos  $i$  dos vetores  $G(q)$ ,  $T_d$  e  $u$  respectivamente e  $h_{ijk}$  são os símbolos de Christoffel de primeiro tipo.

Com a finalidade de desacoplar cada equação (2.2) e obter um modelo linear para cada junta são feitas uma série de suposições e simplificações.

Os coeficientes  $H_{ij}$ ,  $h_{ijk}$  e  $G_i$  são dependentes das variáveis generalizadas  $q$  (dependem da configuração). Se as juntas são de revolução, as variáveis  $q$  aparecem como argumentos das funções trigonométricas  $\cos(\cdot)$  e  $\sin(\cdot)$  [QD91], [LAD93]. Então, sabendo que as funções  $\cos(\cdot)$  e  $\sin(\cdot)$  têm como valor máximo 1, podemos limitar os coeficientes  $H_{ij}$ ,  $h_{ijk}$  e  $G_i$  por seus valores máximos positivos. Assim temos :

$$H_{ij} \leq \bar{H}_{ij} ; \quad h_{ijk} \leq \bar{h}_{ijk} \quad e \quad G_i \leq \bar{G}_i \quad (2.3)$$

Substituindo estes valores máximos na dinâmica do robô (2.2) obtemos as seguintes  $n$  equações :

$$\sum_{j=1}^n \bar{H}_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{h}_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \bar{G}_i + T_{d_i} = u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

Para desacoplar estas equações devemos expressar a equação  $i$ , correspondente à junta  $i$ , em função da variável  $q_i$  e as suas derivadas eliminando ou limitando as variáveis  $q_j$  ( $j \neq i$ ) e as suas derivadas. Isto será feito considerando dois casos particulares : regulação da posição e o seguimento de uma trajetória senoidal.

**Suposição 2.1** Serão considerados manipuladores nos quais o coeficiente  $h_{iii}$  é zero (isto é, na equação  $i$  não existe o termo  $\dot{q}_i^2$ ). Muitos robôs apresentam esta característica, por exemplo o manipulador planar de duas juntas de revolução, manipulador planar de duas juntas (uma junta de revolução e a outra de translação), manipulador cilíndrico de três juntas, manipulador SCARA 4DOF, manipulador de Standford, manipulador PUMA 560 [LAD93].

### 2.2.1 Regulação

**Suposição 2.2** Vamos supor que quando a junta  $i$  está sendo posicionada as outras juntas já estão na sua posição desejada. Isto é, se a posição desejada da junta  $j$  ( $j \neq i$ ) é a posição fixa  $q_{d_j}$  então :

$$\dot{q}_j = 0 \quad ; \quad \ddot{q}_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (j \neq i) \quad (2.5)$$

Substituindo  $\dot{q}_j = \ddot{q}_j = 0$  na equação (2.4) e considerando a suposição 2.1 temos :

$$\overline{H}_{ii}\ddot{q}_i + \overline{G}_i + T_{d_i} = u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

**Suposição 2.3** É importante considerar o termo gravitacional dentro do modelo linear a ser obtido para que seu efeito possa ser compensado pelo controlador. Para isso, se a junta  $i$  for de rotação, no qual  $\overline{G}_i$  não é função de  $q_i$ , fazemos  $\overline{G}_i$  depender linearmente de  $q_i$  (substituir  $\overline{G}_i$  por  $\overline{G}_i q_i$ ).

Aplicando a última suposição na equação (2.6) temos que a equação linear resultante para a junta  $i$  é determinada por :

$$\overline{H}_{ii}\ddot{q}_i + \overline{G}_i q_i + T_{d_i} = u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

Aplicando a transformada de Laplace a esta última equação temos :

$$q_i(s) = \frac{1}{\overline{H}_{ii}s^2 + \overline{G}_i} u_i(s) - \frac{1}{\overline{H}_{ii}s^2 + \overline{G}_i} T_{d_i}(s) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Trajetória senoidal

**Suposição 2.4** Como na suposição 2.2, vamos supor que quando a junta  $i$  está convergindo para a trajetória senoidal desejada as outras juntas já estão seguindo com erro zero a sua trajetória. Isto significa que se a trajetória desejada da junta  $j$  ( $j \neq i$ ) é  $q_{d_j} = A_j \sin(\omega_j t)$  então :

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \omega_j A_j \cos(\omega_j t) \leq \omega_j A_j \\ \ddot{q}_j &= -\omega_j^2 A_j \sin(\omega_j t) \leq \omega_j^2 A_j \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo os valores máximos de  $\dot{q}_j$  e  $\ddot{q}_j$  (dados da expressão anterior) na equação (2.4) e considerando a suposição 2.1, obtemos :

$$\begin{aligned} \bar{H}_{ii}\ddot{q}_i + \underbrace{\sum_{j=1}^n \bar{H}_{ij}w_j^2 A_j}_{M_1} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \bar{h}_{iik}w_k A_k + \sum_{j=1}^n \bar{h}_{ijj}w_j A_j\right)}_{M_2} \dot{q}_i + \\ \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{h}_{ijk}w_k A_k w_j A_j}_{M_3} + \bar{G}_i + T_{d_i} = u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (j \neq i, k \neq i) \end{aligned} \quad (2.10)$$

**Suposição 2.5** Como foi feito no caso da regulação, vamos considerar os efeitos dos termos  $M_1$ ,  $M_3$  e  $\bar{G}_i$  dentro do modelo linear. Para isso fazemos estes termos linearmente proporcionais a  $q_i$ .

Aplicando esta última suposição na equação (2.10) pode-se determinar a equação linear correspondente à junta  $i$  da seguinte forma :

$$\bar{H}_{ii}\ddot{q}_i + M_2\dot{q}_i + \underbrace{(M_1 + M_3 + \bar{G}_i)}_{M_4} q_i + T_{d_i} = u_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

Aplicando a transformada de Laplace desta última equação temos :

$$q_i(s) = \frac{1}{\bar{H}_{ii}s^2 + M_2s + M_4} u_i(s) - \frac{1}{\bar{H}_{ii}s^2 + M_2s + M_4} T_{d_i}(s) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

Os modelos (2.8) e (2.12) constituem um sistema de  $n$  equações lineares e desacopladas, as quais serão usados para projetar os controladores. Estes modelos lineares representam de certa forma a dinâmica de cada elo quando os outros elos estão em equilíbrio. Apesar disso, os controladores projetados a partir dos modelos (2.8) e (2.12) permitirão, nos capítulos posteriores, controlar a posição de robôs manipuladores movimentando mais de uma junta ao mesmo tempo. Deve-se destacar que quando várias juntas são movimentadas simultaneamente, na equação correspondente à junta  $i$  aparecem termos associados à velocidade e aceleração das juntas  $j$  ( $j \neq i$ ). Estes termos representam perturbações no modelo linear. Por isso, os controladores a serem projetados devem ter boas características de rejeição de perturbações.

## 2.3 Modelo dinâmico de um robô manipulador com transmissões flexíveis

Na seção anterior foi introduzido o modelo dinâmico de um robô totalmente rígido. Entretanto muitos robôs manipuladores apresentam flexibilidade nas transmissões, a qual deve ser incluída na modelagem. Nesta seção são apresentadas as equações que descrevem a dinâmica de robôs manipuladores com transmissões flexíveis.

Considera-se um robô manipulador com uma base e  $n$  elos rígidos conectados por  $n$  juntas e cada uma delas acionada por um atuador composto de um motor elétrico em série com uma transmissão flexível (ver figura 2.1).

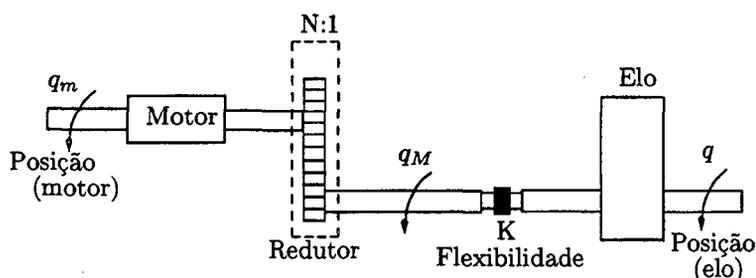


Figura 2.1: Elo, atuador e transmissão flexível

São consideradas as seguintes suposições sobre a estrutura mecânica [dWSB96, Spo87] :

**Suposição 2.6** As deformações são pequenas, assim os efeitos flexíveis são contidos no domínio da linearidade.

**Suposição 2.7** A flexibilidade de cada transmissão é modelada por uma mola (torcional para juntas de revolução e linear para juntas prismáticas).

**Suposição 2.8** O conjunto motor-transmissão é modelado por um rotor, sendo que o rotor  $i$  é montado no elo  $i - 1$  e acoplado diretamente ao elo  $i$ . O redutor está colocado antes do elemento flexível.

**Suposição 2.9** Os rotores são modelados como corpos uniformes tendo seus centros de massa sobre os eixos de rotação. Isto implica que a matriz de inércia e os termos gravitacionais no modelo dinâmico são independentes da posição interna dos motores.

A dinâmica adicional introduz duas novas variáveis de estado para cada junta e assim o modelo dinâmico completo (incluindo as flexibilidades nas transmissões) apresenta 4 estados para cada junta : posição e velocidade do rotor (antes do elemento flexível) e posição e velocidade do elo (depois do elemento flexível) [NT95]. Como graus de liberdade adicionais são introduzidos quando a flexibilidade na transmissão é considerada, cada rotor é modelado como um elo *fictício*. Assim o manipulador consiste de  $n$  elos *reais* e de  $n$  elos *fictícios* [Spo87].

De acordo com a figura 2.1 o conjunto de coordenadas generalizadas  $q_g$  é formada por [dWSB96, Spo87] :

$$q_g^T = [ q^T \quad q_M^T ] \quad (2.13)$$

onde  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) determina a posição do elo  $i$  e  $q_{M_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) é a posição do rotor que aciona o elo  $i$ . Se  $N_i$  é relação de transmissão do redutor  $i$  e  $q_{m_i}$  determina a posição do motor  $i$  então verifica-se :

$$q_{m_i} = N_i q_{M_i} \quad (2.14)$$

A diferença  $q - q_M$  representa a deformação elástica introduzida pela transmissão.

Usando a formulação de Lagrange, o *modelo completo* de um manipulador com transmissões flexíveis é dado pelas  $2n$  equações diferenciais não-lineares acopladas seguintes [dWSB96] :

$$\begin{vmatrix} H_1(q) & H_2(q) \\ H_2^T(q) & H_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{q}_M \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{A1}(q, \dot{q}_M) + C_{B1}(q, \dot{q}) & C_{B2}(q, \dot{q}) \\ C_{B3}(q, \dot{q}) & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{q} \\ \dot{q}_M \end{vmatrix} + \quad (2.15)$$

$$\begin{vmatrix} K & -K \\ -K & K \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q \\ q_M \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G(q) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ u \end{vmatrix}$$

que pode ser rescrita como :

$$H(q)\ddot{q}_g + C(q, \dot{q}_g)\dot{q}_g + K_e q_g + G_1(q) = \tau \quad (2.16)$$

onde  $H_1(q)$  é a matriz ( $n \times n$ ) que contém as propriedades de inércia dos elos rígidos,  $H_2(q)$  é a matriz ( $n \times n$ ) que contém os acoplamentos inerciais entre cada atuador e os outros elos,  $H_3$  é a matriz ( $n \times n$ ) diagonal constante que depende das inércias dos motores e das relações de transmissão,  $K = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\}$  é a matriz de rigidez sendo  $k_i > 0$  a constante elástica da transmissão  $i$ ,  $G(q)$  é o vetor ( $n \times 1$ ) que contém os

torques gravitacionais,  $C(q, \dot{q})\dot{q}_g$  representa os termos de Coriolis e centrífugos e  $u$  é o vetor ( $n \times 1$ ) dos torques externos de controle aplicados nos atuadores. O procedimento detalhado para obter estas equações pode ser encontrado em [dWSB96], [GR98].

### 2.3.1 Modelo simplificado de Spong

Com a finalidade de obter um modelo que seja mais simples e que possa modelar os efeitos dinâmicos dominantes (neste caso a flexibilidade nas transmissões) em [Spo87], [dWSB96], [Rea94] é feita a seguinte suposição.

**Suposição 2.10** A energia cinética do rotor é ocasionada pela rotação do rotor em torno de seu próprio eixo. Isto é, o movimento do rotor é uma rotação pura com respeito ao sistema inercial. Isto acontece, por exemplo, quando as relações de redução da transmissão são elevadas ( $N_i \gg 1$ ), caso onde a velocidade angular do rotor é maior que a velocidade angular do elo.

Com esta suposição pode-se assumir que a matriz  $H_2(q)$  em (2.15) é nula e como os termos  $C_{A1}$ ,  $C_{B2}$  e  $C_{B3}$  em (2.15) dependem diretamente de  $H_2(q)$  [dWSB96] então também são nulos. Assim, as equações de movimento são expressas na forma :

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + K(q - q_M) = 0 \quad (2.17)$$

$$J\ddot{q}_M - K(q - q_M) = u \quad (2.18)$$

onde :

$$J = N^2 J_m, \quad u = N u_m \quad \text{e} \quad q_M = N^{-1} q_m \quad (2.19)$$

e  $H(q)$  é a matriz ( $n \times n$ ) de inércia,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  é a matriz ( $n \times 1$ ) dos torques de Coriolis e centrífugos e  $G(q)$  é o vetor ( $n \times 1$ ) que contém os torques gravitacionais, todos referentes ao conjunto de elos rígidos.  $J$  é a matriz ( $n \times n$ ) diagonal constante cujos elementos são as inércias dos rotores com referência aos eixos de saída das transmissões,  $K$  é a matriz ( $n \times n$ ) diagonal sendo seus elementos as constantes de rigidez e  $u$  é o vetor ( $n \times 1$ ) dos torques externos de controle.  $N$  é a relação de redução introduzida pela transmissão. O subíndice  $m$  é usado para representar os parâmetros na saída do motor antes do redutor (ver figura 2.1).

As equações (2.17) e (2.18) constituem o *modelo simplificado de Spong* e serão chamadas de Modelo com Transmissões Flexíveis (MTF) [GR98]. A equação (2.17) é

conhecida como *subsistema dos elos* ou *subsistema do modelo rígido* ou *dinâmica lenta* e (2.18) como *subsistema dos rotores* ou *dinâmica rápida*.

Como o número de entradas de controle no MTF ( $n$ ) é menor do que o número de graus de liberdade ( $2n$ ), diz-se que o MTF é um sistema *parcialmente acionado*. Isto vai implicar que as tarefas de controle sejam mais complexas que as equivalentes para os robôs rígidos. Em particular a realimentação total de estados precisa do dobro de sensores medindo quantidades antes e depois da deformação elástica [dWSB96].

No caso limite onde não existe deformação elástica ( $K \rightarrow \infty$  e  $q = q_M$ ) é possível recuperar o modelo do robô rígido (2.1) a partir do modelo MTF [Spo87].

Em [Spo87] é indicado que a suposição 2.10 é válida para a maioria dos robôs industriais porque eles são projetados levando em conta essa condição. Por isso, o modelo simplificado representa de uma maneira adequada os efeitos da flexibilidade nas transmissões nos robôs com elos rígidos. Muitos algoritmos de controle foram desenvolvidos baseados neste modelo [Spo87], [NT95], [Qu95], [dWSB96], motivo pelo qual também será considerado nesta dissertação para projetar os controladores de posição.

## 2.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os modelos dinâmicos de robôs rígidos e de robôs com transmissões flexíveis os quais serão usados no projeto de controle. Em particular, sobre o modelo do robô rígido foram feitas uma série de simplificações e suposições até obter um modelo linear que representa parcialmente o movimento de um elo quando os outros estão em equilíbrio. Este modelo linear será de vital importância no projeto de controladores lineares os quais precisam de uma representação linear do processo a ser controlado. Por outro lado, foi também introduzido o modelo simplificado do manipulador com transmissões flexíveis. Este modelo é dividido em dois subsistemas acoplados o que permite aplicar algoritmos de controle em cascata. A maioria dos robôs de uso industrial tem uma dinâmica que pode ser representada por este modelo. Nos capítulos seguintes serão projetados controladores baseados nos modelos obtidos neste capítulo.

## Capítulo 3

# Controlador de Dois Graus de Liberdade

### 3.1 Introdução

Na teoria de controle linear existem duas abordagens para projetar os controladores. Na abordagem “outward” primeiro é escolhida uma configuração determinada do controlador com parâmetros variáveis. Estes parâmetros são modificados até que o sistema em malha fechada possa atingir os requerimentos desejados. Os métodos clássicos do lugar das raízes e do domínio da frequência usam esta abordagem. Na abordagem “inward” é escolhida uma função de transferência para cumprir com as especificações desejadas e depois é estabelecida a configuração e calculado o compensador [Che93].

Neste capítulo será usada a abordagem “inward” para projetar os controladores. Em particular serão utilizados os controladores na estrutura de Dois Graus de Liberdade os quais permitem satisfazer determinados requerimentos de malha e de resposta de forma independente. A escolha dos pólos do sistema em malha fechada é feita minimizando um índice desempenho quadrático.

A finalidade é usar estes controladores para controlar a posição de robôs manipuladores. Por isso o sistema de controle deve apresentar uma série de características que lhe permitam trabalhar com processos com incertezas paramétricas, perturbações, etc.

Primeiro é apresentada a estrutura do controlador com suas principais características. Depois são feitas definições e estabelecidos os requerimentos de malha e

de resposta. O procedimento geral do projeto é apresentado mas este não garante o melhor desempenho do sistema. Assim, o controlador que minimiza o índice de desempenho LQR é introduzido junto com seu procedimento de projeto. Finalmente um sistema afetado por perturbações e cujos pólos em malha aberta têm localização variável no plano complexo dependendo das incertezas paramétricas é usado como exemplo de síntese.

A referência básica de onde foi obtida a informação e a notação deste capítulo é [Wol95]. Informações complementares serão referenciadas quando for necessário.

## 3.2 Problema geral de controle

Seja o *problema geral de controle* o representado na figura 3.1.

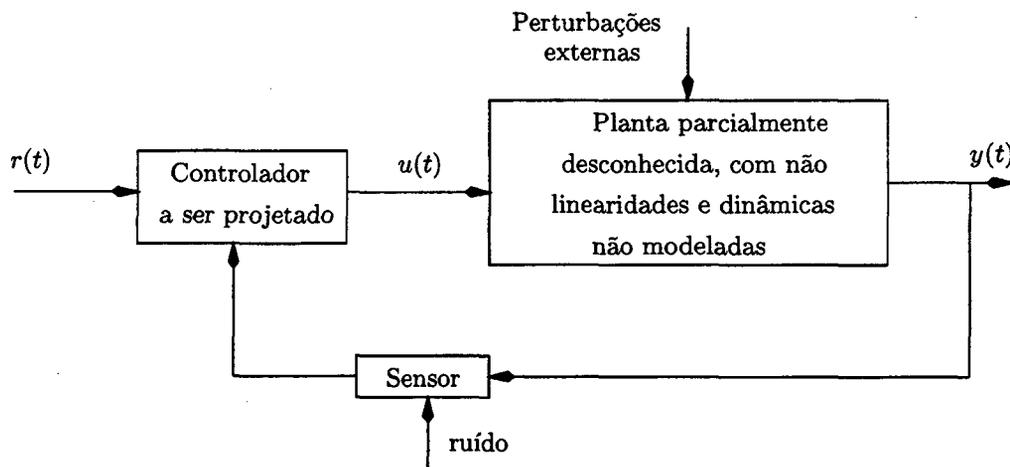


Figura 3.1: Sistema geral de controle

O sistema dinâmico, cuja saída  $y(t)$  será controlada, é conhecido como processo. O desempenho do processo é definido como a capacidade da saída  $y(t)$  do sistema para seguir robustamente a referência externa  $r(t)$  apesar de possíveis mudanças nos parâmetros do processo, dinâmicas não modeladas, presença de perturbações e ruído. O controlador a ser projetado deve garantir um bom desempenho do processo. Para efeitos do projeto representa-se o sistema geral de controle como o sistema nominal em malha fechada mostrado na figura 3.2. Para isso, são feitas as seguintes considerações :

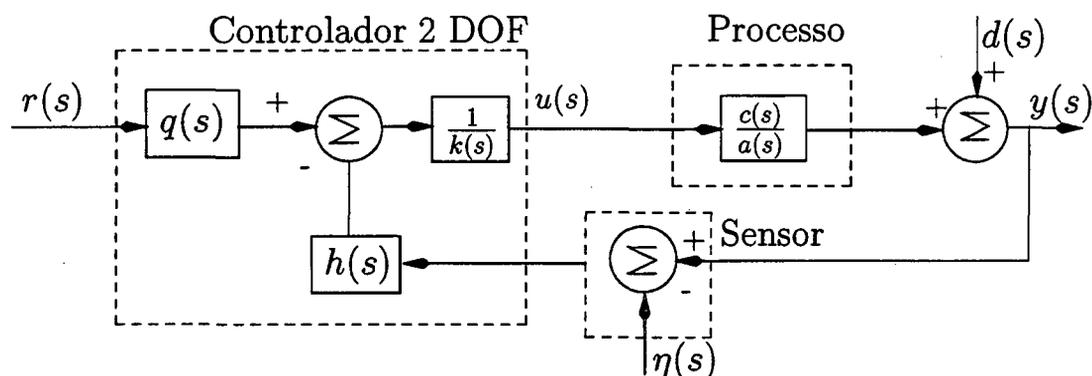


Figura 3.2: Sistema de controle nominal

- o comportamento dinâmico do processo pode ser representado por um sistema linear invariante no tempo (SLIT), de ordem  $n$  o qual é definido pela função de transferência racional e estritamente própria :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c(s)}{a(s)} ; \quad (3.1)$$

- a saída do processo pode ser fisicamente mensurável ;
- a função de transferência (3.1) é conhecida como *processo nominal* com  $a(s)$  um polinômio conhecido de grau  $n$  e  $c(s)$  um polinômio conhecido de ordem estritamente menor que  $n$

$$\text{grau}[c(s)] < n = \text{grau}[a(s)] ; \quad (3.2)$$

- $a(s)$  e  $c(s)$  são coprimos (realização controlável e observável) ;
- qualquer perturbação externa que atua sobre o processo pode ser representada como um sinal  $d(t)$  adicionado à saída do processo ;
- o sensor de medição de saída pode ser afetado por um ruído externo  $\eta(t)$  ;
- o controlador pode ser representado por um SLIT cujo comportamento dinâmico é descrito pela função de transferência :

$$u(s) = \frac{1}{k(s)} [ q(s) \quad - h(s) ] \begin{bmatrix} r(s) \\ y(s) - \eta(s) \end{bmatrix} ; \quad (3.3)$$

- a ordem do compensador é determinada pela ordem do polinômio  $k(s)$  e para evitar problemas de amplificação de ruído de alta frequência e saturação da entrada do processo supõe-se que :

$$\text{grau}[q(s), -h(s)] \leq \text{grau}[k(s)]. \quad (3.4)$$

Nossa finalidade é calcular os polinômios  $q(s)$ ,  $h(s)$  e  $k(s)$  para obter o melhor desempenho do sistema.

A estrutura do controlador apresentado no figura 3.2 é conhecida como estrutura de **Dois Graus de Liberdade (2DOF)**. Ela permite projetar o controlador satisfazendo propriedades de desempenho de malha e de resposta de forma independente. Os controladores de Um Grau de Liberdade (1DOF) como o P, PD, PID, avanço-atraso, etc. não apresentam esta característica (neste caso  $q(s) = h(s)$  e a realimentação é unitária). Outras escolhas, como  $q(s) = k(s)$  ou  $q(s) = 1$ , também resultam numa configuração 1DOF. No decorrer deste trabalho, quando uma estrutura de controle de 1DOF for mencionada estaremos nos referindo ao esquema da figura 3.3 apresentado por [Che93], [Wol95].

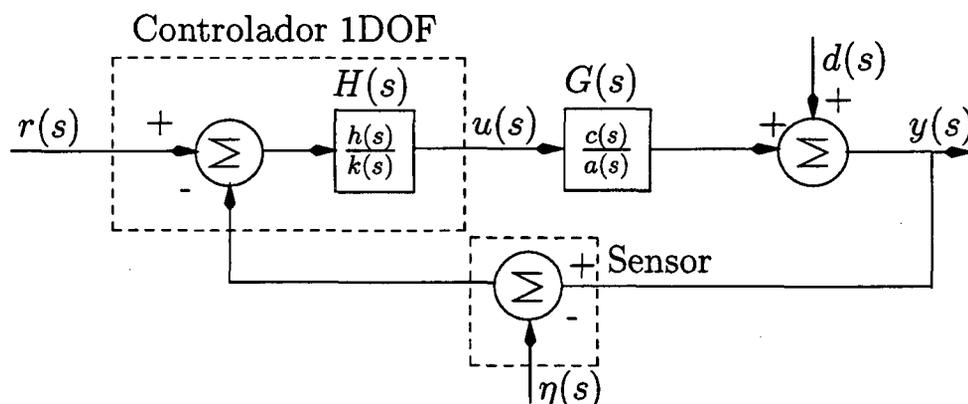


Figura 3.3: Configuração de Um Grau de Liberdade - 1DOF

### 3.3 Definições e propriedades

Os pólos do sistema em malha fechada das figuras 3.2 e 3.3 são dados pelas raízes da equação :

$$\delta(s) = a(s)k(s) + c(s)h(s) \quad (3.5)$$

A principal finalidade do projeto do controlador é garantir estabilidade nominal em malha fechada a qual implica que as raízes do polinômio  $\delta(s)$ , (3.5), estejam localizados no semiplano esquerdo do plano complexo. Uma escolha adequada dos polinômios  $k(s)$  e  $h(s)$  garantem esta condição.

Usando as relações (3.2) e (3.4) temos :

$$\text{grau}[\delta(s)] = \text{grau}[a(s)k(s)] = n + \text{grau}[k(s)] \quad (3.6)$$

É importante notar que as relações (3.2), (3.4) e (3.6) garantem que o sistema em malha fechada da figura 3.2 seja *bem colocado*. Um sistema de controle é *bem colocado* ou *próprio* em malha fechada se a função de transferência de cada possível combinação entrada-saída é própria. Numa função de transferência imprópria o ruído de altas frequências é amplificado pela presença de derivadores puros [Che93].

Das nove funções de transferência que representam o sistema em malha as cinco mais importantes são :

- Função de transferência de resposta de saída

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{c(s)q(s)}{\delta(s)} \quad (3.7)$$

- Função de transferência de sensibilidade

$$S(s) = \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{a(s)k(s)}{\delta(s)} \quad (3.8)$$

- Função de transferência complementar (de sensibilidade)

$$C(s) = \frac{y(s)}{\eta(s)} = \frac{c(s)h(s)}{\delta(s)} \quad (3.9)$$

- Função de transferência de resposta da entrada de controle

$$\frac{u(s)}{r(s)} = \frac{a(s)q(s)}{\delta(s)} \quad (3.10)$$

- Função de transferência de resposta do erro

$$\frac{e(s)}{r(s)} = \frac{a(s)k(s) + c(s)[h(s) - q(s)]}{\delta(s)} \quad (3.11)$$

O ganho de malha  $L(s)$  é definido como o produto das funções de transferência ao redor da malha completa de realimentação (ganho líquido da malha), isto é :

$$L(s) = \frac{c(s)h(s)}{a(s)k(s)} = G(s)H(s) = \frac{\text{zeros de malha aberta}}{\text{pólos de malha aberta}} \quad (3.12)$$

Esta definição é válida para configurações 1DOF e 2DOF. Os zeros de  $1+L(s)$  (denominado “*return difference*”) são iguais às raízes de  $\delta(s)$  e seus pólos são os pólos de malha aberta do sistema :

$$1 + L(s) = \frac{\delta(s)}{a(s)k(s)} = \frac{\text{pólos de malha fechada}}{\text{pólos de malha aberta}} \quad (3.13)$$

### 3.4 Requerimentos de malha

Para obter um bom desempenho de um sistema controlado é preciso atingir uma série de objetivos que estão associados com as características de malha e/ou de resposta do sistema. Nesta seção serão estudadas as principais características de malha e na seção 3.5 as características de resposta. Os requerimentos de malha mais importantes são a estabilidade robusta (manter os pólos em malha fechada no semiplano estável apesar das *incertezas* no modelo do processo nominal), a rejeição da perturbação e a atenuação do ruído. As incertezas do processo podem ser produzidas pelas variações paramétricas no modelo do processo (devido a temperatura, tempo, pressão), não-linearidades (histereses, atrito, etc.) e pelas dinâmicas não modeladas.

#### 3.4.1 Estabilidade robusta ante variações paramétricas

O primeiro passo para obter estabilidade robusta é escolher os polinômios de malha  $h(s)$  e  $k(s)$  do controlador de forma adequada para garantir estabilidade nominal em malha fechada, isto é, os pólos do sistema, determinados pelas raízes da equação característica  $\delta(s)$ , devem estar contidos no semiplano esquerdo do plano complexo.

Para garantir estabilidade robusta, mantendo  $\delta(s)$  estável, os polinômios  $h(s)$  e  $k(s)$  devem ser escolhidos para alocar os pólos nominais de malha fechada o “suficientemente afastados” do eixo imaginário no semiplano complexo estável com a finalidade de mantê-los nesse semiplano apesar das variações na planta. Duas formas tradicionais de medir quão eficiente é a escolha destes polinômios são os conceitos de margem de ganho e

margem de fase.

### Margem de ganho e margem de fase

A margem de ganho e margem de fase são geralmente definidas para sistemas estáveis em malha fechada caracterizados por uma função de ganho de malha  $L(s)$  estável. A margem de ganho ( $GM$ ) é definida como a quantidade pela qual a magnitude de  $L(s)$  pode ser multiplicada antes que o sistema em malha fechada se torne instável. A margem de fase ( $\Phi M$ ) é definida como a quantidade que pode ser adicionada à fase de  $L(s)$  antes que o sistema em malha fechada se torne instável.

A figura 3.4 mostra um diagrama de Nyquist típico para um  $L(s)$  estável onde a estabilidade em malha fechada é garantida se o diagrama polar de  $L(s)$  não envolve o ponto crítico  $(-1,0)$  no plano complexo. Nesta figura são mostrados as margens de ganho  $GM$  e de fase  $\Phi M$ .

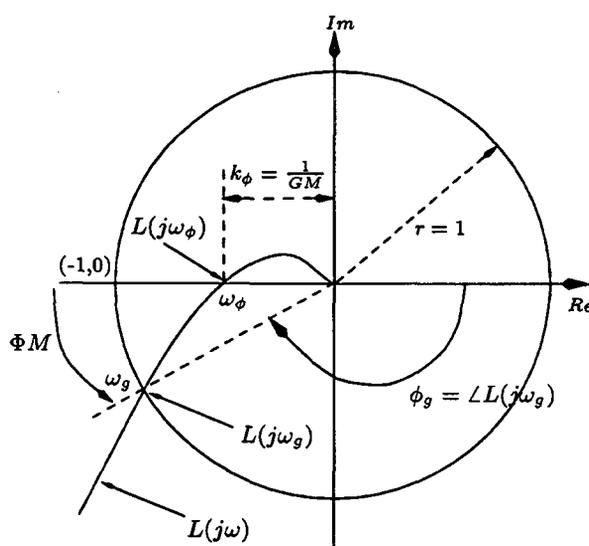


Figura 3.4: Diagrama polar típico para um sistema estável em malha fechada

As margens de fase e de ganho podem ser usadas juntas para determinar as propriedades de estabilidade robusta em malha fechada, relativa às variações paramétricas, de um sistema com  $L(s)$  estável. Elas representam uma medida da “distância” de  $L(j\omega)$  ao ponto crítico  $-1$  nas médias frequências (perto das frequências de corte de ganho  $\omega_g$  e corte de fase  $\omega_\phi$  apresentadas na figura 3.4). Quanto maior a distância, o sistema é mais robusto. Valores nominais aceitáveis são  $GM \geq 2$  e  $\Phi M \geq 30^\circ$  [Wol95], [Che93].

Mas estes critérios não podem ser aplicados a sistemas instáveis em malha aberta ou em sistemas estáveis em malha aberta que possuem mais de uma margem de ganho ou margem de fase [Che93].

### Sensibilidade

A estabilidade robusta ante variações paramétricas pode também ser analisada através do conceito da sensibilidade. Em geral a função de transferência  $G(s)$  é usada para representar a dinâmica de um processo nominal caracterizado por variações internas de parâmetros. Neste caso um  $G(s)$  mais representativo é aquele que depende de um ou mais parâmetros  $\alpha$ , isto é, o modelo pode ser da forma  $G(s, \alpha)$ . Quando o processo  $G(s, \alpha)$  é controlado pelos polinômios  $h(s)$  e  $k(s)$ , como nas figuras 3.2 e 3.3, é importante quantificar o efeito dessa compensação no desempenho do sistema em malha fechada. O conceito de sensibilidade é usado para fazer esta análise.

A função de sensibilidade é definida como :

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{a(s)k(s)}{\delta(s)} \quad (3.14)$$

e quantifica o efeito dos polinômios  $h(s)$  e  $k(s)$  do controlador relativo às variações paramétricas desconhecidas do processo.

Um sistema em malha fechada é relativamente insensível às variações nos parâmetros da planta se tem amplitudes grandes da função “return difference”  $1 + L(s)$  o que implica ter  $|S(j\omega)|$  pequeno. Mas não é possível obter esta condição em todas as frequências porque a grande maioria dos sistemas físicos têm um comportamento do tipo passa baixas ( $|G(j\omega)| \rightarrow 0$  quando  $\omega \rightarrow \infty$ ). Se tentarmos compensar este efeito usando um controlador  $H(s)$  cujos ganhos aumentam com a frequência então o sinal de controle  $u(t)$  poderia saturar-se e qualquer ruído do sensor poderia ser amplificado. Assim,  $H(s)$  geralmente é escolhido como uma função de transferência própria e que satisfaz :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L(j\omega)| = |G(j\omega)H(j\omega)| = 0 \quad (3.15)$$

e como consequência :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S(j\omega)| = 1 \quad (3.16)$$

Em geral é impossível garantir  $|S(j\omega)| \leq 1$  para todo  $\omega > 0$  mas com  $|S(j\omega)| > 1$  em alguma faixa de frequências pode-se obter um desempenho aceitável.

### Margens de estabilidade robusta a partir da função de sensibilidade

Um limite do valor máximo da magnitude da função  $S(j\omega)$  pode ser usado para medir a estabilidade robusta de todos os sistemas estáveis em malha fechada incluindo os casos de sistemas instáveis em malha aberta para os quais a margem de ganho e de fase não são bem definidos.

Pode-se observar que a magnitude da resposta freqüencial da função “return difference”,  $|1 + L(j\omega)| = |1 + G(j\omega)H(j\omega)| = |S(j\omega)|^{-1}$ , representa a distância desde o ganho de malha  $L(j\omega)$  ao ponto crítico  $(-1,0)$  no plano complexo  $L(j\omega) \forall \omega > 0$ . Seja a norma  $\infty$  da função  $S(s)$  definida como a máxima amplitude obtida na resposta em freqüência, isto é :

$$\| S \|_{\infty} = \bar{S} = \max_{\omega} |S(j\omega)| \quad (3.17)$$

Então, a inversa da norma  $\infty$  de  $S(j\omega)$  ( $\bar{S}^{-1}$ ) representa a mínima distância entre  $L(j\omega)$  e o ponto -1.

Limites mínimos das margens de ganho e de fase de um sistema caracterizado por um ganho de malha  $L(s)$  estável podem ser expressos em função de  $\bar{S}$ . Em [Wol95] são apresentadas as seguintes relações :

$$GM \geq \frac{\bar{S}}{\bar{S} - 1} \quad \text{e} \quad \Phi M \geq 2 \sin^{-1} \left( \frac{1}{2\bar{S}} \right) \quad (3.18)$$

Para garantir um projeto nominal estável com  $GM \geq 2$  e  $\Phi M \geq 30^\circ$  é preciso ter :

$$\bar{S} \leq 2 \approx 6dB \quad \text{ou} \quad \bar{S}^{-1} \geq 0.5 \quad (3.19)$$

A condição (3.19) pode ser usada para substituir os requerimentos de  $GM$  e  $\Phi M$  para qualquer tipo de processo. Em particular esta condição garante que  $L(j\omega)$  permaneça a uma determinada distância do ponto crítico -1, isto é, garante estabilidade robusta ante variações paramétricas uma vez que a estabilidade nominal em malha fechada seja atingida [Wol95].

### 3.4.2 Estabilidade robusta ante dinâmicas não modeladas

Nesta seção será considerada um tipo de incerteza determinada pelas dinâmicas não modeladas em altas frequências. Considera-se que o modelo  $G(s)$  seja uma boa aproximação do processo real para baixas e médias frequências. No caso de altas frequências, as dinâmicas não modeladas causam uma diferença entre  $G(j\omega)$  e a resposta frequencial do processo real. A seleção dos polinômios  $h(s)$  e  $k(s)$  devem garantir estabilidade robusta com respeito a estas dinâmicas.

A função de transferência real do processo pertence a um grupo de funções de transferência determinadas por :

$$\tilde{G}(s) = G(s) + e_a(s) = G(s)[1 + \Delta(s)W_c(s)] \quad (3.20)$$

onde a função  $W_c(s)$  (função de ponderação da incerteza) é uma função de transferência própria e estável cuja amplitude da sua resposta em frequência representa um limite superior do erro entre a resposta em frequência do modelo do processo  $G(j\omega)$  e do processo real  $\tilde{G}(j\omega)$ . A informação da fase é representada pelo multiplicador  $\Delta(s)$  que satisfaz a condição  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ . Em geral a magnitude  $W_c(s)$  tem a seguinte característica :

$$|W_c(j\omega)| = \begin{cases} \approx 0 & \text{nas baixas frequências} \\ \gg 1 & \text{nas altas frequências} \end{cases} \quad (3.21)$$

#### O ganho de malha nas altas frequências

A função de transferência do ganho de malha nas altas frequências, para caracterizar as dinâmicas não modeladas, é determinado por :

$$\tilde{L}(j\omega) = \tilde{G}(j\omega)H(j\omega) = \frac{L(j\omega)[1 + \Delta(j\omega)W_c(j\omega)]}{L(j\omega) + \Delta(j\omega)L(j\omega)W_c(j\omega)} \quad (3.22)$$

O diagrama polar deste ganho representa uma *região de ganho de malha* nas altas frequências formada por círculos de raio  $r(\omega) = |L(j\omega)W_c(j\omega)|$  e com centro em  $L(j\omega)$  como é mostrada na figura 3.5.

Segundo o critério de Nyquist qualquer sistema nominal estável em malha fechada

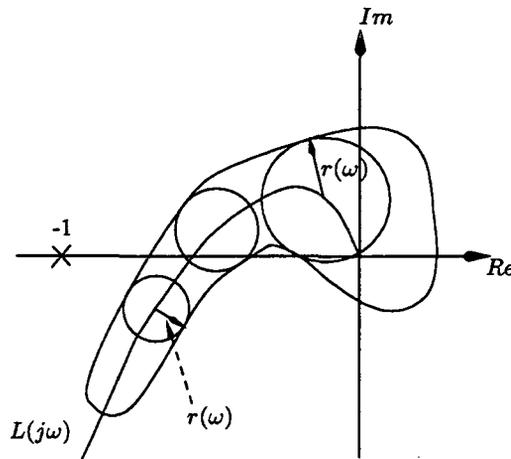


Figura 3.5: Região de ganho de malha em altas frequências

caracterizado pelo ganho de malha  $\tilde{L}(s)$  será estável em forma robusta, com respeito às dinâmicas não modeladas, se a região de ganho não atingir o ponto crítico -1. Como  $|1 + L(j\omega)|$  representa a distância de  $L(j\omega)$  ao ponto -1 uma condição suficiente para garantir estabilidade robusta em malha fechada é :

$$r(\omega) = |L(j\omega)W_c(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| \quad \forall \omega > 0 \quad (3.23)$$

Mas como  $|1 + L(j\omega)| \approx 1$  para valores grandes de  $\omega$  (ver (3.15)), a relação anterior implica que para  $\omega \gg 1$  :

$$|L(j\omega)W_c(j\omega)| = |L(j\omega)||W_c(j\omega)| < 1 \quad (3.24)$$

Da relação anterior pode-se concluir que o ganho de malha nas altas frequências que satisfaz :

$$|L(j\omega)| < |W_c(j\omega)|^{-1} \ll 1 \quad (3.25)$$

garante estabilidade robusta com respeito às dinâmicas não modeladas. Esta condição pode ser obtida com uma redução do ganho de malha  $L(j\omega)$  nas frequências onde  $|W_c(j\omega)| \gg 1$ .

### 3.4.3 Rejeição da perturbação e atenuação do ruído

As funções de transferência de sensibilidade  $S(s)$  e complementar  $C(s)$  representam o efeito da perturbação  $d(s)$  e do ruído  $\eta(s)$  sobre a saída  $y(s)$  respectivamente. Um dos requerimentos de malha é minimizar o efeito destes sinais sobre a saída o que significa minimizar  $S(s)$  e  $C(s)$ . Entretanto  $S(s) + C(s) = 1$  sendo então impossível minimizar as respostas em frequência de ambas nas mesmas bandas de frequência.

As perturbações externas  $d(t)$  são sinais de baixas frequências e o ruído  $\eta(t)$  é sinal de altas frequências. Então a rejeição da perturbação é atingida se  $|S(j\omega)| \approx 0$  em baixas frequências, o que implica  $|C(j\omega)| \approx 1$  e a atenuação do ruído é atingida se  $|C(j\omega)| \approx 0$  em altas frequências, o que implica  $|S(j\omega)| \approx 1$ . A figura 3.6 mostra diagramas típicos de  $S(s)$  e  $C(s)$ .

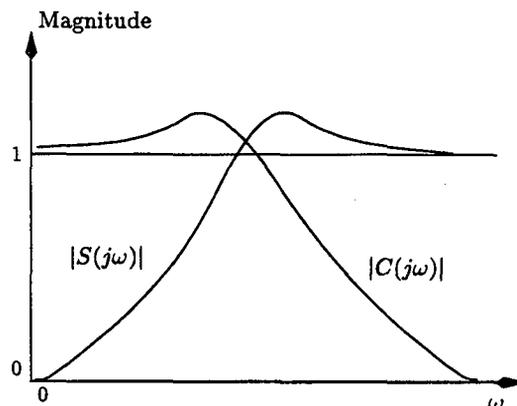


Figura 3.6: Magnitudes típicas de  $S(j\omega)$  e  $C(j\omega)$

#### Rejeição da perturbação

Seguindo o procedimento da estabilidade robusta ante dinâmicas não modeladas, define-se  $W_s(s)$  como a função de ponderação da perturbação (uma função racional que determina o espectro de frequência de  $d(t)$ ). Em particular,  $d(t)$  pode ser qualquer sinal produzido pela saída de um sistema dinâmico definido pela função de transferência  $W_s(s)$  com entrada  $d_i(t)$ , isto é,  $d(s) = W_s(s)d_i(s)$ . Substituindo esta relação na definição da função de transferência da sensibilidade (3.8) obtém-se :

$$\frac{y(s)}{d_i(s)} = S(s)W_s(s) \quad (3.26)$$

Como as perturbações são de baixa frequência, a função de ponderação  $W_s(s)$  pode ser definida tendo a seguinte característica :

$$|W_s(j\omega)| = \begin{cases} \gg 1 & \text{nas baixas frequências} \\ \approx 0 & \text{nas altas frequências} \end{cases} \quad (3.27)$$

Então, pelo visto na seção 3.4.2 e na equação (3.26), a condição de malha para rejeitar a perturbação é dada por :

$$|S(j\omega)W_s(j\omega)| < 1 \quad \forall \omega > 0. \quad (3.28)$$

Como  $|S(j\omega)| = |1 + L(j\omega)|^{-1}$ , a condição anterior pode ser expressa como :

$$|W_s(j\omega)| < |S(j\omega)|^{-1} = |1 + L(j\omega)| \quad \forall \omega > 0. \quad (3.29)$$

Para garantir a rejeição da perturbação, a equação (3.28) implica que a amplitude da função de sensibilidade deve ser pequena nas baixas frequências. Isto pode ser atingido amplificando o ganho de malha nominal  $L(j\omega)$  nas frequências onde  $|W_s(j\omega)| \gg 1$ . Em particular, se  $|1 + L(j\omega)| \approx |L(j\omega)|$  nas baixas frequências então a equação (3.29) implica que o ganho de malha em baixas frequências que satisfaz

$$|L(j\omega)| > |W_s(j\omega)| \gg 1 \quad (3.30)$$

garante rejeição da perturbação.

### Atenuação do ruído

Da definição da função de transferência complementar  $C(s)$  (3.9) nota-se que para atenuar o ruído é preciso ter  $|C(j\omega)| \approx 0$  nas altas frequências que caracterizam o ruído  $\eta(t)$ . Como no caso da rejeição da perturbação, uma forma de garantir este requerimento de malha é definir uma função de ponderação do ruído  $W_\eta(s)$  a qual caracteriza o espectro de frequências de  $\eta(t)$ . Se  $\eta(s) = W_\eta(s)\eta_i(s)$  então :

$$\frac{y(s)}{\eta_i(s)} = C(s)W_\eta(s). \quad (3.31)$$

Uma escolha apropriada de  $W_\eta(s)$  é similar à escolha da função de ponderação da

incerteza  $W_c(s)$  (definida por (3.21)), isto é :

$$|W_\eta(j\omega)| = \begin{cases} \approx 0 & \text{nas baixas frequências} \\ \gg 1 & \text{nas altas frequências} \end{cases} \quad (3.32)$$

Analogamente ao caso das dinâmicas não modeladas o ganho de malha que satisfaz :

$$|L(j\omega)| < |W_\eta(j\omega)|^{-1} \ll 1 \quad (3.33)$$

garante a atenuação do ruído.

### 3.4.4 Desempenho robusto de malha

O principal objetivo do projeto é obter estabilidade nominal em malha fechada. Um desempenho de malha robusto pode ser obtido se o ganho de malha nominal  $L(s)$  é escolhido para garantir as condições de malha em cada uma das três faixas de frequência estudadas nas seções anteriores (condições (3.29), (3.19) e (3.23)). O diagrama de Bode da figura 3.7 apresenta um ganho de malha nominal que satisfaz as condições de rejeição da perturbação (3.30), estabilidade robusta ante dinâmicas não modeladas (3.25) e atenuação do ruído (3.33).

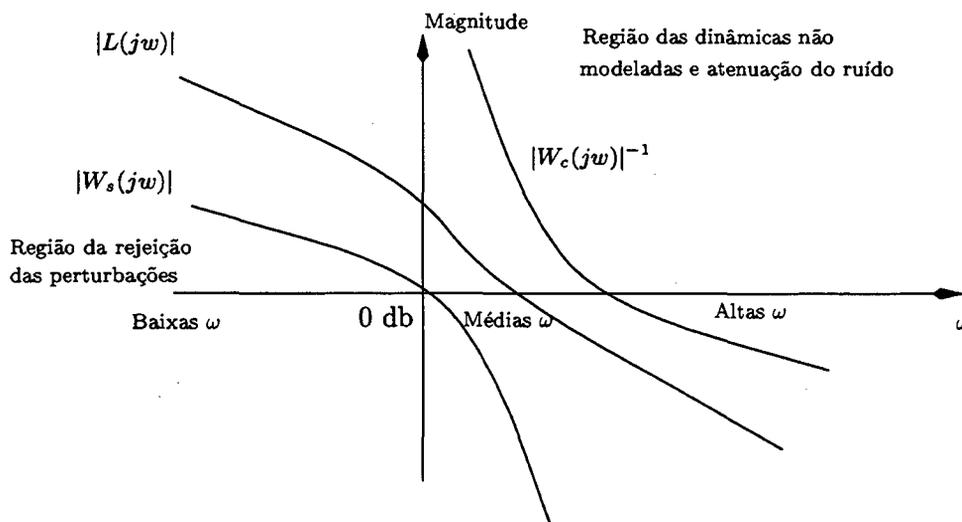


Figura 3.7: Diagrama de Bode de  $|L(j\omega)|$  para um desempenho de malha robusta

Muitas vezes, se a distância entre  $|W_s(j\omega)|$  e  $|W_c(j\omega)|^{-1}$  (ver figura 3.7) é pequena, pode ser impossível atingir todos os objetivos de malha. Neste caso é necessário satisfazer os requerimentos mais importantes e uma série de compromissos no projeto devem

ser considerados. Um desempenho de malha robusto não necessariamente implica um desempenho de resposta aceitável como será visto nas seções seguintes.

### 3.5 Requerimentos de resposta

O desempenho de resposta de um sistema é determinado pela forma como sua saída  $y(t)$  responde aos sinais externos  $r(t)$ ,  $d(t)$  e  $\eta(t)$  (ver figura 3.2). Em forma geral um bom desempenho de resposta é obtido quando a saída  $y(t)$  do processo faz um seguimento do sinal de referência  $r(t)$  tão perto quanto for possível apesar da presença da perturbação  $d(t)$  e do ruído  $\eta(t)$ .

Um objetivo de resposta é a *regulação da saída* na qual o sinal de referência é zero. É definida pela maneira como a saída do sistema estável retorna ao ponto de equilíbrio zero a partir de qualquer estado inicial diferente de zero. A regulação da saída é determinada pelos pólos em malha fechada, isto é, as raízes do polinômio  $\delta(s)$ . Um outro objetivo de resposta é o *seguimento de referência* o qual consiste em rastrear uma referência  $r(t)$  diferente de zero o mais perto possível. A resposta de saída é formada por uma resposta natural e uma resposta forçada. A resposta natural depende das raízes do polinômio  $\delta(s)$  e determina o comportamento transitório do sistema. A resposta forçada depende dos modos do sinal de referência e define a componente estacionária da saída [Wol95], [Che93].

Um requerimento de resposta é fazer convergir a zero a resposta transitória o mais rápido possível. No caso de uma referência tipo degrau é desejado minimizar os tempos de subida e de estabilização e anular o sobressinal. Estes requerimentos também são válidos no caso da regulação. Como os pólos do sistema em malha fechada determinam este comportamento então quanto mais longe do eixo imaginário estes pólos estiverem mais rápida será a resposta transitória e melhor as propriedades de regulação. Entretanto isto pode aumentar a largura de banda do sistema, saturar o sinal de controle e afetar o desempenho de malha. Portanto deve existir um compromisso no projeto para obter um desempenho de malha robusto junto com um desempenho de saída aceitável. Por este motivo é importante ter um procedimento de projeto que permita manter um desempenho de resposta desejado e variar o desempenho de malha até obter um desempenho global aceitável. Este tipo de projeto será estudado nas seções seguintes.

Outro requerimento de resposta é obter erro de regime permanente  $e_{ss}(t)$  robusto e igual a zero apesar da existência de variações paramétricas no processo. O erro de

seguimento do sistema nominal da figura 3.2 é definido pela função de transferência de resposta do erro (3.11) :

$$e(s) = \frac{\overbrace{m_e(s)}^{\{a(s)k(s) + c(s)[h(s) - q(s)]\}} m_r(s)}{\delta(s)p_r(s)} = \underbrace{\frac{\hat{m}_e(s)}{\delta(s)}}_{e_n(s)} + \underbrace{\frac{\hat{m}_r(s)}{p_r(s)}}_{e_f(s)} \quad (3.34)$$

onde o sinal de referência  $r(t)$  pode ser gerado como a resposta ao impulso de um sistema definido pela função de transferência estritamente própria :

$$\frac{m_r(s)}{p_r(s)} = r(s) = \mathcal{L}[r(t)] \quad (3.35)$$

cujos pólos estão sobre o eixo imaginário do plano complexo.

Se  $\delta(s)$  for estável a resposta natural  $e_n(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$  e o erro em estado estacionário é determinado pela resposta forçada  $e_f(t) = e_{ss}(t)$ . Assim, para obter um erro  $e_{ss}(t)$  nulo é necessário que  $\hat{m}_r(s) = 0$  (ver equação (3.34)), o qual é verificado se  $m_e(s)$  contém os modos de  $p_r(s)$ , isto é :

$$m_e(s) = a(s)k(s) + c(s)[h(s) - q(s)] = \tilde{m}_e(s)p_r(s) \quad (3.36)$$

para algum polinômio  $\tilde{m}_e(s)$ .

Quando a equação (3.36) é verificada, os modos do sinal de referência  $r(t)$  são cancelados ou bloqueados pelos chamados *zeros de bloqueio* da função de transferência de resposta do erro, que correspondem aos zeros  $p_r(s)$  de  $m_e(s)$ . Para que a condição (3.36) seja satisfeita e obter um erro nulo em regime permanente apesar das incertezas paramétricas no modelo do processo, deve-se verificar :

$$\begin{aligned} k(s) &= \bar{m}_e(s)p_r(s) \\ h(s) - q(s) &= \hat{h}(s)p_r(s) \end{aligned} \quad (3.37)$$

para algum  $\bar{m}_e(s)$  e  $\hat{h}(s)$ . Esta condição é conhecida como o *princípio do modelo interno* (IMP) [Wol95], [Che93].

## 3.6 Projeto de controle

Em [Wol95], [Che93] é demonstrado que o sistema controlado por um controlador na estrutura 2DOF da figura 3.2 é equivalente a um sistema de realimentação linear de estados junto a um observador de estados sendo que os pólos do observador estão dados pelas raízes do polinômio  $q(s)$ . O *princípio da separação* permite alocar os pólos desejados do sistema e os pólos do observador de forma independente.

Como os pólos do observador são não controláveis [Wol95], não aparecem na função de transferência entrada/saída nominal do sistema em malha fechada. Isto permite ter um desempenho de resposta independente da posição dos pólos do observador (raízes de  $q(s)$ ). Assim, pode-se usar o polinômio  $q(s)$  para variar o desempenho de malha mantendo o desempenho de resposta fixo. O procedimento de projeto que permite satisfazer os requerimentos de malha e de resposta de forma independente é apresentado na seqüência.

### 3.6.1 Procedimento geral

O procedimento geral de alocação arbitrária de pólos é dividido nas seguintes etapas [Wol95] :

1. Seja a função de transferência de resposta de saída desejada

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\alpha c(s)}{\hat{\delta}(s)} \quad (3.38)$$

com  $\alpha$  um escalar arbitrário e  $\hat{\delta}(s)$  um polinômio arbitrário estável e mônico com grau $[\hat{\delta}(s)] = \text{grau}[a(s)] = n$ . As raízes de  $\hat{\delta}(s)$  são os pólos desejados em malha fechada.

2. Sejam o polinômio mônico de ordem  $n - 1$

$$k(s) = s^{n-1} + k_{n-2}s^{n-2} + \dots + k_1s + k_0 \quad (3.39)$$

e o polinômio de ordem  $n - 1$

$$h(s) = h_{n-1}s^{n-1} + h_{n-2}s^{n-2} + \dots + h_1s + h_0 \quad (3.40)$$

Os polinômios  $k(s)$  e  $h(s)$  são determinados resolvendo a equação Diofantina

$$\delta(s) = a(s)k(s) + c(s)h(s) = \hat{\delta}(s)\hat{q}(s) \quad (3.41)$$

onde  $\hat{q}(s)$  é um polinômio arbitrário, estável e mônico com  $\text{grau}[\hat{q}(s)] = n - 1 = \text{grau}[k(s)]$ .

3. Seja

$$q(s) = \alpha\hat{q}(s) \quad (3.42)$$

então usando a definição de função de transferência de resposta de saída (3.7) e as relações (3.41) e (3.42) o sistema é caracterizado pela função de transferência desejada

$$T(s) = \frac{c(s)q(s)}{\delta(s)} = \frac{\alpha c(s)\hat{q}(s)}{\hat{\delta}(s)\hat{q}(s)} = \frac{\alpha c(s)}{\hat{\delta}(s)} \quad (3.43)$$

O cancelamento de pólos e zeros do polinômio  $\hat{q}(s)$  na função de transferência  $T(s)$  corresponde ao cancelamento dos pólos não controláveis do observador. Para cada escolha de  $\hat{q}(s)$ , com  $\alpha$  e  $\hat{\delta}(s)$  fixos e portanto uma função de transferência  $T(s)$  desejada fixa, existem diferentes polinômios  $h(s)$  e  $k(s)$  (ver (3.41)). Fazendo uma avaliação do desempenho de malha para cada par  $\{h(s), k(s)\}$  pode-se verificar se um desempenho robusto de malha foi atingido.

Se esta técnica é usada com um compensador 1DOF, onde  $q(s) = h(s)$ , o sistema vai apresentar, em geral, um desempenho de resposta transitória não adequado (sobressinal da saída, sinal de controle inicial e tempo de estabilização muito grandes) devido ao não cancelamento dos zeros de  $h(s)$ . Com uma configuração 1DOF as vantagens deste procedimento são perdidas.

Este projeto depende do cancelamento exato das raízes do polinômio estável  $\hat{q}(s)$ . Variações paramétricas da planta vão mudar as  $2n-1$  raízes de  $\delta(s) = a(s)k(s) + c(s)h(s)$  sendo que o polinômio  $q(s) = \alpha\hat{q}(s)$  não vai dividir  $\delta(s)$  exatamente. Mas o efeito deste cancelamento inexato pode ser desprezado se a diferença entre  $n-1$  raízes de  $\delta(s)$  e as  $n-1$  raízes de  $\hat{q}(s)$  é pequena ou são pólos rápidos. Por isso é importante não ter as raízes de  $\hat{q}(s)$  muito perto do eixo imaginário ou com componente imaginária grande porque o ruído ou as perturbações podem tornar a saída do sistema oscilatória com um tempo de estabilização grande [Che93].

Deve-se destacar que este procedimento não garante  $e_{ss}(t)$  nulo robusto porque as condições (3.37) do princípio do modelo interno não são necessariamente cumpridas. Também não garante o melhor desempenho de resposta do sistema porque os pólos desejados do sistema em malha fechada foram escolhidos em forma arbitrária. Existem uma série de critérios e índices que podem ser usados para escolher os pólos desejados e os pólos do observador [Che93]. Na continuação será usado o índice de desempenho quadrático para fazer estas escolhas.

### 3.6.2 Controlador ótimo LQR

Existem uma série de fatores que poderiam ser considerados para alocar os pólos em malha fechada de um sistema. Por exemplo características transitórias tais como sobressinal máximo, tempo de estabilização reduzido, etc. podem ser obtidos com a escolha apropriada dos parâmetros do controlador. Mas muitas vezes, para alcançar estes objetivos, o desempenho de malha pode ser afetado ou pode causar a saturação do sinal de controle. Não obstante, certas técnicas têm sido desenvolvidas para alocar os pólos de um sistema, muitas das quais estão baseadas na minimização de algum índice de desempenho (ITAE, ISE, ITSE, LQR, etc.). Neste trabalho o índice a ser minimizado é o índice de desempenho quadrático (LQR)<sup>1</sup> expresso na forma [Che93] :

$$J = \int_0^{\infty} [\rho(y(t) - r(t))^2 + u^2(t)] dt \quad (3.44)$$

Este índice permite ponderar a minimização do erro de seguimento  $e(t)$  e do sinal de controle  $u(t)$ . Variando o parâmetro  $\rho$  pode-se atingir a condição  $u(t) \leq |M|$  assim como obter um comportamento transitório e em regime permanente aceitável.

Em [Wol95], [AM89] e [Che93] são apresentadas diversas formas de implementar um controlador ótimo LQR com estimador de estados na estrutura 2DOF.

#### Fatorização Espectral

Dado o sistema definido pela função de transferência racional, mínima e estritamente própria :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c(s)}{a(s)} = \frac{c_m s^m + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.45)$$

<sup>1</sup>Do termo em inglês *Linear Quadratic Regulator*

com  $n > m$ . Como os polinômios  $a(s)$  e  $c(s)$  têm coeficientes reais então :

$$\begin{aligned} a(j\omega)a(-j\omega) &= |a(j\omega)|^2 \geq 0 \\ c(j\omega)c(-j\omega) &= |c(j\omega)|^2 \geq 0 \quad \forall \omega \text{ real} \end{aligned} \quad (3.46)$$

e para qualquer fator real de ponderação  $\rho > 0$  o polinômio

$$\Delta(s) = a(s)a(-s) + \rho c(s)c(-s) \quad (3.47)$$

é um polinômio cujos coeficientes dos termos com potência ímpar são zero. Então se  $\lambda_j$  é uma raiz de  $\Delta(s)$ ,  $-\lambda_j$  é também uma raiz de  $\Delta(s)$ .

Das considerações anteriores verifica-se que :

$$\Delta(j\omega) = |a(j\omega)|^2 + \rho |c(j\omega)|^2 > 0 \quad \forall \omega \text{ real} \quad (3.48)$$

e não tem raízes no eixo imaginário. Verifica-se também que  $\Delta(s)$  pode ser expresso pela fatorização espectral :

$$\Delta(s) = [\Delta(s)]^+ [\Delta(s)]^- \quad (3.49)$$

onde as  $n$  raízes de  $[\Delta(s)]^+$  pertencem ao semiplano complexo esquerdo e as  $n$  raízes de  $[\Delta(s)]^-$  pertencem ao semiplano direito. Conseqüentemente todas as raízes de  $\Delta(s)$  são simétricas com respeito ao eixo imaginário.

### Controlador ótimo

Em [AM89] e [Wol95] é demonstrado que os pólos ótimos LQR em malha fechada  $\delta^{F^*}(s)$  do sistema definido pela função de transferência (3.45) são dados pelas  $n$  raízes estáveis da fatorização espectral (3.49), isto é :

$$\delta^{F^*}(s) = [\Delta(s)]^+ \quad (3.50)$$

Igualmente uma outra fatorização espectral pode ser usada para determinar os pólos ótimos LQR do observador. Estes pólos são dados pelas  $n$  raízes estáveis de  $\delta^{H^*}(s)$  definida pela fatorização espectral :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(s) &= a(s)a(-s) + \sigma c(s)c(-s) \\ &= [\bar{\Delta}(s)]^+ [\bar{\Delta}(s)]^- = \delta^{H^*}(s) \delta^{H^*}(-s) \end{aligned} \quad (3.51)$$

sendo  $\sigma$  um outro fator de ponderação. Se é utilizado um observador de ordem  $n-1$  então são usadas  $n-1$  raízes de  $\delta^{H^*}(s)$ .

### 3.6.3 Procedimento de projeto LQR com erro nulo e robusto

Os pólos ótimos definidos na seção anterior podem ser usados no projeto do controlador 2DOF da seção 3.6.1. Os  $n$  pólos desejados em malha fechada  $\hat{\delta}(s)$  (3.38) podem ser escolhidos como as  $n$  raízes ótimas do polinômio  $\delta^{F^*}(s) = [\Delta(s)]^+$  (3.50). As  $n-1$  raízes do polinômio  $\hat{q}(s)$  (3.41) podem ser obtidas usando  $n-1$  raízes ótimas de  $\delta^{H^*}(s) = [\bar{\Delta}(s)]^+$  (3.51). O desempenho de resposta é determinado pelo fator de ponderação  $\rho$  que define  $\delta^{F^*}(s)$ , enquanto o fator de ponderação  $\sigma$ , que define  $\hat{q}(s)$ , determina o desempenho de malha. Variando estes fatores é possível obter diferentes desempenhos de resposta e de malha de forma independente e de acordo com as especificações do problema.

Como foi visto, o procedimento da seção 3.6.1 não garante erro nulo robusto em regime permanente. Em [Wol95] é apresentado um procedimento de projeto no qual é possível obter uma função de transferência em malha fechada com pólos ótimos LQR e um erro nulo robusto em regime permanente.

Seja o sinal de referência  $r(t)$  do sistema definido pela transformada de Laplace

$$r(s) = \mathcal{L}[r(t)] = \frac{m_r(s)}{p_r(s)} \quad (3.52)$$

com todos os  $r = \text{grau}[p_r(s)]$  pólos de  $p_r(s)$  sobre o eixo  $iw$ .

O projeto robusto é dado pelas seguintes etapas [Wol95] :

1. Primeiro é definido  $\bar{a}(s)$  como o mínimo comum denominador mônico de  $a(s)$  e  $p_r(s)$  tal que

$$\bar{a}(s) = a(s)\bar{p}_r(s) = \bar{a}(s)p_r(s) \quad (3.53)$$

com as ordens

$$\bar{n} = \text{grau}[\bar{a}(s)] \geq n \quad \text{e} \quad \bar{r} = \text{grau}[\bar{p}_r(s)] \leq r \quad (3.54)$$

as menores possíveis.

2. Assumindo que  $c(s)$  e  $\bar{a}(s)$  são coprimos então é resolvida a fatorização espectral

estendida

$$\bar{a}(s)\bar{a}(-s) + \rho c(s)c(-s) = \bar{\delta}^{F^*}(s)\bar{\delta}^{F^*}(-s) \quad (3.55)$$

Variando o fator de ponderação  $\rho$  são obtidos os  $\bar{n} = n + \bar{r}$  pólos desejados de malha fechada ( $\bar{\delta}^{F^*}(s)$ ). Uma outra forma de definir  $\bar{\delta}^{F^*}(s)$  é fazendo

$$\bar{\delta}^{F^*}(s) = \delta^{F^*}(s)\delta_r(s) \quad (3.56)$$

onde  $\delta^{F^*}(s)$  é determinado pela fatorização espectral (3.50) e  $\delta_r(s)$  é qualquer polinômio estável de ordem  $\bar{r}$ .

3. Se o polinômio mônico  $\hat{q}(s)$  é definido pelas  $n - 1$  raízes de  $\delta^{H^*}(s)$ , determinada por (3.51), então a equação

$$\underbrace{a(s)\bar{p}_r(s)}_{\bar{a}(s)}\bar{k}(s) + c(s)h(s) = \bar{\delta}^{F^*}(s)\hat{q}(s) \quad (3.57)$$

tem uma solução única dada pelo polinômio mônico  $\bar{k}(s)$  de ordem  $n-1$  e o polinômio  $h(s)$  de ordem  $\bar{n}-1$ .

4. Uma vez determinado o polinômio  $h(s)$  a equação Diofantina

$$\hat{q}(s)\bar{q}(s) + p_r(s)\hat{h}(s) = h(s) \quad (3.58)$$

pode ser resolvida para os não únicos polinômios  $\bar{q}(s)$  e  $\hat{h}(s)$  de ordens  $\bar{r}$  e  $\bar{n} - r - 1$ , respectivamente.

5. Os polinômios

$$h(s), \quad k(s) = \bar{p}_r(s)\bar{k}(s) \quad \text{e} \quad q(s) = \hat{q}(s)\bar{q}(s) \quad (3.59)$$

representam um controlador 2DOF caracterizado por um  $e_{ss}(t) = 0$  robusto. Pode-se verificar que os polinômios  $a(s)k(s)$  e  $h(s) - q(s)$  contém os modos do sinal de referência satisfazendo a condição do princípio do modelo interno

$$\begin{aligned} h(s) - q(s) &= \hat{q}(s)\bar{q}(s) + p_r(s)\hat{h}(s) - \hat{q}(s)\bar{q}(s) = p_r(s)\hat{h}(s) \\ a(s)k(s) &= a(s)\bar{p}_r(s)\bar{k}(s) = \bar{a}(s)\bar{k}(s)p_r(s) \end{aligned} \quad (3.60)$$

6. O sistema em malha fechada é determinado pela função de transferência de res-

posta de saída

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{c(s)q(s)}{a(s)k(s) + c(s)h(s)} = \frac{c(s)\bar{q}(s)\hat{q}(s)}{\delta^{F^*}(s)\hat{q}(s)} = \frac{c(s)\bar{q}(s)}{\delta^{F^*}(s)} \quad (3.61)$$

### 3.7 Exemplo de projeto e aplicação

Nesta seção é apresentado um exemplo de síntese de controladores com estrutura 2DOF levando em conta as considerações feitas nas seções anteriores e utilizando o procedimento de projeto da seção anterior. Será utilizado um sistema com variações paramétricas e com perturbações na entrada e serão projetados controladores proporcional derivativo (PD) e proporcional integral derivativo (PID) com a finalidade de comparar seus desempenhos com o desempenho do controlador 2DOF. O projeto dos controladores é feito usando o modelo nominal que representa o sistema. As simulações do sistema controlado são feitas com o modelo real do sistema.

Muitos sistemas são modelados por equações não-lineares e acopladas. Um exemplo é o modelo que representa a dinâmica de um robô rígido (2.1). Uma técnica usada para controlar este tipo de sistemas consiste em cancelar os termos não-lineares e desacoplar cada equação. No caso particular do controle de posição de robôs rígidos esta técnica é conhecida como controle do torque computado [LAD93], [dWSB96] onde as não-linearidades, como os termos de Coriolis e forças centrífugas, assim como as forças gravitacionais são compensadas incluindo-as no torque de controle. No caso ideal, no qual o modelo do robô rígido é conhecido exatamente, se o controle linearizante :

$$u = H(q)u_o + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (3.62)$$

for aplicado ao robô (2.1)

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + T_d = u \quad (3.63)$$

e sabendo que a matriz  $H(q)$  é positiva definida então o sistema resultante é formado por  $n$  sistemas lineares desacoplados da forma :

$$\ddot{q}_i = u_{o_i} + T_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.64)$$

onde  $u_{o_i}$  é um sinal de controle a ser projetado e  $T_i$  é a  $i$ -ésima linha do vetor  $-H(q)^{-1}T_d$ .

Aplicando a transformada de Laplace do sistema linearizado obtém-se :

$$q_i(s) = \frac{1}{s^2} u_{o_i}(s) + \frac{1}{s^2} T_i(s) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.65)$$

Este resultado é válido no caso ideal onde não existem incertezas paramétricas. Num caso real onde existem erros de modelagem esta linearização nem sempre é válida. É por isso importante que o sinal de controle  $u_{o_i}$  apresente certas características de robustez que lhe permitam controlar o sistema real.

Assim, para o caso de exemplo de síntese de controladores, o sistema a ser utilizado para projetar os controladores será o sistema nominal do duplo integrador :

$$y(s) = \frac{1}{s^2} u(s) + \underbrace{\frac{1}{s^2} T_d(s)}_{d(s)} \quad (3.66)$$

similar ao sistema linearizado do robô da equação (3.65). Para fazer as simulações e testar as características de robustez do controlador 2DOF com pólos ótimos vamos supor que o sistema a ser controlado é um sistema de segunda ordem da forma :

$$y(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} u(s) + \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} T_d(s) \quad (3.67)$$

onde os pólos do sistema em malha aberta (determinados pelos coeficientes  $a_1$  e  $a_2$ ) têm localização variável no plano complexo.

### 3.7.1 Projeto do controlador

O sistema a ser controlado vai se deslocar desde a posição inicial à posição final seguindo uma trajetória polinomial. O objetivo principal de controle é anular o erro nas posições inicial e final (regulação). Os critérios usados para projetar os controladores são :

- estabilidade nominal em malha fechada ;
- estabilidade robusta ante variações paramétricas ( $\bar{S} \leq 2$ ) ;
- rejeição de perturbações externas  $T_d(s)$  tipo degrau ;
- erro nulo na posição inicial e final ;

- valor máximo do sinal de controle = 4.

A síntese do controlador, seguindo o procedimento para obter erro nulo e robusto da seção (3.6.3), precisa do numerador e denominador do modelo do sistema. Neste caso o modelo usado para projetar o controlador é o modelo nominal (3.66) o qual apresenta  $c(s) = 1$  e  $a(s) = s^2$  ( $n = 2$ ). Como a finalidade de controle é a regulação, então o sinal de referência considerado no projeto é um sinal tipo degrau. Numa aplicação real, o modelo (3.67) não apresenta necessariamente um duplo integrador. Então, para satisfazer as condições de erro nulo robusto em regime permanente vamos considerar que  $a(s)$  e  $p_r(s)$  não têm modos comuns. Os fatores de ponderação usados foram  $\rho = 10^{11}$  e  $\sigma = 10^4$ . Os polinômios dos controlador 2DOF obtido (ver figura 3.2) são apresentados na tabela 3.1.

$\begin{aligned} h(s) &= 0,01024667E6s^2 + 0,38186974E6s + 2,23606797E6 \\ q(s) &= 0,01024567E6s^2 + 0,38867559E6s + 2,23606797E6 \\ k(s) &= s^2 + 143,32948s \end{aligned}$
--

Tabela 3.1: Polinômios do controlador 2DOF

O sistema nominal controlado tem um valor máximo da função de sensibilidade  $\bar{S}=1,7382$  com o qual é garantida uma boa margem de estabilidade.

Este controlador, projetado usando o modelo nominal (3.66), será usado para controlar o processo (3.67).

Para comparar o desempenho do controlador na estrutura 2DOF foram projetados controladores PD e PID com ganhos  $K_p = K_i = w_{PD}^2$  e  $K_d = 2w_{PD}$  com  $w_{PD} = 30$  para controlar o mesmo processo (3.67). Estes ganhos foram escolhidos para que o sistema nominal apresente um comportamento super amortecido e para que o esforço máximo de controle dos controladores 2DOF, PD e PID sejam similares e possam ser comparados os erros de posição para avaliar seus desempenhos. Com estes ganhos, o sistema nominal controlado pelos controladores PD e PID apresenta um valor máximo da função de sensibilidade ( $\bar{S}$ ) menor que dois garantindo uma boa margem de estabilidade.

Como o tipo da perturbação a ser aplicada na entrada de controle é conhecida ( $T_d(s)$  tipo degrau) então é possível determinar a função de ponderação da perturbação  $W_s(s)$  (3.26). Do modelo que define o processo nominal (3.66) e sabendo que a perturbação  $T_d(s)$  é do tipo degrau com amplitude 2 tem-se :

$$d(s) = \frac{1}{s^2} T_d(s) = \frac{2}{s^3} \quad (3.68)$$

Sabe-se que  $d(s) = W_s(s)d_i(s)$ . Considerando que  $d_i(s) = 1$  (impulso unitário) então  $W_s(s)$  é definido por :

$$W_s(s) = \frac{2}{s^3} \quad (3.69)$$

Com esta função de ponderação é possível determinar, se para o caso nominal, um desempenho robusto de malha é obtido com os ganhos dos controladores projetados.

A figura 3.8 apresenta a magnitude da função nominal de ponderação da perturbação  $W_s(j\omega)$  e os ganhos de malha do sistema nominal controlado pelos controladores 2DOF e PD.

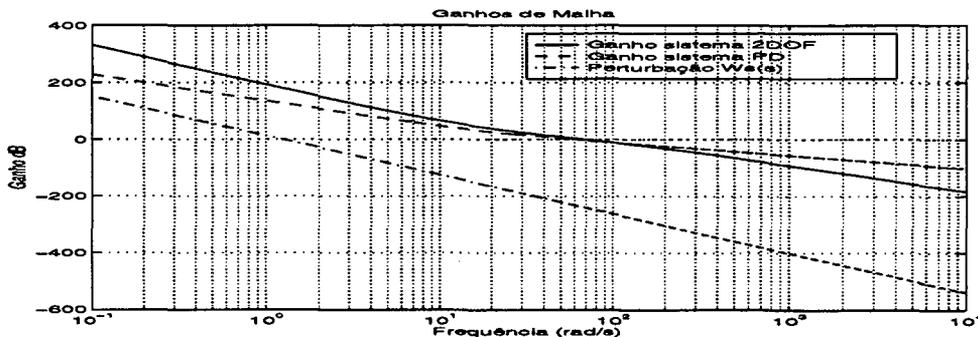


Figura 3.8: Ganho de malha do sistema nominal controlado por PD e 2DOF

O ganho de malha do sistema nominal controlado pelo PID é similar ao ganho do sistema controlado pelo PD. Comparado com os ganhos do PD e PID, o ganho de malha do sistema nominal controlado pelo controlador 2DOF tem valores maiores nas baixas frequências e menores nas altas frequências. Nas baixas frequências é cumprida a condição (3.30) ( $|L(j\omega)| > |W_s(j\omega)|$ ) pelos três controladores com a diferença que o ganho do controlador 2DOF está mais afastado do ganho da função  $W_s(j\omega)$ . Isto indica que este sistema tem uma melhor rejeição da perturbação que o PD e PID. Este fato será comprovado nas simulações. Vamos assumir que os ganhos nas altas frequências são apropriados para garantir um bom desempenho nessa faixa frequencial.

### 3.7.2 Resultados das simulações

As seguintes considerações foram feitas na simulação :

- do instante  $t = 0$  s até  $t = 1$  s o sistema está na posição inicial nula  $y_o = 0$  ;

- do instante  $t = 1$  s até  $t = 3$  s o sistema deve seguir uma referência polinomial (de ordem 9) até a posição final  $y_f = 1$  ;
- deve ser feita a regulação na posição final a partir do instante  $t = 3$  s ;
- no instante  $t = 5$  s é aplicada na entrada de controle uma perturbação tipo degrau com amplitude 2 (50% do controle máximo permitido) ;
- os pólos complexos conjugados do processo (3.67) em malha aberta considerados nesta simulação são :  $\sin(0.5t)(\cos(3t) \pm j \sin(3t))$ . A figura 3.9 mostra a posição destes pólos durante a simulação.

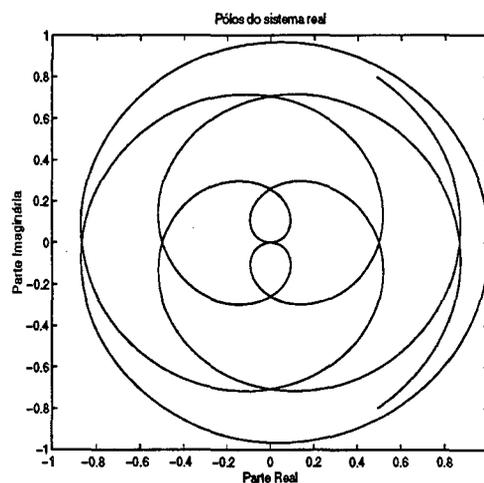


Figura 3.9: Pólos do sistema real em malha aberta durante a simulação

Nas figuras 3.10, 3.11 e 3.12 são apresentados o erro de posição e o esforço de controle do sistema (3.67) controlado pelos controladores PD, PID e 2DOF, respectivamente.

Nota-se que os três controladores apresentam um esforço de controle máximo e mínimo semelhante. O controlador PD não garante erro nulo na posição final nem rejeita as perturbações (o erro aumenta quando a perturbação é aplicada). O controlador PID tem um tempo de estabilização grande e demora em rejeitar a perturbação. Devido ao fato das variações paramétricas serem muito rápidas, o controlador PID não garante erro nulo em regime permanente apesar de satisfazer o princípio do modelo interno. O controlador 2DOF tem um desempenho melhor porque garante erro nulo na posição final e rejeita a perturbação rapidamente. Pode-se concluir que o controlador 2DOF apresenta um comportamento mais robusto que os outros controladores apesar de ter sido projetado para controlar um sistema nominal e estar controlando um sistema diferente ao nominal.

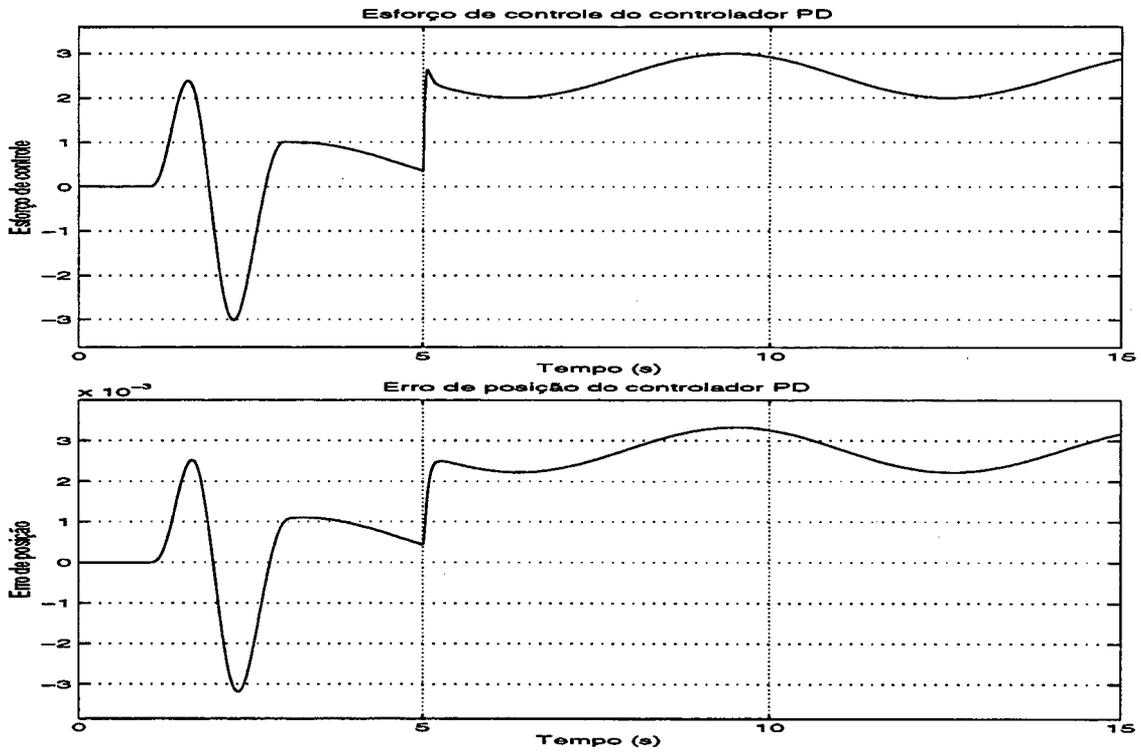


Figura 3.10: Desempenho do controlador PD

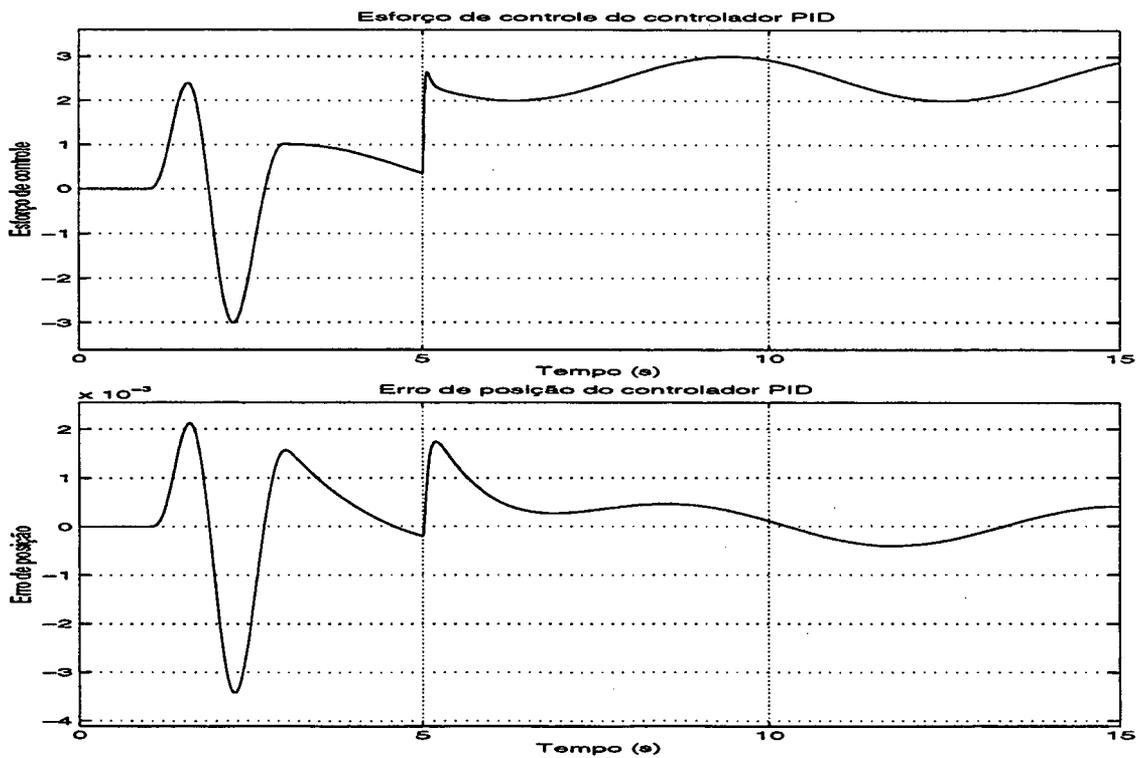


Figura 3.11: Desempenho do controlador PID

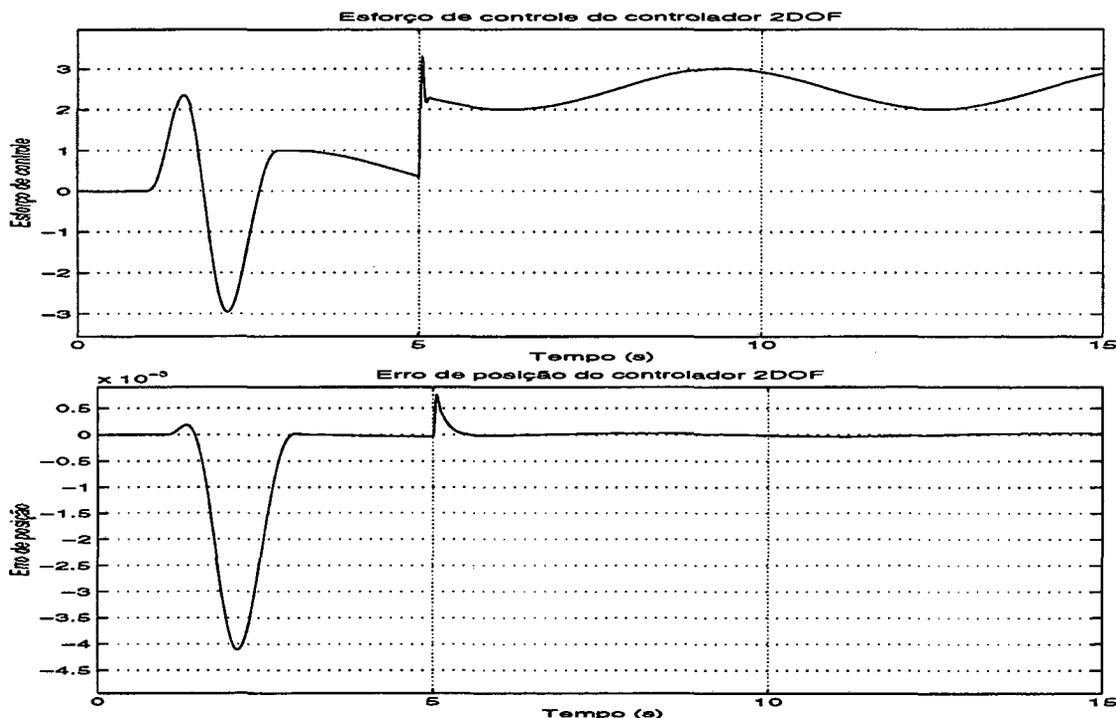


Figura 3.12: Desempenho do controlador 2DOF

### 3.8 Conclusões

Nesta seção foi apresentado o controlador com estrutura de Dois Graus de Liberdade. Foram estabelecidos os principais objetivos de malha que devem ser considerados no projeto de controle: rejeição da perturbação, atenuação do ruído, estabilidade robusta ante variações paramétricas e dinâmicas não modeladas. Estes objetivos podem ser obtidos através de um ganho de malha adequado. Foram definidos também os principais requerimentos de resposta. Um requerimento importante é o erro nulo robusto em estado estacionário o qual é garantido através do princípio do modelo interno. Um procedimento de projeto que aloca os pólos do sistema em malha fechada em forma ótima, minimizando o índice de desempenho quadrático LQR, e que garante erro nulo robusto foi apresentado. Finalmente foi testada a robustez do controlador 2DOF ótimo com uma aplicação sobre um sistema cujos pólos em malha aberta têm localização variável no plano complexo. O desempenho deste controlador foi muito melhor que o desempenho de controladores PD e PID. Estes resultados indicam que o controlador 2DOF com alocação ótima de pólos pode ser usado para controlar sistemas com variações paramétricas e perturbações e cujo modelo nominal seja diferente ao processo a ser controlado. Nas seções seguintes controladores 2DOF serão projetados para controlar robôs manipuladores.

# Capítulo 4

## Controle de Posição de Robôs Rígidos

### 4.1 Introdução

A finalidade deste capítulo é usar controladores na estrutura de Dois Graus de Liberdade (2DOF) e os modelos lineares das seções 2.2.1 e 2.2.2 para controlar a posição, no espaço das juntas, do robô SCARA de 4 graus de liberdade (4DOF) do Laboratório de Robótica da Universidade Federal de Santa Catarina. Antes de projetar os controladores para o robô 4DOF são feitas uma série de simulações para o caso de um robô planar de duas juntas o qual, apesar de ter uma estrutura simples, apresenta na sua dinâmica termos não-lineares fortemente acoplados. Pode-se considerar que este robô é um caso especial do robô SCARA 4DOF quando a última junta de revolução e a de translação não são movimentadas. Depois, para controlar o robô de 4 juntas são projetados controladores 2DOF, calculados seus equivalentes digitais e implementados no robô. Também são projetados e implementados controladores PD e PID. Na avaliação do desempenho dos controladores, enfatizaremos principalmente a característica do erro de posição [QD91].

O procedimento para a obtenção dos controladores 2DOF baseia-se na determinação dos modelos lineares de cada junta e na utilização da técnica descrita na seção 3.6.3. Através de simulações é determinado se a sintonia utilizada é a mais adequada.

Um aspecto importante deste capítulo é a implementação prática de controladores lineares no robô SCARA 4DOF de características industriais. Esta implemen-

tação representa uma das primeiras feitas neste robô e permite validar os controladores simulados e comparar os desempenhos obtidos na simulação e na aplicação prática. Para realizar esta implementação foi necessário estudar a linguagem de programação XOberon assim como a interface de programação do usuário.

## 4.2 Estrutura geral de controle

Para controlar cada coordenada generalizada do robô manipulador é utilizado um controlador linear com estrutura de Dois Graus de Liberdade (2DOF) apresentado no capítulo 3. Assim, para um robô de  $n$  graus de liberdade são utilizados  $n$  controladores lineares 2DOF. O controlador correspondente à junta  $i$  recebe o sinal de referência desta junta e realimenta a posição atual da mesma junta. Para projetar este controlador é usado o modelo linear correspondente à junta  $i$  proposto na seção 2.2. A estrutura de controle para a junta  $i$  é apresentada na figura 4.1.

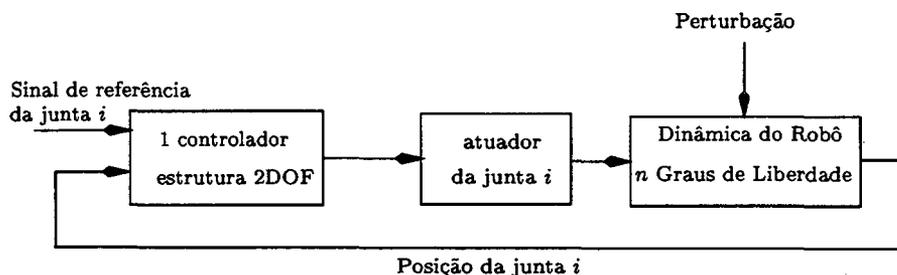


Figura 4.1: Estrutura geral de controle

## 4.3 Controle de um robô planar de duas juntas : simulações

### 4.3.1 Modelo linear

Seja o manipulador planar de duas juntas apresentado na figura 4.2, onde  $l_1$  e  $l_2$  representam os comprimentos dos elos,  $m_1$  e  $m_2$  suas massas,  $l_{c1}$  e  $l_{c2}$  as distâncias do centro de gravidade,  $J_1$  e  $J_2$  as inércias e  $m_L$  e  $J_L$  são a massa e a inércia da carga.

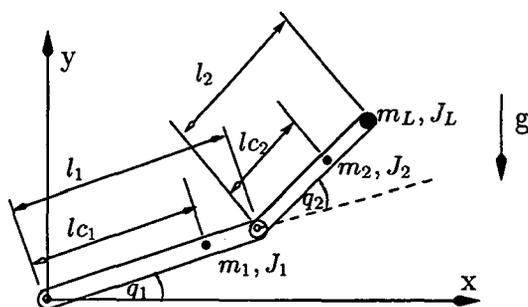


Figura 4.2: Robô planar de duas juntas

Considerando as variáveis de estado  $q = [q_1 \ q_2]^T$  (ângulos de revolução dos elos) a dinâmica deste manipulador é dada pelas seguintes equações ([QD96], [AS86], [KW91]) :

$$\begin{aligned} H_{11}(q)\ddot{q}_1 + H_{12}(q)\ddot{q}_2 + c_1(q, \dot{q}) + G_1 + T_{d1} &= u_1 \\ H_{12}(q)\ddot{q}_1 + H_{22}(q)\ddot{q}_2 + c_2(q, \dot{q}) + G_2 + T_{d2} &= u_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde :

$$\begin{aligned} H_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + m_L (l_1^2 + l_2^2) + 2m_L l_1 l_2 \cos(q_2) + \\ &\quad J_1 + J_2 + J_L \\ H_{12}(q) &= m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + m_L l_2^2 + J_2 + J_L \\ H_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_L l_2^2 + J_2 + J_L \\ c_1(q, \dot{q}) &= -\alpha (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \sin(q_2) \\ c_2(q, \dot{q}) &= \alpha \dot{q}_1^2 \sin(q_2) \\ G_1(q) &= g m_1 l_{c1} \cos(q_1) + g m_2 (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)) + g m_L (l_1 \cos(q_1) + \\ &\quad l_2 \cos(q_1 + q_2)) \\ G_2(q) &= g (m_2 l_{c2} + m_L l_2) \cos(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo  $\alpha$  uma constante determinada por :

$$\alpha = m_2 l_1 l_{c2} + m_L l_1 l_2 \quad (4.3)$$

e os termos  $u_1$ ,  $u_2$  são os torques aplicados para controlar a posição das juntas;  $T_{d1}$ ,  $T_{d2}$  são as perturbações.

Como este manipulador satisfaz a suposição 2.1 podemos obter o modelo linear de cada junta. Primeiro são calculados os valores máximos dos termos  $H_{ij}$ ,  $G_i$  e  $h_{ijk}$  (estes últimos contidos em  $c_i(q, \dot{q})$  na equação (4.1)) considerando que o valor máximo

do  $\cos(\cdot)$  e do  $\sin(\cdot)$  é 1. Assim, obtém-se :

$$\begin{aligned}
 H_{11}(q) &\leq m_1 l_{c_1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c_2}^2 + 2l_1 l_{c_2}) + m_L(l_1^2 + l_2^2) + 2m_L l_1 l_2 + J_1 + J_2 + J_L = \overline{H}_{11} \\
 H_{12}(q) &\leq m_2(l_{c_2}^2 + l_1 l_{c_2}) + m_L l_2^2 + J_2 + J_L = \overline{H}_{12} \\
 H_{22}(q) &= m_2 l_{c_2}^2 + m_L l_2^2 + J_2 + J_L = \overline{H}_{22} \\
 c_1(q, \dot{q}) &\leq \alpha(2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) = \overline{c}_1(q, \dot{q}) \\
 c_2(q, \dot{q}) &\leq \alpha \dot{q}_1^2 = \overline{c}_2(q, \dot{q}) \\
 G_1(q) &\leq g m_1 l_{c_1} + g m_2(l_1 + l_{c_2}) + g m_L(l_1 + l_2) = \overline{G}_1 \\
 G_2(q) &\leq g(m_2 l_{c_2} + m_L l_2) = \overline{G}_2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Uma vez determinados estes valores máximos, o passo seguinte é calcular as funções de transferência dos modelos lineares. São considerados dois tipos de valores para os parâmetros  $m_i, l_i, l_{c_i}$  e  $J_i$  do robô: os valores nominais e os valores reais. Para calcular os modelos lineares de cada junta e fazer a síntese dos controladores são usados os valores nominais desses parâmetros. Para simular a dinâmica do robô são considerados os valores reais dos parâmetros. Como geralmente acontece numa aplicação prática, é considerado que os valores nominais e reais dos parâmetros da dinâmica são todos diferentes (esta diferença é provocada por erros de medição ou estimação dos parâmetros e permite testar as características de robustez do controlador). A tabela 4.1 apresenta os valores reais e nominais dos parâmetros da dinâmica do robô [ZP94].

Descrição	Unidade	Valores reais		Valores nominais	
		Elo 1	Elo2	Elo 1	Elo2
massas ( $m_i$ )	<i>Kg</i>	0,5	1,5	0,4	1,3
comprimentos ( $l_i$ )	<i>m</i>	1,0	0,8	1,08	0,91
distância ao centro de massa ( $l_{c_i}$ )	<i>m</i>	0,5	0,4	0,45	0,43
momento de inércia ( $J_i$ )	<i>Kgm<sup>2</sup></i>	5,0	5,0	4,5	5,5

Tabela 4.1: Valores reais e nominais dos parâmetros do robô planar

Para efeitos de simulação é estudado o caso de regulação da posição das juntas deste manipulador. Para avaliar a robustez dos controladores 2DOF, estes serão projetados considerando que não existe carga  $m_L$  no efetuador final, isto é,  $m_L = 0$  e  $J_L = 0$ . Usando estes dois valores conjuntamente com os valores nominais da tabela 4.1 as funções de transferência (2.8) das juntas 1 e 2 são determinadas por (4.5) e (4.6), respectivamente (os termos  $\overline{H}_{ii}$  e  $\overline{G}_i$  são definidos em (4.4)).

$$q_1(s) = \frac{1}{13,0451s^2 + 21,0014} u_1(s) - \frac{1}{13,0451s^2 + 21,0014} T_{d_1}(s) \tag{4.5}$$

$$q_2(s) = \frac{1}{5,7404s^2 + 5,4782} u_2(s) - \frac{1}{5,7404s^2 + 5,4782} T_{d_2}(s) \quad (4.6)$$

### 4.3.2 Projeto dos controladores

Com estes modelos lineares e considerando uma referência tipo degrau (regulação das juntas) foram projetados os dois controladores 2DOF usando o procedimento da seção 3.6.3. Foram testados diferentes valores para os parâmetros de ponderação  $\rho$  e  $\sigma$  usados para alocar os pólos ótimos de cada junta. Os melhores resultados foram obtidos com os valores apresentados na tabela 4.2.

Elo	$\rho$	$\sigma$
1	$10^{11}$	$10^4$
2	$10^{11}$	$10^4$

Tabela 4.2: Fatores de ponderação

No capítulo anterior foi definido que o fator de ponderação  $\rho$  determina se é minimizada a saída do sistema  $q_i(t)$  ou o sinal de controle  $u_i(t)$ . Valores grandes de  $\rho$  impedem sobressinais da saída, minimizando o erro, mas podem provocar a saturação do controle. Valores menores de  $\rho$  implicam a minimização do sinal de controle. Uma escolha adequada dos fatores de ponderação garante um bom desempenho dinâmico. Neste caso os fatores de ponderação foram escolhidos para minimizar o erro.

Os polinômios dos controladores obtidos são apresentados na tabela 4.3.

<b>Elo 1</b>	$h_1 = 0,25805644E5s^2 + 3,48875559E5s + 4,43630936E5$ $q_1 = 0,25804644E5s^2 + 3,52428694E5s + 4,43630936E5$ $k_1 = s^2 + 52,9512s$
<b>Elo 2</b>	$h_2 = 0,20785271E5s^2 + 3,58425733E5s + 6,97019561E5$ $q_2 = 0,20784271E5s^2 + 3,62039820E5s + 6,97019561E5$ $k_2 = s^2 + 67,1206s$

Tabela 4.3: Polinômios dos controladores 2DOF

Os sistemas lineares (4.5) e (4.6) controlados por estes controladores apresentam como valor máximo da função de sensibilidade  $\bar{S}_1 = 1.7104$  e  $\bar{S}_2 = 1.7204$  respectivamente, garantindo uma boa margem de estabilidade.

Para comparar o desempenho dos controladores 2DOF foram projetados controladores PD e PID, com os quais também é feito um controle independente usando um controlador para cada junta [LAD93]. Os ganhos dos controladores foram:  $PD(s) =$

$K_{p_i} + K_{d_i}s = 2000 + 200s$  e  $PID(s) = K_{p_i} + K_{d_i}s + K_{i_i}/s = 2000 + 200s + 1000/s$  para  $i = 1, 2$ . Estes ganhos foram calculados para que o esforço máximo de controle seja similar ao obtido no projeto do controlador 2DOF.

É considerado que a perturbação  $T_{d_i}$  é do tipo degrau com amplitude máxima de 5. Como foi feito no exemplo de síntese do capítulo 3 é possível encontrar as funções de ponderação da perturbação para determinar se o ganho de malha do sistema satisfaz a condição de malha para rejeitar a perturbação. Estas funções são definidas por :

$$W_{s_1}(s) = \frac{5}{13,0451s^3 + 21,0014s} \quad \text{e} \quad W_{s_2}(s) = \frac{5}{5,7404s^3 + 5,4782s} \quad (4.7)$$

A figura 4.3 apresenta a magnitude da função da perturbação  $W_{s_1}$  e os ganhos de malha do sistema linear (4.5), correspondente à junta 1, controlado pelos controladores 2DOF e PD.

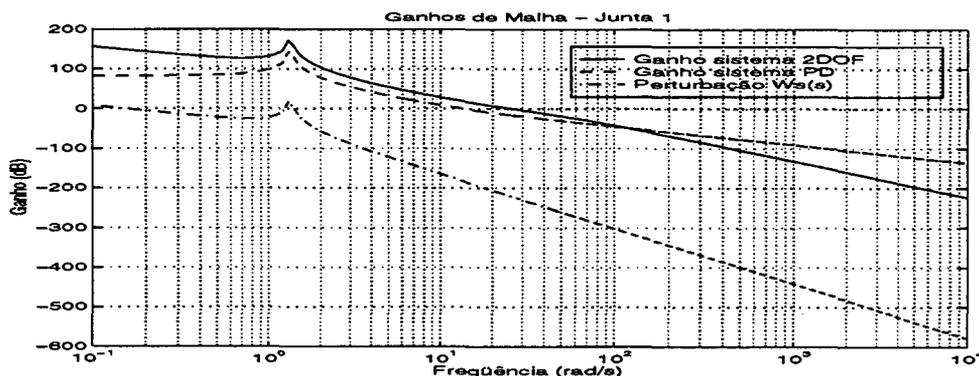


Figura 4.3: Ganho de malha do sistema linear da junta 1 controlado por PD e 2DOF

O ganho de malha do mesmo sistema controlado pelo PID é similar ao ganho do sistema controlado pelo PD. Comparado com os ganhos de malha do PD e PID, o ganho de malha do sistema controlado pelo controlador 2DOF está mais afastado da função de ponderação  $W_{s_1}$  o que implica que a rejeição da perturbação será melhor. Nas altas frequências o ganho de malha do controlador 2DOF é menor tendo uma melhor atenuação do ruído e melhor desempenho ante dinâmicas não modeladas. Resultados semelhantes são obtidos para o sistema linear (4.6) da junta 2.

### 4.3.3 Resultados das simulações

A dinâmica do robô foi simulada considerando as equações (4.1) e (4.2) e os valores reais dos parâmetros da tabela 4.1 (os controladores foram projetados considerando

os valores nominais destes parâmetros). As seguintes considerações foram feitas na simulação :

- as juntas do robô devem seguir nos dois primeiros segundos uma referência polinomial (função linear sendo o início e o final da trajetória uma função parabólica, [Cra86]) até a posição final  $q_{1d} = 0.5$  rad e  $q_{2d} = 1$  rad ;
- deve ser feita a regulação na posição final a partir do instante  $t = 2$  s ;
- uma carga ( $m_L = 0.6$  Kg,  $J_L = 3$  Kgm<sup>2</sup>) é acoplada ao elo 2 no instante  $t = 4$  s ;
- uma perturbação  $T_{di}$ , do tipo degrau de 5 Nm é aplicada a cada sinal de controle  $u_i$  no instante  $t = 6$  s ;
- condições iniciais de posição e velocidade nulas.

Nas figuras 4.5, 4.4 e 4.6 são apresentados o erro de posição e o esforço de controle do robô planar controlado pelos controladores PID, PD e 2DOF, respectivamente.

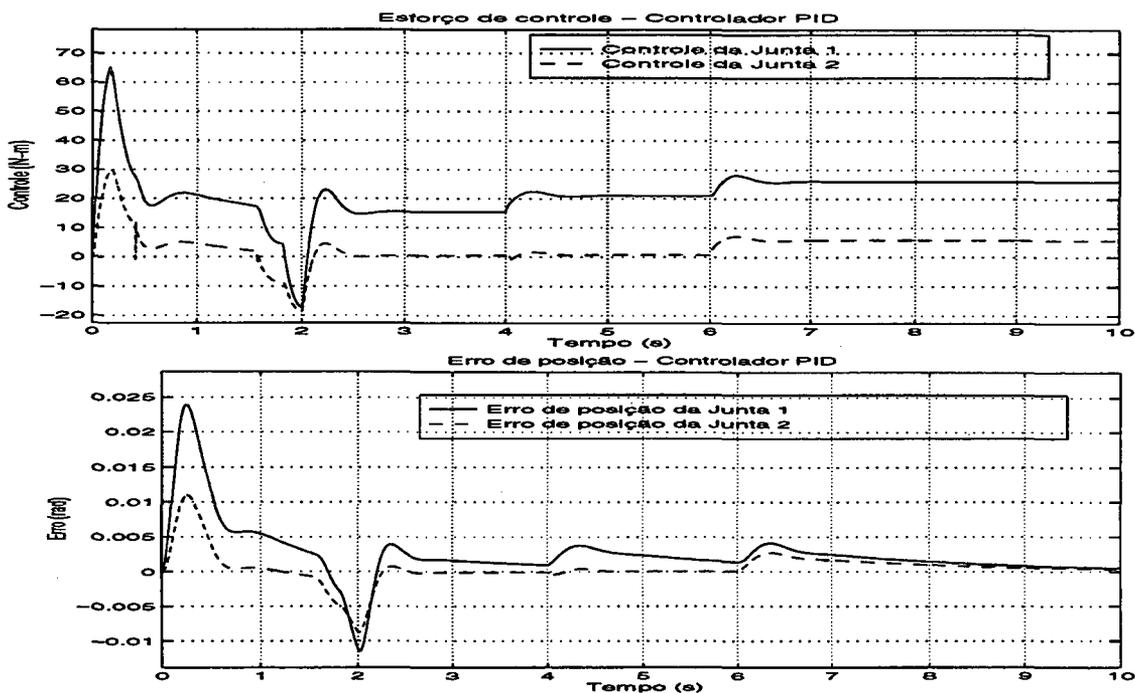


Figura 4.4: Desempenho do controlador PID

Nota-se que o controlador PID anula o erro de posição mas seu tempo de estabilização é grande. O controlador PD não garante erro nulo e quando são aplicadas a perturbação e a carga o erro aumenta. O controlador 2DOF garante erro nulo na

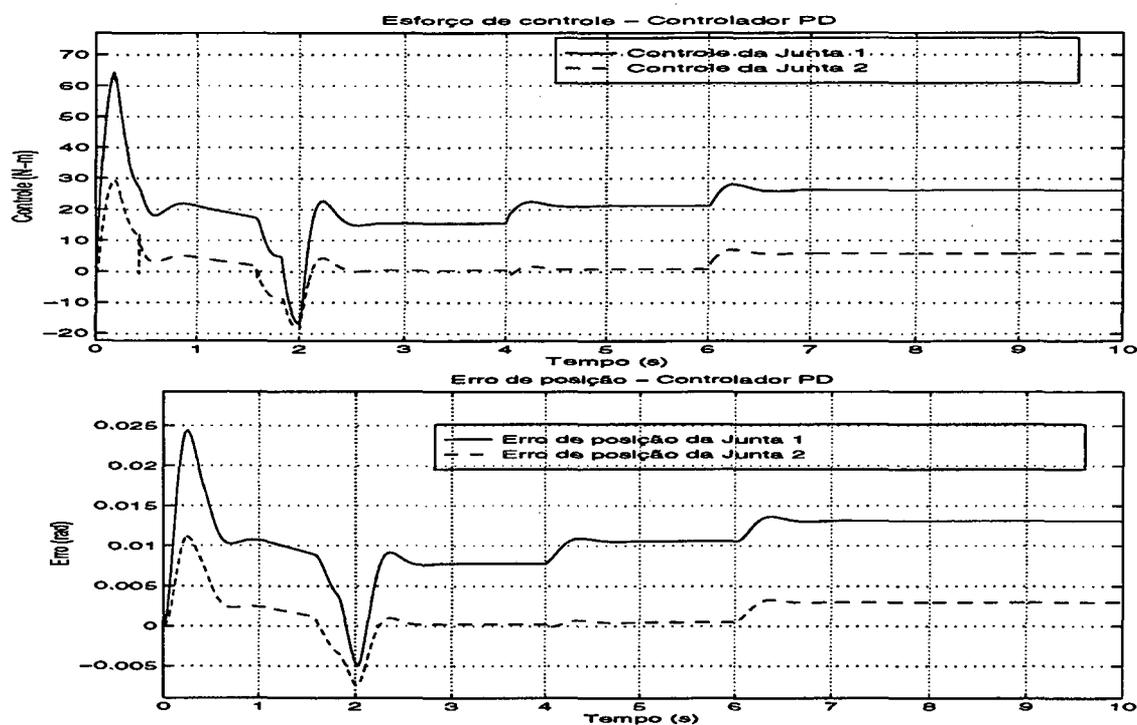


Figura 4.5: Desempenho do controlador PD

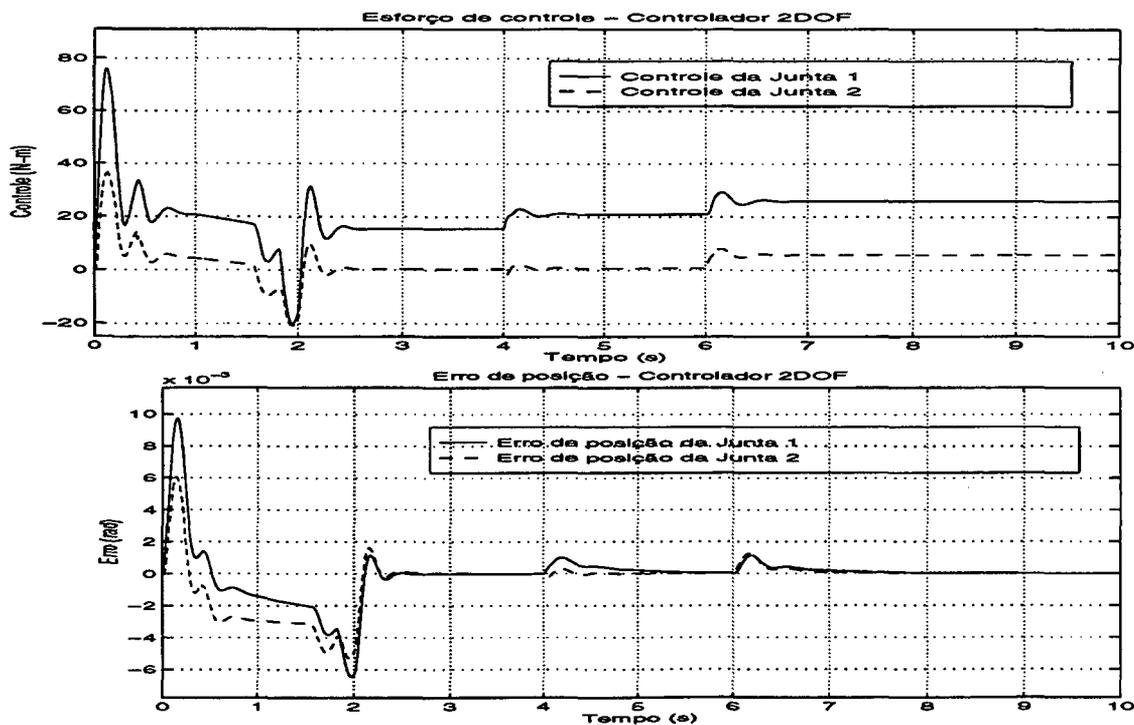


Figura 4.6: Desempenho do controlador 2DOF

posição final de cada junta. Também rejeita a perturbação e anula o efeito da carga aplicada no efetuador final apesar de ter sido projetado considerando-se uma carga nula e com valores nominais dos parâmetros diferentes dos valores reais. Considerando que o objetivo é anular o erro de posição de uma forma rápida pode-se concluir que o melhor desempenho corresponde ao controlador 2DOF.

**Observação 4.1** Estes mesmos controladores foram simulados considerando a referência polinomial (que desloca o robô da posição inicial à final) mais rápida. O comportamento dos controladores na transição e no regime permanente foi similar ao apresentado nos resultados anteriores. Nenhum deles garante erro nulo na transição entre a posição inicial e a final. Quanto maior a velocidade, o erro na transição é maior devido a que os efeitos de acoplamento e não-linearidades são maiores. Em regime permanente o controlador 2DOF garante erro nulo robusto rejeitando rapidamente as perturbações. Estes resultados não são apresentados porque a diferença entre o erro na trajetória polinomial e o erro no regime permanente é grande e não pode ser visualizada a forma como os controladores reagem ante às perturbações e à variação de carga no efetuador final.

Na seção seguinte estes controladores serão validados através de uma implementação prática para controlar o robô SCARA de 4 juntas.

#### **4.4 Controle de um robô SCARA de 4 juntas : resultados experimentais**

Os resultados das simulações da seção anterior mostram que a utilização de controladores na estrutura 2DOF para o controle de posição de robôs manipuladores rígidos apresenta um bom desempenho garantindo erro nulo em regime permanente. Com a finalidade de validar o desempenho destes controladores será feito o controle de posição do robô SCARA de 4 juntas do Laboratório de Robótica da Universidade Federal de Santa Catarina. Este robô apresenta características industriais e tem uma arquitetura aberta que possibilita a implementação de diferentes algoritmos de controle. A implementação prática desta seção representa uma das primeiras implementações feitas neste robô SCARA. No apêndice A é apresentada uma descrição geral do robô junto com a modelagem cinemática e dinâmica e os valores nominais de seus parâmetros.

De forma análoga ao que foi feito na seção anterior, primeiro são definidos os modelos lineares, depois são projetados os controladores e são feitas as simulações. Posteriormente, os controladores projetados são digitalizados e implementados para controlar o robô.

#### 4.4.1 Modelo linear

O modelo dinâmico do robô SCARA de 4 juntas é apresentado no apêndice A nas equações (A.2) e (A.3). Pode-se verificar que este manipulador também satisfaz a suposição 2.1 pelo que é possível obter o modelo linear de cada junta. Tomando os valores máximos dos termos  $H_{ij}$  e  $h_{ijk}$  (estes últimos contidos em  $c_i(q, \dot{q})$  em (A.3)) obtém-se :

$$\begin{aligned} H_{11}(q) &\leq aux_1 + 2aux_2 = \bar{H}_{11} \\ H_{12}(q) &\leq aux_3 + aux_2 = \bar{H}_{12} \\ c_1(q, \dot{q}) &\leq 2aux_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + aux_2\dot{q}_2^2 = \bar{c}_1 \\ c_2(q, \dot{q}) &\leq aux_2\dot{q}_1^2 = \bar{c}_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Deve-se notar que vários termos são constantes ou nulos e, portanto, iguais a seus valores máximos. Por exemplo  $\bar{G}_3 = G_3$ ,  $\bar{H}_{22} = H_{22}$ , etc.

Primeiro serão projetados controladores para regular a posição das juntas. Para isso, é determinado o modelo linear (2.8) de cada junta para o caso da regulação da posição. A tabela 4.4 apresenta o numerador e denominador da função de transferência do modelo linear de cada junta segundo os valores nominais dos parâmetros da seção A.4 (considerou-se que não existe carga no efetuador final, isto é  $m_L = 0$ ,  $J_L = 0$ ).

Elo	numerador $c_i(s)$	denominador $a_i(s)$
1	1	$4,2359 s^2$
2	1	$0,8411 s^2$
3	1	$3,5s^2 + 34.3$
4	1	$0,1s^2$

Tabela 4.4: Numerador e denominador dos modelos lineares

#### 4.4.2 Projeto dos controladores

Para projetar os controladores 2DOF foram usados os modelos anteriores e o procedimento da seção 3.6.3. Os fatores de ponderação  $\rho$  e  $\sigma$  para cada junta são apresentados

na tabela 4.5. Como no caso anterior, a escolha adequada dos fatores de ponderação garante um bom comportamento dinâmico, minimizando o erro de posição.

Elo	$\rho$	$\sigma$
1	$10^{11}$	$10^4$
2	$10^{11}$	$10^4$
3	$10^{13}$	$10^4$
4	$10^{11}$	$10^4$

Tabela 4.5: Fatores de ponderação

Na tabela 4.6 são apresentados os polinômios correspondentes às juntas 1 e 2.

<b>Elo 1</b>	$h_1 = 0,01624584E6s^2 + 0,36783268E6s + 1,08645915E6$ $q_1 = 0,01624484E6s^2 + 0,37203993E6s + 1,08645915E6$ $k_1 = s^2 + 87,6492s$
<b>Elo 2</b>	$h_2 = 0,00969911E6s^2 + 0,38378991E6s + 2,43809342E6$ $q_2 = 0,00969811E6s^2 + 0,39099953E6s + 2,43809342E6$ $k_2 = s^2 + 152,0566s$

Tabela 4.6: Polinômios dos controladores 2DOF

Os sistemas lineares da tabela 4.4 controlados por estes controladores apresentam um valor máximo da função de sensibilidade menor que 2. Se a perturbação é do tipo degrau, com amplitude 5, então é possível encontrar a função de ponderação  $W_s(s)$  para cada junta tal como foi feito para o robô planar de duas juntas. A figura 4.7 apresenta a função  $W_s(s)$  e o ganho de malha do sistema linear da junta 1 controlado pelo controlador 2DOF. Como o ganho de malha  $L_1(s)$  nas baixas frequências é maior que a magnitude de  $W_{S_1}(s)$  então o sistema minimiza o efeito da perturbação. Resultados semelhantes são obtidos para as outras juntas.

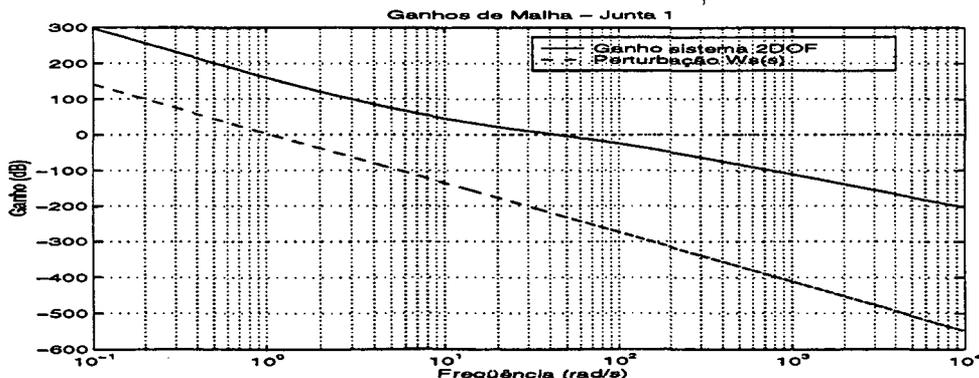


Figura 4.7: Ganho de malha do sistema linear da junta 1 controlado pelo 2DOF

### 4.4.3 Resultados das simulações

A dinâmica do robô foi simulada segundo as equações (A.2) e (A.3) do apêndice A com os valores nominais da seção A.4. Foram feitas as considerações seguintes :

- do instante  $t = 0$  s até  $t = 2$  s, o sistema deve seguir uma referência polinomial (função linear sendo o início e o final da trajetória uma função parabólica, [Cra86]) até a posição final  $q_{1d} = 0,5$  rad ,  $q_{2d} = 1,0$  rad,  $q_{3d} = 0,1$  m e  $q_{4d} = 0,4$  rad ;
- deve ser feita a regulação na posição final a partir do instante  $t = 2$  s ;
- uma carga ( $m_L=1$  Kg,  $J_L=0,1$  Kgm<sup>2</sup>) é acoplada ao elo 4 no instante  $t = 4$  s ;
- uma perturbação do tipo degrau de 5 Nm é aplicada a cada sinal de controle  $u_i$  no instante  $t = 6$  s ;
- condições iniciais de posição e velocidade nulas.

A figura 4.8 apresenta o erro de posição e o controle das juntas 1 e 2 e a figura 4.9 o desempenho das juntas 3 e 4.

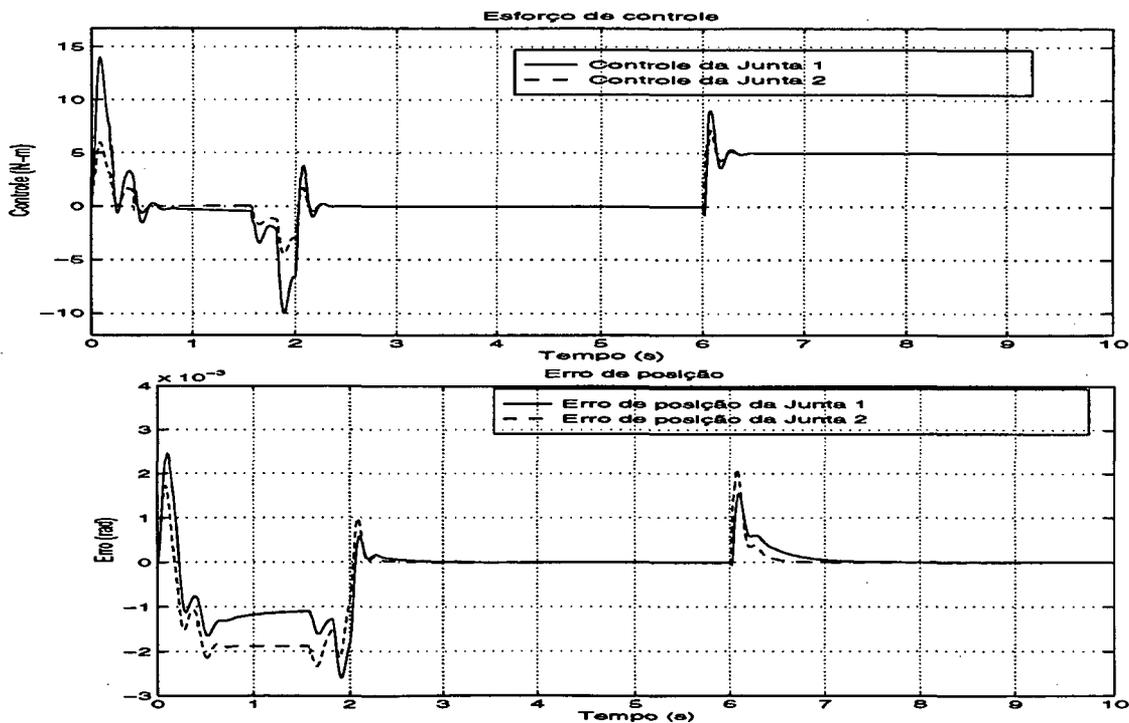


Figura 4.8: Desempenho do controlador 2DOF - Regulação das juntas 1 e 2

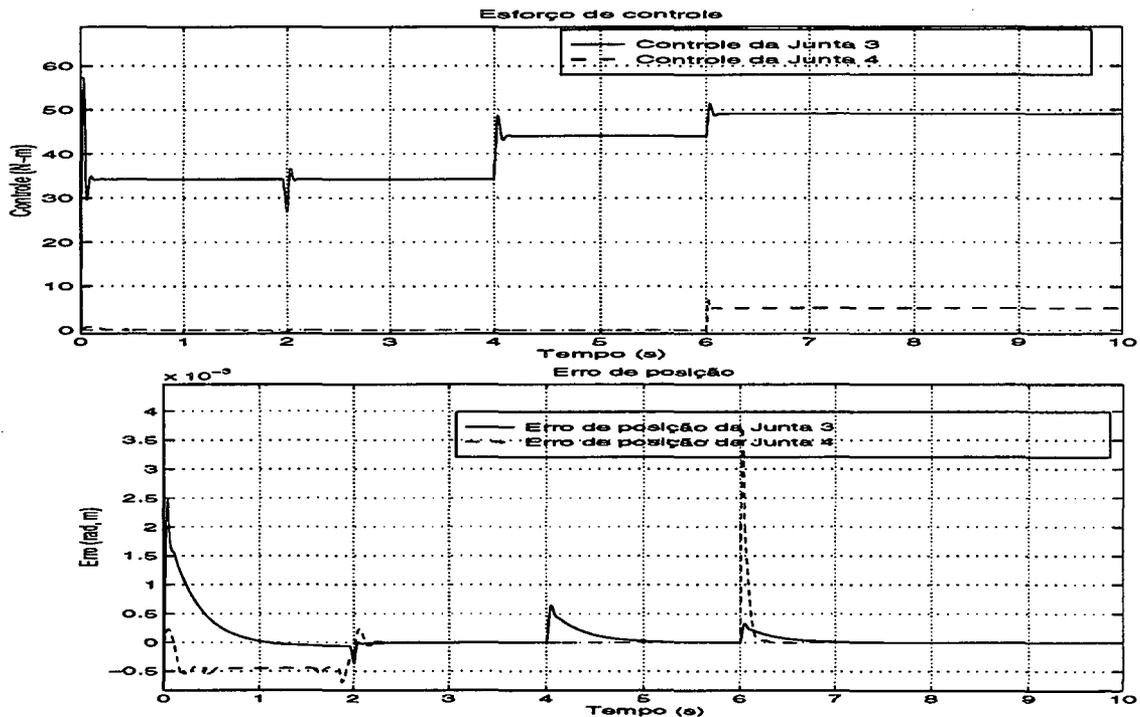


Figura 4.9: Desempenho do controlador 2DOF - Regulação das juntas 3 e 4

Dos resultados das simulações pode-se notar que o controlador 2DOF garante erro nulo em regime permanente e tem boas características de rejeição das perturbações. Devido ao fato de que só a junta 3 tem componente gravitacional, quando foi aplicada a carga no efetuador final só o erro desta junta aumentou, sendo posteriormente anulado pelo controlador.

Também foi feito o projeto de controladores 2DOF para fazer o seguimento de trajetórias senoidais para as juntas 1 e 2 (juntas 3 e 4 são mantidas fixas). Primeiro foi encontrado, para cada junta, o modelo linear (2.12) correspondente a uma trajetória senoidal. Depois foi aplicado o procedimento de projeto da seção 3.6.3 considerando como modos do sinal de referência  $p_r(s) = s^2 + w_0^2$  sendo  $w_0$  a frequência da referência. Foram consideradas referências de amplitude 0,5 rad e frequência de 0,5 rad/s para a junta 1 e de amplitude 0,4 rad e frequência de 0,8 rad/s para a junta 2. A figura 4.10 apresenta a curva freqüencial do erro de seguimento do sistema linear da junta 1 controlado pelo controlador 2DOF. Nota-se que na frequência  $w_0 = 0.5$  rad/s o erro é zero e na vizinhança desta frequência o erro é limitado.

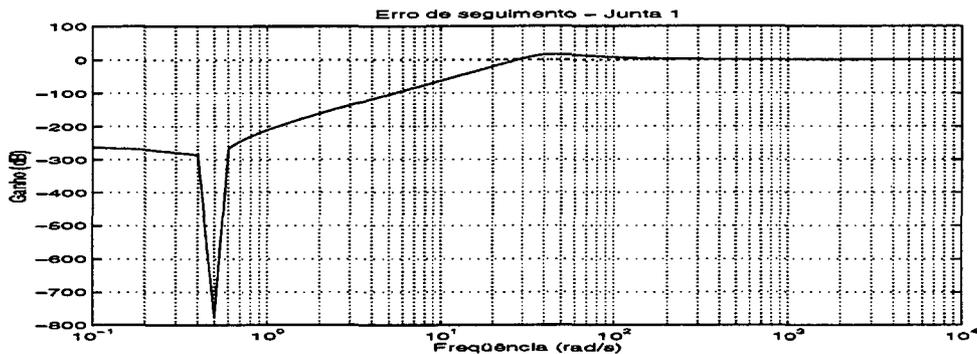


Figura 4.10: Diagrama de Bode do erro de seguimento da referência senoidal-junta 1

A figura 4.11 apresenta o esforço de controle e o erro de seguimento das juntas 1 e 2 com referências senoidais. Nota-se que neste caso também é garantido o erro nulo em regime permanente apesar das incertezas paramétricas e das perturbações.

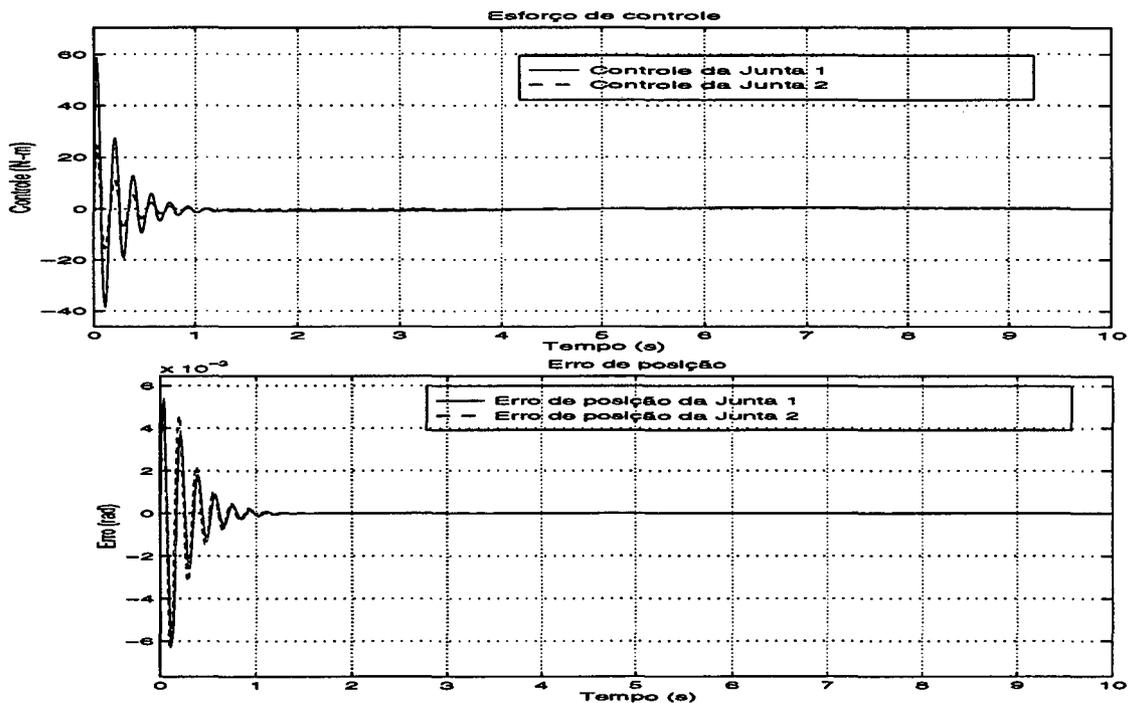


Figura 4.11: Desempenho do controlador 2DOF - Referência senoidal juntas 1 e 2

#### 4.4.4 Resultados experimentais

Os controladores projetados na seção anterior foram implementados, para controlar a posição das juntas 1 e 2 do robô SCARA de 4 juntas, utilizando a linguagem X0beron. Para implementar controladores num sistema controlado por computador é necessário

digitalizar os controladores 2DOF analógicos projetados (ver apêndice B). Utilizou-se, para isso, a técnica de transformação Aproximação Trapezoidal [AW84], [Che93] com um período de amostragem  $T=1\text{ms}$ . Os polinômios dos controladores digitais (equivalentes aos controladores analógicos da tabela 4.6) para as juntas 1 e 2 são apresentados na tabela 4.7.

<b>Elo 1</b>	$h_1 = 0,65720118E5z^2 - 1,29964560E5z + 0,64248787E5$ $q_1 = 0,65724533E5z^2 - 1,29956560E5z + 0,64236373E5$ $k_1 = 4,17529858z^2 - 8z + 3,82470141$
<b>Elo 2</b>	$h_2 = 3,95664784E4z^2 - 7,75880449E4z + 3,80313188E4$ $q_2 = 3,95768977E4z^2 - 7,75800449E4z + 3,80128995E4$ $k_2 = 4,30411327z^2 - 8z + 3,69588672$

Tabela 4.7: Polinômios dos controladores digitais com estrutura 2DOF

Para movimentar o robô foram feitas as seguintes considerações :

- só são movimentadas as juntas 1 e 2 (as juntas 3 e 4 são mantidas fixas) ;
- o sistema deve seguir nos dois primeiros segundos uma referência polinomial (função linear sendo o início e o final da trajetória uma função parabólica, [Cra86]) para as juntas 1 e 2 até a posição final  $q_{1d} = -0,5 \text{ rad}$ . e  $q_{2d} = 0,5 \text{ rad}$  ;
- deve ser feita a regulação na posição final a partir do instante  $t = 2 \text{ s}$  ;
- as condições iniciais de posição foram  $q_1 = -1,0 \text{ rad}$  e  $q_2 = 0,0 \text{ rad}$  (velocidades iniciais nulas).

Também foram projetados controladores analógicos PD e PID para controlar as juntas 1 e 2 do robô SCARA. A tabela 4.8 apresenta os ganhos destes controladores. Na seção B.3 é indicado como encontrar seus equivalentes digitais.

Junta	PD		PID		
	$K_p$	$K_d$	$K_p$	$K_d$	$K_i$
1	4000	100	4000	60	800
2	2800	70	4000	60	800

Tabela 4.8: Ganhos dos controladores analógicos PD e PID

As figuras 4.12, 4.13 e 4.14 apresentam o erro de posição e o esforço de controle das juntas 1 e 2 controladas pelos controladores PD, PID e 2DOF, respectivamente.

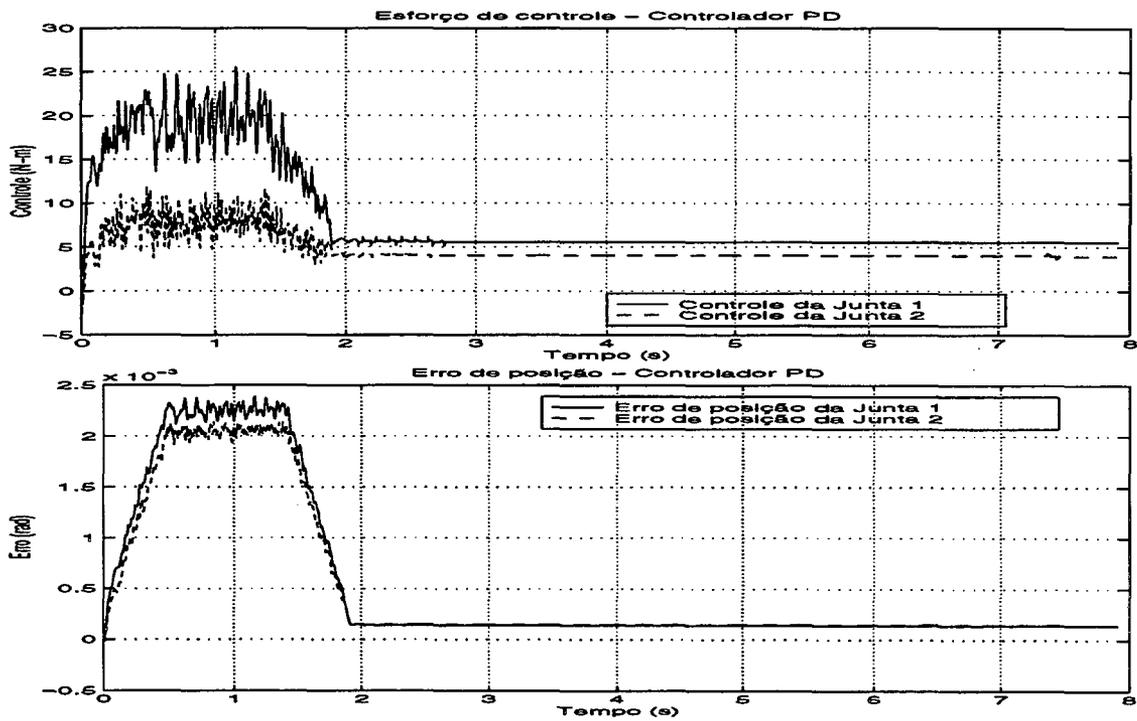


Figura 4.12: Desempenho do controlador PD

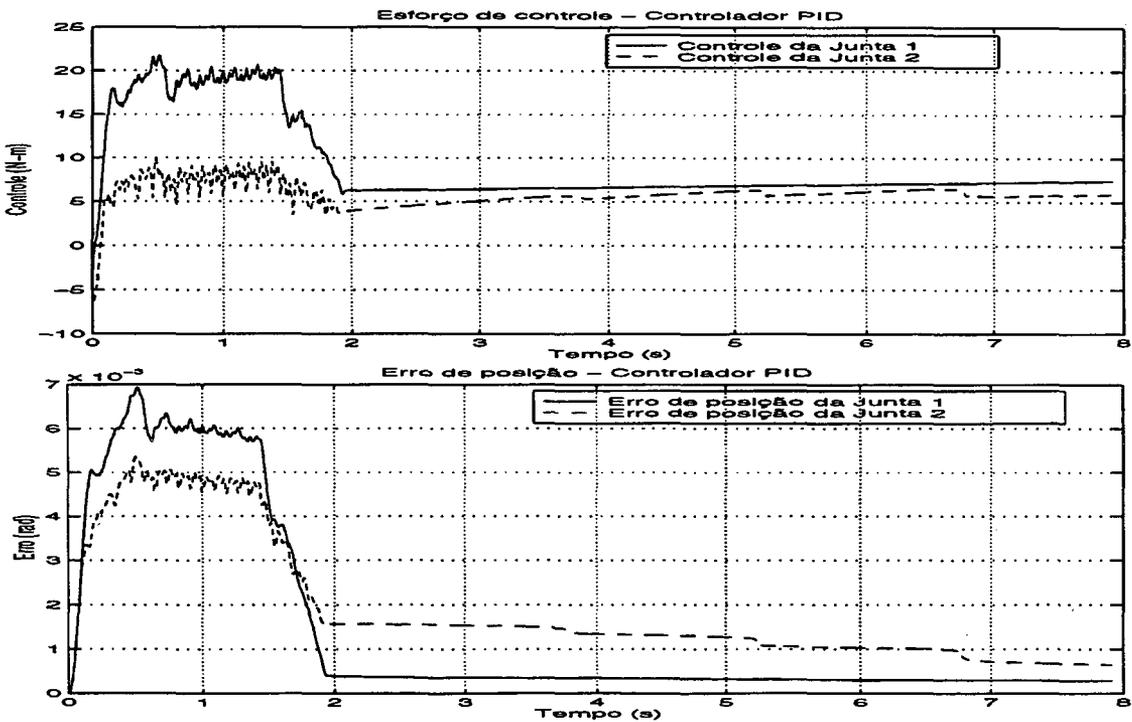


Figura 4.13: Desempenho do controlador PID

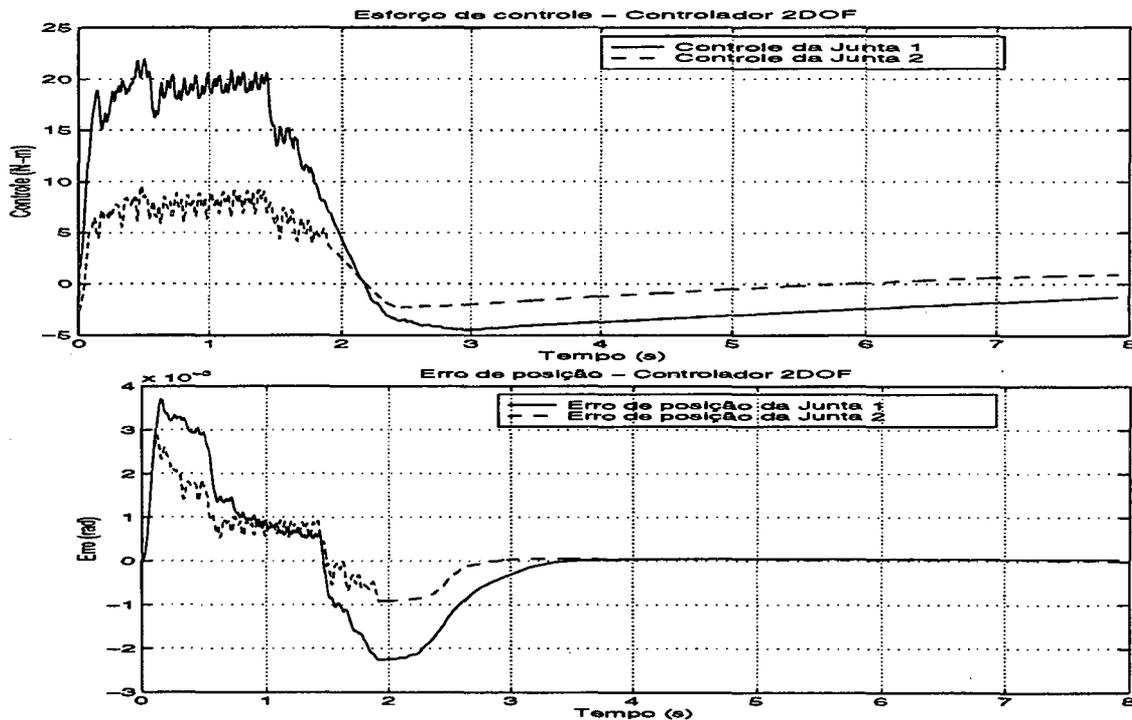


Figura 4.14: Desempenho do controlador 2DOF

Da figura 4.12 pode-se observar que o controlador PD não garante erro nulo em regime permanente apesar das juntas 1 e 2 se movimentarem num plano horizontal (não existe efeito gravitacional). Este erro de posição pode ser provocado pelo atrito ou pela presença dos elementos de transmissão de movimento *harmonic drive* (este efeito será estudado no capítulo seguinte). A figura 4.13 mostra que o tempo de estabilização do PID é grande e demora muito para anular o erro de posição. O controlador 2DOF garante erro nulo em regime apesar dos efeitos das dinâmicas antes mencionadas e que não foram modeladas. Considerando o erro de posição como critério para avaliar o desempenho, pode-se afirmar que o melhor comportamento corresponde ao controlador 2DOF. Também foram consideradas velocidades maiores na trajetória polinomial sendo que o comportamento dos controladores, tanto na transição como no regime permanente, é similar ao desempenho apresentado nas figuras anteriores. Os resultados com velocidades maiores não são apresentados pelos motivos expostos na observação 4.1.

Observa-se que existe uma diferença no comportamento transitório entre os resultados das simulações (figura 4.8) e os resultados experimentais (figura 4.14) do robô controlado pelo controlador 2DOF. Isto é devido às incertezas nos parâmetros do robô e a que na simulação muitas dinâmicas (tais como atrito, flexibilidade nas transmissões, etc.) não foram consideradas. Mas o objetivo principal de garantir erro nulo em regime

permanente foi atingido em ambos os casos.

No apêndice C são apresentados os programas na linguagem X0beron [Mos93], [Rei91] onde são implementados todos os controladores projetados para controlar o robô SCARA de 4 juntas.

## 4.5 Conclusões

Foi apresentado um procedimento de projeto que permite projetar controladores na estrutura 2DOF para controlar a posição de robôs rígidos tanto na regulação como no seguimento de uma referência senoidal. Este procedimento foi testado através de simulações, num robô planar de duas juntas, e validado numa das primeiras implementações práticas feitas no robô SCARA de 4 juntas do Laboratório de Robótica da Universidade Federal de Santa Catarina. O procedimento consiste de quatro etapas. Na primeira etapa são determinados os modelos lineares, introduzidos no capítulo 2, para cada junta, não sendo necessário conhecer exatamente os valores dos parâmetros da dinâmica do robô. Na segunda etapa são projetados os controladores na estrutura 2DOF utilizando alocação ótima de pólos com erro nulo robusto em regime permanente. Utilizando os critérios apresentados no capítulo 3 é avaliado o desempenho de malha e de resposta do sistema linear controlado por estes controladores. Também são projetados controladores PD e PID para comparar o desempenho dos três controladores. Na terceira etapa são feitas as simulações do robô controlado pelos controladores lineares. São consideradas diferentes velocidades de transição de posição, incertezas nos valores dos parâmetros, perturbações e variações de carga para determinar as características de robustez dos controladores. Na última etapa são determinados os equivalentes digitais dos controladores analógicos e são implementados como equações diferença no robô, utilizando a linguagem X0beron.

Os resultados experimentais e das simulações indicam que o melhor desempenho corresponde ao controlador 2DOF. Este controlador apresenta um bom comportamento dinâmico, garante erro nulo em regime permanente e rejeita as perturbações apesar de existirem incertezas paramétricas e de não considerar no projeto efeitos como o atrito e carga no efetuador final.

# Capítulo 5

## Controle de Posição de Robôs com Transmissões Flexíveis

### 5.1 Introdução

Devido ao fato de determinados elementos de transmissão de movimento introduzirem flexibilidades, muitos robôs manipuladores não podem ser considerados totalmente rígidos. Esta dinâmica adicional provoca um deslocamento entre a posição do rotor e a posição do seu elo. Na maioria das vezes este desvio é considerado como uma fonte de problemas especialmente quando é necessário um seguimento preciso de trajetória ou uma grande sensibilidade às forças no efetuador final. Um comportamento oscilatório é observado quando são movimentados os elos do robô com flexibilidades não desprezáveis nas transmissões. Estas vibrações são de pequena magnitude e ocorrem em frequências relativamente altas mas dentro da banda de interesse do controle [dWSB96], [Rea94].

Para obter um seguimento de trajetória o mais exato possível a elasticidade nas juntas não pode ser desprezada nem na modelagem nem no controle. Neste caso, o modelo consiste de dois subsistemas acoplados, um representando o corpo rígido ou as dinâmicas lentas e o outro as dinâmicas rápidas introduzidas pela flexibilidade nas juntas [Rea94]. Por isto, os algoritmos de controle desenvolvidos para controlar robôs rígidos têm um comportamento insatisfatório quando são aplicados diretamente para controlar robôs com transmissões flexíveis.

Devido à importância dos efeitos da flexibilidade das transmissões no desempenho dos manipuladores têm-se desenvolvido controladores nos quais a dinâmica originada

pela flexibilidade possa também ser controlada. Neste capítulo será estudado o controle em cascata baseado na dinâmica inversa. Com este algoritmo, no caso ideal, são obtidos sistemas lineares com duplo integrador como o utilizado no exemplo de aplicação do capítulo 3. Devido às propriedades de desempenho robustas que apresentou para controlar este tipo de sistemas, é utilizado o controlador 2DOF nesta estratégia de controle.

Primeiro são apresentados os principais algoritmos de controle disponíveis na literatura. Depois são analisadas as duas etapas de projeto do controle em cascata utilizando o modelo do manipulador com transmissões flexíveis MTF (2.17), (2.18). Para cada etapa é projetado um controlador 2DOF com alocação ótima de pólos. Finalmente são feitas as simulações considerando um robô com transmissões flexíveis sujeito a perturbações e incertezas paramétricas. São também projetados controladores PD para comparar os desempenhos.

## 5.2 Controle de robôs com transmissões flexíveis

Em [dWSB96] é utilizado um controlador PD para controlar um manipulador com apenas um elo rotacionando num plano horizontal e com transmissão flexível. No caso em que são realimentadas a posição e a velocidade do elo, o sistema resultante é instável independentemente dos valores dos ganhos. Já no caso em que são realimentadas a posição e a velocidade do rotor, o sistema é estável e pode ser obtido um erro nulo de posição. Mas quando existem termos gravitacionais aparece um erro de posição. Em [dWSB96] também é apresentado um controlador PD com compensação da gravidade para controlar um manipulador completo com transmissões flexíveis, mas seu desempenho é afetado quando existem incertezas no modelo ou perturbações.

Como o sinal de controle  $u$  no modelo do manipulador com transmissões flexíveis MTF (2.17), (2.18) é aplicado no subsistema dos rotores e as não-linearidades estão no subsistema dos elos não é possível aplicar diretamente um sinal de controle linearizante tal como é feito nos robôs rígidos. Em [dWSB96],[Spo87] é feita uma transformação de coordenadas para obter uma lei que possa, no caso ideal, desacoplar e linearizar o MTF através de uma realimentação estática não-linear. Esta técnica é conhecida como *linearização por realimentação*. Na presença de incertezas paramétricas a linearização completa não é realizada, motivo pelo qual a lei de controle para controlar o sistema linearizado ideal deve apresentar características de robustez. Para obter esse controle

robusto é necessário realimentar a posição e velocidade do motor e a posição do elo e suas derivadas até terceira ordem [Spo87], sendo uma desvantagem desta estratégia.

No caso de pequenas flexibilidades é possível aplicar o controle baseado na *teoria de perturbações singulares* [Rea94],[Spo87], ou também chamada de *controle em duas escalas de tempo* [dWSB96]. O sinal de controle é composto de um controle *lento* e de um controle *rápido*. O controle *lento* tem como finalidade garantir o seguimento do subsistema dos elos e é projetado usando as variáveis lentas  $q$ ,  $\dot{q}$  e o controle *rápido* compensa os efeitos da elasticidade nas juntas. Assim a ordem do MTF é reduzida à ordem do modelo rígido permitindo o emprego dos controladores projetados para controlar robôs rígidos.

Em [NT95] é apresentado um controlador robusto que realimenta a posição do elo e utiliza observadores não-lineares. Em [GR98] é usado o controle em cascata baseado na dinâmica inversa com controladores PD. O desempenho deste algoritmo é afetado nas condições não ideais (incertezas paramétricas, variações de carga no efetuador final e perturbações). Na seção seguinte são usados controladores 2DOF para melhorar o desempenho desta estratégia nestas condições não ideais.

### 5.3 Controle em cascata baseado na dinâmica inversa

A estabilidade desta estratégia é baseada na conexão em cascata de dois sistemas linearizados estáveis. Um sistema linearizado corresponde ao subsistema dos elos e o outro ao subsistema dos rotores e estão relacionados através de um sinal de erro o qual deve convergir para zero. Esta estratégia é constituída de duas etapas de controle. Em cada uma delas é aplicado um controle linearizante até reduzir os subsistemas dos elos e dos rotores a sistemas lineares. Isto facilita a análise da estabilidade e o projeto dos controladores. Primeiro o MTF será expresso usando uma nova coordenada generalizada. Depois, sobre este modelo, serão aplicadas as duas etapas de controle.

### 5.3.1 Modelo

Seja a variável generalizada  $z = q_M - q$  que representa o deslocamento entre a posição do rotor e a posição do elo. Substituindo  $z$  no MTF (2.17), (2.18) obtém-se :

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Kz \quad (5.1)$$

$$J(\ddot{z} + \ddot{q}) + Kz = u \quad (5.2)$$

De (5.1) podemos expressar a segunda derivada da posição dos elos  $\ddot{q}$  como :

$$\ddot{q} = H^{-1}(q)[Kz - C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q)] \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.2), é obtido o MTF expresso nas novas coordenadas generalizadas  $[q^T, z^T]$  :

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Kz \quad (5.4)$$

$$J\ddot{z} + B_z(q, \dot{q}) + G_z(q, z) = u \quad (5.5)$$

onde :

$$B_z(q, \dot{q}) = -JH^{-1}(q)C(q, \dot{q})\dot{q} \quad (5.6)$$

$$G_z(q, z) = JH^{-1}(q)[Kz - G(q)] + Kz \quad (5.7)$$

A equação (5.4) representa o subsistema rígido e a equação (5.5) o subsistema dos rotores. A cada subsistema será aplicada uma etapa de controle.

### 5.3.2 Etapas de controle

Na primeira etapa de controle é definida uma referência  $z_d$  para a coordenada generalizada  $z$  com a finalidade de linearizar o subsistema do modelo rígido. Na segunda etapa é calculado o torque  $u$  que permite a  $z$  convergir a  $z_d$ . A figura 5.1 apresenta um diagrama de blocos com as duas etapas de controle. Na continuação serão definidas as funções  $f(\cdot)$  (da primeira etapa) e  $g(\cdot)$  (da segunda etapa) que geram os sinais  $z_d$  e  $u$ .

Em [GR98] são estabelecidas as seguintes suposições :

**Suposição 5.1** A trajetória de referência  $r(t)$  para a posição dos elos  $q(t)$  é suave e suas derivadas sucessivas  $\dot{r}(t)$ ,  $\ddot{r}(t)$ ,  $r^{(3)}(t)$  e  $r^{(4)}(t)$  são contínuas e limitadas. Uma

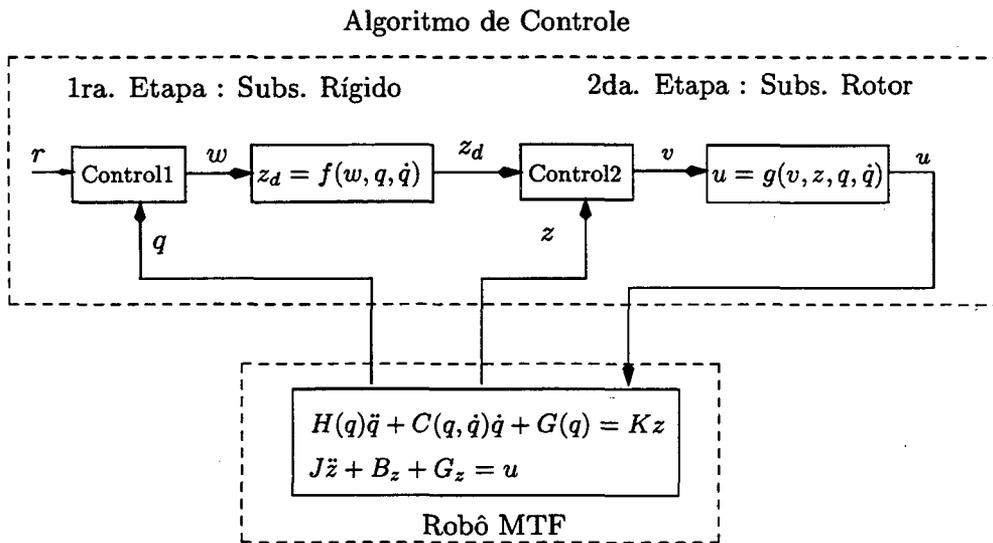


Figura 5.1: Controle em cascata

trajetória polinomial de ordem 9 satisfaz esta condição.

**Suposição 5.2** As variáveis  $q, \dot{q}, z$  e  $\dot{z}$  são mensuráveis ou observáveis para todo  $t$ .

Em [GR98] são feitas simulações e é mostrado que é importante satisfazer a suposição 5.1 para evitar oscilações no controle quando são usados controladores PD nas duas etapas de controle.

### Primeira etapa de controle: subsistema rígido

É definido o erro de seguimento da variável  $z$  com respeito a sua referência  $z_d$  como :

$$e_z = z - z_d \quad (5.8)$$

Este erro representa o erro de seguimento na segunda etapa. Usando (5.8) podemos rescrever o subsistema rígido (5.4) da seguinte forma :

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = K(z_d + e_z) \quad (5.9)$$

Com a finalidade de linearizar e desacoplar a equação anterior, é escolhida a seguinte referência  $z_d$  :

$$z_d = K^{-1}[H(q)w + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)] \quad (5.10)$$

onde  $w$  são sinais de controle de controladores que posteriormente serão projetados. A expressão anterior define a função  $f(\cdot)$  da figura 5.1. Substituindo  $z_d$  (5.10) no subsistema rígido (5.9) obtém-se :

$$\begin{aligned} H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) &= K\{K^{-1}[H(q)w + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)] + e_z\} \\ \ddot{q} &= w + H^{-1}(q)Ke_z \end{aligned} \quad (5.11)$$

Aplicando a Transformada de Laplace  $\mathcal{L}(\cdot)$  à equação (5.11), obtém-se  $n$  sistemas da forma :

$$q_i(s) = \frac{1}{s^2}w_i(s) + \frac{1}{s^2}T_{d_i}(s) \quad i = 1 \dots n \quad (5.12)$$

onde  $T_{d_i}(s)$  corresponde à linha  $i$  de  $\mathcal{L}\{-H^{-1}(q)Ke_z\}$ .

Este sistema é formado por um duplo integrador, um sinal de controle  $w_i(s)$ , a saída  $q_i(s)$  e uma perturbação  $T_{d_i}(s)$  na entrada. O sinal de referência deste sistema é  $r_i(s)$  (ver suposição 5.1). O sinal de controle  $w_i(s)$  é gerado pelo controlador  $i$  do bloco *Control1* da figura 5.1. É importante notar que a perturbação  $T_{d_i}(s)$  depende do erro  $e_z$ . Se este erro converge a zero então  $T_{d_i}(s)$  tende a zero. A finalidade da segunda etapa é garantir a convergência exponencial de  $e_z$  para zero.

### Segunda etapa de controle: subsistema dos rotores

Nesta etapa o subsistema dos rotores (5.5) é linearizado com uma escolha adequada do sinal de controle  $u$ . O sinal  $u$  é definido como :

$$u = Jv + B_z(q, \dot{q}) + G_z(q, z) \quad (5.13)$$

onde  $v$  são os sinais de controle de controladores a serem projetados. A expressão anterior define a função  $g(\cdot)$  da figura 5.1. Como a matriz  $J$  é não singular pode-se substituir a lei de controle (5.13) no subsistema dos rotores (5.5) e obtém-se :

$$\begin{aligned} J\ddot{z} + B_z(q, \dot{q}) + G_z(q, z) &= Jv + B_z(q, \dot{q}) + G_z(q, z) \\ J(\ddot{z} - v) &= 0 \\ \ddot{z} &= v \end{aligned} \quad (5.14)$$

Aplicando a Transformada de Laplace  $\mathcal{L}(\cdot)$  à equação (5.14) obtém-se  $n$  sistemas

da forma :

$$z_i(s) = \frac{1}{s^2} v_i(s) \quad i = 1 \dots n \quad (5.15)$$

onde  $z_i(s) = q_{M_i}(s) - q_i(s)$ . Este sistema é formado por um duplo integrador, um sinal de controle  $v_i(s)$  e a saída  $z_i(s)$ . O sinal de referência deste sistema é  $z_{d_i}(s)$ . O sinal de controle  $v_i(s)$  é gerado pelo controlador  $i$  do bloco *Control2* da figura 5.1.

Na figura 5.2 é apresentado um diagrama de blocos onde dois controladores 2DOF são usados no controle em cascata para regular a junta  $i$ .

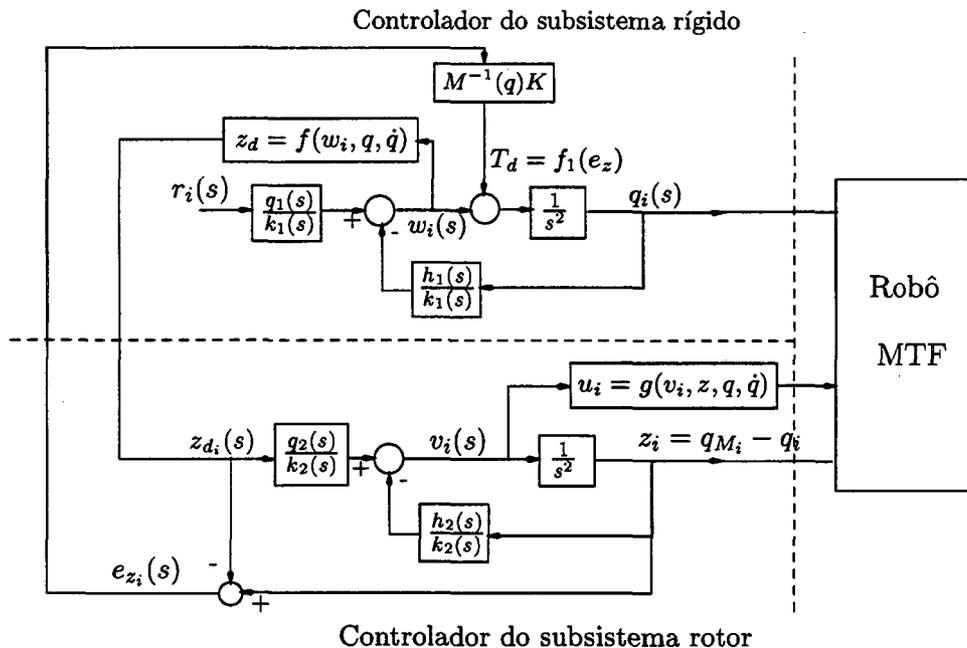


Figura 5.2: Controladores 2DOF no controle em cascata

O sistema em malha fechada formado pelo robô com transmissões flexíveis controlado pelo controlador em cascata é constituído pelo robô (5.4), (5.5) e pelos controles linearizantes  $z_d$  (5.10) e  $u$  (5.13). Cada controle linearizante tem um controle adicional  $w$  e  $v$  para controlar os subsistemas linearizados.

O sistema em malha fechada é estável se os subsistemas linearizados rígido (5.12) e dos rotores (5.15) são estáveis (os erros  $r(t) - q(t)$  e  $e_z(t)$  são limitados). Se além disso o erro de seguimento destes subsistemas é zero então o erro de seguimento do robô MTF também é zero. Em [GR98] é feita uma análise da estabilidade para o caso onde os sinais de controle  $w$  e  $v$  são gerados por controladores PD.

Nota-se que o sinal de controle  $z_d$  depende da inversa da rigidez  $K$ . Se a rigidez é grande ( $K \rightarrow \infty$ ) então  $z_d \rightarrow 0$ . Isto pode afetar a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada pois dependem da precisão e estabilidade numérica dos cálculos.

Nas seções seguintes será utilizada esta estratégia para controlar o robô planar de duas juntas com transmissões flexíveis. Serão projetados os controladores e depois apresentados os resultados das simulações.

### 5.3.3 Projeto dos controladores

O projeto de controle em cascata baseado na dinâmica inversa depende do conhecimento exato dos parâmetros e da dinâmica do manipulador para poder linearizar os dois subsistemas. Se os valores nominais dos parâmetros usados no controle linearizante  $z_d$  (5.10) e  $u$  (5.13) não são os valores reais dos parâmetros do robô, então a linearização não é exata e não é possível obter os subsistemas linearizados ideais (5.12) e (5.15). Em [GR98] são propostos controladores PD para gerar os sinais  $w$  e  $v$  para controlar estes subsistemas. Estes controladores apresentam excelentes resultados no caso ideal mas seu desempenho é afetado quando são aplicadas perturbações, cargas externas no efetuador final ou quando existem incertezas nos parâmetros. Por isso é necessário o uso de controladores que tornem o sistema mais robusto.

Na seção 3.7 foi utilizado um controlador 2DOF para controlar sistemas com duplo integrador da forma do subsistema rígido linearizado (5.12). Este controlador garantiu erro nulo em regime permanente apesar de ter sido projetado em base ao sistema nominal e controlar o sistema real. Por esta razão serão usados estes controladores para gerar os sinais  $w$  e  $v$ .

O procedimento de projeto para obter erro nulo e robusto em estado estacionário da seção 3.6.3 precisa dos modos do sinal de referência. Neste caso, para o subsistema rígido linearizado (5.12) o sinal de referência  $r_i(t)$  é conhecido (degrau, senoidal, rampa, etc.). Para o subsistema linearizado dos rotores (5.15) o sinal de referência é  $z_d$  o qual é uma função não-linear que depende de  $q$  e  $\dot{q}$ . Para o caso particular da regulação das juntas de um robô, o sinal  $z_d$  em estado estacionário é uma constante e tem os mesmos modos que uma referência tipo degrau. Portanto, para este caso é possível aplicar o procedimento de projeto com erro nulo e robusto. Assim, será considerado o uso dos controladores 2DOF para o caso da regulação das juntas do robô.

Vamos supor que a finalidade é regular a posição das juntas do robô planar de duas juntas, apresentado na seção 4.3, mas neste caso com transmissões flexíveis. Devem ser projetados dois controladores 2DOF para cada junta, sendo um para cada etapa de controle. O projeto de controle é o apresentado na seção 3.6.3 e que foi utilizado no exemplo da seção 3.7. Em ambos os casos os sistemas nominais (3.66) e (5.12) são iguais. Os fatores de ponderação usados para todos os controladores do subsistema rígido são  $\rho = 10^9$  e  $\sigma = 10^4$  e para os subsistemas dos rotores  $\rho = 10^{11}$  e  $\sigma = 10^4$ . Para o caso ideal, os pólos do subsistema rígido linearizado (5.12) controlado pelo controlador 2DOF são :  $[-125,74 \pm 125,74j ; -10]$ . A figura 5.3 apresenta o diagrama de Bode da função de sensibilidade do subsistema rígido linearizado ideal controlado pelo controlador 2DOF. Observa-se que nas baixas frequências a sensibilidade é pequena, com o qual o efeito das perturbações é minimizado. O valor máximo da função de sensibilidade  $\bar{S}$  é 1,723, garantindo assim uma boa margem de estabilidade.

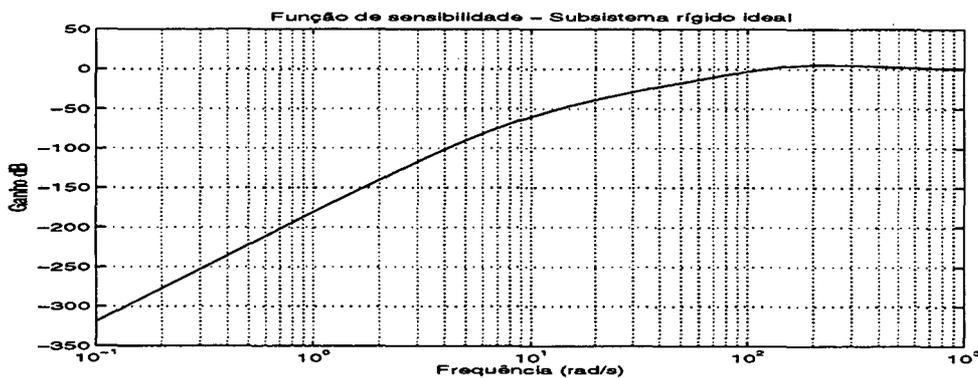


Figura 5.3: Função de sensibilidade do subsistema rígido linearizado ideal

Também foram projetados controladores PD para gerar os sinais  $w$  e  $v$ . Os controladores para controlar o subsistema rígido linearizado (5.12) têm ganhos  $Kp = w_{ri}^2$  e  $Kd = 2w_{ri}$  com  $w_{ri} = 20$  e para controlar o subsistema dos rotores linearizado (5.15) têm ganhos  $Kp = w_{ro}^2$  e  $Kd = 2w_{ro}$  com  $w_{ro} = 40$ . Os pólos do subsistema rígido linearizado ideal (5.12) controlado pelo controlador PD são :  $[-10 ; -10]$ . Nota-se que o controlador PD apresenta um comportamento super amortecido. Os pólos do sistema controlado pelo controlador 2DOF estão mais afastados do eixo imaginário com o qual a sua resposta transitória é mais rápida.

### 5.3.4 Resultados das simulações

Além dos valores reais e nominais dos parâmetros do robô planar de duas juntas apresentados na tabela 4.1 são também considerados valores reais e nominais para a

constante de rigidez  $K$  e as inércias dos rotores  $J$ . Em [Rea94] são apresentados os valores típicos da constante de rigidez para diferentes componentes. Por exemplo para um *harmonic drive* a rigidez é de  $\approx 10^4$  Nm/rad e para um acoplamento flexível é de  $\approx 10^3$  Nm/rad. Para efeitos da simulação será considerado o caso mais flexível. A tabela 5.1 apresenta os valores reais e nominais das constantes de rigidez  $K$  e das inércias dos rotores  $J$ .

Descrição	Unidade	Valores reais		Valores nominais	
		Elo 1	Elo2	Elo 1	Elo2
constante de rigidez	Nm/rad	$10^3$	$10^3$	900	1050
inércia dos rotores	Kgm <sup>2</sup>	1,0	1,0	0,9	1,1

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros do robô planar com transmissões flexíveis

A dinâmica do robô foi simulada segundo as equações (4.1), (4.2) e (5.4) para o subsistema rígido e a equação (5.5) para o subsistema dos rotores. Foram utilizados os valores reais dos parâmetros das tabelas 4.1 e 5.1. Os sinais de controle linearizante  $z_d$  e  $u$  foram calculados usando os valores nominais dos parâmetros. Assim, a linearização não é exata e os sistemas resultantes não são iguais aos sistemas nominais (5.12) e (5.15). Isto permite avaliar as características de robustez dos controladores.

As seguintes considerações foram feitas na simulação :

- entre  $t = 0$  s e  $t = 1$  s o robô está na posição inicial de equilíbrio. Do instante  $t = 1$  s até  $t = 3$  s deve seguir uma referência polinomial de ordem 9 até a posição final  $q_{1d} = 0.5$  rad e  $q_{2d} = 1$  rad ;
- deve ser feita a regulação na posição final a partir do instante  $t = 3$  s ;
- uma carga ( $m_L=0.6$  Kg,  $J_L=3$  Kgm<sup>2</sup>) é acoplada ao elo 2 no instante  $t = 4$  s ;
- uma perturbação tipo degrau de 5 Nm é aplicada a cada sinal de controle  $u_i$  no instante  $t = 6$  s.

Nas figuras 5.4 e 5.5 são apresentados o erro de posição ( $q_{di} - q_i$ ) e o esforço de controle ( $u_i$ ) do robô planar com flexibilidades nas transmissões controlado pelos controladores PD e 2DOF, respectivamente.

Pode-se apreciar que em todo instante o erro de posição do robô controlado pelo PD é diferente de zero. Este erro aumenta quando é aplicada a perturbação tipo degrau no controle e quando uma carga é acoplada no efetuador final. O controlador

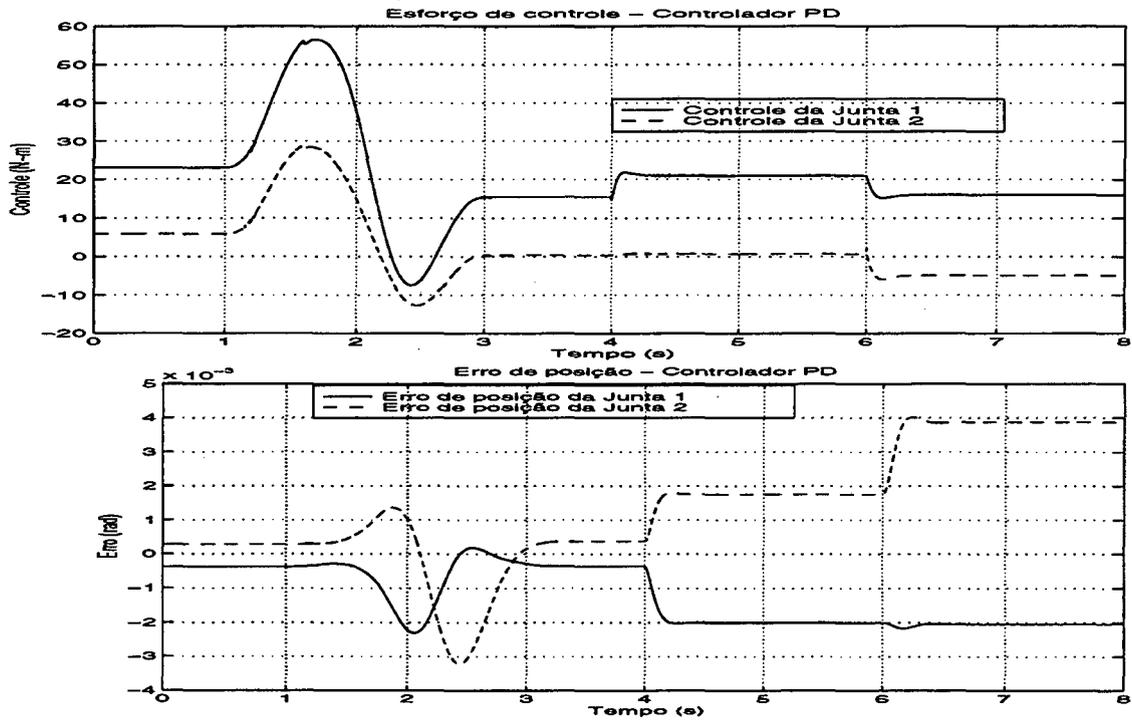


Figura 5.4: Desempenho do controlador PD

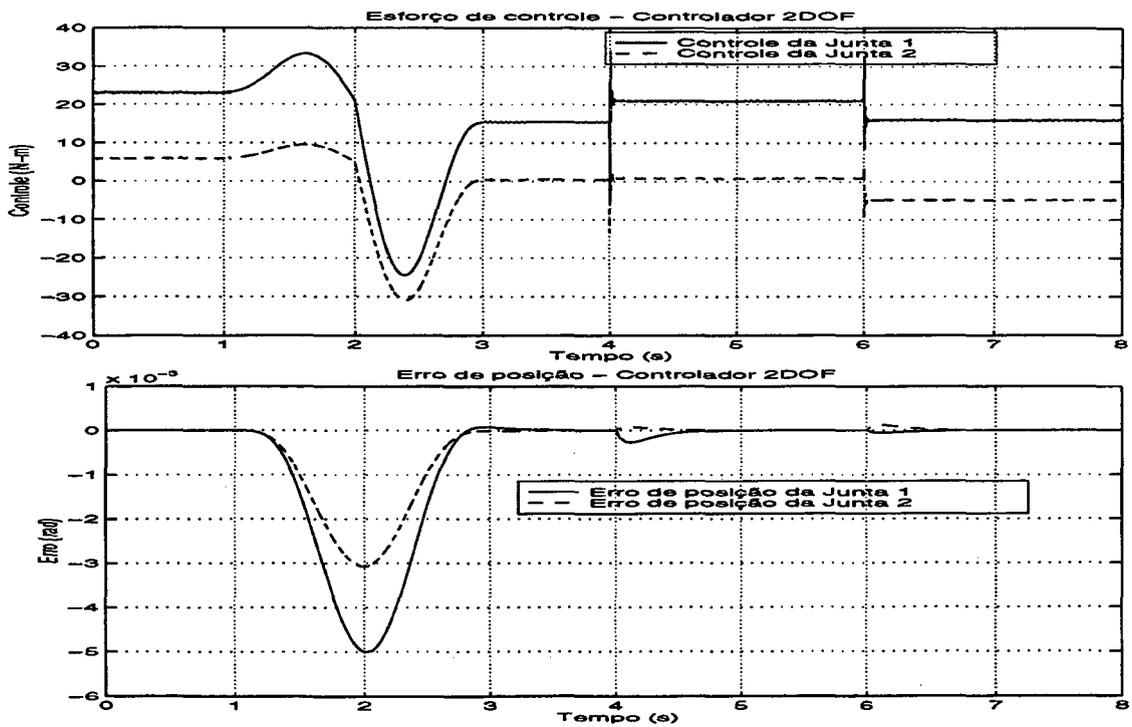


Figura 5.5: Desempenho do controlador 2DOF

2DOF garante erro nulo e robusto na posição inicial e final rejeitando as perturbações e compensando a carga no efetuador final. Na trajetória polinomial o valor absoluto do torque do controlador 2DOF é menor que o torque do PD. Se os ganhos dos controladores são aumentados aparecem oscilações no controle quando são aplicadas perturbações e é acoplada uma carga. Pode-se concluir que o melhor desempenho corresponde ao controlador 2DOF apesar de não controlar o sistema nominal (porque a linearização não foi exata) e estar sujeito a perturbações.

## 5.4 Conclusões

Neste capítulo foi estudada a estratégia de controle em cascata baseada na dinâmica inversa para controlar a posição de robôs manipuladores com transmissões flexíveis. Esta estratégia é constituída de duas etapas de controle. Em cada uma delas é aplicado um controle linearizante para reduzir os subsistemas rígidos e dos rotores em sistemas lineares. Foram projetados controladores 2DOF e PD para regular a posição de um robô planar de duas juntas com flexibilidade nas juntas, com incertezas paramétricas e sujeito a perturbações. Os resultados das simulações indicam que o melhor desempenho corresponde ao controlador 2DOF.

Uma vantagem desta técnica é a de permitir reduzir os subsistemas do MTF a sistemas lineares facilitando o projeto dos controladores. Se estes controladores têm características robustas o problema da linearização inexata, devido às incertezas paramétricas, e das perturbações pode ser contornado. Uma desvantagem é que precisa gerar os sinais linearizantes  $z_d$  e  $u$ , aumentando o tempo de processamento.

# Capítulo 6

## Conclusões e perspectivas

A utilização de controladores na estrutura de Dois Graus de Liberdade (2DOF) para controlar a posição das juntas de robôs manipuladores foi o principal objetivo deste trabalho. Foram considerados os casos de robôs rígidos e de robôs com transmissões flexíveis. Foi visto através de simulações e implementações práticas que este controlador garante erro nulo de posição robusto apesar da existência de incertezas paramétricas, perturbações nos atuadores e variações de carga no efetuador final. Este trabalho representa uma das primeiras implementações práticas de algoritmos de controle feitas no robô SCARA de 4 juntas do Laboratório de Robótica da Universidade Federal de Santa Catarina.

A dinâmica de um robô rígido pode ser representada por um sistema de equações não-lineares e acopladas. Usando uma série de suposições foi possível obter um modelo linear que representa a dinâmica de uma junta quando as outras estão em estado de equilíbrio. Isto foi feito para os casos particulares da regulação e do seguimento de uma trajetória senoidal. Se os elementos de transmissão de movimento do robô introduzem flexibilidade, então os algoritmos de controle para controlar a posição de robôs rígidos não apresentam um desempenho adequado quando são aplicados diretamente. É por isso necessário incluir no modelo do robô os efeitos dinâmicos das juntas flexíveis. Assim, foi obtido o modelo do robô com transmissões flexíveis (MTF), o qual tem o dobro do número de graus de liberdade do robô rígido. Utilizando os modelos lineares para os robôs rígidos e o modelo MTF para robôs com transmissões flexíveis foram projetados algoritmos de controle que utilizam os controladores 2DOF.

Durante um projeto de controle foram estabelecidos uma série de requerimentos a serem verificados. Entre os requerimentos de malha estão a rejeição da perturbação

assim como a estabilidade robusta ante às variações paramétricas e às dinâmicas não modeladas. Obter erro nulo robusto em regime permanente e um determinado comportamento na resposta transitória são requerimentos de resposta. O controlador 2DOF permite satisfazer estes requerimentos em forma simultânea. Usando um ganho de malha  $L(s)$  adequado é possível obter um desempenho robusto de malha. O princípio do modelo interno permite obter erro nulo em regime permanente apesar das variações paramétricas no modelo do processo.

Para obter os pólos de um sistema em malha fechada podem ser usados uma série de índices e critérios de desempenho. O índice  $LQR$  permite alocar os pólos em forma ótima e, através de um fator de ponderação, pode regular o comportamento da saída do sistema e do sinal de controle. Apresentou-se um procedimento de projeto que usa controladores 2DOF alocando os pólos do sistema em forma ótima e garante erro nulo robusto em regime permanente [Wol95].

Aplicando o procedimento de projeto antes mencionado sobre os modelos lineares do robô rígido foi possível obter controladores 2DOF que controlem a posição das suas juntas com erro nulo apesar das incertezas paramétricas, perturbações nos atuadores e variações de carga no efetuador final. Este fato foi comprovado através de simulações num robô planar de duas juntas e através de uma implementação prática num robô SCARA de 4 juntas. Para serem implementados no robô SCARA, os controladores 2DOF têm que ser digitalizados usando alguma técnica de transformação do plano contínuo ao plano discreto.

O modelo simplificado do MTF foi dividido em dois subsistemas representando a parte rígida e a parte dos rotores. Isto permitiu aplicar uma estratégia de controle em cascata através da qual a ordem do MTF é reduzida à ordem do robô rígido. Em particular foi utilizado o controle em cascata baseado na dinâmica inversa. Com esta estratégia foram obtidos, no caso ideal, dois sistemas lineares para cada conjunto junta-rotor e foi projetado um controlador 2DOF para cada sistema linear. Através das simulações foi visto que este controlador acrescenta características de robustez a esta estratégia garantindo erro nulo em regime permanente na presença de incertezas paramétricas e perturbações.

Como perspectivas para trabalhos futuros pode-se apontar primeiramente uma análise da estabilidade do controle de posição de robôs usando controladores 2DOF. Pode ser considerado também a aplicação deste tipo de controladores para o controle de força de robôs manipuladores. Em particular pode ser usado o controle híbrido de

força-posição o qual desacopla os problemas de controle de força e posição em duas tarefas diferentes.

Uma outra perspectiva de trabalho é projetar controladores 2DOF no controle de posição de robôs rígidos e de robôs com transmissões flexíveis no espaço da tarefa. Neste caso os modelos lineares para o robô rígido devem ser obtidos a partir do modelo dinâmico no espaço da tarefa.

Um fato importante a ser analisado no futuro é incluir a dinâmica do atuador no modelo do robô e controlar a dinâmica completa usando controladores 2DOF. Com a dinâmica do atuador a ordem destes controladores aumenta.

Finalmente, um assunto que merece uma pesquisa mais aprofundada é como estabelecer um procedimento de projeto para determinar os polinômios do controlador 2DOF na estrutura apresentada em [HB97]. Com esta estrutura pode ser feita uma realimentação do erro de seguimento sendo possível obter erro nulo robusto apesar das variações paramétricas do modelo do processo e dos polinômios do controlador.

# Apêndice A

## Robô SCARA de 4 Juntas

### A.1 Descrição geral do robô

A figura A.1 apresenta o robô manipulador SCARA<sup>1</sup> de 4 juntas do Laboratório de Robótica da Universidade Federal de Santa Catarina.

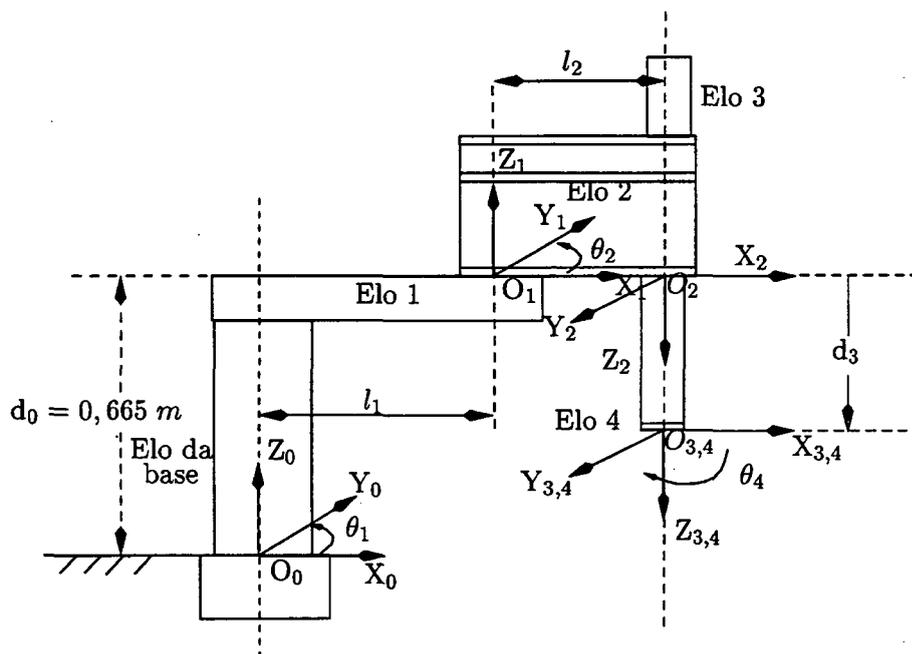


Figura A.1: Robô SCARA de 4 juntas

<sup>1</sup>Do termo em inglês *Selective Compliant Articulated Robot for Assembly*

As duas primeiras juntas são de rotação girando em torno de eixos verticais sobre um plano horizontal. A terceira junta é de translação realizando deslocamentos verticais. A última junta, correspondente ao efetuador final, realiza movimentos de rotação sobre o eixo vertical da terceira junta. Uma das principais características deste robô é ter uma arquitetura aberta possibilitando a implementação de diferentes algoritmos de controle e definir diversas trajetórias. Para movimentar as duas primeiras juntas são usados como elementos de transmissão de movimento dois *harmonic drive* os quais introduzem flexibilidades na dinâmica do robô (mais detalhes em [GWG98]). A linguagem de programação utilizada neste robô é o XÜberon [Mos93], [Rei91].

## A.2 Modelagem cinemática

O sistema de coordenadas do robô SCARA é apresentado na figura A.1. Para estabelecer as origens dos sistemas e as orientações foi utilizada a notação de Denavit-Hartenberg [AS86]. Considerando o vetor de coordenadas generalizadas  $q = [\theta_1 \ \theta_2 \ d_3 \ \theta_4]^T$  os parâmetros de Denavit-Hartenberg são apresentados na tabela A.1.

Elo	$\alpha_i$	$a_i$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	$l_1$	$d_0$	$\theta_1$
2	$180^\circ$	$l_2$	0	$\theta_2$
3	0	0	$d_3$	0
4	0	0	0	$\theta_4$

Tabela A.1: Parâmetros de Denavit-Hartenberg

A equação cinemática do robô é determinada pela matriz (4×4) :

$$T_0^4 = \begin{bmatrix} c_4 c_{12} + s_4 s_{12} & -s_4 c_{12} + c_4 s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ c_4 s_{12} - s_4 c_{12} & -s_4 s_{12} - c_4 c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & d_0 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde  $c_4 = \cos(\theta_4)$ ,  $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ , etc. Esta matriz representa a posição e orientação do efetuador final com respeito ao sistema de coordenadas cartesianas fixo à base do robô.

### A.3 Modelagem dinâmica

A dinâmica deste manipulador com uma carga  $m_L, J_L$  no efetuador final é dada pelas seguintes equações [GWG98], [EL97] :

$$\begin{aligned}
 H_{11}(q)\ddot{q}_1 + H_{12}(q)\ddot{q}_2 + J_4\ddot{q}_4 - c_1(q, \dot{q}) + T_{d1} &= u_1 \\
 H_{12}(q)\ddot{q}_1 + H_{22}(q)\ddot{q}_2 + J_4\ddot{q}_4 + c_2(q, \dot{q}) + T_{d2} &= u_2 \\
 m_a\ddot{d}_3 + G_3 + T_{d3} &= u_3 \\
 J_4\ddot{q}_1 + J_4\ddot{q}_2 + J_4\ddot{q}_4 + T_{d4} &= u_4
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

onde  $u_i$  ( $i = 1..4$ ) são os torques aplicados aos motores para controlar a posição das juntas e :

$$\begin{aligned}
 H_{11}(q) &= aux_1 + 2aux_2 \cos(q_2) \\
 H_{12}(q) &= aux_3 + aux_2 \cos(q_2) \\
 H_{22}(q) &= aux_3 \\
 c_1(q, \dot{q}) &= 2aux_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + aux_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\
 c_2(q, \dot{q}) &= aux_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2) \\
 G_3 &= m_a g
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

sendo :

$$\begin{aligned}
 aux_1 &= J_1 + J_2 + J_a + (m_2 + m_a)l_1^2 + m_2l_{c_2}^2 + m_al_2^2 + m_1l_{c_1}^2 \\
 aux_2 &= m_2l_1l_{c_2} + m_al_2l_1 \\
 aux_3 &= J_2 + J_a + m_2l_{c_2}^2 + m_al_2^2 \\
 m_a &= m_3 + m_4 + m_L \\
 J_a &= J_3 + J_4 + J_L
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

onde  $l_1$  e  $l_2$  representam os comprimentos dos elos 1 e 2,  $m_i$  ( $i = 1..4$ ) a massa de cada elo,  $l_{c_1}$  e  $l_{c_2}$  as distâncias do centro de gravidade dos elos 1 e 2,  $J_i$  ( $i = 1..4$ ) a inércia de cada elo.

Em [EL97] é usado outro sentido de giro dos ângulos de rotação de alguns dos elos motivo pelo qual alguns termos da sua dinâmica apresentam sinais trocados.

## A.4 Valores dos parâmetros

Na tabela A.2 são apresentados os valores nominais dos parâmetros do robô.

<b>Elo</b>	<b>inércia</b> $I_i$ ( $Kgm^2$ )	<b>massa</b> $m_i$ ( $Kg$ )	<b>comprimento</b> $l_i$ ( $m$ )	<b>centro de massa</b> $l_{c_i}$ ( $m$ )
1	0,23	11,4	0,25	0,118
2	0,16	19,5	0,25	0,116
3	0,1	2	–	–
4	0,1	1,5	0	0

Tabela A.2: Valores nominais dos parâmetros do robô SCARA

A maioria destes dados foi obtida de catálogos. Alguns, no entanto, foram determinados a partir de experimentos ou foram estimados. Os valores que possuem mais incertezas são os valores das inércias e das massas.

Uma descrição mais detalhada da parte mecânica e da programação deste robô pode ser encontrada em [GWG98].

# Apêndice B

## Controladores Digitais

Os controladores projetados no capítulo 4 para controlar o robô SCARA são analógicos e para implementá-los no sistema controlado por computador é necessário encontrar seu equivalente digital.

Seja o controlador analógico  $C(s)$  representado na figura B.1-(a).

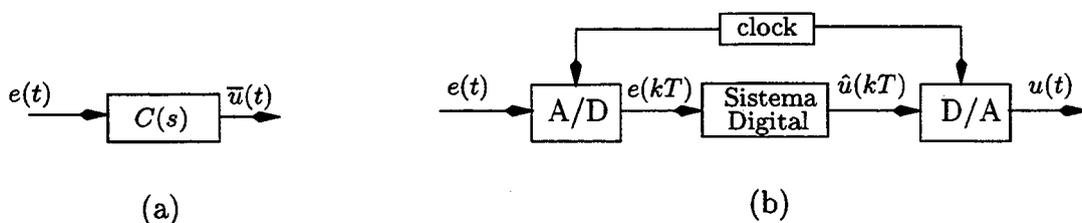


Figura B.1: Controlador analógico (a) e digital (b)

A configuração da figura B.1-(b) implementa digitalmente o controlador analógico e consiste de três partes : o conversor A/D, sistema digital ou algoritmo e o conversor D/A. A finalidade é encontrar um sistema digital  $C(z)$  tal que para qualquer entrada  $e(t)$  a saída  $\bar{u}(t)$  do controlador analógico e a saída  $u(t)$  do controlador digital sejam aproximadamente iguais. Da figura B.1-(b) pode-se observar que a saída  $e(kT)$  do conversor A/D é a amostra  $k$  da entrada  $e(t)$  amostrada com um período de amostragem  $T$ . O sistema digital  $C(z)$  tem como entrada  $e(kT)$  e como saída  $\hat{u}(kT)$ . O conversor D/A mantém o valor de  $\hat{u}$  constante até a chegada do novo valor no período de amostragem seguinte.

## B.1 Transformações

A tabela B.1 apresenta diferentes transformações utilizadas para encontrar o equivalente digital  $C(z)$  do controlador analógico  $C(s)$ . A variável  $T$  é o período de amostragem e  $\mathcal{Z}[C(s)]$  a transformada  $z$  da função de transferência  $C(s)$  [AW84], [Che93].

Descrição	Transformação
Método do impulso invariante	$C(z) = T \mathcal{Z}[C(s)]$
Método do degrau invariante	$C(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}[\frac{C(s)}{s}]$
Forward Difference	$s = \frac{z-1}{T}$
Backward Difference	$s = \frac{z-1}{Tz}$
Aproximação Trapezoidal	$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$
Mapeamento de pólos e zeros	pólos e zeros $z = e^{sT}$

Tabela B.1: Transformações para obter o controlador digital

As duas primeiras correspondem ao domínio do tempo e têm como desvantagem que a entrada de  $C(s)$  deve ser um impulso unitário ou um degrau. A transformação Forward Difference pode não manter a estabilidade do controlador se o período de amostragem  $T$  é muito grande. O método da Aproximação Trapezoidal tem a vantagem de mapear o semiplano esquerdo do plano  $s$  dentro do círculo unitário do plano  $z$ , mantendo sempre a estabilidade. Em [Che93] é indicado que, geralmente, os melhores resultados são obtidos com o método da Aproximação Trapezoidal, motivo pelo qual será utilizado neste trabalho.

## B.2 Controlador 2DOF digital

A estrutura apresentada na figura B.2 é equivalente à estrutura tradicional 2DOF da figura 3.2. Nesta nova estrutura o controlador é formado por dois blocos com funções de transferência próprias motivo pelo qual é utilizado para fazer as simulações e a implementação prática. A figura B.3 apresenta o equivalente digital deste controlador onde as funções de transferência analógicas foram transformadas em digitais usando alguma das transformações da tabela B.1.

Assim, por exemplo, seja a seguinte a função de transferência  $\frac{h(s)}{k(s)}$  de ordem 2 do

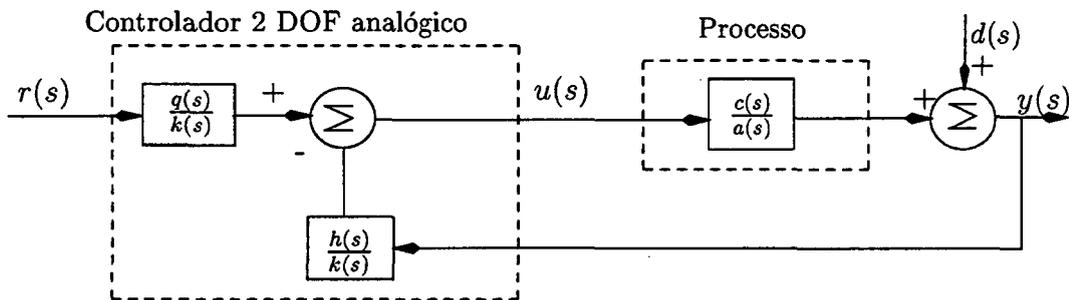


Figura B.2: Controlador 2DOF equivalente

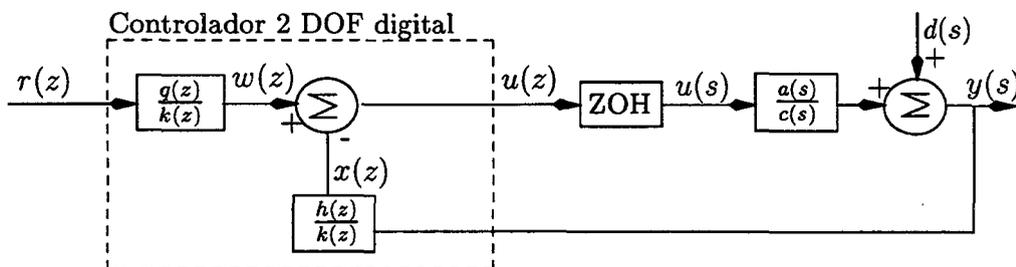


Figura B.3: Controlador 2DOF digital

controlador 2DOF analógico da figura B.2 :

$$\frac{h(s)}{k(s)} = \frac{h_1 s^2 + h_2 s + h_3}{k_1 s^2 + k_2 s + k_3} \quad (\text{B.1})$$

Usando a Aproximação Trapezoidal obtém-se a função de transferência em  $z$  :

$$\frac{h(z)}{k(z)} = \frac{\overbrace{(4h_1 + 2Th_2 + T^2h_3)}^{h_{1d}} + \overbrace{(-8h_1 + 2T^2h_3)}^{h_{2d}} z^{-1} + \overbrace{(4h_1 - 2Th_2 + T^2h_3)}^{h_{3d}} z^{-2}}{(4k_1 + 2Tk_2 + T^2k_3) + (-8k_1 + 2T^2k_3)z^{-1} + (4k_1 - 2Tk_2 + T^2k_3)z^{-2}} \quad (\text{B.2})$$

O mesmo pode ser feito para a função de transferência  $\frac{q(s)}{k(s)}$ .

O sinal de controle  $u(k)$  pode ser obtido usando equações diferença. Da figura B.3 têm-se as seguintes relações:  $r(k)q(z) = w(k)k(z)$ ,  $y(k)h(z) = x(k)k(z)$  e  $u(k) = w(k) - x(k)$ . Usando B.2 estas relações ficam determinadas por :

$$\begin{aligned}
w(k) &= \frac{1}{k_{1d}}[q_{1d}r(k) + q_{2d}r(k-1) + q_{3d}r(k-2) - k_{2d}w(k-1) - k_{3d}w(k-2)] \\
x(k) &= \frac{1}{k_{1d}}[h_{1d}y(k) + h_{2d}y(k-1) + h_{3d}y(k-2) - k_{2d}x(k-1) - k_{3d}x(k-2)] \\
u(k) &= w(k) - x(k)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Como os controladores da tabela 4.6, projetados para controlar o robô SCARA, são de ordem 2, então pode-se encontrar seu equivalente digital usando as relações (B.2) e (B.3).

### B.3 Controladores PD e PID digitais

No capítulo 4 também foram projetados controladores PD e PID analógicos para controlar a posição do robô SCARA. Para serem implementados é necessário encontrar seu equivalente digital. Seja o controlador analógico PD  $u(s) = (K_p + sK_d)e(s)$ . Usando a transformação Backward Difference, o controlador PD digital tem a forma :

$$u(k) = K_p e(k) + K_d \left( \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right) = K_p e(k) + K_d \dot{e}(k) \tag{B.4}$$

Seja o controlador analógico PID com a parte derivativa implementada como uma função de transferência própria [Che93] :

$$G(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} \right) \quad 3 \leq N \leq 10 \tag{B.5}$$

Usando a transformação Forward Difference para o integrador e a Backward Difference para o elemento derivativo, o equivalente digital do controlador PID (B.5) é determinado por [Che93] :

$$u(k) = -\alpha_4 u(k-1) - \alpha_5 u(k-2) + \alpha_1 e(k) + \alpha_2 e(k-1) + \alpha_3 e(k-2) \tag{B.6}$$

onde :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= K_p(1 + \gamma); & \alpha_2 &= TK_i - (1 + \beta)K_p - 2K_p\gamma \\
\alpha_3 &= K_p\beta - TK_i\beta + K_p\gamma; & \alpha_4 &= -(1 + \beta); & \alpha_5 &= \beta
\end{aligned} \tag{B.7}$$

sendo :

$$\beta = \frac{T_d}{T_d + NT} \quad \text{e} \quad \gamma = N\beta \tag{B.8}$$

No apêndice C os controladores digitais 2DOF, PD e PID, determinados por (B.3), (B.4) e (B.6) respectivamente, são implementados na linguagem XOberon.

# Apêndice C

## Programas no XOberon

Todos os programas de supervisão e controle do robô SCARA são feitos na linguagem de programação em tempo real XOberon. Estes programas são divididos em módulos nos quais são definidos variáveis e procedimentos. Cada módulo tem uma tarefa determinada a cumprir. Este apêndice é destinado a apresentar os principais procedimentos de dois módulos que permitiram implementar os diferentes algoritmos de controle (PD, PID e 2DOF) para controlar as juntas 1 e 2 do robô SCARA. Maiores detalhes sobre a linguagem de programação em tempo real XOberon pode ser encontrada em [Mos93],[Rei91]. Em [GWG98] é feita uma descrição do ambiente de programação, da interface com o usuário e dos principais módulos e procedimentos.

### C.1 Módulo Main3.Mod

Neste módulo, através da variável *controlador* do procedimento *Controller*, é escolhido o algoritmo de controle a ser utilizado. A continuação será apresentada só a parte deste procedimento onde é feita a escolha do controlador.

```

PROCEDURE Controller(ctrlEvent : XOK.Event);
    :
|GD.SStateCtrl :
(* inicio da escolha do algoritmo de controle *)
IF ( Controlador = 0 ) THEN    (* usar algoritmo de controle PD *)
    outValues[i].force:= stateCtrl[i].Algo(d[i].istValues.pos,
    sollValues[i].pos, d[i].istValues.speed, sollValues[i].speed);
ELSIF ( Controlador = 1 ) THEN    (* usar algoritmo de controle 2DOF *)
    outValues[i].force:= stateCtrl[i].Algo2DOF(d[i].istValues.pos,
    sollValues[i].pos,d[i].istValues.speed, sollValues[i].speed,i);
ELSIF (Controlador = 2 ) THEN    (* usar algoritmo de controle PID *)
    outValues[i].force:= stateCtrl[i].AlgoPID(d[i].istValues.pos,
    sollValues[i].pos,d[i].istValues.speed, sollValues[i].speed,i);
END;
(* fim da escolha do algoritmo de controle *)
|GD.SForceCtrl :
    :
END Controller;

```

## C.2 Módulo StateCtrl.Mod

Neste módulo são implementados os diferentes algoritmos de controle. Nos procedimentos *Init2DOF* e *InitPID* são inicializados os ganhos dos controladores 2DOF e PID respectivamente. No procedimento *Algo2DOF* é implementado o algoritmo do controlador 2DOF (equação diferença (B.3)). No *AlgoPID* é implementado o controlador PID (equação diferença (B.6)). Estes dois procedimentos são chamados desde o procedimento *Controller* do módulo *Main3.Mod*. No procedimento *ChangeParamCont1* são trocados os polinômios  $h(z)$ ,  $q(z)$  e  $k(z)$  do controlador 2DOF da junta 1. No *ChangeParamPID* são trocados os ganhos do controlador PID.

```

PROCEDURE Init2DOF*(q : GD.Vector4; force0, force1 : REAL ) : BOOLEAN;
(* Inicializa os ganhos do controlador de 2DOF - Aprox. Trapezoidal*)
VAR
  j : LONGINT;
BEGIN
XOK.NotInterruptible;
FOR j:= 0 TO 3 DO
  r1[j] := q[0];   r2[j] :=q[1];
  y1[j] := q[0];   y2[j] := q[1];
  x1[j] := 0.0;    x2[j] := 0.0 ;
  w1[j] := 0.0;    w2[j] := 0.0;
END;
(* Polinômios h(z), q(z) e k(z) para Junta 1*)
h1[0] := 0.65720118635667E5; h1[1] := -1.29964560679951E5;
h1[2] := 0.64248787880901E5;
q1[0] := 0.65724533124880E5; q1[1] := -1.29956560679951E5;
q1[2] := 0.64236373391688E5;
k1[0] := 4.17529858270156;   k1[1] := -8.0;
k1[2] := 3.82470141729844;
(* Polinômios h(z), q(z) e k(z) para Junta 2*)
h2[0] := 3.95664784674819E4; h2[1] := -7.75880449076441E4;
h2[2] := 3.80313188138512E4;
q2[0] := 3.95768977186142E4; q2[1] := -7.75800449076441E4;
q2[2] := 3.80128995627189E4;
k2[0] := 4.30411327650643;   k2[1] := -8.0;
k2[2] := 3.69588672349357;

FOR j:= 0 TO 1 DO
  force0filtrado[j] := force0;
  force1filtrado[j] := force1;
END;

XOK.Interruptible;
RETURN TRUE;
END Init2DOF;

```

```
PROCEDURE InitPID*( force0, force1 : REAL ) : BOOLEAN;
(* Inicializa os ganhos do controlador de PID *)
VAR j : LONGINT;
BEGIN
XOK.NotInterruptible;

FOR j:= 0 TO 2 DO
    erro1[j] := 0.0; u1[j] := force0;
    erro2[j] := 0.0; u2[j] := force1;
END;
(* Ganhos analógicos *)
Kp[0] := 4000.0; Kp[1] := 4000.0;
Kd[0] := 60.0; Kd[1] := 60.0;
Ki[0] := 800.0; Ki[1] := 800.0;
N := 3; Ts := 0.001;

(* Ganhos digitais *)
FOR j:= 0 TO 1 DO
    Td[j] := Kd[j] / Kp[j];
    beta[j] := Td[j] / (Td[j] + N*Ts);
    gamma[j] := N*beta[j];
    alfa1[j] := Kp[j]*(1+gamma[j]);
    alfa2[j] := Ts*Ki[j] - (1+beta[j])*Kp[j] - 2*Kp[j]*gamma[j];
    alfa3[j] := Kp[j]*beta[j] - Ts*Ki[j]*beta[j] + Kp[j]*gamma[j];
    alfa4[j] := -(1+beta[j]); alfa5[j] := beta[j];
END;

FOR j:= 0 TO 1 DO
    force0filtrado[j] := force0;
    force1filtrado[j] := force1;
END;

XOK.Interruptible;
RETURN TRUE;
END InitPID;
```

```
PROCEDURE (c : StateCtrl) Algo2DOF*(istpos, sollpos, istspeed, sollspeed :  
                                REAL; i : LONGINT) : REAL;  
  
VAR  
    forceout : REAL;  
  
BEGIN  
    sollpos:= RF.RampFilter(sollpos, c.rp);  
    IF i = 0 THEN      (* Controlador da junta 1 *)  
        r1[2] := r1[1];   r1[1] := r1[0];   r1[0] := sollpos;  
        y1[2] := y1[1];   y1[1] := y1[0];   y1[0] := istpos;  
        w1[2] := w1[1];   w1[1] := w1[0];  
        x1[2] := x1[1];   x1[1] := x1[0];  
  
        w1[0] := ( q1[0]*r1[0] + q1[1]*r1[1] + q1[2]*r1[2] - k1[1]*w1[1] -  
                  k1[2]*w1[2] ) / k1[0];  
        x1[0] := ( h1[0]*y1[0] + h1[1]*y1[1] + h1[2]*y1[2] - k1[1]*x1[1] -  
                  k1[2]*x1[2] ) / k1[0];  
  
        forceout := SHORT(w1[0] - x1[0]);  (*Sinal de controle junta 1*)  
  
    ELSE                (* Controlador da junta 2 *)  
        r2[2] := r2[1];   r2[1] := r2[0];   r2[0] := sollpos;  
        y2[2] := y2[1];   y2[1] := y2[0];   y2[0] := istpos;  
        w2[2] := w2[1];   w2[1] := w2[0];  
        x2[2] := x2[1];   x2[1] := x2[0];  
  
        w2[0] := ( q2[0]*r2[0] + q2[1]*r2[1] + q2[2]*r2[2] - k2[1]*w2[1] -  
                  k2[2]*w2[2] ) / k2[0];  
        x2[0] := ( h2[0]*y2[0] + h2[1]*y2[1] + h2[2]*y2[2] - k2[1]*x2[1] -  
                  k2[2]*x2[2] ) / k2[0];  
  
        forceout := SHORT(w2[0] - x2[0]);  (*Sinal de controle junta 2*)  
    END;  
  
    RETURN forceout  
END Algo2DOF;
```

```

PROCEDURE (c : StateCtrl) AlgoPID*(istpos, sollpos, istspeed, sollspeed :
                                REAL; i : LONGINT) : REAL;
VAR
    forceout : REAL;
BEGIN
    sollpos := RF.RampFilter(sollpos, c.rp);
    IF i = 0 THEN      (* Controlador da junta 1 *)
        u1[2] := u1[1]; u1[1] := u1[0];
        erro1[2] := erro1[1]; erro1[1] := erro1[0];
        erro1[0] := sollpos - istpos;

        u1[0] := SHORT(-alfa4[0]*u1[1]-alfa5[0]*u1[2]+alfa1[0]*erro1[0]+
                       alfa2[0]*erro1[1] + alfa3[0]*erro1[2]);
        forceout := u1[0];      (*Sinal de controle junta 1*)
    ELSE              (* Controlador da junta 2 *)
        u2[2] := u2[1]; u2[1] := u2[0];
        erro2[2] := erro2[1]; erro2[1] := erro2[0];
        erro2[0] := sollpos - istpos;

        u2[0] := SHORT(-alfa4[1]*u2[1]-alfa5[1]*u2[2]+alfa1[1]*erro2[0]+
                       alfa2[1]*erro2[1] + alfa3[1]*erro2[2]);
        forceout := u2[0];      (*Sinal de controle junta 2*)
    END;

    RETURN forceout
END AlgoPID;

```

```

PROCEDURE ChangeParamCont1* (ganhos : GD.Vector12) : BOOLEAN;
BEGIN      (*Troca os polinômios do controlador 2DOF da junta 1*)
    XOK.NotInterruptible;
    h1[0]:=ganhos[0]; h1[1]:=ganhos[1]; h1[2]:=ganhos[2]; h1[3]:=ganhos[3];
    q1[0]:=ganhos[4]; q1[1]:=ganhos[5]; q1[2]:=ganhos[6]; q1[3]:=ganhos[7];
    k1[0]:=ganhos[8]; k1[1]:=ganhos[9]; k1[2]:=ganhos[10]; k1[3]:=ganhos[11];
    XOK.Interruptible;
    RETURN TRUE;
END ChangeParamCont1;

```

```
PROCEDURE ChangeParamPID* (ganhos: GD.Vector6L; fator: LONGINT): BOOLEAN;
VAR j : LONGINT;
BEGIN
XOK.NotInterruptible;
Kp[0] := ganhos[0]; Kp[1] := ganhos[1];
Kd[0] := ganhos[2]; Kd[1] := ganhos[3];
Ki[0] := ganhos[4]; Ki[1] := ganhos[5]; N := fator;
FOR j:= 0 TO 1 DO
    Td[j] := Kd[j] / Kp[j];
    beta[j] := Td[j] / (Td[j] + N*Ts);
    gamma[j] := N*beta[j];    alfa1[j] := Kp[j]*(1+gamma[j]);
    alfa2[j] := Ts*Ki[j] - (1+beta[j])*Kp[j] - 2*Kp[j]*gamma[j];
    alfa3[j] := Kp[j]*beta[j] - Ts*Ki[j]*beta[j] + Kp[j]*gamma[j];
    alfa4[j] := -(1+beta[j]);    alfa5[j] := beta[j];
END;
XOK.Interruptible;
RETURN TRUE;
END ChangeParamPID;
```

Foram programados outros módulos para realizar tarefas que complementam os procedimentos anteriores. Existe um módulo encarregado de abrir e ler um arquivo, gerado pelo Matlab, onde estão os polinômios dos controladores 2DOF. Estes novos polinômios são enviados para o algoritmo de controle. Um outro módulo é encarregado de armazenar os valores da posição e velocidade das juntas num arquivo para ser lido pelo Matlab. Estes módulos não são apresentados.

# Referências Bibliográficas

- [AM89] Brian Anderson and John Moore. *Optimal Control Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, 1989.
- [AN97] Martins Almeida Nardênio. O controle adaptativo de robôs manipuladores no espaço da tarefa. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, Setembro 1997.
- [AS86] Haruhiko Asada and Jean-Jacques Slotine. *Robot Analysis and Control*. Willey-Interscience Publication, 1986.
- [AW84] Karl J. Astrom and Bjorn Wittenmark. *Computer Controlled Systems Theory and Design*. Prentice-Hall, 1984.
- [Bél95] Pierre R. Bélanger. *Control Engineering : A Modern Approach*. Saunders Coll. Publ., 1995.
- [CdO97] Luis Gustavo Cavalcanti de Oliveira. Controle a estrutura variável aplicado a um atuador hidráulico. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, Julho 1997.
- [CdSL98] Cleto Cavalcanti de Souza Leal. Estabilidade no controle de força em robôs manipuladores. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, Março 1998.
- [Che84] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.
- [Che93] C. T. Chen. *Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State Space and Algebraic Methods*. Saunders College Publishing, 1993.

- [Cra86] J. J. Craig. *Introduction to Robotics Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company, 1986.
- [DB95] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [DC96] José Jaime Da Cruz. *Controle Robusto Multivariável*. Editora da Universidade de São Paulo, 1996.
- [dWSB96] Carlos Canudas de Wit, Bruno Siciliano, and Georges Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag London Limited, 1996.
- [EL97] Meng Joo Er and Kang Chew Liew. Control of adept one scara robot using neural networks. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 44(6):762–768, December 1997.
- [FPEN86] G. Franklin, D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamics Systems*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1986.
- [FPEN94] G. Franklin, D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamics Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [GR98] Alejandro Rafael García Ramírez. Controle de posição de robôs manipuladores com transmissões flexíveis. Dissertação de Mestrado, Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, Março 1998.
- [GWG98] J. Golin, L. Weihmann, and R. Guenther. Manual do usuário do robô inter. Relatório Técnico, Laboratório de Robótica da Universidade Federal de Santa Catarina, 1998.
- [HB97] J. W. Howze and S. P. Bhattacharyya. Robust tracking, error feedback, and two-degree-of-freedom controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):980–983, July 1997.
- [KB97] L. H. Keel and S. P. Bhattacharyya. Robust, fragil or optimal ? *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1098–1105, August 1997.
- [KCN89] Richard D. Klafter, Thomas A. Chmielewski, and Michael Negin. *Robotic Engineering: An Integrated Approach*. Prentice-Hall International Editions, 1989.

- [KW91] Chen-Yuan Kuo and Shay-Ping T. Wang. Robust position control of robotic manipulators in cartesian coordinates. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 7(5):653–659, October 1991.
- [LAD93] F. L. Lewis, C. T. Abdallah, and D. Dawson. *Control of Robot Manipulators*. Macmillan Publishing Comapny, 1993.
- [Mos93] H. Mossenbock. *Object-Oriented Programming in Oberon-2*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg - Germany, 1993.
- [NT95] S. Nicosia and P. Tomei. A tracking controller for flexible joint robots using only link position feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):885–890, May 1995.
- [QD91] Zhihua Qu and John Dorsey. Robust tracking control of robots by a linear feedback law. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(9):1081–1084, September 1991.
- [QD96] Zhihua Qu and Darren Dawson. *Robust Tracking Control of Robot Manipulators*. Willey, 1996.
- [Qu95] Zhihua Qu. Input-output robust tracking control design for flexible joint robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1):78–83, January 1995.
- [Rea94] Mark C. Readman. *Flexible Joint Robots*. CRC Press, 1994.
- [Rei91] M. Reiser. *The Oberon System: user guide and programmer's manual*. Addison-Wesley Publishing Company, New York - USA, 1991.
- [Spo87] M. W. Spong. Modeling and control of elastic joint robots. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 109:310–319, December 1987.
- [SYO88] T. Sugie, T. Yoshikawa, and T. Ono. Robust controller design for robot manipulator. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 110:94–96, March 1988.
- [Wol95] W. A. Wolovich. *Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design*. Saunders College Publishing, 1995.
- [ZP94] Man Zhihong and M. Palaniswami. Robust tracking control for rigid robotic manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(1):154–159, January 1994.