

**SILAS DO AMARAL**

**CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL DE ROBÔS MANIPULADORES  
INTERAGINDO COM AMBIENTES PASSIVOS**

**FLORIANÓPOLIS**

**2000**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL DE ROBÔS MANIPULADORES**  
**INTERAGINDO COM AMBIENTES PASSIVOS**

Tese submetida à  
Universidade Federal de Santa Catarina  
como parte dos requisitos para a  
obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

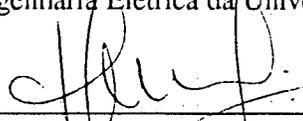
**SILAS DO AMARAL**

Florianópolis, Novembro de 2000.

**CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL DE ROBÔS MANIPULADORES  
INTERAGINDO COM AMBIENTES PASSIVOS**

Silas do Amaral

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Controle, Automação e Informática Industrial*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.



Edson Roberto de Pieri, Dr.  
Orientador

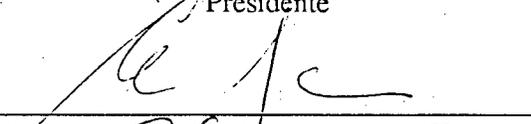


Aguinaldo Silveira e Silva, PhD  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

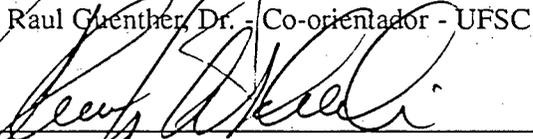
Banca Examinadora:



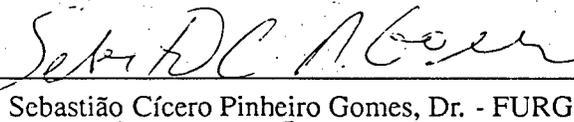
Edson Roberto de Pieri, Dr. - Orientador - UFSC  
Presidente

Raul Guenther, Dr. - Co-orientador - UFSC

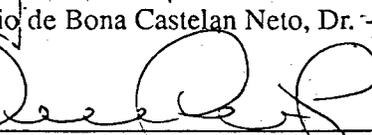
Hans-Joerg Andreas Schneebeli, Dr. - UFES

Sebastião Cícero Pinheiro Gomes, Dr. - FURG

Eugênio de Bona Castelan Neto, Dr. - UFSC

Werner Kraus Jr, PhD - UFSC

*"... guia-me pelo caminho eterno."*

(Salmo 139.24b - Bíblia Sagrada)

*Dedico este trabalho à minha esposa Keila  
e aos nossos filhos Gabriel, Marcus e Elisa,  
por quem confesso uma dívida impagável  
diante do amor, da compreensão e da paciência  
que tiveram comigo nestes anos em que cuidei mais  
de mim mesmo e do meu trabalho, do que deles.*

## *Agradecimentos*

*Inicialmente, quero agradecer a Deus por ter me permitido chegar ao fim deste trabalho, e ter alcançado os objetivos propostos.*

*Registro, também, o meu apreço pelo professor Edson Roberto de Pieri, por sua orientação, paciência, estímulo e pelo seu jeito amigo de lidar com seus orientados. Agradeço ao professor Raul Guenther pela co-orientação deste trabalho e, especialmente, pela minha "alfabetização" em robótica.*

*Aos membros da banca, expresso minha gratidão por suas relevantes críticas e sugestões, que contribuíram para melhorar o texto final.*

*Não posso deixar de reconhecer o apoio e o estímulo proporcionados pelos professores e colegas do LCMI, além do elevado nível do trabalho que desenvolvem.*

*Aos companheiros da UDESC, especialmente os do DEE, agradeço pela torcida e pela ajuda que deram, sempre que precisei.*

*Agradeço à UDESC e à CAPES, que financiaram este trabalho de doutoramento, e à UFSC, que disponibilizou profissionais capazes e equipamentos necessários a sua realização.*

*Finalmente, não posso esquecer de agradecer o carinho e o apoio dos meus pais e dos familiares e amigos mais chegados.*

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

## **CONTROLE A ESTRUTURA VARIÁVEL DE ROBÔS MANIPULADORES INTERAGINDO COM AMBIENTES PASSIVOS**

**Silas do Amaral**

Novembro/2000

Orientador: Edson Roberto de Pieri

Área de Concentração: Controle, Automação e Informática Industrial

Palavras-chave: Robôs Manipuladores Rígidos e de Juntas Flexíveis; Controle de Força e Posição; Controle a Estrutura Variável; Incertezas Paramétricas; Perturbações Externas.

Número de Páginas: 147

Em Robótica, muitas tarefas requerem uma efetiva interação do robô com o ambiente. Esta interação é caracterizada por uma força de contato, que precisa ser controlada. Nos últimos vinte anos, diversas leis de controle direcionadas a situações deste tipo foram propostas. Entretanto, somente algumas levam em conta perturbações externas e incertezas paramétricas do sistema. Por isso, neste trabalho, são propostos controladores robustos baseados em estrutura variável, que têm por objetivo controlar o movimento e a força de contato do efetuador final de robôs manipuladores, durante a realização de tarefas em ambientes passivos, mesmo na presença das perturbações e incertezas mencionadas acima. Estudam-se controladores tanto para o robô rígido como para o robô de juntas flexíveis, em contato com ambientes cinemáticos, flexíveis e dinâmicos. Diversos resultados de simulação são apresentados, entre os quais uma comparação do controlador a estrutura variável com um controlador baseado em dinâmica inversa.

Abstract of Thesis presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of  
Doctor in Electrical Engineering.

**VARIABLE STRUCTURE CONTROL OF ROBOT MANIPULATORS  
INTERACTING WITH PASSIVE ENVIRONMENTS**

**Silas do Amaral**

November/2000

Advisor: Edson Roberto de Pieri

Area of Concentration: Control, Automation and Industrial Informatic

Keywords: Rigid/Flexible-Joint Robot Manipulator; Force/Position Control; Variable Structure Control; Parameter Uncertainties; External Perturbations.

Number of Pages: 147

In Robotics, many tasks require an effective interaction of the robot with the environment. This interaction is characterized by a contact force, which needs to be controlled. In the last twenty years, several control laws were reported directed to this kind of task. However, few of these control laws take into account external perturbations and parametric uncertainties of the robot-environment system. Aiming at application of such cases, robust controllers based on the variable structure approach are proposed. The objective is to control the motion and the contact force of the end-effector of the robot manipulator, during the execution of tasks in passive environments, even if the above mentioned perturbations and uncertainties are present. Controllers applied to rigid and joint-flexible robots in contact with kinematic, flexible and dynamic environments are studied. Many simulation results are presented, including a comparison between the variable structure controller and a controller based on inverse dynamic.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Aplicações de Robôs Manipuladores . . . . .	1
1.2	Desenvolvimento do Controle de Força e Posição . . . . .	4
1.2.1	Abordagens Básicas . . . . .	4
1.2.2	Controle Híbrido de Robôs Rígidos . . . . .	5
1.2.3	Controle de Robôs com Flexibilidade na Juntas . . . . .	6
1.2.4	Incidência de Incertezas e de Perturbações . . . . .	7
1.3	Proposta da Tese . . . . .	8
1.4	Organização do Texto . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Robô Rígido em Contato com Ambientes Passivos</b>	<b>10</b>
2.1	Descrição de Ambientes Passivos . . . . .	10
2.2	Modelo do Robô Rígido em Contato com Ambiente Dinâmico . . . . .	14
2.2.1	Modelo Cinemático do Robô . . . . .	14
2.2.2	Modelo Cinemático do Ambiente . . . . .	16
2.2.3	Propriedades dos Contatos Cinemáticos e/ou Dinâmicos . . . . .	17
2.2.4	Modelo Dinâmico do Sistema Robô - Ambiente . . . . .	20
2.2.5	Modelo Dinâmico Compacto . . . . .	24
2.3	Controle do Sistema Robô Rígido - Ambiente Dinâmico . . . . .	25
2.3.1	Controle Linearizante e Desacoplante . . . . .	25
2.3.2	Controle da Força na Direção Dinâmica . . . . .	27
2.3.3	Controle do Movimento na Direção Dinâmica . . . . .	30
2.4	Robô Rígido em Contato com Ambiente Puramente Cinemático . . . . .	31
2.4.1	Robô Rígido em Ambiente com Restrições: Modelo e Controle . . . . .	31
2.4.2	Robô Rígido em Ambiente Livre de Restrições . . . . .	33
2.5	Modelo e Controle do Sistema Robô Rígido - Ambiente Flexível . . . . .	34

2.6	Considerações Finais . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Controle a Estrutura Variável</b>	<b>38</b>
3.1	Conceituação do Controle a Estrutura Variável . . . . .	38
3.2	Modelo Genérico de Sistemas Não-Lineares . . . . .	39
3.3	Síntese do Controlador . . . . .	40
3.4	Análise de Robustez . . . . .	42
3.4.1	Análise do Caso Nominal . . . . .	44
3.4.2	Análise do Caso Perturbado . . . . .	44
3.5	Uso da Camada Limite . . . . .	46
3.5.1	Conseqüências da Camada Limite Sobre a Robustez . . . . .	47
3.5.2	Limite Superior de $W$ . . . . .	48
3.6	CEV Aplicado ao Sistema Robô-Ambiente . . . . .	50
3.6.1	Robô Rígido em Contato com Ambiente Dinâmico: Controle da Força na Direção Dinâmica . . . . .	50
3.6.2	Obtenção de $W$ . . . . .	53
3.6.3	Robô Rígido em Contato com Ambiente Dinâmico: Controle do Movimento na Direção Dinâmica . . . . .	54
3.6.4	Robô Rígido em Contato com Ambiente Cinemático . . . . .	56
3.6.5	Robô Rígido em Contato com Ambiente Flexível . . . . .	58
3.7	Considerações Finais . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Resultados de Simulação Para o Robô Rígido</b>	<b>61</b>
4.1	Ambientes Cinemáticos . . . . .	61
4.1.1	Parâmetros do Manipulador e Ganhos dos Controladores . . . . .	61
4.1.2	Definição da Tarefa . . . . .	63
4.1.3	Resultados das Simulações . . . . .	65
4.2	Ambientes Dinâmicos . . . . .	78
4.2.1	Parâmetros do Sistema e Ganhos do CEV . . . . .	78
4.2.2	Definição da Tarefa . . . . .	79
4.2.3	Resultados das Simulações: Controle da Força na Direção Dinâmica . . . . .	80
4.2.4	Resultados das Simulações: Controle da Posição na Direção Dinâmica . . . . .	87
4.3	Ambientes Flexíveis . . . . .	89
4.3.1	Parâmetros do Sistema e Ganhos do CEV . . . . .	90
4.3.2	Definição da Tarefa . . . . .	90

4.3.3	Resultados das Simulações . . . . .	91
4.4	Considerações Finais . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Robô de Juntas Flexíveis em Contato com Ambientes Passivos</b>	<b>96</b>
5.1	Robô de Juntas Flexíveis em Contato com Ambientes Passivos . . . . .	96
5.1.1	Modelo Dinâmico de Robôs de Juntas Flexíveis . . . . .	97
5.1.2	RJF em Contato com Ambiente Dinâmico . . . . .	102
5.2	Controle de RJF em Contato com Ambiente Dinâmico . . . . .	103
5.3	Considerações Finais . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Resultados de Simulação Para o Robô de Juntas Flexíveis</b>	<b>106</b>
6.1	Ambientes Cinemáticos . . . . .	106
6.1.1	Parâmetros do Manipulador e Ganhos do Controlador . . . . .	108
6.1.2	Resultados das Simulações . . . . .	109
6.2	Ambientes Dinâmicos . . . . .	117
6.2.1	Parâmetros do Sistema e Ganhos dos Controladores . . . . .	118
6.2.2	Resultados das Simulações . . . . .	118
6.3	Considerações Finais . . . . .	125
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>126</b>
7.1	Principais Contribuições . . . . .	126
7.2	Perspectivas de Trabalhos Futuros . . . . .	127
<b>A</b>	<b>Modelo das Forças de Atrito</b>	<b>129</b>
<b>B</b>	<b>Equação de Bernoulli</b>	<b>133</b>
<b>C</b>	<b>Modelo do Robô Cotovelar Rígido</b>	<b>135</b>
C.1	Modelo Cinemático . . . . .	135
C.2	Modelo Dinâmico . . . . .	137
C.3	Comentários . . . . .	139
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>140</b>

# Lista de Figuras

2.1	Robô rígido em contato com ambiente cinemático; b) Robô rígido em contato com ambiente dinâmico; c) Robô rígido em contato com ambiente flexível. . . . .	12
2.2	Variáveis das Juntas em um Robô de 6 Graus de Liberdade. . . . .	14
2.3	Contato puramente cinemático. . . . .	19
2.4	Contato cinemático e/ou dinâmico. . . . .	19
2.5	Esquemático do Controle Linearizante e Desacoplante. . . . .	25
2.6	Parede flexível. À esquerda: situação de repouso. À direita: deformação em decorrência da aplicação de força. . . . .	34
3.1	Trajatória de estado de um sistema sob a ação de um CEV. . . . .	39
3.2	Ilustração do fenômeno conhecido como <i>chattering</i> . . . . .	46
3.3	Uso da camada limite. . . . .	47
3.4	Trajatória de $\sigma$ dentro da camada limite. . . . .	49
4.1	Robô cotovelar realizando tarefa num plano inclinado. . . . .	62
4.2	Trajórias desejadas para posição e velocidade do EF. . . . .	64
4.3	Caso 1 - Posição e velocidade das juntas. . . . .	66
4.4	Caso 1 - Superfícies de chaveamento. . . . .	67
4.5	Caso 1 - Erros de posição e de velocidade. . . . .	67
4.6	Caso 1 - Erros de força. . . . .	68
4.7	Caso 1 - Ações de controle. . . . .	68
4.8	Caso 2 - Erros de força. . . . .	69
4.9	Caso 2 - Erros de posição e de velocidade. . . . .	70
4.10	Caso 3 - Parâmetros superestimados: erros de posição e de velocidade. . . . .	71
4.11	Caso 3 - Parâmetros superestimados: erros de força. . . . .	72
4.12	Caso 3 - Parâmetros superestimados: ações de controle. . . . .	72
4.13	Caso 3 - Parâmetros subestimados: erros de posição e de velocidade. . . . .	73

4.14	Caso 3 - Parâmetros subestimados: erros de força. . . . .	73
4.15	Caso 3 - Parâmetros subestimados: ações de controle. . . . .	74
4.16	Caso 4 - Erros de posição e de velocidade. . . . .	75
4.17	Caso 4 - Erros de força. . . . .	75
4.18	Caso 4 - Ações de controle. . . . .	76
4.19	Caso 4 - Perturbação com frequência baixa: Erros de força. . . . .	76
4.20	Caso 4 - Perturbação com frequência alta: Erros de força. . . . .	77
4.21	Caso 5 - Erros de força. . . . .	77
4.22	Robô cotovelar interagindo com ambiente dinâmico. . . . .	78
4.23	Caso 1 - Movimento na direção cinemática. . . . .	81
4.24	Caso 1 - Força e posição na direção dinâmica. . . . .	81
4.25	Caso 2 - Movimento na direção cinemática. . . . .	82
4.26	Caso 2 - Força e posição na direção dinâmica. . . . .	83
4.27	Caso 2 - Ações de controle. . . . .	83
4.28	Força desejada. . . . .	84
4.29	Caso 3 - Força e movimento na direção dinâmica. . . . .	84
4.30	Caso 3 - Ações de controle. . . . .	85
4.31	Robô cotovelar realizando tarefa em um plano vertical. . . . .	85
4.32	Caso 3 - Ações de controle. . . . .	86
4.33	Caso 3 - Forças de contato. . . . .	86
4.34	Caso 4 - Forças de contato. . . . .	87
4.35	Posição das juntas. . . . .	88
4.36	Força e posição na direção dinâmica. . . . .	88
4.37	Ações de controle. . . . .	89
4.38	Robô cotovelar interagindo com ambiente flexível. . . . .	90
4.39	Caso 1 - Erros de posição e de velocidade nas direções flexível e cinemática. . . . .	92
4.40	Caso 1 - Força na direção flexível. . . . .	92
4.41	Caso 1 - Ações de controle. . . . .	93
4.42	Caso 2 - Deflexão do ambiente na direção flexível. . . . .	93
4.43	Caso 3 - Erros de posição na direção flexível, com e sem medida de força. . . . .	94
5.1	Representação esquemática de uma junta flexível de robô. . . . .	98
5.2	Junta flexível de robô - Variáveis refletidas ao lado dos elos. . . . .	98
5.3	Esquema de controle em cascata. . . . .	103

6.1	RJF realizando tarefa em um plano vertical. . . . .	107
6.2	Trajétórias desejadas para posição e velocidade do EF. . . . .	107
6.3	Caso 1 - Posições e velocidades das juntas, no lado dos elos - $q$ e $\dot{q}$ . . . . .	110
6.4	Caso 1 - Diferenças entre as posições (velocidades) das juntas do RJF e do robô rígido. . . . .	110
6.5	Caso 1 - Posições e velocidades das juntas, no lado dos motores - $q_m$ e $\dot{q}_m$ . . . . .	111
6.6	Caso 1 - Erros de posição e de velocidade. . . . .	111
6.7	Caso 1 - Erros de força. . . . .	112
6.8	Caso 2 - Movimento do EF. . . . .	112
6.9	Caso 2 - Comportamento da força normal ao plano. . . . .	113
6.10	Caso 3 - Movimento das juntas, no lado dos elos. . . . .	114
6.11	Caso 3 - Movimento das juntas, no lado dos motores. . . . .	114
6.12	Caso 3 - Movimento do EF. . . . .	115
6.13	Caso 3 - Ações de controle. . . . .	115
6.14	Caso 3 - Comportamento da força normal ao plano. . . . .	116
6.15	Caso 4 - Movimento do EF. . . . .	116
6.16	Caso 4 - Comportamento da força normal ao plano. . . . .	117
6.17	Caso 4 - Ações de controle. . . . .	117
6.18	Interação de um RJF com um ambiente dinâmico. . . . .	118
6.19	Caso 1 - Movimento na direção cinemática. . . . .	119
6.20	Caso 1 - Força e posição na direção dinâmica. . . . .	120
6.21	Caso 1 - Ações de controle. . . . .	120
6.22	Caso 2 - Movimento na direção cinemática. . . . .	121
6.23	Caso 2 - Força e posição na direção dinâmica. . . . .	121
6.24	Caso 2 - Ações de controle. . . . .	122
6.25	Força desejada. . . . .	122
6.26	Caso 3 - Movimento das juntas, no lado dos elos. . . . .	123
6.27	Caso 3 - Movimento das juntas, no lado dos motores. . . . .	124
6.28	Caso 3 - Força e Posição na direção dinâmica. . . . .	124
6.29	Caso 4 - Força e Posição na direção dinâmica. . . . .	125
A.1	Força decorrente do atrito viscoso. . . . .	130
A.2	Força decorrente dos atritos viscoso e dinâmico. . . . .	131
A.3	Força decorrente dos atritos viscoso, dinâmico e estático. . . . .	131
C.1	Robô rígido de dois graus de liberdade. . . . .	136

# Capítulo 1

## Introdução

O controle de robôs manipuladores se desenvolveu muito nos últimos vinte anos, aí incluídos os esforços relativos ao controle da força de contato do Efetuador Final (EF) com o ambiente. No entanto, ainda há um longo caminho a ser percorrido no que se refere a aplicações sofisticadas, que levem em conta interações significativas do robô com o ambiente de trabalho e que, ao mesmo tempo, considerem a incidência de perturbações no sistema manipulador-ambiente. É justamente para este tipo de aplicação que o presente trabalho se dirige. Nele, é investigado o uso de controladores a estrutura variável para o controle simultâneo de força e posição, tendo como base a modelagem do sistema robô-ambiente proposta por De Luca e Manes [1].

### 1.1 Aplicações de Robôs Manipuladores

A robótica teve sua origem moderna na necessidade de manipular materiais perigosos, sem expor o operador à radiação. Este problema foi resolvido através de manipuladores mecânicos mestre-escravo, aprimorados anos mais tarde com a inclusão de servos elétricos. Nestes últimos, o operador guiava o mestre com a sua mão e sentia as forças de contato experimentadas pelo escravo, que eram refletidas através das juntas de ambos os dispositivos [2].

Nos anos que se seguiram, o desenho e a automação destes manipuladores foram se aprimorando, possibilitando o desenvolvimento de diversas aplicações em áreas tão distintas como a indústria e a medicina. Apesar da variedade de manipuladores e de suas aplicações, o uso mais comum dos robôs industriais ainda se caracteriza pela execução repetitiva de uma seqüência pré-estabelecida de movimentos. De um modo geral, pode-se afirmar que as aplicações de robôs manipuladores visam, principalmente, as tarefas tediosas, repetitivas, perigosas, ou que exigem perícia, força ou destreza além da capacidade humana [3].

Do ponto de vista da interação com o ambiente, as aplicações podem ser divididas em duas cate-

gorias [4]:

- as que se caracterizam por uma interação fraca com o ambiente, para as quais é suficiente controlar o movimento do EF, fazendo-o seguir uma trajetória pré-especificada (caso típico da pintura) e
- as que apresentam significativa interação com o ambiente (esmerilhamento, por exemplo), que demandam, além do controle do movimento, também o controle da força aplicada.

Na primeira categoria, estão incluídas aplicações, tais como: pintura a spray, solda a ponto, tarefas que se caracterizam por pegar uma peça e colocá-la numa posição específica, etc. Nestas tarefas, é suficiente controlar apenas a trajetória do EF, pois, ou inexistente o contato com o objeto de trabalho, ou ele é de uma natureza tal que não requer o controle da força aplicada. Por exemplo, no caso de tarefas do tipo *pegar uma peça e colocá-la em outro lugar*, há contato com a peça, porém somente para segurá-la, não para executar um trabalho com força controlada sobre ela.

Na segunda categoria, as tarefas são mais complexas. Elas não são definidas simplesmente por meio de uma trajetória a ser seguida no espaço livre, mas também por restrições ao movimento impostas pelo ambiente. Neste caso, é fundamental controlar, também, as forças (e/ou momentos) resultantes nas direções em que o movimento é restrito, a despeito de perturbações externas, de incertezas paramétricas, de dinâmicas não modeladas ou da dinâmica do ambiente. A maior complexidade deste tipo de tarefas é evidenciada no maior número e diversidade de sensores, que são requeridos para executá-las com correção, e nos variados ambientes de trabalho com os quais o EF interage, desde os absolutamente rígidos até os que apresentam comportamento dinâmico em uma ou mais direções. Em geral, exigem, pelo menos, a inclusão de sensores de força.

Para prevenir contatos indesejados com obstáculos em posições não previstas ou não previstas com precisão, pode-se usar sensores de proximidade. Com isso, o contato é evitado, modificando-se em tempo real a trajetória do EF, com base nas informações destes sensores. Dependendo do ponto de vista, esta situação pode ser encarada como da primeira ou como da segunda categoria.

Diversas pesquisas têm sido realizadas visando encurtar a distância entre a teoria e a prática no que se refere a aplicações com forte interação com o ambiente. Num trabalho recente [5], por exemplo, foram testados diferentes controladores em um robô industrial, incluindo um controlador adaptativo baseado no modelo. A tarefa, realizada com sucesso, especialmente pelo controlador adaptativo, consistia em desenhar um círculo num plano inclinado, isto é, uma tarefa que exigia o controle simultâneo da força e da posição. Entretanto, ainda há muito a ser feito no que se refere a uma melhor descrição do contato com o ambiente, do próprio ambiente, e no que se refere ao nível de automação do manipulador, que hoje realiza principalmente tarefas simples, repetitivas e sem imprevistos [6].

O uso de sensores de força pode aliviar as exigências quanto à precisão da posição do EF e da descrição da geometria da superfície de contato, permitindo a utilização de equipamentos menos caros na fase de planejamento da tarefa. Os sensores de visão produzem resultados semelhantes, não possibilitando, porém, o controle da força aplicada. A inclusão dos sensores de força viabiliza [4]:

- a execução de tarefas com segurança, pois podem detectar colisões com obstáculos;
- a manipulação de cargas frágeis;
- a pesagem, a determinação do centro de massa e a identificação de peças;
- o seguimento de um contorno (casos da soldagem e do esmerilhamento);
- a realização de tarefas que envolvam restrições (montagem, por exemplo);
- a execução de tarefas em que haja necessidade de controlar a força aplicada (corte, rebarbação, polimento, perfuração, etc) e, finalmente,
- a cooperação entre robôs, que também é um problema de movimento sujeito a restrições.

Atualmente, relatos de aplicações industriais bem sucedidas de robôs realizando tarefas que exijam grande interação com o ambiente de trabalho não são numerosos. Como ilustração, considere-se os seguintes exemplos:

- Inspeção de soldagem em instalações submarinas por meio de um sistema robotizado, cujo objetivo é detectar fendas nas tubulações. Para que isto seja realizado, o contato deve ser mantido, apesar de perturbações e/ou irregularidades na superfície de contato, havendo real necessidade do controle da força de interação [7].
- Uso de um robô manipulador para remover cabeças de peixes, monitorando a impedância durante o corte, para fins de controle de qualidade. Por meio desta monitoração, evita-se que o produto seja embalado com parte da cabeça, além de reduzir a perda de carne decorrente de um corte mal feito [8].
- Fresagem de peças, feitas de material não homogêneo, controlando a velocidade de corte em função da força exercida na ponta da ferramenta. Consegue-se, por meio desta estratégia, evitar danos à ferramenta e à peça por esforço excessivo [9].
- Operações de esmerilhamento, chanfradura e polimento, usando controle de força (e/ou momento) [10].

Além de outras aplicações na indústria, também poderiam ser elencados: prótese de membros humanos, cirurgia assistida por robô, limpeza de detritos tóxicos, etc. Deve-se, ainda, mencionar que o controle de força é necessário também para robôs móveis que se deslocam em ambientes desconhecidos, que precisam realizar tarefas como a abertura de uma porta (especialmente com mecanismo de fechamento automático), para as quais é importante o controle da força aplicada, a fim de evitar danos ao robô e ao ambiente.

## 1.2 Desenvolvimento do Controle de Força e Posição

Em artigo publicado em 1987 [2], Whitney, um dos pioneiros no estudo do controle de força em robôs manipuladores, apresenta seis controladores, fruto das pesquisas desenvolvidas até então, entre os quais sobressaem o Controle Explícito de Força [11], o Controle Híbrido [12], [13], proposto por Raibert e Craig e baseado no trabalho de Mason [14], e o Controle de Impedância [15], [16], além do Controle de Rigidez [17] e do Controle de Amortecimento [2], que são casos particulares do Controle de Impedância.

### 1.2.1 Abordagens Básicas

Muitos outros trabalhos foram realizados depois disto, porém somente um deles propôs uma nova abordagem para resolver o problema do controle simultâneo de força e posição, isto é, o Controle Paralelo de Chiaverini e Sciavicco [18], que prioriza o controle da força de contato através de um termo integral do erro de força. À despeito da maioria destes estudos não resultarem em novas abordagens, a formulação do problema foi substancialmente aprimorada e a sua compreensão, muito melhorada.

Apesar das muitas e variadas leis de controle de força (em [19], são apresentadas e analisadas mais de uma dezena delas), pode-se afirmar que as estratégias de abordagem ao problema do controle simultâneo de força e posição, quando o robô interage com o ambiente, restringem-se a apenas duas [19], [20], [21], [22]: o Controle Híbrido [12] e o Controle de Impedância [15]. Estas estratégias incorporam grande parte dos conceitos desenvolvidos e têm recebido a atenção da maioria dos pesquisadores nos últimos anos.

O Controle Híbrido, proposto inicialmente por Raibert e Craig [12], consiste basicamente em dividir o espaço de trabalho em dois sub-espacos complementares, para cada um dos quais é definida uma lei de controle distinta. Em um dos sub-espacos, o manipulador pode mover-se livremente, sem oposição ou obstáculos, e no sub-espaco complementar o movimento é totalmente restrito. No primeiro sub-espaco, utiliza-se uma lei de controle de posição e no segundo, uma lei de controle de força; ambas são ativadas ou desativadas por meio de matrizes de seleção.

O controle simultâneo do movimento e da força de contato é desejável e necessário para a execução bem sucedida de tarefas em que o robô interage com o ambiente, pois, em muitas tarefas a descrição do contato é complexa, além das incertezas normalmente presentes no sistema. Deve-se, também, salientar que o ambiente pode impedir completamente o movimento em algumas direções (ambiente definido como um conjunto de restrições geométricas, isto é, caracterizado por rigidez infinita), ou deformar-se segundo a equação de uma mola (linear ou não-linear) ou ainda oferecer oposição dinâmica em uma ou mais direções, que pode ser de natureza linear ou não. Em todas estas situações, um controle da força de contato é essencial para o sucesso da tarefa e para a integridade do sistema.

O Controle de Impedância visa, principalmente, estabelecer uma interação estável com o ambiente, o que é conseguido impondo o comportamento dinâmico entre o movimento do EF e a força por ele exercida no ambiente. O comportamento desejado é especificado no domínio da frequência por uma impedância ou, no domínio do tempo, por um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem representando um sistema massa-mola-amortecedor. Nesta abordagem, a força é uma reação ao movimento do EF e não é controlada explicitamente, mas indiretamente por meio de um controle de posição. O Controle de Impedância é adequado para tarefas, cujas forças de contato têm que ser mantidas baixas para evitar danos entre as partes, em operações de montagem ou inserção, onde o controle explícito da força não é imperativo [21].

Há variantes destas estratégias básicas. Uma delas é o Controle de Admitância, que também estabelece o comportamento dinâmico na interação do robô com o ambiente. Porém, neste caso, o movimento é uma reação à força aplicada pelo EF e a força é comandada explicitamente [11], [18]. Outra importante variante consiste em mesclar as duas estratégias, formando o Controle Híbrido de Impedância, que incorpora as qualidades de ambas, ao mesmo tempo em que ameniza os seus defeitos [23].

O presente trabalho baseia-se em uma estratégia híbrida para o controle simultâneo da força e do movimento, que considera, numa mesma estrutura, ambientes mais afeitos ao controle híbrido clássico e ambientes para os quais é mais indicado o uso do controle de impedância. Por esta razão, não será dada mais atenção ao Controle de Impedância ou a alguma de suas variantes.

### 1.2.2 Controle Híbrido de Robôs Rígidos

Para um grande número de aplicações, o ambiente com o qual o EF interage é descrito apenas por restrições geométricas (hipersuperfície), e denominado de ambiente cinemático, que se caracteriza por permitir o movimento do EF em uma ou mais direções e/ou orientações (tangentes à hipersuperfície), enquanto o impede totalmente nas demais (normais à hipersuperfície). Como o deslocamento do EF

nas direções normais é nulo, o ambiente reagirá com uma força igual e oposta à força aplicada pelo EF. Nos anos de 1987-1988, alguns pesquisadores [24], [25], [26] formalizaram a estratégia do controle híbrido para um manipulador sujeito a restrições geométricas, na qual dispensaram o uso das matrizes de seleção, que são o grande inconveniente da proposta inicial. Além disso, leis de controle foram propostas e analisadas quanto à convergência e estabilidade. Yoshikawa [24] formulou o problema no espaço da tarefa, enquanto que McClamroch e Wang [25] o fizeram no espaço das juntas.

Entretanto, em muitas outras aplicações, o ambiente apresenta dinâmica de primeira ou de segunda ordem ou, pelo menos, alguma flexibilidade [27], [20], [28]. De Luca e Manes [1] propuseram uma nova formulação para o Controle Híbrido, mais abrangente que as anteriores, pois contempla a interação do manipulador com ambientes cinemáticos e, também, com dinâmicos e flexíveis. O ambiente dinâmico possui as características do ambiente cinemático, acrescidas de restrições dinâmicas em algumas direções. No caso do ambiente flexível, a oposição sofrida pelo EF é modelada por uma mola.

Além de ser possível considerar a interação do robô com variados tipos de ambiente, esta formulação do Controle Híbrido [20] facilita muito a derivação de leis de controle, pois as variáveis que se deseja controlar são explicitadas no modelo obtido. Por estes motivos, a modelagem e o controle desenvolvidos e examinados nos próximos capítulos fundamentaram-se sobre esta formulação.

### 1.2.3 Controle de Robôs com Flexibilidade na Juntas

Até este ponto, considerou-se o manipulador como sendo uma estrutura absolutamente rígida. Entretanto, já se demonstrou [29] que o modelo dinâmico baseado na hipótese de uma estrutura rígida não é adequado quando as condições operativas são mais exigentes, pois dinâmicas não-modeladas são excitadas, em especial aquelas relativas às flexibilidades nas juntas. Por isso, para se obter melhor desempenho dinâmico, as flexibilidades nas juntas devem ser levadas em conta na modelagem e no projeto do controlador.

A introdução de flexibilidade nas juntas complica consideravelmente o modelo matemático do robô, a ordem das equações de movimento duplica em relação ao robô rígido, além de não ser mais possível linearizar o sistema usando realimentação estática de estados [30], [31], [21]. Em consequência, o problema de controle também é mais complexo e difícil de ser solucionado, especialmente se são levadas em conta as limitações tecnológicas e as exigências de desempenho de uma implementação prática. Leis de controle baseadas em diferentes abordagens têm sido propostas. Uma delas usa realimentação dinâmica de estados [32], [33], que possibilita linearização completa do sistema; outra faz uso da teoria de perturbações singulares [34], [35], que permite dividir o problema de controle em duas partes [36]; uma terceira abordagem usa o modelo simplificado de Spong [37], [38],

para derivar um controlador em cascata [39].

O controle de força também tem sido incluído nos estudos de diversos pesquisadores [40], [41], ao considerarem tarefas de contato em que o movimento do efetuador final é sujeito a restrições geométricas. Spong [36], Mills [42], Jankowski e ElMaraghy [43], Brogliato e Lozano-Leal [44], e Tian e Goldenberg [45], entre outros, contribuíram para a compreensão, a modelagem e o controle deste tipo de tarefa.

Neste trabalho, propõe-se uma modelagem que abrange os contatos com ambientes cinemáticos (descritos por restrições geométricas) e/ou dinâmicos, ampliando, desta forma, a variedade de tarefas que podem ser representadas. Além disso, por considerar-se a incidência de perturbações no efetuador final e de incertezas nos parâmetros do robô e do ambiente, uma lei de controle a estrutura variável também é proposta para este caso.

#### 1.2.4 Incidência de Incertezas e de Perturbações

Muitos controladores foram desenvolvidos sem levar em conta aspectos de robustez; conseqüentemente, só podem atender às especificações de controle para sistemas perfeitamente conhecidos. No entanto, as incertezas quanto aos parâmetros do robô (massas, inércias, geometria) e do ambiente (variações da carga, geometria), a modelagem imprecisa por desconsideração ou má representação do atrito (além de outras dinâmicas não modeladas), as perturbações externas e os ruídos nas medições podem comprometer a precisão dos resultados, se os controladores não são robustos.

A constatação destas perturbações e dos seus efeitos danosos [46], [6] têm motivado a busca de modelos mais precisos e o projeto de controladores, cujo desempenho seja livre ou menos sujeito às suas influências. Os que têm recebido mais atenção em robótica são os controladores adaptativos e os controladores a estrutura variável [47], [48], [49].

O controle adaptativo aplicado aos robôs manipuladores têm merecido a atenção de diversos pesquisadores, entre eles [50], [51], [44], [52], [53], [54], [55], [5]. Neste último trabalho, o controle adaptativo foi implementado com sucesso em um robô industrial.

A aplicação de controladores baseados em estrutura variável a robôs manipuladores têm recebido contribuições ao longo dos últimos vinte anos [56], [57], [58], [59]. Alguns pesquisadores propuseram até mesmo uma mistura das estratégias de controle adaptativo e a estrutura variável [60] visando o controle de robôs rígidos [61], [62] ou com flexibilidade nas juntas [39], [63], [64].

A principal desvantagem do controlador adaptativo é a grande quantidade de cálculo necessária para a estimação *on-line* dos parâmetros do sistema. Isto abre espaço para o controlador a estrutura variável, que também é robusto, possui boas características de resposta e é mais simples do que o adaptativo, sem o ônus da estimação dos parâmetros.

### 1.3 Proposta da Tese

O presente trabalho de doutoramento visa, principalmente, investigar a aplicação do controle a estrutura variável a robôs manipuladores rígidos ou com flexibilidade nas juntas em contato com ambientes passivos (sem fontes de energia) de tipos variados.

Dá-se atenção à modelagem do sistema manipulador-ambiente e ao projeto e desempenho de controladores robustos do tipo estrutura variável, para o controle simultâneo do movimento e da força de contato. Leis de controle são derivadas, e os seus desempenhos são examinados, teoricamente e através de simulação.

Com os controladores obtidos, os comportamentos dos robôs rígido e com flexibilidade nas juntas são analisados para diversas situações de contato e de nível de conhecimento do sistema. Os ambientes de contato usados são o cinemático, o dinâmico e o flexível. O nível de conhecimento do sistema (robô + ambiente) pode variar desde perfeitamente conhecido até sujeito a incertezas nos parâmetros e perturbações externas.

Para o robô rígido, o desempenho do controlador a estrutura variável é comparado ao de um controlador do tipo torque computado, em condições nominais e perturbadas. O controlador descrito no Capítulo 5 para o robô com flexibilidade nas juntas é examinado e seus resultados são comparados aos obtidos para o robô rígido.

### 1.4 Organização do Texto

Incluindo a presente introdução, o texto está organizado em sete capítulos mais três apêndices.

No Capítulo 2, primeiramente é apresentada a modelagem desenvolvida por De Luca e Manes para o sistema robô rígido interagindo com os ambientes dinâmico, cinemático e flexível. A partir de modelos compactos, adequados para a derivação de leis de controle, são obtidos controladores baseados na dinâmica inversa para cada um dos sistemas modelados. O comportamento em malha fechada destes sistemas é analisado para o caso nominal e também quando há incidência de perturbações.

O Capítulo 3 inicialmente conceitua o controle a estrutura variável e define uma classe de sistemas não lineares, que inclui o sistema robô-ambiente definido anteriormente. Em seguida, uma lei de controle a estrutura variável é derivada e sua robustez é examinada; além disso, critérios de atratividade são estabelecidos e são examinados os motivos e os efeitos da utilização da camada limite. Finalmente, a lei de controle obtida é aplicada ao manipulador rígido interagindo com os diversos tipos de ambiente modelados no capítulo precedente.

No Capítulo 4, são apresentados e analisados os resultados de simulação dos controladores

desenvolvidos nos capítulos anteriores, comparando os seus desempenhos para vários ambientes, examinando os efeitos do atrito e de sua compensação, os efeitos de incertezas paramétricas e de perturbações externas.

Uma modelagem do robô com flexibilidade nas juntas e uma proposta de controle são desenvolvidas no Capítulo 5, procurando aproveitar os resultados obtidos para o manipulador rígido.

Os resultados da aplicação do controle proposto para o robô com flexibilidade nas juntas são examinados no Capítulo 6, para os mesmos ambientes e situações utilizados no caso do robô rígido.

O Capítulo 7 destina-se a listar as contribuições deste trabalho e identificar perspectivas de futuros trabalhos.

O trabalho encerra-se com três apêndices: o primeiro faz uma rápida revisão dos diferentes tipos de atrito, útil para a complementação da modelagem apresentada no Capítulo 2; o segundo mostra a solução da equação de Bernoulli, usada no Capítulo 3; finalmente, o terceiro apêndice detalha os modelos cinemático e dinâmico para o robô cotovelar rígido de dois graus de liberdade usado nas simulações do Capítulo 4.

## Capítulo 2

# Robô Rígido em Contato com Ambientes Passivos

Neste capítulo, são desenvolvidos os modelos para os robôs rígidos em contato com ambientes passivos, isto é, ambientes desprovidos de fontes de energia, mas que podem apresentar comportamento dinâmico em uma ou mais direções<sup>1</sup>. Além disso, para cada um dos sistemas modelados, são derivados controladores baseados na dinâmica inversa.

### 2.1 Descrição de Ambientes Passivos

Os ambientes com os quais o manipulador interage são chamados passivos por serem compostos somente de elementos não geradores de energia, como, por exemplo, um corpo rígido caracterizado por sua massa, uma mola ou um amortecedor, além, naturalmente, das paredes rígidas de massa infinita.

Os ambientes sobre os quais se concentra a presente investigação são classificados em três tipos:

- **Ambientes Cinemáticos** - são descritos apenas por restrições geométricas (hipersuperfícies), que permitem o movimento livre do Efetuador Final (EF) do manipulador nas direções tangentes, ao passo que o obstruem totalmente nas direções normais às hipersuperfícies, conforme ilustra o exemplo (a) da Figura 2.1 para dois graus de liberdade, onde o manipulador se movimenta na direção de  $s_k$ , ao longo do plano inclinado, enquanto aplica uma força parametrizada por  $\lambda_r$ , normal ao mesmo plano inclinado, que é compensada por uma força de reação do ambiente;

---

<sup>1</sup>Neste texto, o termo *direção* é usado para designar *direção e/ou orientação*, a menos que se afirme explicitamente o contrário. Esta convenção é válida se aplicada ao ambiente ou ao robô.

- **Ambientes Dinâmicos** - caracterizam-se por apresentarem comportamento dinâmico em uma ou mais direções; nas direções restantes (se houver alguma), possuem as características dos ambientes cinemáticos. O exemplo (b) da Figura 2.1, também para o caso de dois graus de liberdade, ilustra um ambiente dinâmico, para o qual o movimento é livre na direção de  $s_k$ , ao passo que uma resposta dinâmica é produzida pelo ambiente, quando se aplica uma força na direção de  $s_d$ ;
- **Ambientes Flexíveis** - caracterizam-se por possuírem flexibilidade em uma ou mais direções; nas demais direções (se houver alguma), apresentam as mesmas propriedades de um ambiente cinemático ou de um dinâmico. O exemplo (c) da Figura 2.1, também para o caso de dois graus de liberdade ilustra este tipo de ambiente, onde o movimento é livre na direção de  $s_k$  (característica do ambiente cinemático), ao passo que a oposição de uma mola é oferecida ao movimento do EF na direção de  $s_c$ .

A partir das definições destes três tipos de ambientes, as tarefas de contato podem ser descritas e modeladas com precisão. O caso do robô girando uma manivela, cuja dinâmica seja relevante (massa não desprezível ou presença de atrito ou de flexibilidade), é exemplar; desconsiderá-la pode significar um erro de avaliação com conseqüências importantes. Portanto, uma técnica de modelagem eficiente deve ser capaz de levar em conta a interação do EF com ambientes caracterizados não só por restrições geométricas, mas que apresentem também oposição de natureza dinâmica em uma ou mais direções.

O ambiente puramente cinemático oferece  $k$  direções para as quais o movimento do EF não sofre restrições e, portanto, pode ser controlado. O vetor  $s_k \in \mathbb{R}^k$  está associado ao movimento admissível do EF. Nas demais  $6 - k$  direções, apresenta restrições totais ao movimento, permitindo, no entanto, a aplicação controlada de forças<sup>2</sup>. Casos extremos ocorrem quando:

- $k = 6$ , resultando em liberdade total de movimento no espaço cartesiano;
- $k = 0$ , implicando em bloqueio completo do EF.

O ambiente dinâmico consiste de um sistema mecânico com  $d \leq 6$  graus de liberdade, em cujas  $d$  direções exibe um comportamento dinâmico, enquanto apresenta as características de um ambiente cinemático nas demais  $6 - d$  direções. A cada um destes graus de liberdade está associada uma variável de configuração do ambiente, que é utilizada também para descrever o comportamento dinâmico do ambiente, na direção a que está vinculada. O conjunto destas variáveis forma o vetor  $s_d \in \mathbb{R}^d$  de variáveis dinâmicas.

<sup>2</sup>Neste texto, o termo *força* é usado para designar *força e/ou momento*, a menos que se afirme explicitamente o contrário.

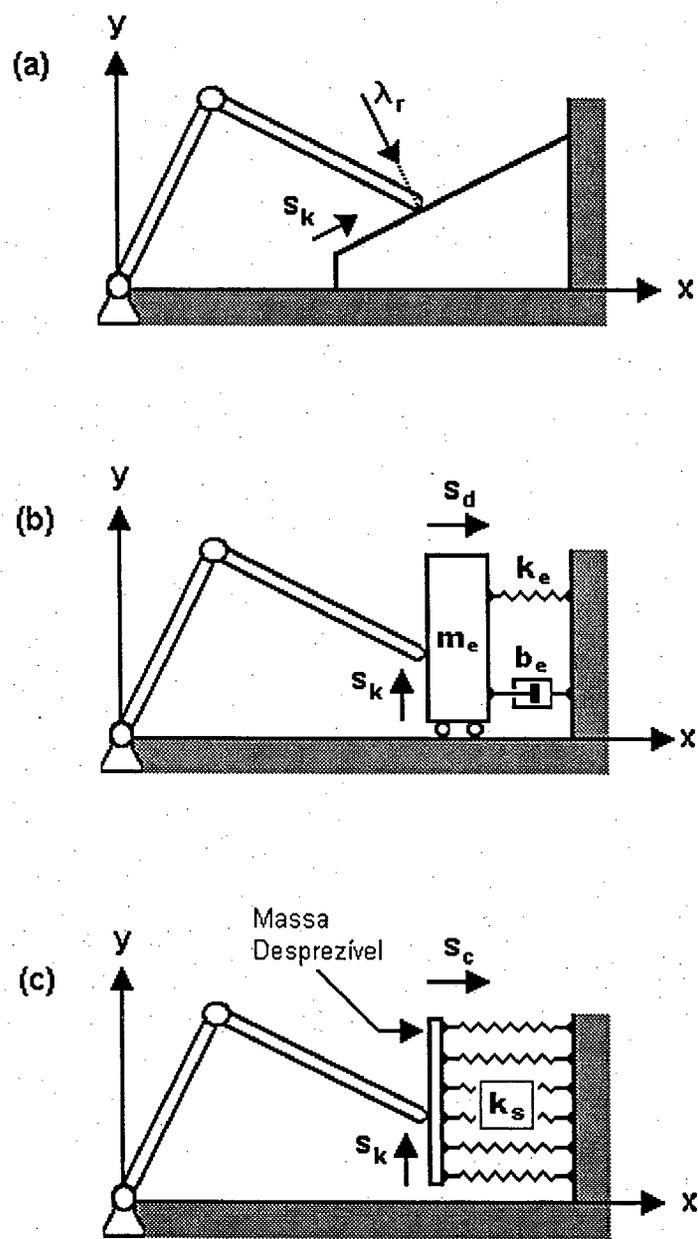


Figura 2.1: Robô rígido em contato com ambiente cinemático; b) Robô rígido em contato com ambiente dinâmico; c) Robô rígido em contato com ambiente flexível.

Quando não é permitido ao EF mover-se em relação ao ambiente ( $k = 0$ ), o seu movimento é função somente de  $s_d$ . Caso contrário, há necessidade de  $k$  variáveis cinemáticas, que se somem às  $d$  variáveis dinâmicas, para descrever completamente o movimento do EF, visto do lado do ambiente. A união destes dois conjuntos de variáveis, a saber:  $s = (s_k, s_d) \in \mathfrak{R}^e$  com  $e = k + d \leq 6$ , compõe um conjunto de parâmetros suficiente para descrever uma ampla variedade de tarefas que apresentam graus variados de interação entre o robô e o ambiente. Podem descrever:

1. Ambientes puramente cinemáticos:

- se  $k = 0$  e  $d = 0$ , o EF está completamente vinculado ao ambiente, sendo impedido de mover-se em qualquer direção;
- se  $k = 6$  e  $d = 0$ , o EF desloca-se livremente no espaço cartesiano;
- se  $k < 6$  e  $d = 0$ , o EF desloca-se livremente em  $k$  direções e é impedido de mover-se nas  $6 - k$  restantes;

2. Ou totalmente dinâmicos:

- se  $k = 0$  e  $d = 6$ , o EF encontra oposição dinâmica em todas as direções;
- se  $k = 0$  e  $d < 6$ , o EF encontra oposição dinâmica em  $d$  direções e é impedido de mover-se nas  $6 - d$  restantes;

3. Ou ainda um misto de ambiente cinemático e dinâmico:

- se  $k < 6$  e  $d < 6$ , tal que  $k + d = 6$ , o EF desloca-se livremente em  $k$  direções e encontra oposição dinâmica nas  $d$  restantes;
- se  $k < 6$  e  $d < 6$ , tal que  $e = k + d < 6$ , o EF desloca-se livremente em  $k$  direções, encontra oposição dinâmica em  $d$  direções e é impedido de mover-se nas  $6 - e$  restantes.

Por isso, os ambientes dinâmicos também podem ser designados como ambientes cinemáticos e/ou dinâmicos.

Finalmente, o ambiente flexível acrescenta uma terceira variável -  $s_c \in \mathfrak{R}^c$ , relativa ao movimento nas  $c$  direções flexíveis. Nestas direções, o ambiente é modelado como uma mola. O ambiente pode ser totalmente flexível ( $c = 6$ ) ou um misto de ambiente flexível e cinemático e/ou dinâmico. Com isto,  $s = (s_k, s_d, s_c) \in \mathfrak{R}^e$  com  $e = k + d + c \leq 6$ , compõe um conjunto de parâmetros capaz de descrever uma variedade de tarefas adicionais em relação às que estão discriminadas nos parágrafos anteriores.

## 2.2 Modelo do Robô Rígido em Contato com Ambiente Dinâmico

Quando o robô está em contato com o ambiente, o movimento do EF do robô manipulador pode ser descrito tanto do lado do robô como do lado do ambiente, por meio de dois sistemas de coordenadas, um vinculado ao robô e o outro ao ambiente:

- o primeiro é formado pelas variáveis generalizadas de junta do robô ( $q_1 \dots q_n$ ), que definem completamente sua configuração e servem de base para descrever o seu modelo cinemático (Figura 2.2);

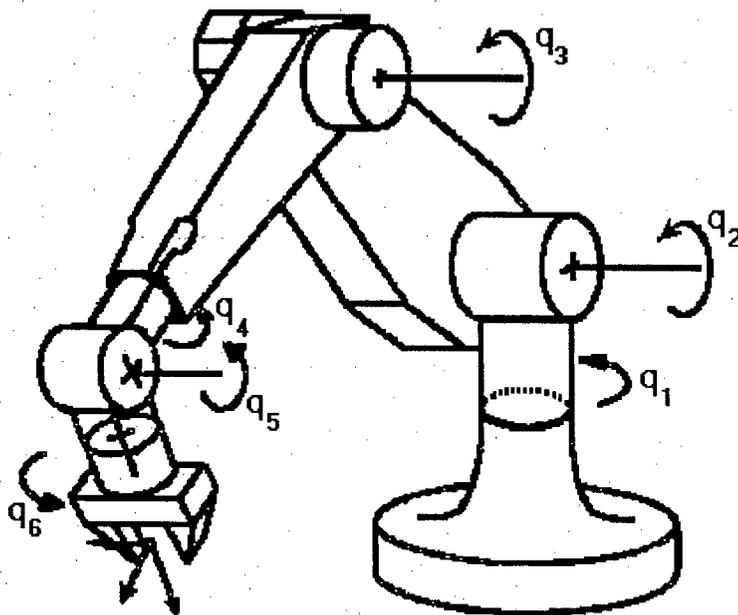


Figura 2.2: Variáveis das Juntas em um Robô de 6 Graus de Liberdade.

- o segundo consiste de variáveis que descrevem o movimento admissível do EF do ponto de vista do ambiente, a partir das quais é definido o modelo cinemático do ambiente. Nos exemplos da Figura 2.1, as variáveis  $s_k$ ,  $s_d$  e  $s_c$  servem de parâmetros para o movimento admissível do EF do lado do ambiente.

### 2.2.1 Modelo Cinemático do Robô

Seja um robô com  $n$  graus de liberdade, constituído por uma cadeia cinemática aberta de corpos rígidos, parametrizado pelo vetor  $q \in \mathfrak{R}^n$  das variáveis de junta, isto é, dos ângulos relativos entre elos adjacentes (no caso de juntas de revolução) e dos deslocamentos (no caso de juntas prismáticas).

O vetor  $q$ , com cada  $q_i$  dentro da sua faixa de excursão, se relaciona a uma única posição espacial e orientação do efetuador final.

Seja também  $r = (p, o)$  de dimensão 6, onde  $p$  descreve a posição do efetuador final no espaço cartesiano  $\mathbb{R}^3$  e  $o = (\varphi, \vartheta, \psi)$  sua orientação dada por uma representação mínima, a dos ângulos de Euler. Com isto, a cinemática do efetuador final é expressa em função das variáveis das juntas por:

$$r = \Theta(q) \quad (2.1)$$

onde  $\Theta(q)$  é um vetor de funções não lineares, que mapeia o espaço das juntas no espaço cartesiano. Na sua forma diferencial, a cinemática é descrita por:

$$\dot{r} = \frac{\partial \Theta(q)}{\partial q} \dot{q} = J_a(q) \dot{q} \quad (2.2)$$

sendo  $J_a(q)$  uma matriz  $6 \times n$  conhecida como *Jacobiano Analítico*.

O vetor de velocidades  $v = (\dot{p}, \omega)$ , composto pela velocidade linear  $\dot{p}$  e pela velocidade angular  $\omega$ , relaciona-se com  $\dot{r}$  através de

$$v = G(r) \dot{r} \quad (2.3)$$

na qual

$$G(r) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & G_o(\varphi, \vartheta, \psi) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

e onde  $G_o(\varphi, \vartheta, \psi)$  é uma matriz  $3 \times 3$  de funções, que expressa o mapeamento entre a derivada do vetor de orientação  $(\frac{do}{dt})$  e a velocidade angular  $\omega$ . Definindo

$$J(q) = G(\Theta(q)) J_a(q) \quad (2.5)$$

o vetor de velocidades generalizadas pode agora ser escrito em função da velocidade  $\dot{q}$  das juntas como

$$v = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J(q) \dot{q} \quad (2.6)$$

onde a matriz  $J(q)$ , de dimensão  $6 \times n$ , é conhecida como *Jacobiano Geométrico* do manipulador.

Da equação (2.6), conclui-se que, somente se  $n \geq 6$  é possível mover o efetuador final arbitrariamente, seja com respeito a sua posição, seja com relação a sua orientação espacial. Entretanto, mesmo neste caso, podem existir configurações que reduzam o posto do Jacobiano, conhecidas como configurações singulares. Nas configurações singulares, o manipulador perde um ou mais graus de li-

berdade, o movimento do EF em certas direções pode não ser mais possível, velocidades limitadas no EF podem corresponder a velocidades ilimitadas nas juntas, forças e torques limitados no EF podem corresponder a torques ilimitados nas juntas, além de não existir uma solução única para o problema da cinemática inversa [65].

Daqui por diante, admite-se que  $n \geq 6$ , para que o EF possa alcançar todas as posições e/ou orientações do espaço tridimensional, e que o Jacobiano tenha posto completo, o que é possível conseguir planejando-se o movimento do manipulador de tal forma a evitar as configurações singulares, como efetivamente é realizado nas aplicações práticas.

### 2.2.2 Modelo Cinemático do Ambiente

A partir da descrição de ambientes passivos feita na Seção 2.1 (o ambiente flexível é tratado separadamente), o modelo cinemático do ambiente é formulado nesta subseção, tendo como base o trabalho de Manes [20].

A posição e a velocidade do efetuador final, vistas do lado do ambiente, são expressas por

$$r = \Gamma(s) \quad (2.7)$$

e

$$\dot{r} = \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s} \dot{s} = \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s_k} \dot{s}_k + \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s_d} \dot{s}_d \quad (2.8)$$

onde  $\Gamma(s)$  é um vetor de funções não lineares (pelo menos duas vezes diferenciáveis e inversíveis), que relaciona  $s$  a  $r$ . Como as equações (2.1) e (2.7) descrevem a mesma posição (e orientação) no espaço, vista, respectivamente, do lado do manipulador e do lado do ambiente, a seguinte relação de vínculo tem que ser satisfeita:

$$r = \Theta(q) = \Gamma(s) \Leftrightarrow \Theta(q) - \Gamma(s) = 0. \quad (2.9)$$

Além disso, substituindo (2.8) em (2.3) e usando (2.7), é obtido o vetor das velocidades generalizadas  $v$  em função de  $s$  e  $\dot{s}$ :

$$\begin{aligned} v &= \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = T(s) \dot{s} \\ &= \begin{bmatrix} T_k(s) & T_d(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_k \\ \dot{s}_d \end{bmatrix} \\ &= T_k(s) \dot{s}_k + T_d(s) \dot{s}_d \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde:

- $T(s) = G(\Gamma(s)) \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s}$  é a matriz Jacobiana  $6 \times e$  da relação  $r = \Gamma(s)$ , considerada de posto cheio na região de operação;
- $T_k(s)$  é uma submatriz  $6 \times k$  de  $T(s)$ , que relaciona o vetor de velocidades nas direções cinemáticas -  $\dot{s}_k$  ao vetor das velocidades generalizadas  $v$ ;
- $T_d(s)$  é uma submatriz  $6 \times d$  de  $T(s)$ , que relaciona o vetor de velocidades nas direções dinâmicas -  $\dot{s}_d$  ao vetor das velocidades generalizadas  $v$ .

Como a velocidade  $v$  é uma só, seja ela expressa do lado do ambiente (2.10), seja do lado do robô (2.6), obtém-se a seguinte identidade:

$$v = T(s)\dot{s} = J(q)\dot{q} \quad (2.11)$$

que é válida somente se as matrizes  $T(s)$  e  $J(q)$  tiverem posto completo.

### 2.2.3 Propriedades dos Contatos Cinemáticos e/ou Dinâmicos

Duas importantes propriedades dos contatos cinemáticos e/ou dinâmicos são estabelecidas nesta subseção:

1. As forças de reação  $F_r$  não realizam trabalho nas direções admissíveis de movimento, sejam elas cinemáticas  $\dot{s}_k$  ou dinâmicas  $\dot{s}_d$ ; estas forças de reação são expressas por:

$$F_r = Y_r(s)\lambda_r \quad (2.12)$$

onde  $Y_r(s)$  é uma matriz  $6 \times (6 - e)$ , cujas linhas formam uma base para as direções de existência de  $F_r$ , e onde  $\lambda_r \in \mathfrak{R}^{6-e}$  é o vetor que parametriza estas forças;

2. As forças de contato admissíveis  $F = F_r + F_a$  não realizam trabalho nas direções cinemáticas  $\dot{s}_k$ ; as forças aplicadas nas direções dinâmicas são dadas por:

$$F_a = Y_a(s)\lambda_a \quad (2.13)$$

onde  $Y_a(s)$  é uma matriz  $6 \times d$ , cujas linhas formam uma base para as direções de existência de  $F_a$ , e onde  $\lambda_a \in \mathfrak{R}^d$  é o vetor que parametriza estas forças.

Desta forma, a força total de contato entre o EF e o ambiente  $F$  é escrita como:

$$\begin{aligned}
 F &= F_r + F_a & (2.14) \\
 &= Y_r(s)\lambda_r + Y_a(s)\lambda_a \\
 &= \begin{bmatrix} Y_r(s) & Y_a(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_a \end{bmatrix} \\
 &= Y(s)\lambda.
 \end{aligned}$$

Tendo como base o seu enunciado, a primeira propriedade pode ser expressa, numa forma alternativa, como: *o produto escalar entre as forças de reação e as velocidades nas direções admissíveis é nulo*, isto é,

$$v^T F_r = \begin{bmatrix} \dot{p}^T & \omega^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_r \\ c_r \end{bmatrix} = 0 \quad (2.15)$$

onde  $f_r$  são as forças de reação e  $c_r$  são os momentos de reação no efetuador final. Usando (2.10) e a definição dada a  $F_r$ , a equação (2.15) é reescrita como:

$$\dot{s}^T T^T(s) Y_r(s) \lambda_r = 0 \quad (2.16)$$

que admite uma forma mais enxuta, visto que deve manter-se verdadeira para  $\dot{s}$  e  $\lambda_r$  quaisquer (nulos ou não), a saber:

$$T^T(s) Y_r(s) = 0_{\text{ex}(6-e)}. \quad (2.17)$$

Esta identidade é a representação matemática da primeira propriedade. A matriz  $Y_r(s)$  deve ser escolhida de tal modo a satisfazer a equação (2.17) e possuir posto igual a  $(6 - e)$ . Para contatos puramente cinemáticos, como o ilustrado na Figura 2.3, a equação (2.17) é simplificada para:

$$T_k^T(s) Y_r(s) = 0_{k \times (6-k)} \quad (2.18)$$

que exprime a não transferência de energia em contatos cinemáticos.

Também a partir do seu enunciado, a segunda propriedade pode ser formulada da seguinte maneira: *o produto escalar entre as forças totais aplicadas sobre o ambiente  $F = F_r + F_a$  e as velocidades nas direções cinemáticas é nulo*. Usando (2.10) e as definições dadas a  $F_r$  e a  $F_a$ , esta propriedade é expressa matematicamente por:

$$\dot{s}_k^T T_k^T(s) Y(s) \lambda = 0. \quad (2.19)$$

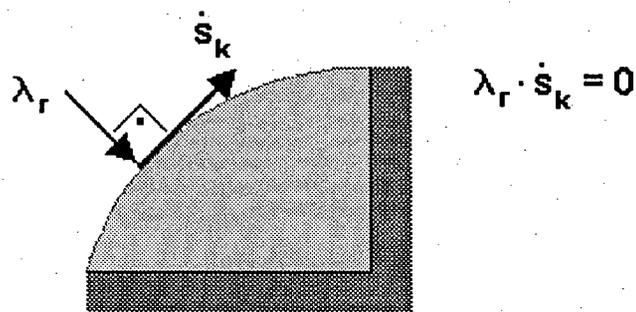


Figura 2.3: Contato puramente cinemático.

Como esta identidade deve manter-se verdadeira para  $\dot{s}_k$  e  $\lambda$  quaisquer (nulos ou não), ela pode ser reduzida a uma forma mais compacta, isto é:

$$T_k^T(s)Y(s) = 0_{k \times (6-k)}. \quad (2.20)$$

A matriz  $Y(s)$  possui duas partições  $Y_r(s)$  e  $Y_a(s)$ . A primeira delas é obtida a partir de (2.17) e a segunda deve ser escolhida de tal forma a satisfazer a equação (2.20) e possuir posto igual a  $d$ .

Para os contatos dinâmicos (cinemáticos e/ou dinâmicos), como o ilustrado na Figura 2.4, só há troca de energia entre o robô e o ambiente na direção dinâmica. De fato, o produto escalar entre a velocidade  $\dot{s}_d$  e a força na direção dinâmica  $F_a$  é diferente de zero, desde que  $\dot{s}_d$  e  $F_a$  sejam não nulos.

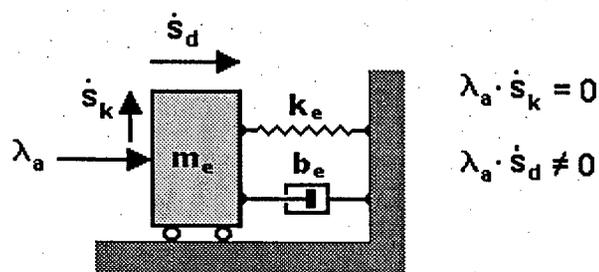


Figura 2.4: Contato cinemático e/ou dinâmico.

### 2.2.4 Modelo Dinâmico do Sistema Robô - Ambiente

A formulação de Lagrange é usada a seguir para a obtenção do modelo dinâmico do sistema manipulador-ambiente. Seja  $L_r$  o Lagrangeano associado ao robô manipulador [20]:

$$L_r(q, \dot{q}) = K_r(q, \dot{q}) - P_r(q) \quad (2.21)$$

onde

$$K_r(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_r(q) \dot{q} \quad (2.22)$$

é a energia cinética relacionada ao manipulador,  $P_r(q)$  é sua energia potencial e  $M_r(q)$  é sua matriz de inércias, quadrada de ordem  $n$ . Seja, também,  $L_e$  o Lagrangeano associado ao ambiente:

$$L_e(s_d, \dot{s}_d) = K_e(s_d, \dot{s}_d) - P_e(s_d) \quad (2.23)$$

onde

$$K_e(s_d, \dot{s}_d) = \frac{1}{2} \dot{s}_d^T M_e(s_d) \dot{s}_d \quad (2.24)$$

é a energia cinética relacionada ao ambiente,  $P_e(s_d)$  é sua energia potencial e  $M_e(s_d)$  é sua matriz de inércias nas  $d$  direções dinâmicas. Levando em conta a restrição (2.9), que deve ser obrigatoriamente satisfeita, o Lagrangeano  $L_s$  do sistema acoplado robô-ambiente é dado por:

$$L_s(q, \dot{q}, s, \dot{s}) = L_r(q, \dot{q}) + L_e(s_d, \dot{s}_d) + \rho^T [\Gamma(s) - \Theta(q)] \quad (2.25)$$

onde  $\rho \in \mathbb{R}^6$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

Considerando que as forças de interação são internas ao sistema manipulador-ambiente, elas não aparecerão explicitamente no modelo. Portanto, somente as forças/torques  $u$ , aplicadas pelos motores, e as forças de atrito no robô  $-b_r(q, \dot{q})$  e no ambiente  $-b_e(s_d, \dot{s}_d)$  serão incluídas como forças não conservativas (No Apêndice A, há uma breve nota sobre atrito). Aplicando a equação de Lagrange a (2.25), obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_s(q, \dot{q}, s, \dot{s})}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L_s(q, \dot{q}, s, \dot{s})}{\partial q} \right)^T = u - b_r(q, \dot{q}) \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_s(q, \dot{q}, s, \dot{s})}{\partial \dot{s}_d} \right)^T - \left( \frac{\partial L_s(q, \dot{q}, s, \dot{s})}{\partial s_d} \right)^T = -b_e(s_d, \dot{s}_d) \quad (2.27)$$

$$- \left( \frac{\partial L_s(q, \dot{q}, s, \dot{s})}{\partial s_k} \right)^T = 0 \quad (2.28)$$

$$- \left( \frac{\partial L_s(q, \dot{q}, s, \dot{s})}{\partial \rho} \right)^T = 0. \quad (2.29)$$

que podem ser reescritas como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_r(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L_r(q, \dot{q})}{\partial q} \right)^T + \left( \frac{\partial \Theta(q)}{\partial q} \right)^T \rho = u - b_r(q, \dot{q}) \quad (2.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_e(s_d, \dot{s}_d)}{\partial \dot{s}_d} \right)^T - \left( \frac{\partial L_e(s_d, \dot{s}_d)}{\partial s_d} \right)^T - \left( \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s_d} \right)^T \rho = -b_e(s_d, \dot{s}_d) \quad (2.31)$$

$$\left( \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s_k} \right)^T \rho = 0 \quad (2.32)$$

$$\Gamma(s) - \Theta(q) = 0. \quad (2.33)$$

A dinâmica completa de um robô, cujo EF se move livremente no espaço, é descrita totalmente pelos dois primeiros termos da equação (2.30). Desenvolvendo estes termos, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_r(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L_r(q, \dot{q})}{\partial q} \right)^T \\ &= M_r(q)\ddot{q} + \dot{M}_r(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left( \dot{q}^T M_r(q) \dot{q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} P_r(q) \\ &= M_r(q)\ddot{q} + c_r(q, \dot{q}) + g_r(q) \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde  $c_r(q, \dot{q})$  é o vetor dos torques centrífugos e de Coriolis e  $g_r(q) = \frac{\partial P_r(q)}{\partial q}$  é o vetor dos torques gravitacionais do robô. A  $k$ -ésima linha de (2.34) apresenta a seguinte forma:

$$\sum_j m_{r,kj} \ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk} \dot{q}_i \dot{q}_j + g_{r,k} \quad (2.35)$$

em que  $c_{ijk}$  são conhecidos como símbolos de Christoffel e dados por

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{r,kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{r,ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{r,ij}}{\partial q_k} \right). \quad (2.36)$$

Um desenvolvimento semelhante é usado para os dois primeiros termos da equação (2.31); no entanto, além do termo gravitacional, o ambiente pode apresentar também um termo elástico.

Na seqüência, obtém-se uma importante identidade, que relaciona  $\rho$  a  $F$  e que é útil no desenvolvimento das equações (2.30)-(2.33). Considere-se, inicialmente, o trabalho virtual da força generalizada  $\rho$  ao longo do deslocamento infinitesimal  $dr$  ( $\dot{r}$ ), dado por:

$$dW = \rho^T dr. \quad (2.37)$$

Apoiando-se na equação (2.3), isto é em  $v = G(r)\dot{r}$ , e admitindo que  $v$  seja dada por  $\frac{dr_\omega}{dt}$ , conclui-se que

$$dr = G^{-1} dr_\omega. \quad (2.38)$$

Com isso, a equação (2.37) passa a ser escrita na forma

$$dW = \rho^T G^{-1} dr_\omega = (G^{-T} \rho)^T dr_\omega \quad (2.39)$$

de onde se deduz que a força

$$F = G^{-T} \rho \quad (2.40)$$

realiza trabalho ao longo de  $dr_\omega$  ( $v$ ).

Usando este resultado e tendo em vista as equações (2.2) e (2.5), o terceiro termo à esquerda da igualdade na equação (2.30) pode ser expresso em função de  $F$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Theta(q)}{\partial q} \right)^T \rho &= J_a^T(q) \rho \\ &= J^T(q) G^{-T} \rho \\ &= J^T(q) F. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Além disso, sabendo que

$$T_d(s) = G \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s_d} \quad (2.42)$$

e

$$T_k(s) = G \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s_k} \quad (2.43)$$

o terceiro termo da equação (2.31) e a equação (2.32) são reescritos como:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s_d} \right)^T \rho &= T_d^T G^{-T} \rho \\ &= T_d^T F \end{aligned} \quad (2.44)$$

e

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Gamma(s)}{\partial s_k} \right)^T \rho &= T_k^T G^{-T} \rho \\ &= T_k^T F. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por causa desta última identidade e lembrando que  $F = Y(s)\lambda$ , a equação (2.32) transforma-se em

$$T_k^T F = T_k^T Y(s)\lambda = 0_{k \times 1} \quad (2.46)$$

que é uma variação da equação (2.20), pois deve ser verdadeira para qualquer  $\lambda$ .

Utilizando estes resultados nas equações (2.30 - 2.33), chega-se ao seguinte modelo dinâmico

para o sistema robô-ambiente [20]:

1.  $n$  equações diferenciais de segunda ordem relativas ao robô:

$$M_r(q)\ddot{q} + n_r(q, \dot{q}) = u - J^T(q)F \quad (2.47)$$

onde

$$n_r(q, \dot{q}) = c_r(q, \dot{q}) + b_r(q, \dot{q}) + g_r(q) \quad (2.48)$$

incorpora todos os termos não lineares do robô;

2.  $d$  equações diferenciais de segunda ordem referentes ao ambiente:

$$M_e(s_d)\ddot{s}_d + n_e(s_d, \dot{s}_d) = T_d^T(s)F \quad (2.49)$$

com

$$n_e(s_d, \dot{s}_d) = c_e(s_d, \dot{s}_d) + \left(\frac{\partial P_e}{\partial s_d}\right)^T + b_e(s_d, \dot{s}_d) \quad (2.50)$$

onde  $c_e(s_d, \dot{s}_d)$  se deve às forças centrífugas e de Coriolis e  $\left(\frac{\partial P_e}{\partial s_d}\right)^T$  aos efeitos gravitacionais e/ou elásticos do ambiente;

3.  $k$  equações algébricas, que estabelecem a não realização de trabalho das forças de contato ao longo das direções cinemáticas:

$$T_k^T(s)F = 0 \quad (2.51)$$

4. e, finalmente, mais 6 equações algébricas, que estabelecem o acoplamento entre os dois sistemas:

$$\Gamma(s) - \Theta(q) = 0. \quad (2.52)$$

Em muitos casos, a equação (2.47) é usada sozinha como o modelo completo para um manipulador em contato com o ambiente [66], [65], [67], onde a força de contato é considerada simplesmente como uma perturbação a ser rejeitada. Porém, nos casos em que o ambiente apresenta dinâmicas próprias relevantes, o modelo completo apresentado nesta subseção deve ser utilizado para que se tenha uma representação mais acurada do sistema considerado e, em consequência, seja possível realizar um controle mais efetivo da força.

A redundância do modelo, decorrente do uso de dois sistemas de coordenadas (um para o robô e outro para o ambiente), não é explorada neste trabalho com vistas à redução do modelo.

### 2.2.5 Modelo Dinâmico Compacto

A forma em que estão escritas as equações dinâmicas do sistema robô-ambiente não é muito conveniente, quando se pensa na derivação de uma lei de controle. Por isso, uma forma mais compacta e mais apropriada ao projeto do controlador é obtida nos desenvolvimentos que seguem [20], [1].

Primeiramente, a equação (2.11) é expandida e derivada em relação ao tempo, resultando em

$$T_k(s)\ddot{s}_k + \dot{T}_k(s, \dot{s})\dot{s}_k + T_d(s)\ddot{s}_d + \dot{T}_d(s, \dot{s})\dot{s}_d = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} \quad (2.53)$$

Isolando  $\ddot{q}$  e  $\ddot{s}_d$  nas equações (2.47) e (2.49), respectivamente, e substituindo-as em (2.53), chega-se à seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} & T_k\ddot{s}_k + \dot{T}_k\dot{s}_k + T_dM_e^{-1}T_d^T F - T_dM_e^{-1}n_e + \dot{T}_d\dot{s}_d \\ &= JM_r^{-1}u - JM_r^{-1}J^T F - JM_r^{-1}n_r + \dot{J}\dot{q}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde se usou uma notação simplificada, que será adotada daqui por diante.

Considerando que a força é dada por  $F = Y_r\lambda_r + Y_a\lambda_a$  e sabendo que  $T_d^T Y_r = 0_{dx(6-e)}$ , o modelo do sistema manipulador-ambiente pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = Q^{-1} (m + JM_r^{-1}u) + \delta \quad (2.55)$$

onde

$$Q = Q(q, s) = \begin{bmatrix} (T_dM_e^{-1}T_d^T + JM_r^{-1}J^T) Y_a & JM_r^{-1}J^T Y_r & T_k \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$m = m(q, \dot{q}, s, \dot{s}) = -\dot{T}_k\dot{s}_k - \dot{T}_d\dot{s}_d + \dot{J}\dot{q} + T_dM_e^{-1}n_e - JM_r^{-1}n_r \quad (2.57)$$

e

$$\delta = \delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \\ \delta_k \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

foi adicionado para levar em conta as perturbações externas ao sistema. A característica mais relevante deste modelo é a explicitação das variáveis que se deseja controlar, isto é  $\lambda_a$  e  $\lambda_r$ , ligadas à força de contato, e  $\ddot{s}_k$ , vinculada ao movimento.

O sistema (2.55) tem solução única somente se a matriz  $Q$  for inversível, o que acontecerá se as matrizes  $J$  e  $T$  tiverem posto completo [20].

## 2.3 Controle do Sistema Robô Rígido - Ambiente Dinâmico

Nesta seção, uma lei de controle baseada em dinâmica inversa é aplicada ao sistema robô rígido - ambiente dinâmico, e o seu desempenho é analisado nas condições nominais e na presença de incertezas paramétricas e/ou perturbações externas.

### 2.3.1 Controle Linearizante e Desacoplante

O Controle Linearizante e Desacoplante - CLD consiste de dois estágios, ilustrados na Figura 2.5:

- 1º Estágio - todas as não linearidades presentes no modelo dinâmico são compensadas, obtendo-se um sistema linear e desacoplado;
- 2º Estágio - ao sistema linear obtido são aplicadas técnicas conhecidas de controle linear.

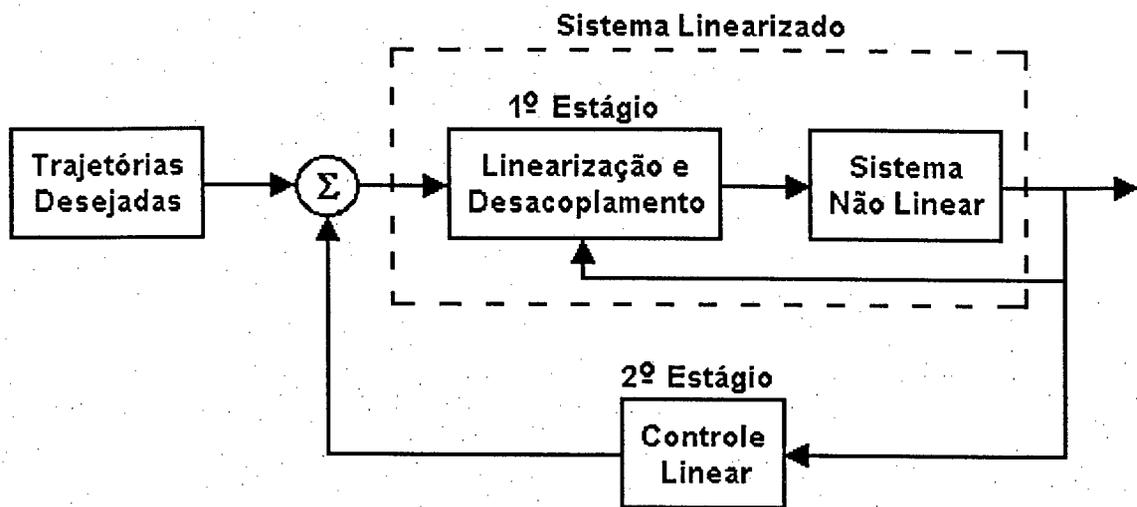


Figura 2.5: Esquemático do Controle Linearizante e Desacoplante.

O controlador linearizante e desacoplante é utilizado neste trabalho, porque sua formulação e seu comportamento são bem conhecidos, sendo muito útil como referência para fins de comparação com controladores robustos baseados em Estrutura Variável, que são examinados no Capítulo 3.

Como resultado da aplicação do primeiro estágio, obtém-se um sistema do tipo

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_r \\ u_k \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

linearizado e desacoplado, se o sistema for perfeitamente conhecido; portanto, restam ser definidos apenas os controladores lineares para a força ( $u_a$  e  $u_r$ ) e para o movimento ( $u_k$ ).

Nas direções de movimento, tem sido muito utilizada a ação proporcional-derivativa [67], [68], [21], [5], que pode vir acompanhada também de um termo integral para anular os erros, caso haja incidência de alguma perturbação no sistema. O controlador PD é bem conhecido, fácil de ser projetado e conduz os erros assintoticamente para zero (na ausência de perturbações).

Nas direções de força, a ação integral do erro de força é a mais recomendada por diversos pesquisadores [19], [20], [69], [70], [5], podendo ser listadas as seguintes razões para isto:

- É robusto ao atraso de medição e remove erros de regime permanente [71], [20];
- Evidenciou (teórica e experimentalmente) um desempenho superior como estratégia para o seguimento de força, quando comparado aos demais controladores [19];
- É a maneira mais simples de criar uma ação de filtragem passa-baixa, o que tem sido reconhecido como uma técnica útil para melhorar a estabilidade [72], [73];
- No que se refere ao momento do estabelecimento do contato, mostra-se que uma ação integral com a adição de uma realimentação de velocidade melhora a rejeição ao impacto [74]; um aumento significativo da banda de controle (ganho) pode ser alcançado por meio do amortecimento ativo produzido pela realimentação da velocidade do motor, ao invés da diferenciação da medida da força [70];
- No caso de contato com um ambiente muito rígido, o controle de força é impraticável quando se pensa num controlador do tipo PD, o que não se verifica quando se trata do controlador integral. De fato, as propriedades de estabilidade são incrementadas quando o contato é rígido, não necessitando flexibilizar o contato, como seria necessário se o controlador fosse do tipo PD. A adoção de leis de controle de força do tipo PD para produzir amortecimento ativo não é indicada por duas razões principais. A primeira é o fato de que as medidas de força são muito afetadas por ruído de alta frequência, de modo que a derivada de força, obtida por simples diferenciação, tem se revelado errática, e os componentes do ruído na faixa de frequência da ação derivativa se refletem na variável de controle, amplificados com um ganho proporcional à frequência, resultando em grandes distúrbios nos controles de movimento e de força, pois as dinâmicas de ordem mais elevada são excitadas. A segunda razão é que a robustez com respeito à rigidez do contato é grandemente reduzida ao usar-se uma ação derivativa, mesmo que seja filtrada [70].

Para ambas as ações de controle, devem ser evitados ganhos elevados, que provoquem a saturação dos atuadores e, em consequência, permitam o crescimento anormal dos erros. Quando o termo integral está presente no controlador, a saturação dos atuadores também pode causar o problema da *windup* [69]. Finalmente, o controlador PD deve produzir uma equação de malha fechada dos erros, cujos ganhos impliquem em amortecimento crítico, conduzam os erros o mais rapidamente para valores suficientemente pequenos, e não excitem dinâmicas não modeladas, como as decorrentes da presença de flexibilidade nas juntas ou nos elos [67].

### 2.3.2 Controle da Força na Direção Dinâmica

Inicialmente, deseja-se aplicar o CLD visando a realização de tarefas que requeiram o controle das seguintes grandezas:

- forças aplicados nas direções dinâmicas, parametrizados pelo vetor  $\lambda_a$ , de dimensão  $d$ ;
- forças de reação nas direções estáticas, parametrizadas pelo vetor  $\lambda_r$ , de dimensão  $6 - k - d$ ;
- movimento nas direções cinemáticas, parametrizado pelo vetor  $\ddot{s}_k$ , de dimensão  $k$ .

O modelo obtido (2.55) facilita bastante a derivação do CLD associado a estes objetivos de controle, pois explicita as variáveis que se deseja controlar. Primeiramente, deve-se descrever a tarefa a ser realizada na forma

$$u_{ref} = \begin{bmatrix} \lambda_{a,ref} \\ \lambda_{r,ref} \\ \ddot{s}_{k,ref} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

isto é, pelos valores de referência das forças ( $\lambda_{a,ref}$ ) e ( $\lambda_{r,ref}$ ) e do movimento ( $\ddot{s}_{k,ref}$ ). Os torques de entrada que atendem a esta especificação são imediatamente derivados de (2.55), ou seja

$$u = (J\hat{M}_r^{-1})^\# (\hat{Q} u_{ref} - \hat{m}) \quad (2.61)$$

onde

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} (T_d \hat{M}_e^{-1} T_d^T + J \hat{M}_r^{-1} J^T) Y_a & J \hat{M}_r^{-1} J^T Y_r & T_k \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\hat{m} = -\hat{T}_k \dot{s}_k - \hat{T}_d \dot{s}_d + T_d \hat{M}_e^{-1} \hat{n}_e + \hat{J} \dot{q} - J \hat{M}^{-1} \hat{n}_r \quad (2.63)$$

e  $(J\hat{M}_r^{-1})^\#$  é qualquer pseudo inversa à direita de  $(J\hat{M}_r^{-1})$ , que pode ser por exemplo  $\hat{M}_r J^\#$ , sendo  $J^\#$  a pseudo-inversa de  $J$ . Se  $J$  for quadrada e não singular, então  $(J\hat{M}_r^{-1})^\# = \hat{M}_r J^{-1}$ . Os termos do tipo  $\hat{\bullet}$  referem-se a grandezas estimadas, visto que os parâmetros do sistema podem não ser perfeitamente conhecidos.

Para implementar esta lei de controle, ou qualquer outra apresentada neste e no próximo capítulo em que a força também esteja sendo controlada, é necessário medir as seguintes grandezas:

- posição e velocidade das juntas  $q$  e  $\dot{q}$ ;
- posição e velocidade do EF  $s$  e  $\dot{s}$ ;
- além da força de contato  $F$ .

Se houver uma boa descrição da geometria do sistema, as grandezas  $s$  e  $\dot{s}$  podem ser obtidas a partir das variáveis das juntas.

Substituindo a lei de controle (2.61-2.63) no modelo dado pela equação (2.55), juntamente com (2.56, 2.57 e 2.58), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = u_{ref} + p_t \quad (2.64)$$

onde

$$p_t = \hat{Q}^{-1} J \hat{M}_r^{-1} (p_r + p_d) - \hat{Q}^{-1} T_d \hat{M}_e^{-1} p_e \quad (2.65)$$

e

- $p_r = \tilde{M}_r \ddot{q} + \tilde{n}_r$ , sendo  $\tilde{M}_r = \hat{M}_r - M_r$  e  $\tilde{n}_r = \hat{n}_r - n_r$ ;
- $p_e = \tilde{M}_e \ddot{s}_d + \tilde{n}_e$ , sendo  $\tilde{M}_e = \hat{M}_e - M_e$  e  $\tilde{n}_e = \hat{n}_e - n_e$  e
- $p_d = M_r J^{-1} Q \delta$ .

Os termos  $p_r$  e  $p_e$  totalizam os efeitos das incertezas paramétricas devidas ao robô e ao ambiente, respectivamente, e o termo  $p_d$  incorpora os efeitos das perturbações externas. Considera-se que, embora não se conheça os parâmetros do sistema, são conhecidos os seus limites de incerteza. Desta forma, os valores médios se constituem em estimativas imediatas e razoáveis para estes parâmetros.

Finalmente, o controlador linear  $u_{ref}$  é definido na forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{a,ref} \\ \lambda_{r,ref} \\ \ddot{s}_{k,ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{a,des} - K_{ia} \int_0^t e_a d\tau \\ \lambda_{r,des} - K_{ir} \int_0^t e_r d\tau \\ \ddot{s}_{k,des} - K_{vk} \dot{e}_k - K_{pk} e_k \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

para o qual usou-se o controlador integral no controle das forças e o controlador proporcional-derivativo no controle do movimento, e onde

- $K_{ia}$  e  $K_{ir}$  são as matrizes de ganho, diagonais e definidas positivas, dos controladores integrais de força;
- $K_{vk}$  e  $K_{pk}$  são as matrizes de ganho, diagonais e definidas positivas, do controlador derivativo e proporcional de posição;
- $\lambda_{a,des}$ ,  $\lambda_{r,des}$ ,  $\ddot{s}_{k,des}$ ,  $\dot{s}_{k,des}$  e  $s_{k,des}$  (ou simplesmente  $\lambda_{ad}$ ,  $\lambda_{rd}$ ,  $\ddot{s}_{kd}$ ,  $\dot{s}_{kd}$  e  $s_{kd}$ ) são os valores desejados de  $\lambda_a$ ,  $\lambda_r$ ,  $\ddot{s}_k$ ,  $\dot{s}_k$  e  $s_k$ , respectivamente;
- $e_a = \lambda_a - \lambda_{a,des}$  e  $e_r = \lambda_r - \lambda_{r,des}$  são os erros de força e
- $e_k = s_k - s_{k,des}$  e  $\dot{e}_k = \dot{s}_k - \dot{s}_{k,des}$  são os erros de posição e de velocidade.

A partir das equações (2.60) e (2.66), a equação de malha fechada (2.64) é reescrita numa forma onde se pode distinguir as dinâmicas pelas quais os erros de força e de posição evoluem e os parâmetros dos quais dependem, isto é,

$$\begin{bmatrix} e_a + K_{ia} \int_0^t e_a d\tau \\ e_r + K_{ir} \int_0^t e_r d\tau \\ \ddot{e}_k + K_{vk} \dot{e}_k + K_{pk} e_k \end{bmatrix} = p_t \quad (2.67)$$

Para o caso nominal, os parâmetros do sistema robô-ambiente são perfeitamente conhecidos e supõe-se não ocorrer qualquer perturbação externa; conseqüentemente,  $p_t = 0$ . Neste caso, o sistema de equações de malha fechada é linear e desacoplado, pois as não-linearidades são completamente canceladas, e os erros tendem exponencialmente para zero, atendendo inteiramente todas as especificações de controle.

No caso perturbado, porém, há um certo grau de desconhecimento em relação ao sistema em decorrência de incertezas paramétricas e/ou da incidência de perturbações externas; conseqüentemente,  $p_t \neq 0$ , as não-linearidades não são totalmente canceladas, nem ocorre mais o desacoplamento entre as equações, o que dá origem a erros transitórios e de regime. Estes erros podem ser diminuídos, aumentando-se os ganhos, não porém sem comprometer em algum momento a estabilidade do sistema.

É importante notar que essas conclusões são válidas para qualquer controlador linear com ganhos finitos e com informações semelhantes. O desempenho deste tipo de controlador em condições perturbadas têm motivado a investigação de controladores que sejam robustos diante de perturbações (paramétricas ou externas), um dos objetivos deste estudo.

### 2.3.3 Controle do Movimento na Direção Dinâmica

Ao invés da força ( $\lambda_a$ ), pode-se preferir controlar o movimento ( $\ddot{s}_d$ ) nas direções dinâmicas, alterando o conjunto das grandezas a serem controladas para:

- movimento nas direções dinâmicas, parametrizado pelo vetor  $\ddot{s}_d$ , de dimensão  $d$ ;
- forças de reação nas direções estáticas, parametrizadas pelo vetor  $\lambda_r$ , de dimensão  $6 - k - d$ ;
- movimento nas direções cinemáticas, parametrizado pelo vetor  $\ddot{s}_k$ , de dimensão  $k$ .

Com esta mudança, o modelo dinâmico do sistema robô-ambiente passa a ser descrito por:

$$\begin{bmatrix} \ddot{s}_d \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = Q_s^{-1} (m_s + JM_r^{-1}u) + \delta_s \quad (2.68)$$

onde

$$Q_s = \begin{bmatrix} T_d + JM_r^{-1}J^TY_a(T_d^TY_a)^{-1}M_e & JM_r^{-1}J^TY_r & T_k \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$m_s = -\dot{T}_k\dot{s}_k - \dot{T}_d\dot{s}_d - JM_r^{-1}J^TY_a(T_d^TY_a)^{-1}n_e + \dot{J}\dot{q} - JM_r^{-1}n_r \quad (2.70)$$

$$\delta_s = \begin{bmatrix} \delta_d \\ \delta_r \\ \delta_k \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Descrevendo a tarefa a ser realizada por meio dos valores de referência das forças de reação ( $\lambda_{r,ref}$ ) e dos movimentos nas direções dinâmicas ( $\ddot{s}_{d,ref}$ ) e cinemáticas ( $\ddot{s}_{k,ref}$ ), na forma

$$u_{ref} = \begin{bmatrix} \ddot{s}_{d,ref} \\ \lambda_{r,ref} \\ \ddot{s}_{k,ref} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

os torques de entrada que atendem a esta especificação são imediatamente derivados de (2.68), isto é:

$$u = (JM_r^{-1})^\# (\hat{Q}_s u_{ref} - \hat{m}_s) \quad (2.73)$$

onde

$$\hat{Q}_s = \begin{bmatrix} T_d + J\hat{M}_r^{-1}J^TY_a(T_d^TY_a)^{-1}\hat{M}_e & J\hat{M}_r^{-1}J^TY_r & T_k \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

e

$$\hat{m}_s = -\dot{T}_k \dot{s}_k - \dot{T}_d \dot{s}_d - J\hat{M}_r^{-1} J^T Y_a (T_d^T Y_a)^{-1} \hat{n}_e + J\dot{q} - J\hat{M}_r^{-1} \hat{n}_r. \quad (2.75)$$

Para esta lei de controle, a seguinte equação de malha fechada é obtida:

$$\begin{bmatrix} \ddot{s}_d \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = u_{ref} + p_s \quad (2.76)$$

para a qual

$$p_s = \hat{Q}_s J\hat{M}_r^{-1} (p_r + p_d + J^T Y_a (T_d^T Y_a)^{-1} p_e) \quad (2.77)$$

onde  $p_r$ ,  $p_d$  e  $p_e$  são definidos de forma idêntica à seção anterior. Visto que as equações de malha fechada (2.64) e (2.76) são semelhantes, valem aqui os comentários do final da Subseção 2.3.2.

## 2.4 Robô Rígido em Contato com Ambiente Puramente Cinemático

O modelo dinâmico para um robô rígido restrito a um ambiente cinemático é mais simples, pois este não possui dinâmica (não são mais necessárias as equações (2.49)), apenas admite o movimento livre do EF em algumas direções e o restringe nas demais, contrabalançando a força aplicada com uma reação igual e oposta.

Nesta seção, são abordados dois casos envolvendo os ambientes cinemáticos: primeiramente, incluindo restrições impostas pelo ambiente ao movimento do EF, e por último, livre de quaisquer obstruções.

### 2.4.1 Robô Rígido em Ambiente com Restrições: Modelo e Controle

O modelo dinâmico de um robô rígido em contato com um ambiente puramente cinemático, que admita o movimento do EF em  $k < 6$  direções e o restrinja nas restantes  $6 - k$  direções, consiste de:

1.  $n$  equações diferenciais de segunda ordem relativas ao robô, idênticas às equações (2.47 e 2.48), pois o robô não sofreu qualquer alteração;
2.  $k$  equações algébricas, que estabelecem a não realização de trabalho das forças de reação  $F_r = Y_r(s_k)\lambda_r$  ao longo das direções cinemáticas:

$$T_k^T(s) Y_r = 0 \quad (2.78)$$

3. e, finalmente, mais 6 equações algébricas, idênticas às equações (2.52), que estabelecem o acoplamento entre os dois sub-sistemas.

Seguindo os mesmos passos da Subseção 2.2.5, uma forma mais conveniente para estas equações é obtida:

$$\begin{bmatrix} \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = Q^{-1} (m + JM_r^{-1}u) + \delta \quad (2.79)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} JM_r^{-1}J^TY_r & T_k \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$m = -\dot{T}_k\dot{s}_k + J\dot{q} - JM_r^{-1}n_r \quad (2.81)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_k \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

A partir deste modelo, pode-se conseguir com facilidade um controlador baseado na dinâmica inversa, desde que o objetivo seja controlar as forças (representadas por  $\lambda_r$ ) e o movimento (representado por  $\ddot{s}_k$ ). Descrevendo a tarefa a ser realizada por meio dos valores de referência da força de reação ( $\lambda_{r,ref}$ ) e do movimentos nas direções cinemáticas ( $\ddot{s}_{k,ref}$ ), isto é:

$$u_{ref} = \begin{bmatrix} \lambda_{r,ref} \\ \ddot{s}_{k,ref} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

os torques de entrada que atendem a esta especificação são imediatamente derivados de (2.79), ou seja

$$u = (JM_r^{-1})^\# (\hat{Q} u_{ref} - \hat{m}) \quad (2.84)$$

onde

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} JM_r^{-1}J^TY_r & T_k \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\hat{m} = -\dot{T}_k\dot{s}_k + J\dot{q} - JM_r^{-1}\hat{n}_r. \quad (2.86)$$

Para esta lei de controle, a seguinte equação de malha fechada é obtida:

$$\begin{bmatrix} \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = u_{ref} + pt \quad (2.87)$$

para a qual

$$p_t = \hat{Q}^{-1} J \hat{M}_r^{-1} (p_r + p_d) \quad (2.88)$$

onde  $p_r$  e  $p_d$  são definidos de forma idêntica à seção anterior. Para este caso,  $p_e = 0$ , pois o ambiente é descrito somente por meio de restrições geométricas. Visto que as equações de malha fechada (2.64) e (2.87) são semelhantes, valem também aqui os comentários do final da Subseção 2.3.2.

#### 2.4.2 Robô Rígido em Ambiente Livre de Restrições

Entretanto, se  $k = 6$ , o EF possui total liberdade de movimento dentro do espaço de trabalho do manipulador, as forças de reação, juntamente com  $Y_r$  e  $\lambda_r$ , não existem mais; conseqüentemente, a equação (2.78) não é mais necessária e o modelo dinâmico se resume a:

1.  $n$  equações diferenciais de segunda ordem relativas ao robô, idênticas às equações (2.47 e 2.48); neste caso, o termo  $J^T F$  representa os pesos dos corpos movimentados pelo manipulador, podendo ser incluído em  $n_r(q, \dot{q})$ , como mais uma parcela do torque gravitacional;
2. além de 6 equações algébricas, idênticas às equações (2.52), que estabelecem a equivalência entre as descrições da trajetória do EF nos dois sistemas de coordenadas: do robô e do ambiente.

Não há mais a necessidade do controle de força, apenas a compensação do peso dos corpos que estão sendo manipulados. Portanto, este modelo simplificado descreve a dinâmica do robô quando ele realiza tarefas caracterizadas por fraca interação com o ambiente, para as quais é suficiente o controle do movimento do manipulador, como por exemplo a soldagem ou tarefas que consistem em pegar uma peça num lugar e posicioná-la em outro.

Em decorrência destas simplificações, a equação (2.79) assume a seguinte forma:

$$\ddot{s}_k = T_k^{-1} (m + J M_r^{-1} u) + \delta_k \quad (2.89)$$

onde  $m$  possui a mesma definição dada em (2.81). Considerando que

$$T_k \ddot{s}_k + \dot{T}_k \dot{s}_k = J \ddot{q} + \dot{J} \dot{q} \quad (2.90)$$

a equação (2.89) pode ser reescrita como

$$M_r \ddot{q} + n_r = u + \delta_q \quad (2.91)$$

que é a equação dinâmica do manipulador para movimento sem restrições materiais no seu espaço de trabalho.

## 2.5 Modelo e Controle do Sistema Robô Rígido - Ambiente Flexível

Nesta seção, é derivado o modelo dinâmico resultante para o sistema robô-ambiente flexível. Este caso está ilustrado na Figura 2.6, onde o ambiente é caracterizado como uma mola linear de massa desprezível, cuja constante de rigidez é  $K_s$ . À esquerda, exibe-se a situação de repouso, em que nenhuma força é exercida sobre a parede e sua deformação é, conseqüentemente, nula. Na figura à direita, uma força é imposta à parede flexível, resultando na deformação  $s_c$ . Admite-se que a parede mantenha a sua geometria, não se deformando somente no ponto de aplicação da força, mas sofrendo uma deflexão uniforme em toda a sua superfície, conforme o que se vê à direita. Além disso, supõe-se que o EF possa deslocar-se tangencialmente à superfície.

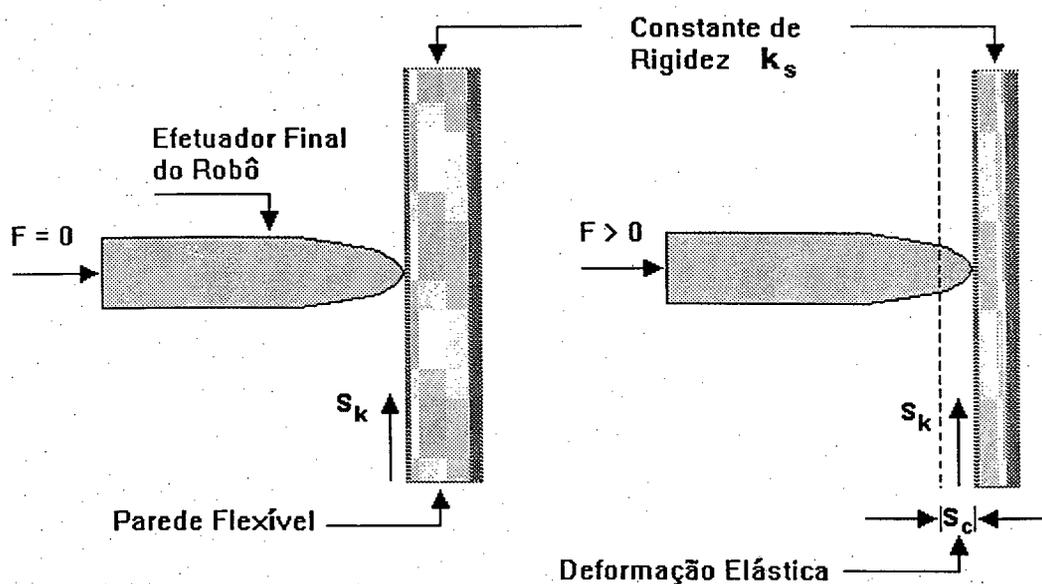


Figura 2.6: Parede flexível. À esquerda: situação de repouso. À direita: deformação em decorrência da aplicação de força.

O primeiro passo para se obter o modelo dinâmico do sistema robô-ambiente, considerando-se que em uma ou mais direções o EF está em contato com um ambiente flexível, consiste simplesmente em acrescentar à função de Lagrange (2.25) o seguinte termo relativo à energia potencial armazenada na mola representativa deste meio:

$$P_c(s_c) = \frac{1}{2} s_c^T K_s s_c \quad (2.92)$$

onde  $K_s$  é uma matriz diagonal, definida positiva, da rigidez do ambiente e  $s_c$  é a variável que parametriza o movimento nas direções flexíveis.

Após isso, adota-se um procedimento idêntico ao utilizado nas Subseções 2.2.4 e 2.2.5, através

do qual se chega ao modelo dinâmico, descrito pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \\ \ddot{s}_c \end{bmatrix} = Q^{-1} (m + JM_r^{-1}u) + \delta \quad (2.93)$$

para a qual

$$Q = \begin{bmatrix} (T_d M_e^{-1} T_d^T + JM_r^{-1} J^T) Y_a & JM_r^{-1} J^T Y_r & T_k & T_c \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$m = -\dot{T}\dot{s} + \dot{J}\dot{q} + T_d M_e^{-1} n_e - JM_r^{-1} n_r - JM_r^{-1} J^T Y_c (T_c^T Y_c)^{-1} K_s s_c \quad (2.95)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \\ \delta_k \\ \delta_c \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

onde:

- $T(s) = \begin{bmatrix} T_k(s) & T_d(s) & T_c(s) \end{bmatrix}$  e  $T_c(s)$  é uma submatriz  $6 \times c$  de  $T(s)$ , que relaciona o vetor de velocidades nas direções flexíveis -  $\dot{s}_c$  ao vetor das velocidades generalizadas  $v$ ;
- $Y_c$  é uma matriz  $6 \times c$ , cujas linhas formam uma base para as direções de existência de  $F_c = Y_c \lambda_c$ ;
- e  $\lambda_c \in \mathbb{R}^c$  é o vetor que serve de parâmetro para a força  $F_c$ .

A velocidade do EF e a força que ele aplica sobre o ambiente, descritas como função das variáveis do ambiente, são dadas por:

$$\begin{aligned} v &= T(s)\dot{s} \\ &= \begin{bmatrix} T_k(s) & T_d(s) & T_c(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_k \\ \dot{s}_d \\ \dot{s}_c \end{bmatrix} \\ &= T_k(s)\dot{s}_k + T_d(s)\dot{s}_d + T_c(s)\dot{s}_c \end{aligned} \quad (2.97)$$

e

$$F = Y_r \lambda_r + Y_a \lambda_a + Y_c \lambda_c \quad (2.98)$$

em que  $\lambda_c$  é expresso por:

$$\lambda_c = \left( T_c^T Y_c \right)^{-1} K_s s_c. \quad (2.99)$$

Observe-se que a equação (2.93), no que se refere às direções flexíveis, não apresenta um termo explícito para a força, mas descreve o comportamento dinâmico do movimento naquelas direções. Por isso, é natural pensar-se em controlar o movimento (e não a força) nas direções flexíveis.

Evidentemente, usando a relação (2.99), é possível reescrever o modelo (2.93), tal que a força nas direções flexíveis apareça explicitamente. Se o objetivo for controlar esta força, porém, são necessárias medidas adicionais, que podem incluir a aceleração  $\ddot{s}_c$  ou a força  $F_c$  e pelo menos sua derivada primeira -  $\dot{F}_c$ , cujo comportamento é muito ruidoso. Por isso, somente uma lei de controle visando o movimento nas direções flexíveis é derivada a seguir.

Do mesmo modo que nos casos precedentes, os torques de controle podem ser calculados através de

$$u = \left( J \hat{M}_r^{-1} \right)^{\#} \left( \hat{Q} u_{ref} - \hat{m} \right) \quad (2.100)$$

onde

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \left( T_d \hat{M}_e^{-1} T_d^T + J \hat{M}_r^{-1} J^T \right) Y_a & J \hat{M}_r^{-1} J^T Y_r & T_k & T_c \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

$$\hat{m} = -\hat{T}\dot{s} + \hat{J}\dot{q} + T_d \hat{M}_e^{-1} \hat{n}_e - J \hat{M}_r^{-1} \hat{n}_r - J \hat{M}_r^{-1} J^T Y_c \left( T_c^T Y_c \right)^{-1} \hat{K}_s s_c \quad (2.102)$$

e o vetor  $u_{ref}$  é formado pelos valores de referência para as forças -  $\lambda_{a,ref}$  e  $\lambda_{r,ref}$ , e para o movimento -  $\ddot{s}_{k,ref}$  e  $\ddot{s}_{c,ref}$ , ou seja:

$$u_{ref} = \begin{bmatrix} \lambda_{a,ref} \\ \lambda_{r,ref} \\ \ddot{s}_{k,ref} \\ \ddot{s}_{c,ref} \end{bmatrix}. \quad (2.103)$$

O termo  $\left( T_c^T Y_c \right)^{-1} \hat{K}_s s_c$  presente neste controlador pode ser substituído por  $\lambda_c$ , caso a força de contato seja medida. Esta substituição melhora o desempenho do controlador, principalmente no caso perturbado, como se comprovará com as simulações do próximo capítulo.

A equação de malha fechada é semelhante aos casos anteriores, a saber:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \\ \ddot{s}_c \end{bmatrix} = u_{ref} + p t \quad (2.104)$$

onde

$$p_t = \hat{Q}^{-1} J \hat{M}_r^{-1} (p_r + p_c + p_d) - \hat{Q}^{-1} T_d \hat{M}_e^{-1} p_e \quad (2.105)$$

e

$$p_c = J^T Y_c (T_c^T Y_c)^{-1} \tilde{K}_s s_c. \quad (2.106)$$

O termo  $p_c$  corresponde ao efeito das incertezas paramétricas do ambiente nas direções flexíveis e  $\tilde{K}_s = \hat{K}_s - K_s$ . Os demais termos já foram definidos.

## 2.6 Considerações Finais

Os sistemas apresentados neste capítulo permitem representar uma grande variedade de tarefas, envolvendo desde ambientes que não impõem qualquer tipo de restrição ao movimento do EF, até ambientes que permitem o seu movimento livre somente em algumas direções, enquanto o restringem totalmente em outras, se comportam como uma mola em algumas direções e, ainda, apresentam comportamento dinâmico de segunda ordem em outras.

Para os diversos tipos de ambientes abordados e modelados, são propostos controladores baseados em dinâmica inversa, que linearizam e desacoplam o sistema não linear, reduzindo-o a um sistema linear. Entretanto, o sistema robô-ambiente está sujeito a incertezas paramétricas e a perturbações externas, que podem prejudicar os objetivos de controle. Por isso, os controladores propostos são analisados quanto aos seus desempenhos em condições nominais e perturbadas, e são objeto de simulações no Capítulo 4.

No próximo capítulo, são introduzidos os controladores a estrutura variável, que forçam a trajetória dos estados para um lugar no espaço de estados, cuja dinâmica é escolhida pelo projetista, e onde o sistema é imune a perturbações. Por este motivo, ao contrário dos controladores apresentados neste capítulo, o efeito de incertezas paramétricas e perturbações exógenas é sensivelmente diminuído, e o objetivo de controle é alcançado com mais precisão.

## Capítulo 3

# Controle a Estrutura Variável

Na primeira parte deste capítulo, o Controle a Estrutura Variável (CEV) é apresentado tendo em vista uma formulação genérica de sistemas não-lineares e o seu desempenho é analisado, especialmente no que se refere à robustez. Na segunda parte, o controlador obtido para um sistema genérico é aplicado ao robô rígido em contato com ambientes passivos.

### 3.1 Conceituação do Controle a Estrutura Variável

O termo *Controle a Estrutura Variável* (CEV) se deve ao fato de que a estrutura de controle é alterada intencionalmente, satisfazendo algum critério ou condição. Um exemplo simples é o chaveamento entre diferentes valores de ganho no caminho de realimentação, obedecendo a uma regra que satisfaça os objetivos de controle. O CEV é um controle realimentado com chaveamento de alta velocidade, cuja tarefa é conduzir a trajetória de estado da planta (linear ou não-linear) a uma região do espaço de estados escolhida pelo projetista, mantendo-a ali para todo o tempo subsequente. Em geral, esta região é definida como uma hipersuperfície dos estados do sistema, conhecida como superfície de deslizamento ou de chaveamento. Quando restrita a esta superfície, a trajetória de estados do sistema controlado depende das propriedades dinâmicas da superfície, e torna-se insensível a variações paramétricas e a perturbações externas [47], [59].

A estrutura de controle é alterada de acordo com a posição relativa da trajetória de estados com respeito à superfície de chaveamento. Se a trajetória dos estados está **acima** desta superfície, um valor adequado de ganho é atribuído; se está **abaixo** dela, outro ganho é escolhido, tal que a trajetória **aponte** sempre para a superfície de chaveamento.

A propriedade da trajetória de estados de se manter na superfície de deslizamento uma vez que a intercepta é chamada de modo deslizante. Um modo deslizante existirá para um sistema se, na vizinhança da superfície de chaveamento, o vetor velocidade de estado (derivada do vetor de estados)

estiver direcionado para aquela superfície. Para uma ilustração destes conceitos, considere a Figura 3.1, na qual uma trajetória de estados intercepta a superfície de chaveamento e desliza sobre ela, por força de um controle a estrutura variável ideal.

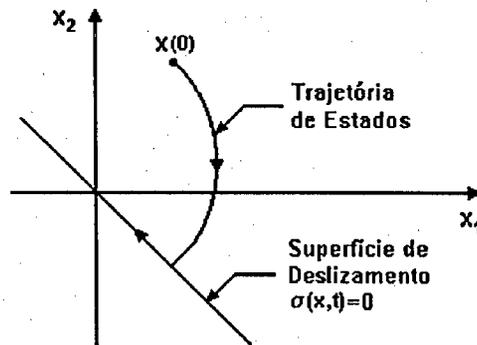


Figura 3.1: Trajetória de estado de um sistema sob a ação de um CEV.

Observa-se a existência de duas fases no Controle a Estrutura Variável: a **fase de alcance** e a **fase de deslizamento**. A primeira consiste em alcançar a superfície de deslizamento a partir de uma dada condição inicial. Durante este período, as trajetórias são sensíveis a variações paramétricas e a perturbações. Na segunda fase, o esforço de controle é dirigido no sentido de manter a trajetória de estado deslizando sobre a superfície em direção ao objetivo de controle, o que é obtido usando o controle chaveado.

### 3.2 Modelo Genérico de Sistemas Não-Lineares

A derivação do CEV e de suas propriedades não é feita diretamente para o sistema robô-ambiente, mas para uma classe de sistemas não lineares, cujo modelo é descrito por:

$$\dot{x}(t) = f(x, \rho, t) + B(x, \rho, t) u(x, t) + d(t) \quad (3.1)$$

em que

$$f(x, \rho, t) = f_o(x, t) + \Delta f(x, \rho, t) \quad (3.2)$$

$$B(x, \rho, t) = B_o(x, t) + \Delta B(x, \rho, t) \quad (3.3)$$

e onde:

- $x(t)$  ou, simplesmente,  $x$  é o vetor  $n \times 1$  dos estados;
- $f(x, \rho, t)$  ou, simplesmente,  $f$  é um vetor  $n \times 1$  de funções não lineares;

- $u(x, t)$  ou, simplesmente,  $u$  é o vetor  $m \times 1$  das entradas de controle;
- $\rho(x, t)$  ou, simplesmente,  $\rho$  é o vetor dos parâmetros incertos;
- $d(t)$  ou, simplesmente,  $d$  é o vetor  $n \times 1$  das perturbações externas;
- $B(x, \rho, t)$  ou, simplesmente,  $B$  é uma matriz  $n \times m$  de funções não lineares;
- $\Delta f(x, \rho, t)$  e  $\Delta B(x, \rho, t)$  ou, simplesmente,  $\Delta f$  e  $\Delta B$  são vetores  $n \times 1$ , que representam as perturbações no sistema decorrentes das incertezas paramétricas, ao passo que
- $f_o(x, t)$  e  $B_o(x, t)$  ou, simplesmente,  $f_o$  e  $B_o$  referem-se aos parâmetros nominais.

O objetivo final deste estudo é a derivação de um controlador a estrutura variável, que seja robusto a estas perturbações. Assume-se que o sistema atende à condição de Lipschitz, ou seja, numa dada região de interesse, a solução do sistema existe e é única, mesmo sob a influência de perturbações [75], [76]. Desta forma, a matriz  $B$  deve ser não-singular e as seguintes condições têm que ser satisfeitas [77], [59]:

$$\begin{aligned}\Delta f &= B_o \tilde{f} \\ \Delta B &= B_o \tilde{B} \\ d &= B_o \tilde{d}\end{aligned}\tag{3.4}$$

o que significa dizer que  $\Delta f$ ,  $\Delta B$  e  $d$  têm que pertencer à imagem de  $B_o$ ;  $\tilde{f}$  e  $\tilde{B}$  são vetores que incorporam as incertezas paramétricas e  $\tilde{d}$  as perturbações externas.

### 3.3 Síntese do Controlador

Nesta seção, um controlador é derivado para influir na trajetória de estados em ambas as fases mencionadas, a de alcance e a de deslizamento, mesmo diante de incertezas paramétricas e de perturbações. Na fase de deslizamento, a trajetória dos estados está restrita à superfície de chaveamento, deslizando sobre a mesma; portanto, o comportamento nesta fase depende da forma e dos parâmetros da superfície escolhida.

Em geral, as superfícies de chaveamento ( $\sigma$ ) são superfícies lineares [47], [48] dos erros de controle ( $\tilde{x} = x - x_d$ ), do tipo

$$\sigma_i = c_i^T \tilde{x} = 0, \quad i = 1, m\tag{3.5}$$

Desta forma, na fase de deslizamento, os erros tenderão exponencialmente para zero de acordo com um padrão determinado pelas constantes  $c_i$ , escolhidas pelo projetista.

Para que se tenha meios de influir no processo de alcance da superfície de chaveamento, o controle  $u(x, t)$  será escolhido de tal modo que imponha a  $\sigma(x, t)$  a dinâmica expressa pela seguinte equação diferencial de primeira ordem [59]:

$$\dot{\sigma} = -W \text{sign}(\sigma) - Kh(\sigma) \quad (3.6)$$

onde  $W$  e  $K$  são matrizes diagonais definidas positivas,  $h(\sigma) = \sigma$  (poderia ser outra função, desde que  $\sigma^T h(\sigma) > 0$ ) e  $\text{sign}(\sigma)$  é uma função descontínua dada por

$$\text{sign}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma > 0 \\ 0 & \text{se } \sigma = 0 \\ -1 & \text{se } \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Observe-se que a constante de tempo da equação (3.6) é  $1/K$  e que o termo descontínuo  $-W \text{sign}(\sigma)$  força  $\sigma(x, t)$  persistentemente em direção à superfície de chaveamento ( $\sigma = 0$ ).

Reescrevendo a equação (3.6) para a  $i$ -ésima superfície de chaveamento, obtém-se:

$$\dot{\sigma}_i + k_i \sigma_i = -w_i \text{sign}(\sigma_i). \quad (3.8)$$

Seja  $\sigma_o = \sigma_i(x(0), 0)$  a condição inicial de  $\sigma(x, t)$ . Demonstra-se que a equação (3.8) admite as soluções:

$$\sigma_i = -\frac{w_i}{k_i} + \left( \frac{w_i}{k_i} + \sigma_o \right) e^{-k_i t} \quad \text{se } \sigma_o > 0 \quad (3.9)$$

e

$$\sigma_i = \frac{w_i}{k_i} + \left( -\frac{w_i}{k_i} + \sigma_o \right) e^{-k_i t} \quad \text{se } \sigma_o < 0. \quad (3.10)$$

O tempo em que a trajetória  $\sigma_i$  alcança a superfície de chaveamento  $\sigma_i = 0$  é obtido igualando-se a zero as equações (3.9) e (3.10). Fazendo isto, chega-se a uma expressão para o tempo de alcance, que satisfaz ambas as situações:

$$t_a = \frac{1}{k_i} \ln \left( 1 + \frac{k_i}{w_i} |\sigma_o| \right) \quad (3.11)$$

e, se  $k_i = 0$ , é dado por:

$$t_a = \frac{|\sigma_o|}{w_i}. \quad (3.12)$$

Estes resultados mostram primeiramente que o tempo de alcance é finito e ajustável através de  $k_i$  e de  $w_i$ , o que significa que a convergência não é assintótica e pode ser acelerada, aumentando-se os valores de  $k_i$  e/ou de  $w_i$ .

Retomando a equação (3.6) e levando em conta (3.1), obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(x, t) &= \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} (f + B u + d) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &= -W \text{sign}(\sigma) - K \sigma\end{aligned}\quad (3.13)$$

de onde se deriva a seguinte lei de controle:

$$u = -\hat{B}_\sigma^{-1} \left( \hat{f}_\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t} + W \text{sign}(\sigma) + K \sigma \right) \quad (3.14)$$

na qual

$$\hat{f}_\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \hat{f} \quad (3.15)$$

$$\hat{B}_\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \hat{B} \quad (3.16)$$

onde  $\hat{f}$  e  $\hat{B}$  são estimativas de  $f$  e  $B$ , respectivamente. Definindo

$$u^* = - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + W \text{sign}(\sigma) + K \sigma \right) \quad (3.17)$$

e substituindo (3.14) em (3.13), resulta em:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= f_\sigma - B_\sigma \hat{B}_\sigma^{-1} \left( \hat{f}_\sigma - u^* \right) + d_\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ &= -W \text{sign}(\sigma) - K \sigma - \Psi\end{aligned}\quad (3.18)$$

onde  $d_\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} d$  e

$$\begin{aligned}\Psi &= \left( \hat{f}_\sigma - f_\sigma \right) + \left( \hat{B}_\sigma - B_\sigma \right) u + (0 - d_\sigma) \\ &= \Delta \hat{f}_\sigma + \Delta \hat{B}_\sigma u + \Delta \hat{d}_\sigma\end{aligned}\quad (3.19)$$

nada mais é do que a soma das incertezas e perturbações sofridas pelo sistema.

### 3.4 Análise de Robustez

Escolhendo-se como função candidata de Lyapunov  $V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma$ , que é definida positiva, a superfície de chaveamento será atrativa desde que a lei de controle (3.14) faça com que  $\dot{V} = \sigma^T \dot{\sigma}$  seja definida

negativa [76]. Usando o resultado descrito pela equação (3.18), uma esclarecedora expressão para  $\dot{V}$  é imediatamente obtida, isto é

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sigma^T \dot{\sigma} \\ &= -\sigma^T W \text{sign}(\sigma) - \sigma^T K \sigma - \sigma^T \Psi\end{aligned}\quad (3.20)$$

Como  $\sigma^T K \sigma \geq 0$ , a condição para que  $\dot{V} \leq 0$  pode ser expressa por

$$\sigma^T W \text{sign}(\sigma) \geq -\sigma^T \Psi \quad (3.21)$$

que é satisfeita se os elementos diagonais de  $W$  atendem a seguinte restrição:

$$w_i > |\psi_i|, \quad \forall i. \quad (3.22)$$

Outro critério para estabelecer o menor valor de  $W$  que torna  $\sigma$  atrativa pode ser derivado, se  $W = wI$ ,  $K = kI$ . Levando em conta que

$$\|\sigma\| = \sqrt{\sigma^T \sigma} = \sqrt{2V} \quad (3.23)$$

e que

$$\text{sign}(\sigma) \geq \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (3.24)$$

chega-se às seguintes relações úteis:

$$\begin{aligned}\sigma^T W \text{sign}(\sigma) &\geq w \sigma^T \frac{\sigma}{\|\sigma\|} = w \sqrt{2V} \\ \sigma^T K \sigma &= k \sigma^T \sigma = 2kV \\ \sigma^T \Psi &\leq \pm \|\sigma\| \|\Psi\| = \pm \psi \sqrt{2V}\end{aligned}\quad (3.25)$$

onde  $\psi$  representa o máximo efeito das perturbações paramétricas e/ou externas.

Deve-se notar que, matematicamente,  $\sqrt{2V}$  pode ser negativo; no entanto, na equação (3.20), o termo que lhe deu origem ( $\sigma^T W \text{sign}(\sigma)$ ) é sempre positivo, implicando que  $\sqrt{2V} \geq 0$ . A pior situação no que se refere à atratividade acontece quando o termo  $\sigma^T \Psi$  é negativo. Para esta situação e considerando as relações (3.25), a equação (3.20) se transforma na seguinte desigualdade:

$$\dot{V} \leq -2kV - (w - \psi) \sqrt{2V}. \quad (3.26)$$

De (3.26), conclui-se que para  $\dot{V}$  ser definida negativa, é suficiente que  $w > \psi$ . Com esta restrição

sobre o valor de  $w$ , consegue-se garantir isenção contra incertezas paramétricas e/ou perturbações externas.

Exceto pela restrição  $\sqrt{2V} \geq 0$ , a semelhança de (3.26) com a equação de Bernoulli [78] é total (Veja-se o Apêndice B). Com isso, é possível mostrar que  $V$  alcança o zero num tempo finito dado por

$$t_a \leq \frac{1}{k} \ln \left( 1 + \frac{k}{w - \psi} \sqrt{2V_o} \right) \quad (3.27)$$

onde naturalmente  $(w - \psi) > 0$  e  $V_o = V(0)$ . Se  $V$  alcança o zero em um intervalo de tempo finito, evidentemente,  $\sigma$  também o faz. Portanto, definindo-se  $\sigma$  convenientemente, pode-se garantir e controlar a convergência dos erros para zero.

### 3.4.1 Análise do Caso Nominal

Para o caso em que o sistema é perfeitamente conhecido, o termo relativo às perturbações é nulo, isto é,  $\psi = 0$ . Portanto, de (3.26)

$$\dot{V} \leq -2kV - w\sqrt{2V} \quad (3.28)$$

o que significa que  $\dot{V}$  é sempre negativa, sendo nula somente quando  $V = 0$ . Observando-se esta última desigualdade, conclui-se que  $V$  decresce pelo menos exponencialmente segundo uma constante de tempo aproximada de  $\frac{1}{2k}$ . A solução para (3.28) encontra-se no Apêndice B.

Se, ao invés de (3.6), for imposta a  $\sigma(x, t)$  uma dinâmica dada simplesmente por  $\dot{\sigma}(x, t) = -W \text{sign}(\sigma)$ , não haverá mais o termo proporcional, somente o chaveado. Portanto,  $k = 0$ ,  $w > 0$  e

$$\dot{V} \leq -w\sqrt{2V} \quad (3.29)$$

ou seja, enquanto  $V > 0$ ,  $\dot{V} < 0$ , o que significa que  $V$  decrescerá até zero de uma forma quadrática, segundo uma taxa que depende diretamente de  $w$ .

### 3.4.2 Análise do Caso Perturbado

Quando há incidência de perturbações endógenas e/ou exógenas no sistema,  $\psi > 0$  e  $\dot{V}$  é descrita por (3.26). A relação entre  $w$  e  $\psi$  define se o sistema é robusto às perturbações ou não:

- $w \geq \psi$ : Para esta condição,  $\dot{V} \leq 0$  ( $\dot{V} = 0$  só quando  $V = 0$ ), o que implica que  $V$  decresce até  $V = 0$  pelo menos exponencialmente segundo uma constante de tempo aproximada de  $\frac{1}{2k}$ ;
- $w < \psi$ : Neste caso, existe um valor de  $V = V_{ss} > 0$  para o qual  $\dot{V} = 0$ , como se demonstra a

seguir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq -2kV_{ss} + (\psi - w) \sqrt{2V_{ss}} \\ \Rightarrow V_{ss} &\leq \frac{(\psi - w)^2}{2k^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Este resultado mostra que o erro de regime, que depende de  $V_{ss}$ , é inversamente proporcional ao quadrado de  $k$  e diretamente proporcional ao quadrado de  $(\psi - w)$ , isto é, pode-se afirmar que quanto mais subestimadas forem as perturbações, piores serão os resultados.

Se, na dinâmica de  $\sigma(x, t)$ , não estiver presente o termo proporcional, isto é, se  $k = 0$  e  $w > 0$ , então

$$\dot{V} \leq -(w - \psi) \sqrt{2V} \quad (3.31)$$

de onde se conclui que:

- se  $w \geq \psi$ ,  $\dot{V} \leq 0$  ( $\dot{V} = 0$  só quando  $V = 0$ ), o que implica que  $V$  decresce para zero a uma taxa que depende de  $w - \psi$ ;
- se  $w < \psi$ ,  $\dot{V} > 0$ , o que significa que  $V$  cresce indefinidamente, caracterizando uma condição de instabilidade.

Para o cálculo de  $\psi$  e conseqüentemente de  $w$ , é necessário dispor de algum conhecimento a respeito das incertezas nos parâmetros e das perturbações externas, para que se possa estimar os seus efeitos no vetor de perturbações.

Em geral, são conhecidos apenas os limites superiores (identificados pelo subscrito H) e inferiores (identificados pelo subscrito L) das incertezas que incidem sobre os termos  $f$  e  $B$ , isto é,

$$f_L < f < f_H \quad (3.32)$$

$$B_L < B < B_H \quad (3.33)$$

As estimativas de  $f$  e  $B$  podem se basear em:

- uma lei adaptativa dos parâmetros, trazendo como conseqüências:
  - melhor conhecimento do sistema;
  - redução do nível das perturbações  $\psi$ ;
  - valores menores para os ganhos  $w$ ;
  - acréscimo substancial de cálculo devido à inclusão da estimação de parâmetros;

- um valor médio (aritmético ou geométrico) dos limites superior e inferior dos parâmetros do sistema, que
  - é mais simples e menos oneroso do que o primeiro;
  - não conduz à redução dos ganhos  $w$ ;
  - não contribui para o melhor conhecimento do sistema.

Com relação às perturbações externas, em geral, são conhecidos apenas os seus limites. Por isso, nenhuma estimativa de  $d$  é incluída na lei de controle.

### 3.5 Uso da Camada Limite

Devido às não-idealidades de um sistema real, especialmente atrasos devido ao cálculo do controle, limitações físicas dos atuadores e imperfeições do chaveamento, tais como atraso, histerese, zona morta, não é possível chavear instantaneamente o controle de um estágio para outro. Por causa disso, a trajetória de estados oscila numa vizinhança em torno da superfície de chaveamento, ao invés de deslizar sobre ela, podendo, com isso, excitar dinâmicas não-modeladas de alta frequência na planta [56]. Este fenômeno é conhecido como *chattering* e está ilustrado na Figura 3.2.

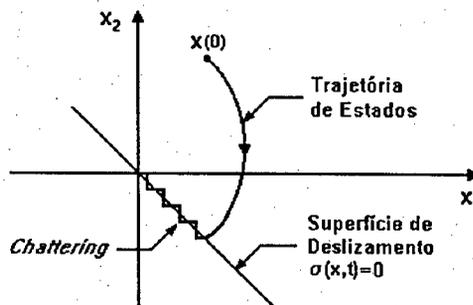


Figura 3.2: Ilustração do fenômeno conhecido como *chattering*.

Para o controlador proposto na seção anterior, o *chattering* é tanto mais evidente, quanto maior for o valor de  $W$ . Entretanto, este fenômeno indesejado pode ser evitado ou, ao menos, reduzido, utilizando-se uma camada limite ( $\Phi$ ) adequada em torno das superfícies de chaveamento (Figura 3.3); como consequência disto, a função  $sign(\cdot)$  é substituída pela função  $sat(\cdot)$ , definida como segue [48]:

$$sat(\sigma) = \begin{cases} sign(\sigma) & se \quad |\sigma| > \Phi \\ \sigma/\Phi & se \quad |\sigma| \leq \Phi \end{cases} \quad (3.34)$$

Dentro da camada limite, o controle deixa de ser descontínuo e passa a ser um controle contínuo de alto ganho. Portanto, visto que o controle dentro da camada limite muda, é necessário analisar o comportamento da trajetória de estados nesta região.

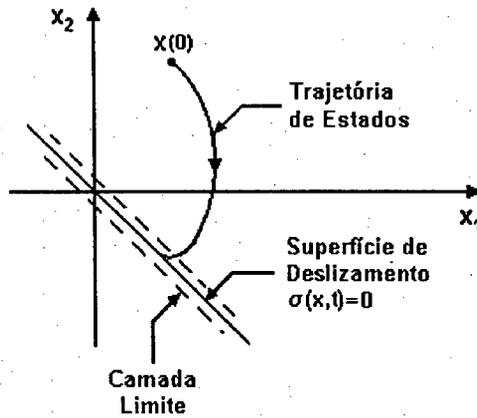


Figura 3.3: Uso da camada limite.

### 3.5.1 Conseqüências da Camada Limite Sobre a Robustez

Na camada limite, a primeira das relações estabelecidas em (3.25) muda para:

$$\sigma^T W_{sat}(\sigma) = \left(\frac{w}{\Phi}\right) \sigma^T \sigma = 2 \left(\frac{w}{\Phi}\right) V \quad (3.35)$$

com as quais se obtém a seguinte descrição de  $\dot{V}$  em função de  $V$  e dos parâmetros de controle

$$\dot{V} \leq -2kV - 2 \left(\frac{w}{\Phi}\right) V + \psi\sqrt{2V}. \quad (3.36)$$

Inicialmente, considere-se a situação em que não ocorrem perturbações, ou seja, quando  $\psi = 0$ . A desigualdade (3.36) pode ser reescrita na forma:

$$\dot{V} + 2 \left(k + \frac{w}{\Phi}\right) V \leq 0 \quad (3.37)$$

que apresenta um comportamento de primeira ordem, com constante de tempo  $\tau = \frac{1}{2(k+w/\Phi)}$ . Portanto,  $V$  decresce exponencialmente para zero de acordo com esta constante de tempo e  $\dot{V}$  é sempre negativa, exceto para  $V = 0$ , quando também é nula. Observe-se, ainda, que  $\frac{w}{\Phi} \gg k$ , resultando em  $\tau \simeq \frac{\Phi}{2w}$ .

Por outro lado, para o caso perturbado, de (3.36) conclui-se que  $\dot{V}$  é negativa se

$$2(k + w/\Phi)V \simeq 2\frac{w}{\Phi}V > \psi\sqrt{2V}. \quad (3.38)$$

Levando em conta (3.23), a desigualdade (3.38) pode ser reescrita como:

$$w > \psi \frac{\Phi}{\|\sigma\|}. \quad (3.39)$$

É claro que esta desigualdade não se mantém para qualquer valor de  $\sigma$ , pois  $\sigma < \Phi$  (a trajetória está dentro da camada limite); portanto, há um valor de  $\sigma$  abaixo do qual a desigualdade (3.39) não é mais verdadeira. Nesta situação,  $\dot{V}$  é positiva ou nula, fazendo com que  $V$  seja conduzida a um valor de regime maior do que zero, dado por

$$V_{ss} \leq \frac{\psi^2}{2(k + \frac{w}{\Phi})^2} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\psi\Phi}{w} \right)^2 \quad (3.40)$$

que associa a amplitude de  $V_{ss}$  (e conseqüentemente os erros de regime) diretamente ao quadrado das incertezas  $\psi$  e da camada limite  $\Phi$  e inversamente proporcional ao quadrado do ganho de controle  $w$ . Verifica-se que é possível reduzir os erros, diminuindo-se a camada limite ou aumentando-se o ganho de controle.

As perturbações são inerentes ao sistema, sendo difícil ou mesmo impossível evitá-las ou reduzi-las. Entretanto, o seu efeito pode ser atenuado, ou estimando os parâmetros do sistema, ou o total das perturbações, promovendo com isso uma redução em  $\psi$  e, como conseqüência, nos erros de movimento e de força. Apesar de exigir um grande esforço computacional, alguns pesquisadores têm proposto uma combinação do controle adaptativo com o controle a estrutura variável [39], [79], obtendo resultados promissores em termos de estabilidade e de precisão. Em razão da simplicidade e de um pequeno acréscimo de cálculo, têm sido realizados alguns trabalhos associando a estimação das perturbações com o controle a estrutura variável, também apresentando bons resultados [62], [80].

### 3.5.2 Limite Superior de $W$

Esta diminuição dos erros, entretanto, é limitada, pois a redução de  $\Phi$  e/ou o aumento de  $W$  pode provocar o surgimento ou a intensificação do *chattering*, geralmente um efeito indesejável ou até mesmo intolerável. De fato, há um compromisso entre a largura da camada limite, o valor do ganho do controle chaveado e também o intervalo de discretização (no caso de simulação, o passo de integração).

O valor de  $W$ , a partir do qual o fenômeno do *chattering* é iniciado, pode ser obtido de uma análise

da equação (3.18), que descreve a trajetória de  $\sigma(x, t)$ , repetida a seguir com uma ligeira alteração:

$$\dot{\sigma} + K\sigma = -W \text{sign}(\sigma) - \Psi. \quad (3.41)$$

Nas proximidades da camada limite,  $\sigma$  é um valor muito pequeno, permitindo desprezar-se  $K\sigma$  diante dos demais termos desta equação, sem prejudicar os resultados dela derivados. Portanto, a equação correspondente à  $i$ -ésima superfície de chaveamento é dada simplesmente por

$$\dot{\sigma}_i = -w_i \text{sign}(\sigma_i) - \psi_i. \quad (3.42)$$

Esta equação informa que a taxa de variação de  $\sigma_i$  é igual à diferença entre o ganho de controle  $w_i$  e a soma das perturbações  $\psi_i$  se  $\sigma_i < 0$ , isto é,  $\dot{\sigma}_i = w_i - \psi_i$ , e igual à  $\dot{\sigma}_i = -(w_i + \psi_i)$  se  $\sigma_i > 0$ . Por conseguinte, há dois comportamentos diferentes dentro da camada limite, caracterizados por derivadas distintas, dependendo da posição inicial da trajetória de  $\sigma_i$  em relação à superfície deslizante.

Considerando um intervalo de tempo  $\Delta t > 0$ , há um valor finito de  $w_{i,lim}$  que conduz a trajetória de  $\sigma_i$  diretamente do ponto 1 ao ponto 2 ou de 2 a 3 (Figura 3.4) no tempo  $\Delta t$  antes que o controlador intervenha novamente no sistema. Um valor inferior conduz a um ponto dentro da camada limite no mesmo intervalo de tempo, enquanto um valor maior conduz à região externa à mesma.

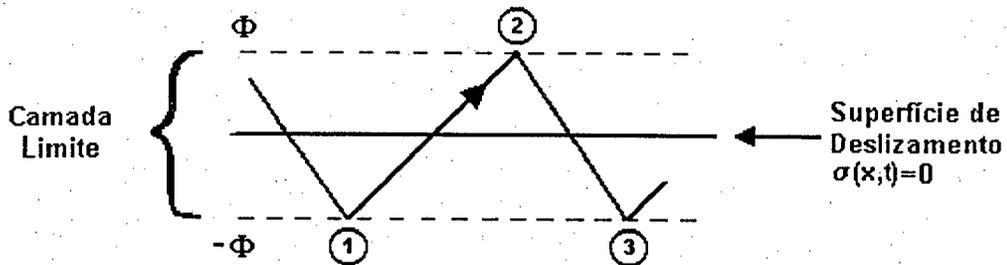


Figura 3.4: Trajetória de  $\sigma$  dentro da camada limite.

Quando a trajetória inicia em 1 na direção de 2,  $\sigma < 0$ ; conseqüentemente,

$$\sigma_i = -\Phi + (w_i - \psi_i) t. \quad (3.43)$$

Em  $t = \Delta t$ , o ponto 2 é alcançado; desta forma,

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \Phi \\ &= -\Phi + (w_i - \psi_i) \Delta t \end{aligned} \quad (3.44)$$

de onde se obtém

$$w_{i,lim1} = \frac{2\Phi}{\Delta t} + \psi_i. \quad (3.45)$$

Considerando, agora, a trajetória de 2 para 3, em que  $\sigma > 0$ , o valor limite do ganho é

$$w_{i,lim2} = \frac{2\Phi}{\Delta t} - \psi_i. \quad (3.46)$$

Para que o *chattering* seja evitado,  $w_i$  deve ser menor do que o menor dos valores calculados por (3.45) e (3.46), o que leva a

$$w_i < \frac{2\Phi}{\Delta t} - \psi_i. \quad (3.47)$$

Esta desigualdade evidencia a dependência entre a tecnologia, relacionada ao menor valor de  $\Delta t$  que se pode obter, e a precisão, que está vinculada a  $\Phi$ , a  $w_i$  e também a  $\psi_i$ .

### 3.6 CEV Aplicado ao Sistema Robô-Ambiente

Esta seção é dedicada à aplicação do CEV ao sistema robô rígido em contato com ambientes passivos, em que são considerados os ambientes dinâmicos, cinemáticos e flexíveis. No caso de ambientes dinâmicos, propõe-se duas alternativas: o controle da força ou o controle do movimento nas direções dinâmicas, tal como foi feito também para o Controle Linearizante e Desacoplante.

#### 3.6.1 Robô Rígido em Contato com Ambiente Dinâmico: Controle da Força na Direção Dinâmica

O primeiro passo para a obtenção do CEV para o sistema robô-ambiente dinâmico consiste em definir três grupos de superfícies de chaveamento:

- o primeiro,  $\sigma_a$ , de dimensão  $d$ , é descrito pelos erros integrais das forças aplicadas nas direções dinâmicas;
- o segundo,  $\sigma_r$ , de dimensão  $6 - d - k$ , pelos erros integrais das forças aplicadas nas direções estáticas;
- e o terceiro,  $\sigma_k$ , de dimensão  $k$ , é uma composição dos erros de velocidade e posição nas direções cinemáticas.

O uso destas superfícies de chaveamento no CEV equivale ao dos controladores integral para a força e proporcional-derivativo para o movimento utilizados no CLD no Capítulo 2. Matematicamente, são

expressas por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_a \\ \sigma_r \\ \sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t e_a d\tau \\ \int_0^t e_r d\tau \\ \dot{e}_k + C_k e_k \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

onde  $C_k$  é uma matriz diagonal, definida positiva, cujos valores são escolhidos pelo projetista para conseguir o comportamento dinâmico que lhe interessa no modo deslizante.

O modelo do sistema manipulador-ambiente referente a esta situação, obtido no capítulo anterior, é repetido aqui por conveniência:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = Q^{-1} (m + JM_r^{-1}u) + \delta \quad (3.49)$$

onde

$$Q = Q(q, s) = \begin{bmatrix} (T_d M_e^{-1} T_d^T + JM_r^{-1} J^T) Y_a & JM_r^{-1} J^T Y_r & T_k \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$m = m(q, \dot{q}, s, \dot{s}) = -\dot{T}_k \dot{s}_k - \dot{T}_d \dot{s}_d + \dot{J} \dot{q} + T_d M_e^{-1} n_e - JM_r^{-1} n_r \quad (3.51)$$

$$\delta = \delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \\ \delta_k \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

A partir deste modelo e do controlador descrito pela equação (3.14) para um sistema genérico, o CEV assume a seguinte forma:

$$u = (JM_r^{-1})^\# (\hat{Q} u_{ref} - \hat{m}) \quad (3.53)$$

onde  $\hat{Q}$  e  $\hat{m}$  possuem a mesma estrutura de (3.50) e (3.51) e são definidas precisamente por (2.62) e (2.63), e

$$u_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -C_k \dot{s}_k \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + W \text{sign}(\sigma) + K \sigma \right). \quad (3.54)$$

As matrizes de ganho  $W$  e  $K$  possuem estrutura diagonal na forma

$$W = \text{diag}(w_{a,1} \dots w_{a,d}, w_{r,1} \dots w_{r,6-e}, w_{k,1} \dots w_{k,k}) \quad (3.55)$$

$$K = \text{diag}(k_{a,1} \dots k_{a,d}, k_{r,1} \dots k_{r,6-e}, k_{k,1} \dots k_{k,k}). \quad (3.56)$$

Usando este controlador, chega-se à seguinte equação de malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = u_{ref} + p_t \quad (3.57)$$

onde

$$p_t = \hat{Q}^{-1} J \hat{M}_r^{-1} (p_r + p_d) - \hat{Q}^{-1} T_d \hat{M}_e^{-1} p_e \quad (3.58)$$

em que

$$p_r = \tilde{M}_r \ddot{q} + \tilde{n}_r \quad (3.59)$$

$$p_e = \tilde{M}_e \ddot{s}_d + \tilde{n}_e \quad (3.60)$$

$$p_d = M_r J^{-1} Q \delta \quad (3.61)$$

relacionam-se aos efeitos das incertezas paramétricas do robô ( $p_r$ ) e do ambiente ( $p_e$ ) e das perturbações externas ( $p_d$ ), com  $\tilde{M}_r = \hat{M}_r - M_r$ ,  $\tilde{n}_r = \hat{n}_r - n_r$ ,  $\tilde{M}_e = \hat{M}_e - M_e$  e  $\tilde{n}_e = \hat{n}_e - n_e$ .

Usando a definição de  $u_{ref}$ , a equação de malha fechada (3.57), pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} e_a + K_a \int_0^t e_a d\tau \\ e_r + K_r \int_0^t e_r d\tau \\ \ddot{e}_k + (C_k + K_k) \dot{e}_k + K_k C_k e_k \end{bmatrix} = -W \text{sign}(\sigma) + p_t \quad (3.62)$$

a partir da qual são evidenciados os parâmetros que afetam os erros de controle. Os erros das forças se comportam de acordo com um sistema de primeira ordem, enquanto que os erros de posição nas direções cinemáticas comportam-se como um sistema de segunda ordem. As constantes  $K_a$ ,  $K_r$ ,  $K_k$  e  $C_k$  determinam o comportamento transitório e de regime dos erros de controle. Ambas as equações são excitadas por uma função descontínua, cuja amplitude é uma composição das perturbações  $p_t$  e do termo descontínuo  $W \text{sign}(\sigma)$ . Da escolha de  $W$  depende a convergência dos erros para zero; se o termo descontínuo não superar as perturbações, os erros tenderão para valores de regime não nulos. Se um valor de  $W$  bem maior do que  $p_t$  é usado, consegue-se uma convergência mais rápida dos erros para zero. Entretanto, numa aplicação real em que a camada limite é utilizada, valores altos de  $W$  podem sujeitar o sistema aos efeitos do *chattering*.

Além disso, a partir da equação de malha fechada (3.57),  $\dot{\sigma}$  pode ser expresso por:

$$\dot{\sigma} = -W \text{sign}(\sigma) - K\sigma + p_t \quad (3.63)$$

que é semelhante à equação (3.18), deduzida para um sistema não-linear genérico. Portanto, as conclusões estabelecidas na seção anterior são válidas para o sistema robô-ambiente aqui estudado.

### 3.6.2 Obtenção de $W$

O critério expresso na desigualdade (3.22), isto é,  $w_i > |\psi_i|$ ,  $\forall i$ , será utilizado para garantir que as superfícies de chaveamento sejam atrativas. No caso do sistema robô-ambiente, o valor de cada  $w_i$  deve atender à seguinte desigualdade:

$$w_i > |p_{ti}|, \quad \forall i \quad (3.64)$$

onde  $p_{ti}$  é a  $i$ -ésima componente do vetor  $p_t$  das perturbações incidentes no sistema.

O vetor  $p_t$  está descrito nas equações (3.58)-(3.61), porém algumas mudanças podem ser feitas para que assumam uma forma mais simples de ser calculada, conforme se mostra a seguir. Primeiramente, considera-se que as incertezas paramétricas não sejam grandes o bastante para descaracterizar a seguinte aproximação:

$$\hat{Q}^{-1} J \hat{M}_r^{-1} M_r J^{-1} Q \simeq I \quad (3.65)$$

com a qual pode-se escrever:

$$\begin{aligned} p_t &= \hat{Q}^{-1} \left( J \hat{M}_r^{-1} (\tilde{M}_r \ddot{q} + \tilde{n}_r) - T_d \hat{M}_e^{-1} (\tilde{M}_e \ddot{s}_d + \tilde{n}_e) \right) + \hat{Q}^{-1} J \hat{M}_r^{-1} M_r J^{-1} Q \delta \\ &\simeq \hat{Q}^{-1} \left( J \hat{M}_r^{-1} (\tilde{M}_r \ddot{q} + \tilde{n}_r) - T_d \hat{M}_e^{-1} (\tilde{M}_e \ddot{s}_d + \tilde{n}_e) \right) + \delta. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Os termos  $\tilde{M}_r$ ,  $\tilde{n}_r$ ,  $\tilde{M}_e$ ,  $\tilde{n}_e$  e  $\delta$  podem ser majorados, tornando-se constantes e promovendo grande economia de cálculo. Desta forma:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_r &\rightarrow \Delta M_r = M_{r,H} - M_{r,L} \geq |\hat{M}_r - M_r| \\ \tilde{n}_r &\rightarrow \Delta n_r = n_{r,H} - n_{r,L} \geq |\hat{n}_r - n_r| \\ \tilde{M}_e &\rightarrow \Delta M_e = M_{e,H} - M_{e,L} \geq |\hat{M}_e - M_e| \\ \tilde{n}_e &\rightarrow \Delta n_e = n_{e,H} - n_{e,L} \geq |\hat{n}_e - n_e| \\ \delta &\rightarrow \Delta \delta = \delta_H - \delta_L \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde os subscritos  $H$  e  $L$  referem-se, respectivamente, aos valores absolutos máximo e mínimo atribuídos às grandezas a que pertencem.

Efetuando estas substituições, o vetor de perturbações majorado  $\bar{p}_T$  passa a ser dado por:

$$\bar{p}_T = \hat{Q}^{-1} \left( J\hat{M}_r^{-1} (\Delta M_r \ddot{q} + \Delta n_r) - T_d \hat{M}_e^{-1} (\Delta M_e \ddot{s}_d + \Delta n_e) \right) + \Delta \delta \quad (3.68)$$

e seu valor absoluto por:

$$\begin{aligned} |\bar{p}_T| &= \left| \hat{Q}^{-1} \left( J\hat{M}_r^{-1} (\Delta M_r \ddot{q} + \Delta n_r) - T_d \hat{M}_e^{-1} (\Delta M_e \ddot{s}_d + \Delta n_e) \right) + \Delta \delta \right| \quad (3.69) \\ &\leq \left| \hat{Q}^{-1} J\hat{M}_r^{-1} (\Delta M_r \ddot{q} + \Delta n_r) \right| + \left| T_d \hat{M}_e^{-1} (\Delta M_e \ddot{s}_d + \Delta n_e) \right| + \Delta \delta. \end{aligned}$$

Portanto, se

$$w_i > |\bar{p}_{Ti}|, \quad \forall i \quad (3.70)$$

a superfície  $\sigma_i$  será atrativa e os erros tenderão para zero.

### 3.6.3 Robô Rígido em Contato com Ambiente Dinâmico: Controle do Movimento na Direção Dinâmica

Semelhantemente ao caso anterior, são definidos três grupos de superfícies de chaveamento:

- o primeiro,  $\sigma_d$ , de dimensão  $d$ , é uma composição dos erros de velocidade e posição nas direções dinâmicas, contrastando com  $\sigma_a$ , que faz uso dos erros integrais das forças aplicadas;
- o segundo,  $\sigma_r$ , de dimensão  $6 - d - k$ , pelos erros integrais das forças aplicadas nas direções estáticas;
- e o terceiro,  $\sigma_k$ , de dimensão  $k$ , é uma composição dos erros de velocidade e posição nas direções cinemáticas.

Estas superfícies de chaveamento são escritas na seguinte forma matemática:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_d \\ \sigma_r \\ \sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_d + C_d e_d \\ \int_0^t e_r d\tau \\ \dot{e}_k + C_k e_k \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

onde  $C_d$  e  $C_k$  são matrizes diagonais, definidas positivas. O uso destas superfícies de chaveamento no CEV equivale ao dos controladores integral para a força e proporcional-derivativo para o movimento utilizados no CLD no Capítulo 2.

O modelo do sistema manipulador-ambiente para este caso foi obtido no capítulo anterior, e é repetido aqui por conveniência:

$$\begin{bmatrix} \ddot{s}_d \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = Q_s^{-1} (m_s + JM_r^{-1}u) + \delta_s \quad (3.72)$$

onde

$$Q_s = \begin{bmatrix} T_d + JM_r^{-1}J^TY_a (T_d^TY_a)^{-1} M_e & JM_r^{-1}J^TY_r & T_k \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$m_s = -\dot{T}_k \dot{s}_k - \dot{T}_d \dot{s}_d - JM_r^{-1}J^TY_a (T_d^TY_a)^{-1} n_e + J\dot{q} - JM_r^{-1}n_r \quad (3.74)$$

$$\delta_s = \begin{bmatrix} \delta_d \\ \delta_r \\ \delta_k \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

A partir deste modelo e do controlador descrito pela equação (3.14) para um sistema genérico, o CEV assume a seguinte forma:

$$u = (JM_r^{-1})^\# (\hat{Q}_s u_{ref} - \hat{m}_s) \quad (3.76)$$

onde

$$u_{ref} = \begin{bmatrix} -C_d \dot{s}_d \\ 0 \\ -C_k \dot{s}_k \end{bmatrix} - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + W \text{sign}(\sigma) + K\sigma \right) \quad (3.77)$$

e  $\hat{Q}_s$  e  $\hat{m}_s$  possuem a mesma estrutura de (3.73) e (3.74) e são definidas precisamente por (2.74) e (2.75).

Com este controlador, chega-se a uma equação de malha fechada semelhante a do caso precedente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{s}_d \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = u_{ref} + p_s \quad (3.78)$$

onde

$$p_s = \hat{Q}_s JM_r^{-1} (p_r + p_d + J^TY_a (T_d^TY_a)^{-1} p_e) \quad (3.79)$$

em que os termos  $p_r$ ,  $p_d$  e  $p_e$  estão definidos em (3.59)-(3.61).

Usando a definição de  $u_{ref}$ , a equação de malha fechada (3.78), pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{e}_d + (C_d + K_d) \dot{e}_d + K_d C_d e_d \\ e_r + K_r \int_0^t e_r d\tau \\ \ddot{e}_k + (C_k + K_k) \dot{e}_k + K_k C_k e_k \end{bmatrix} = -W \text{sign}(\sigma) + p_s \quad (3.80)$$

a qual admite observações semelhantes as da Subseção 3.6.1.

A partir da equação de malha fechada (3.78),  $\dot{\sigma}$  é expresso como:

$$\dot{\sigma} = -W \text{sign}(\sigma) - K\sigma + p_s \quad (3.81)$$

que possui a mesma forma da equação (3.18), deduzida para um sistema não-linear genérico. Portanto, as conclusões estabelecidas naquela seção são válidas também aqui.

### 3.6.4 Robô Rígido em Contato com Ambiente Cinemático

No caso de uma tarefa em um ambiente puramente cinemático, é necessário definir apenas dois grupos de superfícies de chaveamento:

- o primeiro,  $\sigma_r$ , de dimensão  $6 - k$ , é descrito pelos erros integrais das forças aplicadas nas direções estáticas;
- e o segundo,  $\sigma_k$ , de dimensão  $k$ , é uma composição dos erros de velocidade e posição nas direções cinemáticas.

Na forma matemática, estas superfícies de chaveamento são escritas por:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t e_r d\tau \\ \dot{e}_k + C_k e_k \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

onde  $C_k$  é uma matriz diagonal, definida positiva.

O modelo deste sistema é uma simplificação dos casos anteriores, e é descrito por:

$$\begin{bmatrix} \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = Q^{-1} (m + JM_r^{-1}u) + \delta \quad (3.83)$$

onde

$$Q = \begin{bmatrix} JM_r^{-1} J^T Y_r & T_k \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

$$m = -\dot{T}_k \dot{s}_k + J \dot{q} - JM_r^{-1} n_r \quad (3.85)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_r \\ \delta_k \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

A partir deste modelo e do controlador descrito pela equação (3.14) para um sistema genérico, o CEV assume a seguinte forma:

$$u = (JM_r^{-1})^\# (\hat{Q} u_{ref} - \hat{m}) \quad (3.87)$$

onde

$$u_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ -C_k \dot{s}_k \end{bmatrix} - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + W \text{sign}(\sigma) + K \sigma \right) \quad (3.88)$$

e  $\hat{Q}$  e  $\hat{m}$  possuem a mesma estrutura de (3.84) e (3.85) e são definidas precisamente por (2.85) e (2.86).

Com este controlador, chega-se à seguinte equação de malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = u_{ref} + p_t \quad (3.89)$$

onde

$$p_t = \hat{Q}^{-1} JM_r^{-1} (p_r + p_d) \quad (3.90)$$

cujos termos já são conhecidos.

A equação de malha fechada (3.89) pode ser reescrita usando a definição de  $u_{ref}$ , adquirindo a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} e_r + K_r \int_0^t e_r d\tau \\ \ddot{e}_k + (C_k + K_k) \dot{e}_k + K_k C_k e_k \end{bmatrix} = -W \text{sign}(\sigma) + p_t \quad (3.91)$$

a qual admite observações semelhantes as da Subseção 3.6.1.

A partir da equação (3.89),  $\dot{\sigma}$  pode ser expresso por:

$$\dot{\sigma} = -W \text{sign}(\sigma) - K \sigma + p_t \quad (3.92)$$

que é semelhante à equação (3.18), deduzida para um sistema não-linear genérico. Portanto, as conclusões estabelecidas na seção anterior são válidas para o sistema robô-ambiente aqui estudado.

### 3.6.5 Robô Rígido em Contato com Ambiente Flexível

Finalmente, para o sistema robô-ambiente flexível, é necessário primeiramente definir quatro grupos de superfícies de chaveamento:

- o primeiro,  $\sigma_a$ , de dimensão  $d$ , é descrito pelos erros integrais das forças aplicadas nas direções dinâmicas;
- o segundo,  $\sigma_r$ , de dimensão  $6 - d - c - k$ , pelos erros integrais das forças aplicadas nas direções estáticas;
- o terceiro,  $\sigma_k$ , de dimensão  $k$ , é uma composição dos erros de velocidade e posição nas direções cinemáticas;
- e o quarto,  $\sigma_c$ , de dimensão  $c$ , é uma composição dos erros de velocidade e posição nas direções flexíveis.

A forma matemática destas superfícies é:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_a \\ \sigma_r \\ \sigma_k \\ \sigma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^t e_a d\tau \\ \int_0^t e_r d\tau \\ \dot{e}_k + C_k e_k \\ \dot{e}_c + C_c e_c \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

onde  $C_k$  e  $C_c$  são matrizes diagonais, definidas positivas, cujos valores são escolhidos pelo projetista para conseguir o comportamento dinâmico que lhe interessa no modo deslizante. O uso destas superfícies de chaveamento no CEV equivale ao dos controladores integral para a força e proporcional-derivativo para o movimento utilizados no CLD no Capítulo 2.

O modelo do sistema manipulador-ambiente referente a esta situação, obtido no capítulo anterior, é repetido aqui por conveniência:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \\ \ddot{s}_c \end{bmatrix} = Q^{-1} (m + JM_r^{-1}u) + \delta \quad (3.94)$$

para a qual

$$Q = \begin{bmatrix} (T_d M_e^{-1} T_d^T + JM_r^{-1} J^T) Y_a & JM_r^{-1} J^T Y_r & T_k & T_c \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$$\dot{m} = -\dot{T}\dot{s} + J\dot{q} + T_d M_e^{-1} n_e - J M_r^{-1} n_r - J M_r^{-1} J^T Y_c (T_c^T Y_c)^{-1} K_s s_c \quad (3.96)$$

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \\ \delta_k \\ \delta_c \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

A partir deste modelo e do controlador descrito pela equação (3.14) para um sistema genérico, o CEV assume a seguinte forma:

$$u = (J \hat{M}_r^{-1})^\# (\hat{Q} u_{ref} - \hat{m}) \quad (3.98)$$

onde

$$u_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -C_k \dot{s}_k \\ -C_c \dot{s}_c \end{bmatrix} - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + W \text{sign}(\sigma) + K \sigma \right) \quad (3.99)$$

e  $\hat{Q}$  e  $\hat{m}$  possuem a mesma estrutura de (3.95) e (3.96) e são definidas precisamente por (2.62) e (2.63).

Usando este controlador, chega-se à seguinte equação de malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \\ \ddot{s}_c \end{bmatrix} = u_{ref} + p_t \quad (3.100)$$

onde

$$p_t = \hat{Q}^{-1} J \hat{M}_r^{-1} (p_r + p_c + p_d) - \hat{Q}^{-1} T_d \hat{M}_e^{-1} p_e \quad (3.101)$$

em que os termos  $p_r$ ,  $p_d$  e  $p_e$  estão definidos em (3.59)-(3.61) e

$$p_c = J^T Y_c (T_c^T Y_c)^{-1} \tilde{K}_s s_c \quad (3.102)$$

refere-se aos efeitos das incertezas paramétricas do ambiente flexível ( $p_c$ ), com  $\tilde{K}_s = \hat{K}_s - K_s$ .

Usando a definição de  $u_{ref}$ , a equação de malha fechada (3.100), pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} e_a + K_a \int_0^t e_a d\tau \\ e_r + K_r \int_0^t e_r d\tau \\ \ddot{e}_k + (C_k + K_k) \dot{e}_k + K_k C_k e_k \\ \ddot{e}_c + (C_c + K_c) \dot{e}_c + K_c C_c e_c \end{bmatrix} = -W \text{sign}(\sigma) + p_t \quad (3.103)$$

a qual admite observações semelhantes as da Subseção 3.6.1.

Além disso, a partir da equação de malha fechada (3.100),  $\dot{\sigma}$  pode ser expresso por:

$$\dot{\sigma} = -W \text{sign}(\sigma) - K\sigma + p_t \quad (3.104)$$

que é semelhante à equação (3.18), deduzida para um sistema não-linear genérico. Portanto, as conclusões estabelecidas na seção anterior são válidas para o sistema robô-ambiente aqui estudado.

### 3.7 Considerações Finais

O controlador a estrutura variável proposto, cuja derivação é facilitada pela forma compacta do modelo usado para representar o sistema robô-ambiente, controla força e movimento de uma forma integrada, dispensando o uso de matrizes de seleção, e pode ser aplicado no controle de manipuladores em contato com uma ampla variedade de ambientes.

Foram derivados critérios para o projeto do ganho do controle chaveado  $W$ , que garantem robustez e estabilidade diante da incidência de incertezas nos parâmetros do robô e do ambiente e de perturbações externas.

A ocorrência do fenômeno do *chattering* é evitada usando-se a camada limite e um critério que estabelece o valor limite de  $W$  a partir do qual este fenômeno ocorre. Apesar de haver uma perda de precisão com relação ao CEV ideal, a melhora em relação ao CLD é significativa, conforme comprovam os resultados mostrados no Capítulo 4.

## Capítulo 4

# Resultados de Simulação Para o Robô Rígido

Neste capítulo, são expostos e analisados os resultados de simulações, realizadas para um manipulador cotovelar em contato com ambientes passivos, utilizando o Controlador Linearizante e Desacoplante (CLD), derivado no Capítulo 2, e o Controlador a Estrutura Variável (CEV), deduzido no Capítulo 3. Além disso, os dois controladores são comparados quanto aos seus desempenhos, especialmente quanto às suas capacidades de superar as incertezas paramétricas e as perturbações externas.

### 4.1 Ambientes Cinemáticos

Esta seção destina-se a analisar os resultados dos dois controladores (CLD e CEV), quando o robô interage com ambientes puramente cinemáticos (Figura 4.1). Primeiramente, são detalhados os dados do sistema e os ganhos usados para os controladores; em seguida, a tarefa a ser realizada é descrita e as matrizes  $Y_r$  e  $T_k$ , que dependem da geometria da tarefa, são obtidas; por último, são pormenorizadas as simulações, realizadas para condições nominais e perturbadas, e os resultados são comentados.

As expressões para os cálculos da matriz de inércias, da matriz referente aos termos centrífugos e de Coriolis, do vetor dos termos gravitacionais e dos demais termos relativos ao robô articulado de dois graus de liberdade podem ser encontradas em livros clássicos de robótica, como por exemplo [65], [67], e são apresentadas também no Apêndice C.

#### 4.1.1 Parâmetros do Manipulador e Ganhos dos Controladores

Os parâmetros do manipulador são idênticos aos utilizados em [59], à exceção daqueles relacionados ao atrito, visto que não é considerado no referido trabalho. Os parâmetros são os seguintes:

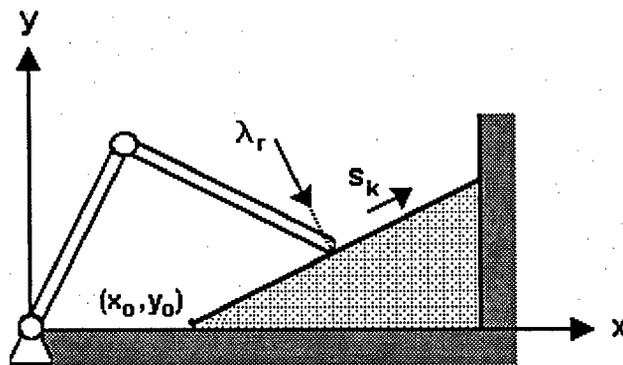


Figura 4.1: Robô cotovelado realizando tarefa num plano inclinado.

- Comprimentos dos elos [m]:  $l_1 = 1$ ;  $l_2 = 1$ ;
- Comprimentos dos centros de massa [m]:  $l_{c1} = 0,5$ ;  $l_{c2} = 0,5$ ;
- Massas [Kg]:  $m_1 = 20$ ;  $m_2 = 10$ ;
- Inércias [Kg.m<sup>2</sup>]:  $I_1 = 0,8$ ;  $I_2 = 0,2$ ;
- Coeficientes de Atrito:
  - Viscoso [N.m/rad/s]:  $b_1^v = 5$ ;  $b_2^v = 5$ ;
  - Dinâmico [N.m]:  $b_1^d = 2$ ;  $b_2^d = 2$ ;
  - Estático [N.m]:  $b_1^s = 5$ ;  $b_2^s = 5$ .

Os valores dos ganhos dos controladores usados nas simulações são escolhidos de modo a não serem excessivamente elevados, para que não provoquem movimentos bruscos, nem saturem os atuadores. Além disso, os ganhos do CLD e do CEV estão ajustados para produzirem equações de malha fechada com comportamentos dinâmicos semelhantes, próximos do comportamento crítico. Desta forma, a diferença nos resultados poderá ser creditada ao efeito do termo descontínuo do Controlador a Estrutura Variável.

Os valores usados nesta primeira experiência são os seguintes:

- Controlador Linearizante e Desacoplante:
  - Ganho proporcional (de posição):  $k_{pk} = 100$ ;
  - Ganho derivativo (de velocidade):  $k_{vk} = 20$ ;
  - Ganho integral de força:  $k_{ir} = 10$ ;

- Controlador a Estrutura Variável:

- Ganho para a superfície de força:  $k_r = 10$ ;
- Ganho para a superfície de movimento:  $k_k = 10$ ;
- Inclinação da superfície de movimento:  $c_k = 10$ ;
- Ganhos  $w_r$  e  $w_k$  mínimos:  $w_{r,\min} = w_{k,\min} = 5$ .

Os ganhos do controle chaveado  $w_r$  e  $w_k$  e as camadas limite  $\Phi_r$  e  $\Phi_k$  são obtidos a partir dos critérios estabelecidos através de (3.70) e de (3.47), derivados no capítulo anterior, e levando em conta o nível das perturbações e o passo de integração (igual a 0,001). As camadas limite são estabelecidas previamente e são fornecidas para cada um dos casos que seguem. Os ganhos do controle chaveado podem ser calculados previamente ou *on-line*.

De (2.67) e de (3.62), obtêm-se as seguintes equações de malha fechada nas direções de força

$$CLD : e_r + k_{ir} \int_0^t e_r d\tau = p_r \quad (4.1)$$

$$CEV : e_r + k_r \int_0^t e_r d\tau = -w_r \text{sign}(\sigma_r) + p_r \quad (4.2)$$

e nas direções de movimento

$$CLD : \ddot{e}_k + k_{vk} \dot{e}_k + k_{pk} e_k = p_k \quad (4.3)$$

$$CEV : \ddot{e}_k + (c_k + k_k) \dot{e}_k + k_k c_k e_k = -w_k \text{sign}(\sigma_k) + p_k \quad (4.4)$$

para os controladores CLD e o CEV. Comparando as equações (4.1) e (4.2), é necessário que  $k_{ir} = k_r$  para que ambas apresentem o mesmo comportamento dinâmico. Por outro lado, da comparação das equações (4.3) e (4.4), conclui-se que  $k_{vk} = c_k + k_k$  e  $k_{pk} = c_k k_k$  para que ambas apresentem o mesmo comportamento dinâmico.

#### 4.1.2 Definição da Tarefa

A tarefa consiste em movimentar o efetuador final ao longo de um plano inclinado em  $30^\circ$ , enquanto se aplica uma força constante de 20 [N], normal ao plano. As trajetórias no tempo para a posição e a velocidade desejadas são mostradas na Figura 4.2. O efetuador final é movido ao longo do plano inclinado desde a posição  $s_k = 0$  [m] até a posição  $s_k = 0,5$  [m] à velocidade constante, exceto nos pequenos intervalos de tempo relativos à aceleração e à desaceleração.

Escolhendo-se  $s_k$  como a variável definidora do movimento admissível pelo ambiente, facilmente

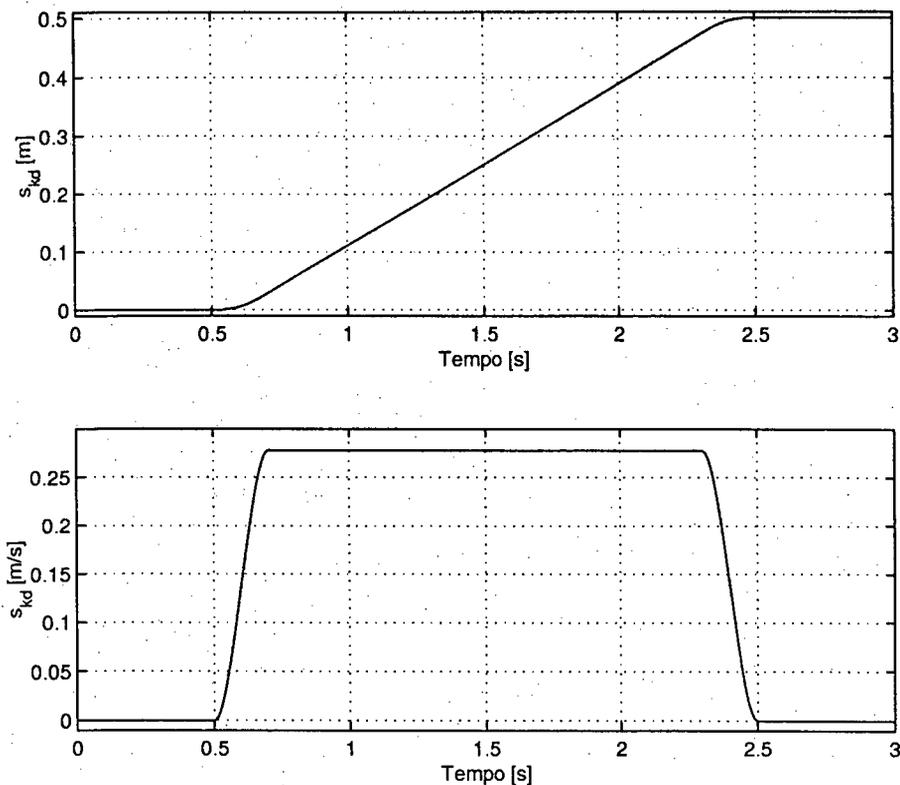


Figura 4.2: Trajetórias desejadas para posição e velocidade do EF.

se obtém sua relação com as coordenadas cartesianas, a saber:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_o + 0,5\sqrt{3}s_k \\ y_o + 0,5s_k \end{bmatrix} \\ &= \Gamma(s_k) \end{aligned} \quad (4.5)$$

que, derivada em relação ao tempo, resulta na velocidade cartesiana do EF em função das variáveis do ambiente:

$$\begin{aligned} v &= \begin{bmatrix} 0,5\sqrt{3} \\ 0,5 \end{bmatrix} \dot{s}_k \\ &= T_k \dot{s}_k. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A força de reação (do EF contra o ambiente) é parametrizada na forma  $F_r = Y_r \lambda_r$ , onde a matriz  $Y_r$  deve ser arbitrada, satisfazendo a condição de ortogonalidade, isto é,  $T_k^T Y_r = 0$ . Portanto,

$$T_k^T Y_r = \begin{bmatrix} 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{r11} \\ Y_{r21} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

o que conduz a

$$Y_r = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5\sqrt{3} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Com base neste resultado, a força de reação é expressa como:

$$\begin{aligned} F_r &= Y_r \lambda_r \\ &= \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5\sqrt{3} \end{bmatrix} \lambda_r \end{aligned} \quad (4.9)$$

que é normal ao plano inclinado. Por haver uma só superfície de contato,  $\lambda_r$  é um escalar.

### 4.1.3 Resultados das Simulações

Os resultados das simulações são divididos em cinco casos, de acordo com a incidência de incertezas paramétricas, de perturbações externas e de atrito:

- Caso 1 - Nominal Sem Atrito: os parâmetros do sistema são perfeitamente conhecidos, não existe qualquer perturbação externa e supõe-se que não haja atrito de qualquer natureza;
- Caso 2 - Nominal Com Atrito: o atrito (viscoso, dinâmico e estático) está presente e é modelado de acordo com a equação (A.3); os parâmetros do sistema são perfeitamente conhecidos, incluindo os coeficientes de atrito, e nenhuma perturbação externa é considerada;
- Caso 3 - Parâmetros Incertos: há um certo grau de incerteza quanto aos parâmetros do robô (incluindo os coeficientes de atrito), porém nenhuma perturbação externa está presente;
- Caso 4 - Perturbação Externa: há incidência de perturbações externas, mas nenhuma incerteza quanto aos parâmetros do sistema;
- Caso 5 - Parâmetros Incertos e Perturbação Externa: há um certo grau de incerteza quanto aos parâmetros do sistema, além da incidência de perturbações externas.

Nos casos 2 a 5, o atrito é compensado usando o modelo descrito no Apêndice A.

#### Caso 1: Nominal Sem Atrito

Para este caso, foram usados os seguintes valores para as camadas limite:  $\Phi_r = \Phi_k = 0,005$ .

Na Figura 4.3, são mostradas as variáveis de junta ( $q$  e  $\dot{q}$ ) equivalentes ao movimento do EF. No caso nominal, o EF segue com precisão as trajetórias de posição e de velocidade estabelecidas no

espaço de configuração do ambiente (Figura 4.2), desde que o controlador seja eficiente. Conseqüentemente, as trajetórias mostradas na Figura 4.3 se equivalem ao movimento desejado para o EF. Desta forma, sempre que os erros do movimento no espaço de configuração do ambiente forem pequenos, as trajetórias das variáveis das juntas serão praticamente as mesmas do caso nominal.

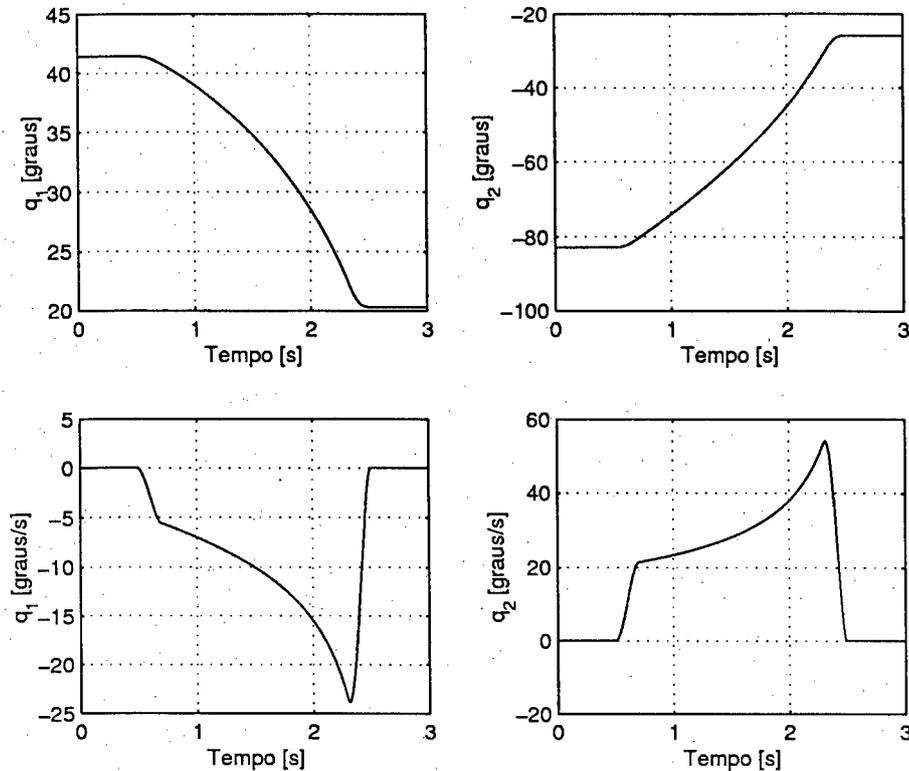


Figura 4.3: Caso 1 - Posição e velocidade das juntas.

Os comportamentos das superfícies de chaveamento são mostrados na Figura 4.4. Observando-os, percebe-se que os valores de  $\sigma_r$  e de  $\sigma_k$  se restringem a faixas bem mais estreitas do que suas respectivas camadas limite. Isto se deve principalmente à compensação total da dinâmica do manipulador.

A Figura 4.5 mostra os erros de posição ( $s_k - s_{kd}$ ) e de velocidade ( $\dot{s}_k - \dot{s}_{kd}$ ) do EF, comparando os desempenhos dos controladores CEV e CLD, enquanto que a Figura 4.6 apresenta o comportamento dos erros da força normal ao plano ( $\lambda_r - \lambda_{rd}$ ) para os mesmos controladores. Estes resultados evidenciam um melhor desempenho do CEV no que se refere à precisão e à rapidez em retornar à trajetória desejada, apesar de ambos os controladores produzirem erros pequenos quanto à força e ao movimento. Os erros de posição e de velocidade para o CLD são aproximadamente cem vezes maiores do que os verificados para o CEV. Os erros de força para ambos os controladores são desprezíveis, chegando a apenas alguns milésimos de Newton para uma força aplicada de 20 [N]. Além disso, é importante observar que todos os erros alcançam picos nos instantes de aceleração e desaceleração, mas sempre convergem para zero.

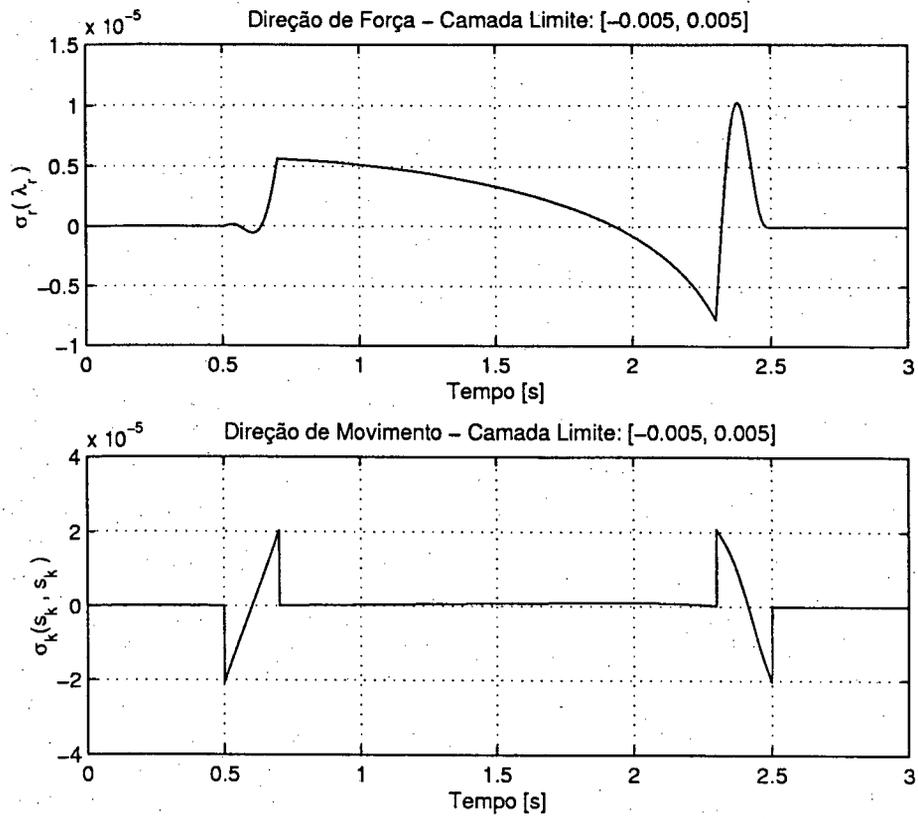


Figura 4.4: Caso 1 - Superfícies de chaveamento.

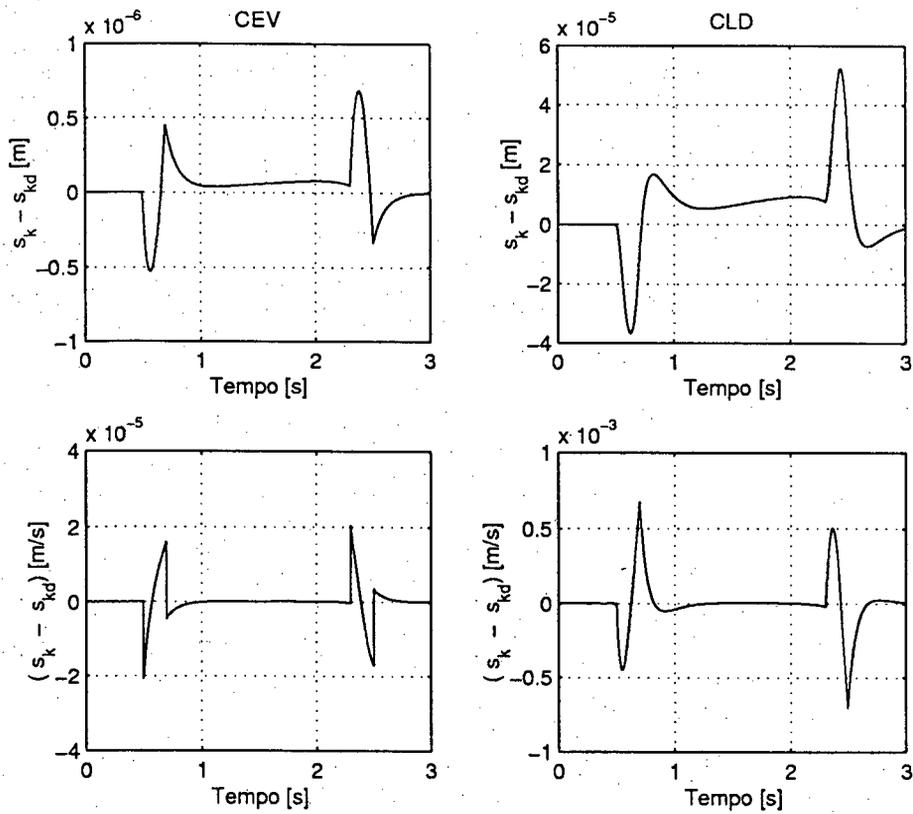


Figura 4.5: Caso 1 - Erros de posição e de velocidade.

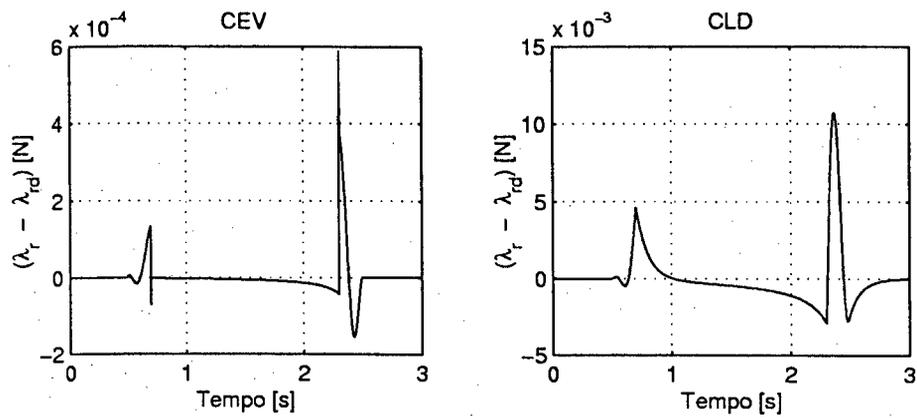


Figura 4.6: Caso 1 - Erros de força.

Quanto às ações de controle, nota-se a existência de dois picos, que se devem à aceleração e à desaceleração do EF. Além disso, apesar da diferença marcante quanto aos resultados dos dois controladores, não é possível distinguir (pelo menos não visualmente) entre os esforços de controle desenvolvidos pelos mesmos, como se pode conferir na Figura 4.7.

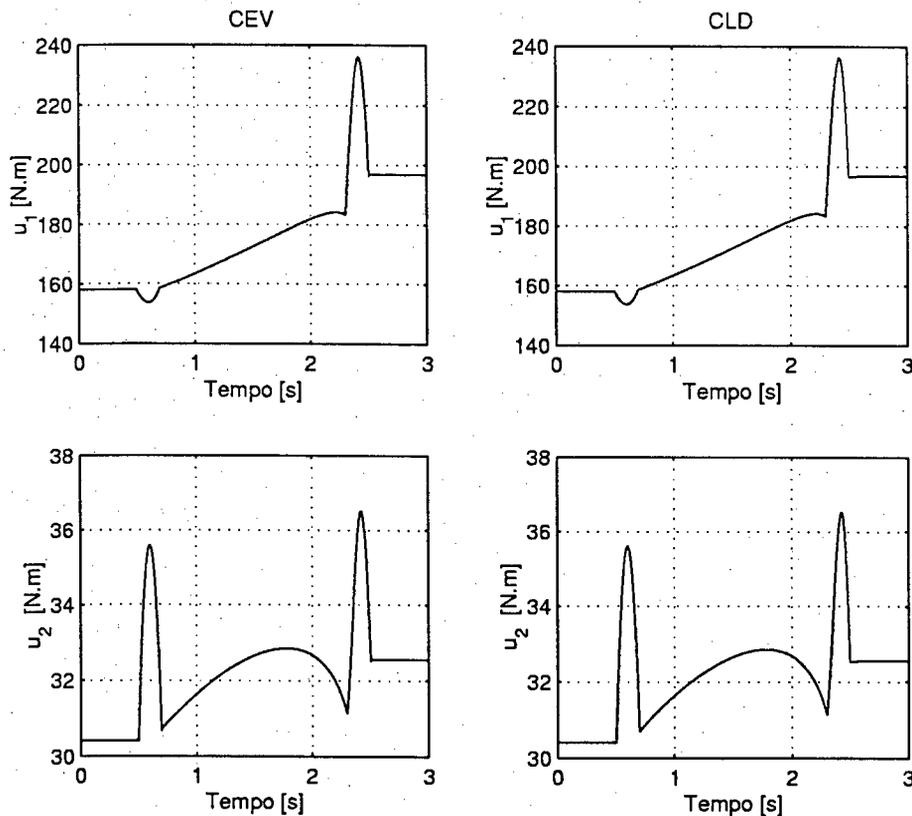


Figura 4.7: Caso 1 - Ações de controle.

### Caso 2: Nominal Com Atrito

Para este caso, os atritos viscoso, dinâmico e estático são incluídos, mas considerados perfeitamente conhecidos. Por isso, são completamente compensados, da mesma forma que o são os termos inerciais, centrífugos, de Coriolis e gravitacionais.

Para alguns robôs (o robô INTER do tipo SCARA do ETHz<sup>1</sup>, por exemplo), é fornecida pelo fabricante uma *função de atrito*, que descreve esta propriedade em diversas situações de operação. Porém, nem sempre esta *função* é fornecida, embora existam metodologias para a sua obtenção aproximada. Nesta simulação, apesar de a modelagem do atrito não ser a expressão fiel do que acontece em um robô real, é suficiente para evidenciar as dificuldades que surgem num experimento prático.

Ao fazer a compensação dos torques de atrito, usou-se um valor para o coeficiente de atrito estático levemente superior ao real; caso contrário, nas velocidades baixas, verifica-se o surgimento do fenômeno conhecido como *stick-slip* [81], relacionado à natureza descontínua do atrito estático. Nesta simulação, usou-se um valor dez por cento (10%) superior ao nominal. As camadas limite são as mesmas do Caso 1, isto é,  $\Phi_r = \Phi_k = 0,005$ .

Os erros de força (Figura 4.8) e de posição e velocidade (Figura 4.9) evidenciam mais uma vez que o CEV é mais preciso e mais rápido em retornar à trajetória desejada. Entretanto, observa-se que todos os erros são maiores do que os do Caso 1 e que os erros de posição já não convergem para zero, em decorrência do atrito estático, que é descontínuo para a velocidade nula. Além disso, coincidindo com os picos observados na Figura 4.8, verificam-se variações bruscas na velocidade, que ocorrem também devido à descontinuidade do atrito estático.

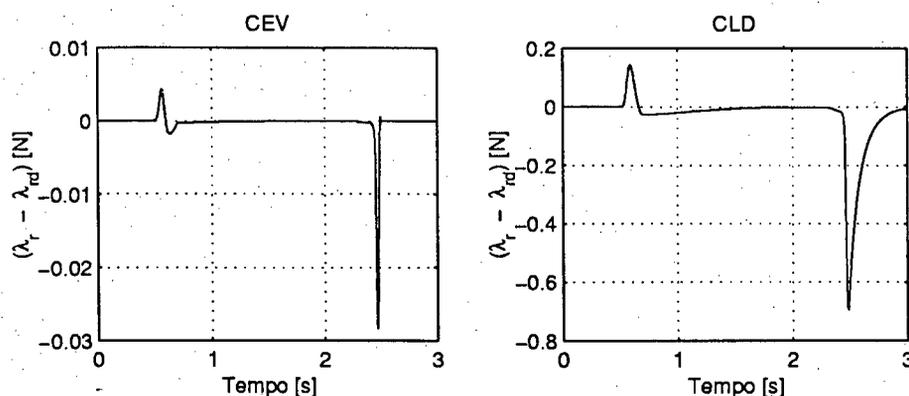


Figura 4.8: Caso 2 - Erros de força.

Apesar do aumento dos erros de trajetória, os valores de  $\sigma_r$  e de  $\sigma_k$  (CEV somente) ainda se restringem a faixas mais estreitas do que suas respectivas camadas limite, não comprometendo os

<sup>1</sup>ETHz - Instituto de Tecnologia, Zurique - Suíça.

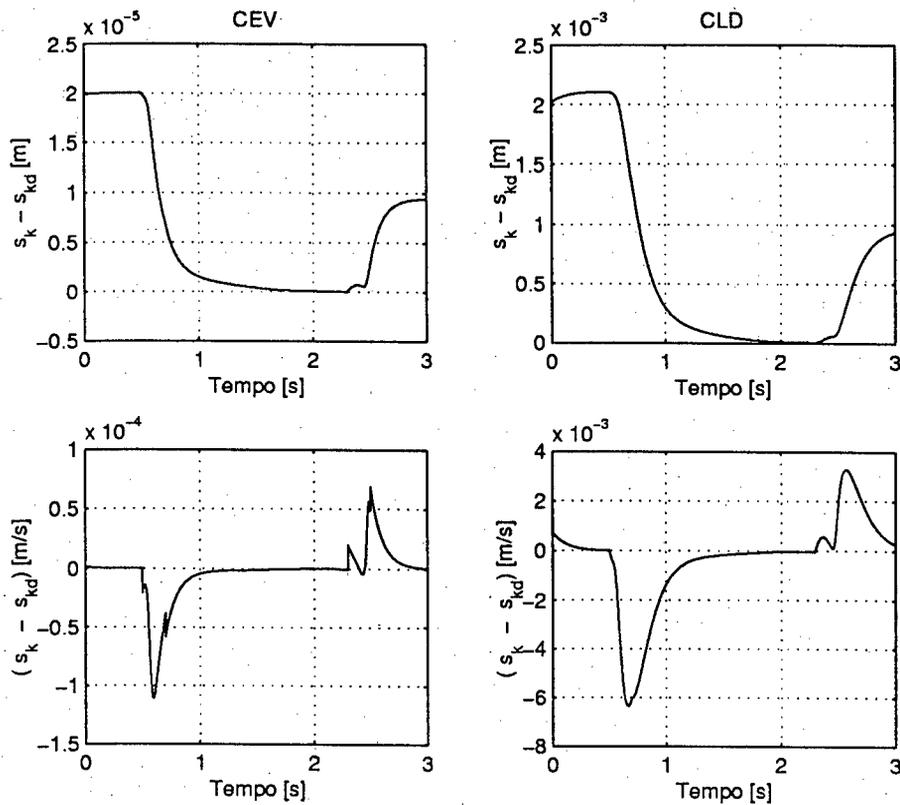


Figura 4.9: Caso 2 - Erros de posição e de velocidade.

limites inicialmente traçados. Quanto aos torques de controle, são levemente superiores aos do Caso 1, por causa da inclusão do atrito.

### Caso 3: Incidência de Incertezas Paramétricas

Quando se diz que um parâmetro não é precisamente conhecido, não significa que nada se saiba sobre ele; em geral, sabe-se, pelo menos, que se situa numa faixa de valores cujos limites são bem determinados. Porém, tanto pode ser a média destes limites, como qualquer outro valor, e até mesmo um dos limites. Uma boa estimativa para o parâmetro é o valor médio destes limites, porque se o seu valor real estiver num dos extremos do intervalo, o máximo erro que se comete é igual a metade da diferença entre os limites. Para qualquer outra escolha, o erro máximo possível é maior.

Nas simulações com incidência de incertezas paramétricas, admitiu-se que ocorreu o maior erro possível entre os valores estimado e verdadeiro. As incertezas paramétricas foram consideradas nos seguintes níveis:

- Massas e Inércias: parâmetros superestimados em 20% com relação aos valores verdadeiros;
- Coeficientes de Atrito: parâmetros superestimados em 50% com relação aos verdadeiros.

Em função destas incertezas, as camadas limite foram fixadas em  $\Phi_r = 0,05$  e  $\Phi_k = 0,01$ .

As evidências em favor do CEV são fortalecidas quando estão envolvidas incertezas paramétricas ou dinâmicas não compensadas. A Figura 4.10 compara os erros de posição e de velocidade para os dois controladores. Nela, se vê que os erros de posição e de velocidade para o CLD se mantêm elevados nos três segundos da simulação, chegando a um erro máximo de posição de 13 [mm] e de 9 [mm] no regime permanente. Já o CEV consegue realizar o seguimento da trajetória de maneira satisfatória, porém nenhum dos dois controladores consegue evitar os erros de posição de regime permanente, que são decorrentes das incertezas paramétricas e do atrito estático.

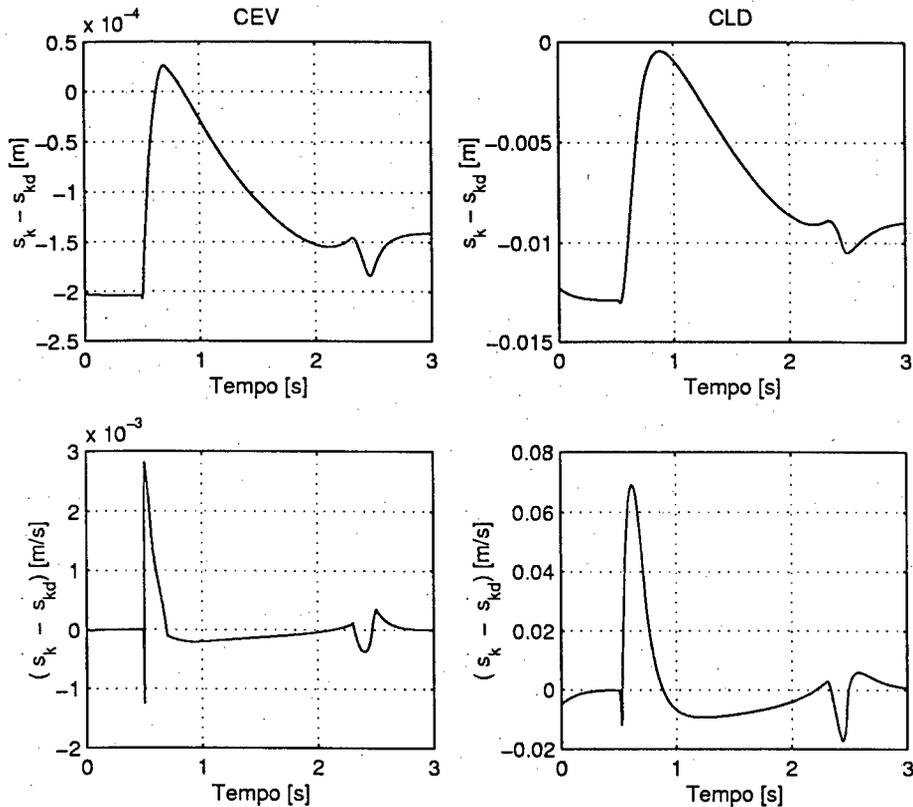


Figura 4.10: Caso 3 - Parâmetros superestimados: erros de posição e de velocidade.

O efeito do desconhecimento parcial do modelo dinâmico do sistema também se reflete no controle de força (Figura 4.11), especialmente para o CLD. As variações bruscas da força nos instantes iniciais de aceleração e desaceleração se devem à presença do atrito estático.

Quanto às ações de controle (Figura 4.12), não se nota diferença visual entre os torques produzidos pelo CEV e pelo CLD, apesar dos resultados superiores do primeiro. As variações bruscas nas ações de controle quando o movimento é iniciado são devidas ao atrito estático.

Se, ao invés de superestimados, os parâmetros forem subestimados nos mesmos percentuais, verifica-se a ocorrência de *stick-slip* [81], notável especialmente na força normal, em consequência dos pequenos e bruscos deslocamentos de vai-e-vem provocados pela descontinuidade do atrito estático na velocidade zero. As Figuras 4.13, 4.14 e 4.15 mostram os resultados para este caso.

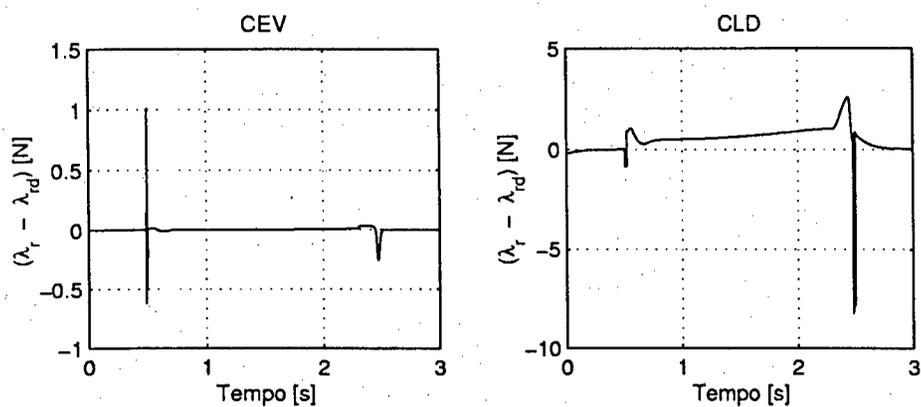


Figura 4.11: Caso 3 - Parâmetros superestimados: erros de força.

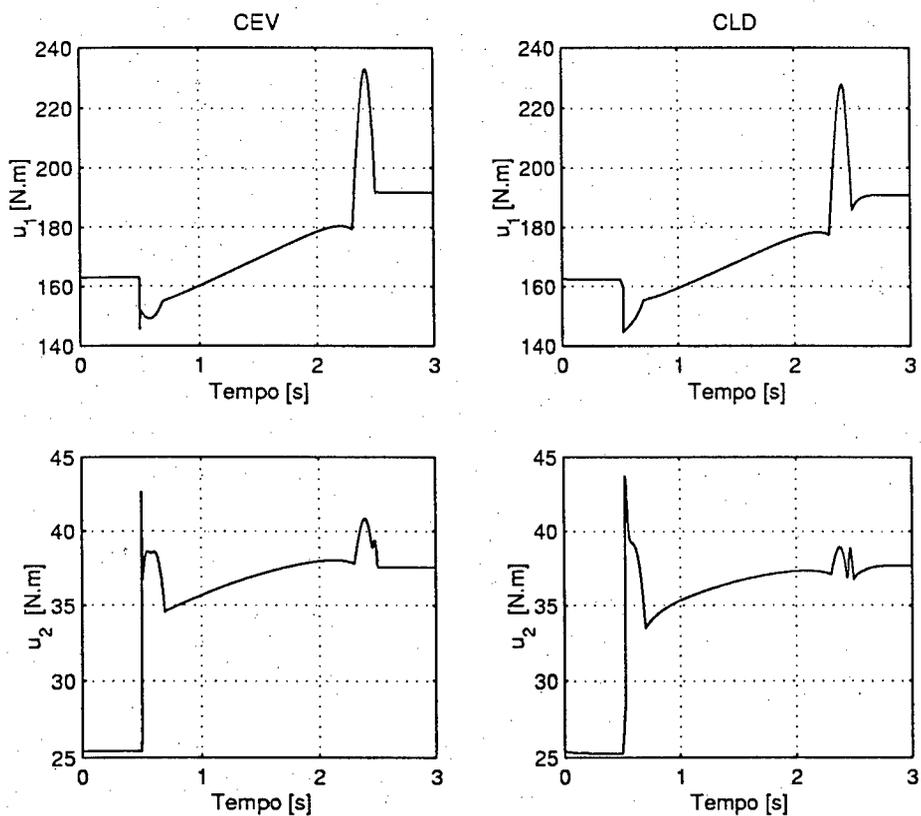


Figura 4.12: Caso 3 - Parâmetros superestimados: ações de controle.

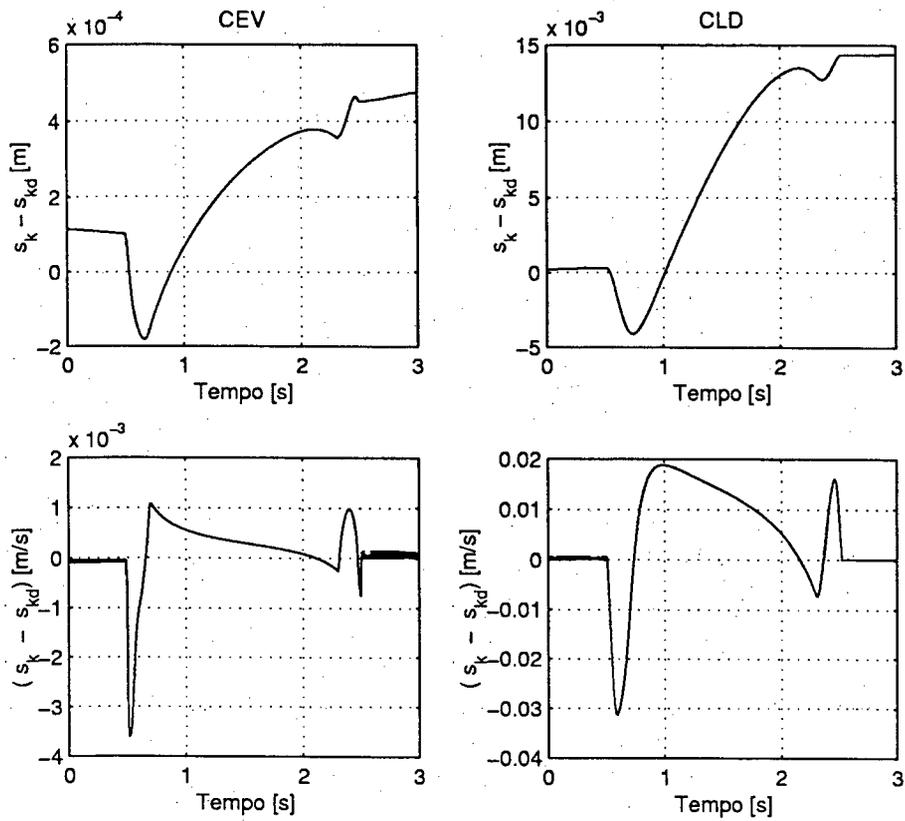


Figura 4.13: Caso 3 - Parâmetros subestimados: erros de posição e de velocidade.

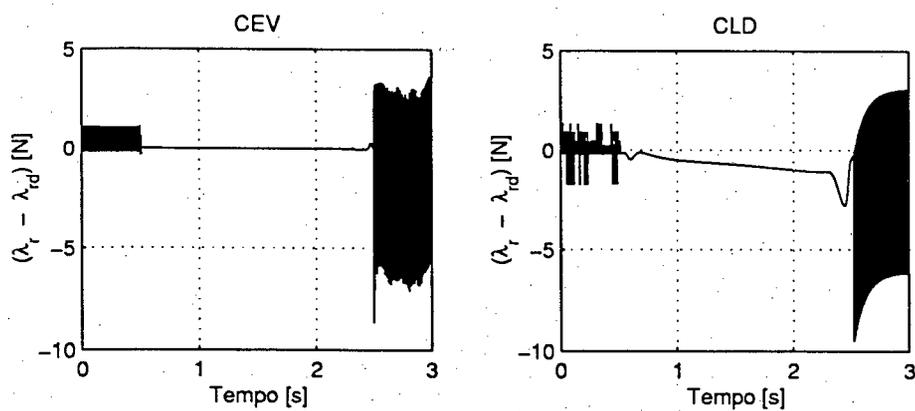


Figura 4.14: Caso 3 - Parâmetros subestimados: erros de força.

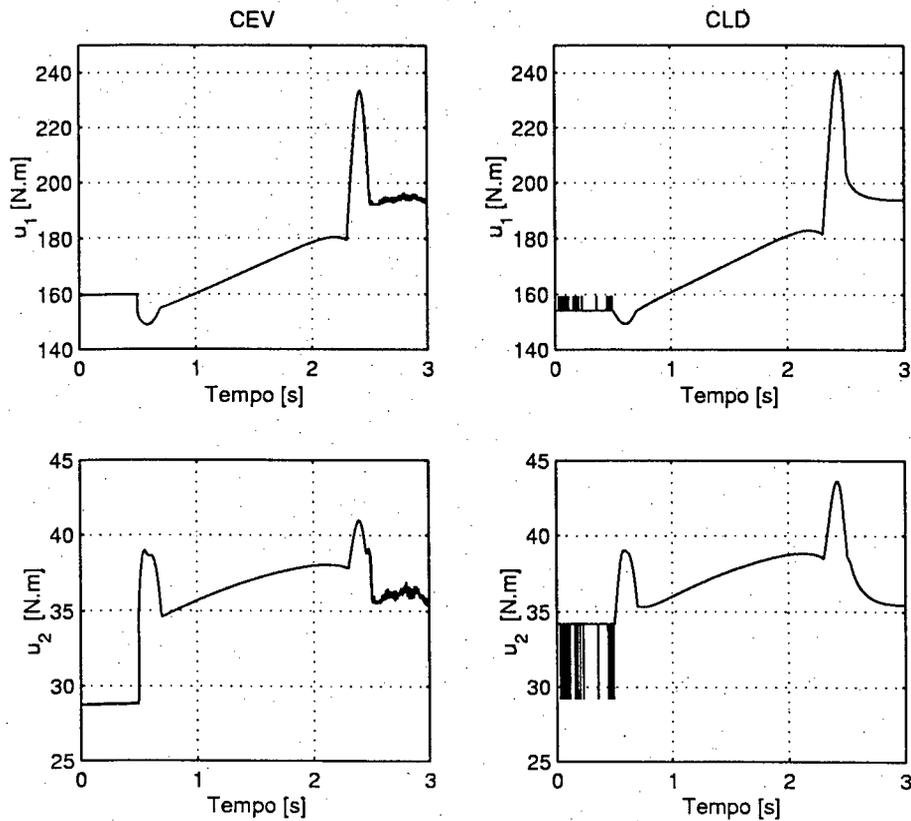


Figura 4.15: Caso 3 - Parâmetros subestimados: ações de controle.

#### Caso 4: Ocorrência de Perturbações Externas

São apresentados resultados relativos a perturbações do tipo  $A \cos(\omega t)$ , que incidem nas direções de força e de movimento. Supõe-se que uma força de  $10 \cos(10t)$  [N] perturbe o sistema na direção de aplicação da força, ao passo que uma perturbação de  $5 \cos(50t)$  [N] incida na direção do movimento. As camadas limite foram fixadas em  $\Phi_r = 0,05$  e  $\Phi_k = 0,02$ .

Os erros de movimento (Figura 4.16) evidenciam o efeito da perturbação na direção de  $s_k$ , pois exibem um comportamento alternado de  $50$  [rd/s] em torno do zero. Esta perturbação introduz pequenas variações periódicas na posição e na velocidade desejadas, que se tornam muito danosas quando o movimento comandado é nulo, pois forçam constantemente a mudança do sinal da força de atrito estático. O principal efeito deste fenômeno é sentido na força normal ao plano rígido, que varia bruscamente e amplamente, o que pode ser visto especialmente entre  $t = 2,5$  e  $t = 3,0$  [s] na Figura 4.17. O CEV mantém a força próxima aos  $20$  [N] durante o movimento, enquanto o CLD apresenta erros que variam desde  $12$  [N] a  $-12$  [N]. As ações de controle podem ser vistas na Figura 4.18.

À medida que as frequências das perturbações aumentam, o controlador é menos capaz de rejeitá-las, ocasionando erros de força e movimento maiores. A frequência de corte do CLD é inferior a do CEV, o que pode ser comprovado por um exame simples das Figuras 4.19 e 4.20. Nelas, são apresen-

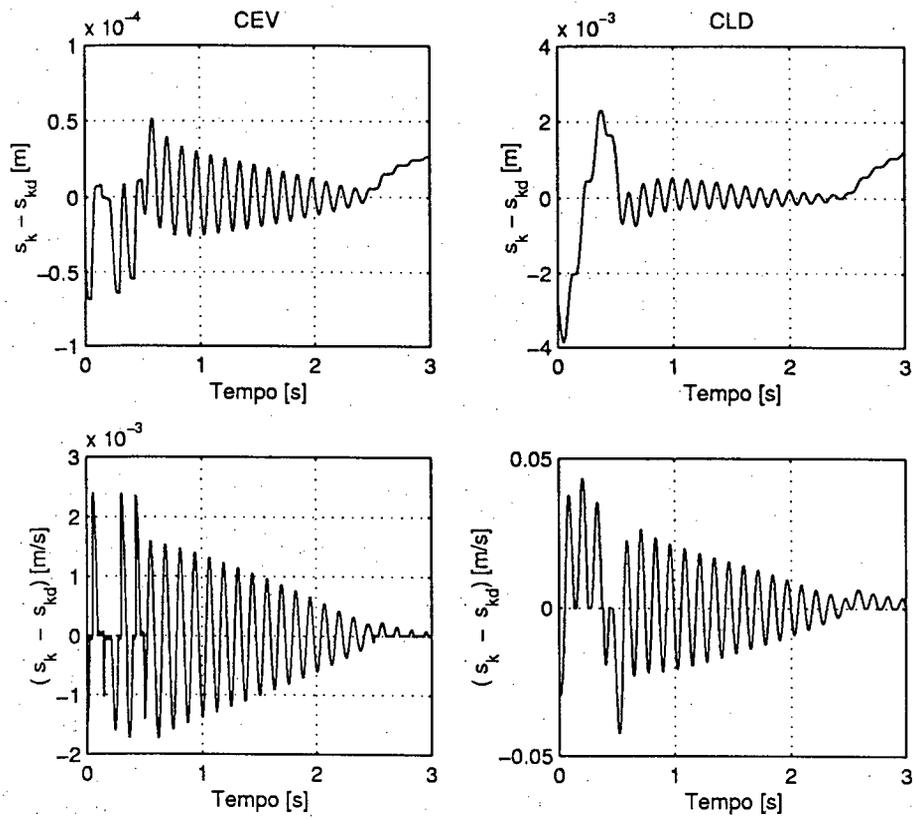


Figura 4.16: Caso 4 - Erros de posição e de velocidade.

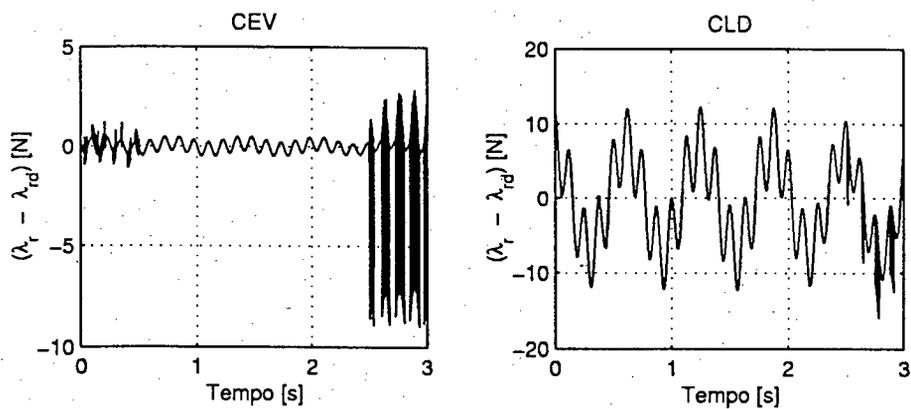


Figura 4.17: Caso 4 - Erros de força.

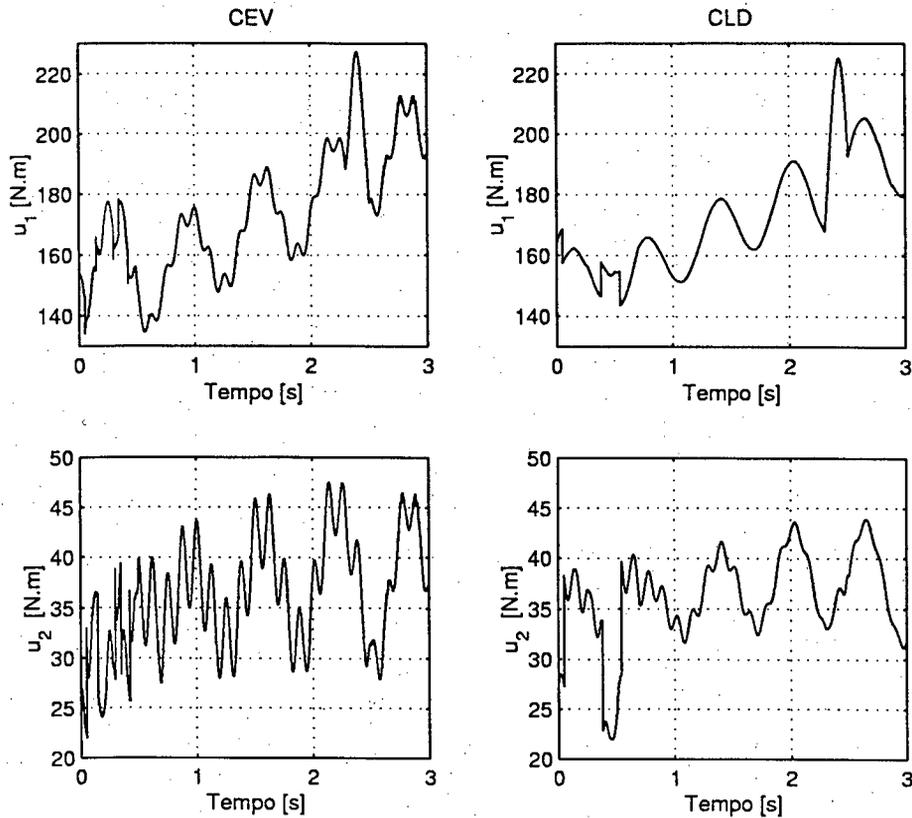


Figura 4.18: Caso 4 - Ações de controle.

tados os erros de força para ambos os controladores, em consequência de perturbações senoidais, que incidem na direção normal ao plano. No primeiro caso, a amplitude é 10 [N] e a frequência, 10 [rd/s]; no segundo, a amplitude é mantida, mas a frequência sobe para 100 [rd/s].

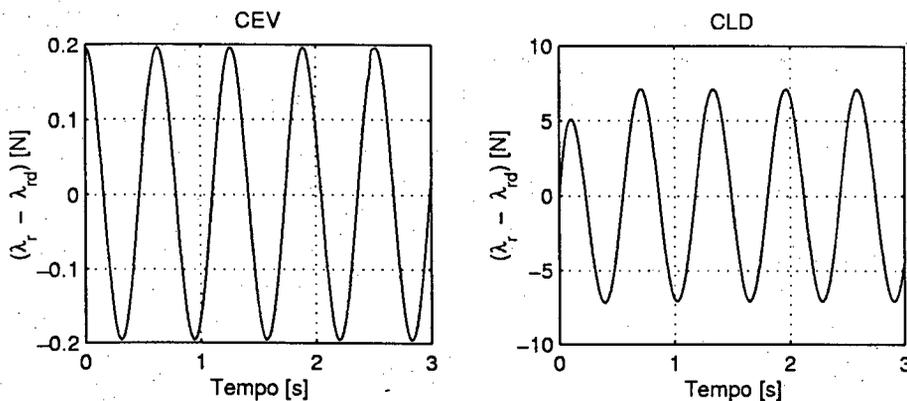


Figura 4.19: Caso 4 - Perturbação com frequência baixa: Erros de força.

No primeiro caso, o CEV rejeita praticamente toda a perturbação, produzindo um erro máximo de força de apenas 0,2 [N], ao contrário do CLD, que permite erros de mais de 7 [N], mesmo para uma frequência tão baixa. No segundo caso, a capacidade do CEV em rejeitar a perturbação é drasticamente reduzida, pois o erro cresce para 2 [N], enquanto o CLD deixa passar toda a perturbação.

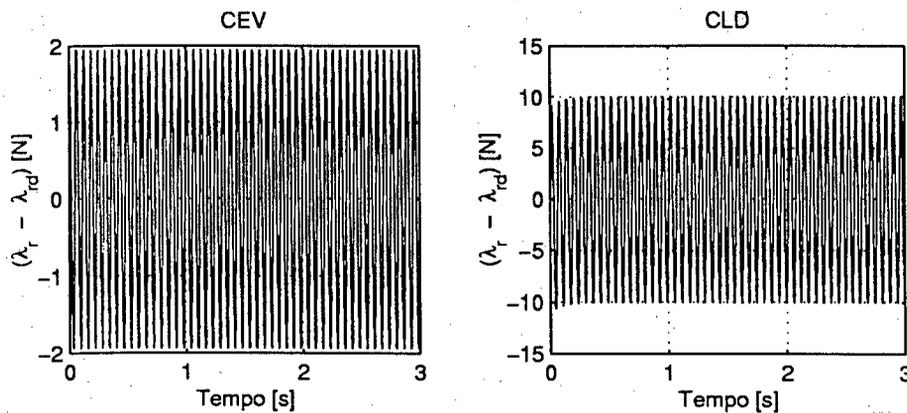


Figura 4.20: Caso 4 - Perturbação com frequência alta: Erros de força.

#### Caso 5: Ocorrência de Incertezas Paramétricas e de Perturbações Externas

Este caso caracteriza-se pela incidência simultânea de incertezas paramétricas (parâmetros superestimados do Caso 3) e de uma perturbação na direção de força ( $10 \cos 10t$  [N]). São condições de operação graves, pois não somente as incertezas paramétricas são elevadas, mas a perturbação também é grande se comparada à força aplicada. As camadas limite usadas são  $\Phi_r = 0,05$  e  $\Phi_k = 0,01$ .

Os erros de movimento são semelhantes aos exibidos na Figura 4.10, porque as perturbações externas só ocorrem na direção de aplicação da força; os erros de força são mostrados na Figura 4.21 e pode-se observar que consistem, basicamente, da composição dos erros mostrados nas Figuras 4.11 e 4.19. As variações bruscas verificadas em  $t = 0,5[s]$  e em  $t = 2,5[s]$ , justamente quando o manipulador está iniciando ou concluindo o movimento, são devidas ao atrito estático.

Finalmente, é importante ressaltar que, apesar dos níveis elevados das incertezas paramétricas e da amplitude da perturbação externa, as trajetórias de  $\sigma_r$  e de  $\sigma_k$  se mantêm dentro das suas respectivas camadas limite, o que garante erros de posição e de força relativamente pequenos.

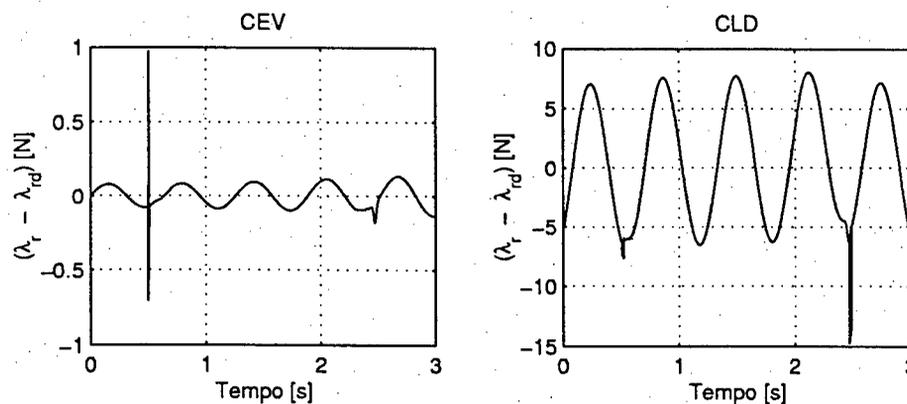


Figura 4.21: Caso 5 - Erros de força.

Admitindo-se que as comparações entre o CEV e o CLD apresentadas nesta seção são suficientes

para se concluir a respeito dos seus respectivos desempenhos, nas próximas seções procura-se analisar somente o comportamento do CEV, para contatos com ambientes dinâmicos e flexíveis.

Além disso, para não obscurecer outros comportamentos e facilitar a análise, doravante o atrito estático não será levado em conta no modelo, apesar de que os seus efeitos continuariam afetando os resultados, pois as velocidades nas direções dinâmicas ou flexíveis são baixas e muitas vezes de comportamento oscilatório, o que facilita o surgimento de *stick-slip*.

## 4.2 Ambientes Dinâmicos

Nesta seção, são apresentados e analisados os resultados do CEV para o caso em que o robô interage com um ambiente dinâmico de dois graus de liberdade (Figura 4.22), que permite movimento livre do EF na direção de  $s_k$  e lhe oferece oposição dinâmica na direção de  $s_d$ .

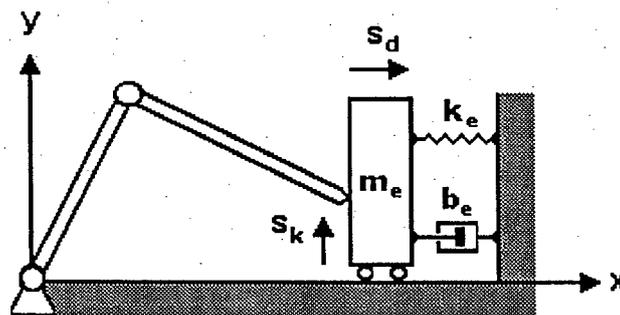


Figura 4.22: Robô cotovelar interagindo com ambiente dinâmico.

Primeiramente, apresentam-se os dados do sistema e os ganhos do controlador; em seguida, a tarefa a ser realizada é descrita e as matrizes  $Y_a$  e  $T_k$ , que dependem da geometria da tarefa, são obtidas e, por último, são detalhadas as simulações, realizadas para condições nominais e perturbadas.

### 4.2.1 Parâmetros do Sistema e Ganhos do CEV

Os parâmetros do manipulador são idênticos aos utilizados na seção anterior, exceto pelo fato de considerar-se nulo o atrito estático. Por outro lado, deve-se acrescentar os parâmetros relacionados ao ambiente, que apresenta uma dinâmica subamortecida ditada pelos seguintes parâmetros nominais:

- Massa:  $m_e = 1$  [Kg];
- Coeficiente de Amortecimento:  $b_e = 10$  [N.s/m];
- Coeficiente de Rigidez:  $k_e = 1000$  [N/m].

Seguindo os mesmos critérios usados para a interação com ambientes cinemáticos, os valores dos ganhos e parâmetros do CEV são basicamente os mesmos, isto é:

- Direção dinâmica:  $k_a = 10$ ;
- Direção cinemática:  $k_k = 10$  e  $c_k = 10$ ;
- Ganhos  $w_a$  e  $w_k$  mínimos:  $w_{a,\min} = w_{k,\min} = 5$ .

Os ganhos do controle chaveado  $w_a$  e  $w_k$  são calculados também a partir de (3.70) e de (3.47).

#### 4.2.2 Definição da Tarefa

As matrizes necessárias à definição de uma tarefa no sistema da Figura 4.22 são  $T_d$ ,  $T_k$  e  $Y_a$ , que se obtêm no desenvolvimento subsequente.

Definindo  $s_d$  e  $s_k$  como mostrado na Figura 4.22, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o + s_d \\ y_o + s_k \end{bmatrix} = \Gamma(s) \quad (4.10)$$

que, derivada em relação ao tempo, resulta em:

$$\begin{aligned} v &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s}_d \\ \dot{s}_k \end{bmatrix} \\ &= T_d \dot{s}_d + T_k \dot{s}_k \end{aligned} \quad (4.11)$$

de onde se conclui que

$$T_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad T_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

De (2.20), deduz-se que  $T_k^T Y_a = 0$ , pois  $Y_r$  não é definida para o caso em análise. Portanto,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{a11} \\ Y_{a21} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

de onde se obtém

$$Y_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Com isso, a força na direção dinâmica é:

$$F_a = Y_a \lambda_a = \begin{bmatrix} \lambda_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

que, como se pode ver, é nula na direção  $y$ .

### 4.2.3 Resultados das Simulações: Controle da Força na Direção Dinâmica

Inicialmente, são realizadas simulações em que o EF se move na superfície vertical do corpo, enquanto procura manter em 20 [N] a força aplicada na direção dinâmica, a despeito do movimento nesta direção. As trajetórias no tempo desejadas para o movimento na direção de  $s_k$  são idênticas às exibidas na Figura 4.2. Para esta tarefa, são considerados os seguintes casos:

- Caso 1 - Incidência de incertezas paramétricas;
- Caso 2 - Incidência de perturbações externas.

#### Caso 1: Incidência de Incertezas Paramétricas

Considera-se a incidência de incertezas paramétricas nos seguintes níveis:

- Massas e inércias do robô: parâmetros subestimados em 20% com relação aos verdadeiros;
- Demais parâmetros do robô e do ambiente: subestimados em 50% com relação aos verdadeiros.

Em decorrência destas incertezas, as camadas limite foram ajustadas em  $\Phi_a = 0,02$  e  $\Phi_k = 0,02$ .

Observando a Figura 4.23, nota-se que o EF segue de perto o movimento desejado, quanto à posição e à velocidade, a despeito da estimativa ruim do modelo.

Da mesma forma, a força aplicada (Figura 4.24) mantém-se durante todo o tempo bem perto de 20 [N]. Como consequência da aplicação desta força no ambiente, é produzida uma deflexão de regime igual a 20 [mm]. Este resultado indica uma constante de rigidez igual a 1000 [N/m], que é o seu valor verdadeiro, porém o dobro do valor usado pelo controlador, isto é, 500 [N/m]. Neste caso, se a força devesse ser controlada indiretamente através do movimento, seria cometido um erro de 100 % na força aplicada. De fato, desejando-se estabelecer uma força de 20 [N], uma deflexão igual a 40 [mm] seria comandada, baseando-se na rigidez estimada; no entanto, a força que surgiria em consequência deste comando seria de 40 [N], considerando-se a rigidez real. Finalmente, um comportamento subamortecido de pequena amplitude é verificado em  $s_d$ , em decorrência das perturbações produzidas pela aceleração e desaceleração.

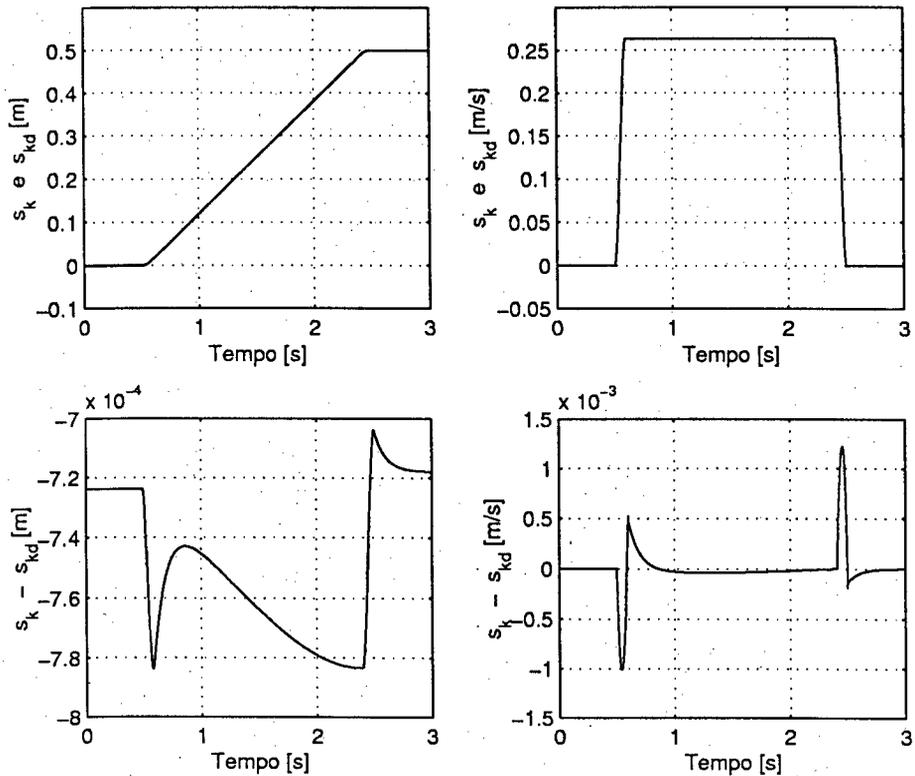


Figura 4.23: Caso 1 - Movimento na direção cinemática.

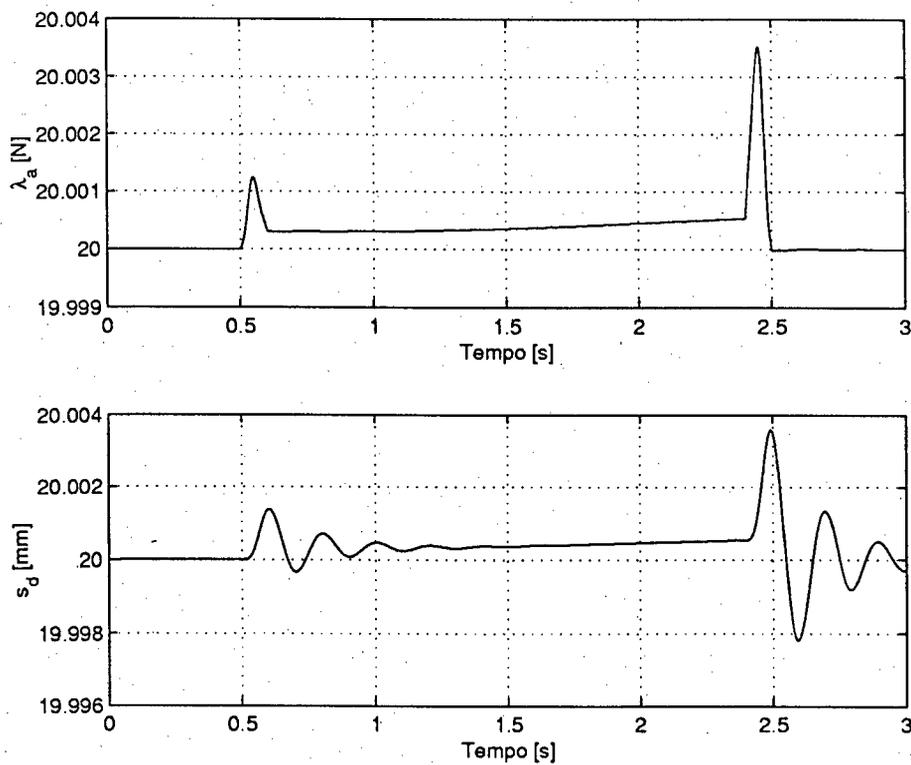


Figura 4.24: Caso 1 - Força e posição na direção dinâmica.

### Caso 2: Incidência de Perturbações Externas

Supõe-se que uma força de  $10 \cos(10t)$  [N] perturbe o sistema na direção de aplicação da força, ao passo que uma perturbação de  $10 \cos(50t)$  [N] incida na direção do movimento. Para este caso, as camadas limite são  $\Phi_a = 0,05$  e  $\Phi_k = 0,02$ .

Observando a Figura 4.25, nota-se que ocorre boa rejeição das perturbações na direção de  $s_k$ . Na direção dinâmica (Figura 4.26), há um movimento oscilatório de pequena amplitude com conseqüências mínimas sobre a força aplicada. Tudo isso é conseguido através das ações de controle mostradas na Figura 4.27.

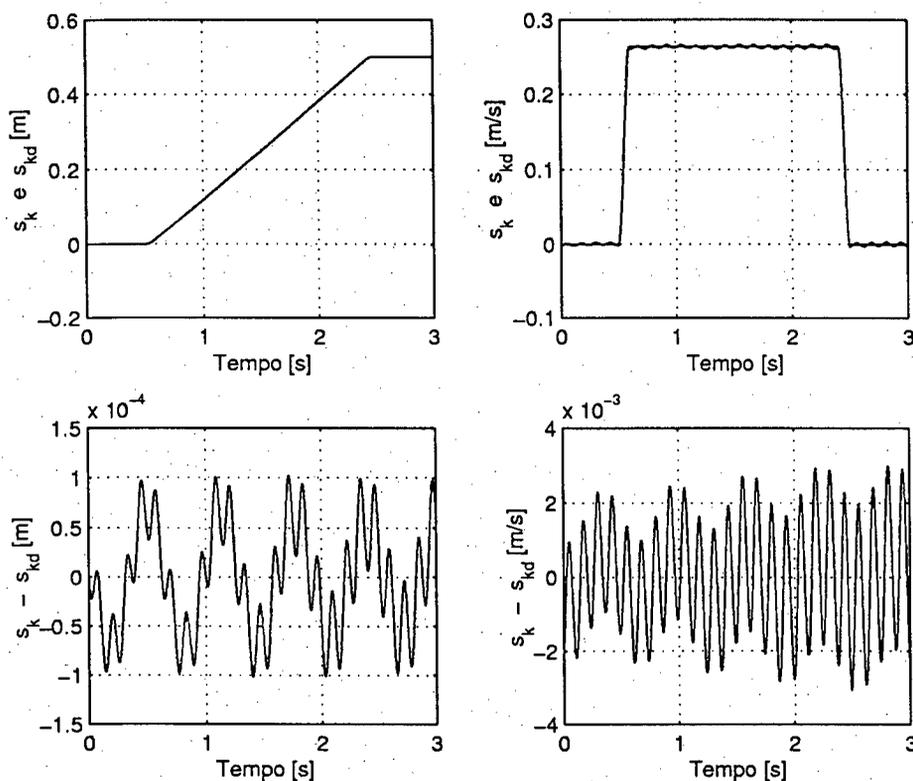


Figura 4.25: Caso 2 - Movimento na direção cinemática.

Tendo em vista a montagem da Figura 4.22, dois outros casos são analisados, para os quais o EF é comandado a manter sua posição na direção cinemática, ao mesmo tempo em que aplica na direção dinâmica um histórico de força. Estes dois casos são caracterizados especialmente pela incidência ou não de perturbações externas, isto é:

- Caso 3 - Parâmetros nominais, sem perturbações;
- Caso 4 - Parâmetros nominais, porém com incidência de perturbações externas.

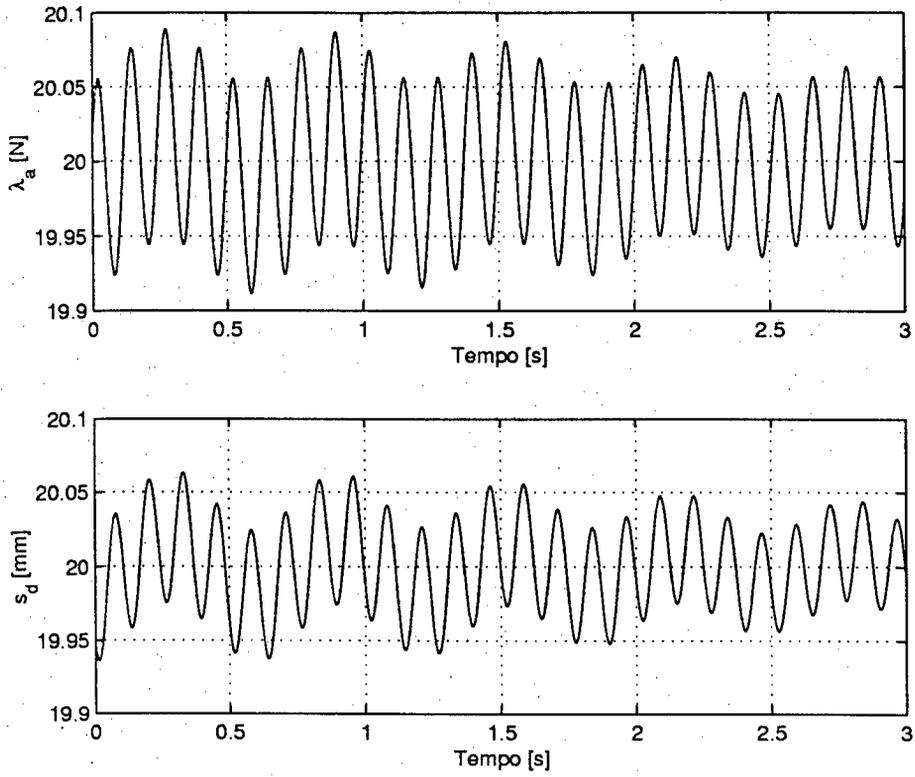


Figura 4.26: Caso 2 - Força e posição na direção dinâmica.

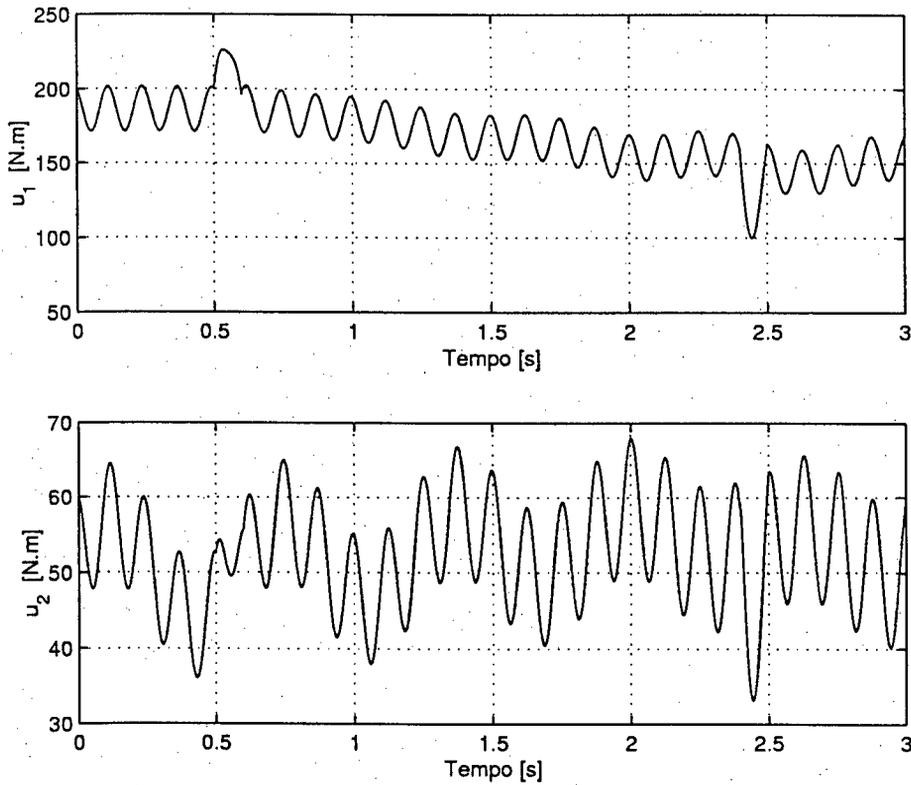


Figura 4.27: Caso 2 - Ações de controle.

### Caso 3: Caso Nominal

Como os parâmetros são perfeitamente conhecidos e não há incidência de perturbações externas, as camadas limite são fixadas em 0,005. A força normal desejada é a descrita na Figura 4.28.

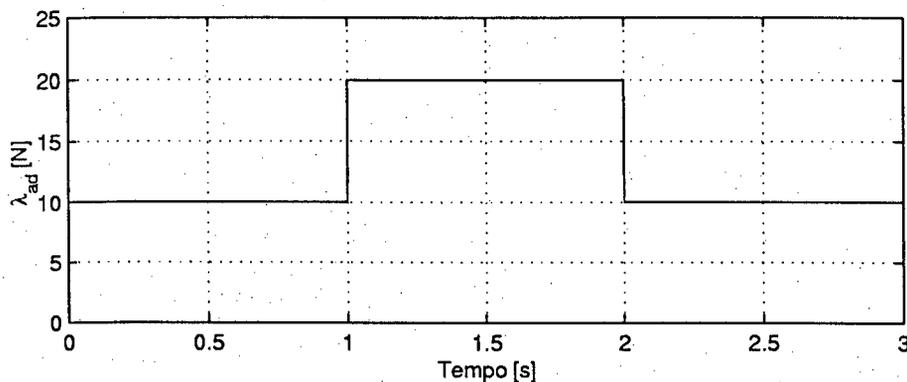


Figura 4.28: Força desejada.

O degrau de força a que o ambiente é submetido em  $t = 1$  [s] (e também em  $t = 2$  [s]) evidencia o seu comportamento subamortecido de 2ª ordem (Observe a Figura 4.29). Apesar das oscilações do movimento na direção dinâmica, a força é mantida no valor desejado, o que só é possível com ações rápidas e de amplitudes adequadas, como as da Figura 4.30, produzidas pelo CEV.

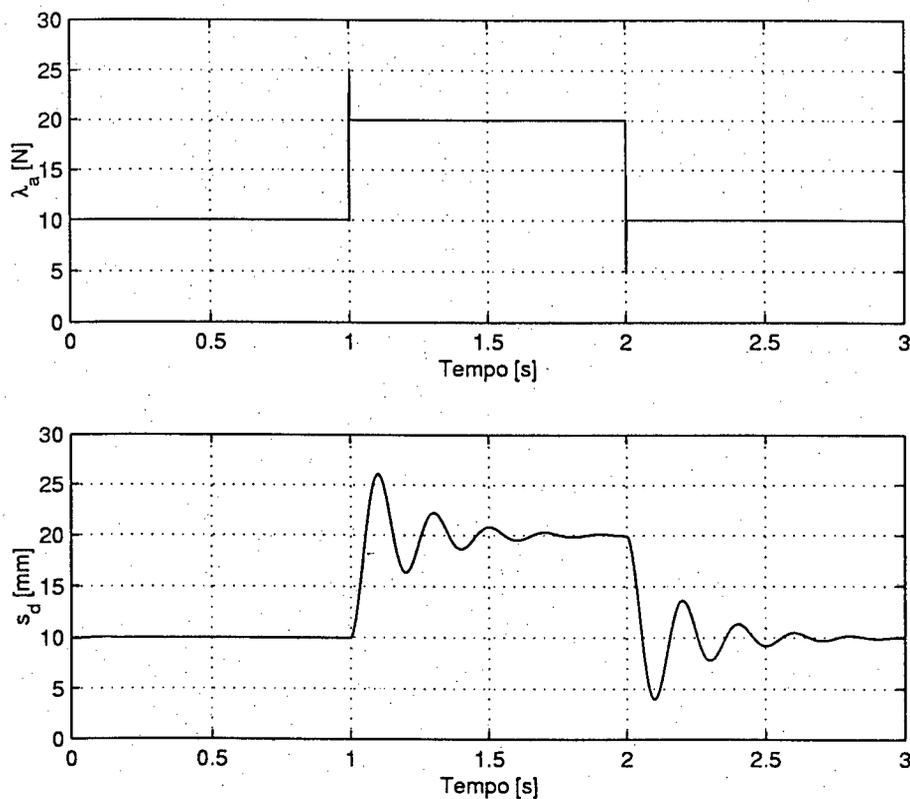


Figura 4.29: Caso 3 - Força e movimento na direção dinâmica.

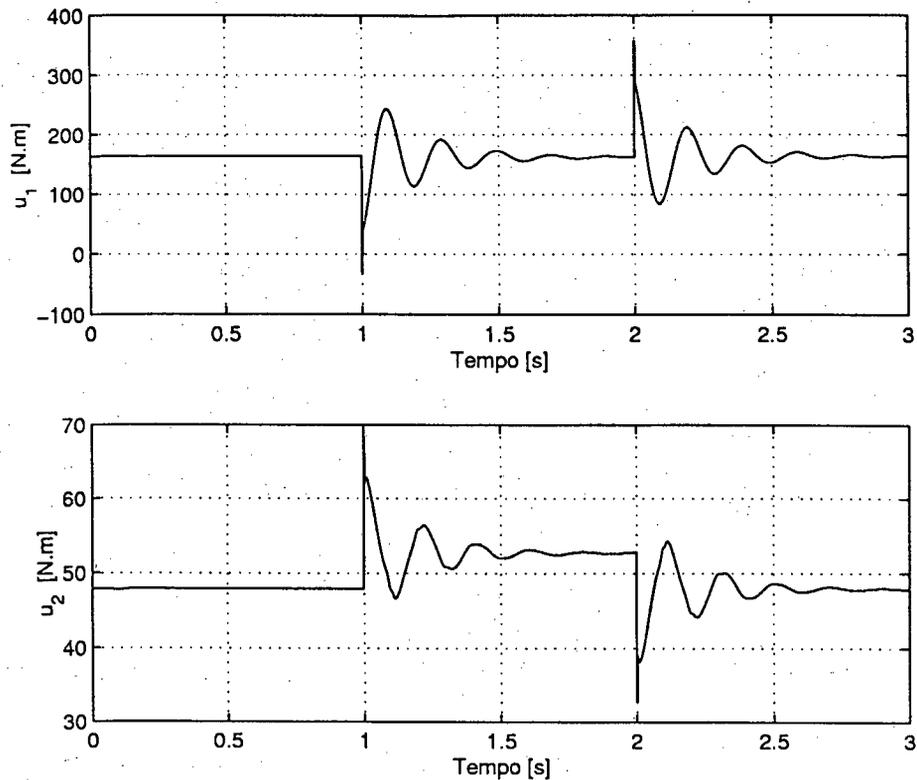


Figura 4.30: Caso 3 - Ações de controle.

O mesmo histórico de força é, agora, aplicado a uma superfície vertical absolutamente rígida (Figura 4.31). Colocando-se lado a lado os resultados para este ambiente cinemático e o ambiente dinâmico descrito nesta seção, nota-se que ações de controle muito distintas (Figura 4.32) resultam em forças de contato praticamente idênticas (Figura 4.33). Para o ambiente dinâmico, o controlador é mais exigido, pois a força deve seguir a trajetória especificada, a despeito do movimento na direção de  $s_d$ , que mantém uma relação dinâmica com a força aplicada.

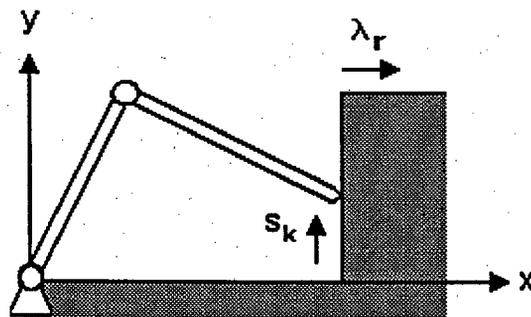


Figura 4.31: Robô cotovelar realizando tarefa em um plano vertical.

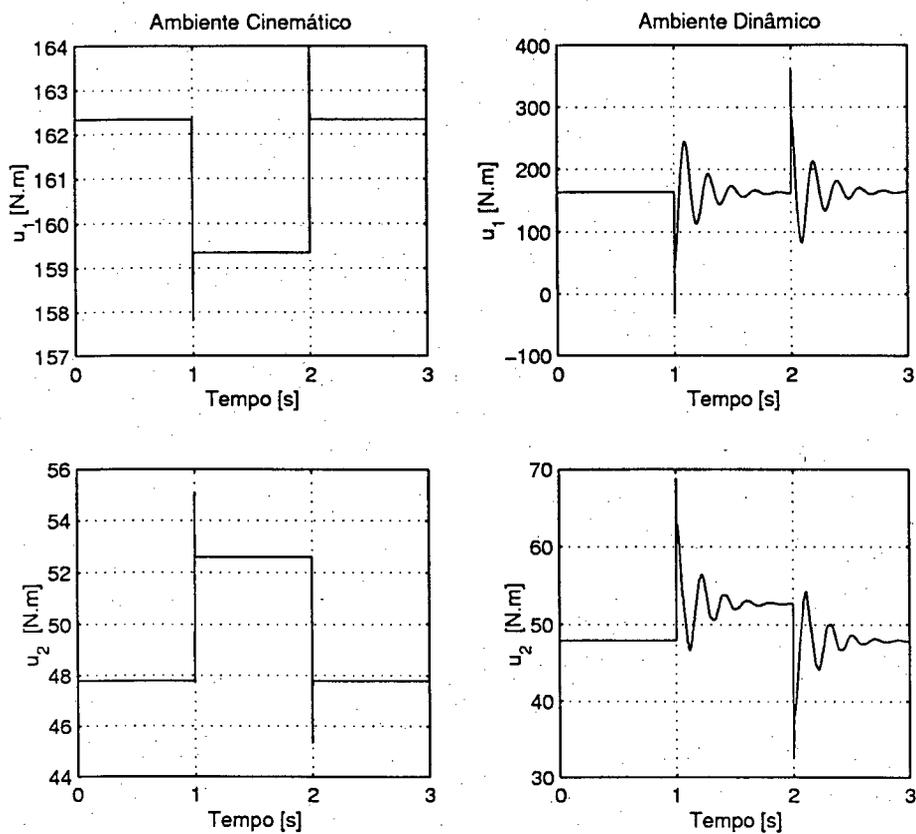


Figura 4.32: Caso 3 - Ações de controle.

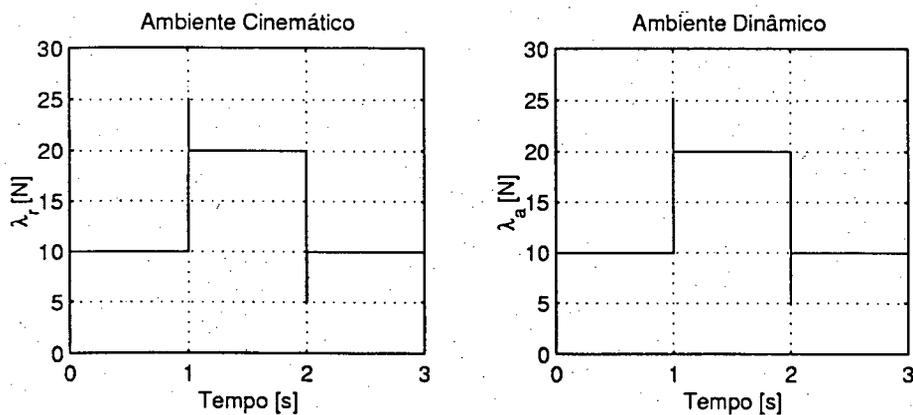


Figura 4.33: Caso 3 - Forças de contato.

#### Caso 4: Caso Perturbado

Neste caso, considera-se que uma força de  $10 \cos(50t)$  [N] perturbe o sistema na direção de aplicação da força, porém, ao invés da força seguir a trajetória especificada na Figura 4.28, ela deve manter-se constante em 20 [N]. As camadas limite foram ajustadas em  $\Phi_a = 0,02$  e  $\Phi_k = 0,005$ .

Observando a Figura 4.34, nota-se que a amplitude da oscilação da força, em torno do valor desejado, é aproximadamente seis vezes maior no contato com o ambiente cinemático do que no contato com o ambiente dinâmico. Supõe-se que a liberdade de movimento na direção dinâmica contribuiu para a redução do efeito das perturbações.

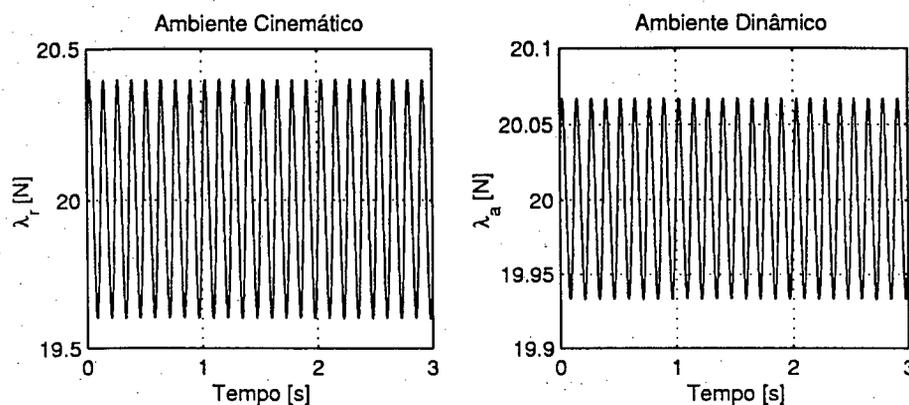


Figura 4.34: Caso 4 - Forças de contato.

#### 4.2.4 Resultados das Simulações: Controle da Posição na Direção Dinâmica

Há casos em que não se exige precisão para o controle da força de contato, sendo suficiente garantir que ela não ultrapasse um valor estabelecido como máximo e/ou não fique aquém de um mínimo. Nestes casos, pode ser mais interessante controlar a posição, ao invés da força, pois a força pode ser estimada através da posição, o que permite dispensar o sensor de força.

Além disso, se a rigidez do ambiente for nula, haverá um pólo na origem; desta forma, o EF se deslocará indefinidamente ao aplicar-se ao ambiente uma força constante. Por outro lado, se o amortecimento for nulo, haverá um par de pólos no eixo imaginário, que produzirão um comportamento oscilatório, ao ser aplicado um degrau de força ao ambiente. Portanto, o controle de força na direção dinâmica pode ser inviável ou inadequado, dando lugar ao controle de posição.

Como ilustração, o controle de força é comparado ao controle de posição, para o caso em que o amortecimento é muito pequeno, por exemplo  $b_e = 1$  [N.s/m]. A tarefa consiste simplesmente em alterar a força de 10 [N] para 20 [N]. No controle de posição, são fornecidas posições equivalentes aos valores de força desejados. As Figuras 4.35, 4.36 e 4.37 mostram, respectivamente, as posições das juntas, a força e a posição na direção dinâmica e as ações de controle para os dois controladores.

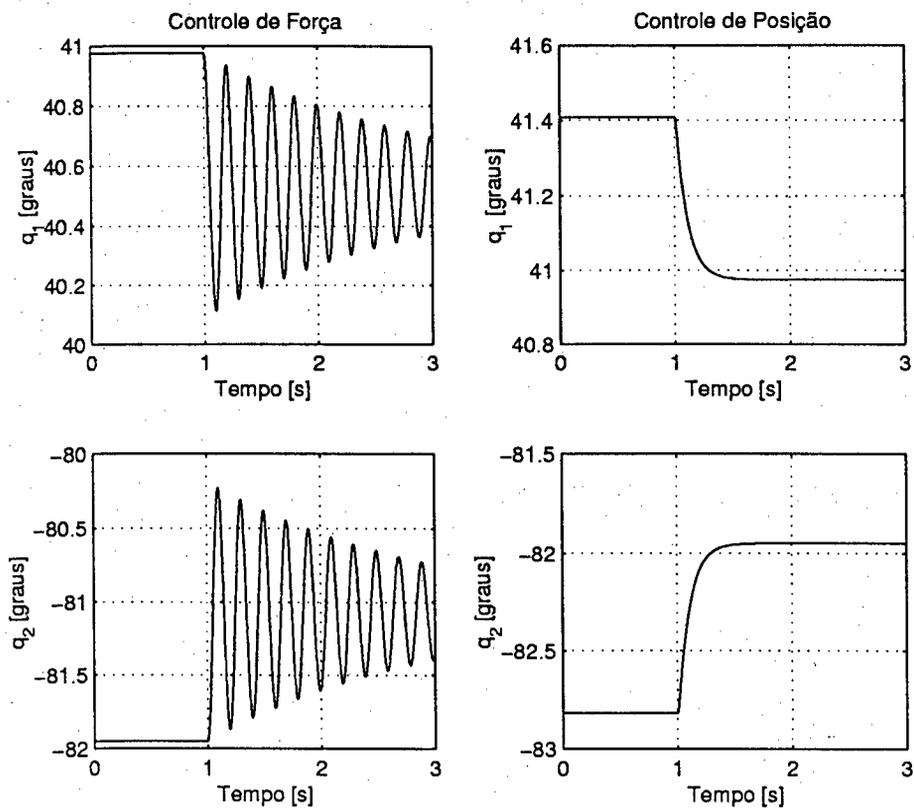


Figura 4.35: Posição das juntas.

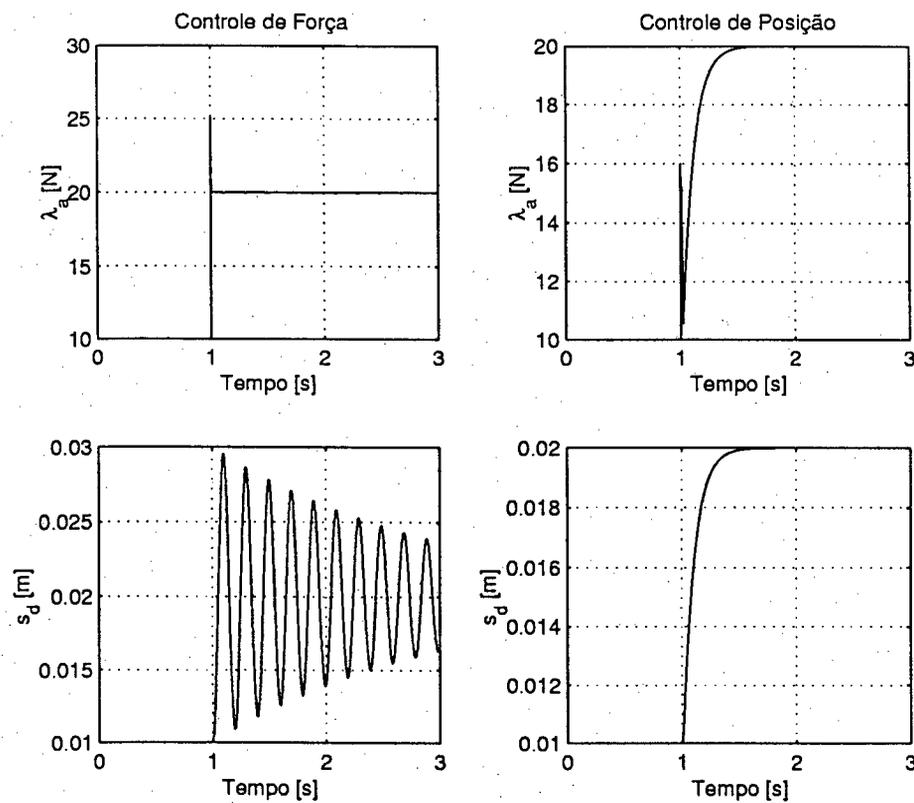


Figura 4.36: Força e posição na direção dinâmica.

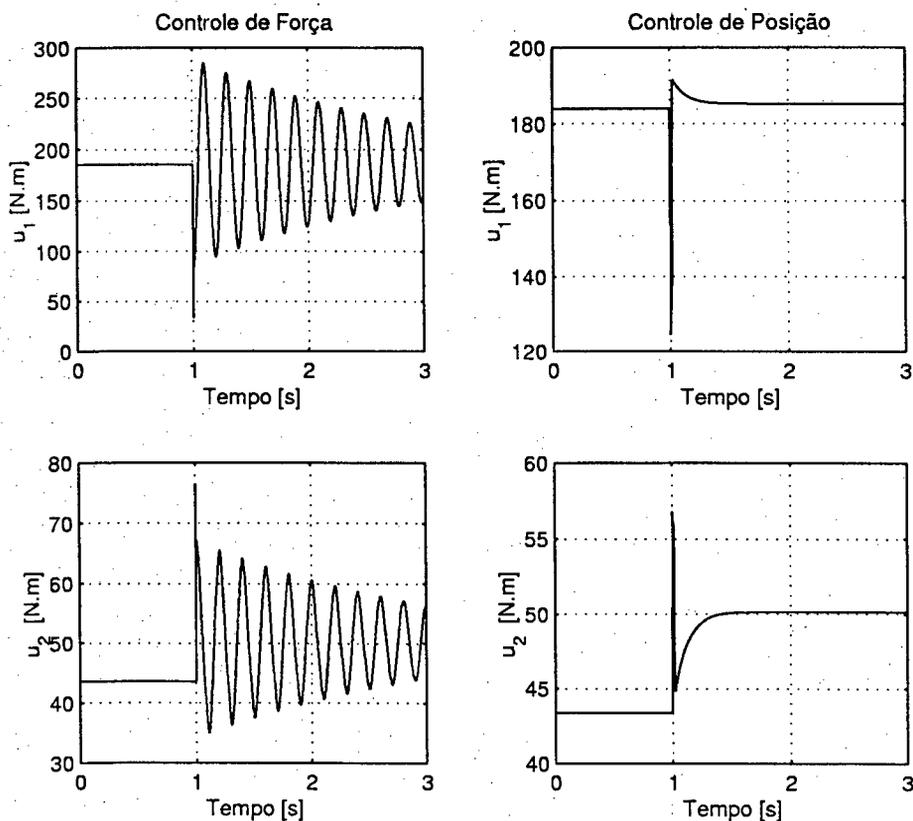


Figura 4.37: Ações de controle.

Para o caso em que a força é controlada, verifica-se o surgimento de oscilações, cuja frequência depende dos parâmetros do ambiente. Para que o contato não seja perdido e a força seja mantida no valor desejado, o EF deve ser comandado a seguir as oscilações.

Por outro lado, quando é a posição a grandeza controlada na direção dinâmica, nenhuma oscilação é constatada. Além disso, se o ambiente é conhecido, a força pode ser controlada com precisão, indiretamente, através da posição. Portanto, conclui-se que há situações em que o controle da força pode não ser a melhor solução para situações de contato.

### 4.3 Ambientes Flexíveis

Esta seção destina-se a apresentar e analisar os resultados de simulação para o caso do robô interagindo com ambientes flexíveis, modelados simplesmente como uma mola linear. A Figura 4.38 ilustra um robô cotovelar, cujo EF está livre para mover-se na direção de  $s_k$ , porém enfrenta a oposição de uma parede flexível na direção de  $s_c$ .

Inicialmente, são apresentados os dados do sistema e os ganhos usados para os controladores; em seguida, descreve-se a tarefa a ser realizada e, por último, são detalhadas as simulações, realizadas para condições nominais e perturbadas.

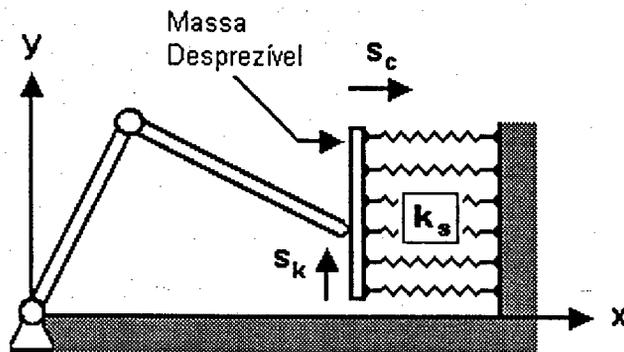


Figura 4.38: Robô cotovelar interagindo com ambiente flexível.

### 4.3.1 Parâmetros do Sistema e Ganhos do CEV

Os parâmetros do manipulador são idênticos aos da seção anterior. O único parâmetro que falta fornecer é o coeficiente de rigidez do ambiente,  $k_s = 1000$  [N/m].

Seguindo os mesmos critérios usados anteriormente, os ganhos do CEV são os seguintes:

- Direção flexível:  $k_c = 10$  e  $c_c = 10$ ;
- Direção cinemática:  $k_k = 10$  e  $c_k = 10$ ;
- Ganhos  $w_c$  e  $w_k$  mínimos:  $w_{c,\min} = w_{k,\min} = 5$ .

Os ganhos do controle chaveado  $w_c$  e  $w_k$  são calculados a partir de (3.70) e de (3.47).

### 4.3.2 Definição da Tarefa

A tarefa consiste em movimentar o EF ao longo do plano vertical, mantendo a deflexão  $s_c$  constante em 20 [mm]. O EF é movido ao longo do plano vertical desde a posição  $s_k = 0$  [m] até a posição  $s_k = 0,5$  [m] à velocidade constante, exceto nos pequenos intervalos de tempo relativos à aceleração e à desaceleração. As trajetórias no tempo para a posição e a velocidade desejadas são mostradas na Figura 4.2.

Com as variáveis do movimento admissível pelo ambiente definidas como na Figura 4.38, obtém-se facilmente a expressão:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o + s_c \\ y_o + s_k \end{bmatrix} = \Gamma(s) \quad (4.16)$$

que, derivada em relação ao tempo, resulta na velocidade cartesiana do EF em função das variáveis

do ambiente:

$$\begin{aligned} v &= \begin{bmatrix} \dot{s}_c \\ \dot{s}_k \end{bmatrix} \\ &= T_c \dot{s}_c + T_k \dot{s}_k \end{aligned} \quad (4.17)$$

de onde se conclui que

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad T_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

A força de reação (do EF contra o ambiente) é parametrizada na forma  $F_c = Y_c \lambda_c$ , onde a matriz  $Y_c$  deve ser arbitrada, satisfazendo a condição de ortogonalidade, isto é,  $T_k^T Y_c = 0$ . Portanto,

$$T_k^T Y_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{c11} \\ Y_{c21} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.19)$$

o que conduz a

$$Y_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Com base neste resultado, a força de reação é expressa como:

$$\begin{aligned} F_c &= Y_c \lambda_c \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_c \end{aligned} \quad (4.21)$$

que é normal ao plano vertical. Por haver uma só superfície de contato,  $\lambda_c$  é um escalar.

### 4.3.3 Resultados das Simulações

São examinados os três casos, definidos a seguir:

- Caso 1 - Ocorrência de perturbações;
- Caso 2 - Incidência de incertezas paramétricas;
- Caso 3 - Efeito da inclusão da medida da força.

Para os três casos, foram usadas as mesmas camadas limite, ou seja:  $\Phi_c = \Phi_k = 0,02$ .

### Caso 1 - Ocorrência de Perturbações Externas

Supõe-se que uma força de  $10 \cos(10t)$  [N] perturbe o sistema na direção cinemática, ao passo que uma perturbação de  $10 \cos(50t)$  [N] incida na direção flexível. Os resultados expressos por meio da Figura 4.39 mostram que os erros são pequenos, apesar das perturbações. A força de contato (Figura 4.40) mantém-se próxima do valor esperado de 20 [N], com uma oscilação máxima de 0,1 [N]. As ações de controle (Figura 4.41) refletem bem a grandeza das perturbações a que o EF foi submetido.

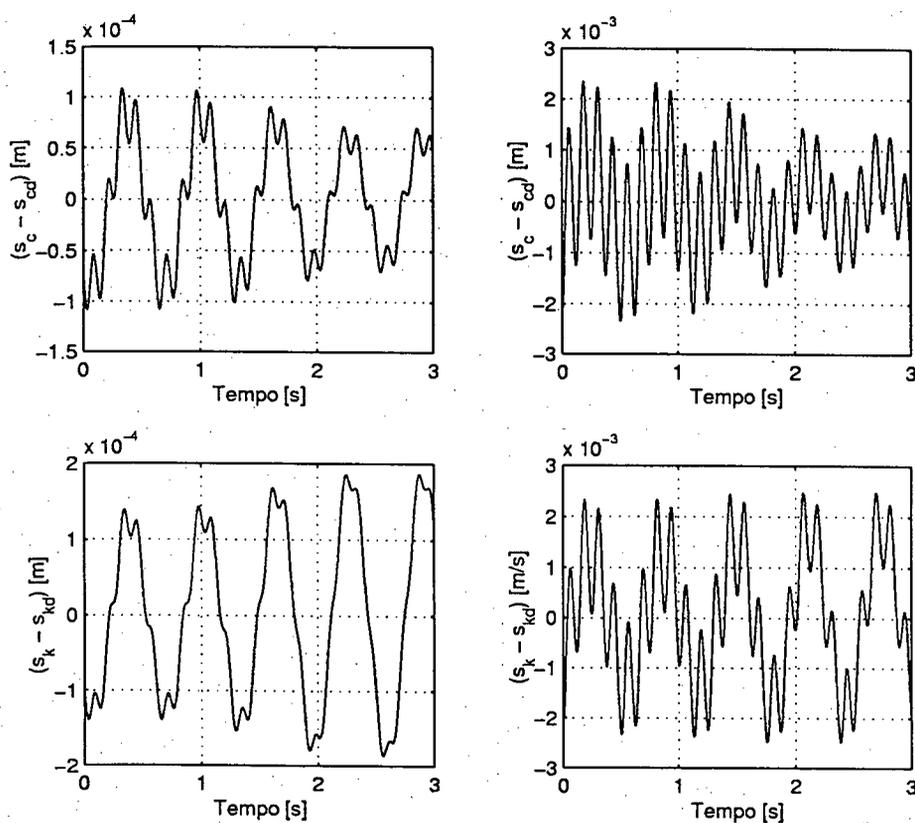


Figura 4.39: Caso 1 - Erros de posição e de velocidade nas direções flexível e cinemática.

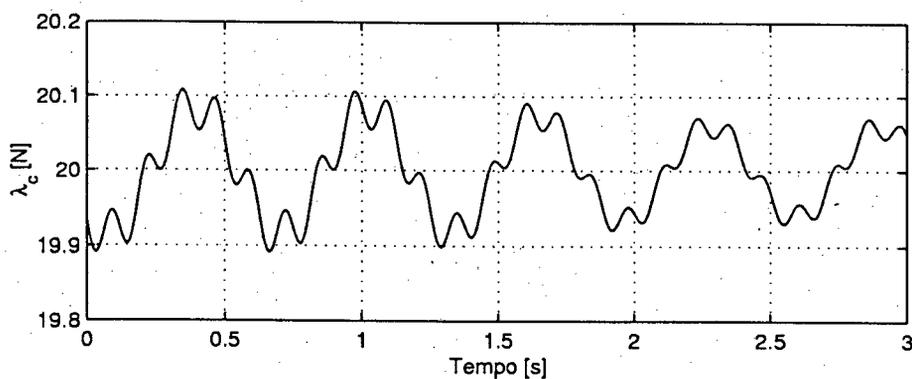


Figura 4.40: Caso 1 - Força na direção flexível.

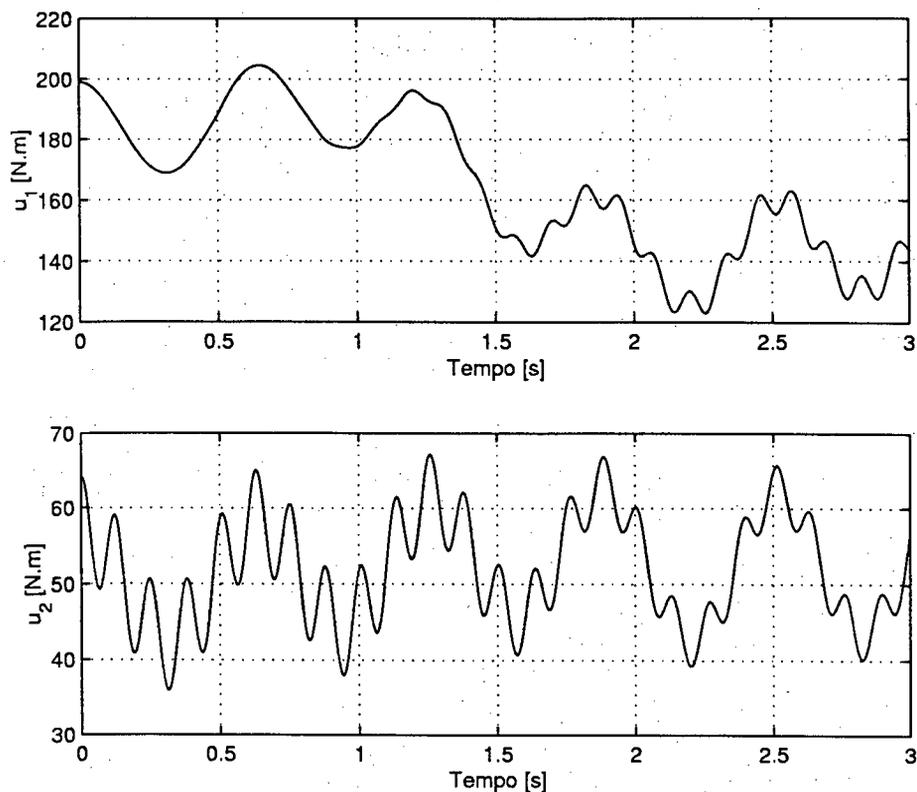


Figura 4.41: Caso 1 - Ações de controle.

### Caso 2 - Incidência de Incertezas Paramétricas

As condições de incerteza deste caso são as seguintes:

- Massas e Inércias do Robô: parâmetros subestimados em 20% com relação aos verdadeiros;
- Demais parâmetros do robô e do ambiente: subestimados em 50% com relação aos verdadeiros.

A Figura 4.42 mostra a deflexão sofrida pela mola, enquanto o EF se move ao longo do plano vertical. O erro que se verifica na direção flexível oscila entre 2 e 4 %.

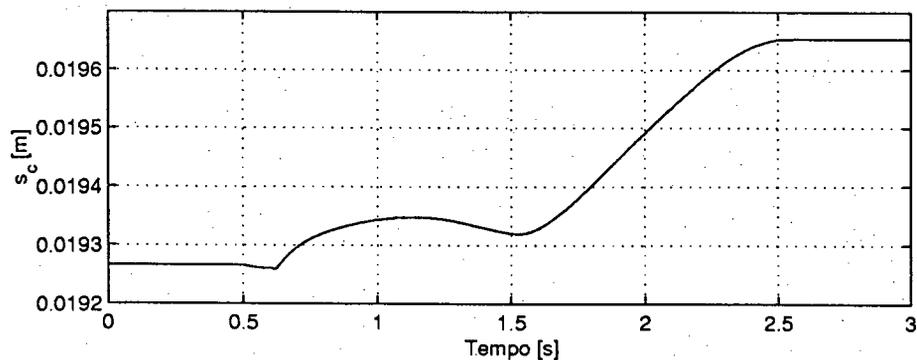


Figura 4.42: Caso 2 - Deflexão do ambiente na direção flexível.

Um controle de posição como este pode causar transtornos quando a incerteza com relação a  $k_s$  for elevada, pois, se  $k_s$  for muito subestimada, a força de contato real será bem maior do que a esperada.

Para este caso, o valor estimado para a rigidez foi  $\hat{k}_s = 500$  [N/m], enquanto o seu valor real é, na verdade,  $k_s = 1000$  [N/m]. Em conseqüência, imagina-se que a força de contato será 10 [N], porém, de fato, ela se aproxima de 20 [N].

### Caso 3 - Efeito da Inclusão da Medida da Força

Como pode ser visto nos Capítulos 2 e 3, este controlador não inclui a leitura da força. Entretanto, se ela for realizada, aumentará a robustez com respeito às incertezas paramétricas, fazendo com que o controle de posição na direção flexível seja mais preciso. Neste caso, o termo  $Y_c (T_c^T Y_c)^{-1} \hat{K}_s s_c$ , presente na equação (2.102) e que estima a força  $F_c$ , é substituído pela própria medida de  $F_c$ , não dependendo mais de  $\hat{K}_s$ . Quando a leitura da força é feita, o erro de posição na direção flexível é visivelmente menor, como se vê na Figura 4.43.

Para este caso, foram usadas as mesmas incertezas do Caso 2, exceto pelo valor de  $\hat{k}_s$ , que foi superestimado em 100 %.

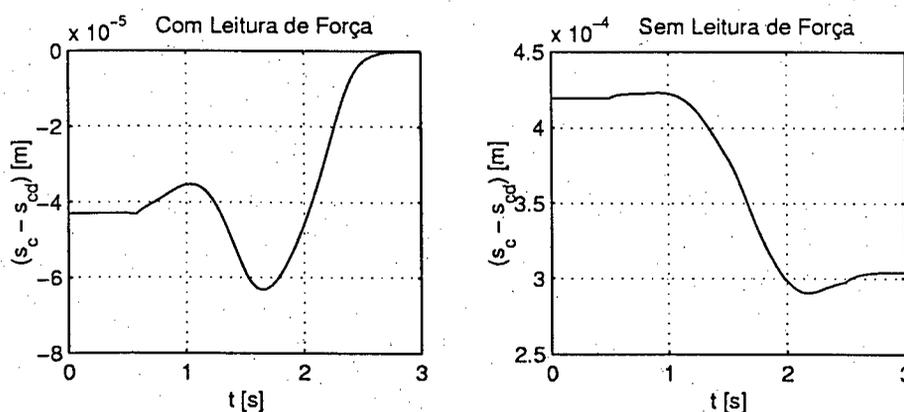


Figura 4.43: Caso 3 - Erros de posição na direção flexível, com e sem medida de força.

## 4.4 Considerações Finais

Foram considerados diferentes tipos de ambientes: o cinemático, que permite representar tarefas de contato com superfícies absolutamente rígidas, modelado por meio de restrições geométricas ao movimento; o flexível, para o qual as rígidas restrições geométricas são flexibilizadas, passando a admitir deflexões nas direções de aplicação da força; e o dinâmico, caracterizado por um comportamento de segunda ordem nas direções de aplicação da força.

Foram analisados controladores dos tipos CLD e CEV, apropriados a cada um desses ambientes, visando o seguimento da trajetória do EF e a regulação da força de contato. Além disso, o sistema foi examinado em condições nominais e perturbadas, isto é, sujeito a incertezas paramétricas e/ou perturbações externas.

Os variados ambientes, controladores e perturbações analisados abrangem um amplo conjunto de situações em que o robô realiza tarefas de contato, e permitem avaliar os desempenhos dos controladores em condições adversas, seja com respeito ao controle da força, seja ao da posição.

Os resultados apresentados, em primeiro lugar, permitem concluir a respeito da superioridade do CEV com relação ao CLD, tanto em condições nominais como perturbadas. De fato, o CEV mostrou-se capaz de seguir com precisão as trajetórias pré-estabelecidas do movimento e da força desejados.

Em segundo lugar, pôde-se perceber a importância do controle da força em tarefas de contato, embora tenham sido identificadas circunstâncias em que o controle do movimento na direção de contato é mais conveniente do que o controle da força.

Finalmente, a inclusão da camada limite evitou o *chattering* a um custo aceitável, visto que os erros apresentados pelo CEV podem ser perfeitamente tolerados em muitas tarefas. Além disso, constatou-se que o CEV manteve-se robusto e estável mesmo diante das graves incertezas paramétricas e perturbações externas consideradas nas simulações.

## Capítulo 5

# Robô de Juntas Flexíveis em Contato com Ambientes Passivos

Um robô manipulador idealmente rígido, de fato, não existe, porque sempre estará presente alguma flexibilidade nos elos ou nas juntas. Por isso, neste capítulo, os modelos desenvolvidos no Capítulo 2 para robôs rígidos em contato com ambientes passivos são adaptados para robôs que apresentam flexibilidades não desprezíveis nas juntas. Procura-se escrevê-los numa forma conveniente à derivação de uma estratégia de controle em cascata e ao aproveitamento dos controladores a estrutura variável obtidos no Capítulo 3.

### 5.1 Robô de Juntas Flexíveis em Contato com Ambientes Passivos

Os robôs flexíveis são divididos em dois tipos: os que admitem concentrar as flexibilidades nas juntas, entre os quais conta-se a maior parte dos robôs industriais, e os que demandam a modelagem por parâmetros distribuídos, que é o caso dos robôs com elos flexíveis, longos e leves em geral, comuns em aplicações aero-espaciais. Há, também, robôs em que apenas um dos seus elos é flexível [82]. A modelagem e os problemas de controle destes tipos de robôs são muito distintos; neste trabalho, são estudados apenas os robôs de juntas flexíveis (RJF) [21].

A presença de elasticidade não desprezível nas juntas dos robôs é uma realidade em muitos robôs industriais atuais, pois é inerente aos elementos de transmissão do movimento, isto é: as correias de transmissão, as engrenagens, os redutores harmônicos (*harmonic drives*), os eixos dos motores vinculados a cada junta, e os transdutores inseridos nas juntas para medir seus torques.

A elasticidade nas juntas introduz uma dinâmica entre os eixos do atuador e do elo, um comportamento de natureza oscilatória, caracterizado por pequena amplitude e frequência relativamente alta,

porém ainda no espectro de interesse do controle. Estas pequenas deflexões nas juntas podem tornar-se um problema, especialmente se é requerido o seguimento preciso de uma trajetória ou uma alta sensibilidade a forças cartesianas. Em contrapartida, as flexibilidades podem ser úteis como proteção contra contatos inesperados com superfícies rígidas.

A introdução da dinâmica entre os eixos do atuador e do elo, devido à flexibilidade, acrescenta graus de liberdade e maior complexidade às equações dinâmicas, o que resulta num controle mais difícil, pois o número de atuadores ( $n$ ) é inferior ao número de graus de liberdade ( $2n$ ), obrigando a se fazer um controle indireto dos elos com os torques fornecidos nos eixos dos motores, e não mais com os torques fornecidos diretamente ao elo (caso do robô rígido), além de requerer um número de sensores duas vezes maior.

Deve-se observar, entretanto, que nem sempre é necessário utilizar um modelo mais complexo para descrever satisfatoriamente bem a dinâmica de um manipulador. Em muitas tarefas práticas, cujas exigências quanto ao comportamento dinâmico e/ou à precisão não são pesadas, é suficiente a representação proporcionada pelo modelo do robô rígido.

### 5.1.1 Modelo Dinâmico de Robôs de Juntas Flexíveis

O objetivo desta seção é apresentar o modelo dinâmico simplificado do RJF, que é utilizado como ponto de partida para a obtenção do modelo do sistema robô-ambiente. Para uma dedução detalhada do modelo dinâmico completo do RJF, os interessados podem reportar-se a [31].

Como há  $2n$  graus de liberdade, naturalmente tem que haver  $2n$  coordenadas, que são agrupadas em dois vetores de dimensão  $n$ : o vetor  $q$  das posições dos elos e o vetor  $q_m$  das posições dos motores (rotores), já refletidas para o lado dos elos pelas relações de transformação. A diferença entre estes dois vetores, isto é  $q - q_m$ , responde pela deformação nas juntas.

A Figura 5.1 apresenta uma junta de robô, de uma forma esquemática, onde são identificadas as coordenadas generalizadas  $q_i$ ,  $q_{m_i}$  e  $\theta_{m_i}$ , a ação de controle  $u'_i$ , alguns parâmetros inerciais, além do coeficiente de rigidez  $K_{j_i}$ .

A Figura 5.2 mostra a mesma junta, porém com todas as grandezas referidas ao lado dos elos, isto é, a inércia do rotor  $J_{m_i}$  é substituída por  $I_{m_i} = N_i^2 J_{m_i}$ , a ação de controle  $u'_i$  por  $u_i = N_i u'_i$  e a posição  $\theta_{m_i}$  por  $q_{m_i} = \theta_{m_i}/N_i$ , onde  $N_i$  é a relação de engrenagens.

O modelo dinâmico do RJF relaciona-se a esta última estrutura. Antes de obtê-lo, porém, é necessário estabelecer os seguintes pressupostos [38], [31], [33]:

1. As juntas se deformam somente na direção de rotação e suas deformações são suficientemente pequenas, tal que podem ser modeladas como molas lineares;

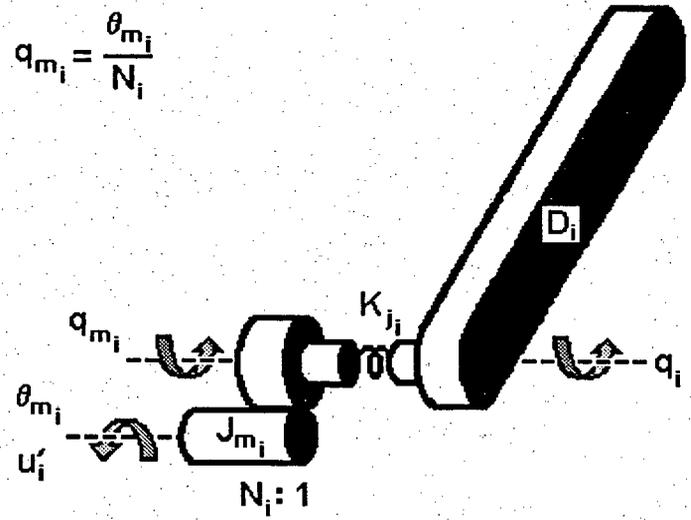


Figura 5.1: Representação esquemática de uma junta flexível de robô.

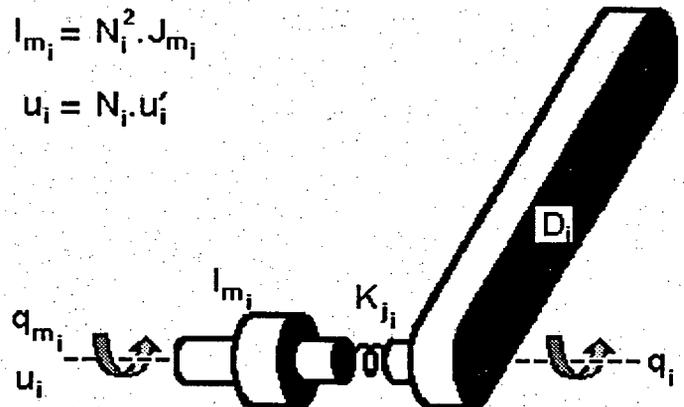


Figura 5.2: Junta flexível de robô - Variáveis refletidas ao lado dos elos.

2. Os rotores são modelados como corpos uniformes, com os centros de massa sobre os eixos de rotação. Por causa disso, tanto a matriz de inércias como o termo gravitacional, presentes nas equações dinâmicas, são independentes de  $q_m$ .

Satisfeitos estes pressupostos, a energia cinética total do robô é dada por [33]:

$$K_r = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T & \dot{q}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(q) & S(q) \\ S^T(q) & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

onde  $D$  é a matriz das inércias relacionada aos elos do robô,  $I_m$  é uma matriz diagonal das inércias dos rotores em torno de seus eixos principais de rotação, já multiplicadas pelo quadrado das relações de engrenagens, e  $S(q)$  é uma matriz que leva em conta os acoplamentos inerciais entre os motores e os elos, descrita por:

$$S(q) = \begin{bmatrix} 0 & S_{12}(q_1) & S_{13}(q_1, q_2) & \cdots & S_{1n}(q_1, \dots, q_{n-1}) \\ 0 & 0 & S_{23}(q_2) & \cdots & S_{2n}(q_2, \dots, q_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_{n-1,n}(q_{n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

em cuja definição considerou-se que o  $i$ -ésimo motor é montado no elo  $i - 1$ . Naturalmente, a energia cinética do  $i$ -ésimo motor (rotor) não depende dos movimentos do  $i$ -ésimo elo e dos elos subsequentes, o que bem expressa a estrutura da matriz  $S(q)$ .

Expandindo-se a equação (5.1), são obtidos três termos distintos, que exprimem as energias cinéticas relativas a diferentes porções do manipulador:

- $\frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q}$ , referente à energia cinética dos elos;
- $\frac{1}{2} \dot{q}_m^T I_m \dot{q}_m$ , correspondente à energia cinética dos motores; e
- $\dot{q}^T S(q) \dot{q}_m$ , relativo à energia cinética dos termos inerciais de acoplamento.

Os termos-estruturalmente não nulos da matriz  $S(q)$  dependem das orientações relativas entre os eixos de rotação dos rotores, isto é, dependem da arquitetura e da geometria do manipulador. Desta forma, se os eixos das juntas são coplanares e/ou ortogonais, por exemplo, os ângulos entre os eixos são fixos e  $S(q) = S$  é constante. Doravante, a fim de evitar termos adicionais e de relevância discutível para o modelo dinâmico, a matriz  $S(q)$  será considerada constante. Isto é verdadeiro, entre outros, para robôs planares com qualquer número de juntas rotacionais, e é uma aproximação razoável para os casos em que a relação de transformação  $N_i$  é elevada.

A energia potencial  $P_r$  é composta de duas parcelas: a primeira é a energia gravitacional  $P_g$  e a segunda, a energia potencial da mola  $P_j$ , isto é

$$P_r = P_g(q) + \frac{1}{2} (q - q_m)^T K_j (q - q_m) \quad (5.3)$$

onde  $K_j$  é uma matriz diagonal, cujos componentes são os coeficientes de rigidez de cada junta.

De posse das energias cinética e potencial, aplica-se a equação de Lagrange a  $L_r = K_r - P_r$ , obtendo-se as seguintes equações dinâmicas para o RJF:

$$D(q)\ddot{q} + S\ddot{q}_m + c_r(q, \dot{q}) + \bar{b}_r(q, \dot{q}) + g_r(q) + K_j (q - q_m) = -f \quad (5.4)$$

$$S^T \ddot{q} + I_m \ddot{q}_m + b_m(q_m, \dot{q}_m) + K_j (q_m - q) = u \quad (5.5)$$

onde  $c_r(q, \dot{q})$  é o vetor dos torques centrífugos e de Coriolis e  $g_r(q) = \frac{\partial P_g}{\partial q}$  é o vetor dos torques gravitacionais do robô,  $\bar{b}_r(q, \dot{q})$  e  $b_m(q_m, \dot{q}_m)$  representam as forças não conservativas de atrito,  $K_j (q_m - q)$  é o vetor dos torques elásticos nas juntas e  $f$  é a força generalizada exercida pelo efetuador final (EF) sobre o ambiente, expressa no espaço das juntas, isto é  $f = J^T(q)F$ . A barra superior em  $\bar{b}_r(q, \dot{q})$  é usada para diferenciá-lo de  $b_r(q, \dot{q})$ , definido no Capítulo 2, e que considera todo o atrito do robô, e não somente o atrito no lado dos elos, que é o caso de  $\bar{b}_r(q, \dot{q})$ .

Para relações de transformação muito grandes,  $N_i \gg 1$ , a velocidade angular do rotor é muito maior do que a velocidade angular do elo. Conseqüentemente, a energia cinética do rotor será devida, principalmente, a sua própria rotação [38]. Isto equivale a aproximar de zero os termos da matriz  $S$ , visto que dependem inversamente de  $N_i$ . Para  $S = 0$ , as equações dinâmicas (5.4)-(5.5) reduzem-se ao modelo simplificado de Spong [38]:

$$D(q)\ddot{q} + c_r(q, \dot{q}) + \bar{B}_r \dot{q} + g_r(q) + K_j (q - q_m) = -f \quad (5.6)$$

$$I_m \ddot{q}_m + B_m \dot{q}_m + K_j (q_m - q) = u. \quad (5.7)$$

para o qual foi considerada apenas a ocorrência de atrito viscoso, representado pelos termos  $\bar{B}_r \dot{q}$  e  $\bar{B}_m \dot{q}_m$ .

Analisando as equações dinâmicas do RJF, percebe-se logo a importância das flexibilidades das juntas no comportamento do sistema, pois as equações estão ligadas unicamente através do torque elástico. Desta forma, a dinâmica do sistema depende fortemente do valor  $K_j$ . De fato, quando  $K_j$  tende para o infinito,  $q_m \rightarrow q$  e as equações (5.6)-(5.7) reduzem-se a

$$(D(q) + I_m) \ddot{q} + (\bar{B}_r + B_m) \dot{q} + c_r(q, \dot{q}) + g_r(q) = u - J^T(q)F \quad (5.8)$$

a partir da qual, sabendo que

$$D(q) + I_m = M_r(q) \quad (5.9)$$

$$(\bar{B}_r + B_m)\dot{q} + c_r(q, \dot{q}) + g_r(q) = n_r(q, \dot{q}) \quad (5.10)$$

chega-se a

$$M_r(q)\ddot{q} + n_r(q, \dot{q}) = u - J^T(q)F \quad (5.11)$$

que é exatamente a equação dinâmica do robô rígido.

As equações (5.6)-(5.7) são ainda alteradas para facilitar a derivação de uma lei de controle em cascata, a ser apresentada na próxima seção. Para isso, a partir da definição dos torques de deformação nas juntas, isto é:

$$\tau_j = K_j (q_m - q) \quad (5.12)$$

obtêm-se as seguintes expressões para  $\dot{q}_m$  e  $\ddot{q}_m$ :

$$\dot{q}_m = K_j^{-1} \dot{\tau}_j + \dot{q} \quad (5.13)$$

$$\ddot{q}_m = K_j^{-1} \ddot{\tau}_j + \ddot{q}. \quad (5.14)$$

Substituindo (5.12), (5.13) e (5.14) nas equações (5.6) e (5.7), é produzido o seguinte modelo alternativo:

$$D(q)\ddot{q} + \bar{n}_r(q, \dot{q}) = \tau_j - J^T f \quad (5.15)$$

$$I_j \ddot{\tau}_j + B_j \dot{\tau}_j + \tau_j = u - d_j \quad (5.16)$$

no qual  $\bar{n}_r(q, \dot{q})$  é ligeiramente diferente de  $n_r(q, \dot{q})$ , visto que não inclui o torque de atrito  $B_m \dot{q}_m$  do lado dos motores. As matrizes  $I_j$  e  $B_j$  e o vetor  $d_j$  são dados por:

$$I_j = I_m K_j^{-1} \quad (5.17)$$

$$B_j = B_m K_j^{-1} \quad (5.18)$$

$$d_j = I_m \ddot{q} + B_m \dot{q} \quad (5.19)$$

onde  $d_j$  pode ser interpretado como um vetor de perturbações, que incide sobre o subsistema (5.16). O sistema de equações (5.15)-(5.16) pode ser visto como dois subsistemas de  $n$  equações cada um, acoplados através da variável  $\tau_j$  dos torques nas juntas. As  $n$  primeiras equações (5.15) representam o comportamento dinâmico dos elos e as  $n$  restantes (5.16) descrevem a dinâmica dos motores.

### 5.1.2 RJF em Contato com Ambiente Dinâmico

À exceção das equações dinâmicas do robô, o modelo para o RJF em contato com ambiente dinâmico é idêntico ao desenvolvido para o robô rígido nas mesmas circunstâncias. De fato, as definições do ambiente e de sua interação com o EF não se alteram pelo fato de o robô ser rígido ou possuir juntas flexíveis. Portanto, o modelo dinâmico para o sistema robô-ambiente é descrito por:

1.  $2n$  equações diferenciais de segunda ordem relativas ao RJF (5.15-5.16);
2.  $d$  equações diferenciais de segunda ordem referentes ao ambiente:

$$M_e(s_d)\ddot{s}_d + n_e(s_d, \dot{s}_d) = T_d^T(s)F \quad (5.20)$$

3.  $k$  equações algébricas, que estabelecem a não realização de trabalho das forças de contato ao longo das direções cinemáticas:

$$T_k^T(s)F = 0 \quad (5.21)$$

4. mais 6 equações algébricas, relativas ao acoplamento entre o EF e o ambiente:

$$\Gamma(s) - \Theta(q) = 0. \quad (5.22)$$

As equações (5.20)-(5.22) já foram apresentadas no Capítulo 2.

Da mesma forma como se fez no caso do robô rígido, as equações algébricas são incorporadas às equações diferenciais, conseguindo-se reorganizar o conjunto das equações, que descreve o sistema RJF-Ambiente, em dois subsistemas acoplados pela variável  $\tau_j$ , ou seja:

$$\text{SUBSISTEMA A} \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_r \\ \ddot{s}_k \end{bmatrix} = Q^{-1} (m + JD^{-1}\tau_j) + \delta \quad (5.23)$$

$$\text{SUBSISTEMA B} \Rightarrow I_j\ddot{\tau}_j + B_j\dot{\tau}_j + \tau_j = u - d_j \quad (5.24)$$

onde a matriz  $Q$  e o vetor  $m$ , quase idênticos aos definidos no Capítulo 2, são dados por:

$$Q = \begin{bmatrix} (T_d M_e^{-1} T_d^T + JD^{-1} J^T) Y_a & JD^{-1} J^T Y_r & T_k \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$m = -\dot{T}_k \dot{s}_k - \dot{T}_d \dot{s}_d + \dot{J} \dot{q} + T_d M_e^{-1} n_e - JD^{-1} \bar{n}_r \quad (5.26)$$

com  $D$  no lugar de  $M_r$  e  $\bar{n}_r$  no lugar de  $n_r$ . O vetor  $\delta$  representa as perturbações incidentes no EF.

## 5.2 Controle de RJF em Contato com Ambiente Dinâmico

O modelo (5.23)-(5.24) é totalmente adequado a uma abordagem de controle em cascata, além de viabilizar a aplicação dos controladores desenvolvidos para o robô rígido, nos capítulos anteriores, à parcela do sistema modelado pela equação (5.23). A estratégia do controle em cascata está ilustrada na Figura 5.3 e é descrita a seguir:

- 1ª Etapa: Com o foco no Subsistema A, é derivado um vetor de torques,  $\tau_{j,des}$ , tal que atenda aos objetivos de controle no que diz respeito ao movimento do EF e à força por ele aplicada sobre o ambiente.
- 2ª Etapa: Focalizando agora no Subsistema B, obtém-se o vetor de controle  $u$ , composto dos torques de saída dos atuadores, cuja missão é fazer com que  $\tau_j$  siga o mais perto possível o vetor de torques desejados  $\tau_{j,des}$ , gerado na primeira etapa de controle.

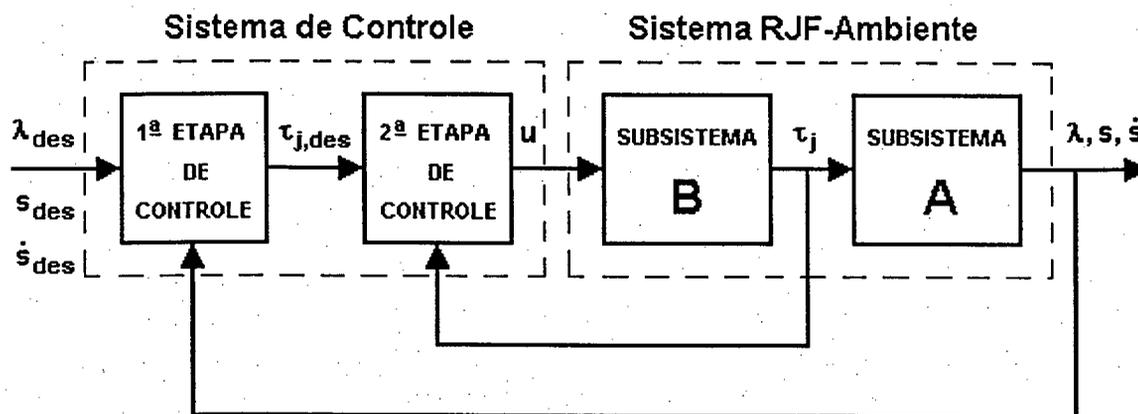


Figura 5.3: Esquema de controle em cascata.

Em ambas as etapas, é possível aplicar uma entre as diversas técnicas de controle existentes. Entretanto, se a lei de controle na 1ª etapa for descontínua, o controle proposto na 2ª etapa não poderá usar a derivada do erro de torque, porque ela será uma indefinição matemática [39].

Neste trabalho, são considerados apenas os controladores dos tipos CLD e CEV, tais como foram propostos nos capítulos anteriores. Para evitar o *chattering* e o problema mencionado no parágrafo anterior, a descontinuidade do CEV será substituída por um elemento de saturação, com os ganhos do controle chaveado e as camadas limite satisfazendo os critérios estabelecidos por (3.70) e (3.47), derivados no Capítulo 3.

Na primeira etapa, propõe-se aplicar o CEV, porque este tipo de controle rejeita melhor as incertezas paramétricas e as perturbações externas, que incidem principalmente sobre o Subsistema A. Com

isso, a maior parte das perturbações é rejeitada, facilitando a tarefa de seguimento do torque desejado, que é o objetivo da segunda etapa de controle.

Usando as superfícies de chaveamento (3.48), definidas no Capítulo 3, um controlador quase idêntico ao descrito pelas equações (3.53)-(3.54) é produzido:

$$\tau_{j,des} = (J\hat{D}_r^{-1})^\# (\hat{Q}\tau_{j,ref} - \hat{m}) \quad (5.27)$$

onde  $\hat{Q}$  e  $\hat{m}$  são calculados com os valores estimados de  $D$ ,  $M_e$ ,  $\bar{n}_r$  e  $n_e$  e

$$\tau_{j,ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -C_k \dot{s}_k \end{bmatrix} - \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} + W \text{sign}(\sigma) + K\sigma \right). \quad (5.28)$$

Na segunda etapa, pode ser aplicado um controlador simples como o PID, ou um mais sofisticado como o linearizante e desacoplante descrito no Capítulo 2. Nas simulações apresentadas no próximo capítulo, usou-se a seguinte lei de controle linearizante e desacoplante para controlar o Subsistema B:

$$u = \hat{I}_j \tau_{j,ref} + \hat{B}_j \dot{\tau}_j + \tau_j \quad (5.29)$$

juntamente com

$$\tau_{j,ref} = \ddot{\tau}_{j,des} - K_{vj} \dot{e}_t - K_{pj} e_t \quad (5.30)$$

onde  $e_t = \tau_j - \tau_{j,des}$  e  $\dot{e}_t = \dot{\tau}_j - \dot{\tau}_{j,des}$  são os erros do torque e da sua derivada e

$$K_{vj} = \text{diag}(k_{vj,1}, \dots, k_{vj,n}) \quad (5.31)$$

$$K_{pj} = \text{diag}(k_{pj,1}, \dots, k_{pj,n}) \quad (5.32)$$

são matrizes de ganho, diagonais e positivas.

Aplicando esta lei de controle ao Subsistema B, a seguinte equação é obtida:

$$\begin{aligned} I_j \ddot{\tau}_j + B_j \dot{\tau}_j + \tau_j &= u - d_j \\ &= \hat{I}_j \tau_{j,ref} + \hat{B}_j \dot{\tau}_j + \tau_j - d_j \end{aligned} \quad (5.33)$$

a qual, após algumas manipulações algébricas, pode ser reescrita na forma:

$$\hat{I}_j (\ddot{\tau}_j - \tau_{j,ref}) = \tilde{I}_j \ddot{\tau}_j + \tilde{B}_j \dot{\tau}_j - d_j \quad (5.34)$$

onde  $\tilde{I}_j = \hat{I}_j - I_j$  e  $\tilde{B}_j = \hat{B}_j - B_j$ . Substituindo (5.30) em (5.34), finalmente é obtida a seguinte equação de malha fechada:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_t + K_{vj}\dot{e}_t + K_{pj}e_t &= \hat{I}_j^{-1} (\tilde{I}_j\ddot{\tau}_j + \tilde{B}_j\dot{\tau}_j - d_j) \\ &= p_\tau \end{aligned} \quad (5.35)$$

que é um sistema de equações diferenciais de segunda ordem dos erros de controle, cujo comportamento depende das constantes  $K_{vj}$  e  $K_{pj}$  e do termo de perturbações  $p_\tau$ . Estes ganhos podem ser escolhidos de tal forma que os erros decorrentes das perturbações sejam reduzidos a valores aceitáveis, que não interfiram nos resultados desejados.

Em condições de repouso, quando o robô estabiliza numa certa posição espacial,  $\ddot{q} = \dot{q} = 0$  e  $\ddot{\tau}_j = \dot{\tau}_j = 0$ ; conseqüentemente,

$$\ddot{\tau}_j - \ddot{\tau}_{j,des} + K_{vj}(\dot{\tau}_j - \dot{\tau}_{j,des}) + K_{pj}(\tau_j - \tau_{j,des}) = 0 \quad (5.36)$$

isto é, o torque nas juntas é conduzido para o valor desejado, produzido pelo primeiro estágio de controle, o que significa que os objetivos de controle, isto é, o movimento desejado para o EF e a força que ele aplica no ambiente, são alcançados.

Para implementar este controlador em cascata, são necessárias as medidas das seguintes variáveis:

- Força aplicada pelo EF:  $F$ , com a qual se obtêm  $\lambda_a$  e  $\lambda_r$ ;
- Torques nas juntas e suas derivadas:  $\tau_j$  e  $\dot{\tau}_j$ ;
- Posições e velocidades das juntas:  $q$  e  $\dot{q}$ ;
- Posição e velocidade do EF visto do ambiente:  $s$  e  $\dot{s}$ , que podem ser obtidas a partir de  $q$ ,  $\dot{q}$ , desde que a cinemática seja perfeitamente determinada.

Especialmente as medidas no ambiente representam um custo adicional, quando se compara com as que são necessárias em outros controladores. No entanto, elas proporcionam um melhor conhecimento do ambiente, o que resulta em robustecimento do controle.

### 5.3 Considerações Finais

Embora muitas variantes poderiam ser descritas e analisadas, esta é suficiente para exemplificar a aplicação da estrutura em cascata ao modelo proposto para o sistema RJF-Ambiente Passivo. No próximo capítulo, seu desempenho é avaliado por meio de simulações.

## Capítulo 6

# Resultados de Simulação Para o Robô de Juntas Flexíveis

Ao robô de dois graus de liberdade utilizado nas simulações do Capítulo 4, são acrescentadas flexibilidades nas juntas e associada a estratégia de controle proposta no Capítulo 5. Diversas simulações são realizadas para testar o desempenho desta estratégia em algumas situações de contato, isto é, com os ambientes cinemático e dinâmico, sob condições nominais e perturbadas. Os resultados são comparados aos obtidos para o robô rígido.

### 6.1 Ambientes Cinemáticos

Nesta seção, são apresentados e analisados os resultados para o RJF interagindo com um ambiente cinemático, neste caso um plano vertical, como mostrado na Figura 6.1. Como a atuação do robô rígido já foi examinada diante de ambientes cinemáticos, será possível comparar os seus resultados com os do RJF e identificar os efeitos das flexibilidades nas juntas.

A tarefa já foi completamente definida no Capítulo 4 e o modelo dinâmico do robô de dois graus de liberdade com juntas flexíveis encontra-se com facilidade na literatura [65], [31], podendo também ser obtido rapidamente a partir do modelo do robô rígido incluído no Apêndice C.

A tarefa consiste em movimentar o EF ao longo do plano vertical, enquanto se aplica uma força constante de 20 [N], normal ao mesmo. O EF é movido desde a posição  $s_k = 0$  [m] até  $s_k = 0,5$  [m] à velocidade constante, exceto nos pequenos intervalos de tempo relativos à aceleração e à desaceleração. As trajetórias no tempo para a posição e a velocidade desejadas são as mesmas utilizadas para o robô rígido e são mostradas na Figura 6.2.

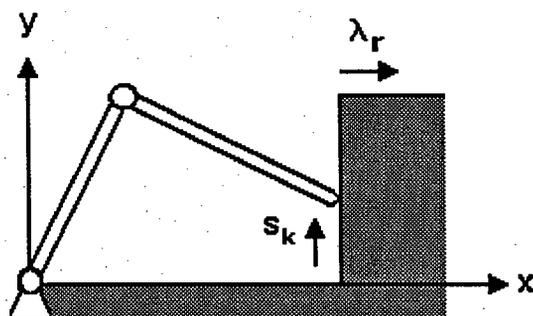


Figura 6.1: RJF realizando tarefa em um plano vertical.

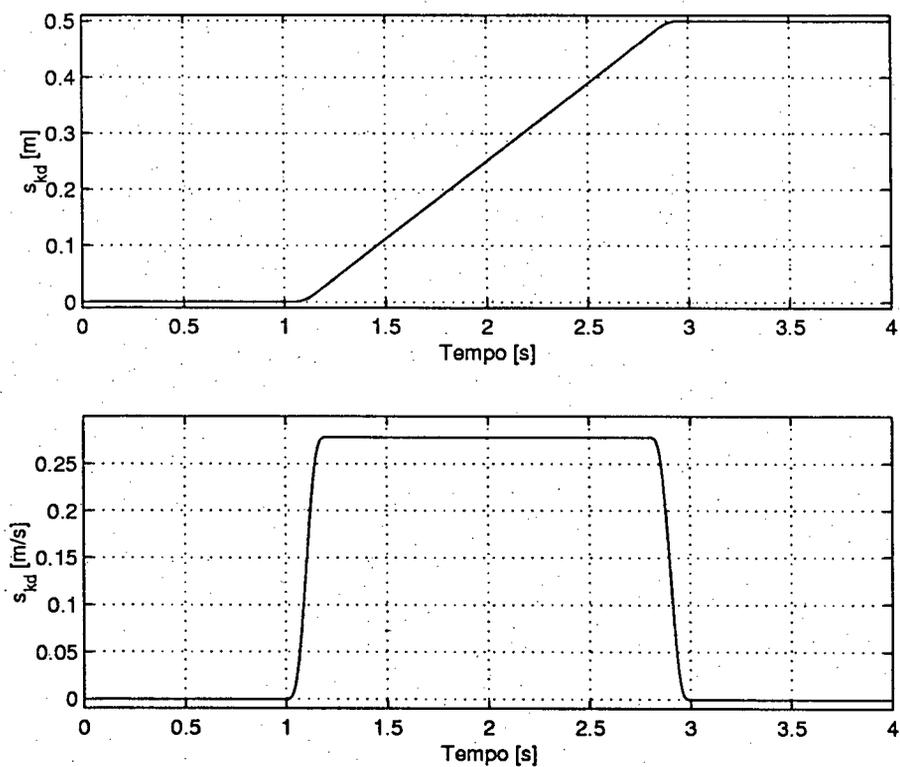


Figura 6.2: Trajetórias desejadas para posição e velocidade do EF.

### 6.1.1 Parâmetros do Manipulador e Ganhos do Controlador

Como a única diferença em relação ao manipulador utilizado no Capítulo 4 é a inclusão de flexibilidades nas juntas, devem ser acrescentadas apenas as inércias dos motores e os coeficientes de rigidez das juntas. Entretanto, considera-se que o atrito incide em ambos os lados das juntas. Desta forma, os parâmetros do robô são os seguintes:

- Comprimentos dos elos [m]:  $l_1 = 1$ ;  $l_2 = 1$ ;
- Centros de massa [m]:  $l_{c1} = 0,5$ ;  $l_{c2} = 0,5$ ;
- Massas dos elos [Kg]:  $m_1 = 20$ ;  $m_2 = 10$ ;
- Inércias dos elos [Kg.m<sup>2</sup>]:  $I_1 = 0,8$ ;  $I_2 = 0,2$ ;
- Inércias dos motores [Kg.m<sup>2</sup>]:  $I_{m1} = 0,8$ ;  $I_{m2} = 0,2$ ;
- Atrito viscoso no lado dos elos [N.m/rad/s]:  $b_{l1} = 2,5$ ;  $b_{l2} = 2,5$ ;
- Atrito viscoso no lado dos motores [N.m/rad/s]:  $b_{m1} = 2,5$ ;  $b_{m2} = 2,5$ ;
- Rigidez nas juntas [N.m/rad]:  $k_{j1} = 1000$ ;  $k_{j2} = 1000$ .

Os valores dos ganhos estão subdivididos de acordo com as duas etapas do controle em cascata apresentado no capítulo anterior, como segue:

- Primeira Etapa de Controle - CEV:
  - Ganho para a superfície de força:  $k_r = 10$ ;
  - Ganho para a superfície de movimento:  $k_k = 10$ ;
  - Inclinação da superfície de movimento:  $c_k = 10$ ;
  - Ganhos  $w_r$  e  $w_k$  mínimos:  $w_{r,\min} = w_{k,\min} = 10$ ;
- Segunda Etapa de Controle - CLD:
  - Ganho Proporcional:  $k_{Pt} = 10000$ ;
  - Ganho Derivativo:  $k_{Dt} = 200$ .

Note-se que os ganhos relativos à primeira etapa de controle foram escolhidos iguais aos usados no controle do robô rígido. Portanto, as diferenças nos resultados do RJF com relação ao robô rígido são devidas, principalmente, à ação da segunda etapa de controle.

### 6.1.2 Resultados das Simulações

Os resultados das simulações são divididos em quatro casos, de acordo com a incidência de incertezas paramétricas e de perturbações externas:

- Caso 1 - Nominal: os parâmetros do sistema são perfeitamente conhecidos e não existe qualquer perturbação externa;
- Caso 2 - Parâmetros Incertos: há um certo grau de incerteza quanto aos parâmetros do robô, porém nenhuma perturbação externa está presente;
- Caso 3 - Perturbações Externas: há incidência de perturbações externas, mas nenhuma incerteza quanto aos parâmetros do sistema;
- Caso 4 - Parâmetros Incertos e Perturbações Externas: há um certo grau de incerteza quanto aos parâmetros do sistema, além da incidência de perturbações externas.

#### Caso 1: Nominal

Para o caso nominal, foram atribuídos os seguintes valores às camadas limite:  $\Phi_r = \Phi_k = 0,02$ .

Na Figura 6.3, são mostradas as posições e velocidades das variáveis das juntas, no lado dos elos. As diferenças com relação a um robô rígido realizando a mesma tarefa são muito pequenas, não chegando a um décimo de grau para as posições, como se pode ver na Figura 6.4. O comportamento das variáveis das juntas, no lado dos motores, pode ser visto na Figura 6.5.

Além das variáveis das juntas, também a trajetória do EF, a força aplicada e as ações de controle ficaram bem próximas das obtidas para o manipulador rígido. As Figuras 6.6 e 6.7 mostram que os erros de posição, de velocidade e de força no EF são de fato pequenos e que, embora os erros do RJF sejam maiores, não se distanciam dos erros verificados para o robô rígido. Este fato é um primeiro atestado da eficiência do controlador proposto.

#### Caso 2: Parâmetros Incertos

Para este caso, as incertezas paramétricas foram consideradas nos seguintes níveis:

- Massas, Inércias e Atritos: superestimados em 20% com relação aos valores verdadeiros;
- Constantes de Rigidez: superestimados em 50% com relação aos valores verdadeiros.

Em função destas incertezas, as camadas limite foram fixadas em:  $\Phi_r = \Phi_k = 0,05$ .

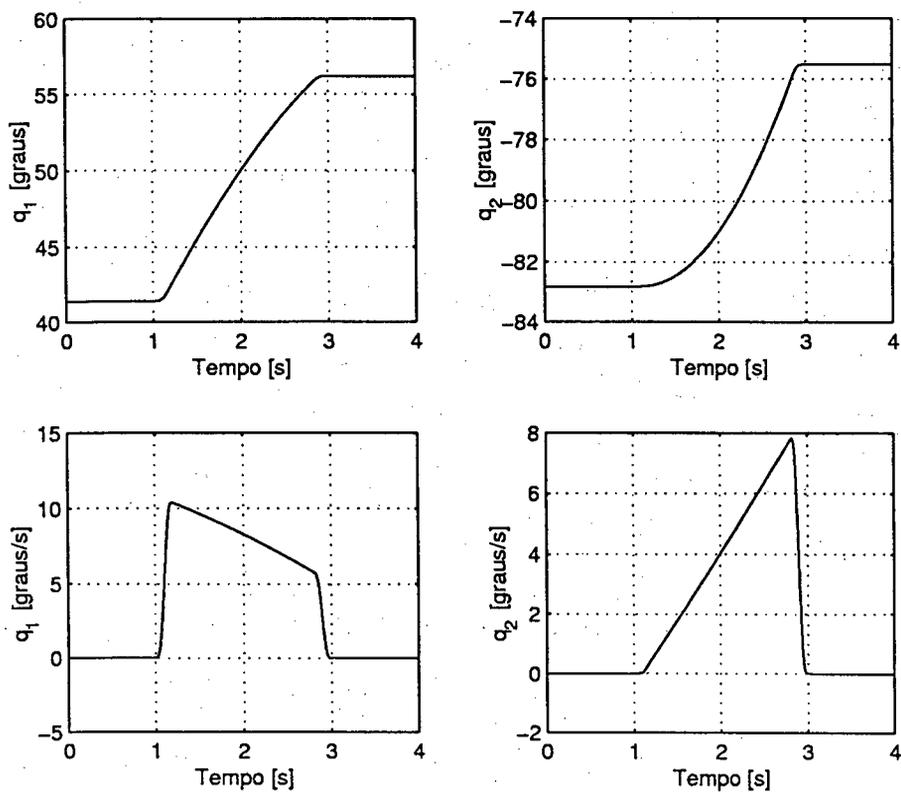


Figura 6.3: Caso 1 - Posições e velocidades das juntas, no lado dos elos -  $q$  e  $\dot{q}$ .

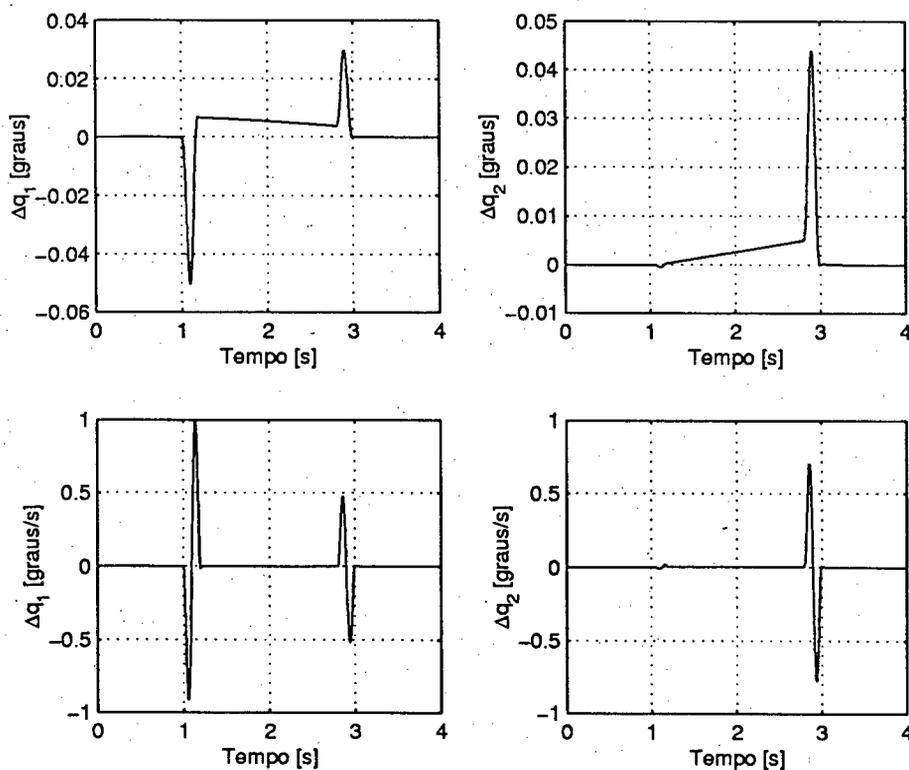


Figura 6.4: Caso 1 - Diferenças entre as posições (velocidades) das juntas do RJF e do robô rígido.

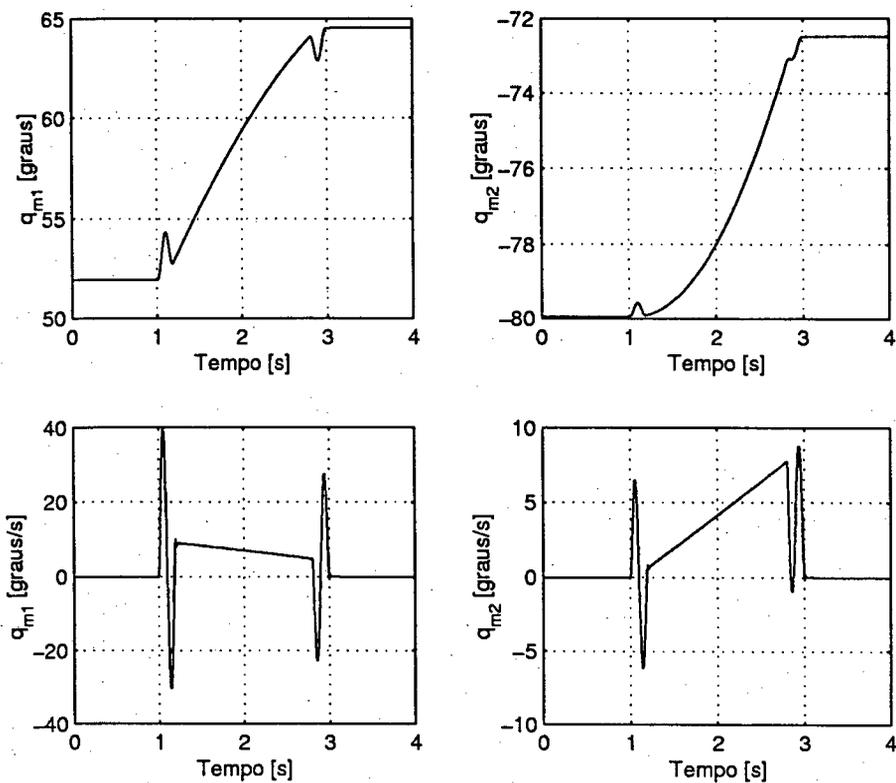


Figura 6.5: Caso 1 - Posições e velocidades das juntas, no lado dos motores -  $q_m$  e  $\dot{q}_m$ .

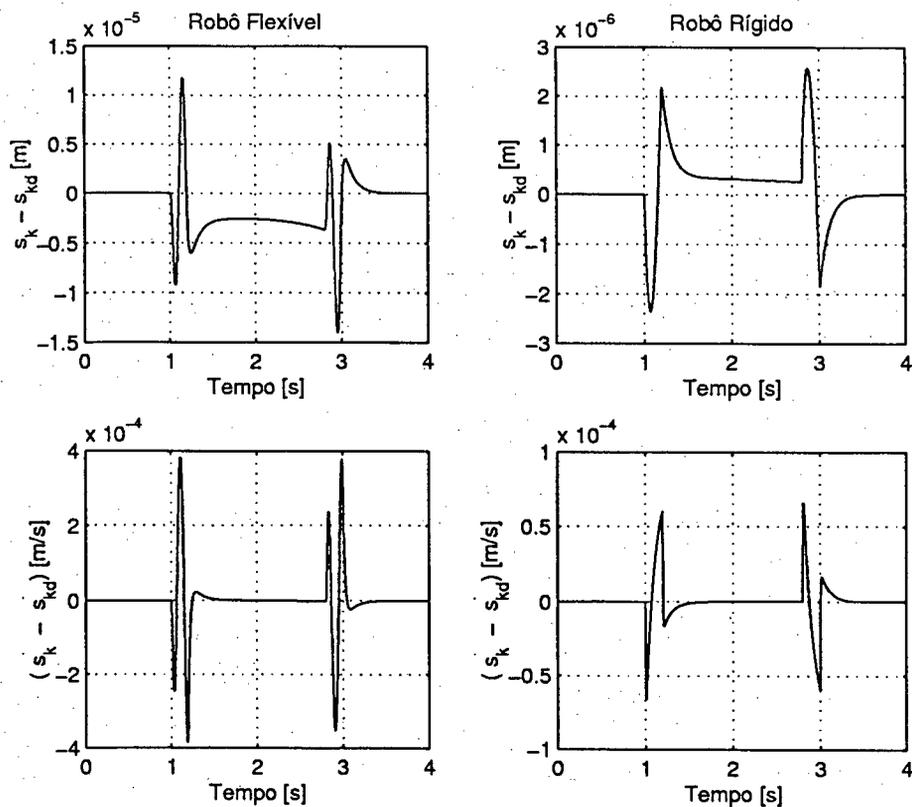


Figura 6.6: Caso 1 - Erros de posição e de velocidade.

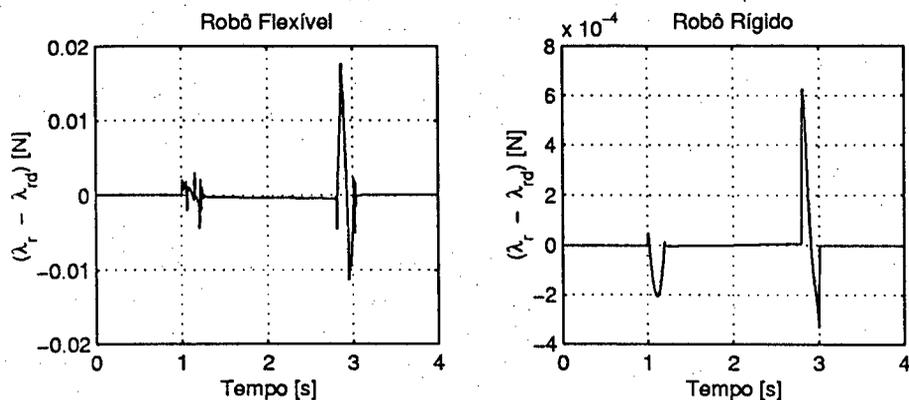


Figura 6.7: Caso 1 - Erros de força.

O movimento do EF pode ser visto na Figura 6.8, enquanto que o comportamento da força normal ao plano é exibido na Figura 6.9. Nota-se que as incertezas paramétricas acentuadas não comprometeram o seguimento da trajetória especificada, apresentando resultados semelhantes aos do robô rígido, apesar de ser um movimento rápido para um RJF. As variações observadas no comportamento da força são devidas ao movimento do EF.

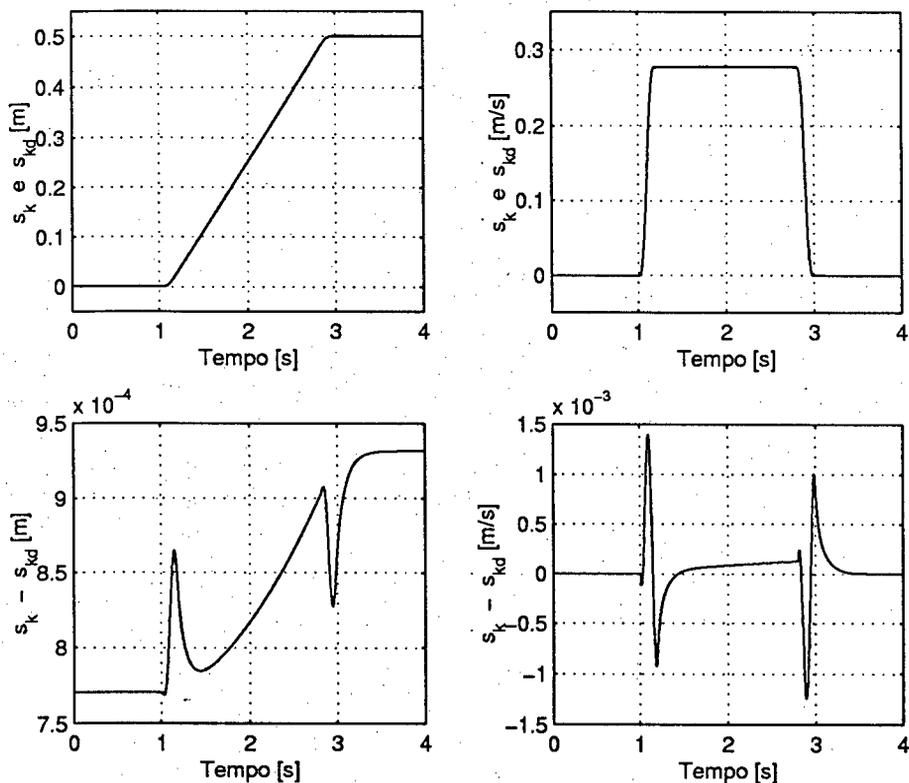


Figura 6.8: Caso 2 - Movimento do EF.

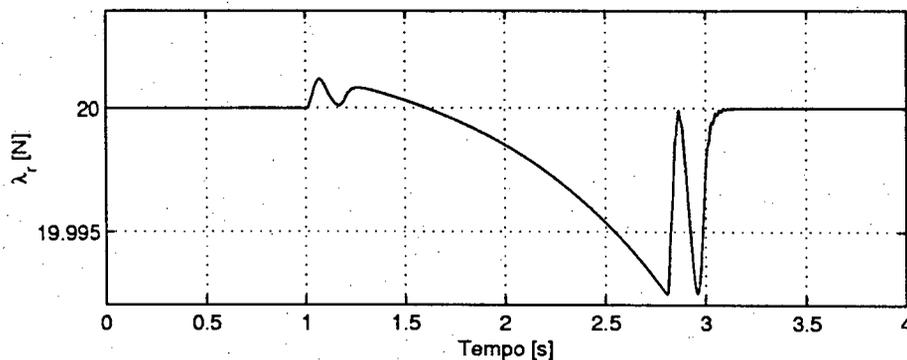


Figura 6.9: Caso 2 - Comportamento da força normal ao plano.

### Caso 3: Perturbações Externas

Neste caso, considerou-se a ocorrência de perturbações senoidais, que incidem no EF do robô, tanto na direção de aplicação da força ( $10 \cos(10t)$  [N]) como na direção do movimento ( $10 \cos(100t)$  [N]). Por causa destas perturbações, as camadas limite foram ajustadas em  $\Phi_r = 0,10$  e  $\Phi_k = 0,05$ .

Nas Figuras 6.10 e 6.11, são exibidos os movimentos das juntas no lado dos elos e no lado dos motores. Nota-se que as variáveis de junta no lado dos elos,  $q$  e  $\dot{q}$ , praticamente não são afetadas pelas perturbações, assemelhando-se ao que se obteve no caso nominal. Isto pode ser explicado pela ligação algébrica existente entre as variáveis de junta,  $q$  e  $\dot{q}$ , e as variáveis que descrevem o movimento do EF,  $s_k$  e  $\dot{s}_k$ , que são medidas e controladas. Como era esperado, o controlador proposto produziu erros pequenos na trajetória do EF, como fica claro nos resultados exibidos na Figura 6.12.

As ações produzidas pelo controlador, mostradas na Figura 6.13, evidenciam o esforço despendido para alcançar os objetivos de controle, seja no que se refere ao seguimento das trajetórias, seja quanto à manutenção de uma força normal constante, nas condições severas a que foi submetido o sistema.

A força normal resultante (Figura 6.14) apresenta as mesmas frequências das perturbações, porém com amplitude limitada a 2 [N] em torno do valor desejado de força. O efeito das perturbações é mais evidente sobre o controle da força do que sobre o controle do movimento, devido à melhor compensação das perturbações por parte da parcela derivativa no controle do movimento.

### Caso 4 - Parâmetros Incertos e Perturbações Externas

Neste caso, considera-se a ocorrência simultânea das incertezas paramétricas do Caso 2 e das perturbações do Caso 3. Em função destas condições, foram usados os seguintes valores para as camadas limite:  $\Phi_r = 0,10$  e  $\Phi_k = 0,10$ .

A Figura 6.15 mostra o movimento e os erros de posição e de velocidade do EF. Comparando este caso com os dois anteriores, percebe-se que os efeitos das incertezas paramétricas e das perturbações

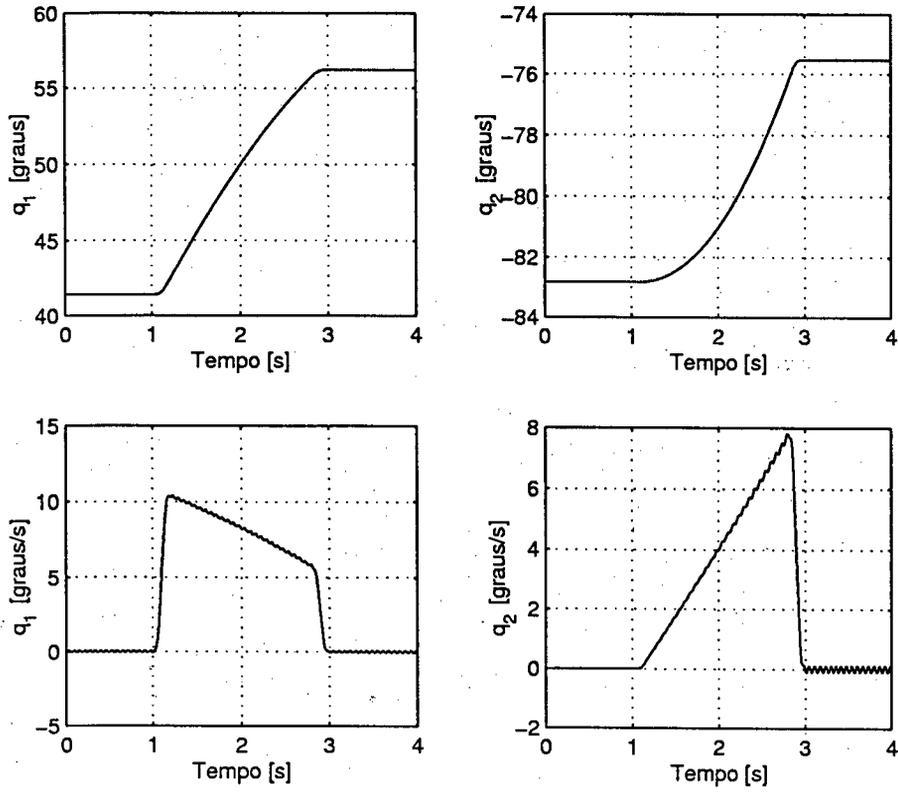


Figura 6.10: Caso 3 - Movimento das juntas, no lado dos elos.

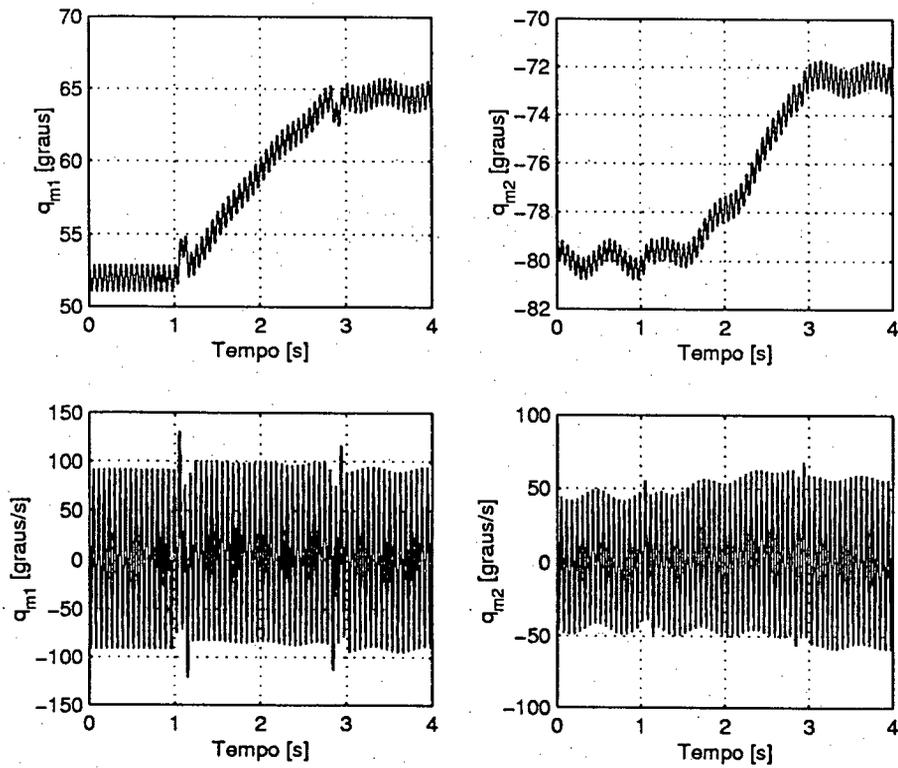


Figura 6.11: Caso 3 - Movimento das juntas, no lado dos motores.

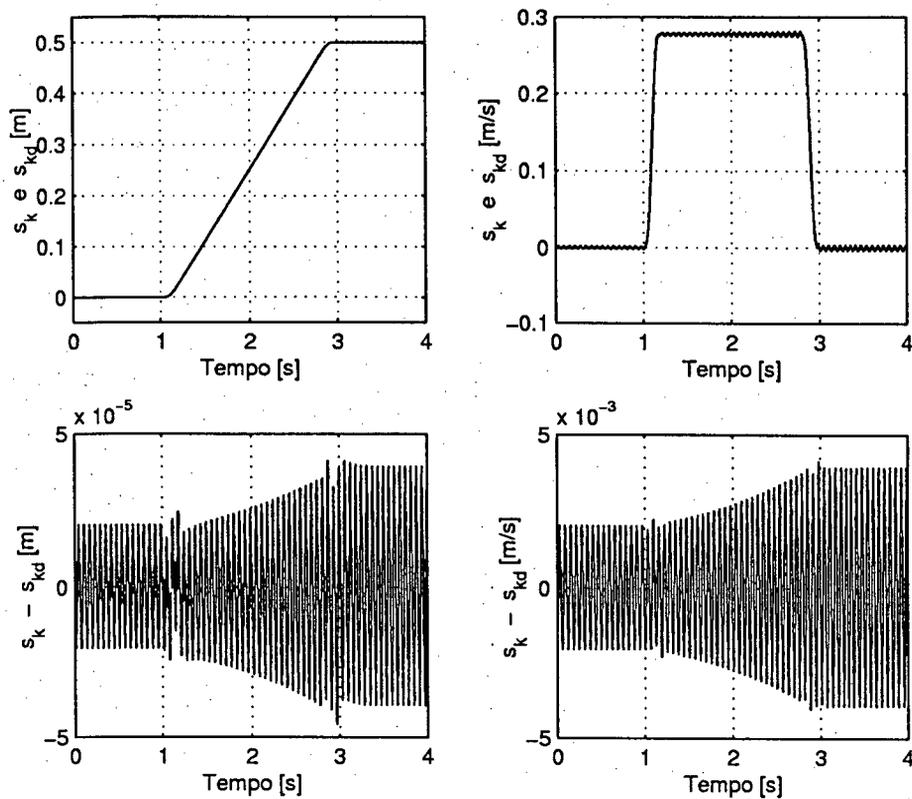


Figura 6.12: Caso 3 - Movimento do EF.

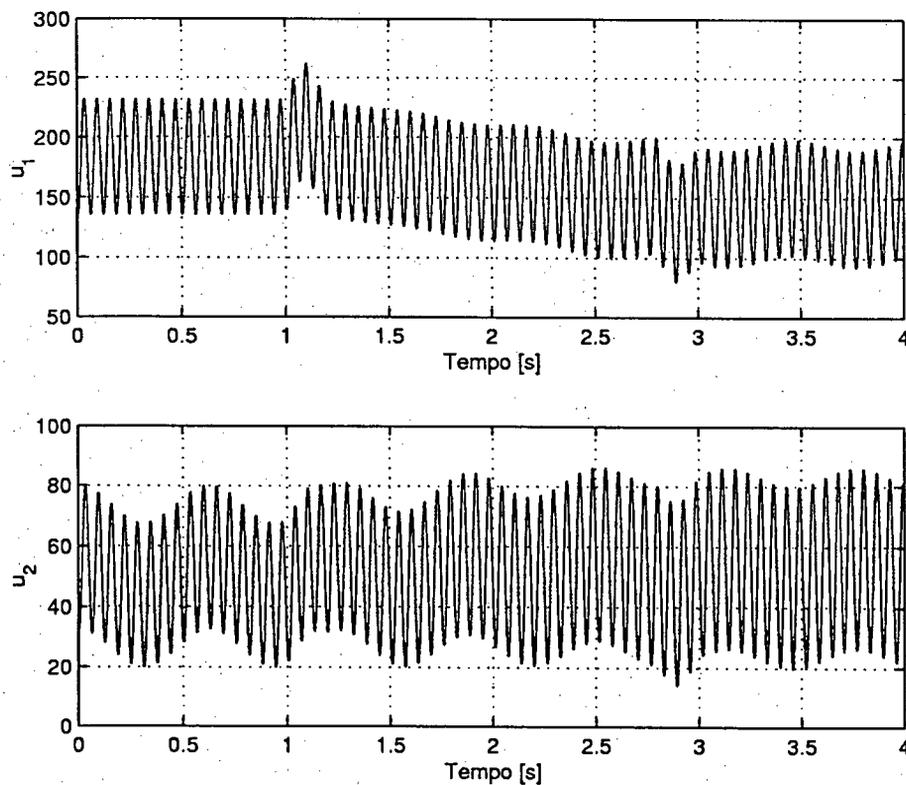


Figura 6.13: Caso 3 - Ações de controle.

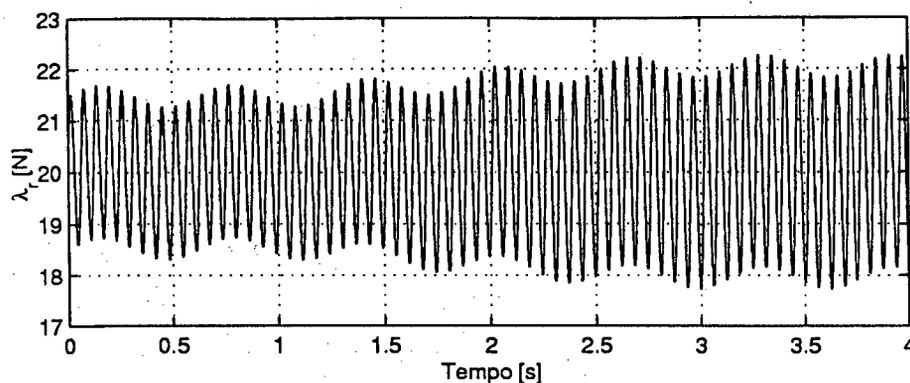


Figura 6.14: Caso 3 - Comportamento da força normal ao plano.

externas somaram-se. Pode-se notar, por exemplo, que os erros de posição apresentados aqui são, aproximadamente, a composição dos produzidos nos casos 2 e 3.

A força aplicada na direção dinâmica (Figura 6.16) exibe o mesmo comportamento oscilatório apresentado no caso anterior. Apesar das perturbações e incertezas paramétricas serem consideráveis, nota-se que em nenhum dos casos houve risco de perda de contato, pois a força oscilou entre 18 [N] e 22 [N], afastando-se apenas 2 [N] do valor desejado.

As ações de controle (Figura 6.17) são muito parecidas com as do caso anterior, porque o efeito das perturbações é bem mais visível do que o efeito das incertezas paramétricas.

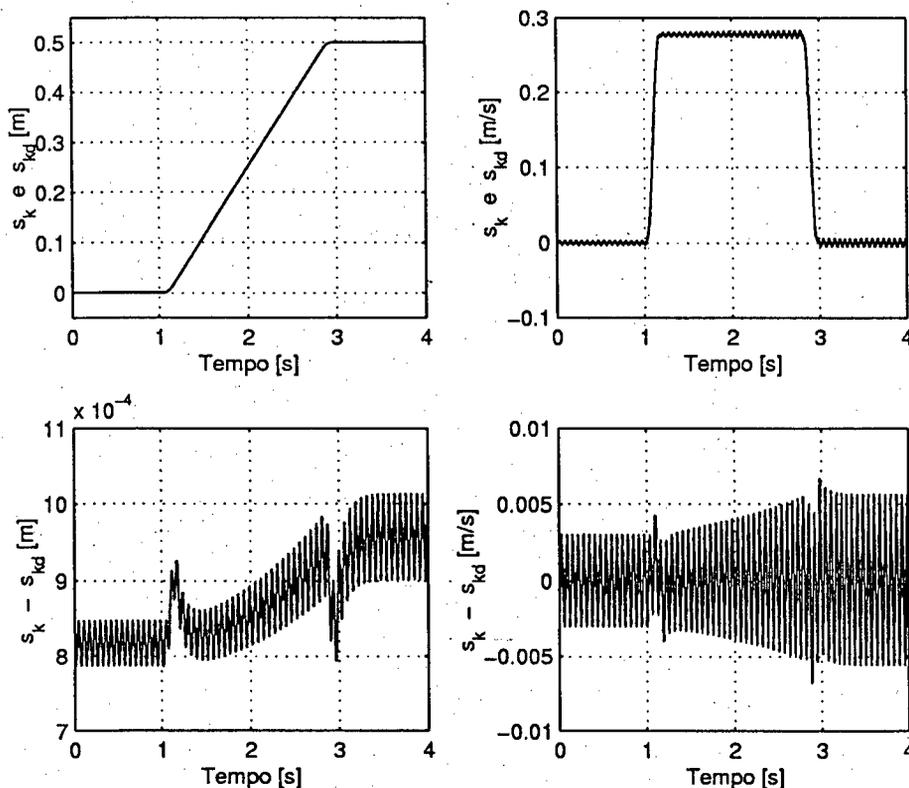


Figura 6.15: Caso 4 - Movimento do EF.

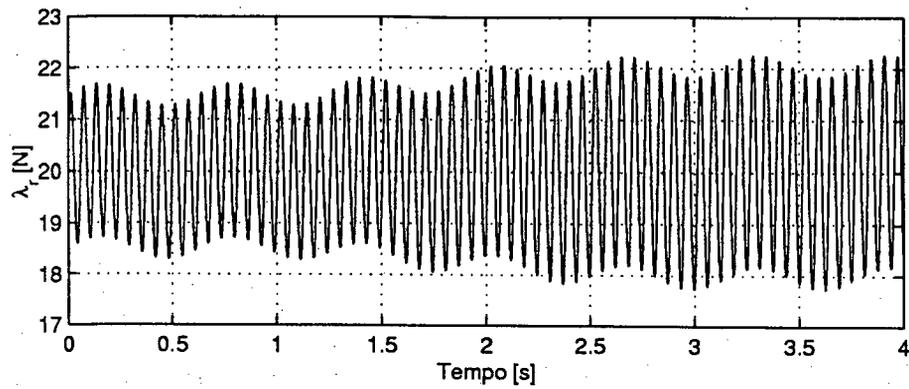


Figura 6.16: Caso 4 - Comportamento da força normal ao plano.

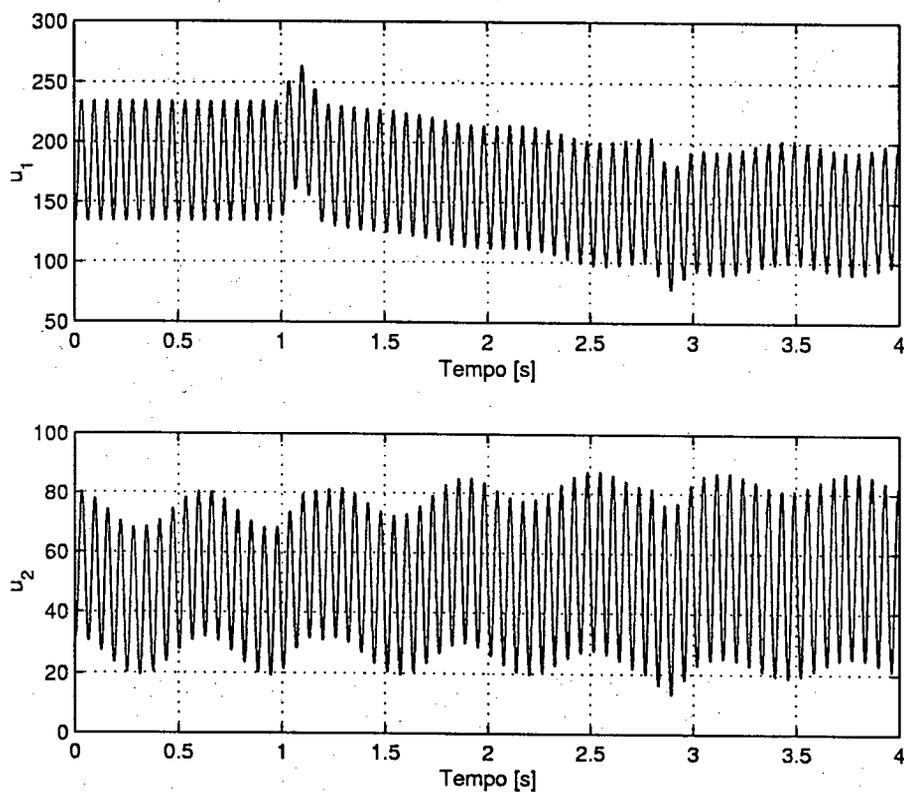


Figura 6.17: Caso 4 - Ações de controle.

## 6.2 Ambientes Dinâmicos

Nesta seção, são exibidos e analisados os resultados do RJF interagindo com o ambiente dinâmico ilustrado na Figura 6.18, que permite o movimento do EF na direção de  $s_k$  e oferece oposição dinâmica na direção de  $s_d$ .

A tarefa a ser realizada, já definida no Capítulo 4, consiste em aplicar uma força na direção dinâmica, enquanto o EF se move na direção cinemática seguindo uma trajetória especificada.

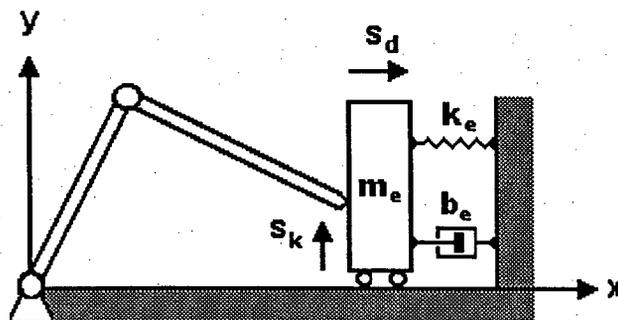


Figura 6.18: Interação de um RJF com um ambiente dinâmico.

### 6.2.1 Parâmetros do Sistema e Ganhos dos Controladores

Os parâmetros do manipulador e os ganhos do controlador são os mesmos da seção anterior. O ambiente é descrito pelos mesmos parâmetros nominais usados no Capítulo 4, a saber:

- Massa:  $m_e = 1$  [Kg];
- Coeficiente de Amortecimento:  $b_e = 10$  [N.s/m];
- Coeficiente de Rigidez:  $k_e = 1000$  [N/m].

### 6.2.2 Resultados das Simulações

Inicialmente, são realizadas simulações em que o EF se move na superfície vertical do corpo, enquanto procura manter em 20 [N] a força aplicada na direção dinâmica, à despeito do movimento nesta direção. As trajetórias no tempo desejadas para o movimento na direção de  $s_k$  são idênticas às exibidas na Figura 6.2. Para esta tarefa, são considerados os seguintes casos:

- Caso 1 - Incidência de incertezas paramétricas;
- Caso 2 - Incidência de perturbações externas.

#### Caso 1: Incidência de Incertezas Paramétricas

Considera-se a incidência de incertezas paramétricas nos seguintes níveis:

- Massas e inércias do robô: parâmetros subestimados em 20% com relação aos verdadeiros;
- Demais parâmetros do robô e do ambiente: subestimados em 50% com relação aos verdadeiros.

Em decorrência destas incertezas, as camadas limite foram ajustadas em  $\Phi_a = \Phi_k = 0,10$ .

Observando a Figura 6.19, nota-se que os erros de posição e de velocidade são pequenos, apesar das incertezas paramétricas serem elevadas. Além disso, verifica-se a existência de um erro de posição de regime permanente como resultado do uso da camada limite.

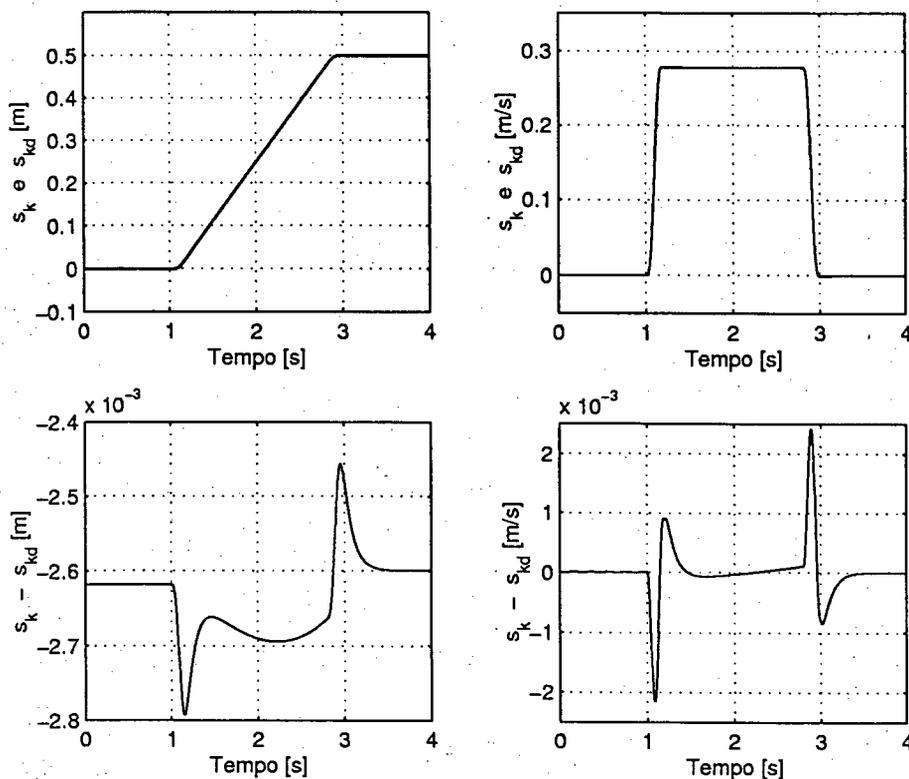


Figura 6.19: Caso 1 - Movimento na direção cinemática.

Da mesma forma, a força aplicada (Figura 6.20) mantém-se durante todo o tempo bem perto de 20 [N] e dos resultados obtidos para o robô rígido. Na Figura 6.21, são mostradas as ações de controle responsáveis por estes resultados.

### Caso 2: Incidência de Perturbações Externas

Supõe-se, agora, que uma força de  $10 \cos(10t)$  [N] perturbe o sistema na direção de aplicação da força, ao mesmo tempo em que uma perturbação de  $10 \cos(100t)$  [N] incida na direção do movimento. Para este caso, as camadas limite são  $\Phi_a = \Phi_k = 0,10$ .

Observando as Figuras 6.22 e 6.23, nota-se que a rejeição das perturbações é boa em ambas as direções. Na direção dinâmica, é notável a presença de uma componente oscilatória com as mesmas frequências das perturbações, porém com amplitude bem reduzida. O seu efeito sobre a força aplicada não ultrapassa 1,25%. As ações de controle responsáveis por estes resultados são mostradas na Figura 6.24.

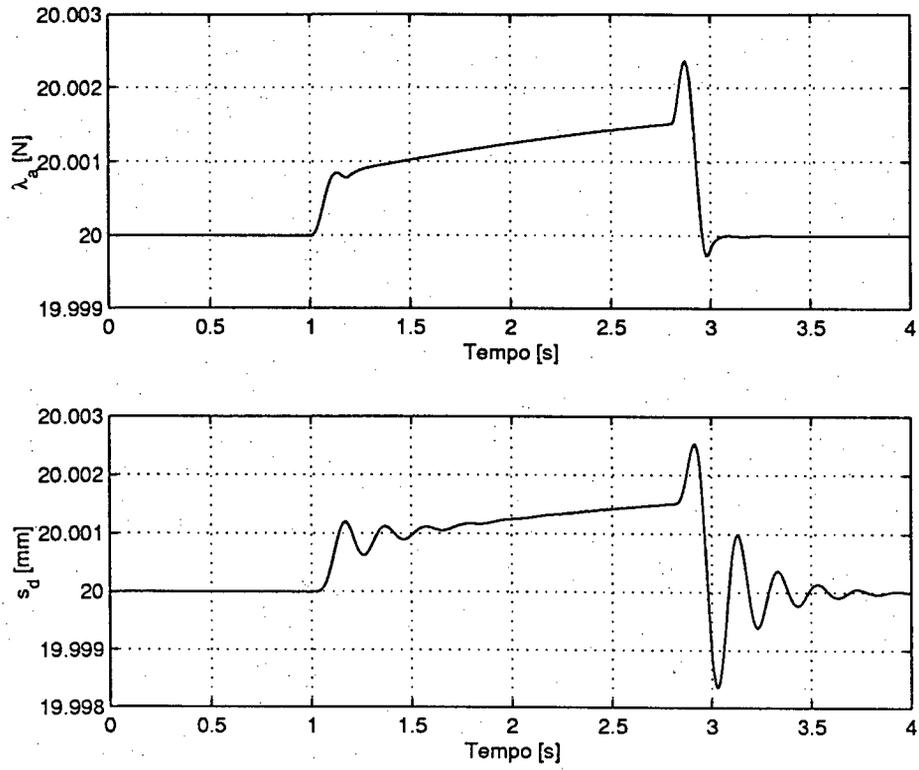


Figura 6.20: Caso 1 - Força e posição na direção dinâmica.

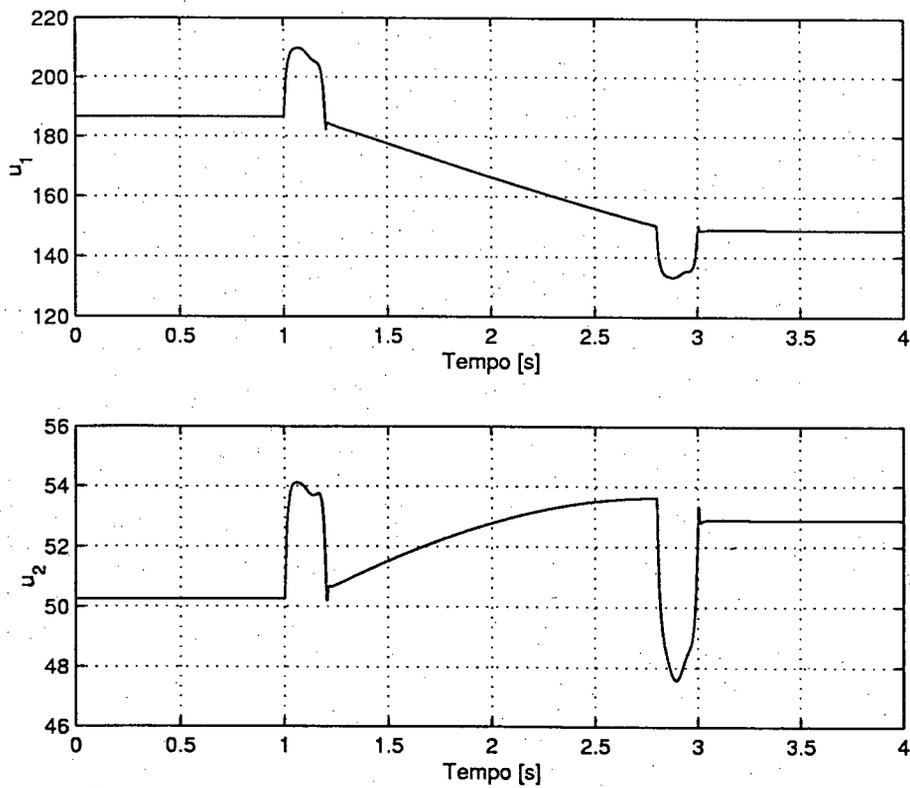


Figura 6.21: Caso 1 - Ações de controle.

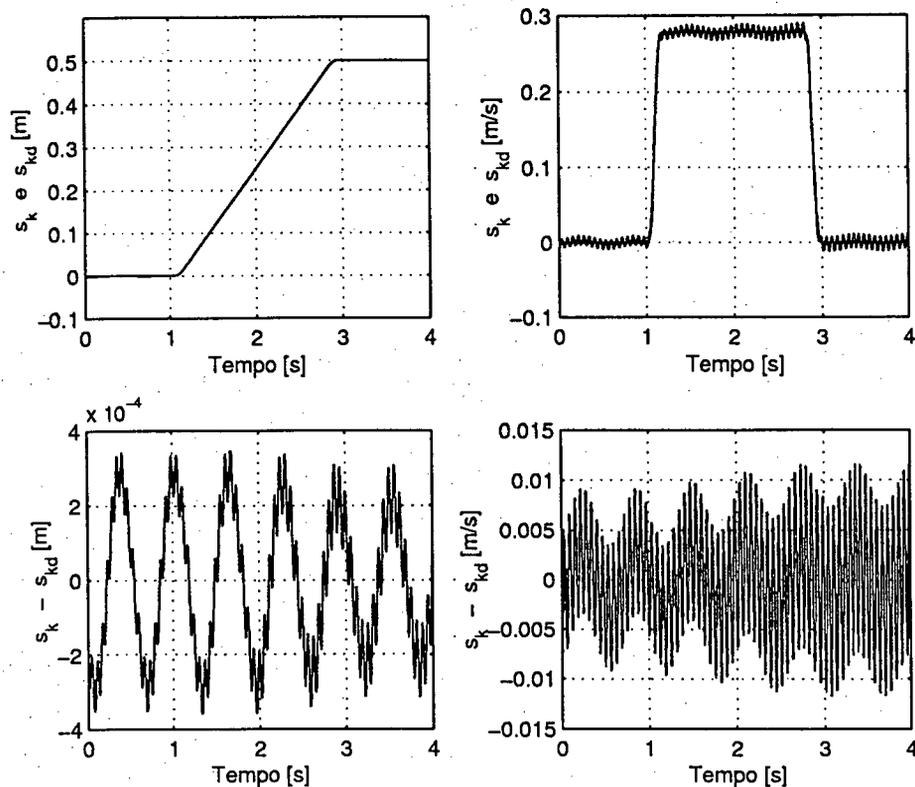


Figura 6.22: Caso 2 - Movimento na direção cinemática.

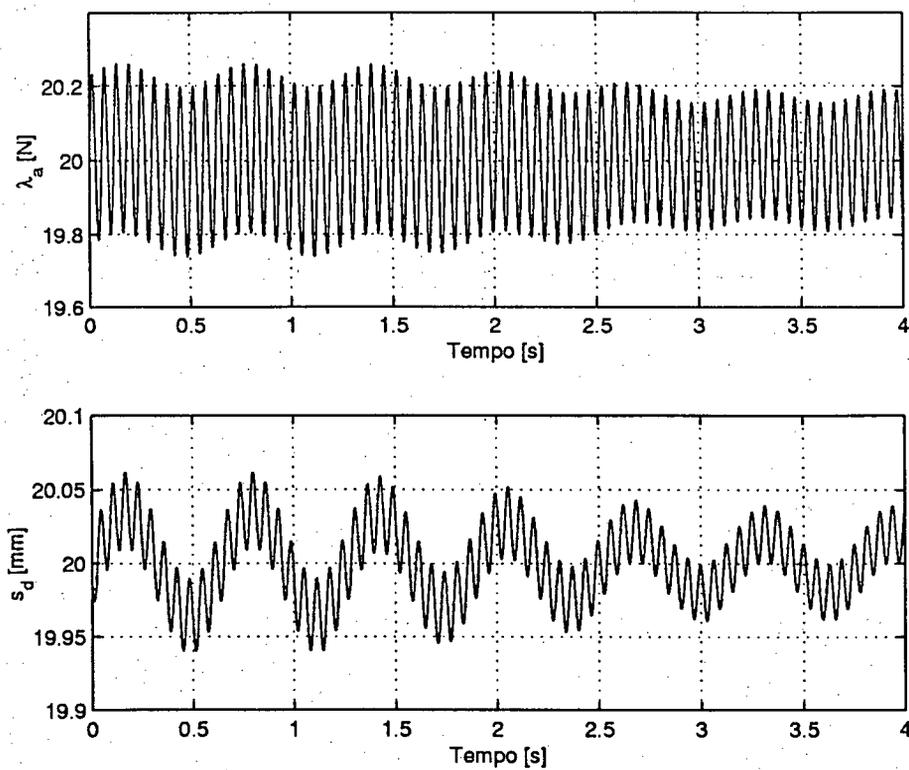


Figura 6.23: Caso 2 - Força e posição na direção dinâmica.

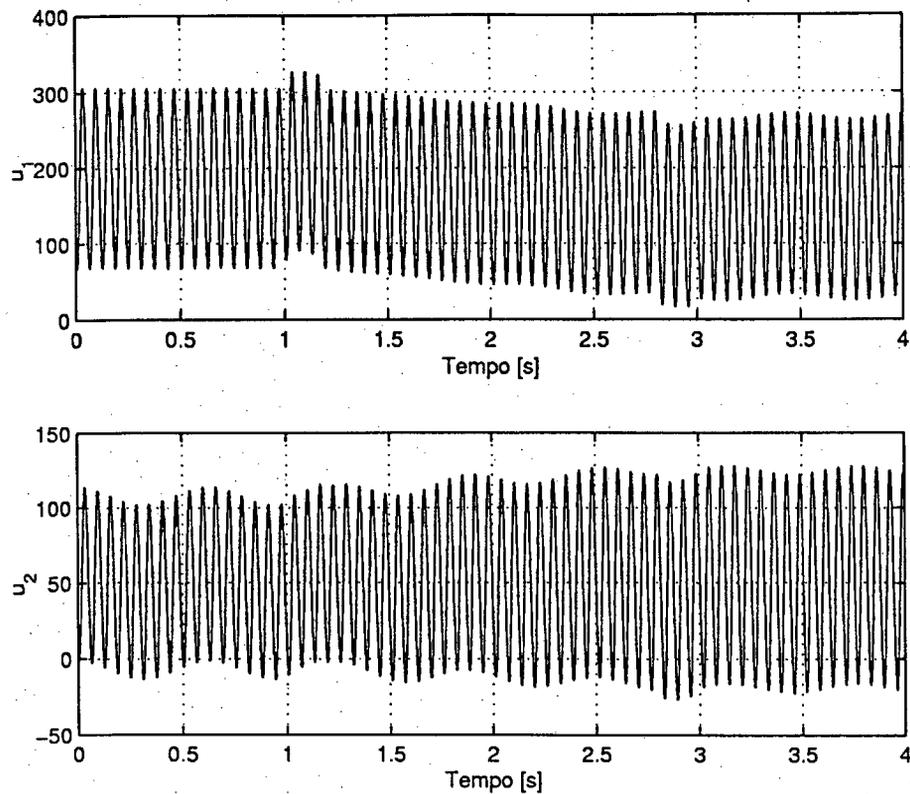


Figura 6.24: Caso 2 - Ações de controle.

Considere-se, agora, que o EF não seja mais comandado a mover-se na direção cinemática, mas somente a aplicar, na direção dinâmica, a força descrita na Figura 6.25. Dois casos são analisados:

- Caso 3 - Parâmetros nominais, sem perturbações;
- Caso 4 - Parâmetros nominais, porém com incidência de perturbações externas.

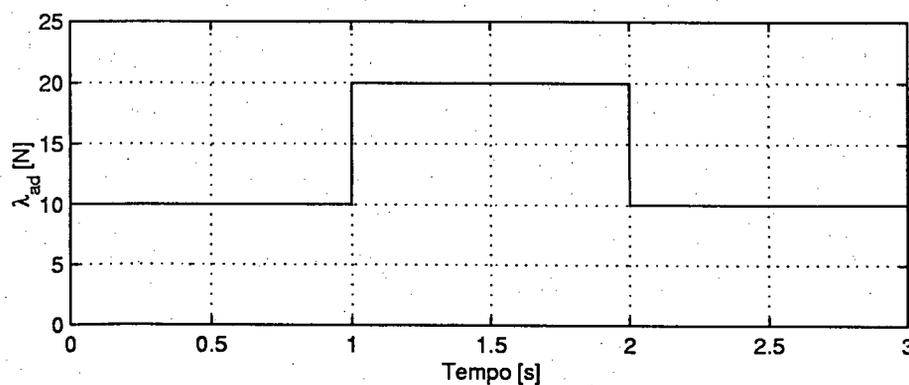


Figura 6.25: Força desejada.

### Caso 3: Caso Nominal

Considera-se que os parâmetros são perfeitamente conhecidos e que não há perturbações externas; por isso, as camadas limite são iguais a 0,05.

As variações bruscas na força produzem um comportamento oscilatório amortecido, especialmente nas variáveis de junta (Figuras 6.26 e 6.27) e na força e movimento na direção dinâmica (Figura 6.28). Apesar disso, consegue-se controlar a força e evitar a perda do contato. No entanto, as ações de controle têm que ser extremamente rápidas e com amplitudes muito elevadas, na casa de  $10^4$ . Isto se deve às baixas constantes de rigidez nas juntas do manipulador. À medida que o robô é enrijecido, as amplitudes das ações de controle devidas ao degrau de força diminuem, até se enquadrarem em limites razoáveis de operação.

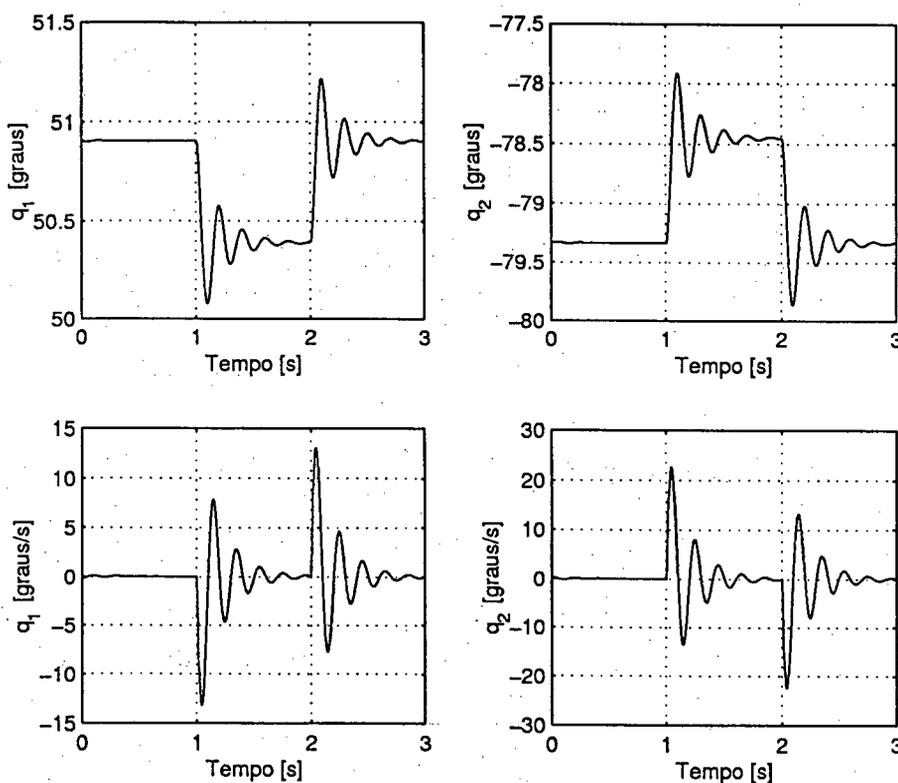


Figura 6.26: Caso 3 - Movimento das juntas, no lado dos elos.

Comparando os resultados na direção dinâmica, obtidos para os robôs rígido (Figura 4.29) e de juntas flexíveis (Figura 6.28), nenhuma diferença visível no comportamento da posição  $s_d$  é observada; entretanto, a força normal  $\lambda_a$  evidencia um comportamento dinâmico de segunda ordem somente para o RJF, no instante em que se aplica o degrau de força.

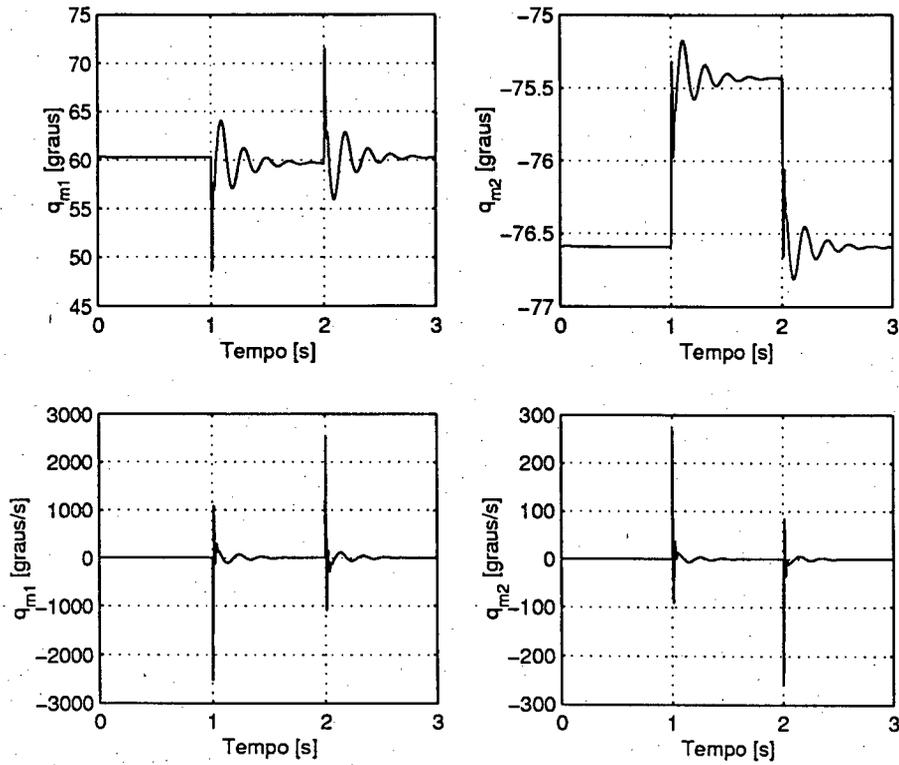


Figura 6.27: Caso 3 - Movimento das juntas, no lado dos motores.

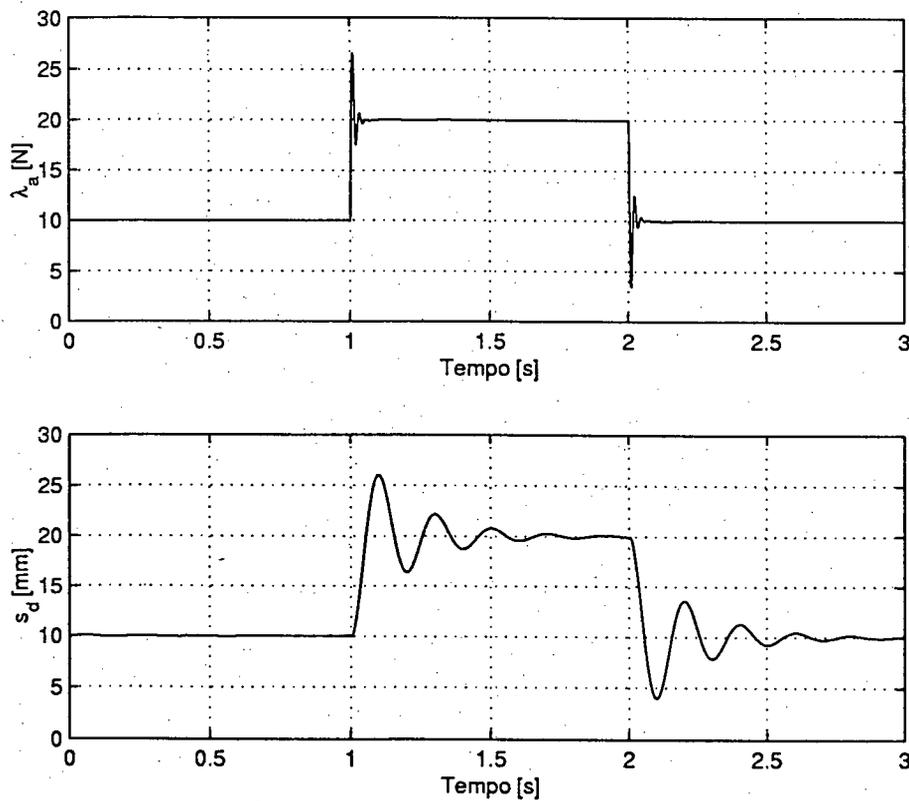


Figura 6.28: Caso 3 - Força e Posição na direção dinâmica.

#### Caso 4: Caso Perturbado

Neste caso, supõe-se que uma força de  $10 \cos(50t)$  [N] perturbe o sistema na direção de aplicação da força, porém, ao invés da força seguir a trajetória especificada na Figura 4.28, ela deve manter-se constante em 20 [N]. As camadas limite são ajustadas para  $\Phi_a = 0,05$  e  $\Phi_k = 0,02$ .

Observando a Figura 6.29, nota-se que o efeito da perturbação na força e na posição, na direção dinâmica, é pequeno, não representando sequer uma sombra de ameaça para a perda do contato. De fato, tanto a amplitude como a frequência da perturbação podem ser maiores, sem que a execução da tarefa seja inviabilizada. É necessário apenas que as camadas limite sejam ajustadas apropriadamente e que os atuadores tenham a capacidade de produzir os valores de torques requeridos diante de perturbações mais graves.

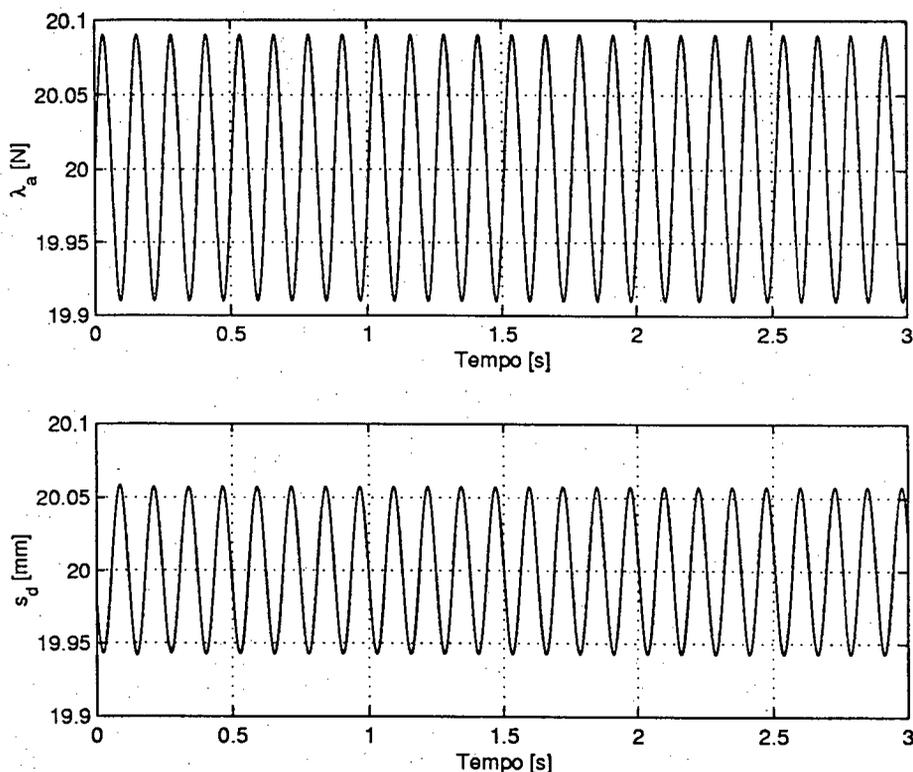


Figura 6.29: Caso 4 - Força e Posição na direção dinâmica.

### 6.3 Considerações Finais

O controlador em cascata, proposto para o controle do RJF interagindo com ambientes passivos, mostrou-se eficaz no que tange à manutenção do contato e da força desejada e seus resultados se aproximaram daqueles obtidos para o robô rígido.

# Capítulo 7

## Conclusão

Neste trabalho, examinou-se a aplicação de um controlador robusto a estrutura variável a robôs manipuladores interagindo com ambientes passivos, situação em que é necessário controlar simultaneamente a força de contato e o movimento do efetuador final. Foram analisados os efeitos da incidência de incertezas paramétricas e de perturbações externas, tanto para os robôs rígidos como para os de juntas flexíveis, associados a três tipos de ambientes: os puramente cinemáticos, os dinâmicos e os flexíveis. Em função disso, diversas contribuições foram produzidas [83], [84], [85], e vislumbrados vários possíveis trabalhos, que podem ajudar a melhor entender o sistema robô-ambiente e a ampliar a aplicação de robôs, incluindo tarefas mais complexas e com maior grau de autonomia.

### 7.1 Principais Contribuições

As principais contribuições deste trabalho relacionam-se à modelagem, ao controle e também ao comportamento de robôs em contato com ambientes passivos, e são identificadas e comentadas a seguir:

- Proposição de um Controlador a Estrutura Variável (CEV), híbrido de força e posição. A partir de um modelo compacto para o sistema robô rígido - ambiente passivo, onde as variáveis a serem controladas são explicitadas, deriva-se um controlador robusto a incertezas paramétricas e perturbações externas, acompanhado de seus critérios de projeto.
- Comparação do CEV com um controlador baseado simplesmente na dinâmica inversa. Para o robô rígido, estes dois controladores são comparados quanto aos seus desempenhos frente às incertezas e perturbações. Diversos resultados de simulação evidenciaram a necessidade de controladores com características de robustez para aplicações em controle de robôs e, em particular, para tratar o controle de força.

- Modelagem de diferentes ambientes, que permitem representar uma grande variedade de tarefas.
- Exame dos efeitos de variados tipos de ambiente. Foram analisados e comparados ambientes cinemáticos, dinâmicos e flexíveis, em condições nominais e perturbadas.
- Estudo da influência das incertezas paramétricas e das perturbações externas. Foram consideradas incertezas nas massas, nas inércias, nos coeficientes de atrito e de elasticidade, além de incidência de perturbações externas, tanto nas direções de movimento do EF, como nas direções de aplicação de força. Não foram tratadas incertezas geométricas, tanto as relacionadas ao robô como as ligadas ao ambiente.
- Influência do atrito no controle de força e posição. Alguns casos envolvendo atrito são apresentados para identificar os seus efeitos.
- Incorporação na modelagem proposta por De Luca e Manes [1] de flexibilidades nas juntas. A modelagem para o sistema robô rígido - ambiente passivo é usada para construir um modelo para o caso do RJF, que seja adequado à derivação de um controle em cascata.
- Exame do controle do RJF para os ambientes cinemático e dinâmico. Diversos resultados de simulação ilustram o desempenho do controlador proposto e o comportamento do sistema RJF-ambiente submetido a condições variadas.

## 7.2 Perspectivas de Trabalhos Futuros

Com base neste trabalho, são sugeridos os seguintes temas, cujas investigações produzirão acréscimos significativos aos resultados já alcançados:

- Experimentação das leis de controle estudadas, permitindo conhecer melhor os seus desempenhos, além de sinalizar a necessidade de eventuais ajustes.
- Estimação das perturbações [86]. Associando ao CEV um mecanismo de estimação dos parâmetros do sistema robô-ambiente ou do total das perturbações, é possível reduzir as camadas limite com o conseqüente aumento da precisão. Como o conhecimento dos parâmetros não é imperativo e sua estimação é computacionalmente muito mais onerosa do que a estimação das perturbações, esta última opção é merecedora de uma investigação para os sistemas e leis de controle aqui estudados.

- Simplificação das leis de controle propostas. O esforço de cálculo na obtenção das entradas de controle pode ser bastante reduzido, evitando operações desnecessárias e desprezando termos pouco significativos, presentes nos torques dinâmicos do robô [87]. Para um robô de seis graus de liberdade, pode-se conseguir uma redução de 80 a 90 % nos cálculos, sem comprometer seriamente os resultados. Os erros na representação do sistema são facilmente assimilados por um controlador robusto do tipo estrutura variável.
- Inclusão da etapa de estabelecimento do contato do EF com o ambiente. Neste trabalho, supôs-se que o contato já estava estabelecido. Apesar de diversas pesquisas [88], [74], [89], [90], há espaço para novas investigações, que considerem variados tipos de ambientes, incertezas, robôs rígidos e de juntas flexíveis, e o uso de controladores mais avançados.
- Estudo do uso de *splines* para representar geometrias de ambientes mais complexos. Este recurso permite generalizar a representação das formas dos ambientes, além de torná-la mais barata [91].
- Ampliação dos modelos para incluir incertezas de origem geométrica no robô e, especialmente, no ambiente. Uma possível solução consiste em estimar a curvatura da superfície de contato, usando medidas de aceleração, tornando o robô mais autônomo para executar tarefas em ambientes com geometria desconhecida [6].
- Desenvolvimento de controladores, que visem à superação dos efeitos danosos do atrito estático nas baixas velocidades.
- Aplicação da teoria de controle robusto aos modelos propostos para o sistema robô - ambiente passivo.
- Inclusão de dinâmicas não modeladas neste trabalho, como as dos atuadores e as dos sensores. Estudo dos seus efeitos nos critérios de projeto do CEV e e na estabilidade do sistema.
- Estudo e implementação de controladores em tempo discreto [92], [93].

## Apêndice A

# Modelo das Forças de Atrito

Para robôs manipuladores bem projetados, em especial aqueles com acionamento direto nos eixos, os coeficientes de atrito são pequenos. No entanto, as forças de atrito existem, apresentam características fortemente não lineares, são difíceis de modelar com precisão e podem ter um efeito significativo sobre a dinâmica do robô, causando dificuldades para o seguimento de trajetória e para o controle de força.

Pode-se classificar o atrito em três tipos fundamentais: o viscoso, o dinâmico e o estático ou seco. Os efeitos do atrito são modelados como uma força generalizada aplicada às juntas do manipulador, que se opõe ao movimento relativo entre os elos. No caso de robôs com acionamento direto, o efeito do atrito é local, não havendo qualquer tipo de acoplamento com outras juntas.

O atrito viscoso, ilustrado na Figura A.1, é o mais simples de ser modelado e o que menos causa problemas no controle de robôs, principalmente porque a relação entre a força de atrito viscoso  $b_k(\dot{q}_k)$  e a velocidade  $\dot{q}_k$  é linear, isto é:

$$b_k(\dot{q}_k) = b_k^v \dot{q}_k \quad 1 \leq k \leq n \quad (\text{A.1})$$

onde  $b_k^v$  é o coeficiente de atrito viscoso na junta  $k$  e  $n$  é o número de juntas do robô.

Se o atrito dinâmico for adicionado ao viscoso, o modelo não é mais linear e passa a ser expresso matematicamente por:

$$b_k(\dot{q}_k) = b_k^v \dot{q}_k + \text{sgn}(\dot{q}_k) \left[ b_k^d - b_k^d e^{-\left(\frac{\dot{q}_k}{\epsilon}\right)^2} \right] \quad 1 \leq k \leq n \quad (\text{A.2})$$

onde  $\text{sgn}(\cdot)$  designa a função sinal,  $b_k^d$  é o coeficiente de atrito dinâmico na junta  $k$  e  $\epsilon$  é um parâmetro positivo de pequena amplitude. Como pode ser notado no modelo matemático (A.2) ou no gráfico da Figura A.2, o efeito do atrito dinâmico é maior para velocidades a partir de um limiar, quando o termo

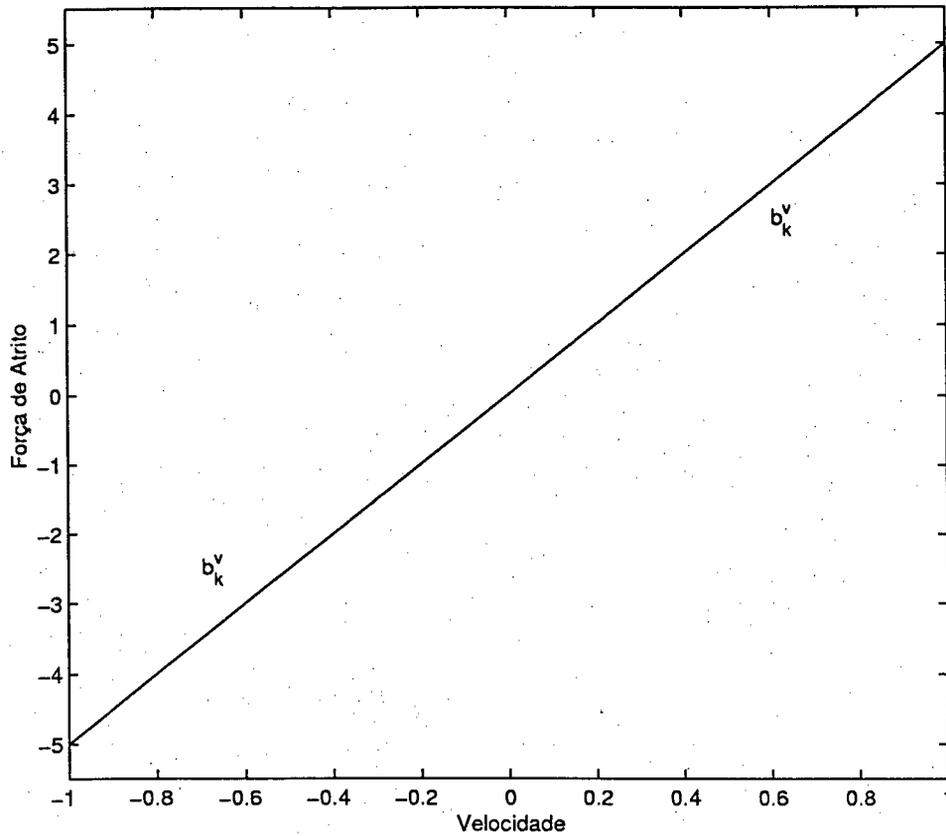


Figura A.1: Força decorrente do atrito viscoso.

$e^{-\left(\frac{\dot{q}_k}{\epsilon}\right)^2}$  se torna desprezível.

Incluindo também o atrito seco, o modelo matemático das forças de atrito pode ser finalmente escrito como:

$$b_k(\dot{q}_k) = b_k^v \dot{q}_k + \text{sgn}(\dot{q}_k) \left[ b_k^d + (b_k^s - b_k^d) e^{-\left(\frac{\dot{q}_k}{\epsilon}\right)^2} \right] \quad 1 \leq k \leq n \quad (\text{A.3})$$

onde  $b_k^s$  é coeficiente de atrito estático ou de Coulomb. Para se ter uma idéia do comportamento destas forças de atrito, o modelo expresso por (A.3) é representado também de um modo gráfico na Figura A.3. Observe-se que à medida que a velocidade da junta  $k$  se aproxima de zero, a força de atrito se aproxima de  $\pm b_k^s$ . Portanto,  $b_k^s$  pode ser interpretado como o torque ou a força requerida para superar o atrito quando o movimento da junta  $k$  é iniciado. Está claro também que o atrito estático introduz uma descontinuidade das forças de atrito, o que implica numa dificuldade adicional para a tarefa de controlar o robô.

Apesar da sua complexidade, o modelo descrito pela equação (A.3) ainda não é uma representação precisa das forças de atrito. Para se dispor de um modelo um pouco mais acurado, é necessário levar em conta que as forças de atrito podem depender também da posição e não somente da velocidade.

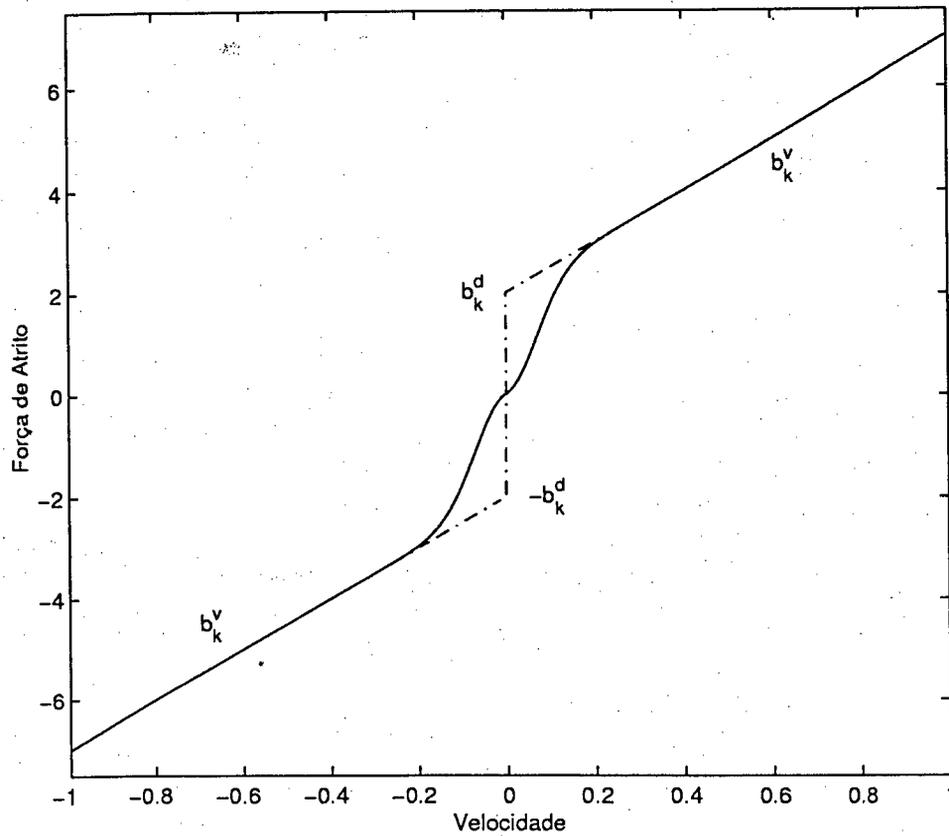


Figura A.2: Força decorrente dos atritos viscoso e dinâmico.

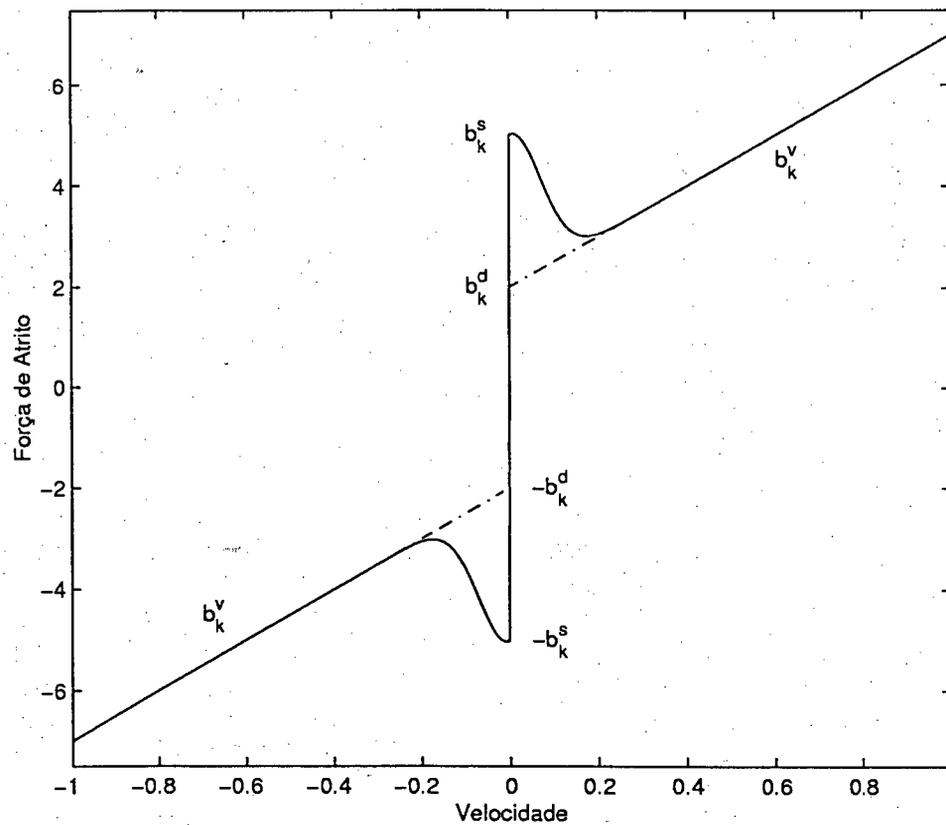


Figura A.3: Força decorrente dos atritos viscoso, dinâmico e estático.

Desta forma, no lugar de  $b(\dot{q})$ , ter-se-ia  $b(q, \dot{q})$ .

Como no controle de força as velocidades são moderadas, o efeito do atrito viscoso não é muito relevante. Por isso, uma maneira simples para a compensação das forças de atrito é contrabalançar pelo menos o atrito seco [94], isto é:

$$\hat{b}_k(\dot{q}_k) = \hat{b}_k^0 \operatorname{sgn}(\dot{q}_k) \quad 1 \leq k \leq n \quad (\text{A.4})$$

onde os termos na forma  $\hat{\bullet}$  referem-se a grandezas estimadas. Entretanto, deve-se ressaltar que uma técnica de compensação baseada num modelo mais completo de atrito melhora o desempenho do controlador [95]; por isso, nos casos em que os três tipos de atrito estavam presentes, preferiu-se compensá-los de acordo com o modelo apresentado aqui.

## Apêndice B

# Equação de Bernoulli

A desigualdade (3.26) é reescrita abaixo, mudando variável  $V$  para  $x$  e considerando a situação limite, que é a igualdade:

$$\frac{dx}{dt} + 2kx + w\sqrt{2x} = 0 \quad (\text{B.1})$$

onde  $x \geq 0$ , e as constantes  $k > 0$  e  $w > 0$ . Comparando com a equação de Bernoulli, da forma

$$A\frac{dx}{dt} + Bx + Cx^\alpha = 0 \quad (\text{B.2})$$

com  $A$ ,  $B$  e  $C$  podendo ser funções do tempo, logo se percebe que (B.1) é um caso particular de (B.2) com  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

A solução de uma equação do tipo (B.2) é obtida por meio da seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} y &= x^{1-\alpha} \\ &= x^{1-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

que resulta imediatamente em que  $x = y^2$  e  $dx = 2ydy$ . Com isso, (B.1) pode ser escrita como:

$$2y\frac{dy}{dt} + 2ky^2 + w\sqrt{2}y = 0 \quad (\text{B.4})$$

que, dividida por  $2y$ , resulta na seguinte equação diferencial linear com coeficientes constantes:

$$\frac{dy}{dt} + ky = -\frac{w}{\sqrt{2}} \quad (\text{B.5})$$

cuja solução é quase imediata.

Supondo  $y_0 = y(0)$  e integrando esta última equação, obtém-se:

$$y = -\frac{w}{\sqrt{2k}} + \left(y_0 + \frac{w}{\sqrt{2k}}\right) e^{-kt}. \quad (\text{B.6})$$

Como  $x = y^2$ ,

$$x = \left(-\frac{w}{\sqrt{2k}} + \left(\sqrt{x_0} + \frac{w}{\sqrt{2k}}\right) e^{-kt}\right)^2. \quad (\text{B.7})$$

O tempo decorrido desde a condição inicial em  $x = x_0$  até alcançar  $x = 0$  é chamado o tempo de alcance  $t_a$ , que é dado por:

$$t_a = \frac{1}{k} \ln \left(1 + \frac{k}{w} \sqrt{2x_0}\right) \quad (\text{B.8})$$

um valor que pode ser projetado, escolhendo-se convenientemente  $k$  e  $w$ .

Nota-se que, após  $x$  alcançar o zero, cresce até um valor de regime  $x = \frac{w^2}{2k}$ . Isto acontece porque o valor de  $y$  (ou  $\sqrt{2V}$  no problema original) não foi restrito a ser maior do que zero (o que é sempre verdade no problema original). Além disso, deseja-se que  $\dot{x} \leq 0$  (no problema original  $\dot{V} \leq 0$ ). Ao satisfazer estas restrições, a solução interessa ao problema em questão é:

$$x = \begin{cases} \left(-\frac{w}{\sqrt{2k}} + \left(\sqrt{x_0} + \frac{w}{\sqrt{2k}}\right) e^{-kt}\right)^2 & \text{se } t \leq t_a \\ 0 & \text{se } t > t_a. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

## Apêndice C

# Modelo do Robô Cotovelar Rígido

O objetivo deste apêndice é apresentar as equações utilizadas nas simulações, envolvendo o robô de dois graus de liberdade, com duas juntas de revolução, cujo desenho esquemático é mostrado na Figura C.1.

Um robô de dois graus de liberdade é usado nas simulações, ao invés de um robô industrial de seis graus de liberdade, porque o seu modelo é mais simples, demandando menos esforço computacional e de análise, porém é suficientemente representativo para que se possa concluir a respeito do desempenho dos controladores propostos. Estes motivos têm levado diversos pesquisadores a trabalhar com robôs mais simples, especialmente o de dois graus de liberdade [58], [65], [45].

### C.1 Modelo Cinemático

Inicialmente, são apresentadas as equações da cinemática deste manipulador. Considerando os parâmetros e os eixos coordenados mostrados na Figura C.1, pode-se exprimir a posição cartesiana  $p$  do efetuador final como função das variáveis de junta  $q = (q_1, q_2)$  na forma:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Derivando esta equação em relação ao tempo, obtém-se:

$$v = J(q)\dot{q} \quad (\text{C.2})$$

onde

$$v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

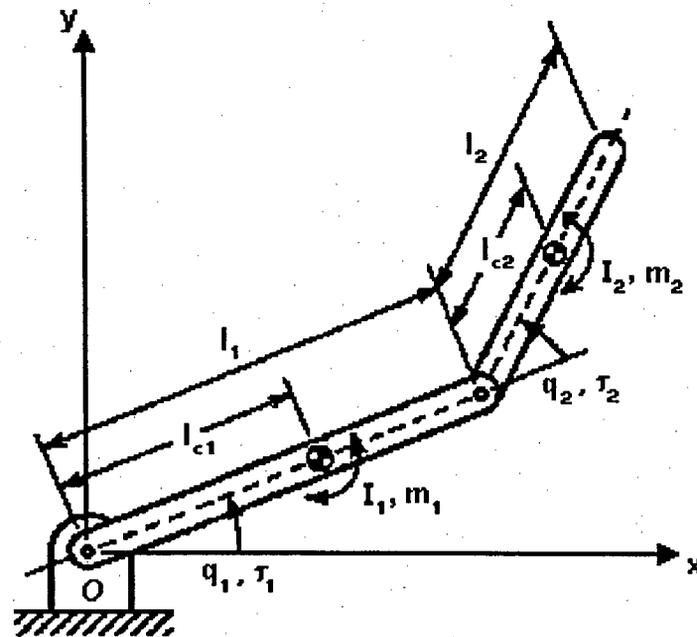


Figura C.1: Robô rígido de dois graus de liberdade.

é a velocidade do EF,

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

é a matriz jacobiana e

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

é a velocidade das juntas do manipulador.

A questão da singularidade é facilmente identificada, neste caso, ao se obter a cinemática inversa, isto é, ao exprimir-se a velocidade das juntas em função da velocidade do EF:

$$\dot{q} = J^{-1}(q) v \quad (\text{C.6})$$

em que

$$J^{-1}(q) = \frac{1}{\det(J(q))} \begin{bmatrix} l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos(q_1) - l_2 \cos(q_1 + q_2) & -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

onde

$$\det(J(q)) = \text{sen}(q_2) \quad (\text{C.8})$$

Se  $q_2 = 0$ , a matriz jacobiana não admite inversa, não sendo possível obter  $\dot{q}$  em função de  $v$ . Caso o robô esteja operando em configurações muito próximas de  $(q_1, q_2 = 0)$ , um valor normal de  $v$  pode implicar num valor exageradamente elevado para  $\dot{q}$ , levando os atuadores a produzir ações também exageradas. Para evitar os problemas decorrentes da singularidade da matriz  $J(q)$ , o EF deve manter-se a uma distância segura da fronteira da sua região de operação, neste caso, da configuração  $(q_1, q_2 = 0)$ .

## C.2 Modelo Dinâmico

Nesta seção, é detalhado o modelo dinâmico para o robô de 2 G.L. mostrado na Figura C.1, cujos parâmetros são considerados conhecidos.

A equação dinâmica de um manipulador com  $n$  graus de liberdade é dada pela equação

$$M_r(q)\ddot{q} + c_r(q, \dot{q}) + g_r(q) = \tau + J^T(q)F \quad (\text{C.9})$$

cujos termos já foram definidos no Capítulo 2. Para a junta  $k$ , é escrita na forma

$$\sum_j m_{r,kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k = \tau_k + f_k, \quad k = 1..n \quad (\text{C.10})$$

onde  $m_{kj}$  é  $kj$ -ésimo elemento da matriz de inércias  $M_r(q)$ ,  $c_{ijk}$  é o  $ijk$ -ésimo símbolo de Christoffel, e  $g_k$ ,  $\tau_k$  e  $f_k$  são os  $k$ -ésimos elementos dos vetores  $g_r(q)$ ,  $\tau$  e  $J^T(q)F$ , respectivamente. Os símbolos de Christoffel são definidos pela seguinte expressão:

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{r,kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{r,ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{r,ij}}{\partial q_k} \right) \quad (\text{C.11})$$

Para o robô de 2 G.L., basta variar os índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  de 1 até 2. Portanto, para  $k = 1$ , obtém-se a primeira equação:

$$m_{r,11}\ddot{q}_1 + m_{r,12}\ddot{q}_2 + c_{111}\dot{q}_1^2 + c_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{211}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{221}\dot{q}_2^2 + g_1 = \tau_1 + f_1 \quad (\text{C.12})$$

e para  $k = 2$ , a segunda:

$$m_{r,21}\ddot{q}_1 + m_{r,22}\ddot{q}_2 + c_{112}\dot{q}_1^2 + c_{122}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{212}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{222}\dot{q}_2^2 + g_2 = \tau_2 + f_2 \quad (\text{C.13})$$

onde os termos da matriz de inércia são dados por:

$$\begin{aligned}
 m_{r,11} &= m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 \\
 m_{r,12} &= m_{21} \\
 &= m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 \\
 m_{r,22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

os símbolos de Christoffel por:

$$\begin{aligned}
 c_{111} &= \frac{1}{2} \frac{\partial m_{r,11}}{\partial q_1} \\
 &= 0 \\
 c_{121} &= \frac{1}{2} \frac{\partial m_{r,11}}{\partial q_2} \\
 &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \\
 &= c_{211} = c_r \\
 c_{221} &= \frac{1}{2} \frac{\partial m_{r,12}}{\partial q_2} \\
 &= c_r \\
 c_{112} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial m_{r,11}}{\partial q_2} \\
 &= -c_r \\
 c_{122} &= \frac{1}{2} \frac{\partial m_{r,22}}{\partial q_1} \\
 &= c_{212} = 0 \\
 c_{222} &= \frac{1}{2} \frac{\partial m_{r,22}}{\partial q_2} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

e os termos gravitacionais por:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos(q_1) + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \\
 g_2 &= m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade. A partir destes resultados, as equações (C.12) e (C.13) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
 m_{r,11} \ddot{q}_1 + m_{r,12} \ddot{q}_2 + 2c_r \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_r \dot{q}_2^2 + g_1 &= \tau_1 + f_1 \\
 m_{r,21} \ddot{q}_1 + m_{r,22} \ddot{q}_2 - c_r \dot{q}_1^2 + g_2 &= \tau_2 + f_2
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

Os termos centrífugos e de Coriolis podem ser associados para formar uma matriz de coeficientes  $C_r(q, \dot{q})$  do vetor  $\dot{q}$  da velocidade das juntas, cujos elementos atendem à seguinte regra:

$$C_{r,kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk} \dot{q}_i \quad (\text{C.18})$$

Com isso, a equação dinâmica do robô pode ser expressa também na forma usualmente encontrada na literatura:

$$M_r(q)\ddot{q} + C_r(q, \dot{q})\dot{q} + g_r(q) = \tau + J^T(q)F \quad (\text{C.19})$$

Para o robô de 2 G.L., são produzidos os termos

$$\begin{aligned} C_{r,11} &= c_{111}\dot{q}_1 + c_{211}\dot{q}_2 = c_r\dot{q}_2 \\ C_{r,12} &= c_{121}\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2 = c_r(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ C_{r,21} &= c_{112}\dot{q}_1 + c_{212}\dot{q}_2 = -c_r\dot{q}_1 \\ C_{r,22} &= c_{122}\dot{q}_1 + c_{222}\dot{q}_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

que compõem a matriz

$$C_r(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} c_r\dot{q}_2 & c_r(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -c_r\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.21})$$

### C.3 Comentários

Alguns autores, visando simplificar o modelo dinâmico e reduzir os cálculos, consideram as massas dos elos concentradas nas suas extremidades, o que causa algumas alterações na formação da matriz de inércia. Preferiu-se, neste trabalho, utilizar o modelo completo, que acrescenta algumas multiplicações, porém é mais preciso.

# Referências Bibliográficas

- [1] De Luca, A., Manes, C. Modeling of robots in contact with a dynamic environment. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1994. volume 10, nº 4, págs. 542–548.
- [2] Whitney, D. E. Historical perspective and state of the art in robot force control. *International Journal of Robotics Research*, 1987. volume 6, nº 1, págs. 3–14.
- [3] Spong, M. W. Motion control of robot manipulators. In: *Handbook of Control*, volume 144(5). CRC Press, W. Levine, editor, 1996 págs. 1339–1350.
- [4] Gorinevsky, D. M., Formalsky, A. M., Schneider, A. Yu. *Force Control of Robotics Systems*. CRC Press, Inc., 1997.
- [5] Whitcomb, L. L., Arimoto, S., Naniwa, T., *et al.*. Adaptive model-based hybrid control of geometrically constrained robot arms. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1997. volume 13, nº 1, págs. 105–116.
- [6] Bruyninckx, H. *Kinematic Models for Robot Compliant Motion with Identification of Uncertainties*. Ph.D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Bélgica, 1995.
- [7] Broome, D. R., Wang, Q., Greig, A. R. Adaptive compliant control for an inspection robot system. In: *IEE Proceedings-D*, volume 140(3). 1993 págs. 191–197.
- [8] De Silva, C. W., Gu, J. H. On-line sensing and modeling of mechanical impedance in robotic food processing. In: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. 1995 págs. 1693–1698.
- [9] Zuhars, J., Hsia, T. C. Nonhomogeneous material milling using a robot manipulator with force controlled velocity. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1995 págs. 1461–1467.

- [10] Jinno, M., Ozaki, F., Yoshimi, T., *et al.*. Development of a force controlled robot for grinding, chamfering and polishing. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1995 págs. 1455–1460.
- [11] Whitney, D. E. Force feedback control of manipulator fine motions. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1977. volume 99, nº 2, págs. 91–97.
- [12] Raibert, M. H., Craig, J. J. Hybrid position/force control of manipulators. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1981. volume 102, nº 3, págs. 126–133.
- [13] Craig, J. J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1986.
- [14] Mason, M. T. Compliance and force control for computer controlled manipulators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1981. volume 11, nº 6, págs. 418–432.
- [15] Hogan, N. Impedance control: An approach to manipulation: Part i - theory, part ii - implementation, part iii - applications. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1985. volume 107, nº 3, págs. 1–24.
- [16] Kazerooni, H., Sheridan, T. B., Houpt, P. K. Robust compliant motion for manipulators, part i: The fundamental concepts of compliant motion. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1986. volume 2, nº 2, págs. 83–92.
- [17] Salisbury, J. K. Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates. In: *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*. 1980 págs. 95–100.
- [18] Chiaverini, S., Sciavicco, L. The parallel approach to force/position control of robotic manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1993. volume 9, nº 4, págs. 361–373.
- [19] Volpe, R. A. *Real and Artificial Forces in the Control of Manipulators: Theory and Experiments*. Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, 1990.
- [20] Manes, C. *Modelli di Interazione Robot-Ambiente e Controllo Ibrido di Posizione e Forza*. Ph.D. Thesis, Università Degli Studi Di Roma, Roma, 1992.
- [21] Canudas de Wit, C., Siciliano, B., Bastin (Eds), G. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, 1996.

- [22] De Schutter, J., Bruyninckx, H., Zhu, W-H., *et al.*. Force control: A bird's eye view. In: *IEEE CSS/RAS International Workshop on Control Problems in Robotics and Automation: Future Directions*. 1997 págs. 1–17.
- [23] Anderson, R. J., Spong, M. W. Hybrid impedance control of robotic manipulators. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1988. volume 4, nº 5, págs. 549–556.
- [24] Yoshikawa, T. Dynamic hybrid position/force control of robot manipulators - description of hand constraints and calculation of joint driving force. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1987. volume 3, nº 5, págs. 386–392.
- [25] McClamroch, N. H., Wang, D. Feedback stabilization and tracking of constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988. volume 33, nº 5, págs. 419–426.
- [26] Kankaanranta, R. K., Koivo, H. N. Dynamics and simulation of compliant motion of a manipulator. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1988. volume 4, págs. 163–173.
- [27] Eppinger, S. D., Seering, W. P. Introduction to dynamic models for robot force control. *IEEE Control Systems Magazine*, 1987. págs. 48–52.
- [28] Luo, Z.-W., Ito, M. Control design of robot for compliant manipulation on dynamic environments. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1993. volume 9, nº 3, págs. 286–296.
- [29] Good, M. C., Sweet, L. M., Strobel, K. L. Dynamic models for control system design of integrated robot and drive systems. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1985. volume 107, págs. 53–59.
- [30] Tomei, P. A simple pd controller for robots with elastic joints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991. volume 36, nº 10, págs. 1208–1213.
- [31] Readman, M. C. *Flexible Joint Robots*. CRC Press, Inc., 1994.
- [32] De Luca, A., Isidori, A., Nicoló, F. Control of robot arm with elastic joints via nonlinear dynamic feedback. In: *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*. 1985 págs. 1671–1679.
- [33] De Luca, A., Lucibello, P. A general algorithm for dynamic feedback linearization of robots with elastic joints. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1998 págs. 504–510.
- [34] Kokotovic, P. V., O'Malley Jr., R. E., Sannuti, P. Singular perturbations and order reduction in control theory - an overview. *Automática*, 1976. volume 12, págs. 123–132.

- [35] Saksena, V. R., O'Reilly, J., Kokotovic, P. V. Singular perturbations and time-scale methods in control theory: Survey 1976-1983. *Automática*, 1984. volume 20, nº 3, págs. 273-293.
- [36] Spong, M. W. On the force control problem for flexible joint manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989. volume 34, nº 1, págs. 107-111.
- [37] —. Feedback linearization control of flexible joint robot manipulators. In: *Robexs Symposium*. 1987 págs. 191-200.
- [38] —. Modelling and control of elastic joint robots. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1987. volume 109, págs. 310-318.
- [39] Guenther, R., Hsu, L. Variable structure adaptive cascade control of rigid-link electrically-driven robot manipulators. In: *Proceedings IEEE 32nd CDC*. 1993 págs. 2137-2142.
- [40] Jankowski, K. P., ElMaraghy, H. A. Dynamic decoupling for hybrid control of rigid/flexible-joint robots interacting with the environment. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1992. volume 8, nº 5, págs. 519-534.
- [41] Ramírez, A. R. G., Pieri, E. R. Controle de força e posição de robôs manipuladores com articulações elásticas. In: *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática - XII CBA*, volume III. 1998 págs. 1119-1124.
- [42] Mills, J. K. Control of robotic manipulators with flexible joints during constrained motion task execution. In: *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*. 1989 págs. 1676-1681.
- [43] Jankowski, K. P., ElMaraghy, H. A. Nonlinear decoupling for position and force control of constrained robots with flexible joints. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1991 págs. 1226-1231.
- [44] Brogliato, B., Lozano-Leal, R. Adaptive hybrid force/position control of flexible joint manipulators. In: *ECC91 - European Control Conference*. 1991 págs. 1516-1521.
- [45] Tian, L., Goldenberg, A. A. A unified approach to motion and force control of flexible joint robots. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1996 págs. 1116-1120.
- [46] Corke, P. I., Armstrong-Helouvry, B. A search for consensus among model parameters reported for the puma 560 robot. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1994 págs. 1608-1613.

- [47] DeCarlo, R. A., Zak, S. H., Matthews, G. P. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial. In: *Proceedings of IEEE*, volume 76(3). 1988 págs. 212–232.
- [48] Hung, J. Y., Gao, W., Hung, J. C. Variable structure control: A survey. *IEEE Transactions Industrial Electronics*, 1993. volume 40, nº 1, págs. 2–22.
- [49] Young, K. D., Utkin, V. I., Ozguner, U. A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999. volume 7, nº 3, págs. 328–342.
- [50] Ortega, R., Spong, M. W. Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automática*, 1989. volume 25, nº 6, págs. 877–888.
- [51] Carelli, R., Kelly, R. Adaptive hybrid impedance/force controller for robot manipulators. In: *Preprints 11th IFAC World Congress*, volume 9. 1990 págs. 274–279.
- [52] Jean, J. H., FU, L. C. Adaptive hybrid control strategies for constrained robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993. volume 38, nº 4, págs. 598–603.
- [53] Arimoto, S., Liu, Y. H., Naniwa, T. Model-based adaptive hybrid control for geometrically constrained robots. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1993 págs. 618–623.
- [54] Yao, B., Tomizuka, M. Adaptive control of robot manipulators in constrained motion - controller design. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1995. volume 117, págs. 320–328.
- [55] Zhen, R. R. Y., Goldenberg, A. A. An adaptive approach to constrained robot motion control. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1995 págs. 1833–1838.
- [56] Slotine, J.-J. E., Sastry, S. S. Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators. *International Journal of Control*, 1983. volume 38, nº 2, págs. 465–492.
- [57] Bailey, E., Arapostathis, A. Simple sliding mode control scheme applied to robot manipulators. *International Journal of Control*, 1987. volume 45, nº 4, págs. 1197–1209.
- [58] Su, C.-Y., Leung, T.-P., Zhou, Q. J. Force/motion control of constrained robots using sliding mode. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992. volume 37, nº 5, págs. 668–672.
- [59] Gao, W., Hung, J. C. Variable structure control of nonlinear systems: A new approach. *IEEE Transactions Industrial Electronics*, 1993. volume 40, nº 1, págs. 45–55.

- [60] Hsu, L., Costa, R. R. Adaptive control with sliding modes: Theory and applications. In: *Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática (Minicurso)*, volume I. 1996 págs. 39–60.
- [61] Yao, B., Chan, S. P., Wang, D. Variable structure adaptive motion and force control of robot manipulators. *Automática*, 1994. volume 30, nº 9, págs. 1473–1477.
- [62] Su, C.-Y., Stepanenko, Y., Leung, T.-P. Combined adaptive and variable structure control for constrained robots. *Automática*, 1995. volume 31, nº 3, págs. 483–488.
- [63] Tian, L., Goldenberg, A. A. Adaptive and sliding control of flexible joint robots in constrained motion. In: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. 1995 págs. 4161–4166.
- [64] —. Robust adaptive control of flexible joint robots with joint torque feedback. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1995 págs. 1229–1234.
- [65] Spong, M. W., Vidyasagar, M. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, 1989.
- [66] Asada, H., Slotine, J.-J. E. *Robot Analysis and Control*. John Wiley & Sons, 1986.
- [67] Lewis, F. L., Abdallah, C. T., Dawson, D. M. *Control of Robot Manipulators*. Macmillan Publishing Company, 1993.
- [68] Rocco, P. Stability of pid control of industrial robot arms. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1996. volume 12, nº 4, págs. 606–614.
- [69] Wilfinger, L. S., Wen, J. T., Murphy, S. Integral force control with robustness enhancement. In: *IEEE Control Systems Magazine*. 1994 págs. 31–40.
- [70] Ferreti, G., Magnani, G., Rocco, P. On the stability of the integral force control in case of contact with stiff surfaces. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1995. volume 117, nº 4, págs. 547–553.
- [71] Wen, J. T., Murphy, S. Stability analysis of position and force control for robot arms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991. volume 36, nº 3, págs. 365–371.
- [72] An, C. H., S., Hollerbach, J. M. Dynamic stability issues in force control of manipulators. In: *IEEE Int. Conf. Robotics & Automation*. 1987 págs. 890–896.
- [73] Qian, H. P., De Schutter, J. The role of damping and low pass filtering in the stability of discrete time implemented robot force control. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1992 págs. 1368–1374.

- [74] Youcef-Toumi, K., Gutz, D. A. Impact and force control: Modeling and experiments. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1994. volume 116, págs. 89–98.
- [75] Slotine, J.-J. E., Li, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [76] Khalil, H. K. *Nonlinear Systems*. Macmillan Publishing Company, 1993.
- [77] Esfandiari, F., Khalil, H. K. Stability analysis of a continuous implementation of variable structure control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991. volume 36, nº 5, págs. 616–619.
- [78] Piskunov, N. *Differential and Integral Calculus*. MIR Publisher, 1969.
- [79] Bartolini, G., Ferrara, A. On the parameter convergence properties of a combined vs/adaptive control scheme during sliding motion. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1999. volume 44, nº 1, págs. 70–75.
- [80] Moura, J. T., Elmali, H., Olgac, N. Sliding mode control with sliding perturbation observer. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1997. volume 119, págs. 657–665.
- [81] Armstrong-Hélouvy, B., Dupont, P., Canudas de Wit, C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automática*, 1994. volume 30, nº 7, págs. 1083–1138.
- [82] Carrara, A. R. S. Flexible robot dynamics. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, 1998. volume XX, nº 3, págs. 416–429.
- [83] Amaral, S., Pieri, E. R., Guenther, R. Controle a estrutura variável de robôs manipuladores em ambientes cinemáticos. In: *Anais do XII Congresso Brasileiro de Automática - XII CBA*, volume III. 1998 págs. 1113–1118.
- [84] —. Controle a estrutura variável de robôs manipuladores interagindo com ambientes cinemáticos e/ou dinâmicos. In: *Anais do XIII Congresso Brasileiro de Automática - XIII CBA*. 2000 págs. 348–353.
- [85] —. Controle a estrutura variável de robôs manipuladores interagindo com ambientes cinemáticos. *Revista Controle & Automação*, 2000. volume 11, nº 2, págs. 117–127.
- [86] Moura, J. T., Roy, R. G., Olgac, N. Sliding mode control with perturbation estimation (smcpe) and frequency shaped sliding surfaces. *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1997. volume 119, nº 2, págs. 584–588.

- [87] Corke, P. I. An automated symbolic and numeric procedure for manipulator rigid-body dynamic significance analysis and simplification. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1996 págs. 1018–1023.
- [88] Mills, J. K., Lokhorst, D. M. Stability and control of robotic manipulators during contact/noncontact task transition. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1993. volume 9, nº 3, págs. 335–345.
- [89] Xu, Y., Hollerbach, J. M., Ma, D. Force and contact transient control using nonlinear pd control. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1994 págs. 924–930.
- [90] Brogliato, B., Orhant, P. On the stability of a simple contact-noncontact robotic task. In: *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*. 1994 págs. 2400–2401.
- [91] Cao, B., Dodds, G. I., Irwin, G. W. Constrained time-efficient and smooth cubic spline trajectory generation for industrial robots. In: *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, volume 144(5). 1997 págs. 467–475.
- [92] Astrom, K. J., Wittenmark, B. *Computer-Controlled Systems - Theory and Design*. Prentice-Hall, Inc., 1984.
- [93] Jankowski, K. P., Van Brussel, H. Inverse dynamics task control of flexible joint robots - ii. *Mech. Mach. Theory*, 1993. volume 28, nº 6, págs. 751–762.
- [94] Jaritz, A., Spong, M. W. An experimental comparison of robust control algorithms on a direct drive manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1997. volume 4, nº 6, págs. 614–626.
- [95] Hirschorn, R. M., Miller, G. Control of nonlinear systems with friction. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999. volume 7, nº 5, págs. 588–595.