

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Otimização Dimensional e de Forma de Estruturas Treliçadas

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

NEDERSON DA SILVA KOEHLER

FLORIANÓPOLIS, JUNHO DE 1998.

26/06/98

DEDICATÓRIA

À minha esposa Cristiane Koehler pela compreensão e apoio constante.

e por ter feito nossos os meus ideias.

Aos meus pais, Pedro e Clair, pelo amor, carinho e

exemplo de dedicação.

À minha avó Mercedes Farias Köehler (in memorian) pelo amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Marcelo Krajnc Alves, pela amizade, pelo apoio e pela excelente orientação neste trabalho.

Aos Professores Clóvis Sperb de Barcellos, Edison da Rosa, Eduardo Alberto Fancello, Roberto Jordan, pela formação. Ao Lauro Nicollazzi pelas dicas. Ao Prof. Nelson Back pelo apoio no momento final.

Ao Marcus Antonius Nunes pelo conselho.

Aos Colegas da Pós, Alex Pizzatto, Alexandre Kaelble Calixto, Augusto Fernando Liska, Ivan Jimenez Prado, João Carlos Arantes da Costa Jr., Jorge Hernandez Fonseca, Juan Jose Lopensino, Lauro Fernando Ignácio Jr., Michael de Jesus Fernandes, Moacir Eckhardt, Rodrigo Rossi e Valdir Mendes Cardoso, que tornaram a jornada mais amena, e muito mais que colegas, tornaram-se meus grandes Amigos.

Aos meus irmãos Neverson Koehler e Diogo Koehler pelo carinho e apoio.

A minha sobrinha Bruna, pelo seu sorriso, que se tornou motivação em muitos momentos e a Isis que acaba de chegar.

Ao Prof. Agenor Dias de Meira Jr. pelo apoio, incentivo e amizade.

Ao povo Brasileiro que através da CAPES, permitiu a realização deste trabalho.

Meu sincero agradecimento a todos.

Sumário

SUMÁRIO	1
LISTA DE SÍMBOLOS	III
LISTA DE FIGURAS	VI
LISTA DE TABELAS	VII
RESUMO	VIII
ABSTRACT	IX
INTRODUÇÃO	10
1.1 - O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	10
1.2 - O MÉTODO DO MULTIPLICADOR	13
FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	18
2.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	18
2.2 - INTER-RELACIONAMENTO ENTRE VARIÁVEIS DE PROJETO	22
O MÉTODO DO LAGRANGEANO AUMENTADO	25
3.1 - PROBLEMA DE RESTRIÇÃO DE IGUALDADE	25
3.2 - PROBLEMA DE RESTRIÇÃO DE DESIGUALDADE	36
3.3 - CONCLUSÕES SOBRE O MÉTODO DO MULTIPLICADOR (<i>MULTIPLIER METHOD</i>)	40
APRESENTAÇÃO DAS EXPRESSÕES	44
4.1 - NORMALIZAÇÃO DE VARIÁVEIS E RESTRIÇÕES	44
4.2 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PERTURBADO	46
4.3 - MÉTODO DE SOLUÇÃO PARA PROBLEMAS SEM RESTRIÇÃO	47
4.4 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DA FUNÇÃO OBJETIVO	50
4.5 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS DESLOCAMENTOS	54
4.6 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE TENSÃO	56
4.7 - PREVENÇÃO DE ÁREA DE SEÇÃO TRANSVERSAL NEGATIVA	58
RESULTADOS	62
5.1 - ESTRUTURA DE DUAS BARRAS.....	62
5.2 - ESTRUTURA DE DEZ BARRAS	67
5.3 - ESTRUTURA DE CINCO BARRAS	73
5.4 - ESTRUTURA DE TREZE BARRAS.....	76
5.5 - ESTRUTURA DE DEZOITO BARRAS.....	80
CONCLUSÃO	85
BIBLIOGRAFIA	88
APÊNDICE A	91
APÊNDICE B	100
APÊNDICE C	105
APÊNDICE D	107
APÊNDICE E	109

OTIMIZAÇÃO DIMENSIONAL E DE FORMA DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS

NEDERSON DA SILVA KOEHLER

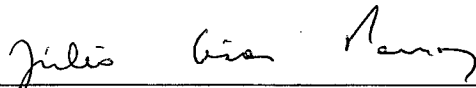
ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

Especialidade ENGENHARIA MECÂNICA - Área de Concentração PROJETO E ANÁLISE
DE COMPONENTES MECÂNICOS, e Aprovada em sua Forma Final Pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica



Prof. Marcelo Krajnc Alves, Ph. D.
ORIENTADOR

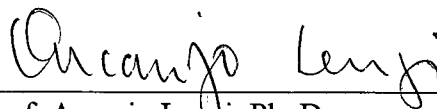


Prof. Júlio César Passos, Dr.
COORDENADOR DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

BANCA EXAMINADORA



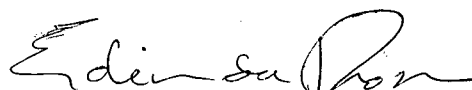
Prof. Nelson Back, Ph. D.- Presidente



Prof. Arcanjo Lenzi, Ph. D.



Prof. Armando Albertazzi Gonçalves Jr., Dr. Eng.



Prof. Edison da Rosa, Dr. Eng.

Lista de Símbolos

A_i	área da seção transversal do i-ésimo membro.
$A(x, \lambda, C)$	Função Lagrangeana Aumentada.
$A(x, \lambda^k, C^k)$	Função Lagrangeana Aumentada na k-ésima iteração.
$A_c(\lambda)$	Função dual.
C	Fator de resposta
C^k	Fator de resposta na k-ésima iteração.
C^{max}	Valor Máximo para o fator de resposta.
C_{σ_i}	Fator de normalização para restrições de tensão.
C_{u_i}	Fator de normalização para restrições de deslocamento.
C_{β_i}	Fator de normalização para restrições de área.
C_{y_i}	Fator de normalização para as coordenadas independentes.
$C_{y_{ij}}$	Fator de normalização para a ordenação dos nós.
d_β	Componente da variável área na direção de descida.
d_y	Componente da variável coordenada na direção de descida.
E_i	Módulo de elasticidade de cada membro.
$f(x)$	Função objetivo não-linear geral
$g(x)$	Função de restrição geral não-linear
G_β^i	Conjunto de áreas inter-relacionadas.
G_y^i	Conjunto de coordenadas nodais inter-relacionadas.
$h(x)$	Função de restrição de igualdade geral.
I	Matriz identidade.

K	Matriz de rigidez global.
K_i	Matriz de rigidez elementar.
L_i	Comprimento do elemento.
$L(x,\lambda)$	Função Lagrangeana Modificada.
$L_0(x,\lambda)$	Função Lagrangeana Clássica.
θ	Representa termos de maior ordem.
$q(y_j)$	Função de inter-relacionamento nodal.
S_i	Matriz de tensão do elemento.
u_{ik}	i -ésimo grau de liberdade do vetor de deslocamento.
$u_i^{(U)}, u_i^{(L)}$	Limites inferior e superior de deslocamento.
U	Vetor de deslocamento.
W	Massa total da estrutura.
x	Vetor de variáveis primais.
x^*	Vetor de variáveis primais ótimas.
X_i	Vetor de coordenadas nodais elementares.
Y_i	Coordenada nodal independente.
$Y_i^{(U)}, Y_i^{(L)}$	Limite superior e inferior para Y_i .
z_i	Variável de folga.
α	Tamanho do passo.
α^*	Tamanho do passo ótimo.
β_i	Variável recíproca área independente.
$\beta_i^{(U)}, \beta_i^{(L)}$	Limites superior e inferior em β_i .
γ	Fator de atualização.
$\Delta\alpha$	Perturbação do tamanho do passo.

ΔT_i	Mudança de temperatura no elemento.
ε	Quantidade de perturbação na restrição.
θ_i	Coef. de expansão térmica do elemento.
k_i	Coef. de flambagem do elemento.
λ	Vetor dos multiplicadores de Lagrange.
λ^*	Vetor dos multiplicadores de Lagrange ótimos.
λ^k	Vetor dos multiplicadores de Lagrange na k-ésima iteração.
σ_{ik}	Tensão no i-ésimo elemento devido a k-ésima condição de carga.
$\sigma_i^{(U)}, \sigma_i^{(L)}$	Limites superior e inferior para tensão.
σ_{ib}	Tensão de estabilidade.
ϕ	Função Lagrangeana Aumentada perturbada
$\phi^i(x, C)$	Função de penalidade interior.
$\phi^e(x, C)$	Função de penalidade exterior.
$\psi_i(g_i, \lambda_i / C)$	Termo de penalização na Função Lagrangeana Aumentada.

Lista de Figuras

5.1.1	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE DIMENSÃO.....	64
5.1.2	ESTRUTURA OTIMIZADA SUBMETIDA A RESTRIÇÕES DE TENSÃO E ESTABILIDADE	65
5.1.3	ESTRUTURA SUBMETIDA A OTIMIZAÇÃO DE ÁREA E CONFIGURAÇÃO.....	66
5.1.4	RESPOSTA DA ESTRUTURA APÓS O PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO.....	67
5.2.1	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA ESTRUTURA DE DEZ BARRAS.....	68
5.2.2	CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA DE DEZ BARRAS.....	70
5.2.3	REPRESENTAÇÃO DA ESTRUTURA DE DEZ BARRAS SUBMETIDA A RESTRIÇÕES DE ÁREA, TENSÃO E QUATRO RESTRIÇÕES DE DESLOCAMENTO.....	72
5.2.4	CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA DE DEZ BARRAS.....	73
5.3.1	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA ESTRUTURA DE CINCO BARRAS.....	75
5.3.2	ESTRUTURA DE CINCO BARRAS AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO.....	76
5.4.1	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA ESTRUTURA DE TREZE BARRAS INICIAL.....	78
5.4.2	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA ESTRUTURA DE TREZE BARRAS OTIMIZADA...	79
5.4.3	GRÁFICO DA CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA.....	80
5.5.1	REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA ESTRUTURA INICIAL DE DEZOITO BARRAS.....	82
5.5.2	ESTRUTURA DE DEZOITO BARRAS OTIMIZADA.....	83
5.5.3	GRÁFICO DA CONVERGÊNCIA DO PROBLEMA (CASO 1).....	84

Lista de Tabelas

5.1.1	RESULTADOS NUMÉRICOS E SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA.....	64
5.1.2	RESULTADOS NUMÉRICOS E SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA.....	65
5.1.3	RESULTADOS NUMÉRICOS E SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA.....	67
5.2.1	VALORES OTIMIZADOS PARA ÁREA E PESO DA ESTRUTURA DE DEZ BARRAS (CASO 1).....	69
5.2.2	VALORES ADMISSÍVEIS DE DESLOCAMENTO PARA A ESTRUTURA DE DEZ BARRAS.....	70
5.2.3	VALORES OTIMIZADOS PARA ÁREA E PESO DE UMA ESTRUTURA DE DEZ BARRAS, INCLUINDO DUAS RESTRIÇÕES DE DESLOCAMENTO.....	71
5.2.4	DESLOCAMENTOS ADMISSÍVEIS PARA A ESTRUTURA DE DEZ BARRAS.....	71
5.2.5	VALORES OTIMIZADOS PARA ÁREA E PESO DE UMA ESTRUTURA DE DEZ BARRAS, INCLUINDO QUATRO RESTRIÇÕES DE DESLOCAMENTO.....	72
5.3.1	VALORES DAS ÁREAS ÓTIMAS AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO.....	75
5.3.2	POSIÇÃO NODAL AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO.....	76
5.4.1	VALORES DAS ÁREAS ÓTIMAS AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO.....	78
5.4.2	POSIÇÃO NODAL AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO.....	79
5.5.1	VALORES DAS ÁREAS ÓTIMAS AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO.....	82
5.5.2	POSIÇÃO NODAL AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO.....	83
5.5.3	VALORES DAS ÁREAS ÓTIMAS AO FINAL DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO (CASO 2).....	85

Resumo

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta para a análise e otimização dimensional (área) e de forma (configuração) de estruturas treliçadas.

Para isto foi utilizado o Método dos Elementos Finitos com um elemento de barra 3D para a análise estrutural e, para o processo de otimização estrutural foram implementados um conjunto de algoritmos baseado no Método do Lagrangeano Aumentado e no Método Quase-Newton Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS).

O processo de otimização estrutural tem por objetivo minimizar a massa da estrutura obtendo elementos estruturais com áreas ótimas e com as posições nodais otimizadas. São consideradas restrições de área, posição nodal, tensão, estabilidade e deslocamentos nodais. As estruturas estão submetidas a cargas estáticas. Para avaliação e comprovação dos métodos são analisadas estruturas com variadas configurações. Os resultados são comparadas e analisadas com soluções analíticas, quando possível; e com soluções encontradas na literatura.

Abstract

This work has as objective, the development of a tool of structural analysis and dimensional and configuration optimization of truss structures.

To do this, was employed the Finite Element Method with a 3D bar element to the structural analysis and, to the structural optimization process was employed a set of algorithms based in the Augmented Lagrangian Method and the Quasi-Newton Algorithm Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(BFGS).

The objective of the structural optimization has as main objective minimize the weight of the structure is to obtain optimum structural dimension and optimum nodal positions. The problems consider the following constraints: size, nodal positions, stress, stability and nodal displacements. The structures are subject to static load.

To evaluate and to compare of the methods are analysed different structural configurations. Results are analysed and compared with analytical solutions, when it's possible and with solutions available in the literature.

Capítulo 1

Introdução

Na seção 1.1 é feita uma breve explanação sobre o que é otimização, aspectos gerais, e uma breve revisão de estudos anteriores. Na seção 1.2 é dado um esclarecimento prévio dos aspectos práticos do método do multiplicador.

1.1- O Problema de Otimização

Otimizar significa buscar o melhor possível. Assim, quando se tem por objetivo otimizar uma estrutura, procura-se reduzir sua massa, satisfazendo-se certos requisitos de projeto, sem reduzir sua capacidade de suportar uma determinada carga.

As técnicas de otimização tem suas raízes no estudo de máximos e mínimos de funções e funcionais. Do cálculo diferencial sabe-se que, um ponto de mínimo para a função está necessariamente no local em que a derivada da função é igual a zero.

Assim, as técnicas de otimização foram desenvolvidas nas décadas de 60 e 70. Já no início dos anos 80 o campo da otimização estrutural foi relativamente novo.

As técnicas de otimização, são técnicas matemáticas aplicadas aos mais diversos campos do conhecimento como, por exemplo, a engenharia, a economia e outros.

Na engenharia estas técnicas são muito utilizadas no desenvolvimento de estruturas com elevada rigidez e baixa massa.

Segundo Hafta & Kamat [1985], a noção de melhorar ou otimizar uma estrutura, pressupõe, implicitamente, a existência de liberdade para se alterar determinados parâmetros da estrutura. Esta liberdade significa que estes parâmetros, que são conhecidos como variáveis de

projeto segundo a terminologia da otimização estrutural, podem variar dentro de uma determinada faixa.

Quando trabalha-se com otimização estrutural devem ser satisfeitos requisitos de projeto tais como, limites máximo e mínimo para: tensão, deslocamento, posição nodal, área da seção transversal do elemento. Estes são alguns dos requisitos utilizados neste trabalho, e que são conhecidos como restrições de projeto.

As inúmeras técnicas que foram desenvolvidas para resolver o problema de otimização tratam apenas uma função (expressão) matemática, conhecida como função objetivo.

No entanto, devido aos requisitos de projeto, o problema de otimização estrutural torna-se mais complexo, pois faz com que o problema de otimização seja um problema de otimização com restrições. Então, é necessário utilizar técnicas matemáticas que transformam o problema de otimização com restrições em um problema de otimização sem restrições. Desta maneira, é possível resolver uma seqüência de problemas de otimização, e ao final, obter uma estrutura otimizada e que satisfaça todas as restrições.

Os problemas de otimização podem ser divididos, de um modo geral, em otimização dimensional, otimização de forma e otimização de topologia.

A otimização de topologia em estruturas treliçadas, de modo geral, utiliza um *grid* de pontos fixos. Neste caso, os problemas de restrição de tensão podem ser tratados sob uma condição de carregamento simples. Podem ser considerados casos mais gerais onde se incluem estruturas indeterminadas, múltiplas condições de carregamento e restrições de flambagem. Uma maneira de otimizar a topologia de uma estrutura é empregar o conceito de anulação de membros, ou seja, qualquer membro cuja área da seção transversal venha a ser zero, em um certo estágio do processo, é removido da estrutura, e não é permitido que reapareça nos estágios que seguem.

Quando realiza-se a otimização dimensional e de forma, pode-se manter a topologia fixa e utiliza-se como variáveis de projeto as áreas e as posições das rótulas. Um trabalho importante nesta linha foi desenvolvido por Kanji Imai [1981], e que juntamente com os trabalhos de Pedersen [1969], o de Vanderplaats [1984] e o de Haftka & Kamat [1985] serviram de orientação para este trabalho.

No trabalho de Vanderplaats foram obtidas soluções completamente diferentes para o problema específico para diferentes pontos de projeto iniciais e diferentes configurações iniciais. Este caso caracteriza a existência de múltiplos mínimos locais, o que demonstra a não convexidade da função objetivo.

O trabalho de Pedersen indica que os problemas de otimização de configuração sem restrições de deslocamento sob múltiplas condições de carregamento pode ser tratado como uma seqüência de programação linear (SPL) se a estrutura é determinada. Em outro trabalho, ele inclui restrições de deslocamento sob múltiplas condições de carregamento juntamente com restrições de tensão e flambagem. Ele trata variáveis de dimensão e configuração simultaneamente e emprega uma SPL novamente, com movimentação dos limites relativamente restritos. Ele exclui grosseiramente restrições inativas e constrói aproximações lineares para as restrições que não foram excluídas, utilizando expansões por séries de Taylor com relação às variáveis de projeto. Portanto as funções das restrições de variáveis de configuração são altamente não lineares, tem ainda que empregar um esquema ainda mais restritivo para a movimentação dos limites para conservar projetos intermediários na região viável. Ele declara que sua aproximação por Programação Linear Seqüencial não é testada para estruturas indeterminadas.

Um tópico interessante em otimização de configuração é o estudo de técnicas rápidas de re-análises para estruturas de configuração modificada. Devido a alta não linearidade das respostas, utilizou-se expansões por séries de Taylor para obter uma estimativa inicial e então

melhorá-las utilizando métodos iterativos. Entretanto, este método, conhecido como método de Noor, não se torna eficiente quando implementado no contexto de otimização estrutural, devido a sua natureza iterativa. Isto é particularmente verdadeiro quando somente precisamos localizar um ponto mínimo aproximado ao longo de uma direção particular no espaço de projeto.

Um tipo de critério de otimalidade para o problema de configuração é introduzido para problemas de restrição de tensão. Esta extensão poderá conduzir a projetos que tornam-se inviáveis.

1.2 - O Método do Multiplicador

Nesta seção, o método de otimização que será empregado nesta dissertação é demonstrado qualitativamente como um método de programação não linear geral. No Capítulo 3 é fornecido um embasamento matemático e o Apêndice A mostra a aplicação do método a um exemplo matemático simples.

O método do multiplicador foi desenvolvido independentemente por Hestenes e Powel no contexto de problemas de restrição de igualdade não lineares e com função objetivo não linear. O nome método do multiplicador é devido a Hestenes. Entretanto, este método é também chamado de “método da Função Lagrangeana Aumentada” ou de “método primal - dual”. Essa diferença de nomenclatura surge quando um outro aspecto do método é enfatizado.

A extensão do método do multiplicador para problemas envolvendo restrições de desigualdade foram tratadas por Rockafellar, o qual introduziu o conceito de variáveis de folga (*slack variables*) para criar uma função Lagrangeana aumentada para o problema de restrição de desigualdade pela transformação deste num problema de restrição de igualdade.

A convergência para um mínimo global através do método do multiplicador foi provada por Rockafellar para o caso de programação convexa. As expressões para a taxa de convergência para este método foram obtidas por Bertsekas, para problemas não lineares gerais. Ele demonstra

a taxa de convergência do método de duas maneiras; primeiro, com uma procura unidimensional exata e então com uma busca não tão precisa. A natureza interessante primal-dual do método é também descrita por Bertsekas.

Devido a sua boa taxa de convergência e suas propriedades teóricas muito boas, o método do multiplicador é agora preferido, especialmente para problemas de restrição de igualdade. Entretanto, sua aplicação a problemas envolvendo restrições de desigualdade foi limitado a alguns testes de problemas matemáticos simples.

A forma geral do problema de programação matemática não linear para restrições de desigualdade é:

$$\text{Min } f(x) \tag{1.2.1}$$

$$\text{sujeito a } g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \tag{1.2.2}$$

onde x é um vetor n -dimensional de variáveis de projeto, $f(x)$ é uma função objetivo, $g_i(x)$ representa a i -ésima função restrição, e m é o número total de restrições. O problema acima é dito resolvido se for conhecido o par ótimo (x^*, λ^*) do problema, onde x^* representa o valor ótimo das variáveis primais e λ^* o valor ótimo dos multiplicadores de Lagrange. Muitas técnicas de programação matemática buscam somente x^* de modo direto e devido a sua baixa taxa de convergência. Por outro lado, os também chamados métodos de critério de otimalidade buscam λ^* assumindo que as restrições de desigualdade são críticas no início do processo. Isto facilitou o desenvolvimento de regras recursivas simples de reprojeção que são eficientes

Os métodos dos multiplicadores buscam x^* e λ^* alternativamente e o incremento dos multiplicadores de Lagrange estimados em cada estágio são utilizados para agilizar o processo.

A semelhança entre métodos de critério de ótimo e o método dos multiplicadores é devido a ambos os métodos buscarem os multiplicadores de Lagrange ótimos λ^* .

Os métodos dos multiplicadores podem ser vistos como buscas de pontos de sela (x^*, λ^*) pelo trabalho alternativo entre os espaços primal e dual. Observe que a busca por λ^* no espaço dual é realizado pelo “*steepest ascent method*” com o tamanho do passo constante ou variável. O tamanho do passo constante é utilizado no método original de Hestenes. Assim, os métodos dos multiplicadores determinam λ^* em um simples passo no espaço dual.

Existem muitas versões do método do multiplicador, no entanto, o seguinte algoritmo fundamental é apresentado aqui para o problema de programação matemática não linear geral das Eqs. (1.2.1) e (1.2.2).

Passo 1: Selecionar um vetor de multiplicadores de Lagrange inicial λ^0 e um fator de resposta $C^0 > 0$.

Passo 2: Resolver o seguinte problema de otimização sem restrição com relação ao vetor de variáveis primais x .

$$\text{Min}_x A(x, \lambda^k, C^k) \quad (1.2.3)$$

onde

$$A(x, \lambda^k, C^k) = f(x) + C^k \sum_{i=1}^m \psi_i \left[g_i(x), \frac{\lambda_i^k}{C^k} \right] \quad (1.2.4)$$

e

$$\psi_i = \begin{cases} \frac{1}{2} g_i^2 + \frac{\lambda_i^k}{C^k} g_i & \text{se } g_i \geq -\frac{\lambda_i^k}{C^k} \\ \text{se não} & \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_i^k}{C^k} \right)^2 & \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Passo 3: considerando que um x^k resolve o passo anterior. Atualize λ^k por :

$$\lambda_i^{k+1} = \max(0, \lambda_i^k + C^k g_i(x)) \quad (i=1, \dots, m) \quad (1.2.6)$$

Passo 4: Se $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k$ ($i=1, \dots, m$), então pare.

A solução ótima $(x^*, \lambda^*) = (x^k, \lambda^k)$ é obtida. Do contrário vá para o Passo 5.

Passo 5: Fazer $\lambda_i^k = \lambda_i^{k+1}$ ($i=1, \dots, m$).

E se $C^k \leq C^{max}$ (C^{max} = algum valor grande especificado), incrementar C^k por

$$C^k = \gamma C^k \quad (1.2.7)$$

onde γ é o fator de atualização maior que, ou igual a unidade. Do contrário, vá para o passo 2 com $k = k+1$.

As Eqs. (1.2.4) e (1.2.5) definem a Função Lagrangeana Aumentada de Rockafellar e a fórmula de atualização Eq.(1.2.6) é a versão correspondente da fórmula original de Hestenes para problemas de restrição de igualdade. Outras formas do método do multiplicador podem ser geradas pela simples mudança da combinação da Função Lagrangeana Aumentada e a correspondente fórmula de atualização ou modificando detalhes do algoritmo.

O algoritmo, do Passo 1 ao 5 é relativamente simples, entretanto pode-se fazer algumas observações em relação aos aspectos práticos do método:

i - de algum modo os multiplicadores de Lagrange ótimos λ^* foram avaliados para iniciar algoritmo, então, somente uma solução do problema sem restrição é requerida para obter a variável primal ótima x^* . Esta é uma característica considerável do algoritmo.

ii - como não são conhecidos os valores dos multiplicadores de Lagrange ótimos no início, é necessário utilizar o processo iterativo acima descrito para o vetor dos multiplicadores de Lagrange.

iii - é possível fazer a escolha de um fator de resposta inicial C^k um tanto crítico para a determinação do número de iterações para a convergência. Se um pequeno valor relativo é escolhido para o fator de resposta inicial C^0 , então, a solução do primeiro problema otimização é esperado nas vizinhanças das soluções verdadeiras. Entretanto, neste caso, é difícil obter soluções numéricas devido ao mal condicionamento exibido pela função Lagrangeana aumentada.

Considerações similares podem ser satisfeitas considerando o fator de atualização γ utilizado para atualizar o fator de resposta C^k . Entretanto, existindo uma teoria no desempenho do método do multiplicador indica que pode-se obter a solução sem encontrar este mal condicionamento na Função Lagrangeana Aumentada fornecida, que foi conservado o fator de resposta C^k , entre um problema apropriado dependente de um limite superior de C , i.e., C^{max} .

O algoritmo é, formalmente falando, uma leve extensão do método da penalização exterior de função quadrática. Portanto, o algoritmo tende a gerar uma seqüência de projetos inviáveis convergindo a um projeto viável no limite. Isto é verdadeiro se foi iniciado o algoritmo com os multiplicadores de Lagrange assumindo valores zero. Entretanto, se forem escolhidos os valores iniciais dos multiplicadores de Lagrange ótimos λ^* , então, o algoritmo tende a gerar uma seqüência de projetos viáveis convergindo para a solução.

Portanto, o método do multiplicador pode ser praticamente utilizado de qualquer modo, como sendo um método de otimização viável ou um método de otimização inviável.

Capítulo 2

Formulação do Problema

Na Seção 2.1, o problema de otimização de configuração de uma estrutura de treliças é colocado como problema padrão de programação matemática não linear. Na Seção 2.2, a inter-relação de variáveis de projeto utilizada nesta dissertação será descrita.

2.1 - Formulação do Problema

A massa total de uma treliça de topologia fixa é tomada como a função objetivo. Portanto, isto pode ser simplesmente representado por:

$$W = \sum_{i=1}^{N_m} \rho_i A_i L_i \quad (2.1.1)$$

onde W é o massa total da treliça, N_m é o número de membros e ρ_i , A_i e L_i , respectivamente são, a massa específica, a área da seção transversal e o comprimento do i -ésimo membro.

As restrições de tensão tem a seguinte forma:

$$\sigma_i^{max} \leq \sigma_{ik} \leq \sigma_i^{(v)} \quad (i = 1, \dots, N_m, k = 1, \dots, N_L) \quad (2.1.2)$$

e

$$\sigma_i^{max} = \max(\sigma_i^{(L)}, \sigma_{ib}) \quad (2.1.3)$$

onde σ_{ik} é a tensão no i -ésimo membro devido a k -ésima condição de carregamento, $\sigma_i^{(L)}$ representa o limite superior de tensão, N_L é o número de condições de carregamento, e σ_i^{max} representa o limite inferior de tensão, que é determinado a partir do máximo valor entre a tensão limite inferior $\sigma_i^{(L)}$ e a tensão de flambagem de Euler, sendo neste trabalho σ_{ib} definido por:

$$\sigma_{ib} = -\frac{k_i A_i}{L_i^2} \quad (2.1.4)$$

onde k_i é uma constante determinada a partir da geometria da seção transversal, do módulo de elasticidade, e o fator de segurança. Assim a expressão da Eq. (2.1.4) contém A_i e L_i , o limite inferior σ_i^{max} é geralmente função das variáveis de projeto. Neste trabalho o problema de estruturas treliçadas é tratado com elementos de barra de seção transversal tubular, de diâmetro médio D e espessura de parede t . A área do elemento é então controlada por estas duas variáveis que definem sua geometria. Para as estruturas analisadas, foi utilizada a relação $(D/t) = 10$. No Apêndice D, apresentam-se outras geometrias de seção transversal para o elemento de barra e seus correspondentes coeficientes de flambagem (k).

As restrições de deslocamento são dadas por:

$$u_i^{(L)} \leq u_{ik} \leq u_i^{(U)} \quad (2.1.5)$$

onde u_{ik} é o i -ésimo grau de liberdade do vetor de deslocamento devido a k -ésima condição de carga. Os símbolos $u_i^{(U)}$ e $u_i^{(L)}$ são, respectivamente, os limites superior e inferior. As restrições com relação às variáveis de projeto área da seção transversal são dadas por:

$$\beta_i^{(L)} \leq \beta_i \leq \beta_i^{(U)} \quad (2.1.6)$$

onde β_i é a variável recíproca independente correspondente à área de seção transversal A_i , i.e.,

$$\beta_i = \frac{1}{A_i} \quad (2.1.7)$$

enquanto, $\beta_i^{(v)}$ e $\beta_i^{(L)}$ são, respectivamente, os limites superior e inferior em β_i . Portanto, atualmente,

$$\beta_i^{(v)} = \frac{1}{A_i^{(L)}} \quad \text{e} \quad \beta_i^{(L)} = \frac{1}{A_i^{(v)}} \quad (2.1.8)$$

onde $A_i^{(v)}$ e $A_i^{(L)}$ são, respectivamente, os limites superior e inferior de A_i .

A forma recíproca para esta variável de dimensão é escolhida simplesmente porque sabe-se que em problemas de dimensionamento puro, as expansões por séries de Taylor baseadas em variáveis recíprocas fornecem uma excelente aproximação para a resposta dos deslocamentos sobre uma larga faixa no espaço de projeto. De fato, tais expansões são exatas para estruturas estaticamente determinadas.

As restrições nas coordenadas nodais independentes são dadas por:

$$Y_i^{(L)} \leq Y_i \leq Y_i^{(v)} \quad (2.1.9)$$

onde Y_i representa a coordenada nodal que pode ser alterada para modificar a configuração estrutural enquanto $Y_i^{(v)}$ e $Y_i^{(L)}$ são respectivamente seus limites superior e inferior.

Em adição as restrições nas coordenadas nodais, restrições na ordem dos nós é considerada, i.e.,

$$Y_i \leq Y_j \quad (i \neq j) \quad (2.1.10)$$

Este tipo de restrição pode ser utilizado para evitar configurações estaticamente instáveis e prevenir a ocorrência de projetos impraticáveis durante o processo de otimização.

O problema de otimização estrutural pode ser agora demonstrado como um problema de programação matemática não linear padrão como segue:

$$\text{Min } W(\beta, Y) = W = \sum_{i=1}^{N_m} \rho_i \beta_i L_i \quad (2.1.11)$$

sujeito a:

$$\sigma_{ik} - \sigma_i^{(v)} \leq 0 \quad (2.1.12)$$

$$\sigma_i^{max} - \sigma_{ik} \leq 0 \quad (2.1.13)$$

$$u_{ik} - u_i^{(v)} \leq 0 \quad (2.1.14)$$

$$u_i^{(L)} - u_{ik} \leq 0 \quad (2.1.15)$$

$$\beta_i - \beta_i^{(v)} \leq 0 \quad (2.1.16)$$

$$\beta_i^{(L)} - \beta_i \leq 0 \quad (2.1.17)$$

$$Y_i - Y_i^{(v)} \leq 0 \quad (2.1.18)$$

$$Y_i^{(L)} - Y_i \leq 0 \quad (2.1.19)$$

$$Y_i - Y_j \leq 0 \quad (2.1.20)$$

onde β e Y são respectivamente as variáveis de projeto área e os vetores de coordenadas nodais. Um ponto no atual espaço de projeto considerado é representado por um vetor z o qual é a concatenação dos vetores β e Y .

Note que o número total de restrições no problema é:

$$NIQ = 2(N_m + N_u) N_L + 2(N_\beta + N_Y) + N_s \quad (2.1.21)$$

onde:

NIQ é o número total de restrições.

N_m é o número de membros.

N_u é o número de restrições de deslocamento.

N_L é o número de condições de carregamento.

N_β é o número seções de área transversal recíprocas independentes.

N_Y é o número de coordenadas nodais independentes.

N_s é o número de restrições de ordenação dos nós.

A formulação do problema, das Eqs. (2.1.11) até (2.1.20), é bastante geral.

2.2 - Inter-relacionamento Entre Variáveis de Projeto

Desde que o número de variáveis de projeto seja usualmente grande em problemas de configuração, é útil, na prática, introduzir o conceito de inter-relacionamento entre variáveis de projeto de modo a reduzir a dimensão do espaço de projeto enquanto que, ao mesmo tempo, impõe requisitos práticos de projetos tais como condições de simetria. Na seqüência, dois tipos diferentes de variáveis de projetos inter-relacionadas são consideradas. Um para áreas de seção transversal e outro para coordenadas nodais. Um terceiro grupo inter-relacionado para membros

treliçados é também introduzido nesta seção para facilitar o cálculo da quantidade de resposta das derivadas com relação as coordenadas nodais independentes.

Para as variáveis de projeto área, considerou-se o seguinte conjunto:

$$G_i^\beta = \left\{ J \left| \beta_i = \frac{1}{A_j}, j \in N_m \right. \right\} \quad (i = 1, \dots, N_\beta) \quad (2.2.1)$$

isto é, G_i^β é o conjunto do número de membros, no qual os membros componentes tem uma variável de projeto área recíprocas β_i em comum. Por este agrupamento, o número de variáveis independentes de área pode ser reduzido para N_β a partir de N_m ($N_\beta \leq N_m$).

Continuando, considere o inter-relacionamento de coordenadas nodais. Geralmente o inter-relacionamento de coordenadas pode tomar qualquer forma não linear.

$$X_i = q(Y_1, Y_2, \dots, Y_{N_y}) \quad (2.2.2)$$

onde X_i representa uma coordenada nodal atual e Y_j representa a j -ésima coordenada nodal independente relacionada. A função q tem alguma forma não linear.

Se não for especificada uma forma razoável para a função q , qualquer inter-relação pode ser incorporada, em princípio. Entretanto, o simples esquema de inter-relacionamento é empregado neste sentido justamente para simplificar a manipulação matemática. Por simplicidade, considera-se uma forma não-linear q . Então, o inter-relacionamento pode ser expresso por:

$$X_i = \sum_{j=1}^{N_m} T_{ij} Y_j \quad (2.2.3)$$

onde T_{ij} é um coeficiente apropriado. Este tipo de inter-relacionamento tem sido utilizado para impor condições de simetria nos arranjos nodais. Como exemplo, tem-se o caso particular em que $T_{ij} = \pm 1$ com todos outros zero. Então,

$$X_i = \pm Y_j \quad (2.2.4)$$

Esta relação é suficiente para impor condições de simetria comuns.

Finalmente, considera-se um terceiro grupo de inter-relacionamento para membros de estruturas treliçadas. Define-se o seguinte conjunto:

$$G_Y^i = \left\{ j \mid Y_i \in X_j, j \in N_m \right\} \quad (2.2.5)$$

onde X_j tem sido definido como vetor de coordenada nodal para o membro j com componentes correspondentes as coordenadas nodais em ambas extremidades do membro j . Em outras palavras, G_Y^i é um conjunto de números de membros tal que, os membros componentes tenham a coordenada nodal independente Y_i em comum. Este conjunto é requerido quando a diferenciação das quantidades de resposta com respeito a coordenadas nodais independentes deve ser derivada.

Capítulo 3

O Método do Lagrangeano Aumentado

Neste capítulo, o embasamento teórico do método do Lagrangeano aumentado (MLA) será desenvolvido. Na seção 3.1, o MLA aplicado ao problema de restrição de igualdade é demonstrado, onde considera-se a versão de Hestenes. Esta seção fornece as bases para a extensão do método para problemas de restrição de desigualdade. Na seção 3.2, o método é estendido ao caso de restrição de desigualdade pela introdução de variáveis de folga e a Função Lagrangeana Aumentada é obtida.

3.1 - Problema de Restrição de Igualdade

O problema de restrição de igualdade pode ser definido como segue:

$$\text{Min } f(x) \tag{3.1.1}$$

$$\text{sujeito a } h_i(x)=0 \quad (i = 1 \dots m) \tag{3.1.2}$$

onde x é um vetor n -dimensional $f(x)$ é uma função objetivo, $h_i(x)$ é a i -ésima restrição de igualdade, m é o número de restrições de igualdade, e $m < n$. As funções $f(x)$ e $h_i(x)$ são em geral não lineares e nós assumimos a apropriada diferenciabilidade destas funções como requisito necessário.

Agora, define-se a função Lagrangeana “modificada” como segue:

$$L(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) \tag{3.1.3}$$

onde λ_0 e λ_i são multiplicadores de Lagrange generalizados. Embora diferentes tipos de métodos de multiplicadores podem ser obtidos pela utilização da Eq. (3.1.3), seguiremos o modo clássico, i.e. , inicializando $\lambda_0 = 1$ na Eq. (3.1.3). Então utiliza-se uma função Lagrangeana clássica e familiar L_0

$$L_0(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) \quad (3.1.4)$$

Segundo a observação de Lagrange:

“ Se existe algum $\bar{\lambda}$ para o qual \bar{x} resolve o problema sem restrição $\text{Min } L_0(x, \bar{\lambda})$ enquanto satisfaz as condições de viabilidade $h_i(\bar{x}) = 0$ ($i = 1 \dots m$), então \bar{x} é uma solução do problema original dado pelas Eqs. (3.1.1) e (3.1.2)”.

A prova é bastante simples. Desde que \bar{x} seja solução do seguinte problema sem restrição:

$$\begin{aligned} & \text{Min } L_0(x, \bar{\lambda}) \\ & L_0(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq L_0(x, \bar{\lambda}) \quad \text{para todo } x \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Entretanto, da definição de L_0 na Eq. (3.1.4), pode-se escrever a Eq. (3.1.5) como:

$$f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i h_i(\bar{x}) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i h_i(x) \quad (3.1.6)$$

para todo x . Agora, desde que se tenha as condições viáveis $h_i(\bar{x}) = 0$ ($i=1 \dots m$), a Eq. (3.1.6) torna-se:

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i h_i(x) \quad \text{para todo } x \quad (3.1.7)$$

Agora, restringindo x de maneira que seja viável com relação às restrições de igualdade, i.e., seleccionar um x tal que $h_i(x) = 0$ ($i=1\dots m$). Então, a Eq. (3.1.7) torna-se:

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \text{para um } x \text{ viável} \quad (3.1.8)$$

Isto mostra que \bar{x} é um ponto de mínimo relativo do problema original representado pelas Eqs. (3.1.1) e (3.1.2).

Pela utilização desta simples e importante observação, pode-se dizer que o problema original da Eqs. (3.1.1) e (3.1.2) é equivalente a minimização da Lagrangeana clássica L_0 com as condições de viabilidade $h_i(x) = 0$ ($i = 1, \dots, m$) como novas restrições. Isto é, o problema:

$$\text{Min } L_0(x, \lambda), \text{ dado um } \lambda \quad (3.1.9)$$

$$\text{sujeito a } h_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.1.10)$$

é equivalente ao problema original no sentido que ambos problemas compartilham das mesmas soluções.

A considerável distinção entre o método do multiplicador e os usuais métodos de programação matemática repousa no fato que o último resolve o problema original como ele mas o MLA trata com a solução do problema analítico transformado nas Eqs. (3.1.9) e (3.1.10).

Portanto o novo problema formado pelas Eqs. (3.1.9) e (3.1.10) é ainda um problema de restrição de igualdade. É possível resolver este, pelo método da função de penalidade exterior, porque este método é geralmente conhecido como um dos mais eficientes para a solução de tais

problemas de igualdade. Então o problema das Eqs. (3.1.9) e (3.1.10) torna-se um problema sem restrição como segue.

$$\text{Min}_x A(x, \lambda, C) \text{ dado um valor arbitrário de } \lambda \text{ e } C \quad (3.1.11)$$

onde:

$$\begin{aligned} A(x, \lambda, C) &= L_0(x, \lambda) + \frac{C}{2} \sum_{i=1}^m h_i^P(x) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \frac{C}{2} \sum_{i=1}^m h_i^P(x) \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

O índice P é um valor que deve ser escolhido convenientemente. O terceiro termo na Eq. (3.1.12) é o termo de penalidade e C é um fator de resposta. A função definida pela Eq. (3.1.12) é chamada de “Função Lagrangeana Aumentada” para o problema de restrição de igualdade.

Obviamente devido a natureza do método da função de penalidade, se $C \rightarrow \infty$, então, a solução $x(\lambda, C)$ do problema, a Eq. (3.1.11), converge para a solução do problema das Eqs. (3.1.9) e (3.1.10). Isto significa que pode-se obter a solução do problema original, i.e., Eqs. (3.1.1) e (3.1.2), pela solução de uma seqüência de problemas sem restrições definido na Eq. (3.1.11).

Note que, o termo do multiplicador Lagrangeano é somado ao método da função de penalidade (ver Eq. (3.1.12)). Portanto, o método do multiplicador poderá ser visto como uma extensão diferenciada do método da função de penalidade exterior.

Antes de buscar o mínimo da Função Lagrangeana Aumentada $A(x, \lambda, C)$, é necessário garantir valores razoáveis para λ e C. O fator de resposta C pode ser determinado de maneira usual, i.e., primeiro é considerado um pequeno valor apropriado para o C inicial e posteriormente, incrementando-o de maneira predeterminada. Entretanto, qualquer valor pode ser atribuído a λ na Eq. (3.1.11). Esta característica do MLA, isto é, que a solução do problema

pode ser encontrada para qualquer λ , é muito boa, e importante na prática. Poderá, entretanto, ser observado que a completa aceleração da seqüência de minimizações sem restrição pode ser acelerada melhorando-se a escolha de λ . Um procedimento para correção de λ será descrito adiante. No caso específico em que $p=2$ obtem-se:

$$A(\mathbf{x}, \lambda, C) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\mathbf{x}) + \frac{C}{2} \sum_{i=1}^m h_i^2(\mathbf{x}) \quad (3.1.13)$$

Esta forma é conhecida como Função Lagrangeana Aumentada de Hestenes. É claro que, ao serem selecionados diferentes valores para p , é possível obter distintas versões do método do multiplicador. Por exemplo, Mangassarian recomenda o uso de $p = 4$. Aqui, subseqüentemente, seleciona-se a Eq. (3.1.13) como uma Função Lagrangeana Aumentada para o problema de restrição de desigualdade.

Para a seleção de λ , são considerados dois casos extremos. Inicialmente, supõem-se que todos λ_i são inicializados como zero para todos os problemas sem restrição. Então, a Eq. (3.1.13) torna-se:

$$A(\mathbf{x}, C) = f(\mathbf{x}) + \frac{C}{2} \sum_{i=1}^m h_i^2(\mathbf{x}) \quad (3.1.14)$$

Esta é a forma usual da função quadrática de penalidade e sabe-se que a seqüência $\{\mathbf{x}^k\}$, produzida pela solução dos problemas sem restrição, converge para a solução verdadeira, quando C tende ao infinito. Porém, com o aumento de C o problema tende a no limite, para $C \rightarrow \infty$, a ficar mal condicionado, o que torna, difícil a obtenção da solução nos últimos estágios do procedimento de otimização. Considera-se agora o outro caso. No início, considera-se que seja

possível saber o valor exato dos multiplicadores de Lagrange ótimos λ^* . Então, inicializa-se $\lambda = \lambda^*$ na Eq. (3.1.13) e obtêm-se:

$$A(x, \lambda^*, C) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* h_i(x) + \frac{C}{2} \sum_{i=1}^m h_i^2(x) \quad (3.1.15)$$

Agora, considerando-se que o vetor x encontrado, tal que, a função $A(x, \lambda^*, C)$, é minimizada para um valor arbitrário de $C > 0$, e representa o ponto solução como \bar{x} . Então \bar{x} deverá satisfazer as condições de estacionaridade:

$$\nabla_x A(x, \lambda^*, C) = 0 \quad (3.1.16)$$

ou

$$\nabla_x f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_x h_i(\bar{x}) + C \sum_{i=1}^m h_i(\bar{x}) \nabla_x h_i(\bar{x}) = 0 \quad (3.1.17)$$

Para o par ótimo (x^*, λ^*) obtêm-se as seguintes condições de Kuhn-Tucker :

$$\nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_x h_i(x^*) = 0 \quad (3.1.18)$$

e

$$h_i(x^*) = 0 \quad (i=1 \dots m) \quad (3.1.19)$$

Esta relação pode ser satisfeita identicamente para qualquer f , h_i e $C > 0$. Isto é possível somente se:

$$\bar{x} = x^* \quad (3.1.20)$$

Portanto, obtêm-se um resultado que pode ser interpretado como segue:

“Ao ser fornecido para λ em $A(x, \lambda, C)$ seu valor ótimo λ^* , então o problema sem restrição $\text{Min}_x A(x, \lambda^*, C)$ fornece a solução do problema original x^* para qualquer valor de $C > 0$.”

Desta observação chega-se a duas conclusões importantes:

- 1 - Se de algum modo é possível saber os valores ótimos dos multiplicadores de Lagrange λ^* no início, somente uma minimização sem restrição poderá ser requerida para obter a solução do problema original x^* .
- 2 - O fator C não precisa, necessariamente, tender ao infinito. Um valor suficientemente grande de C , que evite o inerente mal condicionamento do método da função de penalidade, pode ser utilizado.

Estas propriedades são muito importantes porque evitam maiores problemas, que são freqüentemente associados com método de função de penalidade. A observação precedente sugere que, sendo possível, de algum modo selecionar um bom valor aproximado para λ^* , as já mencionadas características desejadas serão, em algum grau, realizadas. Portanto a atenção é agora enfocada na descrição de um esquema para gerar uma boa aproximação do vetor ótimo dos multiplicadores de Lagrange λ^* .

Para fazer isso, observa-se o seguinte. Suponha primeiramente, que \bar{x} é solução do problema de mínimo, $A(x, \lambda, C)$, para um dado λ , $C > 0$. Então, a condição de estacionaridade em $\bar{x} = x^*$, i.e.,

$$\nabla_x f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + C h_i(\bar{x})) \nabla_x h_i(\bar{x}) \quad (3.1.21)$$

deve ser satisfeita. Por outro lado, para o ponto de solução ótica (x^*, λ^*) , as condições de Kuhn - Tucker ,

$$\nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_x h_i(x^*) = 0 \quad (3.1.22)$$

devem ser satisfeitas. Conseqüentemente , no limite $C \rightarrow \infty$, temos que $\bar{x} \rightarrow x^*$. Isto significa que a Eq. (3.1.21) tende no limite a Eq. (3.1.22) . Ou, pode-se dizer que a condição de Kuhn - Tucker, Eq. (3.1.22) é a forma limite da Eq. (3.1.21) em (x^*, λ^*) . Isto implica que, no limite $C \rightarrow \infty$, $\lambda_i + C h_i(\bar{x})$ converge para λ_i^* e $x^* \rightarrow x$.

Da razão precedente, é proposta a seguinte relação recursiva para a atualização dos multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + C h_i(\bar{x}^k) \quad (3.1.23)$$

onde \bar{x}^k é a solução do k-ésimo problema sem restrição.

Hestenes prova que a seqüência de $\{\lambda^k\}$ converge para λ^* e que ela pode atualmente acelerar a convergência do processo com um valor finito de $C > 0$. Uma rigorosa prova matemática é dada por Bertsekas. Aqui somente os resultados são referenciados.

Este assume que:

1 - (x^*, λ^*) satisfaz as condições suficientes de segunda ordem para x^* ser um ponto de mínimo local.

2 - $\nabla_x^2 f, \nabla_x^2 h_i$ ($i = 1, \dots, m$) são Lipschitz contínuos na vizinhança de x^* .

3 - Nenhum erro está envolvido no *line search*. Portanto, existe $C^* > 0$, $M > 0$ tal que para todo $C^k > C^*$ nós temos:

$$\|\bar{x}^k - x^*\| \leq \frac{M}{C^k} \|\lambda^k - \lambda^*\| \quad (3.1.24)$$

e

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda^*\| \leq \frac{M}{C^k} \|\lambda^k - \lambda^*\| \quad (3.1.25)$$

onde λ^{k+1} é obtido a partir de λ^k pela Eq. (3.1.28). A notação $\|\dots\|$ denota a norma euclidiana.

A Eq. (3.1.30) mostra que se C^k é suficientemente grande mas permanece finito para garantir a condição M/C^k , então a seqüência de $\{\lambda^k\}$ converge para λ^* linearmente. Por outro lado, se C^k vai para infinito quando $k \rightarrow \infty$, a série converge superlinearmente, i.e., $\{x^k\}$ converge para x^* e $\{\lambda^k\}$ para λ^* . É claro que, se $C^k \rightarrow \infty$, $\{x^k\}$ converge para x^* . Em qualquer evento, propriedades de convergência local e global do MLA podem ser estabelecidas.

A taxa de convergência de $\{x^k\}$ é representada pelo lado direito da Eq. (3.1.24). Já que $\{\lambda^k\}$ converge no mínimo linearmente, $\{x^k\}$ também converge no mínimo linearmente.

Agora, examinando-se os casos extremos. Suponha que $\lambda^k = \lambda^*$, então a Eq. (3.1.24) torna-se :

$$\|\bar{x}^k - x^*\| \leq 0 \quad (3.1.26)$$

Mas a norma na Eq. (3.1.26) é sempre não negativa, portanto temos que $\bar{x}^k = x^*$. Assim somente uma solução para o problema sem restrição é requerida. Demonstrou-se previamente este caso de outro modo. Continuando, inicializando $\lambda^k = 0$ para todo k (i.e., o caso do puro método da função de penalidade). Então, se tem que:

$$\|\bar{x}^k - x^*\| \leq \frac{M\|\lambda^*\|}{C^k} \quad (3.1.27)$$

Portanto, somente se C^k tende ao infinito, faz $\{x^k\}$ convergir para x^* . Então, muitas soluções de problemas sem restrição serão necessárias. Esta não é uma situação favorável. Em adição a isto, temos que fazer que C seja tão grande quanto possível, o mal condicionamento do problema sem restrição não poderá ser evitado.

A escolha de λ devido a Hestenes pode realmente acelerar a convergência de todo processo de otimização. Ele incrementou a fórmula da Eq. (3.1.23) tendo uma outra interpretação do ponto de vista dual.

Assumindo a existência de pontos de sela de $A(x, \lambda, C)$, é obtida a condição do ponto de sela:

$$A(x^*, \lambda, C) \leq A(x^*, \lambda^*, C) \leq A(x, \lambda^*, C) \quad (3.1.28)$$

Esta relação indica que o par ótimo (x^*, λ^*) poderá ser obtido da primeira minimização de $A(x, \lambda, C)$ para um dado λ e C com relação a x e a próxima maximização de $A(\bar{x}, \lambda, C)$ com relação a λ onde \bar{x} é a solução do problema de minimização. Este processo é repetido até que a convergência seja obtida. Este é também chamado processo primal - dual de otimização.

Agora define-se a função dual $A_c(\lambda)$ para $A(x, \lambda, C)$ tal como:

$$A_c(\lambda) = \text{Min}_x A(x, \lambda, C) \quad (3.1.29)$$

Portanto, o gradiente de $A_C(\lambda)$ com relação a λ é dado por :

$$\nabla_{\lambda} A_C(\lambda) = \nabla_{\lambda} A(\bar{x}, \lambda, C) \quad (3.1.30)$$

Partindo da definição da Eq. (3.1.13), a Eq. (3.1.30) torna-se:

$$\nabla_{\lambda} A_C(\lambda) = h(\bar{x}) \quad (3.1.31)$$

onde $h(\bar{x})$ é um vetor da função $h_i(x)$ avaliada em $x = \bar{x}$.

Substituindo a Eq. (3.1.31) na fórmula aumentada de Hestenes Eq. (3.1.28), então encontra-se a fórmula aumentada em termos da variável dual, i.e., o multiplicador de Lagrange.

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + C^k \nabla_{\lambda} A_C(\lambda^k) \quad (3.1.32)$$

Esta relação mostra claramente que o incremento dos multiplicadores de Lagrange pelo método do multiplicador corresponde a um movimento de subida, com tamanho do passo C^k , no espaço dual. Portanto o método do multiplicador pode ser visto como um tipo de método primal - dual, com uma procura muito limitada para o multiplicador de Lagrange ótimo no espaço dual.

Agora, a versão de Hestenes do método do multiplicador para um problema geral de restrição de igualdade pode ser resumido como segue:

⇒ Passo 1: Inicializar $\lambda^0 = 0$ e apropriado fator de resposta $C^0 > 0$.

⇒ Passo 2: Resolver $\text{Min}_x A(x, \lambda^k, C^k)$, denota sua solução como x^k .

⇒ Passo 3: Incrementar λ^k por $\lambda^{k+1} = \lambda^k + C h(x^k)$.

⇒ Passo 4: Se $\lambda^{k+1} = \lambda^k$, então parar. A solução ótima (x^*, λ^*) é obtida. Se não vá para o Passo 5.

⇒ Passo 5: Inicialize $\lambda^k = \lambda^{k+1}$. Se $C^k \leq C^{max}$ onde C^{max} é um número de valor alto pré - selecionado, incremente C^k através de:

$$C^k = \gamma C^k$$

onde $\gamma > 1$.

Do contrário $C^k = C^k$. Vá ao Passo 2 com $k = k + 1$.

Note que como não é feita qualquer pré - suposição considerando a natureza das funções objetivo e de restrições (e.g. , convexas, côncavas, etc.), exceto para sua diferenciabilidade e condições de Lipschitz, podemos obter pela aplicação do algoritmo, um mínimo local.

3.2 - Problema de Restrição de Desigualdade

A completa discussão do problema de restrição de igualdade na seção prévia é interessante do ponto de vista teórico. Entretanto, os problemas de otimização estrutural são usualmente problemas de restrição de desigualdade. Portanto, o algoritmo desenvolvido na seção (3.1) deverá ser estendido ao caso de restrição de desigualdade. A extensão desenvolvida será descrita nesta seção.

Considerando um problema geral de restrição de desigualdade não linear como segue:

$$\text{Min } f(x) \quad (3.2.1)$$

$$\text{sujeito a } g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.2.2)$$

onde f e a g_i são funções não lineares gerais de um vetor - n de x e m é o número de restrições de desigualdade.

Agora, pela introdução de variáveis de folga, é possível converter o problema das Eqs. (3.2.1) e (3.2.2) em um problema de restrições de igualdade como segue:

$$\text{Min } f(x) \quad (3.2.3)$$

$$\text{sujeito a } g_i(x) + z_i^2 = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.2.4)$$

onde z_i é a variável de folga para a i -ésima restrição.

É claro que, o problema original das Eqs. (3.2.1-2) e (3.2.3-4) são equivalentes, mas a última têm $(n + m)$ variáveis. O problema convertido tem a mesma forma que o problema de restrição de igualdade previamente considerado, representado pelas Eqs. (3.1.1) e (3.1.2). Portanto, é possível aplicar todos os resultados na seção 3.1 simplesmente trocando-se h_i por $g_i(x) + z_i^2$. A Função Lagrangeana Aumentada pode ser escrita agora, como segue:

$$A(x, z, \lambda, C) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + z_i^2) + \frac{C}{2} \sum_{i=1}^m ((g_i(x) + z_i^2))^2 \quad (3.2.5)$$

Em problemas de otimização estrutural o número de restrições é usualmente muito maior do que o número de variáveis de projeto independentes. Portanto, ao ser aplicar o algoritmo da seção 3.1 diretamente, o problema sem restrição a ser resolvido tem muitas variáveis. Entretanto,

é possível eliminar as variáveis de folga z_i da Eq. (3.2.5) pela primeira minimização de $A(x, z, \lambda, C)$ com relação a z_i como segue:

Para o ponto de mínimo de $A(x, z, \lambda, C)$, as condições necessária para um mínimo local com relação as variáveis de folga z_i são as condições de estacionaridade;

$$\frac{\partial A}{\partial z_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.2.6)$$

Portanto, pela diferenciação da Eq. (3.2.5) com relação a z_i , é encontrada a seguinte relação:

$$2z_i \left(\frac{\lambda_i}{C} + g_i(x) + z_i \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.2.7)$$

para o ponto de mínimo.

Agora, resolvendo em termos de z_i , obtêm-se:

$$z_i^2 = \max \left(0, -\frac{\lambda_i}{C} - g_i(x) \right) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (3.2.8)$$

Isto satisfaz a Eq. (3.2.7). Portanto esta é a solução da Eq. (3.2.6). Então, as z_i 's são variáveis independentes para o ponto de mínimo. Assim, elimina-se o vetor z em $A(x, z, \lambda, C)$ pela utilização da Eq. (3.2.8). Fisicamente falando, a Eq. (3.2.8) implica que se g_i é uma restrição crítica, então a correspondente variável de folga é zero e se g_i é uma restrição não crítica, então, a correspondente variável de folga é não nula.

Portanto, se tem a relação:

$$g_i(x) + z_i^2 = \max \left(g_i(x), -\frac{\lambda_i}{C} \right) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (3.2.9)$$

Substituindo a Eq. (3.2.9) na Eq. (3.2.5) obtêm-se uma Função Lagrangeana Aumentada que não envolve a variável de folga, com a seguinte forma:

$$A(\mathbf{x}, \lambda, C) = f(\mathbf{x}) + C \sum_{i=1}^m \psi_i \left(g_i(\mathbf{x}), \frac{\lambda_i}{C} \right) \quad (3.2.10)$$

onde:

$$\psi_i \left(g_i(\mathbf{x}), \frac{\lambda_i}{C} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2} g_i^2(\mathbf{x}) + \frac{\lambda_i}{C} g_i(\mathbf{x}) & \text{se } g_i(\mathbf{x}) \geq -\frac{\lambda_i}{C} \\ \text{caso contrario } -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_i}{C} \right) & \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Esta forma é referida como função Lagrangeana Aumentada de Rockafellar. Note que as funções ψ_i são contínuas e elas têm planos tangentes comuns ao longo do contorno definidos por $g_i(\mathbf{x}) = -\frac{\lambda_i}{C}$. Assim ψ_i têm continuidade C^1 e qualquer tipo de método de otimização por gradiente pode ser aplicado ao problema sem restrição definido pela Eq. (3.2.10). Entretanto, já que as segundas derivadas da função ψ_i são descontínuas ao longo do contorno $g_i(\mathbf{x}) = -\frac{\lambda_i}{C}$, não pode-se utilizar algoritmos de Newton para resolver o problema sem restrição definido pela Eq. (3.2.10).

Tendo a relação obtida na Eq. (3.2.9) e considerando a fórmula de atualização dos multiplicadores de Lagrange proposta por Hestenes pode-se escrever:

$$\lambda_i^{k+1} = \max(0, \lambda_i^k + C g_i(\bar{\mathbf{x}}^k)) \quad (3.2.12)$$

Portanto, o algoritmo do multiplicador para o problema de restrição de desigualdade mostrado na seção 1.2 pode ser obtido pela simples troca da função Lagrangeana aumentada e a fórmula de

atualização de λ no algoritmo mostrado na seção 3.1 com as novas definições das Eqs. (3.2.10) e (3.2.12).

Note que todas propriedades descritas na seção 3.1 são também aplicadas para o caso de restrições de desigualdade após ser transformado em um problema equivalente de restrição de igualdade.

3.3 – Conclusões Sobre o Método do Multiplicador (*Multiplier Method*)

O método do multiplicador é comparativamente avaliado com alguns métodos de programação matemática comumente aplicados em problemas de otimização estrutural.

O método do multiplicador é comprovadamente superior aos métodos da função de penalização exterior e interior. As razões são as seguintes:

- i - O mal condicionamento associado aos métodos de penalidade podem ser eliminados, pois não é necessário incrementar o fator de resposta C excessivamente.
- ii - O método do multiplicador pode obter uma solução exata. Já os métodos de penalidade não.
- iii - Nos métodos de penalidade, a convergência é obtida assintoticamente. O único fator que dirige o projeto até uma solução ótima é o incremento constante do fator de resposta. Por outro lado, o método do multiplicador é linearmente convergente e ele acelera todo o processo pela convergência dos multiplicadores de Lagrange, bem como do fator de resposta.

Em adição às vantagens precedentes, o método do multiplicador tem seus próprios méritos:

- i - Por ser usado ou como um “método de penalização interior” ou como um “método de penalização exterior”, para o método do multiplicador qualquer ponto de partida é permitido, fornecendo-se a ele qualquer parte do espaço de projeto sobre o qual a análise é válida.

- a) A seleção dinâmica das restrições ativas é possível e está baseada em sólidos fundamentos teóricos. Isto pode ser feito da seguinte maneira. Suponha que o método

do multiplicador seja utilizado com os multiplicadores de Lagrange iniciais iguais a zero. Seja \bar{x} a primeira solução do problema sem restrição. Então os multiplicadores de Lagrange são atualizados pela fórmula:

$$\lambda_i^{k+1} = \max(0, \lambda_i^k + Cg_i(\bar{x})) \quad (3.3.1)$$

Entretanto, desde que tenhamos escolhido $\lambda_i^0 = 0$ a fórmula de atualização torna-se:

$$\lambda_i^1 = \max(0, Cg_i(\bar{x})) \quad (3.3.2)$$

Fica compreendido que $C > 0$ está implicado. E se a restrição está satisfeita para $x = \bar{x}$, i.e., $g_i(\bar{x}) \leq 0$, então:

$$\lambda_i^1 = 0 \quad (3.3.4)$$

Em outras palavras, se uma restrição de desigualdade não é satisfeita para $x = \bar{x}$, então os correspondentes multiplicadores de Lagrange tem valor positivo. Por outro lado, ele permanece sem mudar em zero.

Portanto, no próximo ciclo de minimização sem restrição, somente é necessário considerar o conjunto de restrições com valores positivos dos multiplicadores de Lagrange. Após receber o segundo problema de minimização sem restrição todos os multiplicadores são atualizados de acordo com a Eq. (3.3.1).

Então, as restrições com multiplicadores de Lagrange são consideradas e as restrições com multiplicadores de Lagrange iguais a zero são ignoradas e é iniciado um novo conjunto de restrições ativas. Estes procedimentos iterativos são repetidos até a convergência. Foi observado

que o conjunto de restrições ativas definido tende a estabilizar-se rapidamente e somente após alguns estágios de minimização sem restrição, o conjunto correto de restrições ativas surge. Este esquema para seleção dinâmica de restrições ativas é muito mais elegante do que outros um tanto intuitivos que eram frequentemente empregados para reduzir o número de restrições retidas em problemas de otimização estrutural.

A efetividade deste esquema para seleção dinâmica de restrições ativas reside no fato que restrições ativas tem multiplicadores positivos e restrições inativas tem multiplicadores de Lagrange zero para a solução ótima.

Agora, compara-se o método do multiplicador com o método de direções viáveis. Este método é essencialmente empírico para procurar uma direção de descida razoável entre muitas candidatas, análises da taxa de convergência são difíceis de se fazer. A atual taxa de convergência do método tende a ser grandemente dependente da não linearidade do problema e da escolha dos parâmetros de controle utilizados no método. Este é o conhecido fenômeno de “zig-zag” e está inevitavelmente associado com o método, quando o ponto de projeto se aproxima da solução ótima. Isto é claro, reduz muito a taxa de convergência do método. Não podemos dizer que o método do multiplicador seja superior em velocidade de convergência em relação ao método de direções viáveis. Entretanto, é razoável declarar que o método de direções viáveis irá requerer sofisticadas técnicas de programação, de maneira a obter uma boa taxa de convergência. Neste sentido, o método do multiplicador é mais teórico e mais fácil de implementar.

Considere agora o método do gradiente projetado. Este método conduz para uma solução ótima ao longo das intersecções entre restrições críticas. Portanto, viabilidade são facilmente violadas as restrições em problemas altamente não lineares, tais como problemas de otimização de configuração, e a projeção para a solução factível nem sempre é obtida.

Este método é competitivo somente para problemas de dimensão puros com tensão estática e restrições de deslocamento . Portanto o método do multiplicador é um método de maior aplicabilidade do que o método do gradiente projetado.

Capítulo 4

Apresentação das Expressões

Neste capítulo, as expressões dos cálculos requeridos do problema de configuração estão descritas. Na Seção 4.1, apresenta-se a normalização das variáveis de projeto. Na Seção 4.2, o conceito de restrição perturbada é apresentado e a forma correspondente da Função Lagrangeana Aumentada é fornecida. Na Seção 4.3, o algoritmo empregado para a solução do problema de minimização sem restrição é brevemente documentado. As seções 4.4 até 4.6 descrevem a análise de sensibilidade (função objetivo, resposta dos deslocamentos e resposta da tensão) e são apresentadas no contexto do método dos elementos finitos com o conceito de variável inter-relacionada. Precauções especiais são tomadas para limitar a busca de um ponto de projeto ótimo para aquela porção do espaço de projeto sobre o qual a análise estática estrutural é bem condicionada e válida. Prevenção de área de Seção transversal negativa é discutida na Seção 4.7.

4.1 - Normalização de Variáveis e Restrições

Após implementar o método do multiplicador a problemas de otimização estrutural definidos na Seção 2.1, a normalização de variáveis e restrições devem ser introduzidas.

As restrições são normalizadas como segue, e, portanto, elas contribuem uniformemente para o termo de penalidade na Função Lagrangeana Aumentada:

$$C_{\sigma_i} (\sigma_{ik} - \sigma_i^u) \leq 0 \quad (4.1.1)$$

$$C_{\sigma_i}(\sigma_i^{\max} - \sigma_{ik}) \leq 0 \quad (4.1.2)$$

$$C_{u_i}(u_{ik} - u_i^u) \leq 0 \quad (4.1.3)$$

$$C_{u_i}(u_i^l - u_{ik}) \leq 0 \quad (4.1.4)$$

$$C_{\beta_i}(\beta_i - \beta_i^u) \leq 0 \quad (4.1.5)$$

$$C_{\beta_i}(\beta_i^l - \beta_i) \leq 0 \quad (4.1.6)$$

$$C_{y_i}(y_i - y_i^u) \leq 0 \quad (4.1.7)$$

$$C_{y_i}(y_i^l - y_i) \leq 0 \quad (4.1.8)$$

$$C_{y_{ij}}(y_i - y_j) \leq 0 \quad i \neq j \quad (4.1.9)$$

onde C_{σ_i} , C_{u_i} , C_{β_i} , C_{y_i} e $C_{y_{ij}}$ representam fatores apropriados de normalização os quais tem sido definidos, respectivamente, como segue.

$$C_{\sigma_i} = 1 / (\sigma_i^u - \sigma_i^l) \quad (4.1.10)$$

$$C_{u_i} = 1 / (u_i^u - u_i^l) \quad (4.1.11)$$

$$C_{\beta_i} = 1 / (\beta_i^u - \beta_i^l) \quad (4.1.12)$$

$$C_{y_i} = 1 / (y_i^u - y_i^l) \quad (4.1.13)$$

$$C_{y_{ij}} = 1 / (y_j^u - y_i^l) \quad (4.1.14)$$

por outro lado, variáveis são normalizadas como segue:

$$\beta_i' = \beta_i / \beta_i^r \quad e \quad y_i' = y_i / y_i^r \quad (4.1.15)$$

onde β_i^r e y_i^r são os respectivos valores de referência das áreas recíprocas e coordenadas nodais. Neste trabalho, valores iniciais são tomados por conveniência. Embora seja bem sabido que a normalização pode melhorar drasticamente o desempenho de algoritmos de otimização, não procurou-se um esquema ótimo para normalização de variáveis.

4.2 - Formulação do Problema Perturbado

O método do multiplicador com multiplicadores de Lagrange inicializados como zero é um método de otimização não factível. Portanto, na prática o método converge computacionalmente para um projeto o qual será levemente inviável. Isto não é uma situação desejável do ponto de vista prático e, portanto, uma opção foi aceita para aliviar esta dificuldade.

O seguinte problema perturbado é considerado para este objetivo:

$$\text{Min } w(\beta, y) \quad (4.2.1)$$

sujeito a

$$g_i(\beta, y) \leq -\varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \quad (4.2.2)$$

onde ε é um pequeno número positivo. A restrição g_i deverá ser compreendida para representar as restrições normalizadas definidas pelas Eqs. (4.1.1) até (4.1.9). Em uma interpretação gráfica da Eq. (4.2.2), as restrições são levemente puxadas para dentro da região viável. Portanto, pela seleção de um pequeno valor positivo para ε , se está apto a terminar o algoritmo com um projeto viável após alguns estágios de otimização.

A Função Lagrangeana Aumentada, ϕ , torna-se, neste caso:

$$\phi = w + C \sum_{i=1}^{N_c} \psi_i \quad (4.2.3)$$

no qual,

$$\psi_i = \begin{cases} \frac{1}{2}(g_i + \varepsilon)^2 + \frac{\lambda_i}{C}(g_i + \varepsilon) & \text{se } g_i + \varepsilon \geq -\frac{\lambda_i}{C} \\ \text{se não} \\ -\frac{\lambda_i^2}{2C^2} \end{cases} \quad (4.2.4)$$

é claro que, fazendo com que $\varepsilon = 0$, nas definições acima, as Eqs. (4.2.3) e (4.2.4) reduzem-se para o problema de restrição de desigualdade geral definido da Seção 3.2.

Atualmente a opção $\varepsilon = 0$ foi satisfatoriamente utilizada através de cálculos e foi encontrado que soluções obtidas aqui são levemente inviáveis, i.e., $g \approx + 10^{-3}$. Observe que a normalização destes projetos com relação as variáveis de dimensão fornece um método direto de obter resultados estritamente viáveis.

4.3 - Método de Solução Para Problemas Sem Restrição

O Método do Lagrangeano Aumentado requer a solução de uma seqüência de problemas sem restrição definido pela Eq. (4.2.3). Para isto utiliza-se o Método Quase-Newton. Este é um método intermediário entre o *steepest descent* e o Método de Newton. Assumindo ser impraticável a determinação da matriz Hessiana, busca-se uma aproximação da inversa da matriz Hessiana pela utilização de informação de gradiente de pontos anteriores, do processo iterativo. O método utilizado é o Broydon - Fletcher - Goldfarb - Shanno, ou BFGS. O algoritmo pode ser descrito como segue para um problema de minimização sem restrição:

$$\text{Min}_x f(x) \quad (4.3.1)$$

Passo 1: estimar o ponto de projeto inicial x_0 e inicializar uma matriz simétrica positiva definida $S_0 = 1$ (matriz identidade) como uma aproximação da matriz Hessiana.

Passo 2: calcular o $\nabla f(x_0)$

Passo 3: determinar o tamanho do passo ótimo α^* pela solução de:

$$\text{Min}_{\alpha \geq 0} f(x_0 - \alpha S_0 \nabla f(x_0)) \quad (4.3.2)$$

aqui \bar{x} representa a solução.

Passo 4: calcular o $\nabla f(\bar{x})$ para o novo ponto de projeto \bar{x} .

Passo 5: calcular

$$P = -\alpha S_0 \nabla f(x_0) \quad (\text{mudança no projeto}) \quad (4.3.3)$$

e

$$q = \nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x_0) \quad (\text{mudança do gradiente}) \quad (4.3.4)$$

Passo 6: atualizar a aproximação da matriz Hessiana S_0 por:

$$S_0 = S_0 - \left(\frac{S_0 q q^T S_0}{q^T S_0 q} \right) \frac{p^T q}{q^T S_0 q} + \frac{p p^T}{p^T q} \quad (4.3.5)$$

Passo 7: faça $x_0 \leftarrow \bar{x}$ e $\nabla f(x_0) \leftarrow \nabla f(\bar{x})$

vá para o passo 3.

O termo $p^T q / q^T S_0 q$ é somado à Eq. (4.3.5) para melhorar a estrutura de autovalores da matriz Hessiana de problema sem restrição.

No presente trabalho, o algoritmo é terminado quando a diferença mínima entre dois multiplicadores de Lagrange é menor que 0.1%.

De modo a utilizar o algoritmo mencionado, é preciso calcular o gradiente da função Lagrangeana aumentada, ϕ , definida na Eq. (4.2.3). Suas componentes são simplesmente dadas por:

$$\phi_{,\beta_k} = w_{,\beta_k} + C \sum_{i=1}^{N_c} \left(\psi_{i,\beta_k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \beta_k} \right) \quad (4.3.6)$$

e

$$\phi_{,y_k} = w_{,y_k} + C \sum_{i=1}^{N_c} \left(\psi_{i,y_k} + \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \right) \quad (4.3.7)$$

As derivadas parciais dos termos penalizados fornecem:

$$\psi_{i,\beta_k} = \begin{cases} \left(g_i + \varepsilon + \frac{\lambda_i}{C} \right) g_{i,\beta_k} & \text{se } g_i + \varepsilon \geq -\frac{\lambda_i}{C} \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases} \quad (4.3.8)$$

e

$$\psi_{i,y_k} = \begin{cases} \left(g_i + \varepsilon + \frac{\lambda_i}{C} \right) g_{i,y_k} & \text{se } g_i + \varepsilon \geq -\frac{\lambda_i}{C} \\ 0 & \text{do contrário} \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Portanto, para avaliar o gradiente da Função Lagrangeana Aumentada, ϕ , é preciso obter,

i - As derivadas das funções objetivo, i.e., $w_{,\beta_k}$ e $w_{,y_k}$

ii - As derivadas das funções de restrição, i.e., g_{i,β_k} e g_{i,y_k} . A derivação da função objetivo é apresentada na Seção 4.4. Para obter as derivadas das funções de restrição é necessário avaliar três termos; (1) a sensibilidade da tensão, i.e., σ_{u,β_k} e σ_{u,y_k} (2) limite inferior da sensibilidade de tensão, i.e., σ_i^{max,β_k} e σ_i^{max,y_k} e (3) sensibilidade dos deslocamentos, i.e., u_{u,β_k} e u_{u,y_k} . A sensibilidade para os deslocamentos são apresentadas na Seção 4.5. Por outro lado, A tensão e seus limites inferiores de sensibilidade são dados na Seção 4.6.

4.4 - Análise de Sensibilidade da Função Objetivo

Nesta Seção, as formas das expressões são dadas para as derivadas da função objetivo com relação as variáveis de projeto.

A função objetivo foi definida por:

$$w = \sum_{i=1}^{N_m} \rho_i A_i L_i \quad (4.4.1)$$

Isto pode ser reescrito pela utilização do conceito de inter-relacionamento de variáveis introduzido na Seção 2.2 como:

$$w = \sum_{i=1}^{N_\beta} \left(\sum_{j \in G_\beta^i} \rho_j A_j L_j \right) \quad (4.4.2)$$

Entretanto,

$$A_j = \frac{1}{\beta_j} \quad \text{se} \quad j \in G_\beta^i \quad (4.4.3)$$

Portanto, a Eq. (4.4.2) torna-se,

$$w = \sum_{i=1}^{N_\beta} \left(\sum_{j \in G_\beta^i} \rho_j L_j \right) \frac{1}{\beta_i} \quad (4.4.4)$$

Assim pode-se facilmente obter:

$$w_{,\beta_k} = -A_k^2 \left(\sum_{j \in G_\beta^i} \rho_j L_j \right) \quad (4.4.5)$$

Esta é a expressão requerida para a função objetivo derivada em relação às variáveis independentes recíprocas β_k .

Adiante, considere a diferenciação da função objetivo com relação a uma variável coordenada nodal independente y_k . Na visão da Eq. (4.4.1), segue pela diferenciação direta que :

$$w_{,y_k} = \sum_{i=1}^{N_m} \rho_i A_i L_{i,y_k} \quad (4.4.6)$$

já que apenas o comprimento do elemento, L_i , é função das coordenadas nodais. Agora, relembrando a definição de conjunto de membros inter-relacionados G_y^k introduzido na Seção 2.2, segue-se que $L_{i,y_k} = 0$ se $i \in G_y^k$. Portanto, a Eq. (4.4.5) torna-se :

$$w_{,y_k} = \sum_{i \in G_y^k} \rho_i A_i L_{i,y_k} \quad (4.4.7)$$

Continuando, é preciso avaliar a quantidade L_{i,y_k} para $i \in G_y^k$.

O comprimento do membro é dado pela fórmula:

$$L_i = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \quad (4.4.8)$$

para membros tri-dimensionais e por:

$$L_i = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \quad (4.4.9)$$

para membros bi-dimensionais. Os símbolos L_x , L_y e L_z representam respectivamente a projeção do comprimento do i -ésimo membro no sistema de coordenadas de referência (X, Y, Z).

Para simplificar a discussão, considere novamente o caso bi-dimensional. Observe, entretanto, que um procedimento similar para o caso tri-dimensional pode ser desenvolvido.

Então, L_{i,y_k} é dado por:

$$L_{i,y_k} = (L_x L_{x,y_k} + L_y L_{y,y_k}) / L_i \quad (4.4.10)$$

Suponha que (X_1, X_2) e (X_3, X_4) sejam as coordenadas nodais correspondentes as extremidades do i -ésimo membro. Então, obviamente, tem-se:

$$L_x = X_3 - X_1 \quad (4.4.11)$$

$$L_y = X_4 - X_2 \quad (4.4.12)$$

Portanto,

$$L_{x^j y_k} = X_{3^j y_k} - X_{1^j y_k} \quad (4.4.13)$$

$$L_{y^j y_k} = X_{4^j y_k} - X_{2^j y_k} \quad (4.4.14)$$

Entretanto, da Seção 2.2 uma inter-relação entre coordenadas nodais dependentes X_i ($i=1, \dots, 4$) e coordenadas nodais dependentes y_k :

$$X_j = \sum_{k=1}^{N_y} T_{jk}^i y_k \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (4.4.15)$$

onde T_{jk}^i é entendido como sendo um componente do sistema de matriz de inter-relacionamento T_{jk}^i associado com o i -ésimo membro. Portanto, T_{jk}^i é assumida como constante, e dela segue que:

$$X_{j^i y_k} = T_{jk}^i \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (4.4.16)$$

Substituindo a Eq. (4.4.16) nas Eqs. (4.4.13) e (4.4.14) é fornecido:

$$L_{x^j y_k} = T_{3k}^i - T_{1k}^i \quad (4.4.17)$$

$$L_{y^j y_k} = T_{4k}^i - T_{2k}^i \quad (4.4.18)$$

Substituindo a Eq. (4.4.17) e a Eq. (4.4.18) na Eq. (4.4.10) obtém-se a seguinte expressão geral para a derivada de comprimento do membro com relação a coordenada nodal independente:

$$L_{i,y_k} = \left(L_x (T_{3k}^i - T_{1k}^i) + L_y (T_{4k}^i - T_{2k}^i) \right) / L_i \quad (4.4.19)$$

Finalmente, substituindo a Eq. (4.4.19) na Eq. (4.4.6) fornece a derivada da função com relação a y_k como:

$$w_{,y_k} = \sum_{i \in G_y^k} \frac{\rho_i A_i}{L_i} \left[L_x (T_{3k}^i - T_{1k}^i) + L_y (T_{4k}^i - T_{2k}^i) \right] \quad (4.4.20)$$

A precedente relação de sensibilidade (Eq.(4.4.20)) fornece a taxa de mudança da função objetivo com relação a qualquer coordenada nodal independente y_k .

4.5 - Análise de Sensibilidade dos Deslocamentos

Nesta Seção, derivadas da resposta dos deslocamentos com relação às variáveis independentes de dimensão e configuração são consideradas no contexto do método dos elementos finitos.

Relações força - deslocamento para o i -ésimo membro podem ser escritas em termos de coordenadas de referência como segue:

$$K_i u_i = F_{Mi} + F_{Di} + F_{Ti} \quad (4.5.1)$$

onde K_i é a matriz de rigidez do elemento, u_i é o vetor de deslocamentos do elemento, e F_{Mi} , F_{Di} e F_{Ti} representam, respectivamente, os vetores de carregamento mecânico, peso próprio e térmico para o i -ésimo membro. Observe que o índice para múltiplas condições de carregamento é intencionalmente omitido na Eq. (4.5.1) para simplificar a notação. Os termos algébricos detalhados de deslocamento F_{Mi} , F_{Di} e F_{Ti} para elementos de duas dimensões estão dados no Apêndice B.

Antes de mais nada, considere a diferenciação implícita das relações força-deslocamento com relação a β_k . Pela diferenciação direta da Eq. (4.5.1), obtemos:

$$K_{i,\beta_k} u_i + K_i u_{i,\beta_k} = F_{Mi,\beta_k} + F_{Di,\beta_k} + F_{Ti,\beta_k} \quad (4.5.2)$$

No entanto, F_{Mi} é independente de β_i . Assim, $F_{Mi,\beta_k} = 0$ e a Eq. (4.5.2) reduz-se para:

$$K_i u_{i,\beta_k} = -K_{i,\beta_k} u_i + F_{Di,\beta_k} + F_{Ti,\beta_k} \quad (4.5.3)$$

Agora resumindo estas Eqs. dos elementos em um sistema de Eqs. de equilíbrio, obtém-se:

$$Ku_{\beta_k} = \sum_{i=1}^{N_m} \left(-K_{i,\beta_k} u_i + F_{Di,\beta_k} + F_{Ti,\beta_k} \right) \quad (4.5.4)$$

onde K e u , respectivamente, representam a matriz de rigidez do sistema e o vetor de deslocamentos do sistema. As quantidades no lado direito da Eq. (4.5.4) são conhecidas por expansão e portanto são compatíveis com o sistema de Eqs. (isto é obtido inserindo-se zeros nas posições apropriadas).

Se $i \notin G_\beta^k$, então:

$$K_{i,\beta_k} = F_{Di,\beta_k} = F_{Ti,\beta_k} = 0 \quad (4.5.5)$$

Portanto, o somatório na Eq. (4.5.4) é restrito a membros em G_{β}^k . Portanto, dele segue que:

$$Ku_{,\beta_k} = \sum_{i \in G_{\beta}^k} \left(-K_{i,\beta_k} u_i + F_{Di,\beta_k} + F_{Ti,\beta_k} \right) \quad (4.5.6)$$

Esta Eq. é análoga a usual Eq. de análise e somente o vetor carga é mudado. Assim K tem sido previamente decomposto, não existindo dificuldade na resolução da Eq. (4.5.6) de modo a obter a sensibilidade de resposta dos deslocamentos a mudanças nas variáveis independentes recíprocas β_k as quais são dadas no Apêndice B para o caso bi-dimensional.

Similarmente, uma expressão para a derivada de deslocamentos com relação a coordenada nodal independente y_k pode ser encontrada:

$$Ku_{,y_k} = \sum_{i \in G_y^k} \left(-K_{i,y_k} u_i + F_{Di,y_k} + F_{Ti,y_k} \right) \quad (4.5.7)$$

onde é assumido que o carregamento mecânico é independente da mudança de configuração. As quantidades requeridas K_{i,y_k} , F_{Di,y_k} e F_{Ti,y_k} necessárias a determinação dos pseudo vetores de carregamento estão dadas no Apêndice B para o caso de elemento de barra de duas dimensões.

4.6 - Análise de Sensibilidade de Tensão

A tensão no i-ésimo membro é dada por:

$$\sigma_{ii} = S_i u_{ii} - \theta_i \Delta T_i E_i \quad (4.6.1)$$

onde σ_{ii} é a tensão no i -ésimo membro devido a i -ésima condição de carga, u_{ii} é o vetor de deslocamentos do elemento devido a i -ésima condição de carga e θ_i , ΔT_i e E_i , representam, respectivamente, o coeficiente de expansão térmica, a mudança de temperatura e o módulo de elasticidade do i -ésimo membro. O símbolo S_i representa a matriz de tensão, a qual é função de coordenadas nodais somente. A matriz S_i para um membro i é dada no Apêndice C.

A diferenciação direta da Eq. (4.6.1) com relação a β_k e y_k , respectivamente, fornece:

$$\sigma_{ii,\beta_k} = S_i u_{ii,\beta_k} \quad (4.6.2)$$

$$\sigma_{ii,y_k} = S_{i,y_k} u_{ii} + S_i u_{ii,y_k} \quad (4.6.3)$$

Assim, os valores da sensibilidade dos deslocamentos u_{ii,β_k} e u_{ii,y_k} são avaliados a partir dos resultados obtidos da Seção (4.5). A análise de sensibilidade de tensão podem ser obtidos pela simples execução das multiplicações de matrizes indicadas na Eq. (4.6.2) e (4.6.3) observe que S_{i,y_k} e S_i estão ambos no Apêndice C.

Portanto, o limite inferior da tensão tem sido definido como:

$$\sigma_i^{max} = \max(\sigma_i^{(L)}, \sigma_{ib}) \quad (4.6.4)$$

ele é também uma função de variáveis de projeto. Recordando a definição de tensão de flambagem σ_{ib} na Eq. (2.1.4) e diferenciando em relação a β_k e y_k , respectivamente, conduz as seguintes expressões:

$$\sigma_{i, \beta_k}^{max} = \begin{cases} k_i A_i^2 / L_i^2 & \text{se } \sigma_{ib} \geq \sigma_i^{(L)} \text{ e } i \in G_\beta^k \\ \text{se não} & \\ 0 & \end{cases}$$

$$\sigma_{i, y_k}^{max} = \begin{cases} 2k_i A_i L_{i, y_k} / L_i^3 & \text{se } \sigma_{ib} \geq \sigma_i^{(L)} \text{ e } i \in G_y^k \\ \text{se não} & \\ 0 & \end{cases}$$

no qual L_{i, y_k} é dado pela Eq. (4.6.19).

4.7 - Prevenção de Área de Seção Transversal Negativa

Até este ponto nenhum recurso foi utilizado durante a formulação do método do multiplicador do problema de otimização estrutural de modo a evitar a ocorrência de projetos intermediários inviáveis, com áreas de seção transversal negativas. Entretanto, para tais pontos de projeto a análise estrutural não oferece informações válidas ou significantivas para a condução do processo de reprojeto. Portanto, precauções especiais devem ser tomadas para evitar pontos de projeto intermediários com áreas de Seção transversal negativa. Isto é realizado pela colocação de limites apropriados no intervalo sobre o qual cada procura unidimensional deva ser feita.

Durante a busca linear aplica-se o seguinte relacionamento:

$$\beta_i = \beta_i^0 + \alpha d_{\beta_i}^0 \quad (i = 1, \dots, N_\beta) \quad (4.7.1)$$

O requisito para áreas de seção transversal não-negativas é representado pela condição:

$$0 \leq A_i \leq \infty \quad (i = 1, \dots, N_\beta) \quad (4.7.2)$$

Isto é numericamente equivalente a:

$$\varepsilon \leq \beta_i \leq M \quad (i = 1, \dots, N_\beta) \quad (4.7.3)$$

em termos de variáveis de dimensão recíprocas. Na Eq. (4.7.3) os símbolos ε e M são respectivamente números pequenos e grandes.

Agora, substituindo a Eq. (4.7.1) na Eq. (4.7.3), obtem-se:

$$\varepsilon \leq \beta_i^0 + \alpha d_{\beta_i}^0 \leq M \quad (4.7.4)$$

ou

$$\varepsilon - \beta_i^0 \leq \alpha d_{\beta_i}^0 \leq M - \beta_i^0 \quad (4.7.5)$$

O tamanho do passo α deve satisfazer a Eq. (4.7.5) de modo a satisfazer a condição:

$$\frac{1}{M} \leq A_i \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.7.6)$$

a qual é suficiente para prevenir o surgimento de áreas de Seção transversal negativas.

Se $d_{\beta_i}^0 = 0$ e assume-se que $\varepsilon \leq \beta_i \leq M$ inicialmente, então, a Eq. (4.7.5) é satisfeita identicamente. Por outro lado, quando $d_{\beta_i}^0 \neq 0$, é necessário impor alguma restrição em α de modo a satisfazer a condição representada pela Eq. (4.7.6).

Agora, são classificar dois casos. Primeiro suponha que $d_{\beta_i}^0 > 0$. Então a Eq. (4.7.5) fornece:

$$(\varepsilon - \beta_i^0)/d_{\beta_i}^0 \leq \alpha \leq (M - \beta_i^0)/d_{\beta_i}^0 \quad (4.7.7)$$

Prosseguindo, considere o caso de $d_{\beta_i}^0 < 0$. Então a Eq. (4.7.5) fornece:

$$(M - \beta_i^0)/d_{\beta_i}^0 \leq \alpha \leq (\varepsilon - \beta_i^0)/d_{\beta_i}^0 \quad (4.7.8)$$

Relações similares as Eqs. (4.7.7) e (4.7.8) devem ser satisfeitas para todas as áreas de Seção transversal. Portanto, segue que o tamanho do passo α deve residir no intervalo, se $d_{\beta_i}^0 > 0$

$$\text{Max}_{d_{\beta_i}^0 > 0} \{(\varepsilon - \beta_i^0)/d_{\beta_i}^0\} \leq \alpha \leq \text{Min}_{d_{\beta_i}^0 > 0} \{(M - \beta_i^0)/d_{\beta_i}^0\} \quad (4.7.9)$$

ou no intervalo, se $d_{\beta_i}^0 < 0$

$$\text{Max}_{d_{\beta_i}^0 < 0} \{(M - \beta_i^0)/d_{\beta_i}^0\} \leq \alpha \leq \text{Min}_{d_{\beta_i}^0 < 0} \{(\varepsilon - \beta_i^0)/d_{\beta_i}^0\} \quad (4.7.10)$$

para que todas as áreas de seção transversal permaneçam no espaço de projeto não-negativo.

As duas relações nas Eqs. (4.7.9) e (4.7.10) podem ser combinadas em uma Eq. como segue:

$$\mathit{Max} \eta_i \leq \alpha \leq \mathit{Min} \delta_i \quad (i = 1, \dots, N_\beta) \quad (4.7.11)$$

onde δ_i é definido por:

$$\delta_i = \mathit{Max} \left\{ (M - \beta_i^0) / d_{\beta_i}^0, (\varepsilon - \beta_i^0) / d_{\beta_i}^0 \right\} \quad (4.7.12)$$

e η_i é definido por:

$$\eta_i = \mathit{Min} \left\{ (M - \beta_i^0) / d_{\beta_i}^0, (\varepsilon - \beta_i^0) / d_{\beta_i}^0 \right\} \quad (4.7.13)$$

Em qualquer evento, o tamanho do passo deverá estar sujeito a restrições representadas pela Eq. (4.7.11). Portanto, a restrição incorporada na Eq. (4.7.6) pode ser satisfeita.

Na atual busca unidimensional, o tamanho do passo não negativo, i.e., $\alpha \geq 0$ está implicado (ver Seção 4.3), somente o limite superior na Eq. (4.7.11) é necessário. Portanto, uma busca atual para o tamanho do passo ótimo α^* deverá ser encontrado entre a faixa definida pela:

$$0 \leq \alpha \leq \mathit{Min} \delta_i \quad (4.7.14)$$

No presente estudo, para determinar os valores δ_i e η_i , os seguintes valores são garantidos para os parâmetros M e ε :

$$M = 1.0 \times 10^{50} \quad \text{e} \quad \varepsilon = 1.0 \times 10^{-50}$$

Capítulo 5

Resultados

5.1-Estrutura de Duas Barras

Inicia-se o capítulo de testes utilizando um exemplo simples que é uma estrutura formada por duas barras. Neste exemplo foram utilizadas restrições de área e tensão. Esta estrutura é estaticamente determinada e o problema envolve somente as áreas como variáveis de projeto. A estrutura, a entrada de dados do problema e os resultados finais estão listados abaixo.

Caso 1: Otimização de dimensão sujeita a restrições de área e tensão.

Dados:

$$E = 71 \text{ GPa}$$

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$$

$$\sigma_a = \pm 137,9 \text{ MPa}$$

$$P = 444,8 \text{ kN}$$

$$A_i^{(U)} = 645 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$A_i^{(L)} = 64,50 \text{ mm}^2$$

$$a = 2,54 \text{ m}$$

$$B = 5,08 \text{ m}$$

$$A_i^0 = 645 \text{ mm}^2$$

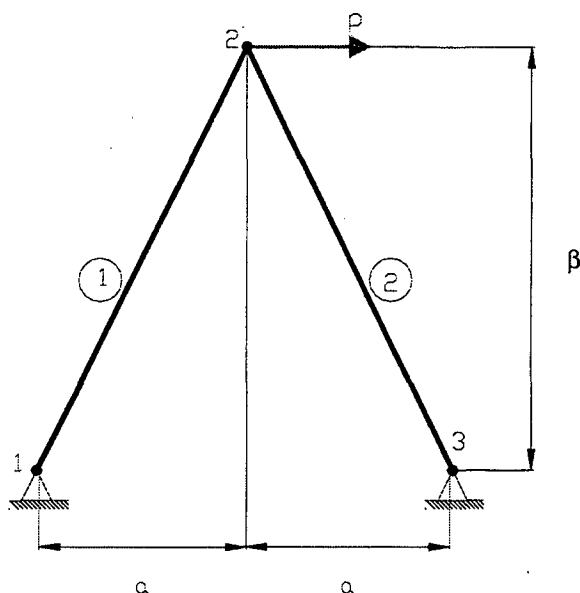


Figura 5.1.1 - Problema de otimização de dimensão.

Para este exemplo não é feito o inter-relacionamento de variáveis e, deste modo, se tem duas variáveis de projeto que são A_1 e A_2 .

A seguir, fornecemos a Tabela 5.1.1, que traz a solução numérica e a solução analítica do problema.

Tabela 5.1.1 - Resultados numéricos e solução analítica do problema.

Áreas (mm^2)	Solução Numérica	Solução Analítica
A_1	36066	36066
A_2	36066	36066
$W(\text{kg})$	1133,98	1133,98

Caso 2: Otimização de dimensão sujeita a restrições de área, tensão e estabilidade.

Neste caso é incorporada restrições de flambagem e utiliza-s- a mesma estrutura da figura 5.1, onde é alterado o valor da carga aplicada que, neste caso é, $P = 88,96 \text{ KN}$.

Acrescenta-se ainda o coeficiente de flambagem (k) que relaciona dados da geometria do elemento. Neste exemplo, para a geometria da seção transversal do elemento, o coeficiente de flambagem é, $k = 27,6$ GPa.

Na tabela abaixo, tem-se a resposta da solução analítica e da solução numérica para o problema de otimização de dimensão sujeito a restrições de tensão e estabilidade. E na Figura 5.1.2 temos a representação da estrutura otimizada.

Tabela 5.1.2 - Resultados numéricos e solução analítica do problema.

Áreas (mm^2)	Solução Numérica	Solução Analítica
A_1	710	710
A_2	3400	3400
$W(\text{kg})$	64,95	64,95

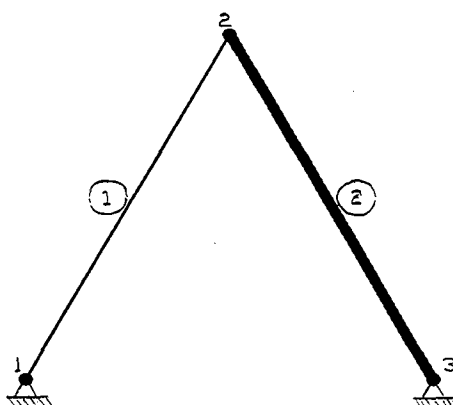


Figura 5.1.2 - Estrutura otimizada submetida a restrições de tensão e estabilidade.

Caso 3 : Otimização de dimensão e forma sujeita a restrições de área, tensão e coordenadas.

Para este exemplo foi selecionada a seguinte configuração e carregamento aplicado:

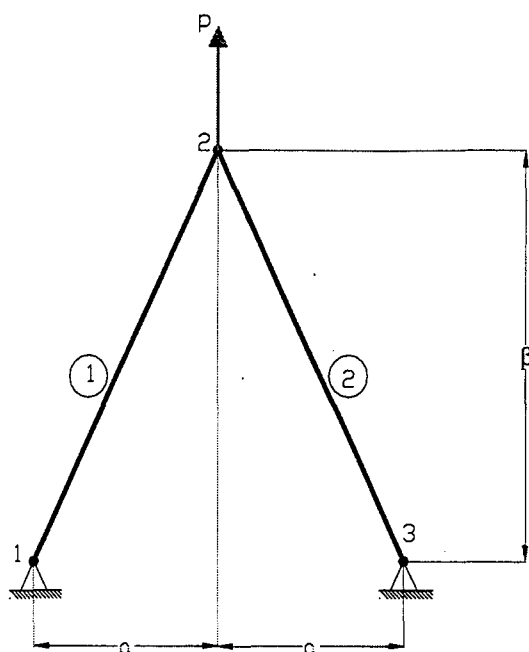


Figura 5.1.3 - Estrutura submetida a otimização de área e configuração.

Dados para o problema:

$$E = 71 \text{ GPa}$$

$$\rho = 2700 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\sigma_a = \pm 137,9 \text{ MPa}$$

$$P = 88,96 \text{ KN}$$

$$A_i^{(U)} = 645 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$A_i^{(L)} = 64,50 \text{ mm}^2$$

$$a = 2,54 \text{ m}$$

$$B = 5,08 \text{ m}$$

$$A_i^0 = 645 \text{ mm}^2$$

O resultado do processo de otimização de dimensão e configuração da estrutura acima, fornece a estrutura representada pelas linhas contínuas da Figura 5.1.4. A estrutura inicial está indicada pela linha tracejada.

Tabela 5.1.3 - Resultados numéricos e solução analítica do problema.

Variáveis	Solução Numérica	Solução Analítica
$A_1, A_2 \text{ (m}^2\text{)}$	456	456
$Y \text{ (m)}$	2,54	2,54
$W \text{ (kg)}$	9,07	9,07

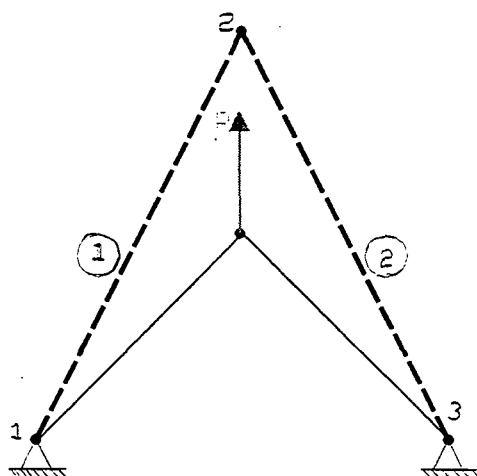


Figura 5.1.4 - Resposta da estrutura após o processo de otimização.

Obs.: As linhas tracejadas representam a estrutura inicial.

5.2 - Estrutura de Dez Barras

A estrutura de dez barras mostrada abaixo é um teste clássico para problemas de otimização estrutural. Com esta estrutura são feitas três análises. No primeiro caso aplica-se restrições de área e tensão e para esta última utiliza-se o *fully stressed design* (FSD). Para o segundo e terceiro caso utiliza-se além das restrições de área e tensão, restrições de deslocamentos. O que diferencia o segundo do terceiro caso é o número de restrições de deslocamento.

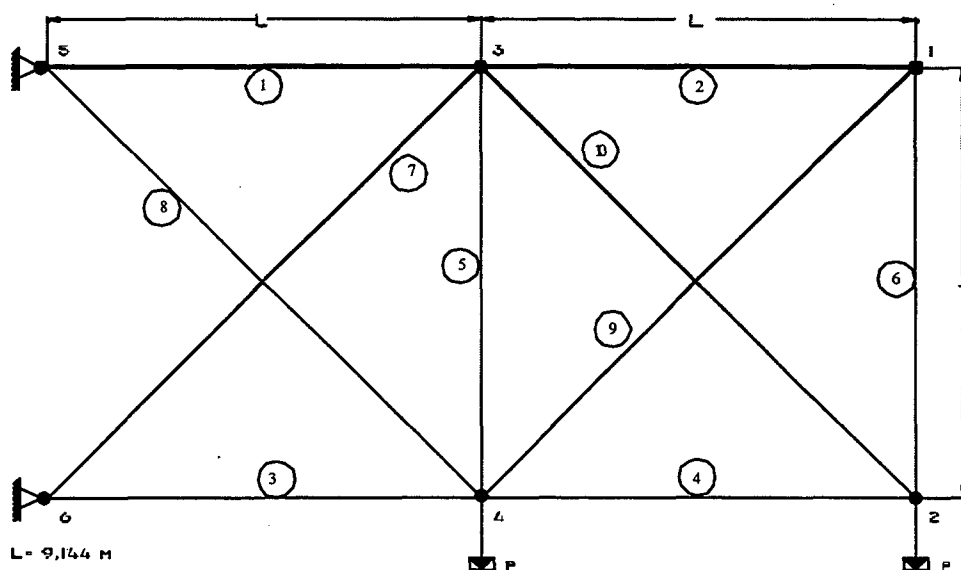


Figura 5.2.1 - Representação esquemática da estrutura de dez barras.

Dados para a estrutura de dez barras:

Material: alumínio

$$E = 71 \text{ GPa}$$

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$$

$$\sigma_a = \pm 172,36 \text{ MPa}$$

$$P = 88,96 \text{ kN}$$

$$A_i^{(L)} = 64,5 \text{ mm}^2$$

Aqui são fornecidas as informações para os três casos a serem analisados:

CASO 1:

Neste são aplicadas somente restrições de área e tensão. O limite inferior de área é $0,645 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ e para tensão os limites inferior e superior são respectivamente, $-172,36 \text{ MPa}$ e $172,36 \text{ MPa}$. Os resultados obtidos são comparados às respostas dos pesquisadores Haftka & Kamat [1985] e Kanji Imai [1981] que foram transcritas para a Tabela 5.2.1.

Tabela - 5.2.1 - Valores otimizados para área e peso da estrutura de dez barras (caso 1).

Área(mm ²)	Autor	Haftka & Kamat[1985]	K. Imai[1981]
1	5120	5120	5120
2	64,50	64,50	64,50
3	5120	5120	5120
4	2540	2540	2540
5	64,50	64,50	64,50
6	64,50	64,50	64,50
7	3700	3700	3700
8	3600	3600	3600
9	3600	3600	3600
10	64,50	64,50	64,50
Massa(kg)	722,55	722,66	722,56

O gráfico abaixo mostra a história da função objetivo do problema de otimização de dez barras.

Convergência do problema de otimização de área da estrutura de dez barras (caso 1)

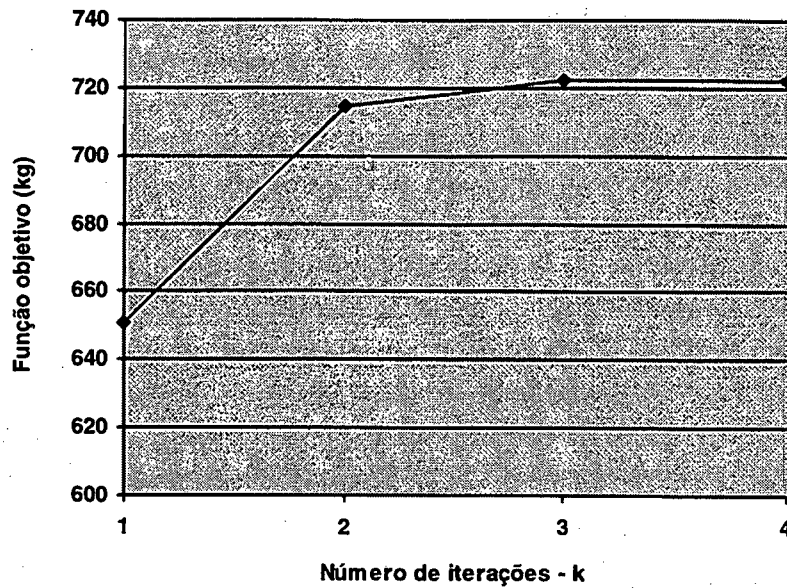


Figura 5.2.2 - Convergência do problema de dez barras (Caso 1).

CASO 2:

Neste caso, são aplicadas duas restrições de deslocamento, nos nós 1 e 3. Na Tabela 5.2.2 estão descritos os valores dos limites inferior e superior de deslocamento.

Tabela 5.2.2 - Valores admissíveis de deslocamento para a estrutura de dez barras.

Nó	Direção	Limites dos deslocamentos (mm)	
1	y	-50,8	-50,8
3	y	-25,4	-25,4

Note que após a 3ª iteração, a variação da função objetivo é insignificante. Isto mostra que numa análise prática, pode-se encerrar o processo de otimização.

Tabela -5.2.3 - Valores otimizados para área e peso de uma estrutura de dez barras, incluindo duas restrições de deslocamento.

Área(mm ²)	Autor	Haftka & Kamat[1985]
1	14600	14600
2	900	900
3	14000	14000
4	5400	5400
5	64,5	64,5
6	64,5	64,5
7	8200	8200
8	9400	9400
9	7700	7700
10	1200	1200
Massa(kg)	1835,60	1836,57

CASO 3:

Como último caso, aplica-se quatro restrições de deslocamento, respectivamente nos nós 1, 2, 3 e 4 da estrutura. Os limites inferior e superior para estes deslocamentos são dados na Tabela 5.2.4 e a resposta do processo de otimização é apresentada na Tabela 5.2.5. A estrutura ótima resultante é ilustrada na Figura 5.2.3.

Tabela - 5.2.4 - Deslocamentos admissíveis para a estrutura de dez barras.

Nós	Direção	Limites dos deslocamentos (m)	
1 - 4	Y	-0.0508	-0.0508

Tabela - 5.2.5 Valores otimizados para área e peso de uma estrutura de dez barras, incluindo quatro restrições de deslocamento.

Área (mm ²)	Autor	Haftka & Kamat[1985]
1	19700	19700
2	64,5	64,5
3	14900	14900
4	9850	9850
5	64,5	64,5
6	376	376
7	13500	13500
8	4810	4810
9	64,5	64,5
10	13800	13800
Massa(kg)	2295,70	2295,57

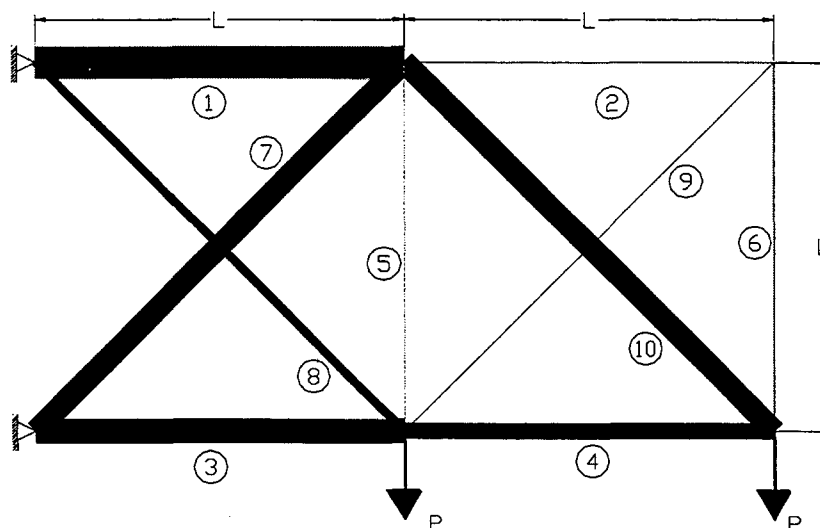


Figura 5.2.3 - Representação da estrutura de dez barras submetida a restrições de área, tensão e quatro restrições de deslocamento.

O gráfico abaixo mostra a história da função objetivo do problema de otimização de dez barras.

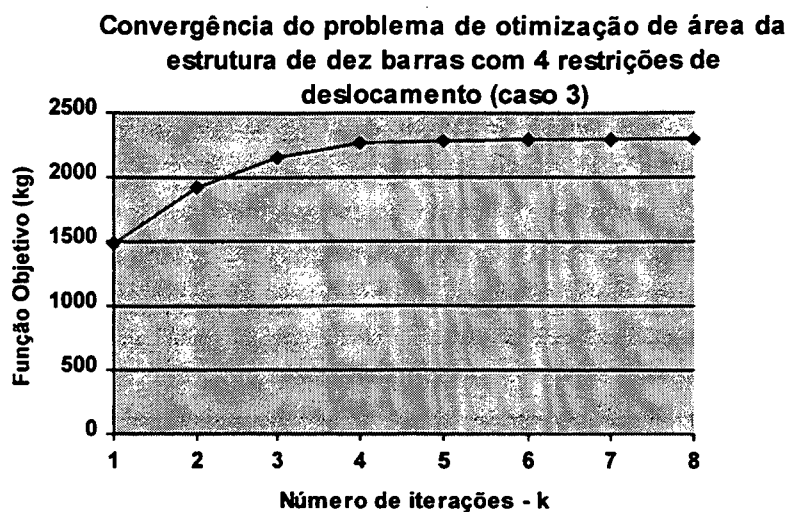


Figura 5.2.4 - Convergência do problema de dez barras.

Em termos práticos podemos verificar que a análise poderia ter sido interrompida já na 5ª iteração. Note também, na Figura 5.2.3 que as áreas das barras atingiram a restrição de área mínima. Isto mostra que a contribuição destas barras na estrutura é irrelevante.

Como resultado, podemos remover estas barras da estrutura, mudando a topologia da estrutura, e fazer uma nova otimização do problema.

Este resultado mostra que podemos inicialmente determinar a solução ótima da estrutura, sem restrição de flambagem. Uma vez obtidos os resultados, podemos então remover da estrutura as barras A_{inf} obtendo uma nova topologia “ótima” para o problema. Uma vez obtida a topologia ótima, podemos novamente otimizar a estrutura, porém, acrescentando ao problema as restrições de estabilidade. Como resultado da seqüência das análises obtemos uma otimização de topologia, forma e dimensional da estrutura.

5.3 - Estrutura de Cinco Barras

A estrutura de cinco barras submetida ao processo de otimização de dimensão e de forma está ilustrada na figura 5.3.1. O problema está sujeito a restrições de área, de posição nodal, tensão e estabilidade. Os dados para esta estrutura são:

$$E = 71 \text{ GPa}$$

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$$

$$\sigma_a = \pm 172,36 \text{ MPa}$$

$$P = 88,96 \text{ KN}$$

Os grupos das variáveis área, são formados pelos seguintes elementos:

$$A_1 = A_3, A_2, A_4 = A_5.$$

Os grupos das variáveis coordenadas, são formados pelos seguintes elementos:

$$X_2 = -X_3, Y_2 = Y_3$$

Os valores iniciais das áreas dos elementos da estrutura são $64,50 \text{ mm}^2$. O limite inferior da restrição de área é $6,45 \text{ mm}^2$. Já o limite superior para $X_2 = 3,8 \text{ m}$, e $Y_2 = Y_4 = 6,10 \text{ m}$.

Na seqüência são apresentadas as representações esquemáticas da estrutura inicial submetida ao processo de otimização (fig. 5.3.1) e, a estrutura otimizada ao final do processo (fig 5.3.2). As tabelas (5.3.1) e (5.3.2) apresentam os resultados obtidos por este trabalho e os resultados obtidos por Kanji Imai[1981] e ainda, a resposta pela solução analítica deste problema.

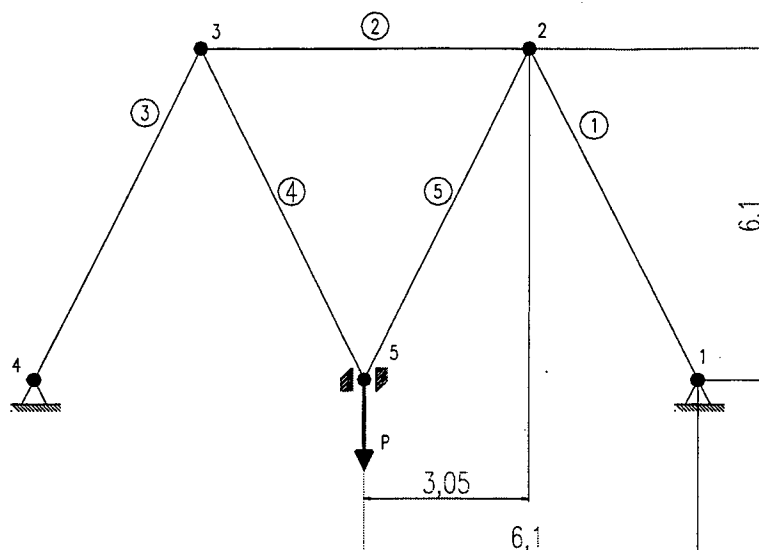


Figura 5.3.1 - Representação esquemática da Estrutura de cinco barras.

Abaixo temos os resultados para as áreas ótimas (tab. 5.3.1) e as posições nodais ótimas (tab. 5.3.2).

Tabela 5.3.1 - Valores das áreas ótimas ao final do processo de otimização.

Elementos	Área (mm ²)		
	Autor	K. Imai	Sol. Analítica
1 = 3	487	476	487
2	487	503	487
4 = 5	345	340	345
Massa (kg)	28,80	28,85	28,80

Tabela 5.3.2 - Posição nodal ao final do processo de otimização.

Coordenada	Posição nodal		
	Autor	K. Imai	Sol. Analítica
$X_2 = -X_3$	1,52	1,28	1,53
$Y_2 = Y_3$	4,03	3,90	4,03

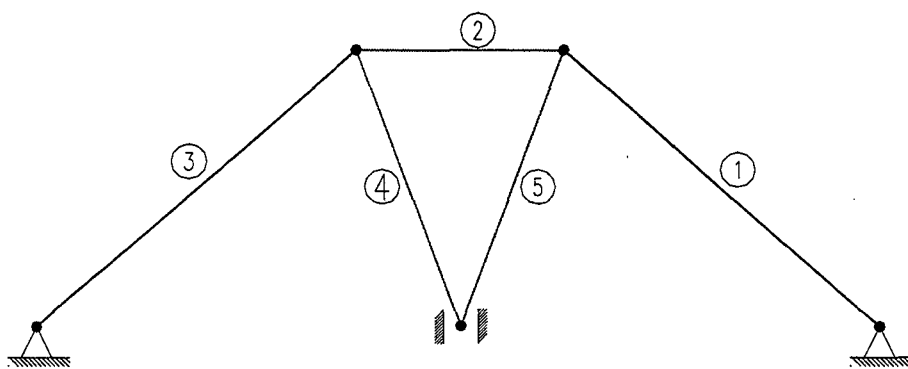


Figura 5.3.2 - Estrutura de cinco barras ao final do processo de otimização.

Como nos exemplos de duas barras, o resultado deste trabalho para a estrutura de cinco barras é o resultado encontrado pela solução analítica e, assim, é possível concluir que na prática, a convergência do Método do Lagrangeano Aumentado não é assintótica, i.e., converge para a solução analítica do problema. Os componentes estruturais 1, 2 e 3 estão submetidos a tensões de compressão, no entanto, neste exemplo não foram aplicadas restrições de estabilidade.

5.4 - Estrutura de Treze Barras

Agora é apresentado um exemplo de estrutura treliçada composta por treze barras. Neste, são aplicadas restrições de área, tensão e coordenadas.

Dados para o problema:

$$E = 71 \text{ GPa}$$

$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$$

$$\sigma_a = \pm 172,36 \text{ MPa}$$

$$F1 = 88,96 \text{ kN}$$

$$F2 = 44,48 \text{ kN}$$

Os grupos das variáveis área, são formados pelos seguintes elementos:

$$A_1 = A_{12}, A_2 = A_{13}, A_3 = A_{11}, A_4 = A_8, A_5 = A_9, A_6 = A_{10}, A_7.$$

Os grupos das variáveis coordenada, são formados pelos seguintes elementos:

$$X_2 = -X_6, Y_2 = Y_6, Y_4.$$

Os valores iniciais das áreas dos elementos da estrutura são 3200 mm^2 . O limite inferior da restrição de área é $64,50 \text{ mm}^2$. Já o limite superior para $X_2 = 12.192$, e $Y_2 = Y_4 = 25,4$.

Na seqüência pode-se observar as representações esquemáticas da estrutura inicial submetida ao processo de otimização (fig. 5.4.1) e a estrutura otimizada ao final do processo (fig 5.4.2). As tabelas (5.4.1) e (5.4.2) apresentam os resultados obtidos por este trabalho e os resultados obtidos por Kanji Imai [1981].

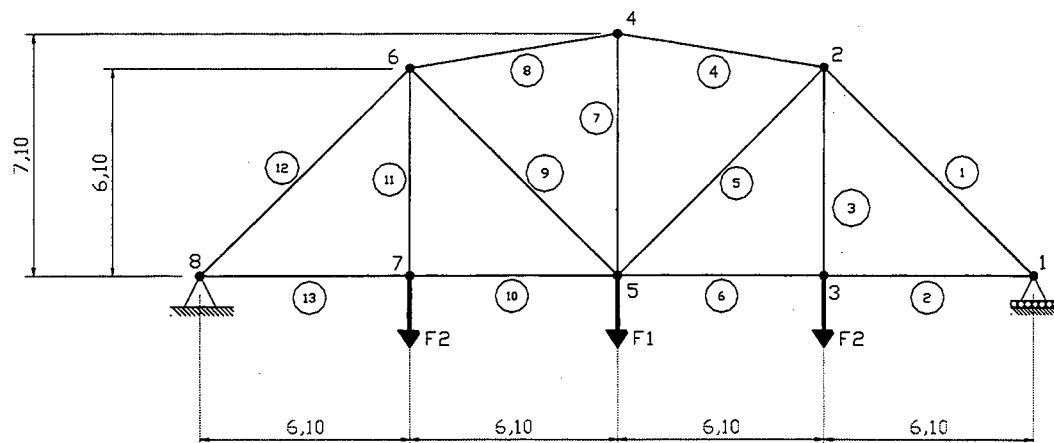


Figura 5.4.1 - Representação esquemática da estrutura de treze barras inicial.

Na tabela abaixo estão os valores finais para as áreas após o processo de otimização.

Tabela 5.4.1 - Valores das áreas ótimas ao final do processo de otimização.

Elementos	Área (mm ²)	
	Autor	K. Imai
1 = 12	645	645
2 = 13	124	64,50
3 = 11	509	465
4 = 8	547	547
5 = 9	64,50	64,50
6 = 10	303	400
7	596	590
Massa (kg)	122,89	122,37

Na tabela abaixo estão os valores das novas coordenadas.

Tabela 5.4.2 - Posição nodal ao final do processo de otimização.

Coordenada	Posição nodal	
	Autor	K. Imai
$X_2 = -X_6$	12,10	11,65
$Y_2 = Y_6$	4,98	5,34
Y_4	12,70	12,85

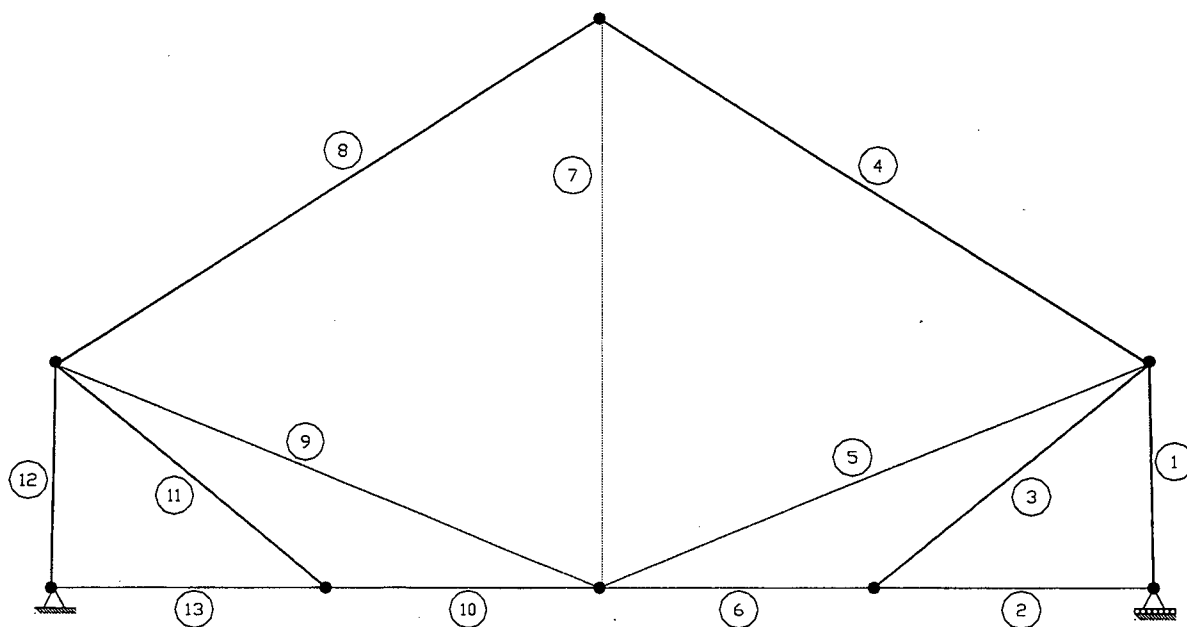


Figura 5.4.2 - Representação esquemática da estrutura de treze barras otimizada.

O gráfico abaixo mostra a história da função objetivo do problema de otimização de treze barras.

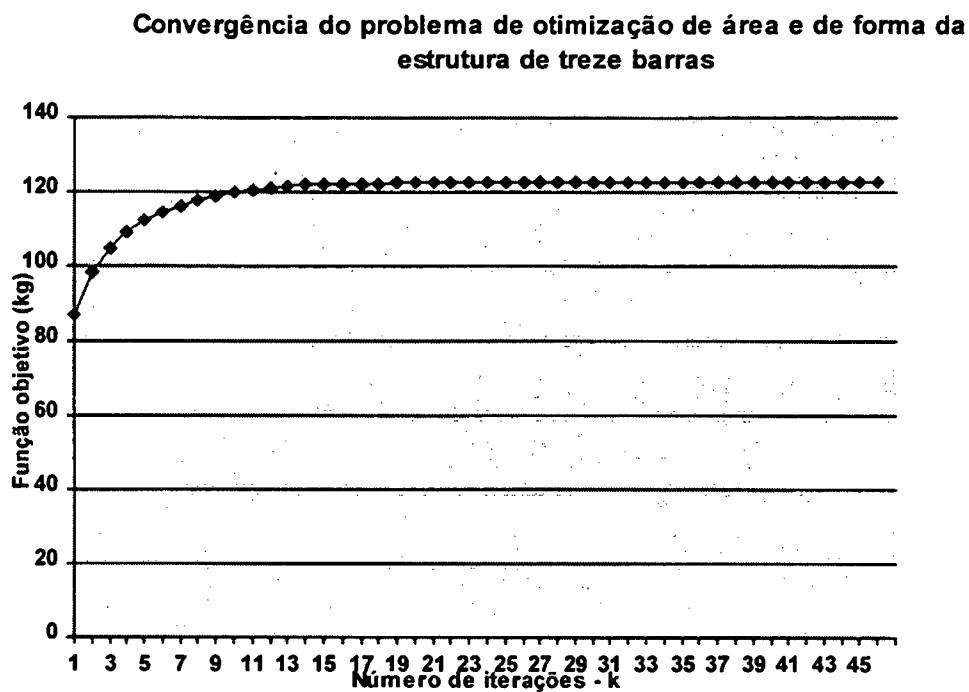


Figura 5.4.3 - Gráfico da convergência do problema.

A estrutura de treze barras analisada por este trabalho, quando comparada aos resultados encontrados por K. Imai, apresenta resultados com algumas diferenças em determinadas variáveis de projeto. Também, da Figura 5.4.3, observamos um grande número de iterações. Isto se deve ao fato de que o critério de convergência utilizado neste trabalho é satisfeito quando a diferença entre o maior valor dos multiplicadores de Lagrange é menor que 0.1 %. A escolha deste critério é devido ao fato que, desta maneira é possível garantir que as condições necessárias de Kuhn-Tucker sejam satisfeitas.

É importante ressaltar que neste problema as restrições de tensão foram todas satisfeitas no limite da tensão admissível, i.e., a convergência ocorreu muito próxima da violação das restrições.

5.5 - Estrutura de Dezoito Barras

Nesta seção dois exemplos de estrutura treliçada composta por dezoito barras. No caso 1 são otimizadas as áreas e a configuração da estrutura e no caso 2 é sé feita a otimização de área e neste, são empregadas restrições de área, tensão e estabilidade.

Dados:

Material: alumínio

$E = 71 \text{ GPa}$

$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$

$\sigma_a = \pm 172,36 \text{ MPa}$

$P = 88,96 \text{ KN}$

$k = 27,6 \text{ GPa}$

Os grupos das variáveis área, são formados pelos seguintes elementos:

Grupo 1 = 1, 4, 8, 15, 16

Grupo 2 = 2, 6, 10, 14, 18

Grupo 3 = 3, 7, 11, 15

Grupo 4 = 5, 9, 13, 17

Caso 1: Otimização de área e de forma

As variáveis coordenada, são formadas as seguintes:

$X_3, Y_3, X_5, Y_5, X_7, Y_7, X_9, Y_9$

Os valores iniciais das áreas dos elementos da estrutura são 6450 mm^2 . O limite inferior da restrição de área é $64,50 \text{ mm}^2$.

Na seqüência são apresentadas as representações esquemáticas da estrutura inicial submetida ao processo de otimização (Fig. 5.5.1) e a estrutura otimizada ao final do processo

(Fig. 5.15). As tabelas (5.5.1) e (5.5.2) apresentam os resultados obtidos por este trabalho e os resultados obtidos por Kanji Imai [1978].

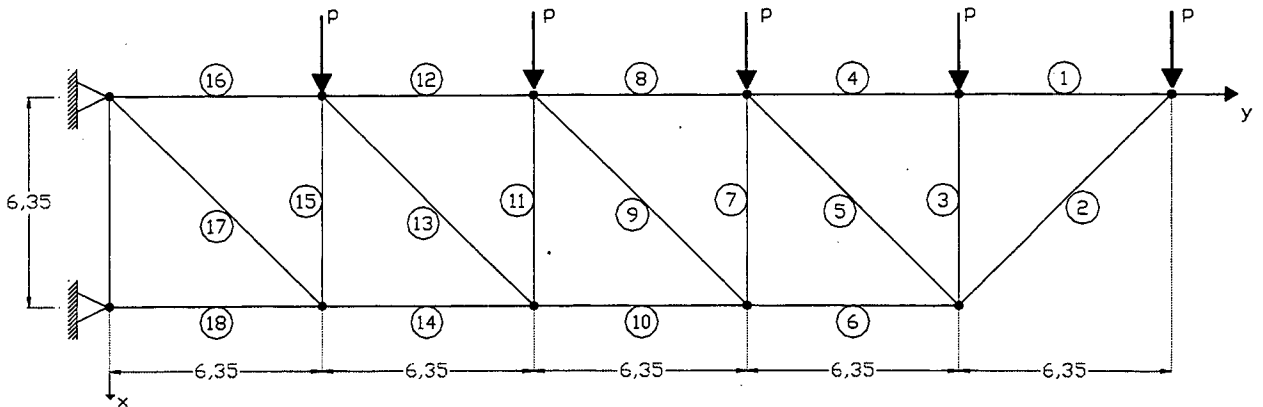


Figura 5.5.1 - Representação esquemática da estrutura inicial de dezoito barras.

Na tabela abaixo estão os valores finais para as áreas após o processo de otimização.

Tabela 5.5.1 - Valores das áreas ótimas ao final do processo de otimização.

Elementos	Área (mm ²)	
	Autor	K. Imai
1, 4, 8, 12, 16	8000	7250
2, 6, 10, 14, 18	11000	10100
3, 7, 11, 15	3400	5110
5, 9, 13, 17	2400	4190
Massa (kg)	2043.9	2117.32

Na tabela abaixo estão os valores das novas coordenadas.

Tabela 5.5.2 - Posição nodal ao final do processo de otimização.

Coordenada	Posição nodal (m)	
	Autor	K. Imai
X3	1,63	2,7
Y3	23,10	22,63
X5	2,60	3,67
Y5	15,87	15,44
X7	3,84	4,90
Y7	10,58	9,70
X9	5,52	6,43
Y9	5,20	4,60

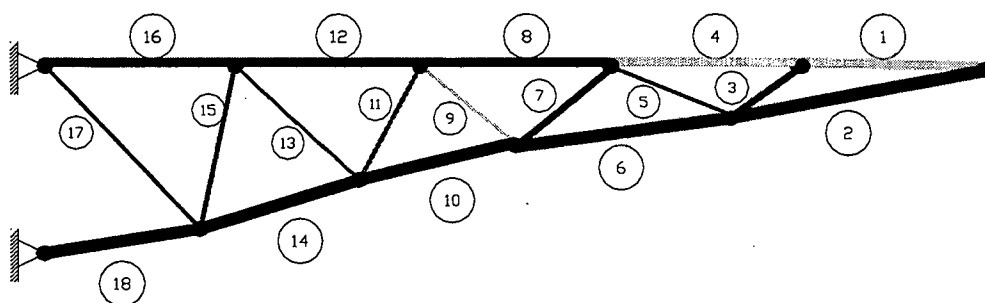


Figura 5.5.2 - Estrutura de dezesseis barras otimizada.

No gráfico abaixo é apresentada a convergência do problema de otimização de área e de forma.

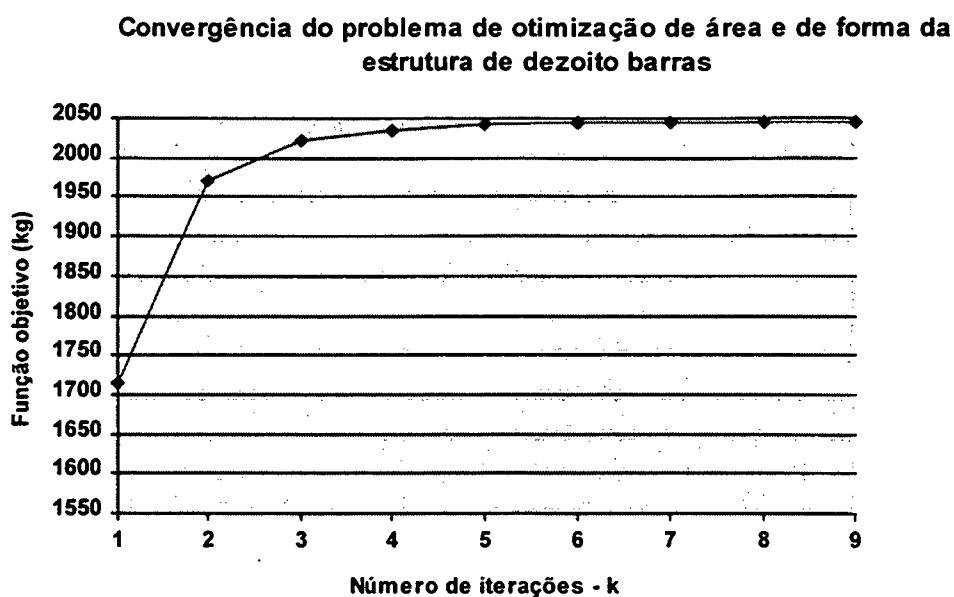


Fig.ura 5.5.3 - Gráfico da convergência do problema (Caso 1).

Novamente, são apresentados resultados que diferem dos obtidos por K. Imai [1981]. Como já citado anteriormente, neste trabalho as condições necessárias de Kuhn-Tucker são satisfeitas, isto é, o gradiente da Função Lagrangeana Aumentada é igual a zero no final do processo de otimização e os multiplicadores de Lagrange são positivos para as restrições que foram violadas. O projeto final pode ser um ponto de mínimo, máximo ou um ponto estacionário (ponto de sela). Para garantir que se tenha um ponto de mínimo para a função objetivo, seria necessário avaliar a existência da condição suficiente de ótimo. Isto é muito caro computacionalmente, pois seria necessário avaliar a derivada de segunda ordem da função. Portanto, apesar das diferenças nos resultados de algumas variáveis de projeto e da massa da estrutura, pode-se garantir que a estrutura otimizada final é viável.

Caso 2: Otimização de área

Os dados para este caso são os mesmos utilizados no caso 1. Na tabela 5.5.3 são dados os resultados para esta estrutura.

Tabela 5.5.3 - Valores das áreas ótimas ao final do processo de otimização (caso 2).

Elementos	Área (mm ²)	
	Autor	K. Imai
1, 4, 8, 12, 16	6450	6450
2, 6,10, 14, 18	14000	14000
3, 7, 11, 15	8060	8060
5, 9, 13, 17	4560	4560
Massa (kg)	2916,14	2916,60

Neste caso, onde somente a otimização de dimensão é tratada, o resultado encontrado é o mesmo. Do resultado anterior, onde além da otimização de área também as variáveis de configuração são tratadas, a conclusão é que os multiplicadores de Lagrange precisam de um número maior de iterações para que satisfaçam as condições de Kuhn-Tucker. Ainda, poderia ser feita uma otimização de área sem restrição de estabilidade e assim, verificar a possibilidade de remover algum componente da estrutura e fazer uma otimização de topologia da estrutura.

Capítulo 6

Conclusão

Os problemas de otimização de configuração deverão ser bem definidos de modo a evitar o surgimento de projetos intermediários com configuração estaticamente instável durante o processo de otimização ou ao final para a solução ótima.

Durante o processo de busca unidimensional (*line search*) é realizado um grande número de análises por elementos finitos, o que não chega a comprometer a eficiência do programa de otimização.

Inicializando o processo de otimização com os multiplicadores de Lagrange iguais a zero torna-se possível a seleção dinâmica de restrições ativas.

Utilizou-se como critério de convergência as condições de Kuhn-Tucker que são condições de necessárias de otimalidade o que possibilita a determinação de um mínimo para a função. Devido a isto, o programa de otimização de estruturas treliçadas desenvolvido, foi aplicado para problemas em que se conhece a solução analítica. Em todos os casos considerados, os resultados numéricos convergiram para estes valores, demonstrando a eficiência e confiabilidade dos algoritmos utilizados no desenvolvimento desta ferramenta de otimização de estrutural.

Quanto aos resultados numéricos observa-se que, para a estrutura de duas barras, no caso 1, obteve-se como resposta do processo de otimização, a resposta da solução analítica para a estrutura. No caso 2, pode-se observar que ao serem utilizadas restrições de estabilidade, o resultado obtido é validado pela resposta da solução analítica. O caso 3, é utilizado como um primeiro teste onde se tem o espaço das variáveis de projeto do problema ampliado. Ao ser

somada a variável responsável pelo problema de otimização de forma da estrutura, temos na verdade dois espaços de projeto diferentes, um das variáveis de dimensão, o outro, das variáveis de configuração, onde novamente os resultados encontrados foram satisfatórios.

Para a estrutura de dez barras, os dois últimos casos resolvidos empregam o conceito de inter-relacionamento de variáveis. No caso 1, é apresentado o exemplo clássico de otimização onde verifica-se a validade das respostas encontradas. Já nos casos 2 e 3, são utilizadas restrições de estabilidade e deslocamento. Nestes três casos a resposta do processo de otimização é dada em menos de dez iterações. É possível ainda observar nas tabelas (5.2.3) e (5.2.5), que são obtidos para alguns elementos da estrutura, o valor da área igual ao limite inferior de sua restrição; de modo que não é violada a restrição de área, e de nenhuma outra restrição para os três casos ao final do processo de otimização.

Para a estrutura de cinco barras são otimizadas dimensão e forma. Neste, a solução numérica obtida é igual a solução analítica.

O problema de otimização dimensional e de forma da estrutura de treze barras, foi o mais extenso em número de iterações e tempo de execução. Constata-se ainda que, a tensão em cada elemento da estrutura é igual a tensão admissível.

A estrutura de dezoito barras forneceu resultados que diferem dos resultados obtidos por K. Imai, para a otimização de dimensão e de forma. A função objetivo é inferior ao do trabalho de K. Imai em 3,32 %, porém é factível e satisfaz a condição necessária de otimalidade, utilizada como critério de convergência. Esta solução de fato representa o mínimo local do problema. A otimização de dimensão fornece o resultado 0,01 % menor que o obtido por K. Imai. Deve ser lembrado ainda que, nestes dois casos, estão incluídas restrições de estabilidade. Pode-se observar ainda, a grande redução de peso da estrutura com dimensão e forma otimizadas (caso 1), em relação a estrutura que teve apenas as variáveis de dimensão otimizadas (caso 2), que para

este exemplo de otimização de estrutura de dezoito barras correspondeu a uma redução de 27 % de seu peso.

O programa foi totalmente implementado para a otimização de estruturas treliçadas em 3D. Estes resultados não são apresentados neste trabalho, por não terem sido encontradas, na literatura e em artigos consultados, informações suficientes (e.g., valores de carregamentos e em que nós da estrutura estão aplicados), para serem analisados os mesmos casos pelo programa. Em breve estes resultados serão publicados.

No apêndice E, apresenta-se o algoritmo desenvolvido.

Como sugestão de continuidade do trabalho pode-se implementar a otimização de topologia estrutural, onde são removidos membros com área mínima.

Geração automática das informações de quais posições nodais serão variáveis de projeto de configuração.

A introdução do múltiplos critérios de ótimo, de modo a obter uma estrutura otimizada para várias funções objetivo, tais como, peso e custo, por exemplo.

Implementar e verificar novas classes de algoritmos de otimização, de modo a obter uma ferramenta para otimização de estruturas treliçadas que seja robusto e apresente uma taxa de convergência mais elevada.

A criação de uma interface em ambiente *windows*, mais amigável ao usuário.

Bibliografia

ADELMAN, H. M. & HAFTKA, R.T. **Sensitivity Analysis of Discrete Systems**, AIAA, pg. 291-315, 1992.

ADELI, H., **Advances in Design Optimization**, Chapman & Hall, 1994.

ARORA, J. S. , **Introduction To Optimum Design**, McGraw-Hill, 1989.

BABUSKA, I. & SZABÓ, B., **Finite Element Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., 1991.

BAZARAA, M. S. & SHETTY, C. M., **Nonlinear Programming Theory and Algorithms**, John Wiley & Sons, Inc. 1979.

BERTSEKAS, D.P., **On Penalty and Multiplier Methods for Constrained Minimization**, SIAM J. Control, Vol. 14, n. 2, pg. 216-235, 1976.

BERTSEKAS, D.P, **Constrained Optimization and Lagrange Multipliers Methods**, Academic Press, Inc., 1982.

BRUSH, D.O. & ALMROTH, B.O., **Buckling of Bars, Plates and Shells**, McGraw-Hill, 1975.

BYRD, R. H. , TAPIA, R. A. & ZHANG, Y., **An SQP Augmented Lagrangian BFGS Algorithm for Constrained Optimization**, SIAM, Vol.2, n.2, 210-241, 1992.

DHATT, G. & TOUZOT, G., **The Finite Element Method Displayed**, John Wiley & Sons. 1984.

FLEURY, C. **Optimization Of Elastic Structures By Finite Elements**, Aerospace Laboratory Of The University Of Liege. 1981.

FLEURY, C. & BRAIBANT V., **Structural Optimization Involving Discrete Design Variables**, Aerospace Laboratory Of The University Of Liege. 1982.

- FLEURY, C. & SANDER, G., **Generalized Optimality Criteria for Frequency constraints, Buckling Constraints and Bending Elements**. Aerospace Laboratory of the University of Liege. 1979.
- YAMAMOTO, K., **Shape Optimization of Truss-Type Variable Geometric Structures Using Sensitivity Analysis**, TAMP, pg. 77-86, 1992.
- GRIERSON, D.E., **Structural Analysis for Structural Design**, ACP, pg.133-144, 1994.
- HAFTKA, R.T. & KAMAT, M.P., **Elements of Structural Optimization**, Martinus Nijhoff Publishers.1985.
- HAUG, E. J., CHOI, K.K. & KOMKOV, V., **Design Sensitivity Analysis of Structural Systems**, 1984.
- HUGUES, T.J.R., **The Finite Element Method**, Prentice-Hall Inc.,1987.
- IMAY, K., **Configuration Optimization of Trusses By The Multiplier Method**, UCLA, Ph. D. Thesis, 1981
- LUEMBERGER, D. G., **Linear and Nonlinear Programming**, Adison -Wesley Publishing Company, 1973.
- MAHMOUD, K.G., ENGL.T.H.W. & HOLZLEITNER, **Optimum Structural Design Using MSC/Nastran and Sequential Quadratic Programming**, Computers and Structures, Vol.52, n.3, pg.437-447, 1994.
- MRÓZ, Z., **Sensitivity Analysis: Distributed Systems**, AIAA, pg.317-347, 1992.
- PEDERSEN, P., **On the Minimum Mass Layout of Trusses**, AGARD Conference Proceedings, 1969.
- SAKA, M.P., & ULKER, M., **Optimum Design of Geometrically Nonlinear Space Trusses**, CIVIL-COMP 89, PG. 175-184, 1989.
- TRIPATHI, S.S., & NAVENDRA, K.S., **Constrained Optimization Problems Using Multiplier Methods**, J. of Optimization Theory and application, Vol.12, pg. 59-70,1973.

TRIPATHI, S.S., & NAVENDRA, K.S., **Constrained Optimization Problems Using Multiplier Methods**, J. of Optimization Theory and application, Vol.12, pg. 59-70,1973.

VANDERPLAATS, G. N., **Numerical Optimization Techniques For Engineering Design With Applications**, McGraw-Hill, 1984.

VANDERPLAATS, G.N., **Automated Design of Trusses for Optimum Geometry**, J. of Structural Division, ASCE, pg. 671-690.1972.

YANG, R. J., & CHUANG, C. H., **Optimal Topology Design Using Linear Programming**, Computers & Structures, Vol.52, n. 2, pg. 265-275, 1994.

YU, F. X. & SING, V.P., **An Efficient and Derivative-Free Algorithm for Finding the Minimum of a 1-D User -Defined Function**, Advances in Engineering Software, Vol.16, pg. 161-169, 1993.

ZHOU, M., & XIA, R., **An Efficient Method of Truss Design for Optimum Geometry**, Computers & Structures, Vol. 35, n. 2, pg. 115-119, 1990.

Apêndice A

Neste apêndice, é resolvido um simples exemplo matemático pela aplicação do método do multiplicador. Com objetivo de comparação, o mesmo problema é tratado pelo método da função da de penalização interior.

Para isto, considera-se um exemplo bastante simples.

$$\begin{aligned} & \textit{Min } x \\ & \text{Sujeito a } 1 - x \leq 0 \end{aligned} \tag{A .1}$$

Apesar da simplicidade este problema servirá para introduzir as propriedades essenciais implicadas pelo método do multiplicador.

A função Lagrangeana clássica para o problema acima pode ser definida como:

$$L_0(x, \lambda) = x + \lambda(1 - x) \tag{A .2}$$

onde λ é um número real não negativo chamado multiplicador de Lagrange. Das condições estacionárias da função Lagrangeana (A .2), encontra-se o par ótimo:

$$(x^*, \lambda^*) = (1, 1) \tag{A .3}$$

Agora resolve-se a Eq.(A .1) pelo método da função de penalização interior. Para um problema geral de programação matemática não linear de forma:

$$\begin{aligned} & \textit{Min } f(x) \\ & \text{Sujeito a } g_i \leq 0 \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned} \tag{A .4}$$

se obtém uma expressão de penalidade interior.

$$\phi^i(x, C) = f(x) - \frac{1}{C} \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)} \quad (\text{A .5})$$

Para obter a variável primal ótima, x^* , é preciso resolver a seqüência de problemas sem restrição (A .5) pelo incremento do fator de resposta C ao infinito.

Para o simples problema (A .1), a Eq. (A .5) torna-se:

$$\phi^i(x, C) = x - \frac{1}{C} \frac{1}{1-x} \quad (\text{A .6})$$

Dado um valor de C podemos mostrar analiticamente que (A .6) tem um mínimo para:

$$\bar{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{C}} \quad (\text{A .7})$$

Portanto é óbvio que $\bar{x} \rightarrow x^*$ como $C \rightarrow \infty$ esta é a natureza geral do método da função de penalidade interior.

Para ver o comportamento numérico, a Função (A .6) é plotada na Figura (A .1) para vários valores de do fator de resposta C. Nesta figura, cada curva representa um problema de minimização sem restrição resolvido. É possível ver que, se o fator de resposta C é relativamente pequeno, $\phi^i(x, C)$ é uma curva horizontal, i.e., a mudança do valor da função é gradual portanto ela é de fácil minimização. No entanto, como C torna-se grande, o valor da

função muda muito rapidamente e a localização do ponto de mínimo considerando-se qual algoritmo de otimização é empregado. Esta situação representa o conhecido mal condicionamento da função de penalização. É claro que o mal condicionamento não pode ser evitado sempre que se utiliza o método da função de penalidade interior estendido, porque ele justamente estende $\phi^i(x,C)$ dentro de uma região inviável a partir de um certo ponto normalmente localizado entre uma restrição crítica e um ponto de mínimo.

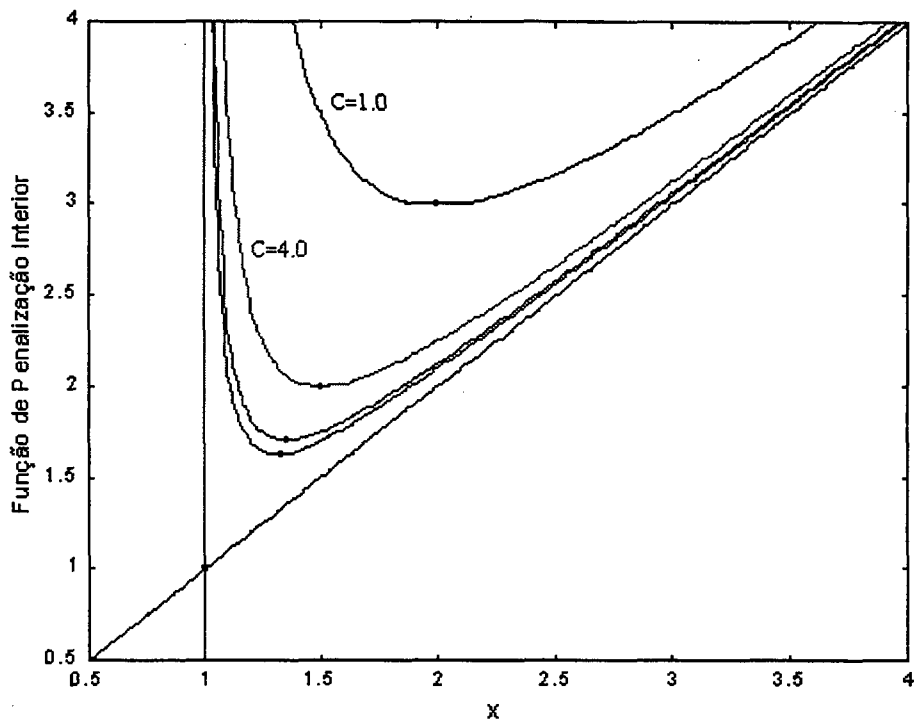


Figura A.1 - Função de penalização interior.

A Figura mostra claramente a natureza de baixa convergência. Observe que, praticamente não podemos obter a solução analítica por este método, porque não se pode incrementar o fator de resposta ao infinito.

Portanto, do ponto de vista puramente teórico, o método da função de penalidade interior, é visto como inconveniente por dois motivos:

i- É necessário fazer com que C vá ao infinito para obter a solução. Entretanto, isto pode causar um mal condicionamento do problema sem restrição a ser resolvido.

ii- A convergência do método é somente assintótica e nunca pode-se encontrar a solução verdadeira.

Estes inconvenientes provém do fato que, no método de função de penalidade interior, são introduzidas muitas penalidades ao longo das restrições críticas e, portanto, os pontos intermediários de projeto diminuem dentro da região viável.

Continuando, somente é resolvido o simples problema definido pela Eq.(A.1), utilizando agora o método da função de penalidade exterior. Para o problema geral (A .4), tem-se a função quadrática de penalidade exterior como:

$$\phi^e(x, C) = f(x) + \frac{C}{2} \sum_{i=1}^m \begin{cases} g_i^2(x) & \text{se } g_i(x) \geq 0 \\ \text{do contrário} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{A .8})$$

Portanto para este problema, tem-se :

$$\phi^e(x, C) = x + \frac{C}{2} \begin{cases} (1-x)^2 & \text{se } 1-x \geq 0 \\ \text{do contrário} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{A .9})$$

Da condição de estacionaridade da Eq. (A .9), obtém-se um ponto de mínimo:

$$\bar{x} = 1 - \frac{1}{C} \quad (\text{A .10})$$

Portanto se $C \rightarrow \infty$, então $\bar{x} \rightarrow x^*$. Neste método, x^* é procurado a partir da região inviável.

Plota-se a função $\phi^e(x, C)$ na Figura (A .2).

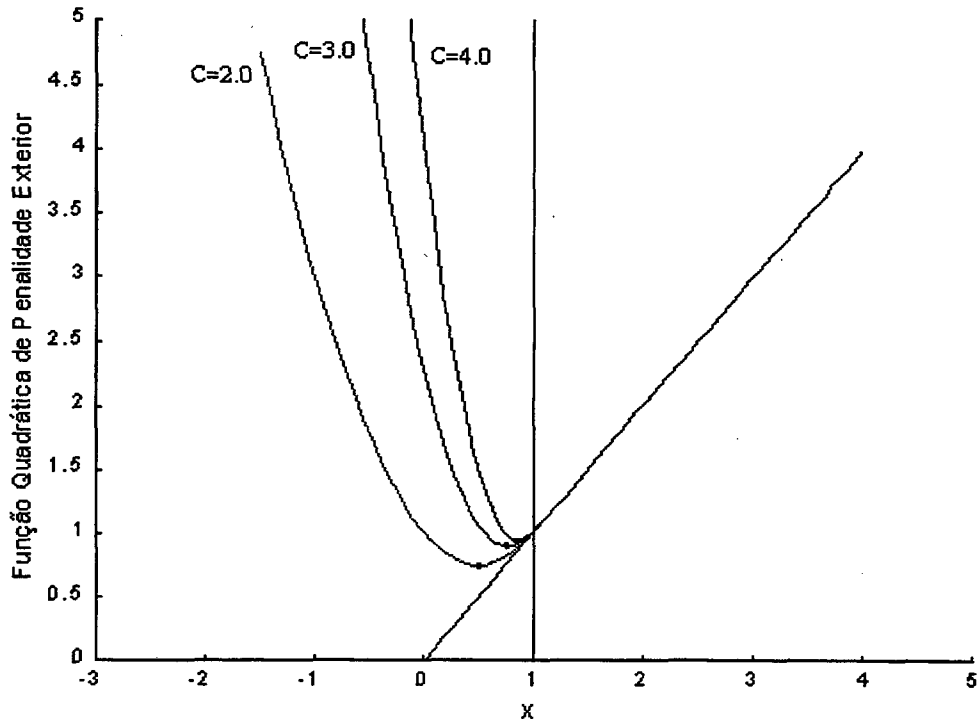


Figura A .2- Função de penalização exterior.

A partir da figuras pode-se fazer duas observações:

- 1- O mal condicionamento do problema sem restrição quando C é atualizado.
- 2- A natureza assintótica da convergência.

Portanto, a partir do fato que o método da função quadrática de penalidade exterior, busca a solução a partir da região inviável, ele tem os mesmos inconvenientes que o método da função de penalidade interior.

Finalmente resolve-se a Eq.(A1) pelo método do multiplicador. Para o problema geral (A .4), temos uma Função Lagrangeana Aumentada como segue:

$$A(x, \lambda, C) = f(x) + \sum_{i=1}^m \begin{cases} \frac{1}{2} g_i^2 + \frac{\lambda_i}{C} g_i & \text{se } g_i \geq -\frac{\lambda_i}{C} \\ \text{do contrário} \\ -\frac{\lambda_i^2}{C^2} \end{cases} \quad (\text{A .11})$$

Que, para este problema transforma-se em:

$$A(x, \lambda, C) = x + C \begin{cases} \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{\lambda}{C}(1-x) & \text{se } 1-x \geq -\frac{\lambda}{C} \\ \text{do contrário} \\ -\frac{\lambda^2}{2C^2} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Agora, aplica-se o algoritmo sugerido na seção 1.2, com $\lambda^0 = 0$, $C^0 = 1$. Então a Função Lagrangeana Aumentada torna-se:

$$A_0(x, 0, 1) = x + \frac{1}{2} \begin{cases} (1-x)^2 & \text{se } 1-x \geq 0 \\ \text{do contrário} \\ 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Este tem a solução:

$$\bar{x}^0 = 0 \quad (\text{A.14})$$

Agora, utiliza-se a fórmula de atualização do multiplicador de Lagrange para o próximo passo.

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \max(0, \lambda^0 + C^0 g(\bar{x}^0)) \\ &= \max(0, 0 + 1 \times 1) = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

O próximo problema sem restrição é criado com $\lambda^1 = 1$ e $C^1 = 1$. Observe que neste cálculo, o fator de resposta é intencionalmente mantido constante, para mostrar a convergência do método sempre no caso de fator de resposta constante. A Função Lagrangeana Aumentada torna-se:

$$A_1(x,1,1) = x + \begin{cases} \frac{1}{2}(1-x)^2 + (1-x) & \text{se } 1-x \geq 1 \\ \text{do contrário} \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Então este tem o ponto de solução:

$$\bar{x}^1 = 1.0 \quad (\text{A.17})$$

Atualizar o multiplicador de Lagrange por:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \max(0, \lambda^1 + C^1 g(\bar{x}^1)) \\ &= \max(0, 1 + 1 \times 0) = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Se $\lambda^1 = \lambda^2$, pare o cálculo. A solução ótima obtida é:

$$(x^*, \lambda^*) = (1, 1) \quad (\text{A.19})$$

É claro, isto está de acordo com o resultado (A.3).

As funções A_0 e A_1 estão plotadas na Figura (A.3), e os valores da função objetivo versus C está plotado na Figura (A.4).

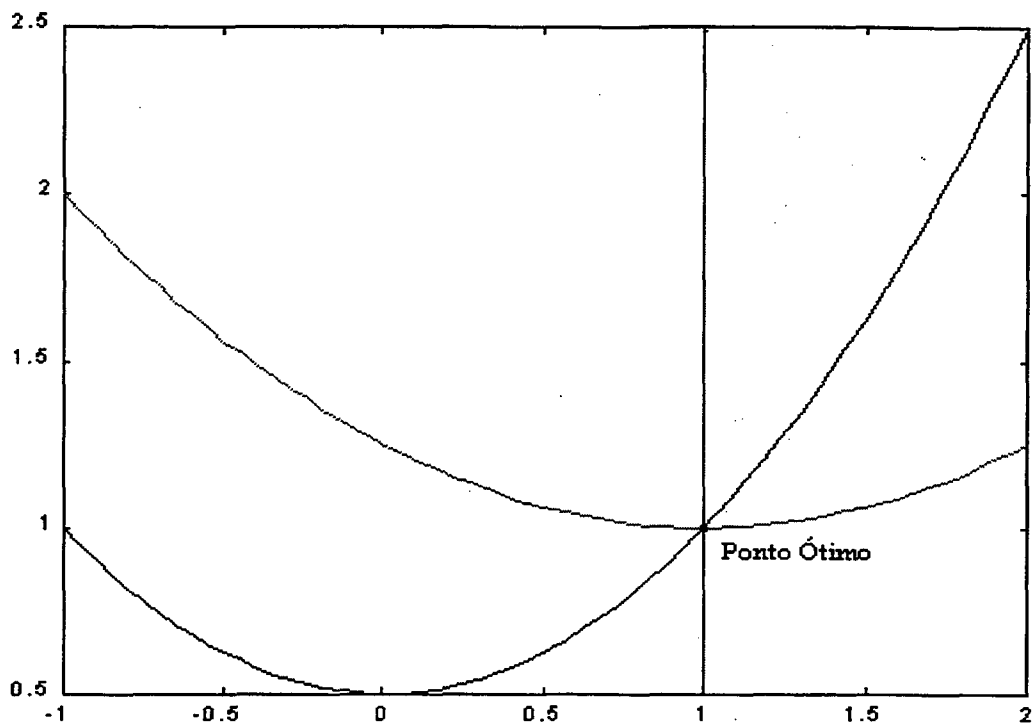


Figura A .3 - Função Lagrangeana Aumentada.

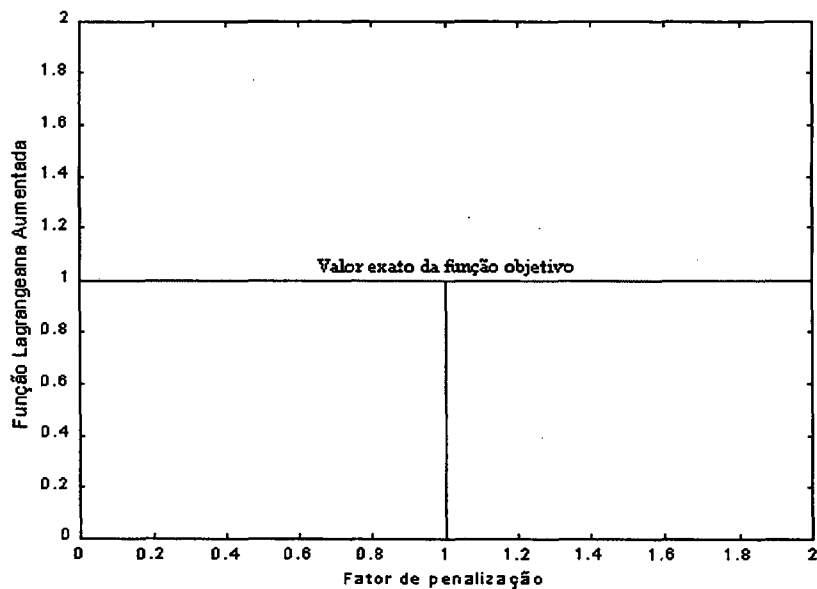


Figura A .4 - Convergência da Função Lagrangeana Aumentada.

De ambas as figuras pode-se observar os seguintes fatos significantes:

- i- A solução é obtida em apenas duas iterações do problema sem restrição.
- ii- Cada problema sem restrição tem curva suave e o mal condicionamento não ocorre.
- iii- A convergência não é assintótica. A solução exata pode ser obtida.

iv- O método do multiplicador com os multiplicadores de Lagrange inicializados como zero buscam a solução a partir da região inviável.

v- O multiplicador de Lagrange ótimo também é obtido.

vi- Qualquer ponto inicial é permitido.

Portanto, do ponto de vista teórico, o método do multiplicador é um método atrativo. Ele aparece como sendo superior aos outros métodos de função de penalização devido a sua rápida convergência e a não ocorrência de mal condicionamento na minimização dos problemas sem restrição.

Na solução deste problema simples, C foi mantido constante, mas se é incrementado em cada passo como em outros métodos de penalidade, a convergência pode ser acelerada, observe que ao se iniciar o método com valores grandes para os multiplicadores de Lagrange, ao invés de determinar valor zero a eles, o método busca soluções a partir da região viável, esta parece ser uma das mais importantes propriedades do método.

Apêndice B

Todas as expressões necessárias para a análise de sensibilidade dos deslocamentos apresentada na seção 4.6 estão dadas neste apêndice.

A matriz de rigidez do elemento K_i para um elemento de barra de duas dimensões tem a seguinte forma:

$$K_i = \frac{E_i A_i}{L_i} \begin{bmatrix} L_x^2 & L_x L_y & -L_x^2 & -L_x L_y \\ & L_y^2 & -L_x L_y & -L_y^2 \\ & & L_x^2 & L_x L_y \\ \text{Sim} & & & L_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

no qual E_i , A_i e L_i são respectivamente o módulo de elasticidade, a área da seção transversal e o comprimento do i -ésimo membro. Os símbolos L_x e L_y representam o comprimento do membro projetado no sistema de coordenadas de referência.

Considere primeiramente a diferenciação da matriz (B.1) com relação às variáveis de dimensão recíprocas β_k .

Obviamente:

$$A_{i,\beta_k} = 0 \quad \text{se} \quad i \notin G_\beta^k \quad (\text{B.2})$$

portanto,

$$K_{i,\beta_k} = 0 \quad \text{se} \quad i \notin G_\beta^k \quad (\text{B.3})$$

Por outro lado,

$$A_{i,\beta_k} = -A^2 \quad \text{se} \quad i \in G_\beta^k \quad (\text{B.4})$$

então,

$$K_{i,\beta_k} = -\frac{E_i A_i^2}{L_i^3} \begin{bmatrix} L_x^2 & L_x L_y & -L_x^2 & -L_x L_y \\ & L_y^2 & -L_x L_y & -L_y^2 \\ \text{Sim} & & L_x^2 & L_x L_y \\ & & & L_y^2 \end{bmatrix} \quad \text{se} \quad i \in G_\beta^k \quad (\text{B.5})$$

Considere a diferenciação do vetor de peso próprio F_{D_i} com relação a β_k . Assumindo que o eixo y do sistema de referência está no eixo gravitacional, o vetor de peso próprio é dado por:

$$F_{D_i}^T = -\frac{\rho_i A_i L_i}{2} (0,1,0,1) \quad (\text{B.6})$$

De acordo com as equações (B.2) e (B.4), segue que:

$$F_{D_i,\beta_k}^T = 0 \quad \text{se} \quad i \notin G_\beta^k \quad (\text{B.7})$$

e

$$F_{D_i,\beta_k}^T = \frac{\rho_i A_i L_i}{2} (0,1,0,1) \quad \text{se} \quad i \in G_\beta^k \quad (\text{B.8})$$

Por outro lado, o vetor do carregamento térmico no elemento é dado por:

$$F_{T_i}^T = -\frac{\theta_i \Delta T_i E_i A_i}{L_i} (-L_x, -L_y, L_x, L_y) \quad (\text{B.9})$$

onde θ_i e ΔT_i , representam respectivamente o coeficiente de expansão térmica e a variação de temperatura no i -ésimo elemento. Os resultados da diferenciação do vetor (B.9) com relação a β_k são dadas por:

$$F_{T_i, \beta_k}^T = 0 \quad \text{se } i \notin G_\beta^k \quad (\text{B.10})$$

e

$$F_{T_i, \beta_k}^T = \frac{\theta_i \Delta T_i E_i A_i^2}{L_i} (L_x, L_y, -L_x, -L_y) \quad \text{se } i \in G_\beta^k \quad (\text{B.11})$$

Prosseguindo, considere a diferenciação da matriz K_i e os vetores F_{D_i} e F_{T_i} com relação a uma coordenada nodal independente y_k . Para avaliarmos a derivada de K_i , os seguintes termos devem ser avaliados.

$$s_1 = (L_x^2/L_i^3)_{,y_k} \quad (\text{B.12})$$

$$s_2 = (L_x L_y/L_i^3)_{,y_k} \quad (\text{B.13})$$

$$s_3 = (L_y^2/L_i^3)_{,y_k} \quad (\text{B.14})$$

é claro,

$$s_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{se } i \notin G_y^k$$

portanto,

$$K_{i,y_k} = 0 \quad \text{se} \quad i \notin G_y^k \quad (\text{B .15})$$

Voltando a atenção para o caso $i \in G_y^k$, a diferenciação direta das equações (B .12), (B .13) e (B .14) fornece os seguintes resultados:

$$s_1 = 2L_x V_2 / L_i^3 - 3L_x^2 V_1 / L_i^4 \quad (\text{B .16})$$

$$s_2 = L_x V_3 / L_i^3 + L_y V_2 / L_i^3 - 3L_x L_y V_1 / L_i^4 \quad (\text{B .17})$$

$$s_3 = 2L_y V_3 / L_i^3 - 3L_y^2 V_1 / L_i^4 \quad (\text{B .18})$$

para os quais V_i ($i = 1,2,3$) são definidos como:

$$V_1 = L_{i,y_k} \quad V_2 = L_{x,y_k} \quad V_3 = L_{y,y_k} \quad (\text{B .19})$$

Entretanto, as expressões para estes termos foram previamente obtidas na seção 4.5 (ver equações (4.5.10) até (4.5.14)). Para finalizar das equações (B .1) e (B .12) até (B .14):

$$K_{i,y_k} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & -s_1 & -s_2 \\ & s_3 & -s_2 & -s_3 \\ & & s_1 & s_2 \\ \text{Sim.} & & & s_3 \end{bmatrix} \quad \text{se} \quad i \in G_y^k \quad (\text{B .20})$$

Expressões similares também podem ser obtidas para o vetor de peso próprio que são dados por:

$$F_{D_i, y_k}^T = 0 \quad \text{se} \quad i \notin G_y^k \quad (\text{B.21})$$

e

$$F_{D_i, y_k}^T = \frac{\rho_i A_i V_i}{2} (0, 1, 0, 1) \quad \text{se} \quad i \in G_y^k \quad (\text{B.22})$$

Para o vetor de carga térmica temos:

$$F_{T_i, y_k}^T = 0 \quad \text{se} \quad i \notin G_y^k \quad (\text{B.23})$$

e

$$F_{T_i, y_k}^T = \theta_i \Delta T_i E_i A_i (-z_x, -z_y, z_x, z_y) \quad \text{se} \quad i \in G_y^k \quad (\text{B.24})$$

onde z_i ($i = 1, 2$) são definidos por:

$$z_1 = V_2 / L_i - L_x V_1 / L_i^2 \quad (\text{B.25})$$

$$z_2 = V_3 / L_i - L_y V_1 / L_i^2 \quad (\text{B.26})$$

Apêndice C

Neste apêndice a matriz de tensão S_i para o elemento de barra de duas dimensões é fornecido primeiramente. Subseqüentemente, será fornecido sua diferenciação com relação as coordenadas nodais y_k .

A matriz de tensão S_i para o i -ésimo elemento o qual é aparece na seção 4.7 (Equação (4.7.1)) é dado por:

$$S_i = \frac{E_i}{L_i^2} (-L_x, -L_y, L_x, L_y) \quad (C.1)$$

Observe que a matriz de tensão é função somente das coordenadas nodais. A área da seção transversal A_i não aparece na expressão.

A derivação direta desta expressão com relação as coordenadas nodais independentes y_k conduz a:

$$S_{i,y_k} = 0 \quad \text{se} \quad i \notin G_y^k \quad (C.2)$$

e

$$S_{i,y_k} = E_i (-H_1, -H_2, H_1, H_2) \quad \text{se} \quad i \in G_y^k \quad (C.3)$$

onde os termos $H_i (i = 1, 2)$ são obtidos pelas seguintes expressões:

$$H_1 = V_2 / L_i^2 - 2L_x V_1 / L_i^3 \quad (C.4)$$

e

$$H_2 = V_3/L_i^2 - 2L_y V_1/L_i^3 \quad (\text{C .5})$$

Recorde que as quantidades V_i ($i = 1,2,3$) nas equações (C .4) e (C .5) foram definidas no apêndice B (equações (B .19)).

Apêndice D

Aqui são apresentados alguns coeficientes de flambagem (k) para diferentes geometrias de seção transversal para o elemento de barra.

Para seção tubular temos, para a área da seção transversal e inércia, respectivamente::

$$A = 2\pi R t \quad (D.1)$$

$$I = \pi R^3 t \quad (D.2)$$

e estabelecemos a seguinte relação entre o diâmetro e espessura:

$$t = \frac{D}{10} \quad (D.3)$$

Assim, temos agora para a seção:

$$A = \frac{2}{5} \pi R^2 \quad (D.4)$$

$$I = \frac{\pi}{5} R^4 \quad (D.5)$$

A carga crítica de flambagem é dada por:

$$P = -\frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (D.6)$$

Substituindo a expressão do momento de inércia da seção, na expressão da carga crítica encontramos a seguinte expressão:

$$P = -\pi R^2 \frac{E\pi}{20} \frac{\pi R^2}{L^2} \quad (D.7)$$

Portanto, o valor do coeficiente de flambagem k para a seção tubular é:

$$k = \frac{E\pi}{20} \quad (D.8)$$

De onde obtemos a expressão para flambagem após relacionar os termos de área :

$$\sigma_b = -\frac{kA}{L^2} \quad (D.9)$$

Para a seção quadrada, obtemos o seguinte valor para k :

$$k = \frac{E\pi^2}{48} \quad (D.10)$$

Para uma barra com seção transversal retangular e inércia,

$$A = bh \quad (D.11)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad (D.12)$$

é necessário estabelecer a seguinte relação entre a base e a altura da seção:

$$b = \frac{h}{3} \quad (D.13)$$

O denominador da equação (D.13) acima pode ser um valor qualquer que se pretenda utilizar para estabelecer a relação entre a altura e a base da seção transversal.

Utilizando a expressão da carga crítica de flambagem e estabelecendo os devidos relacionamentos entre os termos, obtemos para esta seção transversal a seguinte relação para k :

$$k = \frac{E\pi^2}{144} \quad (D.14)$$

Neste trabalho não foram empregados elementos com seção transversal retangular, pois, se durante o processo de otimização o valor da altura da seção tende para o valor da base, podemos ter um elemento de elevada esbeltez, o que poderia levar a falha do componente estrutural devido a flambagem, e o programa desenvolvido não considera esta situação.

Apêndice E

Abaixo apresenta-se o algoritmo do programa desenvolvido neste trabalho.

Passo 1: Leitura de dados.

Passo 2: Avaliar a Função Lagrangeana Aumentada para as variáveis de projeto iniciais.

Passo 3: Calcular direção de descida.

Passo 4: Resolver a seqüência do problema de otimização sem restrições.

Passo 5: Avaliar as Condições de Kuhn-Tucker, i. e.,

- Gradiente da Função Lagrangeana Aumentada.
- Multiplicadores de Lagrange.

Passo 6: Se satisfaz critério de convergência (erro nos multiplicadores de Lagrange $< 0.1\%$) então pare. Se não volta para o Passo 3.