UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
COORDENADORIA DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM MATEMÁTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

ESTABILIZAÇÃO UNIFORME E CONTROLABILIDADE EXATA PARA UM SISTEMA HIPERBÓLICO

Dissertação apresentada ao curso de Pós-graduação em Matemática e Computação Científica do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Boris V. Kapitonov

MILTON DOS SANTOS BRAITT
Florianópolis
1997

à minha filha Helena

ESTABILIZAÇÃO UNIFORME E CONTROLABILIDADE EXATA PARA UM SISTEMA HIPERBÓLICO

Por

MILTON DOS SANTOS BRAITT

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática no curso de Pós-graduação em Matemática e Computação Científica.

Etzel Ritter Von Stockert

Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. **Boris V. Kapitonov**

Orientador

Gustavo Perla Menzala

Prof. Dr. **Gustavo Perla Menzala**

Membro

Prof. Dr. **Ruy Coimbra Charão**

Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao apoio constante de minha família durante a realização deste trabalho. A todos os meus professores desde o curso primário até a pós-graduação cujo exemplo de dedicação e esforço guardo para sempre na minha lembrança. Agradeço em especial ao Prof. Boris Kapitonov que me orientou de forma simples e objetiva. Gostaria de agradecer também ao apoio financeiro proporcionado pela CAPES e à Universidade Federal de Santa Catarina, seus professores e funcionários.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS

div u -	divergente da função vetorial u
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ -	produto interno usual em $\mathbb{R}^n$
$[\cdot,\cdot]$ -	produto vetorial em $\mathbb{R}^n$
$L_\infty(\Omega)$ -	Espaço das funções que são essencialmente limitadas.
$L_2(\Omega)$ -	Espaço das funções quadrado integráveis.
∇u -	é o vetor gradiente da função u.
$C^k(\Omega)$ -	Espaço das funções cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k são contínuas.
$C^\infty(\Omega)$ -	Conjunto das funções definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cujas derivadas parciais de qualquer ordem são contínuas.
$\dot{C}^k(\Omega)$ -	ver definição pg 13.
$D^\alpha(f)$ -	ver definição pg 13.
$\langle f,g\rangle_{l_2(\Omega)}$ -	ver definição pg 14.
$\|f\|_{L_2(\Omega)}$ -	ver definição pg 14.
$H^k(\Omega)$ -	ver definição pg 14.
$\overset{o}{H}{}^1(\Omega)$ -	ver definição pg 14.
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\overset{o}{H}{}^1}$ -	ver definição pg 14.
$\|\cdot\|$ -	é a norma em um espaço de Hilbert.
$\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ -	é o produto interno definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ definido na pg 23.
$L_2\big(0,T;D(\mathcal{A})\big)$ -	é o espaço dos operadores definidos em $D(\mathcal{A})$ a um parâmetro t, $0 < t \leq T$, quadrado integrável com respeito a este parâmetro.
$\|\cdot\|_{L_2\left(\Omega\times(0,T)\right)}$ -	é a norma gerada pelo produto interno em $L_2\big(\Omega\times(0,T)\big)$.

RESUMO

Estudamos a estabilização uniforme da energia e a controlabilidade exata para um problema com três equações hiperbólicas acopladas. Utilizamos o método de "controlabilidade via estabilização". Demonstramos que o problema de Cauchy é bem posto e provamos a estabilização uniforme da energia para este sistema contendo termo de amortecimento interior em apenas umas das equações . Com este resultado obtém-se a controlabilidade exata do sistema hiperbólico inicial.

ABSTRACT

We study the uniform stabilization and the exact controllability for a system of three coupled hyperbolic equations. Use the "controllability via stabilitability" method. We prove the well posedness of the Cauchy's abstract problem and proof the uniform stabilitation of energy to this system with interior damping term in only one equation. Through this result attain the exact controllability of inicial hyperbolic system.

1 INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento assintótico das soluções dos problemas mistos envolvendo equações diferenciais e sistemas de evolução é uma parte importante da teoria qualitativa das E.D.P's. Existem muitos resultados sobre este comportamento assintótico para equações e sistemas hiperbólicos. Estas questões tem sido estudadas principalmente para a equação da onda e equações próximas dela.

Considere a equação da onda em um domínio limitado $\Omega \subset I\!R^n$,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u_{|t=0} = f_1, \quad u_{t|t=0} = f_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

e, por exemplo, com as seguintes condições de fronteira,

$$u_{|S} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = 0, \tag{1.2}$$

onde S é a fronteira de Ω e ν é o vetor unitário normal exterior a S. Facilmente verificamos que para todo $t \geq 0$ temos

$$E(t) = \int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right) dx \;=\; \text{constante} \;= E(0).$$

$E(t)$ é chamada de a energia da solução .

Para estudar o problema da controlabilidade exata usando o chamado princípio de Russel [23], "Controlabilidade via Estabilização ", precisamos que a energia decaia para zero quando $t \to \infty$. O que podemos fazer para obtermos este decaimento? É necessário introduzir um termo de amortecimento no problema (1.1), (1.2): na fronteira S (amortecimento de fronteira) ou em Ω (amortecimento interior). Em outras palavras precisamos construir os chamados Operadores de Estabilização . Existem muitos trabalhos sobre este problema. Vejamos alguns resultados sobre equações e sistemas hiperbólicos com *amortecimento de fronteira*:

1) G. Chen [4] considera o seguinte problema,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u_{|_{t=0}} = f_1, \quad u_{t|_{t=0}} = f_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u_t\Big|_{S_0 \times (0,T)} = 0, \qquad u\Big|_{S_1 \times (0,T)} = 0, \end{cases}$$

onde $S_0 = \{x \in S \mid \langle x - x_0, \nu \rangle > 0\}$, $S_1 = S \setminus S_0$, x_0 é um ponto do $I\!R^n$ e ν é o vetor unitário normal exterior a S. Temos que

$$E(t) = \int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right) dx$$

satisfaz

$$\frac{d}{dt} E(t) = -2 \int_{S_0} \alpha u_t^2 dS \leq 0$$

se $\alpha > 0$. Assim $E(t)$ não cresce quando $t \to \infty$. Chen provou que $E(t)$ decai exponencialmente, isto é,

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t) E(0), \quad \beta > 0, \tag{1.3}$$

onde C é uma constante positiva.

2) Considere o seguinte sistema hiperbólico (um sistema elastodinâmico linear):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u + (\lambda + \sigma) \nabla (\mathrm{div} u),$$

onde $u = (u^1, \ldots, u^n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, μ, ρ, λ, e σ são constantes positivas.

Adicionemos as seguintes condições iniciais e de fronteira,

$$
\begin{gathered}
u_{|t=0} = f_1, \quad u_{t|t=0} = f_2, \\
\left((\lambda+\sigma)divu.v + \sigma\frac{\partial u}{\partial \nu} + au + bu_t\right)\Big|_{S_0\times(0,T)} = 0, \\
u\Big|_{S_1\times(0,T)} = 0,
\end{gathered}
$$

onde $S_0 = \{x \in S \mid \langle x - x_0, \nu\rangle > 0\}$, $S_1 = S \setminus S_0$, e ν é o vetor unitário normal exterior a S.

Lagnese [15] e Kapitonov [9] utilizando diferentes métodos provaram o decaimento da energia

$$
E(t) = \int_\Omega \left(\rho|u_t|^2 + \sigma|\nabla u|^2 + (\lambda+\sigma)(\mathrm{div}u)^2\right)dx.
$$

3) Em [10] é estudado o problema,

$$
\begin{cases}
e_t = \mathrm{rot}(\mu h) \\
h_t = -\mathrm{rot}(\lambda e) \\
\mathrm{div}e = \mathrm{div}h = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{gathered}
e(x,0) = f_1, \quad h(x,0) = f_2, \\
[\nu, e] - \alpha(h - \nu\langle h,\nu\rangle)\Big|_{S\times(0,T)} = 0,
\end{gathered}
$$

onde e e h são funções vetoriais tri-dimensionais de t, $x = (x_1, x_2, x_3)$, ν é o vetor unitário normal exterior, $[\cdot,\cdot]$ é o produto vetorial e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno, $\mu = \mu(x)$, $\lambda = \lambda(x)$ são funções escalares e $\alpha = \alpha(x)$ é uma função continuamente diferenciável sobre S com $\mathrm{Re}\alpha > 0$ e rot é o rotacional.

Neste caso

$$E(t) = \int_\Omega (\lambda|e|^2 + \mu|h|^2)dx,$$
$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_S 2\mathrm{Re}\alpha\lambda\mu[h,\nu]^2 dS.$$

Kapitonov provou que

$$E(t) \leq C\exp(-\gamma t)E(0), \quad \gamma > 0 \text{ e } C > 0.$$

Vejamos agora um resultado o sobre o decaimento da energia de um sistema hiperbólico com *amortecimento interno.* O caso mais simples é o da equação da onda amortecida:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t = 0 \\ u_{|_{t=0}} = f_1, \quad u_t{}_{|_{t=0}} = f_2, \\ u_{|_S} = 0. \end{cases}$$

Temos que

$$E(t) = \int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right)dx,$$

e

$$\frac{dE}{dt} = -\int_\Omega 2a(x)u_t^2 dx \leq 0$$

se $a(x) \geq 0$ em Ω.

Aqui aparece novamente o problema: dar condições sobre $a(x)$ (sobre o suporte desta função) assegurando o decaimento uniforme da energia, por exemplo,

$$E(t) \leq C\exp(-\gamma t)E(0), \quad \forall t \geq 0, \quad \gamma > 0. \tag{1.4}$$

Este caso é atualmente bem entendido. C. Bardos, G. Lebeau e J. Rauch [3] provaram que se em Ω, $a \in C^\infty$ então

vale (1.4)$\Longleftrightarrow$ existe algum $T > 0$ tal que todo raio de geometria ótica intercepta o conjunto $W \times (0,T)$, onde W é o suporte de $a(x)$.

Vamos considerar agora dois sistemas de evolução . Assuma que um deles é um sistema amortecido e a energia associada a solução u, $E_u(t)$ decai com o tempo. Suponha que o segundo sistema é conservativo, ou seja, a energia da solução é constante:

$$E_v(t) = E_v(0).$$

Por exemplo,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u_{|t=0} = f_1, \quad u_{t|t=0} = g_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u_t \Big|_S = 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 \\ v_{|t=0} = f_2, \quad v_{t|t=0} = g_2, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_S = 0 \end{cases}$$

É possível conectar estes sistemas de forma a obter o decaimento uniforme da energia total?

$$E(t) = E_u(t) + E_v(t).$$

Vejamos alguns resultados obtidos a respeito desta questão com amortecimento de fronteira.

1) Em [11] este problema foi solucionado para o seguinte par de sistemas hiperbólicos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}\dfrac{\partial v}{\partial x_j}) = 0, \\ u_{|t=0} = \varphi_1, \quad v_{t|_{t=0}} = \psi_1, \\ A_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i + au + bu_t + \xi v_t\Big|_{S_0} = 0, \ u_{|S} = 0, \\ A_{ij}\dfrac{\partial v}{\partial x_j}\nu_i + cv - \xi u_t\Big|_{S_0} = 0, \ v_{|S} = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

onde $\partial\Omega = S_0 \cup S_1$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$, $u = (v^1, \ldots, v^m)$, $A_{ij} = A^*_{ij}$ são matrizes quadradas de ordem m, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ é o vetor unitário normal exterior, $a \geq 0$, $c \geq 0$, $\xi > 0$, $b > 0$.

Para este caso a energia é,

$$E(t) = \int_\Omega (|u_t|^2 + \sum_{ij} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + |v_t|^2 + \sum_{ij} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i})dx + \int_S (au^2 + cv^2)dS,$$

e

$$\frac{dE}{dt} = -2\int_{S_0} b|\nabla u|^2 dS.$$

Para $\xi = 0$, o problema (1.5) divide-se em dois problemas mistos independentes. Além do mais para v obtemos um problema de conservação :

$$E_v(t) = \int_\Omega (|v_t|^2 + \sum_{ij} A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} + \int_S cv^2 dS \equiv E_v(0), \ \forall t \geq 0.$$

Se $\xi > 0$ é provado em [11] que

$$E(t) \leq C\exp(-\gamma t)E(0), \quad \gamma > 0,\ C > 0.$$

Isto significa a estabilização simultânea dos dois sistemas.

2) Em [12] Kapitonov provou a estabilização de fronteira simultaneamente para dois sistemas de Maxwell.

3) Em [13] é estudado o problema da estabilização simultânea para uma par de equações de Schrödinger:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_p}(A_{pq}\dfrac{\partial u}{\partial x_q}) = 0 \\ i\dfrac{\partial v}{\partial t} - \displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_p}(A_{pq}\dfrac{\partial v}{\partial x_q}) = 0 \end{cases}$$

$$u_{|t=0} = f, \quad u_{t|t=0} = g,$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} A_{pq}\dfrac{\partial u}{\partial x_q}\nu_p + au + b\dfrac{\partial u}{\partial t} + \xi\dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{S_0\times(0,T)} = 0, \\ u|_{S_1\times(0,T)} = 0, \\ \displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} A_{pq}\dfrac{\partial v}{\partial x_q}\nu_p + cu - \xi\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{S_0\times(0,T)} = 0, \\ v|_{S_1\times(0,T)} = 0, \end{cases}$$

onde $u(u^1,\ldots,u^m(x,t))$, $v(v^1,\ldots,v^m(x,t))$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $A_{pq} = A^*_{pq}$ são matrizes mxm com valores reais, $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ é o vetor exterior normal unitário, $a = a(x) \geq 0$, $c = c(x) \geq 0$, $b(x) > 0$, $\xi(x) \geq 0$.

Temos então que

$$E(t) = \int_\Omega \Big(\sum_{p,q=1}^{n} A_{pq}\frac{\partial u}{\partial x_q}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_p} + \sum_{p,q=1}^{n} A_{pq}\frac{\partial v}{\partial x_q}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_p}\Big)dx + \int_{S_0} (a|u|^2 + c|v|^2)dS$$

e

$$\frac{dE}{dt} = -2\int_{S_0} b|u_t|^2 dS.$$

Novamente se $\xi = 0$ então

$$E_v(t) \equiv \int_\Omega \Big(\sum_{p,q=1}^{n} A_{pq}\frac{\partial v}{\partial x_q}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_p}\Big)dx + \int_{S_0} c|v|^2 dS \equiv 0.$$

Se $\xi > 0$ foi provado a estabilização simultânea da energia,

$$E(t) \leq C\exp(-\gamma t)E(0), \qquad \gamma >, \; C > 0.$$

Para o caso de dois sistemas com amortecimento interior vejamos o seguinte resultado. Em [14] foi considerado o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q(x)\frac{\partial u}{\partial t} + B(x)\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}) - B(x)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u_{|t=0} = f_1, \quad v_{|t=0} = f_2 \\ u_{t|t=0} = g_1, \quad v_{t|t=0} = g_2, \\ u_{|S=0} = 0, \quad v_{|S=0} = 0. \end{cases}$$

onde $u(u^1(x,t),\ldots,u^m(x,t))$, $v(v^1(x,t),\ldots,v^m(x,t))$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $A = A^*$, $B(x) = B^*(x)$, e $Q(x) = Q^*(x)$ são matrizes de ordem m e $B(x)$, $Q(x)$ são de classe $L_\infty(\Omega)$. Neste caso temos

$$E(t) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} A\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} A\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} + |u_t|^2 + |v_t|^2\Big)dx$$

e

$$\frac{dE}{dt} = -2\int_\Omega Q|u_t|^2 dx \leq 0,$$

se $Q(x)\xi.\xi \geq 0$ em Ω. Note que se $B(x) = 0$ então

$$E_v(t) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n A\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx \equiv E_v(0),\ \forall t \geq 0.$$

Neste trabalho provou-se que se

$$\begin{aligned}
&1)\ Q(x)\xi\cdot\xi \geq 0,\ \big(qQ(x) - B(x)\big)\xi\cdot\xi \geq 0,\\
&\qquad\qquad \big(pB(x) - Q(x)\big)\xi\cdot\xi \geq 0 \text{ em } \Omega,\ p > 0, q > 0,\ \forall\xi \in I\!R^m\\
&2)\ Q(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2 \text{em } D(\bar{D} \subset \Omega),\ \alpha > 0,\ \forall\xi \in I\!R^m,
\end{aligned}$$

então

$$E(t) \leq \frac{C}{(t+t_0)^k} E(0)$$

com $0 < k \leq 1$.

Isto significa que se obteve a estabilização simultânea dos dois sistemas pela introdução de um termo de amortecimento interior em apenas um dos sistemas.

Surge então a seguinte questão : é possível obter estabilização simultânea de três ou mais sistemas somente pela ação de um amortecimento interior em apenas um destes sistemas?

Consideremos três equações de onda, tendo uma delas termo de amortecimento,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + qu_t = 0 \\ v_{tt} - \Delta v = 0 \\ w_{tt} - \Delta w = 0 \end{cases}$$

$$u_{|t=0} = f_1, \quad u_{t|t=0} = f_2,$$
$$v_{|t=0} = f_3, \quad v_{t|t=0} = f_4,$$
$$w_{|t=0} = f_5, \quad w_{t|t=0} = f_6,$$

$$u_{|S} = v_{|S} = w_{|S} = 0.$$

Teremos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_u(t) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right)dx \\ &= -2\int_\Omega q u_t^2 dx \leq 0, \quad \text{se} \quad q \geq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_v(t) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right)dx = 0 \\ \frac{d}{dt}E_w(t) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right)dx = 0.\end{aligned}$$

É possível acoplar estas equações em Ω tal que a energia total $E(t) = E_u(t) + E_v(t) + E_w(t)$ decai com o tempo?

No presente trabalho solucionamos este problema. Achamos esta conecção e provamos o decaimento da energia total para o seguinte sistema acoplado:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + q(x)u_t + b(x)v_t = 0, \\ v_{tt} - \Delta v - b(x)u_t + a(x)w_t = 0, \\ w_{tt} - \Delta w - a(x)v_t = 0, \\ u\,|_{t=0} = f_1(x), v\,|_{t=0} = f_2(x), w\,|_{t=0} = f_3(x), \\ u_t\,|_{t=0} = f_4(x), v_t\,|_{t=0} = f_5(x), w_t\,|_{t=0} = f_6(x), \\ u\,|_S = v\,|_S = w\,|_S = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

onde q, a, e $b \in C(\bar{\Omega})$ e $q(x) \geq q_o > 0$, $a(x) \geq a_o > 0$, $b(x) \geq b_o > 0$.

A energia da solução deste sistema é:

$$E(t) = \int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |v_t|^2 + |\nabla v|^2 + |w_t|^2 + |\nabla w|^2 \right) dx \qquad (1.7)$$

Para toda solução de (1.6) temos a seguinte identidade

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega 2q(x)|u_t|^2 \, dxdt \qquad (t_2 \geq t_1 \geq 0)$$

Notemos que somente uma das equações de (1.6) possui termo de amortecimento e a energia é uma função decrescente da variável de tempo t.

Obtemos neste trabalho o decaimento da energia,

$$E(t) \leq \frac{C}{t + t_o} E(0)$$

com $t > 0$ onde t_o é uma constante qualquer tal que $t_o \geq T_o$, C é uma constante que depende de t_o e T_o é uma constante fixa que determinamos.

Outros resultados sobre estabilização uniforme foram obtidos por C. Dafermos [5], A. Haraux [8], E. Zuazua [25], J.S. Ferreira [7], D.C. Pereira e G. P. Menzala [20], J. Rivera [21], J. Rivera e Y. Shibata [22].

A estabilização uniforme desempenha um papel importante no problema do controle exato do sistema de evolução .

Da estabilização de fronteira deduze-se o controle de fronteira. Da estabilização interior obtem-se a controlabilidade exata pela introdução de um controle no lado direito da equação . Da estabilização simultânea de fronteira para dois sistemas pode-se deduzir a controlabilidade exata dos dois sistemas por uma meia condição de fronteira. Da estabilização interior simultânea para dois sistemas pode ser deduzido o controle exato dos dois sistemas pela ação de um termo no lado direito das equações .

Resultados sobre esta questão pode ser visto em E. Zuazua [26] e controle distribuído para várias equações individuais (incluindo controle pontual) tem sido estudado por J. L. Lions [16] e [17].

Utilizando o resultado da estabilização uniforme obtido no presente trabalho deduzimos a controlabilidade exata de três sistemas pela introdução de um termo de controle em apenas uma das equações ,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b(x)v_t = p(x,t), \\ v_{tt} - \Delta v - b(x)u_t + a(x)w_t = 0, \\ w_{tt} - \Delta w - a(x)v_t = 0, \\ u\mid_{t=0} = f_1(x),\ v\mid_{t=0} = f_2(x),\ w\mid_{t=0} = f_3(x), \\ u_t\mid_{t=0} = f_4(x), v_t\mid_{t=0} = f_5(x),\ w_t\mid_{t=0} = f_6(x), \\ u\mid_S = v\mid_S = w\mid_S = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

No capítulo II apresentamos algumas definições e resultados da teoria básica utilizados neste trabalho. Maiores detalhes podem ser visto em [1], [2], [6], [18], [19] e [24]. No capítulo III mostramos que o problema (1.6) é bem posto, e no capítulo IV provamos o decaimento da energia. Por último deduzimos a controlabilidade para (1.8) no capítulo V.

2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

2.1 Espaços de Sobolev

Seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ um ponto do $I\!R^n$. Como usual, por uma região do $I\!R^n$ ou região n-dimensional queremos dizer um conjunto aberto e conexo (não vazio) do $I\!R^n$. No que segue, a menos que mencionemos explicitamente, toda região será considerada um conjunto limitado. Seja Ω uma região n-dimesional. Um conjunto $\mathcal{D} \subset \Omega$ é dito ser *estritamente interior* com respeito a Ω se $\bar{\mathcal{D}} \in \Omega$, onde $\bar{\mathcal{D}}$ é o fecho de $\mathcal{D}$.

O conjunto das funções a valores reais definida em Ω tendo derivadas parciais de ordem menor ou igual a k, onde k é um inteiro não -negativo, será denotado por $C^k(\Omega)$, enquanto o subconjunto seu consistindo das funções cujas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k, são contínuas em $\bar{\Omega}$ por $C^k(\bar{\Omega})$. Para os conjuntos $C^0(\Omega)$ e $C^0(\bar{\Omega})$ de funções que são contínuas em Ω e $\bar{\Omega}$ respectivamente, usaremos também a notação $C(\Omega)$ e $C(\bar{\Omega})$. Uma função $f(x)$ é dita ter *suporte compacto* em Ω se existe uma subregião Ω' estritamente interior em relação a Ω tal que $f(x) = 0$ em $\Omega \backslash \Omega'$. O conjunto $\dot{C}^k(\bar{\Omega})$ é composto de todas as funções pertencentes a $C^k(\bar{\Omega})$ que possuem suporte compacto.

Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ um vetor chamado de multi-index cujas componentes são inteiros não -negativos, e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Se $f(x) \in C^k(\Omega)$, então as derivadas parciais

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

serão denotadas brevemente por $D^\alpha f$.

As integrais utilizadas neste trabalho são integrais no sentido de Lebesgue e consideraremos conhecidas suas propriedades, além disto as funções serão entendidas como classes de funções cujos elementos são funções que coincidem com sua representante "em quase todo ponto", ou seja diferem apenas em um conjunto de medida nula. Consideramos também conhecidos a definição e as principais propriedades dos Espaços de Hilbert.

O conjunto das funções mensuráveis a valores reais cujo quadrado são integráveis sobre Ω serão denotadas por $L_2(\Omega)$. Com o produto escalar definido por

$$(f_1, f_2)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega f_1(x) f_2(x) dx.$$

$L_2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e a sua norma gerada por este produto escalar é da forma

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega f(x)^2 dx\right)^{1/2}.$$

O Conjunto $C(\bar{\Omega})$ é denso em $L_2(\Omega)$.

Uma função $f^\alpha \in L_2(\Omega)$ é chamada de *α-ésima derivada generalizada (d.g.) em Ω* de uma função $f \in L_2(\Omega)$ se

$$\int_\Omega f(x) D^\alpha g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f^\alpha(x) g(x) dx$$

para qualquer $g(x) \in \dot{C}^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$.

A d.g. possui propriedades semelhantes a derivada no sentido usual.

O conjunto das funções pertencentes a $L_2(\Omega)$ que possui todas as d.g. de ordem menor ou igual a $k, k \geq 1$ denotaremos por $H^k(\Omega)$. Por $H^0(\Omega)$ entenderemos o próprio $L_2(\Omega)$. $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o seguinte produto escalar

$$\langle f, g \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha f D^\alpha g dx. \qquad (2.1)$$

Estes são os chamados Espaços de Sobolev. Os espaços $H^k(\Omega), k = 1, 2, \ldots,$ contém os conjuntos $C(\bar{\Omega})$ e portanto também são densos em $L_2(\Omega)$.

Ao longo deste trabalho utilizaremos a seguinte fórmula de integração por partes:

Seja $f(x)$ e $g(x)$ pertencentes a $H^1(\Omega)$ e $S \in C^1$ a fronteira de Ω . Então para qualquer $i = 1, 2, \ldots, n$ vale,

$$\int_\Omega f_{x_i} g dx = \int_S f g n_i dS - \int_\Omega f g_{x_i} dx,$$

onde n_i é o coseno do angulo entre a normal exterior a S e o eixo x_i.

Denotaremos por $\overset{o}{H^1}(\Omega)$ o subconjunto de $H^1(\Omega)$ das funções que se anulam na fronteira de Ω . O produto escalar em $\overset{o}{H^1}(\Omega)$ dado por

$$\langle f, g \rangle_{\overset{o}{H^1}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla f \nabla g dx$$

é equivalente ao produto escalar dado em (2.1) com $k = 1$ e então podemos obter a desigualdade de Poincaré:

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leq const \int_\Omega |\nabla f|^2 dx,$$

válida para qualquer $f \in \overset{o}{H^1}(\Omega)$.

2.2 Algumas classes de operadores

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert.

2.2.1 Definição de operador linear limitado

Seja T um operador linear. Dizemos que T é *limitado* see $\exists\, c > 0$ tal que

$$\|Tf\| \leq c\|f\|, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

O ínfimo das constantes que satisfazem a desigualdade acima é chamado de *norma* de T e é denotado por $\|T\|$.

2.2.2 Definição de operador adjunto

Seja $\mathcal{A}$ um operador sobre $\mathcal{H}$. Um operador denotado por $\mathcal{A}^*$, é definido da seguinte forma: a cada elemento g do seu domínio, corresponde um único elemento, $h = \mathcal{A}^* g \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle \mathcal{A}f, g\rangle = \langle f, \mathcal{A}^* g\rangle \tag{2.2}$$

para todo $f \in D(\mathcal{A})$. O operador $\mathcal{A}^*$ é chamado de *adjunto* de $\mathcal{A}$. Seu domínio é o conjunto $D(A^*)$ consistindo daqueles elementos de $\mathcal{H}$ tal que (2.2) se verifica para todo $f \in D(A)$.

2.2.3 Definição de operador dissipativo

$\mathcal{A}$ é um operador dissipativo see

$$\langle \mathcal{A}f, f\rangle \leq 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}$$

2.2.4 Definição de operador fechado

$\mathcal{A}$ é um operador fechado see

$$f_n \rightarrow f \text{ e } \mathcal{A}f_n \rightarrow g \quad \Rightarrow \quad f \in D(\mathcal{A}) \text{ e } \mathcal{A}f = g.$$

Se $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$ então $\mathcal{A}$ é fechado. Este resultado deriva do fato que todo operador adjunto é fechado.

2.2.5 Solução de uma equação em $\mathcal{H}$

Seja G um operador limitado tal que $\|G\| < 1$ então a seguinte equação em $\mathcal{H}$,

$$f - G(f) = g \tag{2.3}$$

possui uma solução $f = (I - G)^{-1}g$ onde g é um elemento qualquer de $\mathcal{H}$.

Demonstração :

Mostraremos que a série $f = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k g$ $(\mathcal{A}^0 = I)$ é a solução procurada. Esta série converge pois $\mathcal{H}$ é completo e as somas parciais $g_m = \sum_{k=0}^{m} \mathcal{A}^k g$ constitui uma sequencia fundamental:

para $p > m$ temos

$$\begin{aligned} \|g_p - g_m\| &= \left\|\mathcal{A}^p g + \ldots + \mathcal{A}^{m+1} g\right\| \leq \|A^p g\| + \ldots + \left\|\mathcal{A}^{m+1} g\right\| \\ &\leq \|g\| \left(\|\mathcal{A}\|^{m+1} + \ldots\right) = \|g\| \frac{\|\mathcal{A}\|^{m+1}}{1 - \|\mathcal{A}\|} \to 0 \end{aligned}$$

quando $m, p \to \infty$.

O elemento $f \in \mathcal{H}$ é a solução de (2.3), pois

$$(I - \mathcal{A})f = (g + \mathcal{A}g + \ldots) - (\mathcal{A}g + \mathcal{A}^2 g + \ldots) = g.$$

2.3 Semigrupos de Contrações

Uma família $T(t)$, $\quad 0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ é um *semigrupo de operadores lineares limitados sobre* Ω se

(i) $\quad T(0) = I$, (I é o operador identidade sobre $\mathcal{H}$).

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$ (a propriedade de semigrupo).

Um semigrupo de operadores lineares sobre $\mathcal{H}$ é chamado de *semigrupo de operadores lineares limitados fortemente contínuo* se

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x \text{ para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Um operador linear $\mathcal{A}$ definido por

$$D(\mathcal{A}) = \left\{x \in \mathcal{H} : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\right\}$$

e

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{d^+ T(t)x}{dt}\right|_{t=0} \text{ para } x \in D(\mathcal{A})$$

é o *gerador infinitesimal* do semigrupo $T(t)$, $D(\mathcal{A})$ é o domínio de $\mathcal{A}$.

Teorema 2.1 *Seja $T(t)$ um semigrupo de operadores lineares limitados fortemente contínuos e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal então*

$$\textit{para } x \in D(\mathcal{A}),$$

$$T(t)x \in D(\mathcal{A}) \text{ e}$$

$$\frac{d}{dt}T(t)x = \mathcal{A}T(t)x = T(t)\mathcal{A}x.$$

Demonstração :

Seja $x \in D(\mathcal{A})$, então como $T(t)$ é linear e contínuo, temos

$$
\begin{aligned}
T(t)\mathcal{A}x &= T(t)\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T(h)-I)x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T(t)T(h)-T(t))x \\
&= \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T(t+h)-T(t))x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T(h)-I)T(t)x = \mathcal{A}T(t)x
\end{aligned}
$$

Assim, se $x \in D(\mathcal{A})$, então $T(t)x \in D(\mathcal{A})$ e $T(t)\mathcal{A}x = \mathcal{A}T(t)x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T(t+h) - T(t))x$. Provamos então que a derivada a direita de $T(t)x$ existe para cada $x \in D(\mathcal{A})$. Mostraremos que para $t > 0$ a derivada a esquerda também existe e é igual a derivada a direita. Temos que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)\mathcal{A}x\right] \\
&= \lim_{h\downarrow 0} T(t-h)\left[\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - \mathcal{A}x\right] + \lim_{h\downarrow 0}(T(t-h)\mathcal{A}x - T(t)\mathcal{A}x)
\end{aligned}
$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade é igual a zero porque $x \in D(\mathcal{A})$ e $\|T(t-h)\|$ é limitado em $0 \leq h \leq t$ e o segundo também é igual a zero devido a contínuidade forte de $T(t)$. Assim está concluída a demonstração . $\square$

Teorema 2.2 (Lumer-Phillips) *Seja $\mathcal{A}$ um operador linear em $\mathcal{H}$ com domínio $D(\mathcal{A})$ e imagem $R(\mathcal{A})$, com $D(\mathcal{A})$ denso em $\mathcal{H}$. Então $\mathcal{A}$ gera um semigrupo de contrações fortemente contínuo em $\mathcal{H}$ se e somente se $\mathcal{A}$ é dissipativo e $R(I-\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [19] e [24].

Corolário. *Se $\mathcal{A}$ é um operador linear fechado densamente definido sobre $\mathcal{H}$ e se $\mathcal{A}$ e seu adjunto $\mathcal{A}^*$ são dissipativos, então $\mathcal{A}$ gera um semigrupo de contrações fortemente contínuo.*

Demonstração :

É sufiente mostrar que $R(I-\mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Mas desde que $(I-A)^{-1}$ é fechado e contínuo, $R(I-\mathcal{A}) \neq \mathcal{H}$ implica a existência de um elemento $x' \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle x - \mathcal{A}x, x'\rangle = 0 \text{ para todo } x \in D(\mathcal{A})$$

Logo $x' - \mathcal{A}^*x' = 0$, contrariando a dissipatividade de $\mathcal{A}^*$ e $x' \neq 0$. $\square$

2.4 Estabilização Uniforme

Entendemos por *estabilização uniforme* o decaimento da energia associada ao sistema, isto é, quando o tempo tende ao infinito a energia tende a zero, sendo este decaimento independente da condição inicial.

ou seja:

$$E(t) \leq C(t)E(0)$$

com $C(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

$E(t)$ representa a energia do sistema e $C(t)$ uma função de t. Por uniforme entendemos que esta desigualdade é válida para todo dado inicial do sistema, sem alterar a função $C(t)$.

2.5 Controlabilidade exata

Considere inicialmente um *sistema distribuído*, ou seja, um sistema cujo estado y é dado como uma função de x (a variável espacial), t (o tempo) e v (a função de controle), pela solução da seguinte equação diferencial :

$$(\frac{\partial y}{\partial t} + \mathcal{A}y) = \mathcal{B}v. \tag{2.4}$$

Em (2.4) $\mathcal{A}$ é um Operador Diferencial Parcial, que pode ser linear ou não -linear. A variável espacial x consideraremos definida num aberto limitado Ω de $\mathbb{R}^n$.

As condições de fronteira que podemos colocar no problema dependem da estrutura de $\mathcal{A}$. A função de controle v gera um espaço $\mathcal{U}$ e em (2.4) o operador $\mathcal{B}$ leva este espaço $\mathcal{U}$ num espaço tal que (2.4) faça sentido.

Nestas condições a função de controle v expressa o seguinte: que podemos *agir* no sistema o qual esta sendo modelado pelo operador $\partial y/\partial t + \mathcal{A}$.

Nas aplicações pode acontecer desta *ação* se dar em apenas uma "pequena" parte geométrica de Ω , isto é , ou sobre parte da fronteira (então v é chamado de *controle de fronteira* ou sobre parte do domínio (neste caso v é dito ser um *controle distribuído*).

Em (2.4) y pode ser considerado uma função escalar ou mesmo vetorial. Um exemplo de operador para (2.4) é o chamado *wave operator*, ou operador de ondas (que será o objeto deste trabalho nos próximos capítulos):

$$(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta)y = \mathcal{B}v \tag{2.5}$$

Podemos escrever (2.5) como um sistema de primeira ordem para obter a representação do tipo (2.4).

Outros exemplos seriam

$$(\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta)y = \mathcal{B}v.$$

o *operador de difusão* ,

e

$$\frac{\partial y}{\partial t} + y\nabla y - \Delta y = \mathcal{B}v - \nabla\pi$$
$$div \ \ y = 0$$

as equações de *Navier-Stokes*.

Considere as seguintes condições iniciais adicionadas ao problema (2.4)

$$y(0) = y_0 \tag{2.6}$$

onde $y(0)$ representa a função $x \to y(x, 0)$.

Assumimos que dado v e dado y_0 (em um conveniente espaço de funções) e com convenientes condições de fronteira associadas as equações (2.4) e (2.6) definem *unicamente* um estado $y(x,t,v) = y(v)$.

Seja T um tempo dado e y_1 um elemento qualquer do espaço de funções onde tomamos y_0. Queremos achar v (se existir) tal que

$$y(T,v) = z_0.$$

Em outras palavras, desejamos levar o sistema do estado y_0 para o estado z_0 no intervalo de tempo T. Se isto é possível para qualquer par y_0, z_0, dizemos que o sistema é *exatamente controlável.*

Para o caso da equação de estado (2.5) (equação da onda, onde y representa o par $(y, \partial y/\partial t)$), podemos agir no sistema na fronteira de Ω ou num subconjunto de Ω , e esperamos encontrar v tal que o sistema se dirigirá do estado

$$(y_0, \frac{\partial y}{\partial t}(0)) = y_1$$

para

$$y(T) = z_0 \quad , \frac{\partial y}{\partial t}(T) = z_1.$$

Devido a velocidade finita de propagação da onda, esperamos que a Exata Controlabilidade só seja possível para T suficientemente grande.

3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Neste capítulo estudamos o problema abstrato de Cauchy para o seguinte problema apresentado no capítulo 1 (1.6):

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + q(x)u_t + b(x)v_t = 0, \\ v_{tt} - \Delta v - b(x)u_t + a(x)w_t = 0, \\ w_{tt} - \Delta w - a(x)v_t = 0, \\ u\mid_{t=0} = f_1(x),\ v\mid_{t=0} = f_2(x),\ w\mid_{t=0} = f_3(x), \\ u_t\mid_{t=0} = f_4(x), v_t\mid_{t=0} = f_5(x),\ w_t\mid_{t=0} = f_6(x), \\ u\mid_S = v\mid_S = w\mid_S = 0. \end{cases}$$

Denotamos por $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert real das sextuplas

$$w = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$$

de funções escalares w_i tais que

$$w_1, w_2, w_3 \in H^1(\Omega) \quad \text{com} \quad w_1\big|_S = w_2\big|_S = w_3\ \big|_S = 0,$$
$$\text{e} \quad w_4, w_5, w_6 \in L_2(\Omega).$$

O produto interno em $\mathcal{H}$ é dado por:

$$\langle w, f\rangle_o = \int_\Omega \big(\langle \nabla w_1, \nabla f_1\rangle + \langle \nabla w_2, \nabla f_2\rangle + \langle \nabla w_3, \nabla f_3\rangle + w_4 f_4 + w_5 f_5 + w_6 f_6\big) dx$$

onde $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.

Em $\mathcal{H}$ definimos o operador não limitado $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}\{w_1,...,w_6\} = \{w_4, w_5, w_6, \Delta w_1 - qw_4 - bw_5, \Delta w_2 + bw_4 - aw_6, \Delta w_3 + aw_5\}$$

e o $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ consiste dos elementos $w = \{w_1,...,w_6\} \in \mathcal{H}$ tais que

$$w_1, w_2, w_3 \in H^2(\Omega), \quad w_4, w_5, w_6 \in H^1(\Omega) \quad \text{e}$$
$$w_1\big|_S = w_2\big|_S = w_3\big|_S = w_4\big|_S = w_5\big|_S = w_6\big|_S = 0$$

Lema 1. *O domínio do operador $\mathcal{A}^*$ coincide com o $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ e para, $f = \{f_1,...,f_6\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$*

$$\mathcal{A}^* f = -\{f_4, f_5, f_6, \Delta f_1 + qf_4 - bf_5, \Delta f_2 + bf_4 - af_6, \Delta f_3 + af_5\}.$$

Prova:

Seja $f = \{f_1,...,f_6\}$ um elemento qualquer de $\mathcal{H}$. Este elemento pertencerá ao $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ se existir um elemento $g = \{g_1,...,g_6\} \in \mathcal{H}$ tal que para todo $w = \{w_1,...,w_6\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tem-se

$$\langle \mathcal{A}w, f\rangle_o = \langle w, g\rangle_o \tag{3.1}$$

Neste caso g é a imagem de $\mathcal{A}^*$ aplicado a f, ou seja,

$$\mathcal{A}^* f = g.$$

Verifiquemos para quais f existe este elemento g.

A equação (3.1) deve ser válida para qualquer $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, logo será válida para $w = \{u, 0, 0, 0, 0, 0\}$ com $u\ |_S = 0$, $u \in H^2(\Omega)$, que é um elemento do $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Assim teremos,

$$\mathcal{A}w = \{0,0,0,\Delta u,0,0\}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}w, f\rangle_0 &= \langle\{0,0,0,\Delta u,0,0\},\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}\rangle_0\\ &= \int_\Omega \Delta u.f_4 dx.\end{aligned}$$

Calculando o lado direito de (3.1) temos

$$\begin{aligned}\langle w, g\rangle_0 &= \langle\{u,0,0,0,0,0\},\{g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6\}\rangle_0\\ &= \int_\Omega \nabla u.\nabla g_1 dx.\end{aligned}$$

Mas como $g_1 \mid_S = 0$ pois $g \in \mathcal{H}$ temos

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla g_1 dx = -\int_\Omega \Delta u.g_1 dx.$$

Logo pela igualdade de (3.1),

$$\int_\Omega \Delta u.f_4 dx = -\int_\Omega \Delta u.g_1 dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \Delta u(f_4 + g_1)dx = 0. \tag{3.2}$$

Mas o problema

$$\Delta u = \varphi, \quad u \mid_S = 0 \tag{3.3}$$

possui solução $u \in H^2(\Omega)$ para qualquer $\varphi \in L_2(\Omega)$. Assim podemos escrever (3.2) como,

$$\int_\Omega \varphi(f_4 + g_1)dx = 0$$

e esta igualdade é válida para qualquer $\varphi \in L_2(\Omega)$. Portanto,

$$g_1 = -f_4.$$

Desde que $g_1 \in H^1(\Omega)$ e $g \mid_S = 0$ temos

$$f_4 \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad f_4 \mid_S = 0.$$

Assim encontramos a primeira componente de $\mathcal{A}^* f$, onde $f \in D(\mathcal{A})$ e mostramos que a quarta componente de f satisfaz as mesmas condições para pertencer ao $D(\mathcal{A})$.

Seja agora o seguinte elemento do $D(\mathcal{A})$, $w = \{0, u, 0, 0, 0, 0\}$, com $u \mid_S = 0$, $u \in H^2(\Omega)$. Novamente teremos

$$\mathcal{A}w = \{0, 0, 0, 0, \Delta u, 0\}.$$

Da equação (3.1) obtemos,

$$\int_\Omega \Delta u . f_5 dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla g_2 dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \Delta u . f_5 dx = -\int_\Omega \Delta u . g_2 dx,$$

e então

$$\int_\Omega \Delta u (f_5 + g_2) dx = 0.$$

Pelas mesmas razões apresentadas no caso anterior(quando $w = \{u, 0, 0, 0, 0, 0\}$) temos que

$$g_2 = -f_5$$

e

$$f_5 \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad f_5 \mid_S = 0.$$

Analogamente se $w = \{0, 0, u, 0, 0, 0\}$ onde u é a solução do problema (3.3) obtemos

$$g_3 = -f_6,$$

$$f_6 \in H^1(\Omega) \quad \text{e} \quad f_6 \mid_S = 0.$$

Obtivemos até agora as componentes g_1, g_2, g_3 de g e mostramos que as componentes de $f \in D(\mathcal{A}^*)$, f_4, f_5, f_6 satisfazem as mesmas condições para pertencer ao $D(\mathcal{A})$.

Considere agora $w = \{0, 0, 0, u, 0, 0\} \in D(\mathcal{A})$. Logo

$$\mathcal{A}w = \{u, 0, 0, -qu, bu, 0\}.$$

Substituindo conforme (3.1) temos

$$\langle \{u, 0, 0, -qu, bu, 0\}, f \rangle_0 = \langle \{0, 0, 0, u, 0, 0\}, g \rangle_0.$$

e então

$$\int_\Omega (\nabla u . \nabla f_1 - quf_4 + buf_5) dx = \int_\Omega ug_4 dx \tag{3.4}$$

Como $u \in H^2(\Omega)$ e $f_1 \mid_S = 0$ então

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla f_1 dx = -\int_\Omega \Delta u . f_1 dx.$$

Reescrevendo (3.4) temos

$$\int_\Omega \big(- \Delta u f_1 - q u f_4 + b u f_5 \big) dx = \int_\Omega u g_4 dx,$$

ou

$$\int_\Omega f_1 \Delta u dx = \int_\Omega (-q f_4 + b f_5 - g_4) u dx$$

para um arbitrário $u \in H^2(\Omega) \cap \overset{o}{H}{}^1(\Omega)$ (ou para um arbitrário $u \in \dot{C}^\infty(\Omega)$). Logo temos que

$$\Delta f_1 \in L_2(\Omega) \quad \text{e} \quad \Delta f_1 = b f_5 - q f_4 - g_4.$$

Mas $f_1 \mid_S = 0$. Da estimação elíptica temos

$$\|f_1\|_{H^2(\Omega)} \leq C \, \|\Delta f_1\|_{L_2(\Omega)} .$$

Assim $f_1 \in H^2(\Omega)$. Além disto,

$$g_4 = -\Delta f_1 - q f_4 + b f_5.$$

Agora considere o elemento $w = \{0, 0, 0, 0, u, 0\}$ para um arbitrário $u \in H^2(\Omega) \cap \overset{o}{H}{}^1(\Omega)$. Então $w \in D(\mathcal{A})$ e

$$\mathcal{A} w = \{0, u, 0, -bu, 0, au\}.$$

Substituindo w em (3.1) temos

$$\int_\Omega \big(- \nabla u . \nabla f_2 - b u f_4 + a u f_6 \big) dx = \int_\Omega u g_5 dx.$$

Utilizando a fórmula ($u \in h^2(\Omega)$, $f_2 \mid_S = 0$),

$$\int_\Omega \Delta u f_2 dx = - \int_\Omega \nabla u . \nabla f_2 dx.$$

temos

$$\int_\Omega \big(-\Delta u.\nabla f_2 - buf_4 + auf_6 \big)dx = \int_\Omega ug_5 dx.$$

ou

$$\int_\Omega f_2 \Delta u dx = \int_\Omega (af_6 - bf_4 - g_5)udx,$$

que é válida para qualquer $u \in H^2(\Omega) \cap \overset{o}{H^1}(\Omega)$. De forma similar ao caso anterior podemos concluir que

$$f_2 \in H^2(\Omega),$$

$$g_5 = -\Delta f_2 - bf_4 a + af_6.$$

Analogamente, se considerarmos $w = \{0, 0, 0, 0, 0, u\}$ temos

$$\mathcal{A}w = \{0, 0, u, 0, -au, 0\}.$$

Substituindo em (3.1) obtemos

$$\int_\Omega \big(-\nabla u.\nabla f_3 - auf_5 \big)dx = \int_\Omega ug_6 dx,$$

e então

$$\int_\Omega f_3 \Delta u dx = \int_\Omega (-af_5 - g_6)udx.$$

Assim

$$\Delta f_3 \in L_2(\Omega) \quad \text{e} \quad \Delta f_3 = af_5 - g_6.$$

e portanto

$$f_3 \in H^2(\Omega), \ f_3 |_s = 0,$$
$$g_6 = -\Delta f_3 - a f_5.$$

Como resultado final podemos concluir que $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}^*)$ e para $f \in D(\mathcal{A}^*)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* f = \ g \ &= \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\} \\ &= -\{f_4, f_5, f_6, \Delta f_1 + q f_4 - b f_5, \Delta f_2 + b f_4 - a f_6, \Delta f_3 + a f_5\}\end{aligned}$$

□

Notamos que o operador $\mathcal{A}$ é fechado, pois ele coincide com o operador adjunto de $\mathcal{A}^*$. Fácilmente provamos que os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ são dissipativos, i.é., $\langle \mathcal{A}w, w\rangle_o \leq 0$ para $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $\langle \mathcal{A}^* f, f\rangle_o \leq 0$ para $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$. Seja $w \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ então

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}w, w\rangle_o = \langle &\{w_4, w_5, w_6, \Delta w_1 - q w_4 - b w_5, \Delta w_2 + b w_4 - a w_6, \\ &\Delta w_3 + a w_5\}, \{w_1, \dots, w_6\}\rangle_0 \\ &= \int_\Omega \Big(\langle \nabla w_4, \nabla w_1\rangle + \langle \nabla w_5, \nabla w_2\rangle + \langle \nabla w_6, \nabla w_3\rangle + \\ &\Delta w_1 w_4 - q w_4 w_4 - b w_5 w_4 + \Delta w_2 w_5 + b w_4 w_5 - a w_6 w_5 \\ &+ \Delta w_3 w_6 + a w_5 w_6 \Big) dx,\end{aligned}$$

e como,

$$\int_\Omega (\nabla w_4 . \nabla w_1 + \Delta w_1 w_4) dx = 0,$$
$$\int_\Omega (\nabla w_5 . \nabla w_2 + \Delta w_2 w_5) dx = 0,$$
$$\int_\Omega (\nabla w_6 . \nabla w_3 + \Delta w_3 w_6) dx = 0,$$

então

$$\langle \mathcal{A}w, w\rangle_0 = -\int_\Omega q|w_4|^2\,dx \leq 0,$$

pois $q(x) \geq q_0 > 0$.

Analogamente,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}^* f, f\rangle_o &= \langle\{-f_4, -f_5, -f_6, -\Delta f_1 - qf_4 + bf_5, -\Delta f_2 - bf_4 + af_6,\\ &- \Delta f_3 - af_5\}, \{f_1, \ldots, f_6\}\rangle_0\\ &= \int_\Omega \Big(-\langle\nabla f_4, \nabla f_1\rangle - \langle\nabla f_5, \nabla f_2\rangle - \langle\nabla f_6, \nabla f_3\rangle -\\ &\Delta f_1 f_4 - qf_4 f_4 + bf_5 f_4 - \Delta f_2 f_5 - bf_4 f_5 + af_6 f_5\\ &- \Delta f_3 f_6 - af_5 f_6\Big)dx,\end{aligned}$$

e como,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (\nabla f_4.\nabla f_1 + \Delta f_1 f_4)dx = 0,\\ &\int_\Omega (\nabla f_5.\nabla f_2 + \Delta f_2 f_5)dx = 0,\\ &\int_\Omega (\nabla f_6.\nabla f_3 + \Delta f_3 f_6)dx = 0,\end{aligned}$$

então

$$\langle \mathcal{A}^* f, f\rangle_0 = -\int_\Omega q|f_4|^2\,dx \leq 0,$$

pois $q(x) \geq q_0 > 0$.

Assim o operador $\mathcal{A}$ gera um semigrupo de contrações fortemente contínuo $U(t),\ \ t > 0$, conforme pode ser verificado pelo corolário do teorema 2.2 Como é sabido (veja teorema 2.1), $U(t)f$ é fortemente diferenciável com respeito a t para $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ e

$$\frac{d}{dt}U(t)f = \mathcal{A}U(t)f$$

Segue que se $\{u, v, w, u_1, v_1, w_1\} = U(t)\{f_1, \cdots, f_6\}$, então u, v, w é uma solução do problema (1.1), além do mais $u_t = u_1, v_t = v_1$ e $w_t = w_1$.

Seja $f = \{f_1, \cdots, f_6\} \in \mathcal{H}$ e $f^n = \{f_1^n, \cdots, f_6^n\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, com $\|f - f^n\|_o \to 0$. Tal sequencia f^n existe pois $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$.
Então $U(t)f^n$ satisfaz a seguinte identidade:

$$\int_0^T \Big(\langle U(t)f^n, \frac{d\Psi}{dt}\rangle_o + \langle U(t)f^n, \mathcal{A}^*\Psi\rangle_o\Big)dt = -\langle f^n, \Psi(0)\rangle_o$$

onde $\Psi \in L_2(0, T; \mathcal{D}(\mathcal{A}^*))$, $\Psi_t \in L_2(0, T; \mathcal{H})$, $\Psi(T) = 0$.

Dai facilmente obtemos

$$\int_0^T \Big(\langle U(t)f, \frac{d\Psi}{dt}\rangle_o + \langle U(t)f, \mathcal{A}^*\Psi\rangle_o\Big)dt = -\langle f, \Psi(0)\rangle_o$$

isto é, $U(t)f$ é a solução fraca em $\mathcal{H}$ para o problema abstrato de Cauchy

$$w_t = \mathcal{A}w, \quad w\big|_{t=0} = f.$$

4 ESTABILIZAÇÃO

O objetivo deste capítulo é provar que a energia dada por

$$E(t) = \int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + |v_t|^2 + |\nabla v|^2 + |w_t|^2 + |\nabla w|^2 \right) dx$$

associada ao problema (1.6) tende a zero quando $t \to \infty$.

Utilizaremos a seguinte notação :

$$I(u) = |u_t|^2 + |\nabla u|^2, \quad J(u) = 2(t+t_o)u_t + 2\langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle_{+}c(x)u$$

A seguinte igualdade pode ser verificada por um cálculo direto,

$$\begin{gathered}
[2(t+t_o)u_t + \langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle_{+}c(x)u] \cdot [u_{tt} - \Delta u + q(x)u_t + b(x)w_t] + \\
[2(t+t_o)v_t + \langle \nabla\varphi, \nabla v\rangle_{+}c(x)v] \cdot [v_{tt} - \Delta v - b(x)u_t + a(x)w_t] + \\
[2(t+t_o)w_t + \langle \nabla\varphi, \nabla w\rangle_{+}c(x)w] \cdot [w_{tt} - \Delta w - a(x)v_t] =
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\Big\{ (t+t_o)\left(I(u)+I(v)+I(w)\right) + 2\langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle u_t + 2\langle \nabla\varphi, \nabla v\rangle v_t + 2\langle \nabla\varphi, \nabla w\rangle w_t \\
+\frac{1}{2}c(x)qu^2 + c(x)\left(uu_t + vv_t + ww_t\right)\Big\} - \qquad (4.1) \\
-\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{ J(u)u_{x_j} + J(v)v_{x_j} + J(w)w_{x_j} - \varphi_{x_j}\left[\Phi(u)+\Phi(v)+\Phi(w) - (u_t^2+v_t^2+w_t^2)\right]\Big\} - \\
-\Big\{ -2(t+t_o)q(x)u_t^2 + (\Phi(u)+\Phi(v)+\Phi(w))(\Delta\varphi + 1 - c(x)) + (u_t^2+v_t^2+w_t^2) \\
(1-\Delta\varphi + c(x)) - 2\varphi_{x_k x_j}(u_{x_k}u_{x_j} + v_{x_k}v_{x_j} + w_{x_k}w_{x_j}) - 2\langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle b(x)v_t - 2\langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle \\
q(x)u_t + 2\langle \nabla\varphi, \nabla v\rangle b(x)u_t - 2\langle \nabla\varphi, \nabla v\rangle a(x)w_t + 2\langle \nabla\varphi, \nabla w\rangle a(x)v_t - c(x)(b(x)uv_t \\
+b(x)vu_t + a(x)vw_t + a(x)wv_t) - \frac{\partial c(x)}{\partial x_j}(uu_{x_j} + vv_{x_j} + ww_{x_j})\Big\},
\end{gathered}$$

onde $\varphi = \varphi(x)$ e $c = c(x)$ são funções escalares em Ω, t_o é uma constante positiva, $a = a(x)$, $b = b(x)$ e $q = q(x)$ são funções positivas de $C(\bar{\Omega})$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar usual em $I\!R^n$.

Sendo (u, v, w) uma solução do problema (1.6) e integrando (4.1) sobre $\Omega \times (0, T)$ obtemos

$$\begin{aligned}
(T + t_o)E(T) - t_o E(0) + \int_\Omega (2\varphi_{x_i} u_{x_i} u_t + 2\varphi_{x_i} v_{x_i} v_t + 2\varphi_{x_i} w_{x_i} w_t + \\
c(x)u_t u + c(x)v_t v + c(x)w_t w + \frac{1}{2} c q u^2) dx \Big|_{t=0}^{t=T} \\
= \int_0^T \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2) dS dt + \int_0^T \int_\Omega \{Q\} dx dt
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde τ é o vetor unitário normal exterior a S e

$$\begin{aligned}
Q = \Delta\varphi\big(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2 - (u_t^2 + v_t^2 + w_t^2)\big) - 2\varphi_{x_k x_j}(u_{x_k} u_{x_j} + v_{x_k} v_{x_j} + w_{x_k} w_{x_j}) \\
-2\langle \nabla\varphi, \nabla u \rangle b(x) v_t - 2\langle \nabla\varphi, \nabla u \rangle q(x) u_t + 2\langle \nabla\varphi, \nabla v \rangle b(x) u_t - 2\langle \nabla\varphi, \nabla v \rangle a(x) w_t \\
+2\langle \nabla\varphi, \nabla w \rangle a(x) v_t + \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\langle \nabla\varphi, \nabla u \rangle + \langle \nabla\varphi, \nabla v \rangle + \langle \nabla\varphi, \nabla w \rangle\big).
\end{aligned}$$

Fazendo $\varphi(x) = const.$ e $c(x) = C$, onde C é uma constante temos,

$$\begin{aligned}
Q = -2(t + t_o) q u_t^2 + (1 - C)(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2) + \\
(1 + C)(u_t^2 + v_t^2 + w_t^2) + Cbvu_t - Cbv_t u + Cawv_t - Caw_t v.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Vamos estimar a integral do lado direito de (4.2). Utilizando a seguinte desigualdade algébrica

$$2xy \leq \epsilon x^2 + y^2/\epsilon, \qquad \epsilon > 0,$$

podemos observar que

$$Cbvu_t - Cbv_tu = 2Cbvu_t - \frac{\partial}{\partial_t}(Cbuv) \leq -\frac{\partial}{\partial_t}(Cbuv) + \epsilon|C|bv^2 + \frac{1}{\epsilon}|C|bu_t{}^2 \qquad (4.4)$$

e

$$Cawv_t - Caw_tv = 2Cawv_t - \frac{\partial}{\partial_t}(Cawv) \leq -\frac{\partial}{\partial_t}(Cawv) + \epsilon|C|aw^2 + \frac{1}{\epsilon}|C|av_t{}^2, \qquad (4.5)$$

onde ϵ é uma constante positiva.

Desde que $w\big|_S = 0$ e $v\big|_S = 0$, pela desigualdade de Poincaré temos

$$\int_\Omega |v|^2 dx \;\leq\; C(\Omega)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\,, \qquad \int_\Omega |w|^2 dx \;\leq\; C(\Omega)\int_\Omega |\nabla w|^2 dx. \qquad (4.6)$$

Logo utilizando as desigualdades (4.4), (4.5) e (4.6), obtemos a seguinte estimativa para a integral de Q:

$$\int_0^T\int_\Omega Q dx dt \leq \int_0^T\int_\Omega\Big(-2(t+t_o)qu_t{}^2 + (1-C)|\nabla u|^2 + \big(\epsilon|C|bC(\Omega)+1-C\big)|\nabla v|^2$$
$$+\big(\epsilon|C|aC(\Omega)+1-C\big)|\nabla w|^2 + \big(1+C+\frac{1}{\epsilon}|C|b\big)u_t{}^2 + \big(1+C+\frac{1}{\epsilon}|C|a\big)v_t{}^2 + (1+C)w_t{}^2\Big)dxdt+ \qquad (4.7)$$
$$+\int_\Omega (Cbuv + Cawv)dx\big|_{t=0} - \int_\Omega (Cbuv + Cawv)dx\big|_{t=T}.$$

Considere $A = max\{a(x)\}$ e $B = max\{b(x)\}$ onde $x \in \bar{\Omega}$. Utilizando novamente a desigualdade algébrica $2xy \leq x^2 + y^2$ e a desigualdade de Poincaré temos

$$\int_\Omega (Cbuv + Cawv)dx \leq \frac{1}{2}|C|B\int_\Omega (u^2+v^2)dx + \frac{1}{2}|C|A\int_\Omega (w^2+v^2)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}|C|(A+B)C(\Omega)\int_{\Omega}(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2+|\nabla w|^2)dx \leq \frac{1}{2}|C|(A+B)C(\Omega)E(0). \qquad (4.8)$$

Utilizando (4.8) em (4.7) obtemos,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega} Qdxdt \;\leq\; & |C|(A+B)C(\Omega)E(0)+\int_0^T\int_{\Omega}\Big\{-|u|_t^2[2(t+t_o)q-(1+C+\frac{1}{\epsilon}|C|b]\\ & +(1+C+\frac{1}{\epsilon}|C|a)v_t^2+(1+C)w_t^2+(1-C)|\nabla u|^2+ \qquad (4.9)\\ & (\epsilon|C|C(\Omega)b+1-C)|\nabla v|^2+(\epsilon|C|C(\Omega)a+1-C)|\nabla w|^2\Big\}dxdt.\end{aligned}$$

Agora fazendo $C=2$ e $\epsilon = 1/(2(a+b)C(\Omega))$ temos

$$\begin{aligned}\epsilon|C|C(\Omega)b+1-C &= -\frac{a}{a+b}<0,\\ \epsilon|C|C(\Omega)a+1-C &= -\frac{b}{a+b}<0,\\ 1-C &= -1<0.\end{aligned}$$

E de (4.9) com estas últimas desigualdades obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\Omega} Qdxdt \;\leq\; & 2(A+B)C(\Omega)E(0)+\int_0^T\int_{\Omega}\Big\{-|u_t|^2\Big[2(t+t_o)q\\ & -\big(3+4C(\Omega)b(a+b)\big)\Big]+\big(3+4C(\Omega)a(a+b)\big)v_t^2+3w_t^2\Big\}dxdt. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Vamos estimar os termos que aparecem v_t^2 e w_t^2 em função de u_t^2. Para isto considere agora a seguinte identidade

$$
\begin{aligned}
&v_t(u_{tt} - \Delta u + qu_t + bv_t) + u_t(v_{tt} - \Delta v - bu_t + aw_t) + \\
&w_t(v_{tt} - \Delta v - bu_t + aw_t) + v_t(w_{tt} - \Delta w - av_t) = \\
&\frac{\partial}{\partial t}(v_t u_t + w_t v_t + \nabla u \nabla v + \nabla w \nabla v) - \\
&-\frac{\partial}{\partial x_i}(v_t u_{x_i} + u_t v_{x_i} + w_t v_{x_i} + v_t w_{x_i}) - \\
&-(b|u_t|^2 - a|w_t|^2 - (b-a)|v_t|^2 + (b-a)u_t w_t - qu_t v_t)
\end{aligned}
$$

Integrando obtemos a seguinte identidade((u, v, w) é uma solução do problema (1.6))

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega (a|w_t|^2 + (b-a)|v_t|^2) dx dt = &\int_0^T \int_\Omega (b|u_t|^2 + (b-a)u_t w_t - qu_t v_t) dx dt + \\
&\int_\Omega (u_t v_t + v_t w_t + \nabla u \nabla v + \nabla v \nabla w) dx \Big|_{t=T}^{t=0}.
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Assumindo que $b(x) > a(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$ então

$$
\begin{aligned}
|(b-a)u_t w_t| &\leq \frac{1}{2} a |w_t|^2 + \frac{1}{2} \frac{(b-a)^2}{a} |u_t|^2 \text{ e} \\
|-qu_t v_t| &\leq \frac{1}{2}(b-a)|v_t|^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{(b-a)} |u_t|^2,
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

e através da desigualdade algébrica $2xy \leq x^2 + y^2$ facilmente obtemos,

$$
\int_\Omega (u_t v_t + v_t w_t + \nabla u \nabla v + \nabla v \nabla w) dx \Big|_{t=T}^{t=0} \leq 2E(0). \tag{4.13}
$$

Desta forma utilizando (4.12) e (4.13) em (4.11) chegamos a seguinte estimativa,

$$
\int_0^T \int_\Omega (a|w_t|^2 + (b-a)|v_t|^2) dx dt \leq 4E(0) + \int_0^T \int_\Omega \Big(2b + \frac{(b-a)^2}{a} + \frac{q^2}{(b-a)}\Big) |u_t|^2 dx dt. \tag{4.14}
$$

Seja $c_1 = min\{a(x), b(x) - a(x)\}$, $x \in \bar{\Omega}$. ($c_1 > 0$)

Estimamos a seguir os termos de (4.10) em que aperecem v_t^2 e w_t^2, utilizando (4.14).

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (3 + 4aC(\Omega)(a+b))|v_t|^2 + 3|w_t|^2 dxdt \\
&\leq (3 + 4C(\Omega)A(A+B)) \int_0^T \int_\Omega (|v_t|^2 + |w_t|^2) dxdt \\
&\leq \Big(\big(\frac{3 + 4AC(\Omega)(A+B)}{c_1}\Big) \int_0^T \int_\Omega (c_1|v_t|^2 + c_1|w_t|^2) dxdt \\
&\leq \Big(\frac{3 + 4C(\Omega)A(A+B)}{c_1}\Big) \int_0^T \int_\Omega (a|w_t|^2 + (b-a)|v_t|^2) dxdt \\
&\leq \Big(\frac{3 + 4C(\Omega)A(A+B)}{c_1}\Big) 4E(0) + \\
&\int_0^T \int_\Omega \frac{3 + 4C(\Omega)A(A+B)}{c_1} \Big(2b + \frac{(b-a)^2}{a} + \frac{q^2}{(b-a)}\Big)|u_t|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Assim utilizando este resultado na estimação da integral de Q em (4.10) temos,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega Q\ dxdt \ &\leq \ \Big(2(A+B)C(\Omega) + \frac{3 + 4AC(\Omega)(A+B)}{c_1} 4\Big) E(0) \\
&+ \int_0^T \int_\Omega -|u_t|^2 \Big\{2(t+t_o)q - \Big[3 + 4bC(\Omega)(a+b) + \\
&\frac{3 + 4AC(\Omega)(A+B)}{c_1} \Big(2b + \frac{(b-a)^2}{a} + \frac{q^2}{(b-a)}\Big)\Big]\Big\} dxdt \qquad (4.15) \\
&\leq \ \Big(2(A+B)C(\Omega) + \frac{3 + 4C(\Omega)A(A+B)}{c_1}\Big) 4E(0) \equiv \hat{C}E(0)
\end{aligned}
$$

para $t \geq 0$ se

$$
t_o \geq \frac{1}{2q_1}\Big\{3 + 4BC(\Omega)(A+B) + \frac{3 + 4AC(\Omega)(A+B)}{c_1}\Big[max\Big\{2b + \frac{(b-a)^2}{a} + \frac{q^2}{(b-a)}\Big\}\Big] \equiv T_o.
$$

onde o máximo é tomado com x variando em $\bar{\Omega}$ e $q_1 = min\{q(x)\}$, $x \in \bar{\Omega}$.

Voltando então a (4.2) e usando (4.15) obtemos (se $t_o \geq T_o$)

$$(T+t_o)E(t) \leq (t_o+\hat{C})E(0) + \int_\Omega (2uu_t + 2vv_t + 2ww_t + qu^2)dx\Big|_{t=0}^{t=T}.$$

Mas

$$\int_\Omega 2uu_t \leq \int_\Omega (|u_t|^2 + |u|^2)dx \leq$$
$$\leq \int_\Omega (|u_t|^2 + C(\Omega)|\nabla u|^2)dx \leq (1+C(\Omega)) \int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2)dx,$$
$$\int_\Omega 2vv_t dx \leq (1+C(\Omega)) \int_\Omega (|v_t|^2 + |\nabla v|^2)dx,$$
$$\int_\Omega 2ww_t dx \leq (1+C(\Omega)) \int_\Omega (|w_t|^2 + |\nabla w|^2)dx,$$
e
$$\int_\Omega qu^2 dx \leq \tilde{q}C(\Omega) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq \tilde{q}C(\Omega) \int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2)dx.$$

onde $\tilde{q} = max\{q(x)\}$, $x \in \bar{\Omega}$. Assim

$$\left| \int_\Omega (2uu_t + 2vv_t + 2ww_t + qu^2)dx\Big|_{t=0}^{t=T} \right| \leq 2(1 + C(\Omega) + \tilde{q}C(\Omega))E(0) \equiv \hat{C}_1 E(0).$$

Finalmente obtemos a estimativa

$$(T+t_o)E(T) \leq (t_o + \hat{C} + \hat{C}_1)E(0) \equiv C_o E(0),$$

ou seja

$$E(T) \leq \frac{C_o}{T+t_o}E(0) \quad \forall T > 0 \ (t_o \geq T_o).$$

Chegamos desta forma à seguinte afirmação

Teorema 4.1 *Sejam q, a e b funções escalares contínuas definidas sobre um domínio limitado $\bar{\Omega}$ tal que $q(x) \geq q_o > 0$, $b(x) > a(x) \geq a_o > 0$. Então para todo $f = \{f_1, \cdots, f_6\} \in \mathcal{H}, t > 0$*

$$\|U(t)f\|_0^2 \leq \frac{C_o}{t + t_o} \|f\|_0^2 \tag{4.16}$$

com $t_o \geq T_o$.

Demonstração :

Aproximamos um elemento arbitrário $f \in \mathcal{H}$ na norma de $\mathcal{H}$ por $f^n = \{f_1, \cdots, f_6\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ Então

$$\|U(t)f^n\|_0^2 \leq \frac{C_o}{t + t_o} \|f^n\|_0^2 .$$

fazendo $n \to \infty$, obtemos (4.16). □

Corolário *U(t) leva o espaço $\mathcal{H}$ nele mesmo e*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H} \to \mathcal{H}} < 1$$

para $t > t_1 = \hat{C} + \hat{C}_1$.

5 CONTROLABILIDADE EXATA

5.1 Introdução

Neste capítulo utilizamos a estimativa do teorema 4.1 para provar a controlabilidade exata do problema (1.8). Vamos inicialmente apresentar a idéia geral que utilizamos para solucionar esta questão . Considere o problema:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta \tilde{u} + b(x)\tilde{v}_t + q\tilde{u}_t = 0, \\ \tilde{v}_{tt} - \Delta \tilde{v} - b(x)\tilde{u}_t + a(x)\tilde{w}_t = 0, \\ \tilde{w}_{tt} - \Delta \tilde{w} - a(x)\tilde{v}_t = 0, \\ \tilde{u} \mid_{t=0} = \varphi_1, \; \tilde{v} \mid_{t=0} = \varphi_2, \; \tilde{w} \mid_{t=0} = \varphi_3, \\ \tilde{u}_t \mid_{t=0} = \varphi_4, \tilde{v}_t \mid_{t=0} = \varphi_5, \tilde{w}_t \mid_{t=0} = \varphi_6, \\ \tilde{u} \mid_S = \tilde{v} \mid_S = \tilde{w} \mid_S = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$ é um elemento arbitrário de $\mathcal{H}$.

Seja $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ uma solução de (5.1) e

$$\Psi_1 = \tilde{u} \mid_{t=T}, \; \Psi_2 = \tilde{v} \mid_{t=T}, \; \Psi_3 = \tilde{w} \mid_{t=T}$$

$$\Psi_4 = \tilde{u}_t \mid_{t=T}, \Psi_5 = \tilde{v}_t \mid_{t=T}, \Psi_6 = \tilde{w}_t \mid_{t=T} .$$

Considere também o seguinte problema:

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + b(x)V_t - qU_t = 0, \\ V_{tt} - \Delta V - b(x)U_t + a(x)W_t = 0, \\ W_{tt} - \Delta W - a(x)V_t = 0, \\ U\mid_{t=T} = \Psi_1 - g_1,\ V\mid_{t=T} = \Psi_2 - g_2,\ W\mid_{t=T} = \Psi_3 - g_3, \\ U_t\mid_{t=T} = \Psi_4 - g_4, V_t\mid_{t=T} = \Psi_5 - g_5, W_t\mid_{t=T} = \Psi_6 - g_6, \\ U\mid_S = V\mid_S = W\mid_S = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Solucionamos este problema para $0 \leq t \leq T$. Sejam então as seguintes funções :

$$u = \tilde{u} - U,\ v = \tilde{v} - V,\ w = \tilde{w} - W.$$

Então u, v, w satisfazem o sistema,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b(x)v_t = -q(\tilde{u}_t + U_t) \\ v_{tt} - \Delta v - b(x)u_t + a(x)w_t = 0 \\ w_{tt} - \Delta w - a(x)v_t = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Além disto temos que

$$u\mid_S = v\mid_S = w\mid_S = 0,$$

$$u|_{t=T} = g_1,\ v|_{t=T} = g_2,\ w|_{t=T} = g_3,$$

$$u_t|_{t=T} = g_4,\ v_t|_{t=T} = g_5,\ w|_{t=T} = g_6.$$

Nosso objetivo é solucionar o problema de controle:

Dados $\{f_1, \ldots, f_6\}$ e $\{g_1, \ldots, g_6\}$, achar $p(x,t)$ tal que a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b v_t = p \\ v_{tt} - \Delta v - b u_t + a w_t = 0 \\ w_{tt} - \Delta w - a v_t = 0, \\ u|_{t=0} = f_1, \ v|_{t=0} = f_2, \ w|_{t=0} = f_3, \\ u_t|_{t=0} = f_4, \ v_t|_{t=0} = f_5, \ w|_{t=0} = f_6, \\ u\ |_S = v\ |_S = w\ |_S = 0 \end{cases}$$

satisfaz

$$u|_{t=T} = g_1, \ v|_{t=T} = g_2, \ w|_{t=T} = g_3,$$
$$u_t|_{t=T} = g_4, \ v_t|_{t=T} = g_5, \ w|_{t=T} = g_6.$$

Logo para $p = -q(\tilde{u}_t - U_t)$ a solução de (5.3) satisfaz as equações diferenciais parciais do problema acima e as condições em $t = T$.

Em $t = 0$ a solução de (5.3) satisfaz,

$$u|_{t=0} = \varphi_1 - U|_{t=0}, \quad v|_{t=0} = \varphi_2 - V|_{t=0}, \quad w|_{t=0} = \varphi_3 - W|_{t=0},$$
$$u_t|_{t=0} = \varphi_4 - U_t|_{t=0}, \quad v_t|_{t=0} = \varphi_5 - V_t|_{t=0}, \quad w_t|_{t=0} = \varphi_6 - W|_{t=0},$$

onde $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_6\}$ é arbitrário e U, V, W dependem de $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ (e por conseguinte dependem de $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$). Obviamente U, V, W dependem de $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ por meio do operador linear $U^*(T)U(T)$ onde $U(t)$ é o semigrupo definido no capítulo 3.

Usando o resultado da estabilização uniforme do capítulo anterior, mostramos que este operador tem norma < 1. Isto nos permitirá encontrar $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$ tal que

$$\varphi_1 - U|_{t=0} = f_1, \quad \varphi_2 - V|_{t=0} = f_2, \quad \varphi_3 - W|_{t=0} = f_3,$$
$$\varphi_4 - U_t|_{t=0} = f_4, \quad \varphi_5 - V|_{t=0} = f_5, \quad \varphi_6 - W|_{t=0} = f_6.$$

Apresentamos a seguir a prova da controlabilidade exata.

5.2 Demonstração do teorema da controlabilidade

Em $\Omega \times (0,T)$ considere o sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b(x)v_t = p(x,t), \\ v_{tt} - \Delta v - b(x)u_t + a(x)w_t = 0, \\ w_{tt} - \Delta w - a(x)v_t = 0, \\ u\mid_{t=0} = f_1(x),\ v\mid_{t=0} = f_2(x),\ w\mid_{t=0} = f_3(x), \\ u_t\mid_{t=0} = f_4(x), v_t\mid_{t=0} = f_5(x),\ w_t\mid_{t=0} = f_6(x), \\ u\mid_S = v\mid_S = w\mid_S = 0, \end{cases} \tag{5.4}$$

e assuma as seguintes condições :

$$q,\ a,\ \text{e}\ b \in C\left(\bar{\Omega}\right)\ \text{e}\ \ q(x) \geq q_o > 0,\ a(x) \geq a_o > 0,\ b(x) \geq b_o > 0.$$

Nosso objetivo é encontrar uma função $p(x,t)$ tal que a solução de (5.4) satisfaz

$$\{u, v, w, u_t, v_t, w_t\}|_{t=T} = g(x)$$

para um arbitrário $g = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\} \in \mathcal{H}$ com $T > t_1$.
Seja $U(t)$ o semigrupo definido no capítulo 3 e considere a seguinte equação em $\mathcal{H}$

$$z - U^*(T)U(T)z = f - U^*(T)g.$$

O operador $\mathcal{G}(T) = U^*(T)U(T)$ leva $\mathcal{H}$ nele mesmo e $\|\mathcal{G}(T)\| < 1$ para $T > t_1$. Assim conforme vimos no ítem 2 do capítulo 2 podemos solucionar esta equação para qualquer f e $g \in \mathcal{H}$ e

$$\|z\|_o \leq C\left(\|f\|_o + \|g\|_o\right).$$

Seja então $z = (I - \mathcal{G}(T))^{-1}(f - U^*(T)g)$. Desta forma definimos a função $V(x,t)$ como:

$$V(x,t) = U(t)z - U^*(T-t)\big(U(T)z - g\big) \equiv \{u, v, w, u_1, v_1, w_1\} - \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1\}.$$

Logo

$$V(x,0)=f(x) \text{ e } V(x,T)=g(x).$$

Observamos também que

$$\int_0^T \Big(\big\langle U(t)z, \frac{d\Psi}{dt}\big\rangle_o + \big\langle U(t)z, \mathcal{A}^*\Psi\big\rangle_o\Big)dt = 0\,,$$

$$\int_0^T \Big(\big\langle U^*(T-t)\big(U(T)z-g\big), \frac{d\Psi}{dt}\big\rangle_o + \big\langle U^*(T-t)\big(U(T)z-g\big), -\mathcal{A}\Psi\big\rangle_o\Big)dt = 0,$$

para todo $\Psi \in L_2(0,T;\mathcal{D}(\mathcal{A})), \Psi_t \in L_2(0,T;\mathcal{H}), \Psi(0) = \Psi(T) = 0$ (como sabemos $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$) e

$$\begin{aligned}&\big\langle U(t)z, \mathcal{A}^*\Psi\big\rangle_o - \big\langle U^*(T-t)\big(U(T)z-g\big), -\mathcal{A}\Psi\big\rangle_o\\ &\quad= \big\langle V(x,t), \{-\Psi_4, -\Psi_5, -\Psi_6, -\Delta\Psi_1 + b\Psi_5, -\Delta\Psi_2 - b\Psi_4 + a\Psi_6, -\Delta\Psi_3 - a\Psi_5\}\big\rangle_o -\\ &\qquad - \langle\{0,0,0,q(u_1+\tilde{u}_1),0,0\},\Psi\rangle_o.\end{aligned}$$

Com estas identidades obtemos

$$\int_0^T \Big(\big\langle V(x,t), \frac{d\Psi}{dt}\big\rangle_o + \big\langle V(x,t), \mathcal{B}^*\Psi\big\rangle_o\Big)dt = \int_0^T \big\langle \mathcal{P}, \Psi\big\rangle_o dt\ ,$$

onde $\mathcal{P} = \{0,0,0,q(u_1+\tilde{u}_1),0,0\}$, $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathcal{B}^*) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$, e

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^*\{\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4,\psi_5,\psi_6\} &= -\mathcal{B}\{\psi_1,\cdots,\psi_6\}\\ &= -\{\Psi_4,\Psi_5,\Psi_6,\Delta\Psi_1 - b\Psi_5, \Delta\Psi_2 + b\Psi_4 - a\Psi_6, \Delta\Psi_3 + a\Psi_5\}.\end{aligned}$$

Assim $V(x,t)$ é a solução fraca do problema (1.3) com

$$p(x,t) = -q(x)(u_1+\tilde{u}_1) \in L_2(\Omega\times(0,T)\,,$$

$$\|p\|^2_{L_2(\Omega\times(0,T))} \le C(\|f\|_o^{\,2} + \|g\|_o^{\,2}).$$

Chegamos então ao seguinte teorema:

Teorema 5.1 Seja q, a e b funções escalares contínuas definidas sobre um domínio limitado $\bar{\Omega}$ tal que $q(x) \geq q_o > 0$, $b(x) > a(x) \geq a_o > 0$. Então para qualquer $T > t_1$, qualquer dado inicial $f = \{f_1, \cdots, f_6\} \in \mathcal{H}$ e qualquer $g = \{g_1, \cdots, g_6\} \in \mathcal{H}$ existe um controle $p(x,t) \in L_2(\Omega \times (0,T))$ tal que a solução do problema (5.4) satisfaz

$$\{u, v, w, u_t, v_t, w_t\}|_{t=T} = g(x)$$

e além disto

$$\|p\|^2_{L_2(\Omega\times(0,T))} \leq C(\|f\|_o{}^2 + \|g\|_o{}^2).$$

FONTES BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMS R. A. **Sobolev spaces.**New-York: Academic Press, 1975. 268p

[2] BACHMAN G., NARICI L. **Functional analysis.** Academic Press, 1966. 530p.

[3] BARDOS C., LEBEAU G., RAUCH I. Contrôle et stabilization dans les problémes hyperboliques. In: [16]. Appendix II.

[4] CHEN G. Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain. **J. Math. Pures Appl.**, 58, 249-273, 1979.

[5] DAFERMOS C. M. Asymptotic behavior of solutions of evolution equations. In: CRANDALL M. G. Nonlinear Evolution Equations. New York: Academic Press, 1978. 103-123.

[6] DAVIES E. B. **One-parameter semigroups.** Academic Press, 1980.

[7] FERREIRA J. S. Exponential decay for a nonlinear system of hyperbolic equations with locally distributed damping. **Nonlinear Analysis Theory Method & Applications**, 18, 11, 1015-1032, 1992.

[8] HARAUX A. Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations. **J. Differential Equations**, 59, 145-154, 1985.

[9] KAPITONOV, B.V. On the asymptotic behavior of solutions to a boundary value problem for a system of elasticity theory with dissipative boundary conditions in: boundary value problems for P.D.E. **Inst. Math.**, Novosibirsk, 85-99, 1986.

[10] KAPITONOV, B.V. Stabilization and exact boundary controllability for Maxwell's equations. **SIAM J. Control Optim.**, 32, 2, 408-421, 1994.

[11] KAPITONOV, B.V. Uniform stabilization and simultaneous exact boundary controllability for a pair of hyperbolic system. **Siberian Math. J.**, 35, 4, 722-734, 1994.

[12] KAPITONOV, B.V. Stabilization and simultaneus boundary controllability for a pair of Maxwell's equations. **Comp. Appl. Math.**, 15, 3, 215-227, 1996.

[13] KAPITONOV, B.V. Stabilization and simultaneous boundary controllability for a

class of evolution systems. **Comp. Appl. Math.**, to appear.

[14] KAPITONOV, B.V. Uniform stabilization and exact controllability for a class of coupled hyperbolic systems. **Comp. Appl. Math.**, 15, 3, 199-212, 1996.

[15] LAGNESE, J.E. Boundary stabilization of Linear elastodinamic systems. **SIAM J. Control Optim.**, 21, 6, 968-984, 1983.

[16] LIONS, J.L. **Controllabilité exate stabilization et perturbations de systèmes distribués.** Volume 1, Collection R.M.A., Paris: Masson, 1988.

[17] LIONS, J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. **SIAM Review**, 30, 1-68, 1988.

[18] MIKHAILOV, V. P. **Partial Differential Equations**. Moscou: Mir Publisher, 1978. 396p.

[19] PAZY, A. **Semigroups of a linear operators and applications to partial differential equations**. Springer-Verlag, 1983.

[20] PEREIRA D. C., MENZALA G. P. Exponencial decay of solutions to a coupled system of equations of linear thermoelasticity. **Mat. Aplic. Comp.**, 8, 3, 193-204, 1989.

[21] RIVERA, J. M. Energy decay rates in linear thermoelasticity. **Funkcialaj Ekvacioj**, 35, 1, 19-30, 1992.

[22] RIVERA, J. M., SHIBATA, Y. A linear thermoelastic plate equation with Dirichlet boundary condition, Preprint.

[23] RUSSEL, D.L. Controllability and stabilizability theory of Linear partial differential equations. **Recent progress and open questions SIAM Rev.**, 20, 4, 639-739, 1978.

[24] YOSIDA, K. **Functional Analysis**. 5a. edição . Springer-Verlag, 1978. 458p.

[25] ZUAZUA, E. Exponencial decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping. **Commun. in Partial Differential Equations**, 15, 2, 205-235, 1990.

[26] ZUAZUA, E. Contrôlabilité du systéme de la thermoélasticité sans restriction sur les paramétres de couplage. **C. R. Acad. Sci.**, 318, I, 643-648, 1994.