

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**ÁLGEBRAS QUÂNTICAS  
E SUAS APLICAÇÕES  
EM MODELOS EXATAMENTE SOLÚVEIS**

**Dissertação**

**Submetida ao Curso de Pós-Graduação em Física  
da Universidade Federal de Santa Catarina  
para obtenção do grau de  
MESTRE EM CIÊNCIAS**


**LUÍS ORLANDO EMERICH DOS SANTOS**


**UFSC  
Florianópolis, junho de 1994**

ÁLGEBRAS QUÂNTICAS E SUAS APLICAÇÕES EM MODELOS  
EXATAMENTE SOLÚVEIS

Luís Orlando Emerich dos Santos

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do grau de Mestre em Ciências - Especialidade Física, e aprovada em sua forma final pelo orientador e demais membros da banca examinadora.

  
Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Débora P. Menezes  
(orientadora)

  
Prof. Dr. Wágner Figueiredo  
(coordenador)

Banca Examinadora:

  
Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Débora P. Menezes

  
Prof. Dr. Sidney S. Avancini

  
Prof. Dr. Celso Lima

## **Agradecimentos**

A Débora P. Menezes pela orientação.

A meus pais, Orlando dos Santos e Denecy Emerich Santos.

Aos professores do Curso de Pós-Graduação.

Aos colegas de Pós-Graduação.

## RESUMO

Nesta dissertação realizamos um estudo dos efeitos provocados pela deformação nas transições de fase apresentadas pelos modelos de Lipkin e de Moszkowski. Utilizamos o método variacional, via estados coerentes, e discutimos a validade e conveniência da utilização destes no contexto das álgebras quânticas.

Utilizando o Princípio Variacional Dependente do Tempo (TDVP) obtivemos as equações de movimento para o modelo de Moszkowski  $q$ -deformado e, utilizando estas equações, procuramos analisar os efeitos provocados pela deformação na dinâmica deste modelo.

## ABSTRACT

In this work we analyse the effects of the  $q$ -deformation in the phase transitions of the Lipkin model and the Moszkowski model. We use the variational method, via  $q$ -deformed coherent states, and we discuss the validity and the convenience of this approach.

By using the time dependent variational principle (TDVP) we obtain the equations of motion for the Moszkowski model and, with the help of these equations, we study the changes introduced by the deformation in the dynamics of this model.

## RESUMO

Nesta dissertação realizamos um estudo dos efeitos provocados pela deformação nas transições de fase apresentadas pelos modelos de Lipkin e de Moszkowski. Utilizamos o método variacional, via estados coerentes, e discutimos a validade e conveniência da utilização destes no contexto das álgebras quânticas.

Utilizando o Princípio Variacional Dependente do Tempo (TDVP) obtivemos as equações de movimento para o modelo de Moszkowski  $q$ -deformado e, utilizando estas equações, procuramos analisar os efeitos provocados pela deformação na dinâmica deste modelo.

# SUMÁRIO

<b>Capítulo I - Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos	1
1.2 O Princípio Variacional Geral	2
1.3 Estados Coerentes	3
1.4 Álgebras Quânticas	5
<b>Capítulo II - Modelo de Lipkin - Meshkov - Glick (LMG)</b>	<b>8</b>
2.1 O Modelo LMG	8
2.2 O Modelo LMG q-Deformado	9
2.3 Solução Variacional do Modelo LMG q-Deformado	9
2.4 Resultados e Conclusões	15
<b>Capítulo III - Modelo de Moszkowski</b>	<b>18</b>
3.1 O Modelo de Moszkowski	18
3.2 O Modelo de Moszkowski q-Deformado	20
3.3 Solução Variacional do Modelo de Moszkowski q-Deformado	21
3.4 Resultados e Conclusões	27

<b>Capítulo IV - Dinâmica do Modelo de Moszkowski q-Deformado</b>	<b>30</b>
4.1 O Princípio Variacional Dependente do Tempo (TDVP)	30
4.2 Aplicação ao Modelo de Moszkowski q-Deformado	34
4.3 Cálculo da Flutuação do Operador $J_z$	36
4.4 Resultados e Conclusões	37
<b>Capítulo V - Conclusão</b>	<b>42</b>
<b>Referências</b>	<b>44</b>



# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Objetivos

As álgebras quânticas têm sido objeto de diversos artigos na literatura recente. Nesta dissertação procuramos analisar os efeitos da deformação em modelos exatamente solúveis e, principalmente, discutir a validade e conveniência de se utilizar os estados coerentes como funções de teste quando aplicamos o método variacional, no contexto das álgebras quânticas. Também faz parte desta dissertação um estudo sobre a dinâmica do modelo de Moszkowski  $q$ -deformado<sup>1,2</sup>.

Mais especificamente, no capítulo II realizamos um estudo variacional do modelo de Lipkin  $q$ -deformado, via estados coerentes, como o realizado na ref.<sup>3</sup>. Um estudo semelhante é apresentado no capítulo III, só que agora para o modelo de Moszkowski  $q$ -deformado. O capítulo IV é dedicado ao estudo da dinâmica do modelo de Moszkowski  $q$ -deformado, utilizando o Princípio Variacional Dependente do Tempo (TDVP), como já realizado para o modelo de Lipkin  $q$ -deformado<sup>4</sup>.

Nas seções seguintes deste capítulo faremos uma breve discussão sobre o princípio variacional, estados coerentes e álgebras quânticas, tópicos que serão abordados e utilizados diversas vezes nos capítulos seguintes.

## 1.2 O Princípio Variacional Geral

De acordo com o Princípio Variacional Geral a resolução da equação variacional

$$\delta E[\psi] = 0 \quad , \quad (1.1)$$

onde

$$E[\psi] = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

é equivalente a resolução da equação de Schrödinger  $H | \psi \rangle = E | \psi \rangle$ .

Este método, entretanto, normalmente produz resultados aproximados pois, ao solucionarmos a equação (1.1), nós restringimos  $| \psi \rangle$  a um conjunto de funções de teste. Se as auto-funções do operador  $H$  estiverem contidas no nosso conjunto de funções de teste, os resultados obtidos serão exatos. Porém, quanto mais distantes do nosso conjunto estiverem as auto-funções, mais distantes dos resultados exatos serão os resultados obtidos.

Se decompuermos a nossa função de teste em termos de auto-estados do operador  $H$ , ou seja,

$$| \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n | \psi_n \rangle$$

com  $H | \psi_n \rangle = E_n | \psi_n \rangle$ , podemos escrever:

$$E[\psi] = \frac{\sum_{n,n'} a_n^* a_n E_n \delta_{nn'}}{\sum_n |a_n|^2} \geq \frac{\sum_n |a_n|^2 E_0}{\sum_n |a_n|^2} = E_0$$

assim

$$E[\psi] \geq E_0. \quad (1.2)$$

Como podemos ver pela equação (1.2),  $E_0$  é um limite inferior para o valor de  $E[\psi]$ . Portanto quanto menor o resultado obtido pela equação (1.1) mais próximo de  $E_0$ .

Quando minimizamos  $E[\psi]$  sobre o nosso conjunto de funções de teste, obtemos primeiramente o estado fundamental (ou um valor aproximado para o estado fundamental). Para obter o primeiro estado excitado é necessário obter o mínimo  $E[\psi]$  sobre um conjunto de funções que seja ortogonal a  $|\psi_0\rangle$ . Ou seja, impomos a condição  $\langle\psi_1|\psi_0\rangle = 0$ . Seguindo este raciocínio vemos que para calcular o segundo estado excitado precisaremos de duas condições ( $\langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0$  e  $\langle\psi_2|\psi_0\rangle = 0$ ), e assim por diante. A imposição dessas condições complica bastante os cálculos o que faz com que este método seja utilizado principalmente para obter o estado fundamental.

### 1.3 Estados Coerentes

Um conjunto de estados coerentes foi usado pela primeira vez por Schrödinger em 1926, no estudo do limite semiclássico do oscilador harmônico. O conceito de estado coerente, entretanto, só foi introduzido por Glauber<sup>5</sup> em 1963, para o grupo de Heisenberg-Weyl (W1). Este conceito foi posteriormente generalizado por Perelomov<sup>6</sup> para qualquer grupo de Lie.

Na álgebra w1 temos como geradores  $a, a^\dagger, I$ , que satisfazem as relações :

$$[a, a^\dagger] = I \quad ; \quad [a, I] = [a^\dagger, I] = 0. \quad (1.3)$$

Definindo-se o operador  $N = a^\dagger a$ , em uma base de auto-estados do operador  $N$  temos :

$$\begin{aligned} N |n\rangle &= n |n\rangle \quad , \\ a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad , \\ a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \quad . \end{aligned} \tag{1.4}$$

O estado coerente  $|z\rangle$  da álgebra  $w_1$  foi definido :

$$|z\rangle = e^{za^\dagger} |0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad . \tag{1.5}$$

É fácil observar utilizando (1.4) que

$$a |z\rangle = z |z\rangle \quad , \quad a^\dagger |z\rangle = \frac{d}{dz} |z\rangle \quad . \tag{1.6}$$

A partir das equações (1.6) podemos deduzir a ação dos operadores  $a, a^\dagger$  no espaço de Bargmann<sup>7</sup> (espaço cuja base é composta por estados coerentes). As funções de onda nessa representação são dadas por

$$\psi(z) = \langle \bar{z} | \psi \rangle$$

temos então

$$\begin{aligned} a^\dagger \psi(z) &= \langle \bar{z} | a^\dagger | \psi \rangle = z \langle \bar{z} | \psi \rangle = z \psi(z), \\ a \psi(z) &= \langle \bar{z} | a | \psi \rangle = z \langle \bar{z} | \psi \rangle = \frac{d}{dz} \psi(z), \end{aligned} \tag{1.7}$$

e, portanto

$$a^\dagger = z \quad , \quad a = \frac{d}{dz} \tag{1.8}$$

A representação no espaço de Bargmann também pode ser usada em conexão com outras álgebras de Lie. No caso da álgebra  $su(2)$  temos os operadores  $J_+$ ,  $J_-$  e  $J_z$  que satisfazem as relações de comutação

$$[J_+, J_-] = 2J_z \quad ; \quad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm \quad . \quad (1.9)$$

A ação desses operadores em uma base  $|jm\rangle$  é:

$$\begin{aligned} J_z |jm\rangle &= m |jm\rangle \\ J_\pm |jm\rangle &= \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |jm \pm 1\rangle \quad . \end{aligned} \quad (1.10)$$

O estado coerente  $|z\rangle$  da álgebra  $su(2)$  é definido<sup>6,8</sup>

$$|z\rangle = e^{\bar{z}J_+} |j-j\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n J_+^n}{n!} |j-j\rangle \quad . \quad (1.11)$$

De forma análoga a que fizemos anteriormente pode-se deduzir a ação dos operadores  $J_+$ ,  $J_-$ ,  $J_z$ , no espaço de Bargmann.

É importante notar que os estados coerentes, devido ao fato de serem um somatório de todos os estados da base, são convenientes na descrição de propriedades coletivas.

#### 1.4 Álgebras Quânticas

As álgebras quânticas<sup>9,10</sup> são generalizações das álgebras de Lie usuais, pela introdução de um certo parâmetro  $q$ . Quando fazemos o limite  $q \rightarrow 1$ , retornamos às álgebras de Lie usuais. Em correspondência com a álgebra  $su(2)$ , nós temos a álgebra quântica  $su_q(2)$ <sup>9</sup>, cujos geradores ( $J_+$ ,  $J_-$  e  $J_z$ ) obedecem as seguintes relações de comutação :

$$[J_+, J_-] = [2J_z] \quad ; \quad [J_z, J_\pm] = \pm J_\pm \quad (1.12)$$

onde

$$[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \quad (1.13)$$

Obviamente, se escrevermos  $q = e^\tau$ , teremos

$$[x] = \frac{\text{senh}(\tau x)}{\text{senh}(\tau)}, \quad (1.14)$$

e se escrevermos  $q = e^{i\tau}$ , teremos

$$[x] = \frac{\text{sen}(\tau x)}{\text{sen}(\tau)}. \quad (1.15)$$

Nas equações (1.13), (1.14) e (1.15), é fácil observar que

$$\lim_{q \rightarrow 1} [x] = x.$$

A ação dos operadores  $J_+$ ,  $J_-$  e  $J_z$  em uma base  $|jm\rangle$  passa a ser:

$$\begin{aligned} J_z |jm\rangle &= m |jm\rangle \\ J_\pm |jm\rangle &= \sqrt{[j \mp m][j \pm m + 1]} |jm \pm 1\rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

De maneira análoga à utilizada para definir os estados coerentes das álgebras de Lie usuais pode-se também definir os estados coerentes das álgebras quânticas<sup>11,12</sup>. Na álgebra quântica  $su_q(2)$  a definição é a seguinte:

$$|z\rangle = e^{\bar{z} J_+} |j-j\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n J_+^n}{[n]!} |j-j\rangle \quad (1.17)$$

onde

$$[n]! = [n][n-1]\dots[1]. \quad (1.18)$$

O interesse no estudo das álgebras quânticas em correlação com problemas físicos aumentou consideravelmente desde o estudo do oscilador harmônico  $q$ -deformado<sup>9</sup>, e aplicações dessas álgebras têm sido desenvolvidas em diversas áreas da física. Modelos exatamente solúveis, em sua versão deformada, têm sido estudados com o objetivo de se tentar compreender o efeito que a deformação provoca nas propriedades dos sistemas, e sobre a possibilidade de se relacionar o parâmetro  $q$  com alguma grandeza física. Como exemplo, podemos citar os estudos sobre a influência da deformação na transição de fase do regime-vibracional para o regime rotacional no modelo de Lipkin  $su_q(2)$ <sup>3</sup> e no modelo de Moszkowski  $su_q(2) \otimes su_q(2)$ <sup>2</sup>.

## CAPÍTULO II

### MODELO DE LIPKIN - MESHKOV - GLICK (LMG)

#### 2.1 O Modelo LMG

O modelo LMG<sup>13</sup> representa um sistema de  $N$  férmions distribuídos em dois níveis  $N$ -vezes degenerados, separados por uma energia  $\epsilon$ . A Hamiltoniana pode ser escrita:

$$H = \frac{1}{2}\epsilon \sum_{p\sigma} \sigma a_{p\sigma}^\dagger a_{p\sigma} + \frac{1}{2}V \sum_{pp'\sigma} a_{p\sigma}^\dagger a_{p'\sigma}^\dagger a_{p'-\sigma} a_{p-\sigma} \quad (2.1)$$

onde  $V$  especifica a intensidade da interação entre as partículas, o número quântico  $\sigma$  indica o nível de energia e pode assumir os valores  $+1$  (para o nível superior) e  $-1$  (para o nível inferior), e  $p$  é o número quântico que especifica o estado de um férmion no nível  $\sigma$ .

Como cada partícula pode ocupar dois estados, para  $N$  partículas teremos um total de  $2^N$  estados. A resolução do problema envolveria, portanto, a diagonalização de uma matriz  $2^N \times 2^N$ . Contudo a simetria do problema permite uma considerável redução nesse número. Se o estado de uma partícula for especificado por um vetor de spin, o operador de transição de um estado para outro pode ser descrito por uma matriz de Pauli. Podemos formular todo o problema em termos de operadores de pseudo-spin a partir das seguintes definições :

$$J_+ = \sum_p a_{p+1}^\dagger a_{p-1} \quad J_- = \sum_p a_{p-1}^\dagger a_{p+1} \quad J_z = \frac{1}{2} \sum_{p\sigma} \sigma a_{p\sigma}^\dagger a_{p\sigma} \quad , \quad (2.2)$$

onde

$$[J_+, J_-] = 2J_z \quad (2.3)$$



$$[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (2.4)$$

Os operadores (2.2) satisfazem as mesmas regras de comutação do momento angular (álgebra  $su(2)$ ) e a Hamiltoniana (2.1) pode ser expressa em termos desses operadores :

$$H = \epsilon J_z + \frac{1}{2} V(J_+^2 + J_-^2) \quad (2.5)$$

O operador  $J_z$  dá a metade da diferença entre o número de férmions dos dois níveis. Assim o valor máximo de  $J_z$  e, conseqüentemente, de  $J$  é  $\frac{N}{2}$ . A solução do problema envolve, portanto, a diagonalização de uma matriz de ordem  $N + 1$  ( $-\frac{N}{2} \leq J_z \leq \frac{N}{2}$ ).

## 2.2 O Modelo LMG q-Deformado

O modelo LMG q-deformado<sup>14</sup> pode ser obtido se considerarmos que os operadores de pseudo-spin ( $J_+$ ,  $J_-$ ,  $J_z$ ) são geradores da álgebra  $su_q(2)$ , ao invés da álgebra  $su(2)$ . As relações de comutação entre os geradores dessa álgebra são:

$$[J_+, J_-] = [2J_z] \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (2.6)$$

onde  $[x]$  está definido pela equação (1.13).

A ação desses operadores em um vetor de uma base  $|jm\rangle$  é dada pela equação (1.16).

A resolução exata do problema é análoga a resolução para o caso não deformado.

## 2.3 Solução Variacional do Modelo LMG q-Deformado

O cálculo do estado fundamental do modelo LMG q-deformado pode ser feito utilizando-se um método variacional<sup>3</sup>. Para isso utilizamos o estado coerente de  $su_q(2)$ , dado

por<sup>11</sup>:

$$|z\rangle = e_q^{\frac{1}{2}J_+} |j-j\rangle \quad (2.7)$$

onde  $e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!}$  e  $[n]! = [n][n-1]\dots[1]$ .

Assim

$$\begin{aligned} |z\rangle &= \sum_{n=0}^{2j} \frac{(\bar{z}J_+)^n}{[n]!} |j-j\rangle \\ &= \frac{|j-j\rangle}{1} + \frac{\bar{z}([2j])^{\frac{1}{2}}}{1} |j-j+1\rangle + \frac{\bar{z}^2([2j][2j-1][2])^{\frac{1}{2}}}{[2]} |j-j+2\rangle + \dots \\ &\dots + \frac{\bar{z}^j([2j]\dots[j][2]\dots[j])^{\frac{1}{2}}}{[j]!} |j0\rangle + \dots + \frac{\bar{z}^{2j}([2j]![2j]!)^{\frac{1}{2}}}{[2j]!} |jj\rangle \\ &= \sum_{m=-j}^j \bar{z}^{j+m} \left( \frac{[2j]![j+m]!}{[j-m]![j+m]![j+m]!} \right)^{\frac{1}{2}} |jm\rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Definindo :

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{[n]!}{[n-k]![k]!} \quad , \quad (2.9)$$

obtemos

$$|z\rangle = \sum_{m=-j}^j \left[ \begin{matrix} 2j \\ j-m \end{matrix} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{z}^{j+m} |jm\rangle, \quad (2.10)$$

cuja norma é:

$$\begin{aligned} \langle z | z \rangle &= \sum_{m=-j}^j \sum_{m'=-j}^j \langle jm' | \left[ \begin{matrix} 2j \\ j-m' \end{matrix} \right]^{\frac{1}{2}} z^{j+m'} \left[ \begin{matrix} 2j \\ j-m \end{matrix} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{z}^{j+m} |jm\rangle \\ &= \sum_{m=-j}^j \left[ \begin{matrix} 2j \\ j-m \end{matrix} \right] (z\bar{z})^{j+m} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ou seja

$$\langle z | z \rangle = [1(+)\bar{z}z]^{2j} = \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z \bar{z}) \quad , \quad (2.12)$$

onde a q-binomial é dada por

$$[a(+)\bar{b}]^n = \sum_{l=0}^n \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} a^l b^{n-l}. \quad (2.13)$$

O estado de mínima energia é obtido a partir da expressão:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\epsilon} &= \min_{z \in C} \left\{ \frac{\langle z | \frac{H}{\epsilon} | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right\} \\ &= \min_{z \in C} \left\{ \frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{V}{2\epsilon} \left( \frac{\langle z | J_+^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{\langle z | J_-^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A ação dos operadores de pseudospin da álgebra  $su_q(2)$  no espaço de Bargmann é dada por<sup>11,12</sup>

$$\langle z | J_z | \psi \rangle = \left( z \frac{\partial}{\partial z} - j \right) \langle z | \psi \rangle \quad (2.15)$$

$$\langle z | J_- | \psi \rangle = D_z \langle z | \psi \rangle \quad (2.16)$$

$$\langle z | J_+ | \psi \rangle = (-q^{-2j} z^2 D_z + [2j] z L_{q^{-1}}) \langle z | \psi \rangle \quad (2.17)$$

onde  $|\psi\rangle$  é um estado arbitrário,

$$L_{q^{-1}} f(z) = f(q^{-1} z) \quad , \quad (2.18)$$

e

$$D_z f(z) = \frac{f(qz) - f(q^{-1}z)}{z(q - q^{-1})} \quad (2.19)$$

é a q-derivada.

Para obtermos o mínimo da expressão (2.14), calculamos primeiro  $\frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{1}{\langle z | z \rangle} \left( \left( z \frac{\partial}{\partial z} - j \right) \langle z | z \rangle \right) \\ \frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{1}{\prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z \bar{z})} \left( \left( z \frac{\partial}{\partial z} - j \right) \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z \bar{z}) \right) \\ \frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= -j + \frac{1}{\prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z \bar{z})} \left( z \sum_{k=0}^{2j-1} \bar{z} q^{2k-2j+1} \prod_{\substack{k'=0 \\ k' \neq k}}^{2j-1} (1 + q^{2k'-2j+1} z \bar{z}) \right) \\ \frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{q^{2k-2j+1} z \bar{z}}{1 + q^{2k-2j+1} z \bar{z}} - j \end{aligned} \quad (2.20)$$

Antes de calcular  $\frac{\langle z | J_z^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  é conveniente obtermos o resultado da aplicação da q-derivada em uma q-binomial

$$D_z [1(+)_z \bar{z}]^{2j} = D_z \prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z \bar{z}).$$

Aplicando a definição da q-derivada, dada em (2.19), temos

$$\begin{aligned} D_z [1(+)_z \bar{z}]^{2j} &= \frac{\prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} q z \bar{z})}{z(q - q^{-1})} - \frac{\prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} q^{-1} z \bar{z})}{z(q - q^{-1})} \\ D_z [1(+)_z \bar{z}]^{2j} &= \bar{z} [2j] [1(+)_z \bar{z}]^{2j-1}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Em sequência calculamos  $\frac{\langle z | J_z^- | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  e  $\frac{\langle z | J_z^+ | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_z^- | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{D_z (D_z \langle z | z \rangle)}{\langle z | z \rangle} \\ &= \frac{\bar{z}^2 [2j] [2j - 1] [1(+)_z \bar{z}]^{2j-2}}{\langle z | z \rangle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\bar{z}^2 [2j][2j-1] \prod_{k=0}^{2j-3} (1 + q^{2k-2j+3} z \bar{z})}{\prod_{k=0}^{2j-1} (1 + q^{2k-2j+1} z \bar{z})} \\
&= \frac{\bar{z}^2 [2j][2j-1] (1 + q^{-2j+3} z \bar{z}) (1 + q^{-2j+5} z \bar{z}) \dots (1 + q^{2j-3} z \bar{z})}{(1 + q^{-2j+1} z \bar{z}) (1 + q^{-2j+3} z \bar{z}) \dots (1 + q^{2j-1} z \bar{z})} \\
\frac{\langle z | J_-^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{\bar{z}^2 [2j][2j-1]}{(1 + q^{-2j+1} z \bar{z}) (1 + q^{2j-1} z \bar{z})} \quad (2.22)
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\langle z | J_+^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{\langle z | J_-^2 | z \rangle^*}{\langle z | z \rangle} = \frac{z^2 [2j][2j-1]}{(1 + q^{-2j+1} z \bar{z}) (1 + q^{2j-1} z \bar{z})} \quad (2.23)$$

Para obtenção do mínimo da expressão (2.14) parametrizamos o número complexo  $z$  da seguinte forma :

$$z = tg \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \quad (2.24)$$

onde  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

Substituindo (2.24) na expressão (2.20), e lembrando que  $j = \frac{N}{2}$  obtemos

$$\frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{q^{N-1-2k} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{N}{2} \quad (2.25)$$

De forma análoga temos

$$\frac{\langle z | J_-^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} [N][N-1] e^{-2i\phi}}{(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{-N+1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{N-1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})} \quad (2.26)$$

e

$$\frac{\langle z | J_+^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} [N][N-1] e^{2i\phi}}{(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{-N+1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{N-1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})} \quad (2.27)$$

Somando as expressões (2.26) e (2.27) temos

$$\frac{\langle z | J_+^2 + J_-^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{\text{sen}^2 \theta [N][N-1] \cos 2\phi}{2(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{-N+1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{N-1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})}. \quad (2.28)$$

A expressão (2.14) pode, então ser reescrita na forma

$$\frac{E_0}{\epsilon} = \min_{\theta, \phi} \left\{ \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} B_N(\theta) - \frac{N}{2} + \frac{\chi}{4} \text{sen}^2 \theta \cos 2\phi C_N(\theta) \right\} \quad (2.29)$$

onde

$$B_N(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{q^{N-1-2k} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.30)$$

$$C_N(\theta) = \frac{[N-1]}{2(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{-N+1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{N-1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})} \quad (2.31)$$

e  $\chi \equiv \frac{V[N]}{\epsilon}$ .

No que se refere a variável  $\phi$ , o mínimo é facilmente obtido a partir das equações :

$$\frac{\partial \left( \frac{E_0}{\epsilon} \right)}{\partial \phi} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \left( \frac{E_0}{\epsilon} \right)}{\partial \phi^2} > 0. \quad (2.32)$$

Estas equações implicam que

$$\text{sen} 2\phi = 0 \quad \text{e} \quad \cos 2\phi < 0 \quad (2.33)$$

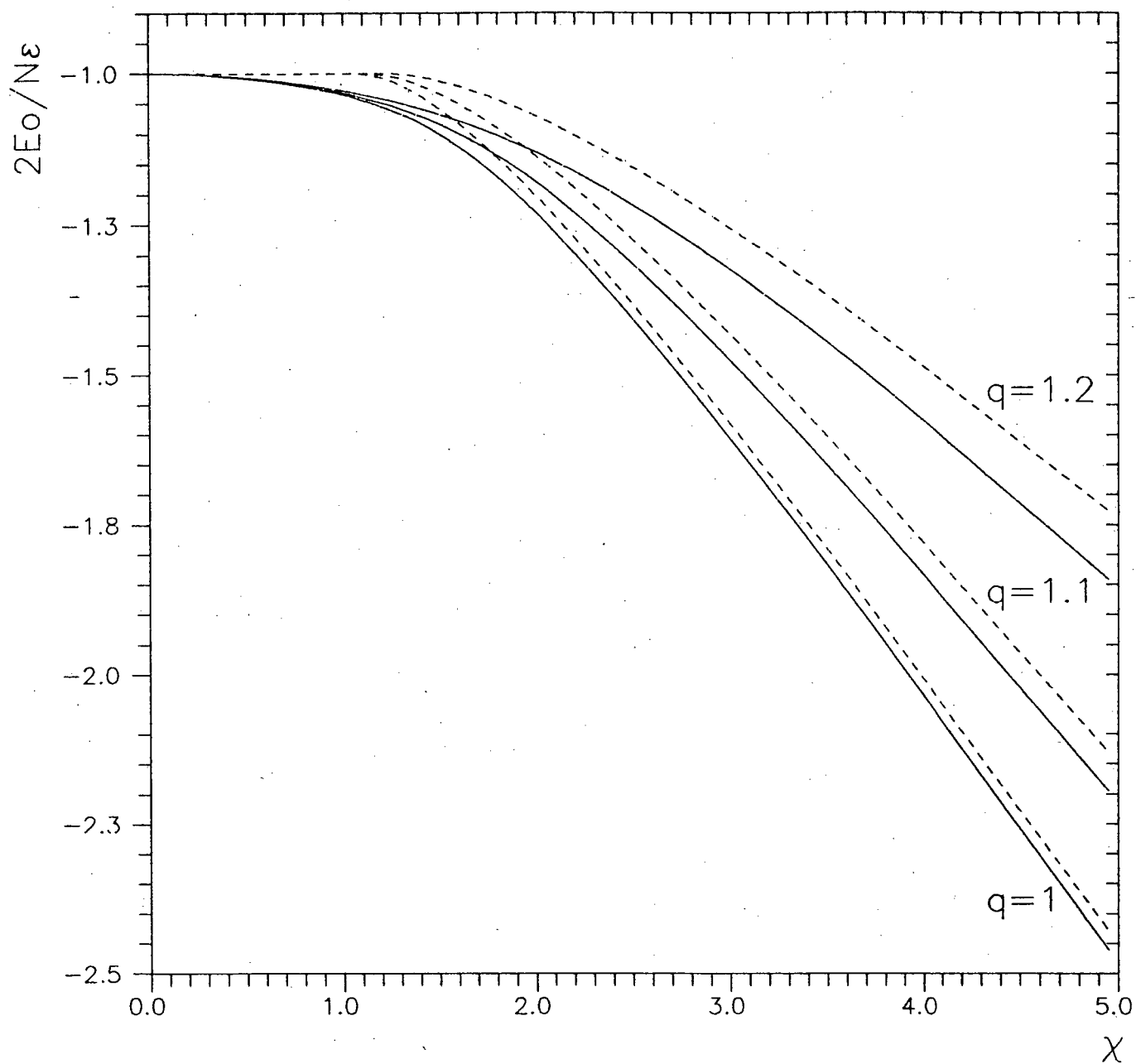
cuja solução é  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . O mínimo na variável  $\theta$  foi obtido numericamente.

## 2.4 Resultados e Conclusões

Com os resultados obtidos foram traçados gráficos para  $N = 16$  partículas (pag. 16) e  $N = 100$  partículas (pag. 17). Observando esses gráficos notamos que o método variacional (*linha tracejada no gráfico*) produz resultados que se aproximam dos resultados exatos à medida que aumenta o número de partículas. Inversamente, quanto maior a deformação piores os resultados obtidos por este método.

Também notamos que a deformação tende a tornar menos acentuada a transição de fase que possivelmente ocorre. Pode-se concluir, a partir da observação do gráfico da página 17, que esta transição tende a ser suprimida para valores altos de deformação .

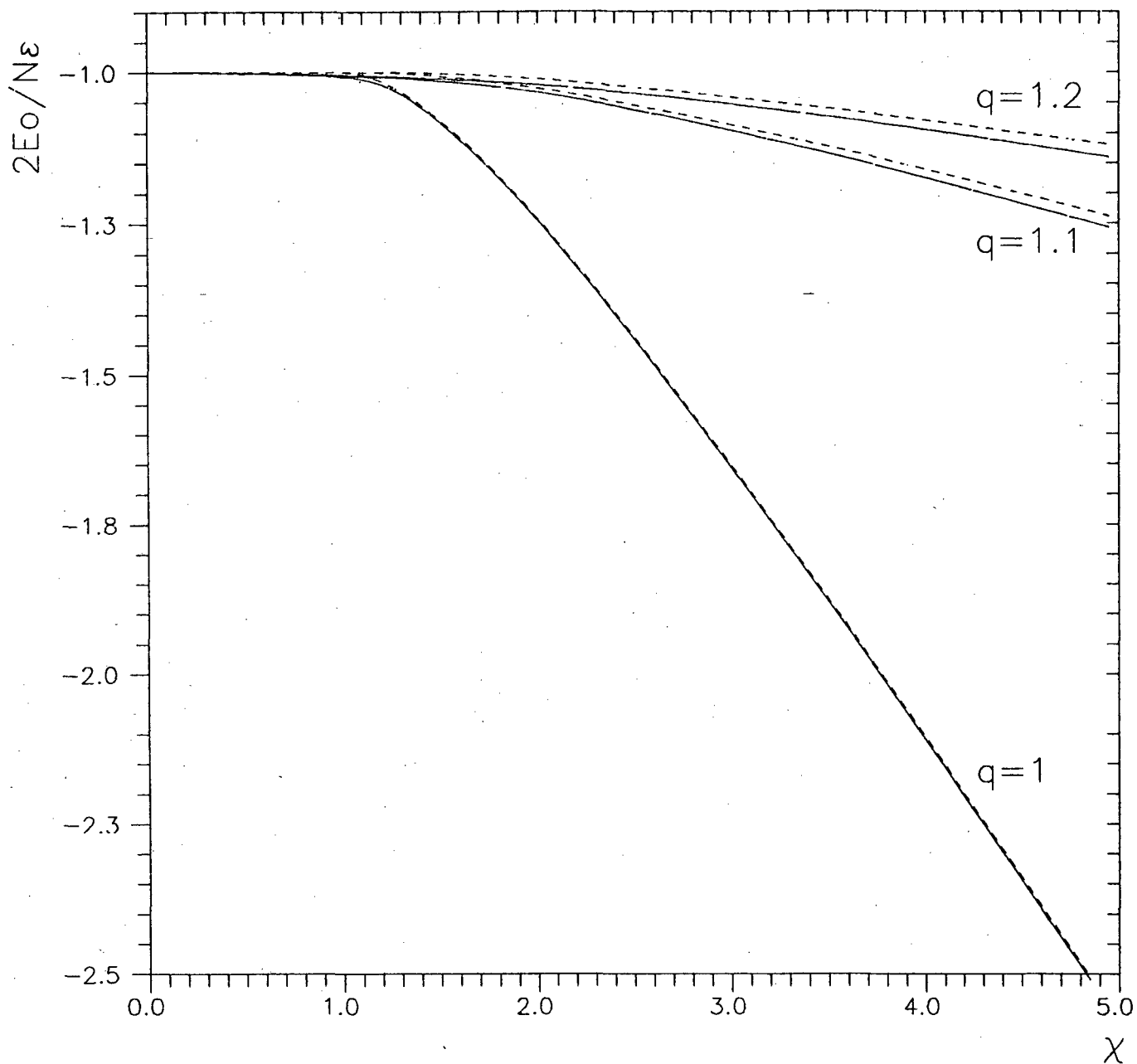
N=16



Modelo de Lipkin com  $N = 16$  partículas. Os resultados exatos são representados por linha cheia e os resultados variacionais por linha tracejada.



N=100



Modelo de Lipkin com  $N = 100$  partículas. Os resultados exatos são representados por linha cheia e os resultados variacionais por linha tracejada.

## CAPÍTULO III

### MODELO DE MOSZKOWSKI

#### 3.1 O Modelo de Moszkowski

O modelo de Moszkowski<sup>1</sup> descreve um sistema composto por dois tipos de partículas ( $N_a$  partículas do tipo  $a$  e  $N_b$  partículas do tipo  $b$ ), distribuídas, cada tipo, em dois níveis de energia  $N$ -vezes degenerados. Assim temos  $N_a$  partículas do tipo  $a$  ocupando dois níveis de energia e  $N_b$  partículas do tipo  $b$  ocupando outros dois níveis. A Hamiltoniana do modelo pode ser escrita :

$$H = \epsilon(J_z(a) - J_z(b)) + V(J_x^2 + J_y^2) \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2} \left( J_+(a) + J_-(a) + J_+(b) + J_-(b) \right) \\ J_y &= -\frac{i}{2} \left( J_+(a) - J_-(a) + J_+(b) - J_-(b) \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$V$  é a intensidade da interação entre as partículas, e  $\epsilon$  é a diferença de energia entre os dois níveis.

Os operadores de pseudospin ( $J_+$ ,  $J_-$ ,  $J_z$ ) podem ser definidos em termos dos opera-

dores de criação  $\alpha^\dagger$  e aniquilação  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}
 J_z(\alpha) &= \frac{1}{2} \sum_{p\sigma} \sigma \alpha_{p\sigma}^\dagger \alpha_{p\sigma} \\
 J_+(\alpha) &= \sum_p \alpha_{p+1}^\dagger \alpha_{p-1} \\
 J_-(\alpha) &= \sum_p \alpha_{p-1}^\dagger \alpha_{p+1}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde o número quântico  $\sigma$  especifica o nível de energia da partícula (+1 para o nível superior e  $-1$  para o nível inferior),  $p$  é o número quântico que especifica o estado de uma partícula no nível  $\sigma$ , e  $\alpha = a$  ou  $b$ .

Esses operadores obedecem as seguintes relações de comutação :

$$\begin{aligned}
 [J_+(\alpha), J_-(\beta)] &= 2J_z(\alpha)\delta_{\alpha\beta} \\
 [J_z(\alpha), J_\pm(\beta)] &= \pm J_\pm(\alpha)\delta_{\alpha\beta}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Reescrevemos a Hamiltoniana em termos desses operadores substituindo (3.2) na expressão (3.1):

$$\begin{aligned}
 H = \epsilon(J_z(a) - J_z(b)) + \frac{V}{2} \left\{ J_+(a)J_-(a) + J_-(a)J_+(a) + J_+(b)J_-(b) + J_-(b)J_+(b) \right. \\
 \left. + 2J_+(a)J_-(b) + 2J_+(b)J_-(a) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

O operador  $J_z(a)$  dá a metade da diferença entre o número de partículas do tipo  $a$  nos dois níveis. O valor máximo para  $J_z(a)$ , e conseqüentemente para  $J(a)$ , será  $\frac{N_a}{2}$  (todas as partículas do tipo  $a$  em um mesmo nível). Analogamente, o valor máximo para  $J_z(b)$ , e para  $J(b)$ , será  $\frac{N_b}{2}$ .

A Hamiltoniana do modelo de Moszkowski pode ser exatamente diagonalizada em uma base  $|jm\rangle$  dada por:

$$|\psi_{ab}\rangle = \left| \frac{N_a}{2} m_a \right\rangle \left| \frac{N_b}{2} m_b \right\rangle$$

onde

$$m_a = -\frac{N_a}{2}, -\frac{N_a}{2} + 1, \dots, \dots, \frac{N_a}{2}$$

$$m_b = -\frac{N_b}{2}, -\frac{N_b}{2} + 1, \dots, \dots, \frac{N_b}{2}.$$

### 3.2 O Modelo de Moszkowski q-Deformado

Podemos introduzir uma deformação quântica no modelo de Moszkowski<sup>2</sup> se considerarmos que os operadores  $J_+(\alpha), J_-(\alpha), J_z(\alpha)$  são geradores da álgebra  $su_q(2) \otimes su_q(2)$ , obedecendo as seguintes relações de comutação :

$$[J_+(\alpha), J_-(\beta)] = [2J_z(\alpha)]\delta_{\alpha\beta}$$

$$[J_z(\alpha), J_{\pm}(\beta)] = \pm J_{\pm}(\alpha)\delta_{\alpha\beta}$$
(3.6)

onde  $[x]$  é dada por (1.13) e  $q$  é o parâmetro de deformação da álgebra. Quando  $q \rightarrow 1$  retornamos às relações de comutação da álgebra  $su(2) \otimes su(2)$ .

A Hamiltoniana do modelo de Moszkowski q-deformado pode ser exatamente diago-

nalizada em uma base  $|jm\rangle$ , onde a aplicação dos operadores  $J_+(a), J_-(a), J_z(a)$  resulta:

$$\begin{aligned}
J_+(a) \left| \frac{N_a}{2} m_a \right\rangle \left| \frac{N_b}{2} m_b \right\rangle &= \sqrt{\left[ \frac{N_a}{2} - m_a \right] \left[ \frac{N_a}{2} + m_a + 1 \right]} \left| \frac{N_a}{2} m_a + 1 \right\rangle \left| \frac{N_b}{2} m_b \right\rangle \\
J_-(a) \left| \frac{N_a}{2} m_a \right\rangle \left| \frac{N_b}{2} m_b \right\rangle &= \sqrt{\left[ \frac{N_a}{2} + m_a \right] \left[ \frac{N_a}{2} - m_a + 1 \right]} \left| \frac{N_a}{2} m_a - 1 \right\rangle \left| \frac{N_b}{2} m_b \right\rangle \quad (3.7) \\
J_z(a) \left| \frac{N_a}{2} m_a \right\rangle \left| \frac{N_b}{2} m_b \right\rangle &= m_a \left| \frac{N_a}{2} m_a \right\rangle \left| \frac{N_b}{2} m_b \right\rangle.
\end{aligned}$$

Para  $J_+(b), J_-(b), J_z(b)$  os resultados são análogos e, quando  $q \rightarrow 1$ , retornamos aos resultados usuais da álgebra  $su(2) \otimes su(2)$ .

### 3.3 Solução Variacional do Modelo de Moszkowski q-Deformado

Assim como no caso do modelo de Lipkin, o estado fundamental do modelo de Moszkowski pode ser calculado por método variacional. Utilizamos para isso o estado coerente da álgebra  $su_q(2) \otimes su_q(2)$  dado por<sup>2</sup>

$$|z\rangle = |z_a\rangle \otimes |z_b\rangle = |z_a z_b\rangle = e^{\bar{z}_a J_+(a)} e^{\bar{z}_b J_+(b)} |j_a - j_a\rangle |j_b - j_b\rangle \quad (3.8)$$

A norma do estado coerente  $|z\rangle$  é

$$\begin{aligned}
\langle z | z \rangle &= \langle z_a | z_a \rangle \langle z_b | z_b \rangle = [1(+)_a z_a \bar{z}_a]^{2j_a} [1(+)_b z_b \bar{z}_b]^{2j_b} \\
&= \prod_{k=0}^{2j_a-1} (1 + q^{2k-2j_a+1} z_a \bar{z}_a) \prod_{k=0}^{2j_b-1} (1 + q^{2k-2j_b+1} z_b \bar{z}_b) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

O estado fundamental é obtido a partir da expressão:

$$\frac{E_0}{\epsilon} = \min_{z \in C} \left\{ \frac{\langle z | \frac{H}{\epsilon} | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right\}$$

$$\begin{aligned}
= \min_{z \in \mathbb{C}} & \left\{ \frac{\langle z | J_z(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} - \frac{\langle z | J_z(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{V}{2\epsilon} \left( \frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right. \right. \\
& + \frac{\langle z | J_-(a)J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{\langle z | J_+(b)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{\langle z | J_-(b)J_+(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \\
& \left. \left. + \frac{2\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{2\langle z | J_+(b)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right) \right\}. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

A ação dos operadores de pseudospin no espaço de Bargmann é dada por<sup>11,12</sup>:

$$\langle z | J_z(\alpha) | \psi \rangle = \left( z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} - j_\alpha \right) \langle z | \psi \rangle \quad (3.11)$$

$$\langle z | J_-(\alpha) | \psi \rangle = D_{z_\alpha} \langle z | \psi \rangle \quad (3.12)$$

$$\langle z | J_+(\alpha) | \psi \rangle = (-q^{-2j_\alpha} z_\alpha^2 D_{z_\alpha} + [2j_\alpha] z_\alpha L_{q^{-1}}) \langle z | \psi \rangle \quad (3.13)$$

onde  $|\psi\rangle$  é um estado arbitrário,  $L_{q^{-1}} f(z_\alpha) = f(q^{-1} z_\alpha)$ ,  $D_{z_\alpha}$  é a q-derivada e  $\alpha = a$  ou  $b$ .

Iniciaremos o cálculo da expressão (3.10) calculando  $\frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$ . Por conveniência vamos considerar  $N_a = N_b = N$ , o que implica que  $j_a = j_b = j$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{(-q^{-2j} z_a^2 D_{z_a} + [2j] z_a L_{q^{-1}}) \langle z | D_{z_a} | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \\
&= \frac{(-q^{-2j} z_a^2 D_{z_a} + [2j] z_a L_{q^{-1}}) D_{z_a} [1(+)] z_a \bar{z}_a^{2j}}{[1(+)] z_a \bar{z}_a^{2j}} \\
&= \frac{-q^{-2j} z_a^2 \bar{z}_a^2 [2j][2j-1][1(+)] z_a \bar{z}_a^{2j-2}}{[1(+)] z_a \bar{z}_a^{2j}} + \frac{[2j]^2 z_a \bar{z}_a [1(+)] q^{-1} z_a \bar{z}_a^{2j-1}}{[1(+)] z_a \bar{z}_a^{2j}} \\
\frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{-q^{-2j} z_a^2 \bar{z}_a^2 [2j][2j-1]}{(1+q^{-2j+1} z_a \bar{z}_a)(1+q^{2j-1} z_a \bar{z}_a)} + \frac{[2j]^2 z_a \bar{z}_a}{(1+q^{2j-1} z_a \bar{z}_a)}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Para obtermos  $\frac{\langle z | J_+(b)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  basta que troquemos os índices a por b na expressão (3.14).

Antes de calcularmos  $\frac{\langle z | J_-(a) J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  é conveniente calcularmos o resultado da aplicação da  $q$ -derivada em um produto de funções :

$$\begin{aligned} D_z \{f(z)g(z)\} &= \frac{f(qz)g(qz) - f(q^{-1}z)g(q^{-1}z)}{z(q - q^{-1})} \\ &= \frac{f(qz)g(qz) - f(q^{-1}z)g(q^{-1}z) + \{f(qz)g(q^{-1}z) - f(qz)g(q^{-1}z)\}}{z(q - q^{-1})} \\ &= \frac{\{f(qz) - f(q^{-1}z)\}g(q^{-1}z) + f(qz)\{g(qz) - g(q^{-1}z)\}}{z(q - q^{-1})} \end{aligned}$$

$$D_z \{f(z)g(z)\} = D_z \{f(z)\} g(q^{-1}z) + f(qz) D_z \{g(z)\}. \quad (3.15)$$

Podemos agora calcular  $\frac{\langle z | J_-(a) J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  e  $\frac{\langle z | J_-(b) J_+(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_-(a) J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{D_{z_a} (-q^{-2j} z_a^2 D_{z_a} + [2j] z_a L_{q_a^{-1}}) \langle z_a | z_a \rangle}{\langle z_a | z_a \rangle} \\ &= \frac{-q^{-2j} D_{z_a} (z_a^2 D_{z_a} [1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j})}{[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j}} + \frac{D_{z_a} ([2j] z_a [1(+)_z q^{-1} z_a \bar{z}_a]^{2j})}{[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j}} \\ &= \frac{-q^{-2j} D_{z_a} (z_a^2 \bar{z}_a [2j] [1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j-1})}{[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j}} + \frac{D_{z_a} ([1(+)_z q^{-1} z_a \bar{z}_a]^{2j} [2j] z_a)}{[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j}} \end{aligned}$$

Aplicando (3.15) temos

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_-(a) J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= [2j] \left\{ 1 + \frac{([2j] q^{-2} - q^{-2j} [2]) z_a \bar{z}_a [1(+)_z q^{-1} z_a \bar{z}_a]^{2j-1}}{[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{q^{-2j+2} [2j - 1] z_a^2 \bar{z}_a^2 [1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j-2}}{[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j}} \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\langle z | J_-(a)J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = [2j] \left\{ 1 + \frac{([2j]q^{-2} - q^{-2j}[2]) z_a \bar{z}_a}{(1 + q^{2j-1} z_a \bar{z}_a)} - \frac{q^{-2j+2}[2j-1] z_a^2 \bar{z}_a^2}{(1 + q^{-2j+1} z_a z_a)(1 + q^{2j-1} z_a z_a)} \right\}. \quad (3.16)$$

Trocando os índices  $a$  por  $b$  na equação (3.16) obtemos  $\frac{\langle z | J_-(b)J_+(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$ . Falta calcularmos

$$\frac{\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \text{ e } \frac{\langle z | J_+(b)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} :$$

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{\langle z_a | J_+(a) | z_a \rangle \langle z_b | J_-(b) | z_b \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{\left( \langle z_a | J_-(a) | z_a \rangle \right)^* \langle z_b | J_-(b) | z_b \rangle}{\langle z | z \rangle} \\ &= \frac{\left( D_{z_a} \langle z_a | z_a \rangle \right)^* D_{z_b} \langle z_b | z_b \rangle}{\langle z | z \rangle} \\ \frac{\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{[2j]^2 \bar{z}_b z_a [1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j-1} [1(+)_z z_b \bar{z}_b]^{2j-1}}{[1(+)_z z_a \bar{z}_a]^{2j} [1(+)_z z_b \bar{z}_b]^{2j}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

A expressão para  $\frac{\langle z | J_+(b)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  é obtida trocando  $a$  por  $b$  na expressão (3.17).

O cálculo de  $\frac{\langle z | J_z(\alpha) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  foi realizado no capítulo II (equação (2.20)) e resulta em:

$$\frac{\langle z | J_z(\alpha) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{q^{2k-2j+1} z_\alpha \bar{z}_\alpha}{1 + q^{2k-2j+1} z_\alpha \bar{z}_\alpha} - j \quad (3.18)$$

onde  $\alpha = a$  ou  $b$ .

Para o cálculo do mínimo da expressão (3.10) é conveniente parametrizarmos os números complexos  $z_a$  e  $z_b$  :

$$z_a = tg \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \quad ; \quad z_b = tg \frac{\gamma}{2} e^{i\beta} \quad (3.19)$$



onde  $\theta, \gamma \in [0, \pi]$  e  $\phi, \beta \in [0, 2\pi]$ .

Vamos ,então obter a expressão (3.10) em função de  $\theta, \phi, \gamma$  e  $\beta$ . Iniciamos substituindo (3.19) na expressão (3.14) :

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{-q^{-N}tg^4(\frac{\theta}{2})[N][N-1]}{(1+q^{-N+1}tg^2(\frac{\theta}{2}))(1+q^{N-1}tg^2(\frac{\theta}{2}))} + \frac{[N]^2tg^2(\frac{\theta}{2})}{(1+q^{N-1}tg^2(\frac{\theta}{2}))} \\ &= \frac{-q^{-N}sen^4(\frac{\theta}{2})[N][N-1]}{(\cos^2(\frac{\theta}{2})+q^{-N+1}sen^2(\frac{\theta}{2}))(\cos^2(\frac{\theta}{2})+q^{N-1}sen^2(\frac{\theta}{2}))} \\ &\quad + \frac{[N]^2sen^2(\frac{\theta}{2})}{(\cos^2(\frac{\theta}{2})+q^{N-1}sen^2(\frac{\theta}{2}))}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para obtermos  $\frac{\langle z | J_+(b)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  basta trocarmos  $\theta$  e  $\phi$  por  $\gamma$  e  $\beta$ , respectivamente. Em sequência, utilizando (3.19), vamos reescrever (3.16), (3.17) e (3.18):

$$\frac{\langle z | J_-(a)J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = [N] \left\{ 1 + \frac{([N]q^{-2} - q^{-N}[2])tg^2(\frac{\theta}{2})}{(1+q^{N-1}tg^2(\frac{\theta}{2}))} - \frac{q^{-N+2}[N-1]tg^4(\frac{\theta}{2})}{(1+q^{-N+1}tg^2(\frac{\theta}{2}))(1+q^{N-1}tg^2(\frac{\theta}{2}))} \right\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_-(a)J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= [N] + \frac{[N]([N]q^{-2} - q^{-N}[2])sen^2(\frac{\theta}{2})}{(\cos^2(\frac{\theta}{2}) + q^{N-1}sen^2(\frac{\theta}{2}))} \\ &\quad - \frac{[N][N-1]q^{-N+2}sen^4(\frac{\theta}{2})}{(\cos^2(\frac{\theta}{2}) + q^{-N+1}sen^2(\frac{\theta}{2}))(\cos^2(\frac{\theta}{2}) + q^{N-1}sen^2(\frac{\theta}{2}))} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\frac{\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = [N]^2tg(\frac{\theta}{2})tg(\frac{\gamma}{2})e^{i(\phi-\beta)} \times$$

$$\left\{ \frac{\prod_{k=0}^{N-2} (1 + q^{2k-N+2}tg^2(\frac{\theta}{2})) (1 + q^{2k-N+2}tg^2(\frac{\gamma}{2}))}{\prod_{k=0}^{N-1} (1 + q^{2k-N+1}tg^2(\frac{\theta}{2})) (1 + q^{2k-N+1}tg^2(\frac{\gamma}{2}))} \right\}$$

isto é,

$$\frac{\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{1}{4}[N]^2 \text{sen}\theta \text{sen}\gamma e^{i(\phi-\beta)} \times \left\{ \frac{\prod_{k=0}^{N-2} (\cos^2(\frac{\theta}{2}) + q^{2k-N+2} \text{sen}^2(\frac{\theta}{2})) (\cos^2(\frac{\gamma}{2}) + q^{2k-N+2} \text{sen}^2(\frac{\gamma}{2}))}{\prod_{k=0}^{N-1} (\cos^2(\frac{\theta}{2}) + q^{2k-N+1} \text{sen}^2(\frac{\theta}{2})) (\cos^2(\frac{\gamma}{2}) + q^{2k-N+1} \text{sen}^2(\frac{\gamma}{2}))} \right\}, \quad (3.22)$$

e finalmente,

$$\frac{\langle z | J_z(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{q^{N-1-2k} \cos^2(\frac{\theta}{2}) + \text{sen}^2(\frac{\theta}{2})} - \frac{N}{2}. \quad (3.23)$$

Trocando os índices  $\theta$  e  $\phi$  por  $\gamma$  e  $\beta$ , e vice-versa, nas expressões (3.21), (3.22) e (3.23), teremos  $\frac{\langle z | J_-(b)J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$ ,  $\frac{\langle z | J_+(b)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  e  $\frac{\langle z | J_z(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$ . Assim, a expressão (3.10) pode ser reescrita na seguinte forma :

$$\frac{E_0}{\epsilon} = \min_{\theta, \phi, \gamma, \beta} \left\{ A(\theta) - A(\gamma) + \frac{V[N]}{2\epsilon} (B(\theta) + B(\gamma) + [N] \cos(\phi - \beta) C(\gamma) C(\theta)) \right\} \quad (3.24)$$

onde

$$A(\alpha) = \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{q^{N-1-2k} \cos^2(\frac{\alpha}{2}) + \text{sen}^2(\frac{\alpha}{2})} \quad (3.25)$$

$$B(\alpha) = 1 + \frac{([N-2] + [N]) \text{sen}^2(\frac{\alpha}{2})}{(\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + q^{N-1} \text{sen}^2(\frac{\alpha}{2}))} - \frac{[N-1]q^{-N}(1+q^2)\text{sen}^4(\frac{\alpha}{2})}{(\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + q^{-N+1}\text{sen}^2(\frac{\alpha}{2})) (\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + q^{N-1}\text{sen}^2(\frac{\alpha}{2}))} \quad (3.26)$$

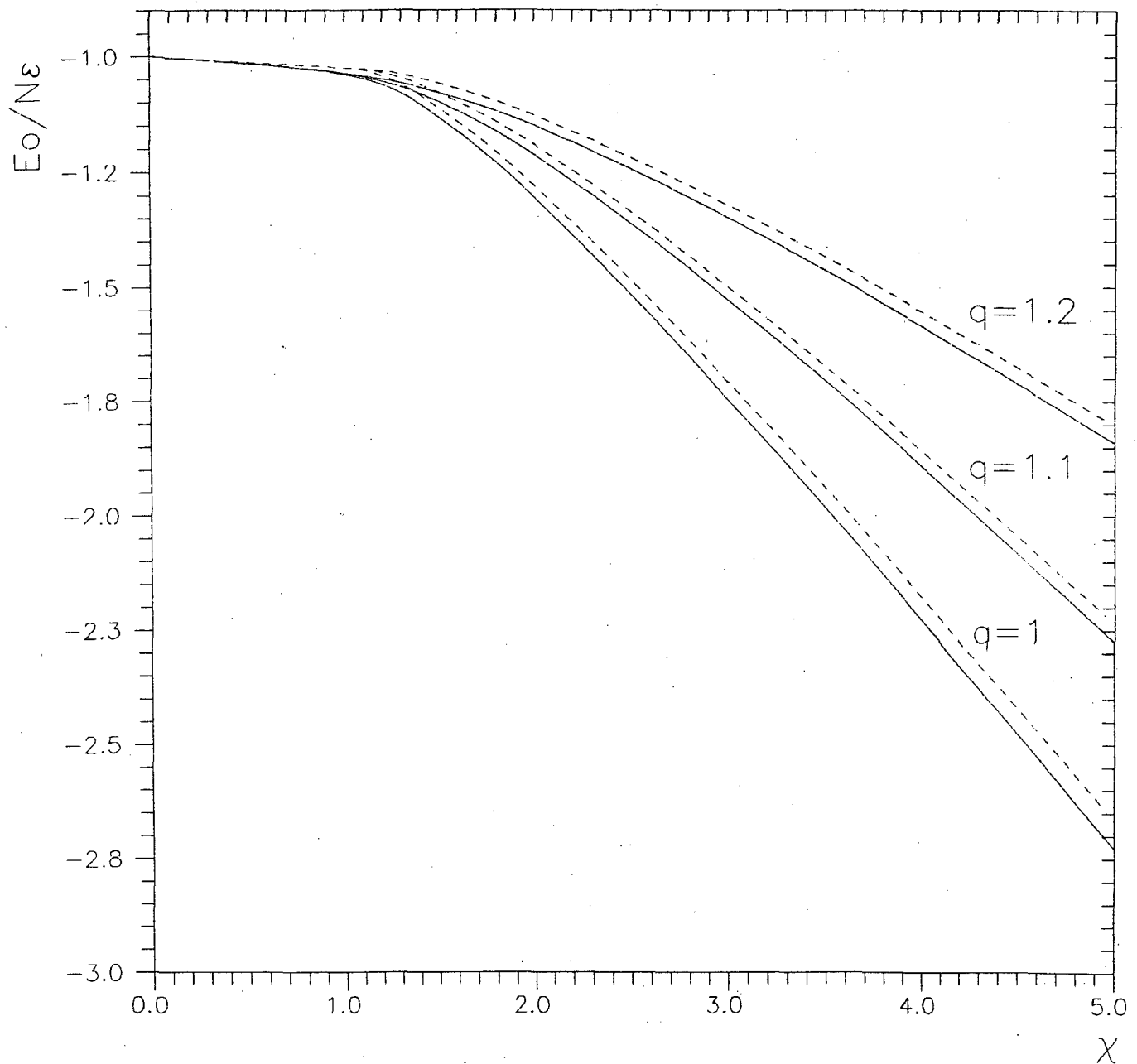
$$C(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha) \prod_{k=0}^{N-2} (\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + q^{2k-N+2} \text{sen}^2(\frac{\alpha}{2}))}{\prod_{k=0}^{N-1} (\cos^2(\frac{\alpha}{2}) + q^{2k-N+1} \text{sen}^2(\frac{\alpha}{2}))}, \quad (3.27)$$

e no cálculo de  $B(\alpha)$  utilizamos que  $[x-y] = [x]q^{-y} - q^{-x}[y]$ .

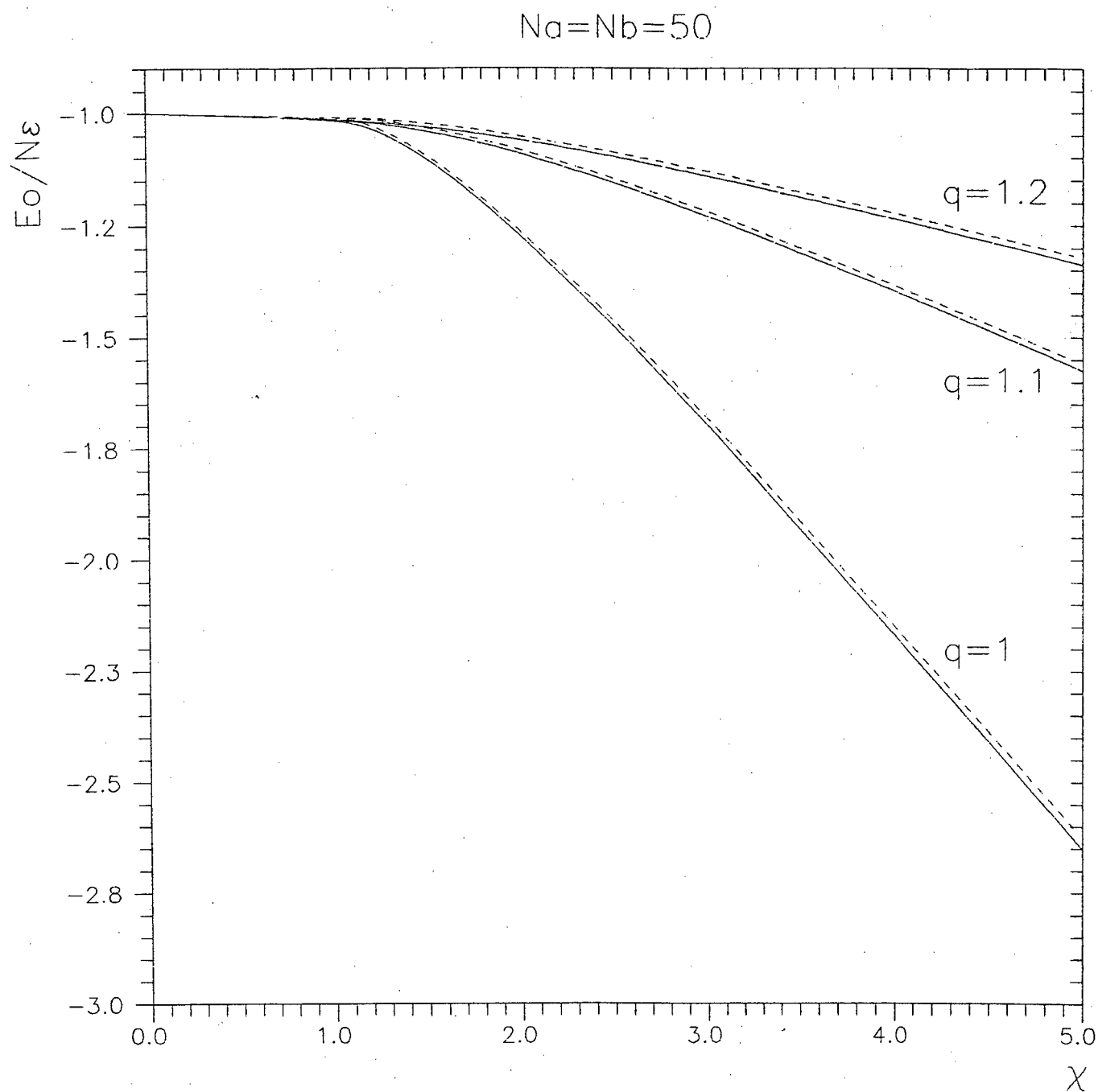
O mínimo da expressão (3.10), no que se refere as variáveis  $\phi$  e  $\beta$ , é obtido analiticamente e resulta em  $(\phi - \beta) = \pi$ . Para a obtenção da mínimo nas variáveis  $\theta$  e  $\gamma$  foram utilizados métodos numéricos.

### 3.4 Resultados e Conclusões

Com os resultados calculados foram traçados gráficos para  $N_a = N_b = 20$  partículas (pag. 28) e  $N_a = N_b = 50$  partículas (pag. 29). As conclusões que podemos tirar da observação desses gráficos são semelhantes às conclusões obtidas no capítulo II para o modelo de Lipkin. Os resultados obtidos a partir do método variacional (*linha tracejada nos gráficos*) se aproximam dos resultados exatos à medida que aumenta o número de partículas. A transição de fase que possivelmente ocorre no modelo de Moszkowski (em torno de  $\chi = 1$  nos gráficos), torna-se menos acentuada com a introdução da deformação e tende a ser suprimida para valores altos de  $q$ .

$N_a = N_b = 20$ 

Modelo de Moszkowski com  $N_a = N_b = 20$  partículas. Os resultados exatos são representados por linha cheia e os resultados variacionais por linha tracejada.



Modelo de Moszkowski com  $N_a = N_b = 50$  partículas. Os resultados exatos são representados por linha cheia e os resultados variacionais por linha tracejada.

## CAPÍTULO IV

### DINÂMICA DO MODELO DE MOSZKOWSKI q-DEFORMADO

#### 4.1 O Princípio Variacional Dependente do Tempo (TDVP)

Até o momento muitos trabalhos foram feitos sobre a influência da deformação nos níveis de energia e nas transições de fase verificadas em alguns sistemas. Muito pouco foi estudado sobre a influência da deformação na dinâmica desses sistemas. Um estudo deste tipo é feito na referência 4, onde é enfocada a dinâmica do modelo de Lipkin q-deformado. Seguindo os mesmos passos vamos, neste capítulo, realizar um estudo sobre a dinâmica do modelo de Moszkowski q-deformado.

Com o objetivo de obter as equações de movimento para o modelo aplicamos o TDVP, ou seja,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (4.1)$$

onde a densidade lagrangeana é definida em termos de estados coerentes<sup>15</sup>:

$$\mathcal{L} = \langle z | i \frac{\partial}{\partial t} - H | z \rangle = \frac{i}{2} (\dot{z}_a \frac{\partial}{\partial \bar{z}_a} + \dot{z}_b \frac{\partial}{\partial \bar{z}_b} - \dot{z}_a \frac{\partial}{\partial z_a} - \dot{z}_b \frac{\partial}{\partial z_b}) \ln \langle z | z \rangle - \mathcal{H} \quad (4.2)$$

com

$$\mathcal{H} = \frac{\langle z | H | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \quad (4.3)$$

e o estado coerente  $|z\rangle = |z_a\rangle |z_b\rangle = |z_a(t)\rangle |z_b(t)\rangle$  é, neste caso, uma função do tempo.

Aplicando as equações de Euler-Lagrange à expressão (4.2), obtemos:

$$\begin{aligned}
i \left( \dot{z}_a \frac{\partial^2}{\partial z_a \partial \bar{z}_a} + \dot{\bar{z}}_b \frac{\partial^2}{\partial z_a \partial \bar{z}_b} \right) \ln \langle z | z \rangle - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_a} &= 0 \\
i \left( \dot{z}_a \frac{\partial^2}{\partial z_a \partial \bar{z}_a} + \dot{z}_b \frac{\partial^2}{\partial z_b \partial \bar{z}_a} \right) \ln \langle z | z \rangle + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_a} &= 0 \\
i \left( \dot{z}_a \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_a \partial z_b} + \dot{z}_b \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_b \partial z_b} \right) \ln \langle z | z \rangle - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_b} &= 0 \\
i \left( \dot{z}_a \frac{\partial^2}{\partial z_a \partial \bar{z}_b} + \dot{z}_b \frac{\partial^2}{\partial z_b \partial \bar{z}_b} \right) \ln \langle z | z \rangle + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_b} &= 0 .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A norma do estado coerente da álgebra  $su_q(2) \otimes su_q(2)$  é dada pela expressão (3.9). Com isso podemos calcular os coeficientes que aparecem nas equações (4.4):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z_a \partial \bar{z}_a} \ln \langle z | z \rangle &= \frac{\partial}{\partial z_a} \left( \frac{1}{\langle z | z \rangle} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_a} \langle z | z \rangle \right) = \frac{\partial}{\partial z_a} \left( \sum_{k=0}^{2j_a-1} \frac{z_a q^{2k-2j_a+1}}{1 + q^{2k-2j_a+1} z_a \bar{z}_a} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{2j_a-1} \frac{q^{2k-2j_a+1}}{(1 + q^{2k-2j_a+1} z_a \bar{z}_a)^2}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_b \partial \bar{z}_b} \ln \langle z | z \rangle = \sum_{k=0}^{2j_b-1} \frac{q^{2k-2j_b+1}}{(1 + q^{2k-2j_b+1} z_b \bar{z}_b)^2} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_a \partial \bar{z}_b} \ln \langle z | z \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_a \partial z_b} \ln \langle z | z \rangle = 0. \tag{4.7}$$

Substituindo (4.5), (4.6) e (4.7) nas equações (4.4), estas podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_a &= \frac{i}{g(z_a, \bar{z}_a)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_a} , & \dot{\bar{z}}_a &= \frac{-i}{g(z_a, \bar{z}_a)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_a} , \\
\dot{z}_b &= \frac{i}{g(z_b, \bar{z}_b)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_b} , & \dot{\bar{z}}_b &= \frac{-i}{g(z_b, \bar{z}_b)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_b} ,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde

$$g(z_\alpha, \bar{z}_\alpha) = \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\alpha} \ln \langle z | z \rangle = \sum_{k=0}^{2j_\alpha-1} \frac{q^{2k-2j_\alpha+1}}{(1+q^{2k-2j_\alpha+1} z_\alpha \bar{z}_\alpha)^2}, \quad (4.9)$$

e  $\alpha = a, b$ . Definindo o parênteses generalizado de Poisson<sup>16</sup>:

$$\{\{A, B\}\}_{(z_\alpha, \bar{z}_\alpha)} = \frac{i}{g(z_\alpha, \bar{z}_\alpha)} \{A, B\}_{(z_\alpha, \bar{z}_\alpha)}, \quad (4.10)$$

onde  $\{A, B\}_{(z_\alpha, \bar{z}_\alpha)}$  é o parênteses de Poisson usual

$$\{A, B\}_{(z_\alpha, \bar{z}_\alpha)} = \left( \frac{\partial A}{\partial z_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \bar{z}_\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial B}{\partial z_\alpha} \right), \quad (4.11)$$

podemos reescrever as equações (4.8), obtendo:

$$\begin{aligned} \dot{z}_a &= \{\{z_a, \mathcal{H}\}\}_{(z_a, \bar{z}_a)} & , & & \dot{\bar{z}}_a &= \{\{\bar{z}_a, \mathcal{H}\}\}_{(z_a, \bar{z}_a)}, \\ \dot{z}_b &= \{\{z_b, \mathcal{H}\}\}_{(z_b, \bar{z}_b)} & , & & \dot{\bar{z}}_b &= \{\{\bar{z}_b, \mathcal{H}\}\}_{(z_b, \bar{z}_b)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

É conveniente utilizarmos a mesma parametrização dos capítulos anteriores para  $z_a$  e  $z_b$ , ou seja

$$z_a = tg \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \quad ; \quad z_b = tg \frac{\gamma}{2} e^{i\beta} \quad (4.13)$$

onde  $\theta, \gamma \in [0, \pi]$  e  $\phi, \beta \in [0, 2\pi]$ . Com a parametrização vamos, então, reescrever as equações (4.12). Partindo das equações (4.8) podemos escrever:

$$\frac{\partial z_a}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial z_a}{\partial \phi} \dot{\phi} = \frac{i}{g(z_a, \bar{z}_a)} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_a} \right\} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \bar{z}_a}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \bar{z}_a}{\partial \phi} \dot{\phi} = \frac{-i}{g(z_a, \bar{z}_a)} \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z_a} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z_a} \right\}. \quad (4.15)$$



Calculamos, então, os coeficientes das equações (4.14) e (4.15):

$$\frac{\partial z_a}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial \bar{z}_a}{\partial \theta} \right)^* = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \quad , \quad \frac{\partial z_a}{\partial \phi} = \left( \frac{\partial \bar{z}_a}{\partial \phi} \right)^* = i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \quad , \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z_a} = \left( \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_a} \right)^* = \frac{\partial}{\partial z_a} (2 \operatorname{arctg} \sqrt{z_a \bar{z}_a}) = \frac{e^{-i\phi}}{\sec^2 \frac{\theta}{2}} \quad , \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_a} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_a} \right)^* = \frac{\partial}{\partial z_a} \left( -\frac{i}{2} \ln \frac{z_a}{\bar{z}_a} \right) = -\frac{i}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \quad . \quad (4.18)$$

Substituindo (4.16), (4.17) e (4.18) nas equações (4.14) e (4.15) obtemos:

$$\frac{\sec^2 \frac{\theta}{2}}{2} e^{i\phi} \dot{\theta} + i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \dot{\phi} = \frac{i}{g(z_a, \bar{z}_a)} \left\{ \frac{e^{i\phi}}{\sec^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} + \frac{i}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right\} \quad (4.19)$$

$$\frac{\sec^2 \frac{\theta}{2}}{2} e^{-i\phi} \dot{\theta} - i \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \dot{\phi} = \frac{-i}{g(z_a, \bar{z}_a)} \left\{ \frac{e^{-i\phi}}{\sec^2 \frac{\theta}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} - \frac{i}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \right\} \quad (4.20)$$

Estas equações implicam que

$$\dot{\theta} = \frac{-\cos^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}}{g(z_a, \bar{z}_a)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = \frac{1}{\tilde{g}(\theta)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} \quad (4.21)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2}}{g(z_a, \bar{z}_a)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = \frac{-1}{\tilde{g}(\theta)} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \quad , \quad (4.22)$$

onde

$$\tilde{g}(\theta) = \frac{-1}{\operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2})^2} \quad . \quad (4.23)$$

Reescrevemos as equações (4.12) da seguinte forma:

$$\dot{\theta} = \{ \{ \theta, \mathcal{H} \} \}_{(\theta, \phi)} \quad , \quad \dot{\phi} = \{ \{ \phi, \mathcal{H} \} \}_{(\theta, \phi)} \quad (4.24)$$

onde

$$\{\{A, B\}\}_{(\theta, \phi)} = \frac{1}{\tilde{g}(\theta)} \{A, B\}_{(\theta, \phi)} \quad . \quad (4.25)$$

De maneira análoga temos

$$\dot{\gamma} = \{\{\gamma, \mathcal{H}\}\}_{(\gamma, \beta)} \quad , \quad \dot{\beta} = \{\{\beta, \mathcal{H}\}\}_{(\gamma, \beta)}. \quad (4.26)$$

## 4.2 Aplicação ao Modelo de Moszkowski q-Deformado

O modelo de Moszkowski foi discutido no capítulo anterior, sua Hamiltoniana é dada pela equação (3.5). A densidade Hamiltoniana é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left\{ \frac{\langle z | \frac{H}{\epsilon} | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\langle z | J_z(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} - \frac{\langle z | J_z(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{V}{2\epsilon} \left( \frac{\langle z | J_+(a)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right. \right. \\ &\quad + \frac{\langle z | J_-(a)J_+(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{\langle z | J_+(b)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{\langle z | J_-(b)J_+(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\langle z | J_+(a)J_-(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} + \frac{2\langle z | J_+(b)J_-(a) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right) \right\}. \quad (4.27) \end{aligned}$$

Após a parametrização dos números complexos  $z_a$  e  $z_b$  temos como resultado

$$\mathcal{H} = A(\theta) - A(\gamma) + \frac{\chi}{2} \left( B(\theta) + B(\gamma) + [N] \cos(\phi - \beta) C(\gamma) C(\theta) \right) \quad (4.28)$$

onde  $\chi = \frac{V[N]}{\epsilon}$  e,  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$ , e  $C(\alpha)$ , onde  $\alpha = \theta, \gamma$ , são dados, respectivamente pelas equações (3.25), (3.26) e (3.27). Substituindo a Hamiltoniana do modelo de Moszkowski

q-deformado nas equações (4.24) e (4.26) vamos, enfim, obter as equações de movimento:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= \frac{-1}{\tilde{g}(\theta)} \frac{\chi[N]}{2} \text{sen}(\phi - \beta) C(\gamma) C(\theta) \\
 \dot{\phi} &= \frac{-1}{\tilde{g}(\theta)} \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} - \frac{\chi}{2\tilde{g}(\theta)} \left\{ \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta} + [N] \cos(\phi - \beta) C(\gamma) \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta} \right\} \\
 \dot{\gamma} &= \frac{1}{\tilde{g}(\gamma)} \frac{\chi[N]}{2} \text{sen}(\phi - \beta) C(\gamma) C(\theta) \\
 \dot{\beta} &= \frac{1}{\tilde{g}(\gamma)} \frac{\partial A(\gamma)}{\partial \gamma} - \frac{\chi}{2\tilde{g}(\gamma)} \left\{ \frac{\partial B(\gamma)}{\partial \gamma} + [N] \cos(\phi - \beta) C(\theta) \frac{\partial C(\gamma)}{\partial \gamma} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta} &= \cotg \frac{\theta}{2} A(\theta) - 0.5 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{sen} \theta \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1 - q^{N-1-2k}}{(q^{N-1-2k} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})^2} \\
 \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\text{sen} \theta}{2(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{N-1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})^2} \left\{ [N] + [N-2] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{0.5[N-1]q^N(1+q^2)\text{sen}^2 \theta + [2N-2]q^{-N}(1+q^2)\text{sen}^4 \frac{\theta}{2}}{(\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{-N+1} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2})^2} \right\} \\
 \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta} &= \cotg \theta C(\theta) + \text{sen} \theta C(\theta) \sum_{k=0}^{N-2} \frac{q^{2k-N+2} - 1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{2l-N+2} \text{sen} \frac{\theta}{2}} \\
 &\quad - \text{sen} \theta C(\theta) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{q^{2k-N+1} - 1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + q^{2l-N+2} \text{sen} \frac{\theta}{2}},
 \end{aligned}$$

e  $\frac{\partial A(\gamma)}{\partial \gamma}$ ,  $\frac{\partial B(\gamma)}{\partial \gamma}$  e  $\frac{\partial C(\gamma)}{\partial \gamma}$  são análogos.

### 4.3 Cálculo da Flutuação do Operador $J_z$

A influência do parâmetro de deformação  $q$  sobre o número de partículas excitadas pode ser analisada calculando-se a flutuação do operador  $J_z$ , que é definido:

$$\Delta J_z = \sqrt{\frac{\langle z | J_z^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} - \left( \frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle} \right)^2} \quad (4.30)$$

onde

$$J_z^2 = J_z(a)^2 + J_z(b)^2 + 2J_z(a)J_z(b). \quad (4.31)$$

Iniciamos calculando  $\frac{\langle z | J_z(a)^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  e  $\frac{\langle z | J_z(b)^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$ . De (3.11) tiramos que

$$\frac{\langle z | J_z(a)^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} = \frac{1}{\langle z_a | z_a \rangle} \left( z_a \frac{\partial}{\partial z_a} - j \right) \left( z_a \frac{\partial}{\partial z_a} - j \right) \langle z_a | z_a \rangle, \quad ,$$

isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | J_z(a)^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= (1 - 2j) \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{z_a \bar{z}_a q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_a \bar{z}_a)} - \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{(z_a \bar{z}_a q^{2k-2j+1})^2}{(1 + q^{2k-2j+1} z_a \bar{z}_a)^2} \\ &+ \left( \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{z_a \bar{z}_a q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_a \bar{z}_a)} \right)^2 + j^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Trocando os índices  $a$  por  $b$  na equação (4.32) temos  $\frac{\langle z | J_z(b)^2 | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$ . Em seguida vamos, então

calcular  $\frac{\langle z | 2J_z(a)J_z(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\langle z | 2J_z(a)J_z(b) | z \rangle}{\langle z | z \rangle} &= \frac{2}{\langle z_a | z_a \rangle} \left\{ \left( z_a \frac{\partial}{\partial z_a} - j \right) \langle z_a | z_a \rangle \right\} \frac{1}{\langle z_b | z_b \rangle} \left\{ \left( z_b \frac{\partial}{\partial z_b} - j \right) \langle z_b | z_b \rangle \right\} \\ &= 2 \left( \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{z_a \bar{z}_a q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_a \bar{z}_a)} \right) \left( \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{z_b \bar{z}_b q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_b \bar{z}_b)} \right) \\ &- 2j \sum_{k=0}^{2j-1} \left( \frac{z_a \bar{z}_a q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_a \bar{z}_a)} + \frac{z_b \bar{z}_b q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_b \bar{z}_b)} \right) + 2j^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

O cálculo de  $\left(\frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle}\right)^2$  foi feito utilizando a equação (2.20), do capítulo II.

$$\left(\frac{\langle z | J_z | z \rangle}{\langle z | z \rangle}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{2j-1} \frac{z_a \bar{z}_a q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_a \bar{z}_a)} + \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{z_b \bar{z}_b q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_b \bar{z}_b)} - 2j\right)^2 \quad (4.34)$$

Substituindo (4.32), (4.33) e (4.34) nas equação (4.30) obtemos, finalmente, a flutuação do operador  $J_z$ :

$$\Delta J_z = \sqrt{\sum_{k=0}^{2j-1} \frac{z_a z_a q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_a \bar{z}_a)^2} + \sum_{k=0}^{2j-1} \frac{z_b z_b q^{2k-2j+1}}{(1 + q^{2k-2j+1} z_b \bar{z}_b)^2}} \quad (4.35)$$

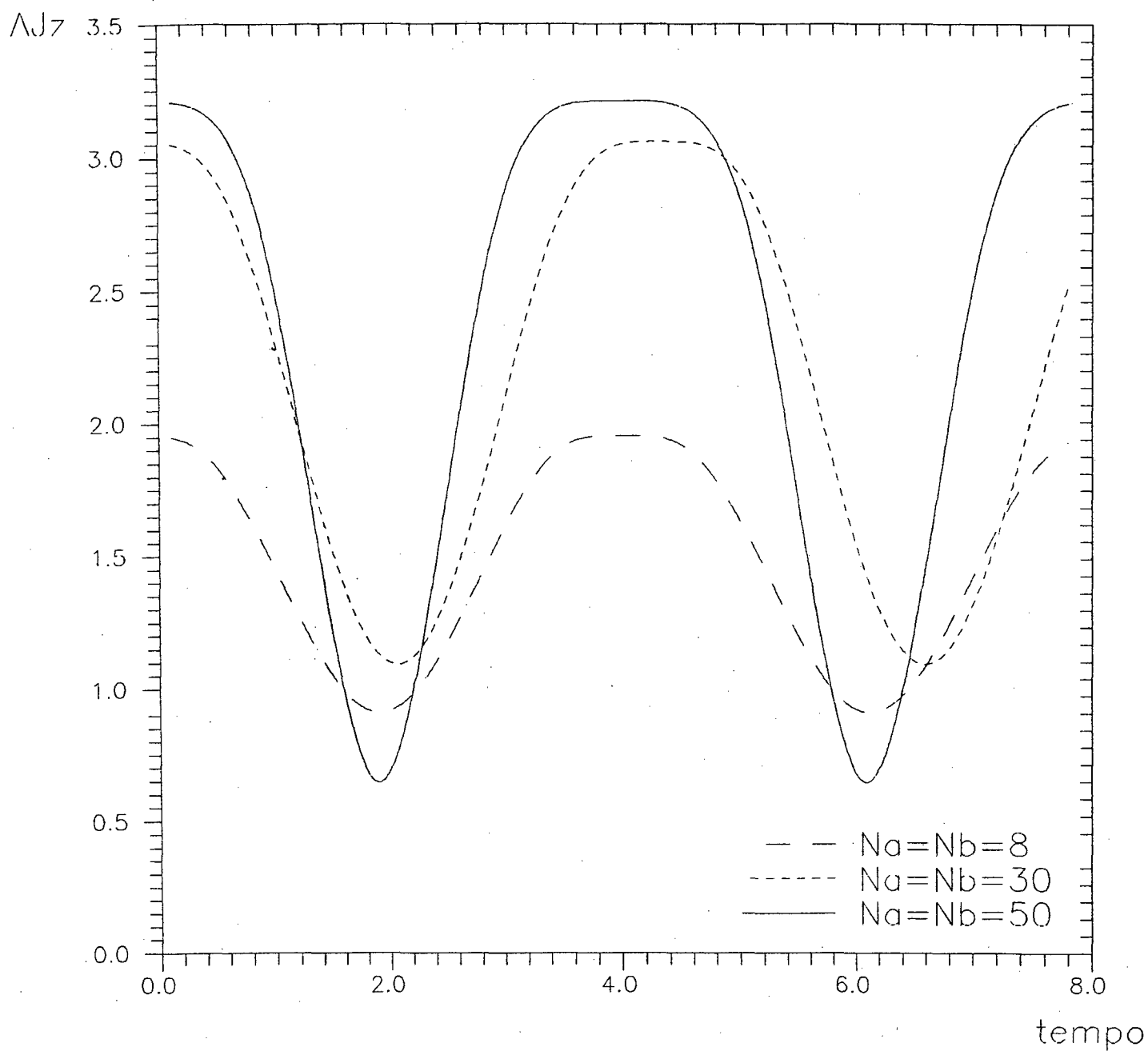
Parametrizando os números  $z_a$  e  $z_b$  de acordo com a equação (4.13), a equação (4.35) fica da seguinte forma:

$$\Delta J_z = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{tg^2 \frac{\theta}{2} q^{2k-N+1}}{(1 + q^{2k-N+1} tg^2 \frac{\theta}{2})^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{tg^2 \frac{\gamma}{2} q^{2k-N+1}}{(1 + q^{2k-N+1} tg^2 \frac{\gamma}{2})^2}} \quad (4.36)$$

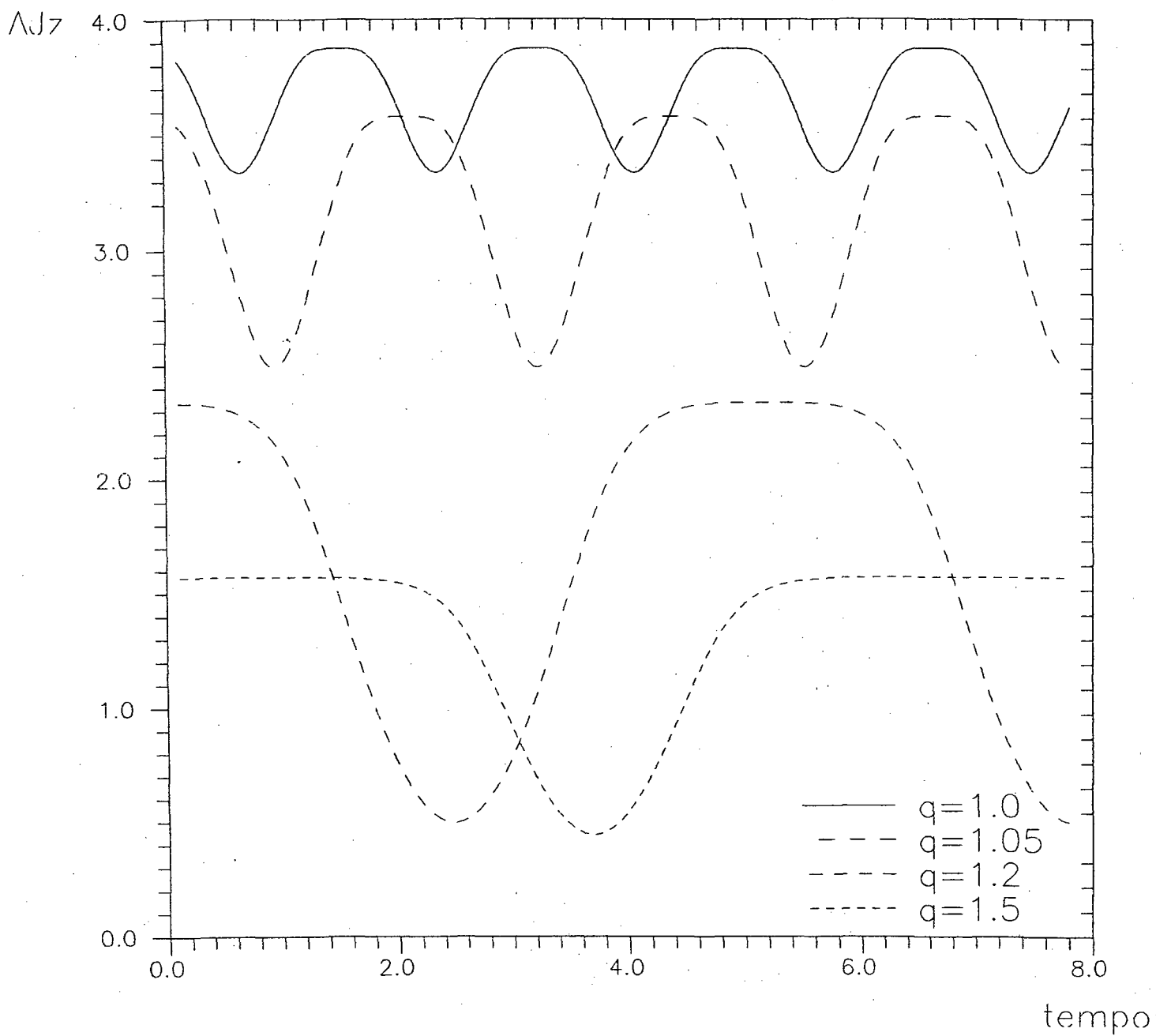
#### 4.4 Resultados e Conclusões

Utilizando os estados coerentes da álgebra  $su_q(2) \otimes su_q(2)$ , obtemos uma dinâmica generalizada<sup>16,4</sup> análoga ao caso não deformado. Isto aplicado ao modelo de Moszkowski q-deformado nos permitiu obter as equações da evolução temporal do modelo, dadas em (4.29). Estas equações permitem obter curvas da energia em função dos ângulos  $\theta$ ,  $\gamma$  e  $\phi - \beta$ . Com auxílio destas equações obtivemos a evolução no tempo da flutuação do operador  $J_z$ , que como vimos no capítulo III, está relacionado com a diferença entre o número de partículas nos dois níveis.

Foram traçados três gráficos. No primeiro deles (pag. 39)  $\Delta J_z$  é traçado em função do tempo para  $N = 8$ ,  $N = 30$ , e  $N = 50$  partículas com a energia por partícula mantida constante ( $E/N = -0.5$  MeV). Como se pode ver, o comportamento do sistema é qualitativamente o mesmo, independente do número de partículas. Em seguida (pag. 40) traçamos um gráfico para  $N = 30$  partículas,  $\chi = 2$  e,  $q = 1.0, 1.05, 1.2$ , e  $1.5$ . Neste gráfico pode-se notar que, com o aumento da deformação,  $\Delta J_z$  oscila para valores mais baixos e, para valores altos de  $q$ , tende a se estabilizar em torno de um valor constante, ou seja, o sistema tende a ficar estacionário. Isto também pode ser visto no terceiro gráfico (pag. 41), onde traçamos  $\Delta J_z$  em função de  $\theta$ .

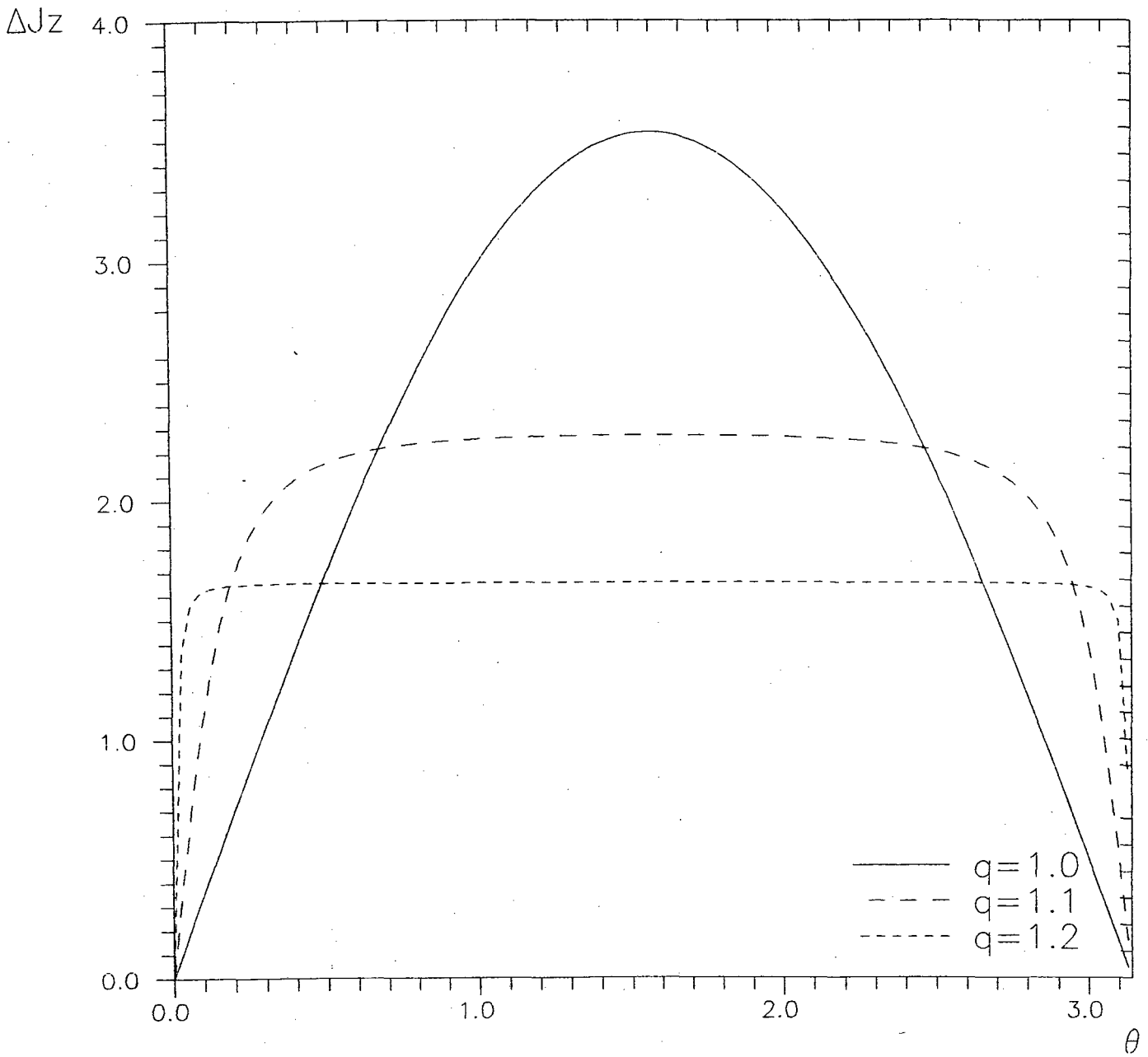


Evolução temporal da flutuação do operador  $J_z$  para diferentes números de partículas, com  $q = 1$  e a energia por partícula igual a  $-0.5$  MeV.



Evolução temporal da flutuação do operador  $J_z$  com  $N_a = N_b = 30$  partículas,  $\chi = 2$ .





Flutuação do operador  $J_z$  em função de  $\theta$ , com  $N_a = N_b = 50$  partículas.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÃO

O objetivo desta dissertação foi descrever e analisar os efeitos introduzidos pela deformação nas propriedades de dois modelos exatamente solúveis, o modelo de Lipkin e o modelo de Moszkowski. Também foi objeto de estudo nesta dissertação a utilização de estados coerentes  $q$ -deformados como funções de teste, quando utilizamos o método variacional.

Observamos os efeitos provocados pela deformação nas transições de fase apresentadas pelos modelos de Lipkin e de Moszkowski (capítulos II e III). Com a introdução da deformação a transição de fase torna-se menos acentuada, tendendo a desaparecer com o aumento da deformação. Neste estudo utilizamos estados coerentes e comparamos os resultados obtidos através do método variacional com os resultados exatos. Esta comparação nos mostrou que o método variacional com estados coerentes produz resultados que se aproximam dos resultados exatos a medida que aumentamos o número de partículas. Outra conveniência de utilizarmos estados coerentes no estudo de transições de fase é que estes nos dão um parâmetro de ordem natural na caracterização dessas transições<sup>3</sup>.

Sobre a dinâmica do modelo de Moszkowski (capítulo IV), foi possível observar, a partir do cálculo da flutuação do operador  $J_z$  (relacionado com a diferença entre o número de partículas nos dois níveis) e da evolução temporal desse operador, utilizando as equações de movimento obtidas, que o sistema tende a um estado estacionário a medida que aumentamos o parâmetro de deformação. É importante ressaltar que nesse capítulo obtivemos

uma dinâmica generalizada análoga ao caso não deformado<sup>16,4</sup> e, a partir disso, fizemos o cálculo das equações de movimento para o modelo de Moszkowski q-deformado.

Enfim, concluímos com a constatação de que, tendo em vista os objetivos propostos para esta dissertação, estes foram plenamente atingidos.

## Referências

- [1] S. A. Moszkowski Phys. Rev. 110 (1958) 403
- [2] D. P. Menezes, S. S. Avancini and C. Proviência, J. Phys. A 25 (1992) 6317 ;  
D. Bonatsos, L. Brito, D. P. Menezes, C. Proviência and J. Proviência  
J. Phys. A 26 (1993) 895
- [3] S. S. Avancini and J. C. Brunelli, Phys. Lett. A 174 (1993) 358
- [4] S. S. Avancini, D. P. Menezes, M. M. W. Moraes and F. F. de Souza Cruz,  
J.Phys. A 27 (1994) 831
- [5] R. J. Glauber, Phys. Rev. 130,2559 (1963); 131, 2766 (1963)
- [6] A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. 26 (1972) 222
- [7] V. Bargmann, Rev. Mod. Phys. 34 (1962) 829
- [8] F. F. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, Phys. Rev. A6 (1972)
- [9] A. J. Macfarlane J. Phys. A 22 (1989) 4581 ;  
L. C. Biedenharn J. Phys. A 22 (1989) L873
- [10] M. Chaichian and D. Ellinas 234B (1990) 72 ;  
M. Brune, S. Haroche, V. Lefreuve, J. M. Raimond and N. Zagury  
Phys. Rev. Lett. 65 (1990) ;  
D. Bonatsos, C. Daskaloyannis and K. Kokkotas J. Phys. A 24 (1991) L795 ;  
D. Bonatsos, P. P. Raychev and A. Faessler Chem. Phys. Lett. 178 (1991) 221 ;  
S. Iwao Prog. Theo. Phys. 83 (1990) 363
- [11] C. Quesne, Phys. Lett. A 153 (1991) 303
- [12] B. Jurco, Lett. Math. Phys. 21 (1991) 51
- [13] H. J. Lipkin, Meshkov and A. J. Glick, Nucl. Phys. 62 (1965) 188

- [14] D. Galetti and B. M. Pimentel, aceito para publicação nos "Anais da Academia Brasileira de Ciências"
- [15] T. Suzuki, Nucl. Phys. A 398 (1983) 557
- [16] R. Gong, Jour. Phys. A 25 (1992) L1145