

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

TRANSPORTE SIMULTÂNEO DE CALOR E  
UMIDADE EM MEIOS POROSOS: MÉTODO DAS  
FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA

HENOR ARTUR DE SOUZA

FLORIANÓPOLIS, MAIO - 1985

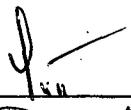
TRANSPORTE SIMULTÂNEO DE CALOR E  
UMIDADE EM MEIOS POROSOS: MÉTODO DAS  
FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

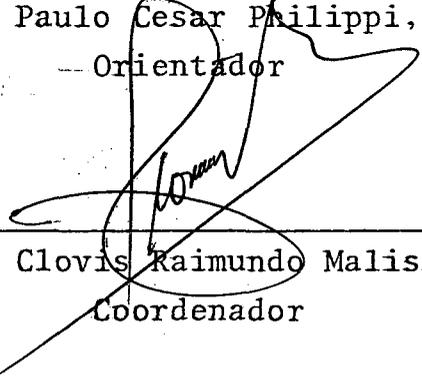
HENOR ARTUR DE SOUZA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO  
TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA  
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

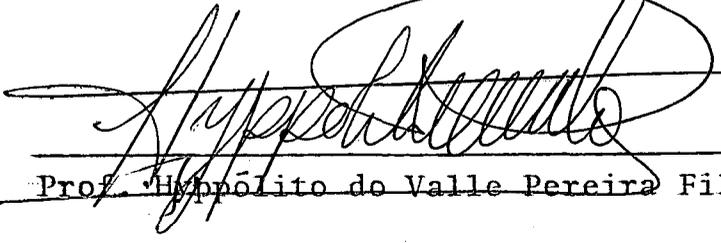
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Paulo Cesar Philippi, Dr. Ing.  
— Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Paulo Cesar Philippi, Dr. Ing.  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Carlos Alfredo Clezar, M.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Hippólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.

A  
meus pais  
pela formação

## AGRADECIMENTOS

- Ao professor Paulo Cesar Philippi, pelos conhecimentos transmitidos e pela orientação efetiva ao longo de toda a dissertação;
- A todos os colegas que de forma direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento e execução desse trabalho;
- E à CNEN (Comissão Nacional de Energia Nuclear) pelo apoio financeiro.

## SUMÁRIO

Página

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SIMBOLOGIA

RESUMO

ABSTRACT

1.	INTRODUÇÃO .....	1
2.	FUNDAMENTOS .....	7
2.1.	Introdução .....	7
2.2.	Meios Porosos .....	9
2.3.	O Efeito da Capilaridade .....	11
2.4.	Conceitos Básicos .....	13
2.5.	Equação de Conservação da Massa .....	14
2.5.1.	Migração de Líquido em Meios Porosos ...	16
2.5.2.	Migração de Vapor em Meios Porosos .....	19
2.5.3.	Uma Relação Funcional para $p_v$ .....	22
2.6.	Equação da Conservação de Energia .....	26
2.7.	Migração Simultânea de Líquido e Vapor .....	28
2.8.	Conclusão .....	32
3.	MÉTODO DAS FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA .....	33
3.1.	Introdução .....	33
3.2.	Conjunto de Equações Governantes e Condições de Contorno .....	34

3.3.	Transformação das Equações - Transformada de Laplace .....	36
3.3.1.	Equações Diferenciais para as Transformadas $\bar{\psi}$ e $\bar{\phi}$ .....	37
3.4.	Densidades de Fluxo de Calor e Massa .....	42
3.5.	Princípio de Superposição e Função Pulso .....	45
3.6.	Inversão da Equação Matricial das Densidades de Fluxo .....	52
3.6.1.	Análise do Integrand e Determinação dos Polos .....	54
3.6.2.	Cálculo dos Resíduos .....	55
3.6.3.	Equação Inversa final das Densidades de Fluxo .....	61
3.7.	Funções de Transferência - Interpretação Física .....	63
3.8.	Situações Assintóticas .....	74
3.8.1.	Situação Correspondente a $Lu=0$ .....	74
3.8.2.	Situação Correspondente a $\epsilon=0$ .....	76
3.8.3.	Situação em que $\delta=0$ .....	80
3.8.4.	Situação em que $\epsilon=\delta=0$ simultaneamente ..	82
3.8.5.	Situação em que $Lu=1$ e $\delta=\epsilon=0$ .....	85
3.9.	Conclusão .....	86
4.	APLICAÇÃO: SIMULAÇÃO DO PERÍODO INICIAL DE SECAGEM DE UM ELEMENTO POROSO DE EDIFICAÇÃO PRELIMINARMENTE SATURADO DE UMIDADE .....	87
4.1.	Introdução .....	87
4.2.	Condições de Contorno .....	88
4.3.	Solução do Sistema de Equações .....	98

	Página
4.4. Condições do Problema .....	104
4.5. Resultados .....	110
4.6. Conclusão .....	124
5. COMENTÁRIOS FINAIS .....	125
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	127
APÊNDICES .....	131
A. INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS .....	132
A.1. Introdução .....	132
A.2. Definição de Conjuntos e de Função Analítica ...	132
A.3. Zeros e Singularidades .....	133
A.4. Resíduos .....	134
A.4.1. Regras para Determinar os Resíduos .....	135
A.5. Teorema dos Resíduos .....	137
A.6. Teorema de Inversão para Transformada de Laplace .....	138
A.7. Avaliação do Teorema de Inversão em dois Contor nos Particulares .....	140
A.8. Resumo .....	143
B. RELAÇÃO FUNCIONAL PARA O COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE MASSA .....	145
B.1. Introdução .....	145

	Página
B.2. Densidade de Fluxo de Massa e a Relação de Lewis .....	145
B.3. Uma Relação Funcional para $\alpha_{\mu}$ .....	146
C. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA PARA O ELEMENTO POROSO DA TABELA 8 .....	148

## LISTA DE FIGURAS

	Página
FIGURA 1 - Corpo poroso saturado de umidade, ascensão do líquido por efeito da capilaridade .....	10
FIGURA 2 - Parede de edificação. Migração de líquido por efeito da capilaridade, pressão hidrostática e gravidade .....	10
FIGURA 3 - Efeito da capilaridade .....	11
FIGURA 4 - Potencial capilar, $\Psi$ , em função do conteúdo de umidade, $u$ , para a argila a $20^{\circ}\text{C}$ [18] .....	17
FIGURA 5 - Seção transversal de um poro .....	22
FIGURA 6 - Geometria do problema .....	35
FIGURA 7 - Representação de uma função arbitrária do tempo através de pulsos retangulares de base $\delta_T$ .....	46
FIGURA 8 - Representação de uma função arbitrária do tempo através de pulsos triangulares de base $2\delta_T$ .....	47
FIGURA 9 - Representação de uma função pulso-triangular .	48
FIGURA 10 - Representação da $\psi(t)$ através de pulsos triangulares .....	49
FIGURA 11 - Representação da $\phi(t)$ através de pulsos triangulares .....	49
FIGURA 12 - Contorno dos polos .....	52

FIGURA 13 - Distribuição das funções de transferência, (a) - $U_j$ ; (b) - $V_j$ .....	66
FIGURA 14 - Distribuição das funções de transferência, (a) - $X_j$ ; (b) - $Y_j$ .....	69
FIGURA 15 - Distribuição das funções de transferência, (a) - $W_j$ ; (b) - $Z_j$ .....	70
FIGURA 16 - Distribuição das funções de transferência, (a) - $S_j$ ; (b) - $T_j$ .....	72
FIGURA 17 - Volume de controle para o balanço de massa ...	88
FIGURA 18 - Volume de controle para o balanço de energia .....	89
FIGURA 19 - Amostra do elemento da Tabela 8 .....	106
FIGURA 20 - Distribuição da temperatura no meio ambiente .....	108
FIGURA 21 - Comportamento diário da umidade relativa no meio ambiente .....	110
FIGURA 22 - Distribuição do conteúdo de umidade na superfície de contorno externa de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para $\epsilon=0$ ; $Fe=0$ ; $Lu=0,2$ ; $Bi_{qe} = 2,5$ ; $Bi_{qi} = 1,0$ .....	112
FIGURA 23 - Distribuição do conteúdo de umidade na superfície de contorno interna de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para $\epsilon=0$ ; $Fe=0$ ; $Lu=0,2$ ; $Bi_{qe} = 2,5$ ; $Bi_{qi} = 1,0$ .....	114

- FIGURA 24 - Distribuição do conteúdo de umidade na superfície de contorno externa de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$ ;  $\Psi=-100m$ ;  $\delta=2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  ..... 115
- FIGURA 25 - Distribuição do conteúdo de umidade na superfície de contorno interna de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$ ;  $\Psi=-100m$ ;  $\delta=2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  ..... 116
- FIGURA 26 - Distribuição da temperatura na superfície de contorno externa de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$  ..... 117
- FIGURA 27 - Distribuição da temperatura na superfície de contorno interna de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$  ..... 119
- FIGURA 28 - Distribuição do conteúdo de umidade nas superfícies de contorno de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Lu=0,2$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ;  $\Psi=-100m$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$  .... 121
- FIGURA 29 - Distribuição da temperatura nas superfícies de contorno de uma parede de concreto de 20cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Lu=0,2$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ;  $\Psi=-100 \text{ m}$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$  ..... 123
- FIGURA 30 - Plano complexo ..... 139

FIGURA 31 a e b - Esquematização de um contorno fechado no plano complexo .....	140
FIGURA 32 a e b - Esquematização de um contorno com um "branch point" no plano complexo .....	141

## LISTA DE TABELAS

	Página
TABELA 1 - Elementos da matriz, Eq. (3.46)	44
TABELA 2 - Equação matricial das transformadas das densidades de fluxo em função da função pulso, Eq. (3.56) .....	51
TABELA 3 - Equação matricial das densidades de fluxo, Eq. (3.57) .....	53
TABELA 4 - Derivadas dos elementos da matriz, Eq. (3.56) .....	57
TABELA 5 - Limites das derivadas dos elementos da matriz, Eq. (3.56), quando $p \rightarrow 0$ .....	58
TABELA 6 - Elementos da matriz (3.56) para $p = -\beta_k$ .....	59
TABELA 7 - a - Sistema de equações lineares para $\psi$ e $\phi$ , Eq. (4.29) .....	100
b - Termos fontes da Eq. (4.29), Tab. 7a .....	101
TABELA 8 - Propriedades do elemento poroso .....	105
TABELA 9 - Dados do meio ambiente .....	109
TABELA 10 - Valores das funções de transferência para $Lu=0,1; \epsilon=0; \delta=2 \times 10^{-3} K^{-1}$ .....	148
TABELA 11 - Valores das funções de transferência para $Lu=0,2; \epsilon=0; \delta=2 \times 10^{-3} K^{-1}$ .....	153

## SIMBOLOGIA

- a - Difusibilidade no ar, ( $m^2/s$ ), Eq. (B.3)
- $a_m$  - Difusibilidade mássica, ( $m^2/s$ ), Eq. (3.2)
- $a_q$  - Difusibilidade térmica, ( $m^2/s$ ), Eq. (3.1)
- b - Raio do menisco, (m)
- d - Diâmetro do capilar, (m)
- A,B - Definidas no texto, Eqs. (3.31) e (3.32)
- C - Calor específico, (J/kg de material seco K)
- D - Coeficiente de difusão, ( $m^2/s$ )
- $C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n, \dots$  - Elementos da matriz de fluxo, Eq. (3.43)  $n=1,2$
- g - Aceleração da gravidade, ( $m/s^2$ )
- h - Entalpia por unidade de massa, (J/kg), Eq. (2.52)
- I - Termo fonte das equações de conservação
- $j_m$  - Densidade de fluxo de massa, (kg de umidade/ $m^2 s$ )
- $j_q$  - Densidade de fluxo de calor, ( $W/m^2$ )
- $\bar{j}_m$  - Transformada de Laplace da densidade de fluxo de massa, (kg de umidade/ $m^2 s$ ), Eq. (3.41)

- $\bar{j}_q$  - Transformada de Laplace da densidade de fluxo de calor, ( $W/m^2$ ), Eq. (3.40)
- $k$  - Condutibilidade hidráulica, (m/s) , Eq. (2.21)
- $L$  - Espessura do elemento poroso, (m)
- $m_i$  - Massa do componente intersticial  $i$ , (kg da substância  $i$ ), Eq. (2.9)
- $m_o$  - Massa da matriz sólida, (kg de material seco), Eq. (2.10)
- $M$  - Peso molecular da água, (kg/mol)
- $p$  - Pressão, ( $N/m^2$ )
- $P, Q$  - Definidos no texto, Eq. (3.58)
- $r$  - Calor latente de vaporização, (J/kg de umidade)
- $R$  - Constante universal dos gases, (J/kgmol K)
- $t$  - Tempo, (s)
- $T$  - Temperatura, (K)
- $U_j, V_j$  - Funções de transferência associadas à transferência de calor, ( $W/m^2 K$ ), Eq. (3.80)
- $X_j, Y_j$  - Funções de transferência associadas à transferência de massa, (kg de material seco/ $m^2 s$ ), Eq. (3.80)
- $S_j, T_j$  - Funções de transferência intermediárias associadas à transferência de massa, (kg de umidade/ $m^2 s K$ ), Eq. (3.80)
- $W_j, Z_j$  - Funções de transferência intermediárias associadas à transferência de calor, ( $W kg de material seco/m^2 kg de umidade$ ), Eq. (3.80)

- $u$  - Conteúdo de umidade no meio poroso, (kg de umidade/kg de material seco), Eq. (2.11)
- $u_i$  - Conteúdo de umidade da substância intersticial  $i$ , (kg da substância  $i$ /kg de material seco), Eq. (2.10)
- $v$  - Volume molar, ( $m^3$ /mol)
- $V$  - Volume do elemento poroso, ( $m^3$ )
- $x$  - Coordenada referencial
- $\alpha_q$  - Coeficiente de transferência de calor, ( $W/m^2 K$ )
- $\alpha_\mu$  - Coeficiente de transferência de massa, ( $(kg/m^2 s)/(J/kg)$ )
- $\beta$  - Coeficiente de transferência de massa referenciado à diferença de pressão de vapor, (m/s), Eq. (B.1)
- $\beta_k$  - Raízes para a avaliação dos resíduos, Eq. (3.69)
- $\delta$  - Fator de difusão térmica, ( $K^{-1}$ ), Eq. (2.63)
- $\delta_T$  - Intervalo de tempo, (s), Eq. (3.47)
- $\varepsilon$  - Coeficiente de mudança de fase, Eq. (2.69)
- $\xi_0(S)$  - Definido no texto, Eq. (3.18)
- $\eta_0(S)$  - Definido no texto, Eq. (3.18)
- $\theta$  - ângulo de contato entre o líquido e a parede do capilar, Eq. (2.4)
- $\theta$  - Umidade relativa do meio ambiente, (%), Eq. (4.20)

- $\lambda$  =  $\lambda_q + \lambda_S$ , condutibilidade do meio poroso, (W/m K)
- $\lambda_q$  - Condutibilidade térmica sem migração de umidade, (W/m K), Eq. (2.37)
- $\lambda_S$  - Parcela da condutibilidade associada ao efeito da destilação do vapor, (W/m K), Eq. (2.38)
- $\mu$  - Potencial químico, (J/kg), Eq. (4.13)
- $\nu_m$  - Raízes de  $\eta_0(S) = 0$ , ( $m=1,2$ ), Eq. (3.22)
- $\rho$  - Massa específica, ( $\text{kg/m}^3$ )
- $\tau$  - Índice de tempo,  $t=\tau\delta_T$ , Eq. (3.51)
- $\sigma$  - Tensão superficial, (N/m), Eq. (2.1)
- $\phi$  =  $u-u^0$ , conteúdo de umidade, (kg de umidade/ kg de material seco), Eq. (3.9)
- $\bar{\phi}$  - Transformada de Laplace do conteúdo de umidade (kg de umidade/kg de material seco)
- $\psi$  =  $T-T^0$ , temperatura, (K), Eq. (3.9)
- $\bar{\psi}$  - Transformada de Laplace da temperatura, (K)
- $\Phi$  - Potencial total de umidade, (m), Eq. (2.21)
- $\Psi$  - Potencial capilar ou de sucção, (m), Eq. (2.6)
- $\omega_i$  - Concentração volumétrica da substância intersticial  $i$ , ( $\text{kg da substância } i/\text{m}^3$ ), Eq. (2.9)
- $\Omega$  - Função pulso triangular, Eq. (3.47)
- $\bar{\Omega}$  - Transformada de Laplace da função pulso triangular

Número adimensionais

$$Bi_q = \frac{\alpha_q L}{\lambda_q}, \text{ número de Biot para a transferência de calor, Eq. (4.34)}$$

$$Fe = \frac{\epsilon r \delta}{C_q}, \text{ número de Federov, Eq. (3.22)}$$

$$Le = \frac{a}{D}, \text{ número de Lewis, Eq. (B.3)}$$

$$Lu = \frac{a_m}{a_q}, \text{ número de Luikov, Eq. (3.22)}$$

Sub-índices

- a - Ar
- e - Meio ambiente externo (capítulo 4)
- g - Gás
- i - Meio ambiente interno (capítulo 4)
- $\kappa$  - Índice das raízes para a avaliação dos resíduos
- l - Líquido
- m - Massa
- o - Matriz sólida
- q - Calor
- s - Superfície de contorno
- v - Vapor

- $\alpha$  - Fase líquida
- $\beta$  - Fase gasosa
- 0 - Contorno externo
- L - Contorno interno
- S - Condição de saturação

### Super-índices

- c - Capilar
- o - Estado inicial
- $\alpha$  - Fase líquida
- $\beta$  - Fase gasosa

## R E S U M O

A presença de umidade num elemento poroso pode afetar significativamente a transferência de calor através desse elemento devido aos processos de mudança de fase que ocorrem no interior e nas superfícies de contorno do elemento. Em adição, as propriedades estruturais do material que constitui o elemento podem também ser bastante alteradas.

A formulação de modelos matemáticos para a transferência simultânea de calor e massa em elementos porosos resulta num par de equações não lineares, acoplando as distribuições de temperatura e conteúdo de umidade no material. Admite-se, neste trabalho, que a variação real das propriedades do meio poroso seja pequena, dentro da faixa de variação das variáveis que caracterizam o problema específico a ser resolvido. Isso permite a linearização do sistema de equações governantes, tornando possível o uso de técnicas lineares de solução.

Nesse contexto, o presente trabalho estabelece um método para a resolução de problemas de transferência simultânea de calor e umidade em meios porosos, sujeitos a condições de contorno arbitrárias. A aplicação do método resulta numa relação linear entre as densidades de fluxo de calor e massa através das superfícies limitantes do elemento e os seus potenciais associados.

Mostra-se que o modelo é consistente em situações assintóticas, sendo o mesmo utilizado na análise de um processo real de secagem de um elemento poroso, sujeito às condições ambientais.

## ABSTRACT

The presence of moisture in a porous element may strongly affect the transfer of heat through this element due to the processes which occur associated with the phase changes at the boundary surfaces and internally in the wall body. In addition, the structural properties of the element may also be meaningfully affected.

The formulation of mathematical models for the simultaneous heat and mass transfer in porous elements results in a pair of nonlinear coupled equations for the temperature and moisture content distributions, in the material. It is supposed, in this work, that the actual variation of the properties of the porous medium is small in the range of variables which describe the specific problem to be analyzed. This enables us to work with linearized equations, making possible the use of linear solution methods.

In this context, the present work deals with a linear procedure for the solution of simultaneous heat and moisture transfer problems in porous elements, subjected to arbitrary boundary conditions. This results in a linear relation between the heat and mass flux densities through the boundary surfaces of the element and their associated potentials.

It is shown that the model is consistent in asymptotical limiting cases; the model is then used for analyzing the drying process of a porous element, subjected to ambient actual conditions.

## 1 - INTRODUÇÃO

As edificações estão geralmente sujeitas a variações climáticas que ocorrem em ciclos diurnos e/ou sazonais, e, principalmente nos lugares onde essas mudanças são bastante significativas, o aquecimento e o resfriamento em dias quentes e frios respectivamente, resulta na variação da temperatura no interior dos componentes da edificação. Essas variações de temperatura promovem o movimento da umidade nos componentes porosos de edificações, o que pode ser bastante significativo. Em consequência as propriedades estruturais dos materiais que constituem esses componentes porosos podem ser bastante afetadas.

O estudo do mecanismo de transporte da umidade em elementos porosos de edificações é, portanto, de grande importância. Os processos de mudança de fase que ocorrem no interior e nas superfícies livres do elemento poroso podem também afetar, além do que foi assinalado acima, a transferência de calor através desse elemento. Nesse contexto, vários trabalhos têm sido desenvolvidos, onde se analisa e investiga o efeito da transferência de umidade em elementos porosos de edificações [1,2,3].

Lamberts [1] em sua dissertação de mestrado, a qual objetivou o desenvolvimento de uma metodologia para o estudo do desempenho térmico de coberturas leves com ático, qualificou o resfriamento evaporativo que ocorre na superfície da cobertura como um dos fatores que mais influenciam o comportamento térmico, podendo contribuir significativamente para a melhoria do desempenho de coberturas em telhas de barro. Lamberts [1], determinou experimentalmente a variação do conteúdo de umidade das telhas e através do cálculo do valor da energia gasta na evaporação da umidade das telhas pode demonstrar a importância do fenômeno como proteção contra a insolação.

A influência do teor de umidade sobre a condutibilidade térmica da telha foi também levada em consideração.

Newman [2] estuda a distorção das portas externas de madeira quando expostas externamente às condições ambientais e internamente a um clima doméstico simulado. Como consequência das diferen

ças climáticas a que estão sujeitas as superfícies das portas, gradientes de temperatura e de conteúdo de umidade surgem através das portas de madeira, promovendo um movimento relativo de suas faces. A flecha resultante na porta favorece uma redução à resistência à infiltração e ao vazamento de água e dificulta as operações de abrir e fechar.

Um outro trabalho é o desenvolvido por Poppei et al. [3], na Alemanha, onde o fenômeno da evaporação em paredes úmidas é estudado. Esses autores determinam experimentalmente a evolução da temperatura na superfície e no meio ambiente, calculando as densidades de fluxo de massa e calor nas superfícies, e aplicando a teoria básica de Schwarz, Werner e Gertis [3]. A conclusão de interesse prático foi a de que as paredes não secam durante os meses de inverno pois a evaporação é insignificante comparada ao processo de condensação, e que, portanto, tratamentos para eliminar a umidade são efetivos somente durante os meses de verão, quando a evaporação passa a ser significativa.

A transferência simultânea de calor e massa com mudança de fase no interior de um elemento poroso é, portanto, um estudo de grande relevância no campo da engenharia. É um processo complexo que ocorre na natureza e também em vários problemas de engenharia. Como exemplos, além da transferência de calor e umidade em componentes de edificações, o estudo da migração de calor e umidade em solos, a secagem e a umidificação em processos químicos são bastante significativos.

Uma análise desses processos é, no entanto, complicada por fatores tais como a estrutura da matriz sólida, a forma e a distribuição dos vazios. A estrutura da matriz sólida pode variar muito, podendo, por exemplo, ser constituída de células, fibras ou grãos. Em geral a estrutura e a distribuição dos vazios e poros são bastante irregulares. Desse modo, um estudo minucioso do processo da transferência ocorrendo dentro do elemento poroso é muito complicado mesmo para uma matriz sólida regular. Em consequência uma aproximação usual considerada na análise é o meio poroso como sendo um meio contínuo (capítulo 2). Outra dificuldade que surge é a forte dependência das propriedades de transporte em relação ao conteúdo de umidade e a temperatura.

Mesmo com as dificuldades assinaladas acima existe uma literatura muito extensa na formulação matemática do processo de transferência de calor e massa em elementos porosos. Um dos primeiros trabalhos realizados no campo da descrição matemática do fenômeno da transferência de calor e massa em corpos porosos foi na União Soviética com a importante contribuição de Luikov [4,5]. Luikov foi um dos primeiros a estabelecer a inter-relação entre a transferência de calor e a transferência de massa em elementos porosos, propondo um duplo termo para a difusão de massa não isotérmica, atribuindo ao fato de que o líquido migra não somente sob ação do gradiente de conteúdo de umidade mas também devido a um gradiente térmico. Da mesma forma, determinou experimentalmente os coeficientes da difusão e de termo-difusão de massa para vários materiais úmidos. Mais tarde, usando a termodinâmica dos processos irreversíveis obteve um sistema acoplado de equações diferenciais parciais para a transferência de calor e massa em corpos porosos [4]. Philip e De Vries [6] e De Vries [7] utilizando a lei de Darcy para o fluxo de líquido, a equação da energia térmica e a lei de Fick, incluindo o efeito térmico sobre a transferência de massa, desenvolveram um sistema de equações governantes para esse processo, similar ao sistema obtido por Luikov [5].

A grande maioria dos estudos da transferência simultânea de calor e massa em componentes porosos de edificações se baseia no equilíbrio local entre as fases líquida e gasosa e assumem a substância intersticial como sendo uma mistura heterogênea das fases líquida e gasosa, e cada fase como sendo uma mistura homogênea. A formulação matemática do processo da transferência de calor e massa no elemento poroso resulta em duas equações diferenciais parciais acopladas e não lineares, onde a temperatura e o conteúdo de umidade são as variáveis dependentes.

O trabalho analítico na obtenção da solução de um par de equações diferenciais parciais não lineares acopladas apresenta grandes dificuldades matemáticas e, conseqüentemente, as correspondentes soluções podem ser obtidas somente para configurações geométricas e condições de contorno mais simples [8,9]. Condições de contorno arbitrarias bem como geometrias complicadas dificultam o método analítico.

Dinulescu e Eckert [9] obtêm uma solução analítica para a migração unidimensional de umidade numa placa de um material poroso sob a influência de gradientes térmicos. Nesse trabalho, o fluxo unidimensional transiente de calor e umidade é tratado analiticamente para temperaturas constantes no contorno e para fluxo de calor constante no contorno, separadamente. A solução obtida é relevante para problemas como a determinação da distribuição de umidade em solos sob a influência da radiação solar, a migração de umidade em estruturas protegidas em contato com a terra, a medição das propriedades de transporte de materiais porosos entre outros.

Luikov e Mikhailov [8] apresentam a solução analítica do sistema de equações diferenciais da transferência de calor e massa submetidas a diferentes condições de contorno, dando ênfase à técnica de cálculo na solução de problemas concretos omitindo investigações matemáticas mais complexas e examinando em detalhes o processo de solução dos problemas de configurações mais simples na teoria da transferência de calor e massa.

Admitindo-se, no entanto, que a variação das propriedades do material dentro da faixa de variação das variáveis que caracterizam o problema específico a ser resolvido seja pequena, é possível linearizar o sistema de equações e, em consequência aplicar técnicas lineares de solução. Nessa linha de trabalho a posição da presente dissertação é a de desenvolver um modelo matemático para a obtenção da solução do sistema de equações diferenciais parciais lineares acopladas da transferência transiente, unidimensional de calor e massa em elementos porosos homogêneos.

O modelo apresenta uma formulação geral de cálculo para as funções de transferência, que se constitui numa técnica linear de solução, onde as equações são resolvidas utilizando-se o método das transformadas de Laplace. As condições de contorno arbitrárias são desenvolvidas em séries de funções pulso, obtendo-se uma relação linear entre os fluxos de calor e massa nas superfícies livres do elemento poroso e os seus potenciais associados. O método utiliza basicamente o princípio da superposição de maneira tal que o efeito das distribuições de temperatura e conteúdo de umidade sobre as densidades de fluxo de calor e massa na região, é a soma dos efeitos causados por muitos pulsos individuais de temperatura e conteúdo de umidade durante instantes anteriores.

O sucesso alcançado pelo método das funções de transferência para a condução transiente e unidimensional de calor em componentes de edificação [10, 11, 12] é a base para a realização do presente trabalho.

Com efeito, o método das funções de transferência envolve um menor volume de cálculo aritmético do que os métodos numéricos e as funções de transferência precisam ser determinadas uma única vez e, então podem ser combinadas com condições de contorno apropriadas para cada caso específico.

Em se tratando das soluções utilizando métodos numéricos a literatura é muito extensa [13, 14, 15]. O método de diferenças finitas é o mais comumente usado [14, 15], no entanto, o método dos elementos finitos tem sido também usado [13].

Comini e Del Giudice [13] aplicam o método dos elementos finitos na solução de problemas da transferência bidimensional de calor e massa em edificações, compreendendo aplicações práticas do sistema de equações de Luikov [5] para elementos porosos. Apresentam a formulação em elementos finitos do sistema de equações e das condições de contorno para alguns casos particulares de interesse prático. Como exemplo ilustrativo analisam a transferência de calor e massa numa base de fundação de um depósito. O método dos elementos finitos mostrou-se muito versátil na solução de problemas com geometrias complicadas e com propriedades variáveis.

Eckert e Faghri [14], aplicam o método de diferenças finitas na análise da migração de umidade numa placa de um material poroso não saturado. Uma das superfícies de contorno é submetida a um salto de temperatura, enquanto a outra superfície é mantida à temperatura inicial, sendo as duas superfícies consideradas impermeáveis ao fluxo de massa. As equações de transporte são semelhantes às equações de Luikov [5], e de Philip e de Vries [6], para elementos porosos, admitindo uma variação pequena das propriedades na faixa de variação das variáveis que caracterizam o problema. As soluções são obtidas em função de grupamentos adimensionais tais como o número de Luikov, e mostram a migração da umidade no interior da placa.

Existem ainda, como já se frisou, muitos outros trabalhos

que utilizam diferenças finitas, porém cada um desses trabalhos abrange um caso específico. Pode-se citar o trabalho desenvolvido por Huang et al. [15], que usa um método implícito de diferenças finitas para a análise do processo de secagem de uma placa de concreto não saturada. Os resultados numéricos são obtidos para várias relações de equilíbrio entre líquido e vapor e mostram que durante a secagem os mecanismos de difusão e mudança de fase são os processos governantes.

A contribuição maior do presente trabalho é a obtenção de um método, relativamente simples, de análise para o problema da transferência simultânea de calor e massa em meios porosos para a resolução de problemas envolvendo condições de contorno arbitrárias, dependentes do tempo.

Na organização do presente trabalho o capítulo 2 é destinado ao desenvolvimento das equações governantes para a transferência simultânea de calor e massa em meios porosos.

No capítulo 3 apresenta-se a modelagem matemática para a transferência transiente e unidimensional de calor e massa num elemento poroso homogêneo, plano e de espessura finita, que constitui uma formulação geral de cálculo para as funções de transferência.

No capítulo 4 é feita uma aplicação do modelo obtido no capítulo 3, fazendo-se a análise do comportamento térmico de uma parede úmida de edificação, sujeita a uma condição de contorno de terceira espécie, transiente e função arbitrária do tempo.

As conclusões gerais e algumas sugestões para trabalhos futuros são finalmente apresentadas.

## 2 - FUNDAMENTOS

### 2.1 - Introdução

Este Capítulo apresenta o desenvolvimento do sistema de equações diferenciais da transferência simultânea de calor e massa em meios porosos.

A transferência simultânea de calor e massa com mudança de fase no interior de um meio poroso é um fenômeno que ocorre frequentemente em vários processos da natureza bem como em sistemas industriais, envolvendo a secagem e/ou a umidificação de materiais. O movimento da umidade em solos e em componentes de edificação ou os processos de secagem de cereais são alguns exemplos.

Uma análise desses processos de transferência é complicada por vários fatores, tais como a estrutura da matriz sólida e a forma dos vazios [15]. Em geral, a distribuição dos poros e a estrutura que constitui a matriz sólida são bastante irregulares. Desse modo, um estudo minucioso dos processos de transporte que ocorrem dentro dos poros é complicado mesmo para uma matriz sólida regular e com um grau de complexidade ainda mais elevado para uma configuração irregular de poros que geralmente existe nos meios porosos.

Uma aproximação usual na análise é, portanto, considerar o meio poroso como um meio contínuo. Nessa aproximação admite-se que uma pequena parte do material poroso, pequena em comparação à dimensão global da região considerada e grande comparada a um simples poro, contém uma amostra representativa dos constituintes do meio poroso, estando o seu estado caracterizado por variáveis como o conteúdo de umidade, a temperatura, a pressão do vapor d'água e outras que contribuem para a descrição do meio.

O estado comumente varia de ponto a ponto no material, e sua distribuição no interior do mesmo varia com o tempo durante um processo dinâmico, quando umidade e calor migram através desse material. O objetivo do estudo desses processos é possibilitar a avaliação de como essa distribuição dos estados evolui com o tempo através do material poroso.

Os modelos para a transferência simultânea de calor e massa são desenvolvidos ao longo de duas diferentes linhas. Numa primeira aproximação tenta-se identificar separadamente os fenômenos de transferência que ocorrem no meio e desenvolver as equações para os fluxos de calor e massa baseando-se num modelo físico para o sistema poroso. Numa segunda abordagem aplica-se o formalismo da termodinâmica irreversível para o fenômeno acoplado da transferência de calor e massa e tenta-se identificar os fluxos e forças relevantes. Os fluxos são então expressos como funções lineares das forças. Nenhuma aproximação é, no entanto, capaz de justificar completamente a complexidade do sistema, isto é, de tentá-la descrever. Nesse sentido existe uma literatura extensa [4, 5, 6, 7] procurando formular o processo de transporte matematicamente.

Um dos primeiros trabalhos foi realizado na União Soviética com a importante contribuição de Luikov [4, 5]. Luikov [4], usando a termodinâmica dos processos irreversíveis obteve um sistema acoplado de equações diferenciais parciais para a transferência de calor e massa em corpos porosos. Adotando a teoria desenvolvida ao longo da primeira linha e utilizando as equações da energia térmica e as leis de Darcy e Fick, Philip e De Vries [6] e De Vries [7] ampliaram os tratamentos anteriores do problema da transferência de umidade incluindo o efeito térmico e desenvolveram um conjunto de equações governantes, apesar de um trabalho semelhante ter sido desenvolvido anteriormente por Luikov [4, 5] na Rússia.

O desenvolvimento das equações transientes descrevendo a transferência de calor e massa em meios porosos saturados e não saturados de umidade, aqui exposto, é baseado nas teorias desenvolvidas por Luikov [5], por Philip e De Vries [6] e De Vries [7].

Numa primeira etapa os meios porosos são caracterizados, assim como os mecanismos de migração de umidade nos mesmos. Apresenta-se o fenômeno da capilaridade, onde se define o potencial capilar ou de sucção, importante para a transferência de líquido.

Numa segunda etapa, escreve-se as equações de conservação de massa e energia, admitindo-se que não haja alterações do estado químico no interior do material poroso.

Finalmente apresenta-se o sistema de equações para a transferência simultânea de líquido e vapor.

## 2.2 - Meios Porosos

Constituem-se por um esqueleto de material sólido, de uma fase líquida e de uma fase gasosa, formando o todo um meio polifásico. A fase líquida contém água, materiais solúveis e partículas sólidas do esqueleto dispersas. A fase gasosa contém ar seco, vapor d'água e também partículas do esqueleto formando uma suspensão. Cada fase é considerada como uma mistura homogênea. Entre as fases há a interface, onde ocorrem as interações entre as mesmas. O meio intersticial é, portanto, uma mistura heterogênea das fases homogêneas líquida e gasosa.

Solos e componentes de edificações, tais como as paredes e a cobertura são exemplos de meios porosos de importância tecnológica.

Num estado de não saturação os vazios estão parcialmente preenchidos com água, contendo ar. Processos de evaporação ou condensação ocorrem na interface entre a água e o ar de maneira que a fase gasosa é constituída por uma mistura do ar com o vapor d'água. Essa mistura pode migrar em função de forças externas associadas a uma diferença de pressão. O vapor também poderá se mover relativamente ao ar por difusão, das regiões onde a sua pressão parcial é mais alta para aquelas regiões onde a pressão é mais baixa. A pressão parcial de vapor na interface do líquido é dependente do conteúdo de umidade e da temperatura (enquanto que a pressão de saturação é uma função da temperatura da água, apenas).

A migração do líquido é causada por forças externas impostas por diferenças de pressão, gravidade e por forças internas, como aquelas associadas ao fenômeno da capilaridade, forças intermoleculares e osmóticas.

Num estado de saturação os vazios estão quase totalmente preenchidos por água. Os processos de evaporação ou condensação ocorrem somente nas superfícies externas do corpo poroso. Internamente há apenas migração de líquido, essencialmente, por capilaridade, Fig. 1.

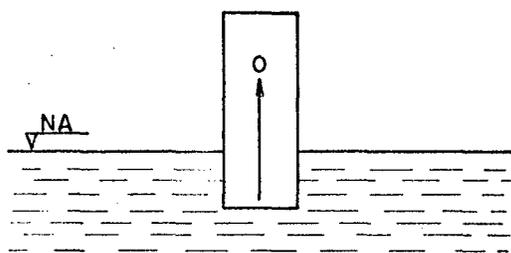


Fig. 1 - Corpo poroso saturado de umidade, ascensão do líquido por efeito da capilaridade

À ação das forças capilares que possibilitam a migração de líquido no interior do material superpõe-se em geral a ação da gravidade e da pressão hidrostática como é o caso para as paredes externas de edificações, Fig. 2.

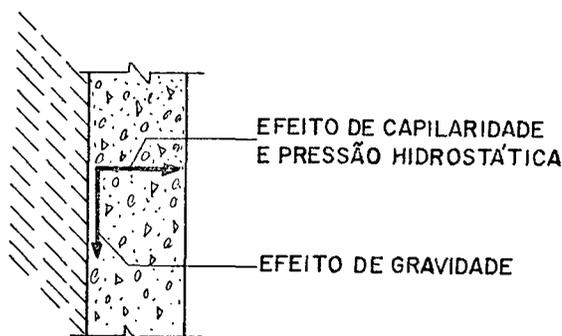


Fig. 2 - Parede de edificação sujeita a precipitações pluviométricas. Migração do líquido por efeito da capilaridade, pressão hidrostática e gravidade

Os mecanismos de migração de umidade nos meios porosos são influenciados pela estrutura do sistema poroso [14, 15]. A teoria da difusão molecular é importante para descrever a transferência de massa em sólidos relativamente homogêneos, tais como os sólidos orgânicos fibrosos e as substâncias gelatinosas. No entanto, nos sólidos granulados ou nas substâncias que têm uma estrutura com poros abertos a teoria do fluxo por capilaridade é a mais indicada para descrever a transferência de massa.

### 2.3 - O Fenômeno da Capilaridade

Nos meios porosos úmidos ou nas substâncias que têm uma estrutura com poros abertos, as teorias da difusão molecular são inapropriadas como formas de abordagem para os mecanismos de migração de líquido. Nesses casos, o movimento do líquido dentro do sólido é consequência das forças resultantes das diferenças entre a pressão hidrostática e os efeitos da tensão superficial. A tensão superficial provoca uma pressão sob uma superfície líquida encurvada que é diferente da pressão existente sob uma superfície plana [14].

Dessa forma, quando se insere um pequeno tubo num líquido, conforme a Fig.3, a ascensão do líquido no tubo pode ser determinada mediante um balanço de forças no plano AA'.

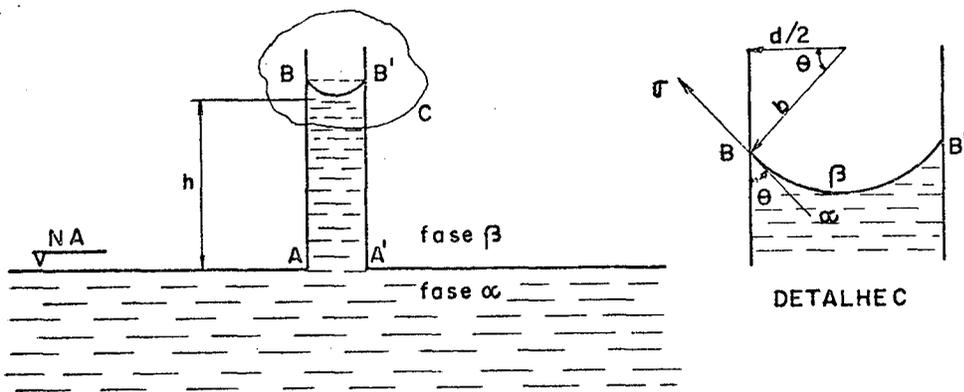


Fig. 3 - Efeito da capilaridade

Na figura,  $h$  é a ascensão do líquido,  $d$  é o diâmetro do tubo,  $b$  é o raio do menisco e  $\theta$  o ângulo de contato.

Para que haja equilíbrio ao nível do plano BB', Fig.3, pode-se mostrar que [4, 16],

$$p^\beta - p^\alpha = \frac{2 \sigma_{\alpha\beta}}{b}, \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_{\alpha\beta}$  é a tensão superficial,  $b$  o raio do menisco e  $(p^\beta - p^\alpha)$  é a redução da pressão provocada pelos efeitos da tensão superficial. Observa-se que quando  $\sigma_{\alpha\beta}$  tende a zero ou o diâmetro do tubo tende

ao infinito, Eq.(2.1), a redução de pressão tende a zero.

Da mesma forma, para que haja equilíbrio hidrostático ao nível do plano AA', Fig.3, tem-se:

$$p^0 = p^\alpha + \rho^\alpha gh = p^\beta + \rho^\beta gh, \quad (2.2)$$

resultando em,

$$p^\beta - p^\alpha = (\rho^\alpha - \rho^\beta) gh, \quad (2.3)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $g$  a aceleração da gravidade e  $p^0$  é a pressão de equilíbrio hidrostático.

Fazendo-se a soma das Eqs. (2.1) e (2.3), obtêm-se:

$$h = \frac{2 \sigma_{\alpha\beta}}{bg(\rho^\alpha - \rho^\beta)} = \frac{4 \sigma_{\alpha\beta} \cos \theta}{dg(\rho^\alpha - \rho^\beta)}, \quad (2.4)$$

o que mostra que a ascensão do líquido é proporcional à tensão superficial e ao coseno do ângulo de contato, e inversamente ao raio do tubo capilar. Na Eq. (2.4) tem-se  $b = \frac{d}{2}$  quando  $\theta = 0^\circ$ , ou seja, a superfície do líquido no tubo tem um raio de curvatura igual ao raio do tubo somente no caso em que o líquido molha completamente o tubo e o ângulo de contato na parede do tubo é igual a zero.

A pressão capilar  $p^c$  é definida como sendo [16],

$$p^c = p^\beta - p^\alpha = - \frac{4 \sigma_{\alpha\beta} \cos \theta}{d}. \quad (2.5)$$

Definindo-se um potencial  $\Psi$ , como

$$\Psi = - \frac{(p^\beta - p^\alpha)}{g(\rho^\alpha - \rho^\beta)} = - \frac{p^c}{g(\rho^\alpha - \rho^\beta)}, \quad (2.6)$$

é fácil mostrar que  $\Psi = -h$ . Observa-se que se  $\rho^\alpha$  é muito maior que  $\rho^\beta$  tem-se:

$$h = \frac{4 \sigma_l \cos \theta}{dg\rho_l}, \quad (2.7)$$

e,

$$\psi = - \frac{4 \sigma_{\ell} \cos \theta}{d g \rho_{\ell}}, \quad (2.8)$$

onde  $\rho_{\ell}$  é a massa específica do líquido e  $\sigma_{\ell}$  é a tensão superficial do líquido ( $\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\ell}$ ).

O potencial capilar ou de sucção  $\psi$  é proporcional à tensão superficial e ao coseno do ângulo de contato e inversamente proporcional ao raio do capilar. É o potencial das forças que surgem das interações locais entre o líquido e a matriz sólida. É um potencial negativo que se associa à capacidade do material poroso em deslocar líquido. Cresce negativamente quando o conteúdo de umidade no material decresce, chegando a valores infinitamente grandes quando o material está seco. Tende ao valor zero à medida que o material fica saturado de umidade.

#### 2.4 - Conceitos Básicos

No desenvolvimento das equações de transferência de massa e calor nos meios porosos são utilizadas certas denotações e definições.

A umidade na forma de vapor é denotada pelo sub-índice  $v$ , na forma de líquido pelo sub-índice  $\ell$ , o ar pelo sub-índice  $a$  e a matriz sólida por  $o$ . Não se considera aqui a umidade na fase sólida (gelo), ainda que seja importante em alguns casos envolvendo paredes de sistemas de refrigeração.

A porosidade  $P$  é definida como sendo a razão entre o volume de vazios e o volume total do corpo poroso; o grau de saturação  $s$  como sendo a razão entre o volume de líquido e o volume de vazios.

A concentração volumétrica da substância intersticial  $i$ ,  $\omega_i$ , é definida como sendo a massa,  $m_i$ , da referida substância por unidade de volume,  $V$ , do corpo poroso, que também pode ser expressa em termos da massa específica da substância,  $\rho_i$ , e da porosidade do meio,  $P$ ,

$$\omega_i = \frac{m_i}{V} = \rho_i P s_i, \quad (2.9)$$

onde  $V$  é o volume do corpo poroso,  $m_i$  é a massa do componente  $i$  e  $s_i$  o grau de saturação em componente  $i$ .

Entretanto, na maioria dos casos, em lugar da concentração volumétrica da substância intersticial  $i$ , o conteúdo de umidade ou concentração mássica  $u_i$  é usada, onde  $u_i$  é a relação entre a massa da substância intersticial  $i$  e a massa da matriz sólida,

$$u_i = \frac{m_i}{m_0} = \frac{\omega_i}{\rho_0}, \quad (2.10)$$

onde  $\rho_0$  é a massa específica da matriz sólida.

O conteúdo de umidade num meio poroso,  $u$ , é igual a soma dos conteúdos de umidade das substâncias intersticiais nas diferentes fases:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i, \quad (i \rightarrow v, l, a) \quad (2.11)$$

onde  $u_i$  é o conteúdo de umidade da substância intersticial  $i$ .

## 2.5 - Equação de Conservação da Massa

A conservação da massa para o componente  $i$  pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = - \nabla \cdot (\underline{j}_{i,c} + \underline{j}_{i,d}) + I_i, \quad (2.12)$$

onde  $\underline{j}_{i,c}$  é a densidade de fluxo convectivo,  $\underline{j}_{i,d}$  a densidade de fluxo difusivo e  $I_i$  constitui o termo fonte (ou sumidouro) da  $i$ -ésima substância, associado às mudanças de fase [5].

Usando o conteúdo de umidade relativo ao componente  $i$ ,  $u_i = \frac{\omega_i}{\rho_0}$ , a equação da conservação da massa fica sendo,

$$\frac{\partial(\rho_o u_i)}{\partial t} = - \nabla \cdot \underline{j}_i + I_i , \quad (2.13)$$

onde  $\underline{j}_i = \underline{j}_{i,c} + \underline{j}_{i,d}$ . Somando a Eq. (2.13) para todos os valores de  $(i \rightarrow v, \ell, a)$ , obtêm-se a equação de transferência da massa num meio poroso,

$$\frac{\partial(\rho_o u)}{\partial t} = - \nabla \cdot \sum_{i=1}^3 \underline{j}_i + \sum_{i=1}^3 I_i \quad (2.14)$$

O termo fonte  $I_a$  é nulo ( $I_a = 0$ ), visto que com o ar seco, considerando-o um gás inerte, não ocorrem alterações de estado físico ou químico. Por outro lado, as concentrações mássicas do ar e do vapor nos poros são desprezáveis em relação a do líquido. Desse modo,

$$\frac{\partial(\rho_o u_v)}{\partial t} = - \nabla \cdot \underline{j}_v + I_v = 0, \quad (2.15)$$

resultando,

$$I_v = \nabla \cdot \underline{j}_v \quad (2.16)$$

Como não se está considerando a umidade no estado sólido ( $\omega_{gelo} = 0$ ), tem-se ainda,

$$I_\ell = - I_v \quad (2.17)$$

Sendo  $I_a = 0$  e  $I_\ell = -I_v$ , a soma de todas as fontes (ou sumidouros) é, portanto nula,

$$\sum_{i=1}^3 I_i = 0 \quad (2.18)$$

A Eq. (2.14) resulta portanto com a forma:

$$\frac{\partial(\rho_0 u)}{\partial t} = -\nabla \cdot \sum_{i=1}^3 \underline{j}_i \quad (2.19)$$

### 2.5.1 - Migração de Líquido em Meios Porosos

Considera-se que a migração de líquido ocorre devido a influência da gravidade e de forças capilares, essencialmente.

A equação de conservação da massa para a umidade na fase líquida é,

$$\frac{\partial(\rho_0 u_\ell)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}_\ell + I_\ell \quad (2.20)$$

O termo fonte  $I_\ell$  pode estar associado à condensação de vapor ou à evaporação de líquido.

A densidade de fluxo de líquido,  $\underline{j}_\ell$ , é dada pela lei de Darcy-Buckingham [5, 6, 17]:

$$\underline{j}_\ell = -\rho_\ell k \nabla \phi \quad (2.21)$$

onde  $\rho_\ell$  é a massa específica do líquido, e  $k$  a condutibilidade hidráulica. O fator  $k$  depende do conteúdo de líquido  $u_\ell$ , da distribuição do mesmo no interior do meio poroso e também da temperatura,  $k = k(u_\ell, T)$ .

O potencial para a migração de umidade,  $\phi$ , pode ser escrito como sendo,

$$\phi = \psi - z \quad (2.22)$$

onde  $\psi$  é o potencial capilar ou de sucção, e  $z$  o potencial gravitacional (considerado positivo para baixo). O potencial  $\psi$  está associado às forças que surgem das interações locais entre o líquido e a matriz sólida [18]. Como visto na seção 2.3,  $\psi$  é um potencial

negativo que se associa à capacidade de sucção que possui o meio poroso, dependendo do conteúdo de umidade na fase líquida  $u_\ell$ , da distribuição da mesma no meio e também da temperatura,  $\Psi = \Psi(u_\ell, T)$ . Quando forças capilares são consideradas,  $\Psi$  é proporcional à tensão superficial no líquido e ao coseno do ângulo de contato entre o líquido e a matriz sólida, Eq. (2.8).

A Fig. 4 abaixo apresenta uma curva experimental que mostra a variação do potencial capilar  $\Psi$  em relação ao conteúdo da umidade num meio poroso, [18].

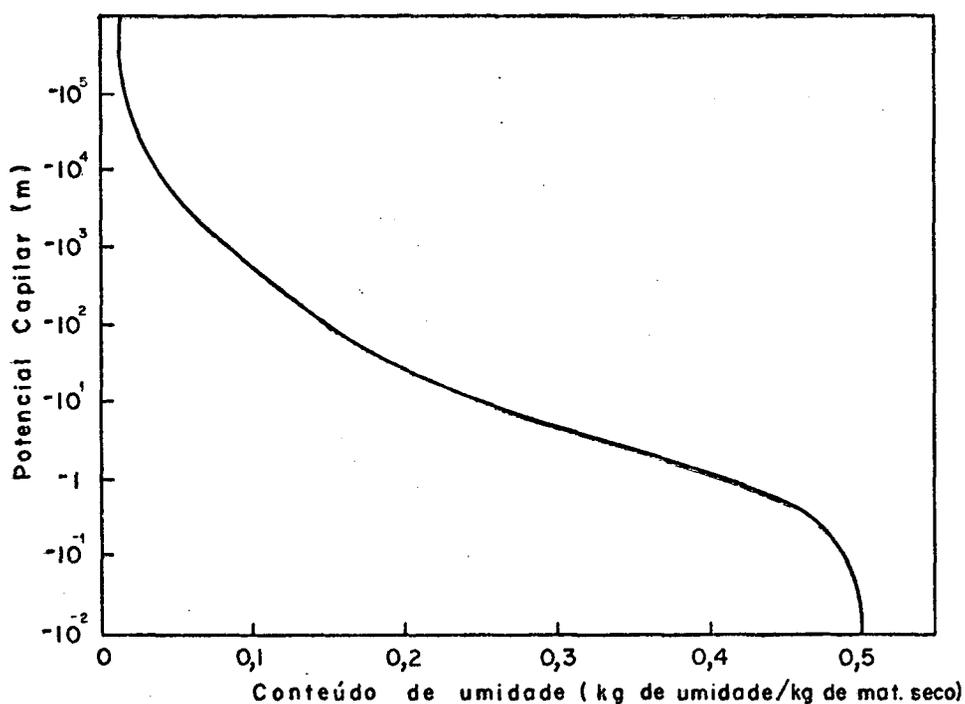


Fig.4 - Potencial capilar,  $\Psi$ , em função do conteúdo de umidade,  $u$ , para a argila à  $20^\circ\text{C}$  [18].

O potencial  $\Psi$  tende ao valor zero numa condição de saturação do meio e decresce com o conteúdo de umidade para valores negativos quando o grau de saturação diminui, divergindo para valores negativos muito grandes quando o meio está praticamente seco.

Considerando  $u_\ell$  e  $T$  como duas variáveis independentes, obtêm-se:

$$\underline{j}_\ell = - \rho_\ell k \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u_\ell} \right)_T \nabla u_\ell - \rho_\ell k \left( \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right)_{u_\ell} \nabla T + \rho k \underline{\kappa}, \quad (2.23)$$

onde  $\underline{\kappa}$  é um vetor unitário na direção positiva de  $z$ . Observe-se que a massa específica do líquido  $\rho_\ell$  é considerada constante. A Eq. (2.23) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\underline{j}_\ell = - \rho_0 a_{m\ell} \nabla u_\ell - \rho_0 a_{m\ell} \delta_\ell \nabla T + \rho_\ell k \underline{\kappa} \quad (2.24)$$

com

$$a_{m\ell} = \frac{\rho_\ell}{\rho_0} k \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u_\ell} \right)_T, \quad (2.25)$$

$$\delta_\ell = \frac{(\partial \Psi / \partial T)_{u_\ell}}{(\partial \Psi / \partial u_\ell)_T}$$

onde  $a_{m\ell}$  é definido como o coeficiente de difusão mássica do líquido associado a um gradiente do conteúdo de umidade e  $a_{m\ell} \delta_\ell$  como o coeficiente de difusão térmica do líquido associado a um gradiente de temperatura;  $\delta_\ell$  é definido como o fator de difusão térmica associado à transferência de líquido. Os coeficientes  $a_{m\ell}$  e  $a_{m\ell} \delta_\ell$  sendo dependentes do potencial capilar e da condutibilidade hidráulica são também funções do conteúdo de umidade e da temperatura.

Os coeficientes, Eqs. (2.25), podem ser determinados se  $k$  e a relação funcional  $\Psi = \Psi(u_\ell, T)$  forem conhecidas [4, 6, 21, 22] (seção 2.7).

Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.20), obtêm-se a equação diferencial para a migração do líquido,

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial t} = \nabla \cdot [a_{m\ell} \nabla u_\ell + a_{m\ell} \delta_\ell \nabla T] - \frac{\rho_\ell}{\rho_0} \frac{dk}{du_\ell} \cdot \frac{du_\ell}{dz} + I_\ell \quad (2.26)$$

O primeiro termo do membro à direita na Eq. (2.26) representa a migração por capilaridade e o segundo termo a migração por ação da gravidade.

### 2.5.2 - Migração de Vapor em Meios Porosos

O vapor em meios porosos migra por difusão, principalmente. Sob condições de pressão total constante e uniforme,  $p$ , a densidade de fluxo de vapor,  $\underline{j}_v$ , num meio poroso não saturado de umidade é dada por uma modificação da Lei de Fick [6, 17], escrita de modo a levar em conta a redução da seção de passagem de vapor devido à presença de líquido e a tortuosidade do corpo poroso,

$$\underline{j}_v = - f D_v \frac{p}{p-p_v} \frac{M}{RT} \nabla p_v, \quad (2.27)$$

onde  $D_v$  é o coeficiente de difusão do vapor d'água no ar,  $p_v$  é a pressão parcial do vapor,  $M$  é o peso molecular da água,  $R$  é a constante universal dos gases,  $T$  é a temperatura e  $f$  é um coeficiente empírico adimensional que representa uma resistência à difusão do vapor [4, 6, 17].

Luikov [4, 16] define  $\frac{1}{f}$  como a resistência à difusão do vapor dentro do meio poroso, relacionada com a redução da seção de passagem de vapor devido à presença de líquido. Segundo Luikov o coeficiente  $f$  pode ser dado por:

$$f = \int_{r_1}^{r_2} h(r) dr, \quad (2.28)$$

onde  $h(r)$  representa a distribuição dos poros em relação ao raio dos mesmos, o limite superior  $r_2$  corresponde ao raio máximo dos poros que está livre de líquido e  $r_1$  corresponde ao raio mínimo dos poros abertos. Philip e De Vries [6] sugerem uma expressão mais simples para  $f$ .

O movimento de migração de umidade no meio poroso é considerado ser suficientemente lento, tal que, na prática, a temperatura do líquido é igual à temperatura das paredes dos poros. O vapor nos poros está em equilíbrio termodinâmico com o líquido; portanto sua pressão parcial num estado de não saturação é determinada em função da temperatura e do conteúdo de umidade na fase líquida [4, 14],

$$p_v = p_v(u_\ell, T) . \quad (2.29)$$

Combinando as Eqs. (2.27) e (2.29) obtém-se:

$$\underline{j}_v = - f D_v \frac{p}{p-p_v} \left( \frac{M}{RT} \frac{\partial p_v}{\partial T} \right)_{u_\ell} \nabla T - f D_v \frac{p}{p-p_v} \frac{M}{RT} \left( \frac{\partial p_v}{\partial u_\ell} \right)_T \nabla u_\ell \quad (2.30)$$

A Eq. (2.30) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\underline{j}_v = \rho_o a_{mv} \nabla u_\ell - \rho_o a_{mv} \delta_v \nabla T, \quad (2.31)$$

com,

$$a_{mv} = \frac{f}{\rho_o} D_v \frac{p}{p-p_v} \left( \frac{M}{RT} \frac{\partial p_v}{\partial u_\ell} \right)_T , \quad (2.32)$$

$$\delta_v = \frac{(\partial p_v / \partial T)_{u_\ell}}{(\partial p_v / \partial u_\ell)_T}$$

onde  $a_{mv}$  é denominado o coeficiente de difusão mássica do vapor associado a um gradiente do conteúdo de umidade,  $a_{mv} \delta_v$  é o coeficiente de difusão térmica do vapor associado a um gradiente de temperatura e  $\delta_v$  é o fator de difusão térmica associado à transferência de vapor. Os coeficientes  $a_{mv}$  e  $\delta_v$ , Eqs. (2.32), são também função de  $u_\ell$  e  $T$  e assim como  $a_{m\ell}$  e  $\delta_\ell$ , Eqs. (2.25), podem ser determinadas se as relações funcionais  $\Psi = \Psi(u_\ell, T)$  e  $p_v = p_v(u_\ell, T)$  forem conhecidas [4, 6, 21, 22] (seção 2.7).

A migração do vapor fica assim, condicionada aos gradientes dos potenciais representados pela temperatura e pelo conteúdo de líquido, em meios porosos não saturados de umidade.

Em meios porosos saturados de umidade, a pressão parcial do vapor é a pressão de saturação de vapor  $p_S$  [4, 14], que é uma função simples da temperatura, podendo ser obtida da equação de Clapeyron [19],

$$p_v = p_S = p_S(T) \quad (2.33)$$

tem-se então,

$$\nabla p_v = \frac{\partial p_S}{\partial T} \nabla T, \quad (2.34)$$

onde  $\nabla T$  é o gradiente de temperatura no meio. Substituindo na Eq. (2.27) obtém-se a densidade de fluxo de vapor para um meio saturado de umidade,

$$j_v = - f D_v \frac{p}{p-p_S} \frac{M}{RT} \frac{\partial p_S}{\partial T} \nabla T \quad (2.35)$$

O gradiente de temperatura provoca o fluxo de vapor. De acordo com a concepção de Philip e de Vries [6] há um processo de evaporação em pontos onde a temperatura é alta e de condensação em pontos onde a temperatura é baixa, ocorrendo desse modo a transferência simultânea de calor sensível e calor latente.

A densidade de fluxo de calor latente por difusão de vapor, pode ser dada, denominando-se o calor latente de vaporização por  $r$ , por [17]:

$$r \cdot j_v = - r f D_v \frac{p}{p-p_S} \frac{M}{RT} \frac{\partial p_S}{\partial T} \nabla T, \quad (2.36)$$

e a densidade de fluxo de calor total em meios porosos saturados fica sendo,

$$j_q = - \lambda_q \nabla T + r \cdot j_v = - (\lambda_q + \lambda_s) \nabla T \quad (2.37)$$

com,

$$\lambda_s = r f D_v \frac{p}{p-p_s} \frac{M}{RT} \frac{\partial p_s}{\partial T}, \quad (2.38)$$

onde  $\lambda_s$  é a parcela acrescida à condutibilidade térmica como contribuição da difusão do vapor. Desse modo, quando a migração de vapor associa-se ao processo de condução de calor, aumenta-se a transferência de calor. Observe-se que  $\lambda_q$  é a condutibilidade térmica associada a uma situação onde não há qualquer forma de migração de umidade,  $\lambda_q = \lambda_q (\lambda_{\text{mat.seco}}, \lambda_{\text{água}}, \lambda_{\text{ar}})$ .

### 2.5.3 - Uma Relação Funcional para $P_v$

Admite-se, como se assinalou anteriormente, que o meio poroso está em equilíbrio termodinâmico.

A fase gasosa,  $\beta$ , que contém uma mistura de ar e vapor está toda ela em equilíbrio numa mesma temperatura e pressão, Fig.5.

Considera-se, da mesma forma, que toda a fase líquida está em equilíbrio numa mesma temperatura e pressão, Fig. 5.

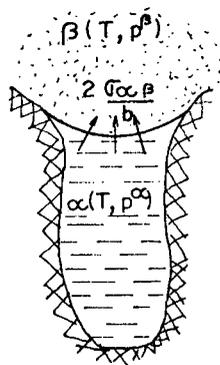


Fig. 5 - Seção transversal de um poro.

Na condição de equilíbrio entre as fases líquida e gasosa tem-se uma igualdade dos potenciais químicos das mesmas [20],

$$\mu_{\beta} = \mu_{\alpha} \quad (2-39)$$

Da relação de Gibbs-Duhem [19], obtém-se:

$$v^{\beta} dp^{\beta} - v^{\alpha} dp^{\alpha} = r \frac{dT}{T}, \quad (2.40)$$

onde  $v^{\beta}$  e  $v^{\alpha}$  são, respectivamente, os volumes molares das fases gasosa e líquida,  $p^{\beta}$  e  $p^{\alpha}$  são, respectivamente, as pressões das fases gasosa e líquida,  $r$  é o calor latente de vaporização, e  $T$  a temperatura de equilíbrio.

Considerando-se a pressão de saturação do vapor,  $p_S$ , como sendo a pressão de equilíbrio, obtém-se:

$$(v_S^{\beta} - v_S^{\alpha}) dp_S = \frac{rdT}{T}, \quad (2.41)$$

onde  $v_S^{\beta}$  e  $v_S^{\alpha}$  são, respectivamente, os volumes molares das fases gasosa e líquida na pressão de saturação  $p_S$ . Combinando as Eqs. (2.40) e (2.41), resulta,

$$v^{\beta} dp^{\beta} - v^{\alpha} dp^{\alpha} = (v_S^{\beta} - v_S^{\alpha}) dp_S \quad (2.42)$$

A fase  $\beta$  corresponde à fase gasosa (ar e vapor d'água) e  $p^{\beta}$  é igual à pressão do vapor,  $p_V$ . A fase  $\alpha$  corresponde à fase líquida (água) e  $p^{\alpha}$  é a pressão líquida,  $p_{\ell}$ . Desse modo a Eq. (2.42) fica com a forma,

$$v_V dp_V - v_{\ell} dp_{\ell} = v_{VS} dp_S - v_{\ell S} dp_S, \quad (2.43)$$

onde  $v_v$  é o volume molar do vapor na pressão  $p_v$  e  $v_{vS}$  é o volume molar do vapor na pressão  $p_S$ ,  $v_\ell$  e  $v_{\ell S}$  são os volumes molares de líquido nas pressões  $p_\ell$  e  $p_S$ , respectivamente.

Admitindo-se que o vapor se comporte como um gás perfeito o seu volume molar é dado por:

$$v_v = \frac{RT}{p_v}, \quad (2.44)$$

e,

$$v_{vS} = \frac{RT}{p_S},$$

onde  $R$  é a constante universal dos gases e  $T$  é a temperatura de equilíbrio. Substituindo-se a Eq. (2.44) na Eq. (2.43) e admitindo que o volume molar do líquido  $v_\ell$  é constante e igual a  $v_{\ell S}$ , obtêm-se:

$$RT \frac{dp_v}{p_v} - RT \frac{dp_S}{p_S} = v_\ell (dp_\ell - dp_S) \quad (2.45)$$

Como  $T$  e  $v_\ell$  são constantes na condição de equilíbrio, é possível fazer,

$$d \left( \frac{RT}{v_\ell} \ln \left( \frac{p_v}{p_S} \right) \right) = d (p_\ell - p_S), \quad (2.46)$$

e integrando ambos os membros da Eq. (2.46) acima obtêm-se:

$$p_\ell - p_S(T) = \frac{RT \rho_\ell}{M} \ln \left( \frac{p_v}{p_S} \right), \quad (2.47)$$

onde  $v_\ell = \frac{M}{\rho_\ell}$ ,  $M$  é o peso molecular da água e  $\rho_\ell$  é massa específica. A Eq. (2.47) é apresentada por Claesson [20] e dá a condição para o equilíbrio entre a fase líquida e a fase gasosa no interior dos poros.

Na seção 2.3 verificou-se que a diferença entre a pressão da fase gasosa,  $p^\beta$ , e a pressão da fase líquida,  $p^\alpha$ , no equilíbrio é balanceada pela força  $\frac{2 \sigma_{\alpha\beta}}{b}$  associada à tensão superficial exis-

tente na interface líquido-vapor e ao raio da curvatura da superfície na interface. Na Fig. 5 essa força de equilíbrio é esquematizada.

A equação para o balanço num ponto sobre a superfície é, portanto (seção 2.3),

$$p^\beta - p^\alpha = \frac{2 \sigma_{\alpha\beta}}{b} . \quad (2.1)$$

Definiu-se também, na seção 2.3, o potencial capilar  $\Psi$  em função dessa diferença de pressão,

$$\Psi = \frac{p^\alpha - p^\beta}{g \rho_\ell} . \quad (2.6)$$

A pressão da fase gasosa,  $p^\beta$  corresponde à pressão do gás acrescida da pressão do vapor e a pressão da fase líquida,  $p^\alpha$ , corresponde à pressão do líquido. Desse modo,

$$\Psi = \frac{p_\ell - (p_g + p_v)}{\rho_\ell g} . \quad (2.48)$$

Fazendo-se a seguinte manipulação,

$$p_\ell - p_S + (p_g + p_v) - (p_g + p_v) = (p_\ell - p_v - p_g) + (p_g - p_S + p_v) \quad (2.49)$$

e combinando com a Eq. (2.47), obtêm-se:

$$p_v = p_S(T) \exp\left(\frac{Mg\Psi}{RT}\right) \exp\left(\frac{Mp_g}{\rho_\ell RT}\right) . \quad (2.50)$$

A Eq. (2.50) é a expressão para a pressão do vapor quando se considera uma mistura de ar e vapor d'água em equilíbrio com o líquido. De Vries [17] apresenta uma expressão mais simplificada, considerando somente vapor em equilíbrio com o líquido,

$$p_v = p_S(T) \exp\left(\frac{Mg\Psi}{RT}\right) . \quad (2.51)$$

Com as expressões para  $p_v$  em função do potencial capilar  $\Psi$ , Eqs. (2.50) ou (2.51), é possível determinar  $a_{mv}$ , Eq. (2.32), uma vez que se conheça a relação funcional  $\Psi = \Psi(u_\ell, T)$ .

## 2.6 - Equação da Conservação de Energia

A equação diferencial para a temperatura,  $T$ , é obtida da equação de conservação da energia, considerando-se a pressão constante, a dissipação viscosa desprezível, ausência de reações químicas e velocidade macroscópica pequena [4],

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o h_o + \rho_\ell u_\ell h_\ell + \rho_v u_v h_v + \rho_o u_a h_a) = - \nabla \cdot (j_q + h_\ell j_\ell + h_v j_v + h_a j_a), \quad (2.52)$$

onde  $h_i$  ( $i \rightarrow \ell, v, a$ ) é a entalpia por unidade de massa do componente  $i$  e  $h_o$  a entalpia específica da matriz sólida.

Substituindo a expressão do calor específico isobárico do componente  $i$ , definido por:

$$C_i = \left( \frac{\partial h_i}{\partial t} \right)_p, \quad (2.53)$$

na Eq. (2.52), obtém-se:

$$(C_o \rho_o + \sum C_i \rho_o u_i) \frac{\partial T}{\partial t} + \sum h_i \frac{\partial (\rho_o u_i)}{\partial t} = - \nabla \cdot j_q - \sum j_i C_i \nabla T - \sum h_i \nabla \cdot j_i; \quad (i \rightarrow \ell, v, a). \quad (2.54)$$

Multiplicando a equação de conservação do componente  $i$ , Eq. (2.13), por  $h_i$  e somando para todos os valores de  $i$  tem-se:

$$\sum h_i \frac{\partial (\rho_o u_i)}{\partial t} = - \sum h_i \nabla \cdot j_i + \sum h_i I_i; \quad (i \rightarrow \ell, v, a). \quad (2.55)$$

Combinando as Eqs. (2.54) e (2.55) resulta:

$$C\rho_o \frac{\partial T}{\partial t} = - \nabla \cdot \underline{j}_q - \Sigma h_i I_i - \Sigma C_i \underline{j}_i \nabla T; \quad (i \rightarrow \ell, v, a) \quad (2.56)$$

onde

$$C = C_o + \Sigma C_i u_i, \quad (2.57)$$

definido como o calor específico equivalente. As fontes de calor  $\Sigma h_i I_i$  estão associadas aos processos de mudança de fase, condensação e evaporação ( $I_a = 0$ ). Dessa forma o somatório das fontes fica reduzido somente ao vapor e líquido,

$$\Sigma h_i I_i = h_\ell I_\ell + h_v I_v = (h_v - h_\ell) I_v, \quad (2.58)$$

pois  $I_\ell = - I_v$ , Eq. (2.17).

Nos meios porosos, o termo de natureza convectiva,  $\Sigma C_i \underline{j}_i \nabla T$ , é usualmente desprezível [4]. Dessa forma a Eq. (2.56) fica reduzida à seguinte expressão:

$$C\rho_o \frac{\partial T}{\partial t} = - \nabla \cdot \underline{j}_q - r I_v, \quad (2.59)$$

onde,  $r = h_v - h_\ell$ , é o calor latente de vaporização.

A parcela da transferência de calor ligada ao mecanismo de condução  $\underline{j}_q$ , num meio poroso, é descrita pela lei de Fourier,

$$\underline{j}_q = - \lambda_q \nabla T, \quad (2.60)$$

onde  $\lambda_q$  é a condutibilidade térmica associada a uma situação onde não ocorre migração de umidade. Em materiais porosos contendo umidade, no entanto, a esta condutibilidade é acrescida uma condutibilidade aparente associada aos processos de evaporação e condensação de umidade no interior do material, Eq. (2.37), seção 2.5. Esta condutibilidade aparente varia rapidamente, com a variação de temperatura no material [17].

A parcela da transferência de calor associada às mudanças de fase  $I_v$ , está associada à produção de vapor, conforme Eq. (2.15) e (2.16),

$$I_v = \nabla \cdot \underline{j}_v, \quad (2.16)$$

onde  $\underline{j}_v$  é a densidade de fluxo do vapor.

Combinando as Eqs. (2.16), (2.59) e (2.60) obtêm-se:

$$\rho_0 C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_q \nabla T) + r \rho_0 \nabla \cdot (a_{mv} \delta_v \nabla T) + r \rho_0 \nabla \cdot (a_{mv} \nabla u_\ell), \quad (2.61)$$

que é a equação final expressando a conservação da energia. A influência da difusão de vapor causada por um gradiente de temperatura é dada pelo segundo termo do membro à direita na Eq. (2.61). O primeiro termo é a condução de calor quando não se considera o fluxo de massa no interior do material. O último termo representa a parcela de difusão de vapor condicionada ao gradiente do conteúdo de umidade. Aplicando o argumento da seção 2.5 os dois primeiros termos do membro à direita na Eq. (2.61) podem ser substituídos por  $\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$ , onde  $\lambda = \lambda_q + \lambda_s$ ;  $\lambda_s$  tem o mesmo significado da seção 2.5 e  $\lambda$  é a condutibilidade do meio poroso incluindo o efeito da destilação do vapor, promovida pelos gradientes de temperatura.

## 2.7 - Migração Simultânea de Líquido e Vapor

Os mecanismos de transferência de líquido e vapor em meios porosos não saturados de umidade são descritos pela mesma lei, isto é, são dependentes dos gradientes do conteúdo de umidade na fase líquida,  $\nabla u_\ell$ , e da temperatura,  $\nabla T$ . Combinando as expressões das densidades de fluxo de líquido e vapor, Eqs. (2.24) e (2.31), obtêm-se:

$$\underline{j}_m = \underline{j}_\ell + \underline{j}_v = -\rho_0 a_m \nabla u_\ell - \rho_0 a_m \delta \nabla T + \rho_\ell k \underline{\kappa} \quad (2.62)$$

com,

$$a_m = a_{m\ell} + a_{mv} ,$$

e,

(2.63)

$$\delta = \frac{a_{mv} \delta_v + a_{m\ell} \delta_\ell}{a_m}$$

onde  $j_m$  é a densidade de fluxo de massa total,  $a_m$  é o coeficiente associado a transferência simultânea de líquido e vapor no interior do meio poroso,  $a_m \delta$  é o coeficiente associado à transferência de massa no meio, promovida por um gradiente térmico e  $\delta$  é o fator de difusão térmica. Observe-se que os coeficientes da Eq. (2.62) são funções das variáveis  $u_\ell$  e  $T$ , Eqs. (2.25) e (2.32) e podem ser determinadas se  $k$  e a relação funcional  $\Psi = \Psi(u_\ell, T)$  forem conhecidas [4, 6, 21, 22].

A relação funcional,  $\Psi = \Psi(u_\ell, T)$  apresenta, no entanto, grandes dificuldades para a sua obtenção. Luikov [16] apresenta um método experimental para a determinação dessa relação funcional, medindo a pressão hidrostática necessária para remover a água contida no meio poroso, pela introdução no material de um outro líquido não miscível.

Da mesma forma, os coeficientes da transferência de massa, Eqs. (2.25), (2.32) e (2.63) são também usualmente obtidas através de métodos experimentais [4, 6, 21, 22]. Luikov [4] apresenta vários métodos experimentais para a determinação dos coeficientes  $a_m$  e  $\delta$ , Eq. (2.63), para meios porosos, e mais recentemente tem-se o método experimental de Shah et al. [22].

Resultados para todos os coeficientes, Eqs. (2.25), (2.32) e (2.63), em meios porosos, são apresentados por Philip e de Vries [6] com base nas relações funcionais  $\Psi = \Psi(u_\ell)$  e  $k = k(u_\ell)$  obtidas por Moore [23], e também por Jackson et al. [21].

Substituindo a Eq. (2.62) na equação de conservação da massa,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o u_\ell + \rho_o u_v) = - \nabla \cdot (\underline{j}_\ell + \underline{j}_v) , \quad (2.64)$$

e admitindo-se que a concentração mássica do vapor é muito pequena comparada à concentração do líquido, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o u_\ell) = \nabla \cdot (\rho_o a_m \nabla u_\ell + \rho_o a_m \delta \nabla T) - \rho_\ell \frac{\partial k}{\partial z} . \quad (2.65)$$

Para  $\rho_o$  constante,

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\ell = \nabla \cdot [a_m \nabla u_\ell + a_m \delta \nabla T] - \frac{\rho_\ell}{\rho_o} \frac{\partial k}{\partial z} , \quad (2.66)$$

que é a equação da conservação da massa para a migração simultânea de líquido e vapor.

A equação da conservação da energia para a transferência simultânea de líquido e vapor, de acordo com as Eqs. (2.56) e (2.58) é dado por:

$$C \rho_o \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_q \nabla T) - r I_v , \quad (2.67)$$

onde,  $I_v = -I_\ell$ , Eq. (2.17)

A fonte de líquido está associada à condensação de vapor, Eq. (2.17). A variação total do conteúdo de umidade na fase líquida,  $d(\rho_o u_\ell)$ , ocorre devido a transferência do líquido por capilaridade  $d_e(\rho_o u_\ell)$ , e por mudança de fase,  $d_i(\rho_o u_\ell)$ , [4],

$$d(\rho_o u_\ell) = d_e(\rho_o u_\ell) + d_i(\rho_o u_\ell) . \quad (2.68)$$

Definindo um coeficiente de mudança de fase  $\epsilon$ , através da relação [4],

$$\epsilon = \frac{d_i(\rho_o u_\ell)}{d(\rho_o u_\ell)} \quad , \quad (2.69)$$

que descreve a variação do conteúdo de umidade devido aos processos de mudança de fase em relação a variação total do conteúdo de umidade num dado ponto do corpo poroso, obtêm-se:

$$\frac{\partial(\rho_o u_\ell)}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} (\rho_o u_\ell) + \frac{\partial i}{\partial t} (\rho_o u_\ell) = \quad (2.70)$$

$$\frac{1}{1-\epsilon} \frac{\partial e}{\partial t} (\rho_o u_\ell) = - \frac{1}{1-\epsilon} \nabla \cdot \underline{j}_\ell \quad .$$

Das equações de conservação da massa para líquido e vapor,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o u_v) = - \nabla \cdot \underline{j}_v + I_v, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_o u_\ell) = - \nabla \cdot \underline{j}_\ell - \cdot \underline{j}_v \quad ,$$

obtêm-se:

$$\nabla \cdot \underline{j}_v = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o u_\ell) + (1-\epsilon) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o u_\ell) = - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o u_\ell) \quad . \quad (2.72)$$

Combinando as Eqs. (2.16), (2.67) e (2.72), resulta a seguinte expressão:

$$C_{\rho_o} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_q \nabla T) + r\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o u_\ell) \quad , \quad (2.73)$$

que é a equação final expressando a conservação da energia. O primeiro termo do membro à direita na Eq. (2.73) corresponde a condução de calor sem considerar fluxo de massa no interior do material e o segundo termo representa a influência da transferência de massa sobre a transferência de calor associada às mudanças de fase no

interior do material poroso.

O coeficiente de mudança de fase,  $\epsilon$ , varia de zero à unidade. Quando  $\epsilon=1$  a migração de umidade ocorre por processos de mudança de fase unicamente, não havendo migração de líquido por ação de forças capilares no interior do meio poroso. Por outro lado, quando  $\epsilon=0$  há migração apenas de líquido no interior do material por capilaridade, não ocorrendo mudanças de fase. As mudanças de fase ocorrem, nesse caso, apenas nas superfícies externas do corpo.

As Eqs. (2.66) e (2.73) formam o sistema de equações diferenciais com o qual se determina as distribuições de  $u_\ell$  e  $T$ , a partir de condições iniciais e de contorno apropriadas. Deve-se observar, no entanto, que todos os parâmetros dessas equações, tais como  $\lambda$ ,  $k$ ,  $a_m$ ,  $\delta$  e  $\epsilon$  são funções complicadas das variáveis  $T$  e especialmente de  $u_\ell$ .

## 2.8 - Conclusão

A exposição contida no presente capítulo desenvolveu-se sobre modelos que se baseiam no conceito do fluxo viscoso da fase líquida sob a influência da gravidade e capilaridade e no conceito do movimento do vapor por difusão, em meios porosos. Além disso, admitiu-se a existência de equilíbrio termodinâmico local entre as fases líquida e gasosa.

As equações são obtidas expressando-se os fluxos de umidade e calor como funções lineares dos gradientes do conteúdo de umidade,  $\nabla u$  e de temperatura,  $\nabla T$ . Os coeficientes presentes nestas equações, tais como  $\lambda$ ,  $k$ ,  $a_m$ ,  $\delta$  e  $\epsilon$  são funções de  $u_\ell$  e  $T$ .

Basicamente, a teoria descrita nesse capítulo se apoia sobre três relações funcionais expressando o potencial capilar  $\Psi$ , a condutibilidade hidráulica  $k$  e a condutibilidade térmica  $\lambda_q$  em termos do conteúdo de umidade na fase líquida,  $u_\ell$ , e da temperatura,  $T$ . Essas relações são de natureza bastante complicada, dificultando a obtenção dos coeficientes de transporte apropriados e, em consequência, o fechamento do sistema de equações que descrevem os processos de transferência simultânea de calor e umidade em meios porosos não saturados.



### 3.2 - Conjunto de Equações Governantes e Condições de Contorno

Seja uma região porosa, homogênea, plana de espessura  $L$ , com propriedades constantes. Admite-se que num instante  $t$ , tem-se a temperatura,  $T_0(t)$ , o conteúdo de umidade,  $u_0(t)$ , no contorno  $x=0$ , e a temperatura,  $T_L(t)$ , e o conteúdo  $u_L(t)$ , no contorno  $x=L$ . Também admite-se que no instante  $t=0$ , a temperatura e o conteúdo de umidade sejam constantes e iguais a  $T^0$  e  $u^0$  respectivamente.

Considera-se, na modelagem matemática aqui desenvolvida, que a variação real das propriedades seja pequena dentro da região de análise, o que permite linearizar o sistema de equações obtido na seção 2.7.

Em função da dependência das propriedades de transportes envolvidas, em relação ao conteúdo de umidade e à temperatura, a solução do sistema de equações acopladas e não lineares da seção 2.7 é bastante dificultada, sendo possível obtê-la somente para certos tipos de meios porosos e condições de contorno específicas.

A consideração acima citada têm sido utilizada como uma primeira aproximação [4, 5, 13, 14] em problemas envolvendo componentes porosos de edificações sem que os resultados sejam muito alterados [10]; possibilitando o uso de técnicas lineares de solução.

O sistema de equações diferenciais para a transferência unidimensional de calor e massa e as condições de contorno auxiliares, descrevendo as condições estabelecidas acima, de acordo com a seção (2.7), são:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_q \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\epsilon r}{C_q} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_m \delta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

$$T(x=0, t) = T_0(t) \quad (3.3)$$

$$T(x=L, t) = T_L(t) \quad (3.4)$$

$$u(x=0, t) = u_0(t) \quad (3.5)$$

$$u(x=L, t) = u_L(t) \quad (3.6)$$

$$T(x, t=0) = T^0 \quad (3.7)$$

$$u(x, t=0) = u^0 \quad (3.8)$$

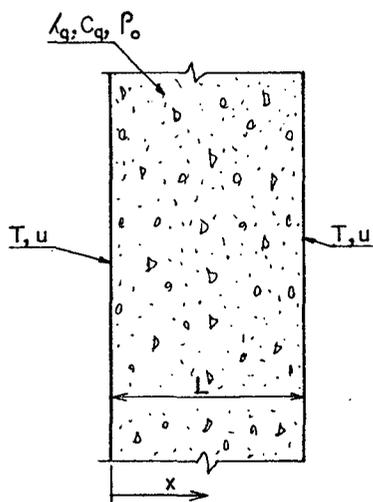


Fig. 6 - Geometria do Problema

Com a finalidade de transformar as condições iniciais, Eqs. (3.7) e (3.8), em condições homogêneas, faz-se necessária uma mudança de variável.

Definindo

$$\psi = T - T^0, \quad (3.9)$$

$$\phi = u - u^0,$$

às Eqs. (3.1) - (3.8), tornam-se:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a_q \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\epsilon r}{C_q} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + a_m \delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \psi(x=0, t) &= T_0(t) - T^0 = \psi_0(t) \\ \psi(x=L, t) &= T_L(t) - T^0 = \psi_L(t) \\ \phi(x=0, t) &= u_0(t) - u^0 = \phi_0(t) \\ \phi(x=L, t) &= u_L(t) - u^0 = \phi_L(t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, t=0) &= T^0 - T^0 = 0 \\ \phi(x, t=0) &= u^0 - u^0 = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

A solução do problema consiste em resolver-se as Eqs. (3.10) e (3.11) sujeitas às condições auxiliares (3.12) e (3.13). Para tal, há necessidade de transformar as equações, o que é feito a seguir.

### 3.3 - Transformação das Equações - Transformada de Laplace

Aplicando a transformada de Laplace [25], para a variável  $t$ , nas equações governantes e nas condições de contorno auxiliares, Eqs. (3.9) - (3.13), obtém-se:

$$p \bar{\psi}(x,p) = a_q \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2}(x,p) + \frac{\epsilon r p}{C_q} \bar{\phi}(x,p), \quad (3.14a)$$

$$p \bar{\phi}(x,p) = a_m \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2}(x,p) + a_m \delta \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2}(x,p), \quad (3.14b)$$

$$\bar{\psi}(x=0,p) = \int_0^\infty (T_0(t) - T^0) e^{-pt} dt = \bar{\psi}_0(p),$$

$$\bar{\psi}(x=L,p) = \int_0^\infty (T_L(t) - T^0) e^{-pt} dt = \bar{\psi}_L(p), \quad (3.15)$$

$$\bar{\phi}(x=0,p) = \int_0^\infty (u_0(t) - u^0) e^{-pt} dt = \bar{\phi}_0(p),$$

$$\bar{\phi}(x=L,p) = \int_0^\infty (u_L(t) - u^0) e^{-pt} dt = \bar{\phi}_L(p),$$

onde

$$\bar{\psi}(x,p) = \mathfrak{L}[\psi(x,t)] = \int_0^\infty \psi(x,t) e^{-pt} dt, \quad (3.16)$$

$$\bar{\phi}(x,p) = \mathfrak{L}[\phi(x,t)] = \int_0^\infty \phi(x,t) e^{-pt} dt.$$

Obtidas as equações governantes e as condições de contorno transformadas, Eqs. (3.14) - (3.15), determina-se as equações diferenciais para as transformadas da temperatura e do conteúdo de umidade.

### 3.3.1 - Equações Diferenciais para as Transformadas $\bar{\psi}$ e $\bar{\phi}$

A equação diferencial para transformada  $\bar{\psi}(x,p)$  é encontrada da seguinte forma: da Eq. (3.14a) determina-se  $\bar{\phi}(x,p)$  e sua

segunda derivada  $\bar{\phi}''(x,p)$ , e substitui-se as expressões obtidas na Eq. (3.14b). Depois de algumas simplificações chega-se a:

$$\bar{\psi}^{iv}(x,p) - \left(\frac{p}{a_m} + \frac{p}{a_q} + \frac{\epsilon r \delta}{c_q a_q} p\right) \bar{\psi}''(x,p) + \frac{p^2}{a_q a_m} \bar{\psi}(x,p) = 0 \quad (3.17)$$

Aplicando a transformada de Laplace em  $x$ , na Eq. (3.17) e usando ainda a seguinte notação:  $\bar{\psi}(x=0,p) = C_1$ ,  $\bar{\psi}'(x=0,p) = C_2$ ,  $\bar{\psi}''(x=0,p) = C_3$  e  $\bar{\psi}'''(x=0,p) = C_4$ , obtêm-se:

$$\mathfrak{L}[\bar{\psi}] = \frac{\xi_0(S)}{\eta_0(S)}, \quad (3.18)$$

com

$$\begin{aligned} \xi_0(S) = & S^3 C_1 + S^2 C_2 + S \left[ C_3 - \left(\frac{p}{a_m} + \frac{p}{a_q} + \frac{\epsilon r \delta}{c_q a_q} p\right) C_1 \right] + \\ & + C_4 - \left(\frac{p}{a_m} + \frac{p}{a_q} + \frac{\epsilon r \delta}{c_q a_q} p\right) C_2, \end{aligned}$$

$$\eta_0(S) = S^4 - S^2 \left(\frac{p}{a_m} + \frac{p}{a_q} + \frac{\epsilon r \delta}{c_q a_q} p\right) + \frac{p^2}{a_q a_m},$$

onde os  $C_k$  ( $k=1,2,3,4$ ) são constantes arbitrárias e  $\xi_0(S)$  e  $\eta_0(S)$  são polinômios generalizados com relação a  $S$ .

Para se obter a solução geral para a transformada  $\bar{\psi}$ , basta inverter a Eq. (3.18). A inversão é feita usando-se o teorema de inversão de Laplace, seguido do teorema dos resíduos da teoria da variável complexa [Apêndice A].

A inversa de  $\frac{\xi_0(S)}{\eta_0(S)}$  será, portanto, dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x,p) = \mathfrak{L}^{-1} \left[ \frac{\xi_0(S)}{\eta_0(S)} \right] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{Sx} \cdot \frac{\xi_0(S)}{\eta_0(S)} dS = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(a_n), \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $a_n$  são os polos do integrando, isto é, os pontos de singularidade do integrando. Para a Eq. (3.18) os  $a_n$  são as raízes de  $\eta_0(S) = 0$ . Através da fórmula de Bhaskara (equação quadrática)

[26] tem-se:

$$a_1 = S_1 = qv_1, \quad (3.20a)$$

$$a_2 = S_2 = qv_2, \quad (3.20b)$$

$$a_3 = S_3 = -qv_1, \quad (3.20c)$$

$$a_4 = S_4 = -qv_2, \quad (3.20d)$$

onde

$$q = \sqrt{\frac{p}{a_q}}, \quad (3.21)$$

$$v_m^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 + Fe + \frac{1}{Lu} \right) + (-1)^m \sqrt{\left( 1 + Fe + \frac{1}{Lu} \right)^2 - \frac{4}{Lu}} \right\}, \quad (3.22)$$

(m = 1, 2),

$$Lu = \frac{a_m}{a_q} \quad (\text{número de Luikov}),$$

$$Fe = \frac{\epsilon r \delta}{C_q} \quad (\text{número de Federov}).$$

Desse modo:

$$\bar{\psi}(x, p) = \text{Res}(a_1) + \text{Res}(a_2) + \text{Res}(a_3) + \text{Res}(a_4), \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \text{Res } (a_1) &= e^{Sx} \left. \frac{\xi_0(S)}{\eta_0'(S)} \right|_{S=a_1} = D_1 e^{a_1 x} , \\
 \text{Res } (a_2) &= e^{Sx} \left. \frac{\xi_0(S)}{\eta_0''(S)} \right|_{S=a_2} = D_2 e^{a_2 x} , \\
 \text{Res } (a_3) &= e^{Sx} \left. \frac{\xi_0(S)}{\eta_0'(S)} \right|_{S=a_3} = D_3 e^{a_3 x} , \\
 \text{Res } (a_4) &= e^{Sx} \left. \frac{\xi_0(S)}{\eta_0'(S)} \right|_{S=a_4} = D_4 e^{a_4 x} .
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Substituindo-se as Eqs. (3.20) e (3.24) na Eq. (3.23) obtêm-se, finalmente, a solução para a transformada  $\bar{\psi}$  ,

$$\bar{\psi}(x,p) = D_1 e^{qv_1 x} + D_2 e^{qv_2 x} + D_3 e^{-qv_1 x} + D_4 e^{-qv_2 x} , \tag{3.25}$$

onde  $D_\kappa$  ( $\kappa=1,2,3,4$ ) são parâmetros dependentes de  $p$ .

A equação diferencial para a transformada  $\bar{\phi}(x,p)$  é encontrada da seguinte forma: da Eq. (3.25) de  $\bar{\psi}(x,p)$  determina-se sua segunda derivada  $\bar{\psi}''(x,p)$ , e substitui-se estas expressões na Eq. (3.14a). Depois de algumas simplificações chega-se a:

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}(x,p) &= \frac{C}{\epsilon r} D_1 (1-v_1^2) e^{qv_1 x} + \frac{C}{\epsilon r} D_2 (1-v_2^2) e^{qv_2 x} + \\
 &\quad \frac{C}{\epsilon r} D_3 (1-v_1^2) e^{-qv_1 x} + \frac{C}{\epsilon r} D_4 (1-v_2^2) e^{-qv_2 x} \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

Aplicando-se agora as condições auxiliares, Eqs. (3.15), nas Eqs. (3.25) e (3.26), os parâmetros  $D_\kappa$  ( $\kappa=1,2,3,4$ ) são calculados.

Chega-se ao seguinte sistema de equações,

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = \bar{\psi}_0, \quad (3.27)$$

$$D_1 e^{qv_1 L} + D_2 e^{qv_2 L} + D_3 e^{-qv_1 L} + D_4 e^{-qv_2 L} = \bar{\psi}_L, \quad (3.28)$$

$$AD_1 + BD_2 + AD_3 + BD_4 = \bar{\phi}_0, \quad (3.29)$$

$$AD_1 e^{qv_1 L} + BD_2 e^{qv_2 L} + AD_3 e^{-qv_1 L} + BD_4 e^{-qv_2 L} = \bar{\phi}_L, \quad (3.30)$$

onde

$$A = \frac{C}{\epsilon r} (1 - v_1^2), \quad (3.31)$$

$$B = \frac{C}{\epsilon r} (1 - v_2^2). \quad (3.32)$$

Colocando o sistema numa forma matricial e aplicando o método de Cramer, os  $D_\kappa$  ( $\kappa=1,2,3,4$ ) são calculados, como segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{qv_1 L} & e^{qv_2 L} & e^{-qv_1 L} & e^{-qv_2 L} \\ A & B & A & B \\ Ae^{qv_1 L} & Be^{qv_2 L} & Ae^{-qv_1 L} & Be^{-qv_2 L} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_0 \\ \bar{\psi}_L \\ \bar{\phi}_0 \\ \bar{\phi}_L \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$D_1 = - \frac{[\bar{\psi}_L AB - \bar{\psi}_L B^2 - \bar{\phi}_L A + \bar{\phi}_L B + (\bar{\psi}_0 B^2 - \bar{\psi}_0 AB - \bar{\phi}_0 B + \bar{\phi}_0 A) e^{-qv_1 L}]}{2 (A-B)^2 \sinh (qv_1 L)} \quad (3.34)$$

$$D_2 = - \frac{[\bar{\psi}_L^{AB} - \bar{\psi}_L^{A^2} - \bar{\phi}_L^{B+} \bar{\phi}_L^{A+} (\bar{\psi}_0^{A^2} - \bar{\psi}_0^{AB} - \bar{\phi}_0^{A+} \bar{\phi}_0^B) e^{-qv_2 L}]}{2 (A-B)^2 \sinh (qv_2 L)} \quad (3.35)$$

$$D_3 = + \frac{[\bar{\psi}_L^{AB} - \bar{\psi}_L^{B^2} - \bar{\phi}_L^{A+} \bar{\phi}_L^{B+} (\bar{\psi}_0^{B^2} - \bar{\psi}_0^{AB} - \bar{\phi}_0^{B+} \bar{\phi}_0^A) e^{qv_1 L}]}{2 (A-B)^2 \sinh (qv_1 L)} \quad (3.36)$$

$$D_4 = + \frac{[\bar{\psi}_L^{AB} - \bar{\psi}_L^{A^2} - \bar{\phi}_L^{B+} \bar{\phi}_L^{A+} (\bar{\psi}_0^{A^2} - \bar{\psi}_0^{AB} - \bar{\phi}_0^{A+} \bar{\phi}_0^B) e^{qv_2 L}]}{2 (A-B)^2 \sinh (qv_2 L)} \quad (3.37)$$

Substituindo-se as Eqs. (3.34) - (3.37), dos  $D_\kappa$  ( $\kappa=1,2,3,4$ ) nas equações diferenciais das transformadas  $\bar{\psi}(x,p)$  e  $\bar{\phi}(x,p)$ , Eqs. (3.25) e (3.26), obtêm-se um sistema de equações algêbricas para as transformadas da temperatura e do conteúdo de umidade.

### 3.4 - Densidades de Fluxo de Calor e Massa

As densidades de fluxo difusivo de calor e massa nas extremidades da região são:

$$\underline{j}_q (x=0) = - \lambda_q \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = - \lambda_q \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} , \quad (3.38)$$

$$\underline{j}_q (x=L) = - \lambda_q \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = - \lambda_q \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=L} ,$$

$$\underline{j}_m (x=0) = - a_m \rho_o \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = - a_m \rho_o \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} , \quad (3.39)$$

$$\underline{j}_m (x=L) = - a_m \rho_o \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = - a_m \rho_o \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=L} .$$

Aplicando as transformadas de Laplace às Eqs. (3.38) e (3.39), obtêm-se:

$$\begin{aligned}\bar{j}_{q,0} &= -\lambda_q \left. \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ \bar{j}_{q,L} &= -\lambda_q \left. \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right|_{x=L},\end{aligned}\tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}\bar{j}_{m,0} &= -a_m \rho_o \left. \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right|_{x=0}, \\ \bar{j}_{m,L} &= -a_m \rho_o \left. \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right|_{x=L}.\end{aligned}\tag{3.41}$$

Usando-se as equações diferenciais das transformadas  $\bar{\psi}$  e  $\bar{\phi}$ , Eqs. (3.25) e (3.26) nas Eqs. (3.40) e (3.41), chega-se a:

$$\bar{j}_{q,0} = -\lambda_q [D_1 qv_1 + D_2 qv_2 - D_3 qv_1 - D_4 qv_2],\tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}\bar{j}_{q,L} &= -\lambda_q [D_1 qv_1 e^{qv_1 L} + D_2 qv_2 e^{qv_2 L} - D_3 qv_1 e^{-qv_1 L} - \\ &D_4 qv_2 e^{-qv_2 L}],\end{aligned}\tag{3.43}$$

$$\bar{j}_{m,0} = -a_m \rho_o [D_1 Aqv_1 + D_2 Bqv_2 - D_3 Aqv_1 - D_4 Bqv_2],\tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}\bar{j}_{m,L} &= -a_m \rho_o [D_1 Aqv_1 e^{qv_1 L} + D_2 Bqv_2 e^{qv_2 L} - D_3 Aqv_1 e^{-qv_1 L} - \\ &D_4 Bqv_2 e^{-qv_2 L}].\end{aligned}\tag{3.45}$$

Substituindo as expressões dos  $D_\kappa$  ( $\kappa=1,2,3,4$ ), Eqs. (3.34)-(3.37), nas equações das densidades de fluxo, Eqs. (3.42)-(3.45), obtêm-se, na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \bar{j}_{q,0} \\ \bar{j}_{q,L} \\ \bar{j}_{m,0} \\ \bar{j}_{m,L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E_1 + E_2}{C_1 + C_2} & -\frac{G_1 + G_2}{C_1 + C_2} & \frac{F_1 + F_2}{C_1 + C_2} & -\frac{H_1 + H_2}{C_1 + C_2} \\ \frac{G_1 + G_2}{C_1 + C_2} & -\frac{E_1 + E_2}{C_1 + C_2} & \frac{H_1 + H_2}{C_1 + C_2} & -\frac{F_1 + F_2}{C_1 + C_2} \\ \frac{AE_1 + BE_2}{D_1 + D_2} & -\frac{AG_1 + BG_2}{D_1 + D_2} & \frac{AF_1 + BF_2}{D_1 + D_2} & -\frac{AH_1 + BH_2}{D_1 + D_2} \\ \frac{AG_1 + BG_2}{D_1 + D_2} & -\frac{AE_1 + BE_2}{D_1 + D_2} & \frac{AH_1 + BH_2}{D_1 + D_2} & -\frac{AF_1 + BF_2}{D_1 + D_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{\psi}_0 \\ \bar{\psi}_L \\ \bar{\phi}_0 \\ \bar{\phi}_L \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

As expressões para cada elemento da matriz da Eq. (3.46) são mostradas na Tab. 1.

Tabela 1 - Elemento da Matriz, Eq. (3.46)

$C_1 = \frac{L}{\lambda_q} \frac{\sinh(qv_1 L)}{(qv_1 L)}$	$D_1 = \frac{L}{a_m \rho_0} \frac{\sinh(qv_1 L)}{(qv_1 L)}$
$C_2 = \frac{L}{\lambda_q} \frac{\sinh(qv_2 L)}{(qv_2 L)}$	$D_2 = \frac{L}{a_m \rho_0} \frac{\sinh(qv_2 L)}{(qv_2 L)}$
$E_1 = \frac{(B^2 - AB)}{(A-B)^2} \cosh(qv_1 L)$	$AE_1 = \frac{A(B^2 - AB)}{(A-B)^2} \cosh(qv_1 L)$
$E_2 = \frac{(A^2 - AB)}{(A-B)^2} \cosh(qv_2 L)$	$BE_2 = \frac{B(A^2 - AB)}{(A-B)^2} \cosh(qv_2 L)$
$G_1 = \frac{(B^2 - AB)}{(A-B)^2}$	$AG_1 = \frac{A(B^2 - AB)}{(A-B)^2}$
$G_2 = \frac{(A^2 - AB)}{(A-B)^2}$	$BG_2 = \frac{B(A^2 - AB)}{(A-B)^2}$
$F_1 = \frac{(A-B)}{(A-B)^2} \cosh(qv_1 L)$	$AF_1 = \frac{A(A-B)}{(A-B)^2} \cosh(qv_1 L)$
$F_2 = \frac{(B-A)}{(A-B)^2} \cosh(qv_2 L)$	$BF_2 = \frac{B(B-A)}{(A-B)^2} \cosh(qv_2 L)$
$H_1 = \frac{(A-B)}{(A-B)^2}$	$AH_1 = \frac{A(A-B)}{(A-B)^2}$
$H_2 = \frac{(B-A)}{(A-B)^2}$	$BH_2 = \frac{B(B-A)}{(A-B)^2}$

Na Eq. (3.46)  $\bar{\psi}_0$ ,  $\bar{\psi}_L$ ,  $\bar{\phi}_0$  e  $\bar{\phi}_L$  representam as transformadas dos perfis de temperatura  $\psi_0(t)$  e  $\psi_L(t)$  em  $x=0$  e  $x=L$  e as transformadas dos perfis de umidade  $\phi_0(t)$  e  $\phi_L(t)$  em  $x=0$  e  $x=L$ , respectivamente.

Os fluxos de calor e massa em cada superfície de contorno da região podem então ser avaliados aplicando-se o teorema de inversão da transformada de Laplace [Apêndice A], para a Eq. (3.46).

A obtenção da inversa da Eq. (3.46), no entanto, é complicada pelas funções  $\bar{\psi}_0(p)$ ,  $\bar{\psi}_L(p)$ ,  $\bar{\phi}_0(p)$  e  $\bar{\phi}_L(p)$ , sobretudo se  $\psi_0(t)$ ,  $\psi_L(t)$ ,  $\phi_0(t)$  e  $\phi_L(t)$  são funções arbitrária do tempo. Dessa forma, utiliza-se um método aproximado, pela aplicação do princípio de superposição onde a temperatura  $\psi$  e o conteúdo  $\phi$  podem ser representados como uma composição de funções pulso [10].

### 3.5 - Princípio de Superposição e Função Pulso

As características de qualquer sistema físico podem ser descritas por uma relação entre uma função excitação e a resposta do sistema [12]. Tal relação torna-se particularmente útil se o sistema é linear e invariável. Assim, linearidade e invariabilidade são os pré-requisitos de qualquer método de superposição de cálculo do comportamento de um sistema físico. Linearidade implica que a magnitude da resposta seja linearmente relacionada com a magnitude da excitação; enquanto que invariabilidade significa que excitações iguais aplicadas em diferentes tempos sempre produzem respostas iguais.

Fisicamente, a importância do princípio de superposição é que, quando válido, ele torna possível analisar uma variação global como sendo a soma dos efeitos devido a variações independentes, as quais tomam lugar simultaneamente no sistema, mas cada uma procedendo como se fosse independente das outras.

São três os passos no cálculo da resposta de um sistema invariável linear [12]:

- a) Resolver a excitação em séries de componentes simples;
- b) Calcular a resposta para cada componente;
- c) Somar as respostas para os componentes separados.

Uma função pulso, ou série-tempo, é somente uma sequência de números ou quantidades que representam os valores de uma função em intervalos iguais sucessivos de tempo. Qualquer função do tempo pode ser representada por uma composição de funções pulsos, facilitando assim a sua resolução.

O pulso, ou termo na série-tempo, mais simples e mais usado é o pulso retangular [10] de largura igual a um intervalo de tempo considerado, Fig. 7.

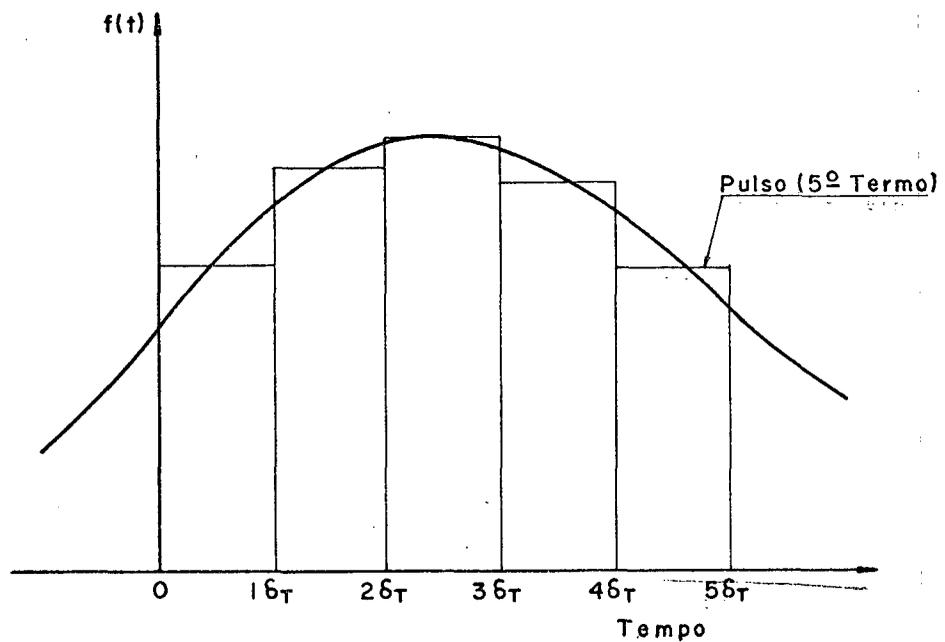


Fig. 7 - Representação de uma função arbitrária do tempo através de pulsos retangulares de base  $\delta_T$ .

A aproximação de um perfil complexo por um número finito de pulsos retangulares, sem dúvida, causará perda de precisão, a menos que o intervalo de tempo seja extremamente pequeno. Um ganho considerável na precisão, pode ser alcançado se os pulsos forem pulsos trapezodais, Fig. 8 (linha pontilhada).

Pode-se também imaginar cada pulso como sendo a magnitude de um triângulo centrado no tempo em questão, com a base igual a duas vezes o intervalo entre termos sucessivos. A soma de um conjunto de triângulos sobrepostos é uma função contínua composta de segmentos de linha reta, Fig. 8.

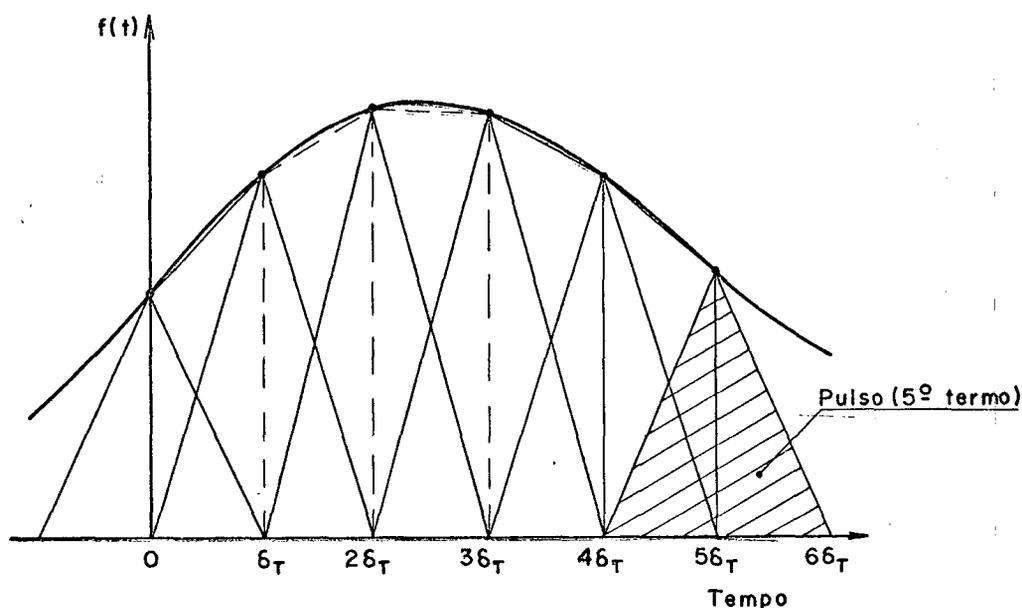


Fig. 8 - Representação de uma função arbitrária do tempo através de pulsos triangulares de base  $2\delta_T$ .

Pode ser provado [10] que dois pulsos triangulares sobrepostos de base  $2\delta_T$  têm idêntica resposta àquela criada por um pulso trapezoidal de largura  $\delta_T$ , que é formado por dois pulsos triangulares, fazendo com que o pulso triangular seja mais adequado do que o pulso trapezoidal.

A precisão da representação depende do tamanho do intervalo de tempo entre os termos sucessivos.

Uma função pulso  $\Omega(t_i)$  com pulsos triangulares pode ser definida, com auxílio da função "degrau unitária"  $u_a(t_i)$  por [10, 27]:

$$\Omega(t_i) = u_0(t_i) \frac{t_i}{\delta_T} - u_{\delta_T}(t_i) \frac{2}{\delta_T} (t_i - \delta_T) + u_{2\delta_T}(t_i) \frac{1}{\delta_T} (t_i - 2\delta_T), \quad (3.47)$$

com

$$u_a(t_i) = \begin{cases} 0, & t_i < a \\ 1, & t_i \geq a \end{cases}, \quad (3.48)$$

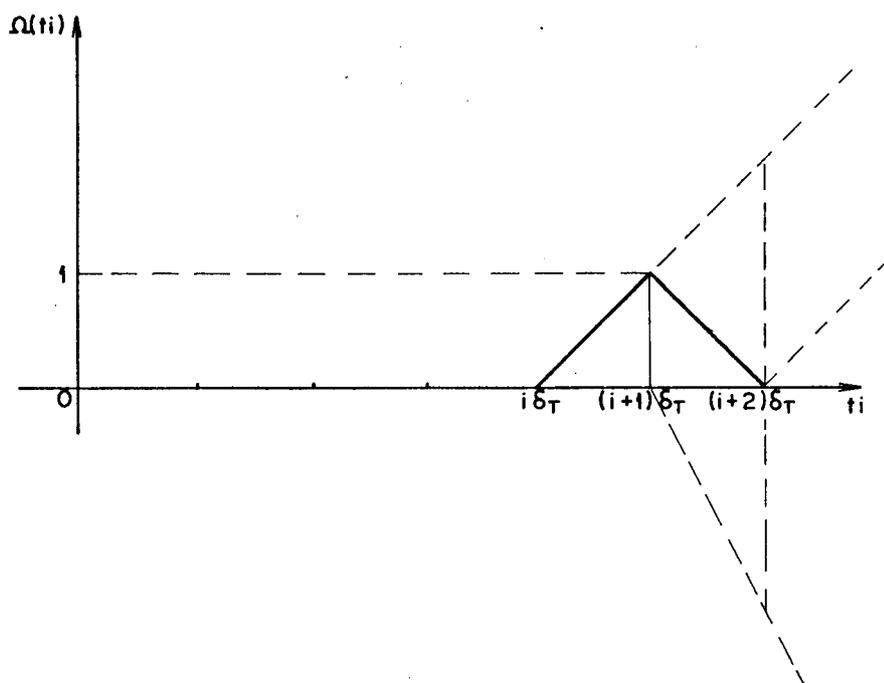


Fig. 9 - Representação de uma função pulso-triangular.

Admite-se que a temperatura e o conteúdo nos contornos da região possam ser escritos como composições de funções pulso, tipo  $\Omega(t_i)$ ,

$$\psi(t) = \sum_{i=-1}^{\tau-1} \psi_{i+1} \Omega(t_i), \quad (3.49)$$

$$\phi(t) = \sum_{i=-1}^{\tau-1} \phi_{i+1} \Omega(t_i), \quad (3.50)$$

onde

$$\begin{aligned} t_i &= t - i\delta_T, \\ \psi_i &= \psi(i\delta_T), \\ \phi_i &= \phi(i\delta_T), \\ t &= \tau\delta_T. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nas equações acima  $\psi_i$  e  $\phi_i$  são as alturas dos pulsos no tempo  $t=i\delta_T$ , sendo  $\delta_T$  o intervalo de tempo dos pulsos, Figs. 10 e 11.

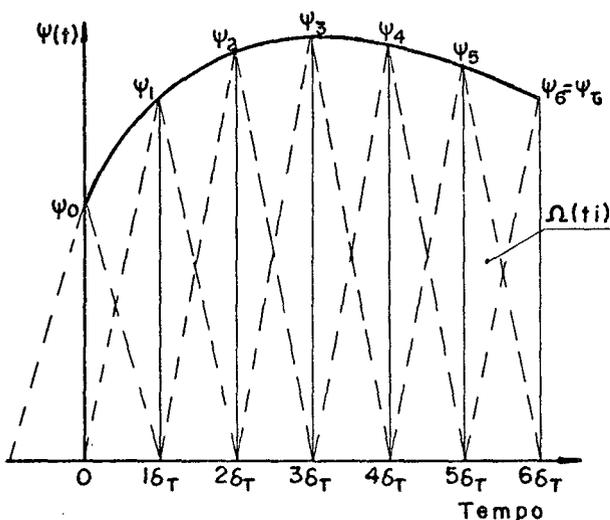


Fig.10 - Representação da  $\psi(t)$  através de pulsos triangulares

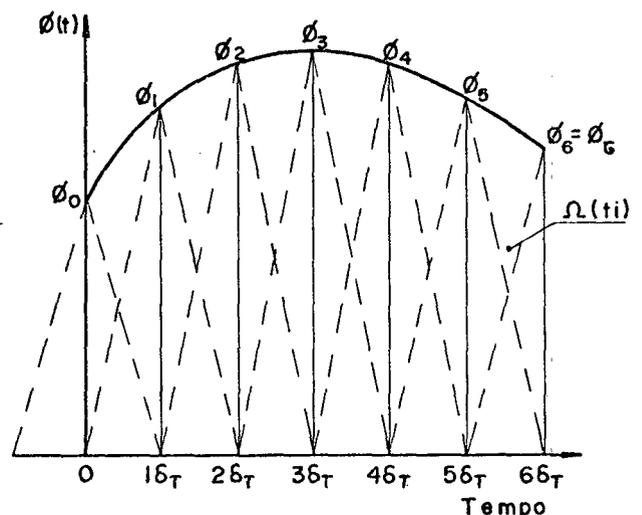


Fig. 11 - Representação da  $\phi(t)$  através de pulsos triangulares

Assim  $\psi(t)$  e  $\phi(t)$  podem ser obtidas, fazendo-se a composição de um trem de pulsos do tipo mostrado nas Eqs. (3.49) e (3.50) e Figs. 10 e 11. Aplicando as transformadas de Laplace nas Eqs. (3.49) e (3.50), obtêm-se:

$$\bar{\psi}(t) = \sum_{i=-1}^{\tau-1} \psi_{i+1} \mathfrak{L} [\Omega(t_i)] = \sum_{i=-1}^{\tau-1} \psi_{i+1} \bar{\Omega}_i(p) \quad (3.52)$$

$$\bar{\phi}(t) = \sum_{i=-1}^{\tau-1} \phi_{i+1} \mathfrak{L} [\Omega(t_i)] = \sum_{i=-1}^{\tau-1} \phi_{i+1} \bar{\Omega}_i(p) \quad (3.53)$$

Na obtenção da transformada da função pulso  $\Omega$ , é usada a seguinte propriedade das transformadas de Laplace [25]:

$$f(t) = u_a(t) g(t-a) ; \quad a \geq 0 \quad \text{e} \quad t > a$$

$$\mathfrak{L} [f(t)] = e^{-as} \mathfrak{L} [g]. \quad (3.54)$$

Resultando

$$\bar{\Omega}_i(p) = \frac{1}{\delta_T p^2} \quad \text{para} \quad 0 < t_i \leq \delta_T ,$$

$$= \frac{1}{\delta_T p^2} (1 - 2e^{-\delta_T p}) \quad \text{para} \quad \delta_T < t_i \leq 2\delta_T , \quad (3.55)$$

$$= \frac{1}{\delta_T p^2} (1 - e^{-\delta_T p})^2 \quad \text{para} \quad t_i > 2\delta_T .$$

Substituindo as Eqs. (3.52) e (3.53) na Eq. (3.46), obtêm-se a equação matricial das densidade de fluxo em função da função pulso, Eq. (3.56), (Tab. 2).

Tabela 2 - Equação matricial das transformadas das densidades de fluxo em função da função-pulso, Eq. (3.56)

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} \bar{I}_{q,0} \\ \bar{I}_{q,L} \\ \bar{I}_{m,0} \\ \bar{I}_{m,L} \end{array} \right] = \int_{i=-1}^{i=1} \bar{\omega}_i(p) \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{E_1}{C_1} + \frac{E_2}{C_2} \right) \\ - \left( \frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2} \right) \\ \left( \frac{F_1}{C_1} + \frac{F_2}{C_2} \right) \\ - \left( \frac{H_1}{C_1} + \frac{H_2}{C_2} \right) \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c} \psi_{0,i+1} \\ \psi_{L,i+1} \\ \phi_{0,i+1} \\ \phi_{L,i+1} \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{E_1}{C_1} + \frac{E_2}{C_2} \right) \\ - \left( \frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2} \right) \\ \left( \frac{F_1}{C_1} + \frac{F_2}{C_2} \right) \\ - \left( \frac{H_1}{C_1} + \frac{H_2}{C_2} \right) \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{G_1}{C_1} + \frac{G_2}{C_2} \right) \\ - \left( \frac{E_1}{C_1} + \frac{E_2}{C_2} \right) \\ \left( \frac{H_1}{C_1} + \frac{H_2}{C_2} \right) \\ - \left( \frac{F_1}{C_1} + \frac{F_2}{C_2} \right) \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{AE_1}{D_1} + \frac{BE_2}{D_2} \right) \\ - \left( \frac{AG_1}{D_1} + \frac{BG_2}{D_2} \right) \\ \left( \frac{AF_1}{D_1} + \frac{BF_2}{D_2} \right) \\ - \left( \frac{AH_1}{D_1} + \frac{BH_2}{D_2} \right) \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{AG_1}{D_1} + \frac{BG_2}{D_2} \right) \\ - \left( \frac{AE_1}{D_1} + \frac{BE_2}{D_2} \right) \\ \left( \frac{AH_1}{D_1} + \frac{BH_2}{D_2} \right) \\ - \left( \frac{AF_1}{D_1} + \frac{BF_2}{D_2} \right) \end{array} \right]
 \end{array}$$

### 3.6 - Inversão da Equação Matricial das Densidades de Fluxo

As densidades de fluxo podem ser calculadas, no instante  $t=\tau\delta$ , através da inversão da Eq. (3.56), como mostra a Eq. (3.57), (Tab. 3), [10].

A inversão da Eq. (3.56), como mostra a Eq. (3.57), envolve essencialmente a análise da seguinte fórmula geral,

$$\bar{f}_i = \bar{\Omega}_i \frac{P}{Q}, \quad (3.58)$$

onde P representa  $E_1, E_2, G_1, G_2, F_1, F_2, H_1, H_2, AE_1, BE_2, AG_1, BG_2, AF_1, BF_2, AH_1$ , ou  $BH_2$  e Q representa  $C_1, C_2, D_1$  ou  $D_2$  na Eq. (3.56). A inversão das transformadas de Laplace pode ser efetuada pela aplicação do teorema dos resíduos e do teorema de inversão de Laplace [Apêndice A]. A transformada inversa de  $\bar{\Omega}_i \frac{P}{Q}$  será portanto, dada por:

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \int_{\gamma-jL}^{\gamma+jL} e^{pt} \bar{\Omega}_i \frac{P}{Q} dp = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \text{Res} (\beta_{\kappa}), \quad (3.59)$$

com  $j = \sqrt{-1}$ , na região:

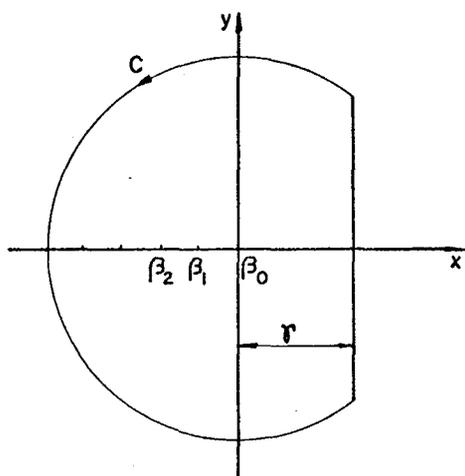


Fig. 12 - Contorno dos polos

onde  $\beta_{\kappa}$  são os polos do integrando [Apêndice A].



### 3.6.1 - Análise do Integrando e Determinação dos Polos

Da Eq. (3.55) vê-se que  $p=0$  constitui, um polo de ordem 2 da Eq. (3.60). Também, os zeros das funções complexas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ , Tab. 1, constituirão polos ou singularidades isoladas,

$$C_1 = \frac{L}{\lambda_q} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{p}{a_q}} v_1 L\right)} \sinh \left(\sqrt{\frac{p}{a_q}} v_1 L\right), \quad (3.60)$$

$$C_2 = \frac{L}{\lambda_q} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{p}{a_q}} v_2 L\right)} \sinh \left(\sqrt{\frac{p}{a_q}} v_2 L\right). \quad (3.61)$$

Analisando, as expressões complexas  $C_1$  e  $C_2$  acima ( $D_1$  e  $D_2$  são expressões semelhantes) deve-se observar que:

a) As funções  $\sinh(\sqrt{z})$  e  $\sqrt{z}$  de um número complexo  $z$  fazem corresponder dois valores a cada  $z$  do plano complexo, pois

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{2} + \kappa\pi \right) + j \sin \left( \frac{\theta}{2} + \kappa\pi \right) \right], \quad \kappa=0,1. \quad (3.62)$$

No entanto a função,

$$f(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{(\sqrt{z})} \quad (3.63)$$

é uma função par de  $\sqrt{z}$ , pois  $\sinh(\sqrt{z})$  e  $\sqrt{z}$  são funções ímpares de  $z$ . Deste modo  $f(z)$  é uma função unívoca de  $z$  [28].

b) A função  $\sinh(qv_m L) = \sinh\left(\sqrt{\frac{p}{a_q}} v_m L\right) = 0$ , quando  $\sqrt{\frac{p}{a_q}} = j\lambda$  ou  $p = -a_q \lambda^2$  (pois  $\sinh(j\lambda v_m L) = j \operatorname{sen}(\lambda v_m L)$ ), desde que  $\lambda = \frac{n\pi}{v_m L}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  ( $m = 1, 2$ ). Desse modo:

$$C_1 = 0 \text{ para } p = -\frac{a_q n^2 \pi^2}{v_1^2 L^2} \quad n = 1, 2, \dots \text{ (idem } D_1), \quad (3.64)$$

$$C_2 = 0 \text{ para } p = -\frac{a_q n^2 \pi^2}{v_2^2 L^2} \quad n = 1, 2, \dots \text{ (idem } D_2) \quad (3.65)$$

c) Os zeros das funções constituem polos de ordem 1 de  $C_1(p)$ ,  $C_2(p)$ ,  $D_1(p)$ ,  $D_2(p)$ , pois para qualquer  $z_0$  complexo [28],

$$f(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \dots \quad (3.66)$$

De modo que, se  $z_0$  é um zero de  $f(z)$  então, próximo a  $z_0$ ,

$$f(z) = f'(z_0)(z-z_0) + \dots, \quad (3.67)$$

pois  $f'(z_0) \neq 0$ .

d) O ponto  $z_0=0$  não constitui um zero de  $C_1(p)$ ,  $C_2(p)$ ,  $D_1(p)$  e  $D_2(p)$ , pois

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \neq 0 \quad (3.68)$$

Assim, os polos do integrando são, portanto

$$\beta_0 = 0 \text{ (polo de ordem 2)}$$

$$\beta_\kappa = \frac{a_q \pi^2 \kappa^2}{v_m^2 L^2}, \quad \kappa=1, 2, \dots \text{ (m=1, 2) (polo de ordem 1)} \quad (3.69)$$

### 3.6.2 - Cálculo dos Resíduos

A inversão de (3.58) resulta em:

$$f_i = \text{Res}(0) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \text{Res}(\beta_\kappa) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left( p^2 \frac{\bar{\Omega}_i p}{Q} e^{pt_i} \right) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \bar{\Omega}_i p e^{pt_i} \frac{dQ}{dp} \right)_{p=-\beta_\kappa} \quad (3.70)$$

Para o caso da função pulso triangular os termos da equação acima podem ser calculados pelas relações seguintes:

$$\begin{aligned}
 \text{a) Res (0)} &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d}{dp} \left( p^2 \frac{\bar{\Omega}_i P}{Q} e^{pt_i} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{\delta_T Q} \right)_{p=0} \left[ Pt_i + \frac{dP}{dp} - \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dp} \right]_{p=0} ; 0 < t_i \leq \delta_T \\
 &= - \left( \frac{1}{\delta_T Q} \right)_{p=0} \left[ \frac{dP}{dp} + Pt_i - 2P\delta_T - \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dp} \right]_{p=0} ; \\
 &\quad \delta_T < t_i \leq 2\delta_T \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

$$= 0 ; t_i > 2\delta_T$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sum_{\kappa=1}^{\infty} \text{Res } (\beta_{\kappa}) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left[ \bar{\Omega}_i P e^{pt_i} / \frac{dQ}{dp} \right]_{p=-\beta_{\kappa}} \\
 &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi (\beta_{\kappa}) e^{-\beta_{\kappa} t_i} ; 0 < t_i \leq \delta_T \\
 &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi (\beta_{\kappa}) (1 - 2e^{\beta_{\kappa} \delta_T}) e^{-\beta_{\kappa} t_i} ; \delta_T < t_i \leq 2\delta_T \tag{3.72} \\
 &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi (\beta_{\kappa}) (1 - e^{\beta_{\kappa} \delta_T})^2 e^{-\beta_{\kappa} t_i} ; t_i > 2\delta_T
 \end{aligned}$$

onde

$$\Phi (\beta_{\kappa}) = \left[ \frac{P}{\delta_T \beta_{\kappa}^2 \frac{dQ}{dp} p=-\beta_{\kappa}} \right] \tag{3.73}$$

Com o fim de avaliar a Eq. (3.70), são necessários os valores de todas as funções que P e Q representam e também suas derivadas em relação a p em p=0 e p=-β<sub>κ</sub> (κ=1,2,...).

As derivadas dos elementos da matriz, Eq. (3.56), são mostradas na Tab. 4 abaixo, para auxiliar no cálculo das derivadas das Eqs. (3.71) e (3.72). A Tab. 5 apresenta uma avaliação dos

limites de cada um dos elementos da matriz e suas derivadas, tais como  $Q$  e  $\frac{dQ}{dp}$  quando  $p$  tende a zero, Eq. 3.71.

Tabela 4 - Derivadas dos elementos da matriz, Eq. (3.56)

$$\frac{dC_1}{dp} = \frac{L}{\lambda_q} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q} S_1 (qv_1 L)$$

$$\frac{dC_2}{dp} = \frac{L}{\lambda_q} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q} S_2 (qv_2 L)$$

$$\frac{dD_1}{dp} = \frac{L}{a_m \rho_o} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q} S_1 (qv_1 L)$$

$$\frac{dD_2}{dp} = \frac{L}{a_m \rho_o} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q} S_2 (qv_2 L)$$

$$\frac{dE_1}{dp} = \frac{(B^2 - AB)}{(A - B)^2} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q} S_3 (qv_1 L)$$

$$\frac{dE_2}{dp} = \frac{(A^2 - AB)}{(A - B)^2} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q} S_4 (qv_2 L)$$

$$\frac{dG_1}{dp} = 0$$

$$\frac{dG_2}{dp} = 0$$

$$\frac{dF_1}{dp} = \frac{(A - B)}{(A - B)^2} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q} S_3 (qv_1 L)$$

$$\frac{dF_2}{dp} = \frac{(B - A)}{(A - B)^2} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q} S_4 (qv_2 L)$$

$$\frac{dH_1}{dp} = 0$$

$$\frac{dH_2}{dp} = 0$$

onde

$$S_3(qv_1 L) = \frac{\sinh(qv_1 L)}{(qv_1 L)}$$

$$S_4(qv_2 L) = \frac{\sinh(qv_2 L)}{(qv_2 L)}$$

$$S_1(qv_1 L) = \frac{\cosh(qv_1 L) - S_3(qv_1 L)}{(qv_1 L)^2}$$

$$S_2(qv_2 L) = \frac{\cosh(qv_2 L) - S_4(qv_2 L)}{(qv_2 L)^2}$$

Tabela 5 - Limites das derivadas dos elementos da matriz,  
Eq. (3.56), quando  $p \rightarrow 0$

$\frac{dC_1}{dp} = \frac{L}{\lambda_q} \frac{(v_1 L)^2}{6a_q}$	$\frac{dC_2}{dp} = \frac{L}{\lambda_q} \frac{(v_2 L)^2}{6a_q}$
$\frac{dD_1}{dp} = \frac{L}{a_m \rho_0} \frac{(v_1 L)^2}{6a_q}$	$\frac{dD_2}{dp} = \frac{L}{a_m \rho_0} \frac{(v_2 L)^2}{6a_q}$
$\frac{dE_1}{dp} = \frac{(B^2 - AB)}{(A-B)^2} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q}$	$\frac{dE_2}{dp} = \frac{(A^2 - AB)}{(A-B)^2} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q}$
$\frac{dF_1}{dp} = \frac{(A-B)}{(A-B)^2} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q}$	$\frac{dF_2}{dp} = \frac{(B-A)}{(A-B)^2} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q}$

Sendo  $p = -\beta_\kappa$ , então

$$q = \sqrt{\frac{p}{a_q}} = \sqrt{\frac{\beta_\kappa}{a_q}} = \sqrt{-1} \sqrt{\frac{\beta_\kappa}{a_q}} = j \sqrt{\frac{\beta_\kappa}{a_q}} \quad (3.74)$$

com a qual as funções complexas das Tabs. 1, 4 e 5 e as derivadas nas séries do último termo da Eq. (3.70) podem ser representadas como funções reais como mostra a Tab. 6.

Sabendo-se que,

$$\begin{aligned} \sinh(jx) &= j \sin(x) & , \quad j &= \sqrt{-1} \text{ ou } j^{-2} = -1 \\ \cosh(jx) &= j \cos(x). \end{aligned} \quad (3.75)$$

Tabela 6 - Elementos da matriz (3.56) para  $p = -\beta_\kappa$ 

$C_1 = \frac{L}{\lambda_q} \frac{\text{sen}(R_1)}{R_1}$	$C_2 = \frac{L}{\lambda_q} \frac{\text{sen}(R_2)}{R_2}$
$D_1 = \frac{L}{a_m \rho_0} \frac{\text{sen}(R_1)}{R_1}$	$D_2 = \frac{L}{a_m \rho_0} \frac{\text{sen}(R_2)}{R_2}$
$E_1 = \frac{(B^2 - AB)}{(A-B)^2} \cos(R_1)$	$E_2 = \frac{(A^2 - AB)}{(A-B)^2} \cos(R_2)$
$G_1 = \frac{(B^2 - AB)}{(A-B)^2}$	$G_2 = \frac{(A^2 - AB)}{(A-B)^2}$
$F_1 = \frac{(A-B)}{(A-B)^2} \cos(R_1)$	$F_2 = \frac{(B-A)}{(A-B)^2} \cos(R_2)$
$H_1 = \frac{(A-B)}{(A-B)^2}$	$H_2 = \frac{(B-A)}{(A-B)^2}$
$\frac{dC_1}{dp} = \frac{L}{\lambda_q} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q} S_1(R_1)$	$\frac{dC_2}{dp} = \frac{L}{\lambda_q} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q} S_2(R_2)$
$\frac{dD_1}{dp} = \frac{L}{a_m \rho_0} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q} S_1(R_1)$	$\frac{dD_2}{dp} = \frac{L}{a_m \rho_0} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q} S_2(R_2)$
$\frac{dE_1}{dp} = \frac{(B^2 - AB)}{(A-B)^2} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q} S_3(R_1)$	$\frac{dE_2}{dp} = \frac{(A^2 - AB)}{(A-B)^2} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q} S_4(R_2)$
$\frac{dF_1}{dp} = \frac{(A-B)}{(A-B)^2} \frac{(v_1 L)^2}{2a_q} S_3(R_1)$	$\frac{dF_2}{dp} = \frac{(B-A)}{(A-B)^2} \frac{(v_2 L)^2}{2a_q} S_4(R_2)$
onde	
$R_1 = \sqrt{\frac{a_\kappa v_1^2 L^2}{a_q}}$	$R_2 = \sqrt{\frac{b_\kappa v_2^2 L^2}{a_q}}$
$a_\kappa = \frac{a_q \kappa^2 \pi^2}{v_1^2 L^2}$	$b_\kappa = \frac{a_q \kappa^2 \pi^2}{v_2^2 L^2}$
$S_3(R_1) = \frac{\text{sen } R_1}{R_1}$	$S_4(R_2) = \frac{\text{sen } R_2}{R_2}$
$S_1(R_1) = \frac{S_3(R_1) - \cos R_1}{R_1^2}$	$S_2(R_2) = \frac{S_4(R_2) - \cos R_2}{R_2^2}$

As funções indicadas na Tab. 6 são avaliadas em cada uma das raízes reais negativas  $-\beta_\kappa$  ( $\kappa=1,2,3,\dots$ ), ou zeros da equação  $Q(p)=0$ , para todos os termos da Eq. (3.72) não desprezáveis.

A magnitude dos termos, contudo, decresce rapidamente com o aumento de  $\kappa$ , particularmente quando  $t_i$  é elevado ou quando o valor da razão  $\frac{L}{\sqrt{a_q}}$  é grande.

Substituindo as Eqs. (3.71) e (3.72) em (3.70) obtêm-se a expressão, em termos de função pulso triangular, para a inversa da expressão geral  $\bar{\Omega}_i \frac{P}{Q}$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}^{-1} \left[ \bar{\Omega}_i \frac{P}{Q} \right] &= \left[ \left( \frac{1}{\delta_T Q} \right) \left( \frac{dP}{dp} + P t_i - \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dp} \right) \right]_{p=0} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi(\beta_\kappa) e^{-\beta_\kappa t_i}; \\ &0 < t_i \leq \delta_T \\ &= - \left[ \left( \frac{1}{\delta_T Q} \right) \left( \frac{dP}{dp} + P t_i - 2P \delta_T - \frac{P}{Q} \frac{dQ}{dp} \right) \right]_{p=0} + \\ &+ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi(\beta_\kappa) (1 - 2e^{-\beta_\kappa \delta_T}) e^{-\beta_\kappa t_i}; \quad \delta_T < t_i \leq 2\delta_T \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi(\beta_\kappa) (1 - e^{-\beta_\kappa \delta_T})^2 e^{-\beta_\kappa t_i}; \quad t_i > 2\delta_T \end{aligned} \quad (3.76)$$

A coordenada tempo  $t_i = t - i\delta_T$ , pode ser expressada também por  $t_i = (\tau - i) \delta_T$ , pois  $t = \tau \delta_T$ . Substituindo na Eq. (3.76) resulta em:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}^{-1} \left[ \bar{\Omega}_i \frac{P}{Q} \right] &= \left( \frac{P}{Q} \right)_{p=0} + \left( \frac{1}{\delta_T Q} \frac{dP}{dp} - \frac{P}{\delta_T Q^2} \frac{dQ}{dp} \right)_{p=0} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi(\beta_\kappa) e^{-\beta_\kappa \delta_T} = F_0; \\ &\tau - i = 1 \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$= - \left( \frac{1}{\delta_T Q} \frac{dP}{dp} - \frac{P}{\delta_T Q^2} \frac{dP}{dp} \right)_{p=0} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi(\beta_{\kappa}) (1 - 2e^{-\beta_{\kappa} \delta_T}) e^{-2\beta_{\kappa} \delta_T} = F_1;$$

$$\tau - i = 2 \quad (3.78)$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \Phi(\beta_{\kappa}) (1 - e^{-\beta_{\kappa} \delta_T})^2 e^{-n\beta_{\kappa} \delta_T} = F_n, \quad n = 3, 4, \dots;$$

$$\tau - i = n. \quad (3.79)$$

Com isso, nota-se que a transformada inversa da expressão geral  $\bar{\Omega}_i \frac{P}{Q}$  é expressa por funções diferentes em função da distância ao instante  $t=\tau$ . Para  $0 \leq t_i \leq \delta_T$  a transformada inversa é dada pela expressão (3.77), para  $\delta_T < t_i \leq 2\delta_T$  é dada pela expressão (3.78) e para  $t_i > 2\delta_T$  pela expressão (3.79).

Determinada a inversa da fórmula geral  $\bar{\Omega}_i \frac{P}{Q}$ , a equação inversa final das densidades de fluxo é obtida através da Eq. (3.57) como segue abaixo.

### 3.6.3 - Equação Inversa Final das Densidades de Fluxo

Fazendo-se,  $j = \tau - i - 1$ , na Eq. (3.57), observa-se que  $i+1 = \tau - j$  e para  $i=-1$  tem-se  $j=\tau$  e para  $i=\tau-1$ ,  $j=0$ .

Usando estas notações, a inversão das relações de fluxos de calor e massa da Eq. (3.57) pode ser expressada como:

$$\begin{pmatrix} \dot{j}_{q,0} \\ \dot{j}_{q,L} \\ \dot{j}_{m,0} \\ \dot{j}_{m,L} \end{pmatrix} (\tau) = \sum_{j=0}^{\tau} \begin{pmatrix} U_j & -V_j & W_j & -Z_j \\ V_j & -U_j & Z_j & -W_j \\ S_j & -T_j & X_j & -Y_j \\ T_j & -S_j & Y_j & -X_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{0,\tau-j} \\ \psi_{L,\tau-j} \\ \phi_{0,\tau-j} \\ \phi_{L,\tau-j} \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

onde  $U_j$ ,  $V_j$ ,  $W_j$ ,  $Z_j$ ,  $S_j$ ,  $T_j$ ,  $X_j$  e  $Y_j$  são as funções de transferência com expressões correspondentes as Eqs. (3.77), (3.78) e (3.79) e são calculados quando  $P$  e  $Q$  são substituídos por suas respectivas expressões. Assim:

$$\begin{aligned}
 U_n &= F_n (P = E_1 \text{ e } E_2 \quad ; \quad Q = C_1 \text{ e } C_2) , \quad n = 0,1,2,\dots, \\
 V_n &= F_n (P = G_1 \text{ e } G_2 \quad ; \quad Q = C_1 \text{ e } C_2) \\
 W_n &= F_n (P = F_1 \text{ e } F_2 \quad ; \quad Q = C_1 \text{ e } C_2) \\
 Z_n &= F_n (P = H_1 \text{ e } H_2 \quad ; \quad Q = C_1 \text{ e } C_2) \\
 S_n &= F_n (P = AE_1 \text{ e } BE_2 \quad ; \quad Q = D_1 \text{ e } D_2) \\
 T_n &= F_n (P = AG_1 \text{ e } BG_2 \quad ; \quad Q = D_1 \text{ e } D_2) \\
 X_n &= F_n (P = AF_1 \text{ e } BF_2 \quad ; \quad Q = D_1 \text{ e } D_2) \\
 Y_n &= F_n (P = AH_1 \text{ e } BH_2 \quad ; \quad Q = D_1 \text{ e } D_2).
 \end{aligned} \quad (3.81)$$

A Eq. (3.80) é a equação de convolução do problema. As funções  $U_j$ ,  $V_j$ ,  $W_j$ ,  $Z_j$ ,  $S_j$ ,  $T_j$ ,  $X_j$  e  $Y_j$ ,  $j=0,1,2,\dots$  são as funções de transferência da região finita, cuja determinação exige apenas o conhecimento do comprimento dessa região e das difusibilidades térmica  $a_q$  e mássica  $a_m$ .

De acordo com a Eq. (3.80) tem-se que as funções  $U_j$  e  $V_j$  são tão associadas unicamente ao processo de transferência de calor

equivalendo-se às funções de transferência obtidas por Kusuda [10] para o problema específico da transferência unidimensional e transiente de calor e que as funções  $X_j$  e  $Y_j$  estão associadas ao processo de transferência de massa somente. As demais funções, conforme a Eq. (3.80) descrevem a interferência entre os dois processos de transferência. As funções  $W_j$  e  $Z_j$  associam-se ao efeito dos processos de mudança de fase sobre o transporte de calor e as funções  $S_j$  e  $T_j$  estão associadas ao efeito da difusão de umidade promovida por gradientes de temperatura.

### 3.7 - Funções de Transferência - Interpretação Física

As expressões para as funções de transferência são obtidas das Eqs. (3.77), (3.78) e (3.79) usando-se a Eq. (3.81) e as tabelas anteriores. Obtém-se:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} M_{11} - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} M_{12} , \\
 U_1 &= \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} M_{21} - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} M_{22} , \\
 U_n &= \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} M_{31} - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} M_{32} , \quad n = 2,3,4,\dots,
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
 W_0 &= - \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} M_{11} + \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} M_{12} , \\
 W_1 &= - \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} M_{21} + \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} M_{22} , \\
 W_n &= - \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} M_{31} + \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} M_{32} , \quad n = 2,3,4,\dots,
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

onde

$$v_j^2 = \frac{1}{2} \left[ \left(1 + \text{Fe} + \frac{1}{\text{Lu}}\right) + (-1)^j \sqrt{\left(1 + \text{Fe} + \frac{1}{\text{Lu}}\right)^2 - \frac{4}{\text{Lu}}} \right] ; j = 1, 2 \quad (3.22)$$

$$M_{1j} = -\frac{\lambda_q}{L} - \frac{v_j^2 \lambda_q L}{3a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) e^{-\beta_{\kappa} \delta_T} ;$$

$$M_{2j} = \frac{v_j^2 \lambda_q L}{3a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1 - 2e^{\beta_{\kappa} \delta_T}) e^{-2\beta_{\kappa} \delta_T} , \quad (3.84)$$

$$M_{3j} = \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1 - e^{\beta_{\kappa} \delta_T})^2 e^{-(n+1)\beta_{\kappa} \delta_T} ; n=2, 3, \dots,$$

$$\beta_{\kappa} = \frac{a_q \pi^2 \kappa^2}{v_j^2 L^2} .$$

E também,

$$V_0 = \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} N_{11} - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} N_{12} ,$$

$$V_1 = \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} N_{21} - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} N_{22} , \quad (3.85)$$

$$V_n = \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} N_{31} - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} N_{32} ; n = 2, 3, \dots,$$

$$Z_0 = -\frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} N_{11} + \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} N_{12} ,$$

$$Z_1 = -\frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} N_{21} + \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2-v_1^2)} N_{22} , \quad (3.86)$$

$$Z_n = - \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2 - v_1^2)} N_{31} + \frac{\epsilon r}{C_q (v_2^2 - v_1^2)} N_{32} \quad ; n = 2, 3, \dots,$$

onde,

$$N_{1j} = - \frac{\lambda_q}{L} + \frac{v_j^2 \lambda_q L}{6a_q \delta_T} - \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2} \right) e^{-\beta_{\kappa} \delta_T},$$

$$N_{2j} = - \frac{v_j^2 \lambda_q L}{6a_q \delta_T} - \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2} \right) (1 - 2e^{\beta_{\kappa} \delta_T}) e^{-2\beta_{\kappa} \delta_T},$$

$$N_{3j} = - \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2} \right) (1 - e^{\beta_{\kappa} \delta_T})^2 e^{-(n+1)\beta_{\kappa} \delta_T};$$

(3.87)

$$n = 2, 3, \dots$$

As funções de transferência  $U_j$  e  $V_j$  estão associadas ao processo de transferência de calor. As funções  $U_j$  estão relacionadas com a resposta térmica da superfície em consideração e as funções  $V_j$  com a da superfície oposta a mesma.

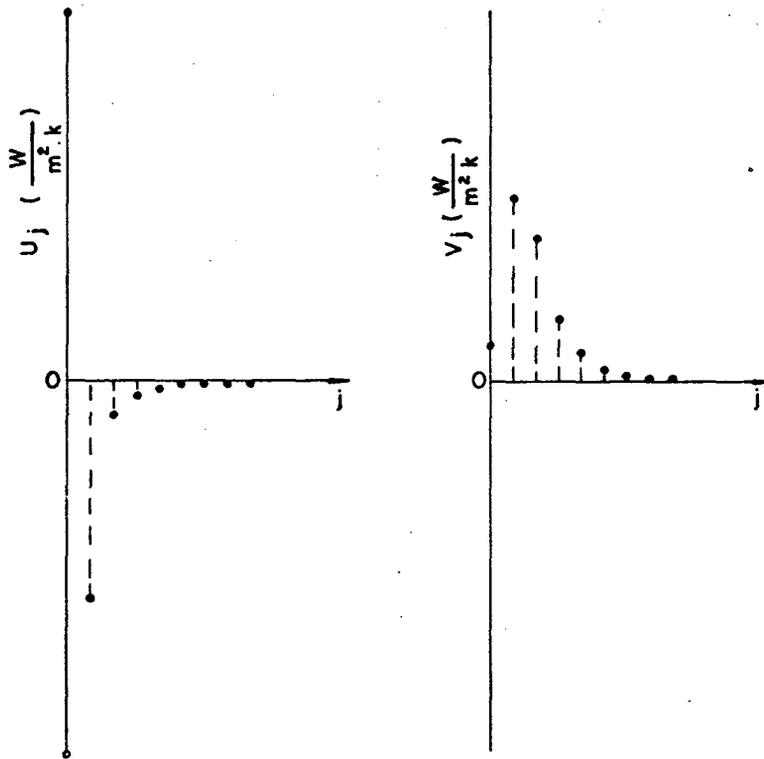


Fig. 13 - Distribuição das funções de transferência,  
(a) -  $U_j$  ; (b) -  $V_j$

As funções  $U_j$  descrevem a influência das temperaturas da superfície em análise, em instantes anteriores, sobre a densidade de fluxo de calor correspondente, no instante em consideração. Estão portanto associadas à capacidade de armazenamento de calor do material, que se reflete, para um ponto arbitrário, na condição de dependência das densidades de fluxo de calor em relação às temperaturas que o material apresentou nesse ponto, em instantes anteriores.

A Fig. 13a mostra o comportamento em forma de exponencial das funções  $U_j$ , o que faz com que a dependência do fluxo de calor em relação às temperaturas, em instantes anteriores, da mesma superfície, reduz-se rapidamente. O valor positivo para  $U_0$ , contrariamente aos demais, garante temperaturas positivas [19].

As funções  $V_j$  descrevem a influência das temperaturas da superfície oposta àquela em questão, em instantes anteriores, sobre

a densidade de fluxo de calor no instante em consideração.

Como mostra a Fig. 13b,  $V_j$  têm um comportamento em forma de onda, o que está associado ao fato de que para cada superfície existe um intervalo finito de tempo para que a mesma "tome conhecimento" de uma flutuação de temperatura ocorrida na superfície oposta. Esse intervalo é inversamente proporcional à difusibilidade térmica do material.

As demais funções têm as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 X_0 &= - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} G_{11} + \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} G_{12}, \\
 X_1 &= - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} G_{21} + \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} G_{22}, \\
 X_n &= - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} G_{31} + \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} G_{32}; \quad n = 2, 3, \dots,
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} G_{11} - \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} G_{12}, \\
 S_1 &= \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} G_{21} - \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} G_{22}, \\
 S_n &= \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} G_{31} - \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} G_{32}; \quad n=2, 3, \dots,
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

onde

$$G_{1j} = - \frac{a_m \rho_o}{L} - \frac{v_j^2 a_m \rho_o L}{3 a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 a_m \rho_o L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right) e^{-\beta_{\kappa} \delta_T},$$

$$G_{2j} = \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{3a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-2e^{\beta_{\kappa} \delta_T}) e^{-2\beta_{\kappa} \delta_T}, \quad (3.90)$$

$$G_{3j} = \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-e^{\beta_{\kappa} \delta_T})^2 e^{-(n+1)\beta_{\kappa} \delta_T}; \quad n=2,3,\dots$$

E também,

$$Y_0 = - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} H_{11} + \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} H_{12},$$

$$Y_1 = - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} H_{21} + \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} H_{22}, \quad (3.91)$$

$$Y_n = - \frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)} H_{31} + \frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)} H_{32}; \quad n = 2,3,\dots,$$

$$T_0 = \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} H_{11} - \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} H_{12},$$

$$T_1 = \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} H_{21} - \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} H_{22}, \quad (3.92)$$

$$T_n = \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} H_{31} - \frac{C_q (1-v_1^2) (1-v_2^2)}{\epsilon r (v_2^2-v_1^2)} H_{32}; \quad n=2,3,\dots,$$

onde

$$H_{1j} = - \frac{a_{m\rho_0}}{L} + \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{6a_q \delta_T} - \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2}\right) e^{-\beta_{\kappa} \delta_T},$$

$$H_{2j} = - \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{6a_q \delta_T} - \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2}\right) (1-2e^{\beta_{\kappa} \delta_T}) e^{-2\beta_{\kappa} \delta_T}, \quad (3.93)$$

$$H_{3j} = - \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2} \right) (1 - e^{-\beta_{\kappa} \delta_T})^2 e^{-(n+1)\beta_{\kappa} \delta_T};$$

$$n = 2, 3, \dots$$

As funções  $X_j$  estão associadas ao processo de transferência de massa, descrevendo a influência dos conteúdos de umidade na superfície em análise, em instantes anteriores, sobre a densidade de fluxo de massa correspondente à mesma superfície, no instante em consideração. Assim como as funções  $U_j$  para a transferência de calor, as funções  $X_j$  estão portanto associadas a capacidade de armazenamento de umidade do material poroso. Constitui, num sentido figurado, a "memória" do material num ponto arbitrário.

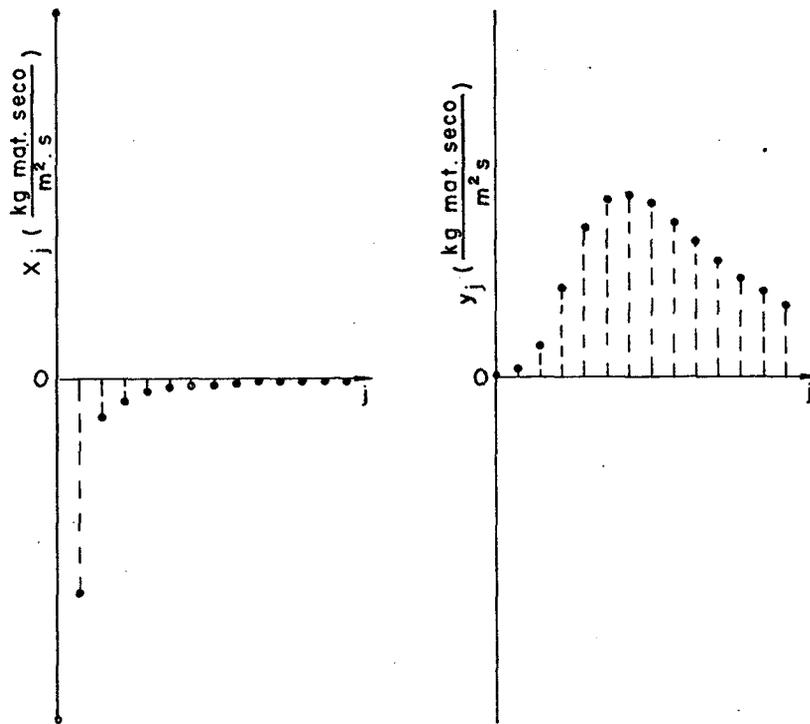


Fig. 14 - Distribuição das funções de transferência,  
(a) -  $X_j$  ; (b) -  $Y_j$

A Fig. 14a mostra o comportamento exponencial das funções  $X_j$ . Em função desse comportamento das funções  $X_j$ , a dependência do fluxo de massa em relação aos conteúdos de umidade da mesma superfície, em instantes anteriores, decresce rapidamente, identificando-as com as funções de transferência térmica  $U_j$ . O valor positivo de  $X_0$ , contrariamente ao demais, análogo ao caso térmico, garante conteúdos positivos [19].

As funções  $Y_j$  associam-se, como as funções  $X_j$ , ao processo de transferência de massa, descrevendo a influência dos conteúdos de umidade na superfície oposta à superfície em questão, em instantes anteriores, sobre a densidade de fluxo de massa correspondente à superfície em questão, no instante considerado.

O comportamento das funções  $Y_j$  é mostrado na Fig. 14b. Essas funções têm uma distribuição em forma de onda, sendo equivalentes às funções de transferência térmica  $V_j$ . Observa-se, no entanto, que o processo de transferência de massa é mais lento de modo que as flutuações na distribuição de umidade correspondente à superfície oposta, levam um maior tempo para influenciar a superfície em análise.

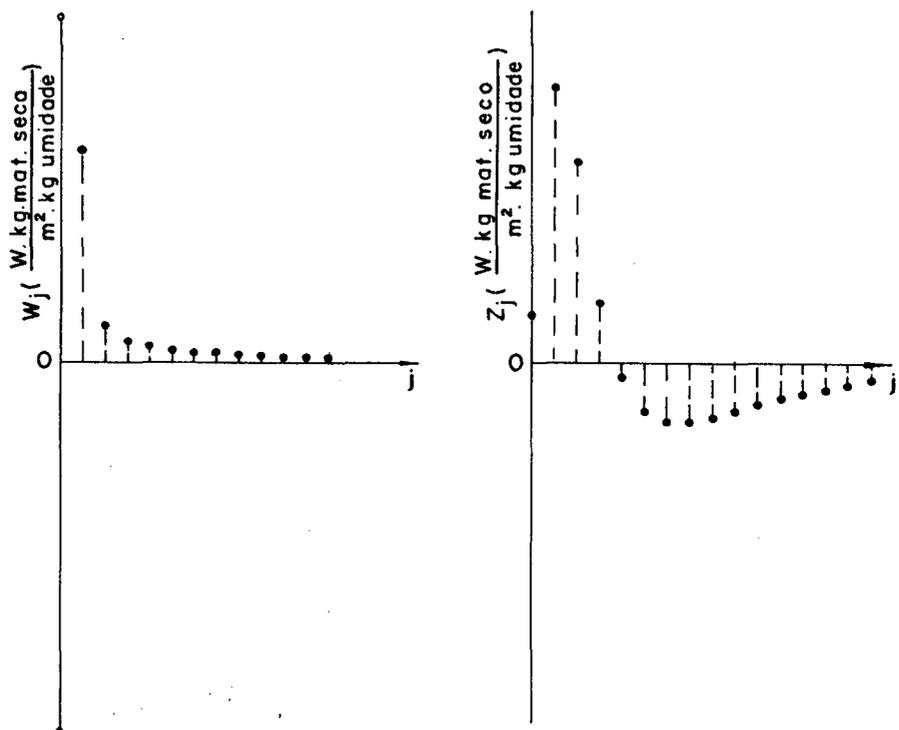


Fig. 15 - Distribuição das funções de transferência, (a) -  $W_j$  ; (b) -  $Z_j$

As demais funções de transferência, como se frisou na seção anterior, são funções associadas aos processo de interferência. As funções  $W_j$  e  $Z_j$  associam-se ao efeito do processo de transferência de massa sobre a transferência de calor através de processos de mudança de fase. Elas são proporcionais, conforme Eqs. (3.83) e (3.86) ao calor latente de vaporização,  $r$ , e ao fator de mudança de fase,  $\epsilon$ .

As funções  $W_j$  descrevem a influência dos conteúdos de umidade na superfície em análise, em instantes anteriores, sobre a densidade de fluxo de calor correspondente à mesma superfície, no instante em consideração.

A Fig. 15a mostra o comportamento exponencial dessas funções. Em função desse comportamento, a dependência do fluxo de calor em relação aos conteúdos de umidade na mesma superfície, em instantes precedentes, reduz-se rapidamente.

As funções  $Z_j$ , por outro lado, descrevem a influência dos conteúdos de umidade na superfície oposta àquela em análise, em instantes anteriores, sobre a densidade de fluxo de calor correspondente à superfície de análise, no instante em questão.

Como mostra a Fig. 15b,  $Z_j$  têm um comportamento ondulatório. Em consequência, a influência dos conteúdos de umidade da superfície oposta àquela em consideração, em instantes anteriores, sobre o fluxo de calor correspondente à superfície em consideração, não é sentida uniformemente.

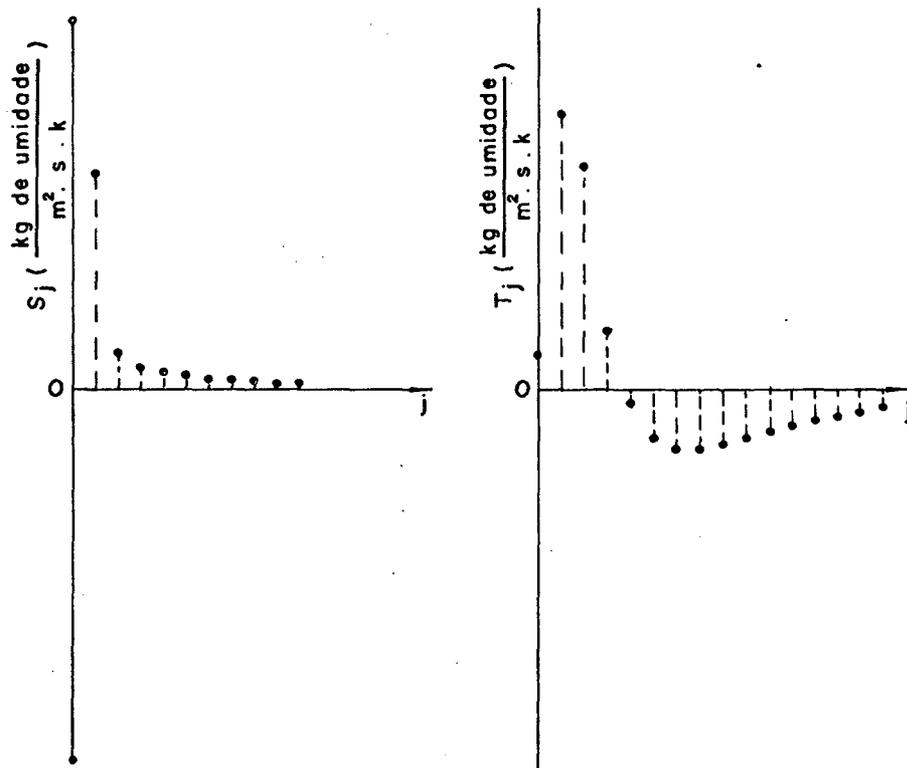


Fig. 16 - Distribuição das funções de transferência,  
(a) -  $S_j$  ; (b) -  $T_j$

As funções de transferência  $S_j$  e  $T_j$  estão associadas ao efeito da transferência de calor sobre a distribuição interna da umidade no material poroso, sendo proporcionais à difusibilidade térmica.

As funções  $S_j$  descrevem a influência das temperaturas na superfície em questão, em instantes precedentes, sobre a densidade de fluxo de massa correspondente à mesma superfície, no instante considerado. A distribuição das funções  $S_j$ , Fig. 16a, corresponde àquela das funções  $W_j$ , Fig. 15a.

As funções  $T_j$  descrevem a influência das temperaturas na superfície oposta àquela em análise, em instantes anteriores, sobre a densidade de fluxo de massa correspondente à superfície de aná-

lise, no instante em consideração. A distribuição das funções  $T_j$ , Fig. 16b, é semelhante àquela das funções  $Z_j$ , Fig. 15b.

Reescrevendo a Eq. (3.80) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 j_{q,0}(\tau) &= U_0\psi_{0,\tau} + U_1\psi_{0,\tau-1} + \dots - V_0\psi_{L,\tau} - V_1\psi_{L,\tau-1} - \dots + \\
 &\quad W_0\phi_{0,\tau} + W_1\phi_{0,\tau-1} + \dots - Z_0\phi_{L,\tau} - Z_1\phi_{L,\tau-1} - \dots \\
 j_{q,L}(\tau) &= V_0\psi_{0,\tau} + V_1\psi_{0,\tau-1} + \dots - U_0\psi_{L,\tau} - U_1\psi_{L,\tau-1} - \dots + \\
 &\quad Z_0\phi_{0,\tau} + Z_1\phi_{0,\tau-1} + \dots - W_0\phi_{L,\tau} - W_1\phi_{L,\tau-1} - \dots \quad (3.94) \\
 j_{m,0}(\tau) &= S_0\psi_{0,\tau} + S_1\psi_{0,\tau-1} + \dots - T_0\psi_{L,\tau} - T_1\psi_{L,\tau-1} - \dots + \\
 &\quad X_0\phi_{0,\tau} + X_1\phi_{0,\tau-1} + \dots - Y_0\phi_{L,\tau} - Y_1\phi_{L,\tau-1} - \dots \\
 j_{m,L}(\tau) &= T_0\psi_{0,\tau} + T_1\psi_{0,\tau-1} + \dots - S_0\psi_{L,\tau} - S_1\psi_{L,\tau-1} - \dots + \\
 &\quad Y_0\phi_{0,\tau} + Y_1\phi_{0,\tau-1} + \dots - X_0\phi_{L,\tau} - X_1\phi_{L,\tau-1} - \dots
 \end{aligned}$$

é possível mostrar mais claramente, de acordo como exposto acima, a dependência das densidades de fluxo de massa e de calor numa superfície do elemento poroso, num instante qualquer, em relação às temperaturas  $\psi$  e aos conteúdos de umidade  $\phi$  nas superfícies, em instantes anteriores.

A densidade de fluxo de calor na superfície em análise está associada às temperaturas, em instantes anteriores, na mesma superfície através das funções  $U_j$  e às temperaturas na superfície oposta à superfície em análise através das funções  $V_j$ . Associa-se aos conteúdos de umidade, em instantes anteriores, na mesma superfície pelas funções  $W_j$  e aos conteúdos na superfície oposta pelas funções  $Z_j$ .

A densidade de fluxo de massa na superfície em análise associa-se aos conteúdos de umidade, em instantes anteriores, na mesma superfície pelas funções  $X_j$  e aos conteúdos na superfície oposta pelas funções  $Y_j$ . Está associada às temperaturas na mesma superfície através das funções  $S_j$  e às temperaturas na superfície oposta através das funções  $T_j$ .

### 3.8 - Situações Assintóticas

As expressões desenvolvidas na seção 3.7 permitem o cálculo das funções de transferência em função dos parâmetros característicos do problema. Em termos de importância, o número de Luikov,  $Lu$ , o coeficiente de mudança de fase,  $\epsilon$ , e o fator de difusão térmica,  $\delta$ , são os parâmetros mais relevantes para o processo combinado de transferência de calor e massa, pois se constituem como fatores que estão associados à interferência de um processo em relação ao outro.

Dessa forma, de modo a verificar a consistência das expressões obtidas nas seções anteriores é interessante analisar-se certas situações em que esses parâmetros adquirem valores extremos, caracterizando problemas mais simples, cujas soluções já são conhecidas e/ou podem ser obtidas por métodos menos complexos.

Por serem parâmetros de interferência essas situações serão normalmente caracterizadas pela anulação de um ou mais desses fatores.

#### 3.8.1 - Situação Correspondente a $Lu = 0$

Para  $Lu = \frac{a_m}{a_q}$  tendendo a zero, a difusibilidade mássica tende a zero, quando a difusibilidade térmica  $a_q$  tem um valor finito e não nulo, o que caracteriza um processo em que não há transferência de massa e cuja solução já é conhecida [10, 28].

Rearranjando a Eq. (3.22) das raízes  $v_j^2$  ( $j=1,2$ ), obtêm-se:

$$v_j^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{(Lu + LuFe + 1)}{Lu} + (-1)^j \frac{\sqrt{(Lu+LuFe+1)^2 - 4Lu}}{Lu} \right], \quad (j=1,2) \quad (3.95)$$

Ao se calcular os valores limites de  $v_j^2$  ( $j=1,2$ ), quando  $Lu$  tende a zero, chega-se a uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ . Utilizando-se o teorema de L'Hopital para levantar esta indeterminação, obtêm-se:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 1, \\ v_2^2 &= \infty. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Aplicando estes resultados às expressões das funções de transferência chega-se também à indeterminações. As razões  $\frac{(1-v_2^2)}{(v_2^2-v_1^2)}$  e  $\frac{C_q(1-v_1^2)(1-v_2^2)}{\text{er}(v_2^2-v_1^2)}$  presentes nas expressões das funções  $U_j$ ,  $V_j$ ,  $X_j$ ,  $Y_j$ ,  $S_j$  e  $T_j$  levam à indeterminações do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . Com a aplicação do teorema de L'Hopital esse problema pode ser resolvido. Além disso, as Eqs. (3.84), (3.87), (3.90) e (3.93) se anulam quando  $j=2$ . Nessas equações, quando  $j=2$ , os expoentes contendo  $\beta_k$  anulam-se devido ao valor de  $v_2^2 = \infty$ , podendo-se então, substituir os termos dos somatórios pelos seguintes valores,

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) &= \frac{\pi^2}{6}, \\ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{1-\kappa}}{\kappa^2}\right) &= \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Resulta, então:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\lambda q}{L} + \frac{\lambda q L}{3a_q \delta_T} - \frac{\lambda q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) e^{-a\delta_T}, \\ U_1 &= -\frac{\lambda q L}{3a_q \delta_T} - \frac{\lambda q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-2e^{a\delta_T}) e^{-2a\delta_T}, \\ U_n &= -\frac{\lambda q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-e^{a\delta_T})^2 e^{-(n+1)a\delta_T}; \quad n=2,3,\dots, \end{aligned} \tag{3.98}$$

$$V_0 = \frac{\lambda_q}{L} - \frac{\lambda_q L}{6a_q \delta_T} + \frac{\lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2} \right) e^{-a\delta_T},$$

$$V_1 = \frac{\lambda_q L}{6a_q \delta_T} + \frac{\lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2} \right) (1-2e^{a\delta_T}) e^{-2a\delta_T}, \quad (3.99)$$

$$V_n = \frac{\lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2} \right) (1-e^{a\delta_T})^2 e^{-(n+1)a\delta_T}; \quad n=2,3,\dots,$$

onde,

$$a = \frac{a_q \kappa^2 \pi^2}{L^2}. \quad (3.100)$$

As demais funções de transferência,  $W_j$ ,  $Z_j$ ,  $S_j$ ,  $T_j$ ,  $X_j$  e  $Y_j$  ( $j=0,1,\dots$ ), são nulas de modo consistente com a condição de que não há transferência de massa quando  $Lu=0$ .

As expressões de  $U_j$  e  $V_j$  ( $j=0,1,\dots$ ) acima associam-se ao processo de transferência de calor quando não há transporte de massa. A função  $U_j$  mantém o comportamento exponencial e  $V_j$  o comportamento em forma de onda e os valores obtidos são consistentes com os valores obtidos por Kusuda [10] para o problema específico da transferência unidimensional transiente de calor.

### 3.8.2 - Situação correspondente a $\epsilon=0$ .

Quando o coeficiente de mudança de fase é nulo tem-se que a transferência de calor independe da transferência de massa. O meio poroso se encontra saturado de umidade, e a migração de umidade se dá somente por transporte de líquido. Os processos de mudança de fase ocorrem somente na superfície da região porosa, onde acontece a evaporação do líquido intersticial e/ou a condensação do vapor a partir da atmosfera adjacente.

Calculando os valores limites de  $v_j^2$  ( $j=1,2$ ), Eq. (3.22), quando  $\varepsilon$  tende a zero, obtêm-se:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 1, \\ v_2^2 &= \frac{1}{Lu}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Estes resultados aplicados às expressões das funções de transferência resultam em indeterminações em algumas funções. A razão  $\frac{C_q(1-v_1^2)(1-v_2^2)}{\varepsilon(v_2^2-v_1^2)}$  nas Eqs. (3.89) e (3.92) leva a uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ , a qual se elimina aplicando-se o teorema de L'Hopital.

Calculando-se então, os valores limites das funções de transferência quando  $\varepsilon$  tende a zero, obtêm-se:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{a_m \rho_0}{L} + \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{3a_q \delta_T} - \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) e^{-b\delta_T} \\ X_1 &= -\frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{3a_q \delta_T} - \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-2e^{b\delta_T}) e^{-2b\delta_T} \\ X_n &= -\frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-e^{b\delta_T})^2 e^{-(n+1)b\delta_T}; n=2,3,\dots, \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} Y_0 &= \frac{a_m \rho_0}{L} - \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{6a_q \delta_T} + \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2}\right) e^{-b\delta_T}, \\ Y_1 &= \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{6a_q \delta_T} + \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2}\right) (1-2e^{b\delta_T}) e^{-2b\delta_T}, \\ Y_n &= +\frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{\kappa-1}}{\kappa^2}\right) (1-e^{b\delta_T})^2 e^{-(n+1)b\delta_T}; n=2,3,\dots, \end{aligned} \quad (3.103)$$

onde,

$$b = \frac{a_q \kappa^2 \pi^2 Lu}{L} . \quad (3.104)$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{\delta Lu}{Lu-1} G_{11} - \frac{\delta Lu}{Lu-1} G_{12} , \\ S_1 &= \frac{\delta Lu}{Lu-1} G_{21} - \frac{\delta Lu}{Lu-1} G_{22} , \\ S_n &= \frac{\delta Lu}{Lu-1} G_{31} - \frac{\delta Lu}{Lu-1} G_{32} ; \quad n=2,3,\dots, \end{aligned} \quad (3.105)$$

onde,

$$\begin{aligned} G_{1j} &= -\frac{a_{m\rho_0}}{L} - \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{3a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) e^{-\beta_{\kappa} \delta_T}; j=1,2 \\ G_{2j} &= \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{3a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-2e^{\beta_{\kappa} \delta_T}) e^{-2\beta_{\kappa} \delta_T} , \\ G_{3j} &= \frac{v_j^2 a_{m\rho_0} L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-e^{\beta_{\kappa} \delta_T})^2 e^{-(n+1)\beta_{\kappa} \delta_T}; \quad n=2,3,\dots \end{aligned} \quad (3.106)$$

Enfim,

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{\delta Lu}{Lu-1} H_{11} - \frac{\delta Lu}{Lu-1} H_{12} , \\ T_1 &= \frac{\delta Lu}{Lu-1} H_{21} - \frac{\delta Lu}{Lu-1} H_{22} , \\ T_n &= \frac{\delta Lu}{Lu-1} H_{31} - \frac{\delta Lu}{Lu-1} H_{32} ; \quad n=2,3,\dots, \end{aligned} \quad (3.107)$$

onde,

$$H_{1j} = -\frac{a_m \rho_o}{L} + \frac{v_j^2 a_m \rho_o L}{6a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 a_m \rho_o L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) e^{-\beta_\kappa \delta_T}; j=1,2$$

$$H_{2j} = -\frac{v_j^2 a_m \rho_o L}{6a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 a_m \rho_o L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) (1-2e^{-\beta_\kappa \delta_T}) e^{-2\beta_\kappa \delta_T},$$

(3.108)

$$H_{3j} = \frac{v_j^2 a_m \rho_o L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) (1-e^{-\beta_\kappa \delta_T})^2 e^{-(n+1)\beta_\kappa \delta_T}; n=2,3,\dots$$

As funções  $U_j$  e  $V_j$  resultam com expressões idênticas às Eqs. (3.98), (3.99) e (3.100) e as funções  $W_j, Z_j, j=0,1,2,\dots$  são nulas, consistente com o fato de que não deve haver influência do processo de transferência de massa sobre o processo de transferência de calor.

A densidade de fluxo de calor na superfície em análise num instante qualquer fica associada unicamente às temperaturas na mesma superfície e na superfície oposta, em instantes anteriores, através das funções  $U_j$  e  $V_j$  respectivamente, de maneira consistente com o fenômeno analisado.

A densidade de fluxo de massa numa superfície num instante considerado está associada, no entanto, às temperaturas e aos conteúdos de umidade na mesma superfície e na superfície oposta àquela analisada, em instantes anteriores, em termos das funções  $S_j, T_j$  e das funções  $X_j, Y_j$  respectivamente, consistentemente com a condição de que o processo de transferência de massa é influenciado pelo transporte de calor no elemento poroso, mesmo quando  $\epsilon=0$ .

A situação correspondente a  $\epsilon=0$ , que se reflete na condição de independência da transferência de calor em relação ao transporte de massa, caracteriza segundo Comini et al. [13] problemas de interesse prático, principalmente, em se tratando da análise térmica dos componentes porosos de edificação.

### 3.8.3 - Situação em que $\delta=0$

Quando o fator de difusão térmica é nulo o efeito térmico sobre a variação do conteúdo de umidade deixa de existir, e a equação de transferência de massa, Eq. (3.2) fica desacoplada da equação de transferência de calor, Eq. (3.1).

Calculando os valores limites de  $v_j^2$  ( $j=1,2$ ), Eq. (3.22), quando  $\delta$  se aproxima de zero, obtêm-se

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 1, \\ v_2^2 &= \frac{1}{Lu}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Inserindo estes resultados nas expressões das funções de transferência obtêm-se expressões simplificadas, a partir da simples substituição dos valores de  $v_1^2$  e  $v_2^2$ .

Desse modo,

$$\begin{aligned} W_0 &= -\frac{\epsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} M_{11} + \frac{\epsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} M_{12}, \\ W_1 &= -\frac{\epsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} M_{21} + \frac{\epsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} M_{22}, \\ W_n &= -\frac{\epsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} M_{31} + \frac{\epsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} M_{32} ; n=2,3,\dots, \end{aligned} \quad (3.109)$$

onde,

$$\begin{aligned} M_{1j} &= -\frac{\lambda_q}{L} - \frac{v_j^2 \lambda_q L}{3a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) e^{-\beta_{\kappa} \delta_T}; j=1,2 \\ M_{2j} &= \frac{v_j^2 \lambda_q L}{3a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-2e^{\beta_{\kappa} \delta_T}) e^{-2\beta_{\kappa} \delta_T}, \\ M_{3j} &= \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-e^{\beta_{\kappa} \delta_T})^2 e^{-(n+1)\beta_{\kappa} \delta_T}; n=2,3,\dots \end{aligned} \quad (3.110)$$

e, da mesma forma,

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= -\frac{\varepsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} N_{11} + \frac{\varepsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} N_{12} , \\
 Z_1 &= -\frac{\varepsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} N_{21} + \frac{\varepsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} N_{22} , \\
 Z_n &= -\frac{\varepsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} N_{31} + \frac{\varepsilon r Lu}{C_q(1-Lu)} N_{32} ; n=2,3,\dots,
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

onde,

$$\begin{aligned}
 N_{1j} &= -\frac{\lambda_q}{L} + \frac{v_j^2 \lambda_q L}{6a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) e^{-\beta_\kappa \delta_T}; j=1,2 \\
 N_{2j} &= -\frac{v_j^2 \lambda_q L}{6a_q \delta_T} + \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) (1-2e^{\beta_\kappa \delta_T}) e^{-2\beta_\kappa \delta_T} , \\
 N_{3j} &= \frac{v_j^2 \lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) (1-e^{\beta_\kappa \delta_T})^2 e^{-(n+1)\beta_\kappa \delta_T}; n=2,3,\dots
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

As funções  $U_j$  e  $V_j$  ficam com expressões iguais às Eqs. (3.98), (3.99), (3.100), e as funções  $X_j$  e  $Y_j$  com as Eqs. (3.102), (3.103), (3.104), e, da mesma forma as funções  $S_j$  e  $T_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) são nulas, o que mostra a consistência das expressões obtidas para a condição de que não há efeito térmico sobre a variação interna do conteúdo de umidade.

As funções  $U_j$  e  $V_j$  obtidas descrevem a influência das temperaturas na superfície em análise e na superfície oposta, em instantes anteriores, sobre a densidade de fluxo de calor correspondente à mesma superfície, no instante em consideração, enquanto, as funções  $W_j$  e  $Z_j$  descrevem a influência dos conteúdos de umidade na mesma superfície e na superfície oposta, em instante anteriores, consistente com a condição em que  $\delta=0$ .

Consistentemente com o fenômeno analisado a densidade de fluxo de massa na superfície em questão, no instante em consideração associa-se unicamente aos conteúdos de umidade na mesma superfície e na oposta, em instantes anteriores, através das funções  $X_j$  e  $Y_j$  obtidas.

Assim como a situação em  $\epsilon=0$ , a situação correspondente a  $\delta=0$  que se reflete na condição de independência da transferência de massa em relação ao transporte de calor no elemento poroso, caracteriza também problemas de interesse prático.

#### 3.8.4 - Situação em que $\epsilon=\delta=0$ simultaneamente

Quando  $\epsilon=\delta=0$  simultaneamente as equações de transferência de calor e massa, Eqs. (3.1) e (3.2), ficam totalmente desacopladas, correspondendo a uma situação em que o meio poroso está saturado de umidade e o efeito térmico sobre a transferência de massa não existe.

Calculando os valores das raízes  $v_j^2$  ( $j=1,2$ ), Eq. (3.22) no limite, quando  $\epsilon$  e  $\delta$  se aproximam de zero simultaneamente, obtem-se:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= 1, \\ v_2^2 &= \frac{1}{Lu}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Utilizando-se estes resultados nas expressões das funções de transferência e calculando-se os seus valores limites quando  $\epsilon$  e  $\delta$  tendem a zero, resultam somente:

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\lambda_q}{L} + \frac{\lambda_q L}{3a_q \delta_T} - \frac{\lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) e^{-a \delta_T}, \\ U_1 &= - \frac{\lambda_q L}{3a_q \delta_T} - \frac{\lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2}\right) (1-2e^{a \delta_T}) e^{-2a \delta_T}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$U_n = - \frac{\lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right) (1 - e^{a\delta_T})^2 e^{-(n+1)a\delta_T} ; n = 2, 3, \dots,$$

$$V_0 = \frac{\lambda_q}{L} - \frac{\lambda_q L}{6a_q \delta_T} - \frac{\lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) e^{a\delta_T},$$

$$V_1 = \frac{\lambda_q L}{6a_q \delta_T} - \frac{\lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) (1 - 2e^{a\delta_T}) e^{-2a\delta_T}, \quad (3.99)$$

$$V_n = - \frac{\lambda_q L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) (1 - e^{a\delta_T})^2 e^{-(n+1)a\delta_T} ; n = 2, 3, \dots,$$

onde,

$$a = \frac{a_q \kappa^2 \pi^2}{L^2}, \quad (3.100)$$

e, da mesma forma,

$$X_0 = \frac{a_m \rho_0}{L} + \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{3a_q \delta_T} - \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right) e^{-b\delta_T},$$

$$X_1 = - \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{3a_q \delta_T} - \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right) (1 - 2e^{b\delta_T}) e^{-2b\delta_T}, \quad (3.102)$$

$$X_n = - \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\kappa^2} \right) (1 - e^{b\delta_T})^2 e^{-(n+1)b\delta_T} ; n = 2, 3, \dots,$$

$$Y_0 = \frac{a_m \rho_0}{L} - \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{6a_q \delta_T} - \frac{v_2^2 a_m \rho_0 L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) e^{-b\delta_T},$$

$$Y_1 = \frac{v_2^2 a_m \rho_o L}{6 a_q \delta_T} - \frac{v_2^2 a_m \rho_o L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) (1 - 2e^{-b\delta_T}) e^{-2b\delta_T}, \quad (3.103)$$

$$Y_n = \frac{v_2^2 a_m \rho_o L}{a_q \delta_T} \cdot \frac{2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^\kappa}{\kappa^2} \right) (1 - e^{-b\delta_T}) e^{-(n+1)b\delta_T}; \quad n=2,3,\dots,$$

onde,

$$b = \frac{a_q \kappa^2 \pi^2 L u}{L}, \quad (3.104)$$

que são as mesmas para os casos  $\epsilon=0$  ou  $\delta=0$ .

As indeterminações que ocorrem para  $\epsilon=\delta=0$  são idênticas as de  $\epsilon=0$ . Resultam diferentes de zero somente as funções  $U_j$ ,  $V_j$  e  $X_j$ ,  $Y_j$ , ( $j=0,1,2,\dots$ ) associados aos processos de transferência de calor e massa respectivamente. As demais funções são nulas, consistente com o fato de que não deve haver interdependências dos processos de transferência quando  $\epsilon=\delta=0$ , e essas funções estão associadas a influência de um processo de transferência em relação ao outro.

Nesta situação o perfil de temperatura (ou o fluxo de calor numa superfície), num dado instante, irá depender somente das temperaturas, em instantes anteriores, da mesma superfície e da superfície oposta, em função dos parâmetros  $U_j$  e  $V_j$  respectivamente. Do mesmo modo o perfil do conteúdo de umidade ou o fluxo de massa numa superfície num dado instante depende somente dos conteúdos de umidade da mesma superfície e da oposta em instantes precedentes, em função dos parâmetros  $X_j$  e  $Y_j$  respectivamente.

A situação em que  $\delta=\epsilon=0$  simultaneamente, caracteriza problemas mais simples, onde os processos de transferência de calor e massa são analisados como sendo dois processos separados e em paralelo e cujas soluções podem ser obtidas por métodos menos complexos.

### 3.8.5 - Situação em que $Lu=1$ e $\delta=\epsilon=0$

Tem-se uma situação semelhante àquela para  $\epsilon=\delta=0$ , ou seja, as equações diferenciais do processo de transferência ficam desacopladas, com uma igual distribuição dos campos de potencial térmico e de potencial de transferência de massa, em função da igualdade das difusibilidades térmica e mássica quando  $Lu=1$ .

Calculando os valores limites de  $v_j^2$  ( $j=1,2$ ), Eq. (3.22), quando  $Lu$  tende à unidade e  $\delta$  e  $\epsilon$  se aproximam de zero, obtêm-se:

$$v_1^2 = v_2^2 = 1 . \quad (3.113)$$

Raízes iguais a unidade e  $\epsilon=\delta=0$  quando substituídas nas expressões das funções de transferência resultam em indeterminações do tipo  $\frac{0}{0}$ . As razões  $\frac{(1-v_2^2)}{(v_1^2-v_1^2)}$ ,  $\frac{(1-v_1^2)}{(v_2^2-v_1^2)}$ ,  $\frac{\epsilon r}{C_q(v_2^2-v_1^2)}$ ,  $\frac{C_q(1-v_1^2)(1-v_2^2)}{\epsilon r(v_2^2-v_1^2)}$  ficam indeterminadas. Calculando-se os valores limites e utilizando o teorema de L'Hopital para resolver o problema das indeterminações obtêm-se expressões semelhantes àquelas da situação anterior, com  $v_2^2=1$ .

Assim como na situação anterior, somente as funções de transferências  $U_j$  e  $V_j$  associadas ao processo de transferência de calor e as funções  $X_j$  e  $Y_j$  associadas ao processo de transferência de massa são diferentes de zero. As demais funções de transferência,  $W_j, Z_j, S_j$  e  $T_j$ , associadas à interferência de um processo de transferência em relação ao outro são nulas, consistente com a condição de que essa interferência não existe quando  $\epsilon=\delta=0$  simultaneamente.

A diferença existente em relação à situação analisada anteriormente é que as funções  $U_j$  são iguais as funções  $X_j$  e, da mesma forma, as funções  $V_j$  são também iguais as funções  $Y_j$ , consistente com  $Lu=1$ .

Do mesmo modo que a situação anterior, a situação em que  $Lu=1$  e  $\epsilon=\delta=0$  também caracteriza problemas mais simples, onde o processo de transferência de massa ocorre separada e paralelamente ao processo de transferência de calor, no entanto, tendo as difusi

bilidade iguais devido a  $Lu=1$ .

### 3.9 - Conclusão

Desenvolveu-se um modelo matemático apresentando uma formulação geral de cálculo das funções de transferência para o transporte simultâneo de calor e massa numa região porosa, homogênea, plana e de espessura finita. No método, foi utilizado basicamente o princípio de superposição de maneira tal que o efeito das distribuições de temperatura e conteúdo de umidade sobre as densidades de fluxo de calor e massa na região, é a soma dos efeitos causados por muitos pulsos individuais de temperatura e conteúdo de umidade durante tempos precedentes.

O método das funções de transferência na resolução do sistema das equações diferenciais governantes leva, portanto, a uma solução aproximada, onde os perfis da temperatura e do conteúdo de umidade nos contornos são aproximados por um trem de pulsos triangulares. As funções de transferência precisam ser determinadas uma única vez e podem então ser combinadas com condições de contorno apropriadas para fornecerem a resposta a cada caso específico.

As funções de transferência foram também avaliadas para as situações limites em função dos números adimensionais  $Fe$  e  $Lu$  que determinam a influência da variação interna da temperatura sobre a variação interna do conteúdo de umidade e vice-versa.

#### 4 - APLICAÇÃO: SIMULAÇÃO DO PERÍODO INICIAL DE SECAGEM DE UM ELEMENTO POROSO DE EDIFICAÇÃO PRELIMINARMENTE SATURADO DE UMIDADE

##### 4.1 - Introdução

A aplicabilidade do método das funções de transferência, no estudo do transporte de calor e umidade em meios porosos, é bastante ampla. A aplicação realizada neste trabalho limita-se, no entanto, à análise do comportamento térmico de uma parede úmida de edificação, sujeita a uma condição de contorno de terceira espécie, função arbitrária do tempo.

Os componentes das edificações estão sempre sujeitos às mudanças da temperatura devidas às variações diárias das condições climáticas. Essas variações de temperatura promovem o movimento de umidade nos componentes porosos das edificações. Em consequência, as propriedades estruturais dos materiais que constituem esses elementos podem ser bastante afetadas.

Além desses efeitos, a presença da umidade num elemento poroso pode também afetar significativamente a transferência de calor através desse elemento, em consequência dos processos de mudança de fase que ocorrem no interior e nas suas superfícies limitantes.

Todos esses efeitos condicionados à presença de umidade num elemento poroso, acima citados, têm sido objetos de muitas observações práticas (vide capítulo de introdução).

Utilizando-se as equações governantes (3.1) e (3.2) para as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade no elemento poroso obtém-se uma descrição para o comportamento térmico do elemento poroso úmido, usando-se condições de contorno adequadas. Os perfis de temperatura e do conteúdo de umidade nas superfícies de contorno do elemento são determinados admitindo-se que a variação real das propriedades do material seja pequena dentro da região de análise, no problema específico a ser estudado.

Numa primeira etapa apresenta-se as condições de contorno que descrevem a lei de troca de calor e massa entre as superfícies limitantes desse elemento e o meio adjacente. Numa segunda etapa apresenta-se o método de solução.

Finalmente, são apresentados os perfis de temperatura e do conteúdo de umidade nas superfícies de contorno do elemento, obtidos levando-se em conta as considerações acima citadas. Os resultados mostram a evolução da temperatura e da umidade nas superfícies limitantes de um elemento poroso preliminarmente saturado de umidade, para o período correspondente ao terceiro ciclo após o início do processo de secagem.

#### 4.2 - Condições de Contorno

As condições de contorno refletem a lei de interação entre as superfícies limitantes do elemento poroso e o meio ambiente. Essa interação consiste numa troca de calor e massa com o meio.

Denotando-se as variáveis associadas às condições nas superfícies de contorno do elemento poroso pelo sub-índice "s" e as associadas ao meio pelo sub-índice "a", pode-se obter através de um balanço de massa:

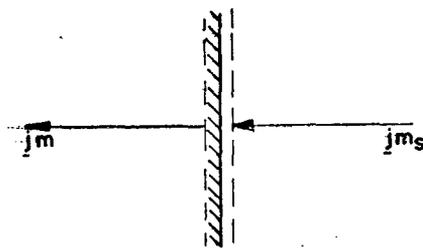


Fig. 17 - Volume de controle para o balanço de massa

$$\underline{j}_m - \underline{j}_{ms} = 0, \quad (4.1)$$

onde  $\underline{j}_{ms}$  é o fluxo de umidade trocado entre a superfície do elemento e o meio ambiente e  $\underline{j}_m$  é o fluxo de umidade devido aos processos internos de transporte de vapor e/ou líquido. Desse modo,

$$\underline{j}_m = \underline{j}_v + \underline{j}_l, \quad (4.2)$$

onde  $\underline{j}_v$  é a densidade de fluxo de vapor e  $\underline{j}_l$  é a densidade de fluxo de líquido. Assim, de acordo com a seção 2.7:

$$\underline{j}_m = a_m \rho_o [\nabla \phi]_s + \delta \nabla \psi]_s, \quad (4.3)$$

onde  $\psi = T - T^o$  e  $\phi = u - u^o$ , como usualmente (seção 3.2). Substituindo a Eq. (4.3) na Eq. (4.1) e considerando o sentido do eixo de coordenadas  $x$  como positivo, resulta para a superfície de contorno externa do elemento,

$$a_m \rho_o [\nabla \phi]_{x=0} + \delta \nabla \psi]_{x=0} - \underline{j}_{m0} = 0, \quad (4.4a)$$

onde  $\underline{j}_{m0}$  é o fluxo de umidade trocado entre a superfície de contorno externa e o meio. Analogamente, para a superfície de contorno interna, obtém-se:

$$- a_m \rho_o [\nabla \phi]_{x=L} + \delta \nabla \psi]_{x=L} - \underline{j}_{mL} = 0, \quad (4.4b)$$

onde  $\underline{j}_{mL}$  é o fluxo de umidade trocado entre a superfície de contorno interna e o meio.

A conservação da energia permite, por outro lado, escrever:

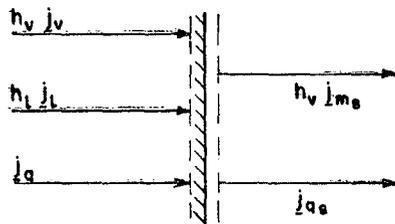


Fig. 18 - Volume de controle para o balanço de energia

$$\underline{j}_q - \underline{j}_{qs} + (h_v \underline{j}_v + h_\ell \underline{j}_\ell - h_v \underline{j}_{ms}) = 0, \quad (4.5)$$

onde  $\underline{j}_{qs}$  é o calor sensível trocado entre a superfície do elemento poroso e o meio ambiente,  $\underline{j}_q$  corresponde à densidade de fluxo de calor por condução fornecida à superfície em função da existência de um gradiente térmico no interior do material,  $h_v \underline{j}_v$  e  $h_\ell \underline{j}_\ell$  são as energias transportadas à superfície associadas ao processo de migração de vapor e líquido, respectivamente, no interior do material e  $h_v \underline{j}_{ms}$  é a energia associada ao processo de migração de vapor entre a superfície e o meio. Da conservação da massa,

$$\underline{j}_v = \epsilon \underline{j}_{ms}, \quad (4.6)$$

$$\underline{j}_\ell = (1-\epsilon) \underline{j}_{ms},$$

onde  $\epsilon$  é o coeficiente de mudança de fase (seção 2.7). Desse modo:

$$h_v \underline{j}_{ms} - h_v \underline{j}_v - h_\ell \underline{j}_\ell = (h_v - h_\ell) (1-\epsilon) \underline{j}_{ms} = r (1-\epsilon) \underline{j}_{ms}, \quad (4.7)$$

onde  $r$  é o calor latente de vaporização (seção 2.6).

Inserindo esse resultado na Eq. (4.5), e usando a lei de Fourier, resulta:

$$-\lambda_q (\nabla \psi)_s - \underline{j}_{qs} - r (1-\epsilon) \underline{j}_{ms} = 0. \quad (4.8)$$

Usando a mesma convenção de sinal utilizada para o balanço de massa, obtém-se para a superfície de contorno externa:

$$\lambda_q (\nabla \psi)_{x=0} - r (1-\epsilon) \underline{j}_{m0} + \underline{j}_{q0} = 0, \quad (4.9a)$$

onde  $\underline{j}_{q0}$  é o calor sensível trocado entre a superfície de contorno externa e o meio. Analogamente, para a superfície de contorno interna, obtêm-se:

$$\lambda_q \nabla \psi)_{x=L} + r (1-\epsilon) \underline{j}_{mL} + \underline{j}_{qL} = 0 , \quad (4.9b)$$

onde  $\underline{j}_{qL}$  é o calor sensível trocado entre a superfície de contorno interna e o meio. As expressões para os fluxos  $\underline{j}_{qs}$  e  $\underline{j}_{ms}$  dependem do tipo de problema. Se o meio poroso está saturado de umidade, o fator  $\epsilon$  é nulo pois há migração apenas de líquido no interior do material. As Eqs. (4.9) ficam com a seguinte forma:

$$\lambda_q \nabla \psi)_{x=0} - r \underline{j}_{m0} + \underline{j}_{q0} = 0 , \quad (4.10)$$

$$\lambda_q \nabla \psi)_{x=L} - r \underline{j}_{mL} + \underline{j}_{qL} = 0 .$$

Neste caso, parte do calor que chega à superfície, a partir do ambiente, migra por condução para o interior do material e parte é utilizado para vaporizar o líquido. No interior do meio poroso ocorre somente migração de líquido, essencialmente por capilaridade, e os processos de mudança de fase ocorrem apenas nas superfícies de contorno do elemento poroso.

Quando o fator  $\epsilon$  é igual a unidade (ou um) os processos de capilaridade não interferem na migração de umidade que se modifica, em cada ponto, por ação exclusiva dos processos de mudança de fase. As Eqs. (4.9), nesse caso, se escrevem:

$$\lambda_q \nabla \psi)_{x=0} + \underline{j}_{q0} = 0 , \quad (4.11)$$

$$\lambda_q \nabla \psi)_{x=L} + \underline{j}_{qL} = 0 .$$

No volume de controle, esquematizado nas figs 17 e 18, ocorre condensação seguida por vaporização, de forma que as energias transportadas, associadas aos processos de mudança de fase se compensam, anulando o termo associado ao transporte de calor latente na superfície,  $r(1-\epsilon) \underline{j}_{ms}$  das Eq. (4.9).

Considerando que a troca de calor entre a superfície do elemento poroso e o meio ambiente se dá somente por convecção,  $\underline{j}_{qs}$  pode ser calculado através das seguintes expressões, de acordo com a superfície de contorno analisada (externa ou interna):

$$\underline{j}_{q0} = \alpha_{qe} (\psi_{ae} - \psi_0) , \quad (4.12a)$$

$$\underline{j}_{qL} = \alpha_{qi} (\psi_L - \psi_{ai}) , \quad (4.12b)$$

onde  $\alpha_q$  é o coeficiente de transferência de calor,  $\psi_{ae}$  e  $\psi_{ai}$  são, respectivamente, as temperaturas do meio ambiente externo e interno,  $\psi_0$  e  $\psi_L$  as temperaturas das superfícies de contorno externa e interna do elemento,  $\underline{j}_{q0}$  e  $\underline{j}_{qL}$  os fluxos de calor por convecção através das superfícies de contorno externa e interna.

Em situações usuais, um fator importante a considerar contribuindo para a troca de calor da superfície de contorno externa do elemento com o meio ambiente é a quantidade de radiação solar absorvida pela superfície durante o período diurno. A radiação solar absorvida afeta bastante o balanço térmico da superfície de contorno externa, principalmente nas horas de pique; quando a temperatura do ar e a parcela de radiação atingem seus valores máximos ocasionando um aumento significativo da temperatura na superfície.

Se a incidência de radiação solar sobre a superfície de contorno externa é levada em conta, à Eq. (4.12a) deve-se acrescentar a parcela correspondente à radiação absorvida. Desse modo:

$$\underline{j}_{q0} = \alpha_{qe} (\psi_{ae} - \psi_0) + \alpha_r \cdot \underline{j}_{qr} , \quad (4.12c)$$

onde  $\alpha_r$  é a absorptividade em ondas curtas do material e  $j_{qr}$  é o fluxo de calor por radiação.

Admite-se, da mesma forma, que a troca de massa entre a parede e o meio ambiente possa ser escrita como sendo proporcional à uma diferença de potenciais químicos do vapor [4, 24],

$$j_{ms} = \alpha_\mu (\mu_s - \mu_a) , \quad (4.13)$$

onde  $\alpha_\mu$  é o coeficiente de transferência de massa,  $\mu_s$  e  $\mu_a$  são, respectivamente, os potenciais químicos na superfícies da parede e no meio ambiente.

Para a superfície do elemento poroso, o potencial químico do vapor pode ser calculado através de [18]:

$$\mu_s = \mu_{\text{plano}} + Mg\Psi , \quad (4.14)$$

onde  $\mu_{\text{plano}}$  é o potencial químico para uma superfície plana; é uma função apenas da temperatura da mesma,  $Mg\Psi$  é a parcela correspondente à redução do potencial químico devido à ação dos capilares que caracterizam a superfície do meio poroso,  $M$  é o peso molecular da água,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\Psi$  o potencial capilar ou de sucção que está associado à capacidade de sucção de umidade do material poroso (seção 2.3).

Para o meio gasoso, considerando-o uma mistura de gases ideais [19],

$$\mu_a = \mu(T_a) + RT_a \ln \left[ \frac{p_{va}}{p_{vs}(T_a)} \right] , \quad (4.15)$$

onde  $T_a$  é a temperatura do meio gasoso (ambiente),  $R$  a constante universal dos gases,  $p_{vs}$  a pressão de saturação do vapor, função apenas da temperatura do meio e  $p_{va}$  a pressão do vapor no meio, função da umidade relativa e da temperatura do meio.

Admitindo-se uma aproximação linear, quando as temperaturas da superfície da parede e do meio não são muito diferentes, obtém-se:

$$\mu_{\text{plano}} - \mu(T_a) \approx RT_s \ln \left( \frac{p_{vS}(T_s)}{p_{vS}(T_a)} \right), \quad (4.16)$$

onde  $T_s$  é a temperatura da superfície. A condição limite  $T_s = T_a$  é atendida pela Eq. (4.16) acima.

Combinando as Eqs. (4.14), (4.15) e (4.16), obtém-se:

$$\mu_s - \mu_a = RT_s \ln \left( \frac{p_{vS}(T_s)}{p_{vS}(T_a)} \right) - RT_a \ln \left( \frac{p_{va}}{p_{vS}(T_a)} \right) + Mg\psi. \quad (4.17)$$

Utilizando-se a equação de Clapeyron [19] o termo  $\ln \left( \frac{p_{vS}(T_s)}{p_{vS}(T_a)} \right)$  pode ser aproximado pela seguinte expressão:

$$\ln \left( \frac{p_{vS}(T_s)}{p_{vS}(T_a)} \right) \approx \frac{r_1}{R} \left( \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_s} \right), \quad (4.18)$$

onde  $r_1$  é o calor latente de vaporização em unidades molares (J/mol).

Inserindo a Eq. (4.18) na Eq. (4.17) obtém-se:

$$\mu_s - \mu_a \approx r_1 \left( \frac{T_s - T_a}{\bar{T}_a} \right) - RT_a \ln \left( \frac{p_{va}}{p_{vS}(T_a)} \right) + Mg\psi, \quad (4.19)$$

onde  $\bar{T}_a$  é a temperatura média do meio. Substituindo a Eq. (4.19) na Eq. (4.13), obtém-se a equação final para o fluxo de umidade trocado entre as superfícies de contorno do elemento poroso e o meio,

$$j_{ms} = \frac{\alpha \mu}{M} \left[ r_1 \frac{(\psi_s - \psi_a)}{\bar{\psi}_a} - R \psi_a \ln(\theta) + Mg\psi \right], \quad (4.20)$$

onde  $\psi = T - T^0$  como anteriormente usado (seção 3.2) e  $\theta$  é a umidade relativa do meio ambiente. O primeiro e o segundo termos de membro à direita na Eq. (4.20) representam um desdobramento do fluxo de massa associado à diferença entre as pressões parciais do vapor na superfície  $p_{vS}(T_s)$  e no meio  $p_{va}$ , escrita na forma:

$$p_{vS}(T_s) - p_{va} = [p_{vS}(T_s) - p_{vS}(T_a)] + [p_{vS}(T_a) - p_{va}]. \quad (4.21)$$

Assim o primeiro termo do membro à direita pode ser positivo ou negativo, dependendo das temperaturas da superfície e do meio enquanto o segundo termo é um termo sempre positivo. A influência da condensação capilar é dada pelo termo  $Mg\psi$ . É um termo sempre negativo que se associa à capacidade de adsorção da umidade do ar pela superfície de contorno do elemento poroso.

Aplicando a Eq. (4.20), em função da superfície de contorno a ser analisada (externa ou interna), obtêm-se:

$$\underline{j}_{m0} = \frac{\alpha_{\mu e}}{M} \left[ r_1 \frac{\psi_0 - \psi_{ae}}{\bar{\psi}_{ae}} - R \psi_{ae} \ln(\theta_e) + Mg\psi_0 \right], \quad (4.22a)$$

$$\underline{j}_{mL} = \frac{\alpha_{\mu i}}{M} \left[ r_1 \frac{\psi_L - \psi_{ai}}{\bar{\psi}_{ai}} - R \psi_{ai} \ln(\theta_i) + Mg\psi_L \right], \quad (4.22b)$$

onde  $\alpha_{\mu e}$  e  $\alpha_{\mu i}$  são, respectivamente, os coeficientes de transferência de massa para o meio externo e interno,  $\theta_e$  e  $\theta_i$  as umidades relativas do meio externo e interno,  $\underline{j}_{m0}$  e  $\underline{j}_{mL}$  os fluxos de massa trocado entre as superfícies de contorno externa e interna e o meio.

Substituindo as expressões de  $\underline{j}_{qs}$  e  $\underline{j}_{ms}$ , Eqs. (4.12) e (4.22), nas Eqs. (4.4) e (4.9), obtêm-se condições de contorno de terceira espécie.

Para a superfície de contorno externa ( $x=0$ ),

$$- a_m \rho_o \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \delta \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_{\mu e}}{M} \left[ r_1 \frac{\psi_0 - \psi_{ae}}{\bar{\psi}_{ae}} - R \psi_{ae} \ln (\Theta_e) + Mg \Psi_0 \right] = 0, \quad (4.23a)$$

$$- \lambda_q \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \alpha_{qe} (\psi_0 - \psi_{ae}) + (1-\epsilon) r \frac{\alpha_{\mu e}}{M} \left[ r_1 \frac{\psi_0 - \psi_{ae}}{\bar{\psi}_{ae}} - R \psi_{ae} \ln (\Theta_e) + Mg \Psi_0 \right] - \alpha_r \cdot j_{qr} = 0. \quad (4.23b)$$

Para a superfície de contorno interna ( $x=L$ )

$$a_m \rho_o \left[ \frac{\partial \phi_L}{\partial x} + \delta \frac{\partial \psi_L}{\partial x} \right] + \frac{\alpha_{\mu i}}{M} \left[ r_1 \frac{\psi_L - \psi_{ai}}{\bar{\psi}_{ai}} - R \psi_{ai} \ln (\Theta_i) + Mg \Psi_L \right] = 0, \quad (4.23c)$$

$$- \lambda_q \frac{\partial \psi_L}{\partial x} + \alpha_{qi} (\psi_{ai} - \psi_L) - (1-\epsilon) r \frac{\alpha_{\mu i}}{M} \left[ r_1 \frac{\psi_L - \psi_{ai}}{\bar{\psi}_{ai}} - R \psi_{ai} \ln (\Theta_i) + Mg \Psi_L \right] = 0. \quad (4.23d)$$

Desse modo, os perfis de temperatura e do conteúdo de umidade função do tempo, nas superfícies de contorno do elemento, podem ser determinadas resolvendo-se o sistema de equações acima.

Os termos  $\lambda_q \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_s$  e  $a_m \rho_o \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_s$ , associados ao processo da transferência de calor e massa por condução no interior do material, são, determinados através das funções de transferência, calculadas no capítulo anterior.

De acordo com a seção 3.6, obtêm-se, em função da superfície de contorno a ser analisada (externa ou interna),

$$- \lambda_q \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{j=0}^{\tau} (U_j \psi_{0,\tau-j} - V_j \psi_{L,\tau-j} + W_j \phi_{0,\tau-j} - Z_j \phi_{L,\tau-j}) , \quad (4.24a)$$

$$- a_m \rho_o \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{j=0}^{\tau} (S_j \psi_{0,\tau-j} - T_j \psi_{L,\tau-j} + X_j \phi_{0,\tau-j} - Y_j \phi_{L,\tau-j}) , \quad (4.24b)$$

$$- \lambda_q \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=L} = \sum_{j=0}^{\tau} (V_j \psi_{0,\tau-j} - U_j \psi_{L,\tau-j} + Z_j \phi_{0,\tau-j} - W_j \phi_{L,\tau-j}) , \quad (4.24c)$$

$$- a_m \rho_o \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=L} = \sum_{j=0}^{\tau} (T_j \psi_{0,\tau-j} - S_j \psi_{L,\tau-j} + Y_j \phi_{0,\tau-j} - X_j \phi_{L,\tau-j}) . \quad (4.24d)$$

Nas expressões acima, as densidades de fluxo de calor e massa no instante  $\tau$  são relacionadas com os valores das temperaturas  $\psi$  e dos conteúdos de umidade  $\phi$  nas superfícies do elemento no mesmo instante  $\tau$  e nos instantes anteriores  $\tau-1, \tau-2, \dots, 0$ .

Desse modo, substituindo-se as Eqs. (4.24) nas Eqs. (4.23), os valores da temperatura e do conteúdo de umidade no instante  $\tau$  ficam condicionados aos valores nos instantes precedentes. Essa dependência em relação aos valores nos instantes anteriores é descrita pelas funções de transferência  $U_j, V_j, W_j, Z_j, S_j, T_j, X_j$  e  $Y_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ).

Inserindo as expressões dos termos  $\lambda_q \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_s$  e  $a_m \rho_o \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_s$ , Eqs. (4.24), nas Eqs. (4.23), o problema se resume à solução do sistema de equações lineares, Eq. (4.23), onde as incógnitas são as temperaturas  $\psi_0$  e  $\psi_L$  e os conteúdos de umidade  $\phi_0$  e  $\phi_L$  das superfícies de contorno externa e interna, respectivamente.

### 4.3 - Solução do Sistema de Equações

A temperatura e o conteúdo de umidade nas superfícies do elemento poroso, de acordo com a seção 3.2, são admitidos como funções arbitrárias do tempo. Além disso, os valores da temperatura e do conteúdo de umidade num instante  $\tau$  estão relacionados aos valores dos mesmos em instantes precedentes, como visto na seção anterior. Dessa forma, a solução do sistema de equações acima deve ser obtida através de um método iterativo, consistindo em resolver o sistema a partir de uma aproximação inicial, obtendo-se aproximações sucessivamente mais precisas através da aplicação de um método de cálculo conveniente.

Os métodos iterativos têm como vantagens a simplicidade e a uniformidade das operações a serem realizadas, sendo bastante adequados para o uso em computador. Uma outra vantagem consiste na sua relativa insensibilidade ao crescimento dos erros de arredondamento [29].

Embora o número de incógnitas seja pequeno, para o presente caso, a solução por um método direto é inadequada em função da relação de dependência existente entre os valores das incógnitas no instante  $\tau$  e os valores das mesmas em instantes anteriores.

Desse modo, considere-se o sistema na forma de uma equação matricial,

$$A \underline{x} = \underline{b} , \quad (4.25)$$

onde  $A$  é a matriz dos coeficientes das incógnitas,  $\underline{x}$  o vetor das incógnitas e  $\underline{b}$  o vetor dos termos fontes.

Uma condição suficiente para que se verifique a convergência do método iterativo é que a soma dos valores absolutos dos elementos de cada linha da matriz  $A$ , excluindo o termo da diagonal principal, seja menor do que o valor absoluto do termo na diagonal [30], ou seja,

$$\sum_{k=1}^n |a_{ik}| \leq |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq k \quad (4.26)$$

onde os  $a_{ik}$  são os elementos de A e n a ordem da matriz A.

O método de inversão de matrizes foi utilizado como método de cálculo em cada etapa iterativa. A solução é obtida multiplicando-se a matriz inversa de A pelo vetor dos termos fontes  $\underline{b}$ ,

$$\underline{x} = A^{-1} \underline{b}, \quad (4.27)$$

onde  $A^{-1}$  é a matriz inversa da matriz A, e, é calculada pelo método de Gauss-Jordan [30]. Esse método se torna de fácil aplicação pois trata-se de um sistema de apenas 4 equações a 4 incógnitas, e, também porque a matriz A é invertida somente uma única vez, uma vez que os seus termos não se modificam de uma iteração a outra.

Uma tolerância, fixa o grau de precisão das soluções,

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \text{Tolerância}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k > M \quad (4.28)$$

onde M é o número máximo de iterações, n é a ordem da matriz A e  $x_i$  são os valores das incógnitas.

Colocando o sistema de equações, Eqs. (4.23), combinado com as Eqs. (4.24), na forma padrão  $A\underline{x} = \underline{b}$ , obtém-se a Eq. (4.29), (Tab. 7 a e b).



Tabela 7b - Termos fontes da Eq. 4.29, Tab. 7a

$$b_1 = \alpha_{qe} \psi_{ae,\tau} + \alpha_{\tau} i_{qr} - (1-\varepsilon)\tau \frac{\alpha_{\mu e}}{M} [-r_1 \frac{\psi_{ae,\tau}}{\bar{\psi}_{ae}} - R \psi_{ae,\tau} \lambda_n(\theta_e) + Mg\psi_0] - \sum_{j=1}^{\tau} [U_j \psi_{0,\tau-j} - V_j \psi_{L,\tau-j} + W_j \phi_{0,\tau-j} - Z_j \phi_{L,\tau-j}]$$

$$b_2 = \alpha_{qi} \psi_{ai,\tau} - (1-\varepsilon)\tau \frac{\alpha_{\mu i}}{M} [-r_1 \frac{\psi_{ai,\tau}}{\bar{\psi}_{ai}} - R \psi_{ai,\tau} \lambda_n(\theta_i) + Mg\psi_L] + \sum_{j=1}^{\tau} [V_j \psi_{0,\tau-j} - U_j \psi_{L,\tau-j} + Z_j \phi_{0,\tau-j} - W_j \phi_{L,\tau-j}]$$

$$b_3 = -\frac{\alpha_{\mu e}}{M} [-r_1 \frac{\psi_{ae,\tau}}{\bar{\psi}_{ae}} - R \psi_{ae,\tau} \lambda_n(\theta_e) + Mg\psi_0] - \sum_{j=1}^{\tau} [S_j \psi_{0,\tau-j} - T_j \psi_{L,\tau-j} + X_j \phi_{0,\tau-j} - Y_j \phi_{L,\tau-j}] - \frac{\alpha_{m^0 \delta}}{\lambda_q} \sum_{j=1}^{\tau} [U_j \psi_{0,\tau-j} -$$

$$V_j \psi_{L,\tau-j} + W_j \phi_{0,\tau-j} - Z_j \phi_{L,\tau-j}]$$

$$b_4 = -\frac{\alpha_{\mu i}}{M} [-r_1 \frac{\psi_{ai,\tau}}{\bar{\psi}_{ai}} - R \psi_{ai,\tau} \lambda_n(\theta_i) + Mg\psi_L] + \sum_{j=1}^{\tau} [T_j \psi_{0,\tau-j} - S_j \psi_{L,\tau-j} + Y_j \phi_{0,\tau-j} - X_j \phi_{L,\tau-j}] + \frac{\alpha_{m^0 \delta}}{\lambda_q} \sum_{j=1}^{\tau} [V_j \psi_{0,\tau-j} -$$

$$U_j \psi_{L,\tau-j} + Z_j \phi_{0,\tau-j} - W_j \phi_{L,\tau-j}]$$

Para o presente caso analisado, o sistema de equações governantes (3.1) e (3.2) e as condições de contorno, Eqs. (4.23), se simplificam, pois admite-se que não há mudança de fase no interior do elemento poroso ( $\epsilon=0$ ), ocorrendo migração de líquido por ação de forças capilares unicamente. Desse modo, a distribuição de temperatura fica independente da distribuição de conteúdo de umidade, no interior do material, em consequência do desacoplamento da equação da energia (3.1) em relação à equação de transferência de massa (3.2). Consequentemente as funções de transferência associada aos processos de mudança de fase que ocorrem no interior do material,  $W_j$  e  $Z_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ), se anulam (seção 3.8).

A solução do sistema de equações (4.29) fornece as variações superficiais de temperatura e umidade num elemento poroso, considerado no caso, como uma parede de edificação num processo de secagem; obtendo-se as distribuições diárias a partir de um perfil inicial de temperatura e umidade.

A análise de comportamento térmico obtida com as equações acima fica portanto, limitada a descrever a evolução das distribuições superficiais de temperatura e umidade, durante o período em que  $\epsilon=0$ . Para um caso real envolvendo, por exemplo, um elemento poroso de edificação, isso implicaria em obter a descrição do comportamento higo-térmico desse elemento somente durante os primeiros dias após um período de chuvas, pois, a partir desse período a redução do conteúdo de umidade no interior do material, associada ao processo de evaporação na superfície, impossibilita o uso de uma aproximação do tipo  $\epsilon=0$ .

A presente aplicação é, portanto, apenas ilustrativa da complexidade dos processos que ocorrem no interior do elemento poroso. Trabalhos futuros deverão levar em conta a relação de dependência  $\epsilon = \epsilon(u)$ , importante para a fase em que os processos de evaporação interna, ficam apreciáveis e começam a influir sobre o processo de transferência de calor no material.

Finalmente, de modo a avaliar a importância de cada uma das parcelas de fluxo o sistema de equações acima pode ser escrito na seguinte forma:

$$\underline{j}_{q0, \text{evap.}} + \underline{j}_{q0, \text{conv.}} + \underline{j}_{q0, \text{rad.}} + \underline{j}_{q0, \text{cond.}} = 0, \quad (4.30a)$$

$$\underline{j}_{qL, \text{evap.}} + \underline{j}_{qL, \text{conv.}} + \underline{j}_{qL, \text{cond.}} = 0, \quad (4.30b)$$

$$\underline{j}_{m0, \text{evap.}} + \underline{j}_{m0, (\nabla\psi)} + \underline{j}_{m0, (\nabla\phi)} = 0, \quad (4.30c)$$

$$\underline{j}_{mL, \text{evap.}} + \underline{j}_{mL, (\nabla\psi)} + \underline{j}_{mL, (\nabla\phi)} = 0, \quad (4.30d)$$

onde,

$$\underline{j}_{qs, \text{evap.}} = \frac{r \alpha_{\mu s}}{M} \left[ r_1 \frac{\psi_{s, \tau} - \psi_{a, \tau}}{\bar{\psi}_a} - R \psi_{a, \tau} \ln(\theta_s) + Mg\psi_s \right],$$

$$\underline{j}_{ms, \text{evap.}} = \frac{\alpha_{\mu s}}{M} \left[ r_1 \frac{\psi_{s, \tau} - \psi_{a, \tau}}{\bar{\psi}_a} - R \psi_{a, \tau} \ln(\theta_s) + Mg\psi_s \right],$$

$$\underline{j}_{qs, \text{conv.}} = \alpha_{qs} (\psi_{s, \tau} - \psi_{a, \tau}),$$

$$\underline{j}_{q0, \text{rad.}} = \underline{j}_{qr},$$

$$\underline{j}_{q0, \text{cond.}} = \sum_{j=0}^{\tau} [U_j \psi_{0, \tau-j} - V_j \psi_{L, \tau-j}], \quad (4.31)$$

$$\underline{j}_{qL, \text{cond.}} = - \sum_{j=0}^{\tau} [V_j \psi_{0, \tau-j} - U_j \psi_{L, \tau-j}],$$

$$\underline{j}_{m0, (\nabla\psi)} = \sum_{j=0}^{\tau} \left[ \left( S_j + \frac{a_m \rho_o \delta}{\lambda_q} U_j \right) \psi_{0, \tau-j} - \left( T_j + \frac{a_m \rho_o \delta}{\lambda_q} V_j \right) \psi_{L, \tau-j} \right],$$

$$\underline{j}_{mL, (\nabla\psi)} = - \sum_{j=0}^{\tau} \left[ \left( T_j + \frac{a_m \rho_o \delta}{\lambda_q} V_j \right) \psi_{0, \tau-j} - \left( S_j + \frac{a_m \rho_o \delta}{\lambda_q} U_j \right) \psi_{L, \tau-j} \right],$$

$$\begin{aligned} \dot{j}_{m0, (\nabla\psi)} &= \sum_{j=0}^{\tau} (X_j \phi_{0, \tau-j} - Y_j \phi_{L, \tau-j}), \\ \dot{j}_{mL, (\nabla\phi)} &= -\sum_{j=0}^{\tau} (Y_j \phi_{0, \tau-j} - X_j \phi_{L, \tau-j}), \end{aligned}$$

o que permite avaliar a importância e a contribuição de cada uma dessas parcelas de fluxo, sobre o comportamento térmico do elemento poroso. Os termos  $\dot{j}_{qs, \text{evap.}}$  e  $\dot{j}_{ms, \text{evap.}}$  representam, respectivamente, as parcelas de fluxo de calor e massa associadas aos processos de evaporação ou condensação nas superfícies do elemento poroso, o termo  $\dot{j}_{qs, \text{conv.}}$  é a parcela de fluxo de calor trocada por convecção entre as superfícies e o meio ambiente e o termo  $\dot{j}_{qs, \text{cond.}}$  representa o fluxo de calor condutivo (levando em conta a parcela correspondente ao armazenamento térmico). A radiação solar absorvida pela superfície de contorno externa do elemento poroso é representada pelo termo  $\dot{j}_{q0, \text{rad.}}$ . O fluxo de massa promovido pela existência de um gradiente térmico é representado pelo termo  $\dot{j}_{ms, (\nabla\psi)}$ , e o termo  $\dot{j}_{ms, (\nabla\phi)}$ , analogamente, é a parcela do fluxo de massa promovida pela existência de um gradiente do conteúdo de umidade na superfície de contorno do elemento poroso.

Para se obter a solução do sistema de equações (4.29) é necessário especificar os parâmetros presentes no mesmo, assim como o comportamento diário da temperatura e umidade relativa no meio ambiente, o que é feito a seguir.

#### 4.4 - Condições do Problema

A espessura do elemento poroso e as difusibilidades térmica e mássica são os dados necessários para o cálculo das funções de transferência. A difusibilidade térmica  $a_q$  é definida em termos das propriedades do material do elemento poroso,

$$a_q = \frac{\lambda}{C_q \rho_o}, \quad (4.32)$$

onde  $\lambda_q$  é a condutibilidade térmica,  $C_q$  é o calor específico e  $\rho_o$  a massa específica do material quando seco (seção 2.7).

Analisa-se um elemento poroso com as propriedades mostradas na tabela 8, que o assemelham ao concreto comumente utilizado na construção civil, conforme Fig. 19

Tabela 8 - Propriedades do elemento poroso

L [m]	$\lambda_q$ [W/mK]	$C_q$ [J/kg K]	$\rho_o$ [kg/m <sup>3</sup> ]
0,2	1,75	860,50	2150,0

A difusibilidade mássica é determinada em termos do número adimensional de Luikov, Lu, e da difusibilidade térmica, de acordo com:

$$a_m = Lu a_q . \quad (4.33)$$

O coeficiente de transferência de calor é calculado usando-se o número adimensional de Biot para o calor, a condutibilidade térmica e a espessura do elemento, através da seguinte expressão:

$$\alpha_q = Bi_q \left( \frac{\lambda}{L} \right) . \quad (4.34)$$

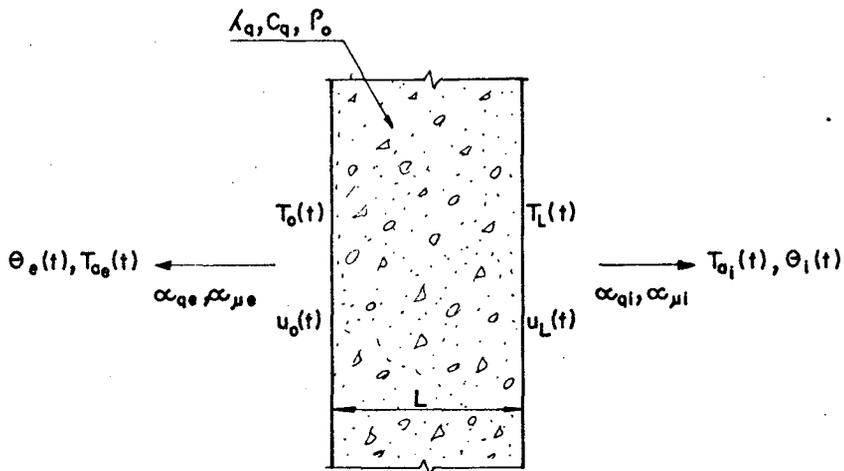


Fig. 19 - Amostra do elemento da Tabela 8

O coeficiente de transferência de massa  $\tilde{\epsilon}$  é estimado em termos do coeficiente de transferência da calor através da seguinte relação [Apêndice B]:

$$\alpha_{\mu s} = \beta \left( \frac{M}{RT_s} \right)^2 \frac{p_{vs} - p_{va}}{\ln \left( \frac{p_{vs}}{p_{va}} \right)}, \quad (4.35)$$

onde  $\beta$ , obtido pela relação  $\frac{\alpha_q}{\beta} = 1 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^2 \text{K}}$  [Apêndice B], é o coeficiente de transferência de massa em metros por hora,  $p_{vs}$  é a pressão parcial do vapor nas superfícies de contorno do elemento poroso e  $p_{va}$  é a pressão parcial do vapor no meio ambiente.

Admitindo-se para a superfície de contorno externa do elemento  $p_{vs} = 4238,8$  (N/m<sup>2</sup>), correspondente a uma temperatura média 30°C, para a superfície de contorno interna do elemento  $p_{vs} = 3164,6$  (N/m<sup>2</sup>), relativa a uma temperatura média de 25°C e para o meio ambiente  $p_{va} = 244,2$  (N/m<sup>2</sup>), correspondente a uma temperatura de 20°C e a 10% de umidade relativa, a Eq. (4.35) pode ser expressa, dependendo da superfície de contorno a ser analisada (externa ou interna), por:

$$\begin{aligned}\alpha_{\mu e} &\approx 7,3 \times 10^{-8} \beta_e, \\ \alpha_{\mu i} &\approx 5,8 \times 10^{-8} \beta_i,\end{aligned}\tag{4.36}$$

O problema fica então caracterizado em termos dos grupamentos adimensionais: Lu (número de Luikov),  $B_i$  (número de Biot), Fe (número de Federov) e do potencial de sucção  $\Psi$ .

O potencial de sucção  $\Psi$ , de acordo com as seções 2.3 e 2.5, apresenta uma variação muito brusca em relação ao conteúdo de umidade quando o material está praticamente seco, tendendo para valores infinitamente grandes, Fig. 4 (seção 2.5). Apresenta uma variação mais lenta, tendendo ao valor zero, à medida que o material fica saturado de umidade, Fig. 4 (seção 2.5).

No caso aqui analisado, admite-se o potencial capilar,  $\Psi$ , como constante (trata-se da análise do comportamento higro-térmico de um elemento poroso preliminarmente saturado de umidade, durante os primeiros dias após esta condição de saturação, correspondendo à faixa onde a inclinação da curva da função  $\Psi = \Psi(u_\rho)$ , Fig. 4 (seção 2.5) é pequena).

A partir de um perfil inicial para a temperatura e para o conteúdo de umidade nas superfícies de contorno do elemento poroso e das condições do meio ambiente (externo e interno), os perfis diários de temperatura e de umidade superficiais são determinados.

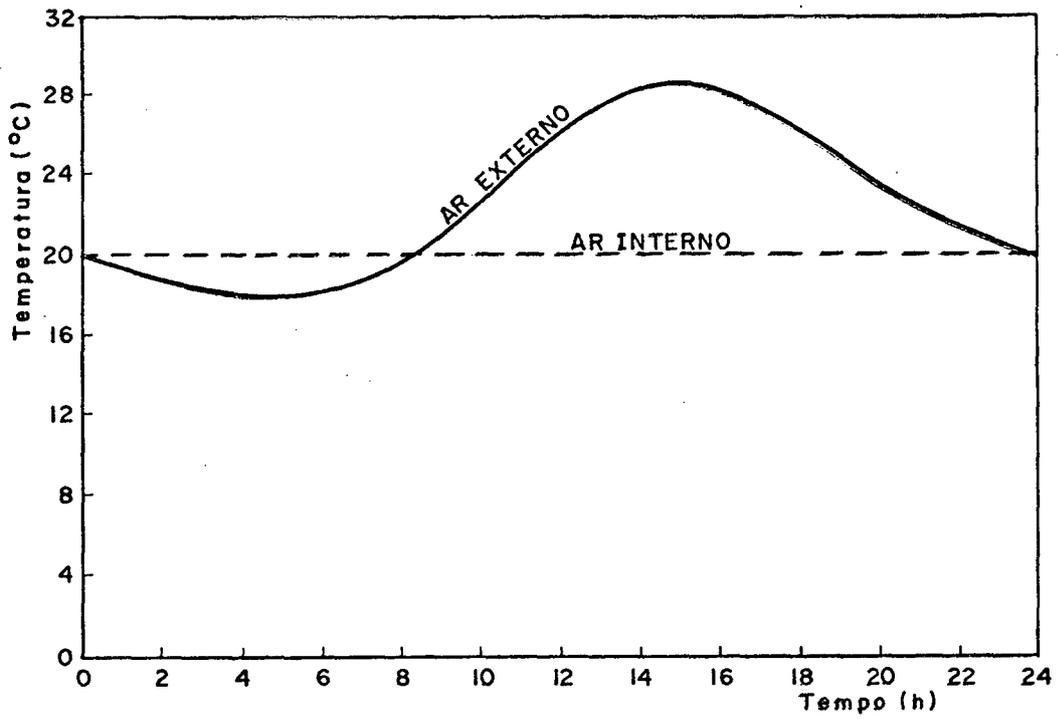


Fig. 20 - Distribuição da temperatura no meio ambiente

Os dados para o comportamento diário da temperatura e da umidade relativa ao meio ambiente são mostrados na Tab. 9 e nas Figs. 20 e 21 abaixo. Na tabela apresenta-se também a radiação solar total que incide sobre a superfície externa.

Tabela 9 - Dados do Meio Ambiente

t [h]	MEIO AMBIENTE INTERNO		MEIO AMBIENTE EXTERNO		
	$T_i$ [°C]	$\theta_i$ [%]	$T_e$ [°C]	$\theta_e$ [%]	$J_{qr}$ [W/m <sup>2</sup> ]
1	20,0	50	19,35	87	0,
2	20,0	50	18,83	89	0,
3	20,0	50	18,42	90	0,
4	20,0	50	18,10	92	0,
5	20,0	50	18,00	92	0,
6	20,0	50	18,21	91	23,0
7	20,0	50	18,73	89	196,0
8	20,0	50	19,66	86	371,0
9	20,0	50	21,02	81	556,0
10	20,0	50	22,58	75	721,0
11	20,0	50	24,34	69	807,0
12	20,0	50	26,01	63	852,0
13	20,0	50	27,26	59	847,0
14	20,0	50	28,09	57	772,0
15	20,0	50	28,40	56	643,0
16	20,0	50	28,09	57	482,0
17	20,0	50	27,36	59	312,0
18	20,0	50	26,22	62	140,0
19	20,0	50	24,86	67	0,
20	20,0	50	23,51	72	0,
21	20,0	50	22,37	76	0,
22	20,0	50	21,53	80	0,
23	20,0	50	20,50	83	0,
24	20,0	50	19,87	85	0,

Os perfis para o meio ambiente externo são representativos das condições de verão em Santa Catarina. Para o meio ambiente interno admitiu-se perfis diários constantes.

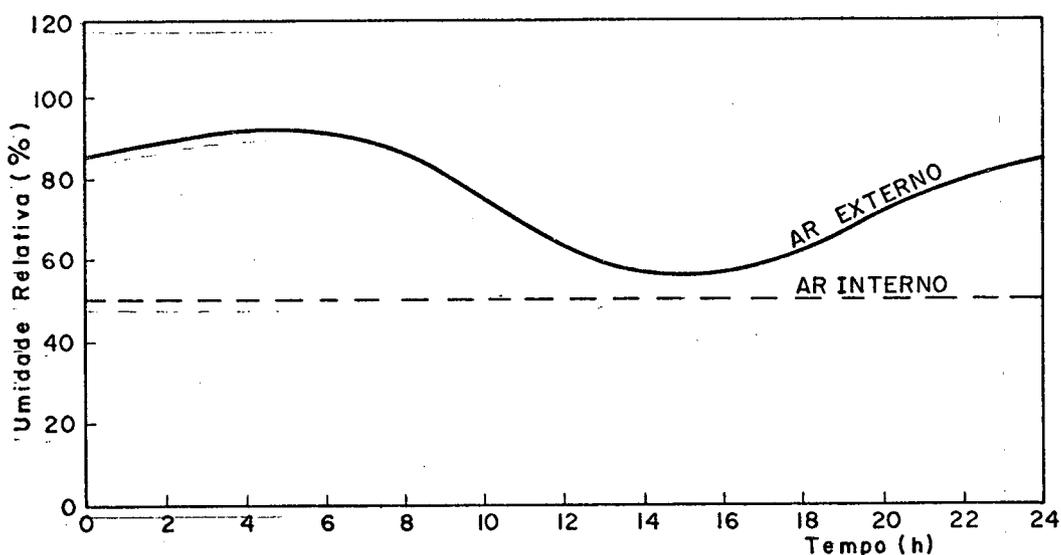


Fig. 21 - Comportamento diário da umidade relativa no meio ambiente

#### 4.5 - Resultados

Para a obtenção dos perfis de temperatura e do conteúdo de umidade, distribuições diárias iniciais constantes foram consideradas para a temperatura e para o conteúdo de umidade, admitindo-se  $20^{\circ}\text{C}$  para a temperatura e  $0,20$  kg de umidade/kg de material seco para o conteúdo de umidade para as superfícies de contorno externa e interna do elemento poroso.

As evoluções do conteúdo de umidade e da temperatura superficiais foram, em seguida, calculadas para diversos valores dos grupamentos adimensionais  $Lu$  e  $Fe$ , e do potencial de sucção  $\Psi$ , mantendo-se  $\epsilon=0$ .

Variações nos parâmetros  $Lu$  e  $Fe$  afetam significativamente as funções de transferência, de acordo com a seção 3.8. Variações no fator  $\delta$ , associado à difusão térmica, afetam as funções de transferência  $S_j$ ,  $T_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) que estão associadas ao efeito da variação da temperatura sobre o fluxo de umidade no interior do material poroso. Variações no parâmetro  $Lu$  afetam as funções de transferência  $X_j$  e  $Y_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) que estão relacionadas aos processos de transferência de massa promovidos por gradientes de concentração no elemento poroso. As funções de transferência  $U_j$  e  $V_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) estão associadas ao transporte de calor no elemento poroso, e portanto, não se alteram com as variações nos parâmetros  $Lu$  e  $Fe$ . As funções  $W_j$  e  $Z_j$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) descrevem a influência dos processos de mudança de fase sobre a distribuição de temperatura no meio, sendo nulas quando  $\epsilon=0$  (seção 4.3).

As Tabelas 10 e 11 [Apêndice C] apresentam os valores das funções de transferência para  $\epsilon=0$ , considerando-se valores diferentes de  $Lu$ .

A Fig. 22 mostra a evolução do conteúdo de umidade na superfície de contorno externa do elemento poroso para o período correspondente ao terceiro ciclo após o início do processo de secagem.

No período diurno a incidência da radiação solar sobre a superfície de contorno externa eleva a temperatura na mesma, promovendo o processo de evaporação da umidade para o ambiente, em consequência o conteúdo de umidade nessa superfície decresce, alcançando valores mínimos.

No período noturno, o conteúdo de umidade aumenta, mesmo quando não há condensação, apresentando a sua distribuição um coeficiente angular positivo nesse período. Isso se deve a um fluxo de massa da superfície de contorno interna para a superfície de contorno externa, e, em alguns casos, ao processo de condensação a partir da camada de ar adjacente.

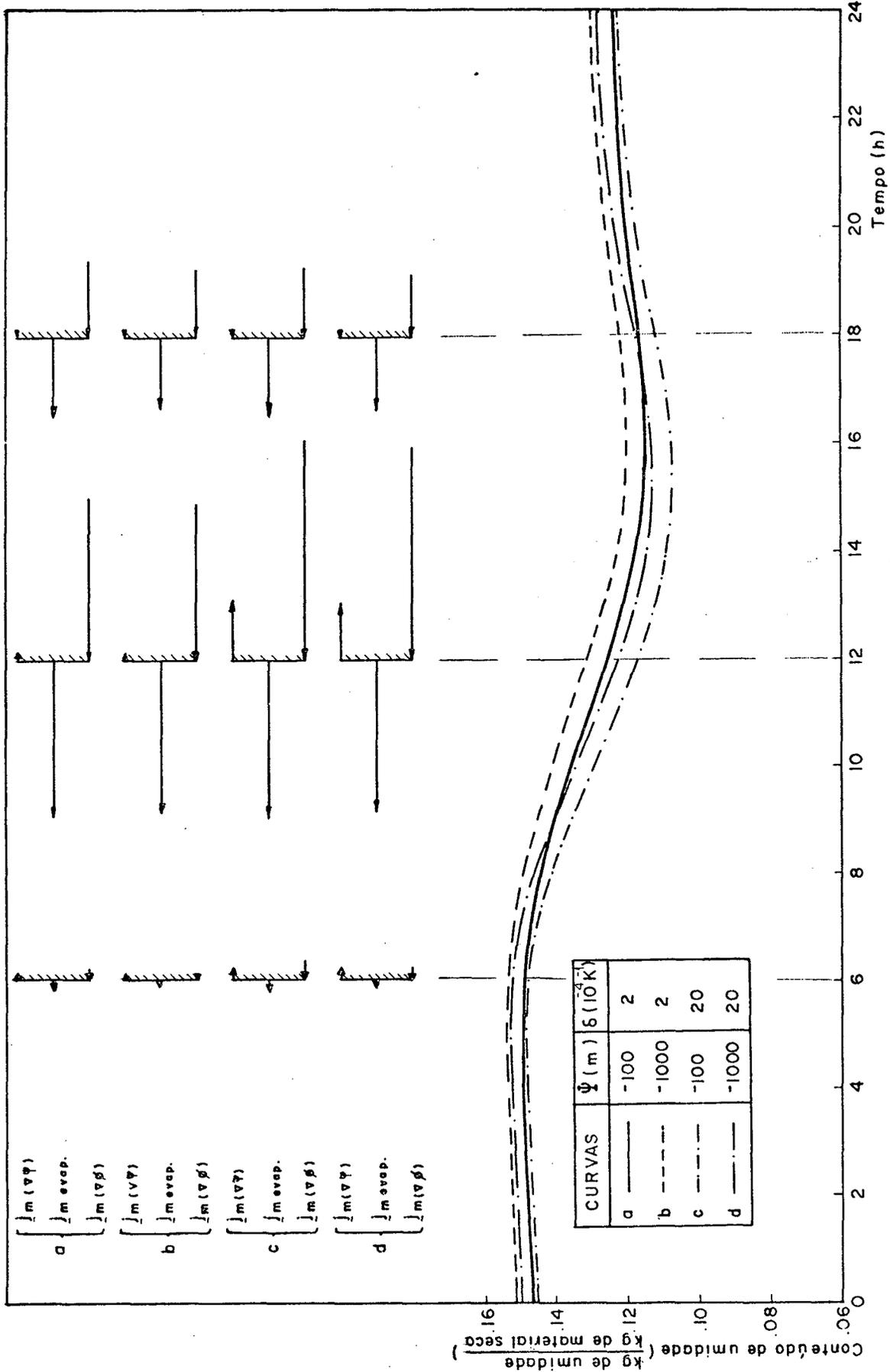


Fig. 22 - Distribuição do conteúdo de unidade na superfície de contorno externa de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Lu=0,2$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$ .

Para um parâmetro adimensional  $Lu$  constante, os resultados mostram que o conteúdo de umidade na superfície de contorno externa varia com o potencial de sucção  $\Psi$  e com o fator de difusão térmica  $\delta$ .

A influência da difusão de origem térmica aumenta com o aumento do fator de difusão térmica  $\delta$ . Consequentemente a parcela de fluxo de massa promovida por um gradiente térmico, Eq. (4.30), torna-se mais representativa, como mostra a Fig. 22. Esse efeito térmico é mais significativo durante o período diurno, principalmente nas horas mais críticas, quando a temperatura da superfície de contorno externa se eleva bastante, aumentando o gradiente térmico e, em consequência, parte da umidade é carregada para as camadas internas mais frias do material, fazendo com que haja uma redução do conteúdo de umidade nas camadas limítrofes à superfície de contorno externa, mais quente. Por outro lado, na superfície de contorno interna, durante esse período, o efeito térmico promove um aumento do conteúdo de umidade na mesma, Fig. 23.

Durante a noite o fluxo de massa promovido por um gradiente do conteúdo de umidade entre as superfícies de contorno do elemento é relevante e faz com que o conteúdo de umidade na superfície de contorno externa aumente.

Os resultados mostram também que a um aumento do potencial de sucção  $\Psi$ , corresponde uma diminuição da taxa de evaporação, Eq. (4.22), reduzindo-se a parcela do fluxo de massa associada ao processo de evaporação, como mostram as setas que representam essas parcelas de fluxo na Fig. 22. Consequentemente ocorre um aumento no conteúdo de umidade durante todo o período em relação ao caso correspondente a um potencial  $\Psi$  menor.

Na superfície de contorno interna do elemento poroso, Fig. 23, o conteúdo de umidade na mesma decresce devido ao processo de evaporação da umidade promovido pela diferença entre as pressões parciais de vapor nessa superfície e no meio. A parcela de fluxo de massa associada ao processo de evaporação é nesse caso, dominante, como mostram as setas que representam as parcelas de fluxo de massa, esquematizadas na Fig. 23. As setas nas Figs. 22, 23, 26 e 27 representam as parcelas de fluxo, conforme Eqs. (4.30) e (4.31).

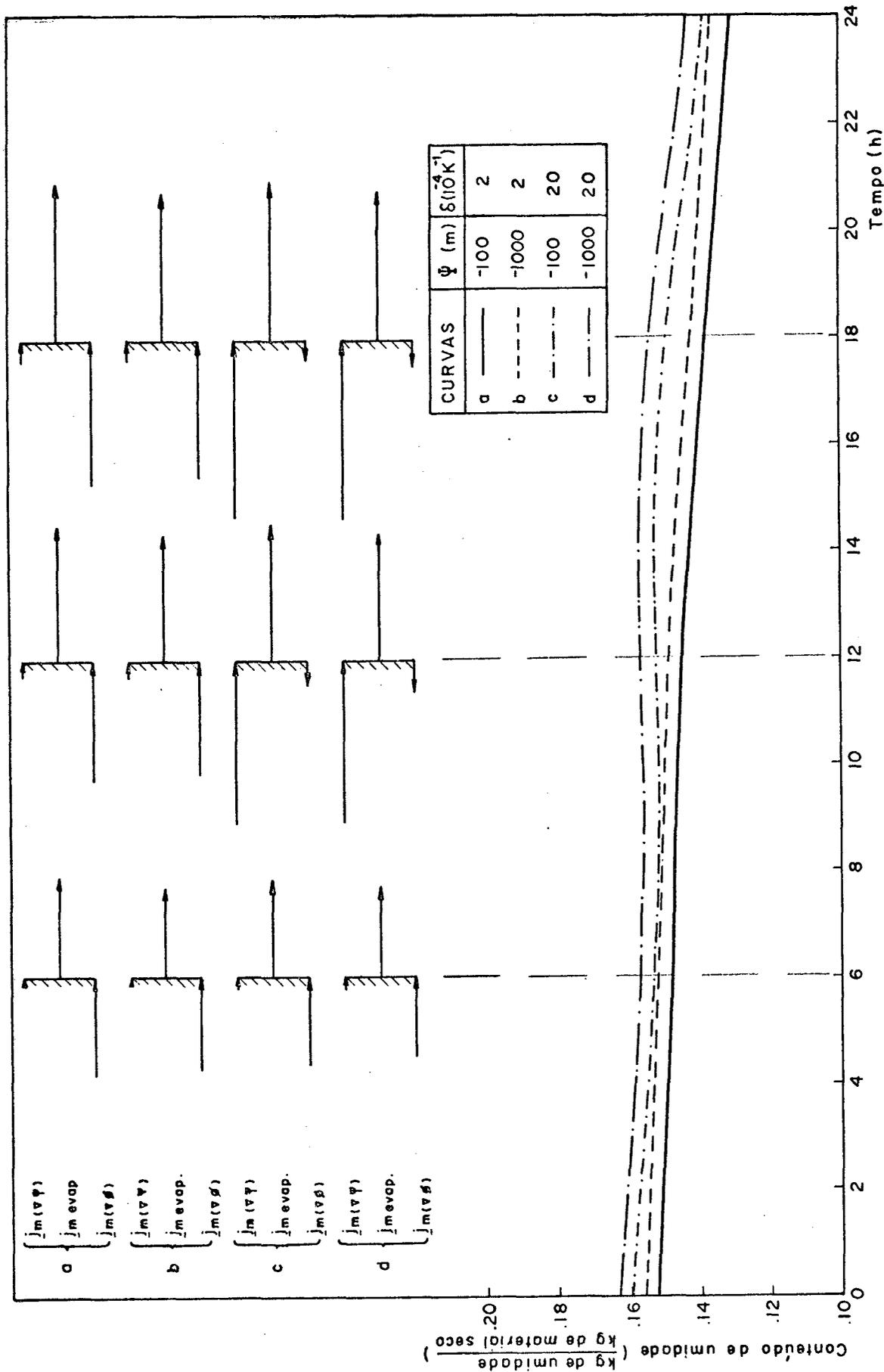


Fig. 23 - Distribuição do conteúdo de umidade na superfície de contorno interna de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Lu=0,2$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$ .

O efeito promovido pelo fator de difusão térmica  $\delta$ , proporciona um acréscimo no conteúdo de umidade na superfície de contorno interna do elemento poroso sendo esse efeito mais acentuado no período das 10 às 16 horas, quando a diferença entre as temperaturas superficiais cresce, devido a incidência da radiação solar sobre a superfície de contorno externa. Observe-se que para  $\delta = 2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  o coeficiente angular da distribuição de conteúdo de umidade é positivo nesse período, Fig. 23.

Um aumento do potencial capilar acarreta uma redução na perda de umidade por processos de evaporação, Eq.(4.22), nas superfícies limitantes do elemento, reduzindo-se a parcela de fluxo de massa associada ao processo de evaporação e em consequência ocorre um aumento no conteúdo de umidade durante todo o ciclo, de maneira idêntica ao da superfície de contorno externa.

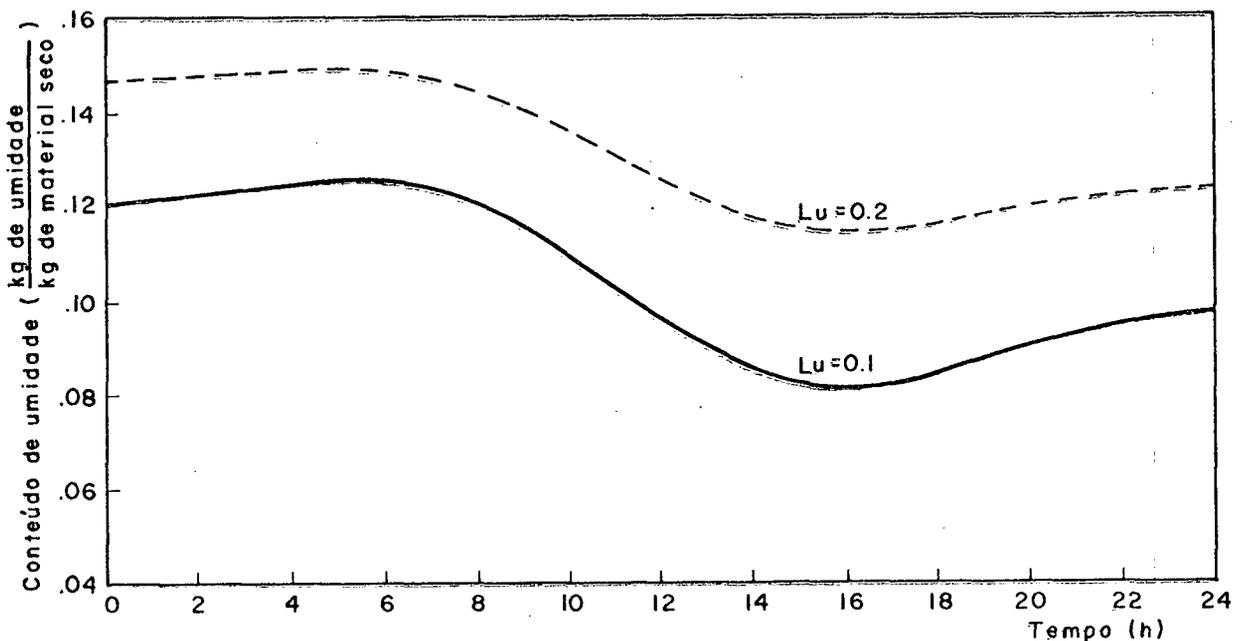


Fig.24 - Distribuição do conteúdo de umidade na superfície de contorno externa de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $F_e=0$ ;  $Bi_{qc}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$ ;  $\Psi=-100 \text{ m}$ ;  $\delta= 2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

As evoluções do conteúdo de umidade para valores diferentes do parâmetro adimensional  $Lu$  são mostradas nas Figs.24 e 25. A Fig.24 mostra o comportamento do conteúdo de umidade na superfície de contorno externa do elemento em função do parâmetro  $Lu$ , para o período correspondente ao terceiro ciclo após o início do processo de secagem.

Resultados da simulação mostram que uma diminuição do parâmetro  $Lu$ , corresponde a uma diminuição do fluxo de massa associado no interior do material. Conseqüentemente, as superfícies de contorno do material ficam mais sujeitas às condições de contorno impostas pelos meios adjacentes, Figs. 24 e 25.

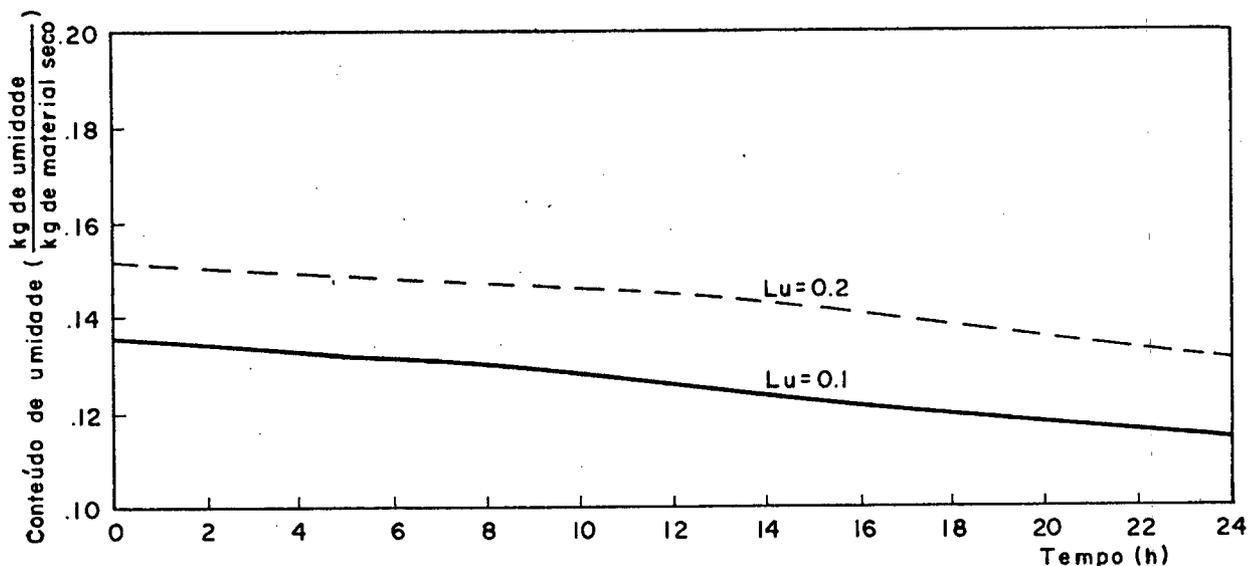


Fig. 25 - Distribuição do conteúdo de umidade na superfície de contorno interna de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$ ;  $\Psi=-100$  m;  $\delta=2 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

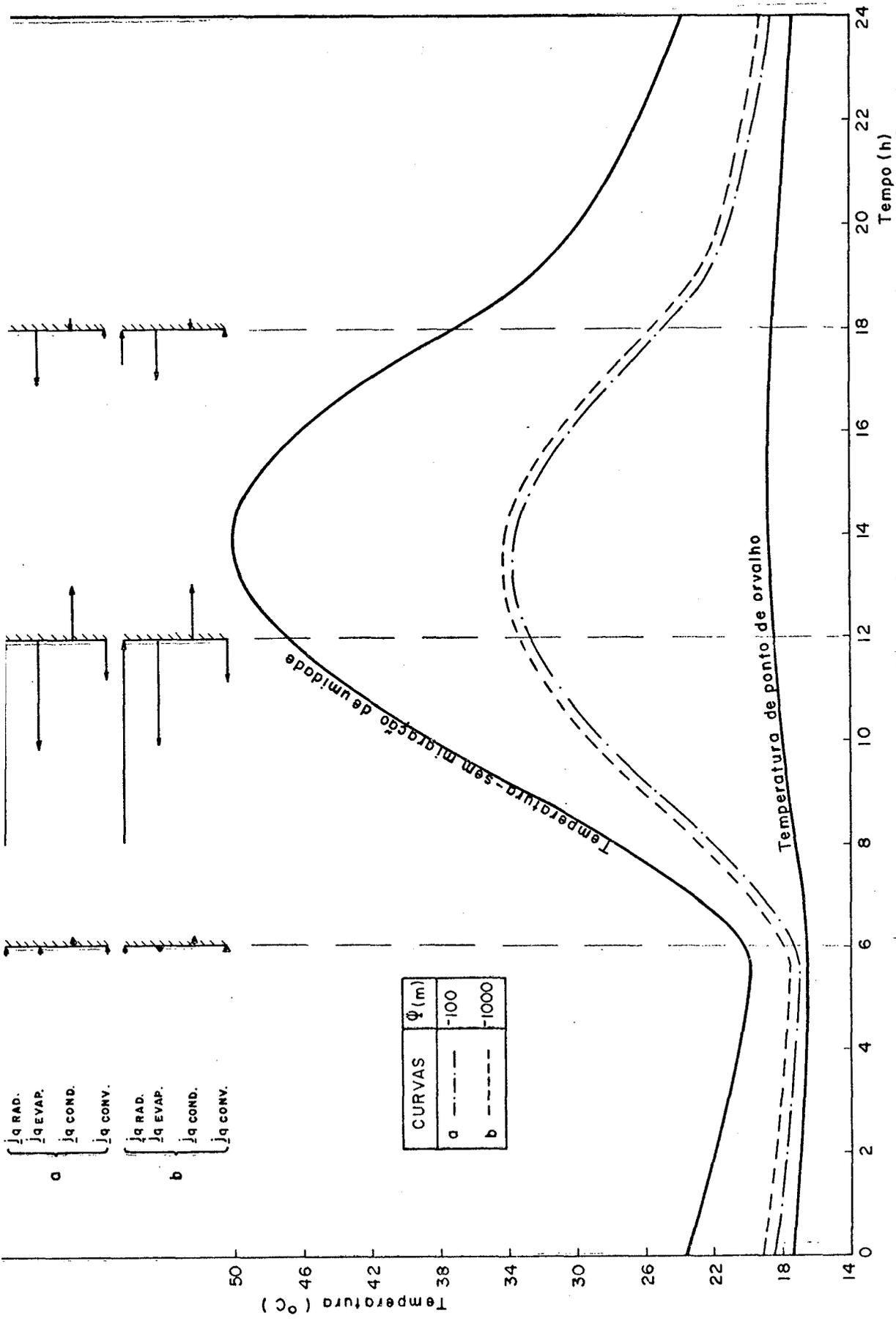


Fig. 26 - Distribuição da temperatura na superfície de contorno externa de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;

$Bi_{qi}=1,0$ .

A Fig.25 mostra a distribuição do conteúdo de umidade na superfície de contorno interna do elemento em função do parâmetro  $Lu$ , para o período correspondente ao terceiro ciclo após o início do processo de secagem, mantendo-se constantes os demais parâmetros.

A Fig.26 apresenta a evolução da temperatura na superfície de contorno externa do elemento poroso para o período correspondente ao terceiro ciclo após o início do processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ , a variação da temperatura independe do parâmetro  $Lu$  e do fator de difusão térmica  $\delta$  (seção 4.3).

A temperatura da superfície de contorno externa atinge valores significativamente menores em relação àqueles associados à mesma superfície, quando não há mudança de fase, isto é, quando não se considera o processo de vaporização da água que aflora à superfície. Isso é consistente com o fato de que parte da radiação solar é usada para o processo de vaporização, Eq. (4.30a), não sendo conduzida para o interior do material.

Os elementos dos envoltórios das edificações são usualmente porosos e estão sujeitos a ação de precipitações e à consequente absorção de líquido por ação capilar. A umidade absorvida irá condicionar o comportamento térmico desses elementos em períodos subsequentes de forma significativa, como mostra a Fig.26. Esse comportamento condicionado é de certa forma confirmado por observações práticas sobre o desempenho térmico de coberturas de cerâmica e pelos resultados de algumas medições tais como as efetuadas por Lamberts [1], em seu trabalho de dissertação de mestrado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Com efeito, Lamberts pesando elementos de cobertura durante evoluções cíclicas de 24 h pode detectar variações diárias apreciáveis no conteúdo de umidade desses elementos.

No período diurno a radiação solar incidente e a consequente vaporização da umidade na superfície de contorno externa determinam basicamente a evolução da temperatura nessa mesma superfície, como mostram as setas esquematizadas na Fig. 26.

Durante o período noturno as trocas convectivas de calor com o meio adjacente diminuem a temperatura da superfície limitante

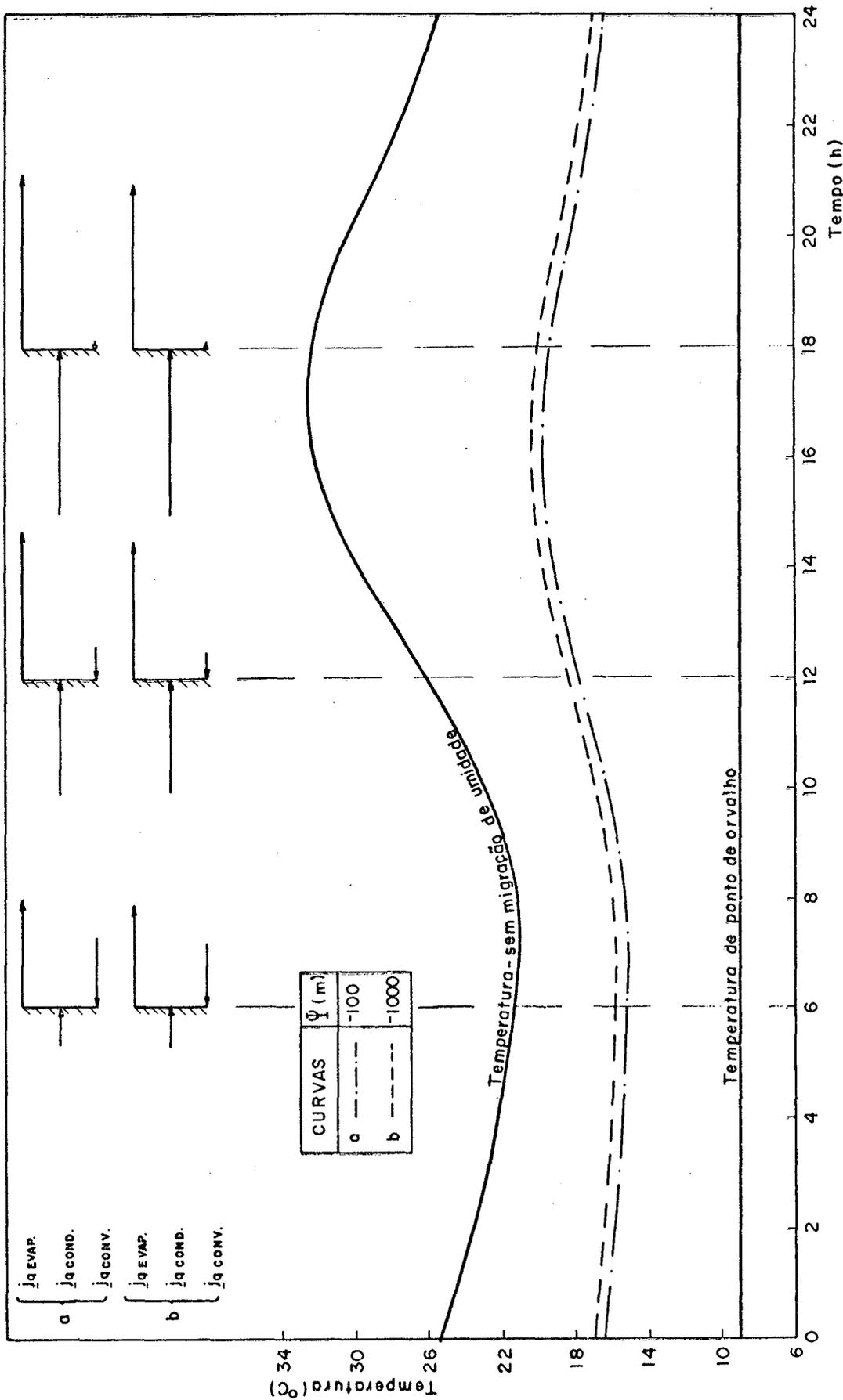


Fig. 27 - Distribuição da temperatura na superfície de contorno interna de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Fe=0$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$ .

externa, observando-se que ocorre condensação nesse período mesmo quando a temperatura da superfície é maior do que a temperatura de ponto de orvalho (Fig.26 - b, quando  $\Psi = -1000$  m).

Um aumento do potencial de sucção  $\Psi$  reduz a perda de umidade por processos de evaporação nas superfícies, diminuindo a parcela de fluxo de calor associada ao processo de evaporação, o que faz com que a temperatura atinja valores maiores em relação àqueles correspondentes a um potencial  $\Psi$  menor (as setas nas Figs. 26 e 27 mostram essa redução na parcela de fluxo de calor associada ao processo de evaporação quando se aumenta o potencial de sucção).

A Fig.27 mostra a distribuição da temperatura na superfície de contorno interna do elemento poroso para o período correspondente ao terceiro ciclo diário após o início do processo de secagem.

A evolução da temperatura nessa superfície de contorno apresenta uma variação menor em relação àquela na superfície de contorno externa, devido à constância da temperatura no meio adjacente e também por não ser influenciada diretamente pela parcela de fluxo de calor associada à radiação solar absorvida pelo material.

A temperatura apresenta uma redução em relação às mesmas condições, quando não se leva em conta os efeitos da secagem, ou seja, quando não se considera a migração de umidade.

Durante o período diurno ocorre um aumento da temperatura na superfície de contorno interna, promovido por um aumento da parcela de fluxo calor condutivo oriundo da superfície de contorno oposta, Fig.27.

O processo de evaporação é dominante em todo o ciclo, embora diminua durante o período noturno. Nesse período a temperatura na superfície de contorno interna decresce, em consequência da evaporação da umidade nessa superfície, Fig.23, e das trocas convectivas de calor com o meio ambiente adjacente que está à uma temperatura mais elevada. (Fig.20 e 27 - a e b).

O comportamento diário da temperatura na superfície de contorno interna é semelhante àquele na superfície de contorno externa, Fig. 26. Resultados práticos obtidos por Poppei et al. [3], para um dia de verão, comprovam esse comportamento diário de tempe

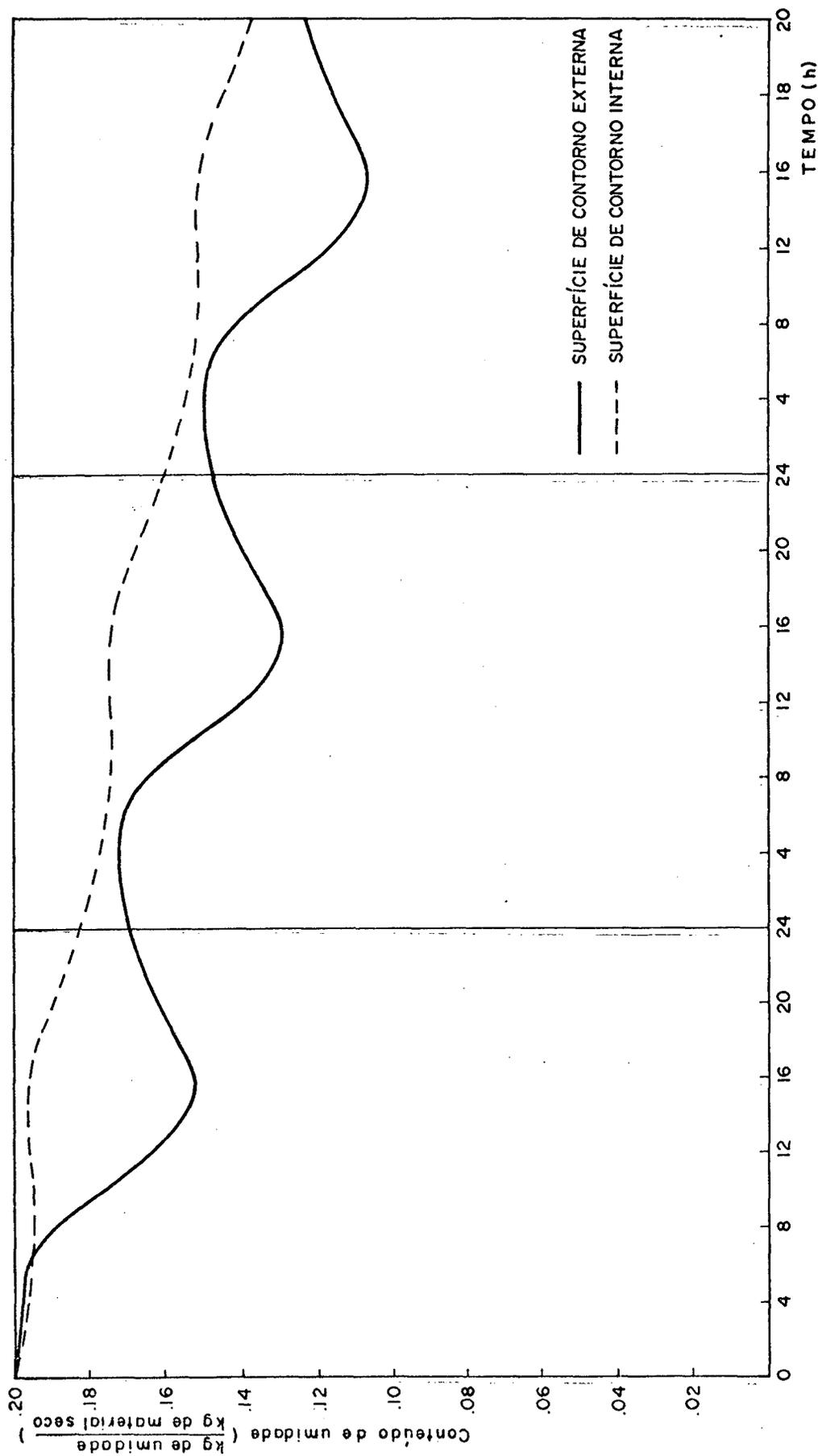


Fig.28 - Distribuição do conteúdo de umidade nas superfícies de contorno de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Lu=0,2$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ;  $\psi=-100 \text{ m}$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$ .

ratura nas superfícies limitantes de paredes úmidas.

Nas Figs. 28 e 29 são mostradas as distribuições de temperatura e de conteúdo de umidade nas superfícies de contorno do elemento nos três primeiros ciclos diários após o início da secagem.

Na Fig.28 apresenta-se a distribuição do conteúdo de umidade nas superfícies limitantes do elemento poroso para o período correspondente aos três primeiros ciclos após o início do processo de secagem, admitindo-se  $\epsilon=0$  durante todo o período.

A distribuição do conteúdo de umidade apresenta evoluções temporais semelhantes em cada ciclo diário, visto que as condições do meio ambiente adjacente são mantidas as mesmas em todos os ciclos. Diminui porém de um ciclo para o outro. A distribuição temporal da temperatura nas superfícies de contorno, Fig.29, fica, por outro lado, inalterada quando  $\epsilon=0$  durante todo o período.

Para  $\epsilon=0$  a distribuição de temperatura não é afetada pela distribuição do conteúdo de umidade, no interior do material (seção 4.3). Dessa forma, a evolução da temperatura é influenciada unicamente pelas condições do meio adjacente e pelo potencial de  $\Psi$ , Eqs. (4.23). O potencial de sucção e as condições do meio ambiente são mantidas as mesmas em todos os ciclos, conseqüentemente a distribuição de temperatura nas superfícies limitantes do elemento poroso não se altera, de um ciclo para o outro, Fig.29.

As condições iniciais tanto para a temperatura como para o conteúdo de umidade exercem uma maior influência sobre as evoluções temporais da temperatura e do conteúdo de umidade nas superfícies de contorno da parede, somente durante o primeiro ciclo diário.

Nas condições aqui estabelecidas deve-se salientar o fato de que o processo de evaporação nas superfícies de contorno da parede úmida é dominante, mesmo quando o potencial de sucção  $\Psi$  assume valores elevados da ordem de  $-10^3$  (Figs. 22,23,26,27). Durante o período diurno esse processo alcança seu efeito máximo, sendo bastante significativo para a redução da umidade do material (Fig. 22). À noite, no entanto, o processo de evaporação diminui.

Observe-se, no entanto, para os casos analisados, que  $\Psi=-100m$

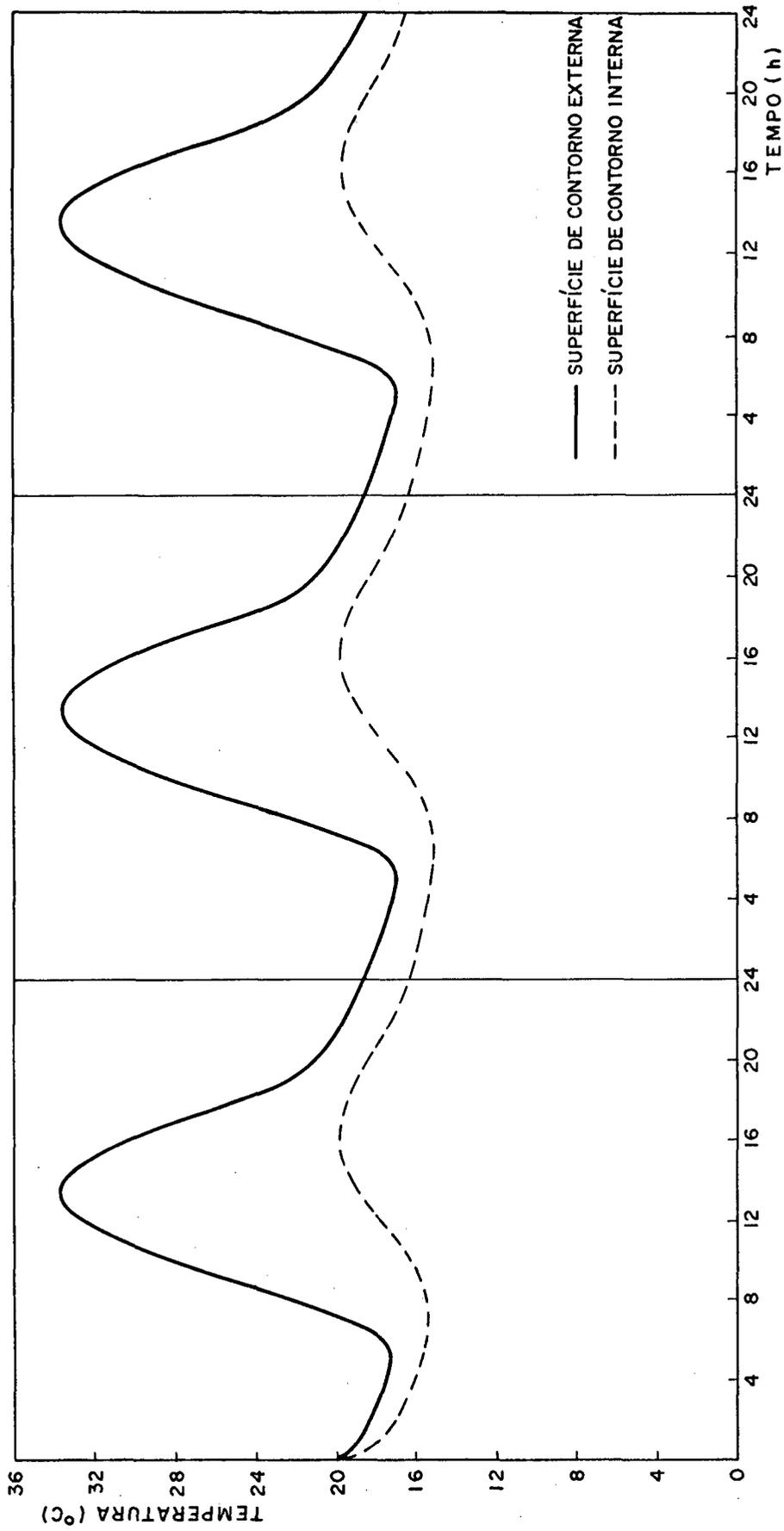


Fig. 29 - Distribuição da temperatura nas superfícies de contorno de uma parede de concreto de 20 cm de espessura num processo de secagem. Para  $\epsilon=0$ ;  $Lu=0,2$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ;  $\psi=-100 \text{ m}$ ;  $Bi_{qe}=2,5$ ;  $Bi_{qi}=1,0$ .

(ou  $\Psi = -1000m$ ) e  $\epsilon = 0$  sempre, enquanto que num processo real deve-se levar em conta as relações funcionais  $\epsilon = \epsilon(u)$  e  $\Psi = \Psi(u)$ , importantes quando os processos de mudança de fase internos acontecem e passam a influir sobre o processo de transferência de calor na parede.

#### 4.6 - Conclusão

O comportamento térmico de um elemento poroso preliminarmente saturado de umidade para diferentes valores do parâmetro adimensional  $Lu$ , do fator de difusão térmica  $\delta$ , e do potencial de sucção  $\Psi$  foi descrito.

A análise limitou-se a descrever a evolução das distribuições da temperatura e do conteúdo de umidade nas superfícies de contorno do elemento poroso, durante o período em que  $\epsilon = 0$ , o que corresponde a obter a descrição do comportamento higrotérmico do elemento poroso úmido somente durante os primeiros ciclos diários do processo de secagem, pois, a partir desse período a redução do conteúdo de umidade no interior do material promovido pelo processo de evaporação nas superfícies limitantes, impossibilita o uso da aproximação do tipo  $\epsilon = 0$ .

Trabalhos futuros deverão levar em conta a relação de dependência  $\epsilon = \epsilon(u)$ , que é importante para o período em que os processos de mudança de fase no interior do elemento poroso, ficam bastante significativos e começam a influir sobre o processo de transferência de calor no material.

Uma outra limitação é a suposição de um potencial capilar ou de sucção constante em todo o período, desprezando-se a relação funcional  $\Psi = \Psi(u)$ , que passa a ser bastante importante quando o conteúdo de umidade do material é baixo e começa a influenciar na capacidade de sucção da umidade do ar pela superfície limitante do elemento poroso.

## 5 - COMENTÁRIOS FINAIS

O propósito principal desse trabalho foi o desenvolvimento de um modelo matemático para a resolução de problemas de transferência simultânea de calor e umidade em meios porosos, sujeitos a condições de contorno arbitrárias. Na modelagem matemática foi utilizado o método das funções de transferência, resultando numa relação linear entre as densidades de fluxo de calor e massa através das superfícies de contorno do elemento poroso e os seus potenciais associados.

O método das funções de transferência representa uma formulação analítica, baseada na determinação das densidades de fluxo de calor e massa num instante considerado em função das distribuições temporais da temperatura e conteúdo de umidade.

As características básicas do processo para a obtenção das funções de transferência são listadas abaixo:

- (a) as equações diferenciais de transferência de calor e massa são resolvidas utilizando-se o método das transformadas de Laplace;
- (b) as condições de contorno (em temperatura e em conteúdo de umidade) são desenvolvidas em séries de funções pulso cujos coeficientes são, respectivamente, os valores da temperatura e do conteúdo de umidade em intervalos igualmente espaçados de tempo.

A modelagem feita para uma condição unidimensional foi estabelecida para um elemento poroso homogêneo, plano e de espessura finita, possibilitando sua aplicação sobre quaisquer componentes porosos de edificações.

As principais limitações desse trabalho estão associadas aos requisitos de constância de propriedades, condições necessárias para a utilização do método das funções de transferência. O trabalho se encontra da mesma forma limitado às dificuldades encontradas na obtenção das relações funcionais dos coeficientes de transporte em relação à temperatura,  $T$ , e ao conteúdo de umidade,  $u$ .

Dessa forma, a limitação imposta pelo método das funções de transferência na resolução do sistema acoplado de equações diferenciais para a temperatura e para o conteúdo de umidade é a de que esse sistema de equações governantes seja linear.

Nesse sentido admitiu-se que a variação real das propriedades do meio poroso fosse pequena, dentro da faixa de variação das variáveis  $T$  e  $u$  que caracterizam o problema analisado.

A principal contribuição desse trabalho foi a habilitação do método das funções de transferência (método analítico) para o tratamento do problema da transferência simultânea de calor e massa em meios porosos, sujeitos a condições de contorno arbitrárias.

O tratamento do processo acoplado da transferência de calor e massa em meios porosos envolve algumas suposições e simplificações no desenvolvimento das equações governantes, conseqüentemente a aplicação do método das funções de transferência estará sempre condicionada a essas considerações.

A aplicabilidade do método das funções de transferência na resolução de problemas de transferência de calor e massa, é, no entanto, ampla; podendo abranger dependendo das condições de contorno utilizadas, além do caso aqui analisado:

- (a) problemas característicos da região higroscópica, quando  $\epsilon=1$ ;
- (b) problemas em que a taxa de secagem é alta, associados à retração da região úmida para o interior do material;
- (c) problemas envolvendo várias camadas de materiais diferentes.

A fim de considerar a importância dos processos de mudança de fase no interior do meio poroso e a influência exercida pelos mesmos sobre o processo de transferência de calor no meio, as relações funcionais existentes entre os coeficientes de transporte e as variáveis que descrevem o problema, tais como  $\epsilon=\epsilon(u)$ ,  $\Psi=\Psi(u)$ ,  $\lambda=\lambda(u)$  devem ser levadas em conta. Como essas relações funcionais são de difícil obtenção, é de extrema importância que trabalhos experimentais sejam realizados com o intuito de obter essas relações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LAMBERTS, R. Desempenho térmico de coberturas leves com ático: Bancada de testes e modelo matemático. Dissertação de mestrado, Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1983.
- [2] NEWMAN, C.J. Distorsion of external doors. Building Research and Practice, 1984. v.12, jan./fev., p.25-29.
- [3] POPPEI, G.; VENZMER, H.; ZACHARIAS, B. Evaporation from damp walls. Building Research and Practice, 1984. v.12, jul./ago., p.223-229.
- [4] LUIKOV, A.V. Heat and mass transfer in capillary-porous bodies. Trad. P.W.B. Harrison, Oxford, Pergamon Press, 1966. 523 p. Original russo.
- [5] LUIKOV, A.V. Systems of differential equations of heat and mass transfer in capillary-porous media (Review). International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1975. v.18, p.1-14.
- [6] PHILIP, J.R. & DE VRIES, D.A. Moisture movement in porous materials under temperature gradients. Transactions American Geophysical Union, 1957. v.38, p.222-232.
- [7] DE VRIES, D.A. Simultaneous transfer of heat and moisture in porous media. Transactions American Geophysical Union, 1958. v.39, p.909-916.
- [8] LUIKOV, A.V. & MIKHAILOV, Yu.A. Theory of energy and mass transfer. Trad. L.A. Fenn, Oxford, Pergamon Press, 1965. 392 p. Original russo.
- [9] DINULESCU, H.A. & ECKERT, E.R.G. Analysis of the one-dimensional moisture migration caused by temperature gradients in a porous medium. International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1980. v.23, p.1069-1078.

- [10] KUSUDA, T. Algorithms for calculating the transient heat conduction by thermal response factors for multi-layer structures of various heat conduction systems. National Bureau of Standards, Report 10108, Washington, 1969.
- [11] MITALAS, G.P. & STEPHENSON, D.G. Room thermal response factors. ASHRAE Transactions, New York, 1967. v.73, n° 2019, p.1-10.
- [12] STEPHENSON, D.G. & MITALAS, D.P. Cooling load calculations by thermal response factor method. ASHRAE Transactions, New York, 1967. v.73, n° 2018, p.1-7.
- [13] COMINI, G. & DEL GIUDICE, S. Finite element analysis of heat and mass transfer in buildings. In: Energy Conservation in Heating, Cooling and Ventilating Buildings. Whashington, C.J. Hoogendoorn and N.H. Afgan, Hemisphere Publishing Corporation, 1978. p.25-36.
- [14] ECKERT, E.R.G. & FAGHARI, M. A general analysis of moisture migration caused by temperature differences in an unsaturated porous medium. International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1980. v.23, p.1613-1623.
- [15] HUANG, C.L.D.; SIANG, H.H.; BEST, C.H. Heat and moisture transfer in concrete slabs. International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1979. v.22, p.257-266.
- [16] LUIKOV, A.V. Heat and mass transfer. Trad. T. Kortneva, Moscou, Mir Publishers, 1980. 623 p. Original russo.
- [17] DE VRIES, D.A. Heat transfer in soils. In: Heat and Mass Transfer in the Biosphere. Whashington, N.H. Afgan, Scripta Book Company, 1975. Part.I, p.5-28
- [18] PHILIP, J. Water movement in soil. In: Heat and Mass Transfer in the Biosphere. Whashington, D.A. de Vries and N.H. Afgan, Scripta Book Company, 1975. Part.I, p.29-47.
- [19] CALLEN, H.B. Thermodynamics. New York, John Wiley and Sons, 1960. 372 p.

- [20] CLAESSON, J. Fundamentals of moisture and energy flow in capillary-porous building materials. In: Energy Conservation in Heating, Cooling and Ventilating Buildings. Whashington, C.J. Hoogendoorn and N.H. Afgan, Hemisphere Publishing Corporation, 1978. p.59-69.
- [21] JACKSON, R.D.; KIMBALL, B.A.; REGINATO, R.J.; IDSO, S.B.; NAKAYAMA, F.S. Heat and Water transfer in a natural soil environment. In: Heat and Mass Transfer in the Biosphere. Whashington, D.A. de Vries and N.H. Afgan, Scripta Book Company, 1975. Part.I, p.67-76.
- [22] SHAH, D.J.; RAMSEY, J.W.; WANG, M. An experimental determination of the heat and mass transfer coeficientes in moist, unsaturated soils. International Journal Heat Mass Transfer, Oxford, Pergamon Press, 1984. v.27, p.1075-1085.
- [23] MOORE, ROSS E. Water conduction from shallow Water tables. Hilgardia, 1939. v.12, n.6, p.383-426.
- [24] MATSUMOTO, M. Simultaneous heat and moisture transfer in porous walls and analysis of internal Condensation. In: Energy Conservation in Heating, Cooling and Ventilating Buildings. Whashington, C.J. Hoogendoorn and N.H. Afgan, Hemisphere Publishing Corporation, 1978. p.45-58.
- [25] KREIDER, D.L.; KULLER, R.G.; OSTBERG, D.R.; PERKINS, F.W. Introdução à análise linear. Trad. Genésio Lima dos Reis, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A., 1972. 3v., v.1, 330 p. Original inglês.
- [26] SPIEGEL, Murray R. Manual de fórmulas e tabelas matemáticas. Trad. Roberto Chioccarello, São Paulo, McGraw Hill, 1973. 270 p. Original inglês. (Coleção Schaum).
- [27] PHILIPPI, P.C. & NICOLAU, V.P. Comportamento térmico de edificações: Condução unidimensional de calor através de uma região homogênea e de espessura finita. Método dos fatores de resposta. Florianópolis, Grupo de sistemas passivos, Universidade Federal de Santa Catarina, 1982.

- [28] ÁVILA, G.S.S. Funções de uma variável complexa. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, Ed. da Universidade de Brasília, 1974. 142 p.
- [29] DEMIDOVICH, B.P. & MARON, I.A. Computational Mathematics. Trad. George Yankovsky, Moscou, Mir Publishers, 1973. Original russo.
- [30] BARROSO, L.C.; BARROSO, M.M.A.; CAMPOS, F.F.; CARVALHO, M. L.B.; MAIA, M.L. Cálculo numérico. São Paulo, Harper & Row do Brasil, 1983. 283 p.
- [31] KAPLAN, W. Cálculo avançado. Trad. Frederic Tsu, São Paulo, Ed. Edgard Blucher Ltda., 1972. v.2, p.341-750. Original inglês.
- [32] ARPACI, V.S. Conduction heat transfer. Reading, Massachusetts, Adison - Wesley Publishing Company, 1966. 550 p.

## APÊNDICES

## A - INVERSÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE PELO MÉTODO DOS RESÍDUOS

### A.1 - Introdução

Nesse apêndice apresenta-se o teorema de inversão das transformadas de Laplace e o teorema dos resíduos da teoria da variável complexa.

Faz-se inicialmente uma revisão da teoria de uma variável complexa como preparação para a aplicação do teorema de inversão. Nessa revisão apresenta-se somente as definições e os teoremas que são necessários na avaliação da integral complexa, que aparece no teorema de inversão. Não são apresentadas as demonstrações dos teoremas aqui expostos, pois as mesmas podem ser encontradas em várias referências [28, 31].

É apresentado também a avaliação do teorema de inversão em dois contornos particulares que envolvem, principalmente, os problemas da transferência de calor e massa em regiões finitas e semi-infinitas.

### A.2 - Definição de Conjuntos e de Função Analítica

Diz-se que  $C$  é um conjunto aberto se todos os seus pontos são interiores. É fechado quando seu complementar é aberto. O complementar de um conjunto  $C$  é o conjunto  $C'$  dos pontos que não pertencem a  $C$ .

Diz-se que um conjunto aberto é conexo se quaisquer dois de seus pontos puderem ser ligados por uma poligonal toda contida no conjunto.

Seja  $f(z)$  uma função cujo domínio é uma região  $R$  (conjunto aberto e conexo) e seja  $z$  um ponto de  $R$ .

Diz-se que a função  $f(z)$  é analítica na região  $R$  se ela é derivável em cada ponto de  $R$ ;  $f(z)$  é analítica num ponto  $z_0$  se  $f(z)$  é analítica numa região contendo  $z_0$  [28].

### A.3 - Zeros e Singularidades

Se uma função  $f(z)$  é analítica em um domínio  $R$  e nula em um ponto  $z=a$  em  $R$ , diz-se que  $f(z)$  possui um zero no ponto  $z=a$ . Se não somente  $f(z)$ , mas também as derivadas  $f', \dots, f^{(n-1)}$  forem nulas em  $z=a$  e  $f^{(n)}(a) \neq 0$ , então diz-se que  $f(z)$  possui um zero de ordem  $n$  no ponto  $z=a$  [28].

O ponto singular de uma função analítica  $f$  é um ponto em que  $f$  deixa de ser analítica. Diz-se que  $f$  possui uma singularidade de nesse ponto.

Diz-se que um ponto  $z_0$  é uma singularidade isolada de uma função  $f$  se existe uma vizinhança de  $z_0$  na qual  $f$  é analítica, exceto no próprio ponto  $z_0$  [28].

Seja  $z_0$  uma singularidade isolada de uma função  $f$ , de forma que essa função possui desenvolvimento de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}, \quad (\text{A.1})$$

válida numa certa vizinhança  $0 < |z-z_0| < r$  de  $z_0$ , excluído o ponto  $z_0$ .

A última série na Eq. (A.1) é chamada a parte principal de  $f$  próximo ao ponto  $z_0$ . Para o caso em que, no desenvolvimento da Eq. (A.1), todos os coeficientes  $c_n$  são nulos a partir de algum  $n$ , isto é, existe  $m > 0$  tal que  $c_m \neq 0$  e  $c_n = 0$  para  $n > m$ , o desenvolvimento da Eq. (A.1) reduz-se à:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n + \frac{c_1}{z-z_0} + \dots + \frac{c_m}{(z-z_0)^m} \quad (\text{A.2})$$

Neste caso, em que a parte principal consiste de um número finito de termos, a singularidade de  $f$  em  $z_0$  é chamada de polo, e  $m$  constitui a ordem do polo. Um polo de 1ª ordem é também chamado de polo simples [28].

Finalmente se, no desenvolvimento da Eq. (A.1), a parte principal consiste de infinitos termos com potências negativas de  $(z-z_0)$  diz-se que  $z_0$  é uma singularidade essencial da função  $f$ .

Os polos são, por definição, singularidades isoladas.

#### A.4 - Resíduos

Se  $f(z)$  for analítica em uma vizinhança de um ponto  $z_0 \in \mathbb{R}$ , então, de acordo com o teorema integral de Cauchy [31],

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (\text{A.3})$$

para qualquer contorno  $C$  na vizinhança de  $z_0$ .

Se, entretanto,  $f(z)$  possuir um polo ou uma singularidade essencial isolada em  $z_0$  e  $z_0$  se encontrar no interior de  $C$ , então a integral (A.3) será em geral diferente de zero. Então, numa vizinhança de  $z_0$  vale o desenvolvimento de Laurent [28],

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}, \quad (\text{A.1})$$

que converge no domínio  $0 < |z-z_0| < r$ , onde  $r$  é a distância de  $z_0$  ao ponto singular mais próximo de  $f(z)$ . Os coeficientes são dados por:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi, \quad (\text{A.4})$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\xi-z_0)^{n+1} f(\xi) d\xi.$$

Decorre que o coeficiente  $c_1$  da potência  $\frac{1}{z-z_0}$  é

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz, \quad (\text{A.5})$$

e, portanto,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i c_1, \quad (\text{A.6})$$

com integração efetuada no sentido direto em torno de um caminho fechado simples  $C$  que se situa no domínio  $0 < |z-z_0| < r$  e contém o ponto  $z_0$  no seu interior.

O coeficiente  $c_1$  no desenvolvimento (A.1) de  $f$  é chamado o resíduo de  $f(z)$  em  $z_0$  e é designado por  $c_1 = \text{Res} [f(z), z_0]$  ou  $\text{Res} (z_0)$ .

#### A.4.1 - Regras para determinar os resíduos [31]

(a) No caso de um polo simples, tem-se, por exemplo

$$f(z) = \frac{c_1}{z-z_0} + b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots \quad (0 < |z-z_0| < r, c_1 \neq 0) \quad (\text{A.7})$$

multiplicando ambos os membros por  $(z-z_0)$ , resulta

$$(z-z_0) f(z) = c_1 + (z-z_0) [b_0 + b_1(z-z_0) + \dots] . \quad (\text{A.8})$$

Fazendo  $z$  se aproximar de  $z_0$ , o segundo membro se aproxima de  $c_1$  e obtém-se:

$$\text{Res} [f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) \quad (\text{A.9})$$

Se  $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ , onde  $A(z)$  e  $B(z)$  são analíticas numa vizinhança de  $z_0$ ,  $A(z_0) \neq 0$ , e  $B(z)$  possui um zero simples em  $z_0$ , em conseqüência,  $B(z)$  pode ser desenvolvida em uma série de Taylor da forma:

$$B(z) = (z-z_0) B'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} B''(z_0) + \dots, \quad (\text{A.10})$$

De (A.9) decorre que

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), z_0] &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{A(z)}{B(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0) A(z)}{(z-z_0)[q'(z_0) + (z-z_0) q''(z_0)/2 + \dots]}, \end{aligned}$$

isto é, tem-se também para polo simples

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)} \quad (\text{A.11})$$

(b) No caso dos polos de ordem  $m$  ( $m=2,3,\dots$ ), o desenvolvimento de Laurent correspondente possui a forma:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_m}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_2}{(z-z_0)^2} + \frac{c_1}{(z-z_0)} + b_0 + \\ & b_1(z-z_0) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde  $c_m \neq 0$  e a série converge em uma certa vizinhança de  $z_0$ , exceto no próprio  $z_0$ . Multiplicando ambos os membros por  $(z-z_0)^m$  obtêm-se:

$$\begin{aligned} (z-z_0)^m f(z) &= c_m + c_{m-1}(z-z_0) + \dots + c_2(z-z_0)^{m-2} + \\ & c_1(z-z_0)^{m-1} + b_0(z-z_0)^m + (z-z_0)^m [b_1(z-z_0) + \dots] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Isto mostra que o resíduo  $c_1$  de  $f(z)$  em  $z_0$  é agora o coeficiente da potência  $(z-z_0)^{m-1}$  no desenvolvimento de Taylor da função  $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$  com centro em  $z=z_0$ . Portanto, do teorema de Taylor

$$c_1 = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!};$$

isto é,

$$\text{Res } [f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m f(z) \right]. \quad (\text{A.14})$$

(c) Se  $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ , mas  $B(z)$  tendo um zero de 2.<sup>a</sup> ordem em  $z_0$ , de modo que  $f(z)$  tem um polo de 2.<sup>a</sup> ordem em  $z_0$ , então

$$\text{Res } [f(z), z_0] = \frac{6A'(z_0)B''(z_0) - 2A(z_0)B'''(z_0)}{3[B''(z_0)]^2}. \quad (\text{A.15})$$

#### A.5 - Teorema dos Resíduos

Seja  $f(z)$  uma função unívoca que é analítica no interior de um contorno fechado simples  $C$  e sobre  $C$ , exceto em um número finito de singularidades isoladas  $z_1, z_2, \dots, z_m$  no interior de  $C$ . Então [31],

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res } [f(z), z_j], \quad (\text{A.16})$$

a integral sendo calculada no sentido direto (positivo) em torno de  $C$ .

### A.6 - Teorema de Inversão para Transformadas de Laplace

Seja considerado uma função  $f(x)$  que se anula quando  $x < 0$ .  
Tem-se,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda x} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-j\lambda \xi} d\xi \right) d\lambda, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{A.17})$$

como representação da integral complexa de Fourier [32].

De acordo com a equação acima, a forma complexa da representação da integral de Fourier de  $e^{-\gamma x} f(x)$  é dada por:

$$e^{-\gamma x} f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{j\lambda x} \left( \int_0^{\infty} e^{-j\lambda \xi} e^{\gamma \xi} f(\xi) d\xi \right) d\lambda, \quad (\text{A.18})$$

onde o limite é usado por conveniência [32].

Multiplicando por  $e^{\gamma x}$  pode-se rearranjar na forma,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{(\gamma + j\lambda)x} \left( \int_0^{\infty} e^{-(\gamma + j\lambda)\xi} f(\xi) d\xi \right) d\lambda. \quad (\text{A.19})$$

Igualmente, introduzindo a variável  $p = \gamma + j\lambda$ , obtém-se:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\gamma - jL}^{\gamma + jL} e^{px} \left( \int_0^{\infty} e^{-p\xi} f(\xi) d\xi \right) dp. \quad (\text{A.20})$$

A transformação dada pela equação (A.20) pode ser provada, se  $f(x)$  é diferenciável e de ordem exponencial, pois, para que a integral  $\int_0^{\infty} e^{-\gamma \xi} f(\xi) d\xi$  exista, tais condições são necessárias [32].

Substituindo  $x$  por  $t$ ,  $p$  por  $z$  e a transformada de Laplace de  $f(t)$  por  $\bar{f}(p)$ ,

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} (f(t)) dt, \quad (\text{A.21})$$

onde  $p$  é complexo, pode-se expressar  $f(t)$  em termos de sua transformada  $\bar{f}(p)$  pela integral complexa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\gamma-jL}^{\gamma+jL} e^{tz} \bar{f}(z) dz, \quad (\text{A.22})$$

que é conhecido como o teorema de inversão para a transformada de Laplace. Esta integral, como mostra no plano complexo da Fig.30, é tomada ao longo da linha infinita  $x=\gamma$ , e pode usualmente ser calculada pela integral do contorno.

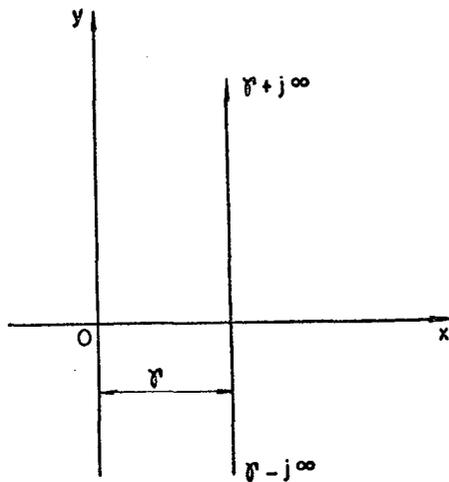


Fig. 30 - Plano complexo

O teorema de inversão dado pela Eq. (A.22) é também válido para problemas multidimensionais. Se a transformada de Laplace da função  $f(r,t)$  com relação ao tempo é  $\bar{f}(r,p)$ , então o teorema de inversão obtido da Eq. (A.22) tem a seguinte forma,

$$f(r,t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\gamma-jL}^{\gamma+jL} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz, \quad (\text{A.23})$$

onde  $r$  denota o vetor posição.

### A.7 - Avaliação do Teorema de Inversão em dois Contornos Particulares

(a) Se  $f(z)$  é analítica, exceto para um número  $N$  de polos, todos dos quais estão a esquerda de alguma linha  $z=\gamma$ , completa-se o contorno da Eq. (A.23) e da Fig. 31a por um grande círculo  $C$  de raio  $R$ , incluindo todos os polos do integrando (Fig. 31b) [32]. Contorno I é denotado como o contorno fechado.

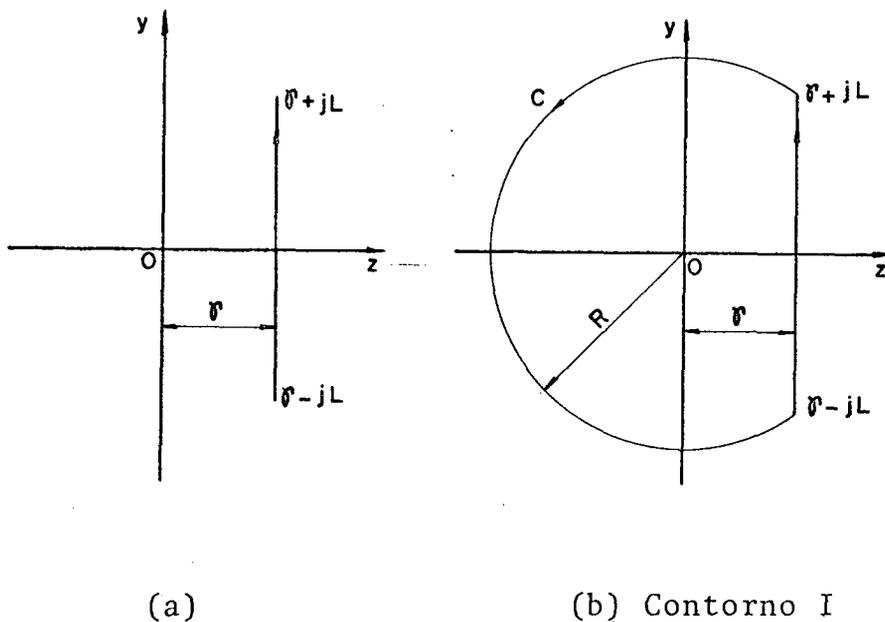


Fig. 31 - Esquematização de um contorno fechado no plano complexo.

No limite quando  $N$  tende ao infinito, segue do teorema do resíduo, Eq. (A.16), que:

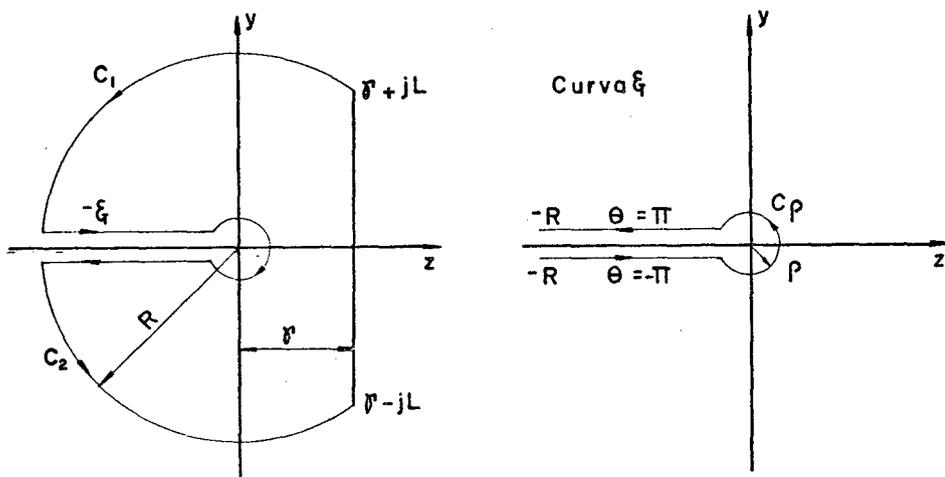
$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\gamma-jL}^{\gamma+jL} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C e^{tz} \bar{f}(r,z) dz = 2\pi j \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \text{Res}(a_n), \quad (\text{A.24})$$

onde os  $a_n$  são os polos, isto é, os pontos de singularidade dos integrandos.

Mas no limite, quando  $R$  tende ao infinito, a integral sobre o círculo  $C$  anula-se. Desse modo, no limite, obtém-se [32]:

$$f(r,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(a_n) \quad (\text{A.25})$$

(b) Se  $f(z)$  é analítica, exceto para um número de polos, todos dos quais estão a esquerda de alguma linha  $z=\gamma$ , e se também tem um ponto de divisão, "branch point", em  $z=0$ , então pela introdução de um corte ao longo do eixo real negativo (arbitrário), completa-se o contorno da integral de inversão por um grande círculo de raio  $R$  incluindo todos os polos do integrando, e uma curva  $\xi$  ao longo do corte e em torno do ponto de divisão (Fig. 32) [32].



(a) Contorno II

(b)

Fig. 32 - Esquemática de um contorno com um "branch point" no plano complexo.

A aplicação do teorema do resíduo, Eq. (A.16), no contorno fechado da Fig. 32a, contorno II, resulta em

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\gamma-jL}^{\gamma+jL} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1+C_2} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz - \quad (A.26)$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0}} \int_{\xi} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz = 2\pi j \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \text{Res}(a_n).$$

Mas no limite, quando R tende ao infinito, a integral sobre o círculo  $(C_1+C_2)$  anula-se. Dessa forma, no limite, obtêm-se[32]:

$$f(r,t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz = \quad (A.27)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(a_n) + \frac{1}{2\pi j} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0}} \int_{\xi} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz .$$

Nota-se, no entanto, que  $z=-\rho$  sobre as divisões na parte inferior e superior da curva  $\xi$ , logo

$$\int_{\xi} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz = - \int_R^{\rho} e^{-t\rho} \bar{f}(r,\rho e^{-j\pi}) dz + \quad (A.28)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C\rho} e^{tz} \bar{f}(r,z) dz - \int_{\rho}^R e^{-t\rho} \bar{f}(r,\rho e^{j\pi}) dz .$$

Visto que  $\bar{f}(r,z)$  é considerada implicitamente, seu argumento ao longo das divisões inferior e superior da curva  $\xi$  deve ser tomado como sendo  $z = \rho e^{-j\pi}$  e  $z = \rho e^{j\pi}$ , respectivamente [32].

Quando o raio  $R$  tende ao infinito e  $\rho$  se aproxima de zero, a Eq. (A.28) resulta em:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0}} \int_{\Gamma} e^{tz} \bar{f}(r, z) dz = \int_0^{\infty} e^{-t\rho} [\bar{f}(r, \rho e^{-j\pi}) - \bar{f}(r, \rho e^{j\pi})] d\rho + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C\rho} e^{tz} \bar{f}(r, z) dz. \quad (\text{A.29})$$

Na Eq. (A.29) a integral em torno do pequeno círculo  $C\rho$  é deixada complexa, para ser calculada individualmente para cada problema em particular. Nota-se que  $\rho$  permanece constante e a diferencial de  $z = \rho e^{j\theta}$  é  $dz = j\rho e^{j\theta} d\theta$  para esta integral. Inserindo a Eq. (A.29) na Eq. (A.28), obtêm-se finalmente:

$$f(r, t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} e^{tz} \bar{f}(r, z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}(a_n) + \frac{1}{2\pi j} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C\rho} e^{tz} \bar{f}(r, z) dz + \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} e^{-t\rho} [\bar{f}(r, \rho e^{-j\pi}) - \bar{f}(r, \rho e^{j\pi})] d\rho. \quad (\text{A.30})$$

Este caso surge em problemas envolvendo a condução de calor em regiões semi-infinitas, enquanto que a Eq. (A.25) é usada para problemas envolvendo a condução de calor em regiões finitas [32].

## A.8 - Resumo

Apresentou-se o teorema de inversão das transformadas de Laplace seguido do teorema dos resíduos, o qual torna possível a obtenção da transformada de funções complexas, frequentes nos problemas de transferência de calor e massa.

Nesse trabalho este teorema é aplicado na obtenção da solução das equações do problema de transferência simultânea de calor e massa num elemento poroso de espessura finita, sujeito a condições de contorno arbitrárias.

## B - RELAÇÃO FUNCIONAL PARA O COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE MASSA

### B.1 - Introdução

Nesse apêndice mostra-se uma relação funcional para o coeficiente de transferência de massa  $\alpha_\mu$  em termos do coeficiente de transferência de calor  $\alpha_q$ .

Utiliza-se basicamente o modelo apresentado por Poppei et al. [3], que consiste em expressar a densidade de fluxo de massa em função de uma diferença de pressão parcial de vapor entre as superfícies de contorno e o meio adjacente, e que através da relação de Lewis [3] obtêm a relação entre o coeficiente de transferência de massa e o coeficiente de transferência de calor.

### B.2 - Densidade de Fluxo de Massa e a Relação de Lewis

Uma outra forma de escrever a densidade de fluxo de massa  $\dot{j}_m$ , Eq. (4.13), consiste em expressá-la como proporcional à diferença entre as pressões parciais do vapor nas superfícies de contorno do elemento poroso e no meio adjacente [3],

$$\dot{j}_m = \frac{\beta M}{RT_s} (p_{vs} - p_{va}), \quad (B.1)$$

onde  $\beta$  é o coeficiente de transferência de massa (m/h) referenciado à diferença de pressão do vapor entre as superfícies e o meio,  $T_s$  é a temperatura na superfície de contorno,  $p_{vs}$  é a pressão parcial do vapor na superfície de contorno,  $p_{va}$  é a pressão parcial do vapor no ar,  $M$  é o peso molecular da água e  $R$  é a constante geral dos gases.

O coeficiente  $\beta$  pode ser obtido em termos do coeficiente de transferência de calor  $\alpha_q$ , através da relação de Lewis [3],

$$\frac{\alpha_q}{\beta} = \rho_a C (Le)^{1-n}, \quad (B.2)$$

onde  $\rho_a$  e  $C$  são, respectivamente, a massa específica e o calor específico do ar, e  $Le$  é o número de Lewis, dado por:

$$Le = \frac{a}{D}, \quad (B.3)$$

onde  $a$  é a difusibilidade térmica e  $D$  o coeficiente de difusão, no ar. Para  $n=0$  e para uma temperatura no meio ambiente de  $20^\circ\text{C}$  a Eq. (B.2) pode ser expressa por:

$$\frac{\alpha_q}{\beta} \approx 1 \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \text{K}}. \quad (B.4)$$

### B.3 - Uma Relação Funcional para $\alpha_\mu$

Admitindo-se uma aproximação linear quando as temperaturas na superfícies de contorno do elemento poroso e no meio adjacente não são muito diferentes, a densidade de fluxo de massa em termos de uma diferença de potenciais químicos, Eq. (4.17), pode ser aproximada pela seguinte expressão:

$$\mu_s - \mu_a \approx RT_s \ln \left( \frac{p_{vs}}{p_{va}} \right), \quad (B.5)$$

desconsiderando-se a parcela  $Mg\psi$ , que caracteriza a condensação capilar (seção 4.2).

Dessa forma a densidade de fluxo de massa em termos de uma diferença dos potenciais químicos nas superfícies de contorno e no meio adjacente, Eq. (4.20), fica aproximada pela expressão:

$$j_m = \frac{\alpha_\mu}{M} RT_s \ln \left( \frac{p_{vs}}{p_{va}} \right). \quad (B.6)$$

O coeficiente de transferência de massa  $\alpha_\mu$  referenciado à diferença de potenciais químicos, pode ser calculado aproximadamen

te através da combinação das Eqs. (B.6) e (B.1), que resulta na seguinte expressão:

$$\alpha_{\mu} = \beta \left( \frac{M}{RT_s} \right)^2 \frac{p_{vs} - p_{va}}{\ln \left( \frac{p_{vs}}{p_{va}} \right)}, \quad (\text{B.7})$$

que permite determinar  $\alpha_{\mu}$  em termos de  $\alpha_q$ , usando a Eq. (B.4)

## C - FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA PARA O ELEMENTO POROSO DA TAB. 8.

Tabela 10- Valores das funções de transferência para  $Lu = 0,1$ ;  $\epsilon=0$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ 

j	$U_j$	$V_j$	$S_j$	$T_j$	$X_j$	$Y_j$
	$(\frac{W}{m^2} \text{ K})$	$(\frac{W}{m^2} \text{ K})$	(kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	(kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	(kg de material seco/ $m^2 \text{ s}$ )	(kg de material seco/ $m^2 \text{ s}$ )
0	0,338383E+02	0,429934E+00	-0,188962E-05	0,111043E-07	0,124359E-01	-0,420647E-08
1	-0,198034E+02	0,338393E+01	0,110740E-05	0,873917E-07	-0,728476E-02	0,470689E-08
2	-0,307370E+01	0,273698E+01	0,186957E-06	0,706611E-07	-0,119852E-02	0,107217E-06
3	-0,125928E+01	0,124759E+01	0,105345E-06	0,318562E-07	-0,620400E-03	0,163785E-05
4	-0,541188E+00	0,540783E+00	0,741278E-07	0,123520E-07	-0,396470E-03	0,726359E-05
5	-0,233498E+00	0,233484E+00	0,565531E-07	0,227272E-08	-0,281625E-03	0,169073E-04
6	-0,100775E+00	0,100775E+00	0,448200E-07	-0,355704E-08	-0,213402E-03	0,277184E-04
7	-0,434948E-01	0,434948E-01	0,364211E-07	-0,713748E-08	-0,168950E-03	0,371734E-04
8	-0,187725E-01	0,187724E-01	0,301976E-07	-0,932527E-08	-0,138071E-03	0,441454E-04
9	-0,810224E-02	0,810224E-02	0,254753E-07	-0,105746E-07	-0,115580E-03	0,485273E-04
10	-0,349694E-02	0,349694E-02	0,218177E-07	-0,111739E-07	-0,985860E-04	0,506892E-04
11	-0,150929E-02	0,150929E-02	0,189289E-07	-0,113244E-07	-0,853555E-04	0,511350E-04
12	-0,651413E-03	0,651413E-03	0,166040E-07	-0,111704E-07	-0,747938E-04	0,503426E-04
13	-0,281151E-03	0,281151E-03	0,146990E-07	-0,108165E-07	-0,661783E-04	0,487069E-04
14	-0,121546E-03	0,121346E-03	0,131116E-07	-0,103373E-07	-0,590163E-04	0,465321E-04
15	-0,523731E-04	0,523731E-04	0,117682E-07	-0,978586E-08	-0,529630E-04	0,440424E-04
16	-0,226044E-04	0,226044E-04	0,106155E-07	-0,919900E-08	-0,477723E-04	0,413981E-04
17	-0,975609E-05	0,975609E-05	0,961426E-08	-0,860211E-08	-0,432653E-04	0,387106E-04
18	-0,421075E-05	0,421075E-05	0,873546E-08	-0,801223E-08	-0,393101E-04	0,360555E-04

Tabela 10- Valores das funções de transferência para  $Lu = 0,1$ ;  $\epsilon = 0$ ;  $\delta = 2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   
(Continuação)

j	$U_j$	$V_j$	$S_j$	$T_j$	$X_j$	$Y_j$
	$(\frac{W}{m^2} \text{ K})$	$(\frac{W}{m^2} \text{ K})$	(kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	(kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	(kg de material seco/ $m^2 \text{ s}$ )	(kg de material seco/ $m^2 \text{ s}$ )
19	-0,181737E-05	0,181737E-05	0,795723E-08	-0,744044E-08	-0,358077E-04	0,334822E-04
20	-0,784382E-06	0,784382E-06	0,726294E-08	-0,689367E-08	-0,326833E-04	0,310216E-04
21	-0,338541E-06	0,338541E-06	0,663975E-08	-0,637588E-08	-0,298789E-04	0,286915E-04
22	-0,146115E-06	0,146115E-06	0,607760E-08	-0,588905E-08	-0,273492E-04	0,265500E-04
23	-0,630637E-07	0,630637E-07	0,556847E-08	-0,543375E-08	-0,250581E-04	0,244519E-04
24	-0,272184E-07	0,272184E-07	0,510590E-08	-0,500963E-08	-0,229765E-04	0,225433E-04
25	-0,117475E-07	0,117475E-07	0,468454E-08	-0,461575E-08	-0,210804E-04	0,207709E-04
26	-0,507027E-08	0,507027E-08	0,429996E-08	-0,425080E-08	-0,193498E-04	0,191286E-04
27	-0,218834E-08	0,218834E-08	0,394838E-08	-0,391326E-08	-0,177677E-04	0,176097E-04
28	-0,944493E-09	0,944493E-09	0,362658E-08	-0,360148E-08	-0,163196E-04	0,162067E-04
29	-0,407645E-09	0,407645E-09	0,333173E-08	-0,331380E-08	-0,149928E-04	0,149121E-04
30	-0,175941E-09	0,175941E-09	0,306139E-08	-0,304857E-08	-0,137762E-04	0,137186E-04
31	-0,759365E-10	0,759365E-10	0,281335E-08	-0,280420E-08	-0,126601E-04	0,126189E-04
32	-0,327744E-10	0,327744E-10	0,258568E-08	-0,257914E-08	-0,116356E-04	0,116061E-04
33	-0,141455E-10	0,141455E-10	0,237663E-08	-0,237195E-08	-0,106948E-04	0,106738E-04
34	-0,610523E-11	0,610523E-11	0,218461E-08	-0,218127E-08	-0,983074E-05	0,981571E-05
35	-0,263503E-11	0,263503E-11	0,200821E-08	-0,200582E-08	-0,903693E-05	0,902618E-05
36	-0,113729E-11	0,113729E-11	0,184612E-08	-0,184441E-08	-0,830752E-05	0,829985E-05
37	-0,490855E-12	0,490855E-12	0,169716E-08	-0,169594E-08	-0,763722E-05	0,763174E-05

Tabela 10- Valores das funções de transferência para  $Lu = 0,1$ ;  $\epsilon = 0$ ;  $\delta = 2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   
(Continuação)

j	$U_j$	$V_j$	$S_j$	$T_j$	$X_j$	$Y_j$
	$(\frac{W}{m^2 K})$	$(\frac{W}{m^2 K})$	(kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	(kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	(kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )	(kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )
38	-0,211854E-12	0,211854E-12	0,156026E-08	-0,155939E-08	-0,702116E-05	0,701724E-05
39	-0,914369E-13	0,914369E-13	0,143443E-08	-0,143380E-08	-0,645491E-05	0,645211E-05
40	-0,394644E-13	0,394644E-13	0,131876E-08	-0,131831E-08	-0,593441E-05	0,593241E-05
41	-0,170329E-13	0,170329E-13	0,121243E-08	-0,121211E-08	-0,545594E-05	0,545451E-05
42	-0,735145E-14	0,735145E-14	0,111469E-08	-0,111446E-08	-0,501609E-05	0,501507E-05
43	-0,317290E-14	0,317290E-14	0,102483E-08	-0,102467E-08	-0,461173E-05	0,461100E-05
44	-0,136943E-14	0,136943E-14	0,942220E-09	-0,942104E-09	-0,423999E-05	0,423947E-05
45	-0,591051E-15	0,591051E-15	0,866273E-09	-0,866190E-09	-0,389823E-05	0,389785E-05
46	-0,255099E-15	0,255099E-15	0,796450E-09	-0,796391E-09	-0,358402E-05	0,358376E-05
47	-0,110101E-15	0,110101E-15	0,732257E-09	-0,732214E-09	-0,329515E-05	0,329496E-05
48	-0,475200E-16	0,475200E-16	0,673238E-09	-0,673208E-09	-0,302957E-05	0,302944E-05
49	-0,205097E-16	0,205097E-16	0,618978E-09	-0,618956E-09	-0,278540E-05	0,278530E-05
50	-0,885206E-17	0,885206E-17	0,569091E-09	-0,569076E-09	-0,256091E-05	0,256084E-05
51	-0,382057E-17	0,382057E-17	0,523225E-09	-0,523214E-09	-0,235451E-05	0,235446E-05
52	-0,164897E-17	0,164897E-17	0,481057E-09	-0,481049E-09	-0,216475E-05	0,216472E-05
53	-0,711698E-18	0,711698E-18	0,442287E-09	-0,442281E-09	-0,199029E-05	0,199026E-05
54	-0,507171E-18	0,507171E-18	0,406641E-09	-0,406637E-09	-0,182989E-05	0,182987E-05
55	-0,152576E-18	0,152576E-18	0,373869E-09	-0,373866E-09	-0,168241E-05	0,168240E-05
56	-0,572199E-19	0,572199E-19	0,345738E-09	-0,345736E-09	-0,154682E-05	0,154681E-05

Tabela 10 - Valores das funções de transferência para  $Lu = 0,1$ ;  $\epsilon=0$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   
(Continuação)

$j$	$U_j$ $(\frac{W}{m^2} \text{ K})$	$V_j$ $(\frac{W}{m^2} \text{ K})$	$S_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	$T_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	$X_j$ (kg de material seco/ $m^2 \text{ s}$ )	$Y_j$ (kg de material seco/ $m^2 \text{ s}$ )
57	-0,246963E-19	0,246963E-19	0,316035E-09	-0,316034E-09	-0,142216E-05	0,142215E-05
58	-0,106590E-19	0,106590E-19	0,299565E-09	-0,290564E-09	-0,130754E-05	0,130754E-05
59	-0,460044E-20	0,460044E-20	0,267148E-09	-0,267147E-09	-0,120217E-05	0,120216E-05
60	-0,198556E-20	0,198556E-20	0,245618E-09	-0,245617E-09	-0,110528E-05	0,110528E-05
61	-0,856972E-21	0,856972E-21	0,225823E-09	-0,225823E-09	-0,101620E-05	0,101620E-05
62	-0,369871E-21	0,369871E-21	0,207624E-09	-0,207623E-09	-0,934306E-06	0,934305E-06
63	-0,159637E-21	0,159637E-21	0,190891E-09	-0,190891E-09	-0,859008E-06	0,859008E-06
64	-0,688999E-22	0,688999E-22	0,175507E-09	-0,175506E-09	-0,789779E-06	0,789779E-06
65	-0,297374E-22	0,297374E-22	0,161362E-09	-0,161362E-09	-0,726130E-06	0,726129E-06
66	-0,128347E-22	0,128347E-22	0,148358E-09	-0,148358E-09	-0,667609E-06	0,667609E-06
67	-0,553949E-23	0,553949E-23	0,136401E-09	-0,136401E-09	-0,613806E-06	0,613805E-06
68	-0,239086E-23	0,239086E-23	0,125408E-09	-0,125408E-09	-0,564338E-06	0,564338E-06
69	-0,103190E-23	0,103190E-23	0,115302E-09	-0,115302E-09	-0,518857E-06	0,518857E-06
70	-0,445371E-24	0,445371E-24	0,106009E-09	-0,106009E-09	-0,477041E-06	0,477041E-06
71	-0,192223E-24	0,192223E-24	0,974657E-10	-0,974657E-10	-0,438596E-06	0,438596E-06
72	-0,829640E-25	0,829640E-25	0,896108E-10	-0,896108E-10	-0,403248E-06	0,403248E-06
73	-0,358075E-25	0,358075E-25	0,823889E-10	-0,823889E-10	-0,370750E-06	0,370750E-06
74	-0,154546E-25	0,154546E-25	0,757490E-10	-0,757490E-10	-0,340870E-06	0,340870E-06
75	-0,667024E-26	0,667024E-26	0,696443E-10	-0,696443E-10	-0,313399E-06	0,313399E-06

Tabela - Valores das funções de transferência para  $Lu = 0,1$ ;  $\epsilon=0$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   
(Continuação)

j	$U_j$	$V_j$	$S_j$	$T_j$	$X_j$	$Y_j$
	$(\frac{W}{m^2 K})$	$(\frac{W}{m^2 K})$	(kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	(kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	(kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )	(kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )
76	-0,287889E-26	0,287889E-26	0,640315E-10	-0,640315E-10	-0,288142E-06	0,288142E-06
77	-0,124254E-26	0,124254E-26	0,588711E-10	-0,588711E-10	-0,264920E-06	0,264920E-06
78	-0,536282E-27	0,536282E-27	0,541266E-10	-0,541266E-10	-0,243569E-06	0,243569E-06
79	-0,231460E-27	0,231460E-27	0,497644E-10	-0,497644E-10	-0,223949E-06	0,223949E-06
80	-0,998989E-28	0,998989E-28	0,457538E-10	-0,457538E-10	-0,205892E-06	0,205892E-06
81	-0,431166E-28	0,431166E-28	0,420664E-10	-0,420664E-10	-0,189299E-06	0,189299E-06
82	-0,186092E-28	0,186092E-28	0,386762E-10	-0,386762E-10	-0,174043E-06	0,174043E-06
83	-0,803179E-29	0,803179E-29	0,355592E-10	-0,355592E-10	-0,160017E-06	0,160017E-06
84	-0,346654E-29	0,346654E-29	0,326935E-10	-0,326935E-10	-0,147120E-06	0,147120E-06
85	-0,149617E-29	0,149617E-29	0,300586E-10	-0,300586E-10	-0,135264E-06	0,135264E-06
86	-0,645749E-30	0,645749E-30	0,276362E-10	-0,276362E-10	-0,124363E-06	0,124363E-06
87	-0,278707E-30	0,278707E-30	0,254089E-10	-0,254089E-10	-0,114340E-06	0,114340E-06
88	-0,120291E-30	0,120291E-30	0,233612E-10	-0,233612E-10	-0,105125E-06	0,105125E-06
89	-0,519177E-31	0,519177E-31	0,214784E-10	-0,214784E-10	-0,966529E-07	0,966529E-07
90	-0,224078E-31	0,224078E-31	0,197475E-10	-0,197475E-10	-0,888635E-07	0,888635E-07
91	-0,967127E-32	0,967127E-32	0,181560E-10	-0,181560E-10	-0,817018E-07	0,817018E-07
92	-0,417414E-32	0,417414E-32	0,166927E-10	-0,166927E-10	-0,751173E-07	0,751173E-07
95	-0,180157E-32	0,180157E-32	0,153474E-10	-0,153474E-10	-0,690635E-07	0,690635E-07

Tabela 11 - Valores das funções de transferência para  $Lu=0,2$ ;  $\epsilon=0$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ 

$j$	$U_j$ $(\frac{W}{m^2 K})$	$V_j$ $(\frac{W}{m^2 K})$	$S_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	$T_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	$X_j$ (kg de material seco/ $m^2 \text{ s}$ )	$Y_j$ (kg de material seco/ $m^2 \text{ s}$ )
0	0,338383E+02	0,429934E+00	-0,486091E-05	0,499671E-07	0,175870E-01	-0,370606E-08
1	-0,198034E+02	0,338393E+01	0,284963E-05	0,392339E-06	-0,103022E-01	0,185699E-05
2	-0,307370E+01	0,273698E+01	0,490269E-06	0,301546E-06	-0,169496E-02	0,330723E-04
3	-0,125928E+01	0,124759E+01	0,292340E-06	0,902318E-07	-0,877377E-03	0,109517E-03
4	-0,541188E+00	0,540783E+00	0,217441E-06	-0,241480E-07	-0,560671E-03	0,173991E-03
5	-0,233498E+00	0,233484E+00	0,171918E-06	-0,733857E-07	-0,398108E-03	0,201040E-03
6	-0,100775E+00	0,100775E+00	0,138849E-06	-0,885518E-07	-0,301122E-03	0,200527E-03
7	-0,434948E-01	0,434948E-01	0,113532E-06	-0,878520E-07	-0,237174E-03	0,185814E-03
8	-0,187725E-01	0,187724E-01	0,937048E-07	-0,805930E-07	-0,191773E-03	0,165549E-03
9	-0,810224E-02	0,810224E-02	0,779050E-07	-0,712103E-07	-0,157693E-03	0,144304E-03
10	-0,349694E-02	0,349694E-02	0,651202E-07	-0,617020E-07	-0,131053E-03	0,124217E-03
11	-0,150929E-02	0,150929E-02	0,546423E-07	-0,528970E-07	-0,109635E-03	0,106145E-03
12	-0,651413E-03	0,651413E-03	0,459701E-07	-0,450790E-07	-0,920916E-04	0,903094E-04
13	-0,281151E-03	0,281151E-03	0,387412E-07	-0,382862E-07	-0,775477E-04	0,766378E-04
14	-0,121346E-03	0,121346E-03	0,326857E-07	-0,324534E-07	-0,653997E-04	0,649351E-04
15	-0,523731E-04	0,523731E-04	0,275966E-07	-0,274780E-07	-0,552054E-04	0,549681E-04
16	-0,226044E-04	0,226044E-04	0,233104E-07	-0,232498E-07	-0,466260E-04	0,465049E-04
17	-0,975609E-05	0,975609E-05	0,196955E-07	-0,196646E-07	-0,393932E-04	0,393314E-04
18	-0,421075E-05	0,421075E-05	0,166441E-07	-0,166283E-07	-0,332892E-04	0,332576E-04

Tabela 11 - Valores das funções de transferência para  $Lu=0,2$ ;  $\epsilon=0$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   
(Continuação)

$j$	$U_j$ $(\frac{W}{m^2 K})$	$V_j$ $(\frac{W}{m^2 K})$	$S_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	$T_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ K}$ )	$X_j$ (kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )	$Y_j$ (kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )
19	-0,181737E-05	0,181737E-05	0,140670E-07	-0,140590E-07	-0,281345E-04	0,281183E-04
20	-0,784382E-06	0,784382E-06	0,118898E-07	-0,118856E-07	-0,237797E-04	0,237715E-04
21	-0,338541E-06	0,338541E-06	0,100499E-07	-0,100478E-07	-0,200999E-04	0,200957E-04
22	-0,146115E-06	0,146115E-06	0,849495E-08	-0,849388E-08	-0,169899E-04	0,169878E-04
23	-0,630637E-07	0,630637E-07	0,718071E-08	-0,718016E-08	-0,143614E-04	0,143603E-04
24	-0,272184E-07	0,272184E-07	0,606985E-08	-0,606957E-08	-0,121397E-04	0,121391E-04
25	-0,117475E-07	0,117475E-07	0,513087E-08	-0,513072E-08	-0,102617E-04	0,102615E-04
26	-0,507027E-08	0,507027E-08	0,433716E-08	-0,433708E-08	-0,867432E-05	0,867417E-05
27	-0,218834E-08	0,218834E-08	0,366624E-08	-0,366620E-08	-0,733248E-05	0,733240E-05
28	-0,944493E-09	0,944493E-09	0,309911E-08	-0,309909E-08	-0,619821E-05	0,619818E-05
29	-0,407645E-09	0,407645E-09	0,261971E-08	-0,261970E-08	-0,523941E-05	0,523940E-05
30	-0,175941E-09	0,175941E-09	0,221447E-08	-0,221446E-08	-0,442893E-05	0,442892E-05
31	-0,759365E-10	0,759365E-10	0,187191E-08	-0,187191E-08	-0,374383E-05	0,374382E-05
32	-0,327744E-10	0,327744E-10	0,158235E-08	-0,158235E-08	-0,316470E-05	0,316470E-05
33	-0,141455E-10	0,141455E-10	0,133758E-08	-0,133758E-08	-0,267516E-05	0,267516E-05
34	-0,610523E-11	0,610523E-11	0,113067E-08	-0,113067E-08	-0,226134E-05	0,226134E-05
35	-0,263503E-11	0,263503E-11	0,955768E-09	-0,955768E-09	-0,191154E-05	0,191154E-05
36	-0,113729E-11	0,113729E-11	0,807922E-09	-0,807922E-09	-0,161584E-05	0,161584E-05
37	-0,490855E-12	0,490855E-12	0,682946E-09	-0,682946E-09	-0,136589E-05	0,136589E-05

Tabela 11 - Valores das funções de transferência para  $\text{Lu}=0,2$ ;  $\epsilon=0$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   
(Continuação)

$j$	$U_j$ $(\frac{W}{m^2 K})$	$V_j$ $(\frac{W}{m^2 K})$	$S_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	$T_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ K}$ )	$X_j$ (kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )	$Y_j$ (kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )
38	-0,211854E-12	0,211854E-12	0,577302E-09	-0,577302E-09	-0,115460E-05	0,115460E-05
39	-0,914369E-13	0,914369E-13	0,488000E-09	-0,488000E-09	-0,976000E-06	0,976000E-06
40	-0,394644E-13	0,394644E-13	0,412512E-09	-0,412512E-09	-0,825024E-06	0,825024E-06
41	-0,170329E-13	0,170329E-13	0,348701E-09	-0,348701E-09	-0,697402E-06	0,697402E-06
42	-0,735145E-14	0,735145E-14	0,294761E-09	-0,294761E-09	-0,589522E-06	0,589522E-06
43	-0,317290E-14	0,317290E-14	0,249165E-09	-0,249165E-09	-0,498330E-06	0,498330E-06
44	-0,136943E-14	0,136943E-14	0,210622E-09	-0,210622E-09	-0,421244E-06	0,421244E-06
45	-0,591051E-15	0,591051E-15	0,178041E-09	-0,178041E-09	-0,356082E-06	0,356082E-06
46	-0,255099E-15	0,255099E-15	0,150500E-09	-0,150500E-09	-0,301001E-06	0,301001E-06
47	-0,110101E-15	0,110101E-15	0,127220E-09	-0,127220E-09	-0,254439E-06	0,254439E-06
48	-0,475200E-16	0,475200E-16	0,107540E-09	-0,107540E-09	-0,215080E-06	0,215080E-06
49	-0,205097E-16	0,205097E-16	0,909050E-10	-0,909050E-10	-0,181810E-06	0,181810E-06
50	-0,885206E-17	0,885206E-17	0,768430E-10	-0,768430E-10	-0,153686E-06	0,153686E-06
51	-0,382057E-17	0,382057E-17	0,649563E-10	-0,649563E-10	-0,129913E-06	0,129913E-06
52	-0,164897E-17	0,164897E-17	0,549083E-10	-0,549083E-10	-0,109817E-06	0,109817E-06
53	-0,711698E-18	0,711698E-18	0,464146E-10	-0,464146E-10	-0,928292E-07	0,928292E-07
54	-0,307171E-18	0,307171E-18	0,392348E-10	-0,392348E-10	-0,784696E-07	0,784696E-07
55	-0,152576E-18	0,152576E-18	0,331656E-10	-0,331656E-10	-0,663313E-07	0,663313E-07
56	-0,572199E-19	0,572199E-19	0,280353E-10	-0,280353E-10	-0,560706E-07	0,560706E-07

Tabela 11 - Valores das funções de transferência para  $Lu=0,2$ ;  $\epsilon=0$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   
(Continuação)

$j$	$U_j$ $(\frac{W}{m^2 K})$	$V_j$ $(\frac{W}{m^2 K})$	$S_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	$T_j$ (kg de umidade/ $m^2 \text{ s K}$ )	$X_j$ (kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )	$Y_j$ (kg de mate- rial seco/ $m^2 \text{ s}$ )
57	-0,246963E-19	0,246963E-19	0,236986E-10	-0,236986E-10	-0,473971E-07	0,473971E-07
58	-0,106590E-19	0,106590E-19	0,200327E-10	-0,200327E-10	-0,400653E-07	0,400653E-07
59	-0,460044E-20	0,460044E-20	0,169338E-10	-0,169338E-10	-0,338677E-07	0,338677E-07
60	-0,198556E-20	0,198556E-20	0,143144E-10	-0,143144E-10	-0,286287E-07	0,286287E-07
61	-0,856972E-21	0,856972E-21	0,121001E-10	-0,121001E-10	-0,242002E-07	0,242002E-07
62	-0,369871E-21	0,369871E-21	0,102284E-10	-0,102284E-10	-0,204567E-07	0,204567E-07
63	-0,159637E-21	0,159637E-21	0,864615E-11	-0,864615E-11	-0,172923E-07	0,172923E-07
64	-0,688999E-22	0,688999E-22	0,730869E-11	-0,730869E-11	-0,146174E-07	0,146174E-07
65	-0,297374E-22	0,297374E-22	0,617812E-11	-0,617812E-11	-0,123562E-07	0,123562E-07
66	-0,128347E-22	0,128347E-22	0,522243E-11	-0,522243E-11	-0,104449E-07	0,104449E-07
67	-0,553949E-23	0,553949E-23	0,441458E-11	-0,441458E-11	-0,882917E-08	0,882917E-08
68	-0,239086E-23	0,239086E-23	0,373170E-11	-0,373170E-11	-0,746340E-08	0,746340E-08
69	-0,103190E-23	0,103190E-23	0,315445E-11	-0,315445E-11	-0,630889E-08	0,630889E-08
70	-0,445371E-24	0,445371E-24	0,266649E-11	-0,266649E-11	-0,533298E-08	0,533298E-08
71	-0,192223E-24	0,192223E-24	0,225401E-11	-0,225401E-11	-0,450803E-08	0,450803E-08
72	-0,829640E-25	0,829640E-25	0,190534E-11	-0,190534E-11	-0,381069E-08	0,381069E-08
73	-0,358075E-25	0,358075E-25	0,161061E-11	-0,161061E-11	-0,322122E-08	0,322122E-08
74	-0,154546E-25	0,154546E-25	0,136147E-11	-0,136147E-11	-0,272293E-08	0,272293E-08
75	-0,667024E-26	0,667024E-26	0,115086E-11	-0,115086E-11	-0,230173E-08	0,230173E-08

Tabela 11 - Valores das funções de transferência para  $Lu=0,2$ ;  $\epsilon=0$ ;  $\delta=2 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   
(Continuação)

j	U <sub>j</sub>	V <sub>j</sub>	S <sub>j</sub>	T <sub>j</sub>	X <sub>j</sub>	Y <sub>j</sub>
	$(\frac{W}{m^2} \text{ K})$	$(\frac{W}{m^2} \text{ K})$	(kg de umidade/ de/m <sup>2</sup> s K)	(kg de umidade/ de/m <sup>2</sup> s K)	(kg de material seco/ m <sup>2</sup> s)	(kg de material seco/ m <sup>2</sup> s)
76	-0,287889E-26	0,287889E-26	0,972838E-12	-0,972838E-12	-0,194568E-08	0,194568E-08
77	-0,124254E-26	0,124254E-26	0,822351E-12	-0,822351E-12	-0,164470E-08	0,164470E-08
78	-0,536282E-27	0,536282E-27	0,695143E-12	-0,695143E-12	-0,139029E-08	0,139029E-08
79	-0,231460E-27	0,231460E-27	0,587613E-12	-0,587613E-12	-0,117523E-08	0,117523E-08
80	-0,998989E-28	0,998989E-28	0,496716E-12	-0,496716E-12	-0,993431E-09	0,993431E-09
81	-0,431166E-28	0,431166E-28	0,419879E-12	-0,419879E-12	-0,839759E-09	0,839759E-09
82	-0,186092E-28	0,186092E-28	0,354929E-12	-0,354929E-12	-0,709858E-09	0,709858E-09
83	-0,803179E-29	0,803179E-29	0,300025E-12	-0,300025E-12	-0,600051E-09	0,600051E-09
84	-0,346654E-29	0,346654E-29	0,253615E-12	-0,253615E-12	-0,507230E-09	0,507230E-09
85	-0,149617E-29	0,149617E-29	0,214384E-12	-0,214384E-12	-0,428767E-09	0,428767E-09
86	-0,645749E-30	0,645749E-30	0,181221E-12	-0,181221E-12	-0,362442E-09	0,362442E-09
87	-0,278707E-30	0,278707E-30	0,153188E-12	-0,153188E-12	-0,306376E-09	0,306376E-09
88	-0,120291E-30	0,120291E-30	0,129492E-12	-0,129492E-12	-0,258983E-09	0,258983E-09
89	-0,519177E-31	0,519177E-31	0,109461E-12	-0,109461E-12	-0,218922E-09	0,218922E-09
90	-0,224078E-31	0,224078E-31	0,925285E-13	-0,925285E-13	-0,185057E-09	0,185057E-09
91	-0,967127E-32	0,967127E-32	0,782154E-13	-0,782154E-13	-0,156431E-09	0,156431E-09
92	-0,417414E-32	0,417414E-32	0,661164E-13	-0,661164E-13	-0,132233E-09	0,132233E-09
93	-0,180157E-32	0,180157E-32	0,558890E-13	-0,558890E-13	-0,111778E-09	0,111778E-09

## Observações:

- (a) - As funções de transferência  $W_j$ ,  $Z_j$ , ( $j=0,1,2,\dots$ ), que são as funções intermediárias associadas à influência do processo de transferência de massa sobre o transporte de calor, são nulas para  $\epsilon=0$ , de acordo com a seção 3.8.2
- (b) - O valor anormal do primeiro termo ( $Y_0$ ) da função de transferência  $Y_j$ , mostrado nas tabelas 10 e 11, ocorre devido a erros de máquina agravados pela pequena ordem de grandeza dos primeiros termos dessa função.
- (c) - Os valores das funções de transferência para  $\delta=2 \times 10^{-4} \text{ (K}^{-1}\text{)}$  correspondem aos mesmos valores das tabelas 10 e 11 diferindo apenas para as funções  $S_j$  e  $T_j$ , ( $j=0,1,2,\dots$ ), que são obtidas multiplicando-se por  $10^{-1j}$  os valores das tabelas acima, de acordo com as Eqs. (3.105 e 3.107) seção 3.8.