

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

UM ALGORITMO PARA O CÁLCULO DA CONFIABILIDADE DE
SISTEMAS COM FALHAS DUAIS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE
SANTA CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM ENGENHARIA

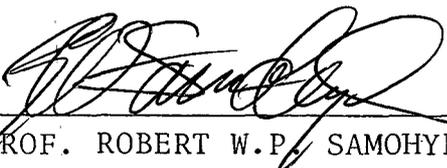
EDLA MARIA FAUST RAMOS

FLORIANÓPOLIS
SANTA CATARINA - BRASIL

UM ALGORITMO PARA O CÁLCULO DA CONFIABILIDADE DE
SISTEMAS COM FALHAS DUAIS

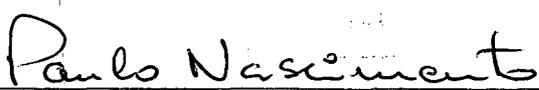
EDLA MARIA FAUST RAMOS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE "MESTRE EM ENGENHARIA", ESPECIALIDADE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO.

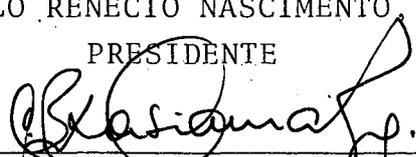


PROF. ROBERT W.P. SAMOHYL
COORDENADOR-Ph.D.

ADDECENTADA PERANTE A BANCA EXAMINADORA COMPOSTA PELOS PROFESSORES:



PROF. PAULO RENEICIO NASCIMENTO, M.Sc.-UFSC
PRESIDENTE



PROF. CORNELIO CELSO DE BRASIL CAMARGO
M.Sc.-COPPE-UFRJ



PROF. LUIZ GONZAGA DE SOUZA FONSECA
Dr.Sc.-COPPE-UFRJ



0.255.926-2

UFSC-BU

Aos meus pais,
Edgard e Stellita,
e ao meu esposo,
José Carlos.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao professor Paulo R. Nascimento, pela tranquilidade e confiança obtida através de sua orientação.

Ao meu esposo José Carlos Ramos pelo estímulo e pelo auxílio prestado.

R E S U M O

Nos dias atuais a alta responsabilidade dos sistemas técnicos modernos, relacionada às áreas econômica e social, confere uma especial importância ao estudo da confiabilidade de sistemas.

Neste trabalho é proposto um método para o cálculo da confiabilidade de sistemas complexos com falhas duais, a partir do conhecimento das probabilidades de falhas de todos os seus componentes.

O valor calculado pelo método a ser apresentado constitui-se num limite inferior para a confiabilidade pretendida e o método foi desenvolvido basicamente sobre o algoritmo proposto por Jensen e Bellmore, para o caso de sistemas com uma só falha, após terem sido realizadas algumas alterações no mesmo.

Está incluída neste trabalho uma exposição criteriosa de modelos matemáticos apropriados à abordagem do problema da confiabilidade e são apresentadas algumas análises rápidas feitas sobre os algoritmos de Nelson, Batts e Beadles e de Misra e Rao.

São incluídos em anexo uma listagem do programa computacional desenvolvido e alguns exemplos executados.

ABSTRACT

In modern day society, the high level of responsibility attributed to modern technical systems within the socio-economic sphere, places a special importance on the study of the reliability of those systems.

A method for calculating the reliability of complex systems with two types of dual errors, based on the knowledge of the probability of error of all the components is proposed in this work.

The calculated value determined by the methodology proposed constitutes a lower limit to the intended reliability. The methodology was developed using an algorithm proposed by Jensen & Bellmore for systems with a single error with some alterations.

Included in this study, is a critical discussion of appropriate mathematic models to approach the problem of reliability and some short analyses of the algorithms of Nelson, Batts & Beadles and Misra & Rao are presented as well as an appendix with a description of the computer program developed and some problems worked out.

2.2.5. Estruturas Monótonas ou Coerentes	28
2.2.5.1. Construção de uma Função de Estrutura Monótona Equivalente a uma Rede	30
2.2.6. Confiabilidade de Sistemas	31
2.2.6.1. A Função de Confiabilidade	33
2.2.6.2. Propriedades da Função de Confiabili- dade de uma Estrutura Monótona	35
2.3. Definição do Problema a Ser Abordado	39
2.3.1. Sistemas com Dois Tipos de Falhas Duais	39
2.3.2. A Função de Estrutura para Sistemas com Dois Tipos de Falhas Duais	40
2.3.3. Função de Confiabilidade de um Sistema Apre- sentando Dois Tipos de Falhas Duais	42

CAPÍTULO III

3. Algoritmos Pesquisados	44
3.1. Introdução	44
3.2. Algoritmo de Jensen e Bellmore	44
3.2.1. Descrição do Algoritmo	48
3.2.2. Fluxograma do Algoritmo	51
3.2.3. Exemplos da Aplicação do Algoritmo	52
3.3. Algoritmo de Nelson, Batts e Beadles	56
3.3.1. Aproximação Sugerida por Nelson, Batts e Beadles	58
3.4. Algoritmo de Misra e Rao	62
3.5. Outros Algoritmos	68
3.5.1. Algoritmos para a Busca de Todos os Elos Mini- mais numa Rede	68

3.5.2. Algoritmos para a Busca de Todos os Cortes Mi- nimais numa Rede	69
3.6. Conclusões	70
CAPÍTULO IV	
4. Algoritmo Proposto	71
4.1. Introdução	71
4.2. Aproximação Utilizada	71
4.3. Modificações Realizadas no Algoritmo de Jensen e Bellmore	74
4.3.1. Restrições Acrescentadas na Utilização do Algoritmo	74
4.3.2. Alteração no Algoritmo	77
4.4. O Teste de Conexidade	79
4.5. O Algoritmo Desenvolvido	82
4.6. Conclusões	85
CAPÍTULO V	
5. Conclusões e Sugestões para Novas Pesquisas	87
Bibliografia	90
Anexo 1: Listagem do Programa	92
Anexo 2: Alguns Exemplos Executados	103

C A P Í T U L O I

1. Introdução

A palavra confiabilidade oferece várias interpretações distintas nos dicionários, contudo "na engenharia e na estatística matemática o termo confiabilidade tem um significado bastante claro, e além de ser perfeitamente definida a confiabilidade pode ser avaliada, testada e calculada de forma bastante objetiva. Nestas áreas a confiabilidade é uma avaliação do nível de desempenho de um equipamento"¹.

A teoria da confiabilidade surgiu no final do século passado e início deste, confinada a problemas mecânicos. Com o advento da eletrificação um esforço considerável foi feito nesta área no sentido de tornar possível um fornecimento satisfatório de energia elétrica. Esse esforço, empreendido desde as primeiras décadas do século foi de tão grande monta que, atualmente, não é exagero dizer-se que o fornecimento de energia elétrica é quase cem por cento possível e realizável.

Após a primeira guerra mundial com a expansão da indústria aeronáutica o estudo de confiabilidade ganha um novo e forte impulso tendo em vista as graves consequências de um mau desempenho nesta área, entretanto o grande desenvolvimento ocorrido na teoria de confiabilidade se deu nos últimos 30 anos, principalmente com o advento da era da eletrônica, da indústria química e

¹BAZOVSKY, Igor - "Reliability Theory and Practice" - Prentice-Hall, New Jersey, p.1.

nuclear, do avião supersônico e dos veículos espaciais.

De forma geral pode-se dizer que o grande progresso nesta área nos últimos anos se deve a um agravamento do problema da confiabilidade, devido as seguintes causas²:

1. O aumento da complexidade dos sistemas técnicos modernos que incluem um grande número de elementos individuais.
2. A intensidade dos regimes de trabalho e funcionamento do sistema ou de suas partes individuais a altas temperaturas, altas pressões e altas velocidades;
3. A necessidade de otimizar ao máximo o investimento de capital, fabricando equipamentos de baixo custo com alta confiabilidade.
4. As exigências de qualidade do trabalho do sistema: alta precisão, efetividade, etc;
5. O aumento da responsabilidade das funções cumpridas pelo sistema: o alto valor técnico e econômico de uma falha ou interrupção brusca;
6. A automatização total ou parcial com a exclusão da participação direta do homem, quando as funções são cumpridas pelo sistema técnico, a exclusão da observação contínua e do controle do homem.

A grande importância do estudo da confiabilidade está relacionada nos dias atuais com a alta responsabilidade das funções exercidas pelos sistemas técnicos modernos,

²SOTSKOV, B. - Fundamentos de La Teoria y del Calculo de Fiabilidad- Editorial Mir, Moscú, 1972, p.9.

para os quais uma falha pode produzir grandes perdas técnicas, econômicas e humanas, chegando as vezes a atingir a dimensão de catástrofe. Por exemplo:

- a falha de um componente com custo de 5 dolares motivou nos Estados Unidos o fracasso no lançamento de um satélite com um custo de aproximadamente 8×10^6 dólares.

- o prejuízo devido a falha nos aparelhos de comando automático nos processos de elaboração na indústria química supera em centenas de vezes o custo destes aparelhos e pode dar lugar a perdas humanas e de recursos físicos;

- a falha de um relé de proteção no sistema energético da parte nordeste dos Estados Unidos provocou a interrupção de energia elétrica em vários estados e conduziu a perdas da ordem de 5×10^8 dólares.

Na bibliografia consultada não foram encontrados métodos computacionais eficientes que fornecessem o valor exato da confiabilidade de sistemas de médio e grande porte mesmo para sistemas com possibilidade de apresentar um só tipo de falha, para o caso de sistemas com dois tipos de falha o número de trabalhos encontrados foi ainda mais reduzido.

No presente trabalho objetiva-se propor um método para o cálculo da confiabilidade de sistemas que apresentam falhas duais, a partir do conhecimento das probabilidades de falhas individuais dos componentes.

O método a ser apresentado não determina o valor exato, determina um limite inferior para a confiabilidade de sistemas com falhas duais; e a aproximação obtida é tanto

melhor quanto menores forem as probabilidades de falha dos componentes do sistema.

O processo a ser desenvolvido só é aplicável a sistemas que possam ser representados por redes não-orientadas, planares fonte-sumidouro, que não incluam nenhum componente inútil e a redes nas quais a cada aresta esteja associado um componente distinto.

O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido basicamente em quatro etapas:

1. Estudo detalhado dos modelos matemáticos para a abordagem do problema da confiabilidade de sistemas, envolvendo teoria da probabilidade e teoria dos grafos;

2. Pesquisa bibliográfica de algoritmos que abordam sem total ou parcialmente o problema da confiabilidade de sistemas, e estudo pormenorizado dos métodos desenvolvidos por:

- Jensen e Bellmore³
- Nelson, Batts e Beadles⁴
- Misra e Rao⁵;

3. Desenvolvimento de um método para determinar um limite inferior para a confiabilidade de sistemas com falhas duais. Este desenvolvimento fez-se basicamente sobre o

³JENSEN, P.A.; BELLMORE, M. - "An Algorithm to Determine the Reliability of a Complex System"- IEE Transactions on Reliability, Vol R-18, novembro 1969, p.169-174.

⁴NELSON, C.A.; BATTIS, J.R.; BEADLES, R.L. - A Computer Program for Aproximating System Reliability"- IEEE Transaction on Reliability Vol R-19, nº 2, maio 1970 p. 61-65.

⁵MISRA, K.B; RAO, S.M. -"Reliability Analysis of Redundants Networks Using Flow Graphs"- IEEE Transactions on Reliability, Vol R-19, nº 1, fevereiro 1970, p. 61-65.

algoritmo de Jensen e Bellmore, após a inclusão de uma modificação na sua estrutura e de algumas restrições ao seu uso;

4. Programação do método a ser desenvolvido.

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

- No Capítulo II é apresentada a descrição do problema a ser abordado, para tal se expõe inicialmente toda a fundamentação teórica básica que envolve o estudo de modelos matemáticos próprios para o estudo da confiabilidade de sistemas e de teoria dos grafos;

- As várias abordagens encontradas para solução parcial do problema proposto são apresentadas no Capítulo II. Algumas destas são analisadas mais pormenorizadamente e neste caso algumas críticas são feitas;

- No Capítulo IV é feita uma análise detalhada do algoritmo de Jensen e Bellmore e algumas modificações são sugeridas. Com base neste algoritmo modificado, desenvolve-se um método para solução do problema proposto;

- A listagem do programa computacional elaborado, com alguns exemplos executados, está inserida nos anexos.

C A P Í T U L O I I

2 - DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - Introdução

Neste capítulo pretende-se descrever o problema a ser abordado, não apenas enunciando uma situação prática que exemplifique o caso da confiabilidade de sistemas com falhas do tipo dual, mas também descrevendo modelos matemáticos próprios para esta abordagem.

2.2 - Fundamentação Teórica Básica

2.2.1 - Função de Estrutura de um Sistema

Seja um sistema S constituído de r componentes e_i ($i= 1, 2, 3, \dots, r$). Associa-se a cada componente e_i uma variável de estado x_i tal que:

$x_i = 1$ se o componente está em bom estado

$x_i = 0$ se o componente falha.

O conjunto $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, r\}$ será chamado de conjunto de componentes do sistema e a r -upla ordenada (x_1, x_2, \dots, x_r) chamar-se-á "um estado para o conjunto de componentes" e notar-se-á (\mathbf{x}) .

$$(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_r) \quad (1)$$

É fácil notar que existem 2^r estados diferentes para um conjunto de r componentes.

Será agora definida a variável de estado do sis-

tema, y , de tal forma que:

$y = 1$ se o sistema está em bom estado

$y = 0$ se o sistema se apresenta falho.

Evidentemente y depende de (\mathbf{x}) . Existe uma função de $(\mathbf{x}) \rightsquigarrow y$ e a esta se chamará "função de estrutura" do sistema.

$$y = \psi(\mathbf{x}) \text{ ou } y = \psi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r) \quad (2)$$

Exemplo 2.1 - (Componentes em série)

$$\text{Seja } y = \psi(x_1, x_2, \dots, x_r) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_r = \prod_{i=1}^r x_i \quad (3)$$

Esta função de estrutura corresponde a um sistema que não funcionará a não ser que todos os seus componentes estejam em bom estado.

Exemplo 2.2 - (Componentes em paralelo)

$$y = \psi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - x_i) \quad (4)$$

Neste caso o sistema associado só entrará em pane se todos os seus componentes estiverem falhos.

2.2.1.1 - Elos e Cortes Numa Função de Estrutura

Seja um sistema definido pela função $y = \psi(\mathbf{x})$ com componentes e_i , $i = 1, 2, \dots, r$.

Seja:

$$A = \{e_i, i \in I\} \subset E$$

um subconjunto de componentes definido pelo conjunto

$I \subset \{1, 2, 3, \dots, r\}$. Se:

$$\left. \begin{array}{l} x_i = 1 \text{ para } i \in I \\ x_i = 0 \text{ para } i \notin I \end{array} \right\} \Rightarrow y = 1 \quad (5)$$

diz-se que A é um "elo" da função de estrutura.

Seja agora:

$$B = \{e_j, j \in J\} \subset E$$

um subconjunto de componentes com índices pertencentes a J. Se:

$$\left. \begin{array}{l} x_j = 0 \text{ para } j \in J \\ x_j = 1 \text{ para } j \notin J \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0 \quad (6)$$

diz-se que B é um "corte" da função de estrutura.

Se um elo A não possui nenhum subconjunto próprio $A' (A' \subset A)$ que seja um elo, diz-se que A é um "elo minimal".

Se um corte B é tal que, não existe um subconjunto próprio $B' \subset B$ que seja um corte, diz-se que B é um "corte minimal".

É fácil ser notado que:

Para que um sistema esteja em bom estado é suficiente que os componentes de um elo qualquer estejam em bom estado, e ainda, é suficiente e necessário que os componentes de um elo minimal estejam em bom estado.

Da mesma forma para que um sistema se apresente falho, é suficiente que os componentes de um corte apresentem-se com falhas, e é suficiente e necessário que os componentes de um corte minimal estejam falhos.

Exemplo 2.3 - Seja a função de estrutura

$$y = x_1 x_2 + x_3 + x_4 - x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4$$

e os seguintes subconjunto de componentes

$$E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$E_4 = \{e_3\}$$

$$E_2 = \{e_1, e_3, e_4\}$$

$$E_5 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$E_3 = \{e_1, e_2\}$$

$$E_6 = \{e_4, e_3\}$$

Neste caso temos que:

- E_1 é elo pois fazendo $x_i = 1$ para $i=1, 2, 3$ e $x_i = 0$ para $i=4$ temos $y=1$

↳ Todos os subconjuntos de componentes relacionados são elos.

- E_3 é um elo minimal. Se $x_i = 1$ para $i=1, 2$ e $x_i = 0$ para $i=3, 4$, $y=1$. Ainda se $x_i = 0$ para $i=3, 4$ e $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$, $y=0$.

- E_2 e E_5 são cortes.

- E_2 é corte minimal.

Aos conceitos de elos e cortes apresentados anteriormente podem ser associadas as seguintes propriedades:

a) Um subconjunto A de componentes será um elo se e somente se o seu complementar \bar{A} não for um corte.

Ou um subconjunto B de componentes será um corte se e somente se o seu complementar não for um elo.

A é um elo $\iff \bar{A}$ não é um corte.

B é um corte $\iff \bar{B}$ não é um elo.

Demonstração:

Supondo que um subconjunto de componentes A é tal que:

A é um elo e \bar{A} é um corte

Se A é um elo é verdade que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } x_i = 1 \text{ para } e_i \in A \\ x_i = 0 \text{ para } e_i \in \bar{A} \end{array} \right\} \Rightarrow y = 1$$

Se \bar{A} é um corte tem-se que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } x_i = 0 \text{ para } e_i \in \bar{A} \\ x_i = 1 \text{ para } e_i \in A \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0$$

O que é absurdo pois para um mesmo estado do conjunto de componentes a função $\psi(\mathbf{x})$ assume dois valores (0 e 1)

b) A toda r -upla $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r)$ onde $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ corresponde um corte ou um elo exclusivamente.

Com efeito, seja E_1 o subconjunto de componentes

para os quais $x_i = 1$. Se $\psi(\mathbf{x}) = 1$, E_1 é um elo e \bar{E}_1 não será um corte. Se $\psi(\mathbf{x}) = 0$, \bar{E}_1 é um corte e E_1 não será um elo.

c) Seja A_k o número de elos com k componentes e B_k o número de cortes com k componentes: então

$$A_k + B_{r-k} = C_r^k$$

É fácil ver que existem C_r^k r -uplas, do tipos $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_r)$, diferentes, contendo k posições iguais a 1 e as restantes iguais a zero. Conforme o teorema anterior a cada uma delas corresponde um elo de k componentes ou um corte de $r-k$ componentes.

2.2.2 - Dualidade de Sistemas

Seja S um sistema e $\psi(\mathbf{x})$ a sua função de estrutura. O sistema \bar{S} , dito dual de S , tem sua função de estrutura definida como:

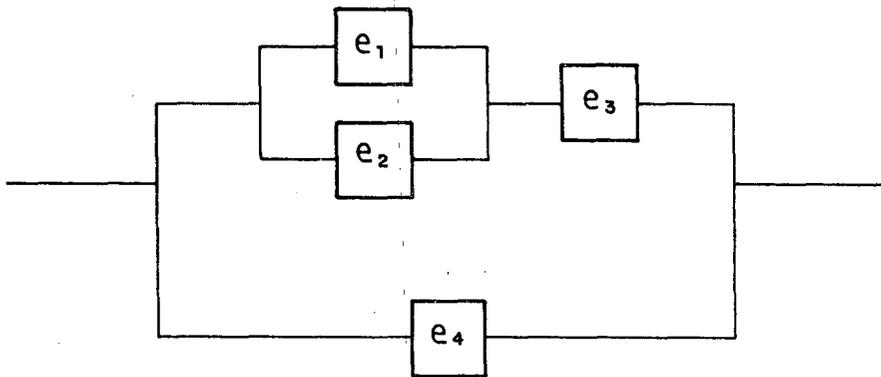
$$\bar{\psi}(\mathbf{x}) = 1 - \psi(1 - \mathbf{x}) \quad \text{onde} \quad (7)$$

$$(1 - \mathbf{x}) = (1 - x_1, 1 - x_2, 1 - x_3, \dots, 1 - x_r)$$

Exemplo 2.4 - Seja a seguinte função de estrutura

$$y = \psi(\mathbf{x}) = 1 - \{1 - [1 - (1 - x_1)(1 - x_2)]x_3\}(1 - x_4)$$

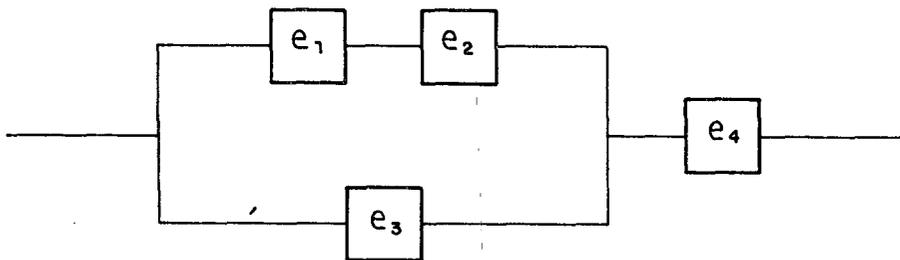
que representa o sistema apresentado graficamente pela figura seguinte.



Neste caso:

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(\mathbf{x}) &= 1 - \psi(1-\mathbf{x}) \\ &= 1 - \{1 - \{1 - [1 - (1-x_1)](1 - (1-x_2))\} (1-x_3)\} (1 - (1-x_4)) \\ &= [1 - (1-x_1)x_2] (1-x_3) x_4\end{aligned}$$

e \bar{S} é representado graficamente como segue:



2.2.2.1 - Propriedades da Dualidade

$$a) \overline{[\bar{\psi}(\mathbf{x})]} = \psi(\mathbf{x}) \quad \text{ou} \quad \overline{(\bar{S})} = S$$

Demonstração

$$\overline{[\bar{\psi}(\mathbf{x})]} = 1 - \bar{\psi}(1 - \mathbf{x}) = 1 - [1 - \psi(1 - (1-\mathbf{x}))] = \psi(\mathbf{x})$$

b) Um elo de S é um corte de \bar{S} (vale a recíproca - um elo de \bar{S} é um corte de S).

Seja A um elo de S , então:

$$\left. \begin{array}{l} x_i = 1 \text{ para } e_i \in A \\ x_i = 0 \text{ para } e_i \notin A \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(\mathbf{x}) = 1$$

e é claro que se:

$$\left. \begin{array}{l} x_i = 0 \text{ para } e_i \in A \\ x_i = 1 \text{ para } e_i \notin A \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(\mathbf{1-x}) = 1$$

então $\bar{\psi}(\mathbf{x}) = 1 - \psi(\mathbf{1-x}) = 1 - 1 = 0$, donde A é um corte para $\bar{\psi}(\mathbf{x})$.

c) Um corte de S é um elo de \bar{S} (vale a recíproca).

Seja B um corte de S , então, por definição:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Se } x_i = 0 \text{ para } e_i \in B \\ x_i = 1 \text{ para } e_i \notin B \end{array} \right\} \Rightarrow \psi(\mathbf{x}) = 0$$

fazendo $x_i = 1$ para $e_i \in B$ e $x_i = 0$ para $e_i \notin B$, tem-se que $\psi(\mathbf{1-x}) = 0$, então:

$\bar{\psi}(\mathbf{1-x}) = 1 - \psi(\mathbf{1-x}) = 1 - 0 = 1$ e nesse caso B satisfaz as condições necessárias para ser dito um elo de \bar{S} .

d) Um elo minimal de S é um corte minimal de \bar{S} e reciprocamente.

Seja A um elo minimal de S , então A é um corte de \bar{S} . Suponha-se que A não seja um corte minimal de \bar{S} , deverá então existir $A' \subset A$ tal que A' é um corte de \bar{S} . Neste caso A' deverá ser um elo para S , o que nega o fato de A ser elo minimal de S . Então A é um corte minimal de \bar{S} .

e) Um corte minimal de S é um elo minimal de \bar{S} e reciprocamente.

A demonstração é análoga a do item d.

2.2.3 - Resumo sobre a Teoria dos Grafos

As estruturas associadas a teoria dos grafos se definem, de modo geral, através de associações entre dois tipos de conjuntos

a) um conjunto da forma:

$$S = \{s_i / i = 1, 2, \dots, n\}$$

onde os s_i são chamados vértices, nós ou pontos, e:

b) Um conjunto da forma:

$$U = \{\mu_j / j \in I\}, \quad I \subset \mathbb{N}$$

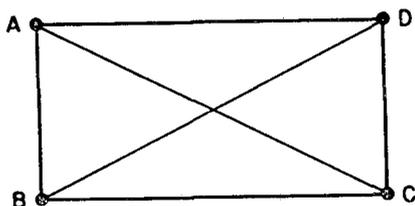
que pode ser uma família de partes de S ou um subconjunto de $S \times S$; no primeiro caso seus elementos são chamados de arestas e no segundo caso de arcos.

2.2.3.1 - Grafo não Orientado

Se $U = \{u_j / j \in I\}$ é uma família de partes de S a dois elementos, o par $G = (S, U)$ é chamado de r -grafo não orientado. Os elementos de U neste caso são chamados de arestas, sendo r o maior número de vezes que uma aresta pode ser repetida. As arestas são representadas por linhas unindo os vértices que as definem e são notadas por, $[s_i, s_j]$.

Exemplo 2.5

$$S = \{A, B, C, D\} \quad U = \{[AB], [AD], [AC], [BC], [BD], [DC]\}$$

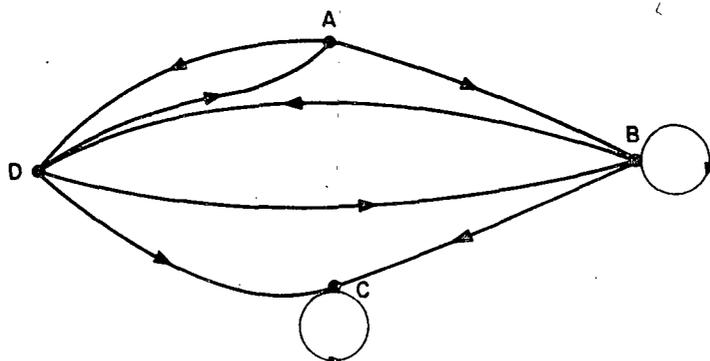


2.2.3.2 - Grafo Orientado

Se $U = \{u_j / j \in I\}$ é uma família de elementos de $S \times S$ (produto cartesiano de S) o par $G = (S, U)$ é chamado de r -grafo orientado. Os elementos de U são chamados arcos e r é o maior número de vezes que um arco se repete. Os arcos são denotados por (s_i, s_j) e graficamente são representados por linhas portando uma seta cujo sentido corresponde a orientação do par ordenado.

Exemplo 2.6

$$S = \{A, B, C, D\} \quad U = \{(A, B); (A, D); (B, B); (B, C); (B, D); (C, C); (D, A); (D, B); (D, C)\}$$



Observação:

Em ambas as definições acima se $r = 1$ o r -grafo não orientado será dito simplesmente grafo orientado e o r -grafo orientado será chamado de grafo orientado.

Alguns textos utilizam a denominação de grafo r -aplicado ao invés da denominação r -grafo (orientado ou não).

Na continuidade deste texto será utilizado o termo grafo para designar grafos r -aplicados, qualquer que seja r ; também não será feita a distinção entre grafos orientados e não orientados, a não ser quando necessário.

2.2.3.3 - Outras Definições

Serão apresentados agora alguns conceitos a serem utilizados no decorrer deste texto.

a) Dado um grafo $G = (S, U)$, chamar-se-á de "grafo parcial de G " ao grafo $G_p = (S, U')$ com $U' \subseteq U$. Obtém-se um grafo parcial com a supressão de alguns arcos ou arestas.

b) Uma cadeia é uma sequência de arcos ou arestas de um grafo:

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n] \quad \text{com } \mu_i \in U$$

tal que cada arco ou aresta μ_i tem uma extremidade em comum com o antecedente μ_{i-1} (ã exceção de μ_1), e a outra extremidade, em comum com o arco ou aresta subsequente μ_{i+1} (ã exceção de μ_n).

"Como não se especifica de quais extremidades se trata, o conceito de cadeia é não orientado; por isso se pode falar de uma cadeia constituída de arestas em um grafo não orientado"¹.

c) Um caminho é uma sequência de arcos:

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad \text{com } \mu_i \in U, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de tal forma que a extremidade final de cada arco μ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) coincide com a extremidade inicial do arco seguinte μ_{i+1} .

"Um caminho é uma cadeia na qual todos os arcos possuem a mesma orientação; o conceito de caminho é portanto, orientado e não tem sentido em um grafo não orientado"¹.

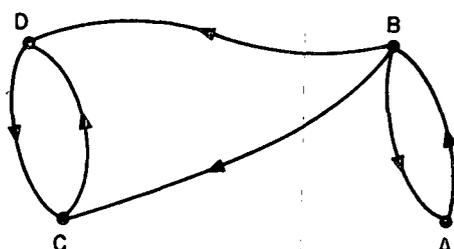
- Se chamarã comprimento de um caminho ou cadeia ao número de arcos ou arestas que ele comporta.

- Um caminho ou cadeia é dito elementar se não passar duas vezes pelo mesmo vértice e simples se não passar duas

¹BOAVENTURA NETTO, P. O "Teoria e Modelos de Grafos", São Paulo, E. Blücher, 1979.

vezes pelo mesmo arco ou aresta.

Exemplo 2.7.



No grafo:

- $\{(BD)(DC)\}$ é um caminho elementar
- $\{(CD)(BD)(AB)\}$ é uma cadeia.

d) Dados quaisquer dois pontos s_i e s_j se existe um caminho ou cadeia ligando s_i a s_j , existe um caminho ou cadeia elementar ligando s_i a s_j .

e) Seja um subconjunto de vértices $S_1 \subset S$.

Um corte de um grafo orientado G relativo ao conjunto S_1 é o subconjunto $W(S_1)$ de arcos definido como:

$$W(S_1) = \{(s_i, s_j) / s_i \in \bar{S}_1 \text{ e } s_j \in S_1\}$$

Um corte de um grafo não orientado G relativo ao conjunto S_1 é o subconjunto $W(S_1)$ de arestas definido da seguinte forma:

$$W(S_1) = \{[s_i, s_j] / s_i \in S_1 \text{ e } s_j \in \bar{S}_1\}$$

f) Um grafo $G = (S, U)$ tal que todo par de vértices

é ligado por ao menos uma cadeia é dito ser conexo.

g) Um ciclo é uma cadeia simples na qual os vértices inicial e terminal se confundem.

h) Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos.

i) Dado o grafo $G = (S, U)$ se chamará de sub-grafo de G ao grafo $G' = (S', U')$ onde $S' \subset S$ e U' é definido por todos os arcos ou arestas com ambas as extremidades pertencentes a S' .

2.2.4 - Rede de Confiabilidade

Uma rede de confiabilidade R definida sobre um conjunto $E = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ de componentes é constituída por:

1) Um grafo orientado r -aplicado $G = (S, U)$, onde se distinguem dois vértices $0 \in S$ e $Z \in S$ que são respectivamente chamados de "origem" e "destino" (ou fonte e sumidouro).

2) Uma aplicação $\Delta: U \rightarrow E$ tal que:

$$\Omega(\mu_j) = (s_i, s_k), \Omega(\mu'_j) = (s_i, s_k) \Rightarrow \Delta(\mu_j) \neq \Delta(\mu'_j)$$

onde Ω é a aplicação que faz corresponder a cada arco o par de suas extremidades.

A aplicação Δ faz corresponder a cada arco um componente e_i .

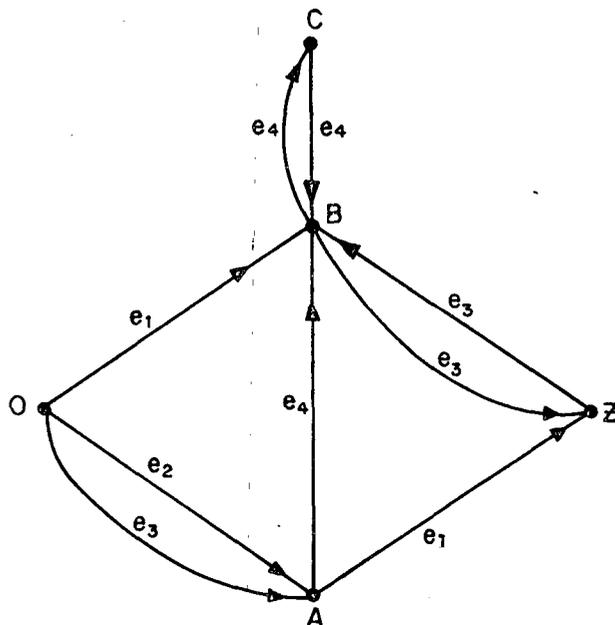
Exemplo 2.8

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$S = \{0, Z, A, B, C\}$$

$$U = \{(O,A)_2; (O,A)_3; (O,B); (A,B); (A,Z); (B,C); (B,Z); (C,B); (Z,B)\}$$

A aplicação Δ é indicada por e_i sobre os arcos.



Observação:

A definição de Rede de Confiabilidade foi desenvolvida sobre o conceito de grafos orientados. Se num problema prático o grafo associado $G = (S,U)$ for do tipo não orientado para efeito das idéias apresentadas nesta seção, o grafo não orientado poderia ser substituído por um outro, $G' = (S',U')$, orientado, de tal forma que:

- a) $S' = S$
- b) Para cada aresta $[s_i, s_j] \in U$ deverão ser definidos em U' os arcos (s_i, s_j) e (s_j, s_i)
- c) $\Delta(s_i, s_j) = \Delta(s_j, s_i)$

2.2.4.1 - Elos de Uma Rede de Confiabilidade

A todo subconjunto $E_1 \subset E$ de componentes pode-se

fazer corresponder o grafo parcial $G_p(E_1)$ do grafo G , obtido através da conservação dos arcos de G com correspondente em E_1 :

$$G_p(E_1) = (S, U_p(E_1)) \quad \text{onde}$$

$$U_p(E_1) = \{\mu \in U / \Delta(\mu) \in E_1\} \quad (8)$$

Será chamado de elo de uma rede de confiabilidade R a um subconjunto A de componentes se existir um caminho em $G_p(A)$, ligando os nós O e Z .

A todo elo corresponde um ou mais caminhos do grafo, inversamente, a todo caminho de O a Z do grafo, corresponde o elo A formado pelas imagens da aplicação Δ sobre arcos pertencentes ao caminho.

Se A é um elo de R de tal forma que não existe nenhum subconjunto próprio de A que seja um elo, A é chamado de elo minimal.

2.2.4.2 - Cortes de uma Rede de Confiabilidade

Denominar-se-á corte de uma rede R ao subconjunto $B \subseteq E$ de componentes tal que o subconjunto de arcos $U_p(B)$, definido em (8) contém um corte do grafo G relativo a um subconjunto de vértices incluindo Z e não incluindo O .

A todo corte B da rede corresponde um ou mais cortes do grafo (todos os incluídos em $U_p(B)$)

Quando um corte B não possui nenhum subconjunto próprio que seja um corte B é denominado um corte minimal.

"Um conjunto A de componentes é um elo em R se e somente se o seu complementar não for um corte. Reciprocamente um conjunto B de componentes será um corte em R se e somente se o seu complementar não for um elo"².

Uma rede R é dita degenerada se não possuir nenhum elo ou nenhum corte.

2.2.4.3 - Sistema Definido por uma Rede de Confiabilidade

Dada uma rede R, é possível definir um sistema de confiabilidade a partir desta. Seja S o sistema que tem E como conjunto de componentes. Para todo estado do conjunto de componentes, seja E_1 o subconjunto de componentes que estão sem falhas, se E_1 é um elo da Rede de Confiabilidade o sistema definido deve funcionar, e falhar em caso contrário. Ou seja, a função de estrutura $\psi(\mathbf{x})$, associada ao sistema, deverá assumir o valor 1 para os estados $(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ nos quais o subconjunto de componentes com $x_i = 1$ é um elo da rede, sendo também um elo para o sistema. Se esse subconjunto não é um elo para a rede R então $\psi(\mathbf{x})$ deverá ser igual a zero.

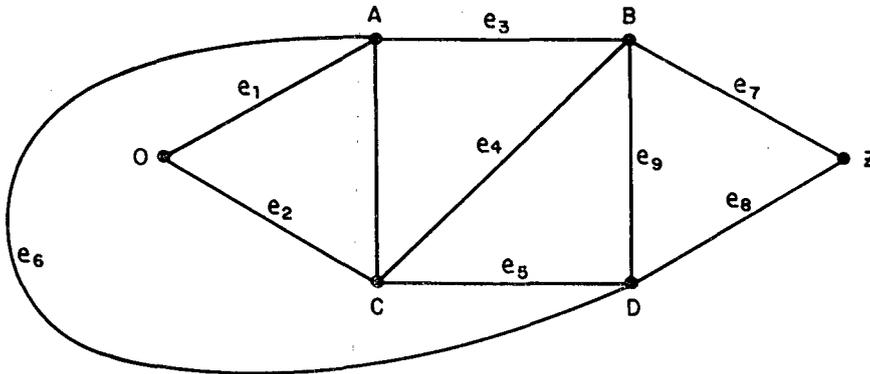
2.2.4.4 - Rede Planar Fonte-Sumidouro

Se para o grafo associado a uma rede R, existir alguma forma de representação esquemática em um plano de tal forma que nenhum par de arcos ou arestas se cruze, a rede R é dita planar. Ainda se, após a adição de um arco ou aresta ligando os nós

²KAUFMANN, A.; GROUCHKO, D.; CRUON, R. "Modeles Mathématiques pour L'Étude de la Fiabilité des Systèmes", Paris, 1975, P. 72

fonte e sumidouro, uma rede planar continuar satisfazendo a condição de rede planar, dir-se-á que a mesma é "planar fonte-sumidouro".

Exemplo 2.9



A rede mostrada é planar, mas não é planar fonte-sumidouro, com a omissão da aresta [DA] a mesma passaria a ser planar fonte-sumidouro.

2.2.4.5 - Propriedades Fundamentais das Redes de Confiabilidade

1 - A adição de um ou mais arcos a um grafo não suprime a existência de nenhum caminho no mesmo. Ou de outra forma:

$$A' \subset A, (A' \text{ é um elo}) \implies (A \text{ é um elo})$$

2 - Se um sistema definido por uma rede de confiabilidade está falho, a falha de mais um componente não levará o sistema ao estado de bom funcionamento, ou:

$$B' \subset B, (B' \text{ é um corte}) \implies (B \text{ é um corte})$$

As propriedades 1 e 2 se exprimem através do seguinte teorema:

Teorema II.1

"Dada uma rede de confiabilidade R , um subconjunto de componentes, incluindo um elo, é também um elo; um subconjunto de componentes, incluindo um corte, é da mesma forma um corte".

Demonstração:

Se A' é um elo, existe no grafo parcial de G , $G_p(A')$, conforme definido em (8), um caminho de O a Z . O fato de $A' \subset A$ implica em que $G_p(A')$ é um grafo parcial de $G_p(A)$, logo em $G_p(A)$ existe um caminho ligando O a Z e então A é um elo da rede R .

Como $B' \subset B$, $U_p(B') \subset U_p(B)$, e o corte separando O e Z contido em $U_p(B')$, está também contido em $U_p(B)$, donde B é um corte de R .

Em termos mais concretos pode ser dito que: "Para os sistemas definidos por uma rede de Confiabilidade R , a mudança do estado em um componente falho não pode provocar a falha do sistema, e que, a eventual falha de um componente não poderá trazer o sistema para o bom funcionamento. Esta hipótese parece bastante razoável, mas não é verdadeira para alguns sistemas na prática"³.

Teorema II.2

"Um corte contém ao menos um componente de cada elo, e um elo contém ao menos um componente de cada corte, ou de outra

³KAUFMANN, A.; GROUCHKO, D; CRUON, R. "Modèles Mathématiques pour L'Étude de la Fiabilité des Systèmes", Paris, 1975, p. 73.

forma, um elo e um corte quaisquer contêm pelo menos um elemento em comum".

Demonstração:

É claro que sendo A um elo e B um corte; se não existe nenhum componente comum em A e B , $A \subset \bar{B}$. Do teorema anterior decorre que \bar{B} é um elo e logo B não deveria ser um corte, o que contradiz a hipótese.

Teorema II.3

"Todo elo inclui ao menos um elo minimal, e todo corte inclui ao menos um corte minimal".

Se A é um elo, duas situações podem ser verificadas:

- nenhuma parte de A é elo, então A é minimal e o teorema se verifica.

- uma parte $A^1 \subset A$ é elo. Pode-se encontrar uma parte de A^1 que seja um elo e assim por diante. Como A tem um número finito de componentes, será necessariamente obtido um elo minimal.

Uma análise similar verifica a propriedade para os cortes.

Teorema II.4

"Dada uma rede não degenerada, um subconjunto B de componentes é um corte se e somente se ele contém ao menos um componente de cada elo minimal".

Sejam A_j com $j = 1, \dots, n$ todos os elos minimais de R . Seja um conjunto B de componentes tal que:

$$\forall A_j, \exists e_i \in E / e_i \in A_j \text{ e } e_i \in B$$

ou da mesma forma

$$\forall A_j, \exists e_i \in E / e_i \in A_j \text{ e } e_i \notin \bar{B}$$

Logo $\forall A_j, A_j \not\subset \bar{B}$, então pelo teorema II.3, \bar{B} não é um elo onde (ver parágrafo 2.2.4.2) B é um corte de R .

A recíproca se verifica pelo teorema II.2.

Nota:

No decorrer deste trabalho será chamado de rede ao grafo associado a uma rede de confiabilidade.

2.2.4.6 - A Rede Dual

A rede dual de uma rede, dita primal, é definida de tal forma que:

O conjunto de componentes que definir um corte na rede dual deverá corresponder a um elo na rede primal; e da mesma maneira todo elo na rede dual será um corte na rede primal.

Uma rede dual pode ser definida se e somente se a rede primal é planar fonte-sumidouro.

A construção de uma rede dual para redes não orientadas pode ser feita da seguinte forma:

a) Construa o arco artificial ligando os nós fonte e sumidouro.

b) Defina um nó em cada face da rede primal.

Face é uma região do plano limitada por arcos da rede primal e que não contém nenhum nó ou arco no seu interior. A

face externa, limitada pelos arcos externos, é dita face infinita.

A fonte da rede dual será o nó representado na face finita que tem o arco artificial como vizinho e o sumidouro da rede dual será o nó representado na face infinita.

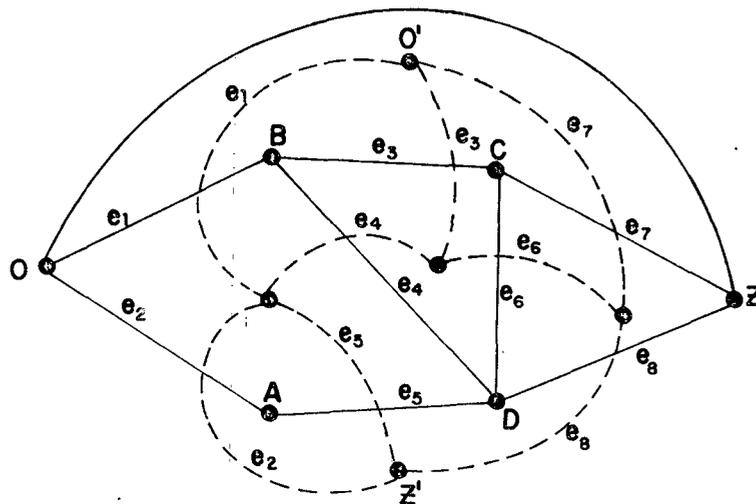
c) Para cada arco da rede primal (exceto o arco artificial) construa um arco na rede dual que o intercepte ligando os nós das faces vizinhas.

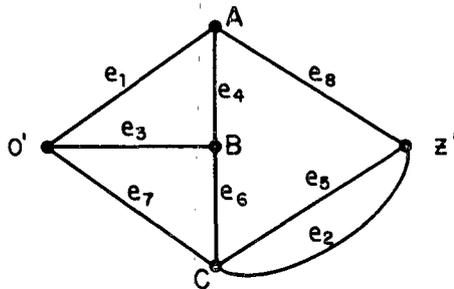
d) Associe a cada arco criado na rede dual, o mesmo componente que se associava ao arco interceptado por ele na rede primal.

As duas funções de estruturas associadas a um par de redes primal-dual também formarão um par de funções de estruturas duais conforme a definição do parágrafo 2.2.2.

Exemplo 2.10

Na figura abaixo a rede dual aparece tracejada sobre a rede primal.





2.2.5 - Estruturas Monótonas ou Coerentes

Uma função de estrutura é monótona (ou coerente) se ela possui a seguinte propriedade:

$$(\mathbf{x}^{(2)}) \succcurlyeq (\mathbf{x}^{(1)}) \implies \psi(\mathbf{x}^{(2)}) \geq \psi(\mathbf{x}^{(1)}) \tag{9}$$

onde

$$(\mathbf{x}^{(2)}) = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_r^{(2)})$$

$$(\mathbf{x}^{(1)}) = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_r^{(1)}), \text{ são dois estados}$$

quaisquer para o conjunto de componentes e

$$(\mathbf{x}^{(2)}) \succcurlyeq (\mathbf{x}^{(1)}) \iff \forall i \quad i = 1, \dots, r : x_i^{(2)} \geq x_i^{(1)}$$

Exemplo 2.11

$\psi(\mathbf{x}) = 1 - x_1 x_2$ não é uma função de estrutura monótona pois sejam:

$$(\mathbf{x}^{(1)}) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (\mathbf{x}^{(2)}) = (1, 1)$$

$$(1, 1) \succcurlyeq (0, 0) \quad \text{e} \quad \psi(0, 0) = 1, \quad \psi(1, 1) = 0$$

$$\psi(1, 1) < \psi(0, 0)$$

Exemplo 2.12

$\psi(\mathbf{x}) = 1 - (1-x_1)(1-x_2)$ e monótona pois:

$$\psi(0,0) = 0 \quad \psi(0,1) = 1 \quad \psi(1,0) = 1 \quad \psi(1,1) = 1$$

$$(1,1) \succ (0,1) \succ (0,0) \quad \text{e} \quad \psi(1,1) = \psi(0,1) > \psi(0,0)$$

$$(1,1) \succ (1,0) \succ (0,0) \quad \text{e} \quad \psi(1,1) = \psi(1,0) > \psi(0,0)$$

Teorema II.5

"Uma função de estrutura é monótona se e somente se todo conjunto de componentes incluindo um elo é também um elo".

Para a demonstração deste teorema serão definidas as r-uplas $(\mathbf{x}^{(1)})$ e $(\mathbf{x}^{(2)})$, a partir dos subconjuntos de componentes A_1 e A_2 da seguinte forma:

$$e_i \in A_1 \Rightarrow x_i^{(1)} = 1 \quad \text{e se} \quad e_i \notin A_1 \Rightarrow x_i^{(1)} = 0$$

$$e_i \in A_2 \Rightarrow x_i^{(2)} = 1 \quad \text{e se} \quad e_i \notin A_2 \Rightarrow x_i^{(2)} = 0$$

nesse caso é claro que $(\mathbf{x}^{(2)}) \succ (\mathbf{x}^{(1)}) \iff A_1 \subset A_2$.

Dessa forma se uma estrutura é monótona e se $A_1 \subset A_2$, $\psi(\mathbf{x}^{(2)}) \geq \psi(\mathbf{x}^{(1)})$ então se A_1 é um elo A_2 também deverá ser um elo.

Reciprocamente se $A_1 \subset A_2$, e se o fato de A_1 ser elo implicar em A_2 ser elo, então a relação (9) se verifica. Note-se que se A_1 é elo $\psi(\mathbf{x}^{(1)}) = \psi(\mathbf{x}^{(2)}) = 1$ e logo $\psi(\mathbf{x}^{(1)}) \geq \psi(\mathbf{x}^{(2)})$. Logo a função de estrutura é monótona.

Teorema II.6

"Uma função de estrutura que pode ser definida a partir de uma rede de confiabilidade é monótona".

Os Teoremas II.1 e II.5 validam o teorema acima.

2.2.5.1 - Construção de uma Função de Estrutura Monótona Equivalente a uma Rede

Supondo-se que são conhecidos todos os elos mínimos A_1, A_2, \dots, A_m ou todos os cortes mínimos B_1, B_2, \dots, B_n de uma rede R . Seja x_i a variável de estado do componente e_i ; as funções de estrutura que seguem são equivalentes a rede R .

$$\psi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^m \left(1 - \prod_{\substack{i \\ e_i \in A_j}} x_i \right) \quad (10)$$

$$\text{e } \psi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n \left[1 - \prod_{\substack{i \\ e_i \in B_j}} (1 - x_i) \right] \quad (11)$$

Como todos os x_i assumem o valor 0 ou 1 então:

$$(x_i)^r = x_i \quad r = 1, 2, 3, \dots, \quad (12)$$

e nesse caso a função $\psi(\mathbf{x})$ pode ser escrita como uma soma de monômios distintos, de primeiro grau, com referência a cada x_i . A função $\psi(\mathbf{x})$ escrita dessa forma será chamada de "forma simplificada"

e notada por $\psi_S(\mathbf{x})$. A forma simplificada $\psi_S(\mathbf{x})$, é única.

2.2.6 - Confiabilidade de Sistemas

O termo "confiabilidade" de um sistema pode ser entendido em seu sentido mais amplo como: "o conjunto das características que intervêm em seu funcionamento satisfatório durante um determinado intervalo de tempo"⁴. De forma mais precisa se pode definir genericamente a confiabilidade de um sistema como sendo: "a probabilidade de que o mesmo realize serviços especificados, dentro de condições de utilização dadas e durante um tempo especificado"⁴. Esta definição é ainda muito geral para permitir um estudo matemático. O modelo fica bastante simplificado se forem formuladas as seguintes hipóteses:

1^a - O sistema tem dois estados possíveis mutuamente exclusivos.

2^a - O sistema pode ser decomposto em r componentes de tal forma que:

- Cada componente em um estado dado está em bom estado ou falho. (Por bom estado entende-se que o componente está exercendo 100% das funções que lhe são atribuídas).

- O estado do sistema depende apenas do estado de seus componentes, não são consideradas outras fontes de falha além dos parâmetros físicos do sistema

3^a - Cada um dos componentes e_i , ($i=1,2,\dots,r$), tem uma duração de vida aleatória T_i ou de outra forma T_i é o tempo de permanência sem falha do componente e_i . Será designado por $v_i(t)$ a função de probabilidade de T_i .

⁴KAUFMANN, A.; GROUCHKO, D.; CRUON, R. "Modèles Mathématiques pour L'Étude de la Fiabilité des Systèmes", Paris, 1975, p. 111.

onde $v_i(t) = P(T_i \geq t)$.

4^a - As variáveis aleatórias $T_i (i = 1, 2, \dots, r)$, são independentes.

Feitas estas hipóteses a confiabilidade de um sistema pode ser definida da seguinte forma:

"A confiabilidade de um sistema é a probabilidade de que o mesmo esteja constantemente em bom estado no intervalo de tempo $(0, t)$, onde t é um instante fixado".

Seja T o instante (aleatório) em que ocorre a primeira falha no sistema; será chamado T a "duração de vida" do sistema. A lei de vida do sistema é então:

$$v(t) = P(T \geq t) \quad (13)$$

e a confiabilidade do sistema para um intervalo $(0, t)$ é $v(t)$, probabilidade de que o sistema tenha vida igual ou superior a t .

No caso de uma estrutura monótona, a irreversibilidade das falhas nos componentes define a irreversibilidade da falha no sistema. Então o fato de o sistema estar em bom estado no instante t , implica na não ocorrência de falha no sistema no intervalo $(0, t)$.

Nas estruturas não monótonas o sistema pode estar em bom estado no instante t , após ter tido uma ou mais panes no intervalo $(0, t)$, e logo a confiabilidade do sistema poderá ser diferente da probabilidade de que o sistema esteja em bom estado no instante t .

Observação:

As afirmações feitas nos dois parágrafos anteriores não pressupõem a possibilidade de que sejam feitos reparos nos componentes que falham.

2.2.6.1 - A Função de Confiabilidade

Seja X_i a variável aleatória que representa o estado do componente e_i no instante t .

Será convencionado que:

$X_i = 1$ se o componente está em bom estado

$X_i = 0$ se o componente falha

e:

$$P(X_i=1) = p_i; \quad P(X_i=0) = 1-p_i$$

$$E(X_i) = p_i$$

As variáveis X_i são independentes pois as falhas nos diversos componentes são independentes.

Seja $(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ uma realização possível da r -upla aleatória.

$$(X) = (X_1, X_2, \dots, X_r)$$

(\mathbf{x}) é um estado do conjunto de componentes ao qual corresponde um estado $\psi(\mathbf{x})$ do sistema. A função:

$$\phi = \psi(X_1, X_2, X_3, \dots, X_r) = \psi(X) \quad (14)$$

é definida sobre as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_r . Logo ϕ é uma variável aleatória que assume o valor 1 se o sistema está funcionando e assume o valor 0 quando o sistema falha.

O valor esperado de $\psi(X)$ é

$$E(\phi) = 1 \cdot P(\phi=1) + 0 \cdot P(\phi=0) = P(\phi=1)$$

Será chamada de "função de confiabilidade" do sistema a seguinte função:

$$h(p_1, p_2, \dots, p_r) = E[\psi(\mathbf{X})] = E(\phi) \quad (15)$$

Os estados do conjunto de componentes se constituem em eventos mutuamente exclusivos, logo pode-se concluir que a função de confiabilidade é obtida através da adição das probabilidades de todos os estados para os quais $\psi(\mathbf{x}) = 1$.

Seja:

$$\alpha_i(x_i) = p_i \quad \text{se } x_i = 1$$

$$\alpha_i(x_i) = 1 - p_i \quad \text{se } x_i = 0$$

Então a função de confiabilidade pode ser escrita como:

$$h(\mathbf{p}) = \sum_{(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}} \psi(x_1, x_2, \dots, x_r) \alpha_1(x_1) \alpha_2(x_2) \dots \alpha_r(x_r)$$

sendo \mathcal{C} o conjunto das 2^r r-uplas existentes. As r-uplas, para as

quais, $\psi(\mathbf{x}) = 0$ dão um termo nulo, e aquelas, para as quais $\psi(\mathbf{x}) = 1$ correspondem a um elo.

O cálculo da confiabilidade segundo esta expressão é conceitualmente muito simples, mas de difícil execução, pois a determinação das 2^r r-uplas pode se tornar um trabalho de grande consumo de tempo. Note-se que:

- $r = 5, 2^r = 32$
- $r = 10, 2^r = 1.024$
- $r = 20, 2^r = 1.048.576$

2.2.6.2 - Propriedades da Função de Confiabilidade de uma Estrutura Monótona

a) "A função de confiabilidade $h(p)$ de uma estrutura monótona é monótona", isto equivale a dizer que:

$$(q) \succcurlyeq (p) \Rightarrow h(q) \geq h(p) \quad (16)$$

Para demonstrar esta propriedade basta verificar que, para todo vetor $(\mathbf{p}) = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ tal que $0 < p_i < 1$, as derivadas parciais $\partial h(\mathbf{p}) / \partial p_i$ são não negativas.

Seja \mathcal{C}_i o conjunto das $2^{(r-1)}$ (r-1)-uplas do tipo

$$(\mathbf{x}') = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_r)$$

Para obter o conjunto das 2^r r-uplas (\mathbf{x}) basta completar cada um dos (\mathbf{x}') com $x_i = 0$ ou $x_i = 1$.

Então

$$\begin{aligned}
 h(\mathbf{p}) = & \sum_{x' \in \mathcal{C}_i} \psi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_r) \alpha_1(x_1) \alpha_2(x_2) \dots \\
 & \dots \alpha_{i-1}(x_{i-1}) \cdot p_i \cdot \alpha_{i+1}(x_{i+1}) \dots \alpha_r(x_r) + \\
 & + \sum_{x' \in \mathcal{C}_i} \psi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_r) \alpha_1(x_1) \cdot \alpha_2(x_2) \dots \\
 & \dots \alpha_{i-1}(x_{i-1}) \cdot (1-p_i) \alpha_{i+1}(x_{i+1}) \dots \alpha_r(x_r)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h(\mathbf{p})}{\partial p_i} = & \sum_{x \in \mathcal{C}_i} [\psi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_r) - \psi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_r)] \cdot \\
 & \cdot \alpha_1(x_1) \cdot \alpha_2(x_2) \dots \alpha_{i-1}(x_{i-1}) \cdot \alpha_{i+1}(x_{i+1}) \dots \alpha_r(x_r)
 \end{aligned}$$

Como $\psi(\mathbf{x})$ é monótona o termo entre colchetes será zero ou um, logo as derivadas parciais são não-negativas.

b) Seja uma função de estrutura monótona, $h(\mathbf{p})$ sua função de confiabilidade, B_1, B_2, \dots, B_n os seus cortes minimais e A_1, A_2, \dots, A_m os elos minimais. Então:

$$\prod_{k=1}^n \left[1 - \prod_{e_i \in B_k} (1-p_i) \right] \leq h(\mathbf{p}) \leq 1 - \prod_{j=1}^m \left[1 - \prod_{e_i \in A_j} p_i \right] \quad (17)$$

A confiabilidade $h(\mathbf{p})$ será igual ao primeiro termo da desigualdade se os cortes minimais forem dois a dois disjuntos e será igual ao terceiro no caso de os elos minimais serem dois a

dois disjuntos.

A primeira desigualdade da relação (17) é, segundo Jensen e Bellmore⁵, baseada na teoria de Esary e Proschan, já Kaufmann, Grouchko e Cruon⁶ afirmam que esta foi deduzida da desigualdade de Schwarz e que a segunda desigualdade da relação é uma generalização do teorema de Moore e Shannon.

c) A função de confiabilidade $h(\mathbf{p})$, de uma estrutura monótona, pode ser obtida através da função de estrutura $\psi(\mathbf{x})$ na sua forma simplificada $\psi_s(\mathbf{x})$, bastando que nesta sejam substituídos os valores de x_i por p_i (ver o parágrafo 2.2.5.1).

Para que esta afirmação seja melhor percebida é aconselhável notar que, como já foi dito:

- Uma condição necessária e suficiente para o bom funcionamento de um sistema é a existência de pelo menos um elo minimal cujos componentes estejam todos em bom funcionamento.

- É condição necessária e suficiente para a falha do sistema a existência de pelo menos um corte minimal cujos componentes estejam todos falhos.

Tendo em vista estes fatos, a função de confiabilidade $h(\mathbf{p})$ pode ser escrita de uma outra forma, como segue:

Faça-se denotar o evento "todos os componentes do i -ésimo corte minimal estão falhos" por \bar{B}_i , e o evento "todos os

⁵JENSEN, Paul A.; BELLMORE, Mandell "An Algorithm to Determine the Reliability of a Complex System". IEE Transactions on Reliability, Vol R-18, n°4, novembro 1969, p. 169-174.

⁶KAUFMANN, A.; GROUCHKO, D.; CRUON, R. "Modèles Mathématiques pour L'Étude de la Fiabilité des Systèmes". Masson et Cie Editeurs. Paris, 1975.

componentes do i -ésimo elo minimal estão funcionando" por A_i . Então:

$$h(\mathbf{p}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \quad (18)$$

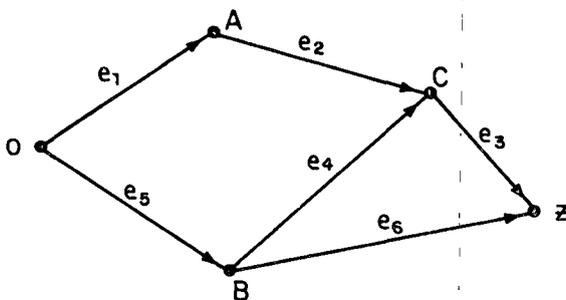
ou ainda

$$h(\mathbf{p}) = 1 - P(\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup \dots \cup \bar{B}_n) \quad (19)$$

Note-se que nas expressões acima não se tem necessariamente a união de eventos mutuamente exclusivos, logo a função de confiabilidade não se resumirá apenas no somatório das probabilidades dos mesmos; torna-se também necessária a determinação das probabilidades de todas as intersecções possíveis:

Nas equações 10 e 11 do parágrafo 2.2.5.1 ao serem realizados os produtórios indicados com a simplificação $x_i^r = x_i$, todos estes aspectos são satisfeitos.

Exemplo 2.13



Na rede representada tem-se que:

- os elos minimais são:

$$A_1 = \{e_1, e_2, e_3\} \quad A_2 = \{e_5, e_4, e_3\} \quad e \quad A_3 = \{e_5, e_6\}$$

- os cortes minimais são:

$$B_1 = \{e_1, e_5\} \quad B_2 = \{e_2, e_5\} \quad B_3 = \{e_2, e_4, e_6\}$$

$$B_4 = \{e_1, e_4, e_6\}; B_5 = \{e_3, e_6\} \quad e \quad B_6 = \{e_5, e_3\}$$

Usando o conjunto dos elos minimais e fazendo $A_i =$ "todos

os componentes do i-ésimo elo estão funcionando":

$$\begin{aligned}
 h(\mathbf{p}) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \\
 &\quad P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
 &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_5 \cdot p_4 \cdot p_3 + p_5 \cdot p_6 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 - p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_5 \cdot p_6 - \\
 &\quad - p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 .
 \end{aligned}$$

A $\psi_S(\mathbf{x})$ é igual a:

$$\begin{aligned}
 \psi_S(\mathbf{x}) &= 1 - [(1-x_1 x_2 x_3)(1-x_5 x_4 x_3)(1-x_5 x_6)] = \\
 &\quad x_1 x_2 x_3 + x_5 x_4 x_3 + x_5 x_6 - x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 - x_1 x_2 x_3 x_5 x_6 - x_3 x_4 x_5 x_6 + \\
 &\quad + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 .
 \end{aligned}$$

2.3 - Definição do Problema a Ser Abordado

2.3.1 - Sistemas com Falhas Duais

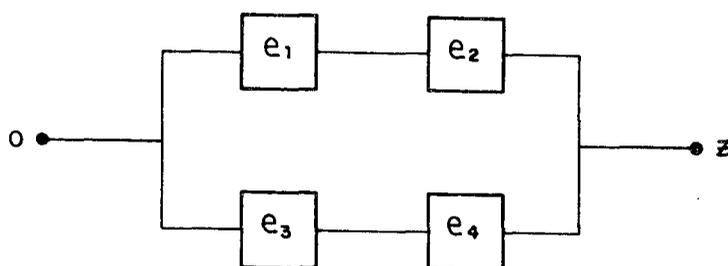
O estudo da confiabilidade de sistemas de relés elétricos, ou de condutores de fluxo conectados por válvulas, apresenta uma dificuldade em particular. Cada componente (relé ou válvula) deve obedecer a comandos no sentido de dar passagem ou de interromper o fluxo através dele. Esses componentes podem apresentar portanto dois tipos de falhas:

- falha do tipo A: o componente permanece sempre "aberto" qualquer que seja o comando (o fluxo não é mais reestabe-

cido no componente).

- falha do tipo B: o componente permanece sempre "fechado" qualquer que seja o comando (o fluxo não pode mais ser interrompido no componente).

Exemplo 2.14 - No sistema representado pela rede abaixo, se pelo menos um dos subconjuntos $\{e_1, e_2\}$ ou $\{e_3, e_4\}$ apresentar os seus componentes com falha do tipo B, não será mais possível a interrupção do fluxo entre os terminais O e Z. Por outro lado se pelo menos um dos subconjuntos $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3\}$ ou $\{e_3, e_4\}$ apresentar os seus componentes com falha do tipo A, será impossível o reestabelecimento do fluxo entre os terminais O e Z.



Como os componentes, também o sistema pode apresentar dois tipos de falhas com relação a existência do fluxo constante ou do corte permanente do mesmo, entre os terminais inicial e final.

2.3.2 - A Função de Estrutura para Sistemas com Falhas Duais

Seja um sistema com n componentes apresentando dois tipos de falhas que se excluem mutuamente.

- falha do tipo A

- falha do tipo B

A cada componente se fará corresponder duas variáveis de estado:

$$\begin{cases} x_i^a = 0 & \text{se o componente } e_i \text{ apresenta a falha A} \\ x_i^a = 1 & \text{se o componente } e_i \text{ está em bom estado ou} \\ & \text{apresenta a falha B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i^b = 0 & \text{se o componente } e_i \text{ apresenta a falha B} \\ x_i^b = 1 & \text{se o componente } e_i \text{ está em bom estado ou} \\ & \text{apresenta a falha A.} \end{cases}$$

O sistema da mesma forma pode apresentar dois tipos de falhas, que são ditas também A e B. O estado do sistema depende apenas do estado de seus componentes e pode ser definido pelas funções de estrutura seguintes:

$$\begin{aligned} \psi(x_1^a, x_2^a, \dots, x_n^a) &= 0 && \text{se o sistema apresenta a falha A;} \\ &= 1 && \text{se o sistema está em bom estado ou apresenta} \\ &&& \text{a falha B;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x_1^b, x_2^b, \dots, x_n^b) &= 0 && \text{se o sistema apresenta a falha B;} \\ &= 1 && \text{se o sistema está em bom estado ou apresenta} \\ &&& \text{a falha A;} \end{aligned}$$

A função de estrutura $\psi(\mathbf{x}^a)$ é dual de $\bar{\psi}(\mathbf{x}^b)$ ⁷.

A função de estrutura do sistema, que deverá assumir o valor 1 se o sistema funciona e o valor zero quando o siste-

⁷KAUFMANN, A.; GROUCHKO, D.; CRUON, R. "Modèles Mathématiques pour L'Étude de la Fiabilité des Systèmes", Paris, 1975, p. 184

ma falha, é definida como:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1^a, x_2^a, \dots, x_n^a; x_1^b, x_2^b, \dots, x_n^b) &= \psi(x_1^a, x_2^a, \dots, x_n^a) \cdot \bar{\psi}(x_1^b, x_2^b, \dots, x_n^b) \\ &= \psi(\mathbf{x}^a) \cdot [1 - \psi(\mathbf{1}-\mathbf{x}^b)] \end{aligned} \quad (20)$$

Teorema II.7

"O sistema não poderá apresentar simultaneamente as falhas A e B, ou de outra forma, não poderá acontecer que $\psi(\mathbf{x}^a) = \bar{\psi}(\mathbf{x}^b) = 0$ "

Pode-se notar facilmente que, se $\bar{\psi}(\mathbf{x}^b) = 0$, os componentes para os quais $x_i^b = 0$ formam um corte para $\bar{\psi}(\mathbf{x}^b)$, logo devem formar um elo para $\psi(\mathbf{x}^a)$ e considerando ainda que se $x_i^b = 0$ então $x_i^a = 1$, tem-se que $\psi(\mathbf{x}^a) = 1$. Analogamente se verificaria a recíproca.

O sistema só poderá ser encontrado em três estados mutuamente exclusivos que serão designados por A(falha A), B(falha B) e S(bom estado).

2.3.3 - Função de Confiabilidade de um Sistema Apresentando Falhas Duais

Sejam:

q_i^a - probabilidade de que o componente e_i apresente a falha A.

q_i^b - probabilidade de que o componente e_i apresente a falha B.

Sejam ainda:

$$1 - h(1-q_1^a, 1-q_2^a, \dots, 1-q_n^a)$$

a probabilidade de que o sistema esteja no estado A;

$$1 - \bar{h}(1-q_1^b, 1-q_2^b, \dots, 1-q_n^b).$$

a probabilidade de que o sistema esteja no estado B

Tendo em vista que segundo Kaufmann, Grouchko e Cruon⁸:

$$1 - \bar{h}(1 - q^b) = h(q^b)$$

Os três estados do sistema A, B e S são incompatíveis e:

$$P(A) + P(B) + P(S) = 1$$

Será chamada a $f(q_1^a, q_2^a, \dots, q_n^a; q_1^b, q_2^b, \dots, q_n^b)$ de função de confiabilidade do sistema. Então:

$$\begin{aligned} P(S) = f(\mathbf{q}^a, \mathbf{q}^b) &= 1 - \left[1 - h(1 - \mathbf{q}^a) \right] - h(\mathbf{q}^b) \\ &= h(1 - \mathbf{q}^a) - h(\mathbf{q}^b) \end{aligned} \quad (21)$$

⁸ KAUFMANN, A.; GROUCHKO, D.; CRUON, R. "Modèles Mathématiques pour L'Étude de la Fiabilité des Systèmes", Paris, 1975, p. 186

C A P Í T U L O I I I

3 - ALGORITMOS PESQUISADOS

3.1 - Introdução

Conforme visto no capítulo anterior para se obter a função de confiabilidade de um sistema, é necessário o conhecimento do conjunto dos elos minimais ou dos cortes minimais da sua função de estrutura, e tanto a obtenção destes conjuntos como a construção da função de estrutura são tarefas bastante trabalhosas, e impossíveis de serem executadas manualmente em sistemas de grande porte.

Neste capítulo são relacionados os algoritmos, encontrados na bibliografia consultada, que abordam o problema da confiabilidade de sistemas em uma ou mais de suas etapas.

3.2 - O Algoritmo de Jensen e Bellmore

Esse algoritmo foi desenvolvido para determinar todos os cortes minimais de uma rede de confiabilidade conexa e não direcionada.

Jensen e Bellmore¹ não propõem o cálculo exato da confiabilidade, mas sim o cálculo de um limite inferior para a mesma. A aproximação sugerida por Jensen e Bellmore é a primeira desigualdade da relação 17 do capítulo II.

¹JENSEN, Paul, A. e BELLMORE, M. - An Algorithm to Determine the Reliability of a Complex System. IEE Transactions on Reliability, Vol R-18, nº4, novembro 1969, p. 169-174.

$$h(\mathbf{p}) \geq \sum_{R=1}^n \left[1 - \prod_{e_i \in B_k} (1 - p_i) \right]$$

A precisão desta aproximação depende da configuração da rede de confiabilidade, o que torna bastante difícil estimar o erro em geral. Segundo Jensen e Bellmore, alguns cálculos realizados por Esary e Proschan indicam que a aproximação é melhor quando as confiabilidades dos componentes do sistema são próximas da unidade. Esta é a situação mais geral na prática.

A propriedade principal em que se baseiam Jensen e Bellmore para a construção de seu algoritmo é a seguinte:

"A remoção dos componentes de um corte minimal separa uma rede de confiabilidade conexa em duas sub-redes conexas. Uma das sub-redes inclui o nó 0 (fonte) e a outra inclui o nó Z (sumidouro)".

Para provar essa afirmação, Jensen e Bellmore lembram que a remoção dos componentes de um corte minimal separa uma rede conexa em pelo menos duas sub-redes conexas porque um corte minimal é um corte, e usam a contradição para provar que a remoção de um corte minimal separa a rede em exatamente duas sub-redes conexas:

"Suponha-se que a remoção dos componentes de um corte minimal divida a rede em mais de duas sub-redes conexas. Então deve existir uma sub-rede conexa P que não inclui os nós 0 e Z. Escolha-se um nó de P que seja um nó terminal para algum componente no corte minimal. Faça-se retornar este componente à rede. Agora a sub-rede P está unida com alguma outra sub-rede que se havia

formado na remoção dos componentes do corte minimal. As sub-redes restantes ainda estão separadas. Em particular continuam separadas as sub-redes incluindo os vértices 0 e Z. Então não há ainda um caminho ligando 0 e Z. Logo, do corte original pode-se extrair um componente e este continua sendo um corte. Mas isto é contrário a suposição inicial de que o corte original era um corte minimal. Dessa forma a proposição inicial de que um corte minimal divide uma sub-rede conexa em exatamente duas sub-redes conexas fica prova-
da².

Fica claro então, através dessa propriedade, que o problema da geração do conjunto dos cortes minimais é o mesmo da geração do conjunto de todas as partições do conjunto dos nós da rede em dois conjuntos X e \bar{X} , de modo que o conjunto X defina a sub-rede conexa que contém 0 e o conjunto \bar{X} defina a sub-rede conexa que contém Z. Um corte minimal correspondente a uma bipartição é o conjunto dos componentes com um terminal em X e o outro terminal em \bar{X} .

No algoritmo cada nó da rede deve ser indicado por um número inteiro sendo que o nó 0 (origem) será indicado pelo número 1 e o nó Z (sumidouro) será indicado por n; os vértices restantes devem receber qualquer índice dentre os inteiros restantes de 1 a n.

Durante a execução do algoritmo é construída uma árvore. Nesta árvore os vértices recebem índices inteiros para identificação, o vértice cujo índice é o zero é a raiz da árvore.

Cada folha (ou vértice terminal) da árvore corres-

²JENSEN, P. A.; BELLMORE, M. "An Algorithm to Determine the Reliability of a Complex System". IEE Transactions on Reliability, Vol R-18, n°4, novembro 1969, p. 169-174.

ponde a um corte minimal da rede.

Os ramos dessa árvore recebem rótulos da forma xT ou xF , onde x é um inteiro representando um nó da rede de confiabilidade e T e F são usados para indicar respectivamente membros do conjunto X e \bar{X} de um corte minimal da rede de confiabilidade.

No exemplo 3.1, que segue, no único caminho que liga os vértices 0 e 20 da árvore, aparecem os rótulos 1T, 8F, 2T, 3F, 5T, 6T e 7F. Os números 1, 2, 5 e 6 que estão rotulados com T, formam o conjunto X . O conjunto \bar{X} é obtido através da relação complementar de X no conjunto dos nós da rede. Note que os nós 8, 3 e 7 rotulados com F não constituem todo o conjunto \bar{X} , são apenas uma parte deste. O corte minimal correspondente ao vértice 20 é o formado pelos componentes AHIJ.

São associados a cada vértice i da árvore quatro subconjuntos de nós da rede de confiabilidade, Y_{1i} , Y_{2i} , Y_{3i} e W_i que são definidos da seguinte forma:

Deve ser encontrado o único caminho simples ℓ_i que liga o vértice raiz 0 ao vértice i , após isso podem ser encontrados os conjuntos Y_{1i} , Y_{2i} , Y_{3i} e W_i como segue:

$$Y_{1i} = \{\text{nós } \underline{x} \text{ tais que exista um ramo no caminho } \ell_i \text{ rotulado como } xT\};$$

$$Y_{2i} = \{\text{nós } \underline{x} \text{ tais que exista um ramo no caminho } \ell_i \text{ rotulado como } xF\};$$

$$Y_{3i} = \{\text{nós } \underline{x} \text{ tais que } x \notin Y_{1i} \text{ e } x \notin Y_{2i}\} = \overline{Y_{1i} \cup Y_{2i}}$$

$W_i = \{\text{n\u00f3s } x \text{ tais que } x \in Y_{3_i} \text{ e } x \text{ \u00e9 um terminal de um componente cujo outro terminal est\u00e1 em } Y_{1_i}\}.$

3.2.1 - Descri\u00e7\u00e3o do Algoritmo

Os passos do algoritmo a serem agora descritos ser\u00e3o mais facilmente compreendidos se forem acompanhados atrav\u00e9s dos exemplos 3.1 e 3.2, do par\u00e1grafo 3.2.3.

Passo 1

Criar para a \u00e1rvore tr\u00eas v\u00e9rtices 0, 1 e 2 e os ramos (0,1) e (1,2) rotulados por 1T e nF, respectivamente. Os v\u00e9rtices 0 e 1 devem ser marcados como pesquisados e o v\u00e9rtice 2 como n\u00e3o pesquisado.

Passo 2

Escolher o v\u00e9rtice n\u00e3o pesquisado de maior \u00edndice e marc\u00e1-lo como pesquisado. Se n\u00e3o existirem v\u00e9rtices n\u00e3o pesquisados o algoritmo termina e toda a \u00e1rvore j\u00e1 foi gerada. O v\u00e9rtice escolhido ser\u00e1 denotado como v\u00e9rtice i.

Encontrar ρ_i , o \u00fanico caminho simples que liga o v\u00e9rtice 0 ao v\u00e9rtice i. Identificar Y_{1_i} , Y_{2_i} , Y_{3_i} e W_i . Escolher y , um elemento qualquer em W_i . Se W_i \u00e9 vazio ir para o passo 7, sen\u00e3o construir a sub-rede definida pelos n\u00f3s do conjunto $Y_4 (= Y_{2_i} \cup Y_{3_i} - y)$. Verificar se esta sub-rede \u00e9 conexa. Se for conexa ir para o passo 3, do contr\u00e1rio ir para o passo 4.

Passo 3

Criar dois novos v\u00e9rtices indexados por k e k+1 on-

de \underline{k} é igual ao número total de vértices já criados acrescido de uma unidade. Marcar os vértices \underline{k} e $\underline{k+1}$ como não pesquisados. Criar os ramos (i, \underline{k}) e $(i, \underline{k+1})$ e rotulá-los como yT e yF , respectivamente. Ir para o passo 2.

Passo 4

Encontrar o conjunto $Y_5 \subset Y_4$ que define a sub-rede conexa que inclui o nó \underline{n} (sumidouro). Se $Y_{2i} \subset Y_5$ ir para o passo 5, caso contrário ir para o passo 6.

Passo 5

Criar o vértice \underline{k} e o ramo (i, \underline{k}) rotulado como yT onde \underline{k} é igual ao número total de vértices já criados acrescido de um. Determinar $Y_6 = Y_4 \cup \bar{Y}_5$. Para cada $\underline{z} \in Y_6$ criar um vértice para a árvore e um ramo rotulado por zT . Se $|Y_6|$ é o número de elementos no conjunto Y_6 , os vértices $\underline{k+1}, \underline{k+2}, \underline{k+3}, \dots, \underline{k+|Y_6|}$ deverão ser criados. Os ramos $(\underline{k}, \underline{k+1}); (\underline{k+1}, \underline{k+2}); (\underline{k+2}, \underline{k+3}), \dots, (\underline{k+|Y_6|} - 1, \underline{k+|Y_6|})$ também deverão ser criados (a cada um desses ramos cujo rótulo é zT corresponde o elemento $\underline{z} \in Y_6$). Finalmente criar o vértice $\underline{k+|Y_6|+1}$ e o ramo $(i, \underline{k+|Y_6|+1})$ rotulado como yF . Ir para o passo 2.

Passo 6

Criar um novo vértice \underline{k} e um ramo (i, \underline{k}) rotulado como yF . Ir para o passo 2.

Passo 7

Nesta etapa um corte minimal foi gerado. O conjunto X relacionado ao corte é Y_{1i} . Os componentes do corte minimal são

todos aqueles que tem um terminal no conjunto X e o outro no conjunto \bar{X} . Seja S o conjunto desses componentes. Encontrar a probabilidade desse corte minimal:

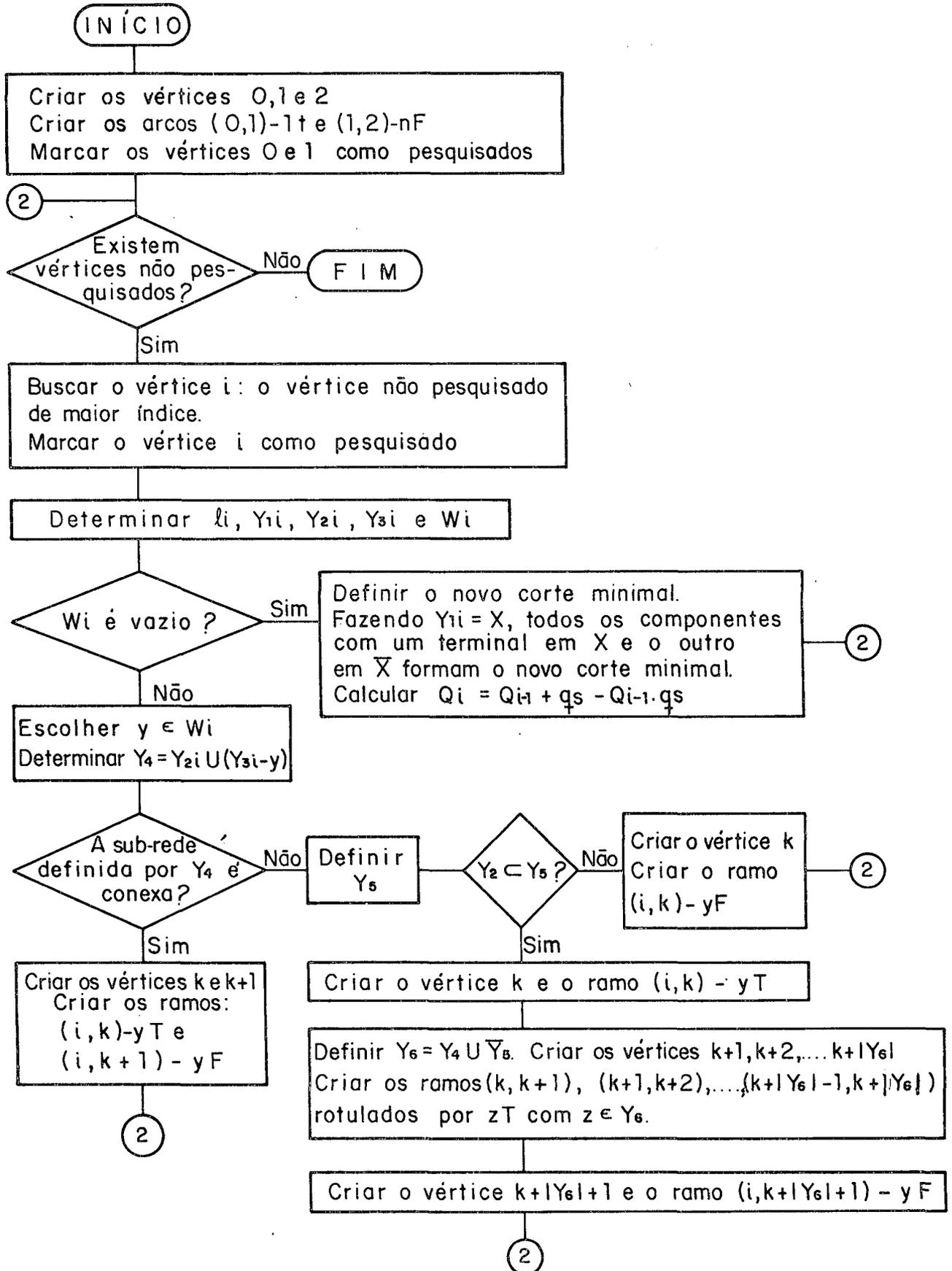
$$q_S = \prod_{i \in S} q_i$$

Incluí-lo na estimativa de probabilidade de falha do sistema:

$$Q_i = Q_{i-1} + q_S - Q_{i-1} \cdot q_S$$

onde Q_{i-1}   a estimativa da probabilidade de falha antes da descoberta desse corte minimal. (Para o primeiro corte minimal encontrado $Q_{i-1} = 0$). Ir para o passo 2.

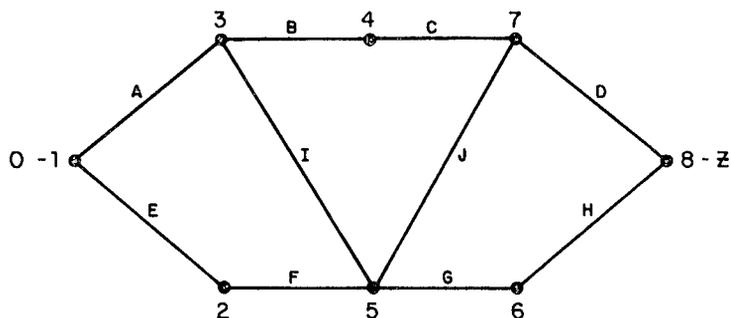
3.2.2. - FLUXOGRAMA DO ALGORITMO



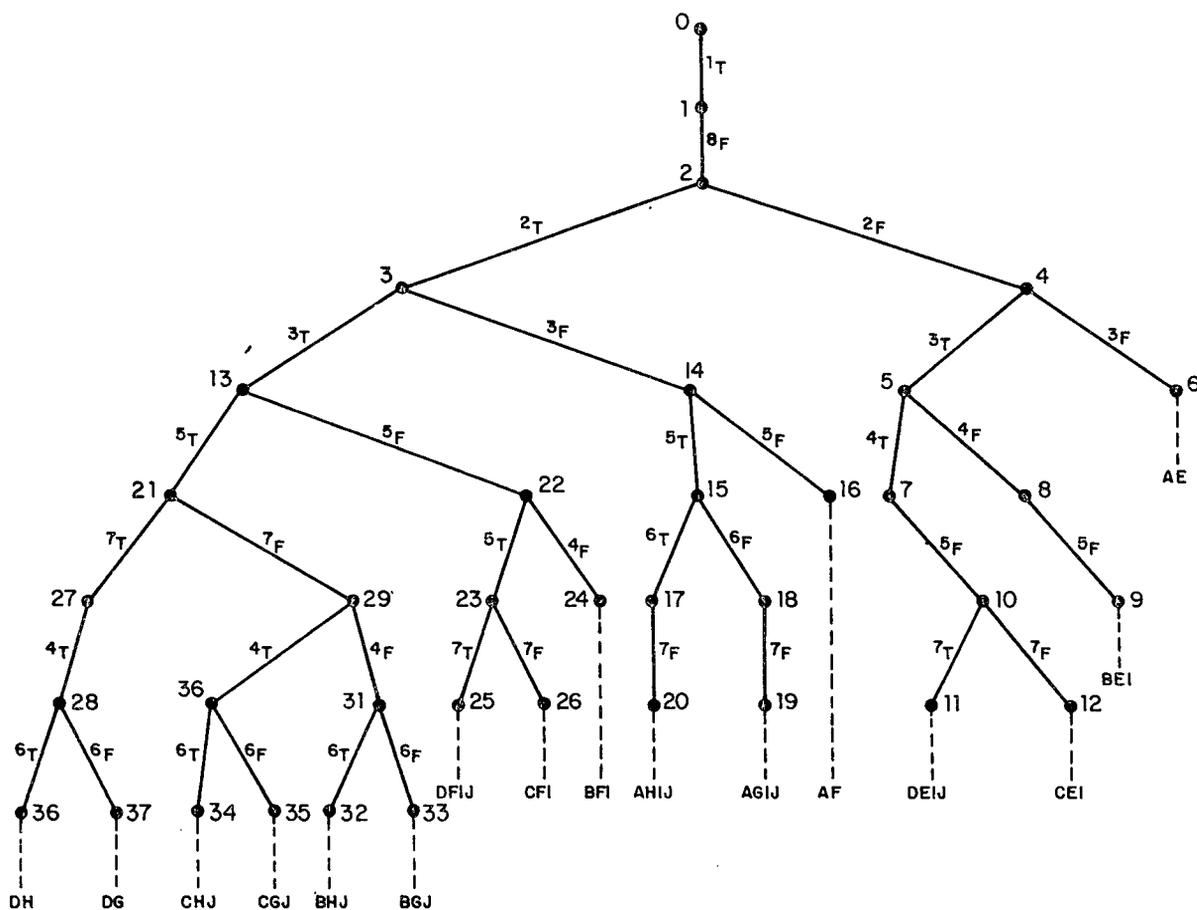
3.2.3 - Exemplos da Aplicação do Algoritmo

O exemplo que segue é o mesmo que Jensen e Bellmore utilizam no seu artigo.

Exemplo 3.1 - Dada a rede:

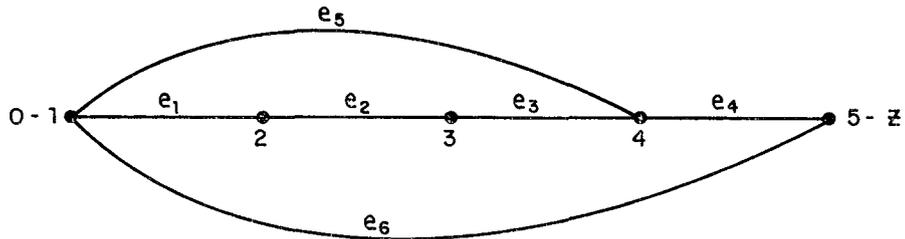


A árvore construída pelo algoritmo, que determina todos os cortes minimais, pode ser visualizada como segue:

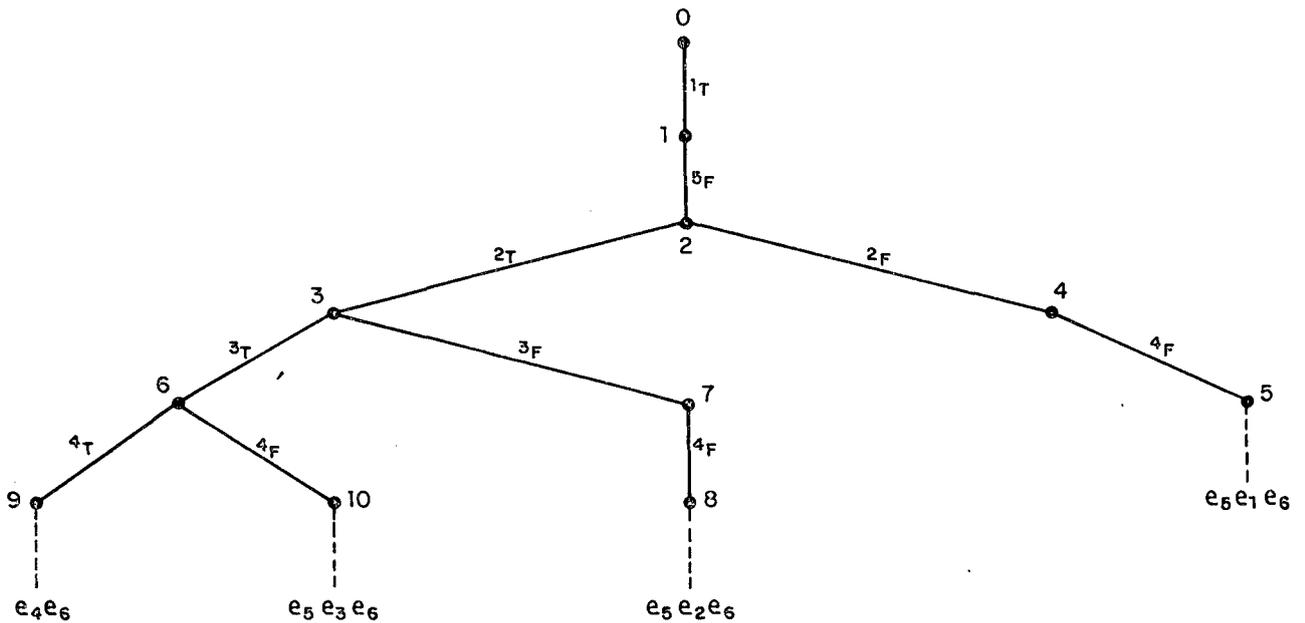


Com o exemplo a seguir pretende-se detalhar melhor as etapas do algoritmo de Jensen e Bellmore.

Exemplo 3.2 - Dada a rede:



O algoritmo aplicado sobre esta rede levaria à determinação do conjunto dos cortes minimais $\{\{e_4, e_6\}; \{e_5, e_3, e_6\}; \{e_5, e_2, e_6\}; \{e_5, e_1, e_6\}\}$, através da construção da seguinte árvore:



De forma detalhada, as etapas para construção da árvore podem ser descritas como segue:

- Criar os vértices 0, 1 e 2 e os ramos (0,1)-1T e

(1,2)-3F.

- Marcar os vértices 0 e 1 como pesquisados.

- $i=2$, marcar o vértice 2 como pesquisado

$$\ell_2 = (1T; 3F); Y_{1,2} = \{1\}; Y_{2,2} = \{5\}; Y_{3,2} = \{2, 3, 4\}; W_2 = \{2, 4\}$$

W_2 não é vazio, então $y=2$ e $Y_4 = \{3, 4, 5\}$.

A sub rede definida por Y_4 é conexa então:

Criar os vértices 3 e 4 e os ramos (2,3)-2T e (2,4)-2F.

- $i=4$, marcar o vértice 4 como pesquisado.

$$\ell_4 = \{1T, 5F, 2F\}$$

$$Y_{1,4} = \{1\}; Y_{2,4} = \{2, 5\}; Y_{3,4} = \{3, 4\}; W_4 = \{4\}$$

$$y=4$$

$Y_4 = \{2, 5, 3\}$ A sub rede definida por Y_4 não é conexa

$$Y_5 = 5 \text{ e } Y_{2,4} \not\subseteq Y_5$$

Criar o vértice 5 e o ramo (4,5)-4F.

- $i=5$, marcar o vértice 5 como pesquisado.

$$\ell_5 = \{1T, 5F, 2F, 4F\}$$

$$Y_{1,5} = \{1\}; Y_{2,5} = \{4, 2, 5\}; Y_{3,5} = \{3\}; W_5 = \emptyset$$

$X = \{1\}$ determinar o corte minimal $\{e_1, e_5, e_6\}$

- $i=3$, marcar o vértice 3 como pesquisado.

$$\ell_3 = \{1T, 5F, 2T\}$$

$$Y_{1,3} = \{1, 2\}; Y_{2,3} = \{5\}; Y_{3,3} = \{3, 4\}; W_3 = \{3, 4\}$$

$$y=3$$

$Y_4 = \{4, 5\}$; a sub rede definida por Y_4 é conexa.

Criar os vértices 6 e 7 e os ramos (3,6)-3T e

(3,7)-3F.

- $i = 7$, marcar o vértice 7 como pesquisado.

$$\ell_7 = \{1T, 5F, 2T, 3F\}$$

$$Y_{17} = \{1,2\}; Y_{27} = \{3,5\}; Y_{37} = \{4\}; W_7 = \{4\}$$

$$y = 4$$

$Y_4 = \{3,5\}$ a sub rede definida por Y_4 não é conexa

$$Y_5 = \{5\} \quad \text{e} \quad Y_{27} \not\subseteq Y_5.$$

Criar o vértice 8 e o ramo (7,8)-4F.

- $i = 8$, marcar o vértice 8 como pesquisado.

$$\ell_8 = \{1T, 5F, 2T, 3F, 4F\}$$

$$Y_{18} = \{1,2\}; Y_{28} = \{3,4,5\}; Y_{38} = \{ \} \quad \text{e} \quad W_8 = \{ \}$$

$$X = \{1,2\} \quad \text{determina o corte minimal } \{e_2, e_5, e_6\}$$

- $i = 6$, marcar o vértice 6 como pesquisado.

$$\ell_6 = \{1T, 5F, 2T, 3T\}$$

$$Y_{16} = \{1,2,3\}; Y_{26} = \{5\}; Y_{36} = \{4\}; W_6 = \{4\}$$

$$y = 4$$

$Y_4 = \{5\}$ a sub rede definida por Y_4 é conexa.

Criar os vértices 9 e 10 e os ramos (6,9)-4T e (6,9)-4F.

- $i = 10$, marcar o vértice 10 como pesquisado.

$$\ell_{10} = \{1T, 5F, 2T, 3T, 4F\}$$

$$Y_{110} = \{1,2,3\}; Y_{210} = \{4,5\}; Y_{310} = \{ \}; W_{10} = \{ \}$$

$$X = \{1,2,3\} \quad \text{determina o corte minimal } \{e_3, e_5, e_6\}$$

- $i = 9$, marcar o vértice 9 como pesquisado.

$$\ell_9 = \{1T, 5F, 2T, 3T, 4T\}$$

$$Y_{19} = \{1,2,3,4\}; Y_{29} = \{5\}; Y_{39} = \{ \}; W_9 = \{ \}$$

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ define o corte minimal $\{e_4, e_6\}$

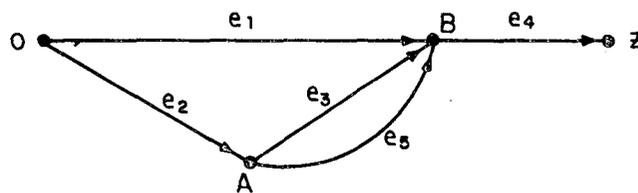
- Todos os nós criados já foram pesquisados, o algoritmo termina.

3.3 - Algoritmo de Nelson, Batts e Beadles³

Neste algoritmo os autores propõem a determinação do conjunto dos cortes minimais para redes direcionadas, a partir do conhecimento de todos caminhos na mesma.

Não é especificado no algoritmo um método para determinação dos caminhos. Após o conhecimento destes, os autores propõem a construção de uma matriz $P_{I,r}$, na qual cada linha representa um caminho entre os nós $\underline{0}$ e \underline{Z} da rede (r =número de componentes na rede, $I=n^\circ$ de caminhos da rede).

Exemplo 3.3 - Dada a rede:



a matriz P seria definida da seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{caminho } (e_1, e_4) \\ \rightarrow (e_2, e_3, e_4) \\ \rightarrow (e_2, e_5, e_4) \end{array}$$

³NELSON, C. A.; BATTIS, J.R.; BEADLES, R.L. - "A Computer Program for Approximating System Reliability", 1970, p. 61-65

- a primeira linha corresponde ao caminho (e_1, e_4) indicado pelas colunas que possuem seus valores iguais a 1.

Determinada a matriz P , devem ser encontrados, a partir desta, os cortes minimais.

Inicialmente procede-se a busca dos cortes com um único elemento. Se a coluna i da matriz P é um vetor unitário então o componente e_i é um corte minimal. No exemplo 3.3 o componente e_4 do sistema é um corte minimal.

Em seguida os cortes minimais com dois componentes são buscados. Se os componentes e_k e e_j formam um corte minimal então, em P , as colunas k e j devem ser tais que:

$$p_{ik} = 1 \text{ ou } p_{ij} = 1 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, I$$

Essa condição deve ser verificada para todos os pares e_k e e_j de componentes da rede.

A busca continua para cortes com três componentes, através de procedimento semelhante, e prossegue até os cortes com r componentes ou até que para um determinado $m < r$ todas as combinações possíveis de m componentes sejam cortes.

A cada estágio os cortes não minimais que são encontrados devem ser eliminados, bastando para isto verificar se, dentre os cortes de cardinalidade inferior, já gerados, existe algum contido no corte recém obtido. Se a resposta for afirmativa o corte não é minimal e deve ser eliminado.

Conhecidos os cortes minimais, os autores propõem o cálculo de aproximações, através de um método que converge para

a confiabilidade do sistema.

3.3.1 - Aproximação Sugerida por Nelson, Batts e Beadls

Uma expressão para a confiabilidade de um sistema, é a equação de número 19 do capítulo 2: $h(\mathbf{p}) = 1 - P(\bar{B}_1 \cup B_2 \cup \dots \cup \bar{B}_n)$, onde \bar{B}_i representa o evento "todos os componentes do i-ésimo corte minimal estão falhos".

Esta equação pode ser reescrita da forma de segue:

$$1 - h(\mathbf{p}) = P(\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup \dots \cup \bar{B}_n)$$

E da teoria da probabilidade verifica-se, que:

$$1^\circ) 1 - h(\mathbf{p}) \leq \sum_{i=1}^n P(\bar{B}_i)$$

ou

$$h(\mathbf{p}) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{B}_i) \quad (22)$$

$$2^\circ) 1 - h(\mathbf{p}) \geq \sum_{i=1}^n P(\bar{B}_i) - \sum_{j < k} P(\bar{B}_j \cap \bar{B}_k) \quad \text{ou}$$

$$h(\mathbf{p}) \leq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{B}_i) + \sum_{j < k} P(\bar{B}_j \cap \bar{B}_k) \quad 1 \leq j \text{ e } k \leq n \quad (23)$$

$$3^\circ) h(\mathbf{p}) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{B}_i) + \sum_{j < k} P(\bar{B}_j \cap \bar{B}_k) - \sum_{j < k < i} P(\bar{B}_j \cap \bar{B}_k \cap \bar{B}_i) \quad (24)$$

onde $1 \leq j, k \leq n$ e $i \leq n$.

Na expressão 24 adicionando-se o somatório das probabilidades de todas as possíveis intersecções de quatro eventos B_{is} obter-se-ia um valor que seria menor do que $h(\mathbf{p})$, e seguindo este raciocínio se chegaria a uma série de valores que converge para a confiabilidade do sistema.

Nelson, Batts e Beadles sugerem que esta série de

valores seja determinada até que se obtenha um intervalo de precisão considerado satisfatório para a confiabilidade $h(\mathbf{p})$.

Exemplo 3.4

No exemplo 3.3, visto anteriormente, suponha-se que: $p_1 = p_2 = 0,9$ $p_3 = p_4 = 0,8$ $p_5 = 0,95$ ou que $q_1 = q_2 = 0,1$ $q_3 = q_4 = 0,2$ $q_5 = 0,05$...

Nesta rede os elos minimais são:

$$A_1 = \{e_1, e_4\}, A_2 = \{e_2, e_3, e_4\} \text{ e } A_3 = \{e_2, e_4, e_5\}$$

e os cortes minimais são:

$$B_1 = \{e_4\}, B_2 = \{e_1, e_2\} \text{ e } B_3 = \{e_1, e_3, e_5\}$$

Utilizando-se a expressão 19 do capítulo 2 tem-se:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= 1 - P(\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2 \cup \bar{B}_3) = \\ &= 1 - [P(\bar{B}_1) + P(\bar{B}_2) + P(\bar{B}_3) - P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) - P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_3) - \\ &\quad - P(\bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) + P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{p}) &= 1 - [0,2 + 0,1^2 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,05 - 0,1^2 \cdot 0,2 - \\ &\quad - 0,1 \cdot 0,2^2 \cdot 0,05 - 0,1^2 \cdot 0,2 \cdot 0,05 + 0,1^2 \cdot 0,2 \cdot 0,05] \end{aligned}$$

$$h(\mathbf{p}) = 0,79128$$

Neste caso, como existem apenas 3 cortes minimais, no terceiro valor da série já é obtido o valor exato da confiabilidade, $h(\mathbf{p})$.

$$a) h(\mathbf{p}) \geq 1 - \sum P(\bar{B}_i) =$$

$$1 - (0,2 + 0,1^2 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,05) = 0,789$$

$$h(\mathbf{p}) \geq 0,789$$

$$b) h(\mathbf{p}) < 1 - \sum P(\bar{B}_i) + \sum P(\bar{B}_i \cap \bar{B}_k) =$$

$$= 0,789 + P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2) + P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_3) + P(\bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) =$$

$$= 0,789 + 0,1^2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2^2 \cdot 0,05 + 0,1^2 \cdot 0,2 \cdot 0,05$$

$$h(\mathbf{p}) \leq 0,7913$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h(\mathbf{p}) &\geq 0,78913 - \sum P(\bar{B}_i \cap \bar{B}_k \cap \bar{B}_j) = \\ &= 0,7913 - P(\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3) \\ &= 0,7913 - 0,1^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,05 \\ h(\mathbf{p}) &= 0,79128. \end{aligned}$$

No exemplo 3.3 mostrado acima, pode ser observado que:

- todos os valores obtidos na série são números viáveis como probabilidade (maiores do que ou iguais a zero e menores do que ou iguais a um).

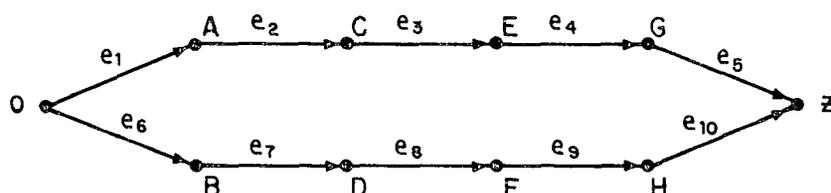
É importante ser notado, contudo, que em geral não se verifica esta característica observada no exemplo anterior, ou seja:

- Os valores obtidos na série nem sempre são viáveis como probabilidade. Em geral quando o número de cortes mínimos é grande, torna-se necessária a determinação de muitos valores da mesma, até que comecem a ser obtidos valores viáveis.

Para ilustrar o que foi afirmado acima apresenta-se o seguinte exemplo.

Exemplo 3.5

Seja a rede da figura abaixo:



Cujos cortes minimais são:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \{e_1 e_6\}, B_2 = \{e_1 e_7\}, B_3 = \{e_1 e_8\}, B_4 = \{e_1, e_9\}, B_5 = \{e_1 e_{10}\}, \\
 B_6 &= \{e_2 e_6\}, B_7 = \{e_2 e_7\}, B_8 = \{e_2 e_8\}, B_9 = \{e_2 e_9\}, B_{10} = \{e_2 e_{10}\}, \\
 B_{11} &= \{e_3 e_6\}, B_{12} = \{e_3 e_7\}, B_{13} = \{e_3 e_8\}, B_{14} = \{e_3 e_9\}, \\
 B_{15} &= \{e_3 e_{10}\}, B_{16} = \{e_4 e_6\}, B_{17} = \{e_4 e_7\}, B_{18} = \{e_4 e_8\}, \\
 B_{19} &= \{e_4 e_9\}, B_{20} = \{e_4 e_{10}\}, B_{21} = \{e_5 e_6\}, B_{22} = \{e_5 e_7\}, \\
 B_{23} &= \{e_5 e_8\}, B_{24} = \{e_5 e_9\}, B_{25} = \{e_5 e_{10}\}
 \end{aligned}$$

E cujos elos minimais são:

$$A_1 = \{e_1 e_2 e_3 e_4 e_5\} \quad e \quad A_2 = \{e_6 e_7 e_8 e_9 e_{10}\}$$

Suponha-se (\mathbf{p}) , o vetor das probabilidades de sucesso como o seguinte:

$$(\mathbf{p}) = (0,75; 0,75; 0,75; 0,75; 0,75; 0,75; 0,75; 0,75; 0,75; 0,75)$$

utilizando-se a equação 18 do capítulo 2 tem-se que:

$$h(\mathbf{p}) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0,75^5 + 0,75^5 - 0,75^{10}$$

$$h(\mathbf{p}) \cong 0,4183$$

Os primeiros dois valores da série são:

$$1^\circ) 1 - \sum P(\bar{B}_i) = 1 - 25 \cdot 0,25^2 = -0,5625$$

$$\begin{aligned}
 2^\circ) 1 - \sum P(\bar{B}_i) + \sum P(\bar{B}_i \cap \bar{B}_j) &= -0,5625 + 200 \cdot 0,25^4 + 100 \cdot 0,25^3 = \\
 &= 1,78125
 \end{aligned}$$

3.4 - Algoritmo de Misra e Rao⁴

Neste trabalho os autores propõem um método de inspeção topológica para a determinação da expressão de confiabilidade.

Para a aplicação do método proposto torna-se necessária a determinação anterior de todos os caminhos na rede ligando os nós 0 e Z.

Serão apresentados a seguir, de forma suscinta, os passos do algoritmo.

Passo 1

Encontrar todos os caminhos ligando os nós 0 e Z da rede. Efetuar para cada caminho os produtos das probabilidades de sucesso dos seus componentes. Atribuir a estes produtos sinal positivo.

Passo 2

Encontrar todos os grafos parciais (obtidos através da manutenção dos arcos correspondentes a dois ou mais caminhos e supressão dos demais), com um laço contendo os nós 0 e Z. Efetuar os produtos das probabilidades de sucesso dos componentes correspondentes aos arcos de cada um destes grafos parciais e assinalá-los com sinal negativo.

Passo 3

Encontrar todos os grafos parciais (como já definido) contendo 2 laços que incluam os nós 0 e Z. Efetuar os produtos já indicados e assinalá-los com sinal positivo.

⁴MISRA, K.B.; RAO, S.M. "Reliability Analysis of Redundants Networks Using Flow Graphs". IEEE Transactions on Reliability, Vol R-19, nº 1, fevereiro 1970, p. 61-65.

Passo 4

Os passos 2 e 3 devem ser repetidos até que todos os grafos parciais tenham sido determinados. Nos grafos parciais contendo um número par de laços atribuir sinal negativo aos produtos efetuados; nos grafos parciais contendo um número ímpar de laços atribuir sinal positivo a estes produtos.

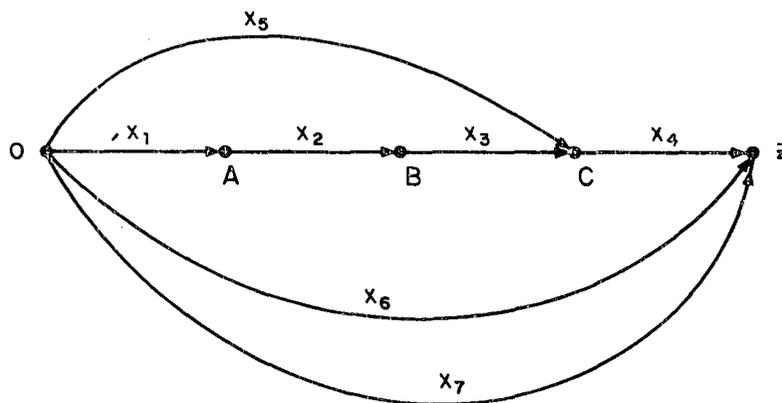
Passo 5

Determinar a expressão de confiabilidade efetuando o somatório de todos os produtos realizados.

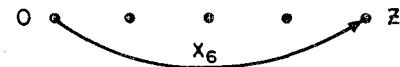
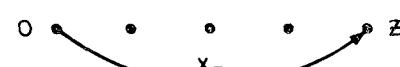
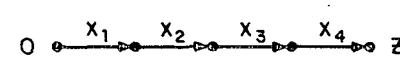
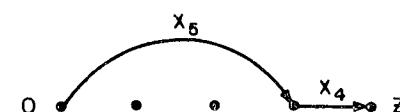
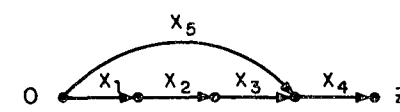
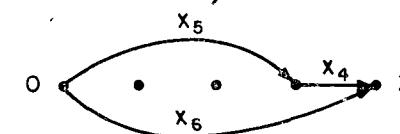
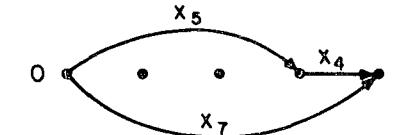
Exemplo 3.6

O exemplo que será apresentado foi extraído do artigo que apresenta este algoritmo:

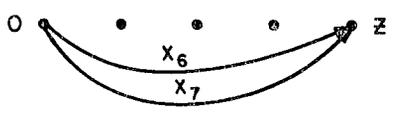
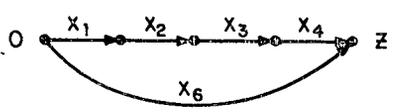
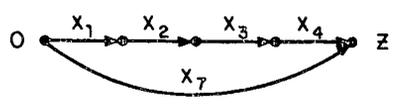
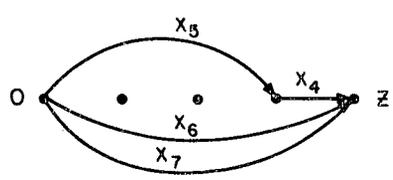
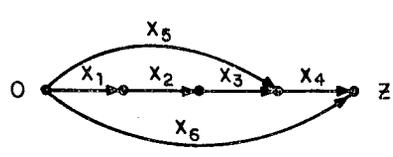
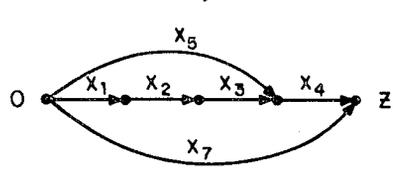
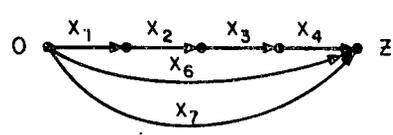
Dada a rede



São mostrados abaixo os grafos parciais descritos no algoritmo:

	GRAFOS PARCIAIS	NÚMERO DE LAÇOS	PRODUTO ASSOCIADO
1.		-	+ p ₆
2.		-	+ p ₇
3.		-	+ p ₁ p ₂ p ₃ p ₄
4.		-	+ p ₅ p ₄
5.		1	- p ₁ p ₂ p ₃ p ₄ p ₅
6.		1	- p ₄ p ₅ p ₆
7.		1	- p ₄ p ₅ p ₇

GRAFOS PARCIAIS NÚMERO DE LAÇOS PRODUTO ASSOCIADO

8.		1	$- p_6 p_7$
9.		1	$- p_1 p_2 p_3 p_4 p_6$
10.		1	$- p_1 p_2 p_3 p_4 p_7$
11.		2	$+ p_4 p_5 p_6 p_7$
12.		2	$+ p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6$
13.		2	$+ p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_7$
14.		2	$+ p_1 p_2 p_3 p_4 p_6 p_7$
15.	todos os elementos presentes	3	$- p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7$

Neste caso $h(\mathbf{p})$ é:

$$h(\mathbf{p}) = p_6 + p_7 + p_1 p_2 p_3 p_4 + p_5 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 - p_4 p_5 p_6 - p_4 p_5 p_7 - p_6 p_7 - \\ - p_1 p_2 p_3 p_4 p_6 - p_1 p_2 p_3 p_4 p_7 + p_4 p_5 p_6 p_7 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_7 + \\ + p_1 p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 - p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7.$$

É fácil ser observado, através do exemplo 3.5, que:

- Os sub grafos parciais contendo um número n de laços, correspondem àqueles que foram obtidos através da manutenção dos componentes correspondentes a $n+1$ caminhos ligando os nós 0 e Z.

- O produtório das probabilidades de sucesso dos componentes correspondentes aos arcos mantidos no grafo parcial é a probabilidade de que todos os caminhos presentes no mesmo tenham todos os seus componentes em bom estado.

Tendo em vista estes fatos, fica claro que a expressão de confiabilidade desenvolvida neste algoritmo é análoga a expressão 18 do capítulo 2:

$h(\mathbf{p}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_m)$ onde A_i representa o evento "todos os componentes do i -ésimo elo minimal estão em bom estado".

Fazendo $I = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ podemos escrever:

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{j>i} P(A_i \cap A_j) + \sum_{k>j>i} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{m+1} P\left(\bigcap_i A_i\right) \\ \text{com } \{i, j, k\} \subset I. \quad (25)$$

Note-se que os grafos parciais com n laços originam um produtório que é igual a probabilidade da intersecção de $n+1$ eventos A_i . Se o número de laços é par, esse produtório

entra com sinal positivo para $h(p)$, e negativo em caso contrário; na expressão 25 as intersecções com um número par de eventos assumem sinal negativo, e o sinal é positivo para as intersecções com um número ímpar de eventos.

O método proposto por Misra e Rao para determinar a confiabilidade de um sistema tem algumas etapas desnecessárias:

A determinação dos grafos parciais, passa necessariamente pela determinação de todas as intersecções de caminhos tomados dois a dois, três a três, etc. Note-se que o número de grafos parciais é igual a $2^m - 1$ (sendo m o número de caminhos numa rede) e o número de intersecções possíveis também é $2^m - 1$.

Após um grafo parcial ser determinado, é ainda necessário contar o número de laços existente para determinar o sinal (+ ou -) do produto correspondente.

Pretende-se aqui ressaltar que não é necessário o teste do número de laços pois o sinal poderia ser determinado pelo número de caminhos que está presente no grafo parcial, e neste caso a própria construção do grafo parcial pode ser considerada desnecessária.

A vantagem na utilização deste método poderia estar na facilidade em implementá-lo através do computador. Os autores, contudo, não deixam claro, de que forma isso poderia ser feito.

3.5 - Outros Algoritmos

3.5.1 - Algoritmos para Busca de Todos os Elos Minimais na Rede

Os algoritmos que serão relacionados abaixo tem como objetivo a determinação de todos os caminhos ligando os nós 0 e Z de uma rede.

a) Método da Arborescência

Este método é apresentado por Kaufmann, Grouchko e Cruon⁵, e se constitui na construção de uma árvore, de tal forma que algumas folhas da mesma correspondem aos caminhos ligando 0 e Z.

b) Método da Concatenação Latina

Este é um outro método apresentado por Kaufmann, Grouchko e Cruon⁽⁵⁾ que resumidamente pode ser enunciado como um produtório adequado de matrizes que produzirá uma matriz final onde serão definidos os caminhos de 0 a Z.

c) Algoritmo de Murchland⁶

Este algoritmo propõe a construção de uma matriz e operações sobre esta de tal forma a se chegar ao conjunto dos caminhos entre 0 e Z.

⁵KAUFMANN, A.; GROUCHKO, D.; CRUON, R. - "Modèles Mathématiques pour L'Étude de la Fiabilité des Systèmes", Paris, 1975, p.96-107

⁶PRICE, W.L. - "Graphs and Networks, An Introduction", Londres, 1976, p. 56-61

3.5.2 - Algoritmos para a Busca de Todos os Cortes Minimais numa Rede

Na bibliografia pesquisada foram encontrados alguns métodos que podem ser divididos em dois grupos:

1º) Aqueles que propõem a determinação do conjunto dos cortes minimais a partir do conhecimento do conjunto dos elos minimais.

2º) Aqueles que propõem a determinação do conjunto dos cortes minimais diretamente.

No primeiro tipo está o método já descrito proposto por Nelson, Batts e Beadles. Ainda nesta mesma linha se enquadra o método proposto por Kaufmann, Grouchko e Cruon⁷.

No segundo tipo está o método proposto por Jensen e Bellmore que já foi mostrado e ainda se pode citar o algoritmo de Fussell e Vesely⁸.

⁷KAUFMANN, A.; GROUCHKO, D.; CRUON, R. - "Modèles Mathématiques pour L'Étude de la Fiabilité des Systèmes". Masson et Cie Editeurs. Paris, 1975.

⁸FUSSELL, J.B.; VESELY, W.E. - "A New Methodology for Obtaining Cut Sets for Fault Trees". Transactions of the American Nuclear Society, 1972 Annual Meeting, junho 1972, p. 262-263.

3.6 - Conclusões

Os algoritmos de Jensen e Bellmore para determinação do conjunto dos cortes minimais foi descrito de forma bastante pormenorizada. Críticas e alterações neste algoritmo serão apresentadas no capítulo seguinte, uma vez que a sua utilização é proposta no método a ser descrito neste capítulo.

Os algoritmos de Misra - Rao e de Nelson, Batts e Beadles também foram descritos detalhadamente e para estes algumas críticas foram feitas.

São ainda mencionados outros algoritmos, que pelo fato de ter sido encontrado problemas nas suas definições ou por serem métodos muito primários não foram descritos de forma mais detalhada.

C A P Í T U L O I V

4 - ALGORITMO PROPOSTO

4.1 - Introdução

Pretende-se neste capítulo apresentar um método para determinar um limite inferior para a confiabilidade de sistemas com falhas duais, para tal, além de terem sido propostas algumas alterações no algoritmo de Jensen e Bellmore, foi realizada uma adaptação para o caso de sistemas com falhas duais.

4.2 - Aproximação Utilizada

A aproximação sugerida por Jensen e Bellmore tem a vantagem de resultar sempre em um valor viável para a probabilidade de um sistema, e a precisão obtida é tanto melhor quanto maiores forem as confiabilidades dos componentes no sistema. Esta aproximação pode ser estendida para sistemas com falhas duais da forma que segue:

Sejam $B_1^a, B_2^a, \dots, B_{n_a}^a$ os cortes minimais existentes na função de estrutura da falha A, $\psi(\mathbf{x}^a)$; sejam $B_1^b, B_2^b, \dots, B_{n_b}^b$ os cortes minimais associados a função de estrutura relativa a falha B, $\bar{\psi}(\mathbf{x}^b)$.

Sejam ainda q_i^a e q_i^b respectivamente as probabilidades de falha A e B para um determinado componente e_i . Então,

fazendo $P(A) = 1 - h(1-q^a)$ e como

$$h(1-q^a) \geq \prod_{k=1}^{n_a} \left[1 - \prod_{e_i \in B_k^a} q_i^a \right], \text{ tem-se que}$$

$$P(A) \leq 1 - \prod_{k=1}^{n_a} \left[1 - \prod_{e_i \in B_k^a} q_i^a \right] \quad (26)$$

Seja agora $P(B) = 1 - \bar{h}(1-q^b)$ e considerando que

$$\bar{h}(1-q^b) \geq \prod_{k=1}^{n_b} \left[1 - \prod_{e_i \in B_k^b} q_i^b \right], \text{ tem-se que}$$

$$P(B) \leq 1 - \prod_{k=1}^{n_b} \left[1 - \prod_{e_i \in B_k^b} q_i^b \right] \quad (27)$$

Neste caso, como $P(S) = 1 - [P(A) + P(B)]$ onde S, A e B representam respectivamente os estados possíveis de bom funcionamento, falha A e falha B para um sistema; é verdade que a função de confiabilidade $f(q^a, q^b)$ satisfaz a desigualdade:

$$f(q^a, q^b) = P(S) \geq 1 - \left[1 - \prod_{k=1}^{n_a} \left(1 - \prod_{e_i \in B_k^a} q_i^a \right) \right] - \left[1 - \prod_{k=1}^{n_b} \left(1 - \prod_{e_i \in B_k^b} q_i^b \right) \right] \text{ ou}$$

$$f(q^a, q^b) \geq \prod_{k=1}^{n_a} \left(1 - \prod_{e_i \in B_k^a} q_i^a \right) + \prod_{k=1}^{n_b} \left(1 - \prod_{e_i \in B_k^b} q_i^b \right) - 1 \quad (28)$$

A expressão 28 se constitui num limite inferior para a confiabilidade de um sistema apresentando falhas duais. Esta expressão não garante valores viáveis para a confiabilidade de um sistema, pois a mesma pode resultar num valor negativo, mas em geral, para sistemas com alta confiabilidade nos compo-

mentes, a precisão obtida tende a ser melhor.

É necessário para a obtenção do valor indicado na expressão 28, o conhecimento do conjunto dos cortes minimais de ambas as funções de estrutura das falhas A e B.

Para a rede de confiabilidade, associada a um sistema com falhas duais, tendo em vista a dualidade das funções de estrutura das falhas A e B, pode ser verificado que:

- Os cortes minimais na rede são cortes minimais da função de estrutura relativa a falha A, e são elos minimais da função de estrutura relativa a falha B.

- Os elos minimais (caminhos) na rede de confiabilidade são também elos minimais para a função de estrutura da falha A e são cortes minimais da função de estrutura relativa a falha B.

Note-se então que o conhecimento dos dois conjuntos de cortes minimais relativos as falhas A e B, pode ser atingido de duas formas:

1^a) Determinando-se todos os elos minimais e cortes minimais na rede de confiabilidade. Desta forma os cortes minimais para a falha A obter-se-iam através dos cortes minimais da rede, e para a falha B obter-se-iam através dos elos minimais da rede.

2^a) Determinando-se o conjunto dos cortes minimais na rede primal e também o conjunto dos cortes minimais da rede dual. Na rede primal seriam obtidos os cortes minimais relativos a falha A e na rede dual se obteria o conjunto dos cortes minimais relativo a falha B.

No algoritmo proposto optou-se pela segunda forma

apresentada acima, e o algoritmo utilizado para determinação dos cortes minimais nas redes primal e dual foi o de Jensen e Bellmore com algumas ressalvas quanto as restrições de aplicação do mesmo, e com uma alteração num de seus passos.

4.3 - Modificações Realizadas no Algoritmo de Jensen e Bellmore

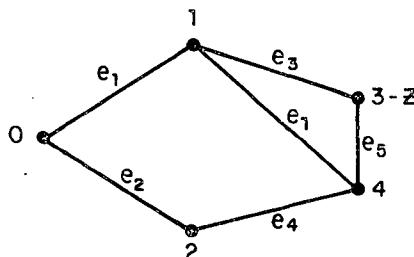
O algoritmo de Jensen e Bellmore propõe a determinação de um limite inferior para a confiabilidade de sistemas, que possam ser representados por redes não-direcionadas, a partir da determinação do conjunto dos cortes minimais. Para a utilização com sucesso deste algoritmo, torna-se necessário, ainda, a inclusão de algumas restrições ao tipo de rede de confiabilidade a que este se aplica, e uma alteração numa de suas etapas.

4.3.1 - Restrições Acrescentadas na Utilização do Algoritmo

a) A aplicação Δ citada no parágrafo 2.2.4 quando da definição de redes de confiabilidade, deve ser biunívoca, ou seja, a cada aresta do grafo que representa a rede deve corresponder um componente diferente no sistema.

Exemplo 4.1 -

A rede abaixo não satisfaz a restrição citada acima, pois ao componente e_1 correspondem simultaneamente as arestas $[0,1]$ e $[1,4]$.



Nesta rede os cortes minimais são:

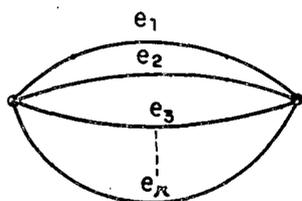
$$\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\} \text{ e } \{e_3, e_5\}$$

O algoritmo de Jensen e Bellmore determinaria ainda os cortes $\{e_1, e_3, e_4\}$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ que não são minimais. Esses cortes foram determinados pois o algoritmo considera cada aresta na determinação dos cortes minimais.

b) A rede deve poder ser apresentada por um grafo do tipo 1-aplicado. Caso tal restrição não possa ser satisfeita, há a possibilidade de ser efetuada uma redução sobre o grafo r-aplicado para transformá-lo num grafo 1-aplicado.

Se numa rede qualquer a junção entre dois nós é feita por mais de um componente então este grupo de componentes, para efeitos da utilização do algoritmo de Jensen e Bellmore, pode ser substituído por um outro que, deverá assumir uma probabilidade de falha igual ao produto das probabilidades de falha dos componentes que o formam.

Suponhamos que numa determinada rede a junção entre dois nós, seja feita por r componentes; conforme a figura abaixo:



então estes r componentes podem ser substituídos por outro cuja probabilidade de falha seja $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_r = \prod_{i=1}^r q_i$.

A redução proposta justifica-se pelo fato de que, todo corte minimal, que incluir um dos componentes do grupo $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$, deverá conter todos os componentes restantes no mesmo; e também pelo fato de que, a aproximação a ser utilizada para o cálculo da confiabilidade baseia-se no produtório das probabilidades de falhas dos componentes contidos num corte minimal.

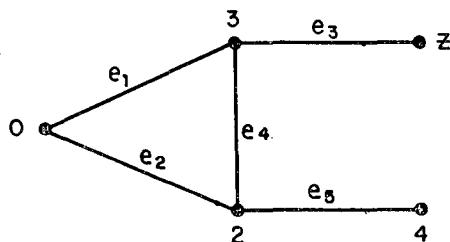
c) A rede de confiabilidade não deverá conter nenhum componente inútil.

Um componente é dito "inútil" quando não pertence a nenhum corte minimal, ou da mesma forma, quando não faz parte de nenhum elo minimal.

Uma rede que satisfaça as duas restrições anteriores, conterà um ou mais componentes inúteis se possuir algum nó (excluindo-se os nós 0 e Z, fonte e sumidouro) que seja terminal de apenas um componente. Portanto uma rápida inspeção, permitiria, nestes casos, detectar a existência de componentes inúteis.

Exemplo 4.2

Na rede abaixo existe o nó número 4 que é terminal de um único componente, logo nesta rede existe pelo menos um componente inútil. De fato o componente e_5 é inútil pois não pertence a nenhum dos cortes minimais que são: $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_4\}$ e $\{e_3\}$.



O algoritmo de Jensen e Bellmore aplicado sobre esta rede geraria um corte não minimal formado pelos componentes $\{e_1, e_4, e_5\}$.

4.3.2 - Alteração Realizada no Algoritmo

Para que o algoritmo de Jensen e Bellmore forneça os resultados anunciados é necessário que seja feita uma alteração no passo 5 do mesmo; O passo 5 fica então com a mesma redação proposta pelos autores, acrescentando-se ainda que os nós $k, k+1, k+2, \dots, k+|Y_6|-1$ devam ser marcados como já pesquisados.

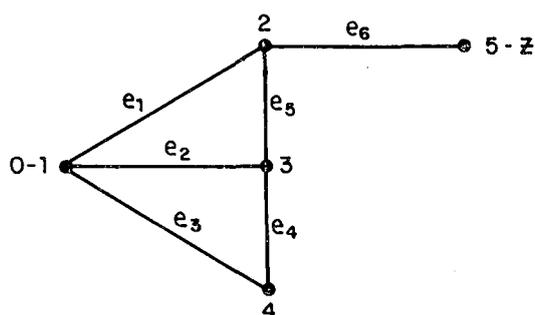
Para justificar esta alteração será citada inicialmente uma breve demonstração do algoritmo que é feita no artigo de Jensen e Bellmore: "o algoritmo gera sequencialmente (passo 2) os conjuntos X e \bar{X} , representados respectivamente por Y_{1_i} e Y_{2_i} . A escolha de um membro do conjunto W_i para expandir o conjunto X garante que a sub-rede definida por X é conexa. Isto satisfaz o primeiro requisito para um corte minimal. Cada sub-rede assim gerada também define uma sub-rede complementar que inclui Z mas não O (a sub-rede definida por Y_4). A cada etapa esta sub-rede é testada (passo 2) quanto a ser conexa (o segundo requisito para a determinação de um corte minimal). Se é conexa o procedimento de geração continua (passo 3). Se não é conexa e se a parte conexa contendo Z contém todo o conjunto dos nós já assinalados como \bar{X} (Y_2), então a parte da sub-rede que não inclui Z , (Y_6), é unida a sub-rede incluindo O (passo 5). Se a parte conexa contendo Z não contém todo o conjunto Y_2 , esta via de expansão do conjunto X é fechada..."

Como se pode notar no passo 5 do algoritmo o conjunto X é expandido através de y e de todos os membros do conjunto Y_6 .

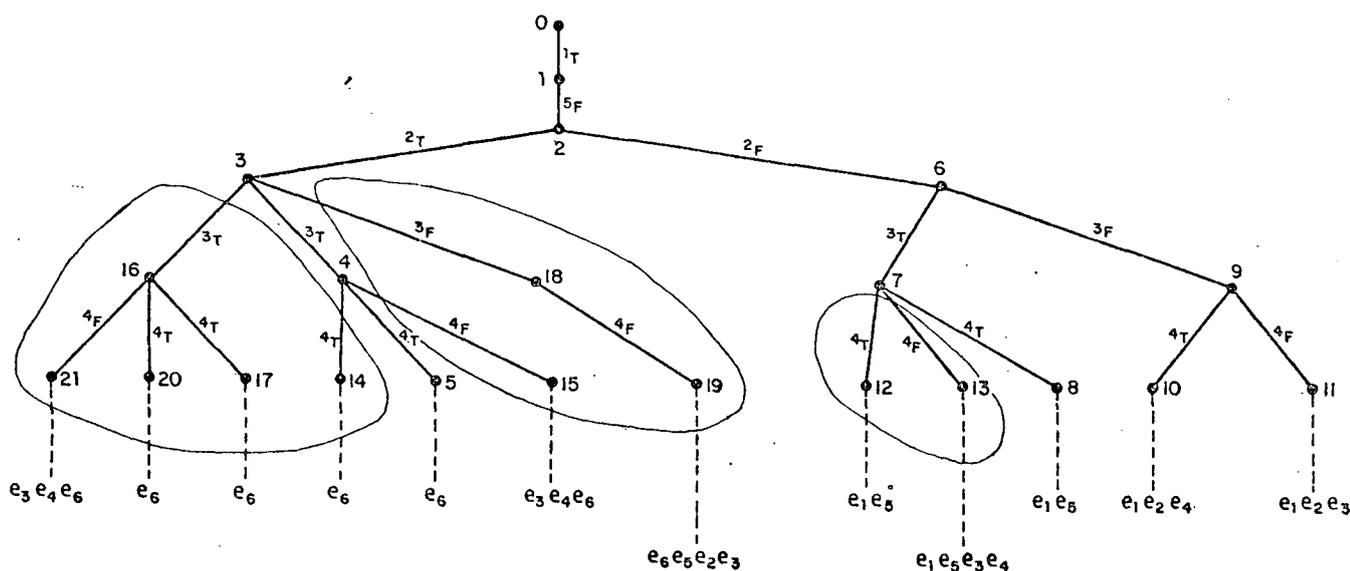
Esta expansão gera vértices para a árvore que formam uma cadeia simples ligando o vértice i e o vértice $k+|Y_6|$; estes vértices, com excecao do último da cadeia, não necessitam ser futuramente pesquisados pois sua análise redundante na análise já feita para o vértice i . Portanto, todos estes vértices devem ser marcados como pesquisados, caso contrário muitos vértices desnecessários seriam gerados proporcionando a determinacao de cortes não minimais para a rede, além de determinar inúmeras vezes um mesmo corte.

Exemplo 4.3

Para a rede abaixo



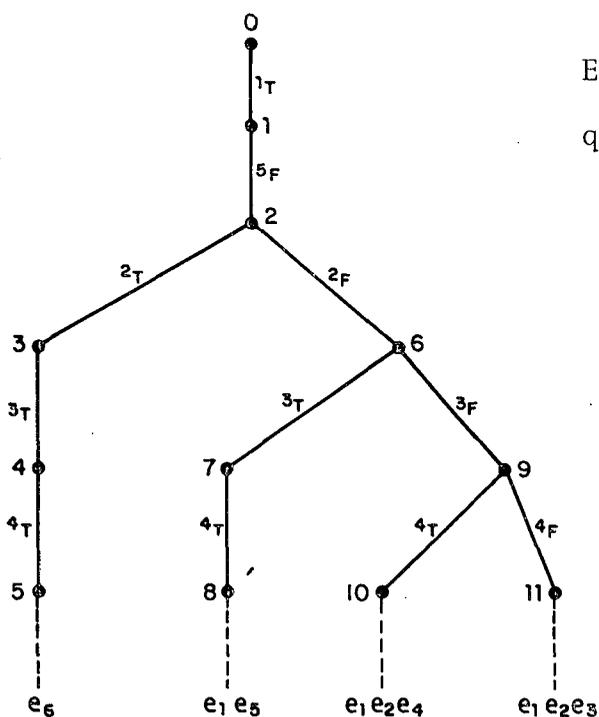
a aplicaçao do algoritmo de Jensen e Bellmore geraria a seguinte árvore:



Note-se que os vértices terminais 20, 17, 14 e 5 geram o mesmo corte minimal e_6 , já os vértices 12 e 8 representam o corte minimal $\{e_1, e_5\}$, enquanto que os vértices 19, 15, 21 e 13 geram cortes no minimais.

As regiões demarcadas na árvore foram geradas sem necessidade em vista da análise desnecessária realizada nos vértices 3, 4 e 7.

Com a alteração que foi introduzida no algoritmo a árvore a ser desenvolvida seria a seguinte:



Esta árvore fornece exatamente os quatro cortes existentes na rede.

4.4 - O Teste de Conexidade

O algoritmo de Jensen e Bellmore inclui, no seu passo 2, um teste de conexidade sobre uma sub-rede da rede de confiabilidade e, no caso desta não ser conexa deve ser determinado (pas

so 4) o conjunto dos nós que definem a sub-rede conexa que inclui o nó sumidouro.

Na pesquisa bibliográfica realizada foi encontrado um algoritmo¹ que testa a conexidade de um grafo orientado através da construção de uma matriz. Observando-se melhor a matriz final resultante deste algoritmo, foi possível também solucionar o problema do passo 4 do algoritmo de Jensen e Bellmore.

O algoritmo consta dos seguintes passos:

Passo 1 - Para um grafo $G = (S, U)$ defina a matriz de adjacências $R = (r_{ij})$ como segue:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o arco}(i, j) \in U \\ 0 & \text{se o arco}(i, j) \notin U \end{cases}$$

Passo 2 - Calcule para $p \leq n$, onde n é o número de nós em S .

$$B = R + R^2 + R^3 + \dots + R^p$$

onde "+" é a adição com significado Booleano (isto é $1+1=1$, $1+0=1$, $0+1=1$ e $0+0=0$). Se para algum $p \leq n$ os elementos da matriz $B = (b_{ij})$ forem todos iguais a 1, então o grafo dado é conexo, de outra forma não será conexo.

Este algoritmo testa a conexidade de grafos orientados. No algoritmo de Jensen e Bellmore, o grafo associado a rede de confiabilidade, que é não orientado, deverá ter cada aresta $[s_i, s_j]$ substituída por dois arcos com sentidos contrários, (s_i, s_j)

¹MANDL, Christoph - Applied Network Optimazation. Academic Press, London, 1979

e (s_j, s_i) .

A conexidade testada pelo algoritmo não corresponde a definição já feita neste trabalho pois o algoritmo verifica se existe ou não um caminho (na definição já feita tratava-se de uma cadeia) ligando qualquer par ordenado de nós, como neste caso está se trabalhando com redes com dupla orientação em todos os arcos as duas definições se equivalem.

Se uma determinada rede não for conexa será possível identificar quais são as sub-redes conexas analisando-se a matriz resultante B. Em particular a sub rede conexa que contém o nó sumidouro, poderá ser identificada pelos nós correspondentes às linhas que contém elementos não nulos na coluna correspondente ao nó sumidouro.

Exemplo 4.4

Dada a rede abaixo:



a matriz R é definida da forma que segue:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e a matriz final resulta em:

$$B = R + R^2 + R^3 + R^4 + R^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A existência de elementos nulos na matriz B indica que a rede não é conexa. A sub-rede conexa que contém o nó sumidouro (de número 5) é definida na coluna 5 pelos nós correspondentes as linhas com elementos não nulos (3, 4, 5).

4.5 - O Algoritmo Desenvolvido

Este algoritmo determinará o limite inferior para a confiabilidade de sistemas com falhas duais indicado pela expressão 28, desenvolvida no parágrafo 4.1., e poderá ser aplicado a redes planares fonte-sumidouro que satisfaçam ainda as restrições de utilização do algoritmo de Jensen e Bellmore, já citadas, que são:

- redes não direcionadas;
- redes nas quais a cada aresta do grafo que a representa associa-se um componente distinto;
- redes que possam ser associadas a grafos 1-aplicado;
- redes que não contenham componentes inúteis.

O algoritmo será apresentado a seguir através dos

passos que o compõem:

1º Passo

Determinar a rede dual da rede de confiabilidade (conforme o parágrafo 2.2.4.5).

2º Passo

Determinar o conjunto dos cortes minimais da rede primal: $\{B_1^a, B_2^a, \dots, B_{n_a}^a\}$, através do algoritmo de Jensen e Bellmore modificado. A cada corte minimal determinado, atualizar o valor da confiabilidade relativa a falha A, C_A , de tal forma que se obtenha ao final do processo.

$$C_A = \prod_{k=1}^{n_a} \left[1 - \prod_{e_i \in B_k^a} q_i^a \right]$$

3º Passo

Encontrar o conjunto dos cortes minimais da rede dual: $\{B_1^b, B_2^b, \dots, B_{n_b}^b\}$, utilizando o algoritmo de Jensen e Bellmore modificado. Calcular a confiabilidade relativa a falha B, C_B :

$$C_B = \prod_{k=1}^{n_b} \left[1 - \prod_{e_i \in B_k^b} q_i^b \right]$$

4º Passo

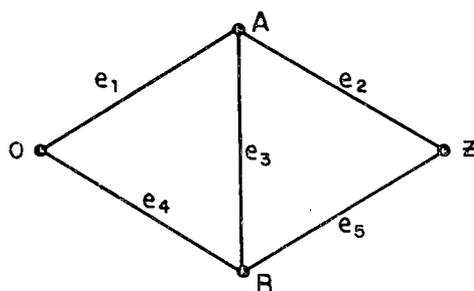
Determinar o limite inferior para a confiabilidade do sistema, C:

$$C = C_A + C_B - 1$$

A listagem do programa computacional e alguns exemplos executados seguem em anexo; a seguir, será apresentado apenas um exemplo a título de ilustração:

Exemplo 4.5

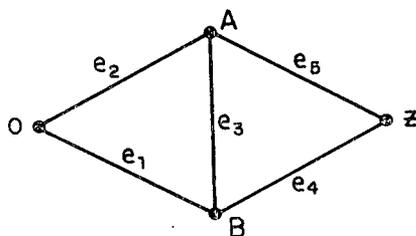
Seja a rede abaixo, onde:



$$\begin{array}{ll} q_1^a = 0,001 & q_1^b = 0,02 \\ q_2^a = 0,002 & q_2^b = 0,002 \\ q_3^a = 0,01 & q_3^b = 0,01 \\ q_4^a = 0,01 & q_4^b = 0,015 \\ q_5^a = 0,001 & q_5^b = 0,005 \end{array}$$

Aplicando o algoritmo tem-se:

1º Passo: A rede dual \tilde{e} obtida



2º Passo: Os cortes minimais da rede primal são:

$\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_5\}$, $\{e_1, e_3, e_5\}$ e $\{e_4, e_3, e_2\}$

$$\begin{aligned} C_A &= (1-q_1^a q_4^a)(1-q_2^a q_5^a)(1-q_1^a q_3^a q_5^a)(1-q_4^a q_3^a q_2^a) \\ &= (1-0,001 \cdot 0,01)(1-0,002 \cdot 0,001)(1-0,001 \cdot 0,01 \cdot 0,001) \\ &\quad (1-0,002 \cdot 0,01 \cdot 0,01) = 0,999987 \end{aligned}$$

3º Passo: Os cortes minimais da rede dual são:

$\{e_1, e_2\}$, $\{e_5, e_4\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$ e $\{e_1, e_3, e_5\}$

$$\begin{aligned} C_B &= (1-q_1^b q_2^b)(1-q_5^b q_4^b)(1-q_2^b q_3^b q_4^b)(1-q_1^b q_3^b q_5^b) \\ &= (1-0,02 \cdot 0,002)(1-0,002 \cdot 0,005)(1-0,002 \cdot 0,01 \cdot 0,015) \\ &\quad (1-0,02 \cdot 0,01 \cdot 0,005) = 0,999883 \end{aligned}$$

4º Passo

$$C = C_A + C_B - 1 = 0,999871$$

4.6 - Conclusões

O Método apresentado determina um limite inferior para a confiabilidade de sistemas com falhas duais, e neste fato reside a principal restrição do mesmo, pois o valor exato da confiabilidade não é encontrado. Para sistemas de grande porte não se testou a precisão da aproximação obtida, sabe-se, contudo, que esta é tanto melhor quanto maiores forem as confiabilidades dos componentes do sistema.

O algoritmo proposto é aplicável a redes de confiabilidade que apresentem as seguintes características:

- redes não direcionadas;
- redes que não apresentem componentes inúteis;
- redes nas quais a cada aresta corresponda um componente distinto do sistema e
- redes planares fonte-sumidouro.

O método foi programado na linguagem FORTRAN IV e executado num computador IBM 4341; para pequenos sistemas, até 10 componentes, o tempo de execução oscilou entre 10 e 100 segundos, (A listagem do programa com alguns exemplos executados é encontrada nos anexos). Notou-se que para redes de médio e grande porte este tempo era muito maior, chegou a ultrapassar 20 minutos num caso experimentado; foi possível perceber-se que o grande responsável pelo elevado consumo de tempo era o teste de conexidade realizado no passo 4 do algoritmo de Jensen e Bellmore. Cabe ressaltar contudo, que Jensen e Bellmore em seu artigo citam resultados excelentes obtidos com a mesma linguagem de programação em computador não superior ao IBM 4341, para redes de médio porte (mais de 30 componentes). Pretende-se creditar esta grande diferença de resultados à

forma de efetivação do teste de conexidade, que não é explicitada por Jensen e Bellmore no seu artigo. Caso se consiga um teste de conexidade de maior eficiência talvez seja possível viabilizar computacionalmente o método para sistemas de grande porte.

C A P Í T U L O V

5. Conclusões e Sugestões para Novas Pesquisas

Dada a grande importância do estudo da confiabilidade de sistemas nos dias atuais e o reduzido número de trabalhos encontrados para o caso de sistemas com falhas duais, o objetivo especificado para este trabalho era o de propor um método para o cálculo da confiabilidade destes sistemas a partir do conhecimento das probabilidades de falhas de todos os seus componentes.

Na busca deste objetivo, realizou-se de início um estudo dos modelos matemáticos apropriados à abordagem do problema proposto, cujos resultados foram descritos de forma bastante criteriosa. Em seguida, efetuou-se uma pesquisa bibliográfica para a coleta de subsídios, junto aos trabalhos já existentes relacionados ao objetivo proposto.

O método desenvolvido obtém um limite inferior para o valor da confiabilidade de um sistema com falhas duais. Além desta, que se configura a maior restrição do método, deve-se acrescentar ainda as restrições referentes ao tipo de rede para as quais se pode empregá-lo:

- a) Redes não orientadas;
- b) Redes planares fonte-sumidouro;
- c) Redes que não contenham componentes inúteis;
- d) Redes nas quais a cada aresta seja associado um

componente distinto.

A precisão do resultado obtido não está estimada, e ela dependerá da configuração da rede; sabe-se entretanto, que o resultado é tanto melhor quanto maiores forem as confiabilidades dos componentes do sistema em questão.

Na questão do tempo de uso do computador não foram obtidos bons resultados para sistemas de médio e grande porte. Foi possível verificar que este mau desempenho era devido a forma de efetivação do teste de conexidade, incluído no passo 4 do algoritmo de Jensen e Bellmore. Acredita-se que os bons resultados, obtidos e citados por Jensen e Bellmore em seu artigo, possam ser alcançados com uma mudança na forma de realização do teste de conexidade, o que tornaria o método desenvolvido neste trabalho, viável computacionalmente para sistemas de grande porte.

Neste trabalho foi proposta uma solução que não é única e na própria redação deste ficaram claras outras possíveis soluções a serem criadas, que deveriam sofrer uma análise comparativa com a aqui desenvolvida.

Na bibliografia pesquisada não foram encontrados métodos eficientes para a determinação do valor exato da confiabilidade de sistemas complexos, mesmo se considerando uma só falha, neste sentido recomenda-se tentar a obtenção da função de confiabilidade $h(\mathbf{p})$ através da construção, via computador, da função de estrutura simplificada $\psi_S(\mathbf{x})$ (ver parágrafo 2.2.5.1., e 2.2.6.2.).

Outra sugestão que pode ser feita é a de melhoria na aproximação obtida que poderia ser calculada utilizando-se conjuntamente os métodos propostos por Jensen - Bellmore e Nelson, Batts

e Beadles para a construção de intervalos (com a utilização de limites inferiores e superiores), que conteriam o valor exato da confiabilidade.

Dada a importância fundamental, no cálculo de confiabilidade, da busca de todos os elos minimais ou de todos os coortes minimais de uma rede, recomenda-se uma análise comparativa da eficiência dos algoritmos existentes com tal finalidade.

Finalmente pode ainda ser realizado um trabalho com o objetivo de eliminar ou minimizar as limitações do método proposto.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- APOSTOLAKIS, G.; LEE, Y.T. - Methods for the Estimations of Confidence Bounds for the Top-Event Unavailability of Fault Trees. Nuclear Engineering and Design, V. 41, 1977, p. 411-419
- BAZOVSKI, Igor - Reliability Theory and Practice. Prentice Hall Inc, New Jersey, 1961
- BOAVENTURA NETTO, P.O. Teoria e Modelos de Grafos. São Paulo, E. Blücher, 1979.
- FURTADO, A.L. - Teoria dos Grafos-Algoritmos. Livros Técnicos e Científicos, São Paulo, 1973.
- FUSSEL, J.B.; VESELY, W.E. - A New Metodology for Obtaining Cut Sets for Fault Trees. Transactions of the American Nuclear Society, 1972 Annual Meeting, Junho 1972, p.262-263.
- GREEN, A.E.; BOURNE, A.J. - Reliability Technology. 3^a ed., John Wiley & Sons Ltda, New York, 1972.
- HU, T.C. - Integer Programming and Network Flows. Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A., 1970
- JENSEN, Paul A.; BELLMORE, M. - An Algorithm to Determine the Reliability of a Complex System. IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-18, n°4, novembro 1969, p.169-174
- KAUFMANN, A.; GROUCHKO, D.; CRUON, R. - Modèles Mathématiques Pour L'Étude de la Fiabilité des Systèmes. Masson et Cie. Editeurs. Paris, 1975.
- MANDL, Christoph - Applied Network Optimization. Academic Press, London, 1979.

MISRA, K.B.; RAO, J.S.M. - Reliability Analysis of Redundant Networks Using Flow Graphs. IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-19, nº1, fevereiro 1970, p.61-65.

NELSON, C.A.; BATTIS, J.R.; BEADLES, R.L. - A Computer Program for Aproximating System Reliability. IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-19, nº2, maio 1970, p. 61-65.

PRICE, W.L. - Graphs and Networks, An Introduction. Grupo Butterworths, Editor Geral - K.B. Haley, 1ª edição, Londres, 1971.

SOTSKOV, B. - Fundamentos de La Teoria y del Cálculo de Fiabilidad
Trad. GRDIANA - Editorial Mir, Moscú, 1972.

A N E X O 1.

LISTAGEM DO PROGRAMA

```

CJOB          D,REDE,KF=29
IMPLICIT INTEGER (A-Z)
REAL CA,CB,C,CC1,FREJAE
DIMENSION ARVORE(2000),Y1(30),Y2(30),Y3(30),YE(30)
DIMENSION Y0(30),W(30),EXAME(666),PROBAB(30,30),EXAMI(666)
COMMON REDE(30,30),SEMA(30,30),Y4(30),CCNT4,CHAVE
DATA ARVORE/300,30,1,7,2,4,1551#0/
DATA EXAME/1,000#0/
DATA K,PL300/3,2/
DATA EXAMI/1,000#0/

C
C DETERMINACAO DOS CORTES DA REDE PRIMAL E CALCULO DO
C LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DA FALHA A .
C

CA=1.
READ(5,300)N
800 FORMAT(1L)
DO 10 I=1,N
    READ(5,301)(REDE(I,J),J=1,N)
801    FORMAT(5X,12)
    10 CONTINUE
    DO 610 I=1,N
        READ(5,302)(FREJAE(I,J),J=1,N)
803    FORMAT(20,F4.3)
610 CONTINUE
    WRITE(5,304)
804 FORMAT(//////,10X,'** MATRIZ DE ADJACENCIAS DA REDE PRIMAL **',//)
    DO 603 I=1,N
        WRITE(5,305)(REDE(I,J),J=1,N)
806    FORMAT(10X,40(1X,12))
603 CONTINUE
    WRITE(5,307)
807 FORMAT(//////,10X,'** MATRIZ DE PROBABILIDADES DE FALHA DA REDE PR
*IMAL **',//)
    DO 753 I=1,N
        WRITE(5,309)(PROBAB(I,J),J=1,N)
809    FORMAT(10X,20(1X,F4.3))
753 CONTINUE
    WRITE(5,310)
810 FORMAT(//////,10X,'** CORTES DA REDE PRIMAL **')

C
C
C ***** INICIALIZACAO DAS VARIAVEIS *****
ARVORE(7)=N
50 CCNT1=0
   CCNT2=0
   CCNT3=0
   CCNT4=0
   CCNT5=0
   CCNT6=0
   CCNTW=0

C
C
C ***GERACAO DE Y1 E Y2, E TESTE PARA FINALIZAR TRABALHO COM PRIMAL **

```

```

      T=K-1
      DO 12 I=PESSO1,7
          IF(EKAME(I).EQ.0) GO TO 13
12  CONTINUE
      GO TO 301
13  PESSOI=1
      EKAME(PESSOI)=1
      L=3*PESSOI+1
16  IF(ARVORE(L+1).EQ.1) GO TO 14
      Y2(CONT2+1)=ARVORE(L)
      CONT2=CONT2+1
      GO TO 13
14  Y1(CONT1+1)=ARVORE(L)
      CONT1=CONT1+1
15  L=ARVORE(L+2)
      IF(ARVORE(L).EQ.0) GO TO 16
      GO TO 13
18  J=1
      I=1
      T=N-1
      DO 20 IPSELOS=2,7
          INV=N-(IPSELOS-1)
          IF(INV.EQ.Y1(I)) GO TO 21
          IF(INV.EQ.Y2(J)) GO TO 22
          Y3(CONTS+1)=INV
          CONTS=CONTS+1
          GO TO 20
21  I=I+1
          GO TO 20
22  J=J+1
20  CONTINUE
C
C ***** GERACAO DE W *****
C
      IF(CONTS.EQ.0) GO TO 76
      DO 23 I=1,CONTS
          DO 24 J=1,CONT1
              IF(REDE(Y3(I),Y1(J)).EQ.0) GO TO 24
              W(CONTW+1)=Y3(I)
              CONTW=CONTW+1
              GO TO 24
24  CONTINUE
23  CONTINUE
      IF(CONTW.EQ.0) GO TO 75
      Y=W(CONTW)
C
C *** GERACAO DE Y4 L ÉA SUBMATRIZ CONE PARA TESTE DE CONEXIDADE
C
      IF(CONT1.NE.1) GO TO 70
      A=1
      GO TO 71
70  A=CONT1-1
71  DO 25 I=2,N
          IF(Y1(A).EQ.1) GO TO 26
          IF(I.EQ.Y) GO TO 25

```

```

      CONT4=CONT4+1
      Y4(CONT4)=1
      GO TO 25
26   A=A-1
      IF(A.EQ.0) GO TO 27
25   CONTINUE
      GO TO 23
27   I=I+1
      DO 29 J=1,N
          IF(J.EQ.Y) GO TO 27
          CONT4=CONT4+1
          Y4(CONT4)=J
29   CONTINUE
C
C
C
C
C
C
C *** TESTE DE CONEXIADE ***
C
      23 IF(CONT4.EQ.1) GO TO 30
          CALL CONEXA
          IF(CHA.VL.EQ.0) GO TO 30
C
C ** CRIAR OS VERTICES K E K+1 E OS RAMOS (I,K)YI E (I,K=1)YF
C
      30 K3=3*K
          ARVORE(K3+1)=Y
          ARVORE(K3+2)=1
          ARVORE(K3+3)=0#FESQUI+1
          K=K+1
      63 K3=3*K
          ARVORE(K3+1)=Y
          ARVORE(K3+2)=2
          ARVORE(K3+3)=3#FESQUI+1
          K=K+1
          GO TO 50
C
C ** GERACAO DE Y5 E TESTE ( Y2 CONTIDO EM Y5)
C
      60 DO 33 I=1,CONT4
          IF(SOMA(1,CONT4).EQ.0) GO TO 33
          CONT5=CONT5+1
          Y5(CONT5)=Y4(I)
      33 CONTINUE
          IF(CONT5.NE.0) GO TO 257
          CONT5=CONT5+1
          Y5(CONT5)=N
297 IF(CONTE2.EQ.1) GO TO 63
      IF(CONT5.EQ.1) GO TO 81
      IF(CONTE2.EQ.1) GO TO 81
      I=CONT2-1
      T1=CONT5-1
      T2=1

```

```

      DO 34 I=1,1
        DO 35 J=12,T1
          INV=11-(J-1)
          PRINT,11,J,INV,Y5(INV),Y4(I)
          IF(Y2(I).EQ.Y5(INV)) GO TO 36
          IF(Y2(I).GT.Y5(INV)) GO TO 83
35      CONTINUE
        GO TO 33
36      IF(J.NE.T1) GO TO 91
          IF(I.EQ.T) GO TO 31
          GO TO 35
91      T2=J+1
34      CONTINUE
C
C ** EXPANSION ATRAVES LA GENERACION DE Y6 **
C
81      K3=J*K
          ARVORE(K3+1)=Y
          ARVORE(K3+2)=Z
          ARVORE(K3+3)=3*PESCUIT+1
          EXAME(K)=1
          K=K+1
          IF(CONTS.NE.1) GO TO 38
          RE=CONT4-1
          DO 82 I=1,RE
            Y6(I)=Y4(I)
89      CONTINUE
          CONT6=RE
          GO TO 90
88      T4=CONT4-1
          T5=CONT5-1
          T6=1
          DO 87 I=1,T5
            DO 88 J=T5,T4
              IF(Y4(J).EQ.Y5(I)) GO TO 39
              CONT6=CONT6+1
              Y6(CONT6)=Y4(J)
39      CONTINUE
          T6=J+1
37      CONTINUE
90      DO 40 I=1,CONT6
          K3=J*K
          ARVORE(K3+1)=Y6(I)
          ARVORE(K3+2)=1
          ARVORE(K3+3)=3*(K-1)+1
          EXAME(K)=1
          K=K+1
40      CONTINUE
          EXAME(K-1)=0
          K3=3*K
          ARVORE(K3+1)=Y
          ARVORE(K3+2)=Z
          ARVORE(K3+3)=3*PESCUIT+1
          K=K+1
          GO TO 30

```

```

C
C *** DETERMINAÇÃO E IMPRESSÃO DO NOVO CORTE MINIMAL E ATUALIZAÇÃO DE CA
C
      75 WRITE(3,310)
E20 FORMAT(//////,10X,*** OS SEGUINTEs ARCOS FORMAM UM CORTE MINIMAL**
      *,//)
      CONT=1.
      DO 41 I=1,CONT1
          DO 42 J=1,CONT2
              IF(REAL(Y1(I),Y2(J)).EQ.0) GO TO 42
              WRITE(3,821)Y1(I),Y2(J)
E21      . FORMAT(20X,12,5X,12)
              . CURT=CURT+PROJEA3(Y1(I),Y2(J))
      42      CONTINUE
      41 CONTINUE
      CA=CA*(1.-CURT)
      GO TO 30
C
C *** DETERMINAÇÃO DOS CORTES DA REDE DUAL E DO LIMITE INFERIOR PARA A
C CONFIABILIDADE DA FALHA 2
C
C
C
C
C
E01 K=3
      PESQUI=2
      CB=1.
      READ(5,900)N
E00 FORMAT(12)
      DO 110 I=1,N
          READ(5,901)(REDE(I,J),J=1,N)
E01      . FORMAT(39(12))
      110 CONTINUE
          DO 710 I=1,N
              READ(5,903)(PROJEA3(I,J),J=1,N)
E03      . FORMAT(20(F4.3))
      710 CONTINUE
          WRITE(3,904)
E04 FORMAT(//////,10X,*** MATRIZ DE ADJACÊNCIAS DA REDE DUAL ***,//)
          DO 703 I=1,N
              WRITE(3,905)(REDE(I,J),J=1,N)
E06      . FORMAT(18X,40(1X,12))
      703 CONTINUE
          WRITE(3,907)
E07 FORMAT(//////,10X,*** MATRIZ DE PROBABILIDADES DE FALHA DA REDE DU
      *AL ***,//)
          DO 858 I=1,N
              WRITE(3,909)(PROBAB(I,J),J=1,N)
E09      . FORMAT(18X,20(1X,F4.3))
      858 CONTINUE
          WRITE(3,910)
E10 FORMAT(//////,10X,*** CORTES DA REDE DUAL ***))

```

C
C

```

C
C ***** INICIALIZACAO DAS VARIAVEIS *****
      ARVORE(7)=N
150  CONT1=J
      CONT2=0
      CONT3=0
      CONT4=0
      CONT5=0
      CONT6=0
      CONTW=0
C
C
C ***GERACAO DE Y1 E Y2, E TESTE PARA FINALIZAR TRABALHO COM PRIMAL **
      T=K-1
      DO 112 I=PESQ01,1
          IF(EXAMI(I).EQ.0) GO TO 115
112  CONTINUE
      GO TO 332
113  PESQUI=I
      EXAMI(PESQUI)=1
      L=J*PESQUI+1
116  IF(ARVORE(L+1).EQ.1) GO TO 114
      Y2(CONT2+1)=ARVORE(L)
      CONT2=CONT2+1
      GO TO 115
114  Y1(CONT1+1)=ARVORE(L)
      CONT1=CONT1+1
115  L=ARVORE(L+L)
      IF(ARVORE(L).EQ.0) GO TO 118
      GO TO 115
118  J=1
      I=1
      T=N-1
      DO 120 IPSELOS=2,7
          INV=N-(IPSELOS-1)
          IF(INV.EQ.Y1(I)) GO TO 121
          IF(INV.EQ.Y2(J)) GO TO 122
          Y3(CONT3+1)=INV
          CONT3=CONT3+1
          GO TO 120
121  I=I+1
      GO TO 120
122  J=J+1
120  CONTINUE
C
C ***** GERACAO DE W *****
C
      IF(CONT3.EQ.0) GO TO 175
      DO 123 I=1,CONT3
          DO 124 J=1,CONT1
              IF (REDE(Y3(I),Y1(J)).EQ.0) GO TO 124
              W(CONTW+1)=Y3(I)
              CONTW=CONTW+1
              GO TO 123
124  CONTINUE

```

```

125 CONTINJE
   IF(CONT4.EQ.0) GO TO 175
   Y=W(CONT4)
C
C *** GERACAO DE Y4 E DA SUBMATRIZ CUNE PARA TESTE DE CONEXIDADE
C
   IF(CONT1.NE.1) GO TO 170
   A=1
   GO TO 171
170 A=CONT1-1
171 DO 126 I=1,N
      IF(Y1(A).EQ.1) GO TO 126
      IF(I.EQ.Y) GO TO 125
      CNT4=CNT4+1
      Y4(CNT4)=I
      GO TO 126
126   A=A-1
      IF(A.LT.0) GO TO 127
125 CONTINJE
   GO TO 125
127 I=I+1
   DO 129 J=1,N
      IF(J.EQ.Y) GO TO 129
      CNT4=CNT4+1
      Y4(CNT4)=J
129 CONTINJE
C
C
C
C
C
C
C
C *** TESTE DE CONEXIDADEF ***
C
128 IF(CNT4.EQ.1) GO TO 180
   CALL CONEXA
   IF(CHAVE.EQ.0) GO TO 180
C
C ** CRIAR OS VERTICES K E K+1 E OS RAMOS (1,K)Y E (1,K=1)YF
C
180 K3=3*K
   ARVORE(K3+1)=Y
   ARVORE(K3+2)=1
   ARVORE(K3+3)=J*FESGUI+1
   K=K+1
183 K3=3*K
   ARVORE(K3+1)=Y
   ARVORE(K3+2)=2
   ARVORE(K3+3)=J*FESGUI+1
   K=K+1
   GO TO 180
C
C ** GERACAO DE Y5 E TESTE ( Y2 CONTIDO EM Y5)
C
160 DO 183 I=1,CNT4

```

```

        IF(SUMAC(1,CONT4).EQ.0) GO TO 133
        CNT5=CNT5+1
        Y5(CNT5)=Y4(1)
133 CONTINUE
        IF(CNT5.NE.0) GO TO 137
        CNT5=CNT5+1
        Y5(CNT5)=R
397 IF(CNT5.GI.CNT5) GO TO 133
        IF(CNT5.EQ.1) GO TO 181
        IF(CNT2.EQ.1) GO TO 181
        T=CONT2-1
        T1=CONT5-1
        T2=1
        DO 134 I=1,T
            DO 135 J=1,T1
                INV=T1-(J-1)
                IF(Y2(1).EQ.Y5(INV)) GO TO 133
                IF(Y2(1).GT.Y5(INV)) GO TO 133
135 CONTINUE
        GO TO 133
136 IF(J.NI.T1) GO TO 191
        IF(I.EQ.T) GO TO 181
        GO TO 133
191 T2=J+1
134 CONTINUE
C
C ** EXPANSAO ATRAVES DA GERACAO DE Y6 **
C
181 K3=3*K
        ARVORE(K3+1)=Y
        ARVORE(K3+2)=1
        ARVORE(K3+3)=3*PESSOUI+1
        EXAM1(K)=1
        K=K+1
        IF(CNT5.NE.1) GO TO 182
        RE=CONT4-1
        DO 139 I=1,RE
            Y6(I)=Y4(1)
189 CONTINUE
        CNT6=RE
        GO TO 190
182 T4=CONT4-1
        T5=CNT5-1
        T6=1
        DO 137 I=1,T5
            DO 138 J=T6,T4
                IF(Y4(J).EQ.Y5(I)) GO TO 139
                CNT6=CNT6+1
                Y6(CNT6)=Y4(J)
138 CONTINUE
139 T6=J+1
137 CONTINUE
190 DO 140 I=1,CNT6
        K3=3*K
        ARVORE(K3+1)=Y6(I)

```

```

    ARVORE(KS+L)=1
    ARVORE(KS+D)=24*(K-1)+1
    EXAMI(K)=1
    K=K+1

```

```

140 CONTINUE
    EXAMI(K-1)=0
    K3=3*K
    ARVORE(K3+1)=Y
    ARVORE(K3+2)=Z
    ARVORE(K3+D)=D*FLS001+1
    K=K+1
    GO TO 130

```

C
C ** DETERMINACAO E IMPRESSAO DE NOVO CORTE MINIMAL E ATUALIZACAO DE CB
C

```

175 WRITE(3,320)
520 FORMAT(////////,10X,'** OS SEGUINTEs ARCOs FORMAM UM CORTE MINIMAL **',//)
    CONT=1.
    DO 141 I=1,CONT1
        DO 142 J=1,CONT2
            IF(ABS(Y1(I),Y2(J)).EQ.0) GO TO 142
            WRITE(3,321)Y1(I),Y2(J)
921     FORMAT(2X,12,5X,12)
            CONT=CONT+ABS(Y1(I),Y2(J))
142     CONTINUE
141 CONTINUE
    CB=CB*(1.-CONT)
    GO TO 130

```

```

C
C
C
C
502 WRITE(3,400)CA
400 FORMAT(////////,10X,'** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DA REC
    *E PRIMAL **',//30X,'*****',F10.8,'*****')
    WRITE(3,401)CB
401 FORMAT(////////,10X,'** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DA REC
    *E DUAL **',//,30X,'*****',F10.8,'*****')
    C=CB+CA-1.
    WRITE(3,402)C
402 FORMAT(////////,10X,'** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DO SIS
    *TEMA **',//30X,'***** *****',//30X,'*****',F10.8,'*****'
    *,//,30X,'***** *****')
    STOP
    END

```

C*****

C

ROUTINE CONEXA

C

C*****

C

C

IMPLICIT INTEGER (A-Z)

C

```

COMMON REDE(30,30),SCMA(30,30),Y4(30),CNT4,CHAVE
DIMENSION MULTI(30,30),MULTIP(30,30)
DO 10 I=1,CNT4
  DO 11 J=1,CNT4
    MULTI(I,J)=REDE(Y4(I),Y4(J))
    SCMA(I,J)=REDE(Y4(I),Y4(J))
11  CONTINUE
10  CONTINUE
CHAVE=0
RE=CNT4-1
DO 12 I=1,RE
  DO 13 J=1,CNT4
    DO 14 K=1,CNT4
      ISOMA=0
      DO 15 K=1,CNT4
        ISOMA=ISOMA+MULTI(I,K)*REDE(Y4(K),Y4(J))
15  CONTINUE
      IF(ISOMA.EQ.0) GO TO 40
      MULTIP(I,J)=1
      GO TO 14
40  MULTIP(I,J)=0
14  CONTINUE
13  CONTINUE
  ISOMA=0
  DO 16 I=1,CNT4
    DO 17 J=1,CNT4
      IF(MULTIP(I,J).EQ.0) GO TO 31
      SCMA(I,J)=1
31  ISOMA=ISOMA+SCMA(I,J)
      MULTI(I,J)=MULTIP(I,J)
17  CONTINUE
16  CONTINUE
  IF(ISOMA.LT.CNT4*CNT4) GO TO 12
  CHAVE=1
  GO TO 30
12  CONTINUE
30  RETURN
  END

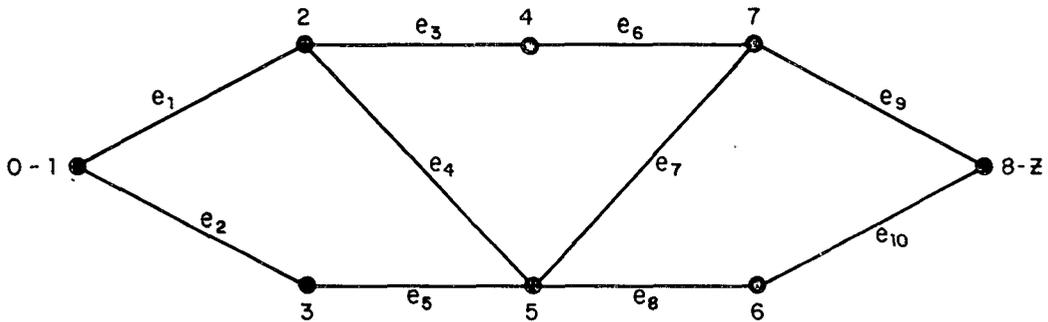
```

A N E X O 2.

ALGUNS EXEMPLOS EXECUTADOS

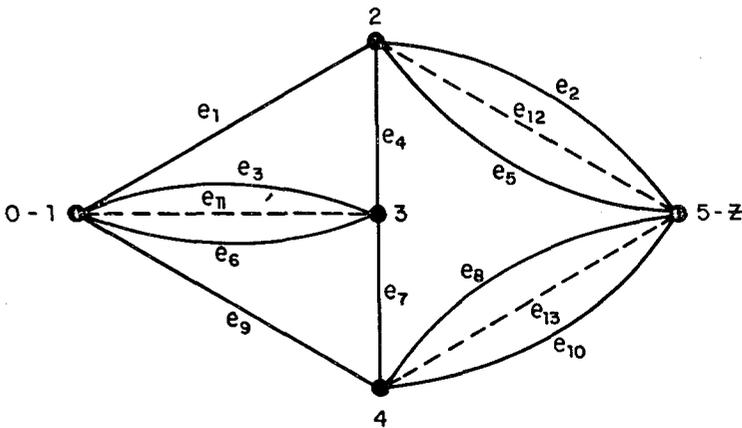
Exemplo 1

- Rede Primal



- Rede Dual

As arestas que aparecem tracejadas foram criadas para que se obtivesse um grafo 1-aplicado condição necessária à aplicação do algoritmo, o componente associado a esta aresta substitui os associados as arestas de origem, com probabilidade de falha igual ao produtório das probabilidades de origem.



- Probabilidades de Falhas

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
q_i^a	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	-	-	-
q_i^b	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,01	0,01	0,01

- Os cortes minimais da rede primal são:

$\{e_1, e_2\}$; $\{e_2, e_3, e_4\}$; $\{e_2, e_4, e_6\}$; $\{e_2, e_4, e_7, e_9\}$; $\{e_1, e_5\}$;
 $\{e_1, e_4, e_7, e_8\}$; $\{e_1, e_4, e_7, e_{10}\}$; $\{e_3, e_4, e_5\}$; $\{e_5, e_4, e_6\}$;
 $\{e_4, e_5, e_7, e_9\}$; $\{e_3, e_7, e_8\}$; $\{e_3, e_7, e_{10}\}$; $\{e_6, e_7, e_8\}$;
 $\{e_6, e_7, e_{10}\}$; $\{e_8, e_5\}$ e $\{e_9, e_{10}\}$.

- A confiabilidade relativa a falha A é:

$$C_A = \left[1 - (0,1)^2\right]^4 \left[1 - (0,1)^3\right]^8 \left[1 - (0,1)^4\right]^4$$

$$C_A = 0,952557$$

- Os cortes minimais da rede dual são:

$\{e_1, e_{11}, e_9\}$; $\{e_1, e_4, e_7, e_9\}$; $\{e_{12}, e_{13}\}$; $\{e_1, e_4, e_{13}\}$;
 $\{e_9, e_7, e_{12}\}$; $\{e_9, e_{11}, e_4, e_{12}\}$ e $\{e_1, e_7, e_{11}, e_{13}\}$.

- A confiabilidade relativa a falha B é:

$$C_B = \left[1 - (0,1)^2 \cdot 0,01\right]^3 \left[1 - (0,1)^4\right]^1 \left[1 - (0,01)^2\right]^1 \left[1 - (0,1)^2(0,01)^2\right]^2$$

$$C_B = 0,999498$$

- A confiabilidade do sistema é:

$$C = C_A + C_B - 1 = 0,952055$$

** MATRIZ DE ADJACENCIAS DA REDE PRIMAL **

0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	0

** MATRIZ DE PROBABILIDADES DE FALHA DA REDE PRIMAL **

.0	.100	.100	.0	.0	.0	.0	.0
.100	.0	.0	.0	.100	.0	.0	.0
.100	.0	.0	.100	.100	.0	.0	.0
.0	.0	.100	.0	.0	.0	.100	.0
.0	.100	.100	.0	.0	.100	.100	.0
.0	.0	.0	.0	.100	.0	.0	.100
.0	.0	.0	.100	.100	.0	.0	.100
.0	.0	.0	.0	.0	.100	.100	.0

** CORTES DA REDE PRIMAL **

** OS SEGUINTEs ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

1	3
1	2

** OS SEGUINTE S ARCCS FORMAM UM CURTE MINIMAL**

2	3
1	2

** OS SEGUINTE S ARCCS FORMAM UM CURTE MINIMAL**

3	5
3	4
2	6

** OS SEGUINTE S ARCCS FORMAM UM CURTE MINIMAL**

3	5
3	4
1	2

** OS SEGUINTE S ARCCS FORMAM UM CURTE MINIMAL**

7	5
7	8
3	3
2	5

** OS SEGUINTE S ARCCS FORMAM UM CURTE MINIMAL**

4	7
---	---

3	6
2	5

** OS SEGUINTE S ARCCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

6	5
5	7
5	3
1	4

** OS SEGUINTE S ARCCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

5	7
5	6
5	3
1	2

** OS SEGUINTE S ARCCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

7	5
7	6
3	5
1	2

** OS SEGUINTE S ARCCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

4	7
3	5
1	2

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

7 8
6 8

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

6 8
3 7
4 7

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

7 8
5 6

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

5 7
5 6
4 7

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

6 8
5 7

3 4

** OS SEGUINTEs ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

5	7
5	6
3	4

** MATRIZ DE ADJACENCIAS DA REDE DUAL **

0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0

** MATRIZ DE PROBABILIDADES DE FALHA DA REDE DUAL **

.0	.100	.010	.100	.0
.100	.0	.100	.0	.010
.010	.100	.0	.100	.0
.100	.0	.100	.0	.010
.0	.010	.0	.010	.0

** CORTES DA REDE DUAL **

** OS SEGUINTEs ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

4	5
2	6

** OS SEGUINTE S ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

3	4
2	6
1	4

** OS SEGUINTE S ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

2	3
2	6
1	4
1	5

** OS SEGUINTE S ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

4	5
3	2
1	2

** OS SEGUINTE S ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

3	4
3	2
1	4
1	2

** OS SEQUINTEZ, ARCOS PERMAN UM CORTE MINIMAL **

4	3
4	3
1	3
1	2

** OS SEQUINTEZ AR COS PERMAN UM CORTE MINIMAL **

1	4
1	3
1	2

** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DA REDE PRIMAL **

*****0.9525867*****

** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DA REDE DUAL **

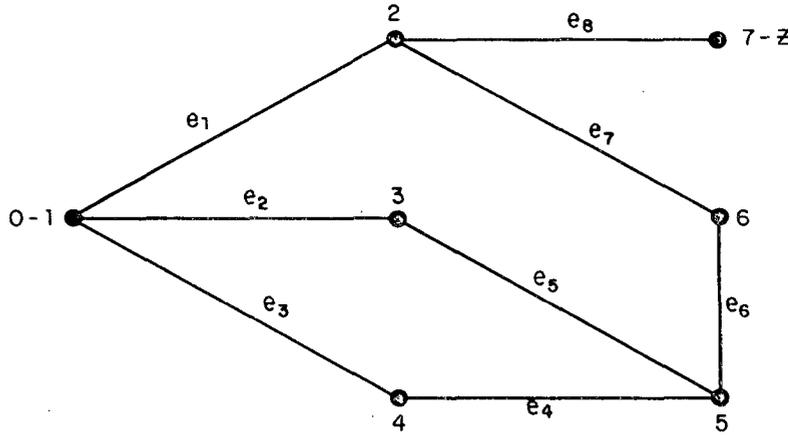
*****0.99949831*****

** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DO SISTEMA **

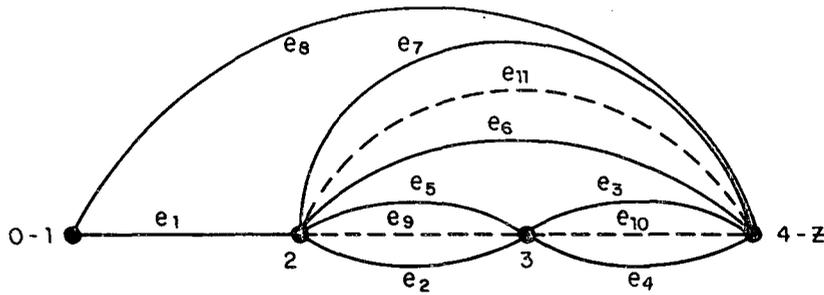
*****0.95205498*****

Exemplo 2

- Rede Primal



- Rede Dual



- As probabilidades de falha são:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
q_i^a	0,1	0,05	0,1	0,2	0,1	0,01	0,2	0,01	-	-	-
q_i^b	0,1	0,01	0,2	0,01	0,1	0,01	0,2	0,1	0,001	0,002	0,002

- Os cortes minimais da rede primal são:

$\{e_8\}$; $\{e_1, e_7\}$; $\{e_1, e_6\}$; $\{e_1, e_5, e_4\}$; $\{e_1, e_5, e_3\}$; $\{e_1, e_2, e_4\}$
e $\{e_1, e_2, e_3\}$.

- A confiabilidade relativa a falha A é:

$$C_A = [1-0,01][1-0,02][1-0,001][1-0,1^2 \cdot 0,2][1-0,1^3][1-0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,05] \cdot [1-0,1^2 \cdot 0,05] = 0,964875$$

- Os cortes minimais da rede dual são:

$$\{e_1, e_8\}; \{e_8, e_{11}, e_9\} \text{ e } \{e_8, e_{11}, e_{10}\}.$$

- A confiabilidade relativa a falha B é:

$$C_B = [1-0,1]^2 [1-0,1 \cdot 0,002 \cdot 0,001] [1-0,1 \cdot 0,002^2]$$

$$C_B = 0,989999$$

- A confiabilidade do sistema é:

$$C = C_A + C_B - 1 = 0,954874$$

** MATRIZ DE ADJACENCIAS DA REDE PRIMAL **

0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	-1	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0

** MATRIZ DE PROBABILIDADES DE FALHA DA REDE PRIMAL **

.0	.100	.000	.100	.0	.0	.0
.100	.0	.0	.0	.0	.200	.010
.000	.0	.0	.0	.100	.0	.0
.100	.0	.0	.0	.200	.0	.0
.0	.0	.100	.200	.0	.010	.0
.0	.200	.0	.0	.010	.0	.0
.0	.010	.0	.0	.0	.0	.0

** CORTES DA REDE PRIMAL **

** OS SEGUINTEs ARCES FORMAM UM CORTE MINIMAL**

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

1	4
1	3
1	2

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

4	5
3	5
1	2

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

3	3
1	4
1	2

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

4	5
1	3
1	2

** OS SEGUINTE ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

6	2
1	2

** OS SEGUINTEs ARCCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

	0	0
	1	2

** MATRIZ DE ADJACENCIAS DA REDE DUAL **

0	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	0

** MATRIZ DE PROBABILIDADES DE FALHA DA REDE DUAL **

.0	.100	.0	.100
.100	.0	.001	.002
.0	.001	.0	.002
.100	.002	.002	.0

** CORTES DA REDE DUAL **

** OS SEGUINTEs ARCCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

1	2
1	4

** OS SEQUINTEZ AF-COS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

3	4
2	4
1	4

** OS SEQUINTEZ AF-COS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

2	3
2	4
1	4

** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DA REDE PRIMAL **

*****0.96487493*****

** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DA REDE DUAL **

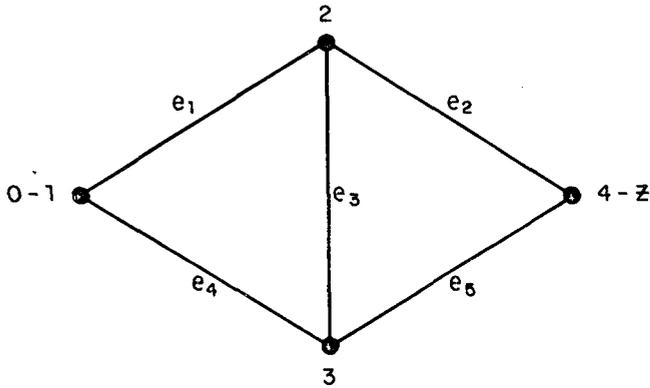
*****0.9399947*****

** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DO SISTEMA **

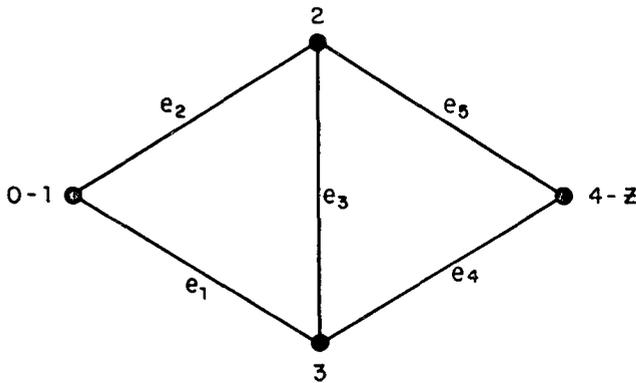
*****0.95487404*****

Exemplo 3

- Rede Primal



- Rede Dual



- Probabilidade de Falha

i	1	2	3	4	5
q_i^a	0,001	0,002	0,01	0,01	0,001
q_i^b	0,02	0,002	0,01	0,015	0,005

- Os cortes minimais da rede primal são:

$\{e_1, e_4\}$; $\{e_1, e_3, e_5\}$; $\{e_2, e_3, e_4\}$; $\{e_2, e_5\}$.

- A confiabilidade relativa a falha A é:

$$C_A = [1 - 0,01 \cdot 0,001] [1 - 0,001^2 \cdot 0,01] \cdot [1 - 0,002 \cdot 0,01 \cdot 0,001] \cdot [1 - 0,002 \cdot 0,001] = 0,9999877$$

- Os cortes minimais da rede dual são:

$\{e_1, e_2\}$; $\{e_5, e_4\}$; $\{e_2, e_3, e_4\}$; $\{e_1, e_3, e_5\}$.

$$C_B = (1 - 0,02 \cdot 0,002) (1 - 0,002 \cdot 0,005) (1 - 0,002 \cdot 0,01 \cdot 0,015) \cdot (1 - 0,02 \cdot 0,01 \cdot 0,005)$$

$$C_B = 0,999884$$

A confiabilidade do sistema é:

$$C = C_A + C_B - 1 = 0,999871$$

** MATRIZ DE ADJACENCIAS DA REDE PRIMAL **

0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
0	1	1	0

** MATRIZ DE PROBABILIDADES DE FALHA DA REDE PRIMAL **

.0	.001	.010	.0
.001	.0	.010	.002
.010	.010	.0	.001
.0	.002	.001	.0

** CORTES DA REDE PRIMAL **

** OS SEGUINTE ARCCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

3	4
2	4

** OS SEGUINTE ARCCS FORMAM UM CORTE MINIMAL**

2	3
2	4

** CURTES DA REDE DUAL **

** OS SEGUINTE S ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

3	4
2	4

** OS SEGUINTE S ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

2	3
2	4
1	3

** OS SEGUINTE S ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

3	2
3	4
1	2

** OS SEGUINTE S ARCS FORMAM UM CORTE MINIMAL **

1	3
1	2

** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DA REDE PRIMAL **

*****0.9998790*****

** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DA REDE DUAL **

*****0.9998407*****

** LIMITE INFERIOR PARA A CONFIABILIDADE DO SISTEMA **

*****0.9993712*****
