

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DA ALETA NA CONVECÇÃO FORÇADA
EM UM DUPLO TUBO ALETADO INTERNAMENTE
- SOLUÇÃO PELO MÉTODO DE GOLUB -

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.

ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA

FLORIANÓPOLIS, 27 DE ABRIL DE 1978.

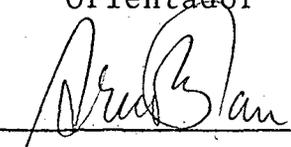
INFLUÊNCIA DA ESPESSURA DA ALETA NA CONVECÇÃO FORÇADA
EM UM DUPLO TUBO ALETADO INTERNAMENTE
- SOLUÇÃO PELO MÉTODO DE GOLUB -

ANTÔNIO FÁBIO CARVALHO DA SILVA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM ENGENHARIA"

ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA; ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:
TERMOTÉCNICA, E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-
GRADUAÇÃO.

Prof. Clovis Raimundo Maliska, M.Sc.
Orientador

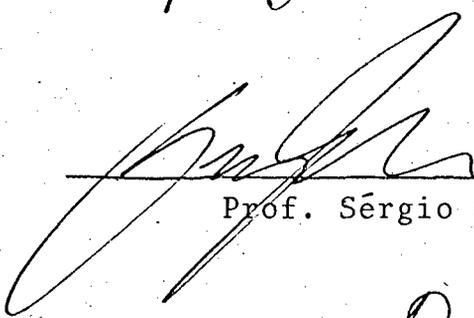


Prof. Arno Blass, Ph.D.
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Hyppólito do Valle Pereira Filho, Ph.D.



Prof. Sérgio Colle, D.Sc.



Prof. Arno Bollmann, M.Sc.

A meus pais

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero deixar registrados os meus sinceros agradecimentos ao Professor Clovis Raimundo Maliska, meu orientador de curso e de tese, não só por sua orientação dedicada e pelo seu incentivo, mas também pelos conhecimentos que me transferiu durante a elaboração deste trabalho e nos cursos em que tive o prazer de ser seu aluno.

Agradeço também aos professores Arno Bollmann, Hyppólito do Valle Pereira Filho e Sérgio Colle pelo interesse e pela atenção dispensada.

Finalmente, agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro durante o período em que estive cursando as disciplinas da Pós-graduação, e a Departamento de Engenharia Mecânica da UFSC por ter colocado todos os seus recursos e o seu corpo docente à disposição.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DE GOLUB 5

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA 8

CAPÍTULO 4

O PROBLEMA DA VELOCIDADE 13

CAPÍTULO 5

O PROBLEMA DA TEMPERATURA 19

CAPÍTULO 6

APLICAÇÃO DO MÉTODO, RESULTADOS E COMPARAÇÕES 29

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES 58

BIBLIOGRAFIA 60

APÊNDICE 1 - LISTAGEM DO PROGRAMA DE COMPUTADOR 63

APÊNDICE 2 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DE SIMPSON BIDIMENSIONAL 91

APÊNDICE 3 - O MÉTODO DE SPARROW E HAJI-SHEIKH 96

APÊNDICE 4 - PROPRIEDADES DA REFLEXÃO DE HOUSEHOLDER ... 102

SIMBOLOGIA

a_0, a_j, b_j	- coeficientes da série da velocidade
A	- uma matriz $m \times n$
A^*, A	- área de escoamento e a correspondente adimensional
A_{tc}^*	- área de troca de calor
c_0, c_j, d_j	- coeficientes da série da temperatura
c_p	- calor específico
C_1	- constante definida por (4.14)
Dh^*, Dh	- diâmetro hidráulico e o correspondente adimensional
E_{STD}	- potência de bombeamento, como é definido em (6.7)
f	- coeficiente de atrito
fRe	- produto do coeficiente de atrito pelo número de Reynolds
F	- condição de contorno do problema térmico referente a fluxo prescrito na periferia com $W_{TE} = 0$ e $W_{AL} = 0,5$
h, h_{STD}	- coeficiente de troca de calor por convecção como é definido em (5.49)
j	- módulo de Colburn
j/f	- fator de qualidade da área de escoamento, como é definido em (6.1)
k	- condutibilidade térmica
$K(\infty)$	- acréscimo de perda de pressão na região de entrada
ℓ^*, ℓ	- comprimento da aleta e a correspondente adimensional
ℓ', m'	- como definidos em (5.27) e (5.28)
L_{hy}, L_{hy}^+	- comprimento da região de entrada e o correspondente adimensional
m	- número de aletas
m	- número de pontos tomados sobre a fronteira do duto
n	- número de incógnitas nos problemas da velocidade e temperatura
\underline{n}	- vetor normal à superfície do duto

- Nu_{Dh} , Nu - número de Nusselt, como é definido em (5.50)
 Nu_F - Nu_{Dh} para a condição F
 Nu_T - Nu_{Dh} para a condição T
 N_{tu} - número de trocas térmicas, como é definido em (6.2)
 p^* - pressão
 P - matriz de reflexão de Householder, $m \times n$
 P^* , P - perímetro e o correspondente adimensional
 Pr - número de Prandtl
 q^* - distribuição de fluxo na fronteira
 \bar{q} - fluxo de calor periférico médio adimensional, como é definido em (5.55)
 \bar{q}^* - fluxo de calor periférico médio, por unidade de tempo e área
 q_{AL} , q_{TI} , q_{TE} - relação entre o fluxo de calor na aleta, no tubo interno e no tubo externo, respectivamente, com o fluxo médio
 q_{AL}^* , q_{TI}^* , q_{TE}^* - fluxo de calor por unidade de tempo e área na aleta, no tubo interno e no tubo externo, respectivamente.
 q_i^* - fluxo de calor no ponto i da fronteira, por unidade de tempo e área
 q_p - relação entre q^* e \bar{q}^*
 r , θ , z - sistema de coordenadas cilíndricas adimensionais
 r^* , θ , z^* - sistema de coordenadas cilíndricas
 r_o - raio do tubo interno adimensional e relação de raios
 r_o^* - raio do tubo interno
 r_2^* - raio do tubo externo
 Re_{Dh} - número de Reynolds
 \underline{s} - vetor tangencial à superfície do duto
 T - condição de contorno do problema térmico referente à temperatura prescrita constante em toda a fronteira
 T^* , T - temperatura e a correspondente adimensional
 T_b^* , T_b - temperatura de mistura e a correspondente adimensional
 T_{sm}^* , T_{sm} - temperatura média na interface de troca de calor e a correspondente adimensional

- u - velocidade adimensional na direção z
- u_m^*, u_m - velocidade média e a correspondente adimensional
- u_{max}^*, u_{max} - velocidade máxima e a correspondente adimensional
- w^*, v^*, u^* - componentes da velocidade nas direções r^*, θ e z^*
- W^* - fluxo de massa
- W_{AL} - relação entre o fluxo de calor na aleta e no tubo interno
- W_{TE} - relação entre o fluxo de calor no tubo externo e no tubo interno
- \underline{x} - um n -vetor
- \underline{y} - um m -vetor
- β - ângulo, como mostrado na figura 2
- Δp^* - perda de pressão ao longo do trocador de calor
- Γ - fronteira da região de escoamento do fluido
- ϕ^* - função dissipação, como definida em (5.4)
- ϕ - parâmetro relacionado com a espessura da aleta como mostrado na figura 1
- θ_o - ângulo entre as aletas
- ρ - massa específica
- μ - viscosidade absoluta
- σ^* - parte de Γ onde existe fluxo de calor

RESUMO

O objetivo básico deste trabalho é o estudo dinâmico e térmico do escoamento laminar plenamente desenvolvido em um duplo tubo aletado com aletas de espessura finita.

Dois métodos foram empregados para obter soluções aproximadas da equação do movimento. O que se mostrou mais eficiente foi aplicado na resolução da equação da energia, para as condições de contorno de temperatura prescrita na fronteira, e de fluxo de calor prescrito na fronteira.

Diversas geometrias que se obtêm variando a relação de raios, o número e a espessura das aletas são comparadas com as geometrias obtidas com aleta de espessura desprezível e ainda com outras formas de dutos. Estas comparações são feitas em termos do coeficiente de atrito e do número de Nusselt e também em termos do fator de qualidade da área de escoamento e do fator de qualidade do volume, parâmetros importantes do ponto de vista de projeto de trocadores de calor.

Sempre que possível, os resultados encontrados no presente trabalho são comparados com os obtidos através de soluções analíticas disponíveis na literatura.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

É cada vez maior o número de situações na engenharia em que se faz necessária a utilização de trocadores de calor compactos, o que tem estimulado a pesquisa em técnicas de intensificar a troca de calor. As técnicas aplicáveis a escoamento interno em dutos são, aumentar a superfície de troca de calor, promover vórtices no escoamento, vibração da superfície, vibração do fluido, campos eletrostáticos, usar aditivos fluidos, etc. Dentre os métodos citados, alguns são eficientes apenas em casos específicos enquanto outros implicam em um consumo adicional de potência. Uma análise bastante extensa a esse respeito pode ser vista em [1].

A técnica de aumentar a superfície de troca de calor tem sido frequentemente adotada. Isto pode ser feito aumentando-se a rugosidade dos dutos ou, o que tem apresentado melhores resultados, estendendo-se superfícies das paredes do duto para o interior da região do escoamento.

Particularmente, tem merecido especial atenção os trocadores de calor que se obtêm aletando-se internamente dutos circulares.

Já em 1945, de Lorenzo e Anderson determinaram experimentalmente as características dinâmicas para o escoamento em duplos tubos com relações de raios iguais a 0,65, aletas planas e axiais com ângulo de 8 a 13° entre si.

Eckert, et Al [2], resolveram o problema dinâmico e térmico para dutos com a forma de setor circular, para as condições de temperatura constante na periferia e de fluxo de calor constante na periferia.

Uma solução analítica para o escoamento laminar plenamente desenvolvido em setores de coroa foi obtida por Sparrow, et Al [3], em 1963.

Hu e Chang [4] investigaram, também analiticamente, a transferência de calor em tubos internamente aletados, tendo obtido valores para o número de Nusselt até 20 vezes superior ao

do tubo não aletado. Nesse trabalho também foi levantada a influência da geração de calor no fluido em escoamento sobre o número de Nusselt.

Um interessante trabalho experimental foi realizado por Bergles, et Al [5], em 1971. São apresentadas curvas de fatores de atrito e número de Nusselt para escoamento turbulento em dutos com vários tipos de aletas e rugosidades. Foi determinado que aletas espiraladas curtas produzem o maior aumento na transferência de calor, superior a 170%, em relação ao escoamento no tubo não aletado com igual potência de bombeamento.

Masliyah e Nandakumar [6] aplicaram o método dos elementos finitos para resolver o problema do tubo circular com aletas de seção triangular.

Maliska [7] resolveu o problema do duplo tubo aletado, com alturas de aletas iguais à diferença de raios dos tubos, para a condição de fluxo prescrito na periferia. A geração de calor no fluido foi também investigada.

Em seu trabalho, Colle [8], apresenta um extenso estudo do escoamento laminar em duplos tubos com aletas de altura variável, planas e axiais e com espessura admitida desprezível. Resultados foram obtidos para várias condições de contorno do problema térmico e um número bastante grande de combinações de relações de raios, número e altura de aletas.

Neste trabalho é estudado o escoamento em um duplo tubo aletado, conforme mostra a figura 1.

A colocação de aletas tem por objetivo aumentar a superfície de troca de calor. Assim, admitindo-se que a mesma temperatura existente no tubo interno do duplo tubo sem aletas seja a existente nas aletas do duplo tubo aletado, uma maior quantidade de calor será trocada entre o fluido frio e o quente. Ou, para a mesma quantidade de calor trocada entre os dois fluidos, pode-se ter um trocador de calor mais compacto.

As diversas geometrias que se obtém variando-se a relação de raios, número e espessura de aletas são comparadas com as obtidas considerando-se as aletas com espessura desprezível, em termos do coeficiente de atrito e do número de Nusselt, e ainda em termos do fator de qualidade da área e do fator de qualidade de volume, como definidos em [9]. Estas comparações são

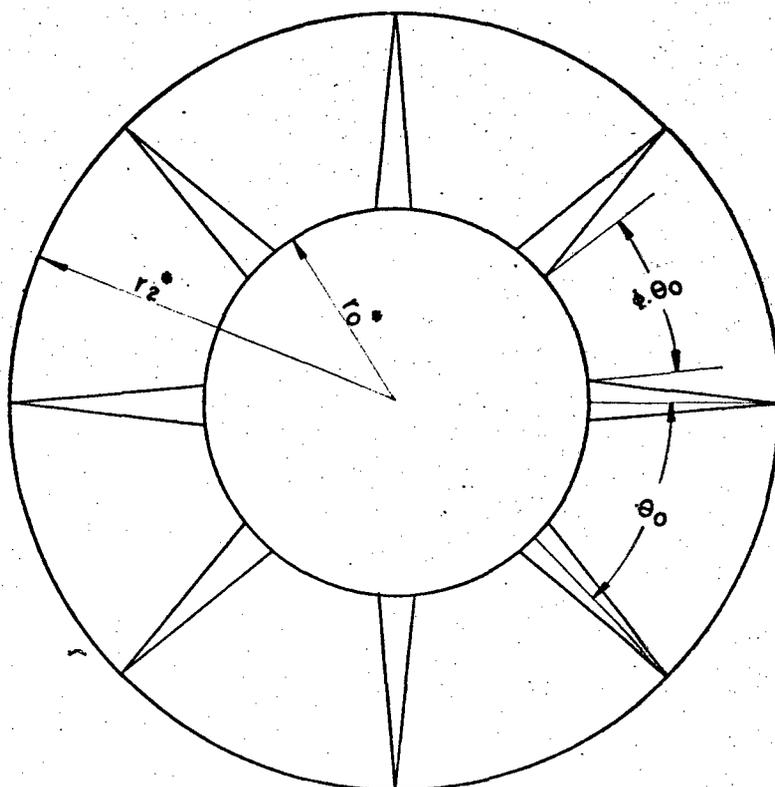


Fig. 1 - Geometria do duplo tubo aletado.

feitas com o intuito de verificar se as características dinâmicas e térmicas do duplo tubo obtidas considerando-se a espessura da aleta desprezível, se afastam de maneira significativa quando se introduz a espessura da aleta.

Para que os resultados possam ser facilmente utilizados, serão fornecidos, em forma de tabelas e gráficos, os valores do produto do coeficiente de atrito pelo número de Reynolds e do número de Nusselt, para diversas geometrias.

Dentre as várias técnicas normalmente usadas para resolver este tipo de problema, optou-se pelo mesmo procedimento seguido por Shah [9], que aplicou o método de Golub (ver Cap.II) para obter a solução de um sistema de m equações a n incógnitas (onde $m > n$), resultante da aplicação da condição de contorno do problema da velocidade ou da temperatura a pontos da fronteira do duto. Resolvido o sistema, tem-se os coeficientes de uma série que é a solução do problema da velocidade ou da temperatura.

Esta técnica foi escolhida pelo fato de ser aplicável a geometrias arbitrárias, de modo que ao final do trabalho, tem-se um programa de fácil utilização, que permite resolver

o problema dinâmico e térmico de uma grande variedade de dutos; e também a fim de verificar se o método apresenta bons resultados quando a geometria em estudo se torna mais complexa e os métodos analíticos são de difícil aplicação.

Resta ainda comentar que se tinha interesse em comparar o método proposto por Shah com outro método de solução, proposto por Sparrow e Haji-Sheikh [10]. Para isso, no início deste trabalho, os dois métodos foram paralelamente aplicados para resolver o problema do duplo tubo com aletas de espessura desprezível. No entanto, devido às dificuldades apresentadas pelo método de Sparrow e Haji-Sheikh quando ainda na solução do problema da velocidade, o mesmo foi abandonado. Uma breve discussão sobre esse método pode ser vista no Apêndice 3.

CAPÍTULO 2

O MÉTODO DE GOLUB

Seja A uma matriz $m \times n$ e \underline{y} um vetor $(y_1, \dots, y_i, \dots, y_m)^T$. Seja $\underline{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)^T$ o vetor solução do sistema de equações lineares

$$A \underline{x} = \underline{y} \quad (2.1)$$

Se $m > n$, a solução exata do sistema de equações acima não é esperada. A solução desejada é então aquela que minimize o erro ϵ , como definido abaixo, entre os valores exatos y_i e os calculados $y_{i,c}$.

$$\epsilon = \sum_{i=1}^m (y_i - y_{i,c})^2 = \|A \underline{x} - \underline{y}\|^2 \quad (2.2)$$

Golub empregou as reflexões de Householder para obter esta solução aproximada do sistema de equações (2.1). A definição e algumas propriedades das reflexões de Householder estão mostradas no Apêndice 4.

O método consiste basicamente no seguinte: pela pré-multiplicação sucessiva do sistema de equações (2.1) pelas reflexões de Householder P_j , $j = 1, 2, \dots, n$, a matriz A é transformada numa matriz triangular superior U .

O sistema de equações (2.1) fica então

$$U \underline{x} = \underline{w} \quad (2.3)$$

onde

$$U = Q A \quad (2.4)$$

$$\underline{w} = Q \underline{y} \quad (2.5)$$

$$e \quad Q = P_n P_{n-1} \dots P_j \dots P_2 P_1 \quad (2.6)$$

Queremos minimizar

$$\epsilon = \|A \underline{x} - \underline{y}\|^2 \quad (2.7)$$

Como cada reflexão de Householder é uma matriz isométrica, Q também é isométrica e portanto,

$$\|A \underline{x} - \underline{y}\|^2 = \|Q(A \underline{x} - \underline{y})\|^2 \quad (2.8)$$

$$\|A \underline{x} - \underline{y}\|^2 = \|Q A \underline{x} - Q \underline{y}\|^2 \quad (2.9)$$

e de (2.4), (2.5) e (2.7)

$$\epsilon = \|A \underline{x} - \underline{y}\|^2 = \|U \underline{x} - \underline{w}\|^2 \quad (2.10)$$

Logo, o problema de encontrar \underline{x} que minimize o erro ϵ como definido em (2.2) é equivalente a encontrar \underline{x} que minimize $\|U \underline{x} - \underline{w}\|^2$.

Definindo

U^a = primeiras n linhas de U

U^b = últimas (m-n) linhas de U

\underline{w}^a = primeiros n elementos de \underline{w}

\underline{w}^b = últimos (m-n) elementos de \underline{w}

temos que

$$\epsilon = \|U \underline{x} - \underline{w}\|^2 = \|U^a \underline{x} - \underline{w}^a\|^2 + \|U^b \underline{x} - \underline{w}^b\|^2 \quad (2.11)$$

Como U^b é uma matriz nula

$$\|U^b \underline{x} - \underline{w}^b\|^2 = w_{n+1}^2 + \dots + w_m^2 \quad (2.12)$$

para qualquer \underline{x} . Portanto, a única maneira de minimizar ϵ é minimizar $\|U^a \underline{x} - \underline{w}^a\|^2$.

Para isto, a solução \underline{x} deve ser tal que

$$U^a \underline{x} = \underline{w}^a \quad (2.13)$$

Este sistema de equações lineares pode ser facilmente resolvido por substituições sucessivas, como na etapa final do

método de eliminação de Gauss, uma vez que U^a é uma matriz $m \times n$ triangular superior.

Com (2.13), (2.12) e (2.11) vê-se que o erro mínimo será

$$\epsilon_{\min} = w_{n+1}^2 + \dots + w_m^2 \quad (2.14)$$

Este valor deve ser calculado pois possibilita uma análise quantitativa da precisão da solução encontrada para o sistema de equações (2.1).

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Shah [9] desenvolveu um método para analisar o escoamento laminar plenamente desenvolvido e a transferência de calor em dutos de seção arbitrária, como mostra a figura 2.

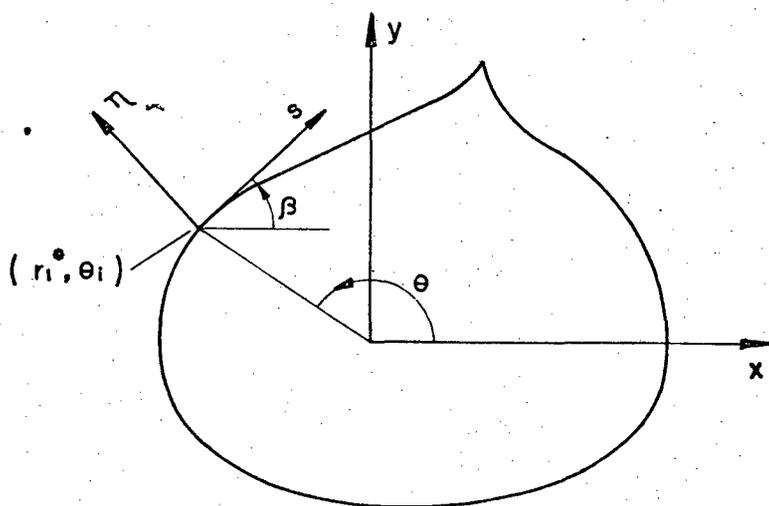


Fig. 2 - Fronteira Γ

As hipóteses feitas foram as normais neste tipo de problema:

- Perfis de velocidade e temperatura plenamente desenvolvidos;
- Superfícies de atrito do fluido perfeitamente polidas;
- Fluido Newtoniano;
- Propriedades físicas do fluido constantes;
- Fluxo de calor constante por unidade de tempo e comprimento do duto;
- A dissipação viscosa é desprezível para baixas velocidades.

O problema ao qual nos propomos é resolver a equação do movimento e da energia para o escoamento laminar no duplo tu

bo aletado da figura 1, aplicando o método desenvolvido por Shah.

A região em estudo está mostrada na figura 3.

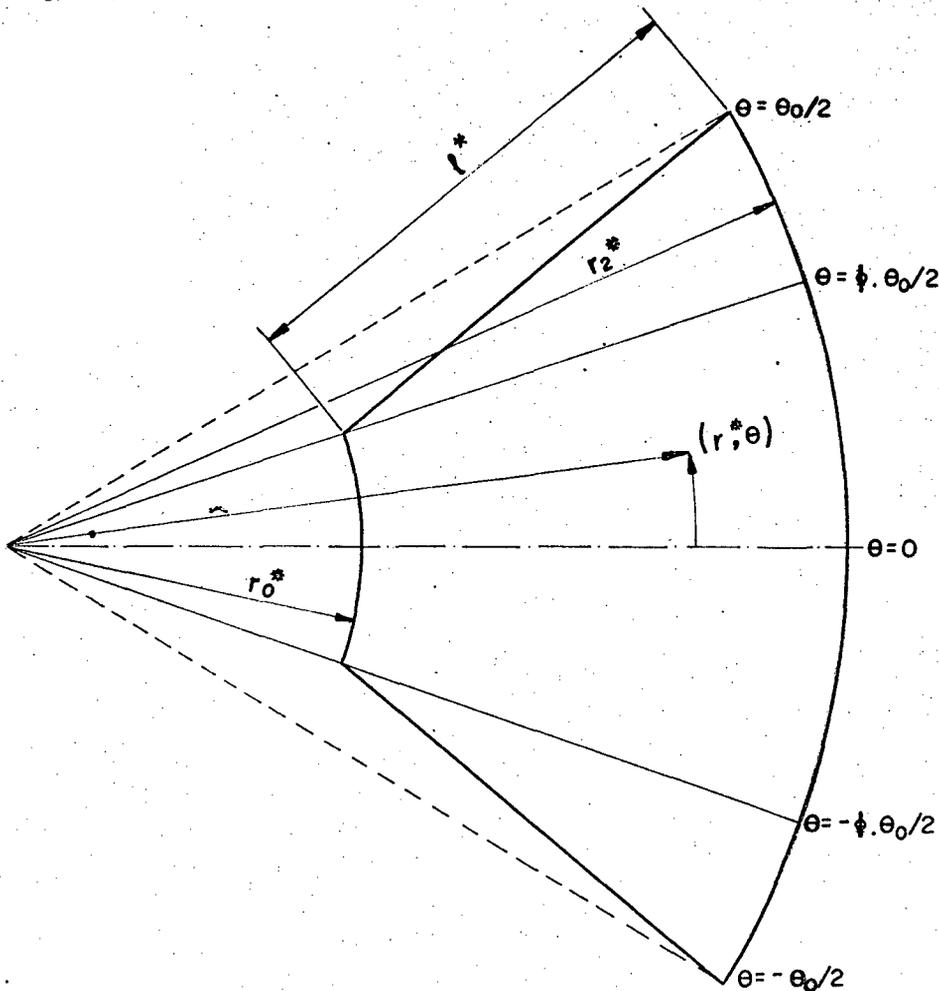


Fig. 3 - Geometria da região em estudo.

Para o problema em questão, faz-se a hipótese adicional que:

g) As aletas são planas e axiais, com igual espaçamento entre si.

Da hipótese a), temos que

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left(\frac{T^* - T_b^*}{T_{sm}^* - T_b^*} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Efetuada a derivação e rearranjando-se a equação acima, chega-se a

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{\partial T_b^*}{\partial z^*} + \left(\frac{T_{sm}^* - T_b^*}{T_{sm}^* - T_b^*} \right) \left(\frac{\partial T_{sm}^*}{\partial z^*} - \frac{\partial T_b^*}{\partial z^*} \right) \quad (3.2)$$

Da hipótese e)

$$T_{sm}^* - T_b^* = \text{constante} \quad (3.3)$$

logo

$$\frac{\partial T_{sm}^*}{\partial z^*} = \frac{\partial T_b^*}{\partial z^*} \quad (3.4)$$

Levando (3.4) em (3.2), conclui-se que

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{\partial T_b^*}{\partial z^*} = \frac{\partial T_{sm}^*}{\partial z^*} \quad (3.5)$$

A hipótese f) está baseada no fato mostrado em [4], que a influência da dissipação viscosa sobre o número de Nusselt é insignificante no escoamento laminar.

A hipótese b) dá origem às condições de contorno do problema da velocidade.

O problema da temperatura será resolvido para duas condições de contorno:

- a) temperatura prescrita constante em toda a fronteira (condição T)
- b) fluxos de calor, por unidade de tempo e área constante nas aletas, no tubo interno e no tubo externo (condição Φ)

Sejam q_{TI}^* , q_{AL}^* e q_{TE}^* os fluxos prescritos por unidade de tempo e área no tubo interno, na aleta e no tubo externo respectivamente, e \bar{q}^* o fluxo médio por unidade de tempo e área na fronteira.

Logo

$$\bar{q}^* P^* = 2\pi \phi r_0^* q_{TI}^*/m + 2\ell^* q_{AL}^* + 2\pi r_2^* q_{TE}^*/m \quad (3.6)$$

onde P^* é o perímetro da seção,
 r_0^* é o raio do tubo interno,
 r_2^* é o raio do tubo externo

m é o número de aletas, e ℓ^* e ϕ são como mostrados na figura 3.

Dividindo-se a equação (3.6) por $q^* r_2^*$ obtém-se a expressão adimensional

$$P = 2\pi \phi r_o q_{TI}/m + 2\ell q_{AL} + 2\pi q_{TE}/m \quad (3.7)$$

onde

P é o perímetro da seção adimensionalizado
 r_o é o raio do tubo interno adimensionalizado (que coincide com a relação de raios do duplo tubo), e
 q_{TI} , q_{AL} e q_{TE} são as razões entre o fluxo de calor do tubo interno, na aleta, no tubo externo e o fluxo médio, respectivamente.

Definindo-se as grandezas

$$W_{TE} = q_{TE}/q_{TI} \quad (3.8)$$

$$W_{AL} = q_{AL}/q_{TI} \quad (3.9)$$

e substituindo-se estas expressões na equação (3.7), obtém-se rearranjado que

$$q_{TI} = P / (2\pi \phi r_o/m + 2\ell W_{AL} + W_{TE} 2\pi/m) \quad (3.10)$$

Assim, assumindo-se valores para W_{TE} e W_{AL} , q_{TI} é obtido de (3.10) e q_{TE} e q_{AL} saem imediatamente de (3.8) e (3.9).

Nas soluções para a condição \textcircled{P} , sempre foi assumido que o tubo externo está isolado, isto é, $W_{TE} = 0$, restando portanto a determinar o valor de W_{AL} . Para isso, considere a figura 4 e admita a hipótese simplificativa de que o fluxo de calor é uniformemente distribuído em toda a fronteira do tubo interno.

Fazendo-se o balanço de calor na aleta, chega-se a

$$2 q_{AL}^* \ell^* = \frac{q_{TI}^* (1 - \phi) \pi D_o^*}{m} \quad (3.11)$$

Rearranjando, obtém-se que

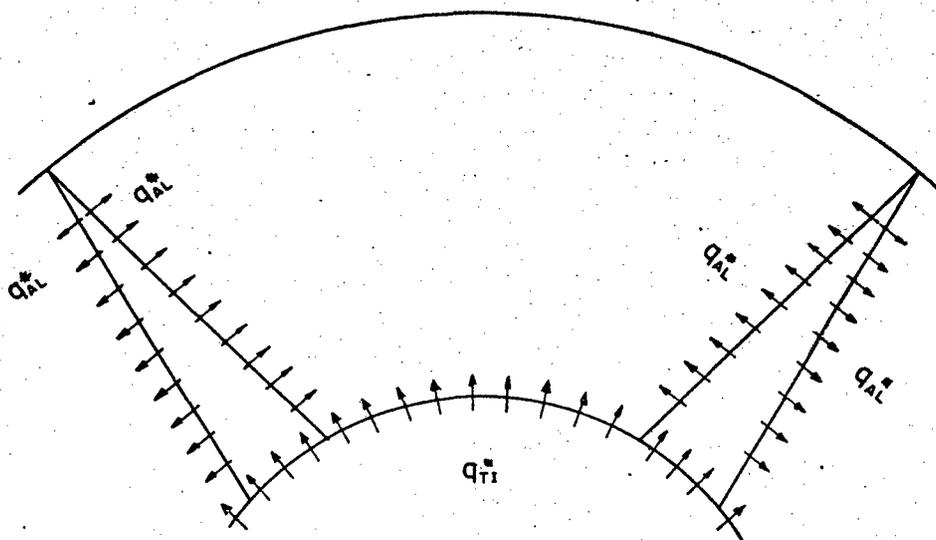


Figura 4

$$\frac{q_{AL}^*}{q_{TI}^*} = \frac{(1 - \phi) \pi D_o^*}{2 m \ell^*} \quad (3.12)$$

ou, de forma adimensional

$$W_{AL} = \frac{q_{AL}}{q_{TI}} = \frac{(1 - \phi) \pi r_o}{m \ell} \quad (3.13)$$

No entanto, para que os resultados obtidos no presente trabalho pudessem ser comparados com os de [7] foi sempre assumido, a menos que especificado o contrário, que o fluxo de calor por unidade de tempo e área na aleta é a metade do fluxo de calor por unidade de tempo e área no tubo interno, isto é, $W_{AL} = 0,5$.

As hipóteses de que o fluxo de calor seja constante no tubo interno, no tubo externo e na aleta ou ainda que a temperatura seja constante em toda a fronteira embora comumente adotadas, não são muito concordantes com o que ocorre na realidade. Para obter uma solução melhor teríamos que resolver simultaneamente a condução de calor na aleta e nos tubos, e a convecção nos fluidos, o que tornaria o problema mais complexo.

CAPÍTULO 4

O PROBLEMA DA VELOCIDADE

A equação do movimento, em coordenadas cilíndricas, (r^*, θ, z^*) , para fluido Newtoniano em regime permanente com ρ e μ constantes, tem a seguinte forma para as suas componentes nas direções r^* , θ e z^* , respectivamente:

$$\rho \left(w^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} - \frac{v^{*2}}{r^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} +$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* w^*) \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right] + \rho g_R$$

... (4.1)

$$\rho \left(w^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{w^* v^*}{r^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} +$$

$$+ \mu \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v^*) \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^{*2}} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right] + \rho g_\theta$$

... (4.2)

$$\rho \left(w^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} +$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right] + \rho g_z$$

(4.3)

onde w^* , v^* e u^* são as componentes da velocidade nas direções r^* , θ e z^* .

A equação da continuidade em coordenadas cilíndricas, simplificada para escoamento incompressível em regime permanente se reduz a

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* w^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0$$

(4.4)

Admitindo-se escoamento apenas na direção z^*

$$w^* = 0 \quad (4.5)$$

$$v^* = 0 \quad (4.6)$$

Logo, (4.4) fica

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0 \quad (4.7)$$

Ainda com (4.5) e (4.6), e fazendo a hipótese de que as forças de campo sejam desprezíveis, (4.1) e (4.2) resultam respectivamente

$$\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = 0 \quad (4.8)$$

$$e \quad \frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0 \quad (4.9)$$

Substituindo-se (4.5), (4.6) e (4.7) em (4.3) chega-se a

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dz^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} \quad (4.10)$$

A equação (4.10) é a equação diferencial do problema da velocidade, com a condição de contorno

$$u^* = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (4.11)$$

Definindo as grandezas adimensionais

$$r = r^*/r_2^* \quad (4.12)$$

$$e \quad u = -u^*/C_1 \quad (4.13)$$

onde r_2^* é uma dimensão característica do duto (no caso foi escolhido o raio do tubo externo, como mostra a figura 1), e

$$C_1 = \frac{r_2^{*2}}{\mu} \frac{dp^*}{dz^*} \quad (4.14)$$

é obtido da adimensionalização da equação (4.10).

Substituindo-se (4.12) e (4.13) em (4.10), chega-se a

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -1 \quad (4.15)$$

com a condição de contorno

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (4.16)$$

Aplicando a transformação

$$u = u^+ - \frac{r^2}{4} \quad (4.17)$$

e levando em (4.15), esta equação se reduz à equação de Laplace

$$\nabla^2 u^+ = 0 \quad (4.18)$$

com a condição de contorno

$$u^+ = r^2/4 \quad \text{em } \Gamma \quad (4.19)$$

O problema (4.18), (4.19) é um problema de Dirichlet e tem solução única.

As polinomiais harmônicas

$$r^j \cos j\theta \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.20)$$

$$\text{e } r^j \sin j\theta \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.21)$$

que são individualmente soluções da equação de Laplace são escolhidas para solução geral da equação (4.18). Como o operador de Laplace é linear, a solução geral é representada pela soma de N polinomiais.

Assim

$$u^+(r, \theta) = a_0 + \sum_{j=1}^N r^j (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) \quad (4.22)$$

onde a_0 , a_j e b_j são coeficientes a serem determinados.

A equação (4.22) deve satisfazer a condição de contorno, Eq. (4.19), assim

$$a_0 + \sum_{j=1}^N r_i^j (a_j \cos j\theta_i + b_j \operatorname{sen} j\theta_i) = r_i^2/4 \quad (4.23)$$

onde o sub-índice i denota um ponto na fronteira do duto.

A equação (4.23) apresenta um total de $n = 2N+1$ incógnitas. Para determiná-las pode-se escolher n pontos na fronteira do duto e resolver um sistema de n equações lineares (uma para cada ponto) a n incógnitas. Este procedimento garante que a condição de contorno é satisfeita nos n pontos escolhidos na fronteira e, desde que estes sejam próximos uns dos outros, espera-se que a condição de contorno seja aproximadamente satisfeita em toda a fronteira.

No entanto, dependendo da geometria do duto, é necessário tomar um número elevado de pontos sobre a fronteira do mesmo. Isto implica em adotar um valor de N elevado, o que acarreta em um tempo excessivo de computação além da introdução de erros na solução do sistema de equações lineares.

Outro procedimento, e o adotado neste trabalho, consiste em aplicar a equação (4.23) a m pontos, sendo m maior que n . Temos então um sistema de m equações a n incógnitas. Tal sistema é resolvido pelo método de Golub, onde a matriz A é formada pelas polinomiais harmônicas, o vetor Y é formado pela aplicação da condição de contorno aos m pontos e as componentes do vetor solução x são os coeficientes a_0 , a_j e b_j .

Determinados estes coeficientes, temos a expressão para a velocidade adimensional

$$u(r, \theta) = -\frac{r^2}{4} + a_0 + \sum_{j=1}^N r^j (a_j \cos j\theta + b_j \operatorname{sen} j\theta) \quad (4.24)$$

$$e \quad u^*(r, \theta) = -C_1 u(r, \theta) \quad (4.25)$$

Os parâmetros de interesse do problema dinâmico podem então ser calculados. A velocidade média é definida como sendo

$$u_m^* = \frac{1}{A^*} \int_{A^*} u^* dA^* \quad (4.26)$$

ou de forma adimensional

$$u_m = \frac{1}{A} \int_A u \, dA \quad (4.27)$$

Esta integral foi resolvida numericamente através do método de Simpson bidimensional. Uma breve discussão sobre o método é feita no Apêndice 2.

Definindo o coeficiente de atrito da mesma forma que em [7]

$$f = - \frac{\frac{dp^*}{dz^*} \frac{Dh^*}{4}}{\rho \frac{u_m^{*2}}{2}} \quad (4.28)$$

e o número de Reynolds com base no diâmetro hidráulico

$$Re_{Dh} = \frac{\rho u_m^* Dh^*}{\mu} \quad (4.29)$$

temos que

$$fRe = \frac{\frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dz^*} Dh^{*2}}{2 u_m^*} \quad (4.30)$$

Usando a definição de velocidade adimensional, equação (4.13), chega-se a

$$fRe = \frac{Dh^2}{2 u_m} \quad (4.31)$$

Outros parâmetros de interesse, referentes à região de entrada dos dutos, podem ser calculados.

O valor de $K(\infty)$, acréscimo de perda de pressão desde a entrada do duto até o ponto em que o escoamento plenamente desenvolvido ocorre, é dado por [9]

$$K(\infty) = 2[K_e(\infty) - K_d(\infty)] \quad (4.32)$$

onde

$$K_d(\infty) = \frac{1}{A} \int_A (u/u_m)^2 \, dA \quad (4.33)$$

e

$$K_d(\infty) = \frac{1}{A} \int_A (u/u_m)^3 dA \quad (4.34)$$

O comprimento da região de entrada L_{hy} é calculado por

$$L_{hy} = L_{hy}^+ \frac{Dh^*}{Re} \quad (4.35)$$

onde

$$L_{hy}^+ = \frac{(u_{max}/u_m)^2 - 1 - K(\infty)}{4 fRe} \quad (4.36)$$

é o comprimento da região de entrada adimensional.

Os resultados obtidos se encontram expostos em forma de gráficos ou tabelas no capítulo 6.

CAPÍTULO 5

O PROBLEMA DA TEMPERATURA

A equação da energia, em coordenadas cilíndricas, (r^* , θ , z^*), para fluido Newtoniano em regime permanente com ρ , μ e k constantes, sem geração interna de calor, tem a forma [11]

$$\begin{aligned} \rho c_p (w^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{v^*}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial \theta} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}) &= k \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}) + \right. \\ &+ \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} + \left. \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] + 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right)^2 + \left[\frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \theta} + w^* \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \right\} + \\ &+ \mu \left\{ \left[\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right]^2 + \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v^*}{r^*} \right) \right]^2 \right\} \\ &\dots (5.1) \end{aligned}$$

Para escoamento unidimensional, a equação (5.1) se reduz a

$$\begin{aligned} \rho c_p (u^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}) &= k \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right] + \\ &+ \mu \left[\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

Rearranjando, tem-se

$$\nabla^2 T^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} = \frac{\rho c_p}{k} u^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} - \phi^* \quad \dots (5.3)$$

onde

$$\phi^* = \frac{\mu}{k} \left[\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right)^2 \right] \quad (5.4)$$

Como mencionado antes, o termo ϕ^* , a dissipação viscosa, será desprezado. Logo, a equação (5.3) fica

$$\nabla^2 T^* = \frac{\rho c_p}{k} u^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \quad (5.5)$$

A equação

$$\int_{A^*} \nabla^2 T^* dA^* = \int_{\Gamma} \frac{\partial T^*}{\partial n^*} ds^* \quad (5.6)$$

é a condição de consistência do problema, portanto deve ser satisfeita. Substituindo (5.5) em (5.6) tem-se

$$\frac{\rho c_p}{k} u_m^* A^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{\bar{q}^* P^*}{k} \quad (5.7)$$

onde P^* é o perímetro da seção

\bar{q}^* é o fluxo médio de calor por unidade de tempo e área sobre P^* .

Isolando $\partial T^*/\partial z^*$ na equação (5.7) e levando em (5.5), chega-se a

$$\nabla^2 T^* = \frac{u^*}{u_m^*} \frac{\bar{q}^* P^*}{k A^*} \quad (5.8)$$

ou ainda

$$\nabla^2 T^* = \frac{u}{u_m} \frac{\bar{q}^* P^*}{k A^*} \quad (5.9)$$

Usando a definição de Dh^* , e lembrando que

$$Dh^* = Dh/r_2^* \quad (5.10)$$

e

$$fRe = Dh^2/2 u_m \quad (5.11)$$

a equação (5.9) resulta

$$\nabla^2 T^* = u \frac{8 fRe \bar{q}^*}{k Dh^3 r_2^*} \quad (5.12)$$

Definindo a temperatura adimensional como sendo

$$T = \frac{T^*}{\frac{8 \text{ fRe } \bar{q}^* r_2^*}{k \text{ Dh}^3}} \quad (5.13)$$

e substituindo (5.13) em (5.12) tem-se

$$\nabla^2 T = u \quad (5.14)$$

ou de (4.22)

$$\nabla^2 T = -r^2/4 + a_0 + \sum_{j=1}^N r^j (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) \quad (5.15)$$

A solução de (5.15) pode ser expressa por

$$T = T^+ + T_p \quad (5.16)$$

e a solução particular T_p é encontrada como sendo

$$T_p = \frac{a_0 r^2}{4} - \frac{r^4}{64} + \sum_{j=1}^N \frac{r^{j+2}}{4(j+1)} (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) \quad (5.17)$$

que satisfaz a equação (5.15).

Com T_p assumindo a forma (5.17), temos que

$$\nabla^2 T^+ = 0 \quad (5.18)$$

Como no problema da velocidade, chegamos à equação de Laplace.

Novamente, a solução é proposta da forma

$$T^+ = c_0 + \sum_{j=1}^N r^j (c_j \cos j\theta + d_j \sin j\theta) \quad (5.19)$$

onde os coeficientes c_0 , c_j e d_j são determinados, dada a condição de contorno, pelo método de Golub.

A expressão para a temperatura adimensional, Eq. (5.16) fica então

$$T(r, \theta) = c_0 + \sum_{j=1}^N r^j (c_j \cos j\theta + d_j \sin j\theta) - \frac{r^4}{64} + a_0 \frac{r^2}{4} + \sum_{j=1}^N \frac{r^{j+2}}{4(j+1)} (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) \quad (5.20)$$

Neste trabalho, como já comentado na Introdução, o problema da temperatura será resolvido para as condições de temperatura prescrita na fronteira e fluxo prescrito na fronteira.

Temperatura prescrita na fronteira

Seja $T^*(r_i^*, \theta_i)$ a distribuição de temperatura prescrita na fronteira. Aplicando-se a equação (5.13), chega-se a distribuição da temperatura adimensional prescrita na fronteira, $T(r_i, \theta_i)$.

Da equação (5.16)

$$T^+(r_i, \theta_i) = T(r_i, \theta_i) - T_p(r_i, \theta_i) \quad (5.21)$$

e usando (5.19) e (5.17)

$$c_0 + \sum_{j=1}^N r_i^j (c_j \cos j\theta_i + d_j \sin j\theta_i) = T(r_i, \theta_i) - a_0 \frac{r_i^2}{4} + \frac{r_i^4}{64} - \sum_{j=1}^N \frac{r_i^{j+2}}{4(j+1)} (a_j \cos j\theta_i + b_j \sin j\theta_i) \quad (5.22)$$

O problema

$$\nabla^2 T^+ = 0 \quad (5.23)$$

com a condição de contorno (5.21) é um problema de Dirichlet e tem solução única. Aplicando-se (5.22) a m pontos na fronteira, temos um sistema de m equações a $2N+1$ incógnitas que, da mesma forma que para a velocidade, é resolvido através do método de Golub.

Com os coeficientes c_0 , c_j e d_j determinados e com a equação (5.20), o problema da temperatura, para a condição de contorno de temperatura prescrita na fronteira fica resolvido.

É interessante obter-se uma expressão para o fluxo de calor q_i^* na fronteira do duto.

$$q_i^* = k \frac{\partial T^*}{\partial n} = k \left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \frac{\partial r^*}{\partial n} + \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Big|_{(r_i, \theta_i)} \quad (5.24)$$

Da figura 2

$$\frac{\partial r^*}{\partial n} = \text{sen } (\theta - \beta) \quad (5.25)$$

$$e \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{1}{r^*} \cos (\theta - \beta) \quad (5.26)$$

$$\text{Definindo } \ell' = \text{sen } (\theta - \beta) \quad (5.27)$$

$$m' = \frac{1}{r} \cos (\theta - \beta) \quad (5.28)$$

e combinando (5.25), (5.26), (5.27), (5.28), substituindo em (5.24), tem-se

$$q_i^* = k \frac{\partial T^*}{\partial n} = k \left(\ell' \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r_2^*} m' \frac{\partial T^*}{\partial \theta} \right) \Big|_{(r_i, \theta_i)} \quad (5.29)$$

Usando a definição da temperatura adimensional e derivando a equação (5.20) com respeito a r^* e θ tem-se respectivamente:

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{1}{r_2^*} \frac{\partial T^*}{\partial r} = \frac{\bar{q}^*}{k} \frac{8 \text{ fRe}}{\text{Dh}^3} \left[\sum_{j=1}^N j r^{j-1} (c_j \cos j\theta + d_j \text{sen } j\theta) + \left(a_0 \frac{r}{2} - \frac{r^3}{16} \right) + \sum_{j=1}^N \frac{(j+2)r^{j+1}}{4(j+1)} (a_j \cos j\theta + b_j \text{sen } j\theta) \right] \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial \theta} = \frac{\bar{q}^*}{k} \frac{8 \text{ fRe}}{\text{Dh}^3} r_2^* \left[\sum_{j=1}^N j r^j (d_j \cos j\theta - c_j \text{sen } j\theta) + \sum_{j=1}^N \frac{j r^{j+2}}{4(j+1)} (b_j \cos j\theta - a_j \text{sen } j\theta) \right] \quad (5.31)$$

Finalmente, substituindo (5.30) e (5.31) em (5.29), chega-se a

$$q_i^* = \bar{q}^* \frac{8 \text{ fRe}}{\text{Dh}^3} \left\{ \ell'_i \left[\sum_{j=1}^N j r_i^{j-1} (c_j \cos j\theta_i + d_j \text{sen } j\theta_i) + \left(a_0 r_i/2 - r_i^3/16 \right) + \sum_{j=1}^N \frac{(j+2)r_i^{j+1}}{4(j+1)} (a_j \cos j\theta_i + b_j \text{sen } j\theta_i) \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + m' \left[\sum_{j=1}^N j r_i^j (d_j \cos j\theta_i - c_j \sin j\theta_i) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^N \frac{j r_i^{j+2}}{4(j+1)} (b_j \cos j\theta_i - a_j \sin j\theta_i) \right] \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Fluxo prescrito na fronteira

Seja $q^*(r_i^*, \theta_i)$ a distribuição de fluxo prescrito na fronteira.

Define-se

$$q_p(r_i^*, \theta_i) = \frac{q^*(r_i^*, \theta_i)}{\bar{q}^*} \quad (5.33)$$

Rearranjando a equação (5.32) obtém-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N [c_j \{j r_i^{j-1} (\ell_i' \cos j\theta_i - m_i' r \sin j\theta_i)\} + \\
& + d_j \{j r_i^{j-1} (\ell_i' \sin j\theta_i + m_i' r_i \cos j\theta_i)\}] = \\
& = \frac{q_p(r_i^*, \theta_i)}{\frac{8 \text{ fRe}}{\text{Dh}^3}} - \ell_i' (a_0 r_i / 2 - r_i^3 / 16) - \sum_{j=1}^N \frac{r_i^{j+1}}{4(j+1)} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot [a_j \{\ell_i' (j+2) \cos j\theta_i - m_i' j r_i \sin j\theta_i\} + \\
& + b_j \{\ell_i' (j+2) \sin j\theta_i + m_i' j r_i \cos j\theta_i\}] \quad (5.34)
\end{aligned}$$

O problema (5.18) com a condição de contorno (5.33) é de Neumann e tem solução única a menos de uma constante, já que c_0 desaparece na derivação da equação (5.20).

Aplicando-se a equação (5.34) a m pontos da fronteira tem-se um sistema de m equações a $2N$ incógnitas que resolvido pelo método de Golub fornece os coeficientes c_j e d_j .

O coeficiente c_0 permanece como incógnita, e para de-

terminá-lo precisar-se-ia conhecer a temperatura em algum ponto da fronteira.

No entanto isso não foi necessário, uma vez que c_o sempre desaparece na expressão do número de Nusselt, que é o parâmetro de interesse.

A fim de determinar o número de Nusselt, precisa-se calcular a temperatura de mistura e a temperatura média na superfície de troca de calor.

A temperatura de mistura é definida por

$$T_b^* = \frac{\int_{A^*} T^*(r^*, \theta) u^*(r^*, \theta) dA^*}{\int_{A^*} u^*(r, \theta) dA^*} \quad (5.44)$$

Logo

$$T_b^* = \frac{1}{u_m^* A^*} \int_{A^*} T^*(r^*, \theta) u^*(r^*, \theta) dA^* \quad (5.45)$$

ou, expressando a temperatura de mistura adimensionalmente

$$T_b = \frac{1}{u_m A} \int_A T(r, \theta) u(r, \theta) dA \quad (5.46)$$

A equação acima foi, da mesma forma que a equação (4.27), calculada numericamente através do método de Simpson bidimensional.

A temperatura média na interface de troca de calor é definida como

$$T_{sm}^* = \frac{\int_{\sigma^*} T^*(r^*, \theta) ds^*}{\int_{\sigma^*} ds^*} \quad (5.47)$$

onde σ^* é a parte da fronteira da seção do duto onde existe fluxo de calor, comumente chamada de perímetro aquecido.

Logo, de forma adimensional tem-se

$$T_{sm} = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} T(r, \theta) ds \quad (5.48)$$

Esta integral foi determinada também numericamente, pelo método de Simpson.

Definindo-se o coeficiente de troca de calor com base na superfície de troca de calor (ou superfície "aquecida") tem-se que

$$h = \frac{\bar{q}^* P^*}{\sigma^* (T_{sm}^* - T_b^*)} \quad (5.49)$$

Definindo-se o número de Nusselt com base no diâmetro hidráulico

$$Nu_{Dh} = \frac{h Dh^*}{k} \quad (5.50)$$

e substituindo (5.49) em (5.50) tem-se

$$Nu_{Dh} = \frac{\bar{q}^* Dh^* P^*}{k \sigma^* (T_{sm}^* - T_b^*)}$$

Usando (5.10) e (5.13), chega-se a uma expressão para o número de Nusselt em função das temperaturas adimensionais

$$Nu_{Dh} = \frac{Dh^4 P}{8 fRe \sigma (T_{sm} - T_b)} \quad (5.51)$$

Esta equação (5.51) é a equação geral para o número de Nusselt. Para o caso de temperatura prescrita na fronteira, o perímetro aquecido coincide com todo o perímetro da seção, assim

$$Nu_{\textcircled{T}} = \frac{Dh^4}{8 fRe (T_{sm} - T_b)} \quad (5.52)$$

Para o caso de fluxo prescrito na fronteira, o perímetro aquecido não inclui o tubo externo, onde o fluxo foi prescrito igual a zero.

Assim

$$\sigma = 2\ell + 2\pi \phi r_o/m \quad (5.53)$$

e de (5.51)

$$Nu_{\textcircled{E}} = \frac{Dh^4 P}{8 fRe (2\ell + 2\pi \phi r_o/m) (T_{sm} - T_b)} \quad (5.54)$$

Uma interessante relação pode ser obtida entre o fluxo médio adimensional \bar{q} , como definido abaixo, e parâmetros que dependem unicamente da geometria do duto.

Seja

$$\bar{q} = \frac{1}{P} \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} ds \quad (5.55)$$

Da definição da temperatura adimensional, Eq. (5.13), chega-se a

$$\bar{q} P = \frac{k Dh^3}{8 fRe \bar{q}^* r_2^*} \int_{\Gamma} \frac{\partial T^*}{\partial n^*} ds \quad (5.56)$$

Logo,

$$\bar{q} P = \frac{k Dh^3}{8 fRe \bar{q}^* r_2^*} \cdot \frac{\bar{q}^* P^*}{k} \quad (5.57)$$

Simplificando, obtêm-se que

$$\bar{q} P = \frac{Dh^3 P}{8 fRe} \quad (5.58)$$

e, lembrando que

$$fRe = \frac{Dh^2}{2 u_m} \quad (5.59)$$

tem-se que

$$\bar{q} P = u_m \frac{P Dh}{4} \quad (5.60)$$

Da definição de diâmetro hidráulico adimensional

$$\bar{q} P = u_m A \quad (5.61)$$

Esta relação é consequência e pode ser prontamente obtida da condição de consistência, eq. (5.6), que reescrita de forma adimensional fica

$$\int_A v^2 T dA = \int_{\Gamma} \frac{\partial T}{\partial n} ds \quad (5.62)$$

Substituindo a equação (5.14) em (5.62), e, lembrando

da definição do fluxo médio adimensional, tem-se que

$$\int_A u \, dA = \bar{q} P \quad (5.63)$$

e

$$u_m A = \bar{q} P \quad (5.64)$$

No capítulo 6 são mostradas e comparadas as soluções obtidas para o problema da temperatura.

CAPÍTULO 6

APLICAÇÃO DO MÉTODO, RESULTADOS E COMPARAÇÕES

Antes de resolver o problema dinâmico e térmico do duto em estudo, o método foi aplicado a várias outras geometrias a fim de verificar se o programa elaborado no presente trabalho apresentava tão boa precisão quando o desenvolvido por Shah [9], e ainda como se comporta o método para diferentes formas de dutos. O programa, escrito em FORTRAN IV, foi processado nos computadores IBM/360 e IBM/370. A função de cada sub-rotina, todas de dupla precisão, será comentada mais adiante e a listagem do programa completo pode ser vista no Apêndice 1.

Com o primeiro objetivo citado acima, foi resolvido o problema dinâmico e o problema térmico do retângulo com relações de lado 1:1, 1:2 e 1:8, com condições de contorno de temperatura prescrita constante e fluxo de calor constante, em toda a fronteira. Apesar do método não ter sido aplicado com toda a sua potencialidade e da forma mais adequada, os resultados apresentaram muito boa concordância com os de [9].

A seguir foi resolvido o problema do duplo tubo aletado, com aletas de espessura desprezível ($\phi = 1$). As condições de contorno foram de temperatura prescrita constante na fronteira e fluxo prescrito com $W_{TE} = 0$ e $W_{AL} = 0,5$. Os valores obtidos para fRe e NU_{E} não revelaram qualquer diferença em relação àqueles obtidos em [7].

Uma outra experiência bem sucedida foi obtida com o setor circular. Os valores para fRe e número de Nusselt para as condições de temperatura constante e fluxo constante na fronteira estavam bem próximos dos de [2].

Todos os resultados e comparações mencionados acima podem ser vistos com mais detalhes em [12].

Ainda na fase de avaliação do método, tentou-se resolver o problema do duto mostrado na figura 5, que é um tubo

circular com um arranjo de dutos unidos por aletas em seu interior.

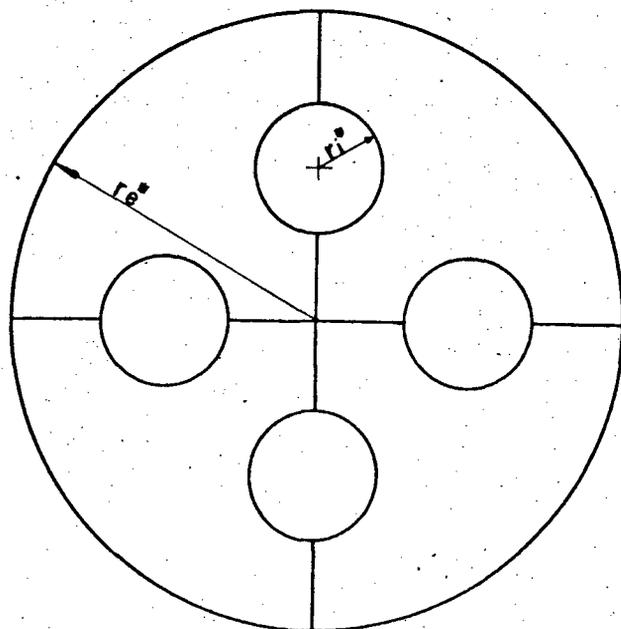


Figura 5

Aqui, infelizmente, a solução não se mostrou suficientemente precisa. Apesar de sucessivas tentativas de aprimoramento (mudança do número de termos nas séries e do número de pontos tomados sobre a fronteira, alterações do tamanho do duto, etc.), a velocidade sobre a fronteira calculada pela série atingia valores de até 10% da velocidade média em alguns pontos, ficando em torno de 3% para a maior parte do perímetro da seção. Os efeitos da imprecisão da solução do problema dinâmico se faziam notar com mais intensidade na solução do problema térmico, principalmente para a condição de fluxo prescrito, onde, os fluxos calculados através da expressão (5.32) apresentavam uma discrepância considerável em relação aos fluxos prescritos.

Finalmente, de posse de bastante informações a respeito das formas de dutos em que o método é mais eficiente e de seu comportamento, o mesmo foi aplicado à seção em estudo no presente trabalho, já mostrada na figura 3.

São fornecidos ao programa o número de pontos tomados no tubo interno, na aleta e no tubo externo; o número de aletas, o parâmetro ϕ , o número de termos nas séries e ainda o número de divisões no raio e no ângulo, necessárias às integra

ções numéricas.

O número de termos nas séries foi normalmente adotado entre 35 e 50 e o número de pontos tomados sobre a fronteira de 40 a 70. Em um caso limite, chegou-se a tomar 70 termos e 100 pontos, sem com isso melhorar a solução.

A subrotina TESE fornece as coordenadas dos pontos sobre a fronteira, os parâmetros ℓ' e m' como definidos em (5.27) e (5.28), o fluxo prescrito em cada ponto e a temperatura prescrita em cada ponto necessários quando da solução do problema térmico para as condições \textcircled{F} e \textcircled{T} , respectivamente.

A subrotina GOLUB calcula os coeficientes da série da velocidade, e ainda o RMS da expansão, como definido em (2.2).

A partir do número de divisões no raio e no ângulo, a subrotina GRADE calcula as coordenadas dos pontos sobre a região de integração R como mostrada na figura 28. A subrotina VELOC calcula a velocidade em todos estes pontos e a subrotina VMED faz a integração numérica pelo método de Simpson Bidimensional. Pode-se determinar então a velocidade média e o produto do coeficiente de atrito pelo número de Reynolds através da expressão (4.29).

Apesar do RMS possibilitar uma apreciação da qualidade da expansão, essa avaliação só é feita nos próprios pontos tomados na expansão. É conveniente calcular a velocidade em um número maior de pontos da fronteira, o que é feito pela subrotina VFRON. Através desse cálculo, pode-se com certeza afirmar se a série solução satisfaz a condição de contorno em toda a fronteira. Os resultados obtidos demonstraram que na maior parte da fronteira a velocidade era da ordem de 0,1% da velocidade média. Os maiores erros aconteceram, como se esperava, nas proximidades dos cantos das geometrias menos adequadas ao método, chegando a atingir 3% da velocidade média. Como estes erros aconteceram em pequenas regiões, acredita-se que para a maioria das geometrias o erro no fRe é em torno de 0,1% podendo atingir até 1% nas piores situações.

Referente ao problema da velocidade, ainda são feitas as integrais duplas das funções $(u/u_m)^2$ e $(u/u_m)^3$ pela subrotina VMED a fim de calcular os parâmetro $K_d(\infty)$, $K_e(\infty)$, $K(\infty)$ e o comprimento adimensional da região de entrada L_{hy}^+ .

Foram resolvidos os dutos com 4, 8, 12, 16 e 20 aletas e relação de raios 0,4 e 0,6 que são as relações de raios mais usadas na prática. O parâmetro ϕ variou, para a maioria dos casos, de 0,25 a 1,00. Algumas geometrias, em sua maioria de 4 aletas, não tiveram essa faixa de variação de ϕ devido a isto acarretar em aletas com espessura excessivamente grande. Outras combinações de número de aletas e relação de raios implicariam em um tempo excessivo de computação e foram consideradas não necessárias para atingir os objetivos desse trabalho.

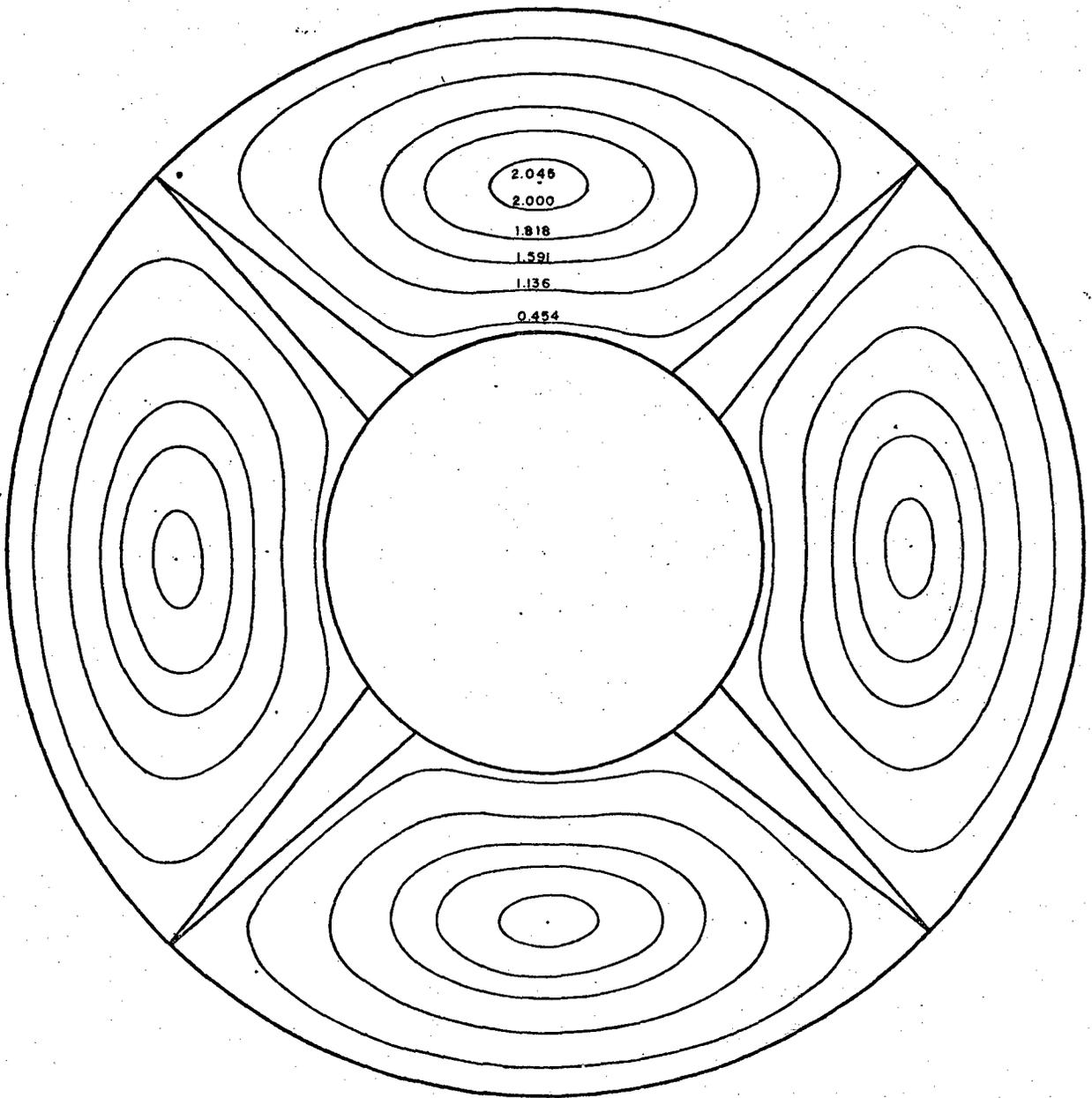


Fig. 6 - Linhas de mesma velocidade para $r_0 = 0,4$, 4 aletas e $\phi = 0,8$.

Na figura 6 estão mostradas linhas de mesma velocidade para $r_0 = 0,4$, 4 aletas e $\phi = 0,8$. Os valores sobre cada linha são da relação entre a velocidade da mesma e a velocidade média.

Na figura 7, vê-se novamente linhas de mesma velocidade para $r_0 = 0,6$, 8 aletas e $\phi = 0,75$. Nota-se em ambas as figuras que a velocidade máxima é pouco maior que duas vezes a velocidade média e que os perfis de velocidade apresentam um grande gradiente próximo às paredes do duto, sendo bem mais planos na região central do escoamento.

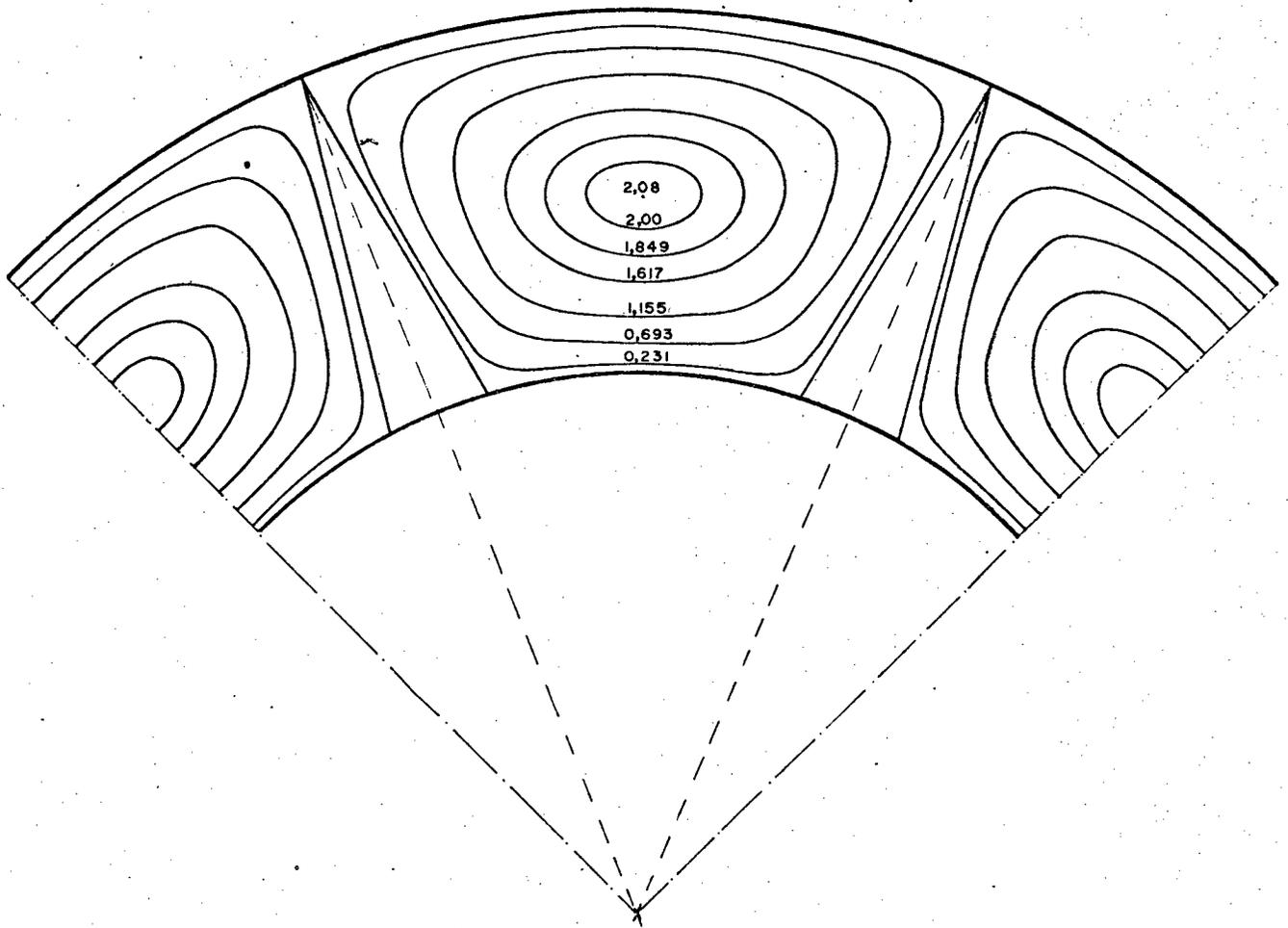


Fig. 7 - Linhas de mesma velocidade para $r_0 = 0,6$, 8 aletas e $\phi = 0,75$.

Na figura 8 estão plotadas as curvas de u^*/u_m^* em função de r para diversos valores de θ , com $r_0 = 0,6$, 16 aletas e $\phi = 0,5$.

A linha de $\theta = 3/4\theta_0$ não chega a atingir o tubo interno devido a aleta começar em $\theta = 1/2\theta_0$. Nota-se também

que a velocidade máxima é superior que a das geometrias das figuras 6 e 7, chegando a 2,13 da velocidade média.

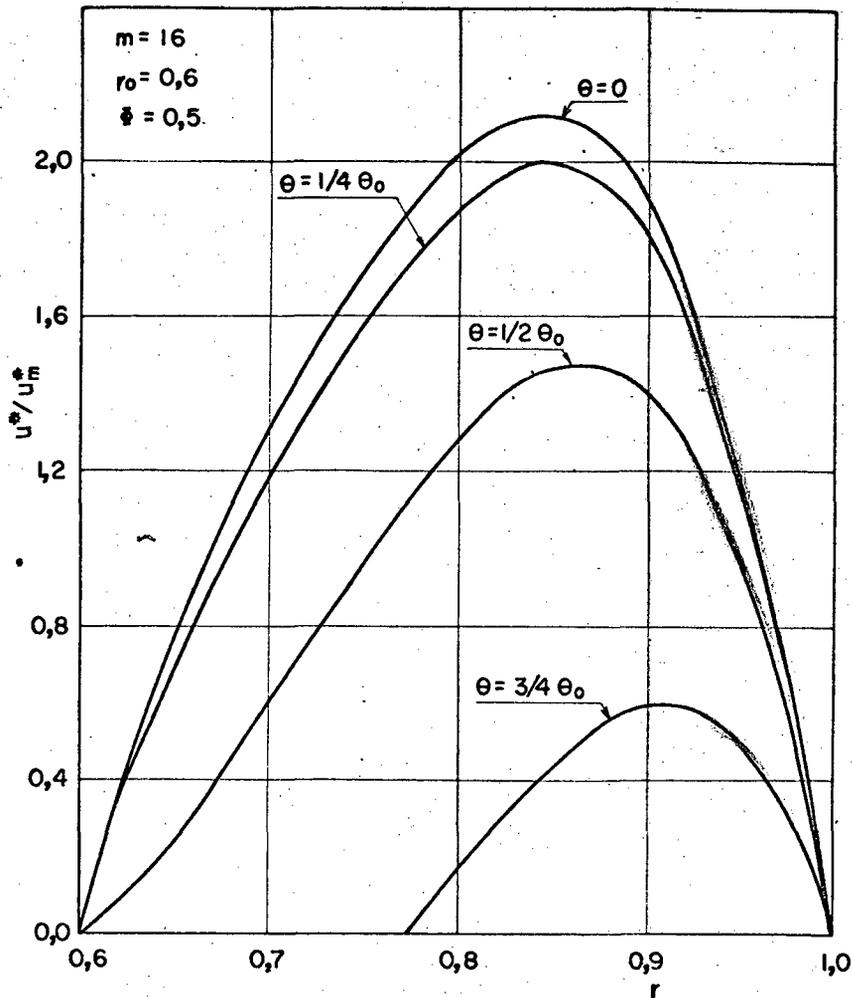


Fig. 8 - Velocidades ao longo do raio para diferentes valores de θ .

As figuras 9 e 10 mostram o comportamento do coeficiente de atrito vezes o número de Reynolds em função de ϕ para $r_0 = 0,4$ e $r_0 = 0,6$, respectivamente, com curvas para 4, 8, 12, 16 e 20 aletas.

As curvas para 20 e 16 aletas da figura 9 revelam um considerável decréscimo no fRe conforme a espessura da aleta aumenta. Isto, no entanto, não significa que necessariamente as aletas mais espessas favoreçam o escoamento, porque o fRe depende também de parâmetros associados à geometria do duto, que dependem de ϕ e mais fortemente ainda do número de aletas. Esta dependência do fRe com parâmetros geométricos é também vista como explicação para a posição destoante em que se encon

tram as curvas para 4 aletas.

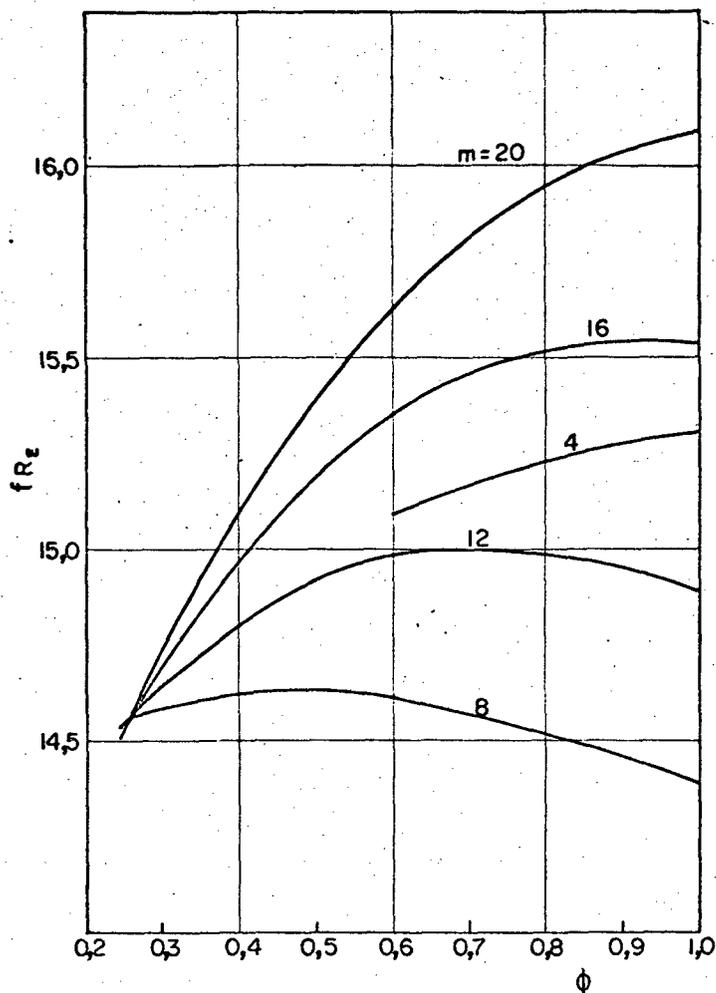


Fig. 9 - Coeficiente de atrito em função de ϕ para $r_0 = 0,4$ e diferentes números de aletas.

Todos os valores obtidos para $\phi = 1$, isto é, com a aleta de espessura desprezível, não apresentam qualquer diferença em relação aos expostos em [7].

Na figura 11 estão plotadas curvas de L_{hy}^+ em função de ϕ , para $r_0 = 0,4$, onde se observa que o comprimento adimensional da região de entrada cresce à medida que cresce a espessura da aleta.

Os valores de L_{hy}^+ para $r_0 = 0,6$, bem como os dados que foram utilizados na construção das figuras mostradas anteriormente, se encontram condensados nos quadros II e III, junto com resultados do problema da temperatura.

O problema térmico foi primeiramente resolvido para

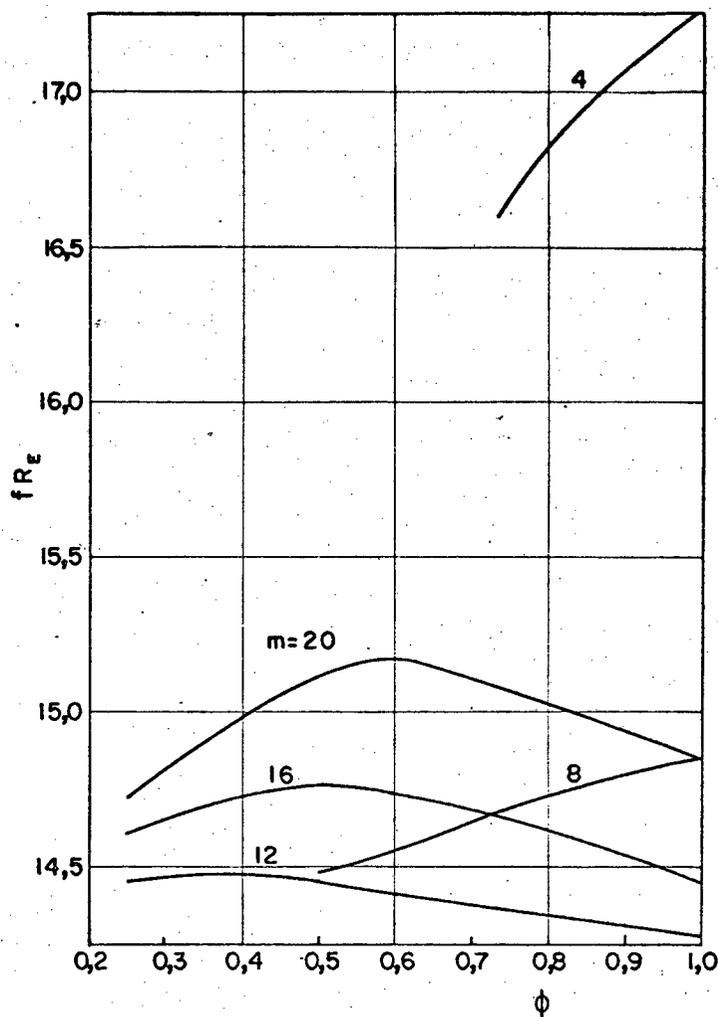


Fig. 10.- Coeficiente de atrito em função de ϕ para $r_0 = 0,6$ e diferentes números de aletas.

a condição de contorno de temperatura prescrita constante em toda a fronteira do duto. A subrotina GOLUB calcula os coeficientes da série e o RMS da expansão. Com estes coeficientes, a subrotina TEMP determina a temperatura nos mesmos pontos da região em que foi calculada a velocidade e a subrotina VMED calcula a integral do produto da velocidade pela temperatura a fim de se obter T_b , a temperatura de mistura. Como a temperatura é prescrita constante na fronteira, obviamente o valor da temperatura média na interface de troca de calor, T_{sm} , como definida em (5.47), é igual à própria constante. Pode-se determinar Nu_{T} pela expressão (5.52) e, com os mesmos objetivos que no problema dinâmico, os valores da temperatura em um número grande de pontos na fronteira, o que é feito pela subrotina TFRON.

As figuras 12 e 13 mostram isotermas para $r_0 = 0,6$,

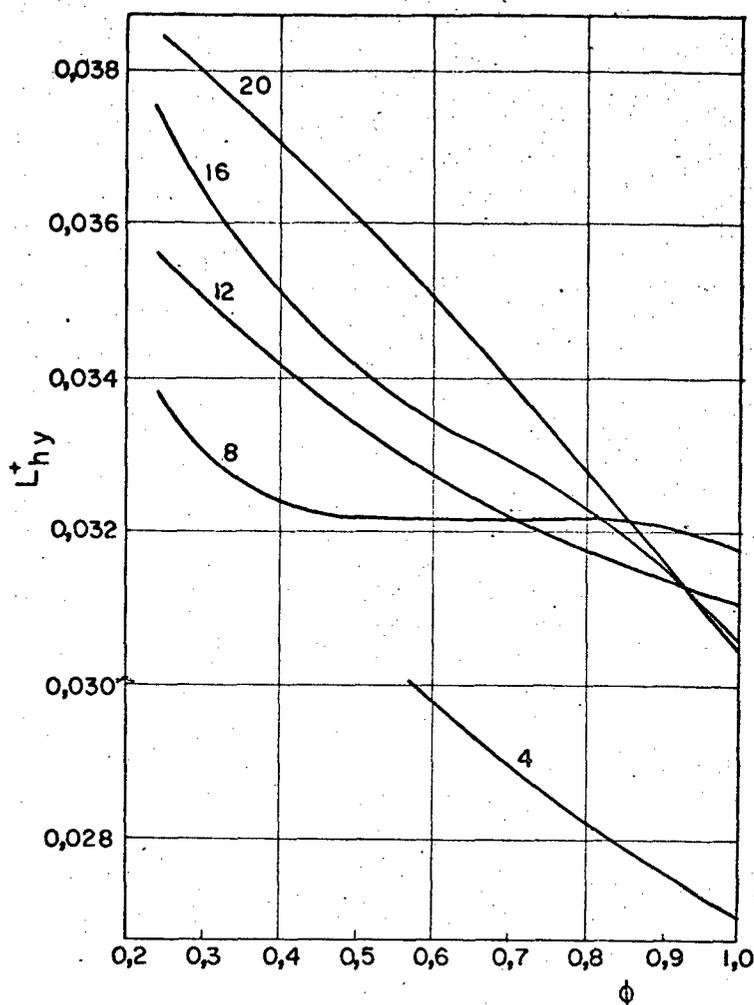


Fig. 11 - L_{hy}^+ em função de ϕ para $r_0 = 0,4$ e diferentes números de aletas.

8 aletas, $\phi = 0,75$ e $r_0 = 0,4$, 4 aletas, $\phi = 0,8$, respectivamente. Os valores sobre as linhas são da relação $(T^* - T_b^*) / (T_{sm}^* - T_b^*)$ que, na fronteira é igual a 1, pois $T^* = T_{sm}^*$.

A solução para a condição \textcircled{T} se comporta de maneira semelhante ou melhor que a solução do problema da velocidade de modo que espera-se que os números de Nusselt obtidos se afastem dos exatos em no máximo 1%.

As figuras 14 e 15 mostram as curvas de $Nu_{\textcircled{T}}$ em função de ϕ para $r_0 = 0,4$ e $r_0 = 0,6$, respectivamente.

Nota-se que para $r_0 = 0,4$, $Nu_{\textcircled{T}}$ tende a diminuir conforme ϕ assume valores mais baixos. Considerando-se as seções com o mesmo diâmetro hidráulico, já que o número de Nusselt é função deste parâmetro, temos uma queda de 20% para 20

aletas com $\phi = 0,25$ em relação à performance térmica do mesmo duplo tubo com espessura de aleta desprezível. Apenas para 8 aletas, Nu_{D} aumenta ligeiramente a partir de $\phi = 1$, começando a diminuir de $\phi = 0,7$ em diante.

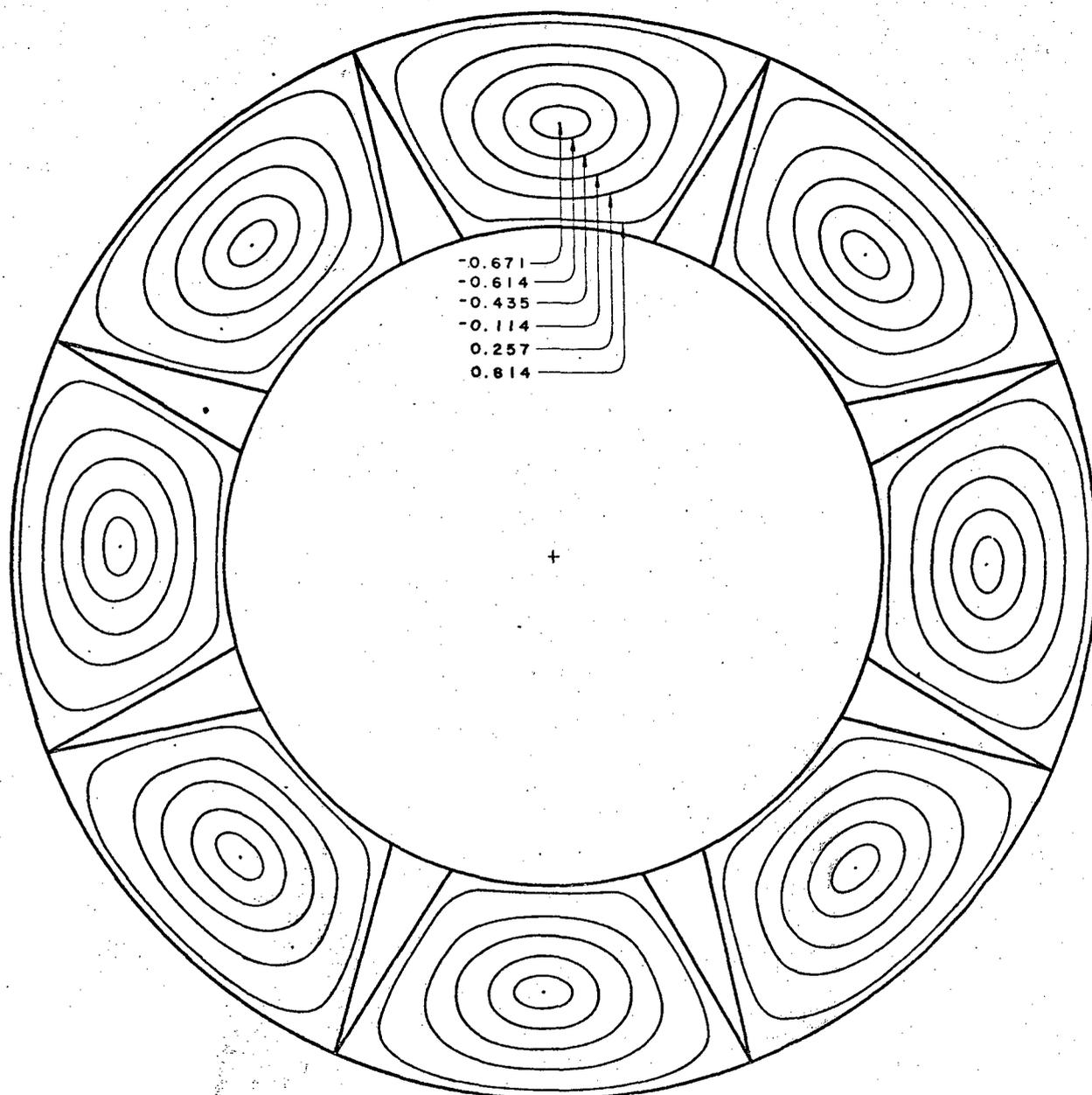


Fig. 12 - Isotermas para $r_o = 0,6$, 8 aletas e $\phi = 0,75$.

No quadro I estão comparados os números de Nusselt de algumas geometrias. Os obtidos no presente trabalho (referenciados por um asterisco) para os setores de coroa, e os obtidos por Shah [9], para os retângulos, são para a condição de contorno de temperatura prescrita constante em toda a fronteira, enquanto os obtidos por Colle [8], são para a condição de

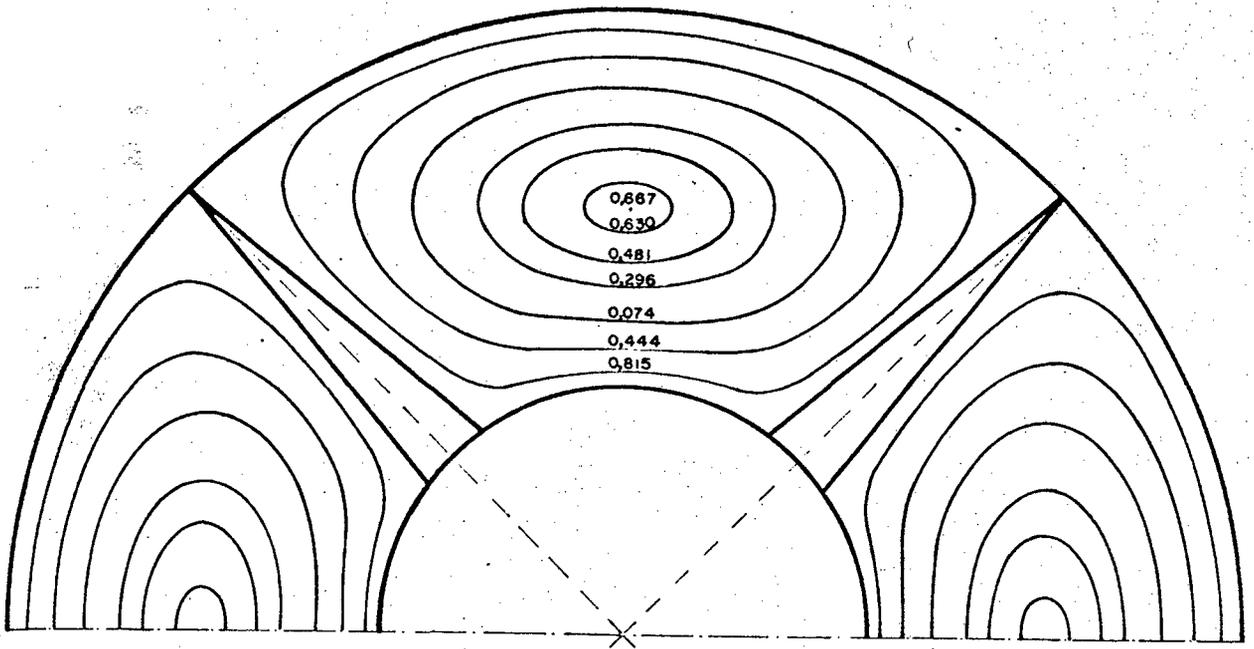


Fig. 13 - Isotermas para $r_0 = 0,4$, 4 aletas e $\phi = 0,8$.

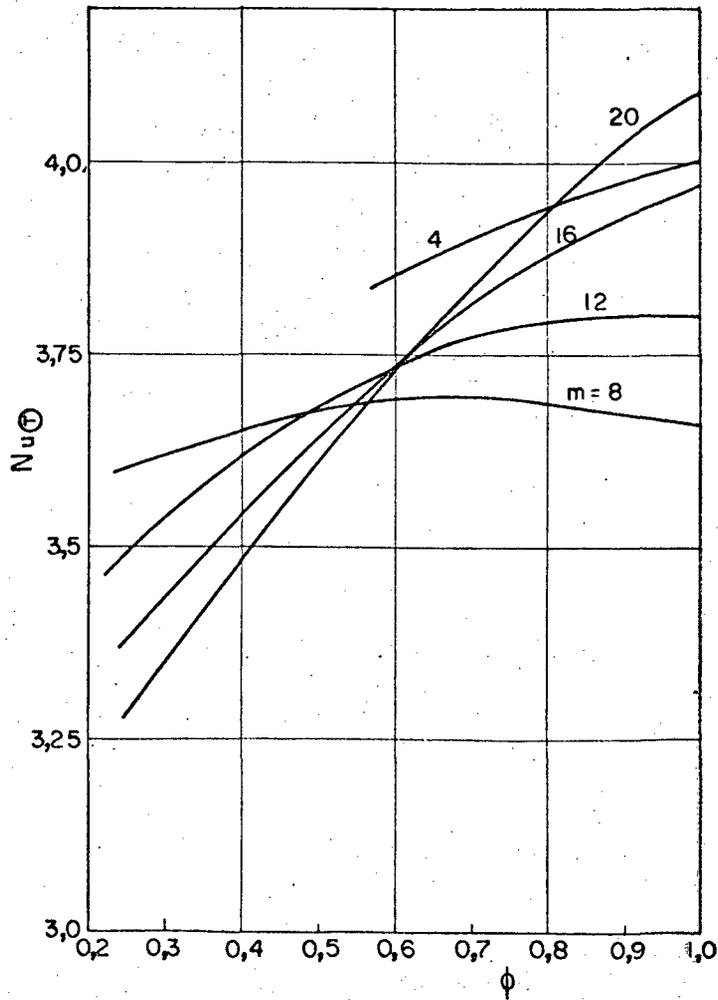


Fig. 14 - Nu_{T} para $r_0 = 0,4$.

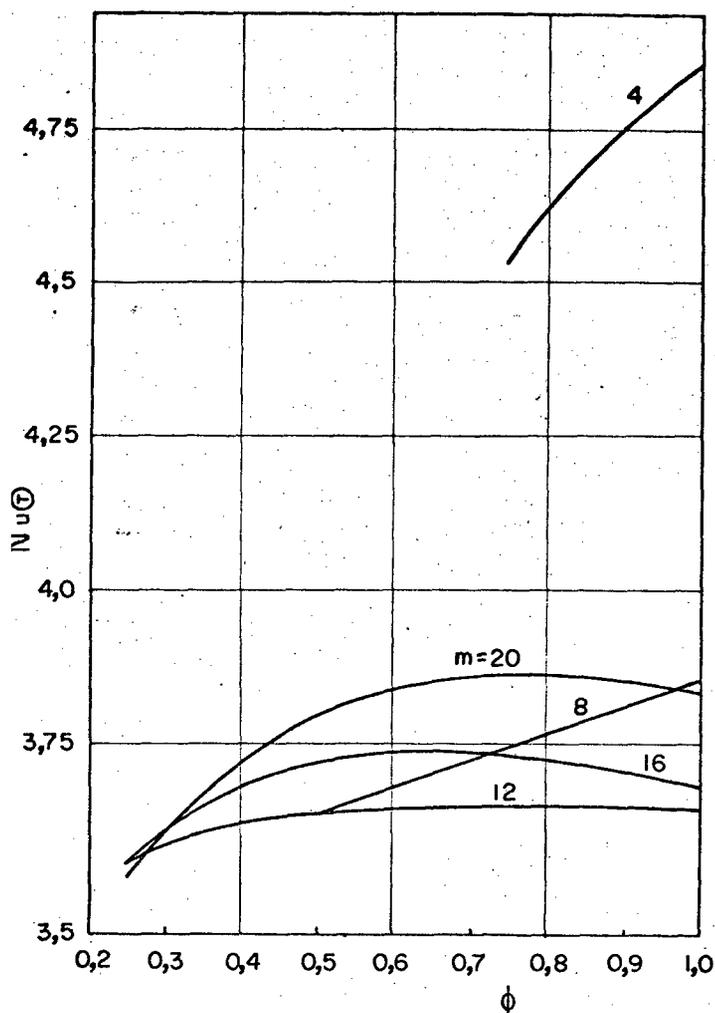


Fig. 15 - Nu_{\odot} para $r_0 = 0,6$.

GEOMETRIAS	REF.	Nu
$m = 8, r_0 = 0,4$	*	3,661
$m = 16, r_0 = 0,7$	*	3,628
$m = 8, r_0 = 0,4361$	[8]	3,524
$m = 16, r_0 = 0,718$	[8]	3,558
Retângulo $a/b = 1$	[9]	3,608
$m = 16, r_0 = 0,6$	*	3,682
Retângulo $a/b = 0,75$	[9]	3,701
$m = 16, r_0 = 0,4$	*	3,962
$m = 16, r_0 = 0,4361$	[8]	3,903
Retângulo $a/b = 0,5$	[9]	4,123

QUADRO I - Comparação do número de Nusselt entre geometrias e condições de contorno semelhantes.

temperatura prescrita constante no tubo interno e na aleta e fluxo prescrito nulo no tubo externo. As geometrias de [8] tem a relação entre o raio médio do setor e a altura da aleta exatamente igual à relação de lados do retângulo a que são comparados.

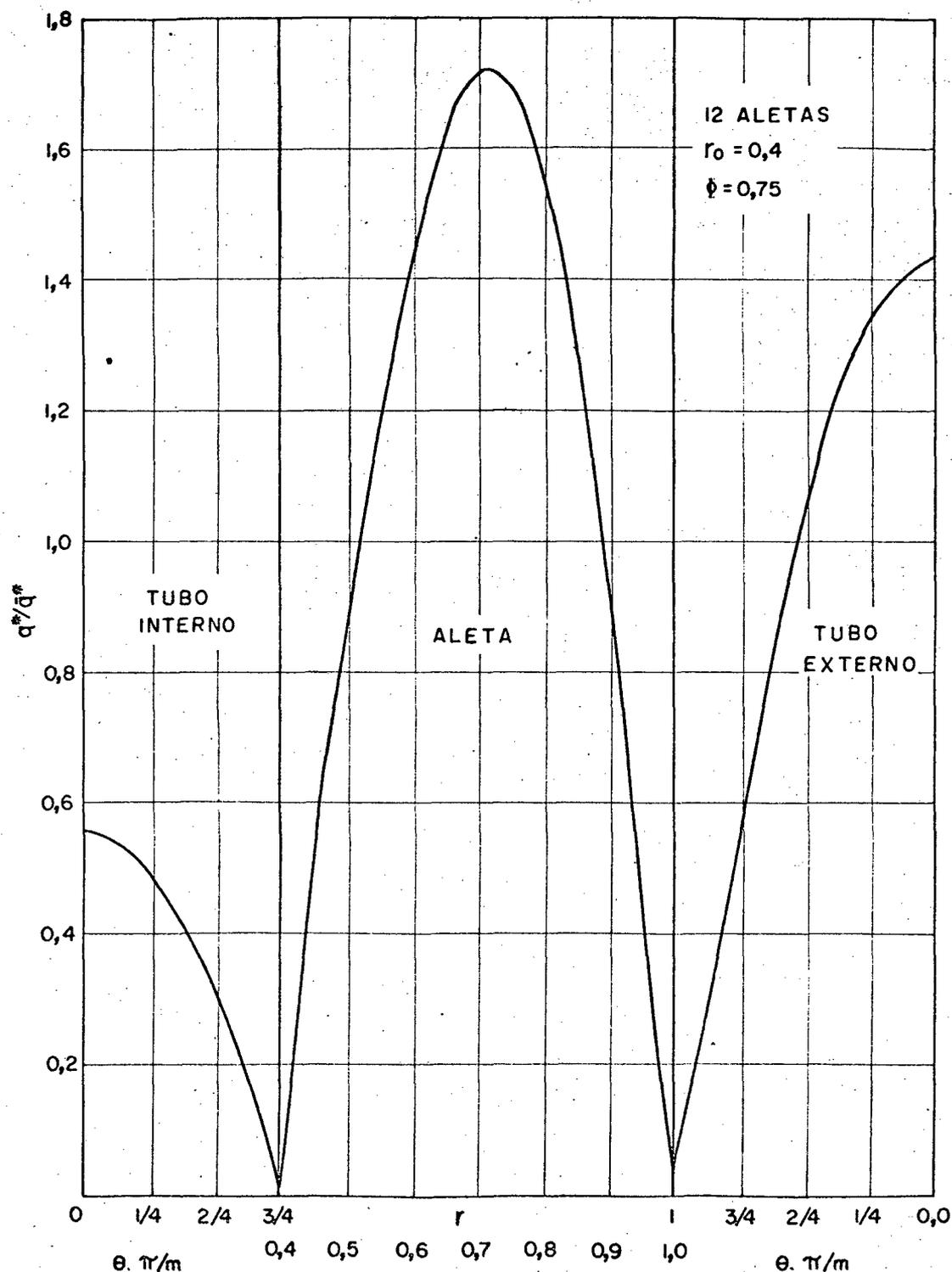


Fig. 16 - Relação entre o fluxo local e o fluxo médio na fronteira para a condição ①.

Já para $r_o = 0,6$ percebe-se uma variação menos acentuada em $Nu_{\text{Ⓣ}}$ com ϕ . É interessante notar a semelhança entre as curvas de fRe e $Nu_{\text{Ⓣ}}$, principalmente para $r_o = 0,6$. Tal semelhança encontra explicação no fato de que tanto o problema da velocidade como o problema térmico com condição Ⓣ se reduzem a resolver a equação de Laplace, com condições de contorno parecidas na própria função.

Na figura 16 encontra-se plotada a curva da relação entre o fluxo de calor local, calculado pela expressão (5.32) e o fluxo médio em toda a fronteira, para 12 aletas, $r_o = 0,4$ e $\phi = 0,75$.

O procedimento adotado para se obter a solução do problema térmico com condição de contorno de fluxo prescrito na fronteira é o mesmo que para a condição Ⓣ a menos de ser necessário aqui calcular a temperatura média na interface de troca de calor, isto é, no tubo interno e na aleta. Tal temperatura média é obtida através de uma integração numérica, pelo método de Simpson, que é calculada pela subrotina STM.

As figuras 17 e 18 mostram as isotermas para 4 aletas $r_o = 0,4$ e $\phi = 0,8$ e 8 aletas, $r_o = 0,6$, $\phi = 0,75$, respectivamente.

Nota-se que as isotermas são sempre perpendiculares ao atingir o tubo externo, devido à inexistência de fluxo nesse local. A máxima temperatura sempre ocorre na base da aleta, uma região de alto fluxo de calor e de baixas velocidades no escoamento.

Na figura 19 está mostrada a variação da temperatura ao longo da fronteira.

Em seu trabalho, Shah [9], comenta que devido ao processo de diferenciação, os valores de $Nu_{\text{Ⓣ}}$ podem se afastar em até 5% dos valores exatos para as geometrias com ângulos mais agudos. Sentiu-se tal problema, que se manifestou mais para pequeno número de aletas e baixos valores de ϕ , quando o ângulo entre a ponta da aleta e o tubo externo é relativamente pequeno. Mas, de uma forma geral, pode-se dizer que as soluções obtidas são boas, ocorrendo apenas algumas discrepâncias nos cantos das geometrias mais desfavoráveis, erros estes que não chegam a influir de forma significativa no número de Nusselt.

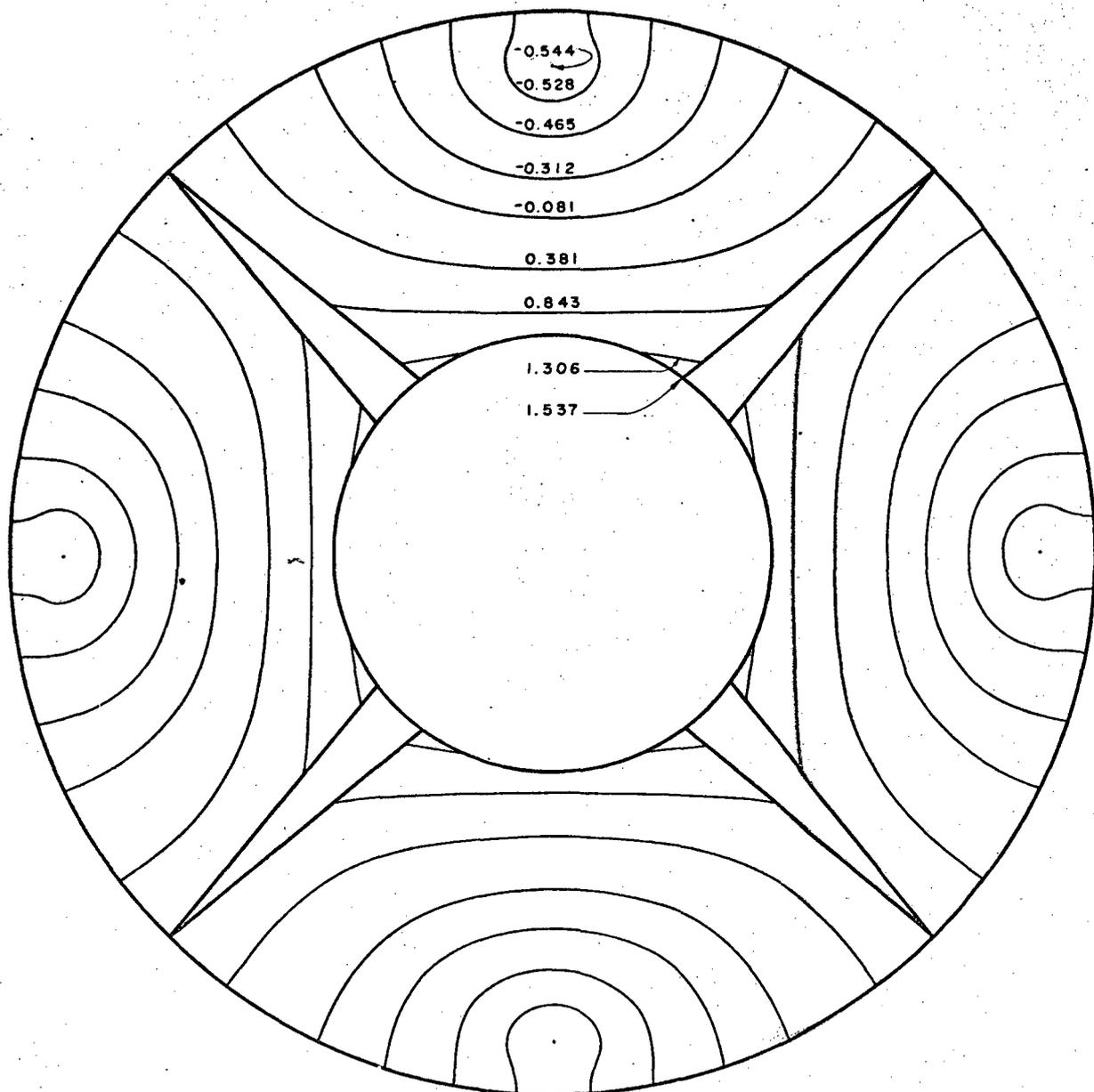


Fig. 17 - Isotermas para $r_o = 0,4$, 4 aletas, $\phi = 0,8$

Na figura 20 estão plotadas as curvas de Nu_{F} em função de ϕ para $r_o = 0,4$.

Da mesma forma que para a condição D , percebe-se uma queda acentuada no número de Nusselt para 20, 16 e 12 aletas. Para 8 aletas Nu_{F} sofre pequena variação, chegando a aumentar com a espessura para 4 aletas.

Na figura 21 temos as mesmas curvas para $r_o = 0,6$.

Nota-se que para esta relação de raios, uma diminuição de ϕ só é prejudicial para 20 e 16 aletas sendo favorável para 4 e 8 aletas.

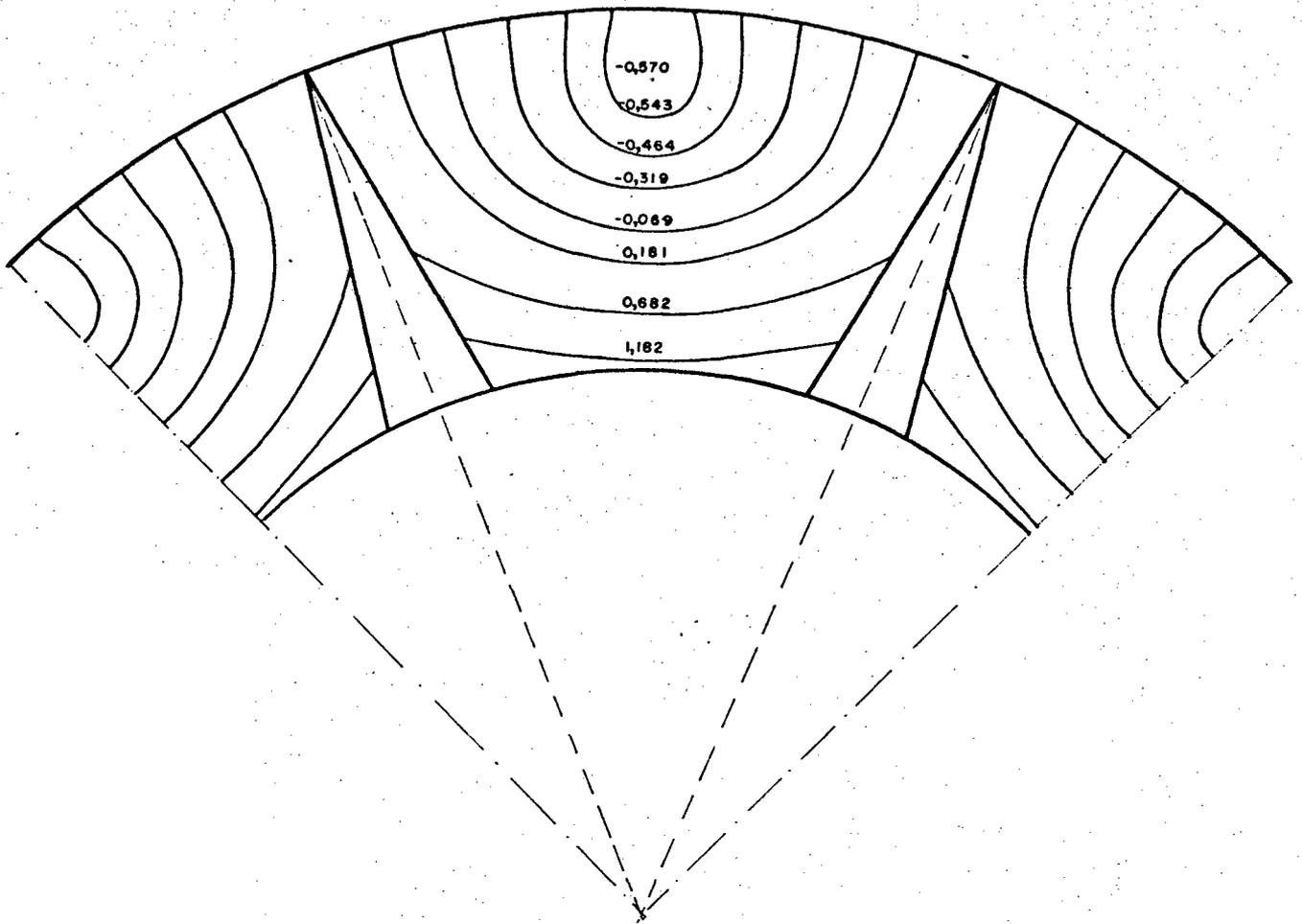


Fig. 18 - Isothermas para $r_0 = 0,6$, 8 aletas, $\phi = 0,75$

A fim de verificar como se comporta o número de Nusselt com variações na condição de contorno, foi resolvido ainda o problema térmico para $r_0 = 0,4$ com $W_{AL} = 1$ e $W_{TE} = 0$, isto é, fluxo na aleta igual ao tubo interno e fluxo nulo no tubo externo. As curvas obtidas são as interrompidas na figura 22, enquanto as cheias são para $W_{AL} = 0,5$ e $W_{TE} = 0$.

Vê-se que ocorre um aumento no número de Nusselt, aumento este menos acentuado para valores baixos de ϕ , onde é pequena a região do escoamento em contato com o tubo interno e consequentemente menor o efeito do fluxo lá prescrito.

Nos quadros II e III estão concentrados todos os valores que permitiram a construção das curvas citadas, bem como alguns outros parâmetros de interesse do escoamento, para $r_0 = 0,4$ e $r_0 = 0,6$, respectivamente.

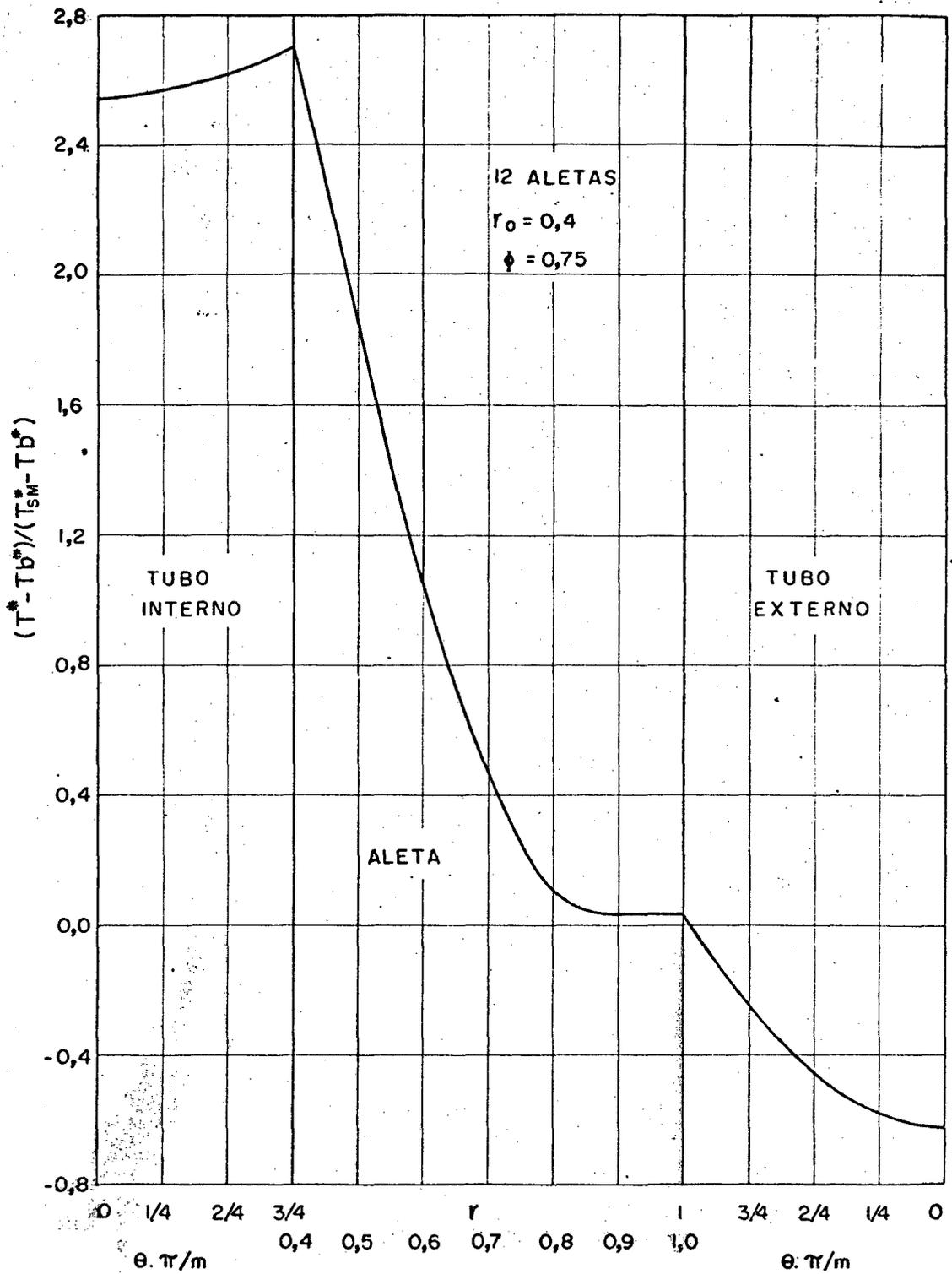


Fig. 19 - Temperatura na fronteira para a condição \textcircled{F} .

m	ϕ	fRe	$K_d(\infty)$	$K_e(\infty)$	$K(\infty)$	L_{hy}^+	u_{max}/u_m	Nu \textcircled{T}	Nu \textcircled{E}
4	0,6	15,094	1,371	2,127	1,513	.0298	2,077	3,851	3,047
4	0,8	15,227	1,362	2,095	1,465	.0282	2,046	3,942	3,015
4	1,0	15,305	1,356	2,070	1,428	.0270	2,021	4,007	2,822
8	0,25	14,562	1,391	2,206	1,628	.0337	2,143	3,601	2,534
8	0,50	14,629	1,381	2,166	1,571	.0322	2,111	3,684	2,578
8	0,75	14,544	1,377	2,150	1,546	.0322	2,102	3,691	2,677
8	1,0	14,390	1,376	2,145	1,539	.0318	2,091	3,661	2,657
12	0,25	14,537	1,410	2,271	1,722	.0354	2,188	3,486	1,723
12	0,50	14,920	1,391	2,209	1,634	.0334	2,151	3,677	1,967
12	0,75	14,994	1,378	2,157	1,559	.0321	2,118	3,781	2,180
12	1,0	14,890	1,371	2,130	1,518	.0312	2,092	3,803	2,275
16	0,25	14,525	1,428	2,338	1,819	.0372	2,233	3,374	1,168
16	0,50	15,183	1,405	2,261	1,712	.0341	2,187	3,643	1,409
16	0,75	15,484	1,383	2,181	1,595	.0326	2,149	3,849	1,657
16	1,0	15,533	1,368	2,122	1,508	.0307	2,101	3,962	1,870
20	0,25	14,511	1,444	2,397	1,906	.0384	2,266	3,279	0,829
20	0,50	15,384	1,418	2,312	1,787	.0360	2,237	3,601	1,029
20	0,75	15,883	1,390	2,210	1,640	.0333	2,181	3,883	1,264
20	1,0	16,090	1,368	2,125	1,514	.0304	2,116	4,088	1,512

QUADRO II - Características do escoamento e da transferência de calor para dutos com $r_0 = 0,4$.

m	ϕ	fRe	$K_d(\infty)$	$K_e(\infty)$	$K(\infty)$	L_{hy}^+	u_{max}/u_m	Nu \textcircled{T}	Nu \textcircled{F}
4	0,75	16,641	1,329	1,970	1,283	.0208	1,916	4,532	3,052
4	0,85	16,953	1,319	1,936	1,234	.0194	1,886	4,695	2,969
4	1,0	17,243	1,310	1,902	1,185	.0181	1,853	4,858	2,731
8	0,50	14,480	1,383	2,173	1,579	.0324	2,111	3,629	3,014
8	0,62	14,568	1,378	2,153	1,550	.0316	2,097	3,684	3,046
8	0,75	14,679	1,373	2,134	1,522	.0307	2,080	3,743	2,945
8	0,87	14,77	1,368	2,116	1,496	.0299	2,065	3,797	2,886
8	1,0	14,85	1,364	2,102	1,475	.0292	2,052	3,849	2,757
12	0,25	14,451	1,394	2,215	1,641	.0341	2,149	3,560	2,533
12	0,50	14,454	1,382	2,169	1,574	.0328	2,115	3,634	2,797
12	0,75	14,362	1,378	2,154	1,522	.0320	2,096	3,640	2,842
12	1,0	14,28	1,377	2,150	1,546	.0322	2,095	3,636	2,71
16	0,25	14,606	1,401	2,240	1,679	.0343	2,165	3,553	2,089
16	0,50	14,763	1,380	2,163	1,566	.0325	2,119	3,714	2,424
16	0,75	14,64	1,375	2,141	1,533	.0316	2,094	3,724	2,574
16	1,0	14,437	1,374	2,139	1,529	.0314	2,085	3,682	2,585
20	0,25	14,722	1,409	2,272	1,726	.0353	2,192	3,534	1,640
20	0,50	15,117	1,381	2,172	1,581	.0322	2,128	3,797	2,031
20	0,75	15,064	1,368	2,119	1,502	.0307	2,086	3,861	2,334
20	1,0	15,845	1,366	2,110	1,487	.0300	2,067	3,84	2,429

QUADRO III - Características do escoamento e da transferência de calor para dutos com $r_o = 0,6$.

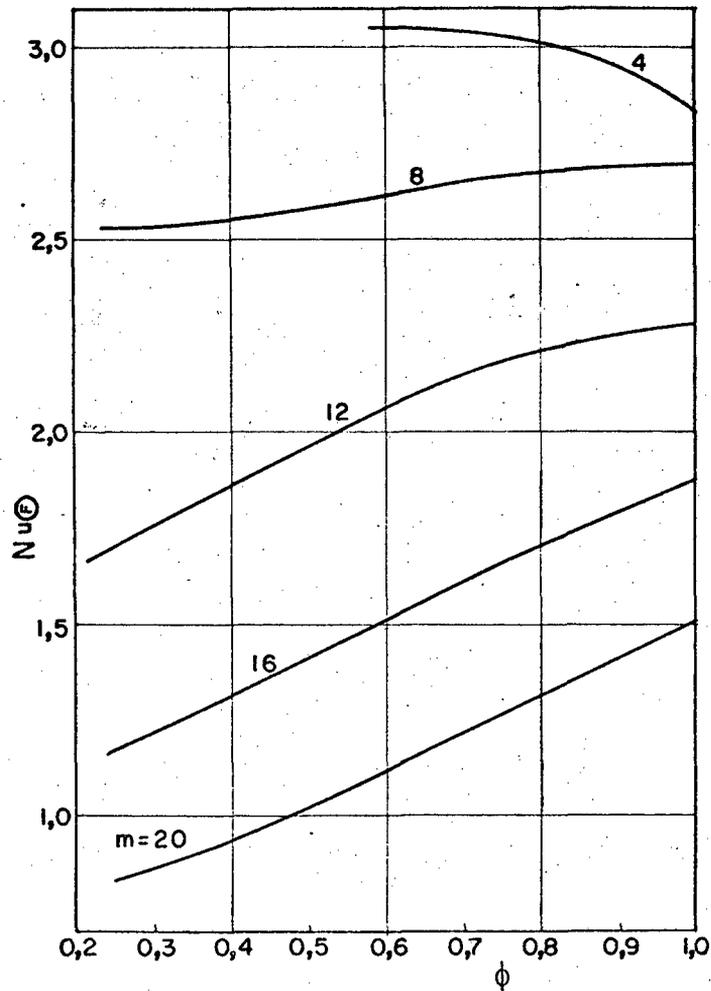


Fig. 20 - Nu_{ϕ} em função de ϕ para $r_0 = 0,4$ e diferentes números de aletas.

Com relação a projetos de trocadores de calor, interessantes comparações podem ser feitas em função do fator de qualidade da área de escoamento e do fator de qualidade do volume.

O fator de qualidade da área de escoamento j/f pode ser expresso por [9]

$$j/f = \frac{Nu Pr^{-1/3}}{fRe} = \frac{1}{A^2} \left(\frac{Pr^{2/3}}{2\rho} \frac{N_{tu} W^{*2}}{\Delta p^*} \right) \quad (6.1)$$

onde

$$N_{tu} = \frac{h^* A_{tc}^*}{W^* C_p} \quad (6.2)$$

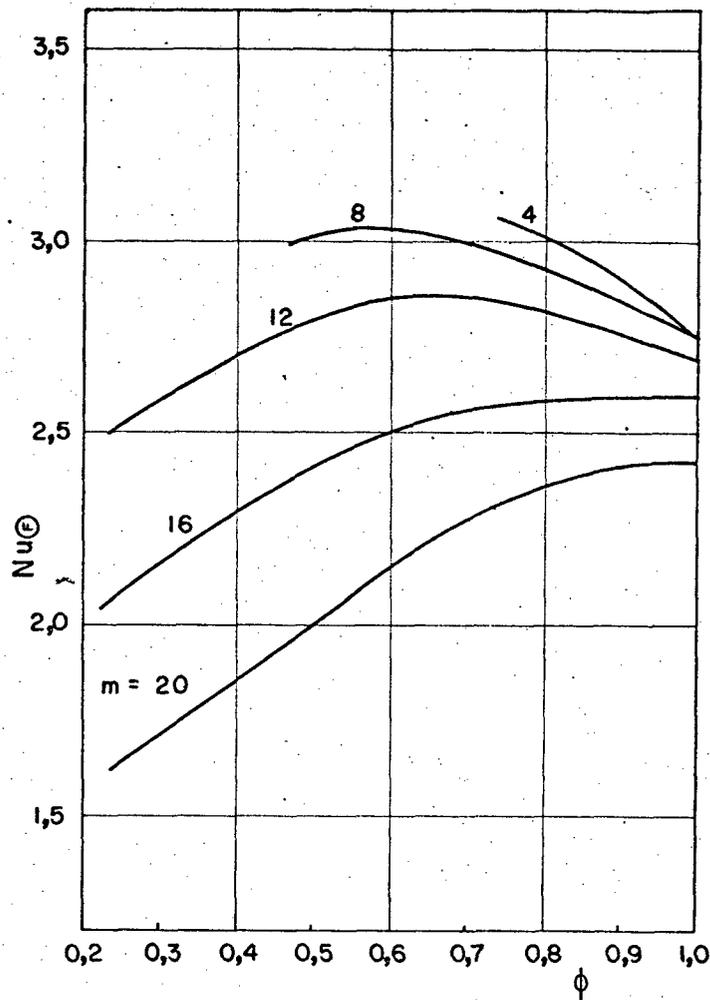


Fig. 21 - Nu_{\odot} em função de ϕ para $r_0 = 0,6$ e diferentes números de aletas.

$$W^* = \rho u_m^* A^* \quad (6.3)$$

Δp é a queda de pressão no trocador de calor
 A_{tc} é a área de troca de calor

Da primeira igualdade na equação (6.1) vê-se que j/f é constante para escoamento laminar plenamente desenvolvido de um fluido especificado, e para uma dada condição de contorno do problema térmico. Da segunda igualdade, que é inversamente proporcional ao quadrado da área de escoamento, para as quantidades entre parênteses mantidas constantes. Além disso, j e f caracterizam a forma da geometria e são independentes da escala

da mesma. Portanto, a comparação dos fatores de qualidade da área de escoamento para diferentes dutos fornece a influência da forma do duto em parâmetros de real interesse no projeto de um trocador de calor, como N_{tu} , W , Δp e A .

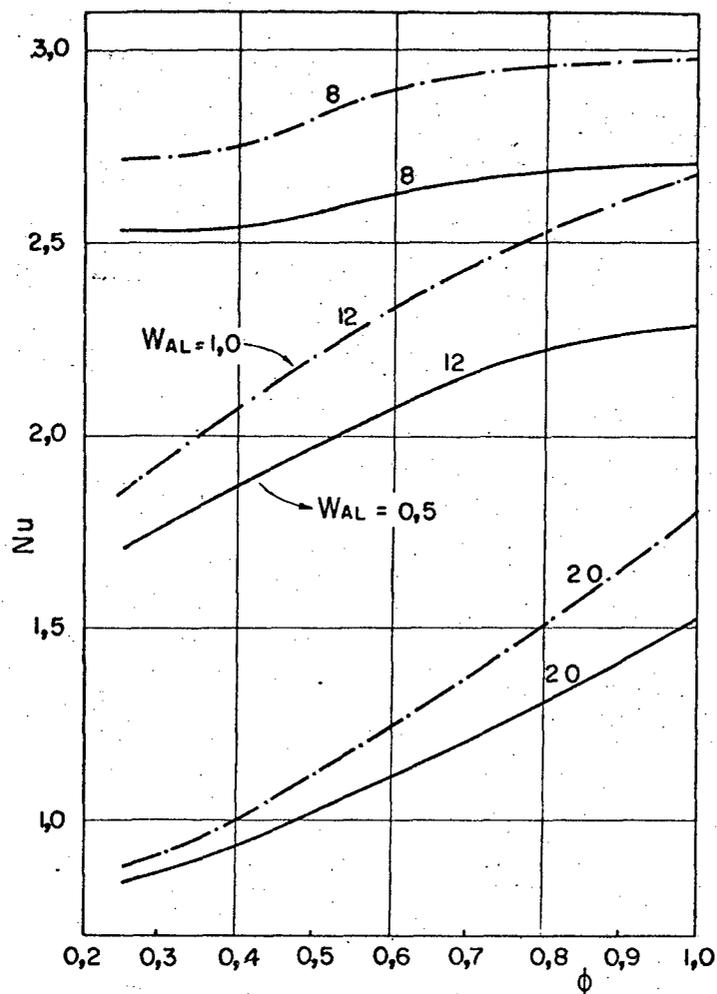


Fig. 22 - Influência do fluxo prescrito no número de Nusselt.

Nas figuras 23 e 24 estão plotadas as curvas de $(j/f)_{\text{①}}$ em função de ϕ para $r_o = 0,4$ e $r_o = 0,6$ respectivamente. Na equação (6.1) foi usado $Pr = 0,680$ que corresponde ao ar seco a 1 atmosfera de pressão a 260°C .

Nota-se que, para as duas relações de raios estudadas, há sempre uma pequena degradação nas seções de escoamento conforme a espessura da aleta aumenta.

Os melhores resultados para $(j/f)_{\text{①}}$ foram obtidos para $r_o = 0,6$ e 4 aletas, que variaram de 0,3097 para $\phi = 0,75$ a 0,3204 para $\phi = 1$, sendo sempre superior ao retângulo com rela-

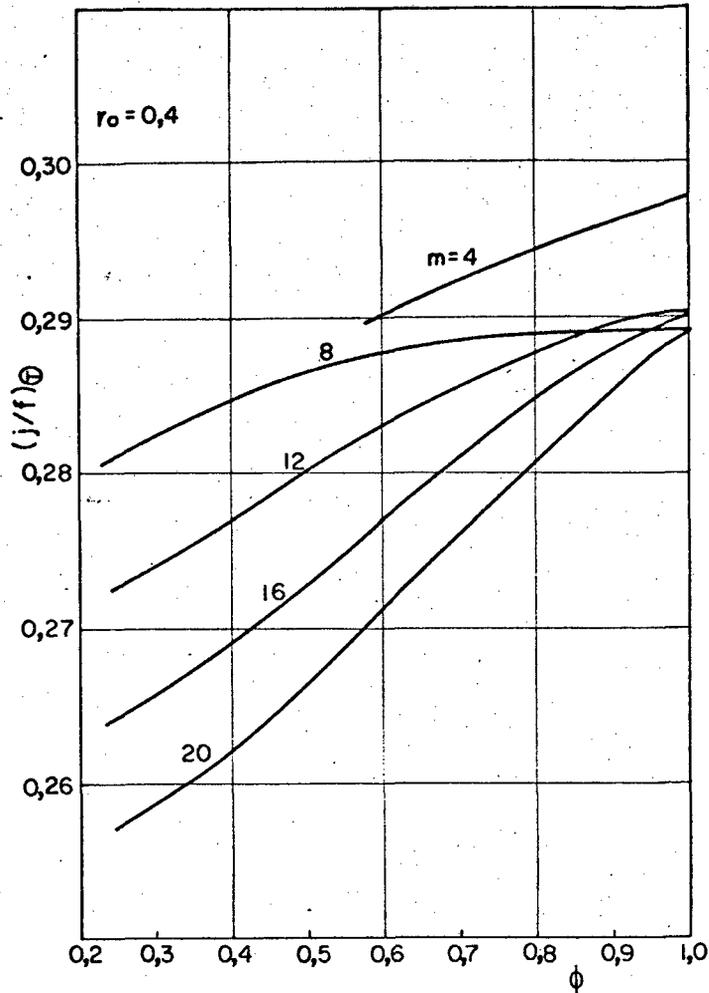


Fig. 23 - Fator de qualidade da área de escoamento em função de ϕ para $r_0 = 0,4$.

ção de lados superior a 2, que possui um fator de qualidade de área igual a 0,3015. Conforme pode ser visto em [9], dentre os dutos estudados naquele trabalho (retângulos, triângulos isósceles, dutos em forma de seno e trapézios) os que apresentaram melhores resultados, foram os retângulos, com $(j/f)_{\oplus}$ variando de 0,288 para o quadrado a 0,39 quando a relação de lados tende a zero (placa plana).

Para $r_0 = 0,4$, 4 aletas, embora os valores de $(j/f)_{\oplus}$ sejam um pouco inferiores aos obtidos para $r_0 = 0,6$, ainda são superiores ao do quadrado. Todas as outras geometrias se revelaram superiores ao quadrado quando a espessura da aleta é pequena ou nula, e inferiores para pequenos valores de ϕ . No entanto, exceto para $r_0 = 0,4$, 20 aletas e $\phi = 0,25$, todos os valores ob

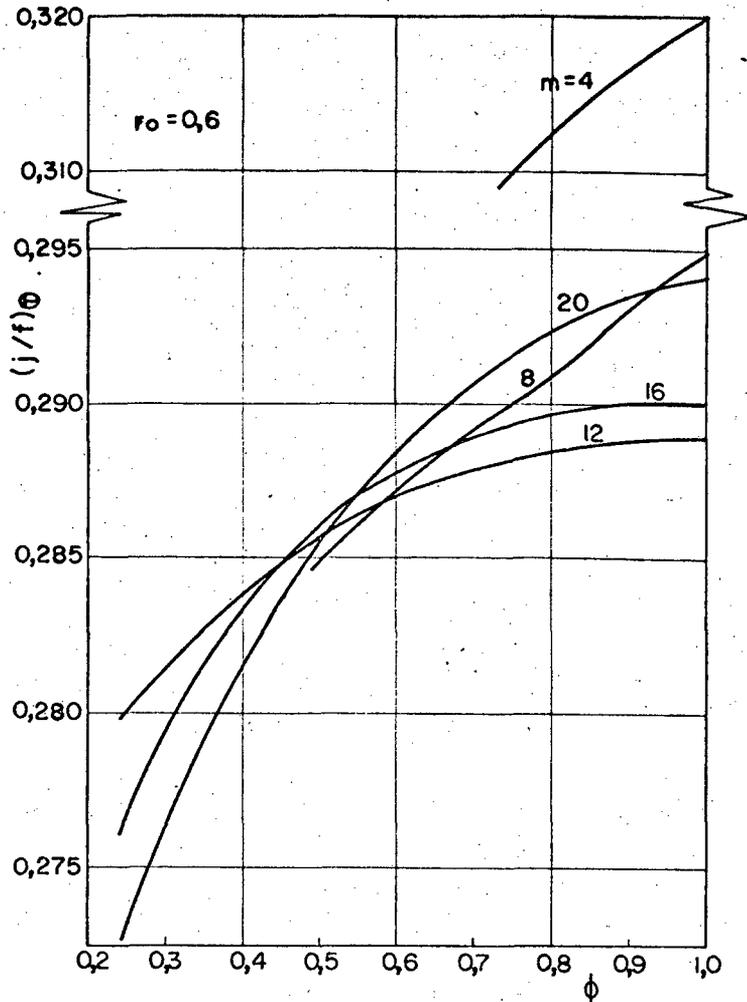


Fig. 24 - Fator de qualidade da área de escoamento em função de ϕ para $r_0 = 0,6$.

tidos para o fator de qualidade da área de escoamento foram superiores ao do triângulo equilátero, que possui a melhor performance como trocador de calor entre todos os triângulos isósceles, com $(j/f)_{\text{T}}$ igual a 0,26533.

Da mesma forma que o número de Nusselt, os resultados de j/f para a condição F , mostrados no quadro IV, são bem inferiores aos resultados para a condição T . Além disso, para esta condição de contorno, há uma queda muito mais acentuada no fator de qualidade da área para as geometrias com 20, 16 e 12 aletas, comportamento este que se inverte para 8 aletas, $r_0 = 0,6$ e 4 aletas, $r_0 = 0,4$ e $r_0 = 0,6$.

Entre todas as geometrias estudadas no presente trabalho, aquela que apresentou maior queda no $(j/f)_{\text{F}}$ com o aumento da espessura da aleta foi a de 20 aletas e $r_0 = 0,4$ onde pa-

ra $\phi = 1$, o fator de qualidade da área é igual a 0,107 caindo para 0,065 com $\phi = 0,25$. Logo, em relação a $\phi = 1$, a geometria com $\phi = 0,25$ possui (j/f) inferior em

$$\frac{0,107 - 0,065}{0,107} = 39,25\% \quad (6.4)$$

e, admitindo-se que o valor da expressão entre parênteses da equação (6.1) se mantenha constante, requer

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{0,065}} - \sqrt{\frac{1}{0,107}}}{\sqrt{\frac{1}{0,107}}} = 28,3\% \quad (6.5)$$

maior área livre de escoamento.

O fator de qualidade da área de escoamento não oferece informações quanto à área de troca de calor e consequentemente, quanto ao volume do trocador de calor. Para que as geometrias sejam comparadas segundo esse critério é usado o fator de qualidade de volume. Este fator é caracterizado por um ponto de máximo no gráfico de h_{STD} versus E_{STD} onde

$$h_{STD} = \frac{k}{Dh^*} Nu = \frac{C_p \mu}{Pr^{2/3}} \frac{1}{Dh^*} jRe \quad (6.6)$$

$$E_{STD} = \frac{W^* \Delta p^*}{\rho^* A_{tc}^*} = \frac{\mu^3}{2\rho^2} \frac{1}{Dh^{*3}} fRe^3 \quad (6.7)$$

Nota-se que h_{STD} é o próprio coeficiente de troca de calor como já definido na equação (5.49). Mais ainda, que E_{STD} tem como unidades W/m^2 , sendo proporcional à potência de bombeamento.

Como para escoamento laminar plenamente desenvolvido, h_{STD} é independente de E_{STD} , ou, de outra forma, o número de Nusselt é independente da potência de bombeamento, tanto mais alto será o fator de qualidade de volume, quanto maior for h_{STD} . Nas figuras 25 e 26, estão plotadas as curvas de h_{STD} em função de ϕ para $r_o = 0,4$ e $r_o = 0,6$, respectivamente, calculados

pela equação (6.6), onde admitiu-se, para efeito de comparação, todos os dutos com diâmetro hidráulico igual a 0,61 mm e $k = 0,04254 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ que é a condutibilidade térmica do ar seco a 1 atm e 260°C .

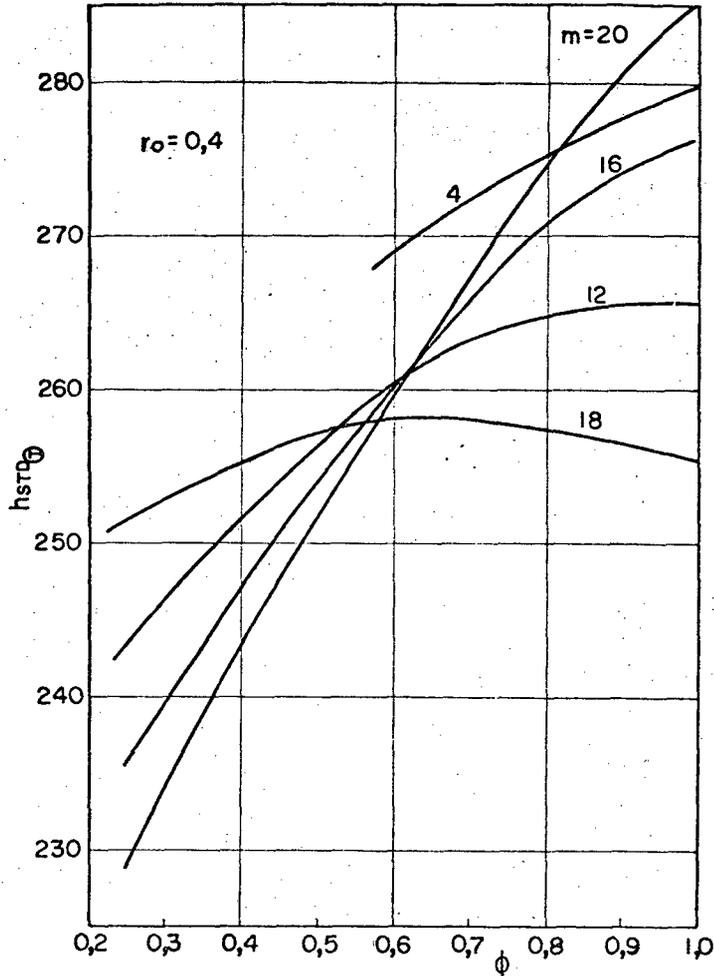


Fig. 25 - h_{STD} para a condição ① em função de ϕ para $r_o = 0,4$

Nota-se, na figura 25, que h_{STD} sempre diminui com o aumento da espessura da aleta. Já para $r_o = 0,6$ (Fig. 26) h_{STD} diminui para 4 e 8 aletas, é aproximadamente constante para 12 e, para 16 e 20 apresenta um ponto de máximo em torno de $\phi = 0,5$.

Novamente aqui, as mais altas performances se obtêm com 4 aletas, $r_o = 0,6$, onde h_{STD} ① varia de $316,3 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$ a $339,0 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$. Estes valores são superiores ao do retângulo com relação de lados 1:2 cujo h_{STD} ① é igual a $287,7 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$.

As geometrias com 4 aletas, $r_o = 0,4$ e 8 aletas com $r_o = 0,6$ e $r_o = 0,4$ revelaram ser superiores ao quadrado (h_{STD} ① = $251,7 \text{ W/m}^2^\circ\text{C}$), também quanto à área de troca de ca-

lor.

Para 12, 16 e 20 aletas, $h_{STD \textcircled{T}}$ é superior ao do quadrado para valores altos de ϕ , sendo, para todas as espessuras, bem superior ao triângulo equilátero ($h_{STD \textcircled{T}} = 217,1 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$).

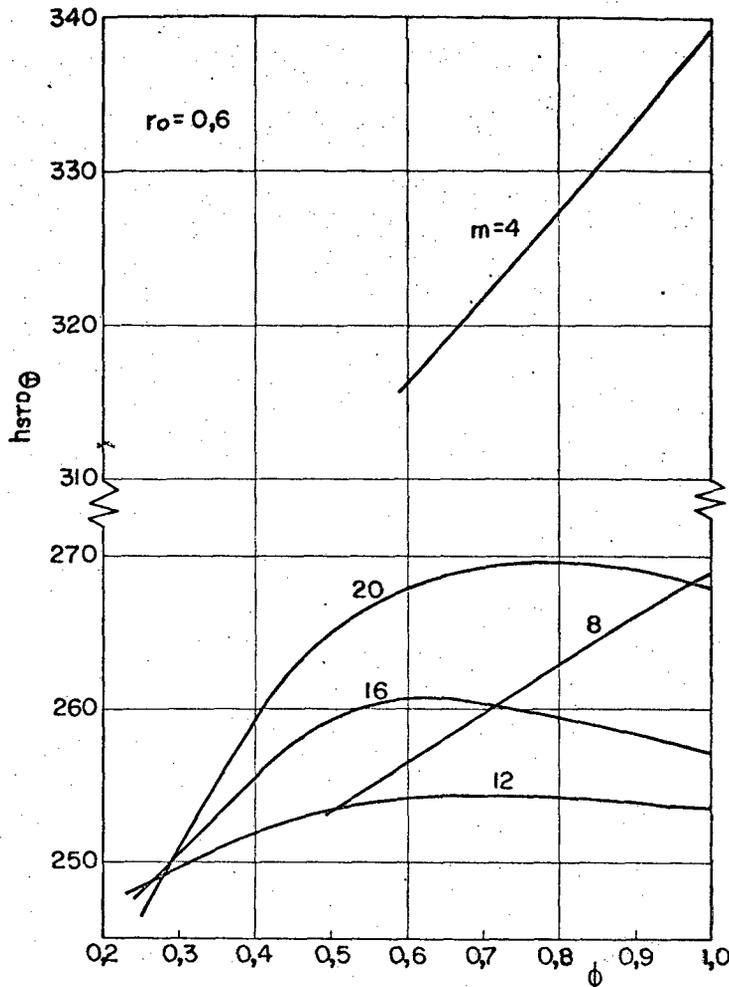


Fig. 26 - $h_{STD \textcircled{T}}$ para a condição \textcircled{T} em função de ϕ para $r_o = 0,6$.

No quadro IV encontram-se os valores de $h_{STD \textcircled{F}}$. A influência do parâmetro ϕ é novamente mais acentuada para 20 aletas, $r_o = 0,4$, onde $h_{STD \textcircled{F}}$ cai de $105,5 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ para $57,9 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$, quando ϕ cai de 1 para 0,25.

Como, para um dado fluxo térmico a área de troca de calor é inversamente proporcional a h_{STD} , em relação a $\phi = 1$, o duto com $\phi = 0,25$ terá

$$\frac{105,5}{57,9} - 1 = 82,2\% \quad (6.8)$$

maior área de troca de calor.

		$r_o = 0,4$				$r_o = 0,6$				
m	ϕ	$(j/f)_{\text{Ⓣ}}$	$(j/f)_{\text{ⓕ}}$	$h_{\text{STD}}_{\text{Ⓣ}}$	$h_{\text{STD}}_{\text{ⓕ}}$	ϕ	$(j/f)_{\text{Ⓣ}}$	$(j/f)_{\text{ⓕ}}$	$h_{\text{STD}}_{\text{Ⓣ}}$	$h_{\text{STD}}_{\text{ⓕ}}$
4	0,6	.290	.230	268,8	212,7	0,75	.310	.209	316,3	213,0
4	0,8	.294	.225	275,1	210,4	0,85	.315	.199	327,6	207,2
4	1,0	.298	.250	279,6	196,9	1,0	.320	.180	339,0	190,6
8						0,50	.285	.237	253,3	210,3
8	0,25	.281	.198	251,3	176,8	0,62	.288	.238	257,1	212,6
8	0,50	.286	.200	257,1	179,9	0,75	.290	.228	261,2	205,5
8	0,75	.289	.209	257,6	186,8	0,87	.292	.222	264,9	201,4
8	1,0	.289	.213	255,5	188,2	1,0	.295	.211	268,6	192,4
12	0,25	.273	.135	243,3	120,3	0,25	.280	.199	248,4	176,8
12	0,50	.280	.150	256,6	137,2	0,50	.286	.220	253,6	195,2
12	0,75	.287	.165	263,9	152,1	0,75	.288	.225	254,0	198,3
12	1,0	.290	.174	265,4	158,8	1,0	.289	.216	253,6	189,1
16	0,25	.264	.091	235,5	81,5	0,25	.277	.163	248,0	145,8
16	0,50	.273	.105	254,4	98,4	0,50	.286	.187	259,2	169,2
16	0,75	.283	.122	268,6	115,6	0,75	.289	.200	259,8	179,6
16	1,0	.290	.137	276,5	130,5	1,0	.290	.204	256,9	180,4
20	0,25	.257	.065	228,8	57,9	0,25	.273	.127	246,6	114,5
20	0,50	.266	.076	251,3	71,8	0,50	.286	.153	265,0	145,7
20	0,75	.278	.090	271,0	88,2	0,75	.291	.176	269,4	162,9
20	1,0	.289	.107	285,3	105,5	1,0	.294	.186	268,0	169,5

QUADRO IV - Fator de qualidade da área de escoamento e fator de qualidade de volume.

Por fim, deve-se ressaltar que estes acréscimos de 28,3% na área livre de escoamento e de 82,2% na de troca de calor do duto com $\phi = 0,25$ em relação ao duto com $\phi = 1$, não ocorrem necessariamente juntas. Por exemplo, se os dois dutos forem projetados com o mesmo valor de E_{STD} e W , da equação (6.7) obtém-se que a queda de pressão Δp do duto com $\phi = 0,25$ será 82,2% maior que a queda de pressão no duto com $\phi = 1$. Logo, a quantidade entre parênteses na equação (6.1), já não será a mesma para os dois dutos e a estimativa anterior de 28,3% maior área de escoamento no duto com $\phi = 0,25$ não é mais verdadeira. Rearranjando-se a equação (6.1), chega-se a

$$A = C / \sqrt{(j/f) \Delta p} \quad (6.9)$$

onde

$$C = \sqrt{\frac{Pr^{2/3}}{2\rho} N_{tu} W^2} \quad (6.10)$$

Admitindo-se o mesmo valor de C para os dois trocadores, verifica-se que, ao contrário, o trocador com $\phi = 0,25$ é que terá uma área livre de escoamento menor em

$$1 - \sqrt{\frac{(j/f)_1 \Delta p_1}{(j/f)_{0,25} \Delta p_{0,25}}} \quad (6.11)$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{0,107}{0,065} \cdot \frac{1}{1,822}} \quad (6.12)$$

$$= 4,95\% \quad (6.13)$$

em relação à área de escoamento do trocador com $\phi = 1$.

No entanto, se os dois trocadores forem projetados para o mesmo Δp e W (diferentes E_{STD}) os resultados anteriores serão válidos e o trocador com $\phi = 0,25$ terá 28,3% maior área de escoamento. Para estender-se estes resultados para área frontal dos trocadores, deve-se ainda levar em consideração que o trocador com $\phi = 0,25$ possui menor área livre de escoamento por unidade de área frontal, devido ao aumento da espessura das aletas.

Com os dados disponíveis no quadro IV, comparações semelhantes podem ser feitas para todas as outras geometrias.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Com relação aos métodos de solução usados, pode-se concluir que o proposto por Sparrow e Haji-Sheikh é de difícil aplicação e leva, muitas vezes, a resultados não satisfatórios, enquanto que o proposto por Shah, embora não tenha conseguido resolver com precisão suficiente o duplo tubo da figura 5, conduz a soluções bastante precisas para um grande número de dutos de difícil solução analítica.

O programa construído no presente trabalho é relativamente rápido, gastando aproximadamente 4 minutos no computador IBM/360 para resolver os problemas dinâmico e térmico, e realizar todas as integrações numéricas necessárias para determinar os parâmetros de interesse do escoamento. Esse tempo de processamento é relativo às soluções onde são tomados 50 pontos sobre a fronteira e usados 35 termos nas séries, o que é suficiente para a maioria dos dutos.

Conforme já comentado no capítulo 6, os efeitos da espessura da aleta se fazem notar principalmente quando o número de aletas é grande. Nestes casos, a tendência foi sempre do fator de qualidade da área de escoamento e do fator de qualidade do volume diminuírem com o aumento da espessura da aleta. Foi determinado que para a condição \textcircled{F} , o duplo tubo com 20 aletas, $r_o = 0,4$ e $\phi = 0,25$ deve ter 28,3% maior área livre de escoamento e 82,2% maior área de troca de calor em relação ao duplo tubo com $\phi = 1$, segundo o critério de mesma potência de bombeamento.

De uma forma geral, todas as geometrias estudadas tem melhor performance térmica que o triângulo equilátero. Muitas vezes são superiores ao quadrado e outras, quando a espessura da aleta é nula ou pequena, chegam a ser superiores ao retângulo com relação de lados igual a 2.

Por fim, quanto ao fato de as geometrias em estudo apre-

sentarem cantos vivos, espera-se, com base numa investigação feita por Shah [9] em triângulos equiláteros, que o arredondamento dos cantos devido aos processos de fabricação não venham a alterar de modo sensível a sua performance térmica.

Deixa-se como sugestão para um trabalho futuro, a tentativa de estender o método de solução para seções abertas, em que as condições de contorno dos problemas dinâmico e térmico ocorrem tanto na série solução como em suas derivadas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERGLES, A.E. - "Survey and evaluation of techniques to augment convective heat and mass transfer", in: Progress in heat and mass transfer, Vol. 1, Pergamon Press, Elmsford, N.Y., pp. 331-424, 1969.
- [2] ECKERT, E.R.G.; IRVINE, T.F.Jr.; YEN, J.T. - "Local laminar heat transfer in wedge-shaped passages", Transactions of the A.S.M.E., Vol. 80, pp. 1433-1438, 1958.
- [3] SPARROW, E.M.; CHEN, T.S.; JONSSON, V.K., - "Laminar flow and pressure drop in internally finned annular ducts", Int. Journal of Heat Transfer, Vol. 7, pp. 583-585, May, 1964.
- [4] HU, M.H.; CHANG, Y.P. - "Optimization of finned tubes for heat transfer in laminar flow", Journal of Heat Transfer Transactions of the A.S.M.E., Vol. 95, pp. 332-338, August, 1973.
- [5] BERGLES, A.E.; BROWN, G.S.Jr.; SNIDER, W.D. - "Heat transfer performance of internally finned tubes", A.S.M.E., paper nº 71-H7-37.
- [6] MASLIYAH, J.H.; NANDAKUMAR, K. - "Heat transfer in internally finned tubes", Journal of Heat Transfer - Transactions of the A.S.M.E., Vol, 98, pp. 257-261, May, 1976.
- [7] MALISKA, C.R. - "Estudo dinâmico e térmico do escoamento laminar em um duplo tubo aletado", Tese de Mestrado, CT, Universidade Federal de Santa Catarina, Julho de 1975.
- [8] COLLE, S. - "Uma previsão para o desempenho ótimo de duplo tubo aletado para a transferência de calor em regime laminar", Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Dezembro, 1976.
- [9] SHAH, R.K. - "Laminar flow friction and forced convection

heat transfer in ducts of arbitrary geometry", Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 18, pp. 849-862, 1975.

- [10] SPARROW, E.M.; HAJI-SHEIKH, A. - "Flow and heat transfer in ducts of arbitrary shape with arbitrary thermal boundary conditions", Journal of Heat Transfer - Transactions of the A.S.M.E., pp. 351-358, November, 1966.
- [11] BIRD, R.B.; STEWART, W.E.; LIGHTFOOT, F.N. - "Transport Phenomena", John Wiley & Sons, Inc. 1960.
- [12] SILVA, A.F.C.da; MALISKA, C.R. - "Solução de problemas de convecção forçada em dutos de seção arbitrária usando o método de Golub", Anais do IV COBEM, pp. 625-639, Dezembro de 1977.
- [13] DAVIS, J.P. - "Orthonormalizing codes in numerical analysis" in: Survey of numerical analysis, J. Todd Editor, McGraw Hill Book Company, 1962.
- [14] DEMITOVICH, B.P.; MARON, I.A. - "Computational Mathematics" M.I.R. - Publishers, Moscow, 1973.
- [15] HOFFMANN, K.; KUNZE, R. - "Linear Algebra", Prentice Hall International Editor, 1971.
- [16] HEHL, M. EMIL - "Sistema de programação FORTRAN IV G-H" McGraw-Hill do Brasil, 1972.

8 - APÊNDICES

APÊNDICE 1 - LISTAGEM DO PROGRAMA DE COMPUTADOR

APÊNDICE 2 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DE SIMPSON BIDI-
MENSIONAL

APÊNDICE 3 - O MÉTODO DE SPARROW E HAJI-SHEIKH

APÊNDICE 4 - PROPRIEDADES DA REFLEXÃO DE HOUSEHOLDER

APÊNDICE 1

LISTAGEM DO PROGRAMA DE COMPUTADOR

CONVECCAO FORCADA EM UM DUPLO TUBO ALETADO
COM ALETAS DE ESPESSURA FINITA

TESE DE MESTRADO

POS-GRADUACAO EM ENG. MECANICA
OPCAO TERMOTECNICA

ANTONIO FABIO CARVALHO DA SILVA

PROGRAMA PRINCIPAL

DADOS DE ENTRADA DO PROGRAMA

NPTI = NUMERO DE PONTOS NO TUBO INTERNO
 NPAL = NUMERO DE PONTOS NA ALETA
 NPTE = NUMERO DE PONTOS NO TUBO EXTERNO
 NPA = NUMERO DE PONTOS NO ANGULO (IMPAR)
 NPR = NUMERO DE PONTOS NO RAI0 (IMPAR)
 N = NUMERO DE TERMOS NA SERIE DA VELOCIDADE
 E DA TEMPERATURA (IMPAR)
 NALET= NUMERO DE ALETAS
 RR = RELACAO DE PAIOS
 FIA = ESPFESSURA DA ALETA (SE FIA=1 A ESPES
 SUR A E NUIA, SE FIA=0 AS ALETAS SE
 TOCAM NO TUBO INTERNO)

IMPLICIT REAL*(A-H,O-Z), INTEGER(I)
 DIMENSION XC(400),YC(400),P(20,20),CSV(50),CST(50),T(20,20)
 DIMENSION XCV(140),YCV(140),XMV(140),QPV(140),V(140)
 DIMENSION R(20),TETA(20),CSTP(50),TN(20,20),XL(70),XM(70)
 DIMENSION QP(70),XCE(70),YCE(70),XISO(10),XLV(140)

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

0001
0002
0003
0004
0005

```

0006 C006
0007 $L=1
0008 AA=-1.
0009 PI=DARCOS(AA)
0010 999 READ($L,1)NPTI,NPAL,NPTE,NPA,NPR,N,NALET,RR,FIA
0011 1 FORMAT(7I2,2F5.2)
0012 PIM=PI/NALET
0013 FI=FIA*PIM
0014 IF(NPTI-99)997,996,996
0015 997 NTE=2*(NPAL+NPTI+NPTI)-2
0016 M=NTE
0017 NT=NPR*NPA
0018 CALL TESE(XCE,YCE,NPTI,NPAL,NPTE,NTE,AREA,PERIM,DE,NALET,FI,XL,XM,
*OP,OPTI,QPA,QPTE,A,B,RR,DIST,FM,O)
CALL GOLUB(M,N,XCE,YCE,CSV,CST,O,XL,XM,QP,CFRE,DE,FM)
CALL GRADE(NALET,RR,NPA,NPR,NT,XC,YC,SA,SR,R,TETA)
CALL VELOC(XC,YC,P,NPR,NPA,NT,N,CSV,A,B,FM)
CALL VMED(NPA,NPR,NT,P,RR,NALET,SA,SR,VM,AREA,FM)
CFRE=DE**2/(2.*VM)
DO 3 I=1,NPR
DO 3 J=1,NPA
3 P(I,J)=P(I,J)/VM
VMAX=0.
DO 10 I=1,NPR
DO 10 J=1,NPA
IF(P(I,J)-VMAX)10,10,12
12 VMAX=P(I,J)
10 CONTINUE
WRITE(5,2)NPTI,NPAL,NPTE,NTE,N,NPR,NPA,NT,RR,NALET,FIA,AREA,PERIM,
1DE,CFRE,VM,VMAX
2 FORMAT(1H1,/,/,20X,NPTI=,I2,/,20X,NPAL=,I2,/,20X,NPTE=,I2
1,/,20X,NTE=,I2,/,20X,N=,I2,/,20X,N=,I2,/,20X,NPR=,I2,/,20X,NPA=,I2
2,/,20X,NT=,I4,/,20X,FP=,F6.4,/,20X,NALET=,I2,/,20X,FI=,
3,F8.5,/,20X,AREA=,D17.10,/,20X,PERIM=,D17.10,/,20X,DE=,D1
47.10,/,20X,CFRE=,D17.10,/,20X,VM=,D17.10,/,20X,VMX=,D16.9)
NIS=3
WRITE(NIS,523)
523 FORMAT(1H1,45X,'CAMPO DE VELOCIDADE')
WRITE(NIS,817)(TETA(J),J=1,NPA)
0035
0036
0037
0038

```



```

0075 DO 6 I=1,NPR
0076 DO 6 J=1,NPA
0077 TN(I,J)=P(I,J)*T(I,J)
0078 CALL VMED(NPA,NPR,NT,IN,PR,NALET,SA,SR,TB,AREA,FM)
0079 BNUDH=(DE**4)/(8.*CFPE*(TSM-TB))
0080 DO 22 I=1,NPR
0081 DO 22 J=1,NPA
0082 T(I,J)=(Y(I,J)-TB)/(TSM-TB)
0083 WRITE(NIS,616)
0084 FORMAT('J',45X,'TEMP-TMIST/TSM-TMIST')
0085 WRITE(NIS,817)(TETA(J),J=1,NPA)
0086 DO 115 I=1,NPR
0087 WRITE(NIS,316)R(I),(Y(I,J),J=1,NPA)
0088 WRITE($,24)TB,TSM,BNUDH
0089 FORMAT(//,20X,'TB =',D17.10,/,20X,'TSM =',D17.10,/,20X,'NUDH =',D
117.10)
0090 CALL TFRON(XCV,YCV,V,NTEV,N,CSV,CSTP,FM)
0091 DO 41 I=1,NTEV
0092 V(I)=(V(I)-TB)/(TSM-TB)
0093 WRITE($,42)
0094 FORMAT(//,40X,'VERIFICACAO DA TEMPERATURA NA FRONTEIRA',//)
0095 KTP=-1
0096 GO TO 43
0097 WRITE($,46)
0098 FORMAT(//,40X,'CALCULO DOS FLUXOS NA FRONTEIRA',//)
0099 CALL FLUXO(XCV,YCV,V,NTEV,N,CSV,CSTP,XLV,XMV,CFRE,DE,FM)
0100 KTP=1
0101 GO TO 43
0102 NVISO=0
0103 TMAX=1.0
0104 TMIN=T(1,1)
0105 DO 52 I=1,NPR
0106 DO 52 J=1,NPA
0107 IF(T(I,J)-TMIN)105,52,52
0108 TMIN=T(I,J)
0109 IMIN=I
0110 JMIN=J
0111 52 CONTINUE

```

```

0112 DIF=TMAX-TMIN
0113 DSI=DIF/(NI+1)
0114 DO 106 I=1,NI
0115 XISO(I)=TMIN+I*DSI
0116 WRITE($,102)
0117 FORMAT(1H1,4X,'DETERMINACAO DAS ISOTERMAS',///)
0118 CALL ISO(NI,XISO,T,R,TETA,NPA,NPR)
0119 WRITE($,108)TMAX
0120 FORMAT(///,20X,'TMAX =',F8.5)
0121 WRITE($,109)TMIN,TETA(JMIN),R(IMIN)
0122 FORMAT(///,20X,'TMIN =',F8.5,10X,'TETA =',F8.5,10X,'RAIO =',F8.5)
0123 IF(NVISO)110,110,111
0124 110 WRITE($,53)
0125 FORMAT(1H1,///,20X,'RESULTADOS PARA FLUXO PRESCRITO',//)
0126 NVISO=1
0127 CALL GOLUB(M,N,XCE,YCE,CSV,CST,1,XL,XM,QP,CFRE,DE,FM)
0128 CALL TEMP(XC,YC,T,NPR,NPA,NT,N,CSV,CST,A,B,FM)
0129 DO 50 I=1,NPR
0130 DO 50 J=1,NPA
0131 TN(I,J)=T(I,J)*P(I,J)
0132 CALL VMED(NPA,NPR,NT,IN,RR,NALET,SA,SR,TB,AREA,FM)
0133 CALL TFRON(XCV,YCV,V,NTEV,N,CSV,CST,FM)
0134 CALL SIM(NTEV,NPTIV,NPALV,NPTEV,V,RR,PERIM,1,TSM,FI,NALET,DIST,FM)
0135 BNUDH=DE**4*PERIM/(8.*CFRE*(TSM-TB)**2.*(RR*FI+DIST))
0136 DO 51 I=1,NPR
0137 DO 51 J=1,NPA
0138 T(I,J)=(T(I,J)-TB)/(TSM-TB)
0139 WRITE(NIS,616)
0140 WRITE(NIS,817)(TETA(J),J=1,NPA)
0141 DO 56 I=1,NPR
0142 WRITE(NIS,316)R(I),(T(I,J),J=1,NPA)
0143 WRITE($,24)TB,TSM,BNUDH
0144 DO 54 I=1,NTEV
0145 V(I)=(V(I)-TB)/(TSM-TB)
0146 TMAX=V(1)
0147 DO 104 I=1,NTEV
0148 IF(V(I)-TMAX)104,104,103
0149 103 TMAX=V(I)

```

```

0150 CONTINUE
0151 WRITE($,55)
0152 FORMAT(//,40X,'CALCULO DA TEMPERATURA NA FRONTEIRA',//)
0153 WRITE($,36)
0154 WRITE($,35)(V(I),I=1,NPTIV)
0155 WRITE($,37)
0156 J=NPTIV+NPALV+1
0157 WRITE($,35)(V(I),I=NPTIV,J)
0158 WRITE($,38)
0159 WRITE($,35)(V(I),I=J,NTEV)
0160 CALL FLUXO(XCV,YCV,V,NTEV,N,CSV,CST,XLV,XMV,CFRÈ,DE,FM)
0161 WRITE($,60)QPTI
0162 FORMAT(//,40X,'VERIFICACAO DO FLJXO NA FRONTEIRA',//,35X,'NO TUBO
*INTERNO =',D17.10,//)
0163 WRITE($,35)(V(I),I=1,NPTIV)
0164 WRITE($,61)QPA
0165 FOPMAT(//,35X,'NA ALETA=',D17.10,//)
0166 WRITE($,35)(V(I),I=NPTIV,J)
0167 WRITE($,62)QPTI
0168 FORMAT(//,35X,'NO TUBO EXTERNO =',D17.10,//)
0169 WRITE($,35)(V(I),I=J,NTEV)
0170 GO TO 112
0171 DO 7 I=1,NPR
0172 DO 7 J=1,NPA
0173 T(I,J)=P(I,J)*P(I,J)
0174 CALL VMED(NPA,NPR,NT,I,RR,NALET,SA,SR,XKD,AREA,FM)
0175 DO 8 I=1,NPR
0176 DO 8 J=1,NPA
0177 P(I,J)=T(I,J)*P(I,J)
0178 CALL VMED(NPA,NPR,NT,P,RR,NALET,SA,SR,XKE,AREA,FM)
0179 XK=2.*(XKE-XKD)
0180 XLHY=(VMAX*2-1.-XK)/(4.*CFRE)
0181 WRITE($,13)XKO,XKE,XK,XLHY
0182 FORMAT(//,20X,'KD(INF) =',D17.10,/,20X,'KE(INF) =',D17.10,/,20X,'
LK(INF) =',D17.10,/,20X,'LHY =',D17.10)
0183 GO TO 999
0184 996 CALL EXIT
0185 END

```



```

0031 DO 503 I=1,M
0032 K=1
0033 SOM=0.
0034 DO 504 J=1,NMAIS
0035 C=DCOS(J*TETA(I))
0036 S=DSIN(J*TETA(I))
0037 K=K+1
0038 SOM1=CSV(K)*C
0039 K=K+1
0040 SOM2=CSV(K)*S
0041 SOM=(SOM1+SOM2)*R(I)**(J+2)/(4.)*(J+1)+SOM
0042 SOM Y(I)=CSV(I)*R(I)**2/4.-R(I)**4/64.+SOM
0043 DO 505 I=1,M
0044 Y(I)=-Y(I)
0045 GO TO 300
0046 1 N=N-1
0047 DO 306 I=1,M
0048 A(I,1)=XL(I)*DCOS(TETA(I))-XM(I)*DSIN(TETA(I))*R(I)
0049 A(I,2)=XL(I)*DSIN(TETA(I))+XM(I)*DCOS(TETA(I))*R(I)
0050 DO 305 J=3,N,2
0051 K=(J+1)/2
0052 305 A(I,J)=K*R(I)**(K-1)*(XL(I)*DCOS(K*TETA(I))-XM(I)*R(I)*DSIN(K*TETA
2(I)))
0053 DO 306 J=4,N,2
0054 K=J/2
0055 306 A(I,J)=K*R(I)**(K-1)*(XL(I)*DSIN(K*TETA(I))+XM(I)*R(I)*DCOS(K*TETA
1(I)))
0056 N=N+1
0057 DO 307 I=1,M
0058 K=1
0059 SOM1=0.
0060 SOM2=0.
0061 SOMT=0.
0062 NMAIS=(N-1)/2
0063 DO 308 J=1,NMAIS
0064 K=K+1
0065 SOM1=CSV(K)*(XL(I)*(J+2)*DCOS(J*TETA(I))-XM(I)*J*R(I)*DSIN(J*TETA(
3I)))
K=K+1

```

```

0067 SOM2=CSV(K)*(XL(I)*(J+2)*DSIN(J*TETA(I))+XM(I)*J*R(I)*DCOS(J*TETA(
4 I)))
0068 SOM=SOM1+SOM2
0069 SOM=SCM*R(I)**(J+1)/(4.*(J+1.))
0070 SOMT=SOMT+SOM
308 SOMT=-XL(I)*(CSV(1)*R(I)/2.-R(I)**3/16.)-SOMT
0071 SOMT=-XL(I)*(CSV(1)*R(I)/2.-R(I)**3/16.)-SOMT
0072 Y(I)=QP(I)*DE**3/(8.*CFRE)+SOMT
0073 N=N-1
0074 DO 309 I=1,M
0075 YG(I)=Y(I)
0076 NTC=0
0077 DO 8 K=1,N
0078 SMAX=0.
0079 DO 9 J=K,N
0080 S=0.
0081 DO 10 I=1,M
0082 S=S+A(I,J)**2
0083 IF(S-SMAX)9,9,11
0084 I1 KPIV=J
0085 SMAX=S
0086 CONTINUE
0087 IF(KPIV-K)12,12,13
0088 I3 NTC=NTC+1
0089 KA(NTC)=K
0090 KN(NTC)=KPIV
0091 DO 14 LT=1,M
0092 TFOCA=A(LT,K)
0093 A(LT,K)=A(LT,KPIV)
0094 A(LT,KPIV)=TFOCA
0095 I2 ALFA=0.
0096 DO 15 I=K,M
0097 ALFA=ALFA+A(I,K)**2
0098 AK=A(K,K)
0099 BI=1.
0100 ALFA=DSQRT(ALFA)*DSIGN(BI,AK)
0101 BETA=ALFA*(A(K,K)+ALFA)
0102 IF(K-1)16,16,17
0103 K1=K-1
0104 DO 18 I=1,K1

```

```

0105 18 V(I)=0.
0106 16 I=K
0107 V(I)=A(I,I)+ALFA
0108 K2=K+1
0109 DO 19 I=K2,M
0110 V(I)=A(I,K)
0111 DO 200 J=K,N
0112 GAMA=0.
0113 DO 21 I=1,M
0114 GAMA=GAMA+V(I)*A(I,J)
0115 GAMA=GAMA/BETA
0116 DO 23 I=1,M
0117 A(I,J)=A(I,J)-GAMA*V(I)
0118 200 CONTINUE
0119 GAMA=0.
0120 DO 100 I=1,M
0121 GAMA=GAMA+V(I)*Y(I)
0122 GAMA=GAMA/BETA
0123 DO 101 I=1,M
0124 Y(I)=Y(I)-GAMA*V(I)
0125 8 CONTINUE
0126 L=N
0127 25 SUM=0.
0128 IF(L-N)26,27,27
0129 CS(L)=(Y(L)-SUM)/A(L,L)
0130 IF(L-1)28,28,29
0131 29 L=L-1
0132 GO TO 25
0133 JB=L+1.
0134 DO 30 J=JB,N
0135 SUM=SUM+A(L,J)*CS(J)
0136 GO TO 27
0137 28 IF(NTC)32,32,33
0138 33 DO 34 K1=1,NTC
0139 K15=NTC-K10+1
0140 K11=KA(K15)
0141 K12=KN(K15)
0142 TFOC=CS(K11)

```

```

0143 CS(K11)=CS(K12)
0144 CS(K12)=TROC
0145 34 IF(KK)310,302,301
0146 302 DO 320 I=1,M
0147 A(I,1)=1.
0148 DO 331 J=2,N,2
0149 K=J/2
0150 331 A(I,J)=R(I)**K*DCOS(K*TETA(I))
0151 DO 320 J=3,N,2
0152 K=(J-1)/2
0153 320 A(I,J)=R(I)**K*DSIN(K*TETA(I))
0154 DO 303 I=1,N
0155 303 CSV(I)=CS(I)
0156 DO 400 I=1,M
0157 CS(I)=0.
0158 DO 400 J=1,N
0159 400 CS(I)=CS(I)+CSV(J)*A(I,J)
0160 GO TO 321
0161 301 DO 304 I=1,N
0162 304 CST(I+1)=CS(I)
0163 CST(1)=0.
0164 DO 326 I=1,M
0165 A(I,1)=XL(I)*DCOS(TETA(I))-XM(I)*DSIN(TETA(I))*R(I)
0166 A(I,2)=XL(I)*DSIN(TETA(I))+XM(I)*DCOS(TETA(I))*R(I)
0167 DO 325 J=3,N,2
0168 K=(J+1)/2
0159 325 A(I,J)=K*R(I)**(K-1)*(XL(I)*DCOS(K*TETA(I))-XM(I)*R(I)*DSIN(K*TETA
1(I)))
DO 326 J=4,N,2
K=J/2
0170 326 A(I,J)=K*R(I)**(K-1)*(XL(I)*DSIN(K*TETA(I))+XM(I)*R(I)*DCOS(K*TETA
2(I)))
DO 396 I=1,M
CS(I)=0.
0173 0174 DO 396 J=1,N
0175 CS(I)=0.
0176 396 CS(I)=CS(I)+CST(J+1)*A(I,J)
0177 N=N+1
0178 GO TO 321

```

```

0179
0180
0181
0182
0183
0184
0185
0186
0187
0188
0189
0190
0191
0192
0193
0194
0195
0196
0197
0198
0199
0200
0201
0202
0203
0204

310 DO 311 I=1,N
311 CST(I)=CS(I)
DO 322 I=1,M
A(I,I)=1.
DO 323 J=2,N,2
K=J/2
323 A(I,J)=R(I)**K*DCOS(K*TETA(I))
DO 322 J=3,N,2
K=(J-1)/2
322 A(I,J)=R(I)**K*DSIN(K*TETA(I))
DO 312 I=1,M
CS(I)=0.
DO 312 J=1,N
312 CS(I)=CS(I)+CST(J)*A(I,J)
321 WRITE($,403)
403 FORMAT(1H1,22X,'VALORES EXATOS',5X,'VALORES DESTA EXPANSAO',//)
WRITE($,404)(YG(I),CS(I),I=1,M)
404 FORMAT(20X,D17.10,10X,D17.10)
DELTA=0.
DO 405 I=1,M
405 DELTA=DELTA+(YG(I)-CS(I))**2
RMS=DSQRT(DELTA/M)
WRITE($,406)FMS
406 FORMAT(//,40X,'RMS =',D17.10)
RETURN
END

```

0001 SUBROUTINE TESE(X,Y,NPTI,NPA,NPTE,NTE,AREA,PERIM,DE,NALET,FI,XL,XM
*,QP,QPTI,QPA,QPTE,A,B,RR,DIST,FM,KJ)

A SUBROTINA TESE CALCULA TODOS OS DADOS ESPECIFICOS
DA GEOMETRIA EM ESTUDO (A AREA, O PERIMETRO E O
DIAMETRO HIDRAULICO, AS COORDENADAS DOS PONTOS SOBRE
A FRONTEIRA DO DUTO, OS FLUXOS PRESCRITOS NESSES PONTOS,
OS VALORES DE L, E M, ETC)

0002
0003
0004
0005
0006
0007
0008
0009
0010
0011
0012
0013
0014
0015
0016
0017
0018
0019
0020
0021
0022
0023
0024
0025
0026
0027
0028

```

0002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003 DIMENSION X(NTE),Y(NTE),XL(NTE),XM(NTE),QP(NTE),BETA(200)
0004 AA=-1.
0005 PI=DARCOS(AA)
0006 PIM=PI/NALET
0007 RSF=RR*DSIN(FI)
0008 RCF=RR*DCOS(FI)
0009 SPIM=DSIN(PIM)
0010 CPIM=DCOS(PIM)
0011 A1=FI*RR*RP/2.
0012 A2=RSF*RCF/2.
0013 A3=(CPIM+RCF)*(SPIM-RSF)/2.
0014 AT=PIM/2.+SPIM*CPIM/2.
0015 AREA=(AT-A1-A2-A3)*2.
0016 DIST=DSORT((CPIM-RCF)**2+(SPIM-RSF)**2)
0017 PERIM=(FI*RP+PIM+DIST)*2.
0018 DE=4.*AREA/PERIM
0019 WTE = 0.
0020 WA=0.5
0021 QPTI=(PERIM/2.)/(FI*RR+DIST*WA+WTE*PIM)
0022 QPTE=WTE*QPTI
0023 QPA=WA*QPTI
0024 NITI=NPTI-1
0025 NIA=NPA+1
0026 NITE=NPTE-1
0027 OTTI=FI/NITI
0028 DX=(CPIM-RSF)/NIA

```

```

0029 DTTE=PI M/NITE
0030 K=0
0031 DO 1 I=1,NPTI
0032 K=K+1
0033 TETA=(I-1)*DTTI
0034 X(K)=RP*DSIN(TETA)
0035 Y(K)=RF*DCOS(TETA)
0036 BETA(K)=PI-DATAN(X(K)/Y(K))
0037 1 QP(K)=QPTI
0038 A=(CPIM-FCF)/(SPIM-RSF)
0039 B=CPIM-A*SPIM
0040 ALFA=DATAN(A)
0041 DO 2 I=1,NPA
0042 K=K+1
0043 X(K)=RSF+I*DX
0044 Y(K)=A*X(K)+B
0045 BETA(K)=PI+ALFA
0046 2 QP(K)=QPA
0047 DO 3 I=1,NPTE
0048 K=K+1
0049 TETA=PI-(I-1)*DTTE
0050 X(K)=DSIN(TETA)
0051 Y(K)=DCOS(TETA)
0052 BETA(K)=2.*PI-DATAN(X(K)/Y(K))
0053 3 QP(K)=QPTE
0054 IF(KJ)12,11,12
0055 11 N=NPTE-1
0056 DO 8 I=1,N
0057 K=K+1
0058 TETA=-I*DTTE
0059 X(K)=DSIN(TETA)
0060 Y(K)=DCOS(TETA)
0061 BETA(K)=2.*PI+DATAN(X(K)/Y(K))
0062 8 QP(K)=QPTE
0063 DO 9 I=1,NPA
0064 K=K+1
0065 X(K)=-SPIM+I*DX
0066 Y(K)=-A*X(K)+B

```

```

0067 BETA(K)=PI-ALFA
0068 QP(K)=QPA
0069 N=NPTI-1
0070 DO 10 I=1,N.
0071 K=K+1
0072 TETA=-FI+(I-1)*OTTI
0073 Y(K)=DCOS(TETA)*RR
0074 X(K)=DSIN(TETA)*RR
0075 BETA(K)=PI+DATAN(X(K)/Y(K))
0076 10 QP(K)=QPTI
0077 12 FM=1
0078 AREA=AREA+FM**2
0079 PERIM=PERIM+FM
0080 DIST=DIST+FM
0081 DO 4 K=1,NTE
0082 R=DSQRT(X(K)**2+Y(K)**2)
0083 R=R*FM
0084 IF(X(K))5,6,13
0085 6 TETA=PI/2.
0086 GO TO 7
0087 5 TETA=PI+DATAN(Y(K)/X(K))
0088 GO TO 7
0089 13 TETA=DATAN(Y(K)/X(K))
0090 7 XL(K)=DSIN(TETA-BETA(K))
0091 XM(K)=DCOS(TETA-BETA(K))/R
0092 4 CONTINUE
0093 RETURN
0094 END

```



```

0031 K=K+1
0032 SOM2=CSV(K)*S
0033 SOMA=SOMA+(SOM1+SOM2)*(J+2)*R**((J+1)/(4.)*(J+1))
0034 SOMA1=SOM+SOMA+CSV(1)*R/2.-R**3/16.
0035 K=1
0036 SOM=C.
0037 DO 7 J=1,NMAIS
0038 C=DCOS(J*TETA)
0039 S=DSIN(J*TETA)
0040 K=K+1
0041 SOM1=CST(K)*S
0042 K=K+1
0043 SOM2=CST(K)*C
0044 SOM=SOM+(SOM2-SOM1)*J*R**J
0045 K=1
0046 SOMA=0.
0047 DO 8 J=1,NMAIS
0048 C=DCOS(J*TETA)
0049 S=DSIN(J*TETA)
0050 K=K+1
0051 SOM1=CSV(K)*S
0052 K=K+1
0053 SOM2=CSV(K)*C
0054 SOMA=SOMA+(SOM2-SOM1)*J*R**((J+2)/(4.)*(J+1))
0055 SOMA2=SOM+SOMA
0056 V(I)=XLV(I)*SOMA1+XMV(I)*SOMA2
0057 V(I)=V(I)*8.*CFRE/DE**3
0058 RETURN
0059 END

```



```

0028 A3=VPC-XISQ(IS)
0029 A4=A2*2-4.*A1*A3
0030 ALF1=-((A2/(2.*A1)))+(DSQRT(A4))/(2.*A1))
0031 ALF2=-((A2/(2.*A1)))-(DSQRT(A4))/(2.*A1))
0032 IF(ALF1-1.)8,9,9
0033 IF(ALF1-0.)9,9,10
0034 10 ALF=ALF1
0035 GO TO 11
0036 9 ALF=ALF2
0037 11 Y=DS*ALF+R(I-1)
0038 WRITE(2,12)TETA(J),Y
0039 12 FORMAT(26X,F8.5,33X,F8.5)
0040 2 CONTINUE
0041 1 CONTINUE
0042 20 CONTINUE
0043 RETURN
0044 END

```

0001 SUBROUTINE VMED(NPA,NPR,NT,P,RR,NALET,SA,SR,VM,AREA,FM)

0002 A SUBROTINA VMED FAZ A INTEGRACAO NUMERICA
0003 PELO METODO DE SIMPSON BIDIMENSIONAL

0004 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0005 DIMENSION P(20,20)
0006 XI=-1.
0007 PI=DARCOS(XI)
0008 V=0.
0009 LK=NPR-1
0010 NN=NPA-1
0011 DIVR=SR*FM
0012 DO 5 I=2,LK,2
0013 DIVA=SA*((I-1)*SR+RR)
0014 DIVA=DIVA*FM
0015 DO 5 J=2,NN,2
0016 SIGO=P(I+1,J+1)+P(I-1,J+1)+P(I+1,J-1)+P(I-1,J-1)
0017 SIGI=P(I+1,J)+P(I-1,J)+P(I,J+1)+P(I,J-1)
0018 SIG2=P(I,J)
0019 5 V=V+(DIVR*DIVA/9.)*(SIGO+4.*SIGI+16.*SIG2)
0020 VM=V/(AREA/2.)
0021 RETURN
0022 END

0001 C
0002 C
0003 C
0004 C
0005 C
0006 C

0002
0003
0004
0005
0006
0007
0008
0009
0010
0011
0012
0013
0014
0015
0016
0017
0018
0019
0020

0001 SUBROUTINE GRADE(NALET,RR,NPA,NPR,NT,XC,YC,SA,SR,Z,TETA)

A SUBROTINA GRADE DETERMINA AS COORDENADAS
DOS PONTOS DA REGIAO QUE SERAO USADOS NA
INTEGRACAO NUMERICA

0002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003 DIMENSION XC(NT),YC(NT),R(NPR),TETA(NPA)
0004 AA=-1.
0005 PI=DASCOS(AA)
0006 BETA=PI/NALET
0007 NIA=NPA-1
0008 NIP=NPR-1
0009 SF=(1.-PR)/NIR
0010 SA=BETA/NIA
0011 DO 1 J=1,NPR
0012 R(J)=RP+(J-1)*SR
0013 DO 2 I=1,NPA
0014 TETA(I)=(I-1)*SA
0015 K=0
0016 DO 3 J=1,NPR
0017 DO 3 I=1,NPA
0018 K=K+1
0019 XC(K)=R(J)*DSIN(TETA(I))
0020 YC(K)=R(J)*DCOS(TETA(I))
0021 RETURN
0022 END

C
C
C
C
C
C
C

0001

0002
0003
0004
0005
0006
0007
0008
0009
0010
0011
0012
0013
0014
0015
0016
0017
0018
0019
0020
0021
0022

0001 SUBROUTINE VFRON(X,Y,V,NTEV,N,CS,VMED,F4)

A SUBROTINA VFRON CALCULA A VELOCIDADE
EM PONTOS SOBRE A FRONTEIRA DO OUTO

```

0002 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0003 DIMENSION X(NTEV),Y(NTEV),CS(N),V(NTEV),A(100)
0004 AA=-1.
0005 PI=DARCCS(AA)
0006 DO 4 I=1,NTEV
0007 R=DSQRT(X(I)**2+Y(I)**2)*FM
0008 IF(X(I))10,10,11
0009 10 TETA=PI/2.
0010 GO TO 12
0011 11 TETA=DATAN(Y(I)/X(I))
0012 12 CONTINUE
0013 A(I)=1.
0014 DO 1 J=2,N,2
0015 K=J/2
0016 1 A(J)=R**K*DCOS(K*TETA)
0017 DO 2 J=3,N,2
0018 K=(J-1)/2
0019 2 A(J)=R**K*DSIN(K*TETA)
0020 VV=CS(1)
0021 DO 3 KY=2,N
0022 3 VV=VV+CS(KY)*A(KY)
0023 R=R**2/4.
0024 V(I)=(VV-R)/VMED
0025 RETURN
0026 END

```

C
C
C
C
C
C

0001

0001 SUBROUTINE VELOC(XC,YC,P,NPR,NPA,NT,N,CS,AAA,B,FM)

0002 A SUBROTINA VELOC CALCULA A VELOCIDADE EM NPR*NPA
0003 PONTOS DA REGIAO DE INTEGRACAO

```

0004 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0005 DIMENSION P(20,20),XC(NT),YC(NT),CS(N),A(50)
0006 AA=-1.
0007 PI=DARCOS(AA)
0008 KK=0
0009 DO 1 II=1,NPR
0010 DO 1 JJ=1,NPA
0011 KK=KK+1
0012 YMIN=AAA*XC(KK)+B
0013 IF(YC(KK)-YMIN)3,4,4
0014 3 P(II,JJ)=0.
0015 GO TO 1
0016 4 R=DSQRT(XC(KK)**2+YC(KK)**2)*FM
0017 IF(XC(KK))11,11,12
0018 11 TETA=PI/2.
0019 GO TO 13
0020 12 TETA=DATAN(YC(KK)/XC(KK))
0021 13 CONTINUE
0022 A(1)=1
0023 DO 8 J=2,N,2
0024 K=J/2
0025 A(J)=P**K*DCOS(K*TETA)
0026 DO 9 J=3,N,2
0027 K=(J-1)/2
0028 A(J)=R**K*DSIN(K*TETA)
0029 V=CS(1)
0030 DO 10 KY=2,N
0031 V=V+CS(KY)*A(KY)
0032 R=R**2/4.
0033 P(II,JJ)=V-R
0034 1 CONTINUE
0035 RETURN
0036 END

```

0001
0002
0003
0004
0005
0006
0007
0008
0009
0010
0011
0012
0013
0014
0015
0016
0017
0018
0019
0020
0021
0022
0023
0024
0025
0026
0027
0028
0029
0030
0031
0032
0033
0034

```

0001 SUBROUTINE TFRON(X,Y,V,NTEV,N,CSV,CST,FM)
0002 A SUBROUTINA TFRON CALCULA A TEMPERATURA EM PONTOS DA FRONTEIRA
0003 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0004 DIMENSION X(NTEV),Y(NTEV),V(NTEV),CSV(N),CST(N)
0005 AA=-1.
0006 PI=DARCOS(AA)
0007 NMAIS=(N-1)/2
0008 DO 1 I=1,NTEV
0009 R=DSQRT(X(I)**2+Y(I)**2)*FM
0010 IF(X(I))10,10,11
0011 10 TETA=PI/2.
0012 GO TO 12
0013 11 TETA=DATAN(Y(I)/X(I))
0014 12 CONTINUE
0015 K=1
0016 SOM=0.
0017 DO 5 J=1,NMAIS
0018 C=DCOS(J*TETA)
0019 S=DSIN(J*TETA)
0020 K=K+1
0021 SOM1=CSV(K)*C
0022 K=K+1
0023 SOM2=CSV(K)*S
0024 SOM=(SOM1+SOM2)*R**2/(4*(J+1))+SOM
0025 TP=CSV(1)*R**2/4.-R**4/64.+SOM
0026 K=1
0027 SOM=0.
0028 DO 7 J=1,NMAIS
0029 C=DCOS(J*TETA)
0030 S=DSIN(J*TETA)
0031 K=K+1
0032 SOM1=CST(K)*C
0033 K=K+1
0034 SOM2=CST(K)*S
0035 SOM=(SOM1+SOM2)*R**J+SOM
0036 TP=TP+SOM+CST(1)
0037 1 V(I)=TP
0038 RETURN
0039 END

```

0001 SUBROUTINE TEMP(XC, YC, T, NPR, NPA, NT, N, CSV, CST, A, B, FM)

0002 A SUBROUTINA TEMP CALCULA A TEMPERATURA EM
0003 NPR*NPA PONTOS DA REGIAO DE INTEGRACAO

```

0004 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0005 DIMENSION CSV(N), CST(N), XC(NT), YC(NT), T(20,20)
0006 AA=-1.
0007 PI=DARCOS(AA)
0008 NMAIS=(N-1)/2
0009 KK=0
0010 DO 1 II=1, NPR
0011 DO 1 JJ=1, NPA
0012 KK=KK+1
0013 YMIN=A*XC(KK)+B
0014 IF(YC(KK)-YMIN)3,4,4
0015 3 T(II, JJ)=0.
0016 GO TO 1
0017 4 R=DSORT(XC(KK)**2+YC(KK)**2)*FM
0018 IF(XC(KK))11,11,12
0019 11 TETA=PI/2.
0020 GO TO 13
0021 12 TETA=DATAN(YC(KK)/XC(KK))
0022 13 CONTINUE
0023 K=1
0024 SOM=0.
0025 DO 5 J=1, NMAIS
0026 C=DCOS(J*TETA)
0027 S=DSIN(J*TETA)
0028 K=K+1
0029 SOM1=CSV(K)*C
0030 K=K+1
0031 SOM2=CSV(K)*S
0032 SOM=(SOM1+SOM2)*R**((J+2)/(4.*(J+1)))+SOM
0033 TP=CSV(1)*R**2/4.-R**4/64.+SOM

```

0000 C C C C C C C

```
0032 K=1
0033 SOM=0.
0034 DO 7 J=1,NMAIS
0035 C=CCOS(J*TETA)
0036 S=DSIN(J*TETA)
0037 K=K+1
0038 SOM1=CST(K)*C
0039 K=K+1
0040 SOM2=CST(K)*S
0041 7 SOM=(SOM1+SOM2)*R**J+SOM
0042 TP=TP+SOM+CST(1)
0043 T(II,JJ)=TP
0044 1 CONTINUE
0045 RETURN
0046 END
```

```

0001 SUBROUTINE STM(NTEV,NPTIV,NPAV,NPTEV,V,RR,PERIM,NTSM,TSM,FI,NALET,
      *DIST,FM)
0002 A SUBROTINA STM CALCULA A TEMPERATURA MEDIA
0003 NA INTERFACE DE TROCA DE CALOR PELO METODO
0004 DE SIMPSON UNIDIMENSIONAL
0005 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
0006 DIMENSION V(NTEV)
0007 AA=-1.
0008 PI=DARCOS(AA)
0009 NITIV=NPTIV-1
0010 DTTIV=FI/NITIV
0011 TSM1=0.
0012 DO 1 K=2,NITIV,2
0013   TSM1=TSM1+V(K-1)+4.*V(K)+V(K+1)
0014   TSM1=TSM1*RR*DTTIV/3.
0015   TSM2=0.
0016   NIAV=NPAV+1
0017   DSAV=DIST/NIAV
0018   J=NPTIV+1
0019   JJ=NPTIV+NPAV
0020   DO 2 K=J, JJ,2
0021     TSM2=TSM2+(DSAV/3.)*(V(K-1)+4.*V(K)+V(K+1))
0022     TSM3=0.
0023     NITEV=NPTEV-1
0024     DITEV=(PI/NALET)/NITEV
0025     J=JJ+2
0026     JJ=NTEV-1
0027     DO 3 K=J, JJ,2
0028       TSM3=TSM3+V(K-1)+4.*V(K)+V(K+1)
0029       TSM3=TSM3*FM
0030       IF(NTSM)5,5,6
0031       TSM=(TSM1+TSM2+TSM3)/(PERIM/2.)
0032       GO TO 7
0033     6 COMPR=RR*FI*FM+DIST
0034     TSM=(TSM1+TSM2)/COMPR
0035     7 RETURN
0036     END

```

APÊNDICE 2

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PELO MÉTODO DE SIMPSON BIDIMENSIONAL

Suponha que o retângulo

$$R \{ a \leq x \leq b; \quad c \leq y \leq d \}$$

seja o domínio de integração da função $f(x,y)$.

Dividindo-se os segmentos $[a,b]$ e $[c,d]$ em duas partes iguais pelos pontos

$$x_0 = a \quad x_1 = a + h \quad x_2 = a + 2h = b \quad (8.1)$$

$$e \quad y_0 = c \quad y_1 = c + k \quad y_2 = c + 2k = d \quad (8.2)$$

onde

$$h = (b - a)/2, \quad k = (d - c)/2 \quad (8.3)$$

obtêm-se um total de nove pontos, como mostra a figura 27.

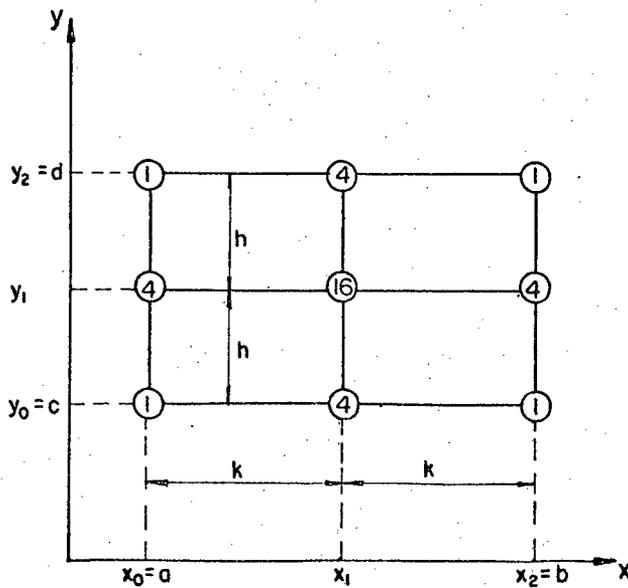


Fig. 27 - Região usada para a dedução da equação (8.8)

Deseja-se calcular a integral

$$\int_R f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy \quad (8.4)$$

Aplicando-se o método de Simpson unidimensional à integral interna, chega-se a

$$\int_R f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \frac{k}{3} [f(x,y_0) + 4f(x,y_1) + f(x,y_2)] \quad (8.5)$$

ou

$$\int_R f(x,y) dx dy = \frac{k}{3} \left[\int_a^b f(x,y_0) dx + 4 \int_a^b f(x,y_1) dx + \int_a^b f(x,y_2) dx \right] \quad \dots(8.6)$$

Aplicando-se novamente o método de Simpson unidimensional a cada uma das integrais, tem-se

$$\begin{aligned} \int_R f(x,y) dx dy = & \frac{h,k}{9} \{ [f(x_0,y_0) + 4f(x_1,y_0) + f(x_2,y_0)] + \\ & + 4[f(x_0,y_1) + 4f(x_1,y_1) + f(x_2,y_1)] + [f(x_0,y_2) + \\ & + 4f(x_1,y_2) + f(x_2,y_2)] \} \quad (8.7) \end{aligned}$$

Rearranjando, obtém-se

$$\int_R f(x,y) dx dy = \frac{h,k}{9} (\sigma_0 + 4\sigma_1 + 16\sigma_2) \quad (8.8)$$

onde

σ_0 é a soma dos valores da função nos pontos 1 do retângulo

σ_1 é a soma dos valores da função nos pontos 4 do retângulo

σ_2 é o valor da função no ponto 16 do retângulo

Se as dimensões do retângulo R são grandes, para obter-se boa precisão na aplicação da equação (8.8), deve-se dividir R em um sistema de retângulos e aplicar a cada um deles a

fórmula de Simpson.

No presente trabalho, as funções a serem integradas são a velocidade (para obter-se a velocidade média), e o produto da velocidade pela temperatura (para obter-se a temperatura de mistura). Devido à simetria destas funções com relação a θ , o domínio de integração é a região σ , hachurada na figura 28.

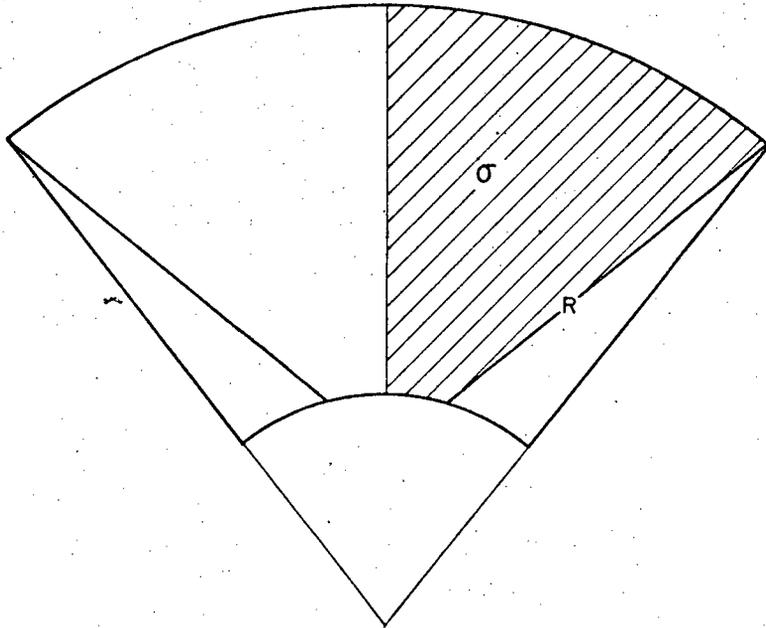


Fig. 28 - Regiões de integração σ e R .

A fim de simplificar a aplicação do método, define-se uma nova função $f^*(r, \theta)$, tal que

$$f^*(r, \theta) = \begin{cases} f(r, \theta) & \text{se } (r, \theta) \in \sigma \\ 0 & \text{se } (r, \theta) \in R - \sigma \end{cases} \quad (8.9)$$

onde R é o setor de coroa que contém σ .

É evidente que

$$\int_{\sigma} f(r, \theta) \, r \, dr \, d\theta = \int_R f^*(r, \theta) \, r \, dr \, d\theta \quad (8.10)$$

Para calcular esta última integral, divide-se o setor de coroa em pequenas áreas, obtidas pela divisão do arco em NIA intervalos iguais e do raio em NIR intervalos também iguais. NIA e NIR devem ser pares.

O método de Simpson é aplicado a cada região A_n , for-

mada por 4 dessas pequenas áreas, num total de $N = NIA.NIR/4$ integrações.

Essas regiões não são retangulares mas, desde que o setor de coroa seja convenientemente dividido, tem aproximadamente essa forma, como mostra a figura 29.

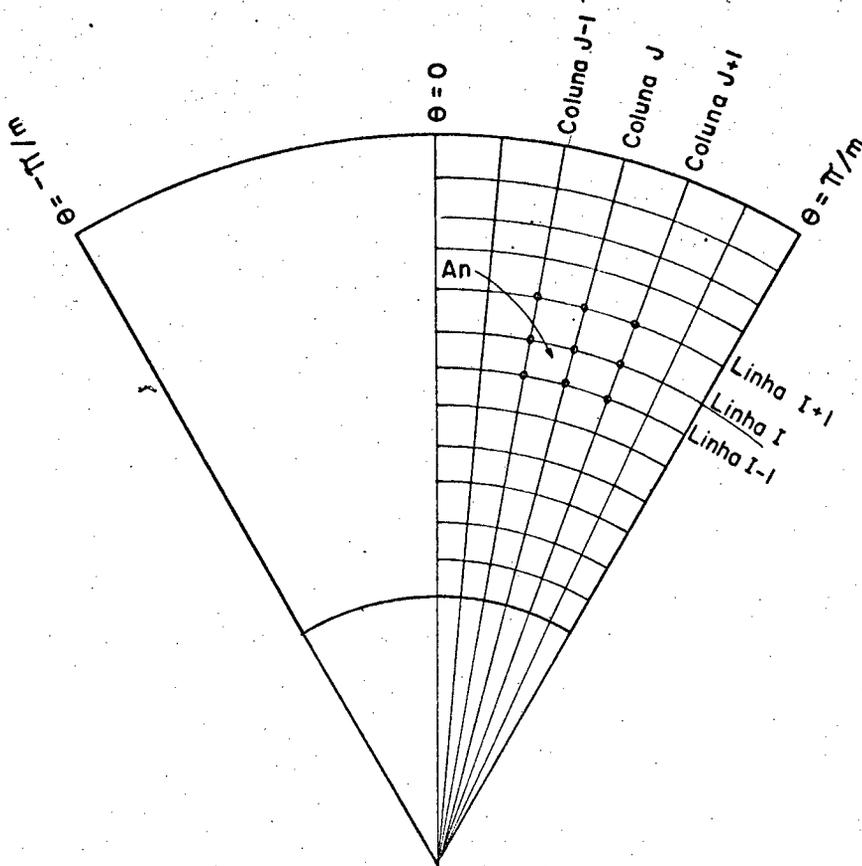


Fig. 29 - Área elementar de integração A_n .

Aplicando-se a fórmula de Simpson à região hachurada A_n , tem-se

$$\int_{A_n} f^*(r, \theta) r dr d\theta = \frac{h k}{9} (\sigma_0 + 4\sigma_1 + 16\sigma_2) \quad (8.11)$$

onde

$$\sigma_0 = f^*(I+1, J+1) + f^*(I-1, J+1) + f^*(I+1, J-1) + f^*(I-1, J-1) \quad \dots \quad (8.12)$$

$$\sigma_1 = f^*(I+1, J) + f^*(I-1, J) + f^*(I, J+1) + f^*(I, J-1) \quad (8.13)$$

$$\sigma_2 = f^*(I, J) \quad (8.14)$$

$$h = (1 - r_0)/NIR \quad (8.15)$$

$$k = r(I)\Delta\theta \quad (8.16)$$

$$e \Delta\theta = (\pi/m) NIA \quad (8.17)$$

Logo

$$\int_{\sigma} f(r, \theta) r dr d\theta = \sum_{n=1}^N \frac{h k}{9} (\sigma_0 + 4\sigma_1 + 16\sigma_2) \quad (8.18)$$

APÊNDICE 3

O MÉTODO DE SPARROW E HAJI-SHEIKH

Sparrow e Haji-Sheikh propuseram um método para determinar as características dinâmicas e térmicas do escoamento laminar em dutos de seção transversal arbitrária com condições de contorno também arbitrárias. São admitidos perfis de velocidade e temperatura plenamente desenvolvidos e fluxo de calor constante por unidade de tempo e comprimento do duto.

O método consiste basicamente em transformar as equações diferenciais dos problemas da velocidade e da temperatura na equação de Laplace. Proposta uma série de funções como solução desses problemas, é gerado, a partir do conjunto de funções dessa série, um outro conjunto, ortonormal, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Fazendo-se a expansão de Fourier da equação relacionada com as condições de contorno numa série de funções desse conjunto ortonormal, os coeficientes da série original, que é a solução do problema da velocidade ou da temperatura, podem ser determinados.

Para maior compreensão deste procedimento será mostrado como é formulado o problema da velocidade e como foi aplicado o método no presente trabalho. A formulação e solução do problema da temperatura é semelhante e pode ser vista com detalhes em [10].

Na figura 30 estão mostrados a curva C representativa da fronteira e o sistema de coordenadas.

A equação do movimento, em coordenadas cartesianas, após sofrer todas as simplificações que o problema admite é

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = \text{const} \quad (8.19)$$

Aplicando a transformação

$$u^* / \left(-1/\mu \frac{dp}{dz}\right) = u - \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \quad (8.20)$$

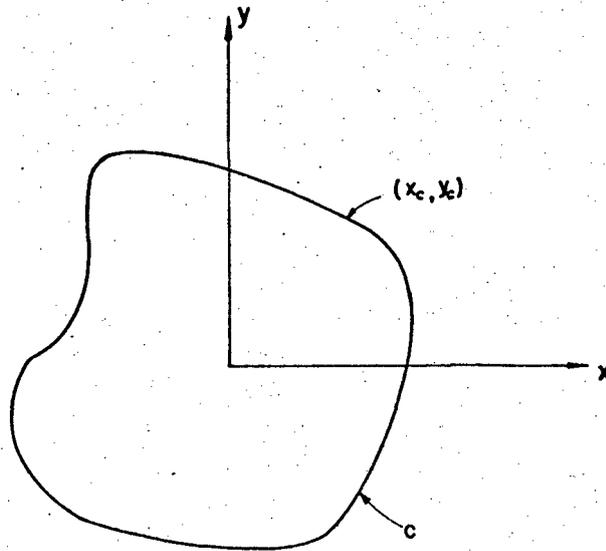


Fig. 30 - Fronteira genérica C e o sistema de coordenadas x, y .

chega-se a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (8.21)$$

com a condição de contorno

$$u(x, y) = \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \quad \text{em } C \quad (8.22)$$

A solução geral da equação (8.21) é proposta como segue

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^N b_i g_i(x, y) \quad (8.23)$$

onde os coeficientes b_i 's são constantes a determinar e o conjunto de funções (g_1, g_2, \dots, g_N) é formado pelas partes real e imaginária da variável complexa $(x + iy)^n$, com n assumindo sucessivamente os valores $0, 1, 2, \dots$. Assim,

$$\begin{array}{lll} g_1 = 1 & g_3 = y & g_5 = 2xy \\ g_2 = x & g_4 = x^2 - y^2 & \vdots \end{array} \quad (8.24)$$

A solução precisa satisfazer a condição de contorno ; logo

$$\frac{1}{4} (x_c^2 + y_c^2) = \sum_{i=1}^N b_i g_i(x_c, y_c) \quad (8.25)$$

onde x_c, y_c são as coordenadas de um ponto sobre a fronteira do duto.

Denotaremos, por simplicidade, a função $(1/4)(x^2 + y^2)$ calculada sobre C por f . Portanto

$$f = \sum_{i=1}^N b_i g_i(x_c, y_c) \quad (8.26)$$

Como comentado anteriormente, a partir do conjunto de funções (g_1, g_2, \dots, g_N) , gera-se um conjunto de funções ortonormais $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$ de maneira que

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_{11} g_1 \\ \phi_2 &= a_{21} g_1 + a_{22} g_2 \\ &\vdots \\ \phi_N &= a_{N1} g_1 + a_{N2} g_2 + \dots + a_{NN} g_N \end{aligned} \quad (8.27)$$

ou, de uma forma geral

$$\phi_k = \sum_{i=1}^k a_{ki} g_i \quad (8.28)$$

Tal método de ortonormalização é o bem conhecido método de Gram-Schmidt.

A seguir é feita a expansão de Fourier da condição de contorno f neste conjunto de funções ortonormais.

Tem-se então que

$$f \sim \sum_{k=1}^N (f, \phi_k) \phi_k \quad (8.29)$$

onde

$$(f, \phi_k) = \int_C f \phi_k ds \quad (8.30)$$

Deve-se ressaltar que o erro da expansão da função f na série de Fourier, como definido abaixo

$$\|\delta\| = \left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \phi_k) \phi_k \right\| \quad (8.31)$$

é o mínimo de todas as possíveis aproximações de f na forma

$$f \sim \sum_{k=1}^N a_k \phi_k \quad (8.32)$$

Substituindo a expressão (8.28) em (8.29), chega-se a

$$f \sim \sum_{k=1}^N (f, \phi_k) \sum_{i=1}^k a_{ki} g_i \quad (8.33)$$

A equação (8.33) pode ser posta na forma

$$f \sim \sum_{i=1}^N \left[\sum_{k=i}^N (f, \phi_k) a_{ki} \right] g_i \quad (8.34)$$

Comparando a equação (8.26) com (8.34), vê-se que os coeficientes b_i 's desejados são tais que

$$b_i = \sum_{k=i}^N (f, \phi_k) a_{ki} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8.35)$$

Embora se tenha conhecimento da existência de programas prontos para a determinação destes coeficientes, foi construído um para uso específico neste trabalho. Tomando m pontos igualmente espaçados sobre a fronteira do duto, monta-se um conjunto de vetores linearmente independentes $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_N)$ de maneira que

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= (g_1(x_{c1}, y_{c1}), g_1(x_{c2}, y_{c2}), \dots, g_1(x_{cm}, y_{cm})) \\ \vec{g}_2 &= (g_2(x_{c1}, y_{c1}), g_2(x_{c2}, y_{c2}), \dots, g_2(x_{cm}, y_{cm})) \\ &\vdots \\ \vec{g}_N &= (g_N(x_{c1}, y_{c1}), g_N(x_{c2}, y_{c2}), \dots, g_N(x_{cm}, y_{cm})) \end{aligned} \quad (8.36)$$

onde x_{ck}, y_{ck} são as coordenadas do k -ésimo ponto sobre a fronteira.

Evidentemente, o número de pontos m deve ser maior ou igual a N .

Através do processo de ortonormalização, constroi-se a partir do conjunto $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_N)$, o conjunto $(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_N)$.

Lembrando que

$$f = \frac{1}{4} (x^2 + y^2) \quad (8.37)$$

e fazendo

$$\vec{f} = (f(x_{c1}, y_{c1}), f(x_{c2}, y_{c2}), \dots, f(x_{cm}, y_{cm})) \quad (8.38)$$

tem-se de (8.35) que

$$b_i = \sum_{k=i}^N a_{ki} (\vec{f}, \vec{\phi}_k) \quad (8.39)$$

onde

$$(\vec{f}, \vec{\phi}_k) = \sum_{j=1}^N f_j \phi_{kj}$$

sendo f_j a j -ésima componente de \vec{f} , e ϕ_{kj} a j -ésima componente de $\vec{\phi}_k$.

Tal processo foi aplicado primeiramente às mesmas geometrias que em [10], mostrada na figura 31.

Os parâmetros que identificam o tamanho do duto e a forma são o raio R e o ângulo χ . Foram utilizados de 9 a 25 termos na expansão e de 15 a 50 pontos sobre a fronteira. Os resultados obtidos se apresentaram, de uma forma geral, iguais ou melhores que aqueles obtidos por Sparrow e Haji-Sheikh. A seguir, tentou-se resolver o problema dinâmico para o duplo tubo com aletas de espessura desprezível. O que se observou foi um comportamento irregular do método, que às vezes apresentava resultados satisfatórios enquanto outras vezes, para a mesma geometria, produzia maus resultados, ao se alterar o número de pontos sobre a fronteira ou o número de termos na série.

O aumento do número de termos na série, além de acarretar em um trabalho exaustivo quando da determinação das funções g e de outras necessárias para resolver o problema térmi

co, tendia a piorar a solução, provavelmente devido a erros provocados pelo excesso de operações matemáticas.

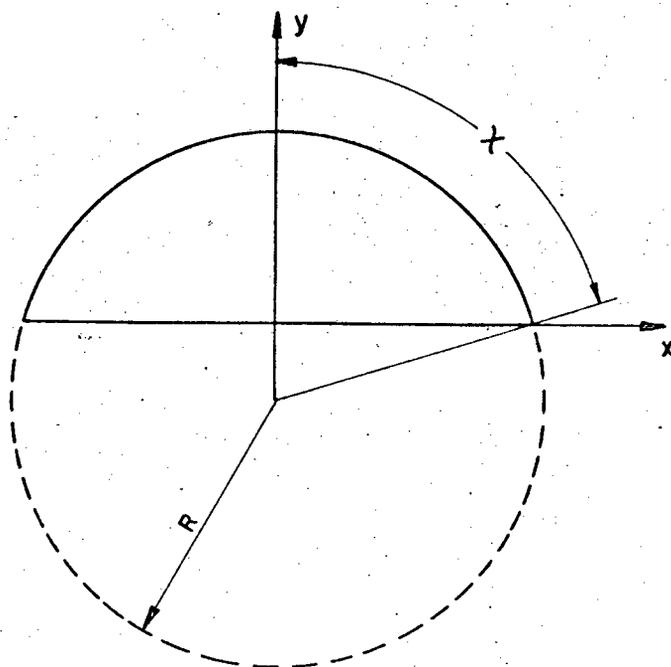


Fig. 31 - Geometria do duto resolvido pelo método de Sparrow e Haji-Sheikh.

Várias tentativas de aprimoramento do método se mostraram infrutíferas e por isso, foi abandonado.

Não se tem notícia de nenhuma outra aplicação do método de Sparrow e Haji-Sheikh a menos de um comentário feito por Shah [9], que diz ter também experimentado dificuldades com o método, o que o levou a desenvolver outro método, que foi o aplicado neste trabalho.

APÊNDICE 4

PROPRIEDADES DA REFLEXÃO DE HOUSEHOLDER

Dado o vetor $\vec{V} = (v_1, \dots, v_m)^T$, a matriz quadrada P , $m \times m$, da forma

$$P = I - \frac{1}{\beta} \vec{V} \vec{V}^T \quad (8.41)$$

onde I é a matriz identidade, e

$$\beta = \frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2 = \vec{V}^T \vec{V} / 2 \quad (8.42)$$

é chamada de Reflexão de Householder para o vetor \vec{V} .

Propriedades

a) P é igual a sua própria inversa

Prova:

$$P = P^{-1} \Rightarrow P P = I \quad (8.43)$$

Substituindo (8.41) em (8.43), tem-se

$$\left(I - \frac{1}{\beta} \vec{V} \vec{V}^T\right) \left(I - \frac{1}{\beta} \vec{V} \vec{V}^T\right) = I \quad (8.44)$$

e, efetuando a multiplicação

$$I - \frac{2}{\beta} \vec{V} \vec{V}^T + \frac{1}{\beta^2} (\vec{V} \vec{V}^T) (\vec{V} \vec{V}^T) = I \quad (8.45)$$

A equação (8.45) pode ser posta na forma

$$I - \frac{2}{\beta} \vec{V} \vec{V}^T + \frac{1}{\beta^2} \vec{V} (\vec{V}^T \vec{V}) \vec{V}^T = I \quad (8.46)$$

Mas por definição

$$\vec{V}^T \vec{V} = 2\beta \quad (8.47)$$

logo

$$I - \frac{2}{\beta} V V^T + \frac{1}{\beta^2} V V^T 2\beta = I \quad (8.48)$$

$$e \quad I = I. \quad (8.49)$$

$$b) P = P^t$$

Prova:

$$P^t = (I - \frac{1}{\beta} V V^T) = I - \frac{1}{\beta} (V V^T) \quad (8.50)$$

$$P^t = I - \frac{1}{\beta} (V^T)^T V^T \quad (8.51)$$

$$P^t = I - \frac{1}{\beta} V V^T = P \quad (8.52)$$

c) Se $P^t = P = P^{-1}$, P é ortogonal e representa uma transformação isométrica, isto é,

$$\|P A\| = \|A\| \quad (8.53)$$

para qualquer A .

d) Para qualquer vetor não nulo \vec{g} , é possível encontrar uma Reflexão de Householder P que zera os desejados elementos desse vetor.

Considere

$$\vec{g} = (g_1, g_2, \dots, g_j, g_{j+1}, \dots, g_m) \quad (8.54)$$

Queremos manter os mesmos valores para as componentes g_1, \dots, g_{j-1} , mudar g_j e zera g_{j+1}, \dots, g_m .

Para isso, define-se

$$\alpha = \text{SIGN}(g_j) (g_j^2 + g_{j+1}^2 + \dots + g_m^2)^{1/2} \quad (8.55)$$

$$e \quad \vec{V} = (0, \dots, 0, g_{j+1}, g_{j+1}, \dots, g_m)^T \quad (8.56)$$

onde $\text{SIGN}(g_j) = 1$ se $g_j > 0$, -1 se $g_j < 0$.

Aplicando-se a equação (8.42), chega-se que

$$\beta = \alpha(g_j + \alpha) \quad (8.57)$$

É fácil verificar que construindo P_j como definida em (8.41) com \vec{V} e β dados pelas equações (8.56) e (8.57), e aplicando P ao vetor \vec{g} tem-se que

$$P_j \vec{g} = (g_1, \dots, g_{j-1}, -\alpha, 0, \dots, 0)^T \quad (8.58)$$

como desejávamos.

Mais ainda, se \vec{h} é um outro vetor com todas as componentes entre h_j e h_m iguais a zero, a aplicação de P em h dará

$$P_j \vec{h} = \vec{h} \quad (8.59)$$

Se \vec{h} não tem todos os elementos de h_j a h_m iguais a zero, então

$$P_j \vec{h} = \left(I - \frac{1}{\beta} \vec{V} \vec{V}^T \right) h \quad (8.60)$$

$$P_j \vec{h} = h - \frac{1}{\beta} \vec{V} \vec{V}^T h \quad (8.61)$$

Definindo uma constante γ como sendo

$$\gamma = \vec{V}^T \vec{h} / \beta \quad (8.62)$$

tem-se

$$P_j \vec{h} = \vec{h} - \gamma \vec{V} \quad (8.63)$$

Estas últimas propriedades são utilizadas para transformar a matriz $A_{m \times m}$ (formada pela aplicação das séries solução dos problemas da velocidade e da temperatura em m pontos da fronteira) em uma matriz U triangular superior.

Para a Reflexão de Householder, P_1 o vetor \vec{g} é considerado a primeira coluna de A , α , \vec{V} e β são calculados pelas expressões (8.55), (8.56) e (8.57), respectivamente, com $j = 1$.

A aplicação de P_1 na primeira coluna de A resulta numa coluna com o primeiro elemento $-\alpha$ e todos os outros iguais a zero. A aplicação de P_1 nas outras colunas é feita através da expressão (8.63), onde o vetor \vec{h} é a coluna em questão.

Para a reflexão de Householder P_2 o vetor \vec{g} é considerado a segunda coluna de $(P_1 A)$, α , \vec{V} e β são novamente calculados com $j = 2$. Não é necessário aplicar P_2 à primeira coluna de

$P_1 A$ uma vez que esta não se modificaria. A aplicação de P_2 à segunda coluna de $P_1 A$ irá mudar o primeiro elemento, fazer o segundo igual a $-\alpha$ e zerar do terceiro ao m -ésimo. Novamente, a aplicação de P_2 às outras colunas de $P_1 A$ é feita pela expressão (8.63).

Procedendo assim até a P_n teremos a matriz U , com todos os elementos abaixo da diagonal principal iguais a zero.

É importante notar que para a aplicação das reflexões de Householder não é necessária a multiplicação de matrizes, envolvendo apenas o produto interno de vetores, na expressão (8.62), e a subtração de vetores, na expressão (8.63).