

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA

MECÂNICA

PROCEDIMENTO PARA DETERMINAR OS VALORES DO  
COEFICIENTE DE CISALHAMENTO

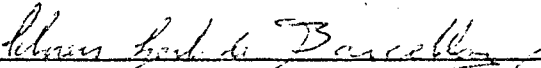
TESE SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS


ROMEU ODILO TRAUER

JUNHO 1974

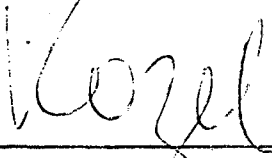
Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

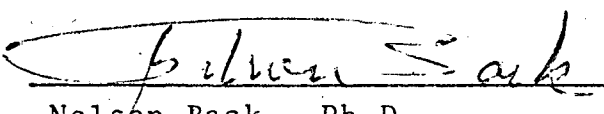
Mestre em Ciências - Especialidade Engenharia Mecânica e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação.


  
\_\_\_\_\_  
Prof. Clóvis Sperb de Barcellos - M.Sc.  
Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Domingos Boechat Alves - Ph.D.  
Integrador do Curso

Apresentada perante a banca examinadora composta dos Professores.

  
\_\_\_\_\_  
Jaroslav Kozel - Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Nelson Back - Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Paulo Roberto Pinho da Silveira - M.Sc.

A minha esposa,

## AGRADECIMENTOS

Ao Centro Tecnológico e a COPERTIDE da UFSC que possibilitaram a realização deste trabalho.

Ao Professor CLOVIS BARCELLOS pelo seu interesse e dedicação como orientador.

Aos Professores do DEPARTAMENTO DE MECÂNICA que, de uma forma ou outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao Professor ROBERTO MEYER pelas fotografias.

Ao Professor JAROSLAV KOZEL que incentivou a realização prática da tese.

Aos funcionários, o meu muito obrigado.

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
CAPÍTULO 3 - COEFICIENTE DE CISALHAMENTO	10
CAPÍTULO 4 - CENTRO DE TORÇÃO	21
CAPÍTULO 5 - BASES PARA UM PROGRAMA DE COMPUTADOR DIGITAL	24
CAPÍTULO 6 - SUB-PROGRAMAS PARA O CÔMPUTO DO COEFICIENTE DE CISALHAMENTO E CENTRO DE TORÇÃO	35
CAPÍTULO 7 - MÓDULO DE ELASTICIDADE E COEFICIENTE DE POISSON	47
CAPÍTULO 8 - ENSAIOS DE RIGIDEZ	59
CAPÍTULO 9 - RESULTADOS OBTIDOS E DISCUSSÃO	67
CAPÍTULO 10 - CONCLUSÃO	74

APÊNDICE 1	75
APÊNDICE 2	80
APÊNDICE 3	108
APÊNDICE 4	115
BIBLIOGRAFIA	130

A	- área da seção transversal da viga
D	- deslocamento da seção onde ocorre o carregamento
$\bar{D}$	- média dos deslocamentos
E	- módulo de elasticidade longitudinal
e	- espessura do elemento reto
F, P	- força
G	- módulo de elasticidade transversal
I	- momento de inércia
L	- comprimento da viga entre a seção engastada e a carregada
M	- momento fletor
q	- fluxo de tensão cisalhante
S	- momento estático
s	- segmento sobre a linha média
u, v, w	- deslocamento
V	- esforço cortante
W	- energia de deformação elástica no cisalhamento
$\alpha$	- coeficiente de cisalhamento
$\gamma_c$	- deformação de cisalhamento
$\sigma$	- tensão normal
$\tau$	- tensão cisalhante
$\mu$	- coeficiente de Poisson

Obs.: a nomenclatura das variáveis do programa encontram-se no Apêndice 2, p. 80.

## LISTA DE QUADROS E FIGURAS

QUADRO 1 - Fórmulas e valores do coeficiente de cisalhamento	7
QUADRO 2 - Valores do coeficiente de cisalhamento nas fórmulas de COWPER	10
QUADRO 3 - Planilha de dados de entrada	44
Fig. 1 - Seção simplesmente conexa	14
Fig. 2 - Seção duplamente conexa	15
Fig. 3 - Seção anel circular	19
Fig. 4 - Centro de torção não coincide com o baricentro	21
Fig. 5 - Centro de torção	22
Fig. 6 - a) enumeração dos vértices; b) elemento reto "1"	24
Fig. 7 - Sistemas de referência	27
Fig. 8 - Elemento reto genérico "i"	28
Fig. 9 - Rotação e translação do sistema intrínscico principal	30
Fig.10 - Momento estático da área $s.e_i$	38
Fig.11 - Seção simplesmente conexa	43
Fig.12 - Variação de $\alpha$ com a abertura da seção	45
Fig.13 - Esquema do dispositivo	54
Fig.14 - Ensaio de flexão pura. Detalhe do sistema de medida	54
Fig.15 - Diagrama carga x deslocamento na flexão pura	55
Fig.16 - Vista geral do ensaio de tração simples	56
Fig.17 - Corpo de prova para ensaio de tração	57
Fig.18 - Sequência de carregamento e leitura	51
Fig.19 - Diagrama carga x deformação na tração	58
Fig.20 - Correlação entre os ensaios de flexão e tração	58
Fig.21 - Vista geral do ensaio de rigidez	64
Fig.22 - Detalhe da mesa de ensaio e sistema de carregamento	64
Fig.23 - Detalhe do sistema de medida	65



Fig. 24 - Modelo de acrílico de seção fechada	65
Fig. 25 - Modelo de acrílico de seção aberta	66
Fig. 26 - Deformação adicional da seção	73
Fig. 27 - Triedros de referência	76
Fig. 28 - Elemento dz.ds.e	76
Fig. 29 - Fluxo de tensão cisalhante	78

## RESUMO

Utilizando os resultados da teoria de membrana e as equações paramétricas da reta, elaborou-se um programa para computador digital, que permite calcular valores do coeficiente de cisalhamento de seções vazadas de parede fina.

Neste trabalho é apresentada também uma fórmula fechada para o cálculo do valor do maior coeficiente de cisalhamento da seção anel circular aberta.

Foram realizados ensaios com modelos em acrílico na forma de colunas com seção transversal quadrada vazada, fechada e aberta.

## ABSTRACT

Making use of the results of the membrane's theory and the parametric equation of a straight line, a digital computer program has been developed to the evaluation of the shear coefficient for thin-walled closed or open sections.

In this work is presented a closed formula to the evaluation of the largest value of the shear coefficient for thin-walled open round tubes.

It has been done tests on thin-walled box structures, made of acrylic, with closed and open cross-sections.

## INTRODUÇÃO

Ao se estudar os deslocamentos de uma viga reta sujeita a carregamentos transversais deve-se, além do efeito do momento fletor, analisar também o do esforço cortante (V). Este último exerce grande influência no deslocamento resultante quando a viga não é muito longa relativamente às dimensões da seção transversal.

A influência do cisalhamento pode ser determinada analiticamente através da distribuição das tensões cisalhantes ( $\tau$ ) sobre as seções transversais da viga. A distribuição destas tensões depende da geometria da seção transversal e das condições de vinculação da viga, já que a intensidade de esforço cortante atua como um fator multiplicativo.

Como a tensão cisalhante numa viga varia com a distância da superfície neutra, a correspondente deformação de cisalhamento ( $\gamma$ ) varia com a mesma lei.

Com o objetivo de se ter uma expressão (genérica) para o cálculo da deformação de cisalhamento, ou melhor, dos deslocamentos ( $y_1$ ), de uma viga reta; TIMOSHENKO<sup>19</sup>, propôs a expressão:

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha \frac{V}{A G} \quad (1)$$

onde: A é a área da seção transversal da viga;

G é o módulo de elasticidade transversal;

$\alpha$  é o coeficiente de cisalhamento

Este coeficiente é uma correção necessária, pois a deformação de cisalhamento não é a mesma em todos os pontos da seção transversal da viga considerada.

No projeto de máquinas ferramentas, onde a característica de rigidez é importante, não é aconselhável desconsiderar a deformação de cisalhamento sem uma análise prévia. Com o propósito de dar uma contribuição ao estudo da rigidez estática de máquinas ferramentas, ora em desenvolvimento no Centro

Tecnológico desta Universidade, foi realizada a presente pesquisa. O objetivo principal é estabelecer um procedimento para determinar valores do coeficiente de cisalhamento para seções de forma qualquer, usando um computador de pequeno porte. Desta maneira será possível quantificar, mais precisamente, as deformações de vigas submetidas a cargas transversais. Como em geral as estruturas de máquinas ferramentas constituem-se de seções vazadas, adotou-se a teoria de membrana proposta por GORBATOV e VALENTA<sup>10</sup> para determinar a distribuição das tensões cisalhantes. A partir desta, usando método energético, pode-se determinar o coeficiente de cisalhamento como está exposto no capítulo 3.

Visando ainda a utilização dos métodos dos deslocamentos para análise estrutural foi incluído no programa o cálculo da área, centro de gravidade, momentos de inércia principais e polar e o centro de torção das respectivas seções. Adotou-se aqui as equações paramétricas da reta, como sugeriu MALTBAEK<sup>11</sup> para seções cheias.

## 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Quando TIMOSHENKO<sup>19</sup> analisa a influência do cisalhamento na deformação de uma viga reta com cargas transversais, propõe que:

"o deslocamento angular da linha elástica devido, somente, ao cisalhamento é igual em cada seção transversal à deformação de cisalhamento no centro de gravidade desta seção transversal. Representando por  $y_1$  os afundamentos devido ao cisalhamento, obteremos para qualquer seção transversal, a seguinte expressão para o deslocamento angular:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{(\tau_{yx})_{y=0}}{G} = \frac{\alpha V}{A G} \quad (1')$$

onde  $V/A$  é a tensão de cisalhante média,  $G$  o módulo de elasticidade transversal e,  $\alpha$  um coeficiente numérico que deve ser multiplicado pela tensão de cisalhamento média, a fim de obtermos a tensão de cisalhamento no centro de gravidade das seções transversais".

Os valores de  $\alpha$ , obtidos com a definição acima, são em geral altos e tem sido amplamente criticados<sup>6,17</sup>.

COWPER<sup>6</sup>, FLÜGGE<sup>9</sup> e BELLUZZI<sup>3</sup> propõem uma nova definição para as deformações na viga de TIMOSHENKO. Em vez de considerarem os deslocamentos do centro de gravidade das seções, os autores sugerem que seja tomado um deslocamento médio na seção transversal. COWPER, deduzindo as equações da viga de TIMOSHENKO por integração das equações da teoria da elasticidade tridimensional, chegou a uma nova fórmula para o coeficiente de cisalhamento, dependendo este agora também do coeficiente de Poisson.

MASON & HERRMANN<sup>12</sup>, por outro lado, usando igualmente o conceito de deslocamento médio e as equações da teoria da

elasticidade em termos de deslocamentos, chegam a outra fórmula para o cálculo do coeficiente de cisalhamento (semelhante à de COWPER). Ao desenvolver as bases de um programa geral para computador, usando o método de elementos finitos, ele fornece alguns resultados obtidos com o computador IBM 7044. Segundo MASON, o programa permite determinar a distribuição das tensões cisalhantes, a localização do centro de torção e o coeficiente de cisalhamento para qualquer viga prismática.

OPITZ<sup>14</sup> também desenvolveu um programa para calcular o coeficiente de cisalhamento através da fórmula

$$\alpha = \frac{A}{I_x^2} \int S_x^2 dA$$

O autor justifica sua abordagem simples com exemplos e experimentos que mostram ser muito satisfatórios os valores de  $\alpha$  assim obtidos. As deformações medidas diferem de -5% a +8% do valor calculado.

GORBATOV e VALENTA<sup>10</sup>, utilizando a teoria de membrana, obtêm uma expressão para a distribuição das tensões cisalhantes em seções vazadas de paredes finas. Esta fornece uma fórmula bastante cômoda para ser resolvida usando um computador pequeno ou calculadoras eletrônicas de mesa. (Ver Apêndice I).

Os trabalhos acima comentados são os que se destacam dos restantes por apresentarem soluções válidas para maior número de seções.

Examinando-se as obras listadas na referência bibliográfica deste trabalho, conclui-se não haver discordância entre os autores quanto à fórmula para quantificar a deformação devido ao cisalhamento. Todos indistintamente concordam em usar a expressão:

$$\frac{\alpha V}{A G}$$

As divergências ocorrem na definição dos termos da

equação acima e no método usado para determinação do coeficiente  $\alpha$ .

Resumidamente se tem:

1. Divergências na definição dos termos

- GRASHOF (1878) e RANKINI (1895) apud<sup>20</sup> e TIMOSHENKO<sup>19</sup> (1921), definem a deformação no centro de gravidade;
- BELLUZZI<sup>3</sup> (1961), FLÜGGE<sup>9</sup> (1962), COWPER<sup>6</sup> (1966) e MASON & HERRMANN<sup>12</sup> (1968), definem uma deformação média na seção;
- COURBON<sup>5</sup> (1964) e RÜHL & SCHWAIGERER<sup>17</sup> (1955) definem uma seção reduzida.

$$A_1 = \frac{A}{\alpha}$$

2. Divergências no método de cálculo

- GRASHOF, RANKINI e TIMOSHENKO op. cit., devido a definição de deformação adotada, calculam pela fórmula

$$\alpha = \frac{\tau_{\text{baricentro}}}{\tau_{\text{médio}}}$$

- FLÖPL, apud<sup>17</sup>, FLÜGGE, COURBON, op. cit. (ver também TIMOSHENKO), usam determinar  $\alpha$  por métodos energéticos.
- COWPER e MASON & HERRMANN, op. cit., determinam a deformação através da teoria da elasticidade (MASON usa a técnica de Ritz para determinar as constantes da "warping function"). Comparando o resultado com a equação da linha elástica:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dz^2} = \frac{M_x}{EI_x} + \frac{\alpha y}{A G} \frac{dV_y}{dz}$$

determinam  $\alpha$  pela solução do sistema de equações.

- MINDLIN apud<sup>6</sup>, usa  $\alpha$  de tal maneira que, a frequência do primeiro modo de vibração ao cisalhamento, calculada através da equação de TIMOSHENKO, concorde com a frequência dada pelas equações tridimensionais para pequenas vibrações elásticas.
- GOODMAN apud<sup>6</sup>, escolhe  $\alpha$  de tal forma que a equação da frequência obtida da equação de TIMOSHENKO é correta no limite de comprimento de onda nulo.

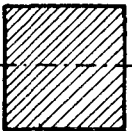
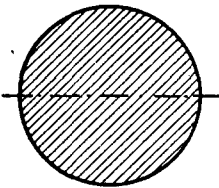
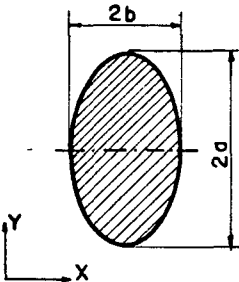
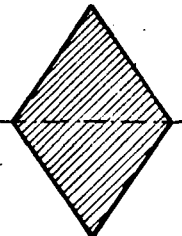
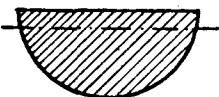
Convém destacar que pela teoria da elasticidade obtém-se uma expressão genérica para os deslocamentos de uma viga, sem isolar a contribuição do cisalhamento diretamente.

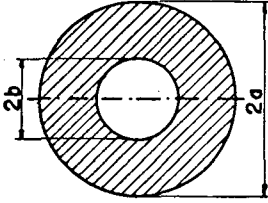
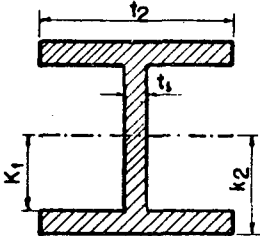
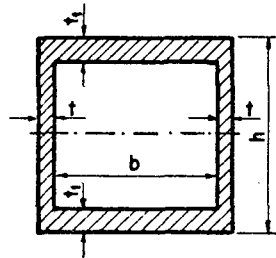
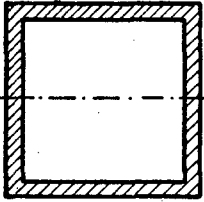
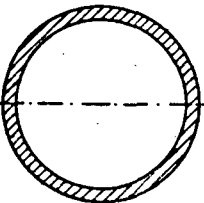
As diferenças nos valores de  $\alpha$  para uma mesma seção dependem das hipóteses sobre a distribuição da tensão cisalhante na seção.

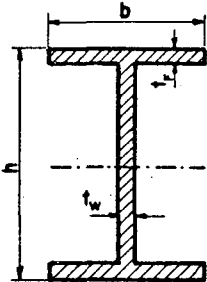
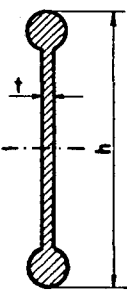
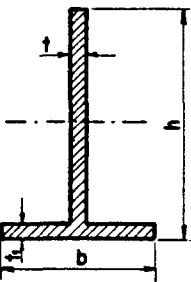
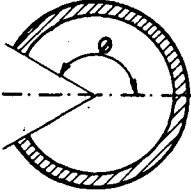
No Quadro I estão, sumariamente, compiladas as diversas fórmulas e valores do coeficiente de cisalhamento segundo a geometria da seção transversal da viga. Os valores de  $\alpha$ , em algumas fórmulas, foram modificados para permitir calcular as deformações ou deslocamentos no cisalhamento através da equação (1). A rigor, os valores contidos no Quadro I são válidos para os casos em que o esforço cortante é constante ao longo da viga reta.



QUADRO 1 - Fórmulas e valores do coeficiente de cisalhamento.

$\mu$ = coeficiente de Poisson. A linha neutra está representada por traço-ponto.		
SEÇÃO	FONTE	COEFICIENTE DE CISALHAMENTO
	Belluzzi (3) Courbon (5) Flügge (9) Rühi (17) Popov (15) Roark (16)  Cowper (6) Mason (12)	$\frac{6}{5} = 1.2$  $\frac{12 + 11\mu}{10(1 + \mu)}$
	(3), (5), (16)  (3), (5), (17)  (3)  (6), (12)	$\frac{10}{9} \approx 1,111$ considerado só $\zeta$ vertical  $\frac{32}{27} = 1,185$ considerado $\zeta$ total  1,175 teoria da elasticidade  $\frac{7 + 6\mu}{6(1 + \mu)}$
	Belluzzi (3)    Cowper (6)	$\frac{10}{9} \approx 1,111$ considero só $\zeta$ vertical  $\frac{10}{9} + \frac{2}{27} \frac{b^2}{a^2}$ considera $\zeta$ total c/ Vy  $\frac{10}{9} + \frac{2}{27} \frac{a^2}{b^2}$ considera $\zeta$ total c/ Vx  $\frac{(40 + 37\mu)a^4 + (16 + 10\mu)a^2b^2 + \mu b^4}{12(1 + \mu)a(3a + b)}$ a pode ser > ou < b
	Courbon (5)	$\frac{31}{30} = 1,033$
	Cowper (6)	$\frac{1,305 + 1,273\mu}{1 + \mu}$

SEÇÃO	FONTE	COEFICIENTE DE CISALHAMENTO
	Cowper (6)	$\frac{(7+6\mu)(1+m^2)^2+(20+12\mu)m^2}{6(1+\mu)(1+m^2)^2}$ <p>onde <math>m = b/a</math></p>
	Newlin (13)	$\left[ 1 + \frac{3(K_2 - K_1)K_1}{2K_2^2} \left( \frac{t}{t_1} - 1 \right) \right] \frac{K_2^2}{10I_{EN}}$ <p>onde <math>I_{EN}</math> = momento de inércia</p>
	Cowper (6) Dreyer (8)	$\frac{A + \mu B + 10n^2((3+\mu)m + 3m^2)}{10(1+\mu)(1+3m)^2}$ <p>onde <math>m = bt_1/ht_1</math>, <math>n = b/h</math>  <math>A = 12 + 72m + 150m^2 + 90m^3</math>  <math>B = 11 + 66m + 135m^2 + 90m^3</math></p> $\frac{3(1+\beta)}{5\beta^2(3+\beta)^2} (2\beta^3 + 10\beta^2 + 15\beta + 5)$ <p>onde <math>t_1 = t</math>, <math>\beta = h/b</math></p>
	Cowper (6) Dreyer (8)	$\frac{48 + 39\mu}{20(1+\mu)}$ <p>2.4</p>
	Courbon (5) Roark (16) Cowper (6)	<p>2</p> $\frac{4+3\mu}{2(1+\mu)}$

SEÇÃO	FONTE	COEFICIENTE DE GISALHAMENTO
	<p>Belluzzi (3)</p> <p>Courbon (5)</p> <p>Cowper (6)</p>	$\frac{A}{htw}$ <p>onde A = área total</p> $\frac{S}{s} + \frac{S}{3 \frac{s'h^2}{2b^2} (1 + \frac{\lambda}{6})^2}$ <p>onde: S = área total  <math>t_w = t_f</math>, <math>s = th</math>, <math>s' = bt</math>, <math>\lambda = \frac{s}{s'}</math></p> $\frac{A + B\mu + C}{10(1 + \mu)(1 + 3m)^2}$ <p>onde,</p> $A = 12 + 72m + 150m^2 + 90m^3$ $B = 11 + 66m + 135m^2 + 90m^3$ $C = 30n^2(m + m^2) + 5\mu n^2(8m + 9m^2)$ $m = 2bt_f / htw, n = b/h$
	<p>Cowper (6)</p>	$\frac{A + B\mu}{10(1 + \mu)(1 + 3m)^2}$ <p>onde,</p> $A = 12 + 72m + 150m^2 + 90m^3$ $B = 11 + 66m + 135m^2 + 90m^3$ $m = 2A_s / ht; A_s = \text{área de um pólo}$
	<p>Cowper (6)</p>	$\frac{A + B\mu + C}{10(1 + \mu)(1 + 4m)^2}$ <p>onde,</p> $A = 12 + 96m + 276m^2 + 192m^3$ $B = 11 + 88m + 248m^2 + 216m^3$ $C = 30n^2(m + m^2) + 10\mu n^2(4m + 5m^2 + m^3)$ $m = bt_1 / ht, n = b/h$
	<p>Ver ítem 3</p>	$\frac{16\theta \left[ \frac{3\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin 2\theta - \theta \sin^2 \theta \right]}{(2\theta - \sin 2\theta)^2}$

### 3 - COEFICIENTE DE CISCALHAMENTO

#### 3.1 - Resultados usando a teoria de membrana

Da revisão bibliográfica feita no segundo capítulo, constata-se que os métodos mais recentes para o cálculo de  $\alpha$  são os propostos por COWPER e MASON-HERRMANN (op. cit.). Observando o Quadro I, verifica-se que a inovação reside no facto de  $\alpha$  depender também do coeficiente de Poisson. Fazendo sucessivamente  $\mu = 0$  e  $\mu = 0,5$  nas fórmulas de COWPER, (ver Quadro I), tem-se o Quadro 2

QUADRO 2 - Valores do coeficiente de cisalhamento nas fórmulas de COWPER.

TIPO DE SECÇÃO	COEFICIENTE DE CISCALHAMENTO PARA		DIMINUIÇÃO %
	$\mu = 0$	$\mu = 0,5$	
-Circular cheia	1,168	1,11	4,9
-Retangular cheia	1,2	1,168	2,67
-Anel circular	2,0	1,83	8,5
-Quadrada vazada de parede fina	2,4	2,25	6,25
-Duplo "T" fina com $h = b$	3,38	3,2	5,3
-Duplo "T" fina com $h = 2b$	2,12	2,02	5

Ao comparar-se estes resultados com os obtidos pelos outros pesquisadores, observa-se que para secções de parede fina não há diferenças. COWPER usa a teoria da membrana para secções de parede fina para simplificar as expressões que fornecem a distribuição das tensões cisalhantes e a "warping function".

A obtenção de um coeficiente de cisalhamento com dependência do coeficiente de Poisson, no entanto, é consequência da lei das tensões cisalhantes usada na determinação da-

quele. Observe-se que entre os valores limites de  $\mu$  o coeficiente  $\alpha$  varia em torno de 6% aproximadamente.

### 3.2 - Energia de deformação elástica.

O trabalho de deformação elástica, ou mais precisamente, a energia de deformação elástica no cisalhamento, por unidade de volume vale<sup>15</sup> :

$$W = \frac{\tau^2}{2G}$$

Considerando uma viga com secção constante e esforço cortante idêntico em todas as secções transversais, a energia de deformação elástica devido somente ao cisalhamento por esforço cortante é:

$$W = \iiint \frac{\tau^2}{2G} dx dy dz$$

A fim de se obter uma expressão semelhante a da energia de deformação elástica na tração e flexão e, lembrando que

$$V = \iint \tau dy dx \quad e \quad A = \iint dx dz,$$

multiplica-se e divide-se  $W$  por  $A/V^2$ . Sem alterar seu valor tem-se:

$$W = \int \frac{V^2}{2GA} \left[ \frac{A}{V^2} \iint \tau^2 dx dy \right] dz \quad (2)$$

Ao termo em colchete chama-se "coeficiente de cisalhamento  $\alpha$ ".

$$\alpha = \frac{A}{V^2} \iint \tau^2 dx dy \quad (3)$$

Reescrevendo a expressão (2), considerando (3), vem:

$$W = \int \alpha \frac{V^2}{2GA} dz$$

Quando  $V$  varia com  $Z$  (cargas distribuídas) a expressão acima é aproximada.

Através do teorema de Castigliano, pode-se então determinar o deslocamento do ponto de aplicação da carga concentrada, devido somente ao cisalhamento. Para uma viga reta engastada com carga na extremidade em balanço e vão de comprimento  $L$ , sendo  $V = P$ , obtém-se:

$$d_c = \frac{\partial W}{\partial P} = \alpha \frac{PL}{GA} \quad (4)$$

Reconhece-se aqui os termos da expressão (1). Observa-se que devido à origem da equação (4), o deslocamento é o do ponto de aplicação da carga concentrada, devido somente à contribuição do esforço cortante. Portanto,  $\alpha$  deve sempre ser tomado na direção da carga  $P$ .

A expressão (4) é ainda aproximada para quantificar o deslocamento. O coeficiente de cisalhamento, quando for o mesmo em todo o comprimento  $L$ , não leva em conta as perturbações na distribuição das tensões cisalhantes que ocorre nas seções junto ao ponto de aplicação da carga e junto ao engastamento. As expressões de  $\alpha$  propostas por COWPER e ou MASON-HERRMANN<sup>12</sup>, podem também ser usadas na equação (4), embora não tenham sido obtidas pelo método aqui exposto. Contém também o defeito de ser obtido para uma secção sem levar em conta as perturbações locais.

### 3.3 - Secções simples e duplamente conexas.

Conforme o objetivo adotado no capítulo 1, estabelecer-se-á, a seguir, procedimentos para calcular os valores do coeficiente de cisalhamento para secções simples e duplamente conexas.

A obtenção da distribuição das tensões cisalhantes,

através da teoria de membrana, está exposta no Apêndice I.

### 3.3.1 - Simplesmente conexas.

Este tipo de secção permite a aplicação da teoria de membrana, exposta no Apêndice, com relativa facilidade. A equação (3) para o coeficiente de cisalhamento contém uma integral de área. Esta tem fácil solução se for convenientemente transformada numa integral de linha.

Com efeito, seja  $A_0$  um ponto na extremidade da secção e sobre a linha média desta (Fig. 1). Seja  $s$  a distância entre  $A_0$  e o elemento ( $e.ds$ ) onde atua a tensão cisalhante ( $\tau$ ). Reescrevendo a equação (3) em função da nova variável  $s$ , vem:

$$\alpha = \frac{A}{V^2} \int_s \tau^2 e ds \quad (5)$$

Supondo a tensão cisalhante constante ao longo da espessura da parede, e considerando o fluxo de tensão cisalhante

$$q = \tau \cdot e$$

a equação (5) fica:

$$\alpha = \frac{A}{V^2} \int_s q^2 \frac{ds}{e} \quad (6)$$

Esta integral de linha pode ser decomposta numa soma de integrais, desde que o fluxo  $q$  seja perfeitamente definido em cada uma delas (propriedade das integrais).

Assim:

$$\alpha = \frac{A}{V^2} \left[ \sum_{i=1}^m \int_0^{s_i} q_i^2 \frac{ds}{e_i} \right] \quad (6')$$

Seja uma secção tal como a indicada na figura 1, onde  $x$ ,  $y$  são eixos principais de inércia da secção. Como nas superfícies livres de carregamento, não há tensões, no "ponto"  $A_0$ , temos:

$$q_0 = 0 \quad \text{para} \quad s = 0$$

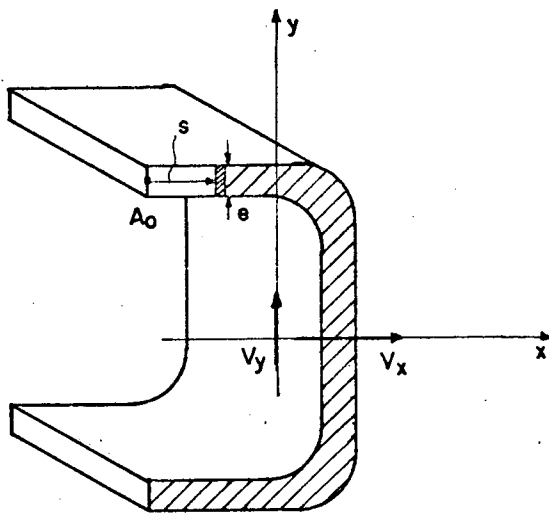


Fig. 1 - Secção simplesmente conexa.

uma decomposição vetorial de  $V_x$  e  $V_y$ , pois  $q$  é tangente a linha média.

Portanto:

$$q_x = - \frac{V_x}{I_y} S_y \quad \text{é o fluxo de tensões cisalhantes quando atua somente } V_x.$$

....(8)

Assim, deve-se distinguir dois valores de  $\alpha$ , obtidos através da superposição dos efeitos.

Um  $\alpha_y$  na direção de  $y$  quando atua  $V_y$  e outro  $\alpha_x$  na direção  $x$  quando atua  $V_x$ .

Substituindo sistematicamente  $q_x$  e  $q_y$  na expressão de  $\alpha$  (eq. 6) vem:

$$\alpha_x = \frac{A}{I_y^2} \int_s S_y^2 \frac{ds}{e} \quad (9)$$

$$\alpha_y = \frac{A}{I_x^2} \int_s S_x^2 \frac{ds}{e} \quad (10)$$

O fluxo de tensões cisalhantes (ver Apêndice I eq. 62) num elemento  $ds$  é então

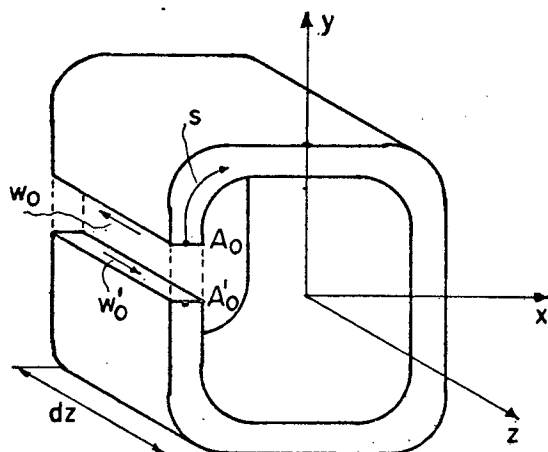
$$q = - \frac{V_x}{I_y} S_y - \frac{V_y}{I_x} S_x \quad (7)$$

Cada um dos termos desta equação não significa  $q$  na direção  $x$  ou  $y$ , uma vez que  $q$  tem a direção do elemento onde ele atua. Apenas significa a influência de  $V_x$  ou  $V_y$ . Assim quando se fala na decomposição de  $q$ , não se deve entender como uma decomposição vetorial de  $q$ , mas sim



### 3.3.2 - Duplamente conexas

A única diferença no tratamento destas secções é a condição inicial do fluxo de tensões cisalhantes no ponto  $A_0$ . Seu valor é encontrado da condição de continuidade das deformações na direção  $z$ , em qualquer ponto da secção (ver fig. 2).



Para um trecho  $dz$ , tem-se

$$w'_0 = w_0$$

ou

$$w'_0 - w_0 = 0$$

isto é, não há deslocamento relativo entre as arestas. Então da equação (66), (no Apêndice I) resulta que:

Fig. 2 - Secção duplamente conexa.

$$\oint \left[ q_0 - \left( \frac{V_x}{I_y} S_y + \frac{V_y}{I_x} S_x \right) \right] \frac{ds}{e} = 0$$

Finalmente:

$$q_0 = \frac{1}{\oint \frac{ds}{e}} \left[ \frac{V_x}{I_y} \oint S_y \frac{ds}{e} + \frac{V_y}{I_x} \oint S_x \frac{ds}{e} \right]$$

Elevando o valor de  $q_0$  na equação (62), (Ver Apêndice I) e agrupando os coeficientes de  $V_x$  e  $V_y$ , vem:

$$q = \frac{V_x}{I_y} \left[ \frac{\oint S_y \frac{ds}{e}}{\oint \frac{ds}{e}} - S_y \right] + \frac{V_y}{I_x} \left[ \frac{\oint S_x \frac{ds}{e}}{\oint \frac{ds}{e}} - S_x \right] \quad (11)$$

Denominando:

$$S_o^{(y)} = \frac{\int S_y \frac{ds}{e}}{\int \frac{ds}{e}} \quad (12)$$

e

$$S_o^{(x)} = \frac{\int S_x \frac{ds}{e}}{\int \frac{ds}{e}} \quad (13)$$

a equação (11) pode ser reescrita na forma:

$$q = - \frac{V_x}{I_y} \left[ S_y - S_o^{(y)} \right] - \frac{V_y}{I_x} \left[ S_x - S_o^{(x)} \right] \quad (14)$$

Considerando a influência de  $V_x$  e  $V_y$  isoladamente, da equação anterior vem que:

$$q_x = - \frac{V_x}{I_y} \left[ S_y - S_o^{(y)} \right] \quad (15)$$

e

$$q_y = - \frac{V_y}{I_x} \left[ S_x - S_o^{(x)} \right] \quad (16)$$

Finalmente, o coeficiente de cisalhamento segundo as direções principais  $x$ ,  $y$ , pode ser calculado substituindo-se a equação (15) para  $\alpha_x$  e a equação (16) para  $\alpha_y$ , sucessivamente, na equação (6).

Resolvendo primeiro para a direção  $x$ , tem-se:

$$\alpha_x = \frac{A}{V_x^2} \int \left[ \frac{V_x}{I_y} (S_y - S_o^{(y)}) \right]^2 \frac{ds}{e}$$

Elevando ao quadrado a expressão em colchetes e lembrando a equação (12), vem:

$$\alpha_x = \frac{A}{I_y^2} \left[ \oint S_y^2 \frac{ds}{e} - \frac{(\oint S_y \frac{ds}{e})^2}{\oint \frac{ds}{e}} \right] \quad (17)$$

De maneira análoga, conclui-se que

$$\alpha_y = \frac{A}{I_x^2} \left[ \oint S_x^2 \frac{ds}{e} - \frac{(\oint S_x \frac{ds}{e})^2}{\oint \frac{ds}{e}} \right] \quad (18)$$

3.4 - Coeficiente de cisalhamento segundo um eixo baricêntrico qualquer.

Quando MASON & HERRMANN<sup>12</sup> desenvolveram as equações básicas para o cálculo do coeficiente de cisalhamento segundo um sistema de eixos ortogonais baricêntrico, observaram a presença de certos termos invariantes nas expressões dos coeficientes  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  e  $\alpha_{xy}$ , onde " $\alpha_{xy}$  representa a deformação na direção y devido a uma carga na direção x e vice-versa."

Observam ainda, que a transformação devido a uma rotação do sistema de referência, ocorre da mesma maneira que os momentos de inércia.

Adotando-se uma representação matricial para o conjunto de valores do coeficiente de cisalhamento, pode-se definir:

$$\alpha_p = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

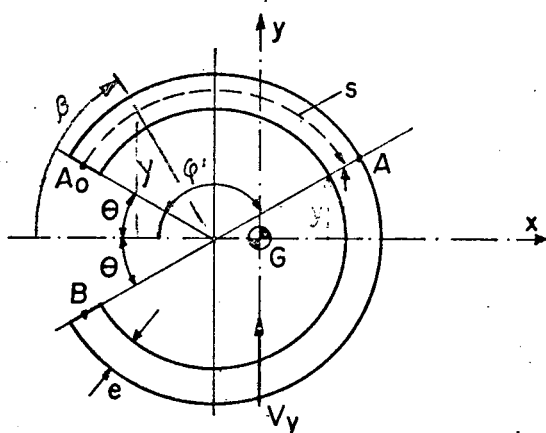
Que pode ser assim lido: "coeficiente de cisalhamento segundo os eixos principais de inércia da secção."

O coeficiente de cisalhamento segundo um sistema de eixos ortogonais baricêntricos, poderia ser representado por  $\alpha_d$ , assim:

$$\alpha_d = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Agora conhecido  $\alpha_p$ , pode-se determinar  $\alpha_d$  para uma rotação conhecida do sistema de eixos. A lei de transformação é a mesma dos momentos de inércia. O círculo de Mohr pode também ser usado para se determinar  $\alpha_{xx}$ ,  $\alpha_{yy}$  e  $\alpha_{xy}$ .

### 3.5 - Exemplo de aplicação para secção anel circular aberta.



Seja a secção representada na fig. 3, uma secção anel circular aberta, de espessura "e" constante. O raio "r" é contado até a linha média. Os eixos x e y, são eixos principais de inércia.

Fig. 3 - Secção anel circular.

A equação (10) de  $\alpha$  obtida anteriormente é:

$$\alpha_y = \frac{A}{I_x^2} \int_{AB} S_x^2 \frac{ds}{e} \quad (10)$$

Resolvendo individualmente cada um dos termos da equação (10) tem-se:

- Cálculo do momento estático  $S_x$ .

Por definição:

$$S_x = \int_0^s ey \cdot ds$$

Fazendo:

$$y = r \operatorname{sen} \beta$$

$$\text{e } ds = r d\beta \quad \text{onde } \theta \leq \beta \leq \phi'$$

Após a integração, vem:

$$S_x = e r^2 (\cos \theta - \cos \phi')$$

- A integral de linha, considerando a troca de variável  $s$  por  $\phi'$ , é então:

$$\text{RINTL} = \int_{\widehat{AB}} S_x^2 \frac{ds}{e} = e r^5 \int_{\theta}^{2\pi-\theta} (\cos \theta - \cos \phi')^2 d\phi'$$

Resolvendo:

$$\text{RINTL} = e r^5 \left[ 3\pi - 3\theta - 2(\pi - \theta) \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{3}{2} \operatorname{sen} \theta \right] \quad (21)$$

- A área da secção, sendo  $e \ll r$ , pode ser calculada pela integração de  $dA = e r d\beta$

Com efeito,

$$A = 2 r e (\pi - \theta) \quad (22)$$

- O momento de inércia principal em relação ao eixo  $x$  é, por definição

$$I_x = \int_{\widehat{AB}} Y^2 e ds = r^3 e \left( \pi - \theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) \quad (23)$$

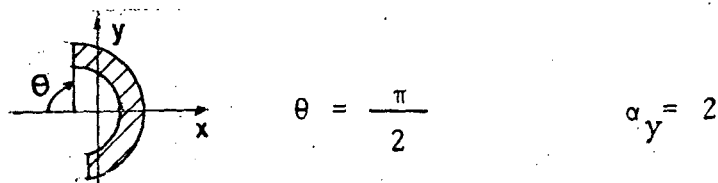
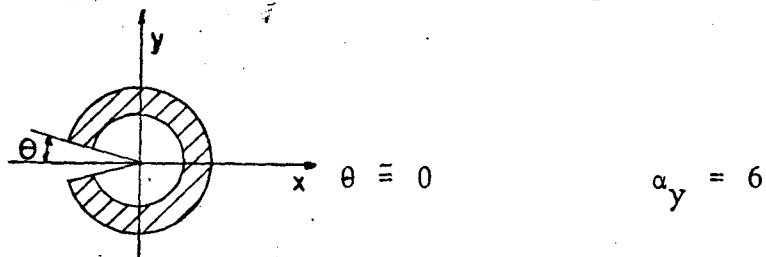
Finalmente, substituindo as equações (21), (22) e (23) na (10) e simplificando vem:

$$\alpha_y = \frac{2(\pi - \theta)}{\left( \pi - \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right)^2} \left[ 3(\pi - \theta) - 2(\pi - \theta) \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right] \dots (24)$$

Ou reescrevendo a (24) em termos de  $\phi = \pi - \theta$ , vem:

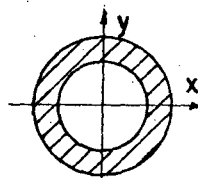
$$\alpha_y = \frac{16\phi}{(2\phi - \sin 2\phi)^2} \left[ \frac{3}{2} \phi - \frac{3}{4} \sin 2\phi - \phi \sin^2 \phi \right] \quad (25)$$

Digno de nota é o valor de  $\alpha$  para  $\theta \equiv 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$



Comparando-se com a seção anel circular fechada (ver Quadro 1) onde:

$$\alpha_y = \alpha_x = 2$$



Vê-se, portanto, que o coeficiente de cisalhamento depende da distribuição da tensão de cisalhamento, ou melhor, da geometria da seção. Nem sempre o aumento de área, e ou do momento de inércia, melhora a rigidez ao cisalhamento.

## 4 - CENTRO DE TORÇÃO

### 4.1 - Introdução.

Como já foi observado no capítulo anterior, as tensões cisalhantes nas bordas da secção tem sempre a direção da tangente a esta secção.

Por definição de tensão deve-se ter:

$$V = \int \tau \, dA$$

Observando a figura 4, nota-se que as tensões nas me

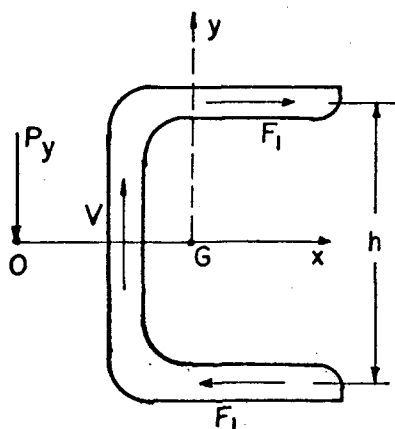


Fig. 4 - Centro de torção não coincide com o baricentro.

sas da secção desenvolvem um Momento torçor interno. O esforço cortante é praticamente absorvido na alma. Então, se a carga externa tem resultante passando pelo baricentro da secção, ocorre que os Momentos em torno de um ponto da secção, por exemplo o baricentro, não são nulos.

Um artifício para evitar a torção da viga é fazer com que as cargas externas tenham a resultante passando por um ponto "O" tal, que os momentos em torno de qualquer ponto da secção tenham a soma nula.

Este ponto "O" é denominado na literatura <sup>10,15,19</sup> de

"centro de torção".

A seguir são apresentadas as fórmulas para o centro de torção de secções simples e duplamente conexas.

### 4.2 - Simplesmente conexas.

Uma vez conhecida a distribuição das tensões cisalhantes ou do fluxo, o cálculo do centro de torção representa apenas mais uma equação. Na figura 5 reconhece-se a força ex-

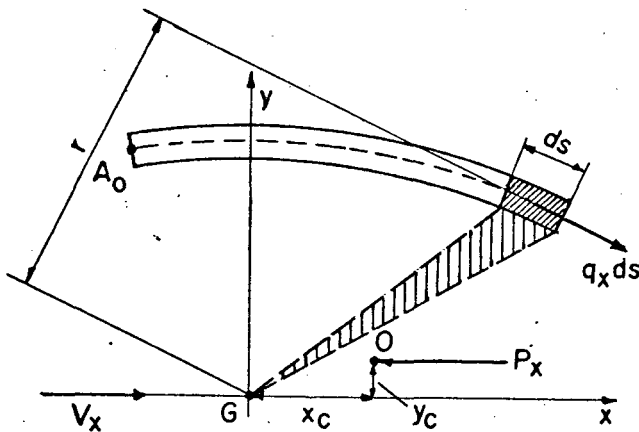


Fig. 5 - Centro de torção

terna  $P_x$ , aplicada no centro de torção "O" e paralela ao eixo (x) principal de inércia da seção.

Para não haver rotação da seção em torno do eixo z, deve-se ter:

$$\int_S r(q_x ds) - P_x Y_c = 0 \quad \dots (26)$$

Para não haver translação:

$$V_x = P_x$$

O fluxo é dado pela equação (7), considerando somente a ação de  $V_x$ .

Resolvendo a (26) para  $Y_c$  vem:

ordenada do centro de torção

$$Y_c = - \frac{1}{I_y} \int_S r S_y ds \quad (27)$$

Analogamente, quando atua só  $P_y$ :

abscissa do centro de torção é:

$$X_c = + \frac{1}{I_x} \int_S r S_x ds \quad (28)$$

#### 4.3 - Duplamente conexas.

O centro de torção para as seções duplamente conexas tem a mesma expressão da equação (26). Porém, o fluxo de tensões cisalhantes é agora o dado pela equação (14).

Resolvendo, então, a equação (26) para  $Y_c$  e substituindo  $q_x$  dado pela equação (15) vem:



$$Y_c = - \frac{1}{I_y} \left[ \oint S_y r ds - S_o^{(y)} \oint r ds \right] \quad (29)$$

Observe-se na figura 5 que  $rds$  é o dobro da área do triângulo elementar, portanto, a integral

$$A_m = \oint r ds \quad (30)$$

representa o dobro da área da figura limitada pela linha média da secção.

Reescrevendo a equação (29) considerando a (30) vem

$$Y_c = - \frac{1}{I_y} \left[ \oint S_y r ds - A_m S_o^{(y)} \right] \quad (31)$$

Considerando agora só  $P_y$ , obtém-se, com raciocínio análogo:

$$X_c = \frac{1}{I_x} \left[ \oint S_x r ds - A_m S_o^{(x)} \right] \quad (32)$$

## 5 - BASES PARA UM PROGRAMA DE COMPUTADOR DIGITAL

### 5.1 - Introdução

Ao ser desenvolvida a análise de um programa é importante definir anteriormente os dados de entrada.

O presente caso é concernente às seções de parede fina. Os cálculos são baseados nos comprimentos das linhas médias e na correspondente espessura das paredes. Assim, observa-se que a figura fica definida quando se localiza a linha média juntamente com a espessura.

Com a finalidade de se obter um programa de uso geral, mesmo por pessoas não familiarizadas com técnica de computação, decidiu-se que a obtenção dos dados de entrada deveria ser extremamente simples. Com esse objetivo definiu-se:

Elemento reto é um trecho da seção transversal, de espessura "e" constante, onde a linha média é um segmento de retas.

Vértice é um ponto, sobre a linha média da seção, que caracteriza o fim ou o início de um elemento reto.

O número do vértice inicial de um elemento reto serve de índice deste elemento. Como exemplo, a fig. 6a) mostra os vértices enumerados de 1 a 6. Na figura 6b) está esquematizado um elemento reto "1" com os seus dois vértices.

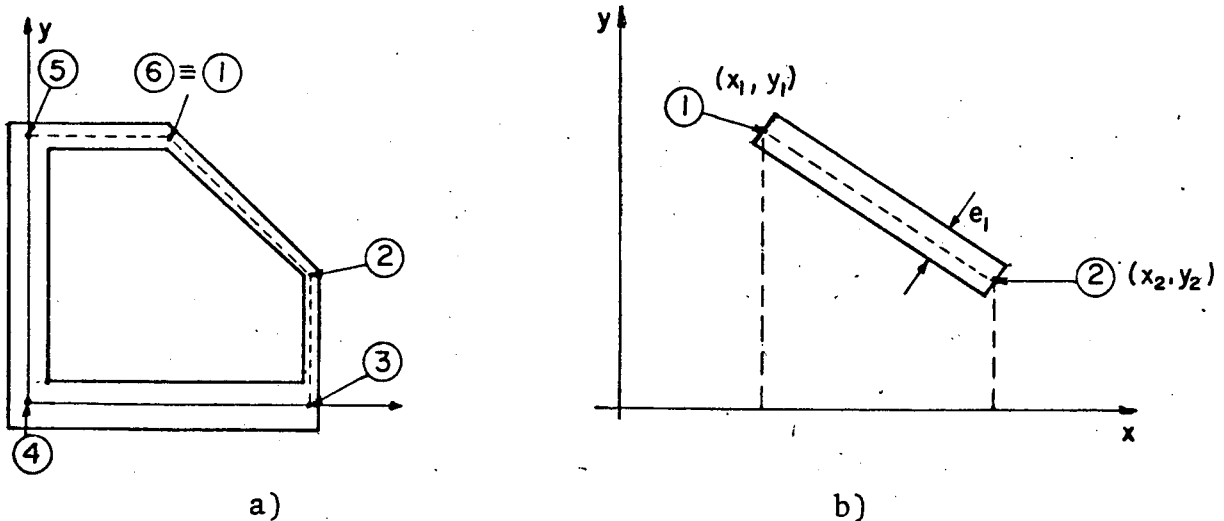


Fig. 6 - a) Enumeração dos vértices  
b) Elemento reto "1".

A enumeração dos vértices deve ser com números inteiros, seguindo-se a ordem natural. O primeiro vértice tem o número 1. Se a seção for fechada, o vértice inicial é também o final. O elemento reto fica perfeitamente localizado e determinado quando se fornece as coordenadas dos vértices, inicial e final, e a espessura. Esta leva como índice o índice i inicial do elemento.

Os dados de entrada do programa principal são as coordenadas (X,Y) dos vértices e a espessura do elemento reto, assim obtidos:

- a) coloca-se a figura no quadrante positivo de um sistema coordenado XY;
- b) traça-se a linha média sobre todos os elementos retos;
- c) enumera-se os vértices de 1 a N. Se a seção é fechada (duplamente conexa) o vértice final e o inicial se superpõem mas os números são distintos, 1 e N, respectivamente. Ver fig. 6.a) como exemplo;
- d) registra-se numa planilha as coordenadas dos vértices a espessura dos elementos retos e o número total de vértices enumerados;
- e) segue-se a perfuração dos cartões. Ver exemplo de aplicação no fim do capítulo 6.

▷ Os programas aqui desenvolvidos foram limitados a aquelas seções onde a linha formada pela união de todos os vértices é uma linha poligonal contínua aberta ou fechada.

Nos itens e capítulos que seguem, são apresentadas as fórmulas para o cálculo das propriedades das seções. A técnica utilizada foi sempre a mesma:

- a) determina-se as propriedades do elemento reto em relação ao seu sistema de eixos principais "1" e "2" (ver figura 7);
- b) faz-se a transformação das propriedades em relação a um sistema de eixos  $x_b, y_b$ , centrado em  $O'$  e paralelo ao sistema inicial X,Y;
- c) nova transformação, através de uma translação do sistema  $x_b, y_b$ , até o sistema inicial X,Y, e obtêm-se as propriu

- edades do elemento agora em relação ao sistema inicial;
- d) por soma obtêm-se finalmente as propriedades da seção em relação ao sistema inicial  $X, Y$ ;
  - e) segue-se a determinação do baricentro (ponto G na figura 7) e dos eixos principais de inércia da seção (eixos  $x_{BP}$  e  $y_{BP}$  denominados simplesmente de  $x, y$ )
  - f) as coordenadas dos vértices da seção em relação aos eixos principais serão os dados de entrada para os programas que determinam o coeficiente de cisalhamento e o centro da seção, como será visto no capítulo 6.

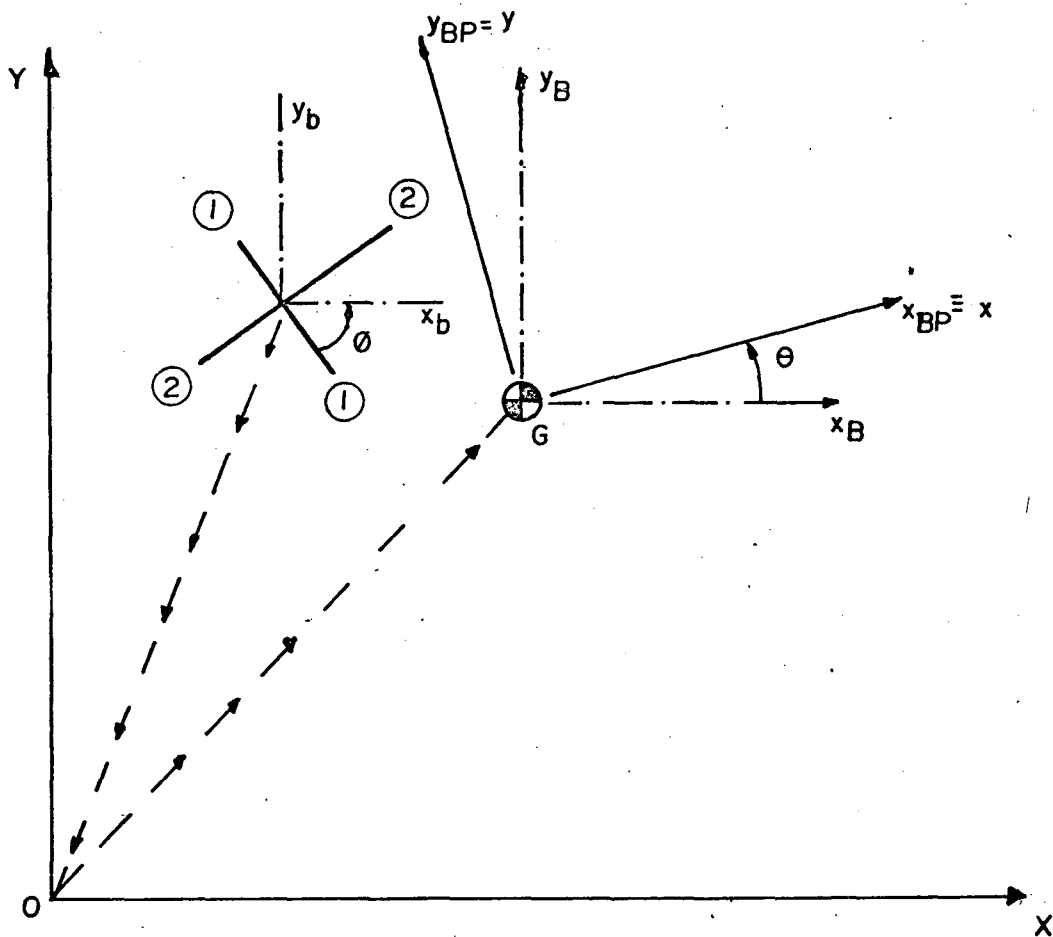


Fig. 7 - Sistemas de referênciã

## 5.2 - Equações paramétricas da reta.

Foram aqui usadas as equações paramétricas da reta<sup>11</sup> para definir o segmento de reta "s" de um elemento reto que une o vértice "i" ao vértice "i+1".

Basta então desenvolver as fórmulas para um trecho genérico "i" e, através da propriedade da soma de integrais, pode-se percorrer toda a linha média.

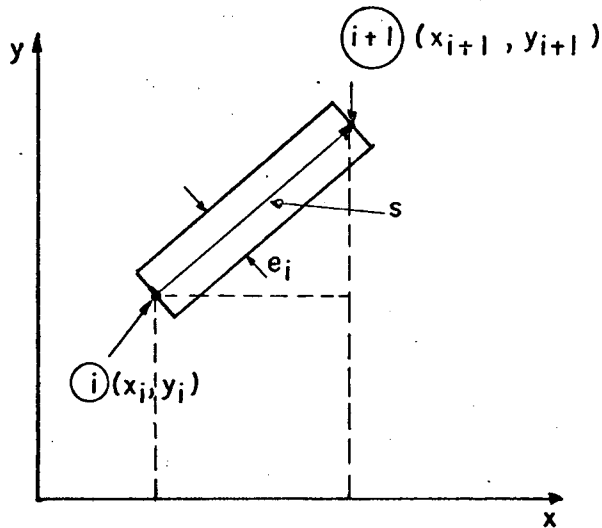


Fig. 8 - Elemento reto genérico i.

Seja o elemento reto da figura 8 ao lado. Definindo-se:

$$\gamma_i = x_{i+1} - x_i \quad (33)$$

e

$$\beta_i = y_{i+1} - y_i$$

tem-se:

$$s_i = \sqrt{\beta_i^2 + \gamma_i^2} \quad (34)$$

A equação da reta que une os vértices "i" e "i+1" é:

$$x = x_i + \gamma_i t \quad (35)$$

$$y = y_i + \beta_i t$$

Onde  $t$  é uma variável independente, cujo campo de definição é

$$0 \leq t \leq 1$$

A seguir são apresentadas as fórmulas da área, momentos estáticos e momentos de inércia para o elemento reto definido acima. Foi desenvolvida uma sub-rotina com o nome PROPI para o cômputo destas grandezas. O fluxograma está apresentado no Apêndice 2c (p. 84).

## 5.3 - Área

A área do elemento genérico "i" é

$$A_i = e_i \cdot s_i \quad (36)$$

A área da seção, composta de "m" elementos retos, é:

$$A = \sum_{i=1}^m e_i \cdot s_i \quad (36')$$

## 5.4 - Momentos estáticos.

Usou-se aqui a notação S para os momentos estáticos embora no programa e no fluxograma tenha sido utilizada a letra M. O índice define o eixo segundo o qual ele é calculado. Os momentos estáticos de um elemento genérico "i" em relação aos eixos iniciais X, Y, são definidos como:

$$S_{xi} = \int_0^{s_i} e y ds = e_i \cdot s_i \left( y_i + \frac{\beta_i}{2} \right) \quad (37)$$

e

$$S_{yi} = \int_0^{s_i} e x ds = e_i \cdot s_i \left( x_i + \frac{\gamma_i}{2} \right) \quad (38)$$

A solução destas integrais é facilmente obtida ao se fazer a troca da variável  $s = s_i t$ .

Os momentos estáticos da seção em relação ao sistema inicial são então:

$$S_x = \sum_{i=1}^m e_i s_i \left( y_i + \frac{\beta_i}{2} \right) \quad (39)$$

e

$$S_y = \sum_{i=1}^m e_i s_i \left( x_i + \frac{\gamma_i}{2} \right) \quad (40)$$

### 5.5 - Baricentro da seção

As coordenadas do baricentro da seção são obtidas, dividindo-se o momento estático pela área da seção

$$x_{BP} = \frac{S_y}{A} \quad e \quad y_{BP} = \frac{S_x}{A} \quad (41)$$

### 5.6 - Momentos de inércia

A técnica usada para obter os momentos de inércia da seção reta está sugerida na fig. 7. Primeiramente obtêm-se as equações para o elemento "i" em relação aos seus eixos principais de inércia 1, 2. Realiza-se depois a transformação para o sistema inicial X, Y. Por soma, obtêm-se os momentos de inércia da seção em relação ao sistema inicial.

Definida a espessura e o comprimento do elemento reto, os momentos de inércia principais são:

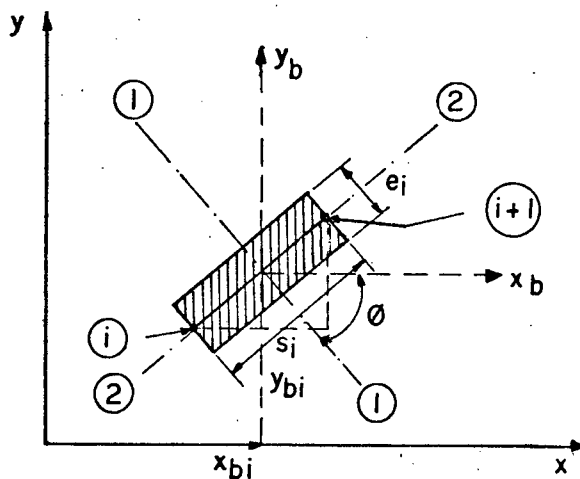


Fig. 9 - Rotação e translação do sistema intrínseco principal

$$I_{11} = \frac{e_i s_i^3}{12}$$

$$I_{22} = \frac{s_i e_i^3}{12}$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22}$$

O ângulo entre o eixo principal 1 e o eixo baricêntrico  $x_b$ , paralelo ao eixo X inicial, é:

$$\phi = \text{arc tg } (\gamma/\beta)$$

contado no sentido positivo como mostra a figura 9.

O baricentro do elemento reto está sobre a linha média e a meio caminho dos vértices "i" e "i+1". Assim, lembrando a equação paramétrica do segmento  $s_i$ , para  $t = 0,5$  vem:



$$x_{bi} = x_i + \frac{\gamma_i}{2}$$

$$y_{bi} = y_i + \frac{\beta_i}{2}$$

A transferência (no plano da figura) dos momentos de inércia, em relação ao sistema principal intrínseco, para o sistema inicial XY, pode ser feita usando-se a transformação matricial

$$I_{(x,y)} = T^t I T + A D \quad (42)$$

onde

$$I_{(x,y)} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos momentos de inércia em relação ao sistema inicial X, Y.

$$T = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz dos cossenos diretores.

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos momentos de inércia principais.

A matriz da translação é:

$$D = \begin{bmatrix} y_{bi}^2 & y_{bi}x_{bi} & 0 \\ x_{bi}y_{bi} & x_{bi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & y_{bi}^2 + x_{bi}^2 \end{bmatrix}$$

Procedendo-se a transformação (42), obtém-se:

$$I_{xx(i)} = I_{11} \cos^2 \phi + I_{22} \sin^2 \phi + A y_b^2$$

$$I_{yy(i)} = I_{11} \sin^2 \phi + I_{22} \cos^2 \phi + A x_b^2$$

$$I_{xy(i)} = (I_{11} - I_{22}) \cos \phi \sin \phi + A x_b \cdot y_b$$

$$I_{zz(i)} = I_{11} + I_{22} + A(x_b^2 + y_b^2)$$

Fazendo-se agora a soma dos momentos de inércia, obtém-se os momentos de inércia da seção em relação ao sistema inicial X, Y, isto é,  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$ ,  $I_{yy}$  e  $I_{zz}$ .

### 5.7 - Momentos de inércia baricêntricos

O cálculo dos momentos de inércia da seção em relação a um sistema de eixos baricêntricos  $(x_B, y_B)$ , paralelos ao sistema inicial, pode ser feito usando-se a lei de transformação (42), ou aplicando o teorema de Steiner:

$$I_{xB} = I_{xx} - A \cdot y_{BP}^2$$

$$I_{yB} = I_{yy} - A \cdot x_{BP}^2$$

$$I_{xyB} = I_{xy} - A (x_{BP} \cdot y_{BP})$$

### 5.8 - Eixos principais de inércia da seção

Determinando-se os novos momentos de inércia, devido a uma rotação " $\theta$ " no sistema de eixos ortogonais baricêntricos  $(x_B, y_B)$ , uma pesquisa de máximos e mínimos permite de terminar a posição dos eixos principais de inércia  $(x_{BP}, y_{BP})$ . Seja  $\theta$  o ângulo que define a rotação do sistema  $x_{BP}, y_{BP}$ , contado positivo no sentido trigonométrico, partindo do eixo  $x_B$  até encontrar o eixo principal  $x_{BP}$ , fig. 7.

Os momento de inércia em relação aos eixos principais podem ser obtidos através da transformação T, expressão (42).

$$I_{x_{BP}} = I_{x_B} \cos^2 \theta + I_{y_B} \sin^2 \theta - I_{xyB} \sin 2\theta \quad (43)$$

$$I_{y_{BP}} = I_{x_B} \sin^2 \theta + I_{y_B} \cos^2 \theta + I_{xyB} \sin 2\theta$$

Igualando-se a zero a derivada primeira de  $I_{x_{BP}}$  em relação ao ângulo  $\theta$ , e resolvendo-se para este vem:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \left( - \frac{2 I_{xyB}}{I_{x_B} - I_{y_B}} \right) \quad (44)$$

A solução desta equação fornece dois valores para o ângulo  $\theta$  : um corresponde ao máximo e o outro ao mínimo. O sinal da segunda derivada de  $I_{x_{BP}}$  em relação a  $\theta$  permite decidir qual corresponde ao valor máximo ou ao mínimo.

Resolvendo-se vem:

$$\frac{d^2 I_{x_{BP}}}{d\theta^2} = - \frac{\cos 2\theta}{I_{x_B} - I_{y_B}} \left[ 2(I_{x_B} - I_{y_B})^2 + 8 I_{xyB} \right] \quad (45)$$

A expressão em colchete é sempre positiva, portanto, quando

$$\frac{\cos 2\theta}{I_{xB} - I_{yB}} > 0 \quad (46)$$

então  $\theta$  corresponde ao máximo.

E quando

$$\frac{\cos 2\theta}{I_{xB} - I_{yB}} < 0 \quad (46')$$

$\theta$  corresponde ao mínimo.

Substituindo-se o valor de  $\theta$ , correspondente ao máximo, nas equações (43), obtém-se os momentos de inércia principais.

Baseando-se no estudo feito neste capítulo, elaborou-se uma sub-rotina cujo nome é PROPI. Ela permite determinar a área, centro de gravidade, momentos de inércia e eixos principais de seções transversais de parede fina com poligonal contínua aberta ou fechada. A extensão a outros elementos, por exemplo curvos, exige só a definição da área, momento estático e momento de inércia para o elemento.

O fluxograma da sub-rotina PROPI é apresentado no Apêndice 2c, p. 84.

A transformação pela equação (42) foi posta numa sub-rotina com o nome de GITRA. Ela realiza o giro e translação do sistema de eixos. Encontra-se também no Apêndice 2a, p. 80.

Os somatórios, no programa, são realizados pela sub-rotina SOMA.

As coordenadas dos vértices em relação ao sistema de eixos principais são obtidas também na sub-rotina PROPI. Serão os dados de entrada para os programas que calculam o centro de torção e o coeficiente de cisalhamento apresentados a seguir.

## 6 - SUBPROGRAMAS PARA O CÔMPUTO DO COEFICIENTE DE CISALHAMENTO E CENTRO DE TORÇÃO

### 6.1 - Introdução

Para se ter uma visão melhor dos cálculos intermediários que devem ser feitos, foram reproduzidas abaixo as equações para o cômputo do coeficiente de cisalhamento e centro de torção em relação ao sistema de eixos principais. Embora no capítulo anterior tenha-se usado a notação  $x_{PP}$  e  $y_{PP}$  para os eixos principais de inércia as grandezas, neste capítulo levam os índices  $x$  e  $y$ . Isto para facilitar a notação.

#### Seções abertas

Reescrevendo as equações do coeficiente de cisalhamento segundo as direções principais  $x$  e  $y$ , tem-se:

$$\alpha_x = \frac{A}{I_y^2} \int_s S_y^2 \frac{ds}{e} \quad (9)$$

$$\alpha_y = \frac{A}{I_x^2} \int_s S_x^2 \frac{ds}{e} \quad (10)$$

As coordenadas do centro de torção em relação ao sistema de eixos principais  $X, Y$  eram :

$$x_c = + \frac{1}{I_x} \int_s r S_x \cdot ds \quad (28)$$

e

$$y_c = - \frac{1}{I_y} \int_s r S_y ds \quad (27)$$

Reescrevendo-se as equações também para as seções fechadas, tem-se

coeficiente de cisalhamento:

$$\alpha_x = \frac{A}{I_y^2} \left[ \oint S_y^2 \frac{ds}{e} - \frac{(\oint S_y \frac{ds}{e})^2}{\oint \frac{ds}{e}} \right] \quad (17)$$

$$\alpha_y = \frac{A}{I_x^2} \left[ \oint S_x^2 \frac{ds}{e} - \frac{(\oint S_x \frac{ds}{e})^2}{\oint \frac{ds}{e}} \right] \quad (18)$$

As coordenadas do centro de torção são; lembrando as equações (12) e (13):

$$x_c = \frac{1}{I_x} \left[ \oint r S_x ds - A_m \frac{\oint S_x \frac{ds}{e}}{\oint \frac{ds}{e}} \right] \quad (32)$$

$$e \quad y_c = - \frac{1}{I_y} \left[ \oint r S_y ds - A_m \frac{\oint S_y \frac{ds}{e}}{\oint \frac{ds}{e}} \right] \quad (31)$$

Examinando-se cada uma das expressões acima, reconhece-se a presença de termos comuns nas equações para as seções abertas e fechadas. Assim, um subprograma que calcula uma integral de linha para uma seção aberta pode também ser usado para a seção fechada, bastando apenas indicar o nº de elementos retos a somar (m) ou o número de vértices a percorrer (m).

A seguir são apresentados estes subprogramas, já com a denominação que terão na programação. Os dados de entrada são as ordenadas dos vértices em relação ao sistema de eixos principais da figura.

## 6.2 - Função subprograma DSE.

Esta função realiza o cômputo de

$$DSE = \oint \frac{ds}{e} = \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{e} \quad (47)$$

onde  $m = n - 1$

Uma vez que para um elemento genérico  $i$ , tem-se:

$$\int_0^{s_i} \frac{ds}{e} = \frac{s_i}{e_i} .$$

Examinando-se as equações no item 6.1, observa-se que DSE aparece só nas fórmulas para seções fechadas (duplamente conexas). O diagrama de bloco desta função está apresentado no Apêndice nº 2g, .p. 99.

### 6.3 - Função subprograma ALLE.

Este subprograma realiza o cômputo de

$$QL = \oint S \frac{ds}{e} \quad (48)$$

de vértice a vértice segundo a numeração deles. Interessam apenas as seções fechadas. Conforme a entrada dos dados, o cálculo é realizado com  $S_x$  ou  $S_y$ . Observe-se, que o momento estático no integrando é função de  $s$ .

Aproveitando a divisão do caminho em segmentos de retas, em cada novo trecho a variável  $s$  pode iniciar em zero; desde que se considerem os valores anteriores da integral e do momento estático. Para o elemento de ordem  $i$ ,

$$QL_i = QL_{i-1} + \int_0^{s_i} (S_{i-1} + S) \frac{ds}{e} \quad (49)$$

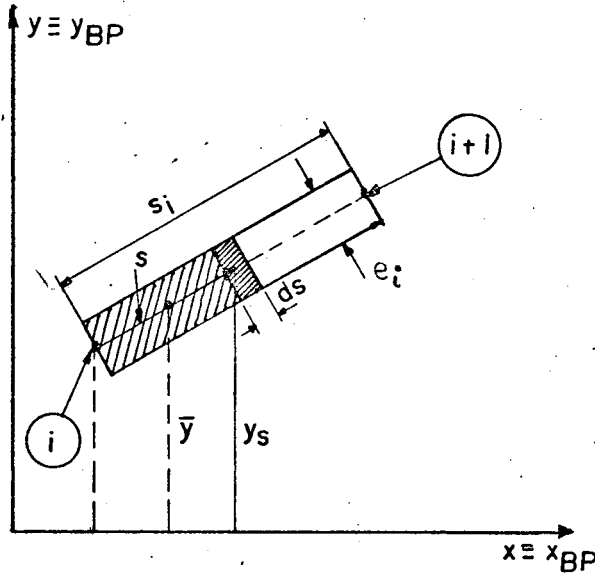
$i = 1, \dots, m$

onde

$$QL_0 = 0 \quad e \quad S_0 = 0$$

O momento estático será em relação ao eixo principal X ou Y da seção, conforme determinam as equações (18) e (17), (31) e (32).

Realizando o cálculo da integral, com  $S_x$  em termos das ordenadas dos vértices, (fig. 10), vem primeiro:



$$S_x = s e_i \cdot \bar{y} =$$

$$= e_i s \left( y_i + \frac{\beta_i t}{2} \right)$$

pois  $y_s = y_i + \beta_i t$ .

Considerando que

$$s = s_i \cdot t$$

o integrando da equação (49) é:

Fig. 10 - Momento estático da área  $s \cdot e_i$

$$(S_{i-1} + S)_x = S_{x(i-1)} + e_i s_i \left( y_i t + \frac{\beta_i t^2}{2} \right) \quad (50)$$

Resolvendo a equação (49) em termos de  $0 \leq t \leq 1$ , vem primeiro:

$$\int_0^{s_i} (S_{i-1} + S)_x \frac{ds}{e} = \frac{S_{x(i-1)} \cdot s_i}{e_i} + \frac{s_i^2}{2} \left[ y_i + \frac{\beta_i}{3} \right] \quad (51)$$

Finalmente, a equação (49) escrita em relação ao eixo principal X, fica:

$$QL_{(i)} = QL_{(i-1)} + \frac{S_{x(i-1)} \cdot s_i}{e_i} + \frac{s_i^2}{2} \left[ y_i + \frac{\beta_i}{3} \right] \quad (52)$$

$$i = 1, \dots, m$$



Para  $S_y$ , troca-se  $y_i$  e  $\beta_i$  por  $x_i$  e  $\gamma_i$ , respectivamente.

O fluxograma para ALLE está apresentado no Apêndice 2e, p. 94.

#### 6.4 - Função subprograma RINTL.

Este subprograma computa a integral de linha:

$$RI = \int S^2 \frac{ds}{e} \quad (53)$$

que interessa no cálculo do coeficiente de cisalhamento (ver item 6.1).

A técnica usada é a mesma exposta no item 6.3. A diferença está no integrando, que agora é a expressão (50) e levada ao quadrado.

Com efeito, resolvendo-se, para  $S_x$ , a equação (53) fica:

$$RI = RI_{i-1} + \frac{s_i}{e_i} \int_0^1 \left[ S_{x(i-1)} + (e_i s_i y_i) t + \left( \frac{e_i s_i \beta_i}{2} \right) t^2 \right]^2 dt$$

$i = 1, \dots, m$

onde  $RI_0 = 0$  e  $S_{x(0)} = 0$

Fazendo:  $B = S_{x(i-1)}$

$C = e_i s_i y_i$

$D = \frac{e_i s_i \beta_i}{2}$  vem:

$$RI_i = RI_{i-1} + \frac{s_i}{e_i} \int_0^1 (B + Ct + Dt^2)^2 dt$$

$i = 1, \dots, m$

Cuja solução é:

$$RI_i = RI_{i-1} + \frac{s_i}{e_i} \left[ B^2 + BC + \frac{2BD + C^2}{3} + \frac{CD}{2} + \frac{D^2}{5} \right] \quad (54)$$

$i = 1, \dots, m$

O fluxograma para RINTL está apresentado no Apêndice 2f, p. 97.

### 6.5 - Função subprograma COISA.

Este subprograma realiza o cômputo de

$$C = \oint r S ds \quad (55)$$

de vértice a vértice segundo a sua numeração. É exclusiva para o cálculo do centro de torção de seções abertas ou fechadas.

Relembrando,  $r$  é o raio que define a distância entre o baricentro e o fluxo de tensão cisalhante sobre a linha média da seção. Assim, quando se decompõe a seção, em elementos retos, para se realizar a integral (55), então  $r$  fica sendo a distância do elemento (ou reta  $s$ ) ao baricentro. Em termos da equação paramétrica da reta  $s$ , esta distância vale:

$$r_i = \left| \frac{\beta_i x_i - \gamma_i y_i}{s_i} \right|,$$

e é constante para cada elemento.

Reescrevendo a equação (55), agora para o elemento de ordem  $i$ , vem:

$$C_i = C_{i-1} + r_i \int_0^{s_i} (S_{i-1} + S) ds \quad (56)$$

$$i = 1, \dots, m$$

Comparando com a equação (49), e lembrando a (51), resolvida em relação ao eixo x, vem:

$$C_i = C_{i-1} + r_i \left[ S_{x(i-1)} \cdot s_i + \frac{s_i^2 \cdot e_i}{2} \left[ y_i + \frac{\beta_i}{3} \right] \right] \quad (57)$$

$i = 1, \dots, m$

O fluxograma desta função está no Apêndice 2h, p.101.

#### 6.6 - Função subprograma AREA.

Esta função realiza o cômputo de

$$A_m = \int r \, ds \quad (30)$$

de vértice a vértice segundo a sua numeração. É exclusiva para o cálculo do centro de torção e geometricamente representa o dobro da área formada pela linha média da seção. Dividindo-se esta seção (média) em trapézios com a base sobre o eixo coordenado inicial X, então a área da seção (média) vale:

$$AR = AR_{i-1} + (X_{i+1} - X_i) \left[ Y_i + 0,5(Y_{i+1} - Y_i) \right] \quad (58)$$

$i = 1, \dots, m$

O dobro desta área é o valor da integral (30)

Note-se que as coordenadas devem ser em relação ao sistema de eixos inicial.

Se a figura foi enumerada da esquerda para a direita, o valor da (58) é positivo.

O fluxograma para esta função está apresentado no Apêndice 2i, p. 103.

### 6.7 - Programa principal - Utilização

Com os subprogramas desenvolvidos no capítulo 5, e neste, a elaboração do programa principal para o cálculo dos valores do coeficiente de cisalhamento e do centro de torção é imediata. O fluxograma está apresentado no apêndice 2j, p.105.

A seguir é apresentado um exemplo de utilização do programa. O procedimento geral para a obtenção dos dados já foi discutido no item 5.1.

Uma vez desenhada a figura em papel milimetrado, fig. 11, procede-se a enumeração dos vértices, a leitura e a anotação das coordenadas em uma planilha (planilha 1) adequada.

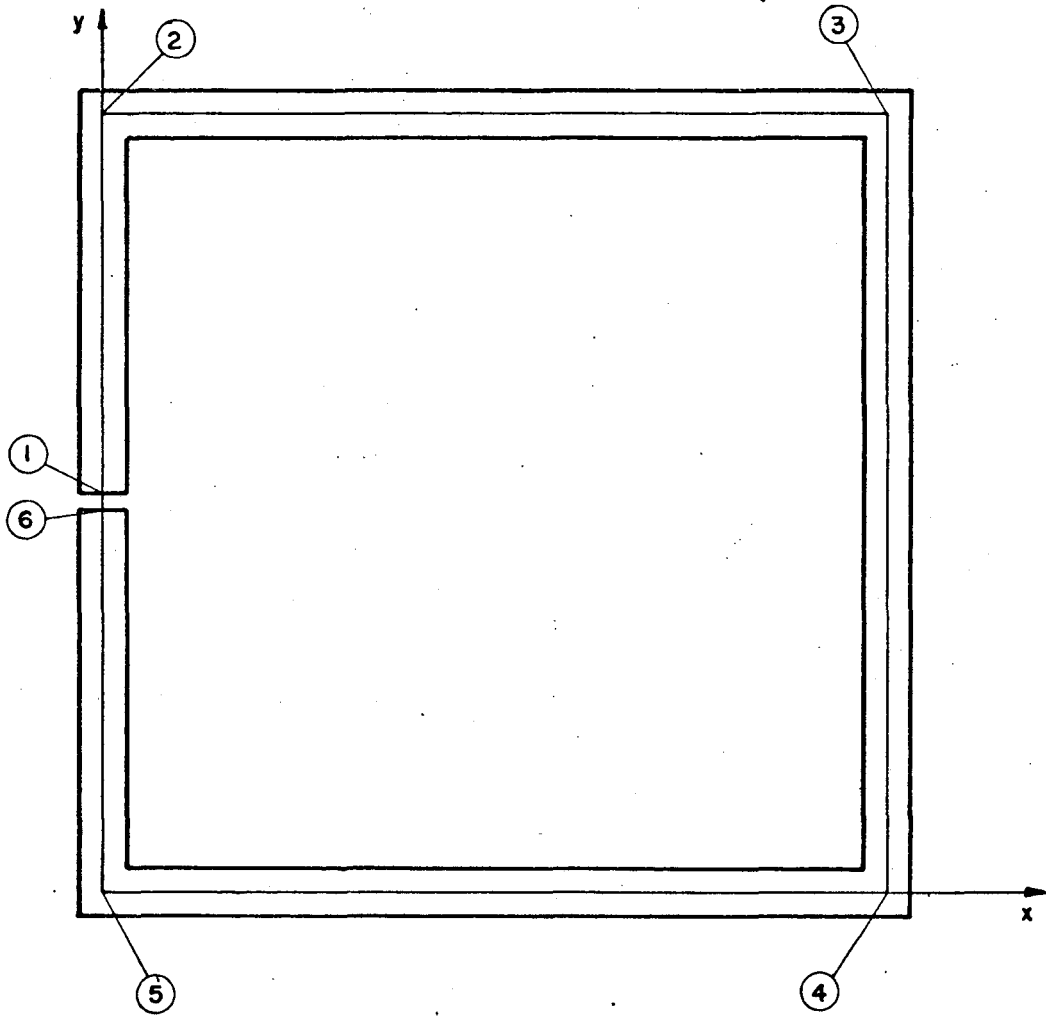
Quando se tem mais de uma seção, o primeiro cartão do lote de cada seção é perfurado com número inteiro de dois dígitos. Somente o último lote não tem perfurado este cartão. No segundo cartão: É perfurado o valor anotado no quadro nº de vértices (ver Quadro 3, p. 44). Este valor é perfurado nas colunas 1 e 2.

terceiro cartão e seguintes: Em cada cartão é perfurado o valor de  $x$ ,  $y$  e  $e$ , lidos na planilha. Observe-se a correspondência entre as colunas do cartão e da planilha.

O computador fornece um relatório .

### 6.8 - Variações do coeficiente de cisalhamento.

Utilizando-se a figura 11, calculou-se os valores do coeficiente de cisalhamento na direção  $y$ , para várias espessuras dos cortes, ou melhor da abertura da seção. Os valores do coeficiente de cisalhamento em função desta abertura, estão na figura 12. Foram calculados a partir do programa elaborado.



ESCALA: 1 : 1

Fig. II - Seção simplesmente conexa.



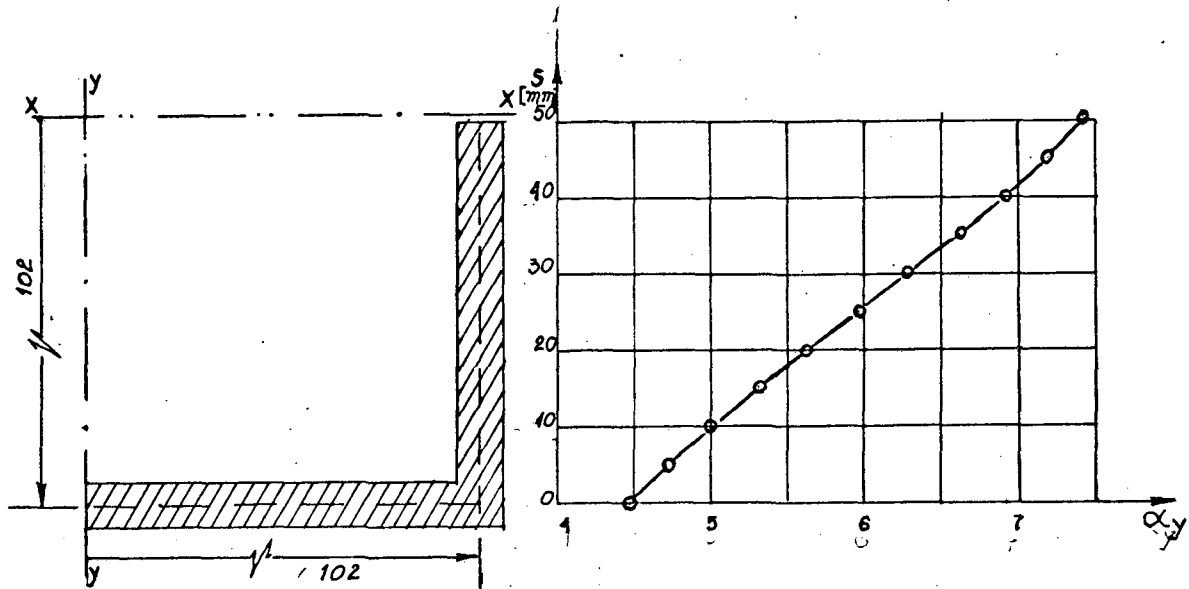
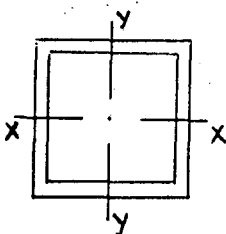
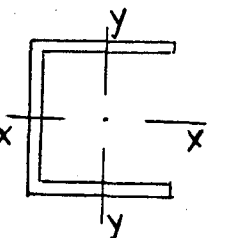
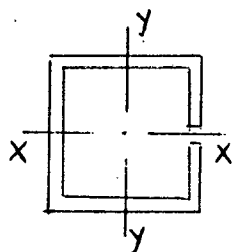


Fig. 12 - Variação de  $\alpha$  com a abertura da seção.

Para melhor se visualizar a comparação entre as seções, formou-se o quadro abaixo:

1)		$\alpha_x = \alpha_y = 2,3958$ $A = 2448 \text{ mm}^2$	$I_x = I_y = 0,42485 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$
2)		$\alpha_x = 1,946$ $\alpha_y = 4,47$ $A = 1836 \text{ mm}^2$	$I_x = 0,37179 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$ $I_y = 0,21242 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$

3)



$$\begin{aligned}\alpha_x &= 2,379 \\ \alpha_y &= 7,41 \\ A &= 2436 \text{ mm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_x &= 0,42485 \cdot 10^7 \\ &\quad \text{mm}^4 \\ I_y &= 0,42171 \cdot 10^7 \\ &\quad \text{mm}^4\end{aligned}$$

A deformação de uma viga engastada com carga concentrada na extremidade, obtida pelo teorema de Castigliano, é:

$$d = \frac{PL^3}{3EI} + \alpha \frac{PL}{GA} \quad (4')$$

Analisando-se a variação da rigidez ao se passar da seção 2 para a 3, observa-se que o aumento do momento de inércia foi de  $\approx 14,5\%$ . Ocorre, porém, uma perda de  $20\%$  na rigidez devido ao cisalhamento na direção y.

Recomenda-se esta análise simples toda vez que se estiver estudando a rigidez de seções simplesmente conexas.



## 7 - MÓDULO DE ELASTICIDADE E COEFICIENTE DE POISSON

### 7.1 - Ensaio de flexão pura.

A norma<sup>7</sup> DIN 53457 recomenda para a determinação do módulo de elasticidade longitudinal um dispositivo

simples, que permite obter a flexão pura num trecho da viga. O sistema de carregamento é independente do sistema de medição da curvatura. O dispositivo utilizado (ver fig. 12, 13 e 14) possui o sistema de medição da curvatura na posição inferior. Foi necessária a introdução de um sistema de alavanca com a finalidade de manter o contato perfeito entre a viga de referência e o corpo de prova.

#### 7.1.1 - Corpos de prova.

Foram ensaiados quatro corpos de prova, todos com 130 mm de comprimento;  $24,6 \pm 0,1$  mm de largura e  $6,0 \pm 0,1$  mm de espessura ( $I = 442,8 \text{ mm}^4$ ), que foram obtidos da mesma chapa de acrílico com que foram confeccionados os modelos para os ensaios de rigidez. Os corpos de prova foram serrados e fresados, mantendo-se a velocidade de corte baixa, e refrigeração com óleo solúvel, até serem obtidas as dimensões acima. Os corpos de prova apresentaram-se, assim, isentos de tensões residuais, como pode ser constatado usando-se luz branca polarizada plana.

#### 7.1.2 - Condições ambientais.

O ensaio, apesar de realizado no mesmo dia, contou com a pequena variação de umidade e temperatura, como foi anotado nas planilhas.

#### 7.1.3 - Sistema de medição

Na viga de referência foi introduzido um apalpador para medir os deslocamentos com as seguintes características:

PROCEDÊNCIA : SUÍÇA  
 FABRICANTE : TESA  
 CÓDIGO : GT 40  
 ERRO MÁXIMO DE MEDIDA : 2% DO VALOR INDICADO  
 REPETIÇÃO : 0,02  $\mu$ m  
 PRESSÃO DE MEDIDA : 40 g EM POSIÇÃO VERTICAL

O apalpador foi conectado ao comutador de mesma procedência, e este ao aparelho de leitura com as seguintes características:

PROCEDÊNCIA : SUÍÇA  
 FABRICANTE : TESA  
 CÓDIGO : GN - 22  
 LIMITE DE MEDIDA : 300, 100, 30, 10, 3 m  
 LEITURA ENTRE ESCALA : 10, 5, 1, 0,5, 0,1 m

#### 7.1.4 - Sistema de carregamento.

U grande anel circular de aço com esferas nas partes de contato permite transmitir as cargas (fig. 14). Todo o sistema de carga tem um lastro de 2444 g. Este sistema permite a colocação de cargas até 10 Kgf, já os pesos de 1 e 2 Kgf em forma de disco, foram colocados diretamente sobre a viga de transmissão da carga com todo o cuidado para não produzir deslocamentos indesejáveis.

#### 7.1.5 - Obtenção dos dados e resultado.

Uma vez ajustado o corpo de prova sobre o sistema de vigas e feita a zeragem do aparelho, foram colocados os pesos na ordem indicada nas planilhas (apêndice 3a p. 108-13). Os deslocamentos assim obtidos, foram levados num diagrama carga deformação fig. 15, onde se obteve

$$\frac{\Delta F}{\Delta D} = \frac{1}{0,032} \text{ Kgf/mm}$$

Com os dados constantes da fig. 13 e o valor da relação  $\Delta F/\Delta D$

acima tem-se:

$$E = \frac{\Delta F}{\Delta D} \left[ \frac{L_A L_B^2}{16 I} \right]$$

$$\text{Donde } E = 307,5 \text{ Kgf/mm}^2$$

## 7.2 - Ensaio de tração simples.

Numa estrutura de madeira foi montado um sistema de braçadeira-morça para a fixação do corpo de prova, como mostra a fig. 16. Cuidou-se que o eixo axial da barra coincidissem de tal modo com o eixo da carga, que a sollicitação em todas as seções do corpo de prova fossem somente de tração. Obteve-se assim um estado uniaxial de tensão em todos os pontos do campo L, fig. 17. Utilizou-se extensômetros elétricos de resistência variável para se medir as elongações específicas ( $\epsilon$ ) no sentido longitudinal ( $\epsilon_1$ ) e transversal ( $\epsilon_t$ ). Assim, a simples relação entre as elongações nos fornece diretamente o coeficiente de Poisson:

$$\mu = \left| \frac{\epsilon_t}{\epsilon_1} \right|$$

O módulo de elasticidade em função da carga (P) e da elongação longitudinal é

$$E = \frac{1}{A} \cdot \frac{P}{\epsilon_1}$$

onde A é a área da seção transversal.

### 7.2.1 - Corpo de prova.

Foi ensaiado um corpo de prova com as seguintes dimensões da seção transversal: 14,6  $\pm$  0,01 mm de largura; 4,5  $\pm$  0,01 mm de espessura ( $A = 78,84 \text{ mm}^2$ ). Outras dimensões constam na fig. 17. A técnica de obtenção e usinagem foi descrita no item 7.1.1.

### 7.2.2 - Sistema de medição.

Os extensômetros utilizados são de base de acrílico, mesmo material dos corpos de prova. Utilizando-se pó de acrílico diluído com algumas gotas de clorofórmio, preparou-se uma "cola" para se aplicar os extensômetros sobre os corpos de prova. Os extensômetros assim colados, fig. 16, foram ligados a uma ponte extensométrica digital com sistema de balanceamento para zeragem. Utilizou-se um extensômetro do mesmo lote, colado igualmente numa peça de acrílico, como compensador de temperatura. As ligações foram em meia-ponte. A alimentação da ponte foi com 2 V permitindo leituras de  $\epsilon$  na faixa de  $10^{-5}$ .

As características dos extensômetros são:

PROCEDÊNCIA	: ALEMANHA OCIDENTAL
FABRICANTE	: HÖTTINGER B. M.
CÓDIGO	: 3/120 LA 21
RESISTÊNCIA	: $119,6 \Omega \pm 0,5\%$
FATOR K	: $1,95 \pm 1\%$
COEFICIENTE DE TEMP. $\alpha$	: $12 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$

Da ponte extensométrica digital

PROCEDÊNCIA	: EUA
FABRICANTE	: BLH ELECTRONICS, INC.

Componentes: Unidade de balanceamento modelo 825  
 Unidade de condicionamento modelo 80.130  
 Indicador digital modelo 904

### 7.2.3 - Obtenção dos dados.

Como o extensômetro utilizado foi o especificado para o aço, o coeficiente de dilatação térmica não coincide com o do acrílico. Além disto, o calor desenvolvido pelo aquecimento do extensômetro não pode ser liberado facilmente para o ambiente devido a baixa condutibilidade térmica do acrílico. Esses problemas foram contornados, realizando-se a

excitação dos extensômetros, somente o tempo necessário (10s) para se proceder a leitura. O tempo entre duas leituras consecutivas foi sempre de 10 minutos. O creep apresentado pelo acrílico foi considerado, realizando-se as leituras depois de decorridos 2 minutos da aplicação ou retirada da carga (SILVEIRA<sup>18</sup>) :

No diagrama abaixo fig. 18 está esquematizada a sequência utilizada:

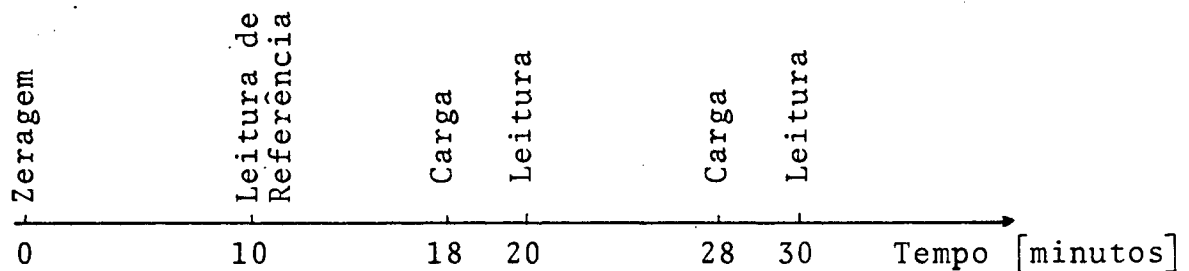


Fig. 18 - Sequência de carregamento e leitura.

Os valores das cargas e das correspondentes deformações foram anotados numa planilha (Ver Apêndice 3b, p. 114) A curva carga x deformação, para este ensaio, fig. 19, depois de linearizada, fornece:

$$\begin{aligned} \text{para } \Delta P &= 10 \text{ Kgf} \\ \Delta \epsilon_l &= 43 \cdot 10^{-5} \\ \Delta \epsilon_t &= 17 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donde: } E &= 295 \text{ Kgf/mm}^2 \\ \mu &= 0,395 \end{aligned}$$

### 7.3 - Correlação entre os ensaios.

Como ambos os ensaios acima descritos devem fornecer o mesmo valor de E, tem-se:

$$E = \frac{\Delta F}{A \Delta \epsilon_1} = \frac{\Delta F}{\Delta D} \left[ \frac{L_A L_B^2}{16 I} \right]$$

Donde:

$$\frac{\Delta D}{\Delta \epsilon_1} = \frac{\Delta F}{\Delta P} \cdot A \left[ \frac{L_A L_B^2}{16 I} \right]$$

Para uma relação

$$\frac{\Delta F}{\Delta P} = \frac{1}{10} = \text{Cte}$$

a equação acima é uma reta num sistema de eixos ortogonais  $D$  x  $\epsilon$ . Na fig.20, estão colocados os pontos obtidos do ensaio (+) e os obtidos pela relação teórica (o). O número de dados é insuficiente para uma análise mais rigorosa. Mas como os pontos são bem próximos, aceitou-se que ambos os métodos medem o mesmo valor de

$$E = 307,5 \text{ Kgf/mm}^2$$

O coeficiente de Poisson adotado foi

$$\mu = 0,4$$

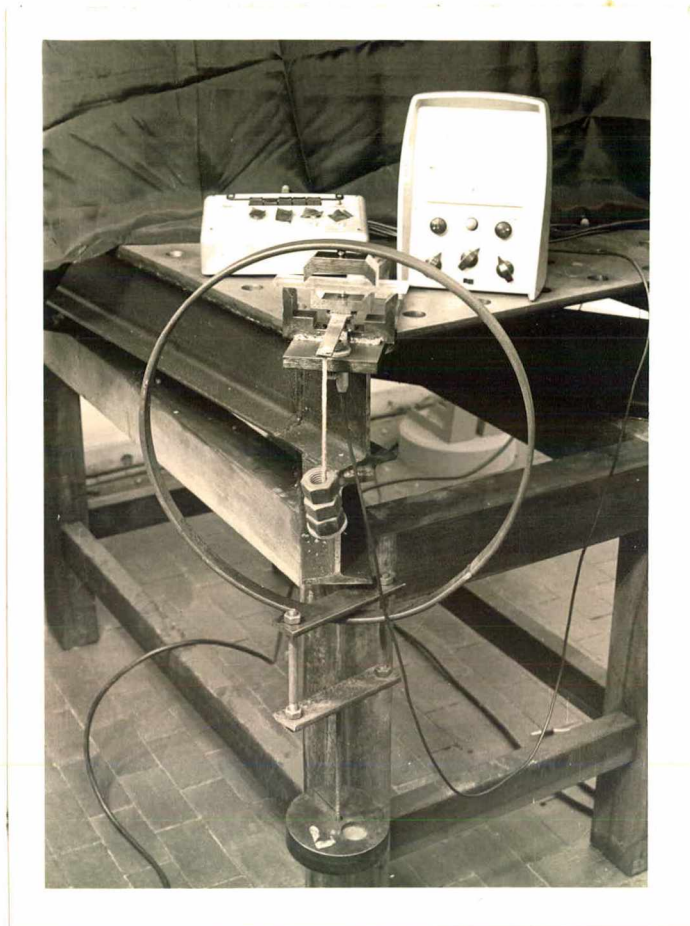


Fig. 12 - Ensaio de flexão pura, vista geral.

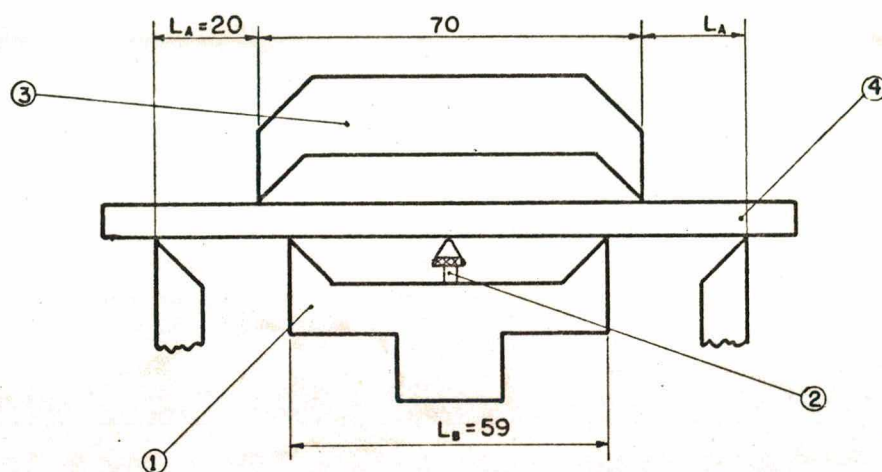


FIG. 13 - ESQUEMA DO DISPOSITIVO DE MEDIDA

- 1- viga de referência
- 2- apalpador
- 3- viga de transmissão da carga
- 4- corpo de prova

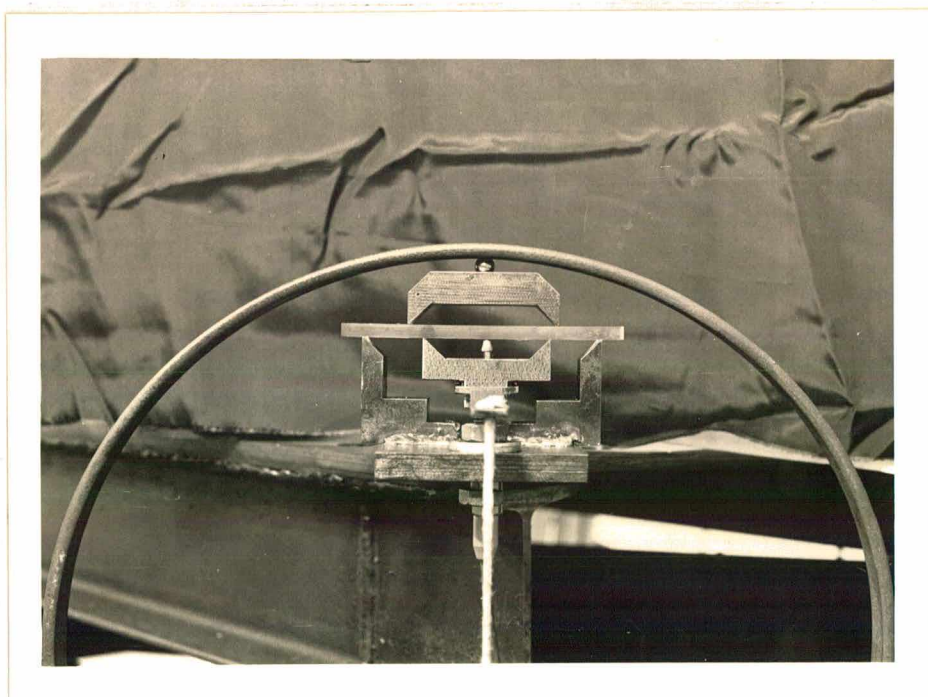


FIG. 14 - Ensaio de flexão pura. Detalhe do sistema de medida.



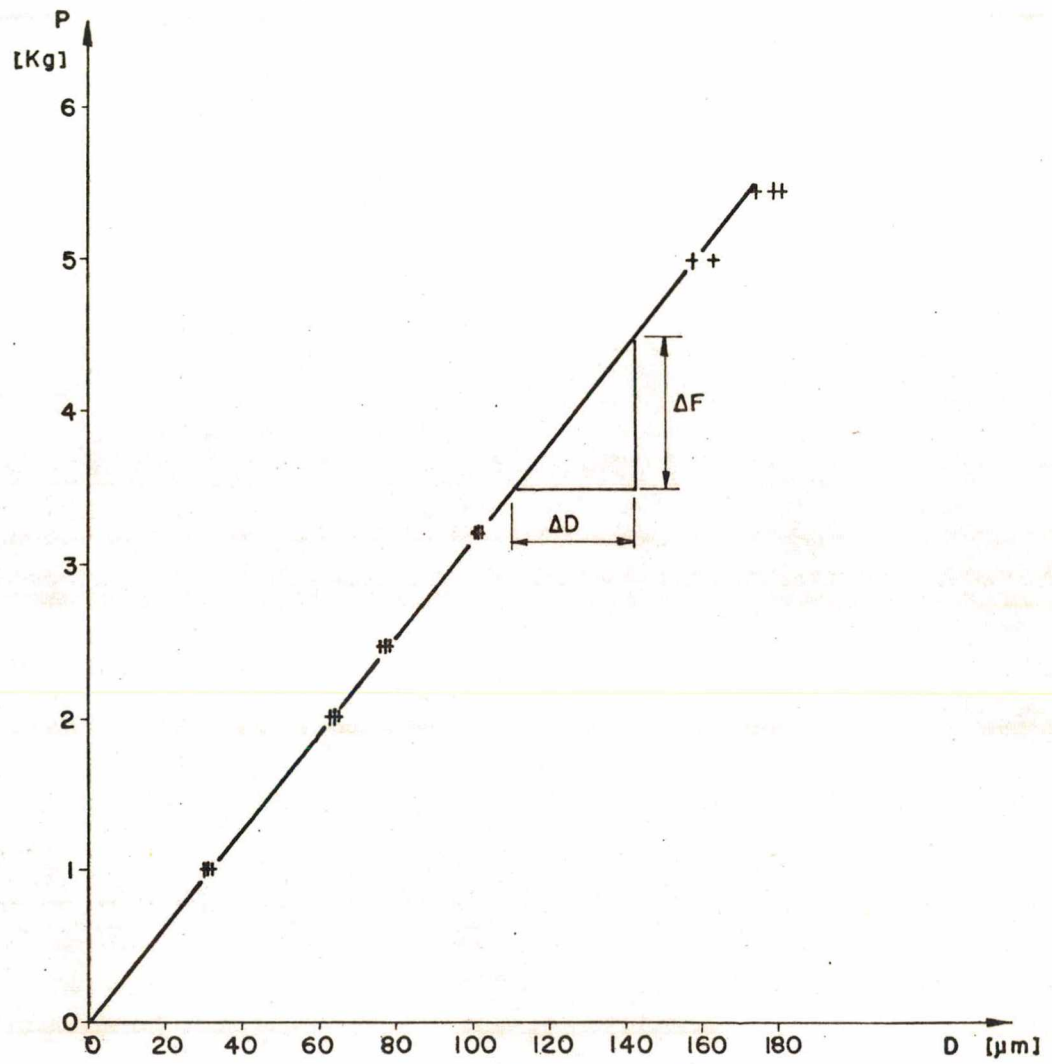


Fig.15 - Diagrama carga x deslocamento na flexão pura.

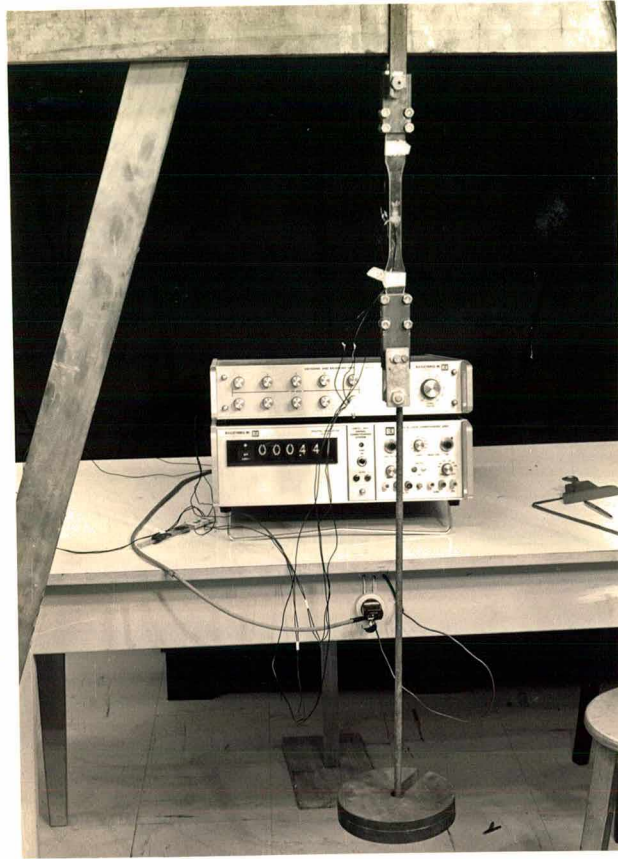
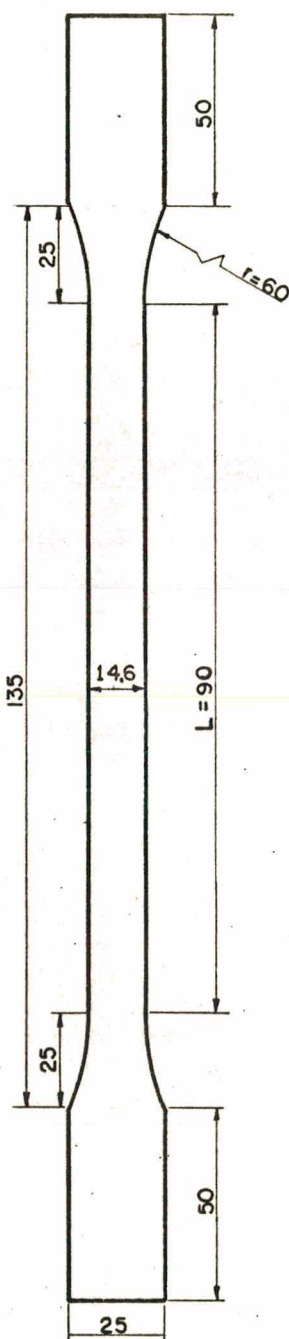


Fig. 16 - Vista geral do ensaio de tração simples.



ESCALA 1:2

FIG. 17 - CORPO DE PROVA PARA ENSAIO DE TRAÇÃO  
MATERIAL : ACRILICO

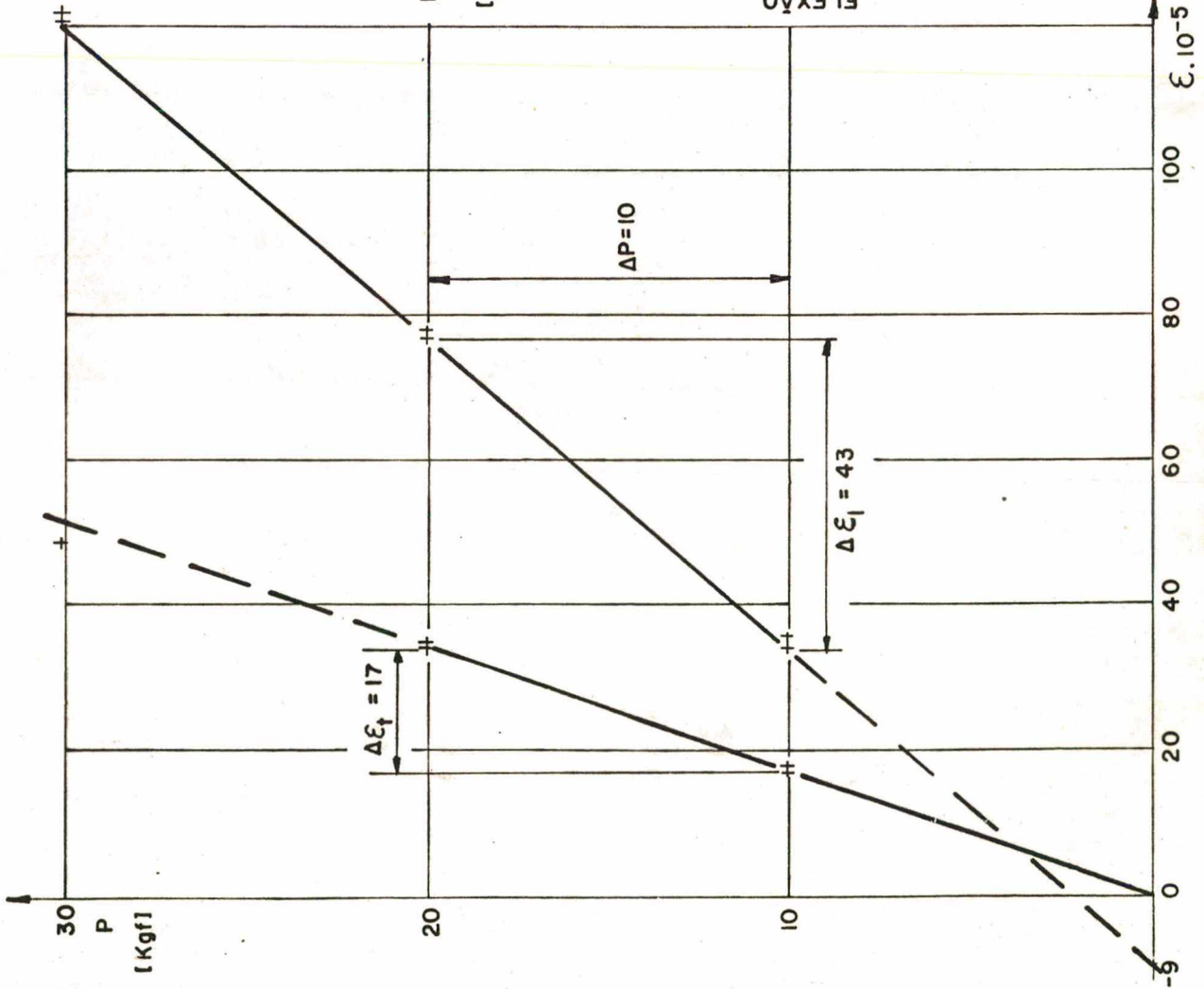


Fig. 19 - Diagrama carga x deformação na tração.

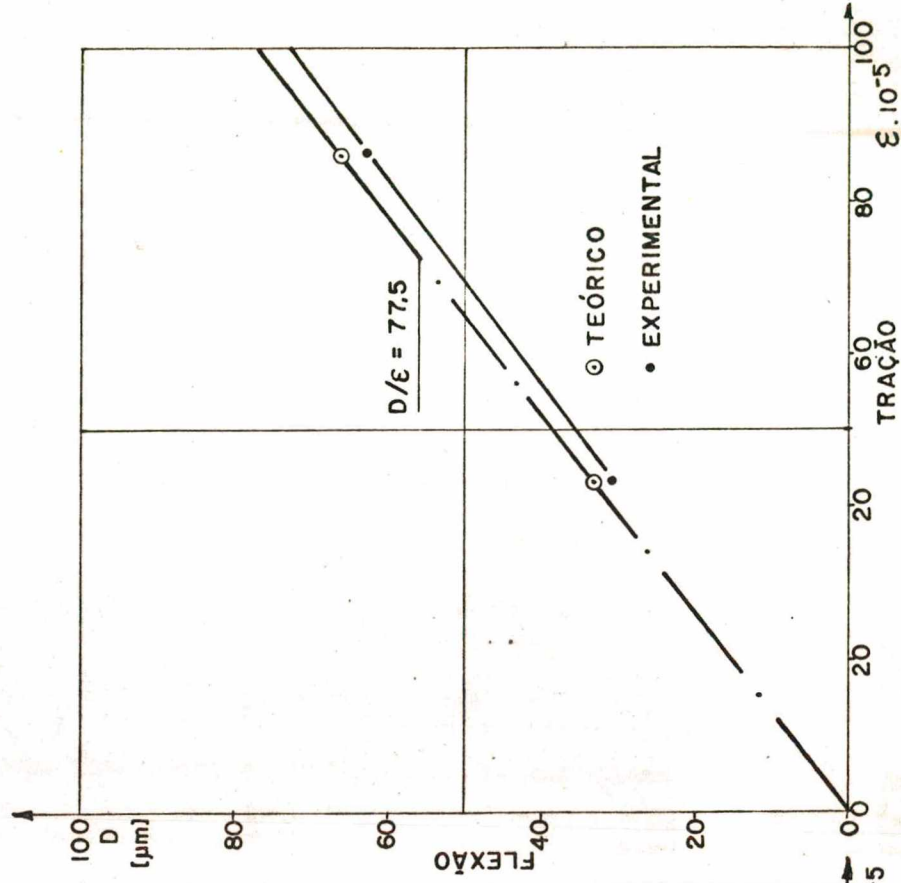


Fig. 20.- Correlação entre os ensaios de flexão e tração.

## 8 - ENSAIOS DE RIGIDEZ

### 8.1 - Introdução.

Projetou-se os ensaios com o objetivo não de medir  $\alpha$ , mas de verificar se o procedimento teórico adotado na determinação deste continha um aceitável grau de acuidade.<sup>1</sup>

O modelo estrutural ensaiado foi o de uma "viga" de acrílico engastada na base e carregada na extremidade superior por pesos colocadas estaticamente. A figura 21 mostra uma vista geral do ensaio. As deformações foram medidas em dois pontos da peça, no mesmo plano transversal da carga a uma altura de 110 mm da base. A média dos dois valores da deformação lidos, representa o deslocamento do ponto de aplicação da resultante do carregamento.

Usou-se inicialmente um modelo com seção retangular vazada fechada para se verificar a presença de eventuais erros sistemáticos e responder as perguntas:

a) Qual a precisão dos resultados, que se pode esperar, quando se realiza um ensaio durante um determinado período de tempo ?

b) Qual a acuidade dos ensaios assim realizados ?

Somente após se ter estes dados é que foi realizado o ensaio para se verificar se o método teórico usado para se estimar os valores de  $\alpha$  era válido. Qual o desvio que se pode esperar entre os valores calculados e os observados experimentalmente ?

Os equipamentos utilizados são os disponíveis nos laboratórios do Centro Tecnológico. A descrição detalhada e desenhos dos equipamentos e dispositivos utilizados nos ensaios para medida da rigidez já foram feitos por SILVEIRA<sup>18</sup>

e ANTONINI<sup>2</sup>.

## 8.2 - Relação sumária do equipamento utilizado.

- 1 - Mesa de ensaio: constituída de uma chapa de aço perfurada, com reforços na parte inferior, apoiada sobre uma estrutura de madeira. (fig.22)
- 2 - Morça: foi utilizada uma morça robusta, com guias planas, pertencente a uma fresadora (fig. 21)
- 3 - Suportes magnéticos: foram utilizados quatro suportes magnéticos para formar dois a dois o sistema de medição. Formaram-se duas estruturas independentes uma da outra. (fig. 23)
- 4 - Apalpadores, comutador e aparelho de leitura; tres apalpadores ligados aos canais 2, 3 e 4 foram utilizados. (ver características no item 7.1.3).  
Obs,: foi feita a calibragem no início dos ensaios. Uma rápida verificação semanal mostrou pouca ou nenhuma variação em relação a primeira calibragem. Nunca foram desconectados os cabos que ligam os apalpadores ao comutador e deste ao aparelho de leitura. (tempo de observação : tres meses).
- 5 - Sistema de carregamento: é composto de colunas, grampos de fixação, suporte bi-partido, suporte das roldanas, corda de algodão, barra de seção circular de aço para transmitir a carga ao modelo (fig. 21, 22).
- 6 - Pesos: Conjunto de cinco pesos, cada um com 5 Kgf em forma de disco. Os pesos foram comparados cum um padrão e os desvios, que estiveram dentro de  $\pm 15$  g, não foram considerados. Além destes utilizou-se: um peso de 1004,8 g  
Um peso de 2002,8 g
- 7 - Chave "Torquímetro": foi utilizada para a medição e controle de apertos.
- 8 - Dinamômetro com escala a partir de 110 g: foi utilizado para se verificar a rigidez da estrutura do sistema de medição. Para descrição do

método direto, ver ANTONINI<sup>2</sup>.

### 8.3 - Modelo de acrílico.

De uma chapa de acrílico, com espessura média de 6 mm, foram cortadas e fresadas duas placas com 96 x 300 mm e duas com 108 x 300 mm. Após serem ajustadas e coladas com clo<sub>2</sub>rofórmio, formaram o modelo nº 1 de seção retangular vazada fechada (fig. 24). Realizados os testes relativos aos grupos 1 e 3, a face do modelo situada ao lado da carga foi serrada longitudinalmente, gerando, assim, o modelo nº 2, de seção retangular vazada aberta. (fig. 25).

### 8.4 - Descrição geral dos ensaios.

Os ensaios com os modelos 1 e 2 envolveram em geral as seguintes operações:

- 1 - Ajustagem do modelo ao suporte de base.
- 2 - Montagem do conjunto na morça, já fixada à estrutura, e realização dos apertos: 18 Kgf.m na morça; 4 Kgf.m nas laterais.
- 3 - Montagem do sistema de medição e ajuste grosseiro.
- 4 - Montagem do sistema de carregamento, ajustando-o à posição definitiva.
- 5 - Ajuste do sistema de medição e zeragem mecânica dos apalpadores.
- 6 - Pré-carga de 5 a 10 Kgf, quase estática; verificação e eliminação das folgas.
- 7 - Última zeragem mecânica dos apalpadores
- 8 - Zeragem elétrica definitiva.
- 9 - Com o aparelho de medida na escala mais sensível (3µm) verificou-se a rigidez do sistema de medição. Para 100 g manteve-se um deslocamento sempre menor que 1µm
- 10 - Realização do ensaio propriamente dito. Envolvendo as operações de carga, leitura e registro das grandezas envolvidas.

### 8.5 - Metodologia dos ensaios.

Foram projetados dois grupos de ensaios com a finalidade de se estudar a repetibilidade e a reprodutibilidade<sup>1</sup> de todo o processo de medida. Obteve-se assim maior controle das variáveis envolvidas.

Pela comparação do valor da deformação calculada com o valor medido, determinou-se indiretamente o grau de acuidade do procedimento adotado na obtenção dos valores de  $\alpha$ .

#### 8.5.1 - Grupo de teste nº 1.

Modalidade: Colocação de cargas de 5 em 5 Kgf até 25 Kgf

Finalidade: Testar a reprodutibilidade medindo deformação x carga.

Variáveis mantidas "constantes":

Foi mantido o mesmo operador, local, e equipamento em geral, sequência na colocação dos pesos, processo de medida e leitura, modelo e posições relativas, a pertos, dispositivo de carga, plano de medição.

Variáveis independentes:

Durante quatro dias foram realizados nove ensaios. Deixou-se livre a variação da temperatura e umidade do ambiente. Todos os nove ensaios iniciaram no mínimo com uma zeragem mecânica dos apalpadores (operação 7 do item 8.2) Um apalpador foi substituído (ver planilhas no apêndice 4a, p. 115-22).

#### 8.5.2 - Grupo de teste nº 3.

Modalidade: colocação de dois pesos de 5 Kgf

Finalidade: testar a repetibilidade medindo a deformação correspondente a 10 Kgf.

Variáveis mantidas "constantes":

Todas as variáveis foram mantidas cons-



tantes. Os testes foram realizados no mesmo dia num espaço de tempo relativamente curto. As únicas operações após a de nº 10 do item 8.2, foram: a) Colocação com cuidado, sempre do mesmo modo do peso de 10 Kgf; b) leitura após dois minutos; c) retirada da carga com os mesmos cuidados anteriores; d) leitura após dois minutos. Repete-se todo o ciclo.

Os ensaios do grupo 1 foram realizados so para o modelo nº 1.

Os ensaios do grupo 3 foram realizados para os modelos 1 e 2.

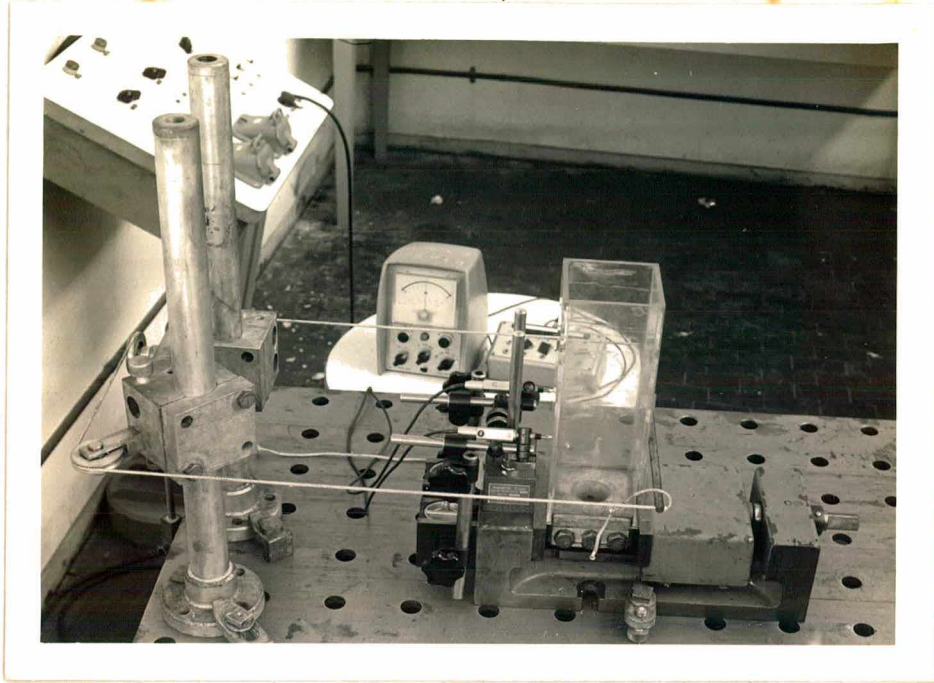


Fig. 21 - Vista geral do ensaio de rigidez

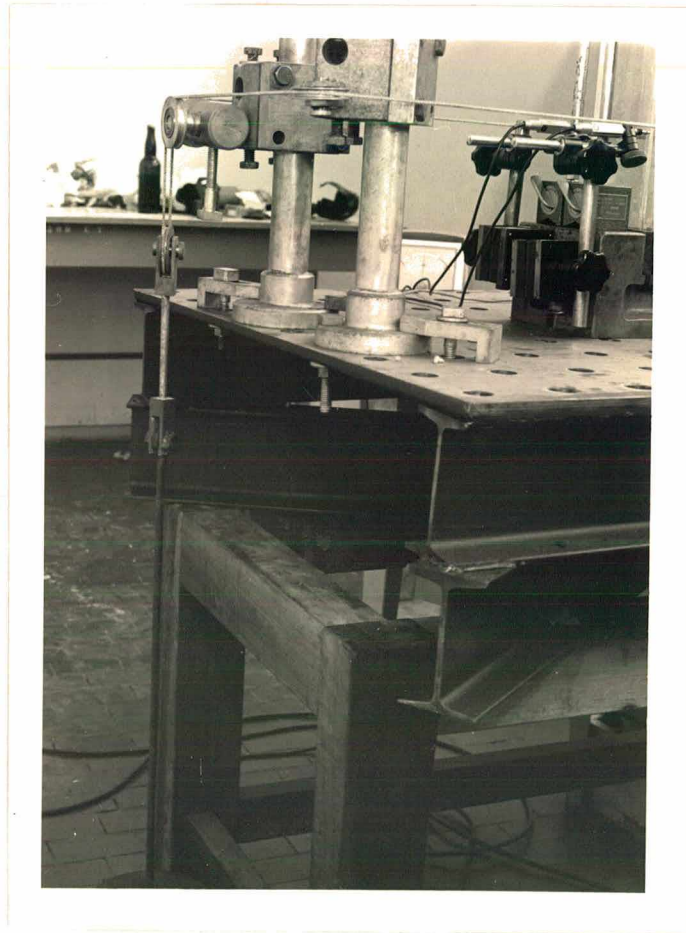


Fig. 22 - Detalhe da mesa de ensaio e sistema de carregamento.

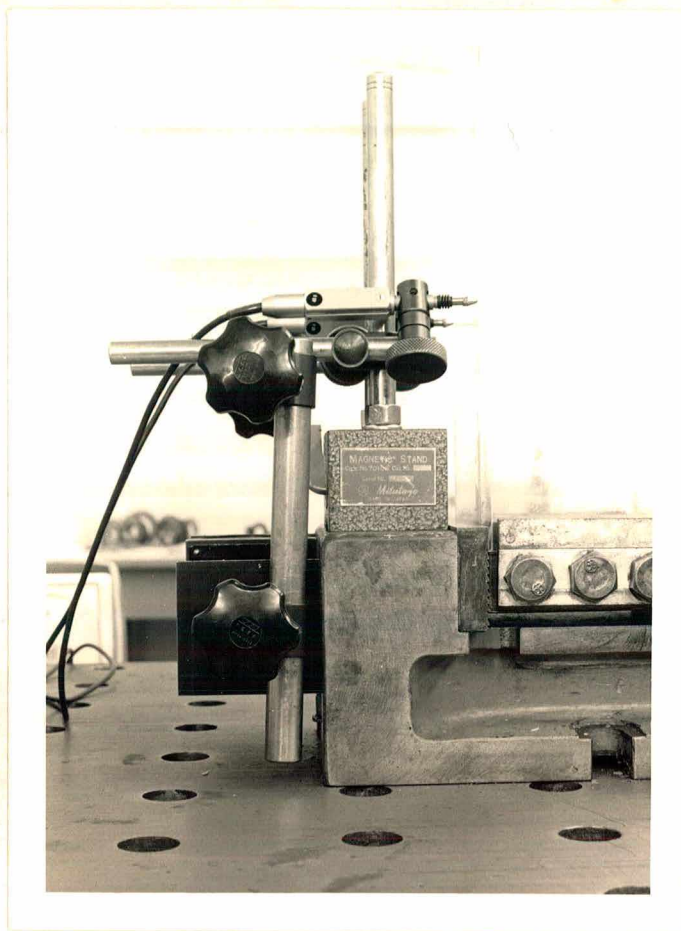


Fig. 23 - Detalhe do sistema de Medida

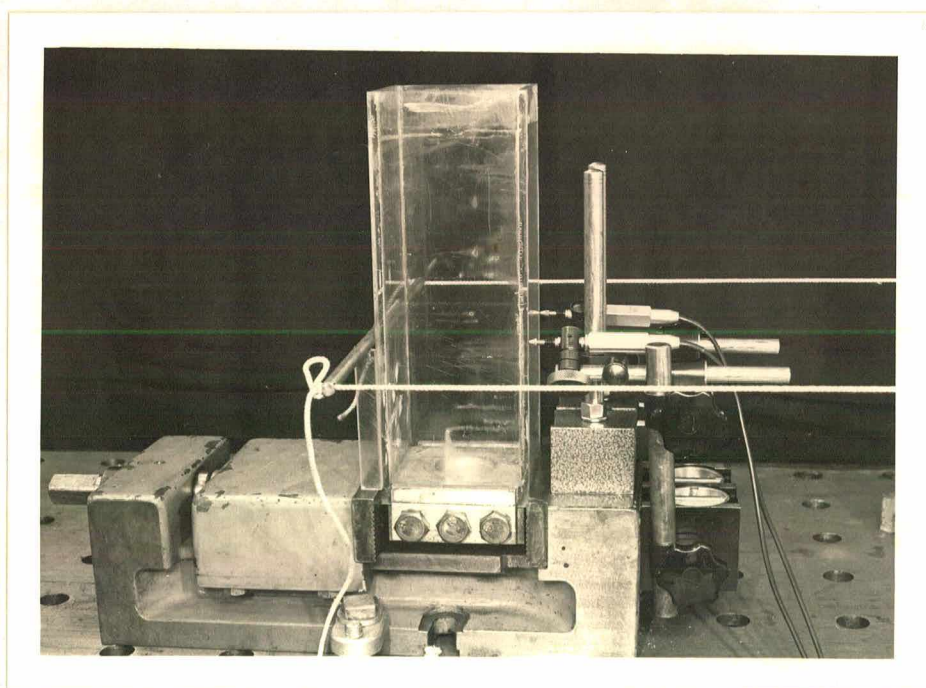


Fig. 24 - Modelo de acrílico de seção fechada.

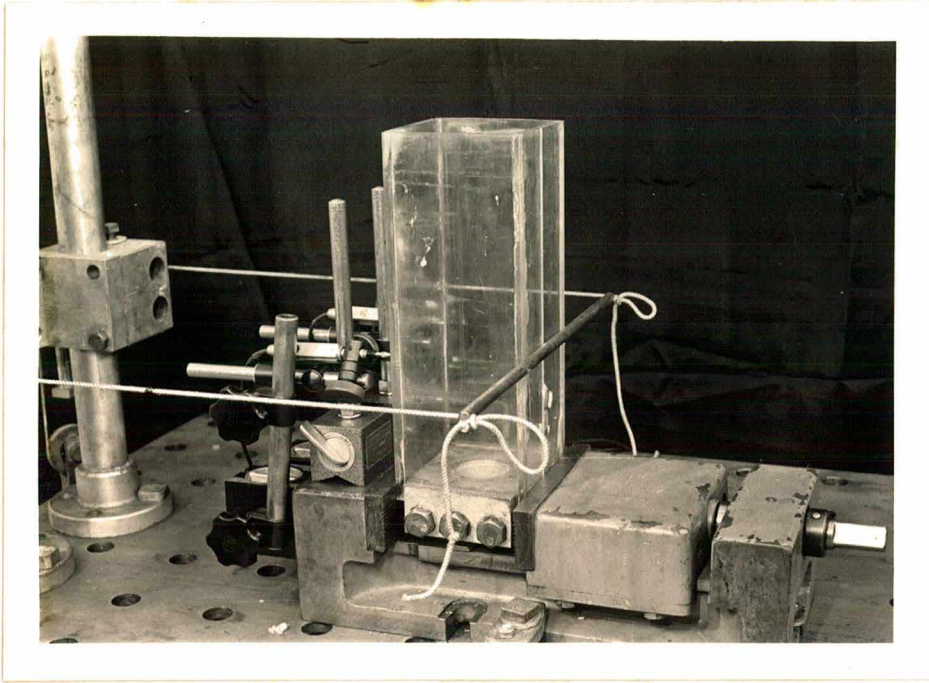


Fig. 25 - Modelo de acrílico de seção aberta.

## 9 - RESULTADOS OBTIDOS E DISCUSSÃO

Os valores das cargas e deformações observados durante os ensaios no grupo 1 e 3, foram anotados em planilhas. A temperatura, umidade e outras variáveis de interesse foram anotadas na planilha correspondente ao ensaio. Formou-se assim, para cada ensaio, um "protocolo de medida". No apêndice 4 foram agrupados todos os protocolos, segundo o grupo de ensaio. Os valores da coluna "Média", representam o deslocamento do ponto de aplicação da resultante do carregamento.

### 9.1 - Apresentação e análise dos dados. GRUPO 1, MODELO 1.

#### 9.1.1 - Controle.

Foram traçadas diversas curvas carga x deformação para cada apalpador em cada ciclo de carga. Os diagramas estão reproduzidos após as planilhas para o grupo 1 no apêndice 4a, p. 123-5.

Como se pode observar, nenhuma correção dos dados é necessária, pois as curvas estão perfeitamente normais a menos do pequeno deslocamento ocorrido no ensaio nº 74032214 com o apalpador nº 3. A pequena histerese na descarga não é devida somente ao material do modelo, mas de todo o conjunto.

#### 9.1.2 - Resultado.

A média, a variância e o desvio padrão das oito leituras de deformação média correspondente a 10 Kgf, são:

$$\bar{D} = 13,725 \text{ } \mu\text{m}$$

$$s^2 = 0,3149$$

$$s = 0,561 \text{ } \mu\text{m}$$

#### 9.1.3 - Controle estatístico

Os valores das oito deformações médias observadas caem dentro do intervalo

$$\bar{D} \pm 3s$$

#### 9.1.4 - Precisão da reprodutibilidade

Um dos índices utilizados para a medida da precisão é o valor de dois desvios padrões tomado em relação à média. Em percentagem:

$$\frac{100(2s)}{\bar{D}} = 8,2\%$$

#### 9.1.5 - Intervalo de confiança para a média de uma distribuição normal quando o desvio padrão é desconhecido.

O intervalo de confiança de 95% para a média da população é dado pela relação:

$$\bar{D} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

onde:

$$t_{0,025; 7} = 2,365$$

(Ver referência 4.)

Substituindo-se os valores:

$$13,72 \pm 2,365 \cdot \frac{0,561}{\sqrt{8}}$$

ou

$$13,72 \pm 0,47$$

A precisão e o intervalo de confiança da média podem ser melhorados com o aumento de n (nº de ensaios), porém a média  $\bar{D}$  não irá alterá-la muito. Isto pode ser observado na expressão de:

$$s^2 = \frac{\Sigma(D - \bar{D})^2}{n - 1}$$

Aumentando-se o nº de ensaios, certamente a diferença

$$|D - \bar{D}|$$

não irá aumentar muito em relação a já observada. Deste modo  $s^2$  tenderá a diminuir com o aumento de  $n$ .

#### 9.1.5 - Grau de acuidade.

Para se estimar a acuidade dos ensaios no grupo 1, deve-se ter um nível de referência. O nível aqui escolhido foi o valor de deslocamento ( $D_T$ ) da seção de aplicação da carga obtido teoricamente. Usando-se os dados obtidos nos capítulos anteriores para esta seção (item 6.8) e as propriedades do acrílico (item 7.3) na fórmula para o cálculo dos deslocamentos de uma viga engastada, tem-se:

$$D_T = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{\alpha PL}{AG} \quad (4')$$

onde:

P = 10 Kgf	I = 0,42485 . 10 <sup>7</sup> mm <sup>4</sup>
L = 110 mm	A = 2448 mm <sup>2</sup>
E = 307,7 Kgf/mm <sup>2</sup>	$\alpha$ = 2,3958
$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = 0,4$	

Substituindo e efetuando:  $D_T = 13,2 \mu\text{m}$

A média dos deslocamentos medidos é

$$\bar{D} = 13,72 \mu\text{m}$$

O erro sistemático cometido pode ser então estimado:

$$e = \bar{D} - D_T = 0,52 \mu\text{m}$$

Percentualmente em relação ao valor calculado é:

$$e = 3,94\% \text{ maior.}$$

Obs.: O erro de leitura do aparelho é de  $\pm 2\%$  do valor indicado (item 7.1.3).

#### 9.1.6 - Decisão.

Considerando que:

- a) a precisão pode ser melhorada aumentando-se o número de ensaios;
- b) a média dos valores observados não se modificará substancialmente;

aceitou-se este processo de medida como válido para se testar o grau de acuidade na determinação teórica dos valores do coeficiente de cisalhamento.

## 9.2.- Apresentação e análise dos dados do GRUPO 3.

Como já foi dito nos itens anteriores (8.1 e 8.5.2) este ensaio tem a dupla finalidade de testar a repetibilidade do processo de medida adotado e verificar se o procedimento adotado na determinação teórica de  $\alpha$  é satisfatório.

### 9.2.1 - GRUPO 3, Modelo 1.

Tres ensaios foram realizados e apresentaram os seguintes resultados: (Ver Apêndice 4b p. 126-8).

Nº 74032215:

Temperatura: 24°C	Média	: $\bar{D} = 13,12 \mu\text{m}$
Umidade : 89%	Variança	: $s^2 = 0,0882$
	Desvio padrão	: $s = 0,297 \mu\text{m}$
	Nº de leituras:	$n = 5$

Nº 74041112

Temperatura: 23,5°C	Média	: $\bar{D} = 13,68 \mu\text{m}$
Umidade : 70%	Variança	: $s^2 = 0,012$
	Desvio padrão	: $s = 0,109 \mu\text{m}$
	Nº de leituras:	$n = 5$

Nº 74041115

Temperatura: 24,5°C	Média	: $\bar{D} = 13,6 \mu\text{m}$
Umidade : 70%	Variança	: $s^2 = 0,050$
	Desvio padrão	: $s = 0,2236 \mu\text{m}$
	Nº de leituras:	$n = 5$



### 9.2.1.1 - Precisão de repetibilidade.

Usando-se o mesmo índice adotado no item 9.1.4, tem-se;

a) para a menos precisa:

$$(N^{\circ} 74032215) \quad \frac{100(2s)}{\bar{D}} = \frac{100(0,5938)}{13,6} = 4,3\%$$

b) para a mais precisa:

$$(N^{\circ} 74041112) \quad \frac{100(2s)}{\bar{D}} = \frac{100(0,218)}{13,6} = 1,6\%$$

### 9.2.1.2 - Grau de acuidade.

Tomando-se o teste mais preciso como referência e comparando a média dos valores observados com o valor calculado teoricamente, tem-se a estimativa do erro sistemático:

$$e = 13,68 - 13,2 = 0,48$$

Percentualmente em relação ao valor calculado tem-se:

$$e = +3,64\%$$

Este erro é praticamente igual ao encontrado no item 9.1.5 para este mesmo modelo. Isto mais uma vez confirma a alta reprodutibilidade dos resultados.

Para todos os efeitos, foi considerado um erro sistemático de 3,6%, presente quando se utiliza este processo de medida, pois não se conseguiu eliminá-lo nem identificar a(s) causa(s) que o gerou.

### 9.2.2 - GRUPO 3, Modelo 2.

Foi realizado um ensaio com o modelo 2 e obteve-se o seguinte resultado: (Ver Apêndice 4c, p. 129).

Temperatura: 20,5°C

Umidade : 67%

Média :  $\bar{D} = 15,56 \mu\text{m}$

Variança :  $s^2 = 0,0005$

Desvio padrão :  $s = 0,0223 \mu\text{m}$

Nº de leituras:  $n = 5$

Considerando o erro sistemático observado no modelo 1 (Ver item 9.2.1.2), tem-se:

$$\text{Média corrigida} = 15,56 \cdot 0,964$$

$$\text{Finalmente, } \bar{D}_c = 15 \mu\text{m}$$

#### 9.2.2.1 - Precisão de repetibilidade.

Usando o mesmo índice anterior, tem-se:

$$\frac{100(2s)}{\bar{D}} = \frac{100(0,0446)}{15,56} = 0,28\%$$

Este alto índice de repetibilidade em parte é explicado pelo "treino" do acrílico.

#### 9.2.2.2 - Grau de acuidade do cálculo teórico.

A intenção deste ensaio não foi a de medir o grau de acuidade do processo, pois este já foi determinado anteriormente, mas sim verificar o grau de acuidade do método teórico usado para se estimar o valor de  $\alpha$  para seções abertas.

Reescrevendo a equação (4') (Ver item 9.1.5) com os valores referentes a esta seção aberta (ver item 6.8), tem-se

$$D = \frac{PL^3}{3EI} + \alpha \frac{PL}{AG} \quad (4')$$

onde:  $P = 10 \text{ Kgf}$

$L = 110 \text{ mm}$

$E = 307,5 \text{ Kgf/mm}^2$

$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = 0,4$

$I = 0,4217 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$

$A = 2436 \text{ mm}^2$

$\alpha = 2,379$

$D =$  deslocamento da seção de aplicação da carga

Substituindo e efetuando:

$$\bar{D}_T = 13,45 \text{ } \mu\text{m}$$

Comparando-se com a média corrigida do ensaio, tem-se:

$$e = 10,3\%$$

valor este tomado em relação ao ensaio considerado sob controle.

Esta diferença encontrada entre o valor calculado e o medido não é suficiente para invalidar o cálculo teórico.

Dispersões até 10% entre os valores medidos e calculados tem sido observadas por outros pesquisadores<sup>8,14</sup> em outras seções.

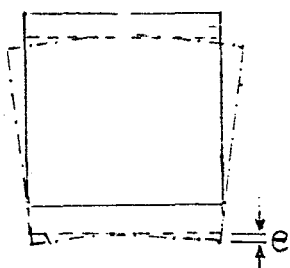


Fig. 26 - Deformação adicional da seção.

No presente caso, pode-se levantar uma hipótese sobre a diferença entre o calculado e o medido.

Com efeito:

A diferença entre o valor calculado e o medido, pode ter sido originária da possível deformação adicional (e) ocorrida na parede oposta ao corte. (fig.26) Tal deformação não foi prevista nem considerada nos cálculos. Sua verificação experimental foi tentada mas o dispositivo de medida utilizado não deu bons resultados, pois a base do suporte sofria influência do carregamento.

Em pesquisas futuras espera-se detectar estas deformações (caso elas realmente ocorram) e medi-las. Na bibliografia consultada, nenhuma referência é feita diretamente sobre este efeito.

## 10 - CONCLUSÃO

a) O reforço das seções simplesmente conexas com adição de área à seção leva em geral a uma perda de rigidez por cisalhamento. Esta perda pode ser muito superior ao ganho de rigidez à flexão. O índice de 20% observado (item 6.8) deve servir de alerta.

b) A utilização de extensômetros elétricos para se medir deformações específicas no acrílico (tal como foi exposto no item 2.3) é válida, mesmo para uma tensão de alimentação do circuito da ordem de 2 V.

c) Num curto período de tempo a variação da temperatura e da umidade dentro de uma faixa de  $\pm 15\%$  em torno da média não é suficiente para influir decisivamente nas grandezas medidas, utilizando-se os modelos confeccionados de acrílico.

d) A quase concordância entre os valores das deformações calculadas e as verificadas nos experimentos realizados demonstra o grau de acuidade da determinação de  $\alpha$  e do deslocamento, usando método energético.

A P Ê N D I C E 1

## A P Ê N D I C E I

## TEORIA DE MEMBRANA

A teoria de membrana pode ser estendida às vigas com secções vazadas de paredes finas. Algumas hipóteses adicionais, as de Bernoulli-Navier; lei de Hooke e princípio de Saint-Venant, devem ser feitas.

Estas hipóteses são:

- a) As secções das vigas são consideradas suficientemente rígidas nos seus planos originais;
- b) O comprimento da linha média ( $s$ ) da secção não se altera durante o carregamento estático da viga;
- c) A rigidez à flexão e à torção das paredes é suposta muito pequena;
- d) As tensões normais ( $\sigma$ ) e as cisalhantes ( $\tau$ ) são consideradas constantes ao longo da espessura ( $e$ ) das paredes e seus valores podem ser substituídos pelo correspondente sobre a linha média;

Utilizando o desenvolvimento de GORBATOV<sup>10</sup>, é possível desenvolver um programa de computador para se calcular o centro de torção e o coeficiente de cisalhamento para secções constituídas de parede fina.

Em relação à obra citada, a modificação introduzida aqui foi a mudança do sistema de referência e o sentido do momento fletor  $M_x$ .

GORBATOV utilizou o triedro indireto (fig.27a); quanto aqui optou-se pelo sistema direto  $xyz$  (fig.27b)

Isto gera apenas algumas mudanças de sinais em algumas grandezas envolvidas nas fórmulas.

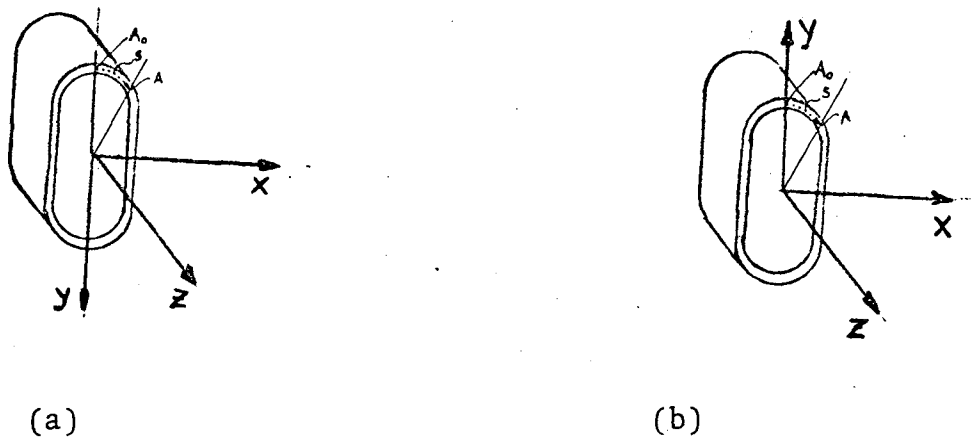


Fig. 27 - Triedros de referência:  
 a) sistema indireto      b) sistema direto

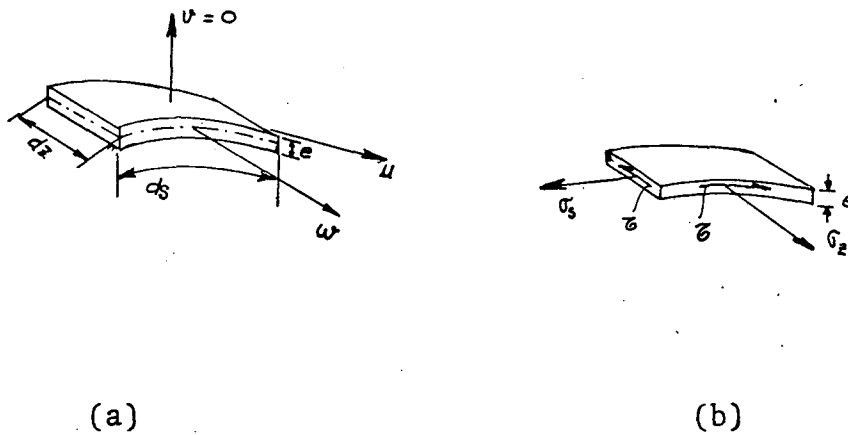


Fig. 28- Elemento  $dz \cdot ds \cdot e$   
 a) com os deslocamento  $u, v, w$   
 b) com as tensões  $\sigma_z, \sigma_s$  e  $\tau$

## FLUXO DE TENSÕES CISALHANTES

A equação diferencial obtida do equilíbrio de um elemento  $dz.ds.e$ , destacado do sólido da fig.27b no nível  $s$ , e representado maior na figura 28b, continua sendo:

$$\frac{\partial(e\sigma_z)}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (59)$$

onde:  $e$  é a espessura da parede

$\sigma_z$  é a tensão normal na direção  $z$  e

$q$  é o fluxo de tensão cisalhante  $e \cdot \tau$  no nível  $s$  (fig. 28 e 29)

Chamando de  $M_x$  e  $M_y$  os momentos fletores na seção, segundo os eixos principais de inércia  $x$  e  $y$ , respectivamente; a tensão normal na direção  $z$  é dada por:

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} \quad (60)$$

onde  $(x,y)$  é a cota do "ponto" onde atua  $\sigma_z$ , e  $I_x$  e  $I_y$  os momentos de inércia principais da seção.

Substituindo a equação (60) na equação diferencial (59) e lembrando que os esforços cortantes estão relacionados com os momentos,

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = V_y \quad \text{e} \quad \frac{\partial M_y}{\partial z} = -V_x \quad (61)$$

após a integração, tem-se:

$$q = q_0 - \left[ \frac{V_y}{I_x} S_x + \frac{V_x}{I_y} S_y \right] \quad (62)$$

onde:  $q_0$  é o fluxo de tensão cisalhante na origem  $s = 0$ . Pode ser determinado das condições de deformação da seção no ponto  $A_0$ .



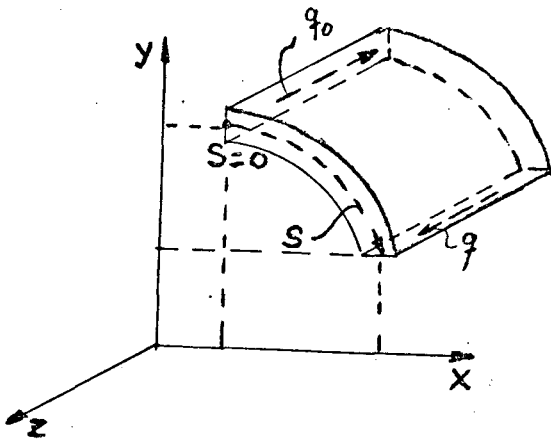


Fig. 29 - Fluxo de tensão cisalhante

$S_x$  e  $S_y$  são os momentos estáticos da área entre  $s = 0$  até o nível  $s$  onde atua  $q$ .

Assim:

$$S_x = \int_0^s y \, edz \, ds \quad e \quad S_y = \int_0^s x \, edz \, ds.$$

Deslocamentos.

Destaque-se um elemento  $edz.ds$  do sólido da fig.27b na cota curvilínea  $s$ .

Os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  que atuam no plano médio deste elemento, estão ligados com as respectivas de-

formações específicas.

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$e \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau}{G} \quad (63)$$

Devido à hipótese "a",  $v = 0$ , porém a deformação  $\epsilon_y$  ao longo da espessura não pode ser evitada devido ao efeito Poisson.

O estado de tensão na membrana é plano, e considerando a hipótese b, tem-se;

$$\epsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (64)$$

O deslocamento  $w$  pode então ser encontrado em termos da distribuição das tensões cisalhantes. Não havendo torção  $\partial u / \partial z = 0$ , donde:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\tau}{G} = \frac{q}{Ge} \quad (65)$$

Substituindo-se a equação (62) na (65), tem-se

$$w = w_0 + \frac{1}{G} \int_s \left[ q_0 - \left( \frac{V_y}{I_x} S_x + \frac{V_x}{I_y} S_y \right) \right] \frac{ds}{e} \quad (66)$$

Esta equação é usada para se determinar o fluxo em  $s = 0$ , quando se conhece  $w - w_0$  em seções fechadas.

A P Ê N D I C E 2

## DESCRIBÇÃO SUMÁRIA DOS SUBPROGRAMAS

## a) Sub-rotina GITRA.

Finalidade - Gira e translada os momentos de inércia principais de uma seção qualquer.

Chamada - CALL GITRA.

Os argumentos de entrada e saída estão em COMMON.

Descrição dos argumentos e sua relação com as variáveis do capítulo 5.

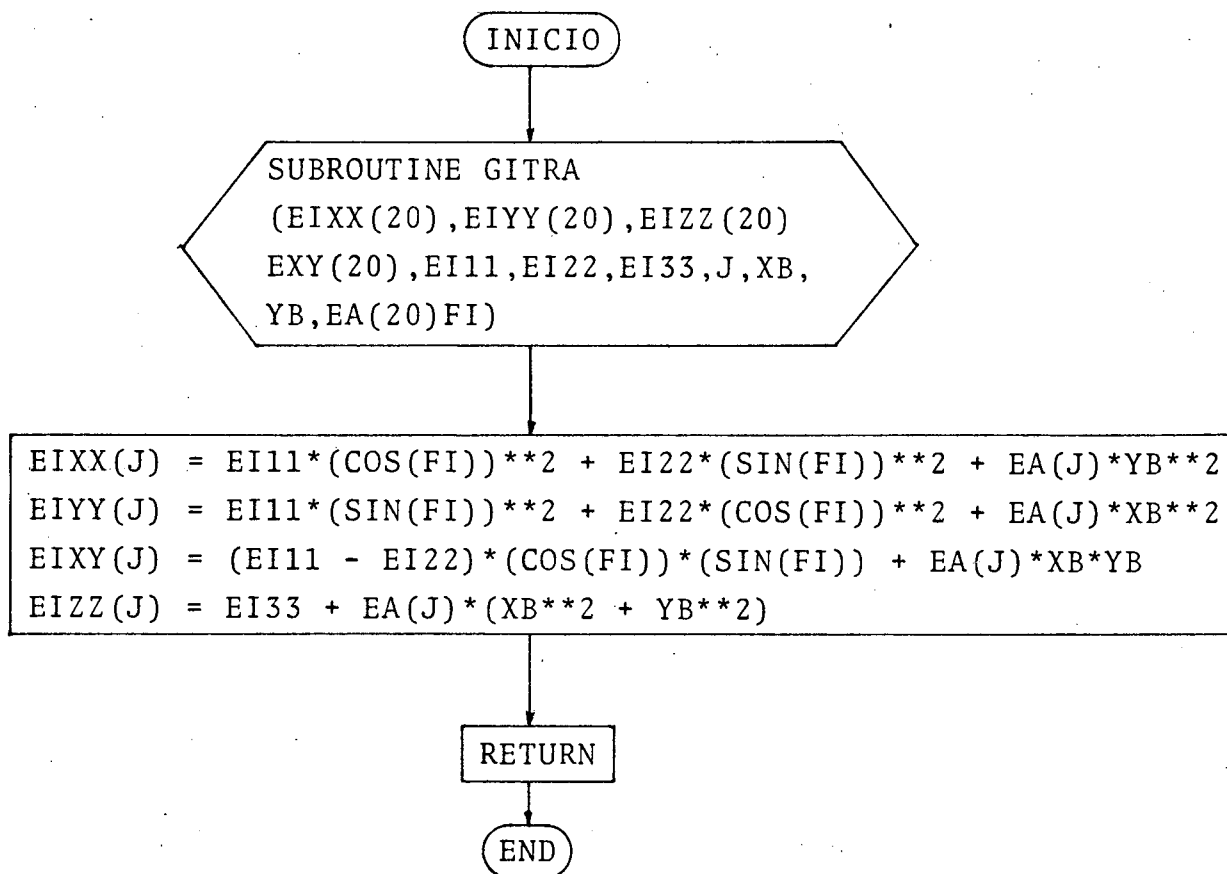
$J = i$	Número do vértice inicial de um elemento reto genérico
$\left. \begin{array}{l} \text{EIXX (J) = } I_{xxi} \\ \text{EIYY (J) = } I_{yyi} \\ \text{EIXY (J) = } I_{xyi} \\ \text{EIZZ (J) = } I_{zzi} \end{array} \right\}$	Momentos de inércia do elemento J (=i) em relação ao sistema XY inicial:
$FI = \phi$	ângulo de giro do sistema intrínstico principal;
$\left. \begin{array}{l} \text{EI11 = } I_{11} \\ \text{EI22 = } I_{22} \\ \text{EI33 = } I_{33} \end{array} \right\}$	momentos de inércia principais intrínsticos do elemento J (=i);
$EA = A$	área do elemento genérico J;
$\left. \begin{array}{l} \text{YB = } y_{bi} \\ \text{XB = } x_{bi} \end{array} \right\}$	coordenada e abscissa do baricentro do elemento I em relação ao sistema XY inicial;

Método - É usada a transformação

$$I_{(x,y)} = T^t I T + A D, \quad (42)$$

no plano da figura. Para maiores detalhes ver item 5.6.

## Fluxograma



b) Função SOMA.

Finalidade - Realiza a soma de variáveis indexadas, na se quência dos números naturais.

Chamada - SOMA(SS,M)

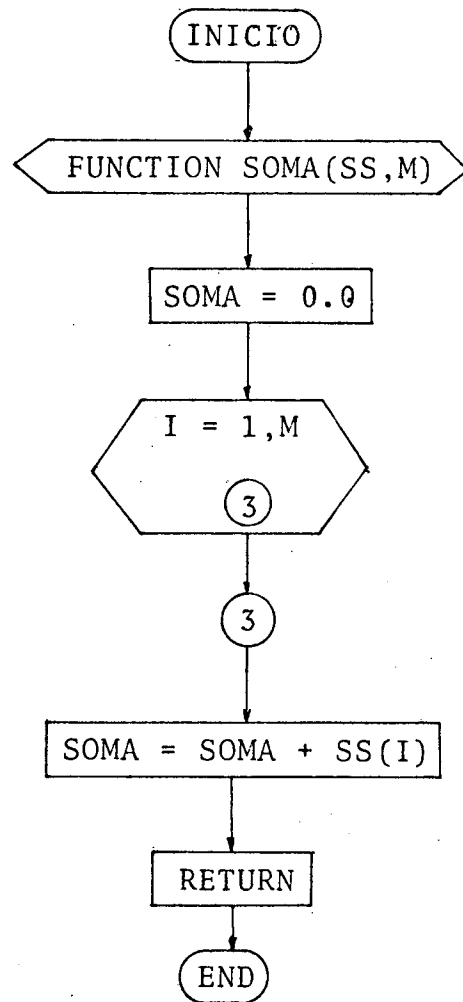
Descrição dos argumentos.

SS(I) - conjunto das variáveis a serem somadas

I - índice da variável

M - número total de variáveis a serem somadas.

## Fluxograma



## c) Sub-rotina PROPI.

Finalidade - cálculo da área, baricentro, momentos de inércia principais, eixos principais de inércia, coordenadas dos vértices em relação aos eixos principais de uma seção constituída de elementos retos com linha poligonal contínua, aberta ou fechada.

Chamada - CALL PROPI(N,X,Y,E,R,FA,FI11,FI22,FI33,XP,YP)

Descrição dos principais argumentos e sua relação com as variáveis (capítulo 5)

I ou J ou K	são contadores ou índices
$X(I) = X_i$	ordenada e abscissa do vértice I da seção em relação ao sistema XY inicial.
$Y(I) = Y_i$	
$E(I) = e_i$	espessura do elemento I, reto ou curvo, que liga o vértice I ao I+1
$S = s_i$	comprimento do elemento genérico i
R(I)	raio do elemento I. Prevista a utilização de elementos de círculo;
$N = n$	o número de vértices que contém a seção, (ou figura);
$M = m$	número de elementos retos;
$EI11 = I_{11}$	momentos de inércia do elemento em relação ao eixo principal (1) (máximo)
$EI22 = I_{22}$	
$EI33 = I_{33}$	
$FI = \phi$	ângulo em que devem girar os eixos 1 e 2 até ficarem paralelos com o sistema inicial (fig. 7);
$EA(I) = A_i$	área do elemento genérico i
$XB = x_{bi}$	abscissa e ordenada do baricentro do elemento I em relação ao sistema de eixos iniciais XY;
$YB = y_{bi}$	



$$\left. \begin{aligned} \text{EIXX (I)} &= I_{xxi} \\ \text{EIYY (I)} &= I_{yyi} \\ \text{EIXY (I)} &= I_{xyi} \\ \text{EIZZ (I)} &= I_{zzi} \end{aligned} \right\}$$

momentos de inércia do elemento I em relação ao sistema XY inicial;

$$\left. \begin{aligned} \text{EMX (I)} &= S_{xi} \\ \text{EMY (I)} &= S_{yi} \end{aligned} \right\}$$

momentos estáticos do elemento I em relação ao sistema XY inicial;

$$\text{FA} = A$$

área da seção plana

$$\left. \begin{aligned} \text{FMXX} &= S_x \\ \text{FMY} &= S_y \end{aligned} \right\}$$

momentos estáticos da seção em relação ao sistema inicial XY;

$$\left. \begin{aligned} \text{FIXX} &= I_{xx} \\ \text{FIYY} &= I_{yy} \\ \text{FIXY} &= I_{xy} \\ \text{FIZZ} &= I_{zz} \end{aligned} \right\}$$

momentos de inércia da seção em relação ao sistema XY inicial

$$\left. \begin{aligned} \text{XBP} &= X_{BP} \\ \text{YBP} &= Y_{BP} \end{aligned} \right\}$$

coordenadas do baricentro da seção em relação ao sistema XY inicial;

$$\left. \begin{aligned} \text{FIXB} &= I_{xB} \\ \text{FIYB} &= I_{yB} \\ \text{FIXYB} &= I_{xyB} \\ \text{FIZB} &= I_{zB} \end{aligned} \right\}$$

momentos de inércia da seção em relação ao sistema de eixos  $x_B$ ,  $y_B$  baricêntrico, paralelo ao inicial;

$$\text{ALFA} = \theta$$

ângulo entre o eixo de momento de inércia máximo ( $X_{BP} \equiv X$ ) e o eixo baricêntrico  $x_B$  (paralelo ao original X); é contado positivo no sentido anti-horário a partir do eixo  $x_B$ ;

$$\text{AFLA} = \theta$$

em graus;

$$\left. \begin{aligned} \text{FI11} &= I_{x_{BP}} \\ \text{FI22} &= I_{y_{BP}} \\ \text{FI33} &= I_{z_{BP}} \end{aligned} \right\}$$

momentos de inércia (máximo, mínimo e polar) da seção em relação ao seu sistema de eixos principais ( $x_{BP} \equiv X$ );

$$\text{E1}$$

raio da vizinhança de zero; se  $-E \leq \beta \leq E$ , então o elemento reto é paralelo ao eixo X inicial;

$$\text{E2}$$

raio da vizinhança de zero para verificar se os momentos de inércia principais são iguais;

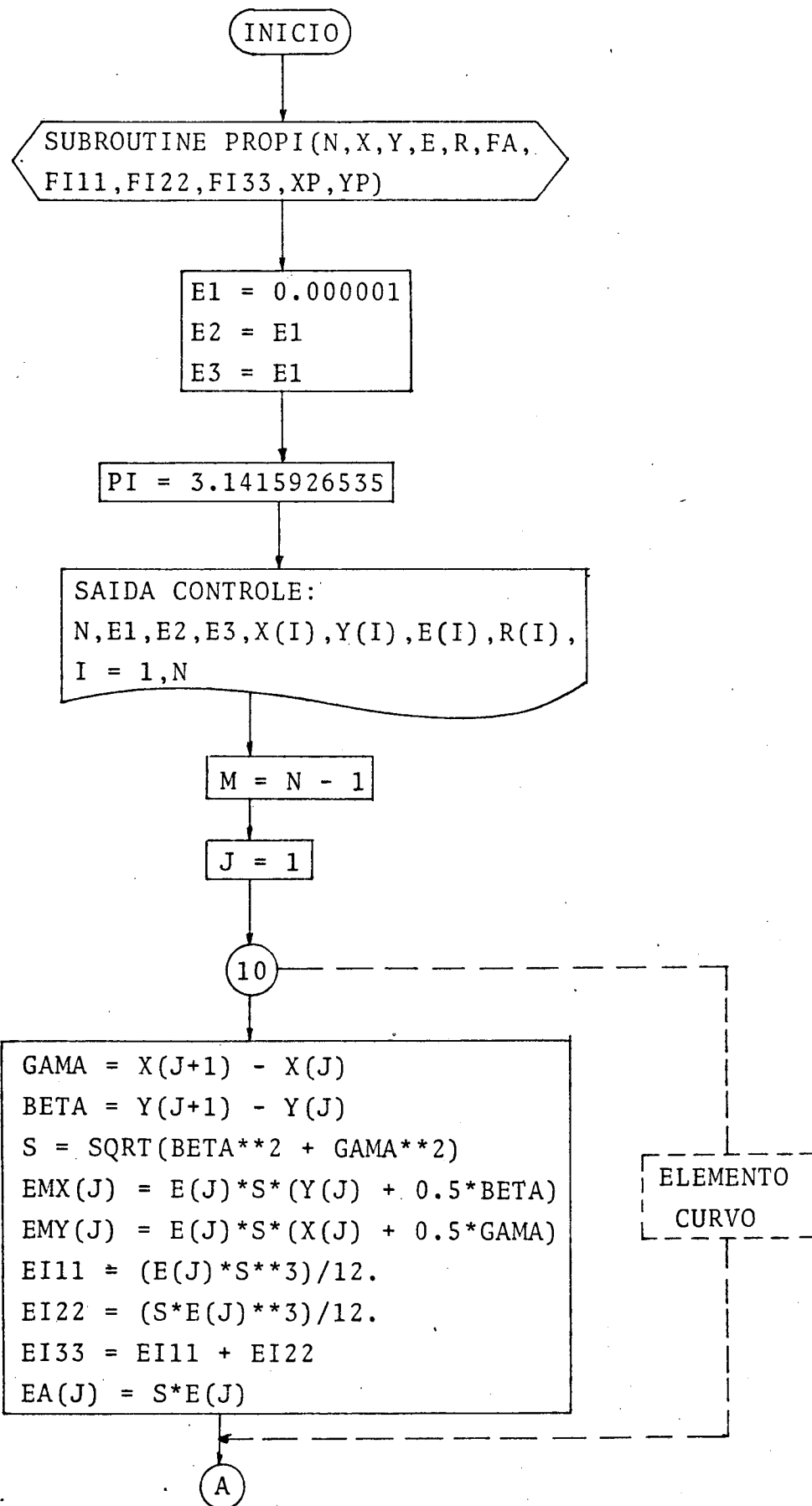
E3 raio da vizinhança de zero para testar  
se o produto de inércia é nulo;

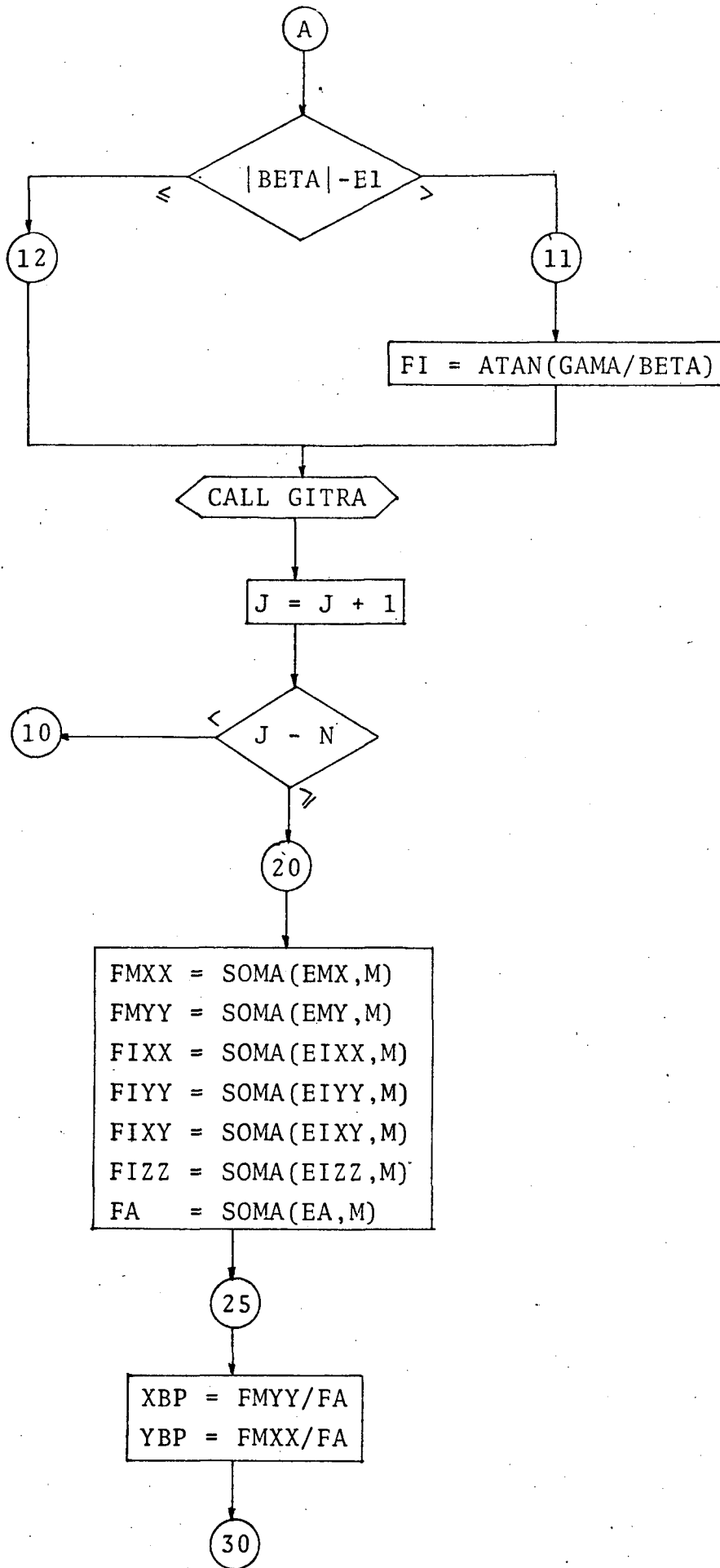
$$B = FI_{xB} - FI_{yB} \quad \text{variáveis auxiliares.}$$

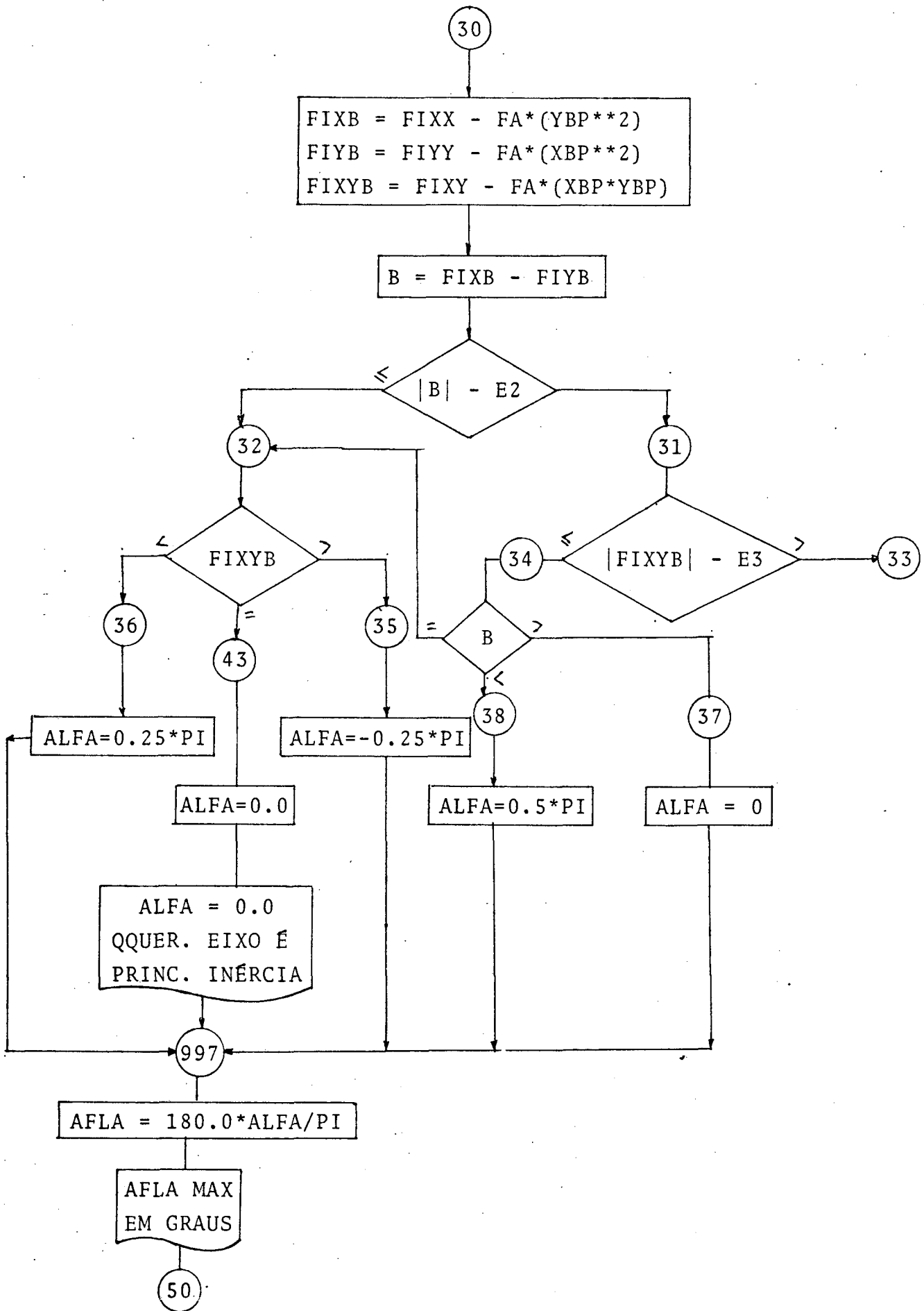
$$D = \left( \frac{\cos(2*ALFA)}{B} \right) / B \quad \text{variáveis auxiliares}$$

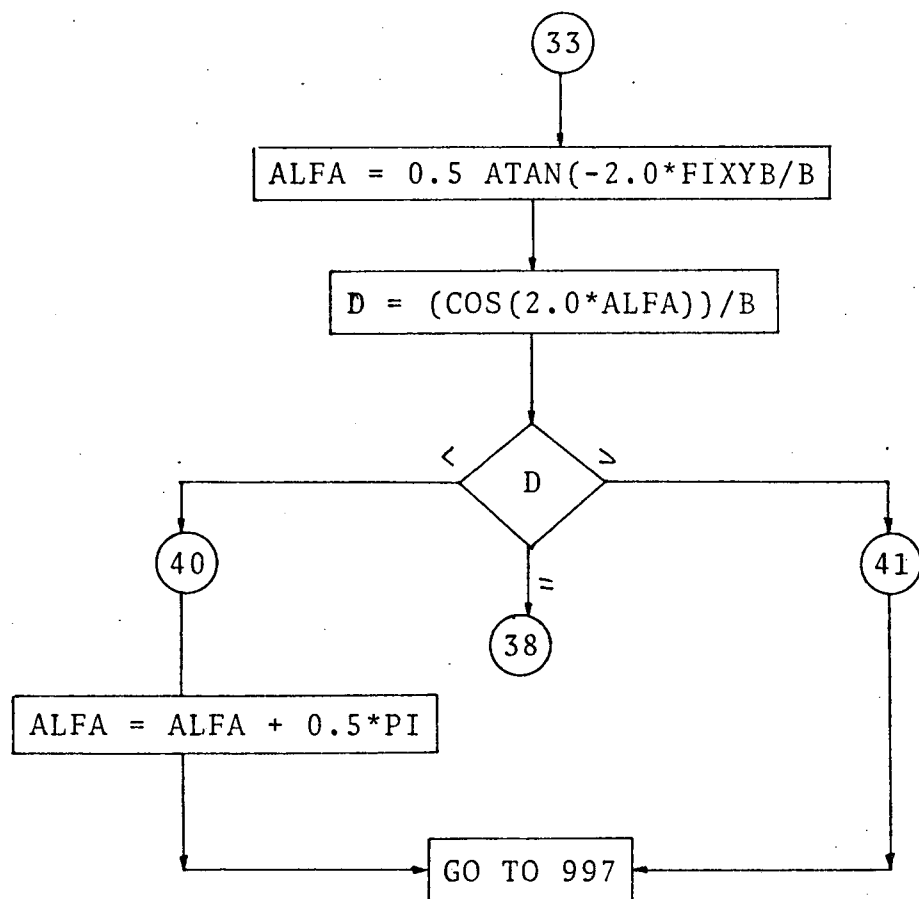
Método - O exposto no capítulo 5.

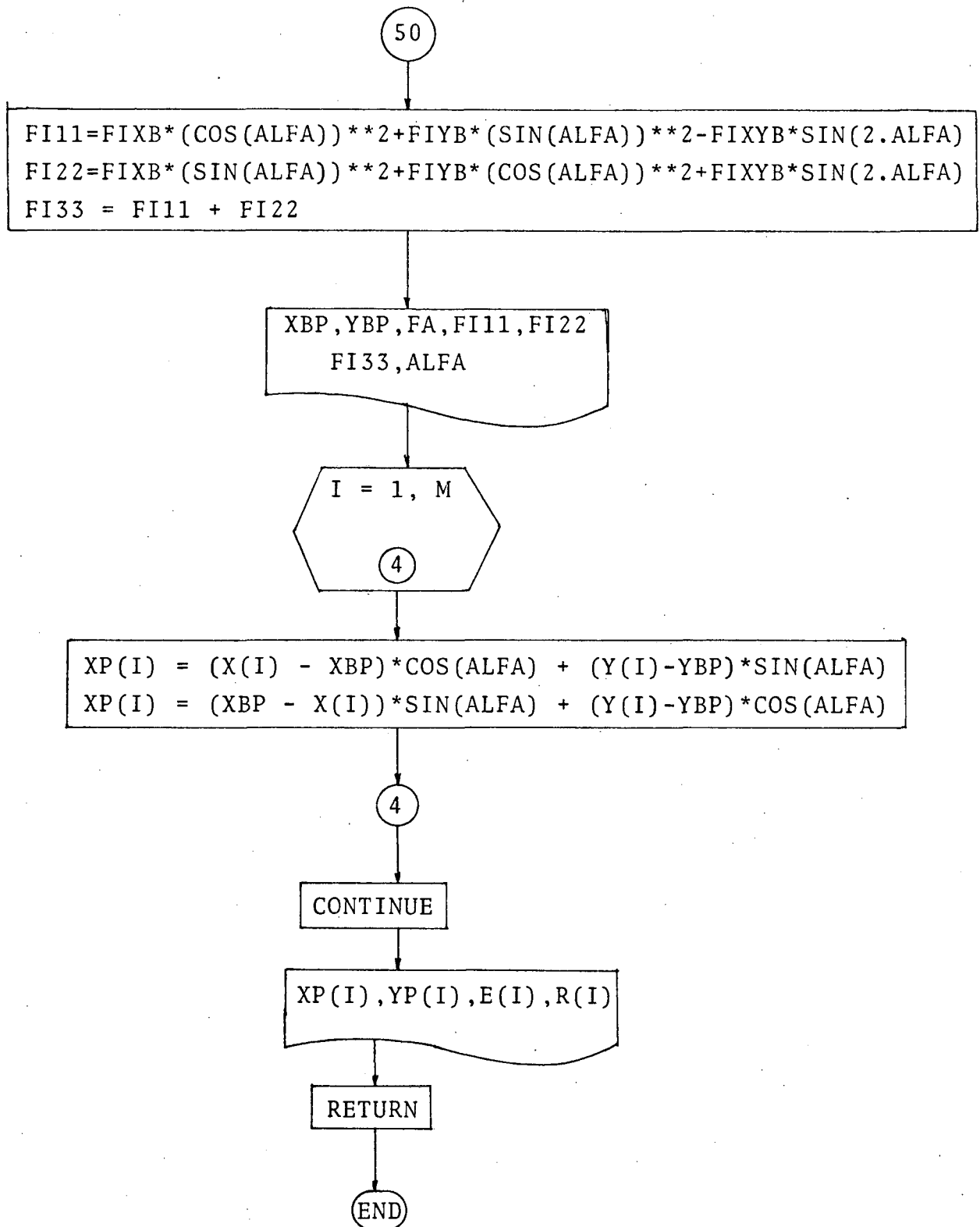
## Fluxograma











## d) Sub-rotina DITA.

Finalidade - Calcula e armazena os coeficientes das equações paramétricas (gama e beta) e o comprimento do segmento de reta  $s$  para o elemento genérico  $I$ .

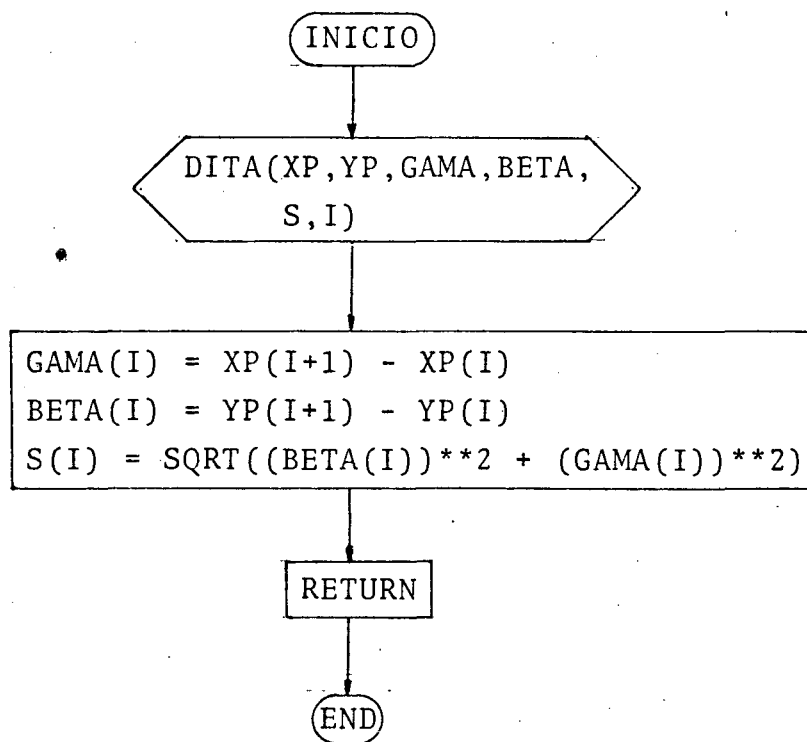
Chamada - CALL DITA(XP,YP,GAMA,BETA,S,I)

Descrição dos argumentos

I	-	índice do elemento genérico I
XP(I), YP(I)	-	abscissa e ordenada do vértice I
GAMA(I), BETA(I)	-	coeficientes das equações paramétricas do segmento de reta $s(I)$ .
S = s(I)	-	comprimento do segmento de reta



## Fluxograma



## c) Função ALLE.

Finalidade - Realiza o cômputo da integral de linha

$$QL = \oint_S \frac{ds}{e}$$

O integrando é um momento estático.

Chamada - ALLE(N,SE,E,OP,GREGO)

Descrição dos argumentos e suas relações com as variáveis do capítulo 6.

N = n	número de vértices
M = m	número de elementos retos m = n-1
SE = s <sub>i</sub>	comprimento do elemento genérico i.
E = e <sub>i</sub>	espessura do elemento genérico i
FM = S <sub>i-1</sub>	momento estático da parte da seção já percorrida em relação aos eixos principais de inércia:

Quando deseja-se calcular a (48) em relação ao eixo principal de inércia máximo, isto é:

$$\oint S_x \frac{ds}{e} \quad \text{então:}$$

OP = YP = y<sub>i</sub>      ordenada dos vértices da seção em relação aos eixos principais de inércia;

GREGO = β<sub>i</sub>      diferença entre as ordenadas de dois vértices consecutivos.

Quando deseja-se calcular em relação ao eixo principal de inércia mínimo, isto é:

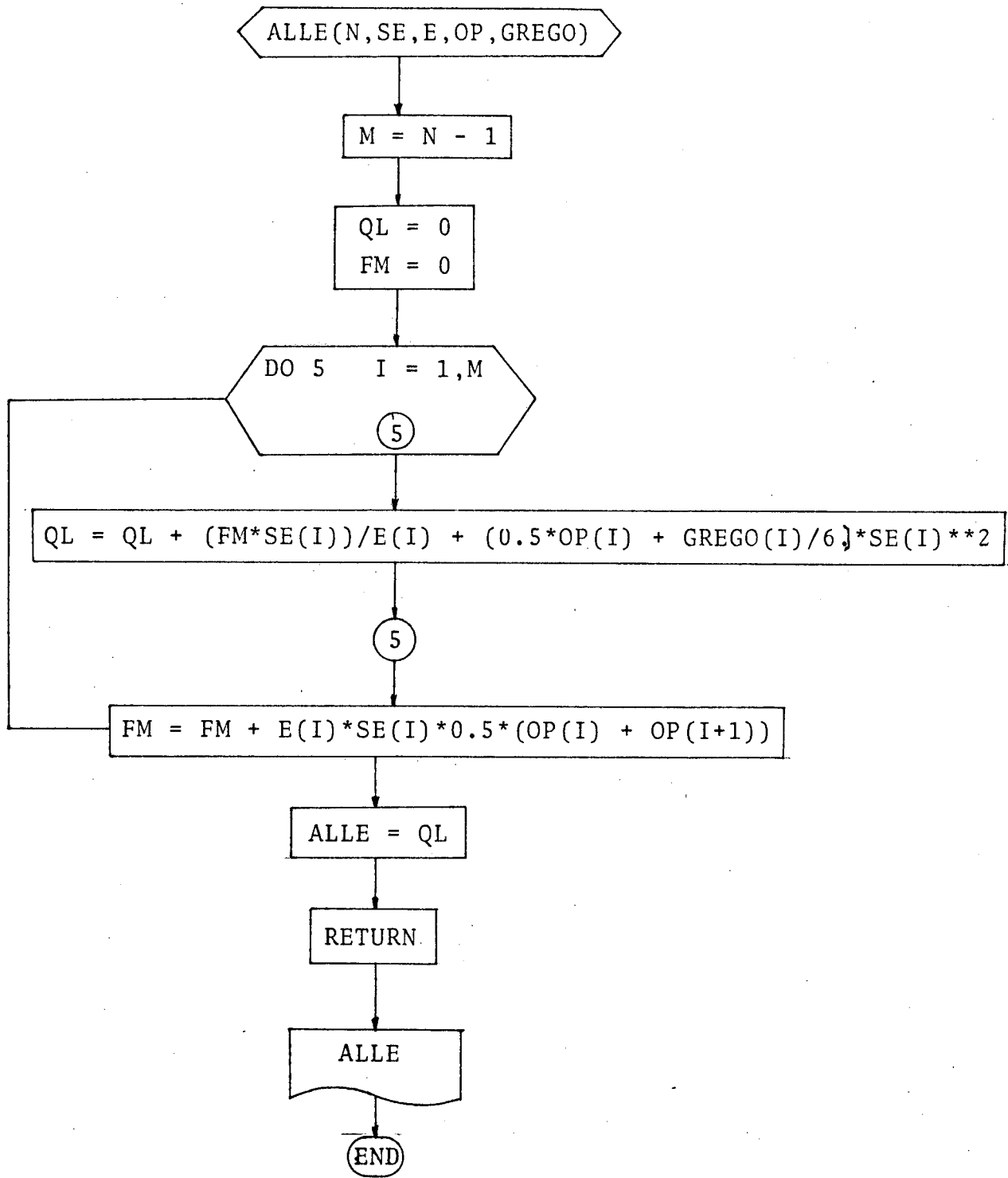
$$\oint S_y \frac{ds}{e} \quad , \text{ então:}$$

OP = XP =  $x_i$       abscissa dos vértices da seção em relação aos eixos principais de inércia.

GREGO =  $\gamma_i$       diferença entre as abscissas de dois vértices consecutivos

Método      - exposto no capítulo 6.3.

## Fluxograma



## f) Função RINTL.

Finalidade - Realizar o cômputo da integral

$$RI = \int_s S^2 \frac{ds}{e} \quad (53)$$

onde S é um momento estático.

Chamada - RINTL(N,SE,EI,OP,GREGO)

Descrição dos argumentos e suas relações com as variáveis do item 6.4.

N = n	número total de vértices que contém a seção
SE(I) = s <sub>i</sub>	comprimento do elemento genérico i
EI(I) = e <sub>i</sub>	espessura do elemento genérico i
RI = RI	valor numérico da integral (53)
B = FM = S <sub>i-1</sub>	momento estático da parte da seção já percorrida em relação aos eixos principais de inércia.
C; D	variáveis auxiliares

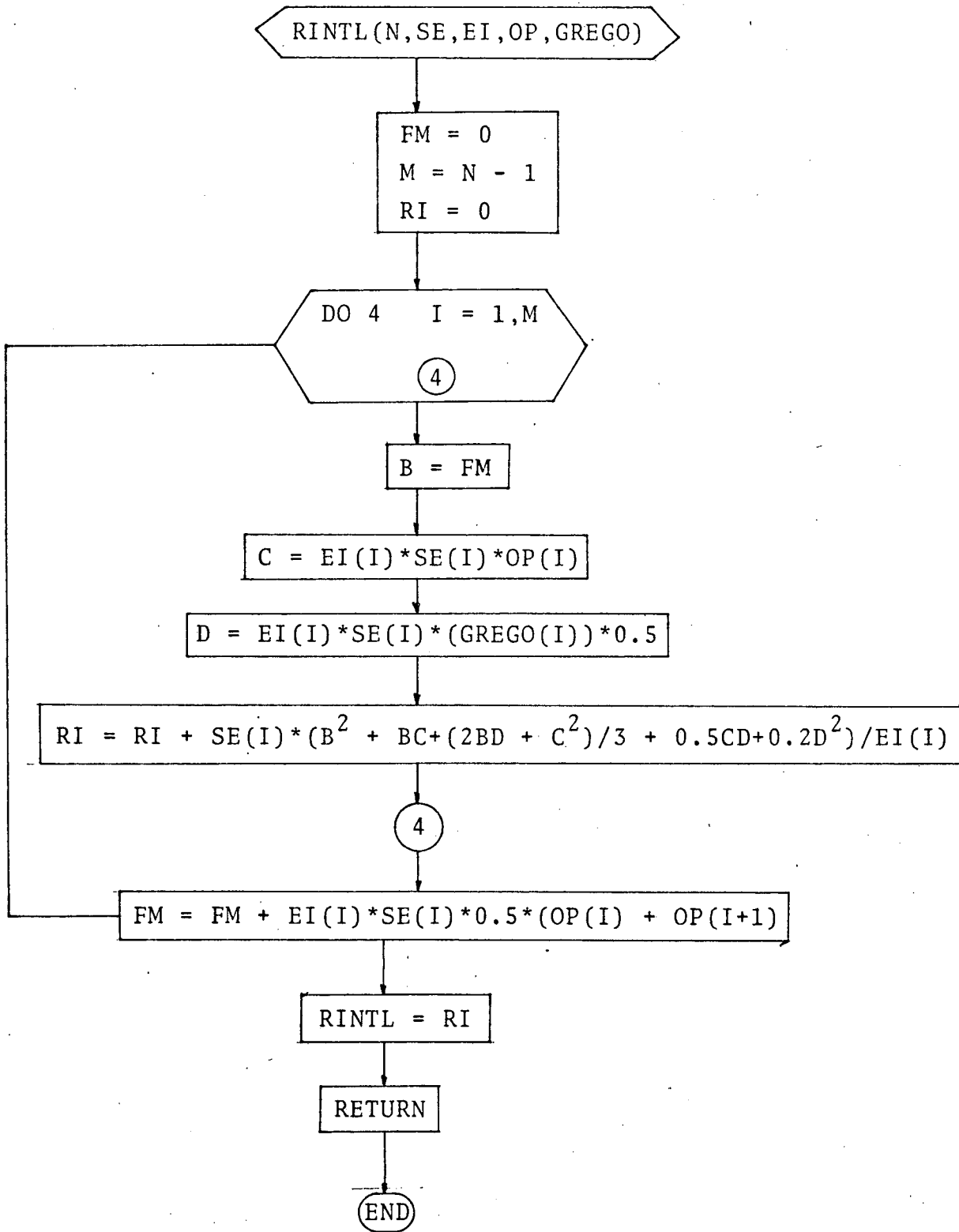
Quando se deseja calcular a (53) em relação ao eixo principal de inércia máximo, isto é:

$$\int_s S_x^2 \frac{ds}{e}, \text{ então:}$$

OP = YP = y <sub>i</sub>	ordenada dos vértices da seção em relação aos eixos principais de inércia.
GREGO = β <sub>i</sub>	diferença entre as ordenadas de dois vértices consecutivos

Método - Está exposto no item 6.4.

## Fluxograma



g) Função DSE.

Finalidade - Calcular a integral

$$\oint \frac{ds}{e}$$

Chamada - DSE(N,SE,EI)

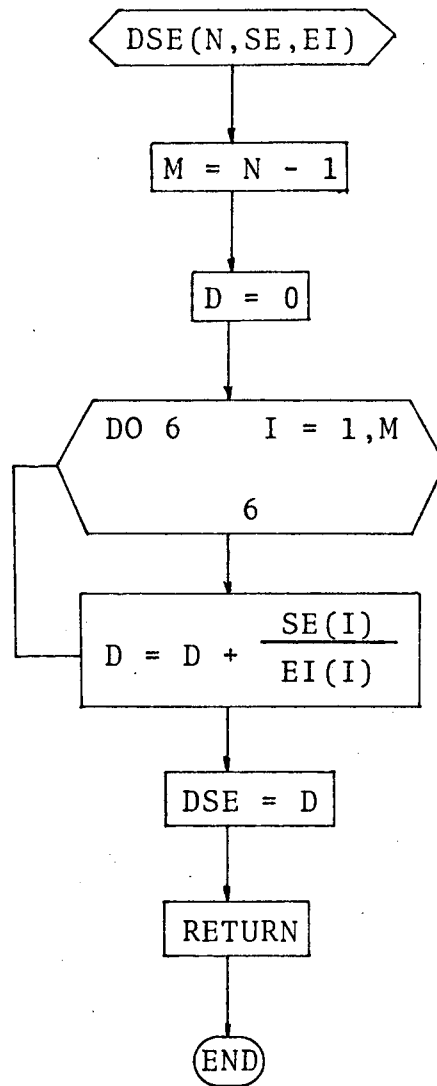
Descrição das variáveis -

N número de vértices

SE comprimento dos elementos retos

EI espessura dos elementos retos

Fluxograma -





## h) Função COISA.

Finalidade - Calcular a integral de linha

$$C = \int r S ds$$

Chamada - COISA(N,SE,EI,OP,GREGO,GAMA,BETE,XP,YP)

Descrição das variáveis e suas correspondências com

N = n	número de vértices da seção
SE = s <sub>i</sub>	comprimento dos elementos retos
EI = e <sub>i</sub>	espessura dos elementos retos
GAMA = γ <sub>i</sub>	diferença entre as abscissas de dois vértices consecutivos;
BETE = β <sub>i</sub>	diferença entre as ordenadas de dois vértices consecutivos
XP = X <sub>i</sub> YP = Y <sub>i</sub>	abscissa e ordenada dos vértices em relação aos eixos principais de inércia da seção

Quando se deseja

$$\oint r S_x ds, \text{ então}$$

$$OP = YP = y_i \quad \text{e} \quad GREGO = BETA = \beta_i$$

Quando se deseja

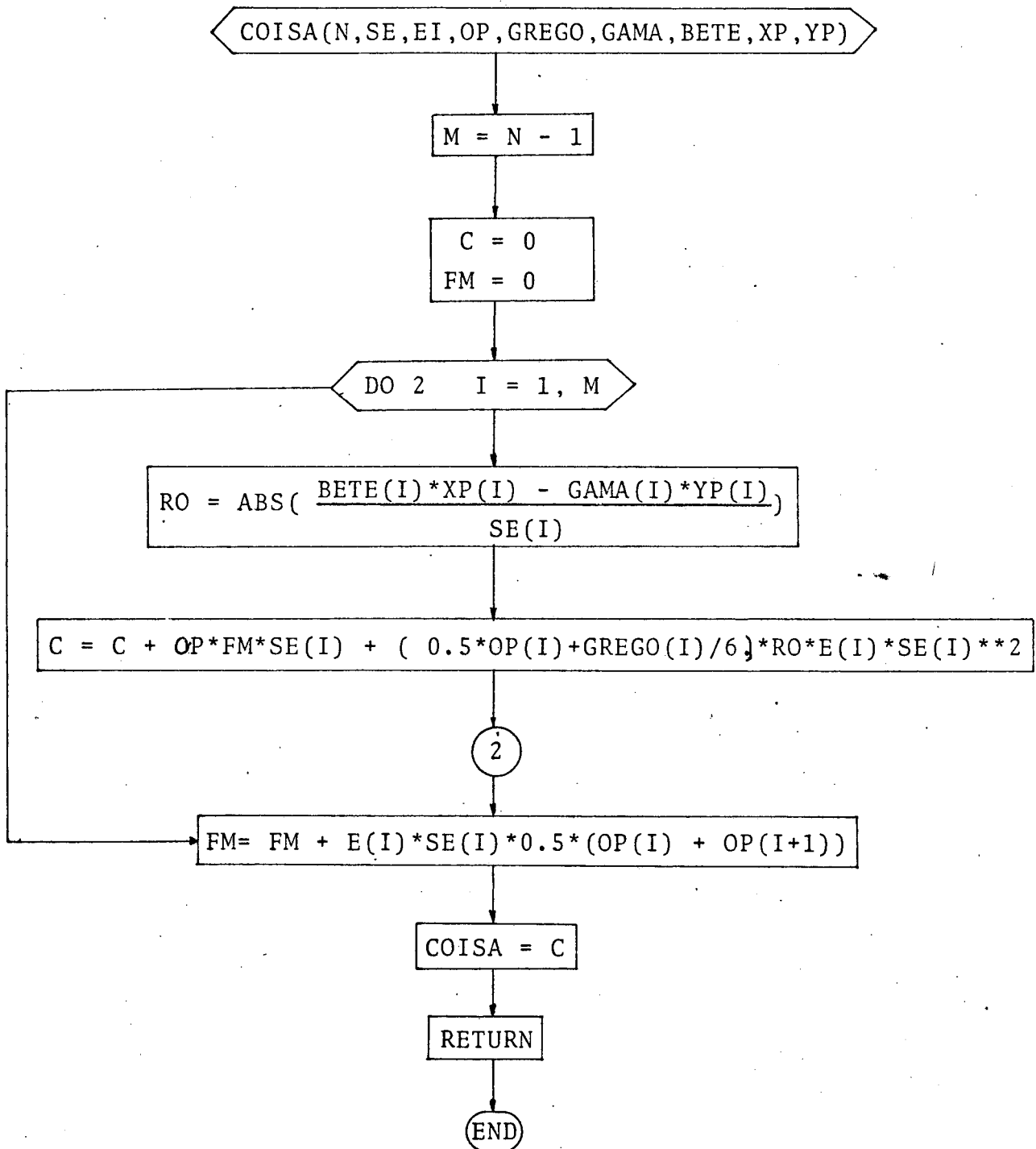
$$\oint r S_y ds, \text{ então:}$$

$$OP = XP = x_i \quad \text{e} \quad GREGO = GAMA = \gamma_i$$

Método - Decomposição da linha em segmentos de reta.

Fluxograma para o cálculo de

$$C = \int M_{\rho} ds$$



## i) Função AREA.

Finalidade - calcula o dobro da área de uma figura plana.

Chamada - AREA(N,X,Y)

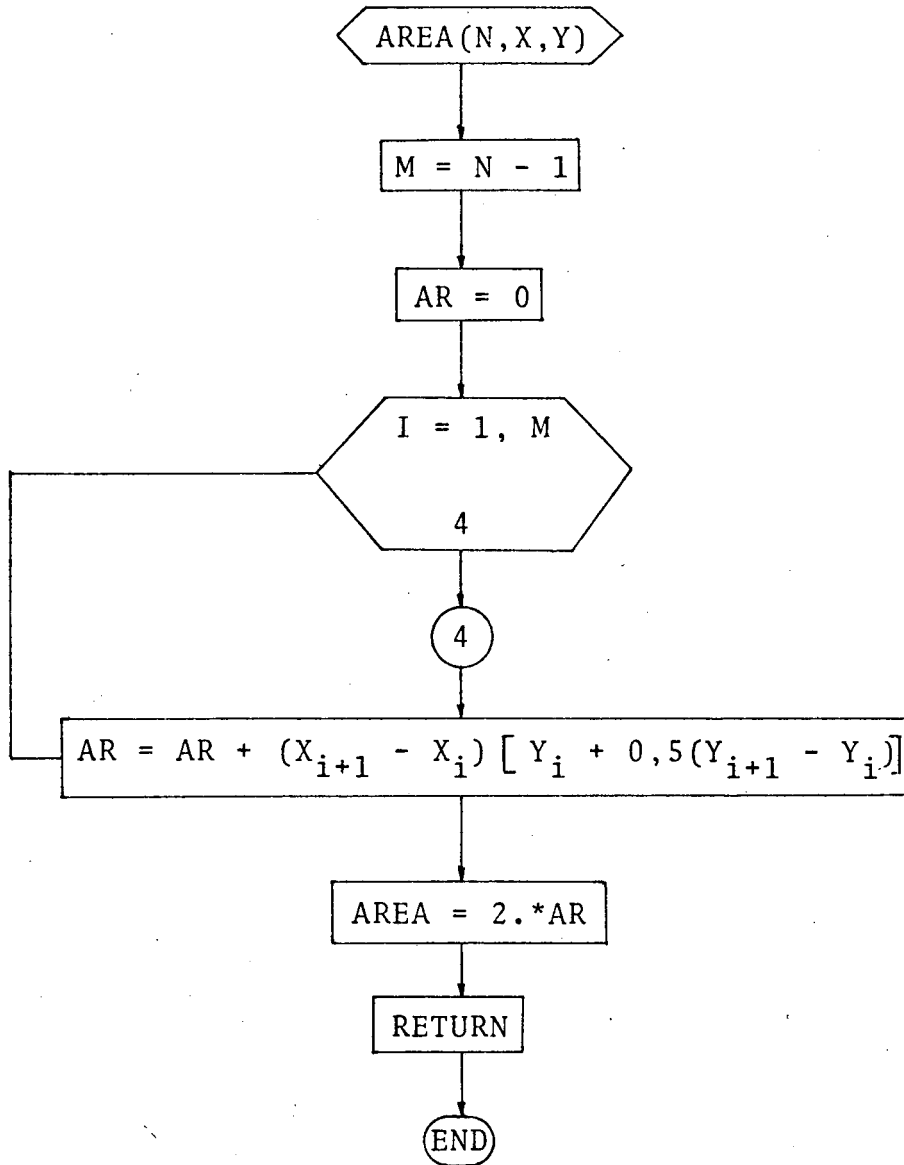
Descrição das variáveis -

N = número de vértices da figura

X, Y = abscissa e ordenada dos vértices da seção

Método - soma e subtração de áreas dos trapézios que compõem a seção.

Fluxograma -



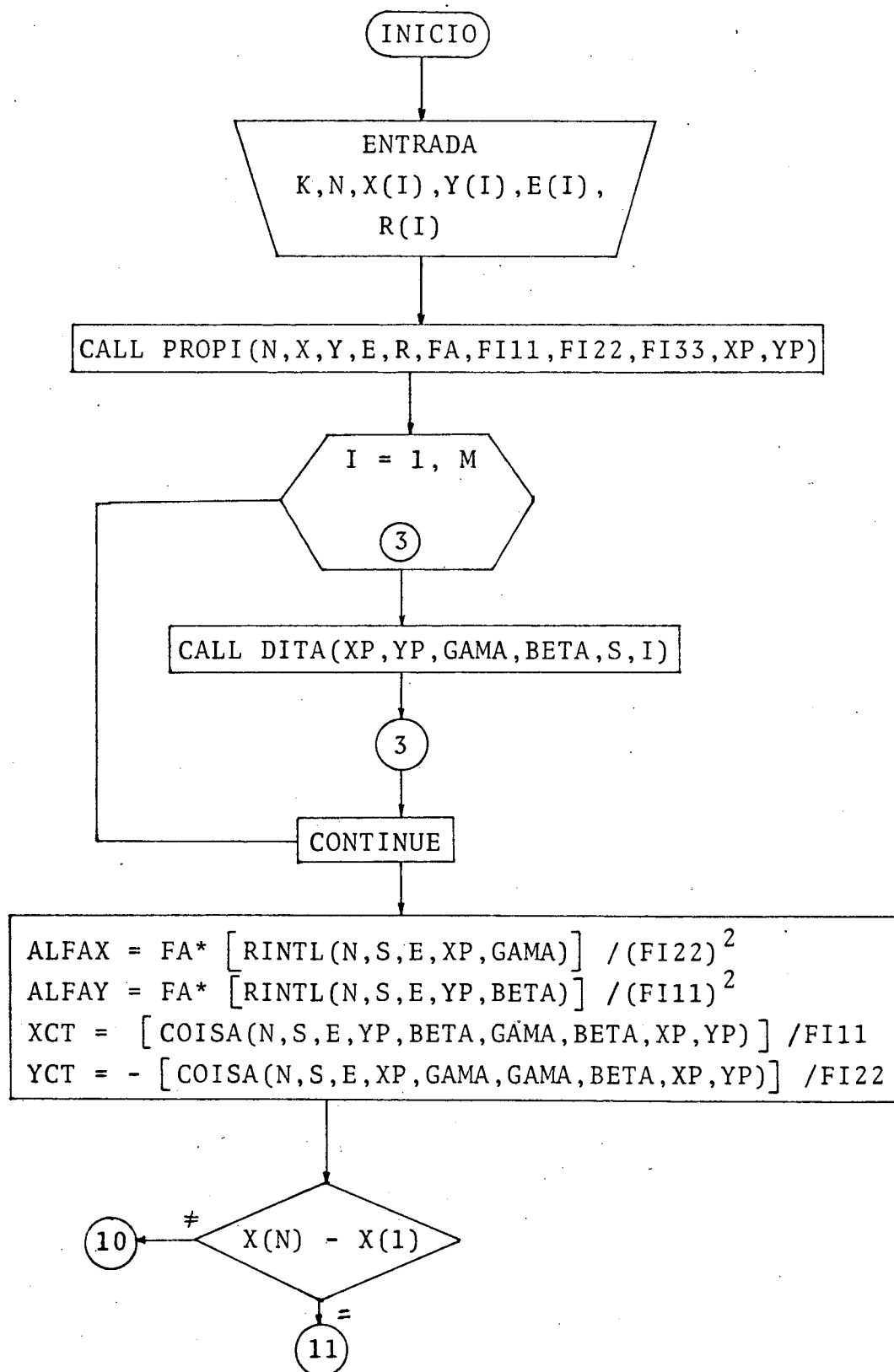
## j) PROGRAMA PRINCIPAL.

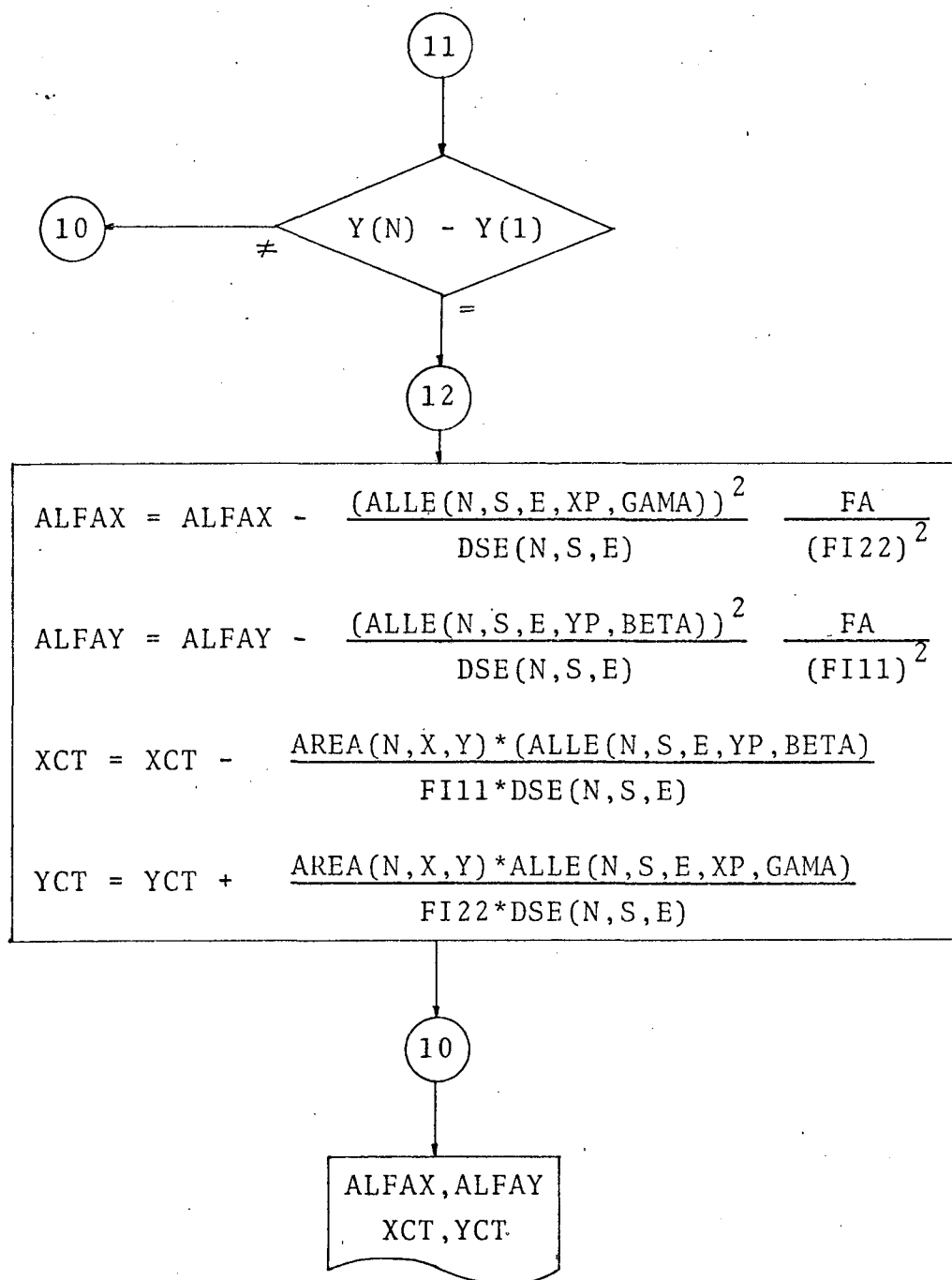
Finalidade - Calcula os valores do coeficiente de cisalhamento e coordenadas do centro de torção de seções de parede fina com poligonal contínua, abertas ou fechadas, constituídas de trechos retos.

Entrada de dados - número total de vértices, coordenadas dos vértices e espessura dos elementos retos.

Método - Aplicação direta das fórmulas (9), (10), (16), (17), (27), (28), (31), (32).

## Fluxograma -





A P Ê N D I C E 3



A P P E N D I C E 3a

## CENTRO TECNOLÓGICO - U F S C

ENSAIO : Flexão Pura-Estático

MONTAGEM:

OBJETIVO : Mód. de Elast. E  
Coef. de Poisson  $\mu$ 

MODELO: 1 (desenho no verso)

GRUPO : Material - Acrílico

TEMPERATURA : 19°C

EQUIPAMENTO:

UMIDADE : 78%

Todas as escalas afe-  
ridas.OUTROS : Tempo de Leitura:  
2 min após o carregamento

Nº	CARGA kgf	Deformação $ \mu m $						OBS. ESCALAS
		D 2						
		LEIT.	DIF.	LEIT.	DIF.	LEIT.	DIF.	
1	0	0					ESC. 30	
2	1	30					ESC. 100	
3	2	63						
4	0	0						
5	2,45	75						
6	3,45	112					ESC. 300	
7	5,45	180						
8	3,45	130						
9	5,45	180						
10	3,45	130						
11	2,45	90						
12	0							
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								



## CENTRO TECNOLÓGICO - U F S C

ENSAIO : Flexão Pura-Estático MONTAGEM:

OBJETIVO : Mód. de Elast. E  
Coef. de Poisson  $\mu$ 

MODELO: 2

GRUPO : Material - Acrílico

TEMPERATURA : 21°C

EQUIPAMENTO:

UMIDADE : 73%

Todas as escalas  
aferidas.OUTROS : Tempo de Leitura:  
2 min após o carregamento

Nº	CARGA kgf	Deformação $\mu\text{m}$						OBS. ESCALA
		D 2						
		LEIT.	DIF.	LEIT.	DIF.	LEIT.	DIF.	
1	0	-80	0					ESC.100
2	1	-50	30					ESC.100
3	0	-80	0					ESC.100
4	2	-17	63					ESC.100
5	0	-80	0					ESC.100
6	2,45	- 4	76					ESC.100
7	3,45	29	109					ESC.100
8	5,45	93	173					ESC.100
9	3,444	46	126					ESC.100
10	2,45	11	91					ESC.100
11	0	-76	4					ESC.100
12	1	-42	28					ESC.100
13	0	-77	3					ESC.100
14	2	-15	65					ESC.100
15	0	-77	3					ESC.100
16	5	82	162					ESC.100
17	0	-70						Logo após
18	0	-75						1 min.
19	0	-76						2 min.







A P Ê N D I C E 3b



## CENTRO TECNOLÓGICO - U F S C

ENSAIO : Tração Simples  
 OBJETIVO : Mód. de Elast. E  
 Coef. Poisson  $\mu$

MONTAGEM:

MODELO: Fig 17

GRUPO : Acrílico

TEMPERATURA : 22°C

UMIDADE : 65%

OUTROS : Tempo entre leit. - 10 m  
 Tempo " carga/leit. - 5m

EQUIPAMENTO: Ponte: BH

Extensômetros: HBM

Tipo: 3/120LA21

K = 1,95  $\Omega = 121,6$ 

Nº	CARGA kgf	Deformação $ \mu m $						OBS.
		1		2				
		LEIT.	DIF.	LEIT.	DIF.	LEIT.	DIF.	
1	0	0	0	0	0			
2	10	34/36		17/18				
3	20	77/78		34/35			Oscila entre os valores indica- dos.	
4	30	121/122		48/49				
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								

A P Ê N D I C E 4

A P Ê N D I C E 4a











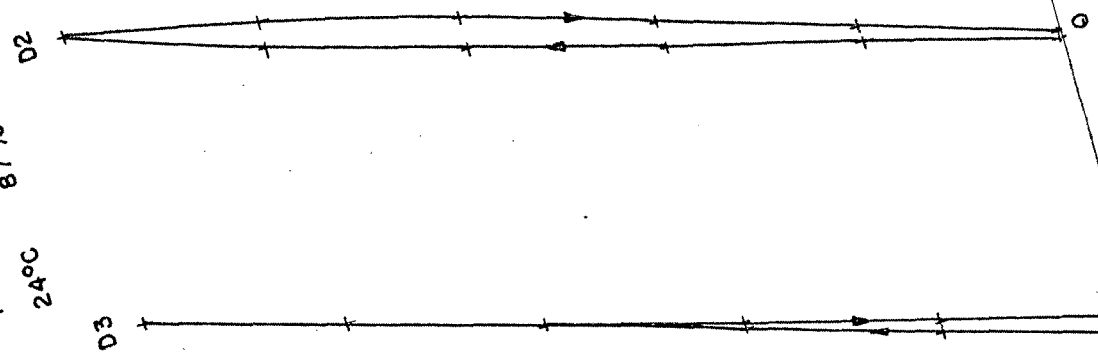




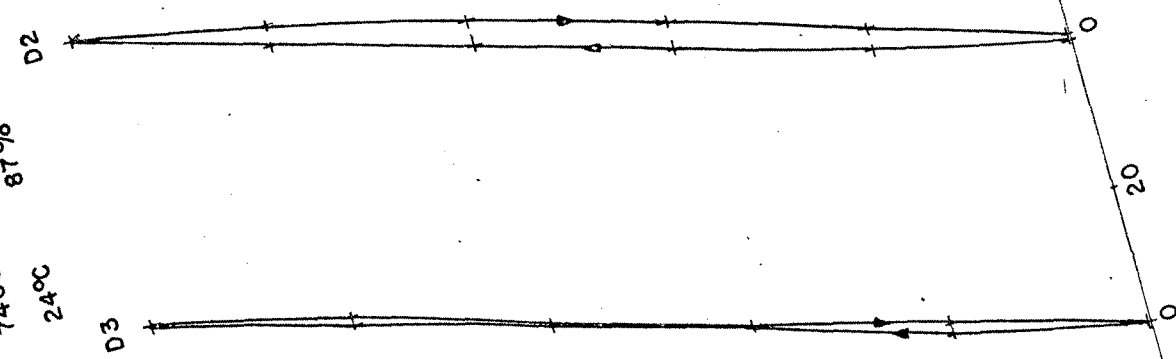




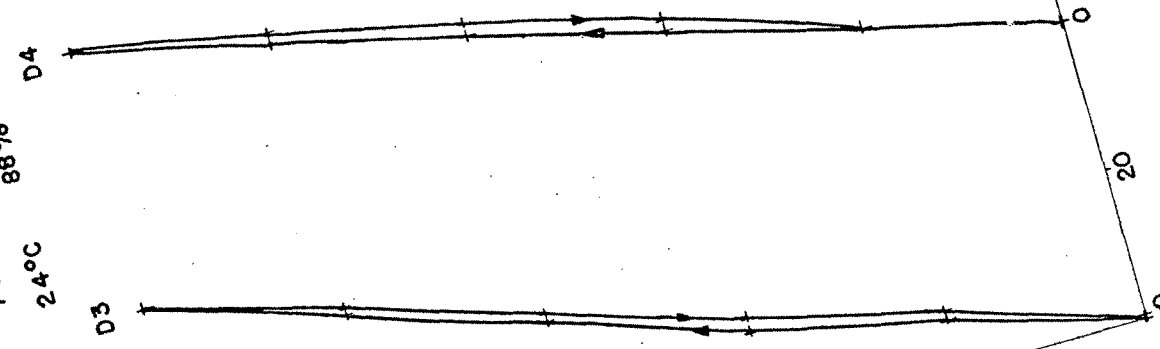
74032009  
87%  
24°C



74032010  
87%  
24°C



74032214  
88%  
24°C



74040110

80%

D4

25.5°C

D3

74040109

80%

D4

25°C

D3

74032912

70%

24°C

D4

D3

g/f1

25

20

15

10

5

20

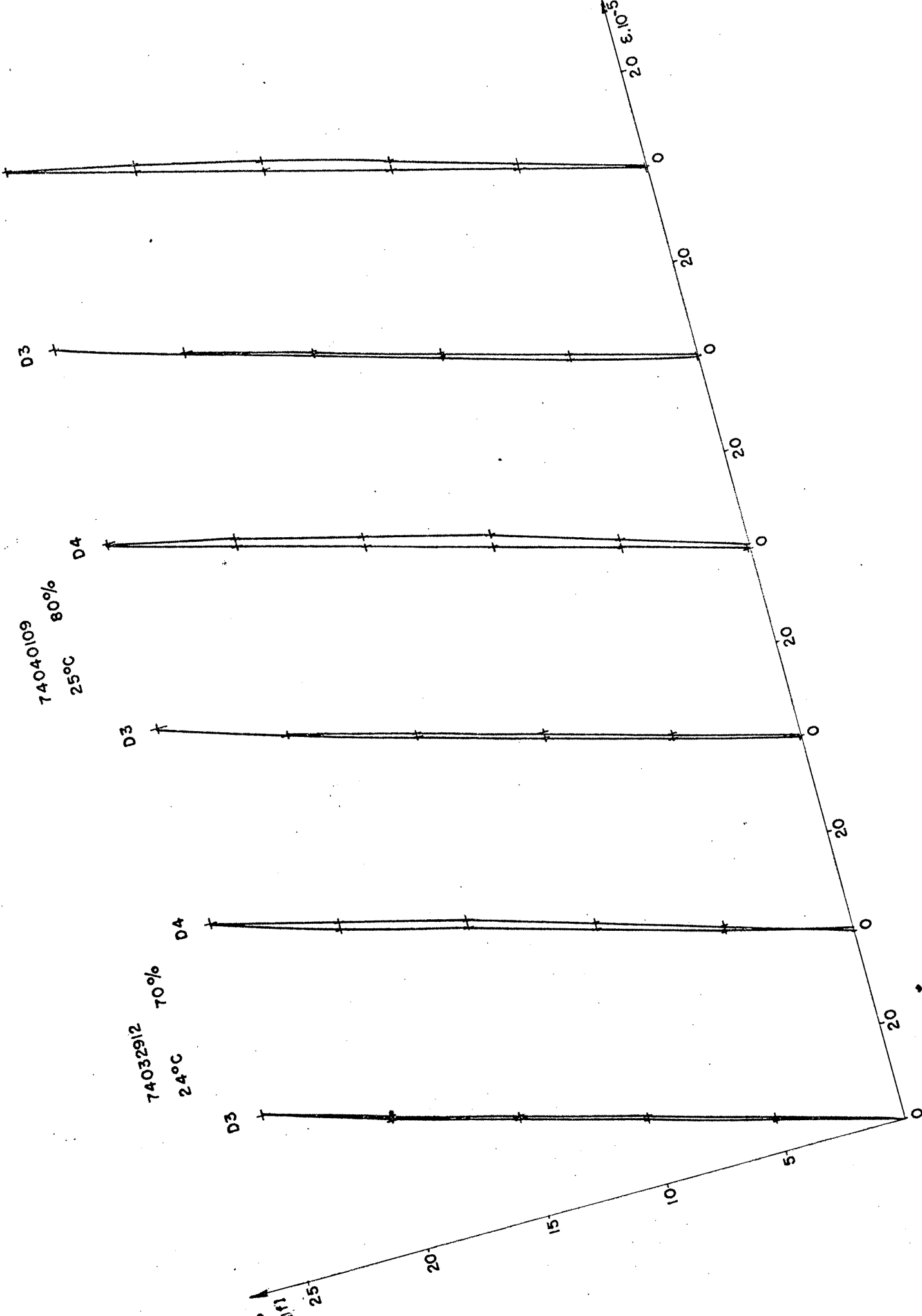
20

20

20

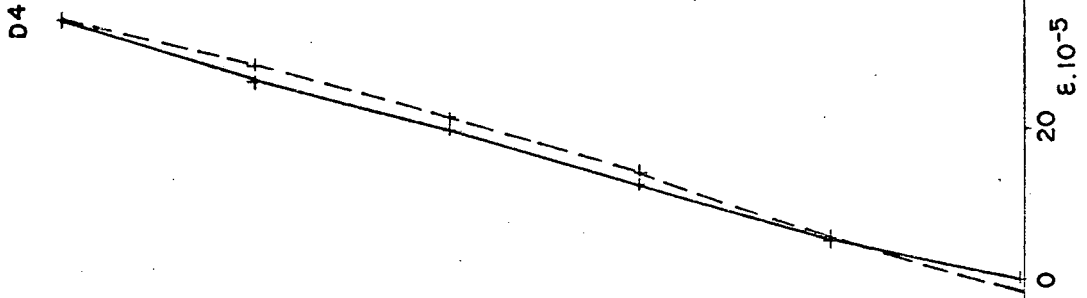
20

20  $\times 10^{-5}$



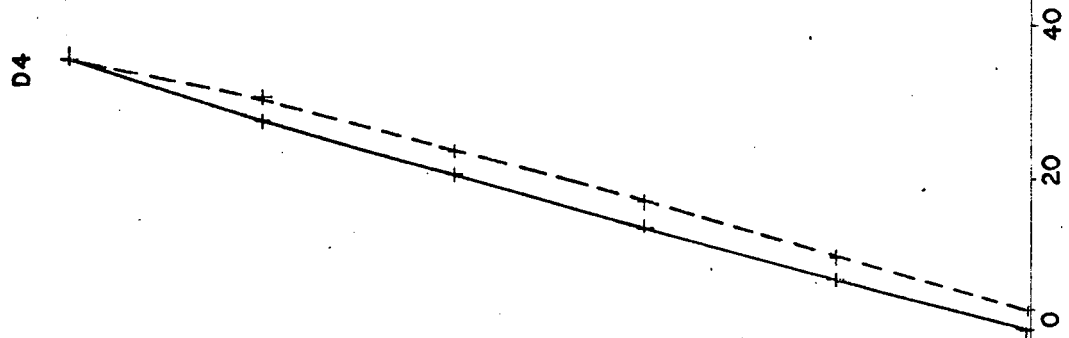
74032911

22°C 75%



74032910

22°C 75%



P  
[Kgf]

25

20

15

10

5

0

D3

D4

D3

D4

0

0

20

40

0

0

20

40

$\epsilon \cdot 10^{-5}$

A P Ê N D I C E 4b









A P Ê N D I C E 4c

## CENTRO TECNOLÓGICO - U F S C

ENSAIO : Flexão Simples

MONTAGEM:

OBJETIVO : Rigidez

MODELO: 2

GRUPO : 3

TEMPERATURA : 20,5°C

EQUIPAMENTO:

UMIDADE : 67%

OUTROS : Morça: 18 kgf.m  
Lateral: 4,5 kgf.m

Nº	CARGA	Deformação   $\mu\text{m}$						OBS.
		D 3		D 4		5 MÉDIA		
		LEIT.	DIF.	LEIT.	DIF.	LEIT.	DIF.	
1	0	-10	0	-10	0		0	
2	10	+7,4	17,4	+4	14		15,7	
3	0	-10	0	-10	0		0	
4								
5	0	-10	0	-10	0		0	
6	10	+7,2	17,2	+4,3	14,3		15,75	MAX.
7	0	-10	0	-10	0		0	
8	10	+7,0	17,0	+4,1	14,1		15,55	MIN.
9	0	-10	0	-10	0		0	
10	10	+7,0	17,0	+4,1	14,1		15,55	MIN.
11	0	-10,5	-0,5	-10	0		-0,25	
12								
13	0	-10	0	-10	0		0	
14	10	+7,2	17,2	+3,9	13,9		15,55	MIN.
15	0	-10	0	-10	0			
16	10	+7,2	17,2	+3,9	13,9		15,55	MIN.
17	0	-10	0	-10	0		0	
18	10	+7,2	17,2	+4,0	14,0		15,6	
19	0	-10	0	-10	0		0	

## BIBLIOGRAFIA

1. AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS.- "standard recommended practice for use of the terms precision and accuracy as applied to measurement of a property of a material". In: *Annual book of ASTM standards*. Philadelphia. 1973. part 27, p. 847 - 64
2. ANTONINI, Edemar S. - *Método da medição da rigidez estática absoluta em máquinas ferramentas*. Tese de mestrado . UFSC, Florianópolis, 1974.
3. BELLUZZI, O. - *Scienza delle costruzioni*.- Bologna. Nielda Zanichelli, 1961, v. 1, p. 246 - 9
4. BOWKER, A.H. & LIEBERMAN, G.J. - *Engineering statistics*. 7a. ed. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1965, p. 558
5. COURBON, J.- *Resistence des materiaux*.- 12a. ed. Paris. Dunod, 1964, v.1, p. 184 - 201
6. COWPER, G.R.- The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics, Trans. of the ASME*, v.33, nº 2, p. 335 - 40, June 1966
7. DEUTSCHER NORMENAUSSCHUSS.- "Bestimmung des Elastizitätsmoduls im Zug-, Druck- und Biegeversuch. DIN 53 457". In: *DIN-Taschenbuch 18. Materialprüfnormen für Kunststoffe, Kautschuk und Gummi*. 3a. ed. Berlin Oc. 1969, p.223 - 7
8. DREYER, W.- Modelluntersuchungen an Werkzeugmaschinenstandern. *Industrie - Anzeiger*, Essen, v.89, nº 23, p.447 - 52, März 1967
9. FLÜGGE, W.- "Bending of beams: deflection caused by shearing forces". In: *Handbook of engineering mechanics*.

New York. Mac Graw-Hill, 1962, cap.35 - 21.

10. GORBATOV, N. & VALENTA, J.- "Static deformations of machine tool structures". In: KOENIGSBERGER; F. & TLUSTY, J. ed. - *Machine tool structures*. 1a. ed. Oxford. Pergamon Press, 1970, v. 1, sec. 3, cap. 1, p. 345 - 48
11. MALTBAEK, J.C.- Moments of aerofoil sections. - *Aircraft Engineering Journal*. (London). p. 351 - 3, Dec. 1961
12. MASON, W.E.Jr. & HERRMANN, L.R.- The shear analysis of general prismatic beams. *Journal of the Eng. Mechanics Division*. ASCE, v. 94, p. 965 - 82, Aug. 1968
13. NEWLIN, J.A. & TRAYER, G.W.- Deflection of beams with special reference to shear deformation. *National Advisory Committee for Aeronautics*. Report 180. 1926
14. OPITZ, H.- *Moderne Productionstechnik stand und tendenzen*. 2a. ed. Essen. Girarded, 1970, p. 181 - 5; 188 - 91; 215 - 6; 220 - 2
15. POPOV, E.P.- *Introduction to mechanics of solids*. New York. Prentice Hall, 1968, p. 484 - 7
16. ROARK, R.J.- *Formulas for stress and strain*. 3a. ed. TOKIO. Int. Student Edition, cap. 8
17. RÜHL, K.H. & SCHWAIGERER, S.- "Festigkeitslere". In: AKADEMISCHEN VEREIN HÜTTE, ed. *Hütte des Ingenieurs Taschenbuch*. 28a. ed. Berlin Oc. Wilhelm Ernst, 1955, v.1, cap. 6, p. 917
18. SILVEIRA, Paulo R.P. - *Metodologia de ensaios em modelos mecânicos*. Tese de Mestrado. UFSC, Florianópolis, 1972

19. TIMOSHENKO, S. - *Resistência dos materiais*. - Trad. 3a. ed. Americana. Rio de Janeiro. Livro Técnico, 1968, v. 1, p. 177 - 82
  
20. TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J.N. - *Theory of elasticity*. 2a. ed. New York. Mac Graw-Hill, 1951, p. 316 - 42