Universidade Aberta

Em torno da noção de conjunto

Carla Alexandra Correia de Sousa Ambrósio

Mestrado em Matemática para Professores

2018

Universidade Aberta

Em torno da noção de conjunto

Carla Alexandra Correia de Sousa Ambrósio

Mestrado em Matemática para Professores

Dissertação orientada pela Professora Doutora Gilda Maria Saraiva Dias Ferreira

2018

Agradecimentos

Ao chegar ao termo deste trabalho reconheço que, ao longo de seis longos meses, nunca estive só. Foram muitos os que me acompanharam e encorajaram a seguir em frente.

Um agradecimento, muito especial, à Sra. Professora Gilda Ferreira não só por ter aceitado orientar-me mas também, pela forma dedicada e pertinente como o realizou. As suas sugestões e observações além de terem-me permitido reflectir e aprender foram também, de algum modo, responsáveis pela qualidade do trabalho que apresento. Professora excepcional fez-me confiar e ir além do que considerava ser possível. Ter trabalhado com alguém que reúne qualidades tão raras hoje em dia foi, para mim, motivo de honra.

À *Università degli Studi della Campania Luigi Vanvitelli*, em particular, à Sra. Professora *Giuseppina Terzo* por me terem gentilmente recebido; à Sra. Professora *Paola D'Aquino* por me ter permitido assistir às aulas de Lógica. É uma experiência que não esquecerei.

Aos meus pais, meus dois melhores amigos, João Victor e Maria Helena que, ao longo de uma vida, sacrificaram-se para que nada me faltasse. Criaram-me, educaram-me e aconselharam-me; quem sou, devo-o a eles. Não há palavras que exprimam a eterna gratidão.

Aos meus amigos, em especial, à Arlete Andrade, aos conselhos, confiança e à muita força que sempre me deu. Nunca esquecerei "*o tão pouco que sei e tanto que tenho para aprender*". À Dª Ângela Ramos que, enquanto estive ausente, cuidou da minha casa mas também pelas suas palavras de força e amizade. À Fernanda *Walters*, colega e amiga, com quem ao longo dos últimos anos tanto aprendi e me apoiou nos momentos mais difíceis. À Carla *Whittle* que sempre acreditou em mim.

Resumo

A inserção de noções básicas da Teoria dos Conjuntos de forma estruturada nos programas curriculares dos Ensinos Básico e Secundário ocorre, pela primeira vez, a partir do movimento da “Matemática Moderna”. Após a 2ª Grande Guerra, num mundo imperado pela tecnologia e economia em grande escala, os ideais deste movimento renovaram a matemática escolar que até aí se havia praticado. Será através da análise dos currículos actuais que constataremos o papel unificador da Teoria dos Conjuntos nas temáticas leccionadas, mas também, pela proposta de exercícios no âmbito do domínio “Lógica e Teoria dos Conjuntos 10” domínio em que esta teoria é abordada de forma mais estruturada.
A Teoria Axiomática dos Conjuntos, eixo renovador da “Matemática Moderna”, assume após o início do século XX e turbulentas fases de afirmação, um papel primordial nos fundamentos da Matemática. É *Zermelo* quem apresenta o primeiro sistema axiomático em que não se verificam os paradoxos da Teoria Ingénua dos Conjuntos. Considerando um subconjunto dos axiomas que constituem uma das actuais formalizações da Teoria Axiomática dos Conjuntos formalizaremos conceitos matemáticos como o de relação, função e número. O que apresentamos, neste trabalho, é um exíguo fragmento do potencial desta teoria na fundamentação e unificação da Matemática.

Palavras-chave: Teoria dos Conjuntos, Currículo de Matemática, Axiomática de *Zermelo*, Matemática Moderna

Abstract

The insertion of basic notions of Set Theory, in a structured way, in the curricula of Basic and Secondary Education occurs, for the first time, from the movement of "Modern Mathematics". After the Second World War, in a world dominated by technology and economy on a large scale, the ideals of this movement renewed the school mathematics that had been practiced until then. It will be through the analysis of the current curricula that we will verify the unifying role of the Set Theory in the topics taught, but also, by the proposal of exercises within the domain "Logic and Set Theory 10" domain in which this theory is approached in a more structured way.
The Axiomatic Set Theory, the renewal axis of "Modern Mathematics", assumes, after the beginning of the twentieth century and turbulent phases of affirmation, a primordial role in the Mathematics foundations. It is Zermelo who presents the first axiomatic system in which the paradoxes of the Naive Set Theory are not verified. Considering a subset of the axioms that constitute one of the current formalizations of the Axiomatic Set Theory we will formalize mathematical concepts such as relation, function and number. What we present, in this work, is a small fragment of the potential of this theory in the Mathematics foundation and unification.

Keywords: Set Theory, Mathematics Curriculum, *Zermelo*'s Axiomatic, Modern Mathematics.

À memória de Cristina Madeira

colega e Amiga

Índice

Introdução

Este trabalho “Em torno da noção de conjunto” que apresentamos procura dar resposta a duas questões em particular: de que forma se integram, mas também, que função desempenham as noções básicas da Teoria dos Conjuntos nos programas curriculares dos Ensinos Básico e Secundário como, a um nível mais estruturado da Teoria Axiomática dos Conjuntos, a intervenção desta teoria axiomática na formalização de conceitos matemáticos essenciais. Acreditamos, clarificadas estas questões, estabelecer a relevância da Teoria dos Conjuntos, não só, como teoria unificadora no domínio da Matemática escolar mas, igualmente, como teoria fundacional, por excelência, na construção da Matemática contemporânea.

No que concerne à primeira parte, capítulos um, dois e três, abordaremos a evolução do movimento internacional conhecido por “Matemática Moderna”, das suas características inovadoras e consequente integração nos currículos escolares, nomeadamente, nos currículos nacionais. Procuraremos estabelecer no programa em vigor, através de um estudo metódico, não só a incidência da Teoria dos Conjuntos, mas também, a sua função estruturadora em diversas aprendizagens. Terminaremos integrando exercícios no âmbito do domínio "Lógica e Teoria dos Conjuntos 10" que possam enriquecer o processo ensino/aprendizagem destas temáticas.

Relativamente à segunda parte, capítulo quatro, debruçar-nos-emos sobre a formalização da Teoria Axiomática dos Conjuntos apresentando, e analisando, alguns dos seus axiomas e resultados teóricos importantes derivados da axiomática apresentada. Fundamentaremos, através de conjuntos específicos, objectos matemáticos tais como, par ordenado, relação binária, função e número. Terminaremos o capítulo fundamentando o conjunto dos números inteiros, não negativos, assim como, os seus elementos de acordo com a Teoria Axiomática dos Conjuntos.

Descrevendo detalhadamente o que se encontra nesta dissertação, no primeiro capítulo procuramos dar a conhecer a conjectura política, social e económica que deu origem ao movimento da Matemática Moderna. Para tal, abordaremos a origem de *Nicolas Bourbaki* e como este movimento revolucionou a Matemática mundial. É a partir destas circunstâncias que a matemática escolar, subdividida por áreas e assente na memorização, passa a ser uma estrutura (quase) organizada e coesa através do método axiomático e de um objecto tão simples, como natural, o conjunto. Finalizando este primeiro capítulo debruçar-nos-emos, não só, acerca do declínio deste movimento e dos factores impeditivos à sua plena consecução, mas também, das profundas marcas deixadas em posteriores currículos escolares.

No segundo capítulo, através das metas do currículo escolar em vigor, evidenciaremos características próprias da Teoria dos Conjuntos. Estabeleceremos a relação, não só de conteúdos, mas também das metodologias nela assentes, i.e., na forma como sustenta, transversalmente, diversas aprendizagens ao longo de doze anos de escolaridade. Qual a sua profundidade e função neste currículo? Dada a extensão do programa, de forma a mantermos um estudo metódico repartimos o capítulo em duas partes; em cada uma, efectuaremos a análise da inclusão desta teoria no programa de cada nível de ensino - Básico e Secundário.

Cientes da importância de "*bons exercícios*", no terceiro capítulo, serão apresentados o que consideramos serem bons exemplos de exercícios no âmbito do domínio "Lógica e Teoria dos Conjuntos 10". A sua concepção encontra-se de acordo com o espírito da lógica, percussora do raciocínio próprio do matemático e das recomendações contidas nos guias dos actuais programas pelo que procuramos

> «(…) realçar os descritores que se relacionam com conteúdos e capacidades actualmente menos trabalhados no Ensino Secundário embora se tenham incluído também outros de modo a dar uma coerência global às abordagens propostas.»
>
> (Caderno de Apoio 10º Ano, p. 1)

Alguns dos exercícios encontram-se como exemplo e, por esse motivo, resolvidos. Outros serão propostos ao aluno de forma que este possa exercitar um raciocínio, não idêntico, similar.

No quarto capítulo debruçar-nos-emos sobre a axiomática da Teoria dos Conjuntos estabelecida por *Zermelo*, e sobre a sua importância na prevenção de paradoxos. Aquando da publicação dos axiomas da Teoria dos Conjuntos a linguagem de primeira ordem não se encontrava desenvolvida como hoje em dia pelo que *Zermelo* apresentou os axiomas numa linguagem próxima da linguagem corrente. Neste trabalho enunciaremos, e analisaremos, alguns axiomas da Teoria Axiomática dos Conjuntos, inicialmente também em linguagem corrente pretendendo-se uma melhor assimilação por parte do leitor e, posteriormente, a sua formalização numa linguagem de primeira ordem. A partir desta axiomática fundamentaremos conceitos matemáticos essenciais tais como: par ordenado, relação, função e número, assim como, integraremos resultados teóricos amplamente conhecidos da Teoria dos Conjuntos. Por último, começaremos por edificar o conjunto dos números inteiros, não negativos, através da Teoria Axiomática dos Conjuntos e introduzimos a axiomática de *Peano* em tal teoria.

Capítulo 1

O Movimento da Matemática Moderna

Nenhum estudo acerca da Matemática Moderna encontra-se verdadeiramente completo sem que se aborde um grupo de matemáticos, na sua maioria franceses, cujo objectivo era restituir a posição privilegiada da matemática francesa da época de *Henri Poincaré*, *Émile Picard* e *Henri Lebesgue*.

> «Os matemáticos mortos na guerra[1] são aqueles que deveriam ter continuado os trabalhos de *Poincaré* ou *Picard*. A minha geração foi duramente atingida pelas consequências dessa interrupção [...] Os professores tinham vinte ou trinta anos mais que nós, sabiam sobretudo as matemáticas da sua juventude e não nos ensinavam as novas teorias...» [2]
>
> (Jean Dieudonné *apud* Gordón, 2011, p. 78)

Descontentes com a situação e, sobretudo, relativamente aos livros usados na altura no ensino da análise matemática nas universidades francesas; o *Cours d'Analyse Mathématique* de *Edouard Goursat* (1858-1936) e o *Cours d'Analyse de l'École polytechnique* de *Camille Jordan* (1838-1922), dois matemáticos franceses, *André Weil* e *Henri Cartan*, com o intuito de os substituir, resolveram compor um tratado que servisse de base ao ensino universitário da análise. A estes dois matemáticos juntaram-se *Claude Chevalley*, *Jean Delsarte*, *Jean Dieudonné* e *René de Possel,* igualmente professores universitários que, numa sequência de reuniões realizadas em Paris, propuseram-se discutir o assunto. Logo

---

[1] Referimo-nos aqui à 1ª Grande Guerra (1914-1918).

[2] «Los matemáticos muertos en la guerra son los que tenían que haber continuado los trabajos de *Poincaré* o de *Picard*. Mi generación se resintió duramente de las consecuencias de esta interrupción [...] Mis profesores tenían veinte o treinta años más que nosotros, conocían sobre todo las matemáticas de su juventud y no nos enseñaban las nuevas teorías…»

na primeira reunião, a 10 de Dezembro de 1934, *Cartan* salientou que os diferentes volumes não deveriam ultrapassar as 1200 páginas. Os primeiros dois volumes das obras de *Goursat* e de *Jordan* contabilizam 1260 páginas evidenciando a complexidade, senão a impossibilidade, de sintetizar os conteúdos necessários à licenciatura de um matemático.
Logo na segunda reunião, a 14 de Janeiro de 1935, *Weil* apresentou uma nova proposta aos elementos presentes na reunião.

> «Devemos fazer um tratado útil para todos: aos pesquisadores (licenciados ou não), aos "descobridores", aos candidatos à educação pública, aos físicos e todos os técnicos.»[3]

Discutiram-se os conteúdos a integrar o tratado e a redacção destes distribuída pelos elementos do grupo. Nasceu *Nicolas Bourbaki*.
No primeiro Congresso de *Bourbaki*, em Julho de 1935, na Universidade de *Clermont* em *Besse-en-Chandesse* lembram a organização das comissões; a obra a realizar era monumental. (Bourbaki, 2ª circular du Congrè de Besse, 1935, p. 1)
O segundo congresso de *Bourbaki* teve lugar, no ano de 1936, em *Chançay*. Neste congresso, conhecido por "*Escorial à Chançay*", discutiram-se aspectos tipográficos e redaccionais dos textos a publicar. Estabeleceram que as demonstrações seriam incluídas na totalidade e com a maior precisão, que a terminologia e as notações seriam uniformes ao longo do trabalho. Estabeleceram, assim, que cada livro teria não só, no início, instruções destinadas ao leitor para uma utilização efectiva do livro (Bourbaki, Mode d'emploi de ce traite, 1936), como também, de um sumário no cabeçalho de cada capítulo (quando útil), exemplos e contra-exemplos, a existência de bastantes figuras e, na margem, a inclusão de curvas na forma de Z prevenindo, com antecedência, o leitor de situações especialmente sensíveis. Cada capítulo terminaria com uma série de problemas propostos ao leitor e referências históricas ou técnicas. (Bourbaki, 1936)
Decidiram, ainda, os princípios para a composição do primeiro livro a publicar – *Théorie des Ensembles*. A selecção da Teoria de Conjuntos como tema do primeiro volume deveu-

[3] «Il faut faire un traite utile à tous : aux chercheurs (patentés ou non), aux « trouveurs », aux candidats aux fonctions de l'enseignement public, aux physiciens et tous techniciens.»

se ao cariz fundacional desta, facto salientado, na reunião de 10 de Dezembro de 1934, por *Delsarte* quando refere que

« (...) é importante, para começar o tratado, fazer uma exposição abstracta, axiomática de certas noções essenciais gerais; (corpo - operação - conjunto - grupo - etc..)»[4]

É de referir que, segundo *Bourbaki* (1977, p. E I.9), a unidade da matemática podia ser efectuada através da Teoria dos Conjuntos, pois

«Na verdade, enquanto no passado poderia ter sido pensado que cada ramo das matemáticas dependia de intuições particulares que lhe proporcionavam novidades e verdades primitivas, o que teria implicado para cada uma a necessidade de uma linguagem formalizada que lhe pertencesse por direito próprio, sabemos hoje que é possível, logicamente falando, derivar toda a matemática actual de uma única fonte, a Teoria dos Conjuntos. Basta-nos, então, explicar os princípios de uma única linguagem formalizada, para indicar como se poderia escrever nessa linguagem a Teoria dos Conjuntos, e então mostrar como os vários ramos da matemática se encaixam nela.»[5]

Como conseguir esta unidade senão através do estudo sistemático das relações presentes entre distintas teorias matemáticas? Para *Bourbaki*,

«O que o método axiomático define como objectivo essencial é exactamente o que o formalismo lógico por si só não pode dar, a profunda inteligibilidade das matemáticas. Assim como o método experimental começa a partir da crença *a priori* na permanência das leis naturais, o método axiomático tem a sua pedra angular na convicção de que não só são as matemáticas o desenvolvimento de uma concatenação não aleatória de silogismos, mas também não é uma colecção de truques, mais ou menos "astutos", conseguidos por combinações afortunadas, nas quais a astúcia puramente técnica ganha o dia. Onde o observador superficial vê apenas duas, ou várias, teorias bastante distintas, conferindo um outro "suporte inesperado" através da intervenção de um matemático genial, o método axiomático ensina-nos a procurar as razões profundas para tal descoberta, encontrar as ideias comuns dessas teorias, enterra-

[4] «(…) il importe, pour commencer le traité, de faire un exposé abstrait, axiomatique, de certaines notions essentielles générales; (corps – opération – ensemble – groupe – etc..)»

[5] «En effet, alors qu'autrefois o a pu croire que chaque branche des mathématiques dépendait d'intuitions particulières que lui fournissaient notions et vérités premières, ce qui eût entraîné pour chacune la nécessité d'une langage formalisé qui lui appartînt en propre, on sait aujourd'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique actuelle d'une source unique, la Théorie des Ensembles. Il nous suffira donc d'exposer les principes d'un langage formalisé unique, d'indiquer comment on pourrait rédiger en ce langage la Théorie des Ensembles, puis de faire voir comment s'insèrent dans celle-ci les diverses branches des mathématiques, au fur et à mesure que notre attention se portera sur elles.»

das sob a acumulação de detalhes adequadamente pertencentes a cada uma delas, fazendo-as avançar e colocá-las sob a própria luz.» [6]

(Bourbaki, The Architecture of Mathematics, 1950, p. 223)

O método axiomático é, ainda segundo *Chevalley*, um

«(…) método de economia do pensamento, na medida em que permite condensar num único vários raciocínios diferentes. (…) Mas o método axiomático também é um método de descoberta e de progresso.» [7]

(Livre I. Théorie des ensembles. Introduction)

Não podemos deixar também de referenciar que, para *Bourbaki*, o conceito de estrutura matemática é fundamental. Afinal,

«Graças a uma estrutura, temos o direito de dizer que elementos ou partes do conjunto considerado numa teoria têm certas relações entre eles ou possuem certas propriedades: as palavras ''partes'', ''relações‘‘, "propriedades" também não são susceptíveis de definição e também são conceitos básicos; De acordo com nossos princípios, devemos indicar os axiomas a que essas noções satisfazem: esses axiomas seriam os da Teoria dos Conjuntos e de qualquer teoria matemática. Diante das dificuldades, até hoje empobrecidas, que se opõem à formulação de tais axiomas, atribuiremos provisoriamente a estas palavras o significado que têm em linguagem vulgar e daremos as seguintes regras sobre seu trabalho e como se mover de um para o outro.» [8]

(Ensembles - Décisions Escoriales, 1936)

---

[6] «What the axiomatic method sets as its essential aim is exactly that which logical formalism by itself cannot supply, namely the profound intelligibility of mathematics. Just as the experimental method starts from the *a priori* belief in the permanence of natural laws, so the axiomatic method has its cornerstone in the conviction that, not only is mathematics not a randomly developing concatenation of syllogisms, but neither is it a collection of more or less “astute” tricks, arrived at by lucky combinations, in which purely technical cleverness wins the day. Where the superficial observer sees only two, or several, quite distinct theories, lending one another “unexpected support” through the intervention of a mathematician of genius, the axiomatic method teaches us to look for the deep-lying reasons for such a discovery, to find the common ideas of these theories, buried under the accumulation of details properly belonging to each of them, to bring these ideas forward and to put them in their proper light.»

[7] «(…) méthode d’économie de pensée, en ceci qu’elle permet de condenser en un seul plusieurs raisonnements différents. (…) Mais la méthode axiomatique est aussi méthode de découverte et de progrès.»

[8] «Grâce à une structure, on a le droit de dire que des éléments ou des parties de l’ensemble considéré dans une théorie ont entre eux certaines relations ou possèdent certaines propriétés : les mots, ‘’parties’’, ‘’relations’’, ‘’propriétés’’ ne sont pas susceptibles de définition non plus, et constituent également des notions premières; Conformément à nos principes, nous devrions énoncer les axiomes auxquels satisfont ces notions : ces axiomes seraient ceux de la théorie des ensembles et de tout théorie mathématique. Devant les difficultés, jusqu’à ce jour in surmontées, qui s’opposent à la formulation de tels axiomes, nous attribuerons provisoirement à ces mots la signification qu’ils ont dans le langage vulgaire, et nous allons donner dans ce qui suit des règles générales sur leur emploi et la manière de passer de l’un à l’autre.»

Em 1939 arrebentou a 2ª Grande Guerra terminando apenas em 1945. Ao fim de seis anos de guerra a Europa encontrava-se arrasada; cidades, vias de comunicação e fábricas, de ambos os lados do conflito, destruídas pelos bombardeamentos. O custo em vidas humanas foi tremendo; estimam-se trinta milhões de feridos e mais de cinquenta milhões perderam a vida. No entanto, não pelas melhores razões, é no período de guerra que se verificam os maiores avanços na tecnologia podendo as populações futuramente usufruir desta. Podemos hoje utilizar, por exemplo, o micro ondas, alimentos enlatados, antibióticos ou o computador fruto do desenvolvimento tecnológico deste negro período. Mas a maior e a mais temível de todas foi, sem dúvida, a energia nuclear.

Segundo *Kurepa* (1955, p. 109),

> «O papel desempenhado pela ciência e, em particular, das matemáticas nos diferentes domínios da vida, numa dada época, pode ser considerado como um dos elementos característicos do grau de civilização e cultura dessa época. À medida que o desenvolvimento da humanidade progride, a importância das matemáticas e, consequentemente, a dos matemáticos - num amplo sentido - torna-se cada vez maior; as novas possibilidades, as novas aplicações das matemáticas aparecem. O extraordinário progresso realizado na exploração da natureza inerte e viva, do infinitamente pequeno ao infinitamente grande, das descobertas teóricas e técnicas, com as suas imensas aplicações, as novas perspectivas abertas às ciências humanas e sociais, não pararam e continuaram a enriquecer e aumentar consideravelmente o domínio da matemática pura e da matemática aplicada (entre as extensões mais recentes: biométrica, econometria, cibernética...), bem como as possibilidades de trabalho e acção do matemático.»[9]

Quanto ao progresso tecnológico e científico, após a 2ª Grande Guerra, este surgiu a uma velocidade nunca antes testemunhada levantando-se a questão fundamental quanto à preparação de cidadãos que o acompanhassem pois

[9] «Le rôle que jouent les sciences et, en particulier, les mathématiques dans les différents domaines de la vie, à une époque donné, peut être considéré comme d'un des éléments caractéristiques du degré de civilisation et de culture de cette époque. Au fur et à mesure du développement de l´humanité, l'importance des mathématiques et, par conséquent, celle du mathématicien – au sens large, devient de plus en plus grande ; de nouvelles possibilités, de nouvelles applications des mathématiques apparaissent. Les extraordinaires progrès réalisés dans l'exploration de la nature inerte et vivant, de l'infiniment petit à l'infiniment grand, les découvertes théoriques et techniques, avec leurs applications immenses, les nouvelles perspectives ouvertes dans les sciences humaines et sociales, n'ont cessé et ne cessent d'enrichir et d'accroître considérablement le domaine des mathématiques pures et des mathématiques appliquées (citons, parmi les extensions les plus récentes : la biométrie, l'économétrie, la cybernétique…) ainsi que les possibilités de travail et d'action du mathématicien.»

> «(…) de um modo geral, a sociedade de hoje exige cada vez mais de todos os cidadãos conhecerem as noções elementares de matemáticas e apreciar a importância do ponto de vista numérico.» [10]
>
> (Pauli, 1979, p. 4)

Verificava-se uma séria dificuldade em encontrar mão-de-obra especializada nas áreas emergentes da ciência.

> «Mais e mais pesquisadores e engenheiros são necessários, todos os quais devem ter sólidos conhecimentos matemáticos. As novas aplicações das matemáticas na indústria e outros ramos da actividade económica exigem mais matemáticos e novos conhecimentos.» [11]
>
> (Pauli, 1979, p. 4)

Com o objectivo de definir um currículo para o ensino da matemática, a Organização Europeia de Cooperação Económica (OECE) organizou, em 1959, o seminário de *Royaumont* em França. Participaram neste seminário matemáticos, educadores e professores desta disciplina de vinte países não se encontrando ainda, entre estes, Portugal. Estiveram, também, presentes *Gustave Choquet*, *Jean Dieudonné* e *Lucienne Felix*, da França, *Howard Fehr*, *E. G. Beagle* e *Marshall Stone*, dos Estados Unidos da América, país que se encontrava em disputa tecnológica com a Rússia sobretudo no que respeita à corrida espacial.

> «Terá chegado o momento de organizar sistematicamente uma troca de pontos de vista entre os promotores de novos métodos de ensino da Matemática e as pessoas encarregadas de elaborar os programas [de forma a que] essa troca incida, não só sobre as modificações de fundo nos programas mas também nas técnicas pedagógicas e os problemas psicológicos que o ensino da Matemática coloca.»
>
> (OECE, 1961a, pp. 11-12)

---

[10] «(…) d'une manière générale, la société actuelle exige de plus en plus de tous les citoyens la connaissance de notions élémentaires de mathématiques et l'appréciation de l'importun e du point de vue numérique.»

[11] «On demande de plus en plus de chercheurs et d'ingénieurs, qui tous doivent avoir de solides connaissances mathématiques. Les nouvelles applications des mathématiques dans l'industrie et dans les autres branches de l'activité économique font que l'on demande davantage de mathématiciens el qu'on leur demande de posséder des connaissances nouvelles.»

Após duas semanas de discussão emergiram, deste seminário, resoluções a divulgar por todos os países interessados na sua implementação. Apresentamos, a seguir, as que consideramos ser mais relevantes.

1. O ensino da geometria e da álgebra dadas nas escolas deve ser urgentemente adaptado aos avanços da matemática moderna.
   a) Esta adaptação requer a eliminação no ensino secundário tradicional de uma grande parte (desactualizada ou sem valor técnico) da geometria plana e espacial, álgebra e trigonometria. Além disso, é essencial que essas matérias sejam ensinadas numa sequência lógica, com mais cuidado e rigor.
   b) Essa adaptação também requer, o mais cedo possível, o ensino das relações que unem geometria e álgebra - particularmente linear e álgebra vectorial.
   c) O ensino da geometria dedutiva nas escolas secundárias deve basear-se numa experiência anterior satisfatória de geometria intuitiva ou física.[12]
2. O cálculo das probabilidades elementares deve ser considerado como um ramo da matemática que pode ser ensinado nas escolas secundárias.
   a) A indução estatística deve ser considerada como um ramo da matemática aplicada, que é crucial nos processos de tomada de decisão de acordo com o espírito do "método científico" e de que muitos sectores das ciências físicas e do comportamento humano aumentam o uso. Deve-se admitir, além disso, que o raciocínio estatístico está a ganhar cada vez mais importância no campo dos assuntos públicos.
   b) Uma educação elementar apropriada do cálculo da probabilidade e estatística deve fazer parte do novo currículo do ensino secundário.
   c) Cursos preparatórios particularmente nesses assuntos devem ser incluídos nos currículos das faculdades de formação de professores e outras instituições.[13]

[12] 1- L'enseignement de la géométrie et de l'algèbre donné dans les écoles doit être adapté de toute urgence aux progrès foudroyants des mathématiques modernes. a) Cette adaptation exige qu'on élimine de l'enseignement secondaire traditionnel une partie importante (périmée ou sans valeur technique) de la géométrie plane et dans l'espace, de l'algèbre et de la trigonométrie. De plus, il est indispensable que ces matières soient enseignées dans leur enchaînement logique, plus à fond et avec plus de rigueur. b) Cette adaptation exige également un enseignement aussi précoce que possible des relations qui unissent la géométrie et l'algèbre- particulièrement l'algèbre linéaire et vectorielle. c) L'enseignement de la géométrie déductive dans les écoles secondaires doit être basé sur une expérience préalable satisfaisante de la géométrie intuitive ou physique.

[13] II - Le calcul des probabilités élémentaires doit être considéré comme une branche des mathématiques susceptible d'être enseignée dans les écoles secondaires. a) L'induction statistique doit être considérée comme une branche des mathématiques appliquées, qui entre pour une part capitale dans les processus de décision conformes à l'esprit de la «méthode scientifique» et dont de très nombreux secteurs des sciences physiques et des sciences du comportement humain font un usage accru. Il faut admettre en outre que le raisonnement statistique acquiert une importance croissante dans le domaine des affaires publiques. b) Un

3. Uma reforma da educação matemática secundária não será possível se a profissão não atrair pessoas competentes ou caso não consiga mantê-las. Para este fim, também é importante que o professor de matemática seja um membro importante da sociedade, apreciado e respeitado. A sessão concluiu que o prestígio do professor precisava ser melhorado; deve ser assegurado:
   a) um tratamento adequado,
   b) condições de vida conducentes ao seu desenvolvimento pessoal,
   c) a possibilidade de subir para um posto mais alto,
   d) padrões satisfatórios de trabalho (horas e número de estudantes).[14]

(OECE, 1961a, pp. 127-129)

Com o objectivo de elaborar um programa de matemática, a partir das resoluções de *Royaumont,* reuniu-se cerca de um ano mais tarde, em *Dubrovnik*, uma dúzia de especialistas sob a liderança de *Stone* com o objectivo de estabelecer um "Currículo de Matemática Moderna para o Ensino Secundário".

> «Os textos, as experiências e o programa definitivo deverão, inevitavelmente, ser adaptados aos métodos tradicionais dos países que empreenderem a modernização dos seus programas.»
>
> (OECE, 1961b, p. 7)

De facto, este documento foi a base das reformas efectuadas, desde 1961, nos programas suíços em que se introduziram a Teoria dos Conjuntos, a Álgebra, a Análise, o cálculo das Probabilidades e a Estatística. No entanto, pouco foi realizado no que concerne ao ensino da Geometria.

O primeiro balanço relativo ao desenvolvimento do programa de matemática, nos diferentes países, efectuou-se no seminário de Atenas, em 1963. Encontrava-se presente, neste seminário, uma comissão portuguesa liderada pelo Professor José Sebastião e Silva

---

enseignement élémentaire approprié du calcul des probabilités et de la statistique doit faire partie du nouveau programme des études secondaires. c) Des cours préparatoires particuliers sur ces matières devront figurer aux programmes des écoles normales et autres institutions formant les professeurs.

[14] III - Une réforme de l'enseignement secondaire des mathématiques ne sera pas possible, si la profession n'attire pas des personnes compétentes ou si elle ne réussit pas à les garder. A cette fin, il importe aussi que le professeur de mathématiques soit un membre important de la société, apprécié et respecté. La session a conclu que le prestige du professeur devait être amélioré; il faut lui assurer: a) un traitement convenable, b) des conditions de vie favorables à son développement personnel, c) la possibilité de s'élever à un rang supérieur, d) des normes de travail satisfaisantes (horaires et effectifs des élèves)

e constituída, ainda, por António Augusto Lopes e Jaime Leote. Através do relatório remetido à OCDE percebemos que a posição de Portugal, relativamente à modernização do ensino da matemática, era favorável. No entanto, Sebastião e Silva não deixa de referir a sua crença de

> «(…) que essas inovações devem ser executadas com extrema cautela e com o melhor tacto pedagógico, se não quisermos criar nos estudantes uma repulsa invencível para com a matemática ou levar à aquisição de um formalismo vazio, completamente esterilizante. De facto, a moderna orientação abstracta da matemática é uma espada de dois gumes, de acordo com o uso que dela se fizer: pode tornar o ensino muito mais eficaz; mas, mal aplicado, também pode levar a resultados um tanto opostos.»[15]
>
> (Silva, 1962, p. 25)

Neste seminário debateram-se ainda outros aspectos relacionados com a consecução do programa que, de forma similar a anteriores seminários, emanaram sob a forma de recomendações. Apresentamos as que consideramos ser mais relevantes:

1. "Os participantes da conferência recomendam que sejam realizadas pesquisas importantes sobre as possibilidades oferecidas pelos filmes, televisão e instrução programada no ensino da matemática."[16]
2. "Os participantes enfatizaram a importância das aulas de matemática experimental para facilitar a adopção de novos métodos e programas. Dada a rapidez da evolução, recomendam a utilização permanente dessas classes piloto."[17]
3. "É óbvio que a formação de um futuro professor de matemática deve ter dois aspectos: pedagógico e matemático. A formação matemática dos futuros professores deve fornecer-lhes níveis muito mais elevados de conhecimento sobre o ensino que terão de dar. Isso implica no domínio dos princípios fundamentais da matemática moderna, bem como em algumas das suas aplicações. A formação pedagógica deve estar intimamente relacionada com a matemática que o professor vai ensinar, e incluir elementos da psicologia das crianças que ele terá como alunos. Esta dupla formação

[15] «Nous pensons que ces innovations doivent être exécutées avec une extrême prudence et le plus fin tact pédagogique, si l'on ne veut pas créer chez les élèves une répulsion invincible pour les mathématiques ou les conduire à l'acquisition d'un formalisme vide, tout à fait stérilisant. En effet, la modern orientation abstraite des mathématiques est une épée à deux tranchants, d'après l'usage que l'on en fait : elle peut rendre l'enseignement beaucoup plus efficace ; mais, mal appliqué, elle peut aussi conduire á des résultats à peu opposés.»

[16] «Les participants à la Conférence recommandent qu'on entreprenne d'importantes recherches sur les possibilités offertes par les films, la télévision et l'instruction programmée en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques.»

[17] «Les participants soulignent l'importance qu'ont les classes expérimentales de mathématiques pour faciliter l'adoption des nouvelles méthodes et des nouveaux programmes. Etant donné la rapidité de l'évolution, ils recommandent qu'on fasse un emploi permanent de ces classes pilotes.»

deve ser tal que o futuro professor seja capaz de continuar a sua própria educação e se adaptar às mudanças que inevitavelmente encontrará durante sua vida profissional."[18]

4. "A melhoria e modernização da educação matemática não podem ser alcançadas sem dedicar um esforço considerável à criação e desenvolvimento de meios destinados ao aperfeiçoamento do conhecimento dos professores em exercício. Isso pode ser feito de várias formas, inclusive por meio de cursos por correspondência, mas os participantes enfatizaram a necessidade de os professores regressarem periodicamente a uma universidade ou centro de ensino superior de nível semelhante."[19]
5. "Dada a importância cultural e prática da Matemática e os usos cada vez maiores desta, todos os alunos devem receber uma formação matemática suficiente durante o ensino secundário. Neste contexto, conjuntos, relações e funções desempenham um papel fundamental no estudo de todos os ramos da matemática. É essencial reconhecer para aqueles que se especializam em ciência a importância das seguintes questões: Espaços vectoriais, Cálculo Diferencial e Integral, Probabilidades e Estatística. Os outros alunos devem também receber uma formação matemática. O seu curso deve ser autenticamente matemático e incluir os fundamentos e seus aplicativos. Eles devem entender as Probabilidades e a Estatística."[20]

[18] «Il est évident que la formation d'un futur professeur de mathématiques devrait avoir deux aspects : pédagogique et mathématique. La formation mathématique des futurs professeurs devrait leur assurer des connaissances très supérieurs au niveau de l'enseignement qu'ils auront à donner. Ceci implique une maitrise des principes fondamentaux des mathématiques modernes, ainsi que d'un certain nombre de leurs applications. La formation pédagogique devrait être étroitement liée aux mathématiques que le professeur enseignera, et comprendre des éléments de la psychologie des enfants qu'il aura pour élèves. Cette double formation devrait être telle que le futur professeur soit capable de poursuivre da propre éducation et de s'adapter aux changements qu'il ne manquera pas de rencontrer au cours de sa vie professionnelle.»

[19] «L'amélioration et la modernisation de l'enseignement des mathématiques ne peuvent se faire sans consacrer un effort considérable à créer et développer les moyens permettant de perfectionner les connaissances des professeurs en fonction. On peut y parvenir de diverses manières, et notamment en organisant des cours par correspondance, mais les participants soulignent qu'il est indispensable que les professeurs retournent périodiquement dans une université ou un centre d'enseignement supérieur de niveau analogue.»

[20] «Etant donné l'importance culturelle et pratique des mathématiques et les utilisations sans cesse croissantes de cette discipline, tous les élèves devraient recevoir une formation mathématique suffisante au cours de leurs études secondaires. Dans ce contexte, les ensembles, les relations et les fonctions jouent un rôle fondamental pour l´étude de toutes les branches des mathématiques. Il est indispensable de reconnaître pour ceux qui se spécialisent dans les sciences l'importance des questions suivantes : espaces vectoriels, calcul différentiel et intégral, probabilités et statistique. Les autres élèves devraient aussi recevoir une soldée formation mathématique. Leur cours devrait être authentiquement mathématiques et comprendre aussi bien les principes fondamentaux que leurs applications. Ils devraient comprendre les probabilités et la statistique.»

6. "Os participantes da conferência reconhecem que o uso de calculadoras se tornará cada vez mais importante como um elemento intrínseco da civilização. Isso deve ser levado em consideração nos programas de matemática da escola secundária."[21]
7. "Os exames devem ser modificados de acordo com os objectivos de uma educação matemática moderna. Os exames versados sob um programa fixo e suportado por uma prova escrita tendem a constituir um forte obstáculo à melhoria do ensino escolar."[22]
8. "O especialista em matemática aplicada constrói modelos matemáticos a partir de situações retiradas da realidade. Ele utiliza os modelos para fazer inferências e desenvolve uma estrutura matemática apropriada e confronta depois os resultados e a situação original. A matemática pura segue uma linha idêntica. Recomenda-se que a educação matemática adopte uma abordagem semelhante: os estudantes devem ser confrontados com situações e solicitados a pensar sobre isso; eles iriam primeiro intuitivamente e depois elaborariam noções matemáticas a partir dessas situações."[23]
9. "É importante que os alunos compreendam que a matemática é útil para a sociedade. Um modo simples de o fazer é ensinar periodicamente noções matemáticas através das aplicações que delas se fazem em numerosos e variados campos e colocar ainda a prática da matemática no contexto dessas aplicações. Segue-se, entre outras coisas, que o professor de matemática deve cooperar estreitamente com os professores de outras disciplinas aplicando a matemática."[24]

(Fehr & Revuz, 1964, pp. 245-249)

A resolução é clara; a unificação dos diversos ramos da matemática aplicando as estruturas algébricas, a Teoria dos Conjuntos e o método axiomático, valorizando o rigor e a linguagem matemática e profundas transformações pedagógicas nos métodos de ensino à

---

[21] «Les participants à la Conférence reconnaissent que l'utilisation de calculatrices prendra de plus en plus d'importance en tant qu'élément intrinsèque de civilisation. Il conviendra d'en tenir compte dans les programmes de mathématiques des écoles secondaires.»

[22] «Les examens devraient être modifiés conformément aux objectifs d'un enseignement mathématique modern. Des examens portant sur un programme fixe et comportant un examen écrit de type normalisé risquent fort de constituer un obstacle à l'amélioration de l'enseignement scolaire.»

[23] «Le spécialiste des mathématiques appliquées construit des modèles mathématiques à partir de situations tirées de la réalité. Il utilise les modèles pour en tirer des déductions et élabore une structure mathématique appropriée puis il confronte les résultats et la situation originale. Les mathématiques pures suivent une ligne identique. Il est recommandés que l'enseignement des mathématiques adopte une démarche semblable : les étudiants devraient être mis en face de situations et invités à y réfléchir ; ils procéderaient d'abord intuitivement puis élaboreraient des notions mathématiques à partir de ces situations.»

[24] «Il importe de faire comprendre aux élevés que les mathématiques sont utiles à la société. L'un des moyens simples l'y parvenir consiste à justifier de temps à autre l'enseignement des notions mathématiques par les applications que l'on en fait dans un grand nombre de domaines variés et á placer aussi la pratique des mathématiques dans le contexte de ces applications. Il s'ensuit, entre autres, que le professeur de mathématiques doit coopérer étroitement avec les professeurs d'autres disciplines utilisant les mathématiques.»

disciplina. O objectivo era aproximar a matemática escolar à matemática recentemente desenvolvida pelos matemáticos da época reduzindo a discrepância entre os ensinos não superior e superior. Como podemos perceber, os ideais defendidos, pertencem a *Nicolas Bourbaki* no entanto, segundo *Dieudonné* (1982),

> «Jamais *Bourbaki* teve alguma opinião sobre as possibilidades ou a conveniência de implementar os conceitos escritos neste livro a um nível inferior, e certamente não nas escolas primárias ou secundárias. As pessoas, ao propor tais aberrações, têm muitas vezes, (…), um pobre conhecimento da matemática moderna.» [25]
>
> (Alan Bishop, 1996, p. 52)

Relacionado com os novos métodos de ensino da matemática encontrava-se *Jean Piaget* que refere (1955)

> «(…) se o edifício da matemática repousa sobre "estruturas", que correspondem, além disso, às estruturas da inteligência, está na organização progressiva dessas estruturas operacionais que se devem basear na didáctica matemática. Agora, psicologicamente, as operações derivam de acções que, se interiorizando, coordenam em estruturas. Portanto, é inútil imaginar que o recurso inicial a acções comprometa o rigor subsequente e favoreça o empirismo. Há empirismo quando o educador substitui a demonstração matemática por uma experiência física com uma simples leitura dos resultados obtidos. Mas, quando a experiência é usada como uma oportunidade para a coordenação de acções e abstracção, ela está preocupada com essas acções, e não com o objecto, a experiência prepara o espírito dedutivo, em vez de a frustrar. Se todo conhecimento, na criança, supõe uma participação da experiência a se realizar, essa afirmação psicológica não justifica em nada o empirismo, porque existem dois tipos de experiências: a experiência física que conduz a uma abstracção de propriedades derivadas do próprio objecto e da experiência lógico-matemático com abstracção a partir das acções ou operações realizadas sobre o objecto e não a partir do objecto como tal. Assim, o recurso à experiência e à acção, e de um modo geral denominada pedagogia activa entre os processos de iniciação matemática, não compromete de forma alguma o rigor dedutivo subsequente, mas pelo contrário, prepara-a fornecendo bases reais e não simplesmente verbais.» [26]

[25] «Never has *Bourbaki* given any opinions about the possibilities or the desirability of implementing the concepts written in this book at a lower level, and certainly not at primary or secondary schools. People, proposing such aberrations have often, (…), a poor knowledge of modern mathematics. »

[26] «En réalité, si l'édifice des mathématiques repose sur des «structures», qui correspondent par ailleurs aux structures de l'intelligence, d'est sur l'organisation progressive de ces structures opératoires qu'il faut baser la didactique mathématique. Or, psychologiquement, les opérations dérivent d'actions qui, en s'intériorisant, se coordonnent en structures. Il est donc vain d'imaginer que le recours initial aux actions compromette la rigueur ultérieure et favorise l'empirisme. Il y a empirisme lorsque l'éducateur substitue à la démonstration mathématique une expérience physique avec simple lecture des résultats obtenus. Mais lorsque l'expérience sert d'occasion à la coordination des actions et que l'abstraction porte sur ces actions elles-mêmes et non pas sur l'objet, l'expérience prépare l'esprit déductif au lieu de le contrecarrer. Si tout connaissance, chez l'enfant, suppose une participation de l'expérience pour se constituer, cette constatation psychologique ne justifie en rien l'empirisme, car il existe donc deux sortes d'expériences : l'expérience physique conduisant à une abstraction de propriétés tirées de l'objet lui-même et l'expérience logico-mathématique avec abstraction à partir des actions ou opérations effectuées sur l'objet et non pas à partir de l'objet comme tel. Ainsi le recours à l'expérience et à l'action, et de façon générale la pédagogie dite

Esta restruturação do ensino da matemática ficou conhecida por "Matemática Moderna", designação infeliz segundo alguns, mas que derivou num movimento internacional.

O Movimento da Matemática Moderna em Portugal

Enquanto na Europa e América do Norte se discutiam questões relacionadas com a preparação de indivíduos a integrar uma sociedade tecnologicamente avançada e especializada, em Portugal, o Decreto-Lei nº 40694 de 31 de Dezembro de 1956 dita a reforma do ensino primário, alargando a escolaridade obrigatória até à quarta classe a alunos do sexo masculino sendo, apenas, alargada ao sexo feminino em 1960. Nesta altura, Portugal apresentava ainda um elevado nível de analfabetismo e o alargamento da escolaridade obrigatória revelou carências de infra-estruturas e de professores. Assim, em 1959, Portugal em conjunto com Espanha, Itália, Jugoslávia, Grécia e Turquia, recebe assistência da OECE através do "Projecto Regional do Mediterrâneo".

Devido à fragilidade em que se encontrava o ensino no nosso país, sobretudo da matemática, foi nomeada, em Julho de 1963, pelo ministro Galvão Teles a "Comissão de Estudos para a Modernização do Ensino da Matemática no 3º Ciclo de Ciências dos Liceus Portugueses" sendo esta presidida pelo Professor José Sebastião e Silva. A comissão propôs-se actuar de acordo com o determinado nos congressos internacionais e segundo quatro etapas:

1. Formar professores.
2. Experimentar num grupo muito restrito de escolas.
3. Afinar os textos após as primeiras experiências; alargar progressivamente o número de escolas e de professores formados.
4. Apresentar programas de Matemática Moderna na TV para todo o público.

---

active parmi les procédés d'initiation mathématique ne compromettent en rien la rigueur déductive ultérieure mais la préparent au contraire en lui fournissant des bases réelles et non pas simplement verbales.»

No ano lectivo 1963/64 funcionaram três turmas-piloto, do sexto ano, distribuídas pelos liceus normais de Lisboa, Porto e Coimbra e regidas por elementos da comissão instruídos pelo próprio Sebastião e Silva.
Os textos utilizados nestas aulas eram da lavra do Professor sendo da responsabilidade de diferentes elementos da comissão adequá-los ao nível etário, ao número de aulas e à proposta de exemplos e de exercícios.

Segundo Lima (1997)

> «os textos, que foram em fascículos, surpreenderam toda a gente, porque, para além dos conhecimentos científicos, revelavam excepcionais dotes pedagógicos, grande cultura humanística e sobretudo uma segurança de perspectivas e de modernidade só possível a quem está na crista da Ciência como investigador»

Os textos deram origem ao manual "Compêndio de Matemática" constituído por três volumes. O primeiro volume destinava-se ao sexto ano dos liceus, actual, décimo ano de escolaridade; os segundo e terceiro volumes destinavam-se ao sétimo ano dos liceus, actual, decimo primeiro ano de escolaridade. A acompanhar o manual, Sebastião e Silva concebeu o "Guia do Compêndio de Matemática" constituído, também este, por três volumes verificando-se ser uma mais-valia na actualização dos professores e preparação das suas aulas. A consecução do programa dependia, sobretudo, do conhecimento que os professores tinham do recente programa, da actualidade dos seus conteúdos e, não esquecendo, das novas metodologias de ensino. Assim, ao iniciar a leitura do guia, o professor, encontrava as "normas gerais" que o auxiliariam na tarefa que lhe tinha sido atribuída. A primeira advertência é clara; a modernização do ensino da matemática não passava apenas pelo programa mas também pelo método de ensino. O método expositivo, dito tradicional, devia ser substituído pelo método heurístico, conduzindo o aluno à descoberta do que se pretende que ele aprenda, à resolução de problemas por ele próprio sendo a comunicação fundamental neste processo. O terceiro ponto destas normas, apresentadas por Sebastião e Silva, alerta para que a definição de um conceito parta, quando possível, de um exemplo concreto e interessante. Beneficiando da ligação da Matemática com as restantes ciências Sebastião e Silva fornece, no segundo volume do seu manual, exemplos reais deste vínculo. Não podemos deixar de comprovar a dimensão do compromisso e a erudição do Professor quando refere, por exemplo, a transformação da energia eléctrica em calor, a desintegração radioactiva ou quando refere o cálculo numérico de integrais através de "um bom computador". Em todos os casos, o aluno deve ser encaminhado para o rigor da linguagem pelo que a introdução da lógica matemática no início do ano constituía uma mais-valia.

No ano lectivo 1964/65 o número de turmas-piloto sobe para 11 beneficiando estas, pela gratificante experiência do ano lectivo transacto, de acertos.

Em Agosto de 1964 abre o 1º Curso de Oeiras com o objectivo de actualizar os professores e em Setembro, do ano seguinte, surge o 2º Curso de actualização, também este em Oeiras, sendo estes administrados por elementos da comissão.

Só a partir de 1967 começou a preparação dos novos programas de matemática do sexto e sétimos anos. Podemos certificar, pelos quadros a seguir, que os conteúdos relacionados com a Geometria têm uma menor incidência, que em anos anteriores, pelo facto de terem sido substituídos, no sexto ano, por outros relacionados com a Teoria dos Conjuntos, Lógica Matemática, Álgebras de *Boole*, Relações Binárias, Programação Linear e Estruturas Algébricas.

No sétimo ano observamos a introdução de conteúdos relacionados com o cálculo Logarítmico, Diferencial e Integral podendo, estes, usufruir das potencialidades da régua de cálculo. Neste ano de escolaridades também passaram a ser leccionados os conteúdos da Probabilidade e Estatística, Cálculo Vectorial e as Transformações Geométricas.

<table>
<tr><td colspan="3">Programa do 6º ano
6 Horas/semana</td></tr>
<tr><td>1º Período</td><td colspan="2">Lógica Material

Lógica Formal
Equações e inequações inteiras ou fraccionárias.
Sistemas de equações. Equações irracionais

Lógica de Conjuntos

Relações Binárias – Classes de Equivalência
Definições por abstracção (forma, direcção, comprimento, cardinal)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2º Período</td><td colspan="2">Regime de bifurcação</td></tr>
<tr><td>3 h/semana</td><td>3 h/semana</td></tr>
<tr><td>Números Naturais
Como cardinais de conjuntos. Operações. Relações de ordem. Cardinal do produto cartesiano
Cálculo Combinatório</td><td>Geometria Analítica Plana
Domínios Planos. Estudo geral da recta

Programação Linear
(Introdução – 2 variáveis)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Funções de uma variável ou Aplicações</td></tr>
<tr><td>3º Período</td><td colspan="2">Operações Binárias - Grupóides

Grupos
Isomorfismos. Logaritmos

Anéis e Corpos
Anéis de polinómios. Binómio de Newton. Equações em corpos. Decomposição em factores.
Corpo complexo – Representação geométrica. Álgebras de Boole.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Programa do 7º ano
6 Horas/semana</td></tr>
<tr><td colspan="3">Regime de bifurcação
Todo o ano</td></tr>
<tr><td></td><td>3 h/semana</td><td>3 h/semana</td></tr>
<tr><td>1º Período</td><td>Cálculo numérico aproximado
Régua de cálculo

Teoria dos limites de sucessões
Limites de funções de variável real
Algébricas, circulares, exponenciais e logarít-micas</td><td>Trigonometria
Resolução de triângulos rectângulos. Ângulo generalizado. Lei dos senos. Radiano. Funções circulares como funções reais de variável real. Inversão das funções circulares.</td></tr>
<tr><td>2º Período</td><td>Funções contínuas

Derivadas
Diferenciais – Aplicações às ciências

Máximos, mínimos, concavidades

Cónicas – Estudo breve

Derivadas das funções circulares directas e inversas</td><td>Cálculo vectorial
Comprimento, direcção, sentido, vector. Espaço vectorial. Isometrias. Homotetia. Referenciais na forma vectorial no plano ou no espaço. Produto interno. Fórmulas trigonométricas.

Números complexos na forma trigono-métrica</td></tr>
<tr><td>3º Período</td><td>Introdução ao cálculo integral
Primitivação. Noção intuitiva de integral. Aplicações às ciências. Fórmula de Barrow. Áreas</td><td>Transformações geométricas
Grupos de Transformações

Cálculo das probabilidades
Método de indução matemática</td></tr>
</table>

No que concerne à quarta fase da implementação da modernização do ensino, em 1964, é criado o Instituto de Meios Audiovisuais de Ensino (IMAVE). Compete, a esta dependência

a) Promover a realização de programas de radiofusão e televisão escolares, e superintender na sua recepção e aproveitamento;
b) Promover a realização de outros programas de radiodifusão e televisão de carácter educativo, e superintender também na sua recepção e aproveitamento;
c) Promover a aquisição, produção, troca e distribuição de material de cinema, projecção fixa, fotografia e gravação sonora para fins didácticos e culturais, e orientar a sua utilização;
d) Colaborar com o Centro de Estudos de Pedagogia Audiovisual, do Instituto de Alta Cultura, nos estudos e experiências aconselháveis para se conseguir o conveniente desempenho das atribuições indicadas nas alíneas anteriores.

(Decreto-Lei nº 46.135, 1964, artº2)

Através do Decreto-Lei nº 46.136 de 31 de Dezembro de 1964 é criada, na dependência do IMAVE, uma telescola, destinada à realização de cursos de radiodifusão e televisão escolares de forma a escolarizar a população residente em zonas isoladas do país e diminuir o número de alunos em escolas sobrelotadas. A partir de 1964 passou a ser transmitido, semanalmente através da Rádio Televisão Portuguesa (RTP) e em horário nobre, o programa Televisão Educativa - Matemática Moderna essencialmente direccionado a professores e estagiários como forma de actualizar os seus conhecimentos.

O currículo do ensino primário português também modernizou-se, de acordo com o Movimento da Matemática Moderna, mas foi apenas no ano de 1974 que tal se verificou.

Na brochura oficial "Ensino Primário – Programas para o ano lectivo de 1974 – 1975" podemos verificar que dois programas distintos, A e B, podem ser leccionados. O programa A resulta de uma reestruturação do programa anteriormente leccionado; o programa B encontra-se

«(…) mais na linha das Matemáticas modernas.»

(Secretaria de Estado da Orientação Pedagógica, 1974)

No entanto, apesar da existência de dois programas paralelos (totalmente distintos) é apelado a todos os professores, que leccionam a 1ª classe deste ensino, a aderência ao programa B e que a comuniquem, com brevidade à Direcção-Geral do Ensino Básico. Esperando que para este programa seja necessária

> «(…) uma preparação mais cuidada da parte dos professores»
>
> (Secretaria de Estado da Orientação Pedagógica, 1974)

podemos encontrar, integrado nesta brochura, sugestões destinadas aos professores.
À semelhança do Ensino Primário, em 1974, entram em vigor novos programas para o Ensino Liceal. Podemos constatar, a partir da brochura oficial "Ensino Liceal – Programas para o ano lectivo de 1974 – 1975", a existência de dois programas para o ensino complementar; o primeiro, embora menos extenso e com conteúdos mais simplificados, delineado a partir do programa aplicado às turmas-piloto e, portanto, evidenciando características da "Matemática Moderna". O segundo, denominado de "Matemática Clássica", em que inicialmente é apresentada a seguinte nota prévia:

> «O programa de Matemática Clássica para o Curso Complementar, que agora se estabelece é muito mais simples [do que o anterior]: reduz-se não só a matéria, como o número de demonstrações a exigir; a arrumação dos assuntos é diferente procurando-se caminhar do mais simples para o mais complexo. Os professores, que regerem turmas do 2º ano em 74-75, deverão ter presente que ao aluno só será exigível a cobertura total do programa agora estabelecido. Com as profundas simplificações introduzidas isto é possível pois foi já tomado em conta o fraco rendimento do último período escolar em 73-74.»

A modernização do ensino da matemática em Portugal, mesmo não obtendo os resultados inicialmente previstos, foi notória. Foram encomendados manuais e guias elaborados por Sebastião e Silva e o próprio foi convidado a ministrar cursos e conferências no estrangeiro. Aquando da modernização do ensino da matemática nos países árabes foi solicitada, pela *United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization* **(**UNESCO), a colaboração do Professor Sebastião e Silva.

O declínio do Movimento da Matemática Moderna

Na década de 70 o fervor da Matemática Moderna, apesar do grande suporte político e financeiro que usufruiu, começa a esmorecer.

O sinal mais evidente desta insatisfação verificou-se aquando da publicação do livro "*Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*" de *Morris Kline*. Para começar, *Kline* considerava a adopção do termo "Moderna" como

> «(…) pura propaganda. Tradicional conota a antiguidade, inadequação, esterilidade e é um termo de censura. Moderno conota o actualizado, relevante e vital. Os termos moderno e novo foram usados pelo que valiam. Os oradores centraram-se no facto de que o currículo tradicional pouco oferecia do que não era conhecido antes de 1700. É claro que, como vimos, os termos moderno e novo dificilmente se justificam, já que os novos currículos oferecem uma nova abordagem à matemática tradicional.»[27]

Posteriormente, *Kline* acaba por mencionar a introdução de um conteúdo inovador no currículo, a Teoria dos Conjuntos, não deixando no entanto de tecer duras críticas ao modo como esta

> «(…) é agora ensinada a partir do jardim-de-infância, como se os alunos passassem fome, mental pelo menos, se não tivessem essa dieta. Um conjunto, como qualquer texto matemático moderno nos dirá, não é mais do que uma classe ou colecção de objectos. Um conjunto de maçãs, um conjunto de latas de lixo, um conjunto de letras do alfabeto inglês e o conjunto de números naturais são exemplos. O conceito e a palavra "conjunto" são simplesmente suficientes.»[28]

Justificando que

> « (…) a noção de conjunto é usada para falar de um conjunto de soluções para as raízes de equações, para definir figuras geométricas e para definir relações e funções em termos de conjuntos de pares ordenados de números. A unificação através de conjuntos, pelo menos a

[27] «(…) pure propaganda. Traditional connotes antiquity, inadequacy, sterility, and is a term of censure. Modern connotes the up-to-date, relevant, and vital. The terms modern and new were used for all they were worth. Speaker's capitalized on the fact that the traditional curriculum offered little that was not known before 1700. Of course, as we have seen, the terms modern and new were hardly justified since in the main the new curricula offer a new approach to traditional mathematics. »

[28] «This subject is now taught from the kindergarten up, as though students would starve, mentally at least, if they did not have this diet. A set, as any modern mathematics text will tell us, is no more than a class or collection of objects. A set of apples, a set of garbage cans, a set of letters of the English alphabet, and the set of natural numbers are examples. The concept and the word set are simple enough.»

> nível elementar, é limitada a uma terminologia especial e a uma reformulação questionável de definições de conceitos previamente aceites e aceitáveis.»[29]

Certo é, que os problemas anteriormente verificados não se solucionaram havendo relatos do seu agravamento. Os programas adquirem rigor na linguagem e estrutura mas perdem na transmissão das ideias. *Kline* apresenta-nos o caso de um aluno que revela conhecimentos de propriedades e abstracção sem, no entanto, resolver a simples questão:

> «Um pai perguntou ao seu filho de oito anos: "quanto é 5 + 3?"
> A resposta que ele recebeu foi que 5 + 3 = 3 + 5 pela lei comutativa.
> Espantado, ele reformulou a pergunta: "Mas quantas maçãs são 5 maçãs e 3 maçãs?"
> A criança não percebeu muito bem que "e" significa mais e então ele perguntou:
> "Você quer dizer 5 maçãs mais 3 maçãs?"
> O pai apressou-se a dizer sim e esperou ansioso.
> "Oh", disse a criança, "não importa se estás a falar de maçãs, pêras ou livros; 5 + 3 = 3 + 5 em todos os casos."»[30]
>
> (Kline, 1973)

Apesar da restruturação do ensino encontrar suporte nas modernas visões da psicologia das estruturas cognitivas desenvolvida por *Piaget*, segundo este, na prática poderia ser prejudicial porque

> «Embora seja "moderno" o conteúdo ensinado, a maneira de apresentar permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimento, mesmo que se tente adoptar (e bastante precocemente, do ponto de vista da maneira de raciocinar do aluno) uma forma axiomática (…). Uma coisa, porém é inventar na acção e assim aplicar estas operações, outra é tomar consciência das mesmas para delas extrair um conhecimento reflexivo e, sobretudo teórico, de tal forma que nem os alunos nem os professores cheguem a suspeitar de que o conteúdo do ensino ministrado pudesse se apoiar em qualquer tipo de estruturas naturais.»
>
> (Piaget J. , 1984, pp. 16-17)

---

[29] « (…) the notion of set is used to speak of a solution set for the roots of equations, to define geometrical figures, and to define relation and function in terms of sets of ordered pairs of numbers. The unification through sets, at least on the elementary level, is limited to special terminology and a questionable refashioning of previously accepted and acceptable definitions of concepts. »

[30] «One parent asked his eight-year-old child, "How much is 5 + 3?"
The answer he received was that 5 + 3 = 3 + 5 by the commutative law. Flabbergasted, he re-phrased the question: "But how many apples are 5 apples and 3 apples?" The child didn't quite understand that "and" means plus and so he asked, "Do you mean 5 apples plus 3 apples?" The parent hastened to say yes and waited expectantly. "Oh," said the child, "it doesn't matter whether you are talking about apples, pears or books; $5 + 3 = 3 + 5$ in every case."»

A Matemática Moderna trouxe inegáveis benefícios com a renovação programática e metodológica no ensino, no entanto, o objectivo primordial de melhorar as aprendizagens não foi alcançado e, de modo similar, aquando do Movimento da Matemática Moderna, procuraram-se outras soluções que se adequassem à transformação social e das necessidades decorrentes da nova época. Não queremos com isto afirmar que a mudança ocorreu porque o programa era mau; este simplesmente deixou de cumprir a sua função quanto à preparação de cidadãos aptos à nova realidade. A mudança também não é imediata; são necessários estudos de carácter científico, pedagógico e social até que um programa seja admitido a nível nacional.

Portugal, acompanhando a tendência, no início da década de setenta elaborou novos programas, sem qualquer interferência de Sebastião e Silva, embora procurando manter a essência da "Matemática Moderna".

Capítulo 2

A Teoria dos Conjuntos no actual currículo

Os planos de organização do ensino aprendizagem, vulgarmente designados de programas, têm sofrido profundas alterações ao longo do tempo.

Com a instituição do ensino oficial, a necessidade em aferir as práticas lectivas quer por disciplina, quer por ano de escolaridade, concretizou-se através da listagem das matérias que os professores deveriam leccionar. Com a evolução das ciências sociais e da importância dada à pedagogia, sobretudo no desenvolvimento das aprendizagens, verificaram-se profundas transformações nestas listas programáticas. Os programas, ao longo dos tempos, passaram a integrar não só o inventário das matérias, específicas a cada disciplina, mas também um conjunto de objectivos, sugestões e observações que o professor deveria considerar aquando da sua instrução.

Apresentamos, a modo de exemplo, um excerto do documento "Programas do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário", do 1º ano, de 1968,

> «**1.** As noções intuitivas de conjunto e de elemento de um conjunto, com base em exemplos familiares, mais ou menos relacionadas com os interesses e a actividade lúdica do aluno. Conjuntos construídos a partir dos seus elementos e representados pela indicação destes entre chavetas (evitar o uso de letras isoladas para designar objectos, sejam eles conjuntos ou elementos).
> Exemplos de conjuntos definidos por meio de propriedades num conjunto de referência (universo lógico). Conjuntos singulares. Conjunto vazio, introduzido a partir de propriedades ir-

> realizáveis no conjunto de referência. Designação de tais conjuntos pela notação das chavetas.
> Eventualmente, em coordenação com o estudo da Língua Portuguesa: Substantivos próprios, substantivos comuns e substantivos colectivos; relacionação destas categorias gramaticais com as categorias lógicas de elemento e de conjunto. O papel dos adjectivos na definição de conjuntos por meio de propriedades. (A coordenação com o estudo da Língua Portuguesa, em casos como este, poderá também ser feita mais tarde, em revisões).»

Devido à crescente complexidade deste documento, actualmente, denominamo-lo de currículo escolar. O actual currículo de matemática é constituído por um conjunto de documentos que almeja a modernidade não só no âmbito científico, como também relativamente às metodologias a aplicar no ensino da disciplina. O documento estabelece as finalidades da matemática, os objectivos a atingir e determina os conteúdos a leccionar por domínio, subdivididos estes por descritores, podendo-se observar

> "(…) uma estrutura curricular sequencial, que se justifica atendendo a que a aquisição de certos conhecimentos e o desenvolvimento de certas capacidades depende de outros a adquirir e a desenvolver previamente. Promove-se desta forma uma aprendizagem progressiva, na qual se caminha etapa a etapa, respeitando a estrutura própria de uma disciplina cumulativa como a Matemática."
>
> (Programa de Matemática - Ensino Básico, p. 1)

Assim, nos primeiros anos a aprendizagem parte do concreto podendo o aluno experienciar através da manipulação de objectos e construção de esquemas numerosas concepções facilmente observáveis. À medida que o aluno progride na sua aprendizagem dever-se-á ter em conta que a passagem do concreto ao abstracto

> «(…) se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos e promovendo assim o gosto por esta ciência e pelo rigor que lhe é característico.»
>
> (Programa de Matemática - Ensino Básico, p. 1)

> «Em particular, as técnicas de argumentação e de demonstração, que constituem a própria natureza da Matemática, vão sendo, de forma progressiva, requeridas a todos os alunos.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 2)

O cariz unificador da Teoria dos Conjuntos continua presente interligando conteúdos, à partida desconexos, proporcionando uma transmissão de conteúdos fluída, característica marcante da “Matemática Moderna”. A importância dada à linguagem simbólica e à sua correcta utilização continuam vigentes podendo encontrar-se variados exemplos ao longo deste currículo. No entanto, observamos que a instituição deste rigor destina-se sobretudo aos profissionais do ensino.

> «Os diferentes descritores estão redigidos de forma objectiva, numa linguagem rigorosa destinada ao professor, devendo este seleccionar uma estratégia de ensino adequada à respectiva concretização, incluindo uma adaptação da linguagem aos diferentes níveis de escolaridade.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 2)

Para o aluno, a simplificação pode ser efectuada desde que esta não dê azo a ambiguidades.

Podemos constatar a permanência ou o reingresso, em alguns casos, dos conteúdos inseridos aquando do período vigente da “Matemática Moderna”; referimo-nos à lógica e da Teoria dos Conjuntos, ao cálculo vectorial, às transformações geométricas, às estruturas algébricas e relações binárias, às probabilidade e estatística e ao cálculo logarítmico, diferencial e integral. Esta ampla combinação de temas, em conjunto com outros, também integrados no currículo, prepara o aluno do Ensino Secundário a um ingresso menos tumultuoso no Ensino Superior.

A utilização da tecnologia, forma de minimizar a penosidade de cálculos numéricos e representações gráficas, liberta o aluno para outras actividades mais específicas da Matemática. No entanto, deverá ficar claro

> «(…) que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.»
>
> (Programa de Matemática A - Ensino Secundário, p. 28)

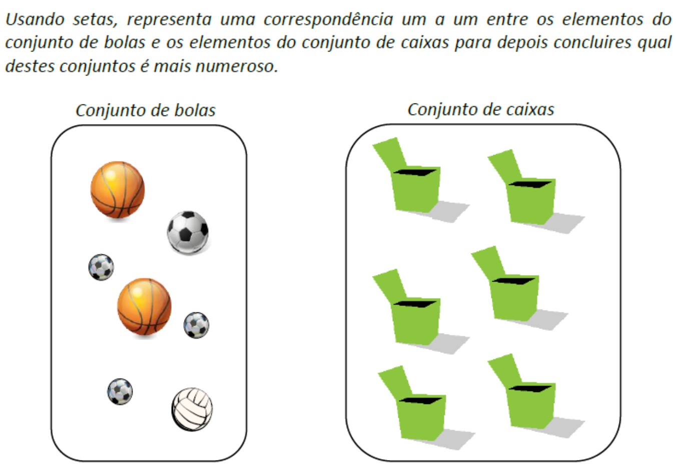
Essa é a função do matemático. Com isto, não pretendemos desvalorizar o cálculo mental ou algébrico, queremos apenas dizer que o aluno deverá compreender ou inferir acerca dos resultados encontrados através deste processo.

A Teoria dos Conjuntos no Ensino Básico

A Teoria dos Conjuntos, como podemos constatar, encontra-se integrada no currículo desde o primeiro instante. É com o conceito de conjunto assegurado, neste caso apenas pela intuição, e através da correspondência um-a-um entre a sua cardinalidade e o número natural que a define que se forma a noção de numerosidade. Podemos confirmar, em detalhe, através do descritor 1.4., do domínio de Números e Operações (NO1), que a aprendizagem desta noção, tão básica como fundamental, faz-se em

> «Associar pela contagem diferentes conjuntos ao mesmo número natural, o conjunto vazio ao número zero[31] e reconhecer que um conjunto tem menor número de elementos que outro se o resultado da contagem do primeiro for anterior, na ordem natural, ao resultado da contagem do segundo.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 4)

No caderno de apoio ao programa do 1º ciclo, tal como nos guias elaborados pelo Professor Sebastião e Silva, são facultados exemplos concretos relativos a esta metodologia verificando-se um precioso auxílio à compreensão do que é pretendido.



(Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 2)

[31] Interessante a percepção que existe, nos dois programas, do conjunto vazio; enquanto nos dias de hoje o conjunto vazio é associado naturalmente ao número zero, no programa de 74 encontramos uma nota que previne o professor em propor exercícios em que «(…) não surja como resposta nem o conjunto vazio nem o conjunto singular (isto é, sem elementos ou com um elemento), o que logo de início não seria conveniente.» É de se prever que o alerta se deva ao facto que, no senso comum, o conceito de conjunto se refira à aglomeração de dois ou mais objectos.

A correspondência um-a-um será, uma vez mais, referenciada neste ano de escolaridade aquando do descritor 2.2., do domínio Geometria e Medida (GM1), quando se declara que

> «(…) dois segmentos de recta com o mesmo comprimento podem sobrepor-se ponto por ponto um mesmo objecto rígido rectilíneo ou uma parte rectilínea de um objecto rígido (régua, lápis, fio esticado, etc.), pelo que podemos dizer também que segmentos de recta com o mesmo comprimento são "geometricamente iguais" ou simplesmente "iguais".»
>
> (Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 11)

O estudo da numerosidade, mais adiante, estabelecerá a primeira noção de relação de ordem como podemos comprovar pelo descritor 2.4, do domínio NO1:

> «Comparar números naturais até 100 tirando partido do valor posicional dos algarismos e utilizar correctamente os símbolos "<" e ">".»

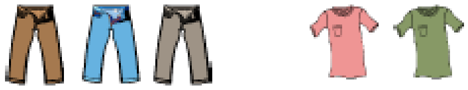
No entanto, estando presentes os conceitos de comparação e ordenação de números naturais, a noção de distância entre pares de objectos e pontos é abordada através das expressões "mais longe" e "mais perto" estabelecendo-se

> «(…) assim uma ligação entre, por um lado, a noção de "**maior distância**" ou "**menor distância**" ao observador e, por outro, a posição relativa dos dois objectos, no caso particular em que estão alinhados com o nosso olhar.»
>
> (Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 7)

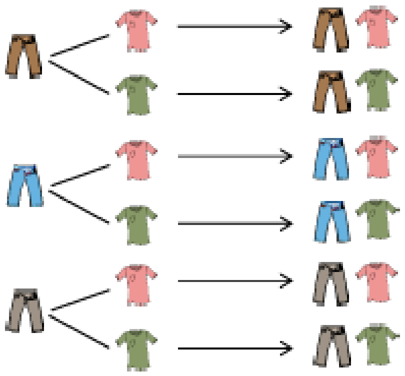
A operação multiplicação envolvendo números naturais será ensinada

> «(…) fixando dois conjuntos disjuntos e contando o número de pares que se podem formar com um elemento de cada, por manipulação de objectos ou recorrendo a desenhos e esquemas.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 10)

Quantos conjuntos diferentes de calças-camisola se conseguem formar com três pares de calças e duas camisolas?



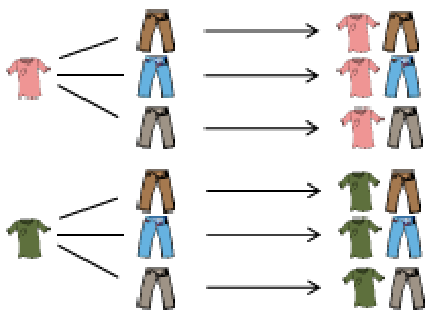
R.: Para cada par de calças temos duas camisolas; como temos três pares de calças, podemos formar $2 + 2 + 2 = 3 \times 2$ conjuntos diferentes:



6 conjuntos diferentes

$6 = 2 + 2 + 2 = 3 \times 2$

Ou, de outro modo, para cada camisola temos três calças.



6 conjuntos diferentes

$6 = 3 + 3 = 2 \times 3$

Tanto de um modo como do outro, conseguem formar-se 6 conjuntos diferentes de calças-camisola ($3 \times 2 = 6$ e $2 \times 3 = 6$).

(Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 20)

A relação de equivalência encontra-se amplamente aplicada no domínio Números e Operações (NO2) pelo que, devido ao grau de abstracção, dever-se-á ter em atenção a eventual associação à noção de igualdade.

«Utilizar as fracções $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$ para referir cada uma das partes de um todo dividido respectivamente em duas, três, quatro, cinco, dez, cem e mil partes equivalentes.»

(Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 11)

«Reconhecer que fracções com diferentes numeradores e denominadores podem representar o mesmo ponto da recta numérica, associar a cada um desses pontos representados por fracções um “número racional” e utilizar correctamente neste contexto a expressão “fracções equivalentes”.»

(Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 17)

Quanto à formalização da noção de conjunto, apenas no domínio Organização e Tratamento de dados (OTD1), descritor 1.1., são abordados os conceitos de

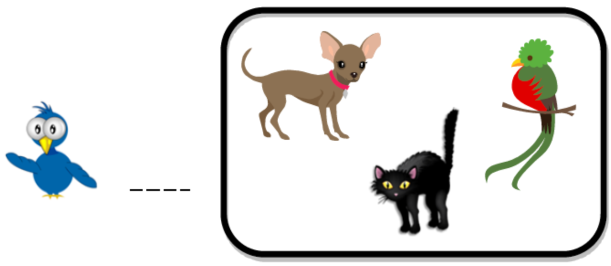
«(…) “conjunto”, “elemento” e as expressões “pertence ao conjunto”, “não pertence ao conjunto” e “cardinal do conjunto”.»

E, no descritor 1.2., a representação gráfica de

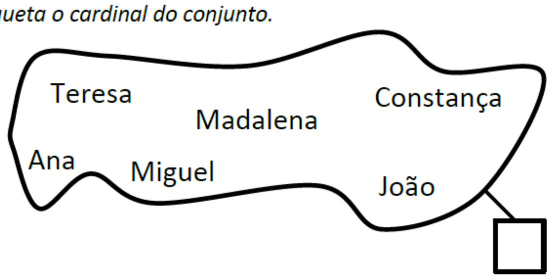
«(…) conjuntos disjuntos e (…) respectivos elementos em diagramas de *Venn*.»

Os exercícios sugeridos neste domínio, como podemos comprovar, são de alguma forma a continuação do domínio Números e Operações (NO1). São simples, directos apresentando um grafismo apelativo ao público-alvo.

Completa convenientemente os espaços em branco com os símbolos $\in$ e $\notin$.



Coloca na etiqueta o cardinal do conjunto.

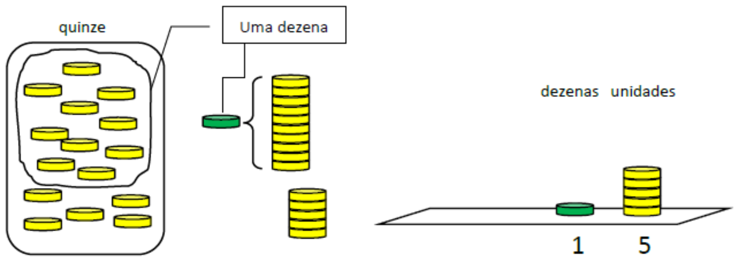


(Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 14)

A dezena é definida através da noção, não formalizada, de subconjunto (NO1 descritor 2.2.), podendo observar-se, a aplicação da metodologia, através do seguinte exemplo,

Quantas unidades, para além da dezena, tem o número quinze?

R.:



O número quinze, para além da dezena, tem 5 unidades.

(Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 3)

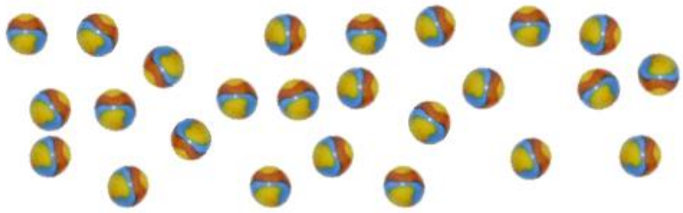
Concretiza-se ainda, de acordo com a noção de subconjunto, a diferenciação entre números pares e ímpares (NO2 descritor 3.1.), embora o agrupamento, como podemos comprovar, não tenha em consideração características comuns dos elementos em questão.

Agrupa as bolas, duas a duas, para verificares se o número total é par ou ímpar.

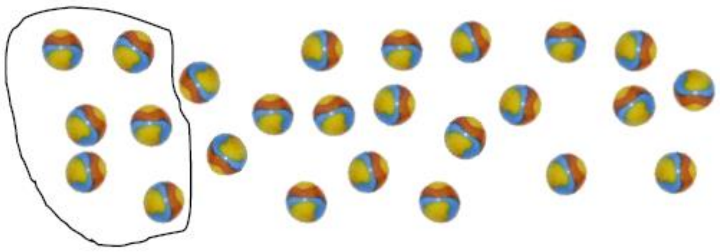
(Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 16)

Assim como, nas divisões inteiras (NO3 descritor 9.1) recorrendo a desenhos e esquemas de acordo com o exemplo dado.

O Ricardo tem 25 berlindes e vai dividi-los em conjuntos de 6 berlindes. Quantos conjuntos de 6 berlindes consegue fazer? Quantos berlindes sobram?



R.:
Vão-se fazendo agrupamentos de 6 berlindes até ser possível, isto é, até que o número de berlindes que sobram seja menor que 6.



Assim, encontrar-se-ão 4 agrupamentos de 6 berlindes, ficando 1 berlinde de sobra.

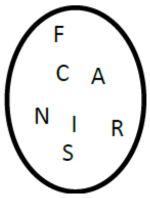
(Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 41)

A próxima menção, relativa ao conceito de subconjunto, verifica-se no sexto ano de escolaridade, no domínio Organização e Tratamento de Dados (OTD 6), aquando da definição de amostra continuando ausente a sua formalização.

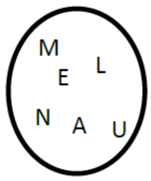
As primeiras operações entre dois conjuntos, reunião e intersecção, surgem no segundo ano de escolaridade no domínio Organização e Tratamento de Dados (OTD2) seguidas das representações, em forma de diagrama, de *Venn* e de *Carrol*. Observemos um dos exemplos fornecidos no caderno de apoio relativamente à intersecção de conjuntos.

Verifica quais são os elementos que pertencem a ambos os conjuntos.

Conjunto das letras do nome **Francisca**



Conjunto das letras do nome **Manuel**



(Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 33)

O facto de existir uma única letra A no conjunto das letras do nome "Francisca", tendo esse nome duas letras A, poderá ser motivo exploratório, informal, do axioma de extensão. A partir de exercícios similares torna-se claro que a ordem, pelos quais os elementos de um conjunto são colocados, é irrelevante assim como, a compreensão da igualdade entre conjuntos. Apesar da simplicidade dos exercícios propostos podemos encontrar outros com um grau de exigência superior.

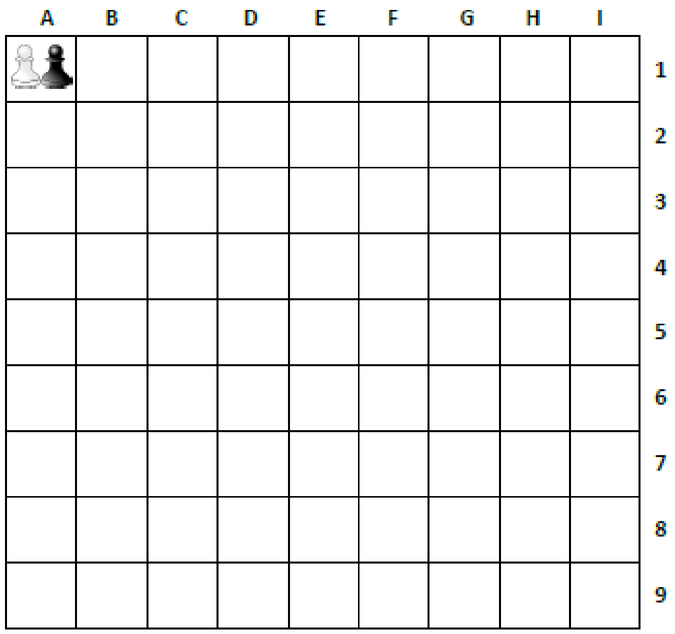
> Constrói um diagrama de *Venn* onde apresentes em simultâneo os dois seguintes conjuntos de algarismos:
>
> A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
>
> B = {algarismos do número 2012}
>
> (Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 33)

A simbologia, específica da Teoria dos Conjuntos, é aplicada em exercícios como no exemplo dado.

> *Considera os seguintes conjuntos de números:*
>
> *A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}*
>
> *B = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}*
>
> *a. Determina o conjunto interseção de A com B.*
>
> *b. Determina o conjunto reunião de A com B.*
>
> R.: a. O *conjunto interseção de A com B* é {6, 12, 18}; $A \cap B$ = {6, 12, 18}
>
> b. O *conjunto reunião de A com B* é
>
> {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 30};
>
> $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 30}
>
> Nas operações com conjuntos podem ser introduzidos os símbolos convencionais das mesmas.
>
> (Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 33)

A noção de produto cartesiano é introduzida a partir da quadrícula (por exemplo, do caderno do aluno) atribuindo-se a cada linha e a cada coluna um símbolo (GM3 descritor 1.5.). A identificação da quadrícula simboliza as coordenadas do par ordenado.

O Rasul e o Baltazar decidiram jogar um jogo em que após se lançar um dado com as faces numeradas de 1 a 6, caso saia um número par, desloca-se a peça esse número de casas para a direita e, caso saia um número ímpar, desloca esse número de casas para baixo. O jogo inicia-se na casa A1 e ganha o jogador que primeiro consiga alcançar a fila 9. Quando um jogador chega a uma casa na coluna I passa para a casa da fila inferior mas da coluna A (por exemplo, a seguir à casa I4 passa para a casa A5).



a. O Rasul fez 5 jogadas em que saíram os seguintes números: 2, 3, 6, 4, 3. Identifica pelas coordenadas cada uma das posições que a peça ocupou no final de cada jogada e diz se alcançou a fila 9.

b. O Baltazar também efetuou 5 jogadas e a peça ocupou sucessivamente as seguintes casas: A6, E6, E7, I7 e D8. Identifica o número que saiu em cada jogada.

c. O Rasul e o Baltazar vão efetuar mais uma jogada nesta ordem. Indica possíveis números para essas jogadas de tal modo que o Baltazar vença o jogo.

(Caderno de Apoio 1º Ciclo, p. 59)

No domínio Organização e Tratamento de Dados (OTD5) o conceito de referencial cartesiano é formalizado, assim como, identificadas

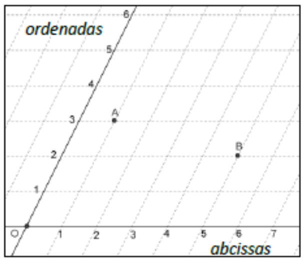
> «(…) dado um plano munido de um referencial cartesiano, a "abcissa" (respectivamente "ordenada") de um ponto P do plano como o número representado pela intersecção com o eixo das abcissas (respectivamente ordenadas) da recta paralela ao eixo das ordenadas (respectivamente abcissas) que passa por P e designar a abcissa e a ordenada por «coordenadas» de P.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 36)

No exemplo fornecido através do guia, relativamente a esta matéria, a ortogonalidade do referencial poderá não ser imediatamente observada pelo que deve ser tomada em consideração.

Considera o referencial cartesiano apresentado abaixo.

a. Qual dos pontos A e B tem maior valor de ordenada?

b. Indica as coordenadas dos pontos A e B.



(Caderno de Apoio 2º ciclo, p. 30)

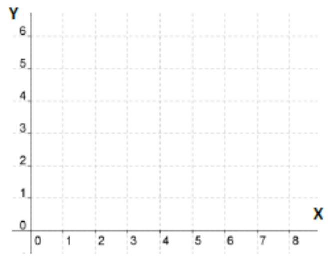
No descritor 1.3., deste mesmo domínio, aplicam-se as noções anteriormente adquiridas, i.e., pretende-se que os alunos construam

> «(…) num plano munido de um referencial cartesiano ortogonal, o "gráfico cartesiano" referente a dois conjuntos de números tais que a todo o elemento do primeiro está associado um único elemento do segundo, representando nesse plano os pontos cujas abcissas são iguais aos valores do primeiro conjunto e as ordenadas respectivamente iguais aos valores associados às abcissas no segundo conjunto.»

e, como podemos reter do exposto, uma ténue noção do conceito de função através do seu gráfico.

Constrói, no referencial cartesiano ortogonal apresentado, o gráfico correspondente aos valores da seguinte tabela.

Ponto	X	Y
A	2	2
B	3	0
C	5	1
D	6	6
E	8	5



(Caderno de Apoio 2º ciclo, p. 30)

No sexto ano de escolaridades, no domínio Números e Operações (NO6) são formalizados, apesar dos seus elementos terem sido amplamente trabalhados em anos anteriores, os seguintes conjuntos numéricos:

- «(…) conjunto dos "números inteiros relativos" (ou simplesmente "números inteiros") como o conjunto formado pelo 0, os números naturais e os respectivos simétricos, representá-lo por $\mathbb{Z}$ e o conjunto dos números naturais por $\mathbb{N}$;»
- «(…) conjunto dos "números racionais" como o conjunto formado pelo 0, os números racionais positivos e os respectivos simétricos e representá-lo por $\mathbb{Q}$.»

(Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 38)

Dada a natureza cumulativa da Matemática, no 3º Ciclo serão efectuadas consolidações e desenvolvidos conhecimentos, assim como, serão leccionadas matérias necessárias ao próximo ciclo de ensino sendo

> «(…) fundamental que comecem a ser utilizados correctamente os termos (definição, propriedade, teorema, etc.) e os procedimentos demonstrativos próprios da Matemática.»
>
> (Programa de Matemática - Ensino Básico, p. 19)

O estudo das funções inicia-se no sétimo ano de escolaridade sendo definida de forma que

> «(…) dados conjuntos A e B (…) fica definida uma "função f (ou aplicação) de A em B", quando a cada elemento x de A se associa um elemento único de B representado por $f(x)$ (…)»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 54)

Também, similarmente ao observado ao longo de todo o programa, é exigida uma correcta utilização dos termos específicos do conceito definido, i.e., de

> «(…)"objecto", "imagem", "domínio", "conjunto de chegada" e "variáveis".»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 54)

Com o objectivo de identificar o gráfico de uma função é atribuído, ao par ordenado, um papel primitivo e referida a sua propriedade fundamental.

Considera o gráfico de uma função h definido por $G_h = \{(1,4),(3,6),(5,8),(7,10)\}$.

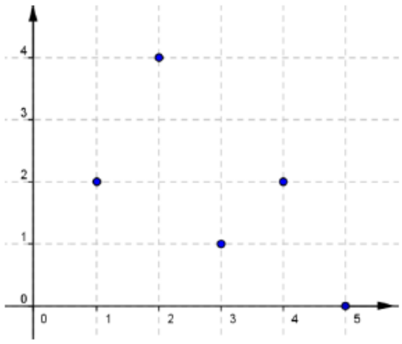
a. *Identifica o domínio e o contradomínio de h.*
b. *Representa a função h por um diagrama de setas supondo que o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.*
c. *Supõe que o contradomínio de h não coincide com o conjunto de chegada. Representa por um diagrama de setas um possível exemplo de h.*
d. *Determina uma expressão algébrica que defina o valor de $h(x)$ para qualquer x no domínio de h.*

Na figura está representado o gráfico de uma função g num referencial cartesiano.

a. *Indica o domínio de g.*
b. *Completa as igualdades:*

$$g(3) = \cdots \qquad g(\ldots) = 4$$

c. *Completa com um número por forma a obteres uma frase verdadeira:*
"…. é o objeto cuja imagem é 0."
d. *Indica se a seguinte frase é verdadeira ou falsa:*
"2 é imagem de um único objeto."



(Caderno de Apoio 3º Ciclo, p. 28)

A igualdade de duas funções, f e g, estabelece-se

> «(…) quando (e apenas quando) têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e cada elemento do domínio tem a mesma imagem por f e g.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 54)

No entanto, continuamos, sem o estabelecimento de um descritor que defina a igualdade de conjuntos. Aquando da introdução de conceitos como conjunto e elemento de um conjunto, parece-nos altura propícia para estabelecer a relação de igualdade entre conjuntos, segundo o

> «(…) princípio de que deve ficar claramente estabelecido quais os conhecimentos e as capacidades fundamentais que os alunos devem adquirir e desenvolver.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 1)

Através da igualdade de funções estabelecer-se-á a definição de equação do primeiro grau, a uma incógnita, como podemos certificar.

> «Identificar, dadas duas funções f e g, uma "equação" com uma "incógnita x" como uma expressão da forma "$f(x) = g(x)$", designar, neste contexto "$f(x)$" por "primeiro membro da

equação", "$g(x)$" por "segundo membro da equação", qualquer a tal que $f(a) = g(a)$ por "solução" da equação e o conjunto das soluções por "conjunto-solução"»

Seguindo esta metodologia há que ter em atenção o domínio das funções f e g razão pela qual os autores do programa alertam para o facto através do seguinte exemplo:

Por exemplo, a equação $2x = 3$ tem, respetivamente, os conjuntos-solução $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ ou o conjunto vazio { }, consoante se consideram os domínios $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{N}$; já no caso de se considerarem os domínios $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^+$ (o conjunto formado pelos números racionais positivos), os conjuntos-solução são ambos iguais a $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Dada uma equação $f(x) = g(x)$, indica-se frequentemente um domínio comum D para as duas funções utilizando a expressão «a equação $f(x) = g(x)$ em D».

(Caderno de Apoio 3º Ciclo, p. 42)

A equivalência de equações, resultante de sucessivas deduções lógicas, é definida através da Teoria dos Conjuntos como equações com o mesmo conjunto-solução apelando-se à correcta utilização do símbolo de equivalência. Neste ponto, os autores referem que

É importante, neste descritor, relacionar a noção de equivalência com a noção de implicação. Pela definição dada, duas equações são equivalentes quando têm o mesmo conjunto-solução. Assim, para se poder afirmar que duas equações são equivalentes, é necessário verificar que toda a solução da primeira é solução da segunda e vice-versa. Cada uma destas condições traduz uma implicação. Se apenas for verdadeira, por exemplo, a primeira (ser solução da primeira implica ser solução da segunda), as equações não são equivalentes.

Para se ilustrar estas situações poderão ser consideradas, por exemplo, as equações $x = 2$ e $x^2 = 4$ em $\mathbb{Q}$.

Por um lado, se $x = 2$, é verdade que $x^2 = 2^2 = 4$. Podemos pois afirmar que ser solução da primeira equação implica ser solução da segunda:

$$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4.$$

No entanto, como $(-2)^2 = 4$, -2 é solução da segunda equação mas não da primeira: a implicação inversa da apresentada é falsa e portanto as equações não são equivalentes.

Por outro lado, é correto afirmar que, em $\mathbb{Q}$, $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$, uma vez que são verdadeiras ambas as implicações $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$ e $x = 2 \Rightarrow x^3 = 8$.

(Caderno de Apoio 3º Ciclo, p. 42)

As equações do 1º grau como, nos anos seguintes, do 2º grau são classificadas segundo o conjunto-solução, i.e., designamos

> «(…) uma equação por "impossível" quando o conjunto-solução é vazio e por "possível" no caso contrário.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 57)

A introdução do conjunto dos números reais efectiva-se, no oitavo ano de escolaridade, após um estudo intensivo do conceito de dízima e o preenchimento da recta numérica com os números "irracionais". Assim, designamos

> «(…) por "conjunto dos números reais" a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais e designá-lo por "$\mathbb{R}$".»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 61)

Com a introdução do conjunto dos números reais as funções, anteriormente definidas em $\mathbb{Q}$, passam a funções reais, de variável real, e a relação de ordem será, uma vez mais, ampliada no oitavo e nono anos de escolaridade.

> «Estender aos números reais a ordem estabelecida para os números racionais utilizando a representação na recta numérica, reconhecendo as propriedades "transitiva" e "tricotómica" da relação de ordem.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 61)

A acompanhar o descritor há um esclarecimento, por parte dos autores, relacionado com esta matéria.

Tal como para os racionais, podemos agora dizer, estendendo a ordenação dos números a $\mathbb{R}$, que um número real x é maior do que um número real y ($x > y$) se o ponto de abcissa x pertencer à semirreta de sentido positivo com origem no ponto de abcissa y, ou, de maneira equivalente, se a semirreta de sentido positivo associada a x estiver contida na semirreta de sentido positivo associada a y. Desta caracterização resulta imediatamente que, se $x > y$ e $y > z$, então $x > z$ (propriedade transitiva), muito simplesmente pela transitividade da inclusão aplicada às semirretas de sentido positivo associadas aos referidos números. Além disso, dados números reais x e y, os pontos dos quais são abcissas, ou coincidem e, nesse caso, $x = y$, pelo que acima se viu (a abcissa de um ponto ficou bem definida), ou a semirreta de sentido positivo com origem num deles está contida na semirreta de sentido positivo com origem no outro, já que é essa a definição de semirretas com o mesmo sentido, quando têm a mesma reta suporte; mas isso significa que ou se tem $x > y$ ou $y > x$. Daqui resulta a chamada propriedade tricotómica: para quaisquer números reais x e y, ou $x = y$ ou $x > y$ ou $y > x$, podendo apenas ter lugar, em cada caso, uma destas relações.

(Caderno de Apoio 3º Ciclo, p. 63)

O conjunto dos números reais permitirá a atribuição de solução, a equações sem solução em $\mathbb{Q}$, e, no âmbito de $\mathbb{R}$, entrar-se-á nos sistemas de 1º grau a duas incógnitas. Atendendo que

«(…) fixada uma ordem para as incógnitas, o par ordenado de números (x_0, y_0) como "solução de um sistema com duas incógnitas" quando, ao substituir em cada uma das equações a primeira incógnita por x_0 e a segunda por y_0 se obtêm duas igualdades verdadeiras e por "sistemas equivalentes" sistemas com o mesmo conjunto de soluções.»

(Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 68)

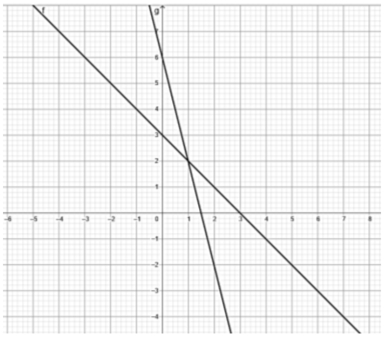
A interpretação geométrica de um sistema de 1º grau a duas incógnitas, num plano dotado de um referencial cartesiano, concretiza-se através da intersecção dos dois lugares geométricos definidos pelas equações, i.e., dos dois conjuntos de pontos do plano que define cada uma das duas rectas.

Exemplo: Classifique, sem resolver, o seguinte sistema de 1º grau a duas incógnitas.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ y = 6 - 4x \end{cases}$$

x	$y = 3 - x$	(x, y)
0	$y = 3 - 0 = 3$	$(0, 3)$
2	$y = 3 - 2 = 1$	$(2, 1)$
$G_{3-x} = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y = 3 - x\}$		

x	$y = 6 - 4x$	(x, y)
1	$y = 6 - 4 \times 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$y = 6 - 4 \times 2 = -2$	$(2, -2)$
$G_{6-4x} = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y = 6 - 4x\}$		



$$C.S. = \{(x,y): y = 3 - x \land y = 6 - 4x\} =$$
$$= G_{3-x} \cap G_{6-4x} = \{(1,2)\}$$

Concluindo que, a cardinalidade do conjunto-solução deste sistema é numericamente igual a um, o sistema é possível (e determinado).

A definição de intervalos de números reais, limitados e ilimitados, formaliza-se apenas no nono ano de escolaridade. Através do descritor 2.1., identificam-se,

> «(…) dados dois números reais a e b (com $a < b$), os "intervalos não degenerados", ou simplesmente "intervalos", $[a,b],]a,b[, [a,b[$ e $]a,b]$ como os conjuntos constituídos pelos números reais x tais que, respectivamente $a \leq x \leq b$, $a < x < b$, $a \leq x < b$ e $a < x \leq b$ designando por "extremos" destes intervalos os números a e b e utilizar correctamente os termos "intervalo fechado", "intervalo aberto" e "amplitude de um intervalo".»

E do descritor 2.2.,

> «(…) dado um número real a, os intervalos $[a, +\infty[,]a, +\infty[,] -\infty, a[$,e $] -\infty, a]$ como os conjuntos constituídos pelos números reais x tais que, respectivamente, $x \geq a, x > a, x < a$ e $x \leq a$ e designar os símbolos "$-\infty$" e "$+\infty$" por, respectivamente, "menos infinito" e "mais infinito".»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 70)

Encontra-se ausente o reconhecimento que estes conjuntos não podem ser representados em toda a sua extensão e, que por esse motivo, a sua representação terá que ser através da forma de intervalo ou de uma propriedade que defina os elementos que lhe pertencem. Por exemplo, $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$.

As operação entre conjuntos de números reais, intersecção e união, serão representadas

> «(…) quando possível, sob a forma de um intervalo ou, caso contrário, de uma união de intervalos disjuntos.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 70)

Os conjuntos de números reais serão, extensivamente, aplicados na resolução de inequações e nas operações conjunção e disjunção de inequações.

No nono ano, pela primeira vez, esclarece-se a forma como a matemática, e as suas teorias, se edificam através da axiomatização. Define-se uma teoria como um conjunto inicial de axiomas, conceitos e relações primitivos; a constituir ainda, esta teoria, temos as proposições logicamente deduzidas a partir daquelas que a constituem. São introduzidos aspectos específicos da linguagem, tais como, condição necessária e condição suficiente, lema, corolário, teorema, hipótese e tese e, uma vez mais, o símbolo $\Longrightarrow$. Apesar da versatilidade, da teoria axiomática, na fundamentação Matemática o seu estudo encontra-se aplicado à geometria euclidiana.

É no estudo das probabilidades, domínio OTD9 que o estudo da Teoria dos Conjuntos atinge, no Ensino Básico, o seu expoente máximo. O "espaço amostral" é definido como um conjunto e o resultado de uma "experiência" um elemento seu. Um "acontecimento" é um subconjunto do espaço amostral cujos elementos são designados por "casos favoráveis". A classificação de um acontecimento faz-se através da sua cardinalidade, i.e.,

> «(…) dada uma experiência aleatória, o conjunto vazio por acontecimento «impossível», o universo dos resultados por acontecimento «certo», um acontecimento por «elementar» se existir apenas um caso que lhe seja favorável e por «composto» se existir mais do que um caso que lhe seja favorável.»

Assim como,

> «(…) por «incompatíveis» ou «disjuntos» quando a respectiva intersecção for vazia e por «complementares» quando forem disjuntos e a respectiva reunião for igual ao espaço amostral.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico, p. 82)

Consultando o caderno de apoio podemos reconhecer, facilmente, o papel da Teoria dos Conjuntos no estudo das Probabilidades.

Considera a experiência aleatória que consiste em lançar um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6 e registar o número da face que fica voltada para cima (o resultado da experiência).

Relativamente a esta experiência, sejam A, B, C e D os seguintes acontecimentos:
$A = \{1, 4, 5\}$; $B = \{1, 3, 5\}$; $C = \{6\}$; $D = \{2, 4, 6\}$. *Indica pares de acontecimentos que sejam:*

- *a. Incompatíveis mas não complementares;*
- *b. Complementares;*
- *c. Compatíveis.*

(Caderno de Apoio 3º Ciclo, p. 135)

A Teoria dos Conjuntos no Ensino Secundário

No programa de Matemática A homologado em 2015 podemos encontrar, no início do décimo ano, o estudo da lógica proposicional e da teoria de conjuntos estando previstas 18 aulas (de 45 minutos) para a sua leccionação. Segundo os autores

> «(…) ao optar-se pela elaboração de Metas Curriculares, muitos dos conteúdos transversais inerentes a um Programa de Matemática do Secundário encontram-se agora, em grande medida, explicitados, o que levou, por exemplo, à constituição do domínio *Lógica e Teoria dos Conjuntos* no 10º ano.»
>
> (Programa de Matemática A - Ensino Secundário, p. 3)

Através deste domínio o aluno poderá usufruir, não só, da Teoria dos Conjuntos como do raciocínio lógico e dedutivo que o estudo da lógica bivalente proporciona.
Porém, devido à extensão do programa e à natureza abstracta de certos conteúdos, a execução do programa, tal como se encontrava, foi colocada em causa.
Assim, o grupo de trabalho de Matemática A para o Ensino Secundário redigiu um documento que estabelece orientações destinadas a uma gestão, mais efectiva, do programa.

Segundo os autores deste documento, o estudo do domínio da Lógica e Teoria dos Conjuntos 10

> «(…) pode, naturalmente, ser integrado no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios, assim como em revisões de conteúdos de anos anteriores.»
>
> (Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A, p. 6)

Assim, este domínio poderá ser leccionado de acordo com duas propostas – Propostas A e B; ambas permitindo que os conteúdos, deste domínio, sejam leccionados de acordo com a sua necessidade desde que efectivamente leccionados.

Quanto à proposta A, o documento refere iniciar o

> «(…) ano lectivo com a Introdução à Lógica Bivalente e à Teoria de Conjuntos, abordando Radicais e Potências de expoente Racional entre os dois objectivos gerais do domínio LTC10 e trabalhar transversalmente os descritores em contextos mais abrangentes e complexos.
>
> - Objectivo Geral 1. Operar com proposições
>   Podem efectuar-se revisões sobre Números, Divisibilidade, Operações com números reais e respectivas propriedades e ainda Geometria elementar no plano e no espaço. Como os conteúdos deste domínio vão ser utilizados ao longo de todo o Ensino Secundário, este capítulo pode ser encarado como uma primeira abordagem do domínio LCT10, mas com a perspectiva de que, ao longo dos três anos e em sucessivas oportunidades, estes conteúdos se irão aprofundando, pelo que os problemas a propor aos alunos devem estar de acordo com a perspectiva de que este é um tema transversal que ajuda os alunos a adoptar uma linguagem e um raciocínio matemáticos rigorosos.
>   - Domínio Álgebra - Radicais e Potências de Expoente Racional
>   Propõe-se que se aborde, em seguida, o tema do domínio Álgebra, Radicais e Potências de Expoente Racional.
> - Objectivo Geral 2. Relacionar condições e conjuntos
>   Retomando o Domínio LCT10, aborda-se o tema Condições e Conjuntos que contém um grande número de descritores que os alunos irão continuar a trabalhar e a aplicar durante todo o Ensino Secundário, pelo que esta primeira abordagem, que idealmente deve ser relacionada com conhecimentos que os alunos já têm do ensino básico, vai ser complementada e enriquecida com todas as aplicações que vão surgindo, desde logo no domínio Geometria Analítica (por exemplo, na definição de conjuntos de pontos no plano), mas também no domínio Funções Reais de Variável Real (definição de função injectiva, sobrejectiva, domínio de uma função…), e, de forma mais geral, ao longo de todo o Ensino Secundário. Por outro lado, os descritores claramente relacionados com o raciocínio demonstrativo (2.17., 2.18., 2.20.) exigem alguma maturidade de conhecimentos, pelo que podem merecer aqui uma primeira abordagem mais elementar, mas sempre com a perspectiva de que mais tarde serão utilizados em novas abordagens e em contextos mais abrangentes e mais complexos.
>   Assim, este domínio é iniciado no 10º ano mas, no que diz respeito às aplicações que inevitavelmente vão sendo suscitadas pelos outros domínios, só se deve considerar efectivamente cumprido no 1º ano. A este propósito, observa-se ainda que no domínio Cálculo Combinatório, no 12º ano, o primeiro Objectivo Geral é Conhecer propriedades das operações com conjuntos, o que está intimamente relacionado com a abordagem inicial efectuada no 10º ano.»

A proposta B refere a integração deste

> «(…) tema de forma transversal, no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios, bem como em revisões de conteúdos de anos anteriores.
>
> - Objectivo Geral 1. Operar com proposições
>   Tratar, por exemplo, os descritores 1.1. a 1.16. introduzindo, como revisões, problemas de geometria (teorema de Pitágoras no plano e no espaço − áreas e volumes), nos temas Radicais e Potências de expoente racional (ALG10) e na resolução de problemas de Álge-

bra desde que todos esses exemplos permitam concretizar efectivamente os descritores mencionados.

- Objectivo Geral 2. Relacionar condições e conjuntos
  Os descritores 2.1. a 2.5. e 2.10. a 2.18. podem ser introduzidos aquando do tema Geometria Analítica no Plano e no Espaço, e ainda os descritores 2.6. a 2.9. e 2.19. aquando do tema Funções Reais de Variável Real.»

Em ambas as propostas podemos entrever a importância da lógica

> "(…) uma vez que reúne temas fundamentais e transversais a todo o Ensino Secundário."
>
> (Metas Curriculares de Matemática A - Ensino Secundário, p. 9)

E que

> "De acordo com os princípios gerais de interpretação das Metas Curriculares, tal como estão enunciados na respectiva introdução, este estudo pode, naturalmente, ser integrado no tratamento de conteúdos pertencentes a outros domínios assim como em revisões de conteúdos de anos anteriores."
>
> (Metas Curriculares de Matemática A - Ensino Secundário, p. 9)

Neste domínio, após inúmeras aplicações, são formalizados conceitos que consideramos serem essenciais neste nível de ensino, tais como, a definição de conjunto por extensão e através de uma condição, igualdade e inclusão de conjuntos e a relação entre as operações entre conjuntos e as operações lógicas entre condições. O caderno de apoio, deste ano de escolaridade, esclarece e orienta os professores sempre que considera premente tal como no caso que se segue.

As condições mais primitivas que permitem a construção dos conjuntos básicos que intervêm nas teorias matemáticas envolvem variáveis representadas por letras e que, intuitivamente, representam objetos genéricos da Matemática os quais não constituem, à partida, um conjunto. Desta forma, nesses casos, as variáveis podem ser substituídas por quaisquer "termos" (expressões representando objetos matemáticos), sem que se limite à partida essa substituição a elementos de um conjunto pré-fixado, e tal substituição conduz sempre a uma expressão admissível, trate-se ou não de uma proposição verdadeira. Por exemplo, a condição $\sim(x = x)$, negação da condição $x = x$, permite definir o chamado conjunto vazio (no sentido expresso no descritor 2.10) e, sendo já dados dois conjuntos A e B, a condição $x \in A \vee x \in B$ permite definir o conjunto união de A e B. A possibilidade de construir um conjunto através de uma dada condição com uma variável fica regulada pelos axiomas utilizados para a Teoria dos Conjuntos, sendo certo que nem todas as condições admissíveis permitem definir um conjunto no sentido acima referido (*cf.* o Comentário aos descritores 2.10 e 2.11). À medida que se vão definindo conjuntos através de condições progressivamente mais elaboradas e introduzindo as habituais abreviaturas da linguagem matemática é depois usual utilizar condições em cuja formulação fica explícito ou implícito que todos os objetos que a transformam numa proposição verdadeira, por substituição da variável por um termo representando um desses objetos, pertencem a determinado conjunto já definido; uma tal condição pode assim considerar-se associada a determinado conjunto que pode ser designado por "universo" dessa condição e que se sabe *a priori* conter todos os objetos que satisfazem a referida condição. Do mesmo modo, nas condições utilizadas na linguagem comum, habitualmente considera-se implícita ou explicitamente que a variável representa um objecto genérico de determinado domínio de variação que se supõe fixado.

(Caderno de Apoio 10º Ano, p. 5)

A relação entre as operações lógicas e conjuntos, aplicadas no ano lectivo transacto, atinge, neste ano, uma maior importância através das propriedades das operações de conjunção e disjunção relativamente à classificação das condições envolvidas. São sugeridos exercícios simples através do caderno de apoio, deste ano lectivo, de forma a assimilar conceitos mais abstractos.

Para cada uma das condições «$x^2 = -2$», «$x^2 > -2$» e «$x^2 \geq 4$» indique se é universal, possível ou impossível em $\mathbb{R}$ e o que daí pode concluir, a esse mesmo respeito, acerca das condições:

2.1 $x^2 = -2 \ \wedge x^2 \geq 4$
2.2 $x^2 = -2 \ \vee \ x^2 \geq 4$
2.3 $x^2 = -2 \ \wedge x^2 > -2$
2.4 $x^2 \geq -2$

(Caderno de Apoio 10º Ano, p. 8)

Observemos a proposta 2.1. do caderno de apoio. Comecemos, em primeiro lugar, por analisar as condições iniciais. Em $\mathbb{R}$, $x^2 = -2$ é uma condição impossível; não existe qualquer número real que, ao quadrado reverta num número negativo. Assim, $\{x \in \mathbb{R}: x^2 = -2\} = \emptyset$. Analisando, em $\mathbb{R}$, $x^2 \geq 4$ temos que, $\{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 4\} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ pelo que a condição $x^2 \geq 4$ é uma condição possível em $\mathbb{R}$.

No que respeita à conjunção $x^2 = -2 \wedge x^2 \geq 4$ para que esta seja possível deverá existir pelo menos um número real tal que verifique $x^2 = -2$ e, simultaneamente, verifique $x^2 \geq 4$, i.e.,

$$\{x \in \mathbb{R}: x^2 = -2 \wedge x^2 \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = -2\} \cap \{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 4\} =$$
$$= \emptyset \cap (]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[) = \emptyset$$

verificando-se que, não existe nenhum número real nessas condições.

Podemos testemunhar o potencial da Teoria dos Conjuntos quando esta se encontra associada à lógica. Observemos a meta

> «Dado um conjunto U e uma condição $p(x)$, mostre que se $p(x)$ for uma condição universal em U, então $\sim p(x)$ é uma condição impossível em U e se $p(x)$ for uma condição impossível em U, então $\sim p(x)$ é uma condição universal em U.»
>
> (Caderno de Apoio 10º Ano, p. 9)

A representação de um conjunto em compreensão pode ser encontrada no descritor 2.10.

> «Representar, dada uma condição $p(x)$, por $\{x: p(x)\}$ um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$, designando a igualdade $A = \{x: p(x)\}$ por "definição em compreensão do conjunto A pela condição $p(x)$"»
>
> (Metas Curriculares de Matemática A - Ensino Secundário, p. 5)

No entanto, é esclarecido que esta forma de representação nem sempre conduz à existência de um conjunto dando, como exemplo, o "Paradoxo de *Russell*",

> enunciado por Bertrand Russel no início do século XX e que pôs em causa os fundamentos apresentados por Gottlob Frege para a Teoria dos Conjuntos; com efeito, se existisse um conjunto $A = \{x : \sim(x \in x)\}$ teríamos $\forall x, x \in A \Leftrightarrow \sim(x \in x)$, pelo que teria de ser verdadeira, em particular, a proposição que resulta de substituir x por A em $x \in A \Leftrightarrow \sim(x \in x)$, ou seja, teria de ser verdadeira a proposição $A \in A \Leftrightarrow \sim(A \in A)$, o que não é possível, pois uma proposição e a respetiva negação não podem ter o mesmo valor lógico. No entanto, em tudo o que se segue, sempre que for definido um conjunto através de uma condição, pressupor-se-á, evidentemente, que tal conjunto existe, no sentido em que, numa formalização adequada da Teoria dos Conjuntos, essa existência poderia ser provada (ou, em particular, seria um axioma).
>
> (Caderno de Apoio 10º Ano, p. 9)

Como também é referida a representação de um conjunto por extensão

> Neste descritor fixa-se a nomenclatura habitual («a é um elemento do conjunto A») para referir um objeto a quando se pretende indicar que se verifica a relação $a \in A$ e introduz-se a notação corrente ($\{a_1, \dots, a_k\}$) para representar «em extensão» um conjunto A cujos elementos sejam exatamente determinados objetos $a_1, \dots, a_k$, ou seja, quando A pode ser definido pela condição $x = a_1 \vee x = a_2 \vee \dots \vee x = a_k$. É importante notar que desta definição resulta imediatamente que o conjunto $\{a_1, \dots, a_k\}$, ao contrário da sequência $(a_1, \dots, a_k)$, não depende da ordem pela qual os respetivos elementos são indicados nem do número de vezes que um dado elemento do conjunto aparece nesta notação; assim por exemplo temos:
>
> $$\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{2,2,1,3,3,1,3\},$$
>
> Embora, evidentemente, as sequências $(1,2,3), (3,1,2)$ e $(2,2,1,3,3,1,3)$ sejam, duas a duas, distintas.

(Caderno de Apoio 10º Ano, pp. 9-10)

No descritor seguinte,

> O descritor 2.11 exprime a ideia intuitiva de que "dois conjuntos são iguais quando e apenas quando têm os mesmos elementos", estabelecendo assim o princípio essencial para o uso dos símbolos de igualdade («=») e de pertença (« $\in$ »), que representam as duas relações básicas da Matemática; deste modo, a notação $\{x : p(x)\}$ introduzida em 2.10 fica associada a um conjunto A bem determinado, no sentido em que se existir um conjunto A tal que $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$ então qualquer conjunto A' tal que $\forall x, x \in A' \Leftrightarrow p(x)$ será igual a A. A relação $A = A'$ traduz a ideia intuitiva de que os símbolos «A» e «A'» representam o mesmo objeto, e é nesse sentido que podemos dizer que A fica "bem determinado" pela condição (em A) $\forall x, x \in A \Leftrightarrow p(x)$. Resulta deste princípio que a igualdade de dois conjuntos A e B definidos em compreensão respetivamente pelas condições $p(x)$ e $q(x)$ significa que é universal a condição $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

(Caderno de Apoio 10º Ano, p. 9)

São identificados, formalmente, os conjuntos reunião e intersecção de dois conjuntos, o conjunto diferença assim como, o conjunto definido por $p(x)$ em U e por fim a relação de subconjunto.

> Considere os seguintes conjuntos de números reais:
> $E = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{2}\}$ e $G = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{3}{2}\right\}$.
> Defina, sob a forma de intervalo, ou de união de intervalos disjuntos, os seguintes conjuntos, considerados como subconjuntos de $\mathbb{R}$:
>
> 2.1 $E \cup F$ 2.2. $F \cup G$
> 2.3. $E \cap F$ 2.4. $E \cap G$
> 2.5. $E \cap (F \cap G)$ 2.6. $\bar{E}$
> 2.7. $\bar{G}$ 2.8. $E \setminus F$
> 2.9. $E \setminus (F \cap G)$

(Caderno de Apoio 10º Ano, p. 13)

No que se refere ao décimo primeiro ano a Teoria dos Conjuntos expressa-se, essencialmente, na forma de topologia e na sua aplicação na geometria analítica na forma de pares ordenados e lugares geométricos. No entanto, não podemos deixar de salientar a reentrada do princípio de indução matemática no domínio Sucessões. Segundos os autores do programa, este princípio

> «(…) constitui um instrumento fundamental para o estudo de diversas propriedades das sucessões, servindo ainda de suporte teórico à definição de sucessões por recorrência.»
>
> (Programa de Matemática A - Ensino Secundário, p. 15)

São propostos quatro exercícios exemplificando os objectivos que se pretendem cumprir.

1. Prove, por indução matemática, que as seguintes propriedades são verdadeiras:
   1.1. $\forall n \in \mathbb{N}, 3^n \times 5^n = (3 \times 5)^n$.
   1.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, a soma dos n primeiros termos da sucessão dos números ímpares é igual a $S_n = n^2$.
   1.3. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+h)^n \geq 1 + nh$. (onde $h > 0$).

2. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por $u_1 = 5$ e $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
   2.1. Mostre, por indução, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   2.2. Deduza da alínea anterior que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

3. **Mostre que $9^n - 1$ é, para todo o número natural n, um múltiplo de 8.

4. **Use o método de indução em n para mostrar que, sendo a e n números naturais, $a^n - 1$ é múltiplo de $a - 1$.

(Caderno de Apoio 11º Ano, p. 24)

> «(…) identificando-se com um ou dois asteriscos os exemplos que correspondem a níveis de desempenho progressivamente mais avançados.»
>
> (Caderno de Apoio 11º Ano, p. 1)

O décimo segundo ano inicia com o cálculo combinatório. Os descritores 1.1. a 1.5. têm o objectivo de dar a conhecer as propriedades das operações sobre conjuntos: propriedades associativa, comutativa, de existência de elemento neutro e elemento absorvente e da idempotência da união e da intersecção. São ainda referenciadas as propriedades distributiva da reunião (intersecção) em relação à intersecção (respectivamente, reunião) e da distributividade do produto cartesiano relativamente à reunião.

De forma a orientar o que é pretendido no descritor 1.1.,

> «Provar, dados dois conjuntos A e B, que $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$ e que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática A - Ensino Secundário, p. 44)

Sendo sugerido que

> O reconhecimento da primeira propriedade referida neste descritor pode ser efetuado, a nível elementar, observando um diagrama de Venn. Uma demonstração mais formal pode ser obtida, por exemplo, resolvendo o exercício seguinte, em que se pretende utilizar explicitamente a definição de inclusão e as propriedades conhecidas das operações lógicas.
>
> 1. *Demonstre sucessivamente os resultados expressos nas seguintes alíneas:
>   1.1 Sendo p e q proposições, $p \Rightarrow q$ é equivalente a $(p \wedge q) \Leftrightarrow p$ e também a $(p \vee q) \Leftrightarrow q$.
>   1.2 Dados conjuntos A e B, $A \subset B$ se e somente se $A \cap B = A$ e se e somente se $A \cup B = B$.
>   1.3 O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
>
> (Caderno de Apoio 12º ano, p. 2)

Os factos elementares da combinatória assentam nos conceitos de cardinalidade de um conjunto, equipotência e conjunto potência. A exigência acerca da cardinalidade passa ainda por conhecer

- dados os conjuntos A e B, se $A \cap B = \emptyset$ então $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$[32];
- dados os conjuntos A e B, se $\#(A) = n$ e $\#(B) = m$ então $\#(A \times B) = n \times m$;
- dado um conjunto E, se $\#(E) = p$ então $\#\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^p$.

O estudo da probabilidade é ampliado sendo a sua maior discrepância, relativamente ao que foi leccionado no 3º ciclo, a formalização e a sua forte ligação à Teoria dos Conjuntos. Referimo-nos ao descritor que identifica dado

> «(…) um conjunto finito E, uma "probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ das partes de E" como uma função P de domínio $\mathcal{P}(E)$ e de valores não negativos tal que $\mathcal{P}(E) = 1$ e, para $A, B \in \mathcal{P}(E)$ disjuntos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, designar, neste contexto, o conjunto E por "espaço amostral" ou "universo dos resultados", $\mathcal{P}(E)$ por "espaço dos acontecimentos", os respectivos elementos por "acontecimentos", $\mathcal{P}(A)$, para $A \in \mathcal{P}(E)$, por "probabilidade do acontecimento A" e o terno $(E, \mathcal{P}(E), P)$ por (um caso particular de) "espaço de probabilidade".»
>
> (Metas Curriculares de Matemática A - Ensino Secundário, p. 46)

[32] Esta fórmula, geralmente atribuída a *Abraham de Moivre*, deve-se ao matemático português Daniel Augusto da Silva.

O conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, e a unidade imaginária, i, são introduzidas no último domínio do décimo segundo ano de escolaridade (NC12) através da fórmula de *Girolamo Cardano* embora devamos a formalização rigorosa, deste conjunto numérico, a *Friedrich Gauss*. Os alunos terão que reconhecer que existe

> «(…) um conjunto $\mathbb{C}$ contendo $\mathbb{R}$, munido de duas operações "$+$" e "$\times$" que estendem respectivamente a operação de adição e de multiplicação de números reais, mantendo os mesmos elementos neutros, que são associativas, comutativas, tais que "$\times$" é distributiva relativamente a "$+$", e tal que $\mathbb{C}$ contém um elemento i que satisfaz $i \times i = -1$, então, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se necessariamente em $\mathbb{C}$ a equivalência $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \ \wedge b = d$ bem como as igualdades $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e $(a + bi) \times (c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$, notando, em particular, que os resultados da operações "$+$" e "$\times$" sobre elementos de $\mathbb{C}$ da forma $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ têm essa mesma forma.»
>
> (Metas Curriculares de Matemática A - Ensino Secundário, p. 58)

Quanto à sua definição, descritor 2.1. do mesmo domínio, os autores do programa esclarecem a escolha na definição do conjunto dos números complexos como o conjunto $\mathbb{R}^2$.

> Neste descritor é fornecida uma definição do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e das respetivas operações de adição e de subtração. Existem numerosas formas de se introduzir o conjunto $\mathbb{C}$. Optou-se por definir $\mathbb{C}$ como o conjunto $\mathbb{R}^2$ munindo-o de uma operação de adição, que coincide com a operação de adição de vetores do ponto de vista das respetivas coordenadas, e de uma operação de multiplicação "especial", motivada pelos cálculos prévios propostos no descritor 1.3.
>
> (Caderno de Apoio 12º ano, p. 76)

Capítulo 3

A mobilização de conhecimentos

Em 1980, nos Estados Unidos da América, o Conselho Nacional dos Professores de Matemática publica *An Agenda for Action – Recommendations for School Mathematics of the 1980's*. O ponto-chave da nova proposta curricular era a resolução de problemas.
A resolução de problemas abrange um conjunto de rotinas fundamentais na vida diária de qualquer cidadão pelo que, há que os preparar para tal. Sebastião e Silva já consciencializava a importância dos exercícios a propor aos alunos, no entanto, a renovação curricular baseada na resolução de exercícios chega a Portugal passados 5 anos.
Sebastião e Silva (1975-77) alerta para a "*questão crucial dos exercícios*" expressando três pontos que, ainda hoje, continuam actuais e fundamentais. Assim, para primeiro ponto Sebastião e Silva refere que

> «É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino;»

Este ponto de vista inovador baseia-se na concepção *bourbakiana* (1950, p. 227) de que

> «O matemático não funciona como uma máquina, nem como o trabalhador de uma linha de montagem; podemos agora enfatizar demais o papel fundamental desempenhado na sua pesquisa por uma intuição especial, que não é o intuito sensorial popular, mas sim uma espécie de adivinhação directa (antes de tudo raciocínio) do comportamento normal, que ele pa-

> rece ter o direito de esperar de seres matemáticos com quem um longo conhecimento o tornou tão familiar quanto com os seres do mundo real.»[33]

De forma a ilustrarmos o espírito de Sebastião e Silva no tocante a esta matéria, iremos constituir uma resenha de exercícios passíveis de serem aplicados no 10º ano de escolaridade, mais precisamente no domínio LTC10.

Operações lógicas sobre proposições

Exemplo 3.1. Sejam duas proposições p e q tal que o valor lógico de $p \wedge q$ é verdadeiro. Determine o valor lógico da implicação $p \Longrightarrow q$.

Resolução: Notemos que o assunto tratado é do mais simples possível, no entanto, o raciocínio hipotético-dedutivo é da máxima importância. Quando é que a conjunção de duas proposições é verdadeira? Quando as duas proposições têm o valor lógico verdade. Sabendo que p e q são ambas verdadeiras, de acordo com o descritor 1.8. referente ao domínio LTC10, o valor lógico da proposição $p \Longrightarrow q$ é verdadeiro.

> "(…) é essencial que o aluno consiga ele próprio, *sem ajuda*, resolver problemas pela primeira vez. Todo o problema novo, com interesse, tem uma *ideia-chave*, um *abre-te Sésamo* que ilumina o espirito de súbita alegria. (…) Ora, é esse momento áureo de alegria que o aluno precisa de conhecer alguma vez: só por essa porta se entra no segredo da Matemática, se descobrem os seus tesouros, se aprendem as suas recônditas harmonias. Vistos por este mágico prisma, todos os assuntos, desde os mais modestos, se transformam como por encanto, ganhando vida e beleza. Diga-se a verdade: é de vida, é de alma, que o ensino está necessitado – porque tudo nele se reduz afinal a… *matéria que vem para exame*."
>
> (Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2º e 3º Volumes, 1975-77, p. 8)

Proposta 3.2. Sejam duas proposições p e q tal que o valor lógico de $p \vee q$ é falso. Determine o valor lógico da implicação $p \Longrightarrow q$.

---

[33] «The mathematician does not work like a machine, nor as the workingman on a moving belt; we can now over-emphasize the fundamental role played in his research by a special intuition, which is not the popular sense-intuition, but rather a kind of direct divination (ahead of all reasoning) of the normal behaviour, which he seems to have the right to expect of mathematical beings, with whom a long acquaintance has made him as familiar as with the beings of the real world.»

A segunda recomendação de Sebastião e Silva é de que

> «É preciso evitar certos exercícios artificiosos ou complicados, especialmente em assuntos simples;»

Uma simples reformulação do exemplo anterior acrescentará alguma exigência sem que, para isso, se tenha que recorrer a artimanhas.

Exemplo 3.3. Sejam duas proposições p e q tal que o valor lógico de $(p \wedge q) \vee \sim p$ é falso. Determine o valor lógico da implicação $\sim p \Rightarrow q$.

Resolução: A questão que o aluno deve colocar a si próprio será: Quando é que a disjunção de proposições é falsa? Ou seja, o raciocínio é semelhante ao das questões anteriores.

O aluno deverá aqui aplicar o descritor 1.7. de modo a deduzir que para $(p \wedge q) \vee \sim p$ ser falsa então $(p \wedge q)$ e $\sim p$ são ambas proposições falsas.

As proposições $p \wedge q$ e $\sim p$ não são atómicas não resultando imediatamente os valores lógicos de p e q. Assim, o aluno deve examinar para que valores lógicos de p e de q as proposições $p \wedge q$ e $\sim p$ são proposições falsas. Para a primeira proposição composta $p \wedge q$ existe mais do que uma situação, três para sermos mais específicos. Assim, vejamos a segunda proposição, $\sim p$. Para que esta seja falsa, p tem que ser verdadeira. Este último passo justifica-se segundo um dos dois seguintes descritores; o descritor 1.4. (definição da operação unária negação) ou do descritor 1.2. (princípio da não contradição – duas proposições contraditórias não podem ter o mesmo valor lógico). A proposição, $p \wedge q$, para ser falsa sabendo que p tem o valor lógico verdadeiro q terá que ser falso.

Se $\sim p$ é falsa e q é falsa então a proposição $\sim p \Rightarrow q$, de acordo com o descritor 1.8. referente ao domínio LTC10, é verdadeira.

> «A melhor maneira de memorizar fórmulas e teoremas (quando for necessário) é aprender a deduzir sem hesitação essas fórmulas e esses teoremas, em vez de resolver listas fastidiosas de exercícios, como pretexto, tantas vezes forçado, para pôr à prova tais conhecimentos. O professor deve incitar os alunos a serem desembaraçados nas deduções, tanto como nos cálculos.»
>
> (Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2º e 3º Volumes, 1975-77)

Observe que a questão poderia ser resolvida assim que obtivéssemos o valor lógico de $\sim p$. Sendo, o antecedente da implicação, $\sim p$, falso, o valor lógico de $\sim p \Longrightarrow q$ terá que ser automaticamente verdadeiro.

Proposta 3.4. Sejam duas proposições p e q tal que o valor lógico de $(p \vee q) \wedge \sim p$ é verdadeiro. Determine o valor lógico da implicação $\sim p \Longrightarrow q$.

> «Não quer isto dizer, de modo nenhum, que não seja indispensável resolver *bons* exercícios, para esclarecimento de diversos assuntos e para a aquisição de técnicas úteis necessárias.»

Exemplo 3.5. Considere as seguintes proposições p, q e r:

$p :=$ "O Pedro tem teste de matemática"; $q :=$ "O Pedro está a estudar";

$r :=$ "A mãe recompensa o Pedro".

a) Expresse a seguinte afirmação em linguagem matemática: *"Se o Pedro tem teste de matemática e está a estudar então a mãe recompensa-o."*

Resolução: É importante salientarmos que, também, na linguagem comum temos indícios dos conectores lógicos. Assinalemo-los, "**Se** o Pedro tem teste de matemática **e** está a estudar **então** a mãe recompensa-o." Observemos que "**Se** … **então** …" e "…. **e** …" são, respectivamente, uma implicação e uma conjunção de proposições. Substituindo adequadamente cada uma das proposições por p, q e r respeitando as prioridades temos: "Se $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ então $\boldsymbol{r}$" obtemos a seguinte proposição $(p \wedge q) \Longrightarrow r$**.**

b) Sabendo que o teste foi cancelado, à luz desta nova informação, qual o valor lógico da afirmação acima?

Resolução: Substituindo em $(p \wedge q) \Longrightarrow r$ a proposição p pelo valor lógico correspondente, temos que $(F \wedge q) \Longrightarrow r$. Simplificando, temos $F \Longrightarrow r$ que, independentemente se a mãe recompensa, ou não, o Pedro é sempre verdadeira.

c) Na semana seguinte o teste acabou por se realizar. A professora, ao corrigir os testes, detectou que o Pedro ou o João tinham copiado. Empenhada em descobrir o culpado questionou três alunos: o Pedro e o João, obviamente, e a Sara que em nada é culpada.

Cada um respondeu o seguinte:

> **Pedro:** "Foi o João, a Sara não podia ter sido."
>
> **João:** "Se o Pedro copiou então a Sara também."
>
> **Sara:** "Eu não copiei! Só pode ter sido o Pedro ou o João!"

Supondo que os três alunos disseram a verdade, conseguiríamos detectar o(s) culpado(s)?

Resolução: Consideremos as seguintes proposições: $p :=$ "O Pedro copiou no teste"; $j :=$ "O João copiou no teste"; $s :=$ "A Sara copiou no teste".

Se as três afirmações são verdadeiras a afirmação do Pedro, $j \wedge \sim s$**,** para ser verdade, j terá que ver verdadeira, i.e., o João copiou. Da afirmação do Pedro temos que $\sim s$ é verdadeira, i.e., a confirmação que a Sara, de facto, não copiou no teste. Analisemos a afirmação do João, $p \Longrightarrow s$. Sabendo que valor lógico desta é verdadeiro e que o consequente é falso, o antecedente p terá que ser falso, i.e., o Pedro não copiou. A afirmação da Sara não nos revela nada de novo. Da proposição $\sim s \wedge (p \vee j)$ apenas podemos apurar que, pelo menos, um dos seus colegas é que está na origem desta alhada. A conclusão que a professora poderá tirar é que existe apenas um culpado: o João.

Consideremos a implicação $p \Longrightarrow q$ que traduz "**Se** p **então** q". Por vezes, há a concepção errada acerca da negação de uma implicação, descritor 1.10. do domínio LTC10. Tal erro deve-se a pensarmos que esta também terá a forma de outra implicação. Podemos concluir facilmente, através de uma tabela de verdade, que $\sim(p \Longrightarrow q)$ equivale a $p \wedge \sim q$, isto é, para cada atribuição de valores lógicos a p e a q.

p	q	$\sim q$	$p \Longrightarrow q$	$\sim(p \Longrightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Concluindo que $\sim(p \Longrightarrow q)$ equivale a $p \wedge \sim q$ podendo escrever, em notação matemática, na forma $\sim(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$

Proposta 3.6. Mostre que $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p)$.

Se $p \Longrightarrow q$ temos:

Denominação	Linguagem corrente	Linguagem Matemática
Recíproca	**Se** q **então** p	$q \Longrightarrow p$
Contra recíproca	**Se** não q **então** não p	$\sim q \Longrightarrow \sim p$
Negação	p **e** não q	$p \wedge \sim q$

Exemplo 3.7. Considere a seguinte proposição: "*Se o céu está nublado então vai chover.*" Escreva a recíproca, a contra recíproca e a negação desta proposição.

Resolução: A primeira acção a realizar será identificar as partículas "**se** … **então** …" da seguinte forma: ***"Se** o céu está nublado **então** vai chover**"*** e posteriormente as proposições p e q. Tomemos, $p{:}=$"O céu está nublado" e $q{:}=$"Vai chover".

- A recíproca de $p \Longrightarrow q$ será da forma $q \Longrightarrow p$. Assim, para escrevermos a proposição recíproca, basta-nos "trocar" a posição das duas proposições obtendo ***"Se** vai chover **então** o céu está nublado."*

- A contra recíproca de $p \Longrightarrow q$ será da forma $\sim q \Longrightarrow \sim p$. Assim, devemos primeiramente identificar a negação das proposições p e q. $\sim p{:}=$"O céu não está nublado" e $\sim q{:}=$"não vai chover". Terminamos o exercício escrevendo: ***"Se** não vai chover **então** o céu não está nublado."*

- A negação de $p \Longrightarrow q$ terá a forma $p \wedge \sim q$. Terminando o exercício escrevendo: "O céu está nublado **e** não vai chover."

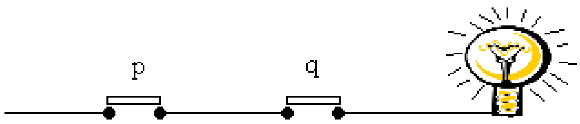
«Entre os exercícios que podem ter mais interesse, figuram aqueles que se aplicam a *situações reais, concretas*. (…) Ora, um dos pontos assentes em reuniões internacionais de professores, promovidas pela OCDE, é que o professor de matemática deve ser, primeiro que tudo, um *professor de matematização*, isto é, deve habituar o aluno a reduzir situações concretas a modelos matemáticos e, vice-versa, aplicar os esquemas lógicos da matemática a problemas concretos.»

(Silva, Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2º e 3º Volumes, 1975-77, p. 8)

Definição 3.8. Um circuito lógico é um conjunto de símbolos e operações que satisfazem as regras da lógica, simulando o comportamento real de um circuito eléctrico.

Temos dois tipos de circuito: em série e em paralelo.

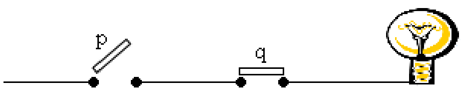
Quanto ao circuito em série, supondo que existem dois interruptores p e q a sua conexão encontra-se na mesma linha como podemos observar no diagrama a seguir.



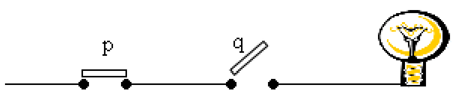
Neste circuito a corrente eléctrica apenas flui, acendendo a lâmpada, se os dois interruptores p e q permanecerem, simultaneamente, “fechados”.

Se considerarmos que interruptores quando “fechados” têm valor lógico **V**erdadeiro, este circuito traduz que p e q têm, simultaneamente, o valor lógico V i.e., V e V, associando-se à operação lógica – conjunção. O resultado desta operação é o valor lógico V reflectindo o facto de a lâmpada ter acendido.

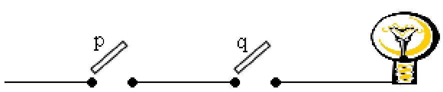
Observemos que, se um dos interruptores p ou q estiverem “abertos” (traduzido pelo valor lógico **F**also) a corrente eléctrica não flui, pelo que a lâmpada não acende.



$\sim p \wedge q$

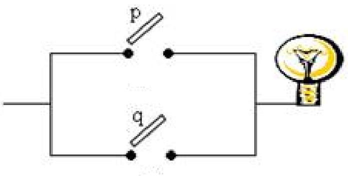


$p \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow q)$

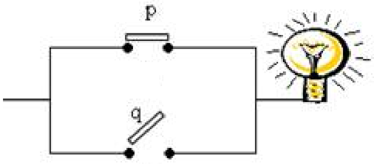


$\sim p \wedge \sim q$

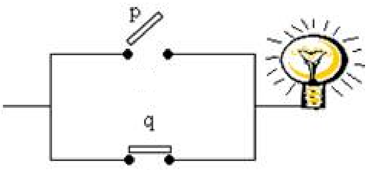
Quanto ao circuito em paralelo, supondo que existem dois interruptores p e q a sua conexão encontra-se de acordo com o diagrama a seguir.



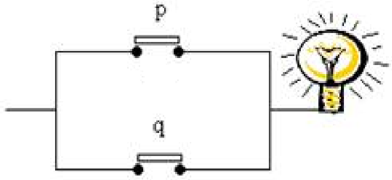
Observemos que os dois interruptores p e q, se encontram ambos “abertos”, pelo que não se verifica o acendimento da lâmpada, i.e., para que a corrente eléctrica flua de modo a acender lâmpada, pelo menos um dos interruptores tem que se encontrar “fechado”. Num circuito paralelo a operação lógica associada é a disjunção.



$p \vee \sim q$



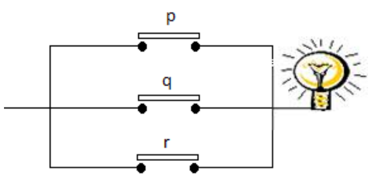
$\sim p \vee q \Leftrightarrow p \Rightarrow q$



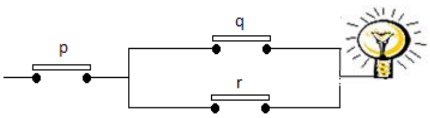
$p \vee q$

Exemplo 3.9. Escreva uma expressão lógica que represente cada um dos seguintes circuitos eléctricos.

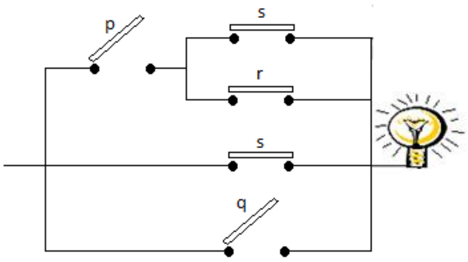
a)



b)



c)



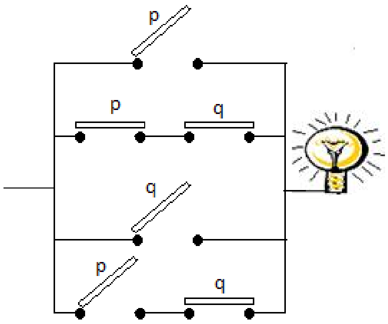
Resolução:

a) A primeira observação a fazermos é relativamente ao tipo de circuito em questão. Assim, sendo este um circuito em paralelo a corrente eléctrica tem a oportunidade de fluir, digamos no sentido esquerda direita, por três caminhos distintos; por p ou por q ou por r. Traduzindo este circuito por $p \vee q \vee r$.

b) A corrente eléctrica poderá tentar fluir por dois caminhos distintos: $p \wedge q$ ou $p \wedge r$, podendo traduzir este circuito por $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$.

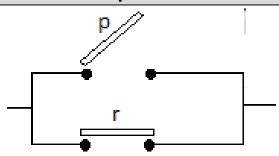
c) A corrente eléctrica poderá tentar fluir por três caminhos distintos: $\sim p \wedge (s \vee r)$ ou s ou $\sim q$. Traduzindo este circuito por $(\sim p \wedge (s \vee r)) \vee s \vee \sim q$. Se observamos com atenção, o único caminho que possibilita o acendimento da lâmpada é s.

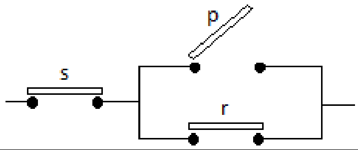
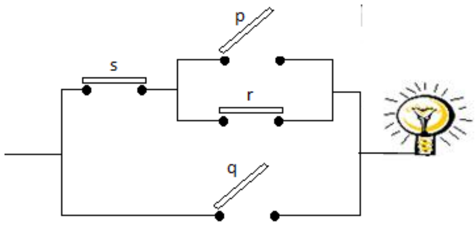
Proposta 3.10. Escreva uma expressão lógica que represente o seguinte circuito eléctrico.



Exemplo 3.11. Trace o circuito lógico que corresponde à proposição: $(s \wedge (p \Rightarrow r)) \vee \sim q$.

Resolução: A corrente eléctrica poderá fluir segundo dois caminhos: $s \wedge (\sim p \vee r)$ ou $\sim q$ sugerindo-nos um circuito em paralelo.

Proposição	Esquema
$p \Rightarrow r \Leftrightarrow \sim p \vee r$	

$s \wedge (p \Rightarrow r)$	
$\big(s \wedge (p \Rightarrow r)\big) \vee \sim q$	

Proposta 3.12. Trace os circuitos lógicos correspondentes às seguintes proposições.

a) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$;

b) $p \wedge (\sim q \vee r) \wedge (r \vee \sim q)$;

c) $(r \Rightarrow p) \vee p$

Operações sobre condições e sobre conjuntos

> «As condições mais primitivas que permitem a construção dos conjuntos básicos que intervêm nas teorias matemáticas envolvem variáveis representadas por letras e que, intuitivamente, representam objectos genéricos da Matemática os quais não constituem, à partida, um conjunto. Desta forma, nesses casos, as variáveis podem ser substituídas por quaisquer "termos" (expressões representando objectos matemáticos), sem que se limite à partida essa substituição a elementos de um conjunto pré-fixado, e tal substituição conduz sempre a uma expressão admissível, trate-se ou não de uma proposição verdadeira.»
>
> (Caderno de Apoio 10º Ano, p. 5)

Dados conjuntos A e B temos que:

Denominação	Representação Simbólica	Condição Matemática
A é igual a B	$A = B$	$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
A é subconjunto de B	$A \subseteq B$	$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
Reunião de A com B	$A \cup B$	$x \in A \vee x \in B$
Intersecção de A com B	$A \cap B$	$x \in A \wedge x \in B$
Complementar de B em A	$A \backslash B$	$x \in A \wedge x \notin B$

Exemplo 3.13. Considere as seguintes condições em $\mathbb{N}$: $d(x) :=$“x é divisor de 9” e $p(x) :=$“x é um número par”.

a) Indique o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

$\forall x \in \mathbb{N}\ d(x)$

Resolução: Traduzindo, $\forall x \in \mathbb{N}\ d(x)$, para a linguagem comum temos que “qualquer que seja o número natural este é divisor de 9”. Determinemos o conjunto, D, dos números naturais definido pela condição $d(x)$, i.e., dos números naturais que dividem 9. O número 9 pode ser dividido por ele próprio e pela unidade, como todos os números naturais e, ainda, pelo número 3 pelo que $D = \{n \in \mathbb{N}: d(n)\} = \{1, 3, 9\}$. Observando os elementos pertencentes ao conjunto D percebemos que **nem todos** os números naturais dividem o número 9, i.e., pelo facto de $\{1, 3, 9\} \subsetneq \mathbb{N}$, existem números naturais que não pertencem a D pelo que o valor lógico da proposição $\forall x \in \mathbb{N}\ d(x)$ é falso.

$\exists x \in \mathbb{N}\ d(x)$

Resolução: De acordo com a resolução anterior provámos que “qualquer que seja o número natural este é divisor de 9” é falso, no entanto, verificamos que “existe pelo menos um número natural que é divisor de 9”, três para sermos mais precisos. Assim, o valor lógico da proposição $\exists x \in \mathbb{N}\ d(x)$ é verdadeiro.

$\forall x \in D\ \big(d(x) \wedge \sim p(x)\big)$ sendo $D = \{n \in \mathbb{N}: d(n)\}$

Resolução: Numa resolução anterior já determinamos o conjunto D, como sendo $\{1, 3, 9\}$. Observemos que a negação da proposição $p(x)$, “x é um número par”, $\sim p(x)$, será “x é um número ímpar”. Assim, traduzindo a proposição para a linguagem comum temos que “qualquer que seja o elemento do conjunto D este é, simultaneamente, divisor de 9 e ímpar” podendo verificar-se, analisando os elementos de D, a sua veracidade.

Podemos, no entanto, resolver este exercício por outro processo; referimo-nos à relação existente entre operações lógicas entre condições e operações entre conjuntos. Para tal, comecemos por estabelecer o conjunto associado à conjunção das condições $d(x)$ e $\sim p(x)$:

$$S = \{x \in \mathbb{N}: d(x) \wedge \sim p(x)\} = \{x \in \mathbb{N}: d(x)\} \cap \{x \in \mathbb{N}: \sim p(x)\} =$$
$$= \{1, 3, 9\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\ \ldots\} = \{1, 3, 9\}$$

Assim, a expressão do enunciado corresponde a $\forall x \in D(x \in S)$, ou seja, $D \subseteq S$ sendo verdadeiro uma vez que $D = S$.

$\forall x \in \mathbb{N} \backslash D\ \big(d(x) \vee \sim p(x)\big)$ sendo $D = \{n \in \mathbb{N}: d(n)\}$

Resolução: A resolução deste exercício é similar ao anterior pelo que sugerimos a sua leitura cuidada. Recorrendo, agora à relação existente entre a disjunção de condições e a reunião de conjuntos:

$$T = \{x \in \mathbb{N} : d(x) \vee \sim p(x)\} = \{x \in \mathbb{N}: d(x)\} \cup \{x \in \mathbb{N}: \sim p(x)\} =$$
$$= \{1, 3, 9\} \cup \{1, 3, 5, \ldots\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$$

Assim, é necessário verificar que $\forall x \in \mathbb{N} \backslash D\ (x \in T)$, ou seja, se $\mathbb{N} \backslash D \subseteq T$. Como esta inclusão não se verifica a proposição inicial é falsa.

Podemos confirmar este valor lógico através do seguinte contra-exemplo:

$2 \in \mathbb{N} \backslash D$, no entanto, $2 \notin T$.

b) Escreva a negação da seguinte proposição em linguagem matemática e indique o valor lógico: *"Qualquer número natural se é ímpar então é divisível por 2"*

Resolução: Comecemos por constituir as condições necessárias à escrita da proposição dada em linguagem matemática. Sejam $r(x) :=$"x é divisível por 2" e $i(x) :=$ "x é um número ímpar", traduzindo temos: $\forall x \in \mathbb{N}(i(x) \Rightarrow r(x))$.

Apesar de não ter sido questionado, tomando um contra-exemplo, para $3 \in \mathbb{N}$:

$$i(3) \Rightarrow r(3) \Leftrightarrow V \Rightarrow F \Leftrightarrow F$$

verificamos que a proposição é falsa permitindo-nos concluir imediatamente que a sua negação terá que ser verdadeira.

Retomando a resolução do exercício, a negação desta proposição será

$$\sim\big(\forall x \in \mathbb{N}\ (i(x) \Rightarrow r(x))\big) \equiv \exists x \in \mathbb{N}\ (i(x) \wedge \sim r(x))$$

i.e., "existe um número natural ímpar não divisível por 2" cujo valor lógico é verdadeiro.

Exemplo 3.14. Considere a proposição: *"Qualquer número natural se é múltiplo de 2 é múltiplo de 4."*

a) Mostre que a proposição é falsa.

Resolução: De modo a mostrar que a proposição é falsa é suficiente darmos um contra-exemplo. Para tal, escrevamos os números naturais múltiplos de 2 e de 4.

$$M_2 = \{2, 4, 6, 8, 10,12,14,16, \dots\} \text{ e } M_4 = \{4, 8,12,16, \dots\}$$

Se observarmos os dois conjuntos percebemos que $M_4 \subseteq M_2$, i.e., se x é múltiplo de 4 então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 4k = 2.(2k)$ concluindo que x é múltiplo de 2. Assim, provamos que $\forall x \in \mathbb{N}(x \in M_4 \Longrightarrow x \in M_2)$.

Note que a implicação inversa, proposição que pretendemos, não é verdadeira; existem elementos em M_2 que não pertencem a M_4 implicando que nem todo o número natural par é múltiplo de 4. Assim, é suficiente seleccionarmos um elemento que pertença ao conjunto $M_2 \backslash M_4$. Por exemplo, o número natural 6: $6 \in M_2 \wedge 6 \notin M_4$. Como este, há inúmeros múltiplos de 2 que não são múltiplos de 4: 2, 10, 14, …. Pelo que, a proposição dada é falsa.

b) Escreva a negação desta proposição e comente o seu valor lógico.

Resolução: Tendo-se provado, na alínea anterior, que a proposição é falsa a sua negação é imediatamente verdadeira. No entanto, podemos resolver o exercício sem utilizarmos o resultado obtido na alínea anterior, i.e., através da negação da proposição.

Iniciemos por escrever a proposição original em linguagem matemática. Considerando as seguintes condições $p(n) :=$"n é múltiplo de 2" e $q(n) :=$"n é múltiplo de 4", obtemos $\forall n \in \mathbb{N}(\,p(n) \Longrightarrow q(n))$ cuja negação será $\exists n \in \mathbb{N}(p(n) \wedge$

$\sim q(n))$, i.e., “existe pelo menos um número natural múltiplo de 2 que não é múltiplo de 4”. Mas existirá algum número natural múltiplo de 2 que não é múltiplo de 4?

Sim, como vimos no final do exercício anterior, existe pelo menos um número natural, n, tal que $n \in M_2 \backslash M_4$, ou seja, que satisfaz a condição $p(n) \wedge \sim q(n)$. Aliás, existe uma infinidade de números naturais nestas condições, por exemplo, $2 \in \mathbb{N}$ sendo $p(2) \wedge \sim q(2)$ verdadeira.

c) Escreva a fórmula $\forall n \in \mathbb{N}\ s(n)$, onde $s(n)$ é a contra recíproca da condição *“Um número natural se é múltiplo de 2 então é múltiplo de 4”*.
Comente o seu valor lógico.

Resolução: A resolução deste exercício é similar ao anterior pelo que sugerimos a sua leitura cuidada. Recorrendo às condições já definidas na alínea anterior $p(n) := $“$n$ é múltiplo de 2” e $q(n) := $“$n$ é múltiplo de 4” a fórmula solicitada terá a forma $\forall n \in \mathbb{N}(\sim q(n) \Longrightarrow \sim p(n))$ em que $\sim p(n) := $“$n$ não é múltiplo de 2” e $\sim q(n) := $“$n$ não é múltiplo de 4”. Podemos transcrever, na linguagem comum, como “qualquer número natural se não múltiplo de 4 então não múltiplo de 2”.
Podemos mostrar que a proposição é falsa através de um contra exemplo, i.e., determinar um número natural, n, tal que $n \notin M_4$ e $n \in M_2$.

$$6 \in (\mathbb{N} \backslash M_4) \cap M_2$$

Assim, o valor lógico da proposição solicitada, $\forall n \in \mathbb{N}(\sim q(n) \Longrightarrow \sim p(n))$, é falso.

Proposta 3.15. Considere a proposição: “Todo o número primo é múltiplo de 2”.

a) Mostre que a proposição é falsa.

b) Escreva a negação desta proposição e comente o seu valor de verdade.

O problema de *Dodjson*[34] 3.16. Numa terrível batalha 72 dos 100 piratas perderam um olho, 75 uma orelha, 80 uma mão e 85 uma perna. Qual é o número (mínimo) de piratas que perderam, simultaneamente, um olho, uma orelha, uma mão e uma perna?

Resolução: De modo a resolvermos o problema, consideremos os seguintes conjuntos:
U – O conjunto dos piratas envolvidos na batalha. Este conjunto possui 100 elementos.
A – Conjunto dos piratas que perderam um olho. É de notar que um pirata que perca um olho pode ter perdido outro órgão. Por $\bar{A}$, o conjunto dos piratas que não perderam um olho podendo ter perdido um outro órgão. $\#(A) = 72;\ \#(\bar{A}) = 28$.
B – Conjunto dos piratas que perderam uma orelha. Obtendo $\#(B) = 75;\ \#(\bar{B}) = 25$.
C – Conjunto dos piratas que perderam uma mão. Obtendo $\#(C) = 80;\ \#(\bar{C}) = 20$.
D – Conjunto dos piratas que perderam uma perna. Obtendo $\#(D) = 85;\ \#(\bar{D}) = 15$.
U é constituído pelos piratas que perderam, simultaneamente, um olho, uma orelha, uma mão e uma perna, $A \cap B \cap C \cap D$, mas também, por aqueles que não perderam pelo menos um órgão, $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D}$, i.e.,

$$\begin{aligned} \#(U) &= \#\big((A \cap B \cap C \cap D) \cup (\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D})\big) \\ &= \#(A \cap B \cap C \cap D) + \#(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D}) \\ &\leq \#(A \cap B \cap C \cap D) + \#(\bar{A}) + \#(\bar{B}) + \#(\bar{C}) + \#(\bar{D}) \end{aligned}$$

Salientamos que a segunda igualdade resulta do facto dos conjuntos $A \cap B \cap C \cap D$ e $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D}$ serem disjuntos, i.e., não terem elementos em comum. Quanto à desigualdade, esta resulta do facto dos conjuntos $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ e $\bar{D}$ não terem de ser disjuntos, i.e., pode haver piratas que não perderam dois ou mais órgãos, implicando uma repetição de elementos e consequente aumento do número de elementos quando efectuado este passo. Substituindo os valores temos

$$100 \leq \#(A \cap B \cap C \cap D) + 28 + 25 + 20 + 15 \Leftrightarrow \#(A \cap B \cap C \cap D) \geq 12$$

Assim, o número mínimo de piratas que perderam, simultaneamente, um olho, uma orelha, uma mão e uma perna será numericamente igual a 12.

[34] https://www.gallup.unm.edu/~smarandache/AlgebraicProblemsExercises.pdf

Proposta 3.17. Dos 20 alunos da turma do João, 15 têm pelo menos um leitor de MP3, 16 têm pelo menos uma consola de jogos e 11 têm pelo menos um telemóvel. Qual é o número máximo de alunos que têm os três equipamentos? E o número mínimo?[35]

Proposta 3.18. Na escola do João 70 alunos estudam matemática ou inglês ou alemão. Sabemos que 40 estudam matemática, 30 estudam alemão, 35 estudam inglês e que 15 alunos estudam as três disciplinas simultaneamente. Quantos alunos estudam exactamente duas disciplinas?[36]

Exemplo 3.19. Sejam $A = \{x \in \mathbb{N}: 2x^2 - 3x - 2 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{N}: 2x^2 - 3x - 2 = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}: 2x^2 - 3x - 2 = 0\}$. Determine os conjuntos A, B e C.

Resolução: À partida podemos pensar que os conjuntos A, B e C são iguais, no entanto, não é verdade. Comecemos por calcular os valores de x tal que $2x^2 - 3x - 2 = 0$ através da fórmula resolvente: $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$.
Apesar da condição $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ser comum a todos os conjuntos, os elementos do conjunto A têm de pertencer a $\mathbb{N}$, i.e,

$$A = \left\{x: x \in \mathbb{N} \wedge \left(x = -\frac{1}{2} \vee x = 2\right)\right\} = \mathbb{N} \cap \left(\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \{2\}\right) = \mathbb{N} \cap \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\} = \{2\}$$

B é o conjunto definido por todos os números racionais, não naturais, e que verificam a condição $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Assim,

$$B = \left\{x: x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{N} \wedge \left(x = -\frac{1}{2} \vee x = 2\right)\right\} = \mathbb{Q}\backslash\mathbb{N} \cap \left(\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \{2\}\right) = \mathbb{Q}\backslash\mathbb{N} \cap \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\} =$$
$$= \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

[35] Solução: O número máximo de alunos que têm os três equipamentos é de 11 e o número mínimo é 2.
[36] Solução: 5 alunos estudam exactamente duas disciplinas.

Quanto ao terceiro conjunto

$$C = \left\{x : x \in \mathbb{R} \wedge \left(x = -\frac{1}{2} \vee x = 2\right)\right\} = \mathbb{R} \cap \left(\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \{2\}\right) = \mathbb{R} \cap \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}.$$

Exemplo 3.20. Seja $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A, B \subseteq U$. Determine os conjuntos A e B de acordo com cada alínea:

a) $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$ e $A \cap B = \{1, 2\}$ e $A \backslash B = \{4\}$

Resolução: Estes exercícios não são particularmente difíceis mas devem ser resolvidos com atenção e começar do particular para o geral. Começamos por perceber, a partir de $A \cap B$, que os elementos 1 e 2 pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B.

$$A = \{1,2, \dots\} \text{ e } B = \{1,2, \dots\}$$

De $A \backslash B = \{4\}$ concluímos que $4 \in A$ e que $4 \notin B$ pelo que podemos acrescentar esta informação $A = \{1,2,4, \dots\}$ e $B = \{1,2, \dots\}$

Através da reunião de A e B sabemos que 3 não é elemento nem de A nem de B; mais, sabemos que 5 é elementos de A ou de B. Observemos que se pertence-se a ambos, $5 \in A \cap B$ o que não se verifica. Assim, caso $5 \in A$ então $5 \in A \backslash B$ o que não se verifica concluindo-se que $5 \in B$. $A = \{1,2,4\}$ e $B = \{1,2,5\}$.

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $\bar{A} = \{2, 4\}$ e $A \cap B = \{3\}$

Resolução: A determinação do conjunto A é imediata; $\bar{A} = U \backslash A$ pelo que $A = \{1, 3, 5\}$. Relativamente ao conjunto B, pela intersecção de A com B, 3 é o único elemento de B comum a A, implicando que os elementos 1 e 5 não pertencem a B; $B = \{3, \dots\}$. Pela reunião dos conjuntos A e B, os elementos 2 e 4 pertencem a B, já que não pertencem a A; $B = \{2, 3, 4\}$

Proposta 3.21. Sejam $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $A, B, C \subseteq U$. Determine os conjuntos A, B e C sabendo que: $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B \cap C = \{4\}$, $A \backslash (B \cup C) = \{1, 2\}$, $3 \in B \backslash C$ e $\#A = 3$.[37]

[37] Solução: $A = \{1, 2, 4\}$; $B = \{3, 4\}$ e $C = \{4\}$

Capítulo 4

Teoria Axiomática dos Conjuntos

O conceito de conjunto é utilizado de forma simples em contextos quotidianos e matemáticos desde tempos imemoriáveis. No entanto, *Georg Cantor* inicia[38] em 1874 a que viria a ser a mais importante teoria matemática dos últimos tempos – a dos conjuntos abstractos. Esta teoria, inicialmente de cariz intuitivo, pretendia fundamentar conceitos matemáticos que durante séculos afirmávamos apenas "existir" através de conjuntos, através da lógica de primeira ordem; cada número natural, função, relação e até elementos de um conjunto seriam conjuntos. Afinal, na Matemática, "*tudo é conjunto*".

Bolzano definiu, de uma forma realista, o conceito de conjunto como o "simples estar junto" de diferentes objectos.

Cerca de 60 anos mais tarde *Cantor* apresenta a seguinte definição de conjunto:

> «Por conjunto, entendemos qualquer colecção num todo M de objectos m, definidos e distintos, da nossa intuição ou pensamento. Esses objectos dizem-se os elementos de M.»[39]
>
> (Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, 1915, p. 85)

[38] Cantor chegou à Teoria dos Conjuntos de forma indirecta quando este estudava séries trigonométricas.
[39] «By an "aggregate" we are to understand any collection into a whole M of definite and separate objects m of our intuition or our thought. These objects are called the "elements" of M"

A definição de conjunto dada por *Cantor* enquadra-se num tipo de definição, definição causal, que *Ehrenfried Walter von Tschirnhaus* denominou, na sua obra *Medicina mentis* (1687), de genética. Tomando este tipo de definição, *Cantor* refere que um conjunto não é apenas definido pelas suas propriedades essenciais (uma colecção num todo M de objectos) mas também o processo pelo qual este pode ser gerado (por um acto de intuição ou pensamento). Também, segundo *Tschirnhaus*, de modo a constituir-se uma teoria via axiomática ter-se-iam que definir os conceitos fundamentais na forma de definições genéticas. A partir daí extrair-se-iam os axiomas associados à teoria deduzindo-se destes, aplicando somente princípios lógicos, os teoremas. No entanto, a partir da definição de conjunto, *Cantor*, em vez de estabelecer axiomas enceta «*uma longa e admirável sequência de teoremas*». (Zermelo, 2010, p. 172)

Infelizmente, a definição *Cantoriana* de conjunto conduzia a paradoxos. *Cantor* detectou (1899), na sua própria teoria, um paradoxo. Aceitava-se válida a existência de um conjunto universal, $\mathcal{U}$, de todos os conjuntos.

$$\mathcal{U} = \{x : x \text{ é } conjunto\}$$

É natural que pensemos que $\mathcal{U}$ tivesse o maior número de elementos em relação a qualquer outro conjunto que lhe pertencesse. O dilema surge quando *Cantor* demonstra o teorema[40] onde conclui que o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, tem um número superior de elementos que $\mathcal{U}$ contradizendo o facto de $\mathcal{U}$ ter maior número de elementos que qualquer outro conjunto que lhe pertença.

Um paradoxo[41], do latim, *paradoxum* e derivado do grego, *paradoxos*, significa que apesar de um conceito se apresentar de forma coerente, possui contradições na sua estrutura. Em 1926, *Frank Ransey* dividiu os paradoxos segundo duas espécies: os lógicos (ou matemáticos) dos quais se obtêm resultados contra-intuitivos fundamentados num correcto raciocínio lógico e os linguísticos (ou semânticos) que resultam da linguagem utilizada na comunicação de estruturas matemáticas e lógicas.

[40] Para todo o conjunto A, $A <_c \mathcal{P}(A)$.

[41] Também conhecido por antinomia.

Nos Elementos de *Euclides*, o quarto axioma "o todo é maior que a parte" durante séculos foi dado como óbvio. No entanto, *Galileu Galilei* (1638, p. 32) descobriu uma correspondência de um para um entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados perfeitos. Tal descoberta sugeria que qualquer que fosse o número de elementos de $\mathbb{N}$ este teria que ser igual ao número de elementos do conjunto dos quadrados perfeitos contradizendo, estando o conjunto dos quadrados perfeitos estritamente[42] contido em $\mathbb{N}$, o axioma acima referido. *Galileu*, através de *Salvedo*, finda contrapondo que não vê

> «(…) outra conclusão que possa ser feita, isto é, sendo todos os números infinitos, os quadrados infinitos, as suas raízes infinitas, nem a multidão de quadrados sendo menor que a de todos os números, nem esta maior que aquela e, por fim, os atributos de igual maior e menor não ocorrem no infinito, mas apenas nas quantidades finitas.»[43]

Hoje, conhecemos este episódio por paradoxo de *Galileu*.

Só em 1874, *Georg Cantor* publicou[44] o facto de existir uma correspondência, de um para um, entre o conjunto dos números algébricos reais e o conjunto dos números inteiros positivos, $\mathbb{Z}^+$, provando que estes têm a "mesma quantidade" de elementos.

Mas, o aparecimento de paradoxos não ficou por aqui. Em 1901, *Bertrand Russell*, ao tomar conhecimento do primeiro volume dos Fundamentos da Aritmética (*Frege*, 1893), encontra "*uma dificuldade*" e escreve a 16 de Junho de 1902 a *Frege*:

> «O colega afirma (…) que uma função, também, pode actuar como um elemento indeterminado. Nisto acredito firmemente, mas agora esta perspectiva parece-me duvidosa pela seguinte contradição. Seja w o predicado: para ser predicado, não pode ser predicado de si. Pode w ser predicado de si?»[45]
>
> (Heijenoort, p. 124)

[42] Pelo facto de existirem números naturais que não são quadrados perfeitos.

[43] (...) altra decisione si possa venire, che à dire infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radicinè la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, nè questa maggiore di quella; ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver non aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate.

[44] On a Property of the Class of all Real Algebraic Numbers, by *Georg Cantor*, Crelle's Journal for Mathematics, Vol. 77, pp. 258–262 (1874), Translated by Christopher P. Grant

[45] «You state (…) that a function, too, can act as the indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of the following contradiction. Let w be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can w be predicated of itself?»

Quando *Frege* recebe a carta responde, a 22 de Junho, a *Russell*:

> «A sua descoberta da contradição causou-me a maior das surpresas e, poderia até dizer, consternação, visto esta ter abalado a base sobre a qual pretendia construir a aritmética. Parece-me, então, que transformando a generalização duma identidade numa identidade de percurso de valores (…) não é sempre permitida, que minha lei V (…) é falsa, e que as minhas explicações em §31 não são suficientes para assegurar que as minhas combinações de signos têm significado em todas as classes.»[46]

Este paradoxo, de natureza lógica deriva, de facto, da lei básica V postulada por *Frege* (1893), que permite formar para cada fórmula φ onde x ocorre livre $\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow \varphi)$ um conjunto.

Analisemos a situação pormenorizadamente através do seguinte exemplo: consideremos M como sendo o conjunto formado pelos elementos que possuem a propriedade "não pertence a si mesmo", isto é, $M = \{x : x \notin x\}$. Temos que se $x \in M \Longrightarrow x \notin x$ e se $x \notin M \Longrightarrow x \in x$

No entanto, podendo x tomar um valor qualquer, vejamos o que sucede quando $x = M$.

Se $M \in M$ então é porque M verifica a condição e $M \notin M$; caso contrário, se $M \notin M$ é porque M não verifica a condição implicando que $M \in M$. Em ambos os casos obtivemos uma contradição.

Assim, do simples facto de agrupar elementos porque verificam uma determinada propriedade poderá advir um paradoxo, como podemos verificar pelo exemplo anterior.

No entanto, o aparecimento de paradoxos não demoveu os matemáticos da época, incentivou-os a formularem novas teorias que afastassem de vez tais paradoxos. Como poderiam abandonar uma teoria que lhes permitiria fundamentar desde a noção de número, ordem e função desenvolvendo, através da lógica, praticamente toda a Matemática?

Ficou claro aos matemáticos da época que o problema se encontrava quando definiam conjuntos pelo princípio geral de compreensão irrestrita; o conjunto de todos os conjuntos e, conjuntos como M, formado pelos elementos que possuem a propriedade "não

[46] «Your discovery of the contradiction caused me the greatest surprise and, I would almost say, consternation, since it has shaken the basis on which I intended to build arithmetic. It seems, then, that transforming the generalization of an equality into an equality of courses-of-values (…) is not always permitted, that my Rule V (…) is false, and that my explanations in § 31 are not sufficient to ensure that my combinations of signs have a meaning in all cases.»

pertence a si mesmo”, pura e simplesmente não podem existir! Mas que estatuto atribuir a estes objectos se não são conjuntos?

Nos dias de hoje, existe mais do que uma teoria alternativa para a fundamentação da Matemática, por exemplo:

- A teoria de *Zermelo-Fraenkel* que aceita apenas conjuntos como elementos.
- A teoria de *von Neumann-Bernays* que denomina todos os objectos por classes[47].

Nesta dissertação iremos focar-nos na primeira: a Teoria Axiomática dos Conjuntos de *Zermelo-Fraenkel*. A teoria de *Ernst Zermelo*, baseada em axiomas, apresentada pela primeira vez em 1908, possui apenas um tipo de elementos – conjuntos.

> «Por outro lado, o “tipo de ordem de um conjunto bem ordenado” é certamente uma noção logicamente admissível, mais – como já aparece num modo muito mais simples a partir da “antinomia de Russell”, para ser mais preciso – que não é permitido tratar a extensão de cada noção arbitrária como um conjunto e, portanto, que a definição habitual de conjunto é muito ampla. Mas se na Teoria dos Conjuntos nos confinarmos a uma série de princípios estabelecidos, como os que constituem a base dos princípios de demonstração – permitindo-nos formar conjuntos iniciais e derivar novos conjuntos a partir destes – então todas essas contradições podem ser evitadas.»[48]
>
> (Zermelo, 2010, p. 151)

A Teoria dos Conjuntos tal como hoje a conhecemos, grande parte, desenvolveu-se no período de 1908 a 1922 pelos matemáticos *Ernest Zermelo* e *Abraham Fraenkel*. Motivo, pelo qual, referimo-nos ao conjunto de axiomas como axiomas *ZF*.

Mais tarde, *Thoralf Skolem* e *John von Neumann* modificaram-na ligeiramente, tendo sido *Skolem* quem serviu-se da linguagem de primeira ordem como suporte.

[47] Nesta teoria, todos os conjuntos são classes, no entanto, nem todas as classes são conjuntos. Conjuntos são classes que são elementos de outras classes, enquanto uma classe, não sendo um conjunto, não é elemento de nenhuma classe.

[48] «Since now, on the other hand, “order type of a well-ordered set” is certainly a logically admissible notion, it follows further—as already appears in a much simpler way from “Russell’s antinomy”, to be sure—that it is not permissible to treat the extension of every arbitrary notion as a set and that therefore the customary definition of set is too wide. But if in set theory we confine ourselves to a number of established principles such as those that constitute the basis of our proof— principles that enable us to form initial sets and to derive new sets from given ones—then all such contradictions can be avoided.»

Desconhecemos se a Teoria Axiomática[49] dos Conjuntos de *Zermelo-Fraenkel* será consistente[50] no entanto, até aos dias hoje, nunca foi encontrada nesta qualquer contradição. No entanto, sendo uma teoria aberta, novos resultados assim como axiomas, necessários ao progresso da ciência, poderão surgir e constituir uma Teoria Axiomática dos Conjuntos mais forte.

Para que possamos desenvolver uma teoria axiomática necessitamos primeiramente de definir uma linguagem. A linguagem da Teoria Axiomática dos Conjuntos é uma linguagem de primeira ordem constituída pelos símbolos a seguir designados.

Símbolos lógicos:

- **Variáveis:** representaremos as variáveis por letras minúsculas $x, y, z, \ldots$ podendo ser indexadas $x_1, x_2, \ldots$
- **Conectivos:** $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção), $\rightarrow$ (condicional) e $\leftrightarrow$ (bicondicional);

  A ordem pelo qual os conectivos lógicos ocorrem numa fórmula é relevante e por tal a utilização de parenteses é necessária. No entanto, de modo a simplificar a escrita das fórmulas, sem que haja ambiguidade, a prioridade dos conectores lógicos segue a ordem pelo qual foram acima registados.
- **Quantificadores[51]:** utilizaremos os símbolos $\forall$ (quantificador universal) e $\exists$ (quantificador existencial)
- **Símbolo de igualdade:** "=";
- **Símbolos de pontuação**: "(" (parenteses esquerdo) e ")" (parenteses direito).

Símbolos não lógicos (característicos da Teoria dos Conjuntos):

- **Símbolo relacional binário:** "$\in$"[52] que será interpretado como "pertence a…"

[49] A Teoria dos Conjuntos não-axiomática diz-se teoria intuitiva dos conjuntos.
[50] Ver segundo teorema de incompletude de *Gödel.*
[51] A quantificação tal como a conhecemos hoje foi introduzida por *Frege*. Os quantificadores "Todo" e "Algum" já eram conhecidos como operadores lógicos desde os tempos de Aristóteles. No entanto, *Frege* atribuiu-lhes uma nova análise sintáctica destes possibilitando-o lidar com quantificadores múltiplos.

Tendo apenas o alfabeto nenhuma linguagem é capaz de transmitir ideias ou conceitos. Uma expressão relativa à Teoria dos Conjuntos é uma combinação dos símbolos lógicos e não lógicos; por exemplo, $= x\forall\in\leftrightarrow$ e $\forall x(x \in z)$, são duas expressões da linguagem da Teoria dos Conjuntos. No entanto, como podemos verificar, a simples sequência de símbolos não constitui *a priori* uma expressão à qual se atribua significado. As expressões que iremos utilizar, denominadas por fórmulas (bem formadas), verificam as seguintes regras de sintaxe.

- Se x e y são variáveis então $x = y$ e $x \in y$ são fórmulas (atómicas);
- Se α e β são fórmulas então $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ e $\alpha \leftrightarrow \beta$ também são fórmulas;
- Se α é uma fórmula e x é uma variável, então $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ também são fórmulas;
- Toda a fórmula é formada a partir destas regras.

À ocorrência de uma variável x em α precedida de um quantificador onde também ocorre x dizemos que x é uma variável ligada ou muda; caso contrário dizemos que x é uma variável livre. Por exemplo, seja a fórmula $\alpha \coloneqq x \in y$.
As variáveis x e y são ambas variáveis livres em α. No entanto, na fórmula

$$\exists x(x \in y)$$

a variável x é uma variável ligada enquanto que a variável y é uma variável livre.
Dizemos ainda que a variável x é uma variável livre numa fórmula φ se x ocorrer, pelo menos, uma vez livre em φ.
Sendo uma linguagem de primeira ordem, a notação $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ indica-nos que as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ são variáveis livres em φ.
Quando $y_1, y_2, \dots, y_n$ são variáveis livres para $x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a fórmula resultante da substituição denota-se por $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Uma fórmula onde não ocorram variáveis livres diz-se uma proposição.

---

[52] A utilização do símbolo $\in$ com o objectivo de indicar a relação de pertença deve-se a Giuseppe Peano (1889).

No que respeita à semântica, estabelecemos que os elementos do domínio de interpretação, desta linguagem, denotam conjuntos.

Para se formular a teoria é necessário apresentar os axiomas. O valor verdade dos axiomas não é logicamente deduzido a partir de asserções anteriormente demonstradas como sendo verdadeiras; assumimos simplesmente que são verdadeiros.

Alguns axiomas de *Zermelo*

Antes de começarmos propriamente por expor parte da axiomática de *Zermelo-Fraenkel*, *ZF*, salientamos que esta é apenas uma das várias axiomáticas existentes na Teoria dos Conjuntos.

Zermelo apresentou sete axiomas, um axioma da extensão, um axioma de conjuntos elementares, um esquema de axiomas de separação, um axioma da união, um axioma do conjunto potência, um axioma do infinito e um axioma da escolha. Salientamos, ainda, que não começou por definir explicitamente o conceito de conjunto, no entanto, a definição de *Cantor* deste conceito encontra-se subjacente ao seu sistema axiomático.

No início da sua obra *Zermelo* assinala o significado da Teoria dos Conjuntos para a matemática.

> «A Teoria dos Conjuntos é o ramo da matemática cuja tarefa é investigar matematicamente as noções fundamentais de "número", "ordem" e "função", tomando-as na sua forma pura, simples e desenvolver assim os fundamentos lógicos de toda a aritmética e análise; portanto, constitui um componente indispensável da ciência da matemática.»[53]
>
> (Zermelo, 2010, p. 189)

Os axiomas aplicam-se a conjuntos pelo que quando escrevemos "$x \in y$" supomos que x e y são conjuntos e que os elementos destes são, também, conjuntos[54] e assim sucessivamente.

---

[53] «Set theory is that branch of mathematics whose task is to investigate mathematically the fundamental notions "number", "order", and "function", taking them in their pristine, simple form, and to develop thereby the logical foundations of all of arithmetic and analysis; thus it constitutes an indispensable component of the science of mathematics. »

[54] *Bolzano* já o explicitava.

A ordem pelo qual apresentamos os axiomas não se encontra de acordo com a ordem de *Zermelo* mas pela que nos pareceu estar mais de acordo com o que seria natural. Assim, comecemos com um axioma que garante que há pelo menos um conjunto:

Axioma da existência[55] **5.1.** Existe um conjunto sem elementos.

Exemplos de um conjunto desta natureza não é difícil de encontrar, basta pensarmos numa caixa sem objectos no seu interior ou numa cerca sem reter qualquer animal.
No entanto, *Zermelo* qualifica o conjunto sem elementos de "fictício". Como vimos anteriormente, *Cantor* define um conjunto como sendo *"uma colecção num todo M de objectos"* onde a palavra "colecção" sugere-nos a aglomeração de objectos da mesma natureza pelo que a definição de conjunto não se adequa. Daí, a qualificação de *Zermelo*.
Mas estaremos perante um conjunto? A controvérsia não é nova, *Bertrand Russell* refere que

> «(…) uma classe que não tem termos não é nada: o que é meramente e unicamente uma colecção de termos não pode subsistir quando todos os termos são removidos.»[56]
>
> (Principles of Mathematics, 1903, p.74)

Também *Zermelo*, em correspondência com *Fraenkel* (1921), faz transparecer a sua preocupação relativamente a esta questão

> «Já agora, a justificação do "conjunto vazio" está a tornar-se cada vez mais duvidosa para mim. Seria possível dispensá-lo por uma limitação adequada do axioma da separação?[57]
> Na verdade, o conjunto vazio serve apenas para alguma simplificação formal.»[58]

Actualmente o conjunto vazio partilha do mesmo estatuto de conjunto como os demais.

---

[55] Este axioma é também conhecido como axioma do vazio.
[56] «(…) a class which has no terms fails to be anything at all: what is merely and solely a collection of terms cannot subsist when all the terms are removed.»
[57] Mais adiante, constataremos que este axioma é dedutível a partir dos axiomas de separação desde que assumamos a existência prévia de, pelo menos, um conjunto e, por consequente, supérfluo.
[58] «By the way, the justification of the "empty set" is becoming more and more doubtful for me. Would it be possible to dispense with it by a suitable limitation of the axiom of separation? Actually, the empty set serves only for some formal simplification.»

Observemos que o axioma garante a existência de um conjunto sem elementos mas não a o facto de existir um e um só conjunto em tais condições. Para que possamos garantir a unicidade deste, ou de outro conjunto que possamos construir, enunciaremos o seguinte axioma:

Axioma da extensão[59] 5.2. Dois conjuntos são iguais se e só se tiverem os mesmos elementos.

Com este axioma formalizamos a relação existente entre pertença, "$\in$", e igualdade de conjuntos "=". Por este motivo há quem declare que este axioma se deveria intitular de unicidade já que não existem dois conjuntos (distintos) com precisamente os mesmos elementos[60]. Deste modo, um conjunto determina-se pelos elementos que lhe pertencem e não pelo modo como é construído.

Este axioma foi inicialmente enunciado por *Bolzano* (*Größenlehre*[61]) como um dos quatro atributos para a noção de conjunto. Cerca de quarenta anos mais tarde, *Dedekind* formulou este princípio independentemente de *Bolzano*. Crê-se que *Zermelo* tenha tido conhecimento deste através do trabalho de *Dedekind* sendo este o primeiro axioma, denominado de axioma de certeza, enunciado em *Investigations in the Foundations of set theory I* (1908).
Estamos agora em condições de provar a unicidade de um conjunto sem elementos.

Proposição 5.3. O conjunto sem elementos é único.
Demonstração: A existência de, pelo menos, um conjunto sem elementos é garantida pelo axioma da existência pelo que apenas teremos que provar a sua unicidade. Suponhamos, por absurdo, que existem dois conjuntos sem elementos, x e y distintos, i.e.,

[59] Este axioma é também conhecido por axioma da extensionalidade.
[60] Por este motivo é que num conjunto não interessa a ordem dos elementos nem contamos com os elementos que se repetem.
[61] Ensino sobre a dimensão (1875) publicado postumamente em 1975 pelo que quer *Dedekind*, quer *Zermelo* não teriam conhecimento desta obra.

$x \neq y$. Sendo x e y conjuntos sem elementos, eles têm os mesmos elementos (nenhum elemento), logo pelo axioma da extensão temos que $x = y$ obtendo uma contradição.$\blacksquare$

Definição 5.4. Denominamos o conjunto sem elementos de conjunto vazio e representamo-lo pelo símbolo $\emptyset$.[62]

Para podermos ilustrar o motivo pelo qual *Zermelo* introduz o axioma que se segue, apoiamo-nos no conhecimento que possuímos relativamente à Teoria dos Conjuntos intuitiva relativamente à representação de conjuntos simples.
Os conjuntos podem ser representados por dois modos distintos: por extensão e por compreensão.
Representamos o conjunto por extensão quando escrevemos todos os elementos que lhe pertencem entre parenteses separando estes por vírgulas, por exemplo, $x = \{1,2,3\}$.

Quando o número de elementos do conjunto é considerável, no entanto finita, não é viável escrevermos todos os elementos que pertencem ao conjunto um a um. Podemos, simplesmente, utilizar o símbolo de reticências "…" de forma a transmitir que há mais elementos de acordo com a regra estabelecida por uma sequência de alguns elementos que lhe pertencem. Por exemplo, o conjunto $y = \{1,2,3, \dots, 99, 100\}$ representa os 100 primeiros elementos do conjunto dos números naturais.

Quando o conjunto tem um número infinito de elementos é-nos impossível escrever todos os seus elementos. No entanto, é possível transmitir quais os elementos que lhe pertencem. Por exemplo, o conjunto dos números naturais $\{1,2,3, \dots\}$ pode ser representado por extensão colocando a sucessão dos primeiros elementos, os suficientes de forma a transmitir a regra, seguido de reticências, i.e., continua indefinidamente.
No que concerne à representação por compreensão, observando os exemplos acima expostos, intuímos que conjuntos são colecções de objectos que partilham uma regra ou

[62] Caso não se tivesse a existência e a unicidade do conjunto sem elementos, a notação $\emptyset$ não estaria bem definida.

propriedade, por exemplo, o conjunto dos números naturais inferiores a 4 ou os 100 primeiros elementos do conjunto dos números naturais.

Contudo, como tivemos oportunidade de observar, esta forma de definir conjuntos é perigosa. Observemos o seguinte exemplo: Seja m o conjunto definido pelos elementos que verificam a propriedade $x = x$, i.e., $m = \{x : x = x\}$.

- Se $y \notin m$ então $y \neq y$ contradizendo o axioma de extensão.
- Se $y \in m$ então $y = y$ sendo uma tautologia, todo o conjunto é elemento de m mas o conjunto de todos os conjuntos não existe.

Aquando da constituição dos axiomas da Teoria dos Conjuntos, *Zermelo* prestou atenção aos paradoxos de *Russell* e de *Burali-Forti*[63] pois pretendia continuar a poder usufruir de todo o potencial da teoria intuitiva dos conjuntos mas livre de paradoxos.

Ponderou, assim, restringir o princípio de compreensão, isto é, considerar inicialmente a existência de um conjunto e aplicar, a este, uma propriedade limitativa em relação aos seus elementos assegurando, desse modo, um novo conjunto.

Por exemplo, se definirmos m do seguinte modo $\{x \in \mathbb{N} : x = x\}$, m é um conjunto, neste caso, idêntico a $\mathbb{N}$.

Assim, *Zermelo* apresenta o axioma que previne o aparecimento de paradoxos, pelo menos, daqueles que já se sabem existir.

Axiomas esquema[64] de separação 5.5. Para cada conjunto x, existe um conjunto y tal que $z \in y$ se, e só se $z \in x$ e se verifique $\varphi(z)$**.**

A unicidade dos conjuntos estabelecidos por qualquer um dos axiomas será uma constante. Provemos que um conjunto definido segundo este axioma é único.

Proposição 5.6. Para todo o conjunto x, existe um único conjunto y tal que $z \in y$ se, e só se $z \in x$ e $\varphi(z)$.

---

[63] O paradoxo de *Burali-Forti*, cuja descoberta deve-se a *Cesare Burali-Forti* (1897), declara que não existe um número ordinal maior que todos outros números ordinais, isto é, não existe o "conjunto de todos os números ordinais" (porque este conjunto seria, ele próprio, um número ordinal).

[64] Um esquema é um conjunto (infinito) de axiomas gerado de forma (recursiva) simples. No presente caso, para cada fórmula φ temos um axioma.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que existe um outro conjunto y' tal que $z \in y'$ se, e só se $z \in x$ e $\varphi(z)$.
Se $z \in y$ temos que $z \in x$ e $\varphi(z)$ implicando $z \in y'$ e se $z \in y'$ temos que $z \in x$ e $\varphi(z)$ implicando $z \in y$. Concluímos, assim, que $z \in y$ se, e só se $z \in y'$.
Concluindo, pelo axioma da extensão, que $y = y'$ e a unicidade do conjunto y.■

Estamos agora em condições de apresentar a definição do conjunto definido por $\varphi(z)$ em x.

Definição 5.7. Denotamos por $\{z \in x : \varphi(z)\}$ o conjunto de todos os elementos de x que verificam a propriedade $\varphi(z)$.

Os axiomas de separação, apesar de afastarem os famosos paradoxos, não nos fornecem novos elementos, pelo que garantimos apenas ainda a existência de um único elemento – o conjunto vazio.

$$\{z \in \emptyset : \varphi(z)\} = \emptyset$$

Necessitamos de novos axiomas que nos permitam a construção de novos conjuntos a partir de outros desde que previamente garantida a sua existência.

Axioma do par não ordenado[65] 5.8. Para todos os conjuntos x e y existe um conjunto cujos únicos elementos são x e y.

Antes de provarmos a unicidade dos conjuntos gerados através deste axioma, observemos que se $x = y = \emptyset$ obtemos o conjunto $\{\emptyset, \emptyset\}$, ou seja $\{\emptyset\}$. Intuímos, facilmente, que os conjuntos $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ são distintos; o conjunto $\emptyset$ não tem elementos e que o conjunto $\{\emptyset\}$ tem um elemento. Aplicando, sucessivamente, o axioma do par não ordenado geramos uma infinidade de conjuntos

$$\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \left\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\right\}, \left\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\} \ldots$$

[65] Este axioma é também conhecido por axioma do par.

embora, cada um possua, no máximo, dois elementos.

Provemos a unicidade de cada um dos conjuntos gerados pelo axioma do par não ordenado.

Teorema 5.9. O conjunto cujos elementos são apenas x e y é único.

Demonstração: Relativamente à sua existência esta encontra-se garantida pelo axioma de par não ordenado. Quanto à unicidade suponhamos, por absurdo, que existe um conjunto w', distinto de w, cujos elementos são, também, apenas x e y, isto é,

$$\forall x\ \forall y\ \exists w'\ \forall z\ (z \in w' \Leftrightarrow z = x \lor z = y)$$

Concluindo que, para qualquer que seja z, $z \in w' \Leftrightarrow z \in w$.

Pelo axioma da extensão $w = w'$ completando a prova.■

Definição 5.10. O par não ordenado de x e y é o conjunto que tem exactamente x e y como elementos e representamos este conjunto por $\{x, y\}$.

Se $x = y$ o conjunto formado terá apenas um único elemento denominado por conjunto singular que representamos por $\{x\}$ (ou $\{y\}$).

Para que possamos provar a afirmação que os conjuntos, $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ são distintos, recorrendo a uma linguagem mais simples, apresentamos a seguinte abreviação,

Definição 5.11. Se x e y são dois conjuntos a expressão "$x \subseteq y$" significa que todo o elemento z de x é, também, elemento de y. Isto é, $x \subseteq y$ abrevia $\forall z(z \in x \Longrightarrow z \in y)$.

Se $x \subseteq y$ dizemos que "x é um subconjunto de y". Se $x \subseteq y \land x \neq y$ dizemos que "x é subconjunto próprio de y" representando a relação por $x \subsetneq y$.

Caso a relação "x é um subconjunto de y" não se verificar definimos $x \nsubseteq y \equiv \neg(x \subseteq y)$.

Suponhamos então, por absurdo, que $\emptyset = \{\emptyset\}$. Pelo axioma de extensão temos que $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ e $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$.

Relativamente à primeira proposição, $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ temos que para qualquer elemento z tal que $z \in \emptyset \Longrightarrow z \in \{\emptyset\}$ é uma tautologia devido à falsidade do antecedente.
Relativamente à segunda proposição, $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$ podemos deduzir que $\emptyset \in \emptyset$. No entanto, pelo axioma da existência, $\emptyset \notin \emptyset$ pelo que, chegando a uma contradição, concluímos que $\{\emptyset\} \nsubseteq \emptyset$. Provando que $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ são dois conjuntos distintos.

Para que possamos construir conjuntos mais complexos teremos que adicionar um novo axioma aos já referidos.

Axioma do conjunto das partes[66] 5.12. Para cada conjunto x existe um conjunto y tal que para todo o z

$$z \in y \text{ se, e só se } z \subseteq x$$

O conjunto cuja existência é garantida por este axioma, pelo axioma de extensão, é único motivo pelo qual apresentamos a seguinte definição,

Definição 5.13. O conjunto cujos elementos são os subconjuntos de x diz-se o conjunto das partes de x que representamos por $\mathcal{P}(x)$.

Consideremos o seguinte exemplo: Seja $x = \{y, z\}$. O conjunto das partes de x é $\mathcal{P}(x) = \big\{\emptyset, \{y\}, \{z\}, \{y, z\}\big\}$.

Salientamos o seguinte facto, para qualquer conjunto x, o conjunto vazio pertence sempre ao conjunto das partes de x motivo pelo qual apresentamos a seguinte proposição.

Proposição 5.14. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, i.e., $\forall x\ (\emptyset \subseteq x)$.
Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\exists x\ (\emptyset \nsubseteq x)$ então $\exists y\ (y \in \emptyset\ \wedge\ y \notin x)$.
Como, pela definição de conjunto vazio, $y \in \emptyset$ é falsa a proposição $\exists y\ (y \in \emptyset\ \wedge\ y \notin x)$ é falsa, donde $\forall x\ (\emptyset \subseteq x)$ é verdadeira.∎

[66] Este axioma também é conhecido por axioma de potência.

O próximo axioma possibilitar-nos-á gerar conjuntos com mais elementos.

Axioma da união 5.15. Para todo o conjunto x existe um conjunto que tem por elementos precisamente todos os elementos dos elementos de x.
Pelo axioma de extensão este conjunto é único pelo que podemos apresentar a seguinte definição.

Definição 5.16. O conjunto de todos os conjuntos que pertencem a algum elemento de x diz-se a união do conjunto x e representaremos este conjunto por $\bigcup x$.

Como exemplo, seja o conjunto $x = \big\{\{y, u\}, \{\{y, z\}, v\}\big\}$ então

$$\bigcup x = \{y, v, u, \{y, z\}\}$$

é o conjunto cujos elementos são elementos dos elementos de x.

Dado o conjunto x, o axioma da união garante a existência do conjunto

$$\bigcup x = \{z \colon \exists y\ (y \in x \wedge z \in y)\}$$

Em particular, dados os conjuntos x e y pelos axiomas do par não ordenado e da união temos garantida a existência do conjunto $\bigcup\{x, y\}$ que denotamos por $x \cup y$.

Proposição 5.17. $\forall x(x \in y \Rightarrow x \subseteq \bigcup y)$
Demostração: Seja y um conjunto e fixemos x tal que $x \in y$. Tomemos z tal que $z \in x$. Como z é um elemento de um elemento de y temos que $z \in \bigcup y$, logo

$$\forall x \left(x \in y \ \Rightarrow \forall z \ \left(z \in x \Rightarrow z \in \bigcup y\right)\right)$$

Simplificando temos

$$\forall x \ \left(x \in y \ \Rightarrow x \subseteq \bigcup y\right). \blacksquare$$

Já muito se consegue expressar com os axiomas mencionados até ao momento. No entanto,

«(…) para garantir a existência de conjuntos infinitos precisamos ainda do seguinte axioma, que se deve essencialmente ao Sr. *R. Dedekind*.»[67]

(Zermelo, 2010, p. 201)

Zermelo refere *Dedekind* (1888) pelo facto de este já ter definido um conjunto (o qual *Dedekind* denota por "*sistema*") infinito.

«Um sistema S é dito ser infinito quando é semelhante a uma parte adequada de si mesmo; no caso contrário, S é dito ser um sistema finito.»

Assim, o próximo axioma postula a existência de pelo menos um conjunto infinito.

Axioma do infinito[68] 5.18. Existe um conjunto x que tem o $\emptyset$ como elemento e para cada elemento seu y então $y \cup \{y\}$ também lhe pertence.

A partir do conjunto vazio $\emptyset$, aplicando o axioma do par não ordenado obtemos o conjunto $\{\emptyset\}$. Através do axioma da união obtemos $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$.
Continuando o processo, obtemos $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
E assim sucessivamente obtendo a sucessão infinita de conjuntos

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

com 0, 1, 2, 3, 4, … elementos.

Os axiomas que expusemos podem ser, formalmente, apresentados da seguinte forma:

Axioma de extensão: $\forall x\, \forall y\, (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Longrightarrow x = y)$

Podendo ainda apresentar o axioma da extensão da seguinte forma

$$\forall x\, \forall y\, (x \subseteq y \wedge y \subseteq x \Longrightarrow x = y)$$

Axioma da existência: $\exists y \forall x\, \neg(x \in y)$

[67] «(…) to secure the existence of infinite sets we still require the following axiom, which is essentially due to Mr. *R. Dedekind*.»
[68] É a *Bolzano* a quem se atribui a primeira tentativa em considerar conjuntos infinitos.

Axioma esquema de separação:

$$\forall x_0, x_1, \dots, x_n\ \forall x \exists y \forall z \big(z \in y \Leftrightarrow z \in x\ \wedge \varphi(z, x_0, x_1, \dots, x_n) \big)$$

Axioma do par não ordenado: $\forall x\ \forall y\ \exists w\ \forall z\ (z \in w \Leftrightarrow z = x \vee z = y)$

Axioma da união: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ \big(z \in y \Leftrightarrow\ \exists v\ (v \in x \wedge z \in v\ )\big)$

Axioma do conjunto das partes: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$

Axioma do infinito: $\exists x \Big(\emptyset \in x \wedge \big(\forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)\Big)$

Operações sobre conjuntos

De acordo com a definição 5.11., o conceito de inclusão (estar contido) é formalizado na Teoria dos Conjuntos por $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$

Vejamos algumas propriedades da operação "estar contido".

Proposição 5.19. Quaisquer conjuntos x, y e z verificam as seguintes propriedades[69]:

i) $x \subseteq x$; (Propriedade reflexiva)

ii) Se $x \subseteq y$ e $y \subseteq x$ então $x = y$; (propriedade anti-simétrica)

iii) Se $x \subseteq y$ e $y \subseteq z$ então $x \subseteq z$. (propriedade transitiva)

Demonstração:

i) Para cada x, temos $\forall w\ (w \in x \Rightarrow w \in x)$ então $x \subseteq x$.

ii) Se $x \subseteq y$ e $y \subseteq x$ temos que $\forall w\ (w \in x \Rightarrow w \in y)$ e $\forall w\ (w \in y \Rightarrow w \in x)$.

Fixando w arbitrário temos que $w \in x \Leftrightarrow w \in y$, logo $\forall w\ (w \in x \Leftrightarrow w \in y)$. Pelo axioma de extensão, temos que $x = y$.

[69] Pelo facto da operação " $\subseteq$ " verificar estas três propriedades dizemos que é uma relação de ordem parcial.

iii) Se $x \subseteq y$ e $y \subseteq z$ temos que $\forall w\ (w \in x \Longrightarrow w \in y)$ e $\forall w (w \in y \Longrightarrow w \in z)$

Fixando w arbitrário temos que $w \in x \Longrightarrow w \in z$, provando-se que $x \subseteq z$.∎

De modo a formalizarmos, com maior detalhe, a operação binária união (de dois conjuntos) de acordo com a axiomática apresentada carecemos dos axiomas do par não ordenado e da união e, para a unicidade do conjunto gerado por esta operação, do axioma de extensão.

Proposição 5.20. Se x e y são dois conjuntos então existe um único conjunto formado por todos os conjuntos que pertencem a x ou a y, isto é,

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow w \in x \vee w \in y)$$

Demonstração: Se x e y são dois conjuntos aplicando o axioma do par não ordenado obtemos o conjunto $\{x, y\}$. Aplicando o axioma da união a $\{x, y\}$ obtemos o conjunto

$$z = \bigcup \{x, y\}$$

Para todo o elemento w, $w \in z$ se, e só se existir um elemento u tal que $u \in \{x, y\} \wedge w \in u$. Se $u \in \{x, y\}$ então $u = x\ \vee\ u = y$ e, consequentemente, $w \in x \vee w \in y$.

Pelo axioma da extensão temos a unicidade concluindo-se a demonstração.∎

Definição 5.21. A união de x e y, que representaremos por $x \cup y$, é o conjunto $\cup \{x, y\}$ formado por todos os elementos que pertencem a x, a y ou a ambos.

$$z \in x \cup y \Leftrightarrow z \in x \vee z \in y$$

Zermelo (2010) fundamenta, a partir dos axiomas de separação, as operações de complementar e intersecção de dois conjuntos. Comecemos pela primeira operação referida, o complementar de dois conjuntos.

O axioma da separação (para a existência) e o axioma da extensão (para a unicidade) permitem a seguinte definição:

Definição 5.22. Se x e y são dois conjuntos definimos o conjunto "diferença de x e y", $x \backslash y$, por $x \backslash y = \{z \in x : z \notin y\}$

Observe que se $x \subseteq y$ então y terá outro subconjunto que contém todos os elementos de y que não são elementos de x. Este subconjunto de y dizemos ser o "complementar de x em y" e representamos por $y \backslash x$.

Proposição 5.23. Para cada conjunto x, y e z verificam-se as seguintes propriedades:

i) $x \backslash x = \emptyset$;

ii) $x \backslash \emptyset = x$;

iii) $x \subseteq y \Longrightarrow (y \backslash (y \backslash x) = x)$; (dupla complementação)

Demonstração:

i) De acordo com a proposição 5.19. ii) mostraremos que $x \backslash x \subseteq \emptyset$ e $\emptyset \subseteq x \backslash x$.

Se $w \in x \backslash x$ então, pela definição de complementar, temos que $w \in x \wedge w \notin x$, logo $w \in \emptyset$. Tendo $\forall w\ (w \in x \backslash x \Longrightarrow w \in \emptyset)$ prova-se, pela definição de subconjunto, que $x \backslash x \subseteq \emptyset$.

Relativamente ao segundo caso, temos como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto pelo que $\emptyset \subseteq x \backslash x$.

ii) De acordo com a proposição 5.19. ii) mostraremos que $x \backslash \emptyset \subseteq x$ e $x \subseteq x \backslash \emptyset$.

Se $w \in x \backslash \emptyset$ então, pela definição de complementar, temos que $w \in x \wedge w \notin \emptyset$. Como $w \notin \emptyset$ é uma proposição verdadeira $w \in x$. Assim, $\forall w\ (w \in x \backslash \emptyset \Longrightarrow w \in x)$, i.e., $x \backslash \emptyset \subseteq x$.

Relativamente ao segundo caso, se $w \in x$, por definição de conjunto vazio, temos que $w \notin \emptyset$. Assim, por definição de completar, temos que $w \in x \backslash \emptyset$. Como $\forall w\ (w \in x \Longrightarrow w \in x \backslash \emptyset)$ prova-se que $x \subseteq x \backslash \emptyset$.

iii) De acordo com a proposição 5.19. ii) mostraremos que se $x \subseteq y$ então $x \subseteq y \backslash (y \backslash x)$ e $y \backslash (y \backslash x) \subseteq x$.

Se $w \in x$ então, por hipótese, temos $w \in y$. No entanto, pela definição de complementar, $w \in y$ mas $w \notin y \backslash x$, i.e., $w \in y \backslash (y \backslash x)$. Assim, $x \subseteq y \backslash (y \backslash x)$.

Relativamente ao segundo caso, se $w \in y \backslash (y \backslash x)$, pela definição de complementar, temos que $w \in y$ e $w \notin y \backslash x$ equivalendo a $w \in y$ e $(w \notin y$ ou $w \in x)$. Assim, $w \in x$ e $y \backslash (y \backslash x) \subseteq x$.$\blacksquare$

Ao contrário da reunião de uma família de conjuntos a operação intersecção de uma família de conjuntos não se encontra explícita nos axiomas anteriormente apresentados mas é, formalizável a partir destes razão pela qual enunciaremos o teorema que nos permite definir o conjunto $\bigcap x$ e a sua unicidade.

Proposição 5.24. Dado um conjunto, **não vazio**, x existe o conjunto formado por todos os elementos que pertencem simultaneamente a todos os elementos de x.

Demonstração: Seja z um elemento de $x(\neq \emptyset)$ e consideremos o conjunto

$$y = \{v \in z : \forall w(w \in x \Longrightarrow v \in w)\}$$

Deste modo, um elemento pertence ao conjunto y se, e somente se, este elemento pertencer simultaneamente a todos os elementos de x.

Relativamente à unicidade, esta deve-se ao axioma de extensão.■

Não podemos deixar de salientar a restrição que efectuamos ao conjunto vazio nesta operação. Vejamos como definiríamos $\bigcap \emptyset$, i.e., se $x = \emptyset$.

$$\forall z\big(z \in \bigcap \emptyset \Leftrightarrow \forall w(w \in \emptyset \Longrightarrow z \in w)\big)$$

De acordo com o axioma de existência e pelo princípio de vacuidade, $\forall w(w \in \emptyset \Longrightarrow z \in w)$ é sempre verdadeiro implicando que qualquer elemento z (ele próprio um conjunto) pertença a $\bigcap \emptyset$. Tal implica que $\bigcap \emptyset$ resulta no conjunto de todos os conjuntos que, como já tivemos oportunidade de verificar, não existe, daí a restrição aplicada.

Definição 5.25. Para todo o conjunto, não vazio, x, a sua intersecção, $\bigcap x$, é constituída por todos os elementos que pertencem simultaneamente a todos os elementos de x.

Definição 5.26. A intersecção dos conjuntos x e y é o conjunto de todos os elementos que pertencem simultaneamente a x e a y. Denotamos este conjunto por $x \cap y$.

$$x \cap y = \{z \in x : z \in y\}$$

Definição 5.27. Dizemos que dois conjuntos x e y são "disjuntos" se, e só se não tiverem elementos em comum.

Proposição 5.28. Para cada conjunto x, y e z verificam-se as seguintes propriedades:

i) $x\bigcap(y\backslash x) = \emptyset$; (exclusão)

ii) $x \subseteq y \Longrightarrow (x \cup (y\backslash x) = y)$; (complementação)

Leis de *De Morgan*

iii) $x\backslash(y \cap z) = (x\backslash y) \cup (x\backslash z)$;

iv) $x\backslash(y \cup z) = (x\backslash y) \cap (x\backslash z)$

Demonstração:

i) De acordo com a proposição 5.19. ii) mostraremos que $x\bigcap(y\backslash x) \subseteq \emptyset$ e $\emptyset \subseteq x\bigcap(y\backslash x)$.

Se $w \in x\bigcap(y\backslash x)$ então, por definição de intersecção, temos que $w \in x$ e $w \in y\backslash x$. Pela definição de complementar, $w \in x$ e $w \in y$ e $w \in x$ e $w \notin x$ que, por ser uma proposição falsa, $w \in \emptyset$. Assim, pelo facto de $\forall w\,(w \in x\bigcap(y\backslash x) \Longrightarrow w \in \emptyset)$ prova-se que $x\bigcap(y\backslash x) \subseteq \emptyset$.

Relativamente ao segundo caso, temos como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto pelo que $\emptyset \subseteq x\bigcap(y\backslash x)$.

ii) De acordo com a proposição 5.19. ii) mostraremos que se $x \subseteq y$ então $x \cup (y\backslash x) \subseteq y$ e $y \subseteq x \cup (y\backslash x)$.

Se $w \in x \cup (y\backslash x)$ então, pela definição de união, temos que $w \in x$ ou $w \in y\backslash x$. Então, como por hipótese $x \subseteq y$, temos que $w \in y$ ou $(w \in y$ e $w \notin x)$ que equivale $w \in y$. Assim, pelo facto de $\forall w\,(w \in x \cup (y\backslash x) \Longrightarrow w \in y)$ prova-se que $x \cup (y\backslash x) \subseteq y$.

Relativamente ao segundo caso, se $w \in y$ então, como por hipótese $x \subseteq y$, temos que $w \in x$ ou $(w \in y$ e $w \notin x)$ que, por definição de complementar, traduz-se da seguinte forma, $w \in x$ ou $w \in y\backslash x$. Assim, pela definição de união, temos que $w \in x \cup (y\backslash x)$. A partir de $\forall w\,\big(w \in y \Longrightarrow w \in x \cup (y\backslash x)\big)$ prova-se que $y \subseteq x \cup (y\backslash x)$.

iii) De acordo com a proposição 5.19. ii) mostraremos que $x\backslash(y \cap z) \subseteq (x\backslash y) \cup (x\backslash z)$ e $(x\backslash y) \cup (x\backslash z) \subseteq x\backslash(y \cap z)$.

Se $w \in x\backslash(y \cap z)$ então, pela definição de complementar, temos que $w \in x$ e $w \notin y \cap z$, i.e., $w \in x$ e $(w \notin y$ ou $w \notin z)$. Assim, $(w \in x$ e $w \notin y)$ ou $(w \in x$ e $w \notin z)$ traduz-se em $w \in x\backslash y$ ou $w \in x\backslash z$ que, pela definição de união, $w \in (x\backslash y) \cup (x\backslash z)$.

Tendo que $\forall w\big(w \in x\backslash(y \cap z) \Longrightarrow w \in (x\backslash y) \cup (x\backslash z)\big)$ então $x\backslash(y \cap z) \subseteq (x\backslash y) \cup (x\backslash z)$.

Relativamente ao segundo caso, se $w \in (x\backslash y) \cup (x\backslash z)$, pela definição de união, temos que $w \in x\backslash y$ ou $w \in x\backslash z$. Assim, pela definição de complementar, ($w \in x$ e $w \notin y$) ou ($w \in x$ e $w \notin z$) que equivale a $w \in x$ e ($w \notin y$ ou $w \notin z$). Pelas definições de intersecção e de complementar, temos que $w \in x\backslash(y \cap z)$.

Tendo que $\forall w\big(w \in (x\backslash y) \cup (x\backslash z) \Longrightarrow\ w \in x\backslash(y \cap z)\big)$ então

$$(x\backslash y) \cup (x\backslash z) \subseteq x\backslash(y \cap z)$$

iv) A demonstração é similar à demonstração da alínea iii) .■

Relações binárias

> «Os matemáticos não estudam objectos, mas relações entre eles. Assim, eles têm a liberdade em substituir alguns objectos por outros, desde que as relações permaneçam inalteradas. O conteúdo para eles é irrelevante: eles interessam-se apenas pela forma.»[70]
>
> *Poincaré*

É comum e até fundamental no dia-a-dia a noção de relação entre dois entes. Por exemplo,

- O André é casado com a Margarida;
- 3 é inferior, ou igual, a 5;
- A casa da Mónica foi mais dispendiosa que a casa da Isabel mas menos dispendiosa que a casa do Rafael;

são relações.

Podemos verificar, no primeiro exemplo, que a ordem dos entes “André” e “Margarina” é irrelevante; O André e a Margarida estão casados um com o outro sendo a relação binária “casado com” uma relação que verifica a propriedade simétrica. No entanto, a noção de ordem entre os entes é importante em muitas outras relações. Observemos que, no segundo exemplo se trocarmos os entes 3 e 5 obtemos uma proposição falsa; 5 não é inferior, ou igual, a 3.

[70] «Mathematicians do not study objects, but relations between objects. Thus, they are free to replace some objects by others as long as the relations remain unchanged. Content to them is irrelevant: they are interested in form only.»

Fundamentar o conceito de relação binária através da Teoria dos Conjuntos será representar este sob a forma de conjunto. No entanto, os conjuntos, até agora formados, não nos permitem distinguir os elementos por uma ordem em particular. Recordemos que, o axioma do par não ordenado permite-nos construir, a partir de dois conjuntos x e y, o conjunto com apenas dois elementos $\{x, y\}$ cuja ordem dos elementos é irrelevante. Lembremo-nos, de outras andanças, que a ordem dos elementos x e y que compõem o par ordenado (x, y), contrariamente ao conjunto $\{x, y\}$, é fundamental, isto é, geralmente, $(x, y) \neq (y, x)$.
A noção primitiva de par ordenado é anterior à Teoria dos Conjuntos. Como poderiam os matemáticos relacionar um par ordenado com um conjunto específico de forma a verificarmos as propriedades comummente aceites à noção pré-existente?
Muitos matemáticos da época aceitaram o desafio. Assim, a primeira definição de par ordenado deve-se a *Norbert Wiener* (1914) que definiu o par ordenado x e y da seguinte forma $(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}$.
A teoria axiomática apresentada por *Zermelo* assegura a existência do par ordenado definido por *Nobert Wiener*. O axioma dos conjuntos elementares, apresentado por *Zermelo*, garante a existência de um conjunto sem elementos, um conjunto singular e um conjunto de pares não ordenados necessários à construção do conjunto definido por *Wiener* para par ordenado.
Em 1921 uma definição, mais simples, foi apresentada por *Kazimierz Kuratowski* que, pelo facto de esta ser a mais utilizada, apresentamos a sua definição.

Definição 5.29. Para quaisquer dois conjuntos x e y escrevemos (x, y) no lugar de $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Denominamos (x, y) como o par ordenado de x e y e denominamos x e y como as 1ª e 2ª coordenadas, respectivamente.

Temos, no entanto, que verificar se a definição, de par ordenado, enunciada por *Kuratowski* é adequada, i.e., se esta verifica a propriedade fundamental dos pares ordenados.

Proposição 5.30. Para quaisquer x_1, x_2, y_1 e y_2 temos que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ se, e só se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Demonstração: Suponhamos que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Assim, por definição de par ordenado, temos $\{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}$.

1º caso: Se $x_1 \neq y_1$ temos que $\{x_1\} = \{x_2\}$ implicando a igualdade, $x_1 = x_2$. Agora, a partir de $\{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\}$ obtemos a segunda igualdade, $y_1 = y_2$. Conjugando os dois resultados temos que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ como pretendíamos.

2º caso: Se $x_1 = y_1$ da definição de par ordenado obtemos a seguinte simplificação

$$\{\{x_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}$$

implicando $\{x_1\} = \{x_2\} = \{x_2, y_2\}$ obtendo, em particular, as igualdades pretendidas $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Reciprocamente, se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ então $\{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}$ obtendo, pela definição de par ordenado, a igualdade pretendida $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.■

Após termos definido o objecto "par ordenado" através da Teoria dos Conjuntos iremos verificar que para quaisquer conjuntos x e y, todos os pares ordenados (x_1, y_1) tal que $x_1 \in x \ \wedge y_1 \in y$ constituem um conjunto.

Proposição 5.31. Para cada conjunto x e y existe o conjunto de todos os pares ordenados (x_1, y_1) tal que $x_1 \in x \ \wedge y_1 \in y$.

Demonstração: Sejam x e y dois conjuntos distintos do vazio e x_1 e y_1 seus elementos, respectivamente. Pelo axioma da união, $\forall x \, \forall y \, \exists c: c = \bigcup\{x, y\} = x \cup y$.

Devido ao facto de $x_1 \in x$ e $y_1 \in y$ temos que $\{x_1\} \subseteq x \cup y$ e $\{x_1, y_1\} \subseteq x \cup y$

Pelo axioma do conjunto das partes $\{x_1\} \in \mathcal{P}(x \cup y)$ e $\{x_1, y_1\} \in \mathcal{P}(x \cup y)$ donde

$$\{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$$

Uma vez mais, pelo axioma do conjunto das partes $\{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))$

Logo, pelo axioma de separação, temos o conjunto

$$w = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)): \exists x_1, \exists y_1 (z = \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} \wedge x_1 \in x \ \wedge y_1 \in y)\}$$

que, pelo axioma da extensão, é único.

Caso $x = \emptyset$ ou $y = \emptyset$ não existe qualquer par ordenado nas condições do enunciado pelo que o conjunto vazio verifica o pretendido.$\blacksquare$

Estamos agora em condições de apresentar a seguinte definição de produto cartesiano.

Definição 5.32. O produto cartesiano $x \times y$ de dois conjuntos x e y é definido por

$$x \times y = \{(x_1, y_1) : x_1 \in x \ \wedge y_1 \in y\}$$

- Se $x = y$ denotamos o produto cartesiano $x \times x$ por x^2.
- Se $x = \emptyset$ ou $y = \emptyset$ o produto cartesiano $x \times y = \emptyset$.

Proposição 5.33. Se $x \subseteq y$ então $x \times w \subseteq y \times w$.

Demonstração: Para cada $z \in x \times w$ temos que $z = (x_1, w_1)$ com $x_1 \in x$ e $w_1 \in w$. Como, por hipótese, $x \subseteq y$ então $x_1 \in y$ e $z = (x_1, w_1) \in y \times w$ provando que $x \times w \subseteq y \times w$.$\blacksquare$

Após termos definido par ordenado e produto cartesiano facilmente podemos definir o conceito de relação, no âmbito da Teoria dos Conjuntos, como um conjunto de pares ordenados.

Definição 5.34. R é uma relação binária entre x e y se, e só se R é um subconjunto de $x \times y$. Se $x_1 \in x$, $y_1 \in y$ e $(x_1, y_1) \in R$ escrevemos $x_1 R y_1$ como abreviatura de $(x_1, y_1) \in R$. Quando a relação R não se verificar entre x_1 e y_1 escrevemos $(x_1, y_1) \notin R$.

Definição 5.35. Uma relação binária $\preccurlyeq$ subconjunto de $x \times x$ diz-se uma relação de ordem parcial em x se, e só se satisfaz as seguintes propriedades para cada x_1, x_2 e x_3 pertencentes a x;

- Reflexividade: $x_1 \preccurlyeq x_1$;
- Anti-simetria: Se $x_1 \preccurlyeq x_2$ e $x_2 \preccurlyeq x_1$ então $x_1 = x_2$;
- Transitividade: Se $x_1 \preccurlyeq x_2$ e $x_2 \preccurlyeq x_3$ então $x_1 \preccurlyeq x_3$

Uma relação de ordem parcial em x que verifique, cumulativamente, a propriedade

- Totalidade: $x_1 \preccurlyeq x_2$ ou $x_2 \preccurlyeq x_1$

diz-se uma relação de ordem total em x. Assim, uma relação de ordem total em x é um caso particular de uma relação de ordem parcial em x.

Definição 5.36. O par ordenado $(x, \preccurlyeq)$ diz-se um conjunto parcialmente (totalmente) ordenado se, e só se estivermos perante uma relação de ordem parcial (total) $\preccurlyeq$ em x.

A relação entre objectos verifica-se constantemente no dia-a-dia. Quando compramos uma peça de fruta para cada um dos nossos familiares ou quando estabelecemos a relação de paternidade numa determinada família. A primeira relação diz-se ser unívoca cuja relevância, não só na área da Matemática, não pode deixar de ser salientada.

A formalização do conceito de função, na Teoria dos Conjuntos, será concretizada através de um conjunto de pares ordenados.

Definição 5.37. Uma relação binária no conjunto $x \times y$ diz-se o gráfico de uma função se, para cada $x_1 \in x$, existe um único $y_1 \in y$ tal que (x_1, y_1) está na relação.

Ao utilizamos a expressão "função $f: x \to y$" pretendemos indicar a existência de uma relação binária, $\Gamma(f)$, no conjunto $x \times y$ que é o gráfico de uma função. Se $x_1 \in x$ denotamos por $f(x_1)$ o único elemento $y_1 \in y$ tal que $(x_1, y_1) \in \Gamma(f)$.
Dado o gráfico de uma função, existe um conjunto que contém as primeiras coordenadas e um outro conjunto que contém as segundas coordenadas desta relação.

Definição 5.38. Sejam x e y conjuntos tais que $f: x \to y$ é uma função. Designamos por

- domínio de f o conjunto $dom(f) = \{x_1 \in x: \exists y_1 \left(y_1 \in y \wedge (x_1, y_1) \in \Gamma(f)\right)\} = x$;
- contradomínio de f o conjunto $Im(f) = \{y_1 \in y: \exists x_1\left(x_1 \in x \wedge (x_1, y_1) \in \Gamma(f)\right)\} \subseteq y$.

Definição 5.39. Uma função f diz-se injectiva se, e só se para cada $x_1, x_2 \in dom(f)$ se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.

Definição 5.40. Uma função f diz-se sobrejectiva se, e só se para cada $y_1 \in y$ existe $x_1 \in x\ f(x_1) = y_1$.

Construção do conjunto dos números inteiros não negativos

Intuitivamente, o conjunto dos números inteiros, não negativos, $\mathbb{N}_0$, é o menor conjunto (infinito) tal que $0 \in \mathbb{N}_0$ e que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se tem $n + 1 \in \mathbb{N}_0$.
Baseando-se no seu sistema axiomático, *Zermelo* postulou a existência de um conjunto que representasse os números inteiros não negativos propondo, para os seus elementos, a seguinte construção

$$0 := \emptyset; 1 := \{0\} = \{\emptyset\};\ 2 := \{1\} = \{\{\emptyset\}\}; \dots ; n + 1 := \{n\};\ \dots$$

Mais tarde, *John von Neumann* propôs uma outra construção para estes números sendo esta a que aqui desenvolveremos.
O primeiro acto é definirmos o menor elemento de $\mathbb{N}_0$ por $0 \coloneqq \emptyset$. A tarefa de definir o sucessor de 0, o número 1, assim como os restantes números verificar-se-á mais complicada. Como sabemos, se a um número inteiro, não negativo, adicionarmos uma unidade obtemos, o que denominamos, o seu sucessor. Com o objectivo de transferimos este conceito para a Teoria Axiomática dos Conjuntos enunciaremos a seguinte definição:

Definição 5.41. Para todo o conjunto n definimos o seu sucessor como $n^+ := n \cup \{n\}$.

A constituição do sucessor de n através do conjunto $n \cup \{n\}$ justifica-se aplicando, ao conjunto n, o axioma do par não ordenado obtendo $\{n\}$ e, por último, da aplicação do axioma da união obtemos o resultado final. O axioma da extensão garante a sua unicidade.

Em posse da definição de sucessor de cada conjunto n e sustentados pelo axioma do infinito, garantimos a existência de, pelo menos, um conjunto com as características que pretendemos pelo que segue a definição.

Definição 5.42. Seja y um conjunto e y^+ o seu sucessor. Dizemos que n é um conjunto indutivo se, e somente se verificarem as seguintes propriedades:

- $\emptyset \in n$;
- para cada $y \in n$ então $y^+ \in n$.

Aplicando as definições até agora apresentadas, definiremos o conjunto dos números inteiros, não negativos, que denotamos por ω como a intersecção de todos os subconjuntos indutivos de um conjunto indutivo cuja existência encontra-se garantida pelo axioma do infinito. No entanto, coloca-se a questão, existirá um conjunto em tais condições? De acordo com a seguinte proposição a resposta é afirmativa.

Proposição 5.43. Existe um conjunto indutivo subconjunto de todos os conjuntos indutivos.

Demonstração: Seja i um conjunto indutivo e $s = \{z \in \mathcal{P}(i): z \text{ é } indutivo\}$

A existência de s como conjunto, não vazio, deve-se aos axiomas das partes e de separação e pelo facto de $i \in s$.

Seja ω o conjunto $\cap\, s$. Provemos, primeiramente, que ω é um conjunto indutivo.

Dado $z \in s$, como z é conjunto indutivo, temos que $\emptyset \in z$. Por definição de intersecção $\emptyset \in \cap\, s$. Logo $\emptyset \in \omega$. Se $x \in \omega$, por definição de $\cap\, s$, temos que $x \in z$, para todo $z \in s$. Como qualquer que seja $z \in s, z$ é indutivo, temos que $x^+ \in z$. Logo $\forall z \in s\ (x^+ \in z)$, i.e., $x^+ \in \cap\, s = \omega$. Concluímos assim que ω é um conjunto indutivo.

Falta-nos, ainda, demonstrar que ω é subconjunto de todos os conjuntos indutivos, i.e., o menor conjunto indutivo. Para qualquer conjunto indutivo i' temos que $i \cap i'$, pelo que vimos acima, é um conjunto indutivo e que $i \cap i' \subseteq i$. Logo $i \cap i' \in s$, daí resultando que $\omega = \cap\, s \subseteq i' \cap i \subseteq i'$.

Demonstramos assim que ω é o menor conjunto indutivo, no sentido em que é indutivo e está contido em qualquer conjunto indutivo.■

Definição 5.44. O conjunto dos números inteiros, não negativos, ω, é o menor dos conjuntos indutivos. Este conjunto é usualmente representado por $\mathbb{N}_0$.

A importância de ω ser um conjunto indutivo prende-se com o facto que se n é um número inteiro, não negativo, então o seu sucessor, n^+, também o é. Assim, os elementos de ω, tal como os conhecemos, resultam dos sucessores do conjunto vazio.

$$
\begin{aligned}
&0 := \emptyset \\
&1 := 0^+ = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\} \\
&2 := 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \big\{\{\emptyset\}\big\} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} = \{0,1\} \\
&3 := 2^+ = 2 \cup \{2\} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\} = \{0,1,2\} \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Uma propriedade que podemos observar, intuitiva portanto, é que cada elemento de um número inteiro, não negativo, n, é cumulativamente um subconjunto de n, por exemplo, $1 \in 2 \in 3$ podendo-se confirmar que $1 \in 3$ mas também que $1 \subseteq 3$.
Esta relação leva-nos a apresentar a seguinte definição.

Definição 5.45. Um conjunto S diz-se um conjunto transitivo se, e somente se

$$\forall n \; (n \in S \Rightarrow n \subseteq S)$$

Antes de enunciarmos e provarmos as principais propriedades de ω necessitamos de uma ferramenta matemática importantíssima na demonstração de proposições, referimo-nos ao princípio de indução matemática.[71] Este princípio encontra-se ligado à forma como definimos o conjunto dos números inteiros, não negativos, ω, e de conjunto indutivo pelo que facilmente se provam os seguintes resultados:

Lema 5.46. Seja S um subconjunto de ω que verifica as propriedades:

- $0 \in S$;

[71] O primeiro registo de que há memória relativo ao princípio de Indução Finita deve-se a *Francesco Maurolycus*, em 1575, quando este calculou a soma dos n primeiros números ímpares.

- Se $n \in S$ então $n^+ \in S$

então $\omega = S$.

Demonstração: Como, por hipótese, temos que S é um conjunto indutivo, sendo ω a intersecção de todos os conjuntos indutivos, temos $\omega \subseteq S$. Também, por hipótese, temos que S um subconjunto de ω, i.e., $S \subseteq \omega$. Então, pelo axioma de extensão, concluímos que $\omega = S$.■

Provemos então, de seguida, o princípio de indução matemática.

Proposição 5.47. Seja $P(n)$ uma condição sobre ω que verifique as propriedades:

- $P(0)$ é verdadeira;
- Se $P(n)$ é verdadeira então $P(n^+)$ é verdadeira

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \omega$.

Demonstração: Considere o conjunto determinado pelos elementos pertencentes ao conjunto ω que verificam $P(n)$, $S = \{n \in \omega : P(n)\}$

- Por hipótese, $P(0)$ é verdadeira então $0 \in S$.
- Temos, também por hipótese, que se $P(n)$ é verdadeira então $P(n^+)$ é verdadeira pelo que, se $n \in S$ então $n^+ \in S$.

Pelo lema anterior, concluímos que $S = \omega$, demonstrando que $P(n)$ é verdadeira para todo o número inteiro, não negativo, n.■

Proposição 5.48. Todo o número inteiro, não negativo, ou é 0 (zero) ou é o sucessor de algum número inteiro, não negativo.

Demonstração: A demonstração seguirá do princípio de indução matemática. Tomemos a condição

$$P(n) := n = 0 \dot{\vee} (\exists p \in \omega)\ n = p^+$$

- $P(0)$ é verdadeira;
- Se $P(n)$ se verifica, dado n elemento de ω, vejamos que $P(n^+)$ também se verifica considerando os seguintes dois casos:
  - Se $n = 0$ então $n^+ = 1$ obtendo-se $P(1)$ uma vez que $(\exists n \in \omega)\ 1 = n^+$.

- Se $n \neq 0$ então, pela hipótese indutiva, temos que $(\exists p \in \omega)\ n = p^+$e, neste caso, $n^+ = (p^+)^+$, i.e., $(\exists p^+ \in \omega)$ tal que $n^+ = (p^+)^+$

Concluindo que se verifica $P(n^+)$ sempre que $P(n)$ se verifica.

Concluímos, através do princípio de indução matemática que para todo o elemento n de ω, $P(n)$ é verdadeira, i.e., que todo o número inteiro, não negativo, ou é 0 (zero) ou é o sucessor de algum número inteiro, não negativo.■

Proposição 5.49. O conjunto ω é um conjunto transitivo.

Demonstração: A demonstração será efectuada através do princípio de indução matemática. Consideremos a seguinte condição $P(n) := n \in \omega \Longrightarrow n \subseteq \omega$.

- Como $0 \in \omega \Longrightarrow 0 \subseteq \omega$ é uma proposição verdadeira, $P(0)$ é verdadeira.
- Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira com $n \in \omega$. Como ω é um conjunto indutivo, $n^+ \in \omega$. Logo para provarmos que $P(n^+)$ é verdadeira basta provar que $n^+ \subseteq \omega$. Se $k \in n^+ = n \cup \{n\}$ então, por definição de união, $k \in n$ ou $k \in \{n\}$ obtendo-se dois casos:
  - Se $k \in n$ então, pela hipótese indutiva, temos que $k \in n \subseteq \omega$, i.e., $k \in \omega$;
  - Se $k \in \{n\}$ então $k = n \in \omega$ e $k \in \omega$.

  Em ambos os casos provamos que todo o elemento de n^+ é elemento de ω pelo que $n^+ \subseteq \omega$.

  Demonstramos, assim, que $P(n^+)$ é verdadeira sempre que $P(n)$ o é.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \omega$. Logo $\forall n \in \omega\ (n \in \omega \Longrightarrow n \subseteq \omega)$.■

Proposição 5.50. Todo $n \in \omega$ é um conjunto transitivo.

Demonstração: A demonstração será efectuada através do princípio de indução matemática. Consideremos a seguinte condição $P(n) := \forall m\ (m \in n \Longrightarrow m \subseteq n)$.

- A proposição $\forall m\ (m \in 0 \Longrightarrow m \subseteq 0)$, pelo princípio de vacuidade, é verdadeira implicando que $P(0)$ é verdadeira.
- Supondo que $P(n)$ é verdadeira e que $m \in n^+$. Assim, $m \in n \cup \{n\}$ obtendo dois casos, $m \in n$ ou $m = n$.
  - Se $m \in n$, pela hipótese indutiva, temos que $m \subseteq n$ implicando $m \subseteq n^+$;

- Se $m = n$, similarmente, temos que $m = n \subseteq n^+$, i.e., $m \subseteq n^+$.

Demonstrando que $P(n^+)$ é verdadeira sempre que $P(n)$ o é.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \omega$. Logo $\forall n \in \omega$, n é um conjunto transitivo.∎

Axiomas de *Peano*

O matemático italiano *Giuseppe Peano* propôs, em 1889, nove axiomas que expressavam a essência dos números naturais. Actualmente, estes axiomas, resumem-se a cinco se tomarmos em consideração a relação de equivalência "igualdade". Iremos ver que a axiomática de *Peano* a seguir apresentada com os símbolos 0 (zero), $\mathbb{N}_0$(números naturais) e s (sucessor) pode ser formalizada na teoria Axiomática dos Conjuntos.

Axioma 5.51. $0 \in \mathbb{N}_0$.

Este axioma indica-nos que $\mathbb{N}_0$ é um conjunto não vazio pois possui o elemento 0.

Axioma 5.52. Se $n \in \mathbb{N}_0$ então $s(n) \in \mathbb{N}_0$;

Este axioma indica-nos a propriedade fundamental do conjunto numérico que pretendemos construir; i.e., para cada elemento de $\mathbb{N}_0$ existe o sucessor que, por sua vez, pertence a $\mathbb{N}_0$. No entanto, nem todo o número natural é sucessor de um outro número natural. Vejamos o seguinte axioma.

Axioma 5.53. Não existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $s(n) = 0$;

Este axioma reforça que não existe nenhum elemento de $\mathbb{N}_0$ cujo sucessor seja 0, i.e., o elemento 0 é o único elemento de $\mathbb{N}_0$ que não é sucessor de nenhum outro.

Axioma 5.54. Se $s(m) = s(n)$ então $m = n$;

Este axioma dá-nos a conhecer que a função sucessor é uma função injectiva, i.e., se dois sucessores são iguais os elementos da partida são iguais.

Axioma 5.55. Se S é um subconjunto de $\mathbb{N}_0$ contendo o elemento 0, e se $s(n) \in S$ sempre que $n \in S$ então $S = \mathbb{N}_0$.

(**princípio de indução Matemática**)

Proposição 5.56. O conjunto ω satisfaz os axiomas de *Peano*, identificando o elemento 0 (zero) com o conjunto vazio, o sucessor de n com n^+ e $\mathbb{N}_0$ com ω.

Demonstração:

- Como ω é um conjunto indutivo temos que $\emptyset \in \omega$.
- Seja $n \in \omega$. Como ω é um conjunto indutivo temos que $n^+ := n \cup \{n\} \in \omega$;
- $\emptyset$ é o único elemento de ω que não é sucessor de nenhum elemento de ω. Assim, não existe $n \in \omega$ tal que $n^+ = \emptyset$.
- Suponhamos que $n^+ = m^+$ e que, por absurdo, $n \neq m$. Então $\{n\} \neq \{m\}$ obtendo $n \cup \{n\} \neq m \cup \{m\}$ contradizendo a hipótese. Assim, se que $s(n) = s(m)$ então $n = m$.
- Seja x um subconjunto de ω tal que $\emptyset \in x$ e se $n \in x \Longrightarrow n^+ \in x$ então pelo lema 5.46. $x = \omega$

Provamos que o conjunto ω e a função “sucessor” que a cada $n \in \omega$ faz corresponder $n^+ := n \cup \{n\} \in \omega$ satisfaz os axiomas de *Peano*.$\blacksquare$

Com a última proposição damos por terminado este trabalho tendo em mente que este diminuto capítulo é, apenas, uma diminuta fracção do potencial desta marcante teoria no alicerce e unificação da Matemática contemporânea. No entanto, todos aqueles que pretendam prosseguir, aprofundando, o seu estudo poderão consultar a seguinte bibliografia:

André, R. (2014), Edmundo, M. J. (2015), Enderton, H. B. (1977), Ferreira, G. (2015), Hrbacek, K., & Jech, T. (1999), Moschovakis, Y. (2006), O'Leary, M. L. (2016), Oliveira, A. (1980).

Conclusão

A Teoria Axiomática dos Conjuntos de *Zermelo-Fraenkel* apesar de recente, no curso histórico da Matemática, teve um profundo impacto tanto na constituição dos fundamentos da Matemática como na sua unificação.

Principiar uma teoria através de um sistema de axiomas não é uma prática recente. A primeira teoria a ser edificada sob axiomas, que tenhamos conhecimento, deve-se a Euclides e, cerca de uma década antes de *Zermelo*, *Peano* apresentou a axiomática dos números naturais. Antes de *Tarski* desenvolver as linguagens de primeira ordem, os axiomas eram enunciados num registo próximo da linguagem corrente; hoje, estes tomam uma forma inteligível apenas a conhecedores dessa linguagem. Possivelmente, por essa razão, o ingresso das teorias axiomática e dos conjuntos nos programas escolares tenha revertido tanto insucesso, nada esperado, pelos defensores da dita "Matemática Moderna".

A "Matemática Moderna" foi um movimento internacional que se deu, após a 2ª Grande Guerra, em torno dos programas escolares de Matemática e que se verificou ser benéfica na actualização de um ensino que se revelava obsoleto quando a intenção era a de preparar cidadãos destinados a uma época tecnológica que surgia a passos largos. No entanto, o movimento não passou apenas pelas mudanças a nível curricular. É através dos estudos de *Jean Piaget* associados às operações lógico-matemáticas que se assegura a necessária actualização pedagógica dos programas de matemática.

Quanto ao ensino português, legamos no Professor José Sebastião e Silva, a sua modernização; através dos seus esforços por incluir, no programa da disciplina, o método axiomático, a Teoria dos Conjuntos e a pedagogia mais actual. Sebastião e Silva, cuja obra é largamente reconhecida, nomeadamente no estrangeiro, é o rosto da "Matemática Moderna" em Portugal. Infelizmente Sebastião e Silva, Professor e homem de grande valor, faleceu cedo por motivos de saúde.

Ainda hoje podemos encontrar características deste movimento no currículo nacional com a inclusão de conteúdos estreitamente relacionados à Teoria dos Conjuntos. Realizado o estudo do currículo nacional, relativamente à Teoria dos Conjuntos, podemos compreender não só a sua distribuição mas também a sua profundidade nos conteúdos leccionados.

Nos primeiros dois anos do Ensino Básico a Teoria dos Conjuntos revela-se um forte suporte à leccionação de novos conceitos contrastando, nos anos lectivos imediatos, tanto pela fraca incidência como formalização. Observamos a importância dada à correcta utilização e aplicação dos termos conjunto, elemento de um conjunto, da relação de pertença ou não pertença, assim como, da simbologia associada a esta teoria e cardinalidade de um conjunto. A apresentação dos elementos de um conjunto poderá efectuar-se, nestes primeiros anos, tanto por extenso como através de diagrama de *Venn*. Constatamos a utilização do conjunto vazio, da noção que transmite e consideramos que seria uma mais-valia, para a construção do raciocínio abstracto, se a sua fundação partisse de exemplos concretos. Quanto às operações reunião e intersecção entre dois conjuntos, apesar da inexistência de qualquer formalização, é exigida a sua determinação de acordo com a notação da Teoria dos Conjuntos, assim como, da sua representação através de um diagrama de *Venn*. Assim, o aluno deverá, à partida, interpretar tanto a intersecção como a reunião de dois conjuntos através da análise gráfica.

No sexto ano de escolaridade identificam-se os conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e, no oitavo ano de escolaridade, o conjunto $\mathbb{R}$ sem qualquer referencia à sua classificação como conjuntos infinitos. Os alunos, intuitivamente, assumem-no. Cientes de que não é esta a altura certa de abordar cardinalidades; acreditávamos que seria um ponto de partida no reconhecimento que nem todos os conjuntos podem ser representados, sem artifícios, por extensão pelo que se torna necessário recorrer a uma propriedade que descreva, sem ambiguidade, os elementos que lhe pertencem. O estudo da probabilidade estatística assenta na Teoria dos Conjuntos e em noções nunca antes formalizadas como conjunto universo, subconjunto e complementar de um conjunto. Reconhece-se a importância de operar conjuntos, num dado universo, que inclui todos os subconjuntos relevantes à situação apresentada. O estudo de alguns axiomas da Teoria dos Conjuntos, formalizando conceitos já referenciados como, por exemplo, a igualdade de conjuntos, a existência de um conjunto vazio ou mesmo do conjunto potência, no lugar da Geometria Euclidiana, anteciparia o seu estudo que se efectuará nos seguintes anos.

Relativamente ao Ensino Secundário podemos observar a importância dada tanto à lógica como à Teoria dos Conjuntos. No entanto, devido à dificuldade em cumprir o currículo, os conteúdos associados a este domínio, LTC10, passaram a ser leccionados transversalmente tal como no currículo homologado em 2001.

O décimo segundo ano de escolaridade inicia com o domínio do cálculo combinatório, mais precisamente com as propriedades das operações sobre conjuntos. O estudo da combinatória encontra-se assente nas cardinalidades de conjuntos especiais tais como dos conjuntos potência, produto cartesiano e união de conjuntos disjuntos. Importante realçar que o estudo da probabilidade deixou de ser realizado através da sua axiomática encontrando-se, no actual currículo, fortemente assente na Teoria dos Conjuntos.

Foi *Zermelo* quem apresentou o primeiro sistema axiomático para a Teoria dos Conjuntos sem que, até hoje, fossem encontrados quaisquer paradoxos ou incongruências. O axioma que marcou a diferença foi o axioma de separação.

Quando ouvimos a afirmação "tudo é conjunto" ficamos apreensivos, é natural! Quem nunca contactou com a Teoria Axiomática de Conjuntos a não ser nos Ensinos Básico e Secundário, não concebe a perfeita fundamentação do par ordenado (a, b) através do conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ou a sublime edificação do conjunto dos números naturais. Assim, as propriedades destes objectos deixam de ser atribuídas por axiomas e passam a ser resultados demonstráveis pela Teoria dos Conjuntos. Referimo-nos, por exemplo, à axiomática de *Peano* para os números naturais. Mostrando que o conjunto dos números naturais, formalizado pela Teoria Axiomática dos Conjuntos, satisfaz estes axiomas pretende-se mostrar a dinâmica da formalização de conceitos matemáticos em tal teoria. O trabalho de formalização aqui realizado é uma diminuta fracção deixando antever todo um «*mundo matemático*» fundamentado em tais axiomas. Através da Teoria Axiomática dos Conjuntos poderíamos prosseguir formalizando as operações usuais de adição e multiplicação como funções de $\omega \times \omega$ em ω, mostrando o desenvolvimento da aritmética, sucedendo-se a construção dos restantes conjuntos numéricos: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Em suma, todos os objectos matemáticos usuais podem ser formalizados como conjuntos e as suas propriedades usuais podem ser provadas na Teoria Axiomática dos Conjuntos.

Bibliografia

Alan Bishop, M. (.-K. (Ed.). (1996). *International Handbook of Mathematics Education.* Springer International Handbooks of Education.

André, R. (2014). *Axioms and Set Theory - A first course in Set Theory.* Ontário: (impresso).

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L., & Timóteo, M. C. (2013). *Caderno de Apoio 1º, 2º e 3º Ciclo.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L., & Timóteo, M. C. (2013). *Metas Curriculares de Matemática - Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática - Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L., & Timóteo, M. C. (2015). *Caderno de Apoio 10º, 11º e 12º Ano.* Lisboa: Ministério da Educação e da Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L., & Timóteo, M. C. (2015). *Metas Curriculares de Matemática A - Ensino Secundário.* Lisboa: Ministério da Educação e da Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L., & Timóteo, M. C. (2015). *Programa de Matemática A - Ensino Secundário.* Lisboa: Ministério da Educação e da Ciência.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Loura, L., & Timóteo, M. C. (2016). *Orientações de gestão curricular para o Programa e Metas Curriculares de Matemática A.* Lisboa: Ministério da Educação Direcção-Geral da Educação.

Boubaki, N. (1936). Décisions Escorial (typographie et rédaction). *Congré Escorial à Chançay* (p. 4). Chançay: (dactilografado).

Bourbaki, N. (1935). 2ª circular du Congrè de Besse. *Congrè de Besse* (p. 1). Besse-en-Chandesse: (dactilografado).

Bourbaki, N. (1936). *Ensembles - Décisions Escoriales.* Chançay: (dactilografado).

Bourbaki, N. (1936). Mode d'emploi de ce traite. *Congrè Escorial à Chançay* (p. 6). Chançay: (dactilografado).

Bourbaki, N. (1950, April). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly, 57*, pp. 221-232.

Bourbaki, N. (1977). *Éléments de Mathématique - Théorie des Ensembles.* Paris, França: Centre Commercial du Livre Spécialisé.

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers.* (P. E. Jourdain, Trad.) Estados Unidos da América: Dover publications, inc.

Chevalley, C. (s.d.). Livre I. Théorie des ensembles. Introduction. p. 34.

Edmundo, M. J. (2015). O que são conjuntos, relações e funções. Lisboa, Portugal: Universidade Aberta (impresso).

Enderton, H. B. (1977). *Elements of Set Theory.* Nova York: Academic Press, Inc.

Ferreira, G. (2015). O conjunto de todos os conjuntos não existe. *Gazeta de Matemática, 176*.

Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze.*

Heijenoort, J. V. (Ed.). (2002). *A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Cambridge: Harvard University Press.

Hrbacek, K., & Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory.* Nova York: Marcel Dekker, Inc.

Kline, M. (1973). *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math.* USA.

Kurepa, G. (1955). Enquête internationale sur le role des mathématiques et du mathématicien dans la vie contemporaine. (I. d. l'Université, Éd.) *L'enseignement Mathématique, II éme série Tome I fascicules 1,2 et 3*, pp. 109 - 110.

Ministério da Educação Nacional. (31 de Dezembro de 1964). Decreto-Lei nº 46.135. p. artº 2.

Ministério da Educação Nacional. (31 de dezembro de 1964). Decreto-Lei nº 46.136.

Moschovakis, Y. (2006). *Notes on Set Theory.* Nova York: Springer Science+Business Media, Inc.

O'Leary, M. L. (2016). *A First Course in Mathematical Logic and Set Theory.* Nova Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

OECE. (1961a). *Mathématiques Nouvelles.* Paris: OECE.

OECE. (1961b). *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignment secondaire.* Paris: OECE.

OECE. (1963). *Mathématiques modernes: Guide pour enseignants.* Paris: OECE.

Oliveira, A. (1980). *Teoria de Conjuntos – Intuitiva, e Axiomática (ZFC).* Lisboa: Livraria Escolar Editora.

Pauli, L. (1979, Novembro). Le colloque de Royaumont. *Math ecole, 90*, pp. 2 - 10.

Piaget, J. (1955). *L'enseignement des mathématiques, nouvelles perspectives.* Paris: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1984). *Para onde vai a educação?* Rio de Janeiro: José Olympio Editora.

Secretaria de Estado da Orientação Pedagógica. (1974). *Ensino Primário - Programas para o ano lectivo 1974-1975.* Lisboa, Portugal: Ministério da Educação e Cultura.

Silva, J. S. (1962, julho-dezembro). Sur l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire . *Gazeta Matemática, 88-89*, pp. 25-29.

Silva, J. S. (1975-77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática, 2º e 3º Volumes.* Lisboa: GEP-MEC.

Zermelo, E. (2010). *Collected Works* (Vol. 1). (H.-D. Ebbinghaus, C. G. Fraser, & A. Kanamori, Edits.) Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.