Matematica in Movimento: radici, sviluppi e implicazioni di un approccio grafico al concetto di funzione tramite i sensori

Sommario

L'articolo presenta una prospettiva che vuole intrecciare l'idea di una matematica in movimento, animata e dinamica, con il ruolo del movimento in matematica, mediante l'utilizzo di tecnologie che permettono di modellizzarlo. L'attenzione è rivolta a un progetto pluriennale di cui sono riportati episodi da più sperimentazioni, progettate e implementate dalle autrici in classi diverse. L'obiettivo didattico è quello di promuovere un'introduzione al concetto di funzione attraverso lo studio di grafici legati al movimento di uno o più studenti nello spazio. Gli episodi permettono di radicare l'approccio metodologico e di ricerca in una visione ampia di movimento, che coinvolge la matematica, il corpo e le tecnologie.

Abstract

This article offers a perspective that intertwines the idea of a mobile, animated mathematics and the role of movement in mathematics, through the use of technologies for modelling motion. Focus is on a long-standing project regarding which episodes are reported, from various experimentations designed and carried out by the authors at different grades. The didactical aim is to promote a graphical approach to function by investigating motion graphs associated to the movement of one or more students in space. The episodes help root the methodological and research approach into a wide vision of movement, which implicates the mathematics, the body and the technologies.

Francesca Ferrara

Giulia Ferrari

Ketty Savioli

Matematica in Movimento: radici, sviluppi e implicazioni di un approccio grafico al concetto di funzione tramite i sensori

Francesca Ferrara, Giulia Ferrari, Ketty Savioli[*]

Università degli Studi di Torino, Dipartimento di Matematica
[*]Istituto Comprensivo Chieri III (TO)

1. Matematica in movimento e Movimento in matematica

Fin dalla prima infanzia, intraprendiamo la conoscenza del mondo tramite il movimento: del nostro corpo, degli altri e delle cose, così come del nostro corpo in relazione agli altri e alle cose. Sheets-Johnstone (2009, 2011) sottolinea che il movimento è alla base del nostro senso profondo di *agency*[1] ed è sorgente generativa della nostra concezione del tempo e dello spazio. Anche l'investigazione del mondo dal punto di vista scientifico, in una prospettiva quindi molto più ampia, è strettamente legata all'interpretazione e alla spiegazione del movimento che caratterizza fenomeni, situazioni, evoluzioni, e così via.

Che cosa intendiamo, dunque, con la prima parte del titolo, "Matematica in Movimento"?

Da un lato, *matematica in movimento* significa (ri)considerare il ruolo e l'importanza del movimento (in particolare, ma non solo, di movimento del corpo e cinestesia) come cruciale per l'esame e lo sviluppo dei concetti matematici nella pratica scolastica. In maniera duale, significa porre attenzione al *movimento in matematica*, vale a dire richiamare una visione dinamica e animata della disciplina, immergendoci in una dimensione epistemologica che sia motore di un preciso approccio metodologico nella classe di matematica, a qualsiasi ordine e grado.

---

[1] Il termine inglese *agency* va inteso nella sua accezione generale, come potere di agire nel mondo materiale.

Non possiamo non citare quegli insegnanti-ricercatori che, nella tradizione della ricerca in didattica della matematica, muovendo i primi passi nel filone della ricerca per l'innovazione (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998), hanno introdotto e supportato un approccio dinamico allo studio della matematica, come Emma Castelnuovo, Federigo Enriques e molti altri. Il loro lavoro è un riferimento culturale e di impostazione metodologica significativo. In aggiunta, le tecnologie digitali sono intervenute da molti anni oramai a supportare il dinamismo proprio dei concetti matematici (messo in luce, tra gli altri, dal matematico e filosofo francese Châtelet, 2000). Con le loro *affordances* (in breve, le potenzialità o funzionalità di utilizzo), hanno fornito a docenti e ricercatori ambienti stimolanti e ricchi in termini di possibilità di esplorazioni dinamiche (Moreno-Armella & Hegedus, 2008; Arzarello et al., 2012; Sinclair, 2014). Proprio la progettazione, l'implementazione e l'utilizzo di tali tecnologie continuano a essere il focus del lavoro di molti ricercatori in didattica della matematica (Ball et al., 2018; Faggiano et al., 2017; Calder et al., 2018). In particolare, è lecito dunque pensare al modo in cui la matematica è "in movimento" anche grazie a tecnologie che permettono di coinvolgere il movimento del corpo in attività di modellizzazione matematica.
Matematica in movimento è infine il titolo di un progetto, le cui caratteristiche saranno delineate in questo contributo. Nel seguito, illustreremo aspetti istituzionali, culturali, epistemologici, ma anche riflessioni e implicazioni della ricerca, dal punto di vista didattico e cognitivo, che sono di fondamentale importanza per inquadrare il progetto. Inoltre, introdurremo e discuteremo alcune brevi esperienze dalle classi, con lo scopo di esemplificare il modo in cui vogliamo parlare di "Matematica in Movimento". L'intreccio degli aspetti più teorici con la dimensione degli episodi dalle classi offrirà spunti di riflessione per la pratica didattica.

2. Declinare il movimento: il corpo, le tecnologie e le funzioni in movimento

2.1 Il corpo

A partire dagli anni 2000, con i lavori seminali di Lakoff e Núñez (2000/2005) sulla formulazione del paradigma dell'*embodied cognition* e dell'*embodied mind* nel campo delle scienze cognitive, grande attenzione è stata rivolta al ruolo del corpo nello studio dei processi di pensiero. Anche la ricerca in didattica della matematica ha subito l'influenza di tali studi. Ferrara e Seren Rosso (2015) osservano come, nel nostro campo di ricerca, "[i]l riconoscimento dell'importanza del corpo nella costruzione di conoscenza ha condotto, da un lato, a congetture riguardanti il ruolo critico delle attività percettivo-motorie nel pensiero matematico (Nemirovsky, 2003), dall'altro lato, all'attenzione anche a fattori socio-culturali che sono coinvolti nell'apprendimento della nostra disciplina (Schiralli e Sinclair, 2003)". Le nuove e più recenti prospettive sostenute dalle teorie dell'*embodiment* cercano di non ridurre il corpo a mero "contenitore" della mente umana, tradizionalmente pensata come sede dell'attività cognitiva. In questo modo, si tenta di non ricadere in una concezione intrinsecamente dualistica, che vede la netta separazione tra mente e corpo, e di non parlare ulteriormente di apprendimento e di pensiero in termini di schemi concettuali e strutture trascendenti da acquisire o trasmettere agli studenti. In tale direzione si colloca per esempio la visione del *materialismo inclusivo* di de Freitas e Sinclair (2014), che pone attenzione alla dimensione materiale dell'attività matematica, offrendo una più ampia visione del corpo, in termini di un assemblaggio di più componenti (corpi umani, ma anche strumenti, superfici di lavoro, e così via) che si influenzano reciprocamente, focalizzandosi sulle relazioni tra di esse come motore dell'attività. Invece di attribuire la sorgente del pensiero al singolo individuo che apprende solo in virtù della sua intenzione, questa prospettiva la ripensa dispersa nelle relazioni che sostengono l'assemblaggio. Sono queste relazioni a implicare l'emergere e il riconfigurarsi di significati nell'attività. In una direzione simile, che segue teorie fenomenologiche, è stata proposta

una epistemologia che considera il pensiero matematico di per sé una forma di movimento, di cui fa parte anche l'attività gestuale e motoria del corpo (Roth, 2015).
Non è lo scopo del nostro contributo entrare nei dettagli di tali prospettive ma, nel contestualizzare la visione offerta qui, ci sembra importante delineare recenti studi che in questa direzione (pro)pongono nuove sfide rispetto a tematiche molto dibattute in ricerca (si vedano anche Radford, 2016; Roth, 2016).
Un altro punto di nostro interesse, in questa cornice teorica che abbraccia aspetti legati alla dimensione del corpo emersi nella ricerca in didattica della matematica, riguarda la peculiarità multimodale dell'apprendimento. Essa è strettamente legata alla dimensione *embodied* della conoscenza, in quanto diverse ricerche (per esempio, Arzarello & Robutti, 2009; Radford et al., 2009; Nemirovsky et al., 2013; Edwards et al., 2014) hanno messo in luce come "negli atti di conoscenza, sono parte integrante dei nostri processi cognitivi diverse modalità sensorie: tattile, percettiva e cinestetica" (Ferrara & Seren Rosso, 2015). Gli aspetti multimodali ed *embodied* sono dunque parte della costruzione di significati ma non è tutto qui. L'interesse della ricerca si muove nella direzione di approfondire il *modo* in cui gli aspetti multimodali ed *embodied* si manifestano in classe (Ferrara, 2014; Ferrara & Ferrari, 2017), fornendo quindi ai docenti chiavi di lettura dei processi dei loro studenti. In questa ottica, alla luce dei risultati teorici ed empirici, è rilevante da un lato analizzare il ruolo delle attività corporee, delle risorse semiotiche e delle attività percettivo-motorie di chi fa matematica; dall'altro lato, in assoluta continuità, strutturare percorsi didattici che prevedano un coinvolgimento corporeo attivo, così da favorire i processi che possono scaturire da interazioni dinamiche con gli altri e con materiali e strumenti a disposizione. In tal modo, un apprendimento di tipo percettivo-motorio può favorevolmente unirsi a uno unicamente simbolico-ricostruttivo (Antinucci, 2001) e che trova nella dimensione del laboratorio (di matematica: Anichini et al., 2004) la sua naturale collocazione.

2.2 Le tecnologie

Non è un caso che sia proprio l'impostazione didattica e metodologica del laboratorio a prevedere l'utilizzo di strumenti, tecnologici e non, sempre finalizzato alla costruzione di conoscenza. L'indicazione data in questo senso dalla definizione di laboratorio è cruciale per un utilizzo degli strumenti non fine a se stesso ma ragionato, integrato nella pratica di classe in modo da approfondire, esplorare, esplodere, conoscere, manipolare i concetti matematici in modo attivo e, possibilmente, dinamico. Possiamo osservare come le tecnologie della matematica pre-moderna (il compasso ne è un noto esempio) siano essenzialmente dinamiche nel loro essere orientate in modo esplicito all'azione, mentre quelle della matematica moderna (come il simbolismo algebrico) sono per lo più anti-dinamiche, nel loro sforzo di incapsulare il movimento e astrarre. Le tecnologie di oggi, per lo più digitali, sono invece letteralmente (così come metaforicamente) dinamiche, poiché re-iniettano il tempo e il movimento nella matematica, tramite la possibilità, ad esempio, di trattare adeguatamente la variazione e la dipendenza funzionale, che sono radicate nel movimento, con opportune possibilità in termini dinamici (Ferrara & Ferrari, 2015). Ci interessa porre attenzione specifica su tecnologie digitali che "rendono mobili" la matematica e gli studenti nell'incontro con la matematica. Alcune di queste risorse, che sono state implementate e utilizzate in tempi e modi diversi, sono i sensori di moto, strumenti che permettono la cattura di dati di posizione e tempo e la loro organizzazione in opportune rappresentazioni grafiche. In particolare, ci riferiremo a tre diversi dispositivi: *CBR*, *Motion Visualizer* e *WiiGraph*, che misurano la distanza di un individuo (o oggetto) da un'origine di riferimento in un certo intervallo di tempo e che sono stati utilizzati per strutturare attività e sperimentazioni didattiche nell'ottica della "Matematica in Movimento" (Ferrara & Savioli, 2010). Si tratta di tre tecnologie diverse tra loro, certamente non le uniche nel panorama attuale: qui entreremo nel dettaglio di queste perché (1) sono servite per sviluppare attività concrete in classe e (2) perché tutte e tre permettono agli studenti di avvicinarsi alla comprensione, interpretazione e previsione di grafici partendo dall'osservazione diretta del movimento di una o più persone alla volta. Nello specifico, il movimento del corpo cui facciamo riferimento può coinvolgere l'interazione diretta degli studenti con strumenti, così come avviene nel caso del *Motion Visualizer* e di *WiiGraph*, oppure "semplicemente" l'interezza del movimento del corpo come è avvenuto nelle nostre esperienze con il *CBR*. Il *Motion Visualizer* e *WiiGraph* permettono di lavorare con due grafici in contemporanea (nel primo caso due grafici in piani cartesiani distinti, nel secondo due grafici sullo stesso piano cartesiano), mentre il *CBR* produce un solo grafico sullo schermo del dispositivo (calcolatrice o computer) a esso collegato. Questi aspetti saranno esplicitati più avanti, quando daremo una descrizione del funzionamento delle tecnologie in relazione a esempi provenienti dalle classi. In tutti i casi, i grafici si originano sempre in tempo reale, e così, insieme agli studenti, sono messe in movimento anche le funzioni che quei grafici catturano.

2.3 Le funzioni

È interessante recuperare questa dimensione anche dal punto di vista epistemologico, per cogliere il forte legame che sussiste tra il concetto di funzione e la sua rappresentazione grafica. Si può dire che i grafici nascano con la scuola mertoniana, in particolare con il lavoro di Nicole Oresme, vescovo, filosofo e matematico di epoca medioevale. Oresme è noto per le sue *configurationes*, diagrammi con i quali espresse per la prima volta l'intensità di una grandezza (velocità, grado di calore e così via) mediante una *latitudine* e, contemporaneamente, il tempo/durata in cui questa variava lungo la direzione orizzontale (*longitudine*). Questi diagrammi compongono quantità di tipo estensivo e intensivo tramite aree, non attraverso punti e linee, come invece avviene nel caso del piano cartesiano. Anche se questi diagrammi non sono quelli che attualmente sono utilizzati per le funzioni, si può certamente dire che abbiano precorso la sistematizzazione fornita successivamente da Descartes, la quale permette di esprimere un dato in funzione di un altro, attraverso un sistema di coordinate. Infatti, le configurazioni di Oresme anticipano il fatto che la necessità di parlare di variazione e co-variazione abbia portato alla nascita di grafici e diagrammi con i quali catturare le relazioni in divenire tra due quantità. Ovvero, ci rimandano a una concezione del movimento come variazione di intensità e all'esigenza, sentita fin dal medioevo, di modellizzare il movimento di oggetti e il comportamento di fenomeni attraverso opportuni diagrammi. In tal senso, l'idea di variazione è una *radice cognitiva* del concetto di funzione (nel senso discusso in Tall, 2000) e riecheggia le origini storico-epistemologiche del concetto in un approccio grafico, introdotto attraverso il movimento.

Anche Leonhard Euler, nella sua *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), affronta lo studio delle linee curve in genere tramite l'approccio geometrico, che definisce "convenientissimo" per rappresentare quantità variabili. L'interpretazione della funzione fatta in questa chiave, sempre secondo Euler, fa sì che la natura dell'oggetto matematico sia legata alla natura geometrica della linea che la rappresenta. Il matematico di Basilea ci suggerisce quindi che porre attenzione al grafico risulta di fondamentale importanza per la comprensione del concetto di funzione. Dal punto di vista didattico e cognitivo questo discorso si coniuga bene con l'attenzione che da anni è stata data nella ricerca in didattica della matematica al trattamento di registri e alle conversioni tra di essi (i.e. Duval, 2006; Radford, 2009) e alle rappresentazioni multiple dei concetti matematici. La ricerca si è infatti occupata di indagare nuove infrastrutture di comunicazione e rappresentazione (Hegedus & Moreno-Armella, 2009; Hegedus & Tall, 2016), in particolare quelle dinamiche, studiando i risvolti cognitivi dell'utilizzo di tecnologie che supportano l'esplorazione di rappresentazioni differenti e favoriscono lo sviluppo del pensiero trasformazionale nella conversione tra registri (Arzarello et al., 2012). Tra questi, il registro grafico è certamente risorsa di fondamentale importanza per lo studente come per il matematico esperto con il suo modo di organizzare lo spazio e l'informazione. Ci sembra interessante riprendere lo studio di Núñez (2006) che, usando la nozione di "movimento fittizio" introdotta da Talmy (1988), ha analizzato il discorso di matematici esperti. Egli ha notato come i matematici descrivessero oggetti matematici come se questi fossero in movimento, nonostante la mancanza di un movimento (quantomeno apparente) e la natura prettamente statica e atemporale del discorso matematico contemporaneo, centrato sulla definizione formale di quegli oggetti matematici. Questo fenomeno si osserva frequentemente nella pratica informale della disciplina, dove è usuale sentire affermare che "una funzione cresce" oppure "si avvicina al suo asintoto": è usuale, insomma, attribuire mobilità ai concetti matematici nel descriverli. Nel caso di una funzione, inoltre, la mobilità è spesso riferita al comportamento del grafico che la rappresenta, pur essendo anche questo di per sé statico (Sinclair & Tabaghi, 2010).

Riguardo alla genesi del concetto di funzione, Thompson e colleghi (Thompson & Carlson, 2017) hanno ben illustrato come il pensiero covariazionale sia stato sempre tacitamente presente in matematica, in quanto coinvolto in modo cruciale nello studio di quantità (siano esse rappresentate da parametri o variabili) che, appunto, variano insieme, in modo correlato. Non entriamo ulteriormente qui nei dettagli di questa prospettiva, ma con quanto delineato fino a ora, speriamo di aver messo in luce il fatto che il concetto di funzione è indistricabilmente intrecciato con il, e radicato nel, movimento, sia esso espresso dal corpo, dalla matematica o dalle tecnologie.

Alla luce di queste considerazioni, nella prossima sezione presenteremo alcuni esempi provenienti dalle esperienze nelle classi che si fondano sugli aspetti fino a qui delineati e vanno sotto il cappello del progetto *Matematica in movimento*.

3. “Matematica in Movimento”: esperienze dalle classi

Il progetto *Matematica in movimento* è nato da un’idea del primo e del terzo autore e ha coinvolto molti studenti di tutti gli ordini e gradi scolari, mediante interventi didattici di breve, medio o lungo termine. In particolare, una sperimentazione didattica sviluppatasi alla scuola primaria nel quinquennio 2006-2010 prendeva in esame per la prima volta l’introduzione di sensori per modellizzare il movimento con l’obiettivo di avviare i bambini al pensiero funzionale e al senso del grafico. Da allora, con impostazioni metodologiche simili, anche studenti della scuola secondaria sono stati coinvolti in attività di potenziamento o in esperienze con obiettivi didattici analoghi ma adattati alle loro specifiche competenze. Alcuni dei risultati ottenuti sono stati esposti in diversi lavori di ricerca, presentati a convegni nazionali e internazionali e pubblicati su riviste del settore, e saranno qui ripresi per gli scopi di questo contributo (si vedano ad esempio, Ferrara & Savioli, 2009, 2011; Ferrara, 2014; Ferrara & Ferrari, 2016a). Ma non solo: le esperienze hanno creato terreno fertile per incontri di formazione per docenti; hanno portato all’istituzione di un laboratorio rivolto a classi di scuola primaria nell’ambito del progetto “Bambine e bambini: Un giorno all’università”, progetto di terza missione del Dipartimento di Matematica “G. Peano” di Torino; infine, nuove sperimentazioni didattiche “in verticale”, dalla primaria alla secondaria di primo e secondo grado, sono oggetto di lavoro per una ricerca di dottorato (alcuni risultati iniziali in Ferrara & Ferrari, 2016b; 2018).

In questa sezione presentiamo alcuni episodi provenienti dalle classi in cui sono state sperimentate attività con i sensori, con due finalità principali:

- mostrare esempi per ciascun livello scolare e ciascun dispositivo utilizzato e, contemporaneamente,

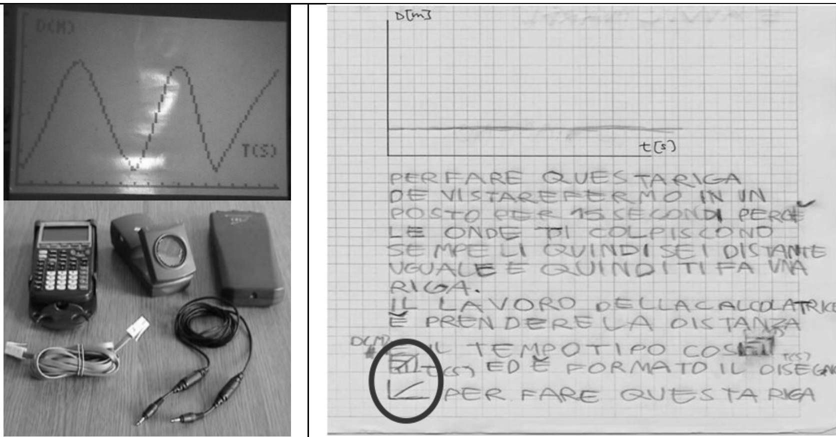
- fare emergere aspetti di pensiero matematico che le attività promuovono, a partire da osservazioni e riflessioni sugli episodi stessi.

Per agevolare il lettore, abbiamo scelto di raggruppare gli episodi secondo la logica della tecnologia utilizzata in classe. Per questo motivo, ogni episodio sarà contestualizzato rispetto all'intervento didattico corrispondente e presentando gli studenti coinvolti nelle sperimentazioni. L'ordine non è da intendersi come ordine cronologico di un percorso strutturato, ma è pensato affinché ciascun episodio restituisca un punto di vista sui concetti matematici di grafico e di funzione e permetta di gettare luce su alcuni dei processi coinvolti nella loro esplorazione da parte degli studenti. Il lettore può dunque "muoversi" liberamente tra le successive sottosezioni.

3.1 Attività con il CBR e Go!Motion

Il *CBR* (o *Calculator Based Ranger*, oggi nella versione aggiornata *Go!Motion*) è un sensore di moto unidimensionale, il quale fornisce un campionamento di dati relativi alla posizione di un oggetto che si trovi nel suo campo visivo. Il sensore emette onde sonore per misurare la distanza dell'oggetto dalla sorgente e, se collegato a un dispositivo grafico (una calcolatrice o un computer), restituisce i dati catturati in tempo reale su un piano cartesiano del tipo posizione-tempo (eventualmente di altro tipo, ad esempio velocità-tempo; Fig. 1a).

Un esempio significativo legato all'utilizzo di questo strumento è quello che ritroviamo nel protocollo di Beniamino, alunno di seconda primaria, che descrive come sia possibile ottenere una retta orizzontale con il *CBR* (Fig. 1b): "Per fare questa riga devi stare fermo in un posto per 15 secondi perché le onde ti colpiscono sempre lì quindi sei distante uguale e quindi ti fa una riga. Il lavoro della calcolatrice è prendere la distanza e il tempo tipo così (*disegno nel circoletto in figura*) ed è formato il disegno per fare questa riga".



(a) (b)

Figura 1. (a) Il *CBR* e la calcolatrice grafica, e un esempio di grafico cartesiano ottenuto utilizzando il *CBR*; (b) il protocollo di Beniamino.

In una delle prime schede di lavoro individuale, Beniamino sceglie di raccontare quanto ha capito “di matematico” dell’attività con lo strumento, partendo proprio dal caso della retta orizzontale.

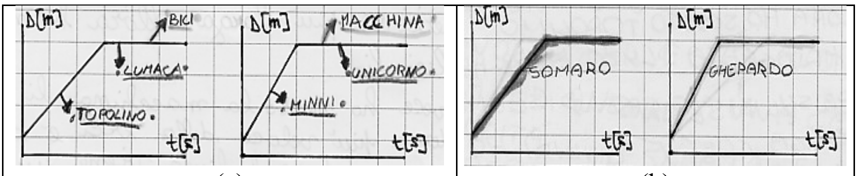
Nella sua argomentazione, sono presenti elementi che fondono aspetti percettivo-motori e cinestetici, coinvolti nell’attività con il corpo (“devi stare fermo”), con quelli puramente matematici della distanza (“sei distante uguale”) e della “riga” che cattura l’aspetto grafico incontrato nel contesto. La dimensione temporale che il “sempre” raccoglie, inoltre, ci illustra un elemento cruciale del grafico della retta orizzontale, ovvero la complessità di gestire il fatto che il tempo “scorra” e, di conseguenza, la linea si muova, pur in assenza di movimento fisico. L’utilizzo del “sempre” è inoltre importante perché restituisce generalità alla forma orizzontale della linea in termini del movimento che la genera.

Infine, l’utilizzo del piccolo diagramma ricco di tratti verticali e orizzontali che si congiungono, sembra voler mostrare la relazione tra le due variabili, che noi sappiamo essere espressa dai punti nel grafico nel piano Cartesiano, e supportare Beniamino nello sforzo linguistico che sta compiendo per spiegare e comunicare il suo pensiero.

Possiamo vedere, nell'argomentazione ricca e nei diagrammi che Beniamino utilizza per "esplicitare il suo ragionamento", un germe di pensiero covariazionale.

Numerose sperimentazioni hanno permesso di verificare come, in effetti, il caso della retta orizzontale costituisca un *pivot* cognitivo nello studio di relazioni spazio-temporali tramite un approccio grafico (come già riportato in Ferrara & Robutti, 2002 e Ferrara, 2009). L'episodio, pur breve, mette anche in luce quanto la richiesta di argomentare in questo contesto sia di stimolo per lo studente: Beniamino sfrutta tutte le sue conoscenze ed esperienze a supporto del proprio ragionamento, che esprime già aspetti di cruciale importanza per il concetto di funzione (Savioli, 2013).

Un altro tipo di attività, proposta alla stessa classe ma svolta verso la fine del primo anno di sperimentazione, riguardava la capacità di distinguere due grafici con un andamento simile e di immaginare il movimento che poteva averli generati: la richiesta era di scegliere una coppia di animali, di personaggi dei cartoni animati e di veicoli da associare a tale movimento soggiacente e, dunque, ai due grafici (Fig. 2). In figura, sono mostrate le scelte operate da due bambini.



(a) (b)

Figura 2. (a) La scelta di Elisa e (b) la scelta di Davide.

Elisa (Fig. 2a) indica la lumaca e l'unicorno tra gli 'animali' e li differenzia scrivendo di aver messo l'unicorno in quel disegno "perché era una linea più stretta dell'altra e allora l'unicorno è un animale che va più veloce della lumaca", mentre poiché "la lumaca va più piano dell'unicorno" la sua "è una linea più larga". Davide (Fig. 2b) considera invece il somaro e il ghepardo e afferma: "io ho scelto il somaro perché va più piano del ghepardo e poi perché sul disegno c'è una riga così (*schizzo del grafico a sinistra*)" e questa linea "è più bassa dell'altra", e ancora: "poi ho scelto il ghepardo perché va più veloce del somaro poi c'era anche una riga più stretta di questa (*schizzo del grafico a sinistra*)".

In entrambi i casi, notiamo che Elisa e Davide concettualizzano la differenza di forma dei tratti obliqui dei grafici con la differenza di velocità tra gli animali. La velocità del moto diviene così rilevante per cogliere "come è fatta" la linea. Appare evidente la difficoltà linguistica da parte dei bambini nel mettere a confronto i due tratti obliqui, dovuta, pensiamo, alla mancanza di termini specifici per indicarne la differenza: ad esempio, non è mai utilizzata la parola "inclinata" o "pendente" e le linee sono riferite come "più stretta" (quella a destra) e "più larga" o "più bassa" (quella a sinistra). Peculiare, in questi termini, è che, se da un lato entrambi i bambini percepiscono la linea più inclinata come più stretta, dall'altro c'è invece l'esigenza di introdurre aggettivi diversi, larga e bassa, per parlare della linea meno inclinata. A nostro avviso, si tratta di un aspetto piuttosto interessante a livello cognitivo (Ferrara & Savioli, 2011), anche per il suo aprirsi all'eventuale necessità di ricercare un modo comune e condiviso di guardare e indicare la pendenza di una retta.
Non manca la componente emotiva in questa attività che demanda ai bambini la scelta. Elisa, per esempio, tra i personaggi dei cartoni, sceglie Minnie e Topolino e argomenta così l'attribuzione a Minnie della velocità maggiore: "perché era agitata ed era il giorno del suo compleanno e come ho detto per l'unicorno Minnie allora l'ho messa

nella linea un pochino più stretta”, mentre Topolino “andava più piano perché era stanco”.
Nell’anno scolastico 2017/18, grazie a una nuova sperimentazione condotta in classe quarta primaria, abbiamo avuto esperienze simili con la versione *Go!Motion* del sensore di moto*,* collegato mediante il computer a una LIM che proietta i grafici (Fig. 3a, 3b e 3c).

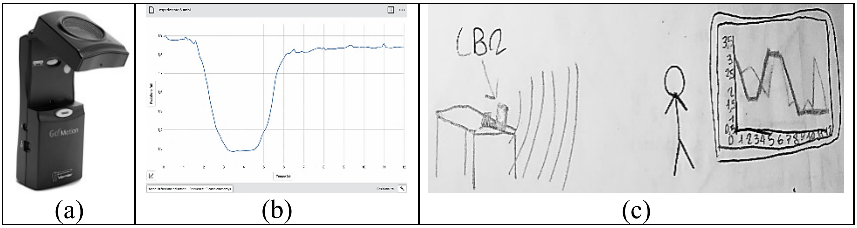


Figura 3. (a) Il sensore *Go!Motion*, (b) un grafico di movimento e (c) il setting degli esperimenti nel disegno di un bambino.

La Figura al centro mostra il grafico asimmetrico ottenuto grazie al movimento di un bambino davanti al sensore (Fig. 3b), riprodotto poi sulla lavagna assieme a un nuovo grafico simmetrico (Fig. 4a).
Una discussione collettiva, che focalizzava l’attenzione su come cambiare il movimento per ottenere il nuovo grafico simmetrico e, quindi, metteva a confronto due grafici entrambi simmetrici (Fig. 4b), ha fatto emergere la necessità di parlare di velocità per riferirsi alla forma di un grafico.

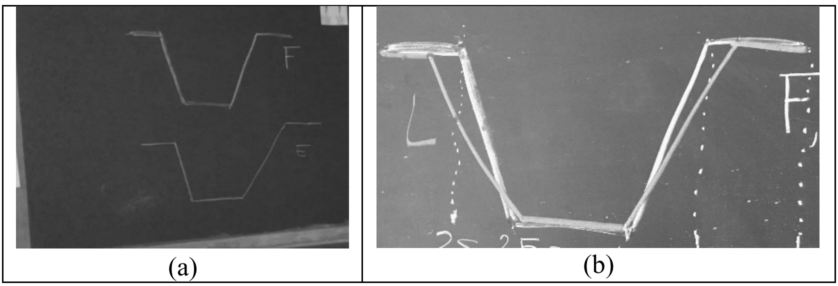
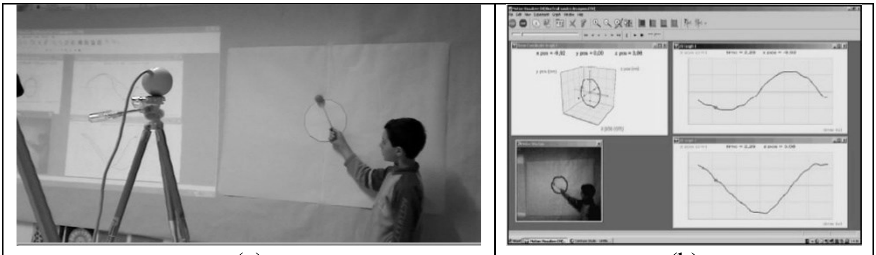


Figura 4. (a) Il grafico asimmetrico e uno simmetrico e (b) grafici a confronto.

L'aspetto peculiare di questa esperienza risiede nella possibilità di focalizzare l'attenzione sulla variazione di velocità (tra un grafico e l'altro) in almeno due modi, tra loro complementari: mediante i tratti orizzontali (più lunghi o più corti), mediante i tratti obliqui (più o meno inclinati). È infatti possibile pensare che la lunghezza orizzontale maggiore significhi essere stati/stare fermi più a lungo e, solo di conseguenza, essersi mossi/muoversi più velocemente nella prima parte: in questo caso, ciò che discrimina è l'assenza di movimento (di nuovo, il tratto di retta orizzontale diviene un *pivot*). Oppure, si può associare la pendenza del tratto obliquo a un moto più o meno repentino, in accordo alla sua 'larghezza'/'bassezza' e partendo dalle esperienze vissute, dunque, a discriminare qui sono i momenti in movimento (in cui la ripidità della curva è una *radice* cognitiva per la derivata della funzione; Tall, 2000).
Si tratta di un'esperienza che richiama la precedente, poiché i grafici su cui Elisa e Davide avevano ragionato anni prima sono in parte simili a quelli su cui hanno lavorato Francesco e compagni più di recente. Anche Elisa e Davide avrebbero potuto argomentare la loro scelta di animali in base alla lunghezza dei tratti orizzontali. Lo avevano fatto alcuni compagni, ad esempio Marco, associando la talpa e il cavallo ai grafici e introducendo nel discorso anche la differenza minima tra le linee e l'essere relativo della velocità: "ho messo la talpa perché va meno veloce del cavallo ma va abbastanza veloce. Ho scelto il cavallo perché va velocissimo e difatti nel secondo disegno sta fermo di più".

3.2 Attività con il Motion Visualizer

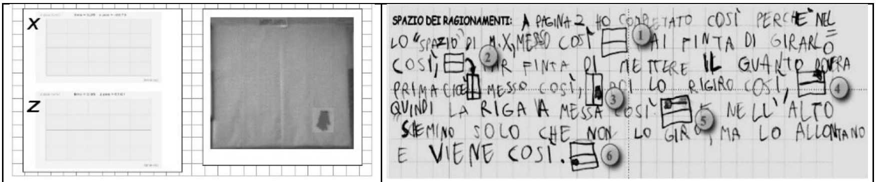
Il *Motion Visualizer* è un software che permette la raccolta dei dati della posizione di un oggetto colorato che si muove nello spazio. Il software funziona mediante un computer collegato a una videocamera/webcam (o due) e permette di catturare la posizione dell'oggetto rispetto alla sua proiezione su un piano, orizzontale o verticale (nello spazio, laddove si utilizzino due videocamere). Il software sfrutta la luce per misurare la posizione dell'oggetto nello spazio rispetto a un'origine di riferimento e restituisce le componenti in tempo reale su grafici posizione-tempo, oppure velocità-tempo o velocità-spazio, secondo le impostazioni scelte. La Figura mostra, oltre al *setting* in aula (per il quale i moti avvengono su un cartellone appeso a una parete; Fig. 5a), un esempio di due grafici posizione-tempo che catturano le posizioni successive di un oggetto in moto lungo una traiettoria circolare (Fig. 5b). Accanto a questi, compaiono una prospettiva della traiettoria nello spazio (in alto a sinistra) e un video digitale dell'esperimento (in basso a sinistra), che può essere replicato così da rivedere una sua simulazione.



(a) (b)

Figura 5. (a) Il *setting* nella classe con una webcam collegata al computer e (b) la finestra del software con i grafici posizione-tempo relativi a un moto circolare.

Un esempio interessante legato all'utilizzo del *Motion Visualizer* fa riferimento ancora all'assenza di movimento. I bambini (ci riferiamo di nuovo a Beniamino e ai suoi compagni) hanno già sperimentato che cosa accade quando l'oggetto colorato (nel nostro caso, un guanto) è mantenuto fermo in una posizione specifica sul cartellone. Si tratta dei primi esperimenti con il nuovo software in classe terza primaria. La consegna, scritta, fornisce una posizione del guanto (in alto a sinistra) e le due rette orizzontali delle componenti della posizione nel tempo e chiede come cambierebbero i grafici nel caso in cui il guanto fosse posizionato in basso a destra (Fig. 6a). La componente verticale della posizione (*z*) non crea particolari problemi: infatti, la variabile *z* è rappresentata sull'asse verticale del grafico, che può essere sopra o sotto l'origine, proprio come il guanto può trovarsi in alto o in basso rispetto a un centro di riferimento (che per noi coincide con il centro del cartellone su cui sono prodotti i moti). Il discorso è invece delicato per la componente orizzontale (x), che è di nuovo rappresentata in verticale sul grafico, pur fornendo informazioni sul trovarsi a destra o a sinistra del guanto rispetto al centro. Non è perciò immediato comprendere a che cosa corrisponda questa informazione per la variabile x, se essere rispettivamente sopra e sotto oppure sotto e sopra l'origine.



(a) (b)

Figura 6. (a) Attività del guanto fermo e (b) argomentazione di Beniamino.

Beniamino completa la consegna in modo corretto, disegnando la retta orizzontale della componente verticale sotto l'origine e quella della componente orizzontale sopra l'origine. L'argomentazione prodotta dal bambino nel cosiddetto *spazio dei ragionamenti* rende evidente la strategia messa in atto nel processo risolutivo (Fig. 6b). Scrive Beniamino: "ho completato così, perché nello "spazio" di M. X [2], messo così (*schizzo piano cartesiano*) fai finta di girarlo così, (*schizzo movimento rotatorio del piano in verso orario*), far finta di mettere il guanto dov'era prima cioè messo così, (*schizzo del guanto in basso a destra*) poi lo rigiro così, (*schizzo del guanto che risulta dal movimento rotatorio all'indietro*) quindi la riga va messa così (*schizzo della retta orizzontale sopra l'origine*)".
Il ragionamento del bambino cattura il modo in cui Beniamino mette in relazione il mondo del movimento e il mondo della sua rappresentazione cartesiana (lo "spazio") e comprende che il contributo destra/sinistra fornito dalla variabile x ai movimenti corrisponde all'essere sopra/sotto l'origine per il suo grafico. In

[2] M. X indica *Mister X*, il nome della componente orizzontale nel contesto narrativo della sperimentazione.

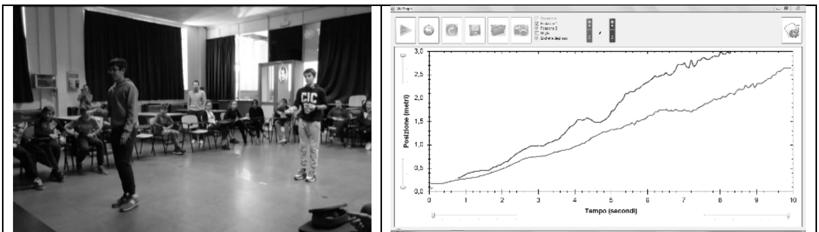
particolare, è molto interessante il ricorso di Beniamino agli schizzi all'interno dello scritto e all'espressione, ripetuta, "fare finta", che caratterizzano uno sforzo argomentativo e un processo immaginativo all'indietro, attraverso il quale cioè si ripercorre la trasformazione che accompagna l'originarsi del grafico ("la riga") in tempo reale (per maggiori dettagli: Ferrara, 2014). Si tratta di un processo non banale, poiché la cattura grafica della posizione orizzontale implica una rottura con il suo contributo fisico al moto. Un approccio grafico dinamico alla modellizzazione di situazioni di moto è qui importante non solo per rimettere in movimento il grafico, ma anche per una comprensione profonda della rappresentazione, che può catturare informazione nota da una prospettiva del tutto nuova. La capacità di leggere e di interpretare informazioni è, del resto, competenza basilare dell'apprendimento della matematica sin dal primo ciclo. Esperienze come quelle che stiamo discutendo possono fornire un contributo non indifferente a un suo sviluppo precoce (ad esempio, Ferrara et al., 2009; 2010).

Un nuovo episodio può essere estrapolato da una discussione con gli stessi bambini, ma in classe quarta primaria, nella quale il caso della retta verticale è visto come uno di quelli mai esplorati con il *Motion Visualizer*. La richiesta di una motivazione spinge i bambini a recuperare elementi della loro esperienza per mettere in luce l'impossibilità di ottenere una retta verticale. In particolare, l'argomentazione di Gaia si basa sul fatto che le linee si muovono sempre da sinistra verso destra e non vanno in verticale, mentre per Elisa la tabella (termine utilizzato per riferirsi al grafico) arriva sempre fino alla fine. Beniamino invece immagina "un posto che ti fa capire che il tempo passa" e che cosa implicherebbe la possibilità della retta verticale: "sarebbe come se tu fermi il tempo e ti muovi", espressione che il bambino rafforza con una gestualità pronunciata con entrambe le mani (per un'analisi dettagliata si rimanda a Ferrara & Savioli, 2009; Sinclair et al., 2013). Se dunque da un lato, Beniamino pensa alla retta verticale in termini di covarianza delle variabili di posizione e tempo (nel senso di Slavit, 1997 e di

Thompson & Carlson, 2017), dall'altro lato esplicita l'impossibilità di un movimento reale associato. È come se Beniamino pensasse la situazione impossibile come reale per rendersi conto che la stessa non può verificarsi. Dal punto di vista cognitivo, questo è un processo di certa raffinatezza, che è già ingrediente di un senso del grafico, non solamente legato all'esperienza e alla sua osservazione. Un gioco tra possibile e reale, tra ciò che si può pensare e ciò che si può realizzare, che rende mobile il concetto di funzione e rende suo controesempio la retta verticale. L'argomentazione "per assurdo" di Beniamino pone, infatti, come fondante, seppur implicitamente, il fatto che una retta verticale non è il grafico di alcuna funzione, poiché non può catturare il passare del tempo.

3.3 Attività con WiiGraph

WiiGraph è un software che utilizza due telecomandi e una barra sensore come quelli che normalmente sono associati alla console di gioco Wii e, sfruttando la posizione dei telecomandi rispetto al sensore, fornisce grafici di vario tipo. Il software richiede uno spazio di interazione, nel quale due soggetti possano muovere i telecomandi. Tipicamente, ciò avviene con i due soggetti in movimento parallelamente l'uno all'altro (Fig. 7a) e, nel caso più semplice, permette di ottenere due grafici del tipo posizione-tempo su uno stesso piano cartesiano (Fig. 7b). I grafici catturano la distanza nel tempo di ciascun telecomando.

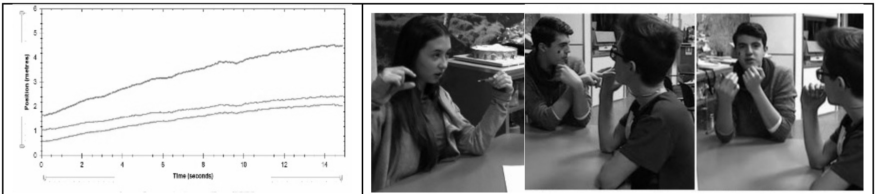


(a) (b)

Figura 7. (a) Studenti nello spazio di interazione e (b) grafici posizione-tempo.

È inoltre possibile lavorare graficamente su operazioni tra funzioni (le quattro operazioni: somma, differenza, prodotto e rapporto), sul confronto con un grafico scelto e, in modo indiretto, sulle funzioni parametriche, creando figure piane dalla composizione delle due variabili di posizione.

Un episodio interessante dalle esperienze con *WiiGraph* coinvolge un gruppo di tre studenti del primo anno della scuola secondaria di secondo grado: Alessandro, Luisa e Massimiliano. I tre studenti devono completare assieme una scheda di lavoro, la quale chiede loro di spiegare che cosa è e come funziona la somma di funzioni a un compagno (immaginario) che non ha partecipato alle attività di introduzione alla somma. Specifichiamo che, in questa modalità, sul piano cartesiano appaiono tre grafici, i due legati al movimento dei due telecomandi e un terzo che cattura la somma delle distanze (un esempio è mostrato in Fig. 8a).



(a) (b)

Figura 8. (a) Somma di rette parallele (b) Luisa, Alessandro e il terzo grafico.

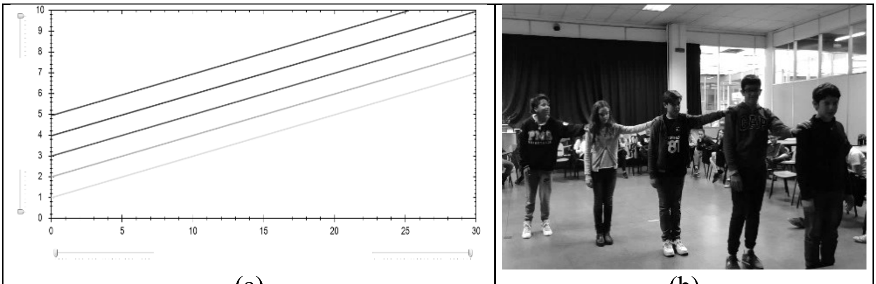
Uno dei componenti del gruppo da noi considerato, Massimiliamo, era realmente assente il giorno in cui la somma è stata introdotta in classe. Nell'affrontare la scheda, Luisa e Alessandro cercano dunque di aiutare il compagno a comprendere il funzionamento della somma (senza avere a disposizione il software). Il dialogo tra i tre studenti pone l'attenzione sulla presenza del terzo grafico:

> Luisa: Allora, ci sono due persone, che il loro grafico, cioè, ognuna di queste fa un movimento (*con la penna nella mano sinistra disegna in aria un grafico ondulato verso la sua destra*) che è sul grafico (*indica la LIM*) e… il grafico (*ripete il gesto, con indice e medio della mano destra mantenuti a distanza fissa*; Fig. 8b a sinistra) è la somma di questi due movimenti delle due persone, e quindi (*guarda Alessandro come in cerca di aiuto*)
> Alessandro: È come se ci fosse, allora, cioè è come se ci fossero, diciamo, tre persone (*indica tre con la mano destra*), cioè ci sono due persone (*si volta verso lo spazio di interazione e lo indica*; Fig. 8b al centro) che fanno i movimenti, ed è come se, se stanno una ad uno [metro] e una a due [metri], è come se ci fosse una terza persona che si muove a tre [metri] (*con la mano destra indica due posizioni distinte di fronte a sé e mima un movimento repentino a slittare in avanti*). È una somma, cioè è il classico $a+b=c$
> Massimiliano: Ahh
> Luisa: è come se ci fosse un c, e il movimento lì è di c (*con la mano destra disegna un nuovo grafico ondulato in aria*).

Vediamo come, in questo esempio, aspetti immaginativi e cinestetici, accanto a quelli corporei, siano fortemente presenti nell'interazione tra i tre ragazzi. Luisa dapprima si riferisce al nuovo grafico (somma) come somma di due movimenti; Alessandro, poi, "reinventa" in modo creativo il software attraverso l'immagine del movimento della terza persona ("è come se" ripetuto più volte). Il grafico della somma è così animato dalla stessa natura dinamica dei due grafici di partenza, venendo a catturare distanze nel tempo (come i tre metri). Pur non essendo né necessaria né realmente presente, la terza persona è pensata muoversi in funzione delle altre due, proprio come la terza linea esiste solo in virtù delle altre due. Lo spazio grafico (sulla LIM), lo spazio di interazione e lo spazio sopra e attorno al banco diventano un tutt'uno in cui il pensiero, le persone, le linee, la somma si muovono in concerto a sostenere il processo immaginativo. La qualità del grafico della somma si impregna di movimento, di relazioni spazio-temporali, e si svela la radice algebrica espressa dai ragazzi nelle parole finali "il classico $a+b=c$", che colgono

Massimiliano favorevole. Inoltre, Luisa attribuisce proprio a *c* lo status di variabile, quando alla fine dice: "e il movimento lì è di *c*". Questo trapela anche dal protocollo in cui gli studenti scrivono: "$a+b=c \rightarrow a=c-b$" e "conoscendo il risultato finale (*c*) e conoscendo i movimenti (*b*) sai anche il terzo (*a*)", cogliendo una volta di più la interdipendenza tra le variabili e, di conseguenza, i tre grafici.

Un secondo esempio riguarda un'attività con *WiiGraph* svolta nella scuola secondaria di primo grado, con studenti del secondo anno, nell'ambito di un approccio grafico alle funzioni lineari. Nello specifico, l'attività ha coinvolto, in un momento di discussione collettiva, un gruppo di cinque studenti, ai quali era richiesto di immaginare (e riprodurre) un esperimento con cui ottenere cinque rette di un fascio improprio, dunque con stessa pendenza e diverso punto di partenza (Fig. 9a). Non ci soffermiamo sul linguaggio che è stato utilizzato nel processo risolutivo, ma sul modo in cui gli studenti hanno immaginato e proposto di muoversi per coordinarsi gli uni con gli altri e raggiungere l'obiettivo. La figura 9b mostra un momento di questo loro movimento coordinato nello spazio di interazione.

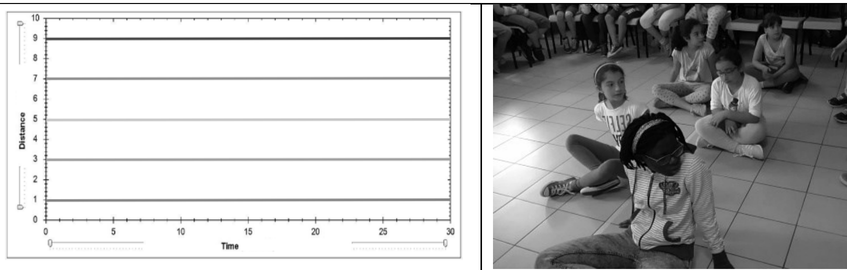


(a) (b)

Figura 9. (a) Cinque rette parallele e (b) distanza costante tra cinque studenti.

Diverse sono le questioni rilevanti in questo episodio, tuttavia ce ne interessano due in particolare. La prima questione ha a che fare con la possibilità di pensare alle relazioni tra le cinque rette in termini di trasformazioni tra esse. Ciascuna retta può infatti essere pensata come la traslazione verticale di un'altra retta dello stesso fascio improprio. Questo conferisce dinamicità alla configurazione delle cinque rette, di per sé statica, come famiglia di grafici nel piano cartesiano; apre così una dimensione creativa e immaginativa che mette in relazione le rette (in quanto configurazione di elementi immersi nel piano cartesiano) attraverso il movimento che le lega.
La seconda questione concerne il fatto che tali processi immaginativi si ritrovano in maniera significativa nei modi di muoversi degli studenti. Nel nostro esempio, i cinque ragazzi si dispongono come in una fila e si coordinano: partono da posizioni diverse; ciascuno si dispone a una stessa distanza dal compagno che lo precede; tutti avanzano di passo in passo mantenendo ciascuno il proprio braccio sinistro appoggiato sulla spalla del compagno che gli sta davanti, tranne il primo che determina l'andatura (Fig. 9b). Se il movimento rende apparente la traslazione verticale, potremmo dire che il braccio rappresenta il vettore della trasformazione. Nel provare a mantenere costante la distanza tra due studenti vicini, esso cattura la distanza costante, istante per istante, tra un grafico e l'altro; quando gli studenti sono in movimento, anche il vettore può essere immaginato muoversi in modo simultaneo alle rette (che si originano nel piano).
Dal punto di vista cognitivo, si tratta di un episodio davvero molto interessante poiché chiama in causa il movimento da diversi punti di vista: immaginativo, fisico, visivo del generarsi delle rette, definitorio per l'idea di trasformazione. Questi molteplici aspetti contribuiscono tutti alla costruzione di significato per il concetto di funzione in questo contesto.

Simili aspetti cinestetici e immaginativi, veicolati mediante modi di muoversi e di pensare, sono emersi anche nella scuola primaria, in attività analoghe in cui si è lavorato su insiemi di rette parallele, orizzontali e non (come mostra la Fig. 10).
Nella scuola secondaria di secondo grado, abbiamo invece potuto osservare le modalità creative con cui gli studenti provavano a (o immaginavano di) muoversi per mantenere velocità costanti ma tra loro diverse, in attività in cui erano presi in esame fasci propri di rette.



(a) (b)

Figura 10. (a) Cinque rette orizzontali e (b) cinque bambini a distanza costante.

4. Conclusioni

In questo articolo, abbiamo presentato alcuni episodi di classe che rientrano sotto il cappello di un progetto ormai decennale, al quale abbiamo dato il nome *Matematica in movimento*, che ha coinvolto e continua a coinvolgere più sperimentazioni, dalla scuola primaria alla scuola secondaria di secondo grado. L'idea di una "Matematica in Movimento" ha duplice natura: mentre, da un lato, essa implica il ripensare la potenzialità del corpo e l'importanza del movimento nello sviluppo di pensiero matematico in classe, dall'altro, richiama una visione dinamica e animata dei concetti, cui possiamo riferirci come movimento in matematica. È nell'intreccio tra i due modi di vedere il movimento che (ri)troviamo le radici profonde dei nostri approcci grafici al concetto di funzione mediante l'utilizzo di vari sensori di moto. Gli episodi dalle classi elucidano chiaramente la presenza di aspetti legati alla percezione del corpo (propriocettivi) e del movimento del corpo (cinestetici) che recuperano esperienze di movimento e di utilizzo degli strumenti nei processi di pensiero e nell'attività argomentativa degli studenti. Nello stesso tempo, tali episodi sono esemplificativi di modi (di muoversi, di immaginare, di parlare e di sentire) attraverso cui i concetti possono essere animati, messi in movimento, e acquisire forza nuova e inattesa, come abbiamo visto (negli esempi) per la funzione e il grafico. Il caso delle cinque rette, indipendentemente dalla loro mutua relazione, è emblematico in questo senso, poiché favorisce esperimenti di pensiero che sono già esperimenti di movimento immaginari da catturare con il corpo: la posizione relativa delle rette e quella delle persone, la pendenza delle rette e la velocità delle persone, la trasformazione di una retta qualunque in ciascuna delle altre, e così via. Nel caso della retta verticale, l'esperimento di movimento impossibile emerge dal pensare la possibilità della retta verticale. Invece, l'esempio iniziale della retta orizzontale mobilita un'assenza di movimento: lo stare fermi "sempre lì". Attraverso gli episodi, abbiamo cercato in questo contributo di delineare come la natura dinamica della matematica e quella creativa della pratica matematica siano una peculiarità delle nostre attività, che ci coinvolgono in qualità di osservatori della classe o insegnanti in classe. Gli esempi sono un tentativo di focalizzare l'attenzione oltre che sul ruolo del corpo e della percezione nell'attività matematica, anche sulla possibilità di catturare estesamente un'idea di movimento da diverse prospettive, per tracciare aspetti della temporalità e della spazialità in termini di una tensione produttiva tra movimento e forma, e di una relazione dialogica tra movimento e struttura. Il nostro intento non è quello di trovare posto a una classificazione del corpo e/o del movimento, né di ridurli a semplici epifenomeni dei processi cognitivi, piuttosto di comprendere più in profondità il carattere intensivo e generativo dei processi di pensiero in matematica, in contesti di insegnamento e apprendimento della disciplina. Lo stesso Roth (2015) mette in luce che le idee di movimento, di flusso e di temporalità sono cruciali per teorizzare il pensiero matematico e la pratica matematica nella sua essenza.

Speriamo dunque di avere gettato luce sulla estrema libertà di movimento che il pensiero può attualizzare attraverso il corpo, l'utilizzo di strumenti, l'immaginazione, i diagrammi, aprendo linee di sviluppo creativo. In questo senso, ci appoggiamo nuovamente al lavoro di Sheets-Johnstone, che con la sua idea di "*thinking in movement*" (ovvero, pensare in movimento), esplicita una visione per noi fondamentale in questo lavoro: il pensiero è essenzialmente cinetico e dinamico e imprescindibilmente legato al movimento. È partendo da questa prospettiva che consideriamo il movimento di per se stesso importante e non tanto in quanto rappresentazione di idee, schemi e pensieri. Il progetto della "Matematica in Movimento" si arricchisce perseguendo questa linea di ricerca, caratterizzando cioè i modi in cui pensare è muoversi e muoversi è pensare, anche nella classe di matematica (Ferrara & Ferrari, 2018).

Bibliografia

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. & Robutti, O. (a cura di) (2004). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica (ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni Stampatore.

Antinucci, F. (2001). *La scuola si è rotta*. Bari: Laterza.

Arzarello, F. & Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian trends in research in mathematical education: A National case study from an International perspective. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. *An ICMI Study Book 2* (pp. 243–262). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Arzarello, F. & Robutti, O. (2009). Embodiment e multimodalità nell'apprendimento della matematica. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32(A-B), 243–268.

Arzarello, F., Ferrara, F. & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: The role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and its Applications, 31*(1), 20–30.

Ball, L., Drijvers, P, Ladel, S. Siller, H.S., Tabach, M. & Vale, C. (Eds.) (2018). *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*. Basil, Switzerland: Springer International Publishing.

Calder, N., Larkin, K. & Sinclair, N. (Eds.) (2018). *Using Mobile Technologies in the Learning of Mathematics*. Basil, Switzerland: Springer International Publishing.

Châtelet, G. (1993/2000). *Les Enjeux du Mobile*. Paris: Seuil (English Transl. by R. Shore & M. Zagha, *Figuring space: Philosophy, mathematics and physics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 2000).

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom.* New York, NY: Cambridge University Press.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103–131.

Edwards, L.D., Ferrara, F. & Moore-Russo, D. (Eds.) (2014). *Emerging Perspective on Gesture and Embodiment in Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Euler, L. (1748). *Introductio in Analysin Infinitorum*.

Faggiano, E., Ferrara, F. & Montone, A. (Eds.) (2017). *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education: Perspectives in the Digital Era*. Basil, Switzerland: Springer International Publishing.

Ferrara, F. (2009). Sonar e grafici di movimento per risvegliare le radici del concetto di funzione. *La Matematica e la sua Didattica, 23*(2), 216–223.

Ferrara, F. (2014). How multimodality works in mathematical activity: Young children graphing motion. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4), 917-939.

Ferrara, F. & Ferrari, G. (2015). Parlare di tempo e movimento in matematica per introdurre il concetto di funzione. In F. Ferrara, L. Giacardi & M. Mosca (a cura di), *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2014-2015* (pp. 173–193). Torino: Kim Williams Books.

Ferrara, F. & Ferrari, G. (2016a). La matematica del tempo e del movimento: funzioni, modelli matematici e la Wii. *Nuova Secondaria, XXXIII*(6), 64–67.

Ferrara, F. & Ferrari, G. (2016b). Traversing mathematical places. In C. Csíkos, A. Rausch & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 251–258). Szedeg, Hungary: PME.

Ferrara, F. & Ferrari, G. (2017). Agency and assemblage in pattern generalisation: A materialist approach to learning. *Educational Studies in Mathematics, 94*(1), 21–36.

Ferrara, F. & Ferrari, G. (2018). Thinking in movement and mathematics: A case study. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 419–426). Umeå, Sweden: PME.

Ferrara, F. & Robutti, O. (2002). Approaching graphs with motion experiences. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 373–380). Norwich, United Kingdom: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.

Ferrara, F. & Savioli, K. (2009). Why could not a vertical line appear? Imagining to stop time. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 33–40). Thessaloniki, Greece: Aristotle University of Thessaloniki & University of Macedonia.

Ferrara, F. & Savioli, K. (2010). Il linguaggio della matematica per rappresentare il movimento. Un'esperienza nella scuola primaria con l'uso delle tecnologie. In M. Mosca & O. Robutti (a cura di), *Il* *laboratorio in matematica e in fisica* (pp. 321–335). Torino: Kim Williams Books.

Ferrara, F. & Savioli, K. (2011). Young students thinking about motion graphs. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 337–344). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Ferrara, F. & Seren Rosso, M. (2015). Embodiment e multimodalità nella classe di matematica: Sviluppi e riflessioni recenti. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 38A-B*(3), 321–342.

Ferrara, F., Laiolo, P., Paola, D. & Savioli, K. (2009). Movimento, visualizzazione e costruzione di significato nella scuola primaria. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 32A*(4), 441–470.

Ferrara, F., Laiolo, P., Paola, D. & Savioli, K. (2010). Movimento, visualizzazione e costruzione di significato nella scuola secondaria di secondo grado. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 33B*(2), 139–170.

Hegedus, S.J. & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM Mathematics Education, 41*(4), 399–412.

Hegedus, S.J. & Tall, D. (2016). Foundations for the future: the potential of multimodal technologies for learning mathematics. In L.D. English & D. Kirshner (Eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd Ed., pp. 543–562). New York, NY: Routledge.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000/2005). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York, NY: Basic Books (Trad. It. Di O. Robutti, F. Ferrara & C. Sabena, *Da dove viene la matematica: Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Torino: Bollati Boringhieri, 2005).

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S.J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 68*(2), 99–111.

Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding mathematics. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 105–109). Honolulu, HI: University of Hawai‘i.

Nemirovsky, R., Kelton, M.L. & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372–415.

Núñez, R. (2006). Do Real Numbers Really Move? Language, Thought, and Gesture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 111–126.

Radford, L. (2016). Mathematics Education as a Matter of Labor. In M.A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory*. Singapore: Springer.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 91–95.

Roth, W.M. (2015). Excess of graphical thinking: Movement, mathematics and flow. *For the Learning of Mathematics, 35*(1), 2–7.

Roth, W.M. (2016). Growing-making mathematics: a dynamic perspective on people, materials, and movement in classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 87–103.

Savioli, K. (2013). An experience at primary school: Graphing motion in the mathematics classroom. In E. Faggiano & A. Montone (Eds.), *Proceedings of the 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 30–37). Bari, Italy: Università degli Studi di Bari "Aldo Moro".

Schiralli, M. & Sinclair, N. (2003). A constructive response to 'where mathematics comes from'. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 79–91.

Sheets-Johnstone, M. (2009). Animation: the fundamental, essential, and properly descriptive concept. *Continental Philosophy Review, 42*(3), 375–400.

Sheets-Johnstone, M. (2011). *The Primacy of Movement*. (2nd Ed.). Amsterdam, The Netherlands: Benjamins.

Sinclair, N. (2014). Generations of research on new technologies in mathematics education. *Teaching Mathematics and Its Applications, 33*(3), 166-178.

Sinclair, N., & Tabaghi, S. G. (2010). Drawing space: Mathematician's kinetic conceptions of eigenvectors. Educational Studies in Mathematics, *74*(3), 223-240.

Sinclair, N., de Freitas, E. & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: The murky and furtive world of mathematical inventiveness, *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 239-252.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics, 33*(3), 259–281.

Tall, D. (2000). Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In Y. Wei-Chi, C. Sung-Chi & C. Jen-Chung (Eds.), *Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 3–20). Blackwood, VA: ATCM Inc.

Talmy, L. (1988). Force dynamics in language and cognition. *Cognitive Science, 12*(1), 49–100.

Thompson, P.W. & Carlson, M.P. (2017). Variation, Covariation, and Functions: Foundational Ways of Thinking Mathematically. In. J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.