LA MATEMATICA NEI LICEI MATEMATICI

Ornella Robutti e Ferdinando Arzarello
Dipartimento di matematica – Università di Torino

Sunto. *Il progetto dei licei potenziati in matematica è nato all'interno del Piano Lauree Scientifiche del Dipartimento di Matematica "G. Peano" e con l'appoggio del progetto DIFIMA in rete, dell'USR e dell'Istituto di GeoGebra. Vi partecipano docenti delle scuole secondarie di Torino e Piemonte e prevede sia la formazione docenti in presenza sia la sperimentazione in classe. Il progetto è regolamentato da un protocollo d'intesa tra Dipartimento e singole scuole, che si impegnano a realizzare un percorso didattico di 33 ore supplementari annuali di matematica sui 5 anni per approfondimenti disciplinari e interdisciplinari.*

Introduzione

Il progetto dei licei matematici è nato nell'Università di Salerno tre anni fa, introdotto dal prof. Tortoriello e dai suoi collaboratori, che hanno progettato una serie di interventi in classi di scuola secondaria superiore ad opera di docenti universitari di matematica e non solo. Gli interventi erano basati su metodologia laboratoriale, attività matematiche e trasversali tra la matematica e altre discipline, e prevedevano un incremento del monte ore di matematica nelle classi coinvolte. Il progetto, presentato alla CIIM e nelle occasioni di confronto scientifico e culturale in Italia, ha riscosso immediatamente attenzione e interesse da parte della comunità scientifica dei matematici e degli esperti in didattica della matematica, tanto che Roma (Università La Sapienza), con il prof. Bernardi, e Torino (Università di Torino), con i sottoscritti, sono partite immediatamente con attività simili, iniziando dal primo anno di scuola secondaria di secondo grado, coinvolgendo però gli insegnanti di tali classi in una formazione in presenza, e chiedendo loro di realizzare in classe le attività affrontate, risolte, discusse, nella formazione, fatta da docenti universitari.

A distanza di un anno dall'inizio, nel settembre 2017 a Salerno è stato fatto un convegno nazionale coinvolgendo le tre sedi pilota, ma anche le altre università e scuole italiane che volessero iniziare questa esperienza. Il convegno ha avuto un'ampia partecipazione e una grande ricchezza di contributi (plenarie, tavole rotonde, laboratori, comunicazioni, poster). È stato anche un'occasione per discutere e confrontare i vari modelli di formazione e di sperimentazione delle tre sedi, che in tal modo vanno via via convergendo.

Il secondo anno di esperienza si è avviato per i docenti delle classi seconde con le stesse caratteristiche dell'anno precedente, includendo anche i docenti nuovi, che hanno iniziato a sperimentare nelle prime classi, e con un'esperienza parallela nella scuola secondaria di primo grado.

Il progetto del liceo potenziato in matematica

Il progetto sperimentale del Liceo Potenziato in Matematica di Torino fonda le sue radici su basi culturali ampie, che toccano sia la didattica della matematica, sia la sua storia ed epistemologia. Alcune basi significative sono:

- le idee sull'insegnamento della matematica condivise dalla Commissione Reale istituita nel 1905 (e principalmente dovute a Vailati), basate sul valore della metodologia laboratoriale;
- i contributi di grandi matematici del Novecento come Enriques e Castelnuovo, le cui idee hanno ispirato approcci di insegnamento dinamico, e hanno ispirato i programmi che dalla Riforma Gentile hanno caratterizzato i Licei;
- la matematica nella realtà, di Emma Castelnuovo, introdotta con approccio per problemi, opportunamente inseriti in contesti ricchi di significato per gli studenti;
- la valenza duplice della matematica, strettamente culturale da una parte e applicativa dall'altra, introdotte da "Matematica 2001. La matematica per il cittadino" (Anichini et al., 2004), insieme a Matematica 2003 e 2004;
- le Indicazioni Nazionali;
- il quadro di riferimento INVALSI per la valutazione nazionale della scuola;
- il quadro di riferimento internazionale OCSE-PISA.

Non si può prescindere inoltre dalla lunga e vasta tradizione che il gruppo di ricerca didattica di Torino ha in progetti di innovazione didattica e formazione docenti (nazionali e sul territorio): i corsi UMI-MPI di Viareggio, i corsi di Viareggio (94-99), Matematica 2001-2003-2004, il progetto PON-m@t.abel, i Convegni e le Scuole estive CIIM, i Convegni DIFIMA, i GeoGebra Day, il Piano Lauree Scientifiche, i Gruppi di ricerca e sperimentazione di vari livelli scolari, il Master Formatori II livello, i MOOC, la produzione di libri e atti di convegni, il canale YouTube "Didattica della matematica – Ornella Robutti", solo per citarne alcuni. Per quanto riguarda la formazione dei docenti, i risultati più recenti della ricerca in didattica della matematica fanno da sfondo per la progettazione del percorso formativo e professionalizzante. Il team di Torino, infatti (composto da Arzarello, Ferrara, Robutti) ritiene fondamentale creare una base di conoscenze e competenze condivise in una comunità di docenti per il successo della sperimentazione di Liceo Potenziato in Matematica. A tal fine, lavora in incontri mensili con i docenti di licei di vari indirizzi (classico, scientifico, scienze umane, economico-sociale, linguistico), intervallati da discussioni su forum in piattaforma. Gli incontri sono dedicati ad affrontare una serie di attività (progettate dai ricercatori) principalmente sui Numeri (che gli insegnanti risolvono e discutono in gruppo), in contesti intra ed extra-matematici, intrecciandosi anche con altre discipline quali la Fisica, la

Biologia, l'Italiano. Alle attività si aggiungono "pillole" di ricerca didattica presentate in forma divulgativa dai ricercatori. In tal modo, la dimensione istituzionale della conoscenza matematica, tipica del curriculum scolastico (Chevallard, 1999), si intreccia con quella epistemologica, cognitiva e didattica, tipica della ricerca sui processi di apprendimento (solo per citare alcuni esempi, approcci post-Vygotskiani, di embodiment, multimodali) in modo esplicito, non solo implicito a livello di design. Si intreccia anche con quella tecnologica applicata alla didattica (ad esempio approcci strumentali di Verillon & Rabardel, 1995; Artigue, 2001; Trouche, 2004; Drijvers, 2002; Hegedus, 2005). L'utilizzo di strumenti per la modellizzazione, il calcolo, la manipolazione grafica, simbolica e la visualizzazione geometrica, siano essi materiali poveri (come righello, compasso, cordino e cartoncino) oppure software e applicazioni per computer o tablet è un tassello fondamentale nell'ottica dell'acquisizione delle competenze di cittadinanza del nuovo millennio e della recente introduzione di calcolatrici grafiche all'Esame di Stato. Pertanto le riflessioni su un uso ragionato della tecnologia (per esplorare e investigare la realtà e le relazioni matematiche) e una scelta consapevole degli artefatti da parte dell'insegnante sono tappe obbligate della programmazione didattica. Nell'ottica della genesi strumentale, ruolo dell'insegnante è infatti quello di valutare gli aspetti tecnici ed epistemici dell'artefatto che si vuole utilizzare in classe, per organizzare l'attività in modo tale da permettere a ciascun soggetto di sviluppare quegli schemi mentali che coinvolgono l'uso dell'artefatto in modi che siano efficaci e un certo tipo di conoscenza legato alle circostanze in cui l'artefatto può essere utile (Drijvers & Trouche, 2008).

Ultimo, ma non meno importante, è il quadro di riferimento per la formazione docenti: la trasposizione meta-didattica (Arzarello et al., 2014), usata per la progettazione delle modalità di lavoro, degli obiettivi professionalizzanti attesi per i docenti, delle attività e delle prasseologie didattiche e meta-didattiche da condividere tra ricercatori e docenti. Il quadro della trasposizione meta-didattica, elaborato proprio dal gruppo di Torino, si presta bene a progettare e descrivere il lavoro dei docenti in formazione seguiti dai ricercatori, in termini di prasseologie, che pur essendo diverse inizialmente, evolvono verso punti di incontro comuni, ovvero le prasseologie condivise (Robutti, 2015). In questa evoluzione, le prasseologie meta-didattiche utilizzate dai docenti nell'attività formativa hanno successivamente applicazione nelle prasseologie didattiche adottate dagli stessi docenti nella sperimentazione in classe, per culminare in un intreccio tra prasseologie didattiche e meta-didattiche negli incontri finali di riflessione sulle sperimentazioni, dove la condivisione si realizza.

Il modello formativo

I docenti coinvolti nel progetto del Liceo Potenziato in Matematica si sono trovati a lavorare in modo collaborativo, e a imparare da questa esperienza, su diversi piani: epistemologico-disciplinare, metodologico-didattico, di ricerca.

La descrizione di questo modello formativo verrà fatta alla luce del modello interpretativo messo a punto in occasione del convegno ICME 2016 (Robutti et al., 2016). Le dimensioni descrittive utilizzate sono perciò: le origini, i numeri, la composizione e i ruoli, le modalità collaborative.

Le origini del progetto si ritrovano nell'estate 2016, quando presso il Dipartimento di Matematica si tengono degli incontri con dirigenti scolastici e docenti (un centinaio sono i partecipanti) per avviare la formazione e la sperimentazione di Liceo Potenziato in Matematica e produrre i documenti istitutivi. La partecipazione è volontaria, ma istituzionalizzata dalla firma del protocollo d'intesa tra scuola e Dipartimento, che sancisce l'impegno di entrambe le parti. Si fissano subito il tema (Numeri, con apertura verso le Relazioni) e le integrazioni disciplinari; le metodologie di lavoro (Laboratorio di matematica, uso di strumenti poveri e tecnologici); gli obiettivi (creare condivisione e confronto tra i docenti in una visione comune di Liceo Potenziato in Matematica, progettare attività in comune); sperimentare le attività e osservare i processi degli studenti (secondo i quadri e le metodologie introdotti); integrare le attività nella proposta curricolare delle scuole in cui i percorsi sperimentali sono realizzati.

Sui numeri (nel senso di partecipanti e tempi), l'articolo di Ferrari e Gentile in questo volume dice nel dettaglio che 146 docenti, non tutti in maniera continuativa, hanno partecipato alla formazione, che, partita lo scorso anno, si protrarrà per un lungo periodo. Infatti, almeno 5 anni sono previsti per completare un "percorso" per l'intero quinquennio del Liceo Potenziato in Matematica, fatto di attività che al primo anno sono più focalizzate sui Numeri, si sposteranno, negli anni successivi, sugli altri nuclei fondanti delle Indicazioni. Quindi, secondo l'analisi fatta su una banca dati di centinaia di articoli riguardanti progetti in cui gli insegnanti lavorano e imparano in collaborazione (Robutti et al., 2016), questa esperienza si colloca nel quadrante "tanti insegnanti, tempi lunghi", che a livello internazionale riguarda solo il 4% dei progetti.

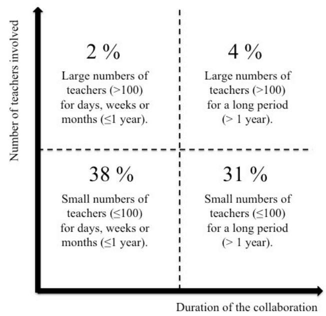


Fig. 1: percentuali di progetti di formazione in letteratura, a seconda del numero di insegnanti coinvolti e dei tempi di realizzazione

Sulla composizione dei gruppi e i ruoli, oltre alla comunità di docenti in formazione, e dei 3 ricercatori, di cui si è detto sopra, abbiamo coinvolto altre persone con ruoli ben definiti:

- un'ispettrice dell'USR Piemonte, l'isp. Muscolo, che ci ha affiancati dandoci un supporto istituzionale per quanto riguarda la scelta di: nome (Liceo Potenziato in Matematica), logo, aspetti di interfacciamento con le scuole;
- una dottoranda con borsa di supporto alla didattica (finanziata da PLS), con la funzione di introdurre le "pillole" di ricerca sotto forma di brevi interventi teorici che possano essere utilizzati come basi di riferimento per le attività e le metodologie utilizzate, nonché con il ruolo di ricercatrice-osservatrice di tutti i processi di collaborazione degli insegnanti;
- una docente con borsa di supporto alla didattica (finanziata da PLS), con la funzione di rielaborare le attività preparate dai ricercatori, corredandolo di tutti quei materiali didattici utili alla loro realizzazione in classe, ovvero le metodologie, la contestualizzazione nelle Indicazioni nazionali, l'uso di strumenti, ecc.

Il team composto dai 3 ricercatori insieme con le 2 borsiste è quello che si è occupato della formazione nel senso di progettare gli incontri, di seguire i docenti in presenza con la presentazione delle attività, il coordinamento dei gruppi di lavoro, la gestione della discussione collettiva, e anche a distanza, con inserimento in piattaforma di materiali, forum e attività.

Il gruppo dei docenti in formazione è stato coinvolto nel lavoro di risoluzione delle attività a livello studente, la discussione delle stesse attività a livello docente, l'eventuale loro rielaborazione, la sperimentazione in classe, l'osservazione dei processi di classe con stesura di diario di bordo osservativo, l'inserimento delle attività nella progettazione disciplinare della scuola. Se i primi incontri erano dedicati alle attività, gli ultimi 3 incontri sono stati destinati a confrontarsi sulle sperimentazioni in classe e sulle programmazioni delle scuole, non solo per condividere le varie esperienze, ma anche con la finalità di rendere i vari materiali fruibili all'esterno, preparando plenarie, interventi, laboratori e poster per il convegno nazionale sui Licei Matematici tenutosi a Salerno nel settembre 2017, dove il gruppo di Torino è stato protagonista, insieme con i gruppi di Salerno e Roma.

Sulle modalità collaborative di lavoro possiamo dire che si sono realizzate a diversi livelli, sia istituzionale, che di design, che di sperimentazione (Robutti, 2015):

1. tra le istituzioni (Dipartimento, USR e scuole): per documenti istitutivi, protocollo d'intesa, responsabilità condivise;
2. tra i ricercatori (inclusi i borsisti): per la progettazione, l'azione formativa, la gestione della piattaforma, l'osservazione dei docenti;

3. tra i ricercatori e i docenti: per la condivisione di attività, pratiche, obiettivi, materiali per i convegni (di Salerno, ma anche CIIM, DIFIMA);
4. tra i docenti: in presenza come docenti di scuole diverse, per il lavoro di risoluzione, riadattamento, analisi delle attività; a distanza, tutta la comunità dei docenti, per il lavoro di confronto in piattaforma; nella stessa scuola, per la progettazione del percorso del Liceo Potenziato in Matematica, con il dirigente scolastico, per la realizzazione del potenziamento, la scelta dei docenti, il reclutamento degli studenti e la formazione delle classi, l'orario, la valutazione.

Esempi di attività

In questo paragrafo presentiamo due esempi di attività progettate e sperimentate nei licei potenziati in matematica. I principali riferimenti per le attività sono stati "Matematica per il cittadino" e il compendio di risorse online del progetto M@t.abel, opportunamente selezionate ed adattate. Questo perché condividono con le intenzioni del progetto l'impostazione metodologica fortemente legata al laboratorio di matematica (Anichini et al., 2004).

Le attività proposte sono qui di seguito elencate:

- Successioni di numeri
- Scoperta di regolarità
- Gioco della divisibilità
- Torte e Induzione
- Equazioni e ricorrenza
- Il livello del mare: i ghiacciai continentali… e dintorni
- Cloze e early algebra
- Quadrati magici
- Criteri di divisibilità.

Il Metodo della Ricerca Variata

Nelle attività proposte si persegue una metodologia specifica, che introdurremo ora brevemente, a partire da un paio di esempi e che ha destato molto interesse negli insegnanti coinvolti nel liceo potenziato in matematica.

Esempio 1: Le torte

Un pasticcere divide in fette quadrate una torta quadrata come quella rappresentata in Figura 2, che ha un ornamento di fragole sul bordo: alcune fette hanno a loro volta nessuno, uno o due lati con le fragole. Si domanda di individuare quante sono le fette dei vari tipi in relazione al numero di fette che il pasticcere taglia (le fette sono tutte uguali, fragole a parte). Gli allievi devono compilare la tabella della Figura 3, che illustra vari casi numerici e il caso ‘algebrico’ della sesta riga, in cui il numero di fette è axa.

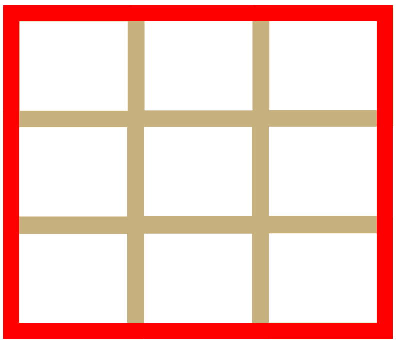


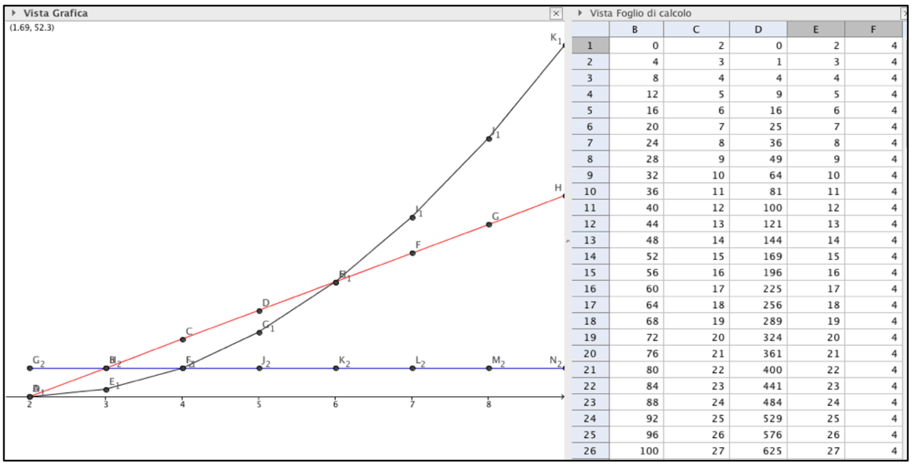
Fig. 2

	taglia	n. 1-quadr.	n. 1-quadr. senza fr.	n. 1-quad fragole 1 lato	n. 1-quad fragole 2 lati	
	2x2	$4 = 2^2$	0	0	4	
	3x3	3^2	1	4=4x1	4	
	4x4	4^2	2^2	8=4x2	4	
	5x5	5^2	3^2	12=4x3	4	
	axa	a^2	$(a-2)^2$	$4(a-2)$	4	

Fig. 3

Gli allievi sono invitati (compito 1) a guardare con occhio matematico numeri e formule e ad esplicitare oralmente e per scritto quanto osservano. Devono cioè discutere tra di loro e poi comunicare alla classe le relazioni tra i numeri e le formule che compaiono nelle varie colonne e a interpretare i risultati numerici e algebrici trovati: ad esempio, come mai il numero (formula) che compare nella terza colonna è la somma dei numeri (formule) che compaiono nella quarta, quinta e sesta colonna; oppure come mai nella sesta colonna compare sempre lo steso numero, anche nel caso della riga ‘algebrica’.

Fatto questo, gli allievi sono invitati (compito 2) a decidere come rappresentare i dati trovati e a fare ulteriori osservazioni sulle nuove rappresentazioni. Usando GeoGebra possono così ottenere le tabelle e i grafici della Figura 4 (costruendo le prime con il foglio di calcolo a partire dalle tabelle della Figura 3, e i secondi a partire dal foglio di calcolo stesso con i comandi “crea lista di punti / spezzata aperta” di GeoGebra). Gli allievi sono così invitati a confrontare i grafici e ad esplicitare con parole loro quanto matematicamente corrisponde a funzioni che crescono, ma non allo stesso modo. In particolare l’insegnante attira la loro attenzione sul fatto che il comportamento dei grafici è diverso per valori bassi della x (numero di fette) rispetto a valori più alti e invita gli allievi a congetturare il perché.



	B	C	D	E	F
1	0	2	0	2	4
2	4	3	1	3	4
3	8	4	4	4	4
4	12	5	9	5	4
5	16	6	16	6	4
6	20	7	25	7	4
7	24	8	36	8	4
8	28	9	49	9	4
9	32	10	64	10	4
10	36	11	81	11	4
11	40	12	100	12	4
12	44	13	121	13	4
13	48	14	144	14	4
14	52	15	169	15	4
15	56	16	196	16	4
16	60	17	225	17	4
17	64	18	256	18	4
18	68	19	289	19	4
19	72	20	324	20	4
20	76	21	361	21	4
21	80	22	400	22	4
22	84	23	441	23	4
23	88	24	484	24	4
24	92	25	529	25	4
25	96	26	576	26	4
26	100	27	625	27	4

Fig. 4

Successivamente gli allievi sono invitati a pensare a un problema analogo in cui la torta ha una forma cubica, con le facce (sei o cinque, ma quest'ultimo caso è più complicato) ricoperte di glassa: quindi se si taglia la torta in fette cubiche tutte uguali (a parte la glassa)

Troveranno fette in cui la glassa compare su 3, 2, 1, 0 facce e dovranno compilare una tabella analoga (Figura 5, per la glassa su 6 facce). Anche in questo caso dovranno discutere e interpretare le varie regole che trovano tra i valori nelle colonne o nelle righe e successivamente rappresentare i dati prima con il foglio di calcolo di GeoGebra (o altro software) e poi con l'ambiente grafico del software (Figura 6). Infine gli allievi sono invitati a discutere le differenze tra le rappresentazioni della prima e della seconda torta e a fare congetture sui motivi che sono alla base delle differenze che trovano.

	taglia	n. 1-cubi	n. 1-cubi non glassati	n. 1-cubi glassati 1 faccia	n. 1-cubi glassati 2 facce	n. 1-cubi glassati 3 facce
	2x2x2	$8 = 2^3$	0	0	0	8
	3x3x3	3^3	1	6=6x1	12=12x1	8
	4x4x4	4^3	2^3	24=6x4	24=12x2	8
	5x5x5	5^3	3^3	54=6x9	36=12x3	8
a 1-cubi	axaxa	a^3	$(a-2)^3$	$6(a-2)^2$	$12(a-2)$	8

Fig. 5

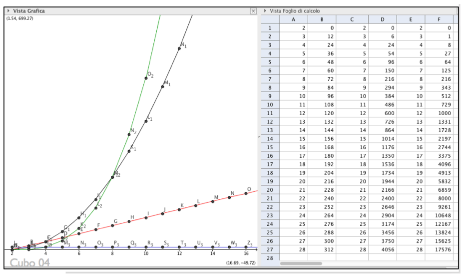


Fig. 6

Gli allievi incontrano un percorso didattico in fasi successive, che sono rappresentate dalle seguenti consegne:

0. Esplora la situazione;
1. Rappresenta i dati che trovi;
2. Guarda con occhio matematico numeri e formule: che cosa osservi?
3. Come puoi rappresentare i dati?

4. Che cosa osservi ora?

5. Come sarebbe se…?

Esempio 2: Tabelle numeriche

Nel percorso sopra descritto a volte i dati non sono costruiti dagli allievi, ma sono forniti direttamente dall'insegnante e allora si parte dal punto 2.

Un esempio di questo secondo tipo è rappresentato dalla seguente situazione, cui accenniamo brevemente per motivi di spazio.

1. La prima richiesta è di osservare con occhio matematico la tabella della Figura 7. Gli allievi raccolgono e condividono le loro osservazioni e tipicamente osservano che:

a. La terza colonna contiene i prodotti delle prime due.

b. Ci sono sempre due fattori, che riproducono la successione dei naturali partendo da 1 e da 3.

c. In ogni uguaglianza i fattori differiscono di 2.

d. I prodotti ottenuti (3, 8, 15, 24, 35) sono quasi quadrati perfetti: manca 1 per ottenerli.

e. Anche le differenze tra i prodotti formano uno schema interessante: Figura 7.

f. …

2. Successivamente rispondono alla richiesta (come sarebbe se?) di variare qualche proprietà osservata. Un esempio: se invece di avere fattori che differiscono di 2, che cosa succede se la differenza è 4? Si compila la tabella della Figura 9 e si discute in classe se in qualche modo vale ancora la proprietà osservata in d.

1	3	3
2	4	8
3	5	15
4	6	24
5	7	35

Fig. 7

8 - 3	5
15 - 8	7
24 - 15	9
35 - 24	11

Fig. 8

1 • 5	5
2 • 6	12
3 • 7	21
4 • 8	32
5 • 9	45

Fig. 9

Il **metodo** che si segue in esempi come questi è definito della **Ricerca Variata** (*MRV*): è stato elaborato nel gruppo di ricerca didattica diretto da uno degli autori (Arzarello) e consiste essenzialmente nel seguire il seguente schema metodologico in tre fasi:

I. Si parte da una situazione: gli allievi sono invitati a osservare, formulare domande, dare risposte, rappresentare variamente in forma matematica quanto trovato e discusso: le loro produzioni sono sempre oggetto di discussione critica e condivisione in classe.

II. Si modifica una (o più) delle osservazioni fatte, cambiandola o negandola (quindi variando la situazione): si discute di che cosa cambia e di che cosa rimane invariante.

III. Si ottengono nuove osservazioni, domande, risposte, rappresentazioni, ecc. e si itera eventualmente il ciclo.

Quanto si osserva permette di raccogliere e validare le congetture fatte dando loro una forma del tipo:

Se vale O allora allora vale D?, con conseguente risposta R1.

Se non vale O allora allora vale ancora D?, con conseguente risposta R2

Essa avvia alla formulazione di competenze argomentative negli allievi (si tratta di una delle competenze trasversali delle Indicazioni, come è noto).

Lo sviluppo di MRV in classe può servire:

- in *negativo*, come antidoto ai fini di "prevenire/scardinare una visione della matematica ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare".
- in *positivo*, come strumento trasversale che: sviluppa *un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi*, in cui sia supportata adeguatamente la **costruzione di competenze matematiche**.

In sostanza, si tratta di una metodologia che stimola concretamente sia la soluzione sia la posizione di problemi da parte degli allievi. Essa quindi si riferisce a una **macro-competenza** rilevante, che riguarda:

- l'individuazione e l'esplicitazione delle informazioni necessarie per affrontare un problema; la variazione successiva di alcune delle informazioni, in modo da generare problemi simili a quello di partenza;
- la costruzione (o individuazione) di ragionamenti risolutivi appropriati, con attenzione agli strumenti di rappresentazione utilizzati;
- il controllo dei ragionamenti e dei risultati che ne conseguono;
- la comunicazione dei risultati ottenuti;
- il confronto e l'interazione coi pari in relazione alle situazioni problematiche considerate.

Conclusioni

L'esperienza che ha coinvolto così tanti soggetti nel primo anno ci rende consapevoli che gli insegnanti, le scuole, le famiglie reagiscono positivamente a un'offerta culturale che potenzi le conoscenze e le competenze in matematica negli studenti in quanto futuri cittadini. Pertanto, contiamo il prossimo anno non solo di proseguire con gli stessi docenti, relativamente al secondo anno di liceo potenziato in matematica, ma di coinvolgere anche le scuole secondarie di primo grado per realizzare una continuità di metodologie, attività, obiettivi tra il primo e il secondo grado.

Riferimenti bibliografici

ANICHINI Giuseppe, ARZARELLO Ferdinando, CIARRAPICO Lucia e ROBUTTI Ornella (2004). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica (ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni Stampatore.

ARTIGUE, Michèle (2001), Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, CAME 2001, Freudenthal Institut, Utrecht, http://ltsn.mathstore.ac.uk/came/events/freudenthal/theme1.ht ml

ARZARELLO, Ferdinando, ROBUTTI, Ornella, SABENA, Cristina, CUSI, Annalisa, GARUTI, Rossella, MALARA, Nicolina e MARTIGNONE, Francesca (2014), Meta-Didactical Transposition: A Theoretical Model for Teacher Education Programs. In A. CLARK-WILSON, O. ROBUTTI & N. SINCLAIR (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era: an international perspective on technology focused professional development*, Dordrecht: Springer, 347-372.

CHEVALLARD, Yves (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19 (2), 221-266.

DRIJVERS, Paul (2002), Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 221-228.

DRIJVERS, Paul e TROUCHE, Luc (2008), From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics* (Cases and perspectives, Vol. 2, pp. 363–392), Charlotte: Information Age.

HEGEDUS, Stephen J. (2005), Dynamic representations: a new perspective on instrumental genesis. In: BOSCH, Marianna (curatrice), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*Sant Feliu de Guíxols, Spain – 17 - 21 February 2005, FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull.

ROBUTTI, Ornella (2015), Mathematics teacher education in the institutions: new frontiers and challenges from research. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, n. 25, Supplemento n.2, G.R.I.M. (Dipartimento di Matematica e Informatica, University of Palermo, Italy) 51-64.

ROBUTTI, Ornella, CUSI, Annalisa, CLARK-WILSON, Alison, JAWORSKI, Barbara, CHAPMAN, Olive, ESTELEY, Cristina, GOOS, Merrilyn, MASAMI, Isoda and JOUBERT, Marie (2016). ICME international survey on teachers working and learning through collaboration: June 2016. *ZDM*, 48(5), pp. 651-690.

TROUCHE, Luc (2004), Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281-307.

VERILLON, Pierre, e RABARDEL, Pierre (1995), Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-101.

Riferimenti sitografici

M@t.abel: http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/

I Seminario Nazionale sui Licei Matematici – Università degli Studi di Salerno – Fisciano (SA) http://www.dipmat2.unisa.it/iniziative/senalima2017/il-convegno.html

DI.FI.MA. in Rete: http://difima.i-learn.unito.it

MIUR (2010). Indicazioni Nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali. D.M. 15 marzo 2010. http://nuovilicei.indire.it/content/index.php?action=lettura&id_m=7782&id_cnt=10497

Torino, 22 febbraio 2018