Piano Lauree Scientifiche Piemonte 2016
in collaborazione con il Dipartimento di Matematica
dell'Università di Torino

Massimo Borsero, Raffaele Casi, Chiara Pizzarelli, Saverio Tassoni

ANDIAMO A DIMOSTRARE FUTURI MATEMATICI ALLA PROVA

A cura di:
Ornella Robutti

Ledizioni

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy

www.ledizioni.it

info@ledizioni.it

Massimo Borsero, Raffaele Casi, Chiara Pizzarelli, Saverio Tassoni

Andiamo a dimostrare. Futuri matematici alla prova

A cura di: Ornella Robutti

ISBN: 9788867059744
In copertina: elaborazione grafica di Chiara Pizzarelli e Stefano Bianco

INDICE

INTRODUZIONE

Quadro teorico

Nello strutturare un percorso di approfondimento sulla dimostrazione matematica, rivolto a studenti delle scuole secondarie di II grado, ci siamo chiesti che importanza rivesta la dimostrazione nella normativa di riferimento.

In particolare, nelle Indicazioni Nazionali per i Licei si trova quanto segue:

> "Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica."

Anche il modo di intendere la dimostrazione cambia nel tempo. Si parte infatti da dimostrazioni estremamente sintetiche, come ad esempio in Euclide, che hanno lo scopo di convincere il lettore della verità delle ipotesi partendo dai dati e giungendo gradualmente alla risoluzione, per arrivare a dimostrazioni più analitiche, che affrontano il problema come già risolto e ne cercano le condizioni risolutive, conducendo il lettore alla scoperta stessa della dimostrazione.

Riteniamo che il problema della dimostrazione nella didattica non abbia la stessa considerazione che ha attualmente nella pratica matematica. Ci sembra che alcuni docenti cerchino di risolvere le difficoltà dell'attività dimostrativa, richiedendo semplicemente ai propri studenti di ripetere mnemonicamente alcune dimostrazioni fatte in classe. Nella prassi didattica sono rari i momenti di produzione originale e di successiva validazione di enunciati; momenti che, d'altra parte, comportano numerose difficoltà.

Le criticità nelle attività dimostrative sono acuite dalla scelta – tradizionale nella prassi didattica e mai abbandonata – di introdurre le dimostrazioni soltanto nel ricco ambiente della geometria euclidea.

Inoltre, la competenza dell'argomentare, che caratterizza fortemente il profilo culturale degli studenti nel secondo ciclo di istruzione, non necessariamente conduce a sviluppare le abilità che servono per condurre una dimostrazione matematica, la quale richiede l'utilizzo di precise regole formali. Come osservano Paola e Robutti (2001) "le regole formali di deduzione implicitamente utilizzate nelle dimostrazioni presentate sui libri di testo o dall'insegnante, non sembrano sempre in consonanza con le regole usualmente utilizzate dagli studenti nell'argomentare". Questa diversità può spiegare i comportamenti di alcuni studenti, che, pur essendo in grado di argomentare, compiono errori nel costruire una dimostrazione. Infatti "le discontinuità epistemologiche tra argomentazione e dimostrazione sono apparentemente mascherate e quindi sottovalutate a causa di un'organizzazione e una struttura del discorso che sembrano simili in superficie ma sono differenti in profondità (cioè accanto a elementi di continuità ve ne sono alcuni di forte discontinuità che non possono essere sottovalutati)."

Infine, ma non per ultimo, le abilità metacognitive messe in gioco nella produzione di una dimostrazione riguardano sia l'organizzazione di strutture complesse, sia il controllo sul lavoro svolto. Per sviluppare queste abilità sono fondamentali impegno, attenzione e condivisione degli obiettivi tra insegnante e allievi.

Proprio per questi motivi riteniamo che la pratica della dimostrazione matematica possa essere un utile strumento non solo per le competenze interne alla disciplina, ma anche per quegli obiettivi trasversali che contribuiscono a sviluppare negli studenti quel senso critico necessario a formare cittadini responsabili e consapevoli.

Scopo dell'attività e contesto

In coerenza con il quadro teorico introdotto nel paragrafo precedente, in questo volume si intende presentare un percorso di orientamento per gli studenti del secondo biennio e del quinto anno della scuola secondaria di II grado, verso i corsi di studio universitari ad alto contenuto matematico, attraverso l'approfondimento di temi di matematica avanzata.

Nello specifico l'obiettivo è di integrare il curricolo secondario con attività incentrate sul tema della dimostrazione matematica. L'intento è mostrare come lavora un matematico, ossia quali siano i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (sistemi assiomatici, tecniche dimostrative, generalizzazioni, formalizzazioni), e far sviluppare la capacità di ragionare e dimostrare autonomamente, attraverso un processo di scoperta e non già come frutto di procedimenti e tecniche appresi mnemonicamente.

Le attività proposte ruotano intorno al nucleo trasversale di Argomentare, Congetturare e Dimostrare (UMI 2003, 2004), mirano a far comprendere le strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi e a far acquisire la padronanza delle tecniche dimostrative e del linguaggio logico-formale.

Nel testo è descritto il percorso svolto da alcuni studenti delle classi quarta e quinta di licei scientifici del Piemonte, che hanno aderito al Piano Lauree Scientifiche di Matematica nell'a.s. 2016-2017 coordinato dalla professoressa Ornella Robutti. Con l'obiettivo di realizzare un'efficace attività di orientamento, si è scelto di strutturare il percorso in 7 incontri, il primo dei quali tenuto all'interno delle classi, gli altri presso il Dipartimento di Matematica 'G. Peano' dell'Università di Torino, con i ragazzi delle diverse scuole riuniti in un unico gruppo. La scelta è data dalla volontà di portare gli studenti ad approfondire un tema a loro noto, dapprima all'interno di un contesto familiare e poi all'Università, favorendo così il contatto e la collaborazione tra i due ambienti.

Infine, le attività svolte durante il percorso sono valevoli ai fini dell'assolvimento dell'obbligo di Alternanza Scuola-Lavoro (art. 1, comma 33 della Legge 107/2015), che consente di realizzare percorsi "al fine di incrementare le opportunità di lavoro e le capacità di orientamento degli studenti".

Progettazione delle attività

Il percorso didattico è stato progettato partendo innanzitutto dai "Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di secondo grado" definiti nel *Quadro di Riferimento delle Prove di Matematica del Sistema Nazionale di Valutazione*, che integrano le Indicazioni Nazionali e le Linee Guida relative ai vari percorsi di scuola secondaria di II grado. Infatti, non tutti questi documenti avevano originariamente previsto traguardi di competenza, ma solo obiettivi in termini di conoscenze ed abilità. Per ovviare a questa mancata uniformità, nel 2015 l'INVALSI ha definito una serie di traguardi di competenza comuni per il secondo ciclo, in continuità verticale con quelli presenti nelle *Indicazioni Nazionali della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*.

In particolare, il percorso descritto nel presente volume mira ad aumentare i livelli di competenza in relazione ai seguenti traguardi (INVALSI 2016):

T4: Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.

T5: Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.

T6: Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione.

T7: Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.

T9: Riconosce, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse.

Dopo aver scelto i traguardi, li abbiamo declinati in termini di obiettivi di conoscenza e abilità, come indicato nei diversi capitoli. Il percorso è stato suddiviso in quattro grandi macro-temi:

1. La geometria sferica come esempio fondamentale di modello assiomatico in geometria;
2. L'assiomatica e il suo legame con i modelli matematici;
3. La dimostrazione per assurdo e i suoi presupposti assiomatici;
4. L'induzione matematica.

A questi quattro temi, che corrispondono ad altrettanti incontri, abbiamo premesso un primo incontro che desse uno sguardo generale sul concetto di dimostrazione matematica, con particolare riferimento alla differenza tra dimostrare la verità o la falsità di una proposizione.

Individuati i temi, abbiamo scelto di progettare dapprima la prova di valutazione finale, e poi procedere a rovescio nel definire le varie attività da proporre agli studenti. Tale scelta è motivata innanzitutto dal fatto che l'intero percorso è pensato come orientamento a corsi universitari, in cui la tipologia di valutazione sommativa scelta è presente in forme sostanzialmente analoghe. Pertanto, vista anche la durata ridotta dell'intero percorso, partire dalla costruzione della prova finale ha consentito di fornire agli studenti da un lato un'esperienza realistica dei modi e dei tempi di lavoro all'Università, e dall'altro di progettare un percorso mirato al raggiungimento delle abilità e delle conoscenze, che fossero corrispondenti a quelle effettivamente richieste nell'eventuale proseguimento degli studi. Per sottolineare lo stretto legame tra valutazione e attività dei vari incontri, abbiamo scelto di indicare al termine di ogni capitolo del presente volume gli *item* della prova finale riferiti alle attività in esso descritte e lo scopo per cui sono stati realizzati.

Infine, è bene sottolineare come abbiamo dedicato ampie parti di ciascun incontro ad attività laboratoriali di apprendimento cooperativo, guidate da schede di lavoro, da cui emergessero i processi cognitivi degli studenti, oltre che i prodotti del loro apprendimento.

Modalità di lavoro in aula e a casa

Il percorso si è articolato in una serie di sette incontri, della durata di due ore e mezza ciascuno.

Il primo incontro è stato replicato presso ciascuna delle scuole aderenti. I docenti hanno presentato il piano di lavoro, proponendo le attività descritte nel Capitolo 1. L'ultima mezz'ora è stata dedicata all'orientamento universitario, lasciando spazio alle domande degli studenti. I successivi incontri si sono tenuti tutti presso il Dipartimento di Matematica 'G. Peano', nei quali si sono quindi riuniti gli studenti delle diverse scuole.

Nel creare i gruppi di lavoro, costituiti da 3 ragazzi, si è optato per formare gruppi di apprendimento cooperativo eterogenei per provenienza, facendo collaborare studenti di diverse scuole e classi. I primi quattro incontri tenuti nel Dipartimento si sono svolti con cadenza settimanale: ogni lezione ha avuto un macro-tema centrale, che è stato affrontato proponendo agli studenti le attività descritte nei capitoli successivi.

Ogni studente è stato quindi chiamato a lavorare in gruppo durante gli incontri e autonomamente durante la settimana, provando a svolgere gli esercizi assegnati tramite la creazione di un apposito corso Moodle, ospitato sul sito “DI.FI.MA in rete”. Su questa piattaforma gli studenti hanno potuto trovare di volta in volta tutte le slide e i materiali utilizzati durante gli incontri e hanno inviato i loro compiti, in modo che nell’incontro successivo potessero essere discussi.

Gli ultimi due incontri sono stati dedicati allo svolgimento della verifica sommativa e alla sua discussione. In questa prova finale sono state inserite 13 domande a risposta chiusa e 7 domande a risposta aperta. Il tempo a disposizione è stato fissato in 90 minuti ed è risultato adeguato per gli studenti. La correzione del test è stata inserita su Moodle, in modo che potesse essere fruibile anche dagli studenti non presenti all’ultimo incontro. Oltre all’attestato di partecipazione, è stato rilasciato un attestato di merito a chi ha conseguito un punteggio maggiore o uguale al 60%. Al termine della correzione è stato proposto un momento conclusivo di orientamento alle scelte universitarie.

Struttura del libro

Ogni capitolo del presente volume è strutturato come segue.

Dopo un’introduzione teorica sui nuclei concettuali su cui si basa l’incontro, sono inserite le schede di progettazione, che descrivono analiticamente le attività svolte in aula. Queste ultime si prestano comunque ad adattamenti e personalizzazioni per essere adeguate al contesto specifico di ciascun gruppo classe. In questa sezione introduttiva particolare attenzione è dedicata al legame con le Indicazioni Nazionali e le Linee Guida e ai nuclei presenti nei documenti UMI 2003 e 2004.

Sono poi inserite le schede di lavoro utilizzate, seguite da spunti di didattizzazione e dalla discussione di alcuni protocolli significativi.

Sono infine riportati gli *item* della prova finale – con le risposte corrette segnate in grassetto – relativi alle competenze oggetto del capitolo, con l’indicazione del legame con le attività e le percentuali di risposta degli studenti.

CAPITOLO 1

Introduzione alla dimostrazione matematica

Introduzione

In questo capitolo le tre attività proposte hanno lo scopo di far analizzare agli studenti diversi aspetti della dimostrazione matematica, in modo da stimolare in loro una riflessione più profonda su concetti della matematica già noti.

Tutte le attività proposte non richiedono particolari prerequisiti, se non le conoscenze elementari di aritmetica, algebra e geometria propedeutiche al secondo biennio della scuola secondaria di II grado.

Un aspetto comune alle attività è la *motivazione*: molto spesso la scelta di condurre in aula una dimostrazione (o di assegnarla come esercizio) si trasforma nell'esecuzione di una procedura cieca per lo studente. Per ovviare a tale problema si è scelto di proporre tre problemi in cui sono presenti elementi controintuitivi, in grado di sorprendere gli studenti e di spingerli così a ragionare e trovare autonomamente la soluzione.

Nell'Attività 1 si è chiesto di "dimostrare" una formula sui numeri primi verificandola direttamente su alcuni casi. La formula si rivelerà falsa, ma per scoprirlo sarà necessario trovare un caso che la contraddica. Lo scopo è far comprendere la profonda differenza tra la dimostrazione di un'affermazione vera e di una falsa. Per il secondo caso sarà sufficiente trovare un esempio in cui la formula assegnata non funziona (come nell'attività proposta), ossia un *controesempio*. Per dimostrare, invece, che un'affermazione è vera è necessario organizzare una procedura logica che prescinde dalla verifica di (infiniti) casi possibili. Un secondo obiettivo di questa attività è far svincolare gli studenti dalla misconcezione per cui se una formula è verificata per i primi due o tre casi, allora essa sarà vera: per trovare un controesempio è necessario verificare la formula per numeri naturali superiori a 79, mentre usando solo i primi naturali si ha l'impressione che sia vera. Al termine dell'attività, un breve approfondimento storico sui tentativi di grandi nomi della matematica, come Marin Mersenne, Pierre de Fermat e Leonhard Euler, di risolvere il problema di trovare una formula per i numeri primi, ha guidato gli studenti ad una riflessione storica su una questione ancor oggi aperta e di interesse per la ricerca matematica.

Nell'Attività 2 si è voluto fornire un esempio della potenza della dimostrazione matematica: un problema che apparentemente richiede *infinite prove*, cioè quello di collocare in modo efficiente delle lattine di birra dentro una cassa, può essere completamente risolto con un semplice ragionamento algebrico/geometrico. Si noti come la soluzione del problema sia controintuitiva, in linea con l'obiettivo di stimolare la motivazione degli studenti.

Infine, l'Attività 3 si concentra sul legame tra rappresentazione grafica e dimostrazione. Si è proposta agli studenti una "dimostrazione" completa della proposizione "tutti i triangoli sono isosceli" e si è chiesto loro di trovare l'errore. Esso si trova nella figura assegnata, che fuorvia il ragionamento. Talvolta gli studenti, nel tentativo di dimostrare una proposizione geometrica, iniziano a ragionare a partire dal disegno, non realizzando appieno quanto sia cruciale una rappresentazione grafica che non induca in errore, ad esempio perché non considera il caso più generico possibile. Attraverso l'analisi dei singoli passaggi della dimostrazione, gli studenti sono inoltre obbligati a riflettere sul legame che esiste tra le ipotesi e i vari passaggi del ragionamento. Talvolta infatti essi concepiscono le dimostrazioni come "blocchi unici", senza soffermarsi sulla sequenza logica che si sussegue a partire dalle ipotesi. In un certo senso, questo problema può ricordare nella sua modalità una "analisi del testo", che gli studenti sono soliti svolgere nelle discipline letterarie.

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** introduzione alla dimostrazione matematica.
- **Ordine di scuola:** secondo biennio e quinto anno della scuola secondaria di II grado.
- **Materiali e strumenti:** schede di lavoro preparate dagli organizzatori; GeoGebra.
- **Prerequisiti:**
  - conoscenza dei contenuti di base di aritmetica, algebra e geometria euclidea.
- **Obiettivi:**
  - comprendere il ruolo del controesempio nella dimostrazione matematica;
  - comprendere l'importanza del ragionamento matematico per risolvere problemi con soluzione non intuitiva;
  - comprendere la potenza e le insidie della rappresentazione grafica nella dimostrazione matematica.
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è strutturata come una lezione partecipata, nella quale si alternano momenti di lezione frontale e 3 attività di esplorazione dei concetti analizzati. Gli studenti sono divisi in gruppi di lavoro composti da 3 ragazzi. A ciascun gruppo è consegnata una scheda di lavoro, contenente esercizi stimolo, in cui gli studenti sono chiamati ad argomentare in forma scritta i ragionamenti discussi.
- **Tempo di svolgimento previsto:** 120 minuti.
- **Contenuti matematici:**
  - **Il controesempio:** si guidano gli studenti nella comprensione dell'importanza del controesempio attraverso l'utilizzo di un esempio pratico nell'ambito algebrico.
  - **Il ragionamento logico può contraddire l'intuizione:** attraverso una situazione dalla soluzione apparentemente intuitiva, si guidano gli studenti alla comprensione dell'importanza del ragionamento logico.
  - **La potenza delle figure:** tramite la "dimostrazione" di un teorema, palesemente errato, si mostrano agli studenti gli effetti negativi di un ragionamento basato esclusivamente sulla rappresentazione grafica.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Risultati di apprendimento del Liceo scientifico

Gli studenti, a conclusione del percorso di studio, oltre a raggiungere i risultati di apprendimento comuni, dovranno: [...]

- comprendere le strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale; usarle in particolare nell'individuare e risolvere problemi di varia natura; [...]
- riconoscere le potenzialità della matematica applicata a contesti di vita quotidiana.

Linee generali e competenze

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi [...].

Il docente di "Matematica" concorre a far conseguire, al termine del percorso quinquennale, i seguenti risultati di apprendimento relativi al profilo educativo, culturale e professionale: padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze

Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.

Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare une determinata affermazione.

Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale)

Riconosce, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse.

Riferimenti ai nuclei, conoscenze e abilità dei documenti UMI (2003, 2004)

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	
		disciplinari	**trasversali**
• Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. • Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi. • Comprendere ed usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni. • Produrre una soluzione del problema attraverso una opportuna concatenazione delle azioni necessarie (formalizzazioni, calcoli, costruzioni geometriche, ecc.). • Confrontare i risultati ottenuti con le aspettative precedentemente esplicitate. • Individuare le cause delle inadeguatezze considerando ed eventualmente modificando gli elementi di controllo precedentemente individuati […]. • Comunicare in modo esauriente e comprensibile le strategie risolutive prodotte, discutendone l'efficacia e la validità, e confrontarle con eventuali altre strategie. • Formulare congetture per esprimere regolarità significative individuate in ambiti matematici diversi; sottoporre le congetture formulate (o proposte da altri) al vaglio di casi opportunamente scelti, ricercando controesempi e (in mancanza di essi) cercare di costruire dimostrazioni via via più esaurienti e rigorose, riferite agli elementi di teoria disponibili.	• Schemi di ragionamento.	Relazioni e funzioni. Spazio e figure.	Argomentare, congetturare, dimostrare. Risolvere e porsi problemi.

Attività proposte e soluzioni

Attività 1

L'attività qui descritta è stata proposta agli studenti in seguito a una breve introduzione sui numeri primi. Essi sono stati divisi in gruppi, a ciascuno dei quali è stata consegnata una tabella contenente l'elenco dei numeri primi minori di 2000, in modo da poter verificare eventuali risultati. Alla risoluzione di questa attività è stato dedicato un tempo di 20 minuti nei quali gli studenti hanno lavorato avvalendosi di qualsiasi strumento avessero reputato utile (carta e penna, calcolatrice, fogli di calcolo Excel, GeoGebra, …).

> *Una formula per trovare tutti i numeri primi? Provare per credere.*
>
> **Teorema**
>
> La formula $P_n = n^2 - 79n + 1601$ restituisce un numero primo per ogni valore di $n \in \mathrm{N}$.
>
> Questo teorema vi sembra vero?
> Riuscite a verificarlo con l'aiuto della tabella fornita?
> Descrivete i vostri ragionamenti.

Si faccia attenzione al fatto che il teorema assegnato non afferma che con la formula P_n si possano trovare *tutti* i numeri primi, ma che per *tutti* i valori di $n \in \mathrm{N}$ il numero P_n è un numero primo.

La dimostrazione dell'enunciato è stata tentata da tutti i gruppi, ma, come prevedibile, senza alcun successo. Questo perché il teorema è falso, quindi ogni tentativo di dimostrazione è destinato a fallire. Eppure, la falsità della proposizione non è evidente, infatti, per un larghissimo numero di casi, assegnato un numero naturale n, il corrispettivo numero P_n risulta essere un numero primo (in questa fase risulta utile la tabella fornita per verificare i risultati). Per la precisione, per i primi 79 numeri naturali, la formula

$$P_n = n^2 - 79n + 1601$$

restituisce ogni volta dei numeri primi (non tutti distinti), mentre per $n = 80$ si ha $P_n = 1681$ che non è primo (come verificabile con la tabella o dalla constatazione che $1681 = 41^2$).

Una volta terminata l'attività sono stati dedicati altri 10 minuti ad un breve approfondimento storico riguardante i numeri primi. È stato illustrato come la ricerca dei numeri primi sia stato uno dei più stimolanti enigmi della storia della matematica, a partire dal frate francese Marin Mersenne (1588-1648) – amico di molti matematici dell'epoca, come René Descartes – che aveva trovato la formula $2^P - 1$, che restituiva numeri primi molto grandi, ma solo per specifici valori di P (i *numeri di Mersenne*). È stato poi fatto cenno a Pierre de Fermat (1601-1665) e alla sua formula $2^{2^n} + 1$ che genera numeri talmente grandi, la cui primalità difficilmente poteva essere verificata con gli strumenti disponibili all'epoca. Si scoprì infatti solo nel 1732, grazie a Leonhard Euler (1707-1783), che per $n = 5$ – il cui corrispondente numero superava i 4000 milioni – la formula non restituiva un numero primo. Il discorso si è concluso poi con l'ipotesi di Bernhard Riemann (1826-1866), che, se dimostrata, potrebbe condurre a risolvere il problema di trovare una formula per i numeri primi, e che oggi è considerata tra i 7 problemi più difficili del nuovo millennio.

In ultima battuta è stato proposto agli studenti il numero 22 338 618, dicendo loro che si trattava dell'ultimo (febbraio 2017) numero primo trovato dalla ricerca matematica a livello mondiale. Dopo qualche secondo di silenzio qualche studente ha timidamente osservato che tale numero è pari, quindi non può essere primo. Solo allora è stato svelato che 22 338 618 è in realtà il numero di cifre che compongono l'ultimo numero primo trovato.

Attività 2

Dopo aver discusso sull'Attività 1 e, dunque, sul fatto che può capitare di trovare formule che in apparenza sembrano vere, ma che con un controesempio si rivelano false, si è proposto agli studenti il seguente problema con soluzione controintuitiva. All'attività, da svolgere a gruppi, sono stati dedicati 20 minuti.

> *Aiuta Duffman a portare alla tua festa la maggior quantità di birra possibile!*
>
> **Problema**
>
> Avete a disposizione una scatola di forma cubica e potete riempirla con un set di lattine uguali (eventualmente anche una sola) di cui potete decidere arbitrariamente il diametro.
> Qual è la scelta più conveniente?
> Descrivete i vostri ragionamenti.

Il problema – per cui è stato scelto Duffman, un personaggio di un cartone animato icona di una fabbrica di birra di fantasia – si concentra sull'ottimizzazione delle dimensioni delle lattine che riempiono la scatola, che devono essere necessariamente cilindri, uguali fra loro e che devono avere altezza e raggio opportuni. Per comodità lo spessore delle lattine si considera trascurabile. Assumendo che la scelta più conveniente per l'altezza delle lattine sia l'altezza della scatola, il problema, da tridimensionale, può essere ricondotto a due dimensioni, e così riformulato: "quale lunghezza deve avere il raggio della base della lattina affinché essa ottimizzi l'area della scatola in cui trasportare birra?" Ad esempio, si può scegliere di realizzare una sola lattina, di diametro pari al lato del quadrato, oppure quattro lattine di diametro pari alla metà del lato e così via (vedi Figura 1).

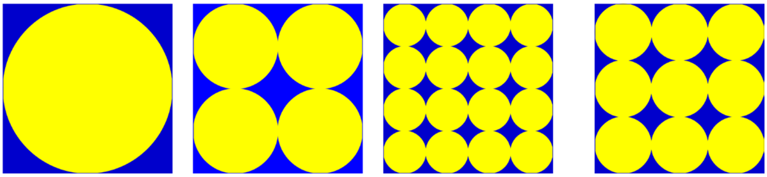


Figura 1. Le diverse configurazioni di lattine nel piatto

Prima di iniziare a ragionare a gruppi sul problema, è stato chiesto agli studenti di intuire quale potesse essere la soluzione, cioè se fosse meglio usare un numero "piccolo" o "grande" di lattine. Tutti gli studenti hanno ipotizzato che usare lattine dal raggio piccolo avrebbe limitato gli sprechi di spazio. In realtà, questa intuizione si dimostra essere sbagliata. Tutte le configurazioni sono infatti equivalenti, cioè qualsiasi scelta di raggio come sottomultiplo del lato del quadrato riempie la base della scatola alla stessa maniera.
Sia n il numero di lattine per lato, allora in totale si avranno n^2 lattine, ciascuna delle quali con raggio pari a $\frac{1}{2n}$. La superficie coperta da una lattina sarà quindi $\left(\frac{1}{2n}\right)^2 \pi = \frac{1}{4n^2}\pi$, che moltiplicata per le n^2 lattine restituisce $\frac{1}{4}\pi$. Tale valore è una quantità indipendente da n. Pertanto, per qualsiasi numero di lattine lo spazio inutilizzato rimane sempre lo stesso.

Attività 3

Dopo una riflessione indotta dall'Attività 2 sui problemi controintuitivi e sul fatto che le prime intuizioni possano ingannare, è stata mostrata e spiegata agli studenti la dimostrazione, in apparenza inattaccabile, di un teorema palesemente falso, ed è stato chiesto loro di trovare l'errore. Il tempo dedicato a questa Attività è stato di 20 minuti, nei quali è stato richiesto di argomentare i ragionamenti.

Può esistere un mondo senza triangoli scaleni? Dalla dimostrazione seguente parrebbe di sì. Segui i passaggi e, con le tue conoscenze di geometria, trova l’errore!

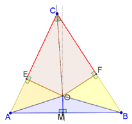
TEOREMA:

Tutti i triangoli sono isosceli.

Ipotesi: un triangolo ΔABC
Tesi: ΔABC è isoscele ($AC \cong AB$)

Dimostrazione:

- Tracciamo la bisettrice dell’angoloĉ $B\widehat{C}A$.
- Sia M il punto medio del segmento AB, traccia l’asse del segmento.
- Sia O il punto di intersezione tra la bisettrice e l’asse.
- Tracciamo le perpendicolari OE e OF rispettivamente ai lati CA e BC.



Consideriamo i triangoli rettangoli ***CEO*** e ***FCO***. Sono congruenti perché:

$$\begin{cases} OC \text{ lato in comune} \\ O\widehat{C}E \cong O\widehat{C}F \qquad (OC \text{ bisettrice di } A\widehat{C}B) \\ C\widehat{E}O \cong OF\widehat{C} = 90° \qquad (\text{per costruzione}) \end{cases} \rightarrow$$

Dunque anche gli altri lati sono congruenti:

$\boldsymbol{OE \cong OF}$ e $\boldsymbol{CE \cong CF}$

Consideriamo i triangoli rettangoli ***AOM*** e ***BOM***. Sono congruenti perché:

$$\begin{cases} OC \text{ lato in comune} \\ AM \cong MB \qquad (M \text{ punto medio di AB}) \\ A\widehat{M}O \cong B\widehat{M}O = 90° \qquad (\text{per costruzione}) \end{cases} \rightarrow$$

Dunque anche il terzo lato è congruente:

$\boldsymbol{AO \cong BO}$

Consideriamo i triangoli rettangoli ***AOE*** e ***BOF***. Sono congruenti perché:

$$\begin{cases} \text{Ipotenusa congruente} \quad (AO \cong BO) \\ \text{Un cateto congruente} \quad (OE \cong OF) \end{cases} \rightarrow$$

Dunque anche l’altro cateto è congruente:

$\boldsymbol{EA \cong BF}$

I lati del triangolo CA e BC si ottengono come somma di segmenti congruenti:

$CA = \underline{EA} + \overline{\overline{CE}} = \underline{BF} + \overline{\overline{FC}} = BC$, quindi CA e BC sono congruenti.

Dunque il triangolo generico ABC è isoscele, cioè tutti i triangoli sono isosceli.

c.v.d.

L'errore nella dimostrazione consiste nell'aver supposto che il punto O fosse interno al triangolo, come erroneamente mostrava la figura proposta nella scheda. Da ciò risulta che i piedi delle perpendicolari ai lati, E ed F, sono uno interno ed uno esterno ai lati del triangolo (vedi Figura 2). Sebbene i triangoli CEO e FCO, e i triangoli AOE e BOF siano ancora congruenti, i lati CA e BC non si ottengono più come somma di segmenti congruenti, bensì si ha:

$CA = CE - AE$

$BC = BF + FC$

Pertanto i lati CA e BC non sono congruenti e il triangolo ABC non è isoscele. Si è così trovato l'errore della dimostrazione.

Per completezza e come approfondimento ulteriore è possibile dimostrare che in un triangolo non isoscele l'asse e la bisettrice di un angolo opposto si incontrano in un punto esterno al triangolo.

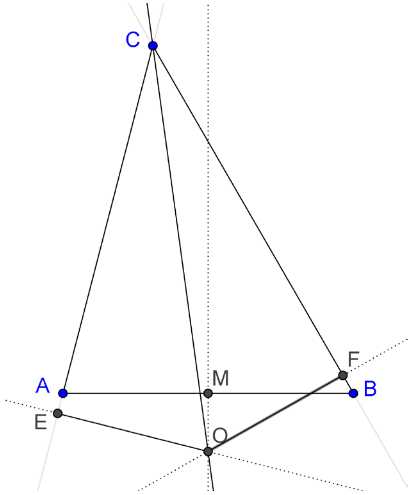


Figura 2

Discussione sui protocolli degli studenti

Attività 1

La maggioranza degli studenti, riconoscendo nella formula proposta un'equazione di II grado, ha affrontato il problema calcolandone il discriminante, senza un'apparente strategia risolutiva (vedi Figura 3).

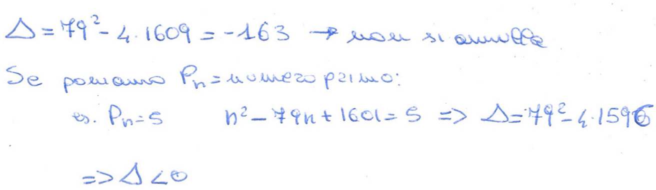


Figura 3 Gli studenti applicano meccanicamente la formula risolutiva di un'equazione di II grado.

Solamente in seguito all'intervento dei docenti, che hanno invitato gli studenti a riflettere sulla domanda proposta, è stata messa in dubbio la formula, che è stata verificata su casi particolari. Molti studenti hanno dato per scontato che l'affermazione fosse vera e si sono limitati a "verificare" alcuni casi relativi ai primi numeri naturali (vedi Figura 4).

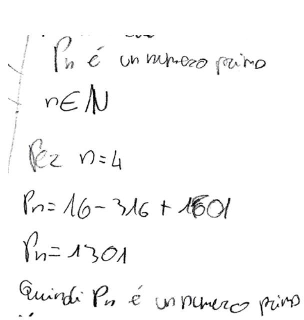


Figura 4 In questo protocollo gli studenti hanno verificato la formula per dedurne la veridicità

Solo chi si è spinto alla verifica su numeri naturali maggiori di 79 è riuscito a trovare la soluzione (vedi Figura 5).

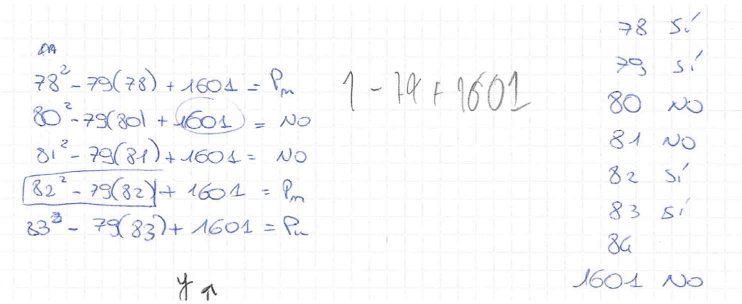


Figura 5 In questo protocollo gli studenti hanno verificato la formula per i numeri naturali da 78 a 83.

Risulta interessante un caso particolare, nel quale un gruppo di studenti ha tentato di dare una dimostrazione per assurdo del teorema. Assumendo che $P_n = n^2 - 79n + 1601$ sia un numero primo per ogni $n \in$ N, essi hanno sfruttato la definizione di numero primo e hanno dedotto che il resto della divisione di P_n per un qualsiasi numero naturale sarebbe stato diverso da 0. Proseguendo questo ragionamento hanno diviso P_n per n ottenendo $n - 79 + \frac{1601}{n}$. Poiché 1601 è un numero primo, allora $\frac{1601}{n}$ non può essere un numero naturale, se non per $n = 1601$. In questo modo è stato "dimostrato" che P_{1601} non può essere primo. In realtà, il gruppo degli studenti ha commesso un errore nella scelta del simbolo per il generico numero naturale che divide la formula data (vedi Figura 6). È significativo comunque che gli studenti abbiano utilizzato la definizione di numero primo e manipolato la formula con una precisa strategia risolutiva, invece che applicare in modo cieco la formula risolutiva per equazioni di II grado.

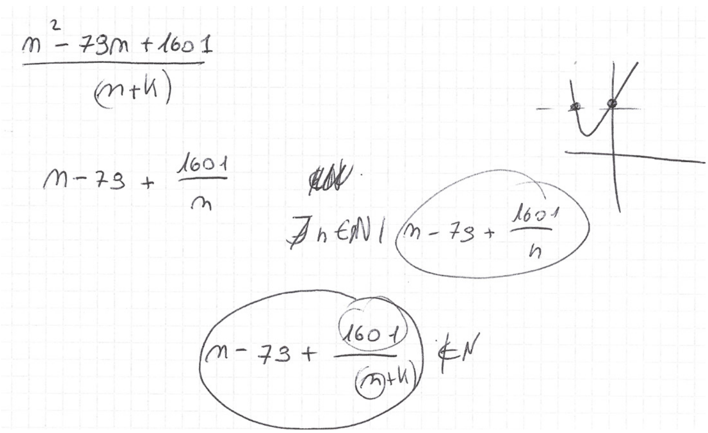


Figura 6 In questo protocollo si osserva l'errata dimostrazione per assurdo proposta da un gruppo di studenti.

Attività 2

La maggioranza degli studenti è riuscita a completare la dimostrazione dell'Attività 2 in modo adeguato. Come ci si aspettava, gli studenti sono stati sorpresi dal risultato controintuitivo, ma, avendolo dimostrato, lo hanno accettato (vedi Figura 7).

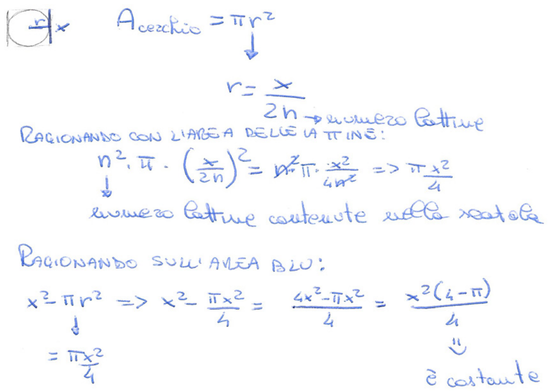


Figura 7 In questo protocollo gli studenti risolvono correttamente il problema.

Attività 3

Nella seguente attività tutti gli studenti si sono concentrati sul testo, dando per scontato che l'immagine fosse corretta. In questo modo, cercando di verificare l'applicazione dei teoremi di geometria elementare, non sono stati in grado di trovare l'errore (vedi Figura 8).

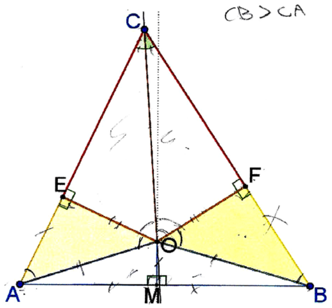


Figura 8 Gli studenti verificano la corretta applicazione dei principi di equivalenza dei triangoli utilizzati nella dimostrazione.

Solo dopo l'intervento dei docenti, alcuni studenti hanno provato a disegnare in maniera autonoma l'immagine, giungendo così ad individuare l'errore (vedi Figura 9).

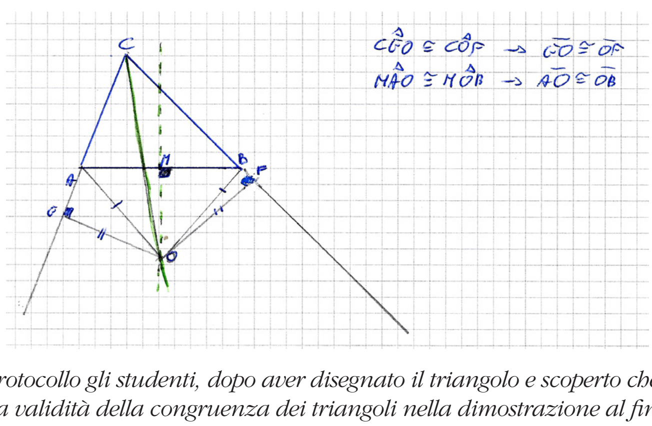


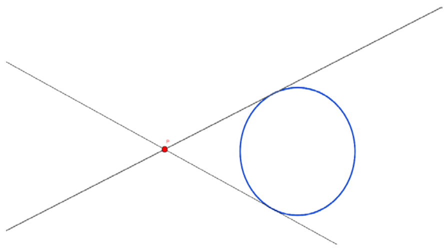
Figura 9 In questo protocollo gli studenti, dopo aver disegnato il triangolo e scoperto che il punto O è esterno ad esso, verificano la validità della congruenza dei triangoli nella dimostrazione al fine di trovare l'errore.

Un interessante ragionamento è stato proposto da uno studente. Egli ha infatti osservato che, se fosse vero che tutti i triangoli sono isosceli, allora lo sarebbero anche quelli utilizzati nei passi della dimostrazione. Questo lo ha condotto immediatamente a trovare delle contraddizioni.

Valutazione

La seguente domanda, parte del test finale, può essere utilizzata dall'insegnante come verifica sommativa del lavoro svolto. Oltre alla soluzione, sono stati indicati i punti massimi ottenibili e, tra parentesi quadre, la percentuale di risposte date dagli studenti.

1. Ornella dice: "*Dati nel piano euclideo un punto ed una circonferenza, esistono sempre almeno una retta tangente, una retta secante ed una retta esterna alla circonferenza passanti per quel punto.*"



Ferdinando dice, mostrandole il disegno: "*Ti sbagli! Come vedi, esistono almeno due tangenti alla circonferenza.*"
Chi ha ragione?
b. Ornella
c. Ferdinando
d. Entrambi
e. N**essuno dei due** _/ 1
[a. 13,3% ; b. 0% ; c. 13,3% ; d. 73,4% ; non risponde 0%]

2. Giustifica la risposta data al punto precedente.
_/ 2

"Ornella e Ferdinando non considerano che il punto P potrebbe appartenere alla circonferenza o essere interno ad essa."
[66,6 % corretto; 6,7 % parzialmente corretto; 26,7 % errato; 0 % non risponde]

Questa domanda è stata inserita per verificare che gli studenti abbiano compreso come sia possibile confutare una proposizione con un opportuno controesempio. Inoltre si è scelto di inserire l'immagine per verificare se gli studenti avessero acquisito la capacità di astrarre dalla rappresentazione grafica proposta.

Dall'analisi dei protocolli è emerso che la maggioranza degli studenti ha dimostrato di possedere questa capacità (vedi Figura 10).

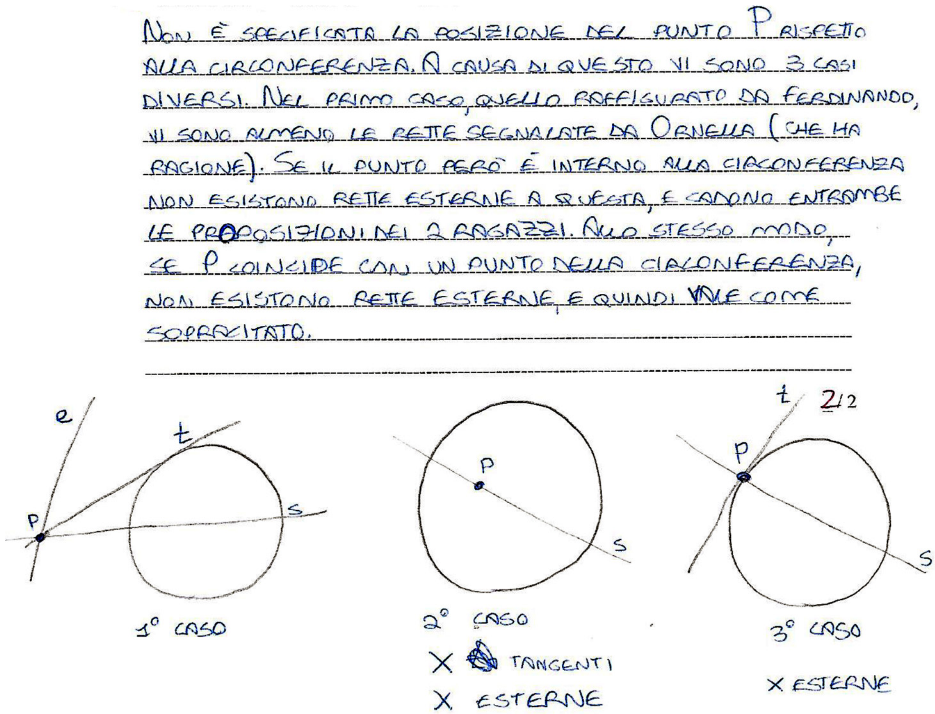

NON È SPECIFICATA LA POSIZIONE DEL PUNTO P RISPETTO ALLA CIRCONFERENZA. A CAUSA DI QUESTO VI SONO 3 CASI DIVERSI. NEL PRIMO CASO, QUELLO RAFFIGURATO DA FERDINANDO, VI SONO ALMENO LE RETTE SEGNALATE DA ORNELLA (CHE HA RAGIONE). SE IL PUNTO PERÒ È INTERNO ALLA CIRCONFERENZA NON ESISTONO RETTE ESTERNE A QUESTA, E CADONO ENTRAMBE LE PROPOSIZIONI DEI 2 RAGAZZI. ALLO STESSO MODO, SE P COINCIDE CON UN PUNTO DELLA CIRCONFERENZA, NON ESISTONO RETTE ESTERNE, E QUINDI VALE COME SOPRACITATO.

Figura 10 In questo protocollo lo studente fornisce la soluzione corretta.

Gli studenti che hanno fornito una risposta errata sono stati ingannati dalla figura (vedi Figura 11).

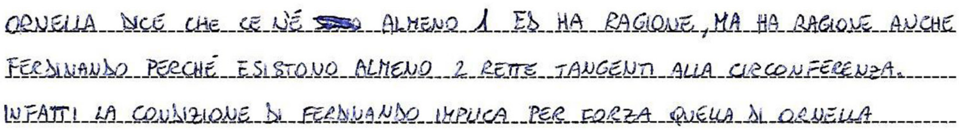

ORNELLA DICE CHE CE N'È ALMENO 1 ED HA RAGIONE, MA HA RAGIONE ANCHE FERDINANDO PERCHÉ ESISTONO ALMENO 2 RETTE TANGENTI ALLA CIRCONFERENZA. INFATTI LA CONDIZIONE DI FERNANDO IMPLICA PER FORZA QUELLA DI ORNELLA

Figura 11 In questo protocollo lo studente non fornisce un controesempio, probabilmente perché ingannato dalla figura.

CAPITOLO 2

L'assiomatica e la geometria sferica

Introduzione

Le attività contenute in questo capitolo hanno lo scopo di mostrare come la scelta del sistema assiomatico abbia un profondo legame con la verità o la falsità di una proposizione. In particolare, una proposizione che è vera in un certo sistema assiomatico può essere falsa in un altro.[1]

Per illustrare questo concetto, si è scelto di utilizzare come modello la geometria euclidea, che è un ambiente noto e adottato abitualmente dagli studenti, e introdurre la geometria sferica, che solitamente non viene affrontata in dettaglio nei curricoli, in modo da evidenziare similitudini e differenze tra questi modelli.

Per prima cosa è stato richiamato il concetto di **assioma** (o *nozione comune*), cioè "un enunciato che, pur non essendo stato dimostrato, è considerato vero". È interessante presentare agli studenti un enunciato come

$$\forall x\ (x = x)$$

che precisa che ogni ente è uguale a sé stesso. Tale affermazione, la cui verità è "data per scontata" dagli studenti, va invece precisata in un contesto di rigore formale ed è un esempio di assioma non legato esclusivamente alla geometria euclidea (ambiente in cui viene generalmente introdotta l'assiomatica nel curricolo). Gli studenti, infatti, devono comprendere come il concetto di assioma sia alla base di tutta la matematica e sia implicitamente utilizzato nelle ipotesi e nella tesi di ogni proposizione.

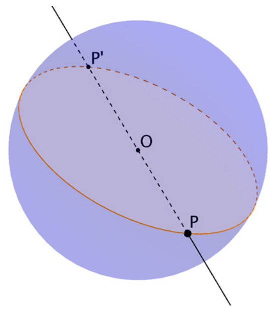


Figura 1 Il punto *sulla sfera è definito come la coppia di punti {P, P'}.*

Successivamente, si è passati a discutere la geometria sferica, di cui ora richiamiamo alcuni elementi.

La definizione di *punto* su una sfera può essere presentata in due modi: è possibile scegliere che esso sia semplicemente un punto euclideo nello spazio tridimensionale sulla superficie di una sfera; oppure si può definire come una coppia di punti antipodali (cioè da parti opposte rispetto ad una retta che passa per il centro della sfera, vedi Figura 1).

La prima definizione appare quella più semplice e intuitiva, mentre la seconda è profondamente diversa da quella usata sul piano. Tuttavia, quest'ultima garantisce la validità di un maggior numero di proposizioni e proprietà, come vedremo in seguito. Una *retta* su una sfera è definita come una circonferenza massima, cioè l'intersezione tra la sfera e un piano passante per il

---

1 Per introdurre tale argomento agli studenti è stata mostrata un'immagine tratta dalla campagna pubblicitaria *Moms Demand Action for Gun Sense in America* (facilmente consultabile online), prodotta dall'agenzia *Grey Group*, in cui sono presenti due bambini che tengono in mano rispettivamente un ovetto di cioccolato e un fucile d'assalto. Nella didascalia è richiesto di indovinare quale dei due tenga in mano un oggetto che è stato bandito in America per proteggerli. L'immagine fa riferimento a una legge americana che vieta di inserire oggetti non commestibili all'interno di prodotti alimentari.
Cfr. http://grey.com/canada/work/key/mda/id/5440/.

suo centro (vedi Figura 2). Il fatto che si richieda che la circonferenza sia "massima" ha come conseguenza che essa è determinata in maniera univoca da due punti distinti sulla sfera, perché un piano è determinato in maniera unica da tre punti distinti (i due punti sulla sfera e il centro della stessa).

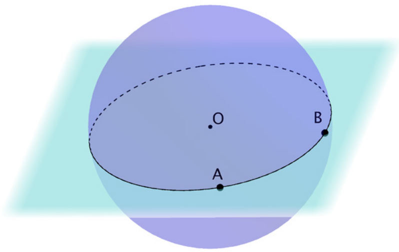


Figura 2 La retta *sulla sfera AB è la circonferenza data dall'intersezione della sfera con il piano passante per i due punti sulla sfera A, B e il centro O.*

Un *segmento* su una sfera è definito come il minore arco di circonferenza massima che unisce due *punti* distinti sulla sfera (vedi Figura 3). Il fatto di precisare che l'arco debba essere "il minore" garantisce l'unicità del segmento passante per due punti distinti.

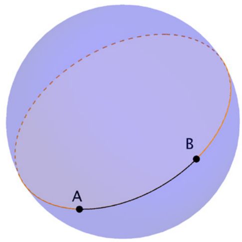


Figura 3 Il segmento *sulla sfera AB è il minore arco di circonferenza massima che unisce i punti A e B.*

Infine, un *angolo* fra due rette sulla sfera è definito come l'angolo fra le due rette euclidee tangenti alla sfera nel punto di intersezione delle due *rette* e giacenti nei piani da esse individuati (vedi Figura 4).

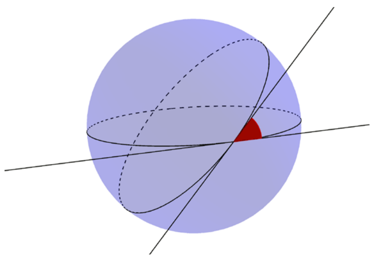


*Figura 4 L'*angolo *fra due rette sulla sfera.*

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** sistemi assiomatici e geometria sferica.
- **Ordine di scuola:** secondo biennio e quinto anno della scuola secondaria di II grado.
- **Materiali e strumenti:** schede di lavoro preparate dagli organizzatori; GeoGebra.

- **Prerequisiti:**
  - conoscenza delle definizioni degli enti geometrici fondamentali sul piano euclideo;
  - conoscenza dei cinque postulati della geometria euclidea.
- **Obiettivi:**
  - comprendere che la validità di una proprietà è dipendente dal sistema di assiomi scelto;
  - comprendere la relazione tra una proprietà ed il sistema assiomatico di riferimento.
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è strutturata come una lezione partecipata, nella quale si alternano momenti di lezione frontale e 2 attività di esplorazione dei concetti analizzati. Gli studenti sono divisi in gruppi di lavoro composti da 3 ragazzi. A ciascun gruppo è consegnata una scheda, contenente esercizi stimolo e in cui gli studenti sono chiamati ad argomentare in forma scritta i ragionamenti discussi. Concludono la lezione 3 esercizi da svolgere individualmente.
- **Tempo di svolgimento previsto:** 120 minuti.
- **Contenuti matematici:**
  - **Storia della geometria sferica:** si colloca storicamente la nascita delle geometrie non euclidee con le mutate esigenze cartografiche in seguito alle esplorazioni del globo terrestre; si delinea il percorso storico da Euclide a Riemann.
  - **Definizioni e proprietà di enti sulla sfera:** si giunge alla definizione e sistematizzazione dei concetti di punto, retta, segmento, angolo, triangolo e quadrato sulla superficie sferica, considerando le analogie e le differenze rispetto al piano euclideo.
  - **Validità di proposizioni:** viene valutata e analizzata la validità sulla superficie sferica di alcune proposizioni note dalla geometria euclidea.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Linee generali e competenze

Saranno obiettivo dello studio: […] una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica. […]

Quinto anno scuola secondaria di secondo grado

Nell'anno finale lo studente approfondirà la comprensione del metodo assiomatico e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica. Gli esempi verranno tratti dal contesto dell'aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell'insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze

Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.

Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.

Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare une determinata affermazione.

Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.

Riconosce, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse.

Riferimenti ai nuclei, conoscenze e abilità dei documenti UMI (2003, 2004)

<table>
<tr><th rowspan="2">Abilità</th><th rowspan="2">Conoscenze</th><th colspan="2">Nuclei coinvolti</th></tr>
<tr><th>disciplinari</th><th>trasversali</th></tr>
<tr><td>• Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto.
• Utilizzare i primi elementi della geometria della sfera in altri ambiti (geografia, fisica, astronomia).
• Analizzare le caratteristiche del V postulato di Euclide e conoscere la nascita delle geometrie non euclidee; conoscere nelle loro linee essenziali i modelli di geometria non euclidea […].
• Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria.
• Comprendere il ruolo e le caratteristiche di un sistema assiomatico.</td><td>• Il metodo ipotetico-deduttivo. Enti primitivi e assiomi. Definizione: teoremi e dimostrazioni.
• […] Elementi di geometria della sfera: circonferenze e triangoli sulla sfera; nozione intuitiva di geodetica; coordinate sulla sfera (latitudine e longitudine).
• L'assioma delle parallele nel sistema assiomatico di Euclide; i primi elementi delle geometrie non euclidee attraverso modelli.
• Sistemi assiomatici in vari contesti.
• Coerenza e indipendenza di un sistema assiomatico.
• Modelli come interpretazione di un sistema assiomatico.</td><td>Spazio e figure.</td><td>Argomentare, congetturare, dimostrare.

Risolvere e porsi problemi.</td></tr>
</table>

Attività proposte e soluzioni

Attività 1

La seguente attività è stata proposta senza alcun discorso preliminare o introduzione particolare sulla geometria sferica. Gli studenti si sono trovati dunque a svolgere tale attività affidandosi solo alla creazione di nuove idee originali e seguendo le loro intuizioni geometriche. Il tempo dedicato a questa prima attività è stato di 20 minuti, nei quali gli studenti hanno lavorato a gruppi.

Definiamo la geometria sferica

Prova a dare una definizione dei seguenti enti della geometria, non più sul piano ma su una superficie sferica:

- *Punto*
- *Retta*
- *Segmento*
- *Angolo*

A partire dalle definizioni che hai dato, sei in grado di dire:

1. Quante rette passano per due punti generici sulla superficie sferica?
2. Quanti segmenti passano per quegli stessi punti?
3. Osservi qualche differenza con la geometria sul piano? Se sì, elencale.

Per la soluzione della prima parte dell'attività, vale a dire per le definizioni degli enti della geometria sferica, si faccia riferimento all'introduzione di questo capitolo.

La seconda parte è fortemente influenzata dalle scelte fatte nella prima parte, che – come vedremo nella sezione seguente – sono state differenti nei diversi gruppi di studenti e hanno portato a risposte non corrette alle tre domande poste. Alla luce della seconda definizione di *punto* data nell'introduzione, possiamo fornire le seguenti risposte alle domande dell'Attività:

1. Per due *punti* distinti sulla superficie sferica passa una ed una sola *retta* (si ricordi cosa si intende per *retta sulla sfera*).
2. Per due *punti* distinti passa un unico *segmento* (si ricordi cosa si intende per *segmento sulla sfera*).
3. Si osserva un'analogia tra la sfera e il piano. Le due precedenti proposizioni sono valide per entrambi i sistemi. È possibile fare questa constatazione solo operando un'opportuna scelta per le definizioni degli enti fondamentali – *punto*, *retta* e *segmento* – sulla sfera. Esse infatti sono state elaborate in modo tale da creare uniformità tra alcuni teoremi della geometria piana e della geometria sferica.

Attività 2

L'attività è stata proposta agli studenti dopo una lunga discussione sulla risoluzione della prima. In seguito a tale dibattito si sono introdotte le definizioni degli enti della geometria sferica, correggendo eventuali definizioni poco efficaci degli studenti e riuscendo ad avere quindi un sistema di definizioni condiviso da tutti. A tale attività sono stati dedicati 20 minuti. È bene sottolineare che nelle seguenti illustrazioni esplicative si è scelto quasi sempre di omettere la rappresentazione grafica dell'antipodale di un punto. Tuttavia, tale considerazione dev'essere sempre ben presente a livello teorico.

PROPOSIZIONI SONO VERE O FALSE?

Le seguenti proposizioni sono vere o false in geometria sferica? Giustifica le risposte.

P1: Per un punto passano infinite rette.

P2: Dati due punti distinti qualsiasi esiste un'unica retta che li contiene.

P3: Esistono tre punti non allineati.

P4: Data una retta r ed un punto P esterno ad essa esiste un'unica retta passante per P e parallela ad r.

P5: Data una retta r ed un punto P esterno ad essa esiste un'unica retta passante per P e perpendicolare ad r.

P1: Vero. Le circonferenze massime che passano per un *punto* (cioè una coppia di punti antipodali) sono infinite (vedi Figura 5).

P2: Vero. Se si interpreta uno dei *punti* come polo nord, esiste ed è unico il meridiano che passa per il secondo punto sulla sfera.

P3: Vero. È possibile individuare una *retta* ed un *punto* esterno ad essa e di conseguenza è garantita l'esistenza di tre *punti* non allineati (vedi Figura 6).

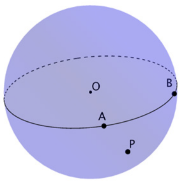


Figura 5 Esistono 3 punti non allineati.

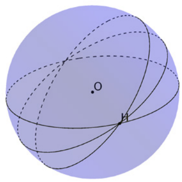


Figura 6 Infinità delle rette passanti per un punto.

P4: Falso. Due circonferenze massime su una sfera si intersecano sempre (si tenga sempre presente la definizione di *retta* su una sfera). Nella Figura 8, ad esempio, le due rette potrebbero sembrare parallele, tuttavia la curva passante per P non è una *retta*, perché non è una circonferenza massima, ma una semplice curva. Dunque siamo in presenza di una geometria dove la proprietà di parallelismo tra rette non è mai soddisfatta. Se in precedenza abbiamo osservato analogie con il piano, si trova qui il principale elemento di discontinuità con la geometria euclidea.

P5: Falso. La perpendicolare ad una *retta* data, passante per un *punto*, esiste ma non è in genere unica. Ciò si può osservare tramite un controesempio: se si considera come *retta* quello che intuitivamente possiamo chiamare equatore (è chiaro che *tutte* le rette sono "equatori" non esiste *una* retta privilegiata che si chiama equatore, dipende dall'osservatore) allora, scelto come punto esterno quello che intuitivamente possiamo chiamare polo nord, le perpendicolari all'equatore che passano per il polo sono infinite (vedi Figura 7). È interessante osservare che se ci limitiamo a considerare i punti che non sono polo nord per un dato equatore, l'esistenza e l'unicità della perpendicolare sono ancora garantite.

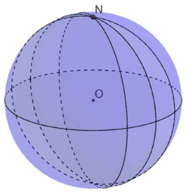


Figura 7 Infinità delle perpendicolari all'equatore, passanti per il polo nord.

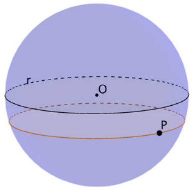


Figura 8 La circonferenza passante per P non è una retta*, dunque non è una* retta *parallela a r.*

Attività individuali

Al termine della lezione, sono state assegnate agli studenti le seguenti attività da svolgere individualmente. La discussione matematica è stata condotta sui *forum* online, nell'arco di una settimana, ed è stata ripresa e approfondita all'inizio della lezione successiva, quando sono state fornite e discusse le soluzioni. Le attività in questione consistono nelle seguenti richieste.

1. Dai una definizione di *triangolo* sulla superficie sferica
2. Dai una definizione di *quadrato* sulla superficie sferica
3. Il Teorema di Pitagora è valido in geometria sferica?

1. Un *triangolo* sulla superficie sferica è la porzione di superficie limitata fra tre segmenti sulla sfera che congiungono a due a due tre punti non allineati (vedi Figura 9).
2. Un *quadrato* sulla superficie sferica è la porzione di superficie limitata da quattro segmenti consecutivi generati unendo gli estremi di due segmenti perpendicolari, congruenti e che si intersecano nel loro punto medio (vedi Figura 10). Con questa definizione stiamo caratterizzando il *quadrato* come un quadrilatero con le diagonali perpendicolari che si bisecano a metà. In tal modo riusciamo, nuovamente, ad avere una continuità con il piano euclideo. Se avessimo definito il quadrato come un quadrilatero con quattro angoli retti, o tramite lati congruenti, perpendicolari e paralleli, queste definizione non avrebbe avuto senso sulla superficie sferica (le *rette* parallele non esistono più sulla sfera come appurato negli esercizi precedenti, e non è possibile formare un quadrilatero con quattro angoli retti sulla superficie sferica).
3. Il Teorema di Pitagora non vale sulla sfera (almeno non nella formulazione usuale) perché, ad esempio, esistono triangoli con tre angoli retti (vedi Figura 11).

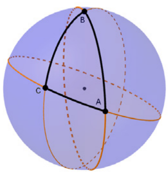


Figura 9
Triangolo *sulla sfera*

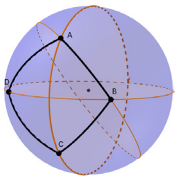


Figura 10
Quadrato *sulla sfera*

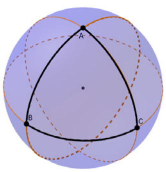


Figura 11
Triangolo *trirettangolo*

Discussione sui protocolli degli studenti

Attività 1

Tutti gli studenti sono stati in grado di definire il *punto* come punto sulla superficie sferica. Mentre per la definizione di *retta*, alcuni si sono limitati a definirla come un insieme infinito di punti, avendo in mente ancora l'analogia con il piano euclideo (vedi Figura 12).

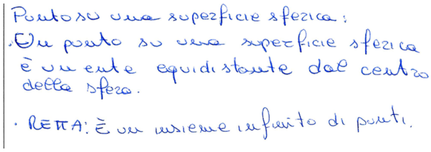

Punto su una superficie sferica:
· Un punto su una superficie sferica è un ente equidistante dal centro della sfera.
· RETTA: È un insieme infinito di punti.

Figura 12 Gli studenti hanno utilizzato le definizioni della geometria euclidea.

Altri studenti hanno invece realizzato come la *retta* sia in realtà una *circonferenza* sulla sfera. In sede di discussione è anche emerso come questi abbiano immaginato di "accartocciare" il piano in modo da renderlo una sfera: in tal modo le rette infinite si congiungono all'estremità e diventano circonferenze (vedi Figura 13).

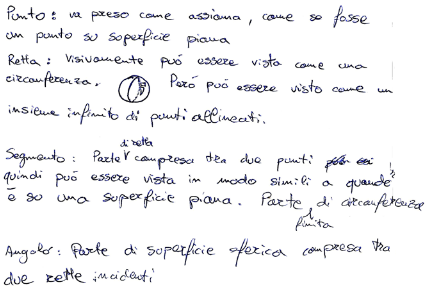

Punto: va preso come assioma, come se fosse un punto su superficie piana
Retta: Visivamente può essere vista come una circonferenza. Però può essere visto come un insieme infinito di punti allineati.
Segmento: Parte di retta compresa tra due punti ~~per essi~~ quindi può essere vista in modo simili a quando è su una superficie piana. Parte finita di circonferenza
Angolo: Parte di superficie sferica compresa tra due rette incidenti

Figura 13 Gli studenti hanno adattato le definizioni al nuovo contesto della sfera.

Il *segmento* è stato definito come parte di *retta*, ovvero come arco di circonferenza. Nella discussione è emerso come diversi studenti avessero compreso che, in tal modo, ogni coppia di punti individua due segmenti (gli archi di circonferenza maggiore e minore).

Infine, tutti gli studenti hanno definito gli *angoli* come parti di piano delimitate da due rette, senza passare per il piano tangente.

È significativo, però, evidenziare come tutti i gruppi, nel testare la validità delle definizioni ottenute nell'Attività 1 (vedi Figura 14), si siano attenuti a quelle che essi stessi avevano dato.

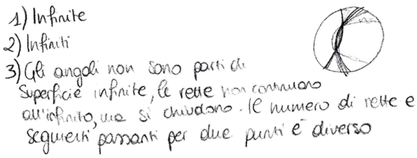

1) Infinite
2) Infiniti
3) Gli angoli non sono parti di superficie infinite, le rette non continuano all'infinito, ma si chiudono. Il numero di rette e segmenti passanti per due punti è diverso

Figura 14 Si osservi come le definizioni della prima parte dell'Attività 1 date dagli studenti si traducano poi in risposte coerenti alle domande 1, 2 e 3.

Ad esempio, tutti i gruppi che hanno definito le rette come circonferenze hanno scritto che per due punti ne passano infinite. Questa riflessione ha reso ancora più chiaro il motivo per cui nella formalizzazione successiva si è introdotta la definizione con le circonferenze massime e con l'identificazione dei punti antipodali, che invece garantisce l'unicità della retta passante per due punti.

Attività 2

Dopo aver analizzato le definizioni nel nuovo sistema assiomatico proposto, gli studenti hanno verificato la validità delle proposizioni assegnate nell'Attività 2, senza riscontrare eccessive difficoltà. È emerso come alcune di esse, che erano false con le definizioni proposte dagli studenti nella prima attività, risultino ora vere.

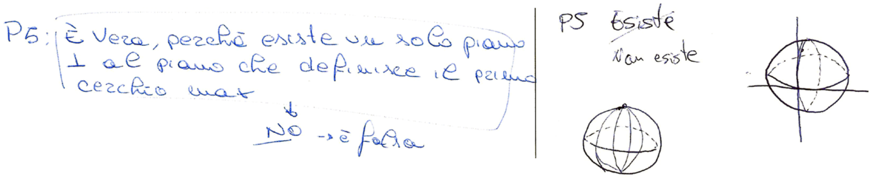


Figura 15 In questi protocolli è ben visibile il ragionamento degli studenti che hanno prima assunto un punto generico rispetto alla retta, per il quale la proposizione è vera, per poi considerare il caso particolare per il quale la proposizione è falsa.

Di particolare interesse è la proposizione *P5* che apparentemente è vera, ma in realtà non vale nel caso, del polo nord e considerando come *retta* l'equatore (vedi Figura 15).

Attività individuali

Per quanto riguarda le attività assegnate come esercizio individuale di particolare interesse sono state le risposte al secondo quesito. Molti studenti infatti hanno cercato di recuperare la definizione euclidea con 4 angoli retti e 4 segmenti congruenti. Essendo impossibile realizzare una simile costruzione sulla sfera, senza violare le definizioni, molti studenti hanno prodotto dei protocolli con "quadrati", che tuttavia hanno "lati" che non sono circonferenze massime (vedi Figura 16). Rileviamo come, in sede di discussione, abbia destato stupore negli studenti il constatare come i quadrati sulla sfera abbiano 4 angoli congruenti, ma non retti.

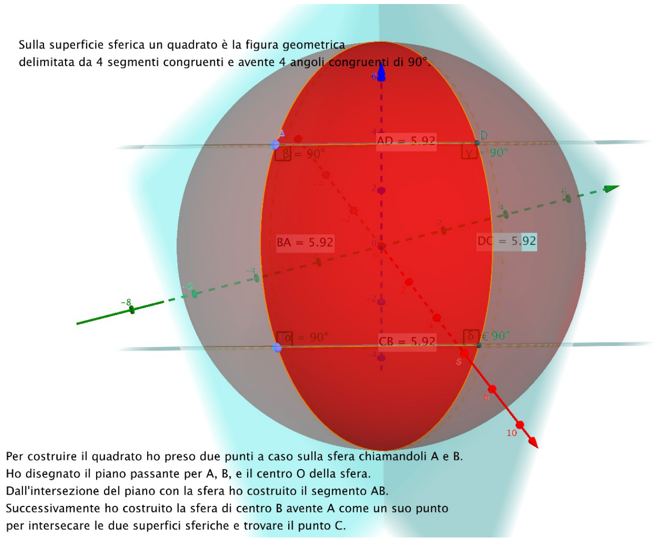


Figura 16 Nella soluzione proposta dallo studente si notano due circonferenze non massime utilizzate come lati del "quadrato".

Valutazione

Le seguenti domande, parte del test finale, possono essere utilizzate dall'insegnante come verifica sommativa del lavoro svolto. A ogni domanda, oltre alla soluzione, sono stati indicati i punti massimi ottenibili e, tra parentesi quadre, la percentuale di risposte date dagli studenti.

1. *La somma degli angoli interni di un triangolo è sempre pari a un angolo piatto.*

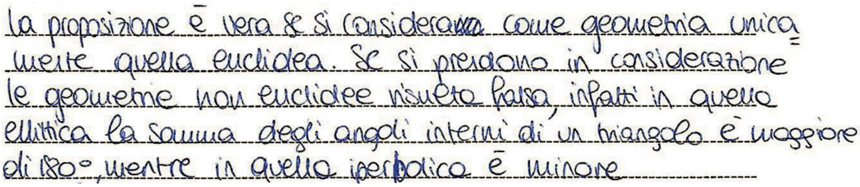
   La proposizione è vera o falsa? Perché?

   _ / 2

   "La somma degli angoli interni di un triangolo è pari a un angolo piatto" è una proposizione vera nel sistema assiomatico della geometria euclidea, ma è falsa in altri sistemi assiomatici, come quello della geometria sferica, dove è possibile, ad esempio, costruire un triangolo con 3 angoli retti. Pertanto la proposizione della domanda è FALSA.

   [46,7 % corretto; 53,3 % parzialmente corretto; 0 % errato; 0 % non risponde]

Questa domanda è stata proposta con un duplice obiettivo: in primo luogo per verificare se gli studenti avessero compreso che in geometria sferica i triangoli possono avere la somma degli angoli interni pari o superiore a 180°. In seconda istanza si è inteso testare la comprensione del concetto di valore di verità di una proposizione: l'enunciato proposto, infatti, non specifica il sistema assiomatico da considerare. Essendo la proposizione vera nella geometria euclidea, ma falsa, ad esempio, nella geometria sferica, ne consegue che la proposizione è falsa (vedi Figura 17).



La proposizione è vera se si considerava come geometria unica
mente quella euclidea. Se si prendono in considerazione
le geometrie non euclidee risulta falsa, infatti in quella
ellittica la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore
di 180°, mentre in quella iperbolica è minore

Figura 17 Pur avendo compreso i concetti alla base delle geometrie non euclidee, lo studente non esplicita che la proposizione è falsa in assoluto.

2. *Due triangoli che hanno due lati e l'angolo tra essi compreso congruenti sono congruenti.*

   Questa proposizione vale:

   a. Nella geometria euclidea ma non nella geometria sferica
   b. Nella geometria sferica ma non nella geometria euclidea
   c. **Sia nella geometria euclidea sia nella geometria sferica**
   d. Né nella geometria euclidea né nella geometria sferica _ / 1

   [a. 6,7% ; b. 0% ; c. 86,6% ; d. 0% ; non risponde 6,7%]

La domanda mira a verificare la capacità degli studenti di trasferire i ragionamenti usati nella geometria euclidea in un altro sistema assiomatico.

3. *Un quadrato ha almeno un angolo retto.*

   Questa proposizione vale:

   a. **Nella geometria euclidea ma non nella geometria sferica**
   b. Nella geometria sferica ma non nella geometria euclidea
   c. Sia nella geometria euclidea sia nella geometria sferica
   d. Né nella geometria euclidea né nella geometria sferica _ / 1

   [a. 66,7% ; b. 0% ; c. 13,3% ; d. 6,7% ; non risponde 13,3%]

Lo scopo della domanda è stato verificare la comprensione del diverso modo di caratterizzare il *quadrato* nella geometria sferica, cioè facendo uso della perpendicolarità e congruenza delle diagonali.

CAPITOLO 3

L'Assiomatica e i modelli

Introduzione

Le attività contenute in questo capitolo, in diretta continuità con quelle del capitolo precedente, presentano diversi sistemi assiomatici derivati dalla geometria euclidea e mirano a far indagare il legame tra assiomi e dimostrazione formale di una proposizione.

In particolare, nella prima attività si affronta la comune misconcezione degli studenti secondo cui tutte le informazioni disponibili vadano necessariamente usate in una dimostrazione. Introducendo degli assiomi "non necessari" o "ridondanti", gli studenti comprendono che, per condurre una dimostrazione, è opportuno scegliere esclusivamente gli assiomi indispensabili.

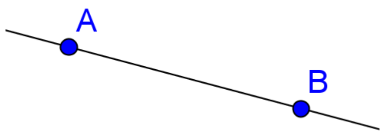
Inoltre, una dimostrazione può essere corretta, ma possono esistere anche dimostrazioni alternative, più o meno "eleganti". Questo concetto deriva direttamente dal problema affrontato nella lezione introduttiva, in cui si mostrava che una proposizione può essere vera anche se una sua dimostrazione non è corretta.

Chiedere agli studenti di rendere esplicita la logica che c'è dietro una dimostrazione data, cioè analizzare criticamente la scelta degli assiomi strettamente necessari e funzionali alla sua conduzione, si rivela un utile esercizio, in qualche modo assimilabile alla "comprensione del testo" che si affronta nelle materie letterarie e nelle lingue straniere. Questa attività consente agli studenti di comprendere come le dimostrazioni non siano qualcosa di dato e immutabile, ma seguano processi logici e creativi che possono essere riprodotti e analizzati.

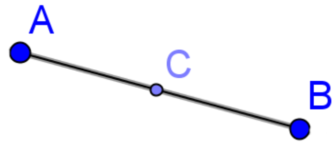
Nella seconda attività si presenta invece un modello valido per un dato sistema di assiomi (gli assiomi di incidenza e ordine dell'*assiomatica di Hilbert*). In questo contesto gli studenti non hanno riferimenti intuitivi, come per la geometria euclidea e quella sferica. Si è fatta questa scelta per mostrare come l'intuizione visiva sia un utile strumento per congetturare, ma a volte possa indurre in errore, quando si ha a che fare con modelli assiomatici non ovvi come quello proposto. Per affrontare l'attività, infatti, gli studenti hanno dovuto confrontarsi con le sole definizioni "astratte" degli enti e delle loro proprietà, attività questa tipica del lavoro del matematico e che sottolinea l'importanza dell'iniziale definizione degli enti per un dato modello.

Per le attività di questo capitolo si sono forniti agli studenti i seguenti 5 assiomi, tratti dall'assiomatizzazione della geometria euclidea formulata da Hilbert (senza però contestualizzare questa scelta agli studenti).

A1: Dati due punti distinti esiste un'unica retta che passa per essi.

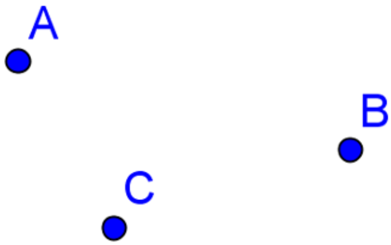


A2: Dati due punti distinti esiste un punto appartenente al segmento che unisce i due



A3: Per ogni retta esistono almeno due punti che appartengono alla retta.

A4: Esistono tre punti distinti che non appartengono alla stessa retta.



A5: Dati tre punti distinti allineati, allora uno e uno solo dei tre punti si trova tra gli altri due

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** assiomatica e costruzione di modelli.
- **Ordine di scuola:** secondo biennio e quinto anno della scuola secondaria di II grado.
- **Materiali e strumenti:** schede di lavoro preparate dagli organizzatori.
- **Prerequisiti:**
  - conoscenza degli enti geometrici fondamentali sul piano euclideo;
  - comprensione della dipendenza dei costrutti dal sistema assiomatico.
- **Obiettivi:**
  - comprendere che la validità di una proprietà è dipendente dal sistema di assiomi scelto;
  - comprendere la relazione tra una proprietà e il sistema assiomatico di riferimento;
  - riconoscere la dipendenza o l'indipendenza di una proposizione rispetto ad altre;
  - riconoscere quali assiomi sono utilizzati all'interno di una dimostrazione;
  - data la dimostrazione di un teorema, essere in grado di discriminare le ipotesi necessarie, non necessarie e ridondanti;
  - riconoscere se un enunciato è diretta conseguenza di un teorema dimostrato.
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è strutturata come una lezione partecipata, nella quale si alternano momenti di lezione frontale e 2 attività di esplorazione dei concetti analizzati. Gli studenti sono divisi in gruppi di lavoro composti da 3 ragazzi. A ciascun gruppo è consegnata una scheda di lavoro, contenente esercizi stimolo e in cui gli studenti sono chiamati ad argomentare in forma scritta i ragionamenti discussi. Conclude la lezione un esercizio da svolgere individualmente.
- **Tempo di svolgimento previsto:** 120 minuti.
- **Contenuti matematici:**

- **Assiomi di incidenza e di ordine (Hilbert):** si enunciano e commentano 5 assiomi (di cui 3 di incidenza e 2 di ordine dell'assiomatica di Hilbert). Si effettua un lavoro di ricerca e riconoscimento degli assiomi utilizzati, di quelli non utilizzati e di quelli ridondanti nella dimostrazione di un teorema.
- **Analisi di un differente modello assiomatico:** si propone agli studenti di verificare alcune proprietà in un modello assiomatico non noto, caratterizzato dalla non immediatezza della visualizzazione.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Linee generali e competenze

Saranno obiettivo dello studio: […] una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica. […]

Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo.

Quinto anno scuola secondaria di secondo grado

Nell'anno finale lo studente approfondirà la comprensione del metodo assiomatico e la sua utilità concettuale e metodologica anche dal punto di vista della modellizzazione matematica. Gli esempi verranno tratti dal contesto dell'aritmetica, della geometria euclidea o della probabilità ma è lasciata alla scelta dell'insegnante la decisione di quale settore disciplinare privilegiare allo scopo.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze

Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.

Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.

Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare une determinata affermazione.

Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.

Riferimenti ai nuclei, conoscenze e abilità dei documenti UMI (2003, 2004)

Abilità	Conoscenze	Nuclei coinvolti	
		disciplinari	trasversali
• Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto. • […] conoscere nelle loro linee essenziali i modelli di geometria non euclidea […]. • Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria. • Comprendere il ruolo e le caratteristiche di un sistema assiomatico.	• Il metodo ipotetico-deduttivo. Enti primitivi e assiomi. Definizione: teoremi e dimostrazioni. • […] i primi elementi delle geometrie non euclidee attraverso modelli. • Sistemi assiomatici in vari contesti. • Coerenza e indipendenza di un sistema assiomatico. • Modelli come interpretazione di un sistema assiomatico.	Spazio e figure	Argomentare, congetturare, dimostrare. Risolvere e porsi problemi.

Attività proposte e soluzioni

Attività 1

La seguente attività è stata proposta senza alcun discorso preliminare. Il tempo dedicato è stato di 20 minuti, nei quali gli studenti hanno lavorato a gruppi.

Assiomi

A1: Dati due punti distinti esiste un'unica retta che passa per essi.
A2: Dati due punti distinti esiste un punto appartenente al segmento che unisce i due punti.
A3: Per ogni retta esistono almeno due punti che appartengono alla retta.
A4: Esistono tre punti distinti che non appartengono alla stessa retta.
A5: Dati tre punti distinti allineati, allora uno e uno solo dei tre punti si trova tra gli altri due.
Nella seguente dimostrazione trova gli assiomi usati ma inutili e gli assiomi non usati.

Teorema

Esistono almeno tre rette che non hanno in comune lo stesso punto.

Dimostrazione:

a. Esistono tre punti non allineati A, B, C.
b. Esiste il punto D che si trova tra A e B.
c. Esiste il punto E che si trova tra B e C.
d. Esiste il punto F che si trova tra A e C.
e. Esistono le rette DB, EC e FA.
f. Se le rette fossero coincidenti, allora i punti A, B, C sarebbero allineati, e questo è assurdo.
g. Se le rette avessero un punto X, comune a tutte e tre, allora X e A apparterrebbero alle rette distinte AD e AF, e questo è assurdo.
h. Quindi non esiste un punto comune a tutte e tre le rette.

Esaminiamo gli assiomi che sono stati utilizzati nella dimostrazione proposta.
Nel passo (a) è stato utilizzato l'assioma A4 poiché sussiste ragionevolmente l'equivalenza tra l'affermazione punti "non allineati" e punti che "non appartengono alla stessa retta." L'utilizzo di tale assioma è indispensabile in questa dimostrazione. Nei successivi tre periodi della dimostrazione – (b), (c) e (d) – si assume l'esistenza di altri 3 punti, la quale è garantita da A2. Tale assioma non è però indispensabile: senza i suddetti tre periodi, e quindi senza descrivere questi nuovi punti, la dimostrazione sarebbe valida ugualmente (a patto di rinominare le rette costruite in seguito). L'assioma A2 è quindi usato ma inutilmente. Nel prosieguo della dimostrazione si osserva che l'esistenza delle tre rette – passo (e) – è garantita da A1, che dunque risulta indispensabile. Nel passo (g) la dimostrazione fa uso della riduzione all'assurdo. Se la tesi fosse falsa si contraddirebbe l'assioma A1, che quindi è nuovamente utilizzato.

In definitiva nella dimostrazione proposta gli assiomi A1 e A4 sono usati e sono necessari; l'assioma A2 è ridondante; e gli assiomi A3 e A5 non sono mai utilizzati.

Attività 2

Dopo aver discusso sulla prima attività, è stato proposto un nuovo sistema assiomatico, differente rispetto a quello precedente. Assegnato e spiegato il modello si è chiesto agli studenti di verificare se in esso valessero alcune semplici proposizioni della geometria euclidea. A questa attività sono stati dedicati 15 minuti, nei quali gli studenti hanno lavorato a gruppi.

Consideriamo un differente sistema assiomatico:

Modello

I **punti** sono A, B, C, D.
Le **rette** sono le coppie ordinate di punti (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, D), (B, D).
Sono soddisfatte le seguenti proprietà?
P1: Per due punti passa sempre una retta.
P2: Per un punto passano infinite rette.
P3: Per un punto passano tutte le rette.

P1 Vera. Prendendo tutte le 6 combinazioni diverse di coppie di punti, si osserva l'esistenza delle 6 rette corrispondenti.

P2 Falsa. Il modello proposto consta di un numero finito di rette.

P3 Falsa. Se per assurdo fosse vero, allora la retta (A, B) incontrerebbe la retta (C, D), tuttavia queste rette, per come sono definite, non hanno punti in comune.

Attività individuali

Al termine della lezione sono state assegnate agli studenti delle attività da svolgere individualmente. In questo caso la discussione matematica è stata condotta sui *forum* online, nell'arco di una settimana, ed è stata ripresa e approfondita all'inizio della lezione successiva, quando sono state fornite e discusse anche le soluzioni.

L'attività proposta è stata la naturale prosecuzione di quella svolta a lezione: considerando l'ultimo modello introdotto, è stato chiesto di discutere la veridicità di alcune semplici proposizioni.

Sia dato il seguente modello, con riferimento al sistema assiomatico definito dagli assiomi A1-A5, enunciati in precedenza:

MODELLO

I **punti** sono A, B, C, D.
Le **rette** sono le coppie ordinate di punti (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, D), (B, D).
Dire se sono soddisfatte le seguenti proprietà motivando la risposta.
P4: Per un punto esterno a una retta esiste unica la parallela.
P5: Preso un punto qualsiasi esistono almeno due rette che lo contengono.
P6: Preso un punto qualsiasi esistono al più due rette che lo contengono.
P7: Due rette si incontrano sempre in un punto.
P8: Esistono due rette coincidenti.

P4 Vera. Si verifica osservando l'esistenza della parallela per ciascuna delle rette descritte.

P5 Vera. Si verifica osservando che per ognuno dei quattro punti esistono due rette distinte.

P6 Falsa. Ad esempio per il punto A passano tre rette: (A, B), (A, C), (A, D).

P7 Falsa. Ad esempio le rette (A, B) e (C, D) non si incontrano. Si può osservare come la veridicità di P7 sia legata a quella di P4.

P8 Falsa. Nessuna retta è coincidente a un'altra retta. Si potrebbe dire che (A, B) è coincidente con (B, A), ma, essendo le rette definite come coppie ordinate, (B, A) non può considerarsi una retta di questo modello.

Come in altri modelli, si osservano analogie e differenze con le medesime proprietà considerate nel modello euclideo.

Discussione sui protocolli degli studenti

Attività 1

La prima difficoltà incontrata dagli studenti è stata il comprendere tutti i passaggi della dimostrazione. In particolare è stato problematico cogliere dove si trovava il secondo assurdo. Per aiutarsi nella "comprensione del testo matematico" gli studenti hanno realizzato vari disegni, che guidassero le loro intuizioni (vedi Figura 1).

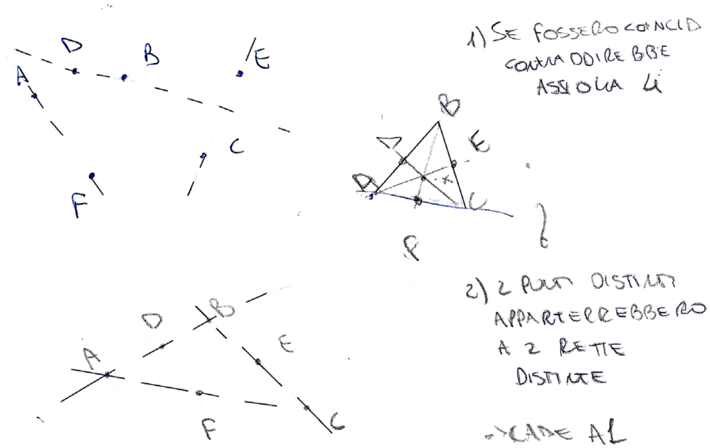


Figura 1 In questo protocollo è evidente l'errore di utilizzare una rappresentazione grafica per risolvere il problema.

Mentre tutti i gruppi sono giunti a comprendere che gli assiomi A1 e A4 sono essenziali per la dimostrazione, che A3 non è utilizzato e che A2 è inutile, ben 3 gruppi su 5 hanno ritenuto che l'assioma A5 sia stato utilizzato, ma inutilmente. Questo errore deriva dalla mancata comprensione della differenza tra gli assiomi A2 e A5 (vedi Figura 2): mentre nel primo si parte da 3 punti, nel secondo si parte da 2 per giungere a una affermazione sull'esistenza di un terzo. Pertanto i due assiomi, che possono sembrare equivalenti, in realtà si riferiscono a proprietà diverse.

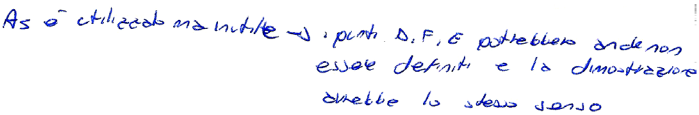


Figura 2 In questo protocollo si può vedere la mancata comprensione della differenza fra A2 e A5.

Attività 2 e Attività individuali

L'aspetto più rilevante di queste attività è stato l'uso non corretto delle rappresentazioni grafiche. Una delle principali difficoltà riscontrate tra gli studenti è stata attribuire ai termini punto e retta, noti per la geometria euclidea, un nuovo significato all'interno del modello (vedi Figura 3 riferita all'Attività 2, e Figura 4 relativa all'Attività individuale).

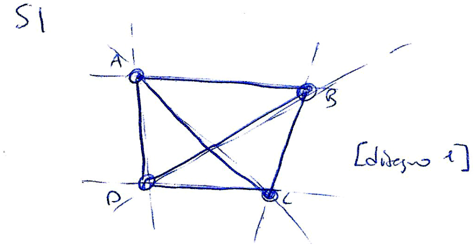


Figura 3 Lo studente fornisce la risposta corretta, ma la figura è errata.

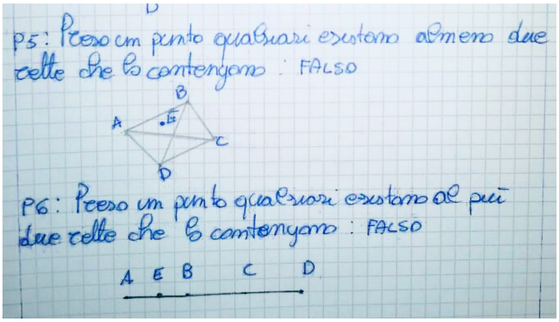


Figura 4 La rappresentazione grafica realizzata dallo studente,
che aveva in mente la geometria euclidea, induce a un errore nelle risposte.

Tutti gli studenti che hanno scelto di non rappresentare graficamente le proposizioni hanno fornito risposte corrette.

Valutazione

Le seguenti domande, parte del test finale, possono essere utilizzate dall'insegnante come verifica sommativa del lavoro svolto. A ogni domanda, oltre alla soluzione, sono stati indicati i punti massimi ottenibili e, tra parentesi quadre, la percentuale di risposte date dagli studenti.

Per rispondere alle domande è stato fornito agli studenti il seguente elenco di assiomi.

Per questo test ti serviranno i seguenti assiomi:

- A_1 – Per ogni coppia di punti distinti P e Q esiste un'unica retta incidente con P e Q.
- A_2 – Per ogni retta *l* esistono almeno due punti distinti incidenti con *l*.
- A_3 – Esistono 3 punti distinti che non sono incidenti con la stessa retta.
- A_4 – Siano dati i punti A, B, C con B tra A e C, allora A, B, C sono 3 punti distinti allineati.
- A_5 – Dati 2 punti qualsiasi B e D esistono 3 punti A, C ed E che giacciono sulla retta BD tali che B sta tra A e D, C sta tra B e D, D sta tra B ed E.
- A_6 – Se A, B, C sono 3 punti distinti allineati, allora uno e uno solo dei 3 punti è tra gli altri 2.
- A_7 – Per ogni retta *l* e per ogni tre punti A, B e C non sulla retta *l*:
  - (i) Se A e B stanno dalla stessa parte rispetto a *l* e B e C stanno dalla stessa parte rispetto a *l*, allora A e C stanno dalla stessa parte rispetto a *l*.
  - (ii) Se A e B stanno in due parti opposte rispetto a *l* e B e C stanno in due parti opposte rispetto a *l*, allora A e C stanno dalla stessa parte rispetto a *l*.

1. Siano dati gli assiomi A_1, A_2, A_3 (in alto), considera la proposizione
   P_1: *Per ogni punto passano almeno due rette distinte.*
   Nella geometria euclidea, la proposizione P_1:
   a. **è vera e si può dimostrare unicamente a partire dagli assiomi A_1, A_2, A_3**
   b. è falsa e si può dimostrare che è falsa solo a partire dagli assiomi A_1, A_2, A_3
   c. è vera, ma per dimostrarlo gli assiomi A_1, A_2, A_3 non bastano
   d. è falsa, ma per dimostrarlo gli assiomi A_1, A_2, A_3 non bastano _ / 1

   [a. 60% ; b. 0% ; c. 33,3% ; d. 0% ; non risponde 6,7%]

2. Sia data la proposizione:
   P_2: *Dati i punti A, B e C allineati, B è l'unico punto comune alle semirette* $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.
   Nella geometria euclidea, la proposizione P_2:
   a. è vera e si può dimostrare unicamente a partire dagli assiomi A_1, A_2, A_3
   b. è falsa e si può dimostrare che è falsa solo a partire dagli assiomi A_1, A_2, A_3
   c. **è vera, ma per dimostrarlo gli assiomi A_1, A_2, A_3 non bastano**
   d. è falsa, ma per dimostrarlo gli assiomi A_1, A_2, A_3 non bastano _ / 1

   [a. 6,7% ; b. 6,7% ; c. 60% ; d. 0% ; non risponde 26,6%]

Le due precedenti domande mirano a verificare la capacità degli studenti di determinare la validità di una proposizione a partire da assiomi dati.

3. Considera il seguente *modello*:
   I "punti" sono punti su una sfera.
   Le "rette" sono circonferenze massime sulla sfera.
   Quale delle seguenti affermazioni è vera?
   a. Valgono gli assiomi A_1, A_2, A_3
   b. Valgono gli assiomi A_1, A_3, ma non A_3
   c. **Valgono gli assiomi A_2, A_3, ma non A_1**
   d. Valgono gli assiomi A_1, A_2, ma non A_3 _ / 1

   [a. 53,3% ; b. 0% ; c. 40% ; d. 6,7% ; non risponde 0%]

Con questa domanda si intende testare la capacità degli studenti di associare un sistema assiomatico a un modello dato.
Per rispondere alle tre domande successive è stato fornito agli studenti il seguente teorema con dimostrazione.

Una qualsiasi retta l *delimita esattamente due semipiani e questi semipiani non hanno punti in comune.*
Dim.:
(1) Esiste un punto *A* che non sta su *l*.
(2) Esiste un punto *O* che sta su *l*.
(3) Esiste un punto *B* tale che *O* sia tra *B* e *A*.
(4) Dunque *A* e *B* stanno su due parti opposte rispetto a *l*, e quindi *l* separa il piano in almeno due parti.
(5) Sia *C* un punto qualsiasi diverso da *A* e *B* che non sta su *l*. Se *C* e *B* non stanno dalla stessa parte rispetto a *l*, allora *C* e *A* stanno dalla stessa parte rispetto a *l*.
(6) Se per assurdo il punto *C* si trovasse in entrambe le parti, allora *A* e *B* starebbero dalla stessa parte, contraddicendo il passo (4) di questa dimostrazione; le due parti sono quindi disgiunte.

4. Nel passaggio (2) della dimostrazione (in alto), quale assioma è stato utilizzato?
   a. (A_5)
   b. (A_6)
   c. **(A_2)**
   d. (A_4) _ / 1

   [a. 0% ; b. 0% ; c. 100% ; d. 0% ; non risponde 0%]

5. L'assioma A_7 è stato utilizzato nei seguenti passaggi:
   a. Solo (5)
   b. Solo (6)
   c. **Entrambi (5) e (6)**
   d. Nessuno dei due _ / 1

   [a. 6,7% ; b. 0% ; c. 80% ; d. 13,3% ; non risponde 0%]

6. In quale passaggio è stata usata la *Legge del Terzo Escluso*?
   a. **(5)**
   b. (6)
   c. (5) e (6)
   d. Nessuno dei precedenti

   [a. 53,3% ; b. 26,7% ; c. 0% ; d. 0% ; non risponde 20%]

Le tre precedenti domande hanno l'obiettivo di verificare la capacità degli studenti di leggere il testo di una dimostrazione e individuare gli assiomi e i principi matematici su cui essa è costruita.

7. Considera la seguente proposizione con dimostrazione:

   Sia p un numero primo, allora $\sqrt{p}+1$ *è irrazionale*
   Dim.:
   $\left(\sqrt{p}+1\right)^2 = p+1+2\sqrt{p}$.
   $p+1$ è razionale, perché è somma di due numeri interi.
   $2\sqrt{p}$ è irrazionale, perché $\sqrt{p}$ è irrazionale (in quanto radice di un numero primo) e quindi lo è il suo doppio.
   Quindi $\left(\sqrt{p}+1\right)^2$ è irrazionale in quanto somma di un razionale più un irrazionale.
   Allora $\sqrt{p}+1$ è irrazionale, perché il suo quadrato è irrazionale.

   La proposizione è vera? **"Sì."**
   La dimostrazione è corretta? **"Sì."**

   _/1

   [66,6 % corretto; 26,7 % parzialmente corretto; 6,7 % errato; 0 % non risponde]

8. Giustifica le tue risposte alle due domande precedenti.

   _/2

   "La dimostrazione è corretta perché prevede passaggi leciti e utilizza assiomi validi."

   [53,4 % corretto; 33,3 % parzialmente corretto; 13,3 % errato; 0 % non risponde]

Per dimostrare la proposizione era sufficiente verificare che la somma di un numero irrazionale e di un numero razionale è sempre irrazionale, e che $\sqrt{p}$ è irrazionale in quanto radice quadrata di un numero primo. Si è volutamente scelto di assegnare una dimostrazione più lunga e articolata per verificare la capacità degli studenti di individuare l'ammissibilità dei passaggi svolti in presenza di elementi ridondanti. Appaiono significativi due protocolli dell'Attività. Nel primo si può notare come lo studente sembra accorgersi che esiste una dimostrazione più semplice di quella proposta e pertanto conclude che quella fornita sia errata (vedi Figura 5).

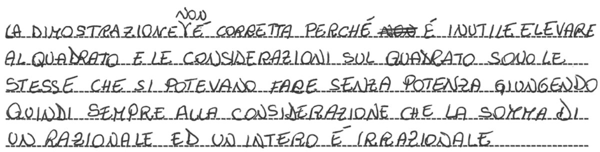

LA DIMOSTRAZIONE NON É CORRETTA PERCHÉ ~~NON~~ É INUTILE ELEVARE
AL QUADRATO E LE CONSIDERAZIONI SUL QUADRATO SONO LE
STESSE CHE SI POTEVANO FARE SENZA POTENZA GIUNGENDO
QUINDI SEMPRE ALLA CONSIDERAZIONE CHE LA SOMMA DI
UN RAZIONALE ED UN INTERO É IRRAZIONALE

Figura 5 In questo protocollo lo studente considera la dimostrazione errata, adducendo come giustificazione il fatto che si potesse trovare una via più breve.

Nel secondo protocollo, invece, lo studente identifica una proposizione utilizzata nella dimostrazione con la tesi stessa (vedi Figura 6).

~~10~~. Considera la seguente proposizione con dimostrazione:

> *Sia* p *un numero primo, allora* $\sqrt{p}+1$ *è irrazionale*
> Dim.:
> $\left(\sqrt{p}+1\right)^2 = p+1+2\sqrt{p}$.
> $p+1$ è razionale, perché è somma di due numeri interi.
> $2\sqrt{p}$ è irrazionale, perché $\sqrt{p}$ è irrazionale (in quanto radice di un numero primo) e quindi lo è il suo doppio.
> Quindi $\left(\sqrt{p}+1\right)^2$ è irrazionale in quanto somma di un razionale più un irrazionale.
> Allora $\sqrt{p}+1$ è irrazionale, perché il suo quadrato è irrazionale.

a. La proposizione è vera?
b. La dimostrazione è corretta? _/ 1

~~11~~. Giustifica le tue risposte alle due domande precedenti.

LA DIMOSTRAZIONE QUI PRESENTATA È INCONCLUDENTE, PERCHÈ VIENE GIUSTIFICATA UTILIZZANDO LA TESI, CHE PERÒ NON È STATA DIMOSTRATA (L'HO SOTTOLINEATA PER FAR CAPIRE COSA INTENDO).

Figura 6 Lo studente sottolinea la proposizione che si potrebbe utilizzare come unico passaggio della dimostrazione, identificandola con la tesi stessa.

CAPITOLO 4

La dimostrazione per assurdo

Introduzione

Le attività contenute in questo capitolo riguardano la dimostrazione per assurdo, un argomento generalmente affrontato nel primo biennio della scuola secondaria di II grado, ma spesso solo come tecnica relativa a teoremi di geometria sintetica. Invece, questa strategia dimostrativa è una delle più utili e potenti in tutta la matematica, ed è importante che gli studenti comprendano la logica su cui si fonda il suo utilizzo (o il suo non utilizzo).

Le attività presenti nel capitolo riguardano sia gli aspetti di analisi e comprensione di una dimostrazione per assurdo data (cioè distinguere tra ipotesi e tesi, negare una proposizione in modo corretto, ecc.), sia la conduzione di una dimostrazione completa, nel campo della geometria, dell'aritmetica e dell'algebra.

Per prima cosa, è richiamata la differenza tra una dimostrazione diretta e una dimostrazione per assurdo. Nel primo caso si ha la seguente configurazione:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$$

dove α_i, $i = 1 \ldots n$ sono ipotesi e β la tesi.

In una dimostrazione per assurdo si ha invece:

$$\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta \Rightarrow (\gamma \wedge \neg\gamma)$$

cioè si aggiunge all'ipotesi α l'ulteriore ipotesi $\neg\beta$ (il simbolo $\neg$ si legge "non" e indica la negazione di una proposizione) e da ciò si ricava una contraddizione (ossia un *assurdo*), cioè la presenza contemporanea di una qualunque affermazione γ e della sua negazione $\neg\gamma$ (naturalmente, può anche essere $\gamma = \alpha$). È importante sottolineare agli studenti come spesso una dimostrazione per assurdo sia più semplice di una dimostrazione diretta, perché negare una tesi β può condurre in diversi modi ad un'affermazione contradditoria γ.

Particolare attenzione è rivolta a sottolineare come sia la tesi a dover essere negata, e non una delle ipotesi; scopo questo delle Attività 1 e 2. Nelle Attività 3 e 4 si chiede agli studenti di dimostrare per assurdo alcune proposizioni tratte dall'ambito aritmetico-algebrico. In particolare, si è scelto di affrontare la dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ perché presente nelle Indicazioni Nazionali tra gli obiettivi di apprendimento del biennio.

Infine, si è sottolineato come la validità della dimostrazione per assurdo risieda nell'assumere il *principio del terzo escluso* e il *principio di non contraddizione*. Il primo afferma che α e $\neg\alpha$ hanno valori di verità opposti (e dunque la negazione di un'affermazione falsa è vera), mentre il secondo che una proposizione e la sua negazione non possono essere contemporaneamente vere, ovvero $\alpha \wedge \neg\alpha$ è falsa. In base a questi due principi possiamo concludere che un assurdo (cioè una proposizione che conduce ad un'affermazione del tipo $\gamma \wedge \neg\gamma$) è falso, che la sua negazione è necessariamente vera e che esso dimostra dunque la tesi di partenza.

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** la tecnica dimostrativa per assurdo.
- **Ordine di scuola:** secondo biennio e quinto anno della scuola secondaria di II grado.
- **Materiali e strumenti:** schede di lavoro preparate dagli organizzatori; GeoGebra.

- **Prerequisiti:**
  - conoscenza degli elementi che compongono una dimostrazione matematica;
  - conoscenza del simbolismo logico.
- **Obiettivi:**
  - comprendere l'utilizzo in matematica della dimostrazione per assurdo;
  - saper utilizzare la tecnica della dimostrazione per assurdo in un dato teorema, sia in ambito geometrico, sia in quello aritmetico-algebrico;
  - saper spiegare il legame tra la dimostrazione per assurdo e i principi logici di non contraddizione e del terzo escluso.
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è strutturata come una lezione partecipata, nella quale si alternano momenti di lezione frontale e 4 attività di esplorazione dei concetti analizzati. Gli studenti sono divisi in gruppi di lavoro composti da 3 ragazzi. A ciascun gruppo è consegnata una scheda di lavoro, contenente esercizi stimolo e in cui gli studenti sono chiamati ad argomentare in forma scritta i ragionamenti discussi. Concludono la lezione 3 esercizi da svolgere individualmente.
- **Tempo di svolgimento previsto:** 120 minuti.
- **Contenuti matematici:**
  - **Teoria e tecnica della dimostrazione per assurdo:** si descrive la differenza tra dimostrazione diretta e per assurdo, facendo uso del simbolismo logico; si individua il ruolo dei principi di non contraddizione e del terzo escluso per la validità della tecnica dimostrativa.
  - **Corretta negazione di una proposizione:** attraverso alcuni esempi ed esercizi si guida lo studente a comprendere come negare correttamente la tesi di un teorema nella dimostrazione per assurdo negli ambiti geometrico e aritmetico-algebrico.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Linee generali e competenze

Gli studenti, a conclusione del percorso di studio [...] dovranno: [...] comprendere le strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi della matematica, anche attraverso la padronanza del linguaggio logico-formale; usarle in particolare nell'individuare e risolvere problemi di varia natura.

Il docente di "Matematica" concorre a far conseguire, al termine del percorso quinquennale, i seguenti risultati di apprendimento relativi al profilo educativo, culturale e professionale: padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze

Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.

Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare une determinata affermazione.

Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.

Riferimenti ai nuclei, conoscenze e abilità dei documenti UMI (2003, 2004)

<table>
<tr><th rowspan="2">Abilità</th><th rowspan="2">Conoscenze</th><th colspan="2">Nuclei coinvolti</th></tr>
<tr><th>disciplinari</th><th>trasversali</th></tr>
<tr><td>• Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto.
• Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria.
• Comprendere e usare forme diverse di argomentazioni o di dimostrazioni.</td><td>• Schemi di ragionamento (ad esempio, il ragionamento per assurdo).</td><td>Numeri.

Relazioni e funzioni.

Spazio e figure.</td><td>Argomentare, congetturare, dimostrare.

Risolvere e porsi problemi.</td></tr>
</table>

Attività proposte e soluzioni

Attività 1

Dopo aver introdotto gli elementi caratteristici della dimostrazione per assurdo è stata proposta la seguente attività. È richiesto agli studenti di produrre autonomamente una dimostrazione con la tecnica della riduzione all'assurdo e di analizzare la loro stessa dimostrazione, riconoscendone la struttura logica. A questa attività sono stati dedicati circa 15 minuti.

Teorema:

Se due rette distinte sono perpendicolari ad una stessa retta allora sono parallele.

1) Dimostra per assurdo il teorema.

2) Individua gli elementi α, β e γ della tua dimostrazione, tali per cui:

$$\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta \Rightarrow (\gamma \wedge \neg\gamma)$$

Siano *a* e *b* rette perpendicolari alla retta *c*. Supponiamo per assurdo che *a* e *b* non siano parallele. Detto *K* il punto di incidenza, risulta che per *K* passano due rette distinte perpendicolari ad una stessa retta. Ciò contraddice il teorema euclideo che afferma che per un punto passa una ed una sola retta perpendicolare ad una retta data. Assurdo.

α è l'ipotesi, ossia la proposizione "siano *a* e *b* rette perpendicolari alla retta *c*".
β è la tesi, ossia la proposizione è "*a* e *b* sono parallele".
$\neg\beta$ è la proposizione "*a* e *b* non sono parallele".
γ è la proposizione "per un punto passa una ed una sola perpendicolare alla retta data".
$\neg\gamma$ è la proposizione "per *K* passano due rette distinte perpendicolari alla stessa retta".

Attività 2

In questa attività è stato dimostrato alla lavagna un noto teorema della geometria euclidea. Tuttavia, la dimostrazione proposta è stata viziata da più di un errore di forma. Agli studenti è stato chiesto di trovare eventuali passaggi errati e di correggerli. A questa attività sono stati dedicati circa 15 minuti, anche se è stato aggiunto ulteriore tempo per individuare l'errore più sottile.

Leggi la seguente dimostrazione. L'enunciato è vero? La dimostrazione ti convince?

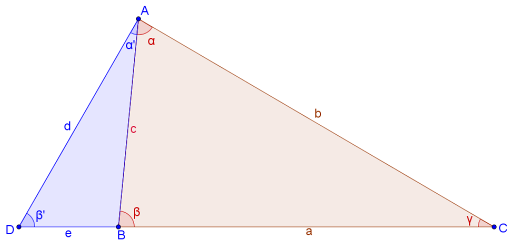
Teorema:

In ogni triangolo ad angolo maggiore si oppone il lato maggiore.

Consideriamo un triangolo ABC, che abbia l'angolo α maggiore degli angoli β e γ. Dobbiamo dimostrare che, allora, il lato opposto BC è maggiore dei lati AC e AB.

Hp: $\alpha > \beta \wedge \alpha > \gamma$

Th: $BC > AC \wedge BC > AB$



Dimostrazione:

Ragioniamo per assurdo, supponendo $AC > BC$.
Costruiamo il segmento DB come prolungamento di BC, in modo tale che $DC \cong AC$.
Dunque, per costruzione, il triangolo ADC è isoscele di base AD.
La somma degli angoli interni di ADC è pari a $\alpha + \alpha' + \beta' + \gamma = 180°$, e analogamente la somma degli angoli interni di ABC è pari a $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Quindi $\beta = \alpha' + \beta'$ (in accordo con il teorema dell'angolo esterno), ma β e β' sono angoli corrispondenti tagliati dalla trasversale DC, quindi $\beta = \alpha' + \beta$, da cui $\alpha' = 0$, che è assurdo perché, per costruzione, D non coincide con B.

L'errore nella dimostrazione, peraltro individuato da tutti i gruppi, è consistito nell'assumere che β e β' fossero angoli corrispondenti. È stato fornito un teorema notoriamente vero, al fine di minare le certezze degli studenti e far comprendere loro che una proposizione vera può avere una dimostrazione sbagliata, ma soprattutto che una dimostrazione sbagliata non può bastare a confutare la tesi.

Il secondo errore nella dimostrazione è poi nella negazione della tesi. Negare la proposizione ($BC > AC \wedge BC < AB$) dà luogo alla seguente disgiunzione ($BC \leq AC \vee BC \geq AB$) e non alla negazione proposta nella dimostrazione. Si faccia attenzione al fatto che quest'ultima disgiunzione è da declinarsi in 4 casi in cui cercare l'assurdo:

$$(BC < AC \vee BC = AC \vee BC = AB \vee BC > AB).$$

Attività 3

Dopo aver mostrato agli studenti cosa si intende per una dimostrazione di un teorema tramite il suo enunciato contronominale, è stata proposta la seguente attività. Essa non ha richiesto più di 10 minuti, al termine dei quali si è proceduto con la discussione.

> **Teorema:**
>
> *Se n^2 è pari, allora n è pari.*
>
> Dimostra il teorema, usando la seguente rappresentazione logica dei passaggi:
>
> $$\alpha \Rightarrow \beta \Leftrightarrow \neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$$
>
> Se n è dispari ($\neg\beta$), allora n^2 è dispari ($\neg\alpha$), perché se $n = 2k + 1$, allora $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$
> Il teorema è dimostrato.

Attività 4

Il teorema sull'irrazionalità della radice di 2 è stato richiamato nell'ultima parte della lezione. Molti studenti avevano già incontrato questo risultato, sebbene quasi nessuno ricordasse la sua dimostrazione. Nello svolgere quest'attività – della durata di 20 minuti – è stato dato come suggerimento di utilizzare il ragionamento per assurdo.

> **Teorema:**
>
> Dimostra per assurdo che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Se, per assurdo $\sqrt{2}$ fosse razionale, allora, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ per qualche m ed n. Non è restrittivo supporre m ed n primi tra loro, poiché se non lo fossero è sempre possibile ricondursi a questo caso. Allora $\frac{m^2}{n^2} = 2$ ed anche $m^2 = 2n^2$. Da quest'ultima si evince che m^2 è pari e quindi m è pari per il teorema dell'attività precedente. Dunque possiamo scrivere $m^2 = 4k$. Allora segue che $4k = 2n^2$, cioè $2k = n^2$ da cui si evince che n^2 è pari e quindi n è pari. Assurdo perché m ed n erano supposti primi tra loro.

Attività individuali

Al termine della lezione, sono state assegnate agli studenti delle attività da svolgere individualmente. In questo caso la discussione matematica è stata condotta sui *forum* online durante la settimana ed è stata ripresa e approfondita all'inizio della lezione successiva, dove sono state enunciate anche le soluzioni. L'attività proposta è stata la naturale prosecuzione di quella svolta a lezione: è stato chiesto infatti agli studenti di utilizzare il ragionamento per assurdo nella dimostrazione delle seguenti proposizioni.

> 1. Si dimostri per assurdo l'irrazionalità di $\sqrt{3}$.

Sia per assurdo $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$, con a e b primi tra loro. Allora $3b^2 = a^2$, dunque:

I. 3 divide a^2

II. 3 è primo.

Da I $\wedge$ II discende che 3 divide a, da cui $a = 3k$. Allora $3b^2 = a^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Dunque $b^2 = 3k^2$ quindi 3 divide b^2 e divide b. Assurdo perché MCD $(a, b) = 1$.

2. Si dimostri per assurdo il 2° criterio di congruenza dei triangoli (ALA) dando per buono il 1° criterio (LAL).

Prendendo un punto G su EF in modo che EGD ≅ ABC per il primo criterio (vedi Figura 1). Dunque $\widehat{EDG} \cong \widehat{BCA} \cong \widehat{EDF}$ Assurdo.

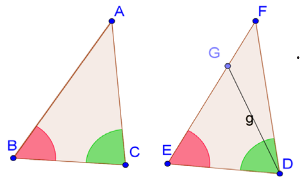


Figura 1 Dimostrazione del 1° criterio di congruenza dei triangoli (LAL).

3. Si dimostri l'infinità dei numeri primi.

Sia per assurdo N la cardinalità dell'insieme dei numeri primi.

Siano $k = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_N$ ed $m = k + 1$

- Se m è primo, segue la tesi.
- Se m è composto, allora sarà diviso da h.
- Se h fosse un qualche p_i $(1 \leq i \leq N)$, allora h dividerebbe k e m, quindi dividerebbe la loro differenza. Quindi h dovrebbe dividere l'unità. Assurdo.

Discussione sui protocolli degli studenti

Attività 1

Tutti gli studenti hanno condotto la dimostrazione correttamente. Si osservi come essi abbiano identificato la struttura formale della dimostrazione, collegando il simbolismo matematico con frasi esplicative del linguaggio naturale (vedi Figura 2).

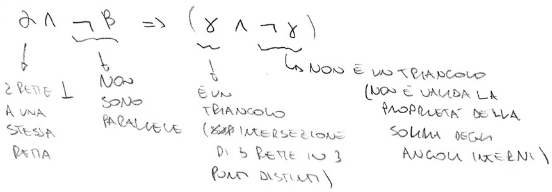


Figura 2 In questo protocollo gli studenti mettono in relazione il simbolismo matematico con il linguaggio naturale.

Attività 2

In questa attività tutti gli studenti si sono concentrati nell'osservare come gli angoli β e β′ non siano congruenti, il più evidente degli errori inseriti nella dimostrazione (vedi Figura 3).

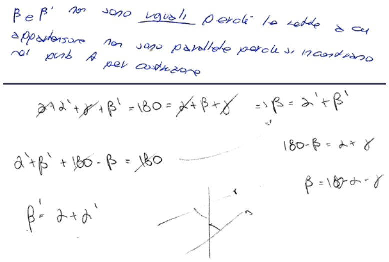


Figura 3 Si osservano in questi due protocolli due diversi approcci per dimostrare che β e β' non sono congruenti: uno basato sul linguaggio naturale e l'altro sulla manipolazione formale.

Invece, l'errore nella formulazione della negazione della tesi (vedi paragrafo attività proposte e soluzioni) non è stato identificato. In sede di discussione è emerso come gli studenti, dopo aver trovato il primo errore, abbiano smesso di cercarne altri. È stato fatto osservare loro come non bisogna farsi condizionare dalla formulazione delle domande e che in una dimostrazione possono essere presente più errori. Si è evidenziata inoltre l'importanza della corretta negazione della tesi.

Attività 3

Questa attività aveva due nuclei concettuali principali, entrambi compresi dagli studenti: il primo era negare correttamente la tesi (cioè che *n* fosse dispari), il secondo era osservare che se *n* è dispari allora lo è anche il suo quadrato, cosa che conduce ad un assurdo. Nonostante non fosse esplicitamente richiesta la dimostrazione di quest'ultima proprietà, tutti gli studenti l'hanno affrontata, talvolta con errori (vedi Figura 4).

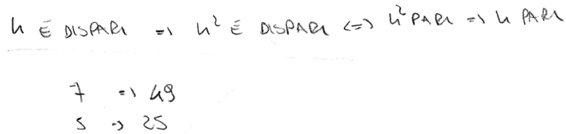


Figura 4 In questo protocollo gli studenti inducono la veridicità della prima implicazione da due esempi numerici, compiendo un errore.

Attività 4

Nella seguente attività gli studenti hanno incontrato difficoltà (vedi Figura 5).

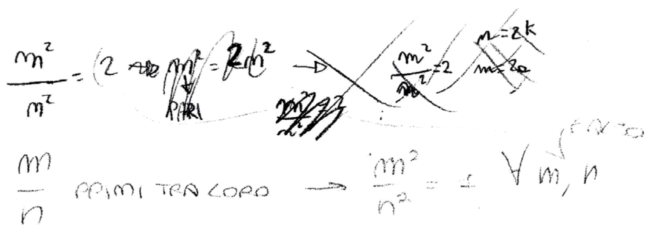


Figura 5 In questo protocollo gli studenti confondono il Massimo Comun Divisore fra due numeri con il loro rapporto.

Nonostante, in generale, quasi tutti i gruppi abbiamo impostato correttamente l'Attività, solamente un gruppo è riuscito a portare a termine la dimostrazione senza errori e in modo particolarmente brillante (vedi Figura 6).

Si sottolinea nuovamente come la scelta di far svolgere agli studenti due dimostrazioni nell'ambito dell'aritmetica e di far loro analizzare due proposizioni geometriche non è casuale, bensì deriva dal fatto che usualmente gli studenti vedono la dimostrazione per assurdo soltanto nell'ambito della geometria sintetica e sviluppano pertanto la misconcezione per cui questa tecnica non possa essere applicata ad altri ambiti della matematica.

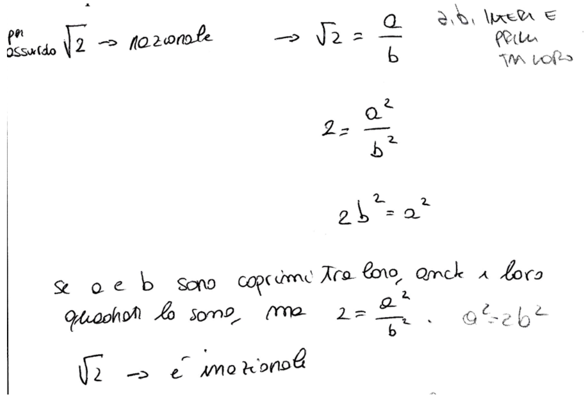


Figura 6 In questo protocollo si osserva come nella dimostrazione gli studenti, invece di discutere la parità di a e b, abbiano sfruttato il fatto che i quadrati di due numeri coprimi sono a loro volta coprimi.

Attività individuali

Le principali difficoltà riscontrate nel primo esercizio delle attività individuali sono state relative allo svolgimento della dimostrazione, dopo la negazione della tesi (vedi Figura 7).

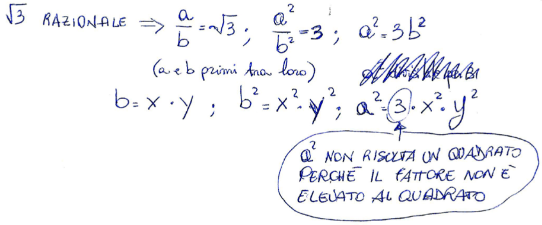


Figura 7 In questo protocollo lo studente, pur arrivando a una conclusione corretta, svolge passaggi inutili, inserendovi errori.

L'esercizio 2 è stato risolto correttamente dagli studenti, che in alcuni casi hanno anche consegnato l'elaborato tramite un file GeoGebra.

La difficoltà dell'esercizio 3 è risultata non adeguata, nessuno studente è infatti riuscito a svolgerlo.

Valutazione

Le seguenti domande, parte del test finale, possono essere utilizzate dall'insegnante come verifica sommativa del lavoro svolto. A ogni domanda, oltre alla soluzione, sono stati indicati i punti massimi ottenibili e, tra parentesi quadre, la percentuale di risposte date dagli studenti.

1. Dimostrare per assurdo la seguente proposizione:

   Sia x un numero reale positivo, allora $\frac{1}{x} > 0$. _ / 2

   [33,3 % corretto; 60 % parzialmente corretto; 0 % errato; 6,7 % non risponde]

   Soluzione:

   Ipotesi: x reale, x positivo.
   Tesi: $\frac{1}{x} > 0$.
   Negando la tesi, ossia supponendo che $\frac{1}{x} \leq 0$, si ha:
   a) $\frac{1}{x} = 0$, cioè $1 = 0 \cdot x$, da cui $1 = 0$. Assurdo.
   b) $\frac{1}{x} < 0$, cioè $1 < 0 \cdot x$, da cui $1 < 0$. Assurdo.

   Vale allora necessariamente la tesi.

Questa domanda è stata proposta per verificare se gli studenti avessero appreso la tecnica della dimostrazione per assurdo (si noti che la proposizione è tratta dall'ambito algebrico). La principale difficoltà di questo esercizio consisteva nel negare correttamente la tesi. Come si vede dalla Figura 8, gli studenti hanno omesso il caso $\frac{1}{x} = 0$.

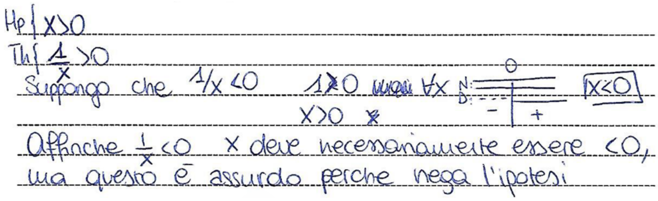


Figura 8 Lo studente compie un errore nel negare la tesi.

2. Considera il seguente teorema: due triangoli sono congruenti oppure simili se hanno tutti gli angoli congruenti. Quale delle seguenti proposizioni è la corretta negazione della tesi?
   c. I due triangoli non hanno gli angoli congruenti.
   d. **I due triangoli non sono né congruenti né simili.**
   e. I due triangoli hanno almeno due angoli non congruenti.
   f. I due triangoli non sono congruenti oppure i due triangoli non sono simili.

   _ / 1

   [a. 0% ; b. 73,3% ; c. 0% ; d. 26,7% ; non risponde 0%]

Questa domanda è stata proposta per verificare che gli studenti fossero in grado di negare correttamente una disgiunzione.

Per rispondere alle due domande successive è stato fornito agli studenti il seguente teorema con dimostrazione.

> *Dato un triangolo rettangolo* ABC, *retto in* A, *con* $\widehat{B} \cong \widehat{C}$, *allora* $AB \cong AC$.
>
> Dim.:
>
> 1. Supponiamo per assurdo che $AB \neq AC$, allora $AB > AC$ o $AB < AC$.
> 2. Sia $AB < AC$, allora esiste D su AC tale che sia $AB \cong AD$ e quindi $A\widehat{B}D \cong A\widehat{D}B$.
> 3. Allora considerando il triangolo BDC si ha $A\widehat{D}B \cong B\widehat{C}D + C\widehat{B}D$.
> 4. Pertanto $C\widehat{B}D$ è un angolo nullo. Assurdo.
> 5. Analogamente si tratta il caso di $AB > AC$.

> 3. Nel passaggio (4), con quale delle seguenti proprietà è in contrasto la tesi?
>   a. In un triangolo ad angolo maggiore è opposto lato maggiore
>   b. Teorema dell'angolo esterno.
>   c. La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a un angolo piatto
>   d. **Il punto *D* è distinto dal punto *C***
>
> _ / 1
>
> [a. 0% ; b. 13,3% ; c. 20% ; d. 60% ; non risponde 6,7%]

Questa domanda è stata inserita per verificare che gli studenti fossero in grado di identificare l'assurdo in un teorema dato.

> 4. Il teorema rimane vero eliminando:
>   a. **l'ipotesi che il triangolo è rettangolo**
>   b. l'ipotesi che $\widehat{B} \cong \widehat{C}$
>   c. l'ipotesi che ABC sia un triangolo
>   d. Nessuna delle precedenti
>
> _ / 1
>
> [a. 93,3% ; b. 6,7% ; c. 0% ; d. 0% ; non risponde 0%]

In questa domanda si è voluto verificare che gli studenti fossero in grado di identificare un'ipotesi ridondante in una dimostrazione per assurdo (e quindi di isolare gli elementi essenziali nella stessa).

> 5. Considera la seguente affermazione:
>   *La dimostrazione per assurdo si basa sul fatto che tutte le proposizioni sono vere o false.*
>   a. Sei d'accordo?
>   b. Argomenta la tua risposta.
>
> _ / 2
>
> [73,3 % corretto; 26,7 % parzialmente corretto; 0 % errato; 0 % non risponde]
>
> **"Sì. Grazie al principio del terzo escluso in una proposizione non esistono valori di verità ulteriori diversi dal vero e dal falso. Per il principio di non contraddizione una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa. Dunque dimostrare che la negazione della tesi è falsa, implica necessariamente che la tesi sia vera."**

Questa domanda mira a verificare la comprensione da parte degli studenti del legame esistente tra la tecnica della dimostrazione per assurdo e i principi del terzo escluso e di non contraddizione.

Ad esempio nella Figura 9 lo studente non spiega perché dimostrare che la negazione della tesi è falsa dovrebbe condurre a un assurdo.

la dimostrazione per assurdo avviene in questo modo: si stabilisce una ~~ipotesi~~ tesi,
e la si verifica negandola: se alla fine della dimostrazione si giungerà
ad una contraddizione, oppure ad una situazione assurda, allora ciò
che si era enunciato nella tesi è ~~f~~ verificato, in caso contrario non lo
è. Ad esempio, individuiamo nella tesi due proposizioni: chiameremo
la prima α e la seconda β. Per procedere alla dimostrazione per assurdo
eseguiremo una serie di passaggi, avendo prima però stabilito la nega-
zione di β, cioè ¬β (non β). Se, al termine di questi passaggi, non β
non risulta valido, la dimostrazione è stata effettuata. È quindi suf-
ficiente anche un solo passaggio falso.

Figura 9 Lo studente spiega cosa si intende per dimostrazione per assurdo, ma senza far riferimento ai principi su cui essa si basa.

CAPITOLO 5

La dimostrazione per induzione

Introduzione

Le attività contenute in questo capitolo riguardano la dimostrazione per induzione, una tecnica presente nelle Indicazioni Nazionali, che è stata spesso oggetto di verifica nella seconda prova dell'Esame di Stato conclusivo del Secondo Ciclo dei Licei Scientifici.

In primo luogo, si è voluto far comprendere la differenza tra *induzione fisica* e *induzione matematica*. L'induzione fisica è un processo per cui si passa dalla constatazione di fatti particolari ripetuti a formulazioni generali, come quando con molti esperimenti verificati si congettura una legge fisica. L'induzione matematica è invece uno specifico procedimento dimostrativo, che si basa su assiomi e che produce teoremi.

L'induzione fisica si basa su un assunto probabilistico, cioè il fatto che se n esperimenti ripetuti nelle stesse condizioni forniscono sempre lo stesso risultato, allora anche l'esperimento $n + 1$ lo produrrà (ovvero si va dal particolare al generale, in senso opposto alla *deduzione*); ragionamento usato per verificare la congettura di leggi fisiche. Invece, l'induzione matematica è un procedimento per dimostrare proposizioni e teoremi, cioè affermazioni sempre vere all'interno di un certo costrutto assiomatico, che si fonda sugli *assiomi di Peano* (e quindi non ha a che vedere con la probabilità, ma si fonda sulla scelta di assumere questi assiomi).

Nell'introduzione alle attività si descrivono gli assiomi di Peano, facendo uso dapprima del linguaggio verbale e solo in un secondo momento del corrispondente simbolismo matematico:

A1: 0 è un numero naturale.

$0 \in \mathrm{N}$

A2: Il successore di un numero naturale è un numero naturale.

$\forall\ x(x \in \mathrm{N} \Rightarrow \mathrm{S}x \in \mathrm{N}\ )$

A3: Se i successori di due numeri naturali sono uguali, i numeri sono uguali.

$\forall x\ \forall y\ (Sx = Sy \Rightarrow x = y)$

A4: 0 non è il successore di alcun numero naturale.

$\forall x\ (0 \neq Sx\ )$

A5: Ogni sottoinsieme di numeri naturali che contenga lo 0 e il successore di ogni proprio elemento coincide con l'intero insieme dei numeri naturali.

$$\forall A\left[\left(0 \in A\right) \wedge \forall x\left(x \in A \Rightarrow Sx \in A\right) \Rightarrow N \subseteq A\right]$$

Il primo assioma stabilisce l'esistenza nel numero 0.

Il secondo stabilisce che ogni numero naturale ha un numero, denominato *successore*, che pure è un numero naturale.

Il terzo stabilisce che numeri diversi hanno successori diversi.

Il quarto stabilisce che 0 è l'unico numero naturale che non è successore di nessun numero naturale.

Il quinto assioma è il cardine della dimostrazione per induzione: afferma infatti che ogni insieme, che contenga lo 0 e il successore di ogni suo elemento, coincide con N. Detto in altri termini, per una proposizione P basterà verificare il cosiddetto *passo base*, P_0 (ovvero che la proposizione è vera per lo 0), e il *passo induttivo*, ossia che $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ (ovvero che se la proposizione P si ipotizza essere vera per un numero naturale k e si dimostra essere vera per il successore di k, allora è vera per tutti i numeri naturali).

Si è poi discussa con gli studenti la seguente dimostrazione per induzione, attribuita al giovane Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Teorema

La somma dei primi n numero naturali vale $S_n = \dfrac{n(1+n)}{2}$

Dimostrazione

Passo base: si verifica se la tesi valga per 0: $S_0 = (1+0)\dfrac{0}{2} = 0$.

Passo induttivo: si suppone per ipotesi che valga $S_k : 1+2+3+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$;

si dimostra che vale S_{k+1}: $1+2+3+\ldots+k+1=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$S_{k+1} = 1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

È importante sottolineare agli studenti come vadano verificati sia il passo base sia il passo induttivo per rispettare l'assioma A5: è, infatti, possibile fornire esempi di proposizioni in cui il passo base è vero e quello induttivo falso, e viceversa.

Descrizione dell'attività per gli insegnanti

- **Contesto:** il principio d'induzione.
- **Ordine di scuola:** secondo biennio e quinto anno della scuola secondaria di II grado.
- **Materiali e strumenti:** schede di lavoro preparate dagli organizzatori.
- **Prerequisiti:**
  - conoscenza degli elementi che compongono una dimostrazione matematica;
  - comprensione della dipendenza dei costrutti dal sistema assiomatico;
  - conoscenza del simbolismo logico.
- **Obiettivi:**
  - comprendere l'utilizzo in matematica della dimostrazione per induzione;
  - saper utilizzare la tecnica della dimostrazione per induzione in un dato teorema;
  - comprendere la necessità di entrambi i passi (iniziale e induttivo) per la validità della dimostrazione per induzione;
  - comprendere analogie e differenze tra induzione matematica e induzione fisica;
  - argomentare, anche producendo opportuni esempi e/o controesempi, per confermare o confutare una determinata affermazione.
- **Descrizione attività e indicazioni metodologiche:** l'attività è strutturata come una lezione partecipata, nella quale si alternano momenti di lezione frontale e 4 attività di esplorazione dei concetti analizzati. Gli studenti sono divisi in gruppi di lavoro composti da 3 ragazzi. A ciascun gruppo è consegnata una scheda di lavoro, contenente esercizi stimolo e in cui gli studenti sono chiamati ad argomentare in forma scritta i ragionamenti discussi. Concludono

la lezione 2 esercizi da svolgere individualmente.

- **Tempo di svolgimento previsto:** 120 minuti.
- **Contenuti matematici:**
  - **Induzione fisica e matematica:** si discute la differenza tra l'induzione fisica e l'induzione matematica, esplicitando la relazione tra il principio di induzione e gli assiomi di Peano.
  - **Teoria e tecnica della dimostrazione per induzione:** attraverso teoremi noti si analizza la tecnica dimostrativa per induzione, con particolare attenzione all'importanza di entrambi i passi. Si utilizzano degli esempi di dimostrazioni errate in cui è vero solo uno dei due passi.

Riferimenti alle Indicazioni Nazionali e alle Linee guida per la scuola secondaria

Linee generali e competenze

Saranno obiettivo dello studio: […] una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze

Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.

Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare une determinata affermazione.

Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.

Riferimenti ai nuclei, conoscenze e abilità dei documenti UMI (2003, 2004)

<table>
<tr><th rowspan="2">Abilità</th><th rowspan="2">Conoscenze</th><th colspan="2">Nuclei coinvolti</th></tr>
<tr><th>disciplinari</th><th>trasversali</th></tr>
<tr><td>• Analizzare la correttezza di un ragionamento in un dato contesto.
• Applicare in semplici casi il principio di induzione.
• Distinguere tra processi induttivi e processi deduttivi.
• Comprendere ed usare forme diverse di argomentazione o di dimostrazioni.
• Riconoscere aspetti sintattici e aspetti semantici di una teoria.
• Comprendere il ruolo e le caratteristiche di un sistema assiomatico.</td><td>• Schemi di ragionamento.
• Coerenza e indipendenza di un sistema assiomatico.</td><td>Numeri.

Relazioni e funzioni.</td><td>Argomentare, congetturare, dimostrare.

Risolvere e porsi problemi.</td></tr>
</table>

Attività proposte e soluzioni

Attività 1

La seguente attività è stata proposta agli studenti dopo aver presentato la dimostrazione del teorema della somma dei primi n numeri naturali, sia tramite il metodo intuitivo di Gauss, sia mediante la tecnica di dimostrazione per induzione. Per quest'ultima sono stati analizzati e discussi attentamente il passo base e il passo induttivo.

Gli studenti sono stati dunque chiamati a svolgere l'attività applicando la tecnica appresa. Il tempo dedicato è stato di 20 minuti, nei quali gli studenti hanno lavorato a gruppi.

> Dimostra per induzione:
>
> **TEOREMA:**
>
> *La somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2.*
>
> **Dimostrazione:**

Una possibile dimostrazione dell'Attività è la seguente:
Passo base: per $n = 1$ si ha $1 = 1^2$.

Passo induttivo:
Sia valido $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.
Si ha che $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 + 2(n + 1) - 1 = (n + 1)^2$.

Sfruttando l'ipotesi induttiva si può riscrivere l'equazione come: $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, dimostrando così il teorema.

Attività 2

Dopo un'approfondita discussione sulla prima Attività – data dal fatto che gli studenti non fossero a conoscenza della tecnica dimostrativa – è stato proposto un analogo esercizio di difficoltà maggiore. A tale attività sono stati dedicati ulteriori 20 minuti, nei quali gli studenti hanno lavorato a gruppi.

Dimostra per induzione:

Teorema:

Il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per 6.

Dimostrazione:

Una possibile dimostrazione dell'Attività è la seguente:

Passo base:

per $n = 1$ si ha $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ divisibile per 6.

Passo induttivo:

supposto P_n divisibile per 6, si dimostra:

$(n + 1)(n + 2)(n + 3) = n(n + 1)(n + 2) + 3(n + 1)(n + 2) = P_n + 32k.$

dove $k = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Pertanto anche P_{n+1} è divisibile per 6.

Attività 3

Per introdurre questa Attività, il cui obiettivo è stato quello di guidare gli studenti alla comprensione dell'importanza di entrambi i passi della dimostrazione per induzione, si è presa in considerazione la seguente uguaglianza, evidentemente falsa:

$$n - 1 = n$$

Pur essendo quest'ultima falsa (come evidente dal passo base), è possibile applicare efficacemente il passo induttivo della tecnica di dimostrazione per induzione. In questo modo gli studenti hanno avuto maggiore facilità nell'affrontare il lavoro di gruppo successivo, nel quale si considera una proposizione per cui vale il passo base, ma non quello induttivo.

Dimostra per induzione:

Teorema:

Vale la seguente disuguaglianza

$$(n^2 + 2)^2 > 2^n$$

Dimostrazione:

Il passo base di questa dimostrazione è evidente, mentre per il passo induttivo si può notare come un controesempio basti a confutare la disuguaglianza. Infatti, già per $n = 17$ si ha

$(17^2 + 2)^2 \leq 2^{17}$.

Attività individuale

Al termine della lezione, è stata assegnata agli studenti la seguente attività da svolgere individualmente. La discussione matematica è stata condotta sui *forum* online, nell'arco di una settimana.

> Dimostra la *disuguaglianza di Bernoulli*.
>
> Sia x un numero reale tale che $x > -1$. Dimostra che per ogni n si ha
>
> $$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Si consideri il passo base. Per $n = 0$ si ha:

$(1 + x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$, da cui $1 \geq 1$.

Ammessa la proposizione valida per n, si verifica la disuguaglianza per $n + 1$:

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\, x$$

$$(1 + x)^n\, (1 + x) \geq 1 + (n + 1)\, x$$

$$(1 + x)^n \geq \frac{1 + (n + 1)x}{1 + x}$$

disuguaglianza che è valida per $x > -1$.

Poiché la disuguaglianza $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ è vera per l'ipotesi induttiva, allora è sufficiente dimostrare che:

$$1 + nx \geq \frac{1 + nx + x}{1 + x} = 1 + \frac{nx}{1 + x}$$

Segue la tesi.

Discussione sui protocolli degli studenti

Nelle Attività gli studenti hanno avuto diverse difficoltà. Una possibile spiegazione è che nessuno di loro aveva mai visto prima questa strategia di dimostrazione.

Attività 1-3

Nella prima Attività, dopo un'iniziale fase in cui tutti gli studenti hanno manifestato grossi dubbi, i docenti sono intervenuti per guidare le fasi della risoluzione.

Per le Attività 2 e 3, assegnate intenzionalmente della stessa tipologia, lo svolgimento da parte degli studenti è stato più agevole.

Di seguito alcuni errori significativi:

$$n=0 \Rightarrow n^2=0$$
$$n=1 \Rightarrow n^2=1$$
$$n(2K+1)=n^2$$
$$2Kn+n=n^2 \qquad m(2K+1)=m^2 \qquad 2K+1=m$$
$$S_{2K+1}=(1+2K+1)\frac{2K+1}{2}=(2K+1)^2$$
$$\cancel{2}\frac{(2K+2)}{\cancel{2}}\frac{2K+1}{2}=4K^2+1+4K$$

Figura 1 In questo protocollo, tratto dall'Attività 1, si osserva come l'uso di due lettere nell'impostazione della dimostrazione ha indotto gli studenti in errore.

INDUTTIVO

$(n)(n+1)(n+2) : 6 = 6$ naturale

$$=(n^2+n)(n+2)=(n^3+2n^2+n^2+2n)=\frac{(n^{\cancel{3}2}+3n^{\cancel{2}}+2\cancel{n})n}{6}$$

$(n)(n+1)(n+2)=6K$ con $K \in \mathbb{N}$

$$\frac{(n^3+3n^2+2n)}{2}=3\cdot\cancel{2}K \rightarrow \frac{n^3}{2}+\frac{3}{2}n^2+n=\cancel{3}K$$

$$\rightarrow \frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}=K$$

$n=3 \quad K=10$
$n=1 \quad K=1$
$n=2 \quad K=4$

$$n^3+3n^2+2n=6K$$

Figura 2 In questo protocollo, tratto dall'Attività 2, gli studenti confondono l'ipotesi e la tesi del passo induttivo.

Attività individuale

La maggior parte degli studenti ha dimostrato di aver acquisito la tecnica di dimostrazione per induzione nell'attività individuale. Gli errori si sono concentrati principalmente su altri aspetti, come la non corretta gestione delle disuguaglianze (vedi Figura 3).

Passo base *n=0 (1+x)^0 > 1+0*x → 1 > 1 Vero*

Passo induttivo *Ammessa l'ipotesi valida per n, verifichiamo la disuguaglianza per n+1*

(1+x)^n+1 > 1+(n+1) x

*(1+x)^n * (1+x) > 1+(n+1)x*

*(1+nx) * (1+x) > 1+(n+1)x*

1 + nx + x + nx^2 > nx+x+1

nx^2 > 0

x^2 >/= 0 vero per ogni x del dominio

Figura 3 Nel terzo passaggio lo studente usa l'ipotesi operando una sostituzione come se questa contenesse il segno di = al posto di >.

Valutazione

Le seguenti domande, parte del test finale, possono essere utilizzate dall'insegnante come verifica sommativa del lavoro svolto. Ad ogni domanda, oltre alla soluzione, sono stati indicati i punti massimi ottenibili e, tra parentesi quadre, la percentuale di risposte date dagli studenti.

1. Dimostrare per induzione la seguente proprietà:

   Sia $n \in \mathbb{N}$, allora $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ _ / 2

   [46,7 % corretto; 53,3 % parzialmente corretto; 0 % errato; 0 % non risponde]

   Soluzione:

   Passo base: per $n = 0$, $0^2 = 0/6$, cioè $0 = 0$.

   Passo induttivo: sia valida l'ipotesi induttiva $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$,

   allora si dimostra che:

   $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

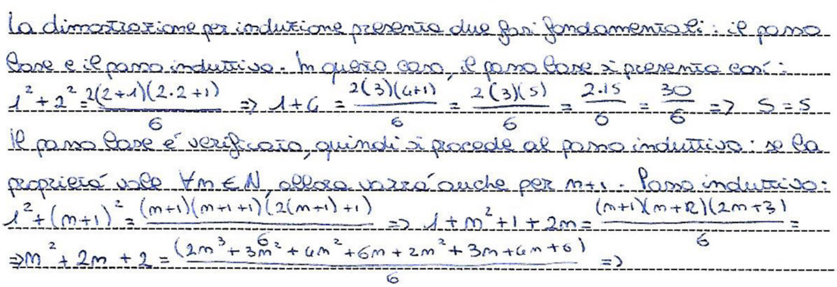
   Infatti:

   $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

   $$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right]}{6}$$

   $$= \frac{(k+1)\left[2k^2 + 7k + 6\right]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Questa domanda è stata proposta per verificare se gli studenti fossero in grado di condurre una dimostrazione per induzione. Nella griglia di valutazione si è scelto di assegnare 0,5 punti al passo base e 1,5 al passo induttivo. Le principali difficoltà riscontrate sono state relative alla verifica del passo induttivo (vedi Figura 4).


La dimostrazione per induzione presenta due fasi fondamentali: il passo base e il passo induttivo. In questo caso, il passo base si presenta così:

$1^2 + 2^2 = \frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6} \Rightarrow 1+4 = \frac{2(3)(4+1)}{6} = \frac{2(3)(5)}{6} = \frac{2\cdot 15}{6} = \frac{30}{6} \Rightarrow 5=5$

il passo base è verificato, quindi si procede al passo induttivo: se la proprietà vale $\forall m \in N$, allora varrà anche per $m+1$. Passo induttivo:

$1^2 + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+1+1)(2(m+1)+1)}{6} \Rightarrow 1 + m^2 + 1 + 2m = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} =$

$\Rightarrow m^2 + 2m + 2 = \frac{(2m^3 + 3m^2 + 4m^2 + 6m + 2m^2 + 3m + 4m + 6)}{6} \Rightarrow$

Figura 4 Lo studente verifica correttamente il passo base, ma non riesce a completare la dimostrazione del passo induttivo.

2. Considera la seguente proposizione e la sua dimostrazione per induzione:

   Sia $n \in \mathbb{N}$, allora $1^{-1} + n = \dfrac{1}{\dfrac{1}{n-1}} + 1$.

   Dim.:

   Supponiamo che la proposizione sia vera fino a n. Dobbiamo dimostrare che è vera per $n + 1$

   cioè: $1^{-1} + (n + 1) = \dfrac{1}{\frac{1}{n}} + 1$. Sottraendo 1 ad ambo i membri otteniamo: $1^{-1} + n = \dfrac{1}{\frac{1}{n}}$.

   Per l'ipotesi induttiva: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{n-1}} + 1 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}}$. Da cui $\dfrac{1 + \dfrac{1}{n-1}}{\dfrac{1}{n-1}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}}$.

   In conclusione $\dfrac{\dfrac{n}{n-1}}{\dfrac{1}{n-1}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{n}}$., cioè $n = n$ che è un'identità.

   a. La dimostrazione è corretta?
   b. La proposizione è vera?
      Motiva le tue risposte. _ / 3

   [40 % corretto; 60 % parzialmente corretto; 0 % errato; 0 % non risponde]

   "La dimostrazione non è corretta, perché manca il passo base.
   La proposizione è falsa, come mostra il caso n = 0."

In questa domanda è presente un esempio di proposizione falsa, in cui però il passo induttivo può essere verificato. Si è scelto di inserirla per verificare se gli studenti avessero compreso che vanno provati sia il passo base che quello induttivo. Come si vede dalla Figura 5 alcuni studenti hanno erroneamente concluso che la proposizione è falsa perché la dimostrazione non è corretta.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L., & Robutti, O. (a cura di) (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Ciclo secondario).* Lucca: Matteoni stampatore.

Arzarello, F., Andriano V., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). *Abduction and conjecturing in Mathematics*. Philosophica. 61(1), 77-94.

Arzarello, F., Bazzini, L., Ferrara, F., & Sabena, C. (2011). *Matematica: non è solo questione di testa. Strumenti per osservare i processi di apprendimento in classe*. Trento: Centro Studi Erickson.

Bartolini Bussi, M.G., Chiappini, G., Paola, D., Reggiani, M., & Robutti, O. (2004). *Teaching and Learning Mathematics with Tools*. In: Cannizzaro, L., Pesci, A., & Robutti, O. *Research and Teacher Training in Mathematics Education in Italy: 2000-2003*, 138-169. Milano: Ghisetti e Corvi.

Bonola, R. (1975). *La geometria non euclidea*. Bologna: Zanichelli.

Cederberg, J.N. (1989). *A Course in Modern Geometries*. New York: Springer-Verlag.

Euclide (1970). *Gli Elementi* (a cura di A. Frajese, L. Maccioni). Torino: UTET.

Greenberg, M.J. (1974). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. New York: Freeman & Company.

INVALSI (2016). *Il quadro di riferimento delle Prove di Matematica del Sistema Nazionale di Valutazione*. Roma.

Kline, M. (1991). *Storia del pensiero matematico* (traduzione italiana con appendice a cura di A. Conte). Torino: Einaudi.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010). *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali*. Roma.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti tecnici (primo biennio)*. Roma.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti professionali (primo biennio)*. Roma.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti tecnici (secondo biennio e quinto anno)*. Roma.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). *Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento degli istituti professionali (secondo biennio e quinto anno)*. Roma.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Direzione Generale Ordinamenti Scolastici, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica. (2004). *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario*. Lucca: Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri".

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Direzione Generale Ordinamenti Scolastici, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica. (2004). *Matematica 2004. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario: quinta classe*. Lugo di Romagna: Liceo Scientifico Statale "G. Ricci Curbastro".

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2010). *Il Piano Lauree Scientifiche -Linee guida*. Roma.

Moise, E.E. (1963). *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. Reading (MASS): Addison & Wesley.

Olivero, F., & Robutti, O. (2001). *Measuring in Cabri as a bridge between perception and theory*. In M. van der Huevel-Panhuizen (ed.), *Proceeding of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 9-16. Utrecht: The Netherlands, PME.

Olivero, F., & Robutti, O. (2007). *Measuring in dynamic geometry environments as a tool for conjecturing and proving*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, *12*(2), 135-156.

Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (1998). *Dalla congettura alla dimostrazione*. Università di Torino, Quaderno del Dipartimento di Matematica.

Paola, D., &, Robutti O. (2001). *La dimostrazione alla prova. Itinerari per un insegnamento integrato di algebra, logica, informatica, geometria*. Matematica e aspetti didattici, quaderni del MPI, *45*, 97-202. Lucca: MPI.

Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). *Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry, Third International Handbook of Mathematics Education*. Springer: New York, 571-596.

http://www.dipmatematica.unito.it/do/home.pl/View?doc=pls.html

http://www.invalsi.it

http://www.miur.gov.it

http://www.paololazzarini.it

http://www.umi-ciim.it

https://areeweb.polito.it

https://difima.i-learn.unito.it

https://www.geogebra.org

https://www.geogebra.org/geogebra.institute.torino