

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Inhoud

	blz.
1. Inleiding	1
2. 5 ^e orde Runge-Kutta methoden met een schatting voor de discrepantie	2
3. De twee-parameter familie van oplossingen van Zonneveld	6
4. Het stabiliteitspolynoom van een RK(5,6) methode	8
5. Een RK(5,6) methode met maximale reële stabiliteitsgrens	10
6. Stabiliteitsgebieden bij RK(5,6) methoden	12
7. Testvoorbeeld	14

1. Inleiding

In van der Houwen [2] zijn een aantal expliciete gestabiliseerde Runge-Kutta formules, met een orde van ten hoogste 4, gegeven.

Als aanvulling daarop geeft dit rapport een 5^e orde gestabiliseerde Runge-Kutta formule die voor vergelijkingen van het type

$$(1.1) \quad \tilde{y}' = f(x, \tilde{y}), \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0,$$

een grotere integratie-stap toelaat dan de bestaande 5^e orde 6-punts Runge-Kutta (RK (5,6)) methoden.

De constructie van dit Runge-Kutta schema is gebaseerd op de manier waarop Zonneveld [5] zijn RK(5,6) formule afleidde.

2. 5^e orde Runge-Kutta methoden met een schatting voor de discrepantie

Een m-punts Runge-Kutta methode voor vergelijkingen van het type (1.1) wordt gedefinieerd door

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_0 = \tilde{y}_0, \\ y_{n+1} = y_n + \sum_{i=0}^{m-1} a_i k_n^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ k_n^{(0)} = h_n f(x_n, y_n), \\ k_n^{(i)} = h_n f(x_n + M_i h_n, y_n + \sum_{j=0}^{i-1} L_{ij} k_n^{(j)}), \quad i = 1, \dots, m-1, \\ h_n = x_{n+1} - x_n, \\ M_i = \sum_{j=0}^{i-1} L_{ij}. \end{array} \right.$$

We noemen methode (2.1) p^e orde consistent indien geldt

$$(2.2) \quad y_n(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h_n^{p+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

waarin $y_n(x)$ de lokaal analytische oplossing is dat wil zeggen de oplossing van het beginwaarde probleem

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_n = f(x, y), \\ y_n(x_n) = y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

Door ontwikkeling van het linkerlid van (2.2) in een Taylor-reeks in h_n vinden we voor 5^e orde consistentie de volgende betrekkingen tussen de parameters a_i , M_i en L_{ij} ($i = 0, \dots, m-1$; $j = 0, \dots, i-1$)

$$(2.3a) \quad \sum_{i=0}^{m-1} a_i = 1 \quad ;$$

$$(2.4a) \quad \sum_{i=1}^{m-1} a_i M_i = \frac{1}{2} \quad ;$$

$$(2.5a) \quad \sum_{i=1}^{m-1} a_i M_i^2 = \frac{1}{3} \quad ;$$

$$(2.6a) \quad \sum_{i=2}^{m-1} a_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l = \frac{1}{6} \quad ;$$

$$(2.7a) \quad \sum_{i=1}^{m-1} a_i M_i^3 = \frac{1}{4} \quad ;$$

$$(2.8a) \quad \sum_{i=2}^{m-1} a_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l^2 = \frac{1}{12} \quad ;$$

$$(2.9a) \quad \sum_{i=2}^{m-1} a_i M_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l = \frac{1}{8} \quad ;$$

$$(2.10a) \quad \sum_{i=3}^{m-1} a_i \sum_{l=2}^{i-1} L_{il} \sum_{p=1}^{l-1} L_{lp} M_p = \frac{1}{24} \quad ;$$

$$(2.11a) \quad \sum_{i=1}^{m-1} a_i M_i^4 = \frac{1}{5} \quad ;$$

$$(2.12a) \quad \sum_{i=2}^{m-1} a_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l^3 = \frac{1}{20} \quad ;$$

$$(2.13a) \quad \sum_{i=2}^{m-1} a_i M_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l^2 = \frac{1}{15} \quad ;$$

$$(2.14a) \quad \sum_{i=2}^{m-1} a_i M_i^2 \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l = \frac{1}{10} \quad ;$$

$$(2.15a) \quad \sum_{i=2}^{m-1} a_i \left(\sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l \right)^2 = \frac{1}{20} \quad ;$$

$$(2.16a) \quad \sum_{i=3}^{m-1} a_i \sum_{l=2}^{i-1} L_{i,l} \sum_{p=1}^{l-1} L_{l,p} M_p^2 = \frac{1}{60} ;$$

$$(2.17a) \quad \sum_{i=3}^{m-1} a_i \sum_{l=2}^{i-1} L_{i,l} M_l \sum_{p=1}^{l-1} L_{l,p} M_p = \frac{1}{40} ;$$

$$(2.18a) \quad \sum_{i=3}^{m-1} a_i M_i \sum_{l=2}^{i-1} L_{i,l} \sum_{p=1}^{l-1} L_{l,p} M_p = \frac{1}{30} ;$$

$$(2.19a) \quad \sum_{i=4}^{m-1} a_i \sum_{l=3}^{i-1} L_{i,l} \sum_{p=2}^{l-1} L_{l,p} \sum_{q=1}^{p-1} L_{p,q} M_q = \frac{1}{120} ;$$

Analoog aan Zonneveld [5] proberen we, simultaan met het oplossen van deze consistentie-voorwaarden, te voldoen aan de relatie

$$(2.20) \quad \sum_{i=0}^{m-1} b_i k_n^{(i)} = \frac{h_n^5}{5!} \frac{d^5}{dx^5} y_n(x) + O(h_n^6).$$

Deze lineaire uitdrukking in de $k_n^{(i)}$, $i = 0, \dots, m-1$, kan dienen als maat voor de discrepantie van de numerieke oplossing.

Relatie (2.20) leidt tot het volgende additionele stelsel vergelijkingen

$$(2.3b) \quad \sum_{i=0}^{m-1} b_i = 0 ;$$

$$(2.4b) \quad \sum_{i=1}^{m-1} b_i M_i = 0 ;$$

$$(2.5b) \quad \sum_{i=1}^{m-1} b_i M_i^2 = 0 ;$$

$$(2.6b) \quad \sum_{i=2}^{m-1} b_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{i,l} M_l = 0 ;$$

$$(2.7b) \quad \sum_{i=1}^{m-1} b_i M_i^3 = 0 ;$$

$$(2.8b) \quad \sum_{i=2}^{m-1} b_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l^2 = 0 ;$$

$$(2.9b) \quad \sum_{i=2}^{m-1} b_i M_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l = 0 ;$$

$$(2.10b) \quad \sum_{i=3}^{m-1} b_i \sum_{l=2}^{i-1} L_{il} \sum_{p=1}^{l-1} L_{lp} M_p = 0 ;$$

$$(2.11b) \quad \sum_{i=1}^{m-1} b_i M_i^4 = \frac{1}{5} ;$$

$$(2.12b) \quad \sum_{i=2}^{m-1} b_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l^3 = \frac{1}{20} ;$$

$$(2.13b) \quad \sum_{i=2}^{m-1} b_i M_i \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l^2 = \frac{1}{15} ;$$

$$(2.14b) \quad \sum_{i=2}^{m-1} b_i M_i^2 \sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l = \frac{1}{10} ;$$

$$2.15b) \quad \sum_{i=2}^{m-1} b_i \left(\sum_{l=1}^{i-1} L_{il} M_l \right)^2 = \frac{1}{20} ;$$

$$(2.16b) \quad \sum_{i=3}^{m-1} b_i \sum_{l=2}^{i-1} L_{il} \sum_{p=1}^{l-1} L_{lp} M_p^2 = \frac{1}{60} ;$$

$$(2.17b) \quad \sum_{i=3}^{m-1} b_i \sum_{l=2}^{i-1} L_{il} M_l \sum_{p=1}^{l-1} L_{lp} M_p = \frac{1}{40} ;$$

$$(2.18b) \quad \sum_{i=3}^{m-1} b_i M_i \sum_{l=2}^{i-1} L_{il} \sum_{p=1}^{l-1} L_{lp} M_p = \frac{1}{30} ;$$

$$(2.19b) \quad \sum_{i=4}^{m-1} b_i \sum_{l=3}^{i-1} L_{il} \sum_{p=2}^{l-1} L_{lp} \sum_{q=1}^{p-1} L_{pq} M_q = \frac{1}{120} ;$$

3. De twee-parameter familie van oplossingen van Zonneveld

Voor het geval $m = 6$ heeft Zonneveld [5] de stelsels (2.3a) - (2.19a), (2.3b) - (2.19b) vereenvoudigd tot een stelsel van 33 vergelijkingen met 35 onbekenden, te weten

$$(3.1) \quad \sum_{i=0}^6 a_i = 1 \quad ; \quad (3.2) \quad \sum_{i=0}^6 b_i = 0 \quad ;$$

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^6 a_i M_i = \frac{1}{2} \quad ; \quad (3.4) \quad \sum_{i=1}^6 b_i M_i = 0 \quad ;$$

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^6 a_i M_i^2 = \frac{1}{3} \quad ; \quad (3.6) \quad \sum_{i=1}^6 b_i M_i^2 = 0 \quad ;$$

$$(3.7) \quad \sum_{i=1}^6 a_i M_i^3 = \frac{1}{4} \quad ; \quad (3.8) \quad \sum_{i=1}^6 b_i M_i^3 = 0 \quad ;$$

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^6 a_i M_i^4 = \frac{1}{5} \quad ; \quad (3.10) \quad \sum_{i=1}^6 b_i M_i^4 = \frac{1}{5} \quad ;$$

$$(3.11) \quad \sum_{i=2}^6 a_i L_{i1} = 0 \quad ; \quad (3.12) \quad \sum_{i=2}^6 b_i L_{i1} = 0 \quad ;$$

$$(3.13) \quad \sum_{i=3}^6 a_i L_{i2} = a_2(1-M_2) \quad ; \quad (3.14) \quad \sum_{i=3}^6 b_i L_{i2} = -b_2(1-M_2)/4 \quad ;$$

$$(3.15) \quad \sum_{i=4}^6 a_i L_{i3} = a_3(1-M_3) \quad ; \quad (3.16) \quad \sum_{i=4}^6 b_i L_{i3} = -b_3(1-M_3)/4 \quad ;$$

$$(3.17) \quad \sum_{i=5}^6 a_i L_{i4} = a_4(1-M_4) \quad ; \quad (3.18) \quad \sum_{i=5}^6 b_i L_{i4} = -b_4(1-M_4)/4 \quad ;$$

$$(3.19) \quad \sum_{i=2}^6 a_i L_{i1} M_i = 0 \quad ; \quad (3.20) \quad \sum_{i=2}^6 b_i L_{i1} M_i = 0 \quad ;$$

$$(3.21) \quad \sum_{i=1}^1 L_{2i} M_i = M_2^2/2 \quad ; \quad (3.22) \quad \sum_{i=1}^1 L_{2i} M_i^2 = M_2^3/3 \quad ;$$

$$(3.23) \quad \sum_{i=1}^2 L_{3i} M_i = M_3^2/2 \quad ; \quad (3.24) \quad \sum_{i=1}^2 L_{3i} M_i^2 = M_3^3/3 \quad ;$$

$$(3.25) \quad \sum_{i=1}^3 L_{4i} M_i = M_4^2/2 \quad ; \quad (3.26) \quad \sum_{i=1}^3 L_{4i} M_i^2 = M_4^3/3 \quad ;$$

$$(3.27) \quad a_1 = 0 \quad ; \quad (3.28) \quad b_1 = 0 \quad ;$$

$$(3.29) \quad M_5 = 1 \quad ; \quad (3.30) \quad M_6 = 1 \quad ;$$

$$(3.31) \quad L_{65} = 0 \quad ; \quad (3.32) \quad b_5 = 0 \quad ;$$

$$(3.33) \quad a_6 = 0 \quad .$$

Iedere oplossing van dit stelsel geeft volgens (3.33) een 6-punts integratie formule terwijl met één extra punt een schatting gemaakt kan worden van de discrepantie.

De oplossing die door Zonneveld wordt aangegeven wordt bepaald door $M_3 = \frac{1}{2}$ en $M_4 = \frac{4}{5}$.

De waarden van de parameters zijn dan

$$(3.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{35}{336}; a_1 = a_3 = a_6 = 0; a_2 = \frac{162}{336}; a_4 = \frac{125}{336}; a_5 = \frac{14}{336}; b_0 = \frac{21}{14}; b_1 = b_5 = 0; \\ b_2 = \frac{-162}{14}; b_3 = \frac{224}{14}; b_4 = \frac{-125}{14}; b_6 = \frac{42}{14}; L_{10} = \frac{2}{9}; L_{20} = \frac{1}{12}; L_{21} = \frac{1}{4}; \\ L_{30} = \frac{1}{8}; L_{31} = 0; L_{32} = \frac{3}{8}; L_{40} = \frac{53}{125}; L_{41} = \frac{-135}{125}; L_{42} = \frac{126}{125}; L_{43} = \frac{56}{125}; \\ L_{50} = \frac{-63}{28}; L_{51} = \frac{189}{28}; L_{52} = \frac{-36}{28}; L_{53} = \frac{-112}{28}; L_{54} = \frac{50}{28}; L_{60} = \frac{133}{168}; \\ L_{61} = \frac{-378}{168}; L_{62} = \frac{276}{168}; L_{63} = \frac{112}{168}; L_{64} = \frac{25}{168}; L_{65} = 0; M_1 = \frac{2}{9}; M_2 = \frac{1}{3}; \\ M_3 = \frac{1}{2}; M_4 = \frac{4}{5}; M_5 = M_6 = 1. \end{array} \right.$$

4. Het stabiliteitspolynoom van een RK(5,6) methode

Beschouw het volgende lineaire beginwaarde-probleem

$$(4.1) \quad \begin{cases} \tilde{y}' = \delta \tilde{y}, \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0. \end{cases}$$

Passen we hierop een RK(5,6) schema toe dan vinden we

$$y_{n+1} = P_6(h\delta)y_n,$$

met

$$(4.2) \quad P_6(z) = \sum_{i=0}^5 \frac{z^i}{i!} + \beta z^6,$$

waarin

$$(4.3) \quad \beta = a_5 \prod_{i=1}^5 L_i i^{-1}.$$

We noemen $P_6(z)$ het *stabiliteitspolynoom*.

We definiëren het *stabiliteitsgebied* S van $P_6(z)$ als volgt

$$S = \{z \mid |P_6(z)| \leq 1\}.$$

Verder definiëren we de *reële stabiliteitsgrens* α van $P_6(z)$ door middel van

$$\alpha = \inf\{x \mid x > 0, |P_6(-x)| > 1\}.$$

Het is duidelijk dat α een functie is van β .

Van de ons bekende RK(5,6) formules had de methode van Lawson [4] de grootste reële stabiliteitsgrens, namelijk

$$\alpha_L = 5.6 \quad (\beta_L = \frac{1}{1280}).$$

Met behulp van een methode, gegeven in van der Houwen [1] berekenden we echter dat

$$(4.4) \quad \alpha_{\max} = \max_{\beta} \alpha(\beta) = 6.26,$$

en

$$(4.5) \quad \beta_{\text{opt}} = .725590420168_{10}^{-3}.$$

In paragraaf 5 geven we een oplossing van de vergelijkingen (3.1) - (3.33) en (4.3), waarbij we in de laatste vergelijking $\beta = \beta_{\text{opt}}$ stellen.

Het is duidelijk dat deze oplossing correspondeert met een RK(5,6) schema waarvan de reële stabiliteitsgrens gelijk is aan α_{\max} .

5. Een RK(5,6) methode met maximale reële stabiliteitsgrens

Zonneveld [5] heeft het stelsel vergelijkingen (3.1) - (3.33) opgelost, met M_3 en M_4 als vrije parameters. Daarbij geeft hij de uitdrukkingen

$$(5.1) \quad M_2 = 2M_3/(1+4M_3),$$

$$(5.2) \quad L_{10} = 2M_2/3,$$

$$(5.3) \quad L_{21} = 3M_2/4,$$

$$(5.4) \quad L_{32} = M_3^2(M_3 - M_2)/M_2^2,$$

$$(5.5) \quad L_{43} = M_4(M_4 - M_2)(M_4 - M_3)/(3M_3(M_3 - M_2)).$$

Uit (3.17) en (3.33) volgt

$$(5.6) \quad a_5 L_{54} = a_4(1 - M_4),$$

en uit (3.1), (3.3), (3.5), (3.7), (3.9), (3.27) en (3.33) vinden we

$$(5.7) \quad a_4 = (20M_2M_3 - 10M_2 - 10M_3 + 6)/(120M_4(M_4 - M_2)(M_4 - M_3)(1 - M_4)).$$

Substitutie van (5.2), ..., (5.7) in (4.3) geeft de vergelijking

$$(5.8) \quad (20M_2M_3 - 10M_2 - 10M_3 + 6)M_3 = 720\beta_{\text{opt}}.$$

Uit (5.1) en (5.8) leiden we een vierkantsvergelijking in M_2 af,

$$(5.9) \quad 5M_2^2 - M_2(2 + 960\beta_{\text{opt}}) + 480\beta_{\text{opt}} = 0.$$

De grootste wortel van M_2 leidt tot minimale waarden van de overige parameters. De nog overgebleven vrijheidsgraad hebben we benut door $a_3 = 0$ te kiezen. Hierdoor wordt M_4 eenduidig bepaald:

$$(5.10) \quad M_4 = (3+2M_3)/5.$$

De waarden van de parameters a_i , b_i en M_i geven we in tabel 5.1, terwijl in tabel 5.2 de waarden van L_{ij} opgenomen zijn.

Tabel 5.1

De waarden van a_i , b_i en M_i .

i	a_i	b_i	M_i
0	.1013 8388 8447 4274	+ .1687 9574 4506 3191 10^{+1}	0
1	0	0	.2166 3751 5122 2449
2	.4710 9636 5451 7556	- .1422 2671 9546 3261 10^{+2}	.3249 5627 2683 3674
3	0	+ .1797 2905 6842 5553 10^{+2}	.4641 0728 0027 7517
4	.3760 3358 8853 7316	- .8017 3755 1797 5110 10^{+1}	.7856 4291 2011 1007
5	.5148 6157 2470 8536 10^{-1}	0	1
6	0	+ .2579 1843 4328 8994 10^{+1}	1

Tabel 5.2

De waarden van L_{ij} .

$$\begin{array}{ll}
 L_{10} = +.2166 3751 5122 2449 & ; \quad L_{20} = +.8123 9068 1708 4184 \ 10^{-1} & ; \\
 L_{21} = +.2437 1720 4512 5255 & ; \quad L_{30} = +.1088 9359 0760 4054 & ; \\
 L_{31} = +.7137 3905 6569 5119 \ 10^{-1} & ; \quad L_{32} = +.2838 3978 3610 3951 & ; \\
 L_{40} = +.4136 4798 7348 0195 & ; \quad L_{41} = -.9615 3115 2649 3416 & ; \\
 L_{42} = +.7328 5885 8261 3591 & ; \quad L_{43} = +.6006 6721 9051 0636 & ; \\
 L_{50} = -.1795 2996 1930 4468 \ 10^{+1} & ; \quad L_{51} = +.4792 6226 0139 7445 \ 10^{+1} & ; \\
 L_{52} = +.8241 2636 9753 6218 & ; \quad L_{53} = -.4387 0248 2693 7314 \ 10^{+1} & ; \\
 L_{54} = +.1565 5754 7509 0715 \ 10^{+1} & ; \quad L_{60} = +.8113 7444 5235 0849 & ; \\
 L_{61} = -.2142 3218 4008 3255 \ 10^{+1} & ; \quad L_{62} = +.1230 7807 2667 0698 \ 10^{+1} & ; \\
 L_{63} = +.9335 8481 1221 5743 & ; \quad L_{64} = +.1665 8185 6955 8982 & ; \\
 L_{65} = 0 & .
 \end{array}$$

6. Stabiliteitsgebieden bij RK(5,6) methoden

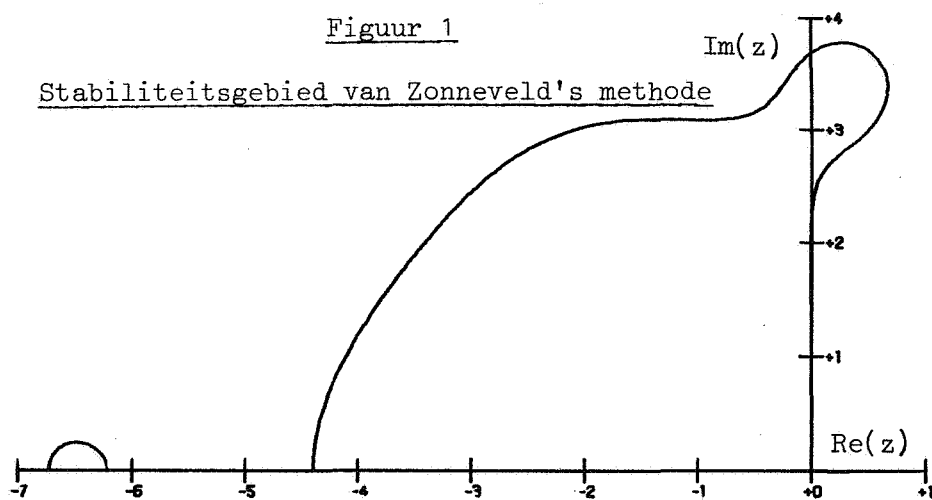
In deze paragraaf geven we het stabiliteitsgebied in een omgeving van de oorsprong van enige RK(5,6) methoden. In verband met de symmetrie van het stabiliteitsgebied is slechts het gedeelte met positieve y-coördinaat getekend.

In figuur 1 geven we het stabiliteitsgebied behorende bij de methode van Zonneveld; het stabiliteitspolynoom hiervan is

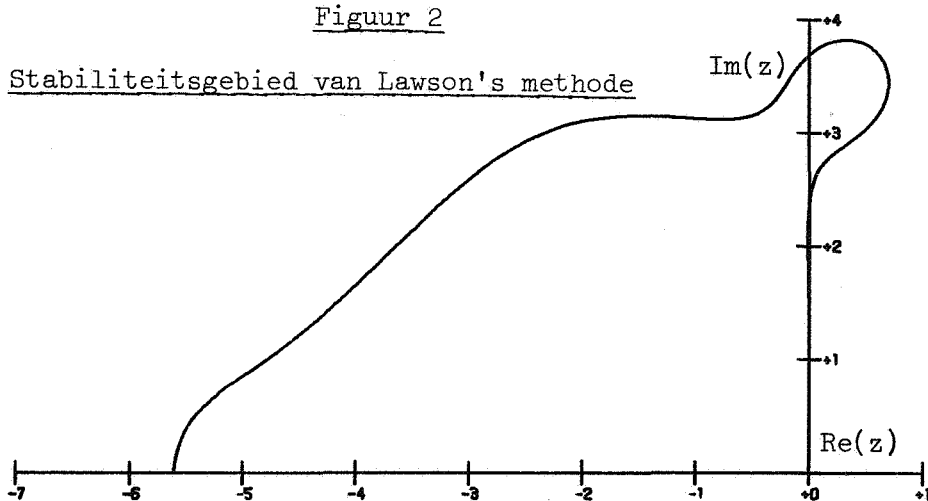
$$P_6(z) = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{24} z^4 + \frac{1}{120} z^5 + \frac{1}{1440} z^6.$$

Het stabiliteitsgebied van de methode van Lawson (hierbij is $\beta_L = 1/1280$) is in figuur 2 getekend, terwijl figuur 3 het stabiliteitsgebied van de in dit rapport beschreven methode laat zien ($\beta_{opt} = .72559_{10^{-3}}$).

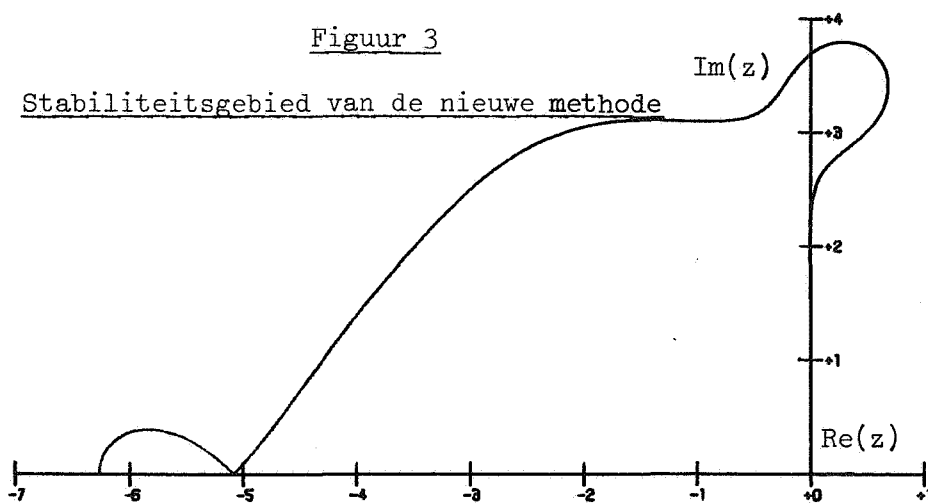
Figuur 1

Stabiliteitsgebied van Zonneveld's methode

Figuur 2

Stabiliteitsgebied van Lawson's methode

Figuur 3

Stabiliteitsgebied van de nieuwe methode

7. Testvoorbeeld

Als testvoorbeeld kozen we de stijve differentiaal-vergelijking (zie Lapidus en Seinfeld [3])

$$(7.1) \quad \begin{cases} y'(x) = -200(y(x)-F(x)) + F'(x), \\ F(x) = 10 - (10+x)e^{-x}, \\ y(0) = 10. \end{cases}$$

De exacte oplossing van (7.1) luidt

$$y(x) = F(x) + 10e^{-200x}.$$

De jacobiaan van deze differentiaal-vergelijking is de scalar -200 . Dit houdt in dat RK(5,6) methoden stabiel zijn bij integratie met staplengten h ,

$$h \leq h_{\max} = \frac{\alpha}{200}.$$

De RK(5,6) methode van Zonneveld heeft een maximale integratiestap $h_{\max} = .022$; terwijl de in dit rapport voorgestelde RK(5,6) methode stappen toelaat, die 40% groter zijn. Dit blijkt duidelijk uit tabel 7.1, waarin we de relatieve fout in $x = .4$ en $x = 10$ geven bij integratie met constante stap.

Tabel 7.1

Relatieve fout in $x = .4$ en $x = 10$ bij integratie van (7.1)

stap	Zonneveld's methode		Nieuwe methode	
	$x = .4$	$x = 10$	$x = .4$	$x = 10$
.020	1.9 10^{-3}	7.7 10^{-10}	4.5 10^{-5}	5.7 10^{-10}
.021	1.0 10^{-1}	4.7 10^{-10}	1.4 10^{-3}	3.3 10^{-10}
.022	1.6	5.8 10^{-1}	1.6 10^{-2}	1.3 10^{-10}
.023	7.3	10^{+29}	5.3 10^{-2}	1.1 10^{-10}
.024	1.8 10^{+3}	10^{+52}	2.8 10^{-1}	2.2 10^{-10}
.025	4.4 10^{+2}	10^{+69}	3.1	2.0 10^{-10}
.026	4.7 10^{+3}	10^{+78}	3.1 10^{-1}	3.2 10^{-4}
.027	9.9 10^{+2}	10^{+83}	6.6 10^{-1}	3.0 10^{-10}
.028	1.8 10^{+3}	10^{+81}	7.7 10^{-3}	1.8 10^{-9}
.029	2.9 10^{+1}	10^{+71}	1.0 10^{-4}	1.7 10^{-9}
.030	8.2	10^{+48}	1.3 10^{-5}	5.5 10^{-9}
.031			6.0 10^{-2}	2.4 10^{-8}
.032			312	10^{+70}

Referenties

- [1] Houwen, P.J. van der, One step methods for linear initial value problems I, Polynomial methods, TW report 119, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1970).
- [2] Houwen, P.J. van der, Stabilized Runge-Kutta methods with limited storage requirements, TW report 124, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1971).
- [3] Lapidus L., J.H. Seinfeld, Numerical solution of ordinary differential equations, Academic Press, New York, (1971).
- [4] Lawson, J.D., An order five Runge-Kutta process with extended region of stability, SIAM J. Numer. Anal. 3, 593, (1966).
- [5] Zonneveld, J.A., Automatic numerical integration, MC Tract 8, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1964).