ZW 1963-006

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

Mevr. A.B. Paalman-de Miranda

25 mei 1963

De ruimte van een topologische groep

§ 1. Inleiding

Verschillende stellingen zijn bekend over het verband tussen sommige topologische eigenschappen van topologische groepen.
Bijvoorbeeld de bekende stelling van Birkhoff-Kakutani die zegt dat iedere topologische groep die aan het 1e aftelbaarheidsaxioma voldoet metriseerbaar is. Bij de bestudering van de topologische structuur van groepen heeft men zich voornamelijk bezig gehouden met de locaal compacte groepen. Dit vooral om het verband dat er bestaat tussen de theorie van de Liegroepen en die van de locaal compacte groepen.
Hierbij heeft de bekende stelling van Yamabe, dat in iedere locaal compacte groep een open projectieve Liegroep bevat is een belangrijke rol gespeeld. (Een locaal compacte groep heet een projectieve Liegroep als in iedere omgeving van de eenheid een normaaldeler bevat is, zó dat de factorgroep een Liegroep is.)
De stelling van Yamabe stelt ons in staat om van een willekeurige locaal compacte groep over te gaan naar een projectieve Liegroep en deze voor te stellen in de vorm van een inverse limiet van Liegroepen.
Een andere versie van de limiet voorstelling van een projectieve Liegroep is gegeven door Pontrjagin's constructie van een Lierij voor compacte groepen. In een recent artikel construeerde Skljarenko een derge-

lijke Lierij voor een willekeurige projectieve Liegroep. Deze factorisering induceert een voorstelling van een nevenklassenruimte in de vorm van een inverse limiet van een transfiniete rij ruimten, beginnend met een variëteit en waarbij de opvolgende afbeeldingen een zeer eenvoudige vorm hebben.

Stelling (E.G. Skljarenko)

Stel G een locaal compacte projectieve Liegroep, H een gesloten ondergroep van G en B = G/H. Dan bestaat er een transfiniete rij compacte normaaldelers Y_α van G, $1 \leq \alpha \leq \Theta$, zó dat als $B_\alpha = G/HY_\alpha$ en φ_β^α , $\beta < \alpha$ de natuurlijke projectie van B_α op B_β is, er aan de volgende voorwaarden is voldaan.

1°) φ_β^α is een open perfekte afbeelding van de ruimte B_α op B_β en als $\gamma < \beta < \alpha$ dan $\varphi_\gamma^\alpha = \varphi_\gamma^\beta \varphi_\beta^\alpha$.

2°) B_1 is een variëteit en $B_\Theta = B$.

3°) voor iedere $\alpha < \Theta$ is $\varphi_\alpha^{\alpha+1}$ een locaal triviale vezeling waarvan de vezel een compacte variëteit $M_{\alpha+1}$ is.

4°) voor ieder limiet ordinaalgetal $\gamma \leq \Theta$ is $B_\gamma = \varprojlim \{B_\alpha, \varphi_\beta^\alpha ; \beta < \alpha < \gamma\}$.

Als B eindig dimensionaal is, dan is de rij Y_α zó te kiezen dat voor iedere afbeelding $\varphi_\alpha^{\alpha+1}$ de vezel $M_{\alpha+1}$ uit een eindig aantal punten bestaat.

§ 2. Eindig dimensionale groepen

In Montgomery & Zippin "Topological transformation groups" wordt bewezen dat de nevenklassenruimte van een eindig dimensionale locaal compacte separabel metrische groep locaal homeomorf is met het topologische product van een n-cel en een totaal onsamenhangende verzameling. Skljarenko bewees dat deze bewering ook blijft gelden voor willekeurige eindig dimensionale nevenklassenruimten.

In 1959 werd door V.I. Kuzminov bewezen dat de ruimte van een oneindige nuldimensionale compacte groep homeomorf is met een gegeneraliseerd Cantor discontinuum D^τ.

Later werd een nieuw bewijs van deze stelling gegeven door Hulanicki en Hewitt.

Iedere nuldimensionale loc. compacte groep bevat een compacte open ondergroep. Uit de voorgaande stelling volgt dus dat de ruimte van een nuldimensionale loc. compacte groep homeomorf is met het topologische product van een discrete verzameling en D^{τ}. Hetzelfde geldt voor nuldimensionale nevenklassenruimten.

Stelling 2.

Een eindige dimensionale factorruimte van een loc. compacte groep staat een locaal triviale vezeling toe met als basis een variëteit en een vezel die homeomorf is met D^{τ}.

Bewijs. Stel $B = G/H$ en G een projectieve Liegroep. We stellen B voor als een inverse limiet van ruimten B_α zoals gegeven in st.1.
Zij nu E^n een willekeurige n-cel in de variëteit B_1. Stel $E^n_\alpha = (\varphi^\alpha_1)^{-1}E^n$.
We bewijzen nu door inductie dat de afb. $\varphi^\alpha_1 : E^n_\alpha \longrightarrow E^n$ een representatie bepaalt van E^n_α in de vorm $E^n \times D^{\tau(\alpha)}$, waarbij voor iedere $\beta < \alpha$ de afbeelding $\varphi^\alpha_\beta : E^n_\alpha \longrightarrow E^n_\beta$ een projectie induceert van $D^{\tau(\alpha)} = D^{\tau(\beta)} \times D^{\tau(\alpha,\beta)}$ op $D^{\tau(\beta)}$.
Stel dit bewezen voor alle $\alpha < \gamma$.
Als γ een limiet getal is volgt de bewering uit het feit dat
$E^n_\gamma = \varprojlim \{E^n_\alpha, \varphi^\alpha_\beta ; \beta < \alpha < \gamma\}$.
Als γ geen limiet getal, dan $E^n_{\gamma-1} = E^n \times D^{\tau(\gamma-1)}$ en $\varphi^\gamma_{\gamma-1} : E^n_\gamma \longrightarrow E^n_{\gamma-1}$ is een locaal triviale vezeling.
Daar $D^{\tau(\gamma-1)}$ nuldimensionaal is en E^n samentrekbaar op iedere open n-cel in E^n is de vezeling $\varphi_{\gamma-1} : E^n_\gamma \longrightarrow E^n_{\gamma-1}$ triviaal.
d.i. $E^n_\gamma = E^n_\gamma \times M_\gamma$, waarbij M_γ een eindige verzameling is. Stel nu $D^{\tau(\gamma)} = D^{\tau(\gamma-1)} \times M_\gamma$; wij hebben dan $E^n_\gamma = E^n \times D^{\tau(\gamma)}$.

Als G een willekeurige loc. compacte groep, dan bevat zij een open proj. Liegroep Γ en de nevenklassenruimte B is te splitsen in de discrete som van nevenklassenruimten B^α van Γ. Iedere B^α staat een loc. triviale vezeling toe over een variëteit B^α_1 met vezel D^{τ_α}.
Daar de B^α loc. homeomorf zijn, zijn alle vezels homeomorf met één en dezelfde D^{τ}. Zij nu B_1 de discrete som van de variëteiten B^α_1.
Dan definieert de projectie $B^\alpha \longrightarrow B^\alpha_1$ een projectie van B op B_1.

Gevolg 1. Een nuldimensionale nevenklassenruimte is homeomorf met het topologische product van een discrete verzameling en D^{τ}.
Daar de vezeling van stelling 2 in dit geval een discrete basis heeft is zij triviaal.

Gevolg 2. De ruimte van een oneindige compacte nuldimensionale groep is homeomorf met D^{τ}.

Met behulp van stelling 1 en 2 kan ook bewezen worden, dat de nevenklassenruimte van een l.c. groep het gesloten (zelfs perfecte) beeld is van een product van een discrete verzameling en D^{τ}. Als de dimensie van de ruimte $\leq n$ is, dan kan de afbeelding gekozen worden met multipliciteit $\leq n+1$.

Ivanovskii en Kuzminov bewezen dat de ruimte van iedere compacte groep een continu beeld is van D^{τ}. Dit resultaat werd door Ivanovskii gegeneraliseerd tot compacte nevenklassenruimten van loc. comp. groepen en Skljarenko bewees tenslotte het bovengenoemde resultaat voor willekeurige nevenklassenruimten van loc. comp. groepen.

§ 3. De dimensie van een l.c. groep

Het begrip dimensie kan op verschillende manieren gedefinieerd worden.
Zij X een topologische ruimte. We zullen zeggen dat

1^{o} ind X = -1 als X leeg is;
ind $X \leq n$ als bij iedere $p \in X$ en iedere open verzameling U met $p \in U$ een omgeving V van p te vinden is met $\bar{V} \subset U$ en Ind $\bar{V} \setminus V \leq n-1$.

2^{o} Ind X = -1 als X leeg is,
Ind $X \leq n$ als bij iedere gesloten verzameling F en open verzameling U met $F \subset U$ een omgeving V van F te vinden is met $\bar{V} \subset U$ en Ind $\bar{V} \setminus V \leq n-1$.

3^{o} dim $X \leq n$ als bij iedere eindige open overdekking van X er een open verfijning is van orde $\leq n+1$.

Zoals bekend is vallen voor separabel metrische ruimten deze drie begrippen samen.
In het algemeen geldt ind $X \leq$ Ind X en voor normale ruimten dim $X \leq$ Ind X.
Kătetov, Morita, Dowker en Hurewicz bewezen dat voor alle metrische ruimten dim X = Ind X. De ongelijkheid dim $X \leq$ ind X werd voor willekeurige

compacte ruimten door P.S. Alexandrov bewezen en voor willekeurige Lindelöfruimten door Yu.M. Smirnov.

In 1960 bewees Arhangelski dat voor loc. comp. groepen G ind G = dim G. Nog in hetzelfde jaar werd dit resultaat door Pasynkov gegeneraliseerd, die bewees dat voor iedere nevenklassenruimte B van een loc. comp.groep geldt dim B = ind B = Ind B.

Tenslotte werd door Zarelua nog bewezen dat voor iedere eindig dim. gesloten deelverzameling F van een nevenklassenruimte B, dim F = ind F = Ind F.

Met behulp van stelling 2 gaf Skljarenko een nieuw bewijs van de stellingen van Pasynkov en Zarelua.

Lemma 1. Stel $X = A \times B$, waarbij X een Lindelöfruimte is, A een n-dim. ruimte met aftelbare basis en B een 0-dimensionale ruimte. Dan dim X = ind $X = n$.

Bewijs.

Uit de stelling van Smirnov volgt dat dim $X \leq$ ind X. Verder is het duidelijk dat $n \leq$ dim X en met inductie kunnen wij bewijzen dat ind $X \leq n$.

Lemma 2. Stel $p : B \to B_1$ een locaal triviale vezeling, waarbij B_1 een n-dim. loc. comp. ruimte is met aftelbare basis en de vezel M een nuldimensionale compacte ruimte.

Dan dim B = ind B = Ind $B = n$.

Bewijs.

Uit lemma 1 volgt dat dim B = ind $B = n$.

We bewijzen nu met inductie dat Ind $B = n$.

Stel dat de bewering bewezen is voor dim $B_1 \leq n-1$ en stel F een gesloten verzameling in B en U een omgeving van F.

Daar B loc. compact en σ-compact is, kan F worden overdekt door een locaal eindig systeem van open verzamelingen $O_\iota = V_\iota \times W_\iota \subset U$, met V_ι open in B_1, dim $R(V_\iota) \leq n-1$ en W_ι open in M met lege rand.

Daar M compact is, is $\{V_\iota\}$ een locaal eindig systeem in B_1.

Zij $R = \bigcup_\iota R(V_\iota)$.

Dan is R gesloten en dim $R \leq n-1$. Dus $\mathrm{Ind}(p^{-1}R) \leq n$.

Stel $= \bigcup_{\iota} O_{\iota}$.

Dan $R(O) \subset \bigcup_{\iota} R(O_{\iota}) \subset p^{-1}(R)$. Dus Ind $R(O) \leqslant n-1$ en Ind $B \leqslant n$.

Stelling 3.

Stel B de nevenklassenruimte van een loc. comp. groep. Dan dim B = ind B = Ind B.

Bewijs.

Zoals bekend bevat iedere loc. compacte groep een open proj. Liegroep Γ die σ-compact is.

Dan is B de disjuncte som van nevenklassenruimten B^{α} van Γ.

Als B eindig dimensionaal is, dan ook iedere B^{α} eindig dimensionaal en volgens stelling 2 staat iedere B_1^{α} een loc. triviale vezeling toe over een variëteit B_1 met vezel D^{τ}.

Daar Γ α-compact is, is ook B_1^{α} σ-compact en voldoet dus aan het 2^e aftelbaarheidsaxioma.

De bewering van de stelling volgt nu uit lemma 2.

§ 4. Het gewicht van een loc. compacte groep

In 1957 bewees A. Hulanicki dat een loc. comp. groep met $\aleph_1$ elementen metriseerbaar is en dus aan het 1^e aftelbaarheidsaxioma voldoet.

Later generaliseerde hij dit resultaat en bewees dat als een loc. comp. groep G een locaal gewicht $\geqslant \tau$ heeft, dan is de machtigheid van $G \geqslant 2^{\tau}$. Als G compact is en het locale gewicht is gelijk aan τ, dan is de machtigheid van G gelijk aan 2^{τ}.

Stelling 4:

Iedere nevenklassenruimte van een loc. compacte groep is homeomorf met het topologisch product $N \times D^{\tau} \times B_o$, waarbij N een discrete verzameling is, D^{τ} een gegeneraliseerd Cantor discontinuum en B_o een samenh. nevenklassenruimte van een willekeurige proj. Liegroep.

Bewijs.

Zij $B = {}^{G}/H$. G_o de component van de eenheid in G en B_o component van H en B.

Stel φ de natuurlijke afbeelding van G op B.

Dan is het duidelijk dat $G_o H \subset \varphi^{-1} B_o \Rightarrow \overline{G_o H} \subset \varphi^{-1}(B_o)$. Zij nu $C = G/\overline{G_o H}$ en ψ de natuurlijke afbeelding van B op C. Daar C nuldimensionaal is geldt ψB_o = klasse $\overline{G_o H} = e_C$. Dus $\varphi^{-1} B_o \subset (\psi\varphi)^{-1} e_C = \overline{G_o H} \Rightarrow \varphi^{-1} B_o = \overline{G_o H}$.

Zij nu p. $B \rightarrow G/\overline{G_o H}$.

Deze afbeelding is volgens een stelling van Mostert een locaal triviale vezeling met vezel $\overline{G_o H}/H = B_o$.

Daar $G/\overline{G_o H}$ nuldimensionaal is, is deze vezeling een direct product en $B \simeq N \times D^\tau \times B_o$.

Daar B_o samenhangend is, is het ook nevenklassenruimte van iedere open proj. Liegroep bevat in $\overline{G_o H}$.

Stelling 5.

De ruimte van iedere loc. compacte groep G is homeomorf met het topologisch product $N \times D^\tau \times E^n \times G'$, waar E^n een Euclidische ruimte is en G' een maximale samenhangende compacte ondergroep van G.

Bewijs.

Volgens de vorige stelling is $G \simeq N \times D^\tau \times G_o$, waar G_o een samenhangende projectieve Liegroep is. Volgens een stelling van Iwasawa-Malcev is $G_o \cong G' \times E^n$, waar G' een willekeurige maximale samenhangende compacte ondergroep van G_o is.

Dus $G \simeq N \times D^\tau \times E^n \times G'$.

Zoals reeds door A. Weil bewezen heeft iedere compacte eindig dimensionale samenhangende groep een aftelbaar gewicht. Iedere loc. compacte samenhangende eindig dimensionale groep heeft dus een aftelbaar gewicht.

Literatuur

1 P.S. Aleksandrov: Uber die Dimension der bikompakten Räume; Dokl. Akad. Nauk SSSR, 26 (1940), 619-622.

2 A.V. Arhangelskii: On the identity of the dimension ind G and dim G for locally bicompact groups; Soviet Mat. Dokl. 1 (1960), 670-671.

3 C.H. Dowker, W. Hurewicz: Dimension of metric spaces; Fund. Math. 43 (1956), 83-87.

4 E. Hewitt: A note on 0-dimensional compact groups; Fund. Math. 50 (1961), 95-97.

5 A. Hulanicki: On locally compact topological groups of power of continuum; Fund. Math.44 (1957).

6 " " On the topological structure of 0-dimensional topological groups. Fund. Math. 46 (1959), 317-320.

7 " " On cardinal numbers related with locally compact groups. Bull. Acad. Polon. Sci. 6 (1958), 67-70.

8 L.N. Ivanovskii: Over een veronderstelling van P.S. Aleksandrov; Dokl. Akad. Nauk SSSR 123 (1958), 785-786.

9 K. Iwasawa: On some types of topological groups; Annals of Math. 50 (1949), 507-558.

10 M. Katětov: De dimensie van niet-separabele ruimten; Czech. Math. J. 2 (1952), 333-368.

11 V.I. Kuzminov: Over een veronderstelling van Aleksandrov; Dokl. Akad. Nauk SSSR 125 (1959), 727-729.

12 D. Montgomery, L. Zippin: Topological transformation groups; New York - London 1955.

13 K. Morita: Normal families and dimension theory for metric spaces; Math. Ann. 128 (1954), 350-362.

14 P.S. Mostert: Sections in principal fibre spaces; Duke Math. J. 23 (1956), 57-71.

15 B.A. Pasynkov: On reversed spectra and dimensionality; Soviet Mat. Dokl. 2 (1961), 772-775.

16 L.S. Pontrjagin: Topologische Gruppen; Leipzig 1957.

17 E.G. Skljarenko: De topologische structuur van locaal compacte groepen en hun nevenklassenruimten; Mat. Sbornik 60 (1963), 63-88.

18 Yu.M. Smirnov, Enige relaties in de dimensietheorie; Mat. Sbornik 29 (1951), 157-172.

19 A. Weil: L'integration dans les groupes topologiques; Paris (1940).

20 H. Yamabe: On a conjecture of Iwasawa and Gleason; Ann. of Math. 58 (1953), 48-54.

21 H. Yamabe: A generalization of a theorem of Gleason; Ann. of Math. 58 (1953), 351-365.

22 A.V. Zarelua: Equidimensionality and compact extensions; Soviet Math. Dokl. 3 (1962), 800-803.