STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1953-005

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit

11 februari: voordracht door
Prof.dr. H. Bremekamp

Existentiebewijzen

1953

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

11 Februari: voordracht door

Prof. Dr H.Bremekamp

over:

Existentiebewijzen.

U zult bij het vernemen van de titel van mijn voordracht "Existentiebewijzen" misschien gedacht hebben: dat is geen elementair onderwerp; de voordracht hoort in de serie: elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit, niet thuis. Ik vrees, dat U aan het eind van de voordracht zult zeggen: "elementair was het wel, maar van het hogere standpunt heb ik niet veel gemerkt". Inderdaad komen ook bij het elementair onderwijs existentietheorema's wel degelijk te pas. Alleen wordt er weinig aandacht aan besteed; dat was althans zo in de lang vervlogen tijd, dat ik gymnasiast was en ik herinner mij nog levendig, dat het op mij een zonderlinge indruk maakte, dat Kluyver op het algebracollege bij de behandeling (met determinanten) van een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden, toen hij de oplossing al had, nog eens ging bewijzen, dat die oplossing voldoet. Het denkbeeld, dat moet bewezen worden, dat er een oplossing bestaat, was mij niet bijgebracht; ik heb mij dat zelf eigen moeten maken en ik heb de indruk bij het examineren voor K I, dat dat met vele candidaten ook nu nog het geval is. Trouwens ook bij het hoger onderwijs werd in de tijd, dat ik student was, over existentiebewijzen niet gesproken. Wel werden enkele existentiebewijzen gegeven, zoals het reeds genoemde bestaan van de oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen, het bestaan van een wortel van een hogere machtsvergelijking (theorema van d'Alembert), het bestaan van de bepaalde integraal van een continue functie, - merkwaardigerwijze werd het bestaan van een oplossing van een differentiaalvergelijking gewoonlijk niet behandeld - het bestaan van een aantal eenvoudige limieten enz., maar er werd niet aan gedacht, deze dingen als uitingen van eenzelfde streven in het licht te stellen. Het woord existentiebewijs heeft eerst later burgerrecht gekregen. De studenten uit mijn tijd zouden er slechts met moeite een begrip mee verbonden hebben.

Tot dusver heb ik alleen nog voorbeelden aangeroerd, op enkele waarvan ik nog hoop terug te komen, van analytisch karakter. In het wezen der zaak liggen bij de meetkunde de omstandigheden net zo. Als sommigen van U bij het vernemen van de titel van mijn voordracht gedacht hebben: existentiebewijzen, dus een analytisch onderwerp, dan is dat het gevolg van een zekere mode in het wiskunde-onderwijs. Maar zeker ook bij het elementair onderwijs biedt de meetkunde even goed gelegenheid het begrip "existentiebewijs" te berde te brengen als de algebra (dat ik tot dusver naast elkaar plaatste analyse en meetkunde en nu opeens overga op meetkunde en algebra, is natuurlijk alleen een aansluiting aan het gebruik, waarover trouwens nog heel wat uit te weiden zou zijn). Evengoed als in de algebra behoort <u>bewezen</u> te worden, dat een stelsel vergelijkingen onder zekere voorwaarden (waaraan, om het huiselijk te zeggen, doorgaans wel voldaan is) een oplossing heeft, zo moet ook in de meetkunde <u>bewezen</u> worden, dat een werkstuk, waarbij gevraagd wordt uit zekere gegevens een figuur, die voorgeschreven eigenschappen heeft, te construeren, een oplossing (eventueel meerdere oplossingen) heeft. En ik herinner mij uit mijn gymnasiumtijd, dat daaraan meer zorg werd besteed, dan bij de algebra. Er werd ons zorgvuldig ingeprent, dat de oplossing van een werkstuk behoort te bestaan uit vier delen: analyse, constructie, bewijs, discussie. Dat bewijs is dan in feite het existentiebewijs. Weer uit mijn ervaringen bij de K-examens heb ik de indruk, dat dat tegenwoordig wel eens ~~wat~~ minder zorgvuldig behandeld wordt. Ik wil dat toelichten met een voorbeeld uit de stereometrie en ik kies daarvoor de constructie van Apollonius, waarbij dus een bol gevraagd wordt, die aan zekere eisen voldoet. Gewoonlijk zoekt men eerst (in hoofdzaak met behulp van meetkundige plaatsen) het middelpunt van de gevraagde bol. De redeneringen, die daartoe voeren, behoren noodgedwongen te zijn van de volgende aard: "Als er een bol is, die aan de gestelde eisen voldoet, dan moet zijn middelpunt ... enz." Dat zou niet nodig zijn, als het existentiebewijs was voorafgegaan, maar dat doet men doorgaans niet en bij het elementair onderwijs kan men het ook doorgaans niet doen, maar men geeft dan het existentiebewijs door de constructie uit te voeren en dan achteraf te bewijzen, dat de verkregen figuur inderdaad aan de gestelde eisen voldoet. Ik wil deze gang van zaken nog eens aan een concreet voorbeeld demonstreren, maar voordat ik daartoe overga, nog een opmerking. Deze manier van het existentiebewijs te geven, kan de indruk maken van een lapmiddel; het is echter de toepassing van een algemene methode; het is nl. gewoonlijk gemakkelijker, als men het object, waarvan het bestaan moet bewezen worden al heeft, te bewijzen, dat dat object aan de gestelde eisen voldoet, dan zonder dat object te kunnen aanwijzen, het bestaan ervan te bewijzen. Bij het reeds genoemde voorbeeld van een stelsel lineaire vergelijkingen, gaat men dan ook net zo te werk en het zal U geen moeite kosten, voorbeelden te vinden van het afleiden van limieten, waarbij het moeilijke punt is, het bestaan van de limiet te bewijzen en waarbij men daarin het gemakkelijkst slaagt door eerst maar de limiet te berekenen, aannemende dat zij bestaat. De intuïtionist, die het beginsel van het uitgesloten derde verwerpt en dus de overtuigingskracht van een bewijs uit het ongerijmde ontkent, zal van een existentiebewijs zelfs eisen, dat het constructief zij. Ik stip dat hier even aan zonder er verder op in te gaan. Ik zal in het volgende ook enige existentiebewijzen geven, die voor de intuïtionist bewijskracht missen.

Maar nu het voorbeeld van een der constructies van Apollonius. Ik kies het vraagstuk: een bol te construeren, die door drie gegeven punten A, B en C gaat en een gegeven vlak V raakt. We kunnen in elk geval beginnen met de opmerking, dat de oplossing stellig onmogelijk is, als de drie gegeven punten op een rechte liggen, maar ook als ze niet alle drie aan dezelfde kant van het gegeven vlak liggen. Ik zal nu vooreerst de oplossing geven, zoals de K I candidaten het gewoonlijk doen. Het middelpunt van de gevraagde bol moet liggen op de as l van de omgeschreven cirkel van $\triangle$ ABC. Ik zal het dus kunnen bepalen, als ik nog een meetkundige plaats ken. Om die te vinden, ga ik het raakpunt D op het vlak V zoeken. Als P het snijpunt is van BC met V, is $PD^2 = PB.PC$. D ligt dus op de cirkel in V met P tot middelpunt en een bekende straal. (Men kan het middelpunt van de gevraagde bol nu vinden door l te snijden met de omwentelingscylinder, die door deze cirkel bepaald is, wat kan geschieden door l loodrecht op V te projecteren. De candidaten gaan gewoonlijk anders te werk.) Men kan ook het snijpunt Q van CA met V bepalen. D moet ook liggen op de cirkel met Q tot middelpunt en de middenevenredige tussen QA en QC tot straal. De gevonden cirkels snijden elkaar in twee punten D en E, die twee bollen opleveren, die aan de vraag voldoen. (Men kan natuurlijk ook AB verlengen tot die het vlak V snijdt in R en een derde cirkel construeren, waarop het raakpunt moet liggen. Deze drie cirkels gaan door de zelfde twee punten D en E; het bewijs daarvan is zeer eenvoudig, als men eenmaal weet, dat er twee bollen zijn, die aan de vraag voldoen; zolang men dat niet weet, is het niet zo gemakkelijk.) Wij maken nu de constructie van een der bollen af. Het middelpunt is het snijpunt van l met de loodlijn m in D op V. Snijden die elkaar? Het bewijs is natuurlijk weer zeer eenvoudig, als men weet, dat er een bol is, die door A, B, C gaat en in D aan V raakt. Zolang echter het bedoelde existentiebewijs niet gegeven is, is het niet zo eenvoudig. Men kan het gevraagde middelpunt ook vinden, als snijpunt van m met het middelloodvlak van AB. Zij dit punt M, dan is de bol met M tot middelpunt en MA tot straal de gevraagde. Om dat te bewijzen moeten we vooreerst aantonen, dat die bol door B gaat, wat onmiddellijk duidelijk is; verder dat hij door C gaat, dat hij door D gaat en daar aan V raakt; het laatste volgt natuurlijk direct, als men weet, dat hij door D gaat, maar de beide andere punten vindt men niet zo gemakkelijk. Het bewijs gaat wat gemakkelijker, als men de constructie heeft uitgevoerd met behulp van de zoëven genoemde cylinder. Maar het gemakkelijkst gaat het, als, na het punt D gevonden te hebben, men als volgt te werk gaat. Men construeert de bol door de vier punten A, B, C, D (feitelijk komt ook daarbij een existentiebewijs te pas, maar dat is zeer eenvoudig). Er moet dan nog bewezen worden, dat die aan V raakt. Welnu, uit de machttheorie volgt, dat hij aan PD raakt en aan QD, dus aan V.

We moeten ons nog afvragen, of we werkelijk twee punten D en E zullen vinden, dus of de cirkels P en Q elkaar werkelijk snijden. Dat is inderdaad het geval als de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ met de snijlijn van zijn vlak met V geen punt gemeen heeft. Is dan nl. QN de loodlijn uit zijn middelpunt op PQ, dan is $PN < PD$, $QN < QD$, dus $PQ < PD+QD$. Als de cirkel PQ raakt, is er één oplossing, als hij PQ snijdt, geen. Als vlak ABC evenwijdig is aan V, zijn constructie en bewijs eenvoudiger. Er is dan steeds één oplossing.

Ik kom nu nog eens terug op het reeds enige malen genoemde voorbeeld van een stelsel lineaire vergelijkingen.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= p_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= p_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= p_3. \end{aligned}$$

Niet omdat ik de illusie heb U hierover nog iets te kunnen leren, maar om nog eens duidelijk de overeenkomst met het behandelde meetkunde-voorbeeld te doen gevoelen. Ik begin weer zoals doorgaans K I candidaten beginnen. Wij beschouwen de determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

en beperken ons tot het geval, dat deze niet nul is. We hebben dan de bekende betrekkingen

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 \\ 0 &= b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 \\ 0 &= c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 \text{ enz.} \end{aligned}$$

Vermenigvuldigen wij nu de gegeven vergelijkingen achtereenvolgens met A_1, A_2, A_3 en tellen op, dan vinden wij

$$\Delta x = p_1A_1 + p_2A_2 + p_3A_3 = \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = P_a, \qquad x = \frac{P_a}{\Delta}.$$

Evenzo leiden we af

$$\Delta y = p_1B_1 + p_2B_2 + p_3B_3 = P_b, \qquad y = \frac{P_b}{\Delta},$$

en

$$\Delta z = p_1C_1 + p_2C_2 + p_3C_3 = P_c, \qquad z = \frac{P_c}{\Delta}.$$

Vraag ik nu in dit stadium: "wat is nu met deze rekening bewezen", dan komt dikwijls het antwoord: "dat dit de oplossing is". U ziet de overeenkomst met het meetkundevraagstuk. Het antwoord behoort te luiden: "Als er een oplossing is, dan voldoet die ook aan

$$A_1a_1x + A_1b_1y + A_1c_1z = A_1p_1$$
$$A_2a_2x + A_2b_2y + A_2c_2z = A_2p_2$$
$$A_3a_3x + A_3b_3y + A_3c_3z = A_3p_3,$$

dus ook aan $\Delta x = P_a$, evenzo aan $\Delta y = P_b$, $\Delta z = P_c$. Men kan dus wel zeggen: " er is bewezen, dat er geen andere oplossing kan zijn dan $x = \frac{P_a}{\Delta}$, $y = \frac{P_b}{\Delta}$, $z = \frac{P_c}{\Delta}$, maar dat er een oplossing is, is eenvoudig aangenomen". Dat er een oplossing is, bewijst men het eenvoudigst door aan te tonen, dat de gevonden getallen inderdaad voldoen. Par acquit de conscience maak ik het bewijs even af. We bewijzen, dat de gevonden getallen aan de eerste vergelijking voldoen. Dat ze ook aan de beide andere voldoen, volgt daaruit niet, maar het wordt op dezelfde manier bewezen. We moeten dus aantonen:

$$a_1\frac{P_a}{\Delta} + b_1\frac{P_b}{\Delta} + c_1\frac{P_c}{\Delta} = p_1,$$

of

$$a_1P_a + b_1P_b + c_1P_c - p_1\Delta = 0.$$

Dat blijkt door het eerste lid te schrijven in de gedaante van een determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & p_3 \end{vmatrix}.$$

Wij zullen ons nu verder tot de algebra en analyse bepalen en dan vragen, waar komt bij het elementair onderwijs weer een existentiestelling te pas. Het antwoord is: bij de vierkantsvergelijking. Iedere vierkantsvergelijking heeft twee wortels. Om die stelling zo te kunnen uitspreken, denken we ons te beschikken over het tweedimensionale getallencontinuum, het complexe vlak. De stelling is een bijzonder geval van het theorema van d'Alembert. Iedere n^{de} machtsvergelijking heeft een wortel. Het is wel bekend, dat daaruit zeer eenvoudig volgt, dat iedere n^{de} machtsvergelijking n wortels heeft; de moeilijkheid over het tellen der meervoudige wortels ga ik stilzwijgend voorbij: ze ligt niet op het terrein, dat ik nu gekozen heb. Wij zullen de stelling zo formuleren: Voor een willekeurige veelterm $P_n(z)$ bestaat er in het complexe vlak een getal, waar de veelterm de waarde 0 aanneemt. Het karakter van existentietheorema komt daarbij duidelijk uit. De stelling heeft een analytisch karakter, analytische bewijzen liggen dan ook het meest voor de hand en zijn ook de oudst bekende. Zeer eenvoudig gaat het met de integraalstelling van Cauchy, $\int_C f(z)dz = 0$, als f(z) binnen de gesloten kromme C geen enkele singulariteit heeft. Beschouw nu $\int \frac{P_n'(z)}{P_n(z)}\,dz$. De integrand heeft geen andere singulariteiten, dan eventuele nulpunten van $P_n(z)$. Als integratieweg kiezen we een cirkel om de oorsprong met straal R, we kunnen daarbij R zo groot kiezen, als we willen. Wij vinden

$$\frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \frac{n}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots \quad .$$

Als R groot genoeg is, is de reeks overal op de cirkel uniform convergent. Voeren we in de integraal in $z = Re^{i\vartheta}$, dan komt er

$$\int \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} dz = \int_0^{2\pi} (n + \frac{c_2}{R} e^{i\vartheta} + \frac{c_3}{R^2} e^{2i\vartheta} + \dots) i d\vartheta = 2n\pi i.$$

Uit het feit, dat de integraal niet nul is, volgt, dat de integrand minstens een singulier punt en dus $P_n(z)$ minstens een nulpunt heeft. Door het bewijs een beetje anders in te richten, vinden we ineens, dat het aantal nulpunten juist n bedraagt. Immers, we kunnen de weg zo vervormen, dat hij alle nulpunten buiten sluit, dan vinden we, dat de oorspronkelijke integraal gelijk is aan de som van een aantal integralen over wegen, die elk één nulpunt insluiten en die we gemakkelijk kunnen berekenen door daarvoor cirkels te nemen, waarvan we dan de straal tot nul doen naderen. Feitelijk komt dat dus daarop neer, dat we i.p.v. de integraalstelling van Cauchy de residuenstelling gebruiken. Voor het residu in een enkelvoudig nulpunt α van $P_n(z)$ vinden we

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi(z)+(z-a)\varphi'(z)}{(z-a)\varphi(z)} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\vartheta = 1.$$

Daar de som der residuen n is, zijn er dus juist n wortels. De meervoudige wortels geven hierbij weinig moeite. Het residu in k-voudige wortel is k. De stelling blijft dus gelden als we meervoudige wortels met hun eigen veelvuldigheid tellen.

Bij de gewone gang van het onderwijs worden de hier toegepaste stellingen zo lang na het theorema van d'Alembert behandeld, dat U zich allicht zult afvragen: is bij de afleiding dier stellingen nergens het theorema, dat we bewijzen wilden, toegepast? U zult zich echter gemakkelijk kunnen overtuigen, dat dat niet het geval is. Ik geef nu een ander bewijs, waarbij slechts hulpmiddelen worden gebruikt, die gewoonlijk bij het onderwijs in ongeveer hetzelfde stadium worden behandeld als het theorema van d'Alembert zelf. In de eerste plaats kunnen we R zo bepalen, dat voor $|z| \geq R$, $|P_n(z)| > |P_n(0)|$ is. Beschouwen we nu de afgesloten verzameling van waarden z, waarvoor $|z| \leq R$. Op deze verzameling is $|P_n(z)|$ een continue naar beneden begrensde functie en heeft dus een minimum, dat voor een of meer waarden van z, b.v. voor $z = z_0$, die niet op de rand ligt, wordt aangenomen. Wij willen nu bewijzen, dat de onderstelling

$|P_n(z)| > 0$ tot een tegenspraak voert. Wij beschouwen daartoe waarden van z in de omgeving van z_o, $z = z_o+h$ en schrijven

$$P_n(z_o+h) = P_n(z_o)+ hP_n'(z_o)+ \frac{h^2}{2!} P_n''(z_o)+\ldots \frac{h^n}{n!} P_n^{(n)}(z_o),$$

dus daar we veronderstellen $P_n(z_o) \neq 0$

$$\frac{P_n(z_o+h)}{P_n(z_o)} = 1+h \frac{P_n'(z_o)}{P_n(z_o)} + \frac{h^2}{2!} \frac{P_n''(z_o)}{P_n(z_o)} + \ldots + \frac{h^n}{n!} \frac{P_n^{(n)}(z_o)}{P_n(z_o)}.$$

Zij nu

$$\frac{P_n^{(k)}(z_o)}{P_n(z_o)} = \alpha_k e^{i\varphi_k} \qquad (k = 1,2,\ldots,n)$$

en neem

$$h = \rho e^{i(\pi - \varphi_1)},$$

dan is

$$\frac{P_n(z_o+h)}{P_n(z_o)} = 1 - \alpha_1\rho + \frac{1}{2!}\alpha_2\rho^2 e^{i\psi_2} \ldots + \frac{1}{n!}\alpha_n\rho^n e^{i\psi_n},$$

$$\psi_h = k(\pi - \varphi_1) + \varphi_k,$$

en dus

$$\left|\frac{P_n(z_o+h)}{P_n(z_o)}\right| \leq |1-\alpha_1\rho| + \frac{1}{2!}\alpha_2\rho^2 + \ldots \frac{1}{n!}\alpha_n\rho^n.$$

Wij kunnen dus als $\alpha_1 \neq 0$ ρ zo klein kiezen, dat

$$\left|\frac{P_n(z_o+h)}{P_n(z_o)}\right| < 1, \quad \text{dus} \quad |P_n(z_o+h)| < |P_n(z_o)|$$

in strijd met de onderstelling, dat voor $z = z_o$ $|P_n(z)|$ zijn minimum bereikt.

Wij hebben ondersteld $\alpha_1 \neq 0$. Om het bewijs volledig te maken, beschouwen we de kleinste index k, waarvoor $P_n^{(k)}(z) \neq 0$. Zo'n index is er, anders was $P_n(z_o+h) = P_n(z_o)$ dus constant. Wij kiezen nu

$$h = \rho e^{i\frac{\pi - \varphi_k}{k}},$$

en vinden

$$\frac{P_n(z_o+h)}{P_n(z_o)} = 1 - \frac{1}{k!}\alpha_k\rho^k + \frac{1}{(k+1)!}\alpha_{k+1}\rho^{k+1} e^{i\psi_{k+1}} + \ldots$$

$$\ldots \frac{1}{n!}\alpha_n\rho^n e^{i\psi_n}, \qquad \psi_h = \frac{h}{k}(\pi - \varphi_k)+\varphi_h.$$

Verder verloopt het bewijs als in het vorige.

Ik voeg nog een ander bewijs toe, dat van Clifford afkomstig is, om straks over de hulpmiddelen, die daarbij gebruikt zijn, nog iets op te merken. Daarbij gaan we er van uit, dat voor een vergelijking van oneven graad met reële coëfficiënten onmiddellijk duidelijk is, dat er tenminste één (reële) wortel bestaat. Wij geven nu het bewijs vooreerst voor vergelijkingen met reële coëfficiënten door volledige inductie naar het aantal factoren 2 in n (de graad der vergelijking). Zij $n = 2\nu$ en

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

dan is, als $x = y+h$

$$P_n(x) = y^n + b_1y^{n-1} + \dots + b_n, \text{ waarbij } b_k = \frac{1}{(n-k)!} P_n^{(n-k)}(h)$$

een veelterm van de k^{de} graad in h is. Wij schrijven nu

$$P_n(x) = y^{2\nu} + b_2y^{2\nu-2} + \dots + b_{2\nu} + y(b_1y^{2\nu-2}+b_3y^{2\nu-4}+\dots+b_{2\nu-1}) =$$

$$= \Phi_\nu(y^2) + y\,\Psi_\nu(y^2).$$

Beschouwen wij nu de resultante van

$$\Phi_\nu(x) = x^\nu + b_2x^{\nu-1} + \dots + b_{2\nu},$$

en

$$\Psi_\nu(x) = b_1x^{\nu-1} + b_3x^{\nu-2} + \dots + b_{2\nu-1}.$$

Wij schrijven die in de vorm van Sylvester

$$R(h) = \begin{vmatrix} 1 & b_2 & b_4 \dots & & & b_{2\nu} & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & 1 & b_2 \dots & & & b_{2\nu-2} & b_{2\nu} & 0 & \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & & & b_{2\nu-4} & b_{2\nu-2} & b_{2\nu} & \dots 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_2 & b_4 & & & \dots b_{2\nu} \\ b_1 & b_3 & \dots & b_{2\nu-3} & b_{2\nu-1} & 0 & 0 & & \dots 0 \\ 0 & b_1 & \dots & b_{2\nu-5} & b_{2\nu-3} & b_{2\nu-1} & 0 & & \dots 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 & b_3 & & & \dots b_{2\nu-1} \end{vmatrix}$$

Alle termen van de determinant zijn veeltermen in h, zoals welbekend van dezelfde graad. Om die graad te vinden hebben we slechts op de diagonaalterm te letten. Hij is $\nu(2\nu-1)$. R(h) is dus een veelterm in h van de graad $\nu(2\nu-1)$, als tenminste de coëfficiënt van $h^{\nu(2\nu-1)}$ niet nul is. Wij verkrijgen die coëfficiënt door in R(h) iedere b_k te vervangen door zijn eerste term $\beta_k h^k$ en dan h=1 te zetten. Die eerste term is afkomstig van de term z^n in $P_n(z)$. β_k is dus datgene waarin b_k overgaat als in $P_n(z)$ $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. De gezochte coëfficiënt is dus datgene, waarin R(h) overgaat voor $P_n(z) = z^n$ en h=1. Het is de resultante der veeltermen $\Phi_{\nu,0}$ en $\Psi_{\nu-1,0}$, die we in dat geval vinden. Wanneer die resultante 0 was, zouden $\Phi_{\nu,0}$ en $\Psi_{\nu-1,0}$ een gemeenschappelijke factor hebben. Nu is in dat geval

$$P_n(y+1) = (y+1)^n = \Phi_{\nu,0}(y^2) + y\,\Psi_{\nu-1,0}(y^2)$$

en

$$P_n(y-1) = (y-1)^n = \Phi_{\nu,0}(y^2) - y\,\Psi_{\nu-1,0}(y^2).$$

Hadden $\Phi_{\nu,0}(y^2)$ en $\Psi_{\nu-1,0}(y^2)$ een gemeenschappelijke factor, dan zou die ook deelbaar zijn op $(y+1)^n$ en op $(y-1)^n$, maar die hebben klaarblijkelijk geen factor gemeen. De coëfficiënt van $h^{\nu(2\nu-1)}$ in R(h) is dus niet 0 en R(h) is inderdaad een veelterm van de graad $\nu(2\nu-1)$.

Wij beginnen nu met het geval, dat x slechts 1 factor 2 heeft, dus ν oneven is, dan is ook $\nu(2\nu-1)$ oneven. De vergelijking $R(h) = 0$ is dus een vergelijking van oneven graad met reële coëfficiënten en heeft dus stellig een (reële) wortel h_1. Voor die waarde van h is er een waarde van y^2, die $\Phi_\nu(y^2)$ en $\Psi_{\nu-1}(y^2)$ tegelijk 0 maakt. Nemen wij nu voor y een der twee complexe (eventueel reële) waarden, die daaraan beantwoorden $y=y_1$, dan volgt, dat voor $x = y_1+h$

$$P_n(x) = \Phi_\nu(y_1^2) + y_1\Psi_{\nu-1}(y_1^2) = 0.$$

De vergelijking $P_n(x) = 0$ heeft dus stellig een wortel. Nemen wij nu aan, dat we de stelling bewezen hebben voor het geval, dat n k factoren 2 heeft, dan hebben we aan te tonen, dat ze geldt als n k+1 factoren 2 heeft. Stellen we weer $n = 2\nu$, dan heeft ν nog k factoren 2, dus $\nu(2\nu-1)$ de graad van R(h) ook, dus heeft $R(h) = 0$ volgens de inductieonderstelling een wortel. De verdere redenering is zoals in het vorige.

Wij zullen ons nu nog vrij maken van de onderstelling, dat de coëfficiënten reëel zijn. Zij dus nu $P_n(z)$ een veelterm met complexe coëfficiënten en $\overline{P}_n(z)$ de veelterm, waarvan de coëfficiënten de toegevoegd complexe zijn van die van $P_n(z)$, dan is $P_n(z)\overline{P}_n(z)$ een veelterm met reële coëfficiënten, de vergelijking $P_n(z)\overline{P}_n(z) = 0$ heeft dus volgens het voorgaande een wortel. Zij deze $\alpha + i\beta$, dan moet voor $z = \alpha + i\beta$ of $P_n(z)$ of $\overline{P}_n(z)$ (of beide) gelijk 0 zijn. Is $\overline{P}_n(z) = 0$ voor $z = \alpha + i\beta$, dan is $P_n(z) = 0$ voor $z = \alpha - i\beta$. $P_n(z) = 0$ heeft dus in ieder geval een wortel. Het bovenstaande bewijs is opgenomen in het bekende leerboek van Cesaro met de opmerking, dat het het voordeel heeft zuiver algebraisch te zijn. Dat zit natuurlijk zo, dat men in de nog niet zo ver achter ons liggende tijd van Cesaro andere opvattingen had van zuiver algebraisch dan tegenwoordig. Het bewijs berust immers op de stelling, dat een vergelijking van oneven graad met reële coëfficiënten stellig een wortel heeft, maar die bewijst men met continuïteitsoverwegingen, die thuis horen in de analyse. Men heeft in later tijd wel de stelling met algebraische hulpmiddelen bewezen. Dat gelukt dan door de stelling eerst in een andere vorm te brengen (zie v.d. Corput, scriptum 2). Men bewijst b.v.: als F(x) een polynoom is, waarvan de coëfficiënten tot een commutatief lichaam L behoren en F(x) in L irreducibel is, dan kan men een algebraische commutatieve uitbreiding van L construeren, die een element a bevat, zo dat F(a) = = 0. Feitelijk bewijst men dus een andere stelling. Men kan er nog wel het karakter van een existentietheorema aan toe kennen, men moet dan echter opmerken, dat men niet bewijst het bestaan van een getal, maar het bestaan van een lichaam, dat zekere eigenschap heeft. Ik zal daar niet verder op ingaan. Alleen nog een opmerking. Als men uitgaat van het lichaam der rationale getallen, kan men zich tot aftelbare lichamen beperken, terwijl men bij analytische bewijzen het continuum voorop stelt.

Ik was tot deze beschouwingen geraakt door de opmerking, dat men bij het elementair onderwijs existentiestellingen ontmoet in de theorie der vierkantsvergelijking. Het spreekt vanzelf, dat ik geen der behandelde bewijzen voor het M.O. zou willen aanbevelen. Toch wil ik nog wel spreken over de vraag, hoe men te werk moet gaan, als men (voorlopig) niet verder wil gaan, dan de vierkantsvergelijking. Stellen we ons op het standpunt, dat men begint met te beschikken alleen over rationale reële getallen, wat met de praktijk overeenkomt, als men het bepalen van de vierkantswortel uit een positief getal beschouwt, als het oplossen van een bepaald soort vierkantsvergelijking. Het is duidelijk, dat men dan vooreerst de irrationale en de complexe getallen moet invoeren en het is uit didactisch oogpunt gewenst, dat in de genoemde volgorde te doen. Het behoort niet tot mijn onderwerp te spreken over de mate van strengheid, waarmee men dat bij het middelbaar onderwijs zal moeten doen. Ik weet natuurlijk, dat in leraarskringen over een mathematisch verantwoorde invoering van het onmeetbare getal veel gesproken en veel gestreden is. Ik voor mij geloof, dat dat voor leerlingen der middelbare school te moeilijk is en dat men zal moeten volstaan met op de een of andere manier een beroep te doen op het intuïtief aanwezige begrip der continuïteit. Wel kan men met behulp van tiendelige breuken doen gevoelen, dat andere getallen dan gehele getallen en meetbare breuken denkbaar zijn. Dat er onder die getallen een is, dat gelijk is aan $\sqrt{2}$ gaat er bij een leerling, die al wat met grafische voorstellingen heeft omgegaan, wel in door de opmerking, dat $y = x^2-2$, negatief voor $x=1$ en positief voor $x=2$, daartussen ergens de waarde 0 moet aannemen. Natuurlijk kan men er wel op wijzen, dat we hier met een bijzonder geval van een algemene stelling te doen hebben en dat een bewijs achterwege gelaten wordt, omdat het te veel tijd en inspanning zou kosten. Aan eisen van mathematische strengheid voldoet deze manier van behandelen natuurlijk niet. Ik wil er nu nog over spreken, hoe men na invoering der irrationale getallen bewijst, dat de vergelijking $x^2= 2$ een oplossing heeft. De meest gebruikelijke en waarschijnlijk ook oudste manier om de irrationale getallen in te voeren, is die van Dedekind. Wij denken ons de rationale getallen verdeeld in twee klassen (a) en (A) zo, dat ieder getal in een der klassen valt, elk der beide klassen minstens een getal bevat, en als a een willekeurig getal van (a) is en A een willekeurig getal van (A), steeds $A > a$. Als dan een getal A_1 tot (A) behoort, behoort ieder getal $> A_1$ ook tot (A); als een getal a_1 tot (a) behoort, behoort ieder kleiner getal ook tot (a). (a) heeft dus geen kleinste, (A) geen grootste getal. Vragen we ons nu af, of (a) een grootste en of (A) een kleinste getal heeft, dan zijn er drie gevallen mogelijk:

1^o. er is in (a) een getal g, dat groter is dan alle andere getallen van (a),

2^o. er is in (A) een getal k, dat kleiner is dan alle andere getallen van (A),

3^o. noch g noch k bestaat.

Het is niet mogelijk, dat zowel g als k bestaat, want dan was $k > g$ en er zouden tussen g en k getallen liggen (b.v. $\frac{1}{2}(g+k)$), die in geen der beide klassen zouden liggen. Dat het geval 3^o mogelijk is, ziet men aan verschillende voorbeelden. Men kan b.v. in (A) plaatsen alle positieve getallen, waarvan het kwadraat > 2 is en in (a) alle positieve getallen, waarvan het kwadraat < 2 is, het getal 0 en alle negatieve getallen. Dat de klasse (A) nu geen kleinste getal bevat, zien we b.v. door de tiendelige breuken te beschouwen, die de algorithmus der worteltrekking oplevert:

$$a_1 = 1{,}4 \quad a_2 = 1{,}41 \quad a_3 = 1{,}414 \quad a_4 = 1{,}4142\ldots$$
$$A_1 = 1{,}5 \quad A_2 = 1{,}42 \quad A_3 = 1{,}415 \quad A_4 = 1{,}4143\ldots$$

Daarbij is $a_n^2 < 2$, $A_n^2 > 2$, dus $A_n^2 - 2 < A_n^2 - a_n^2 = (A_n-a_n)(A_n+a_n) < \frac{1}{10^n}\, 3$. Wij bewijzen nu gemakkelijk, dat de onderstelling, dat de klasse (A) een kleinste getal k zou bevatten tot een tegenspraak voert. Beschouwen we nl. k^2-2, dan kunnen we een waarde van n bepalen zo, dat $\frac{3}{10^n} < k^2-2$, voor die waarde van n is $A_n^2 - 2 < k^2 - 2$, waaruit $A_n < k$ en A_n behoort ook tot de klasse (A). Evenzo bewijzen we, dat de klasse (a) geen grootste getal heeft. In het geval 3^o geeft deze verdeling in klassen een snede in de rij der rationale getallen en deze definiëren we nu als een nieuw getal, irrationaal getal. In het zo gedefinieerde stelsel kunnen we de rationale getallen opnemen door in geval 1^o aan de verdeling in de klassen (a) en (A) het getal g, in geval 2^o het getal k toe te voegen. (Ook kan men de verdeling altijd zo maken, dat het bedoelde rationale getal in (a) komt.) Om nu met de zo ingevoerde getallen te kunnen rekenen (en dat is natuurlijk nodig, als we b.v. willen bewijzen, dat een van die getallen aan een zekere algebraische vergelijking voldoet), moeten we voor die getallen de begrippen $=$, $>$ en $<$ definiëren en verder de hoofdbewerkingen . Van de hoofdbewerkingen behoeven we alleen de optelling en de vermenigvuldiging opnieuw te definiëren (voor de aftrekking en de deling blijven de definities als omgekeerde bewerkingen gelden). De manier waarop we die definities geven, is vrij willekeurig, maar we zullen er de eis aan stellen, dat de gewone eigenschappen van optelling en vermenigvuldiging blijven gelden en dat ze, toegepast op rationale getallen in de reeds bekende bewerkingen met die getallen overgaan.

We zullen in het volgende een irrationaal getal met een griekse letter aanwijzen, de getallen uit de bijbehorende benedenklasse met de overeenkomstige kleine latijnse letter (eventueel met index), die uit de bovenklasse evenzo met de hoofdletter. De klasse zelf wijzen we aan door zo'n letter tussen haakjes. We merken nog op, dat wanneer we de rationale getallen van een interval in twee klassen verdeeld hebben, die aan de bovengenoemde eisen voldoen, daaruit onmiddellijk een verdeling van all rationale getallen is af te leiden en dus ook een irrationaal getal bepaald is.

Wij noemen nu twee getallen aan elkaar gelijk, als ze door dezelfde klasse-indeling bepaald zijn. $\alpha = \beta$, als (a) = (b) en (A) = (B). Elk van deze beide eisen heeft de andere tot gevolg en is dus voor de bepaling voldoende. We noemen $\alpha > \beta$ als (a) en (B) getallen gemeen hebben. Voldoende is, als ze een getal gemeen hebben. Daaruit volgt, dat er oneindig veel zijn. Zij nl. r zo'n getal, dan bevat (a), omdat het geen grootste getal heeft, getallen groter dan r en die behoren ook tot (B). Zij s zo'n getal. Tussen r en s liggen oneindig veel rationale getallen, immers voor iedere gehele positieve x en y is $r < \frac{rx+sy}{x+y} < s$ en al die getallen behoren tot (a) en tot (B). Het is gemakkelijk te zien, welke wijzigingen wij moeten aanbrengen, als α of β of beide rationaal zijn. In het bijzonder noemen we een getal α positief, als $\alpha > 0$, dus als 0 tot de klasse (a) behoort en negatief, als $\alpha < 0$, dus als 0 tot (A) behoort. Het tegengestelde van α is het getal bepaald door de klassen (-A) en (-a). Het omgekeerde van een positief getal α, dat bepaald is door de positieve rationale getallen te verdelen in de klassen (a) en (A), is het getal, dat bepaald is door de klasse-indeling $(\frac{1}{A})$ en $(\frac{1}{a})$. Het omgekeerde van een negatief getal $-\alpha$ is het getal $-\frac{1}{\alpha}$. Het is duidelijk, dat door deze definities, zowel het tegengestelde als het omgekeerde (met uitzondering van het omgekeerde van 0) ondubbelzinnig bepaald is.

Onder de som van twee getallen α en β verstaan we het getal, dat bepaald is door de klasse-indeling, die we verkrijgen door in de benedenklasse alle getallen a+b, in de bovenklasse alle andere getallen te plaatsen. Het is duidelijk, dat dat een klasse-indeling is, zoals in het vorige bedoeld, immers er blijft geen getal buiten de verdeling, geen der beide klassen is leeg en ieder getal van de bovenklasse is groter dan een willekeurig getal van de benedenklasse, want een getal, dat kleiner is dan enig getal a+b behoort ook tot de benedenklasse, want a+b-k is de som van a en (b-k), die tot (a) en (b) behoren. Het is duidelijk, dat voor de op deze wijze bepaalde som de commutatieve en de associatieve eigenschap gelden. Verder dat de som van twee tegengestelde getallen 0 is.

Voor de definitie van product beperken we ons eerst tot positieve getallen en definiëren die door een klasse-indeling der positieve rationale getallen. Onder het product $\alpha\beta$ verstaan we het getal, dat bepaald is door de klasse-indeling, waarbij in de benedenklasse de getallen ab, in de bovenklasse alle andere getallen komen. Ook hier overtuigen we ons gemakkelijk, dat we inderdaad met een klasse-indeling zoals bovenbedoeld te doen hebben. Het product van twee negatieve getallen $-\alpha$ en $-\beta$ definiëren we als $\alpha\beta$, het product van $-\alpha$ en β en α en $-\beta$ als $-\alpha\beta$. Het is weer eenvoudig te bewijzen, dat de commutatieve wet en de associatieve wet gelden en de distributieve wet ten opzichte van de optelling. Als we nu op deze wijze de irrationale getallen hebben ingevoerd, kunnen we bewijzen, dat de vergelijking $x^2-2 = 0$ een positieve en dus volgens de definitie van product ook een negatieve wortel heeft.

De klasse-indeling der positieve getallen, waarbij in de bovenklasse komen alle getallen, waarvan het kwadraat > 2, en in de benedenklasse alle getallen, waarvan het kwadraat < 2, bepaalt een getal γ. Wij zullen nu bewijzen, dat dat aan $x^2-2 = 0$ voldoet door aan te tonen, dat $\gamma^2-2 > 0$ en evenzo $\gamma^2-2 < 0$ tot een tegenspraak voert. Was $\gamma^2-2 = a > 0$, dan komen we tot een tegenspraak door een positieve ε te bepalen zo, dat $\gamma-\varepsilon$, dat in de benedenklasse ligt, oplevert $(\gamma-\varepsilon)^2 > 2$. Aan $\gamma^2-2\varepsilon\gamma+\varepsilon^2 > 2 = \gamma^2-a$ voldoen we door te zorgen, dat $-2\varepsilon\gamma > -a$ dus $\varepsilon < \frac{a}{2\gamma^2}$. Was $\gamma^2-2 = -b < 0$, dan bepalen we een positieve ε zo, dat $(\gamma+\varepsilon)^2 < 2$, dus $\gamma^2+2\varepsilon\gamma+\varepsilon^2 < \gamma^2+b$, $[\varepsilon(2\gamma+\varepsilon) < b$, dus als $\varepsilon < 1$, $\varepsilon(2\gamma+1) < b$ $\varepsilon < \frac{b}{2\gamma+1}]$.

Het bewijs, dat de vergelijking $ax^2+bx+c = 0$, waarbij $b^2-4ac \geq 0$ twee wortels heeft, geeft nu geen moeite meer. Voor het geval $b^2-4ac < 0$ moeten we eerst de complexe getallen invoeren. Gewoonlijk geeft dat minder moeite, dan het invoeren van de irrationale getallen.

Ik kom nu nog tot een andere groep van existentiestellingen in de elementaire wiskunde nl. die, waarbij het bestaan van een limiet bewezen moet worden. We hebben ook hier te doen met twee probleemstellingen, die nauw samenhangen:

1°. het bestaan van de limiet te bewijzen,

2°. de limiet te vinden.

Soms kan men, aannemende, dat de limiet bestaat, deze vrij gemakkelijk vinden en dan achteraf bewijzen, dat het gevonden getal inderdaad de gevraagde limiet is. In andere gevallen is het gemakkelijker eerst het bestaan van de limiet te bewijzen en die vervolgens, gewapend met de wetenschap, dat hij er is, te berekenen.

Ook bij deze beschouwingen moet men eerst de irrationale getallen hebben ingevoerd. Ik zal mij vooreerst beperken tot reële getallen en tot de limiet van een variant. De hoofdstelling is dan het z.g. convergentieprincipe van Cauchy. De rij $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ heeft een limiet, als men bij willekeurig gegeven positieve ε een getal N kan vinden, zodanig, dat voor $n > N$ en $m > N$ geldt $|a_n-a_m| < \varepsilon$ en deze voorwaarde is niet alleen voldoende, maar ook nodig (het bewijs van het laatste is het eenvoudigst).

Voordat ik tot het bewijs overga, bewijs ik een eenvoudiger stelling, het convergentieprincipe voor monotone rijen. Als de termen van een monotoon niet dalende rij beneden een bepaalde grens blijven, naderen ze tot een limiet. Analoog voor een monotoon niet stijgende rij. Ik zou willen aanbevelen in het beginstadium van het onderwijs deze stelling, waarmee men in vele gevallen uitkomt, zonder bewijs voorop te stellen.

Het bewijs eist enige zorg doordat de getallen der gegeven rij ook wel irrationaal kunnen zijn. Gegeven: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \ldots < P$. Te bewijzen: er bestaat een getal α zo, dat bij willekeurig gegeven positieve ε een getal N te vinden is zodanig, dat voor $n > N$ geldt $|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon$.

Wij bewijzen het bestaan van zo'n getal door het aan te wijzen met behulp van een verdeling der rationale getallen in twee klassen. Voor ieder rationaal getal k geldt een van tweeën, òf er is in de rij een getal $\geq k$, òf alle termen zijn $< k$. Wij plaatsen nu in de benedenklasse (a) alle getallen, waarvoor het eerste geldt, in de bovenklasse (A) alle getallen, waarvoor het tweede geldt. Het is weer gemakkelijk in te zien, dat deze verdeling in klassen aan de eisen van Dedekind voldoet. Zij bepaalt dus een getal α. Wij willen bewijzen, dat dat de gevraagde limiet is. Alle rationale getallen $> \alpha$ liggen in klasse (A) en zijn dus groter dan elk getal α_n, maar dat geldt ook voor alle irrationale getallen groter dan α. Zij nl. β zo'n getal, dan liggen tussen β en α rationale getallen en die zijn, omdat ze in (A) liggen groter dan iedere α_n dus β ook. Geen der termen α_n kan dus een rationaal noch een irrationaal getal zijn $> \alpha$. Wij hebben dus $\alpha > \alpha_n$ voor iedere n, tenzij van zeker rangnummer af in het gegeven steeds het =teken geldt, maar in dat laatste geval is de stelling zonder meer duidelijk. Beschouwen wij nu $\alpha - \varepsilon$, tussen α en $\alpha - \varepsilon$ liggen rationale getallen en die behoren tot (a). Er is dus een zekere N, waarvoor α_N boven zo'n rationaal getal ligt, dus ook boven $\alpha - \varepsilon$. Wij hebben dus voor $n > N$ $\alpha_n > \alpha_N > \alpha - \varepsilon$ en $\alpha_n < \alpha$, dus $\alpha > \alpha_n > \alpha - \varepsilon$, $|\alpha - \alpha_n| < \varepsilon$, wat we bewijzen wilden.

Ik ga nu over tot het bewijs van de algemene stelling van Cauchy. Ik zal mij daarbij beperken tot de beschouwing van een begrensde getallenrij en bewijs eerst het bestaan van een bovenste en een benedenste grens. Dat gaat met een bekende methode. Alle getallen α_n liggen in het interval van b tot B. Wij bepalen nu het getal $\frac{1}{2}(b+B)$, dat het interval in twee gelijke delen verdeelt. Een van deze delen of beide bevatten oneindig veel der getallen α_n, het bovenste interval, waarvoor dat geldt, noemen we b_1B_1, dus $b_1 \geq b$, $B_1 \leq B$ (waarbij niet in beide tegelijk het teken = kan gelden). Wij bepalen nu $\frac{1}{2}(b_1+B_1)$, dat het interval weer in twee gelijke delen verdeelt, die weer een van beide of beide oneindig veel der getallen α_n bevatten; het bovenste interval waarvoor dat geldt, noemen we b_2B_2, waarbij $b_2 \geq b_1$, $B_2 \leq B_1$ enz., dan liggen dus voor iedere n in b_nB_n oneindig veel der getallen α_n, maar boven B_n hoogstens een eindig aantal. De getallen $b_1, b_2, \ldots$ vormen een monotoon stijgende rij en naderen dus volgens de vorige stelling tot een limiet G, evenzo naderen $B_1, B_2, \ldots$ tot een limiet en deze limieten moeten gelijk zijn, daar $B_n - b_n = \frac{B-b}{2^n}$. Het getal G heeft dus de eigenschap, dat bij willekeurige ε oneindig veel getallen α_n liggen tussen $G - \varepsilon$ en $G + \varepsilon$, maar slechts een eindig aantal boven $G + \varepsilon$, want we kunnen een n aanwijzen, zo dat $G - \varepsilon < b_n < B_n < G + \varepsilon$. Het zo bepaalde getal G, noemen we de bovenste grens. Evenzo bewijzen we het bestaan van de onderste grens g.

Wij gaan nu over tot het bewijs van het convergentieprincipe van Cauchy. Voor het bestaan van een limiet der begrensde getallenrij $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ is nodig en voldoende, dat men bij willekeurig gegeven positieve ε een getal N kan vinden zodanig, dat voor $n > N$, $m > N$ geldt $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$. Dat de voorwaarde nodig is, is zeer eenvoudig, immers als $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha$, kunnen we N vinden zodat voor $\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{m} > N$, $|\alpha_n - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon$ en $|\alpha_m - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon$ en dan is ook $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$. Is aan de voorwaarde voor iedere positieve ε voldaan, dan kunnen we, als ε eenmaal vast ligt, N vinden zodat voor $n > N$, $m > N$, $|\alpha_n - \alpha_m| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Volgens de zo juist bewezen stelling heeft de rij α_n een bovenste grens G, zodat oneindig veel α_n's tussen $G-\frac{1}{3}\varepsilon$ en $G+\frac{1}{3}\varepsilon$ vallen. Wij kunnen dus een p kiezen $> N$ zodat α_p in dat interval ligt, dan is voor $n > N$, $m > N$

$$|\alpha_n-\alpha_m| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$
$$|\alpha_m-\alpha_p| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$
$$|\alpha_p-G| < \tfrac{1}{3}\varepsilon,$$

dus $|\alpha_n-G| < \varepsilon$, voor iedere $n > N$. Het getal G blijkt dus de bedoelde limiet α te zijn. Wij hadden het bewijs ook kunnen geven met behulp van de onderste grens g, waarbij in dit geval ook blijkt $G = g$. Het kost niet veel moeite de overeenkomstige stelling voor een complexe variant te bewijzen.

Ik wil besluiten met enige opmerkingen van algemene aard. Dat de laatste voorbeelden zoveel meer werk meebrengen dan de eerste, ligt daarin, dat de invoering van onmeetbare getallen daar nodig was. In het lichaam der rationale getallen gelden de behandelde existentietheorema's niet. Bij het theorema van d'Alembert heb ik er reeds op gewezen, dat men de verzameling, waarvan men wil bewijzen, dat ze een element bevat, dat zekere voorgeschreven eigenschappen heeft, van tevoren behoort aan te wijzen. Als het om getallen gaat, zal dat doorgaans het complexe vlak zijn. Maar dat behoeft a priori volstrekt niet en men geraakt tot een nieuwe probleemstelling door juist naar die verzameling, waaraan men eventueel nog verdere eisen kan opleggen, te vragen.

In het voorbeeld van het stelsel lineaire vergelijkingen konden de coëfficiënten onmeetbare (eventueel ook complexe) getallen zijn. Dat geval kan men natuurlijk niet behandelen zonder eerst die nieuwe getallen te hebben ingevoerd. Heeft men dat echter gedaan en de hoofdbewerkingen gedefinieerd, dan behoeft aan het bewijs van het bestaan der oplossing niets veranderd te worden.

Iets dergelijks geldt voor het meetkunde voorbeeld (dat wij natuurlijk ook analytisch hadden kunnen formuleren). Daar valt het minder in het oog, omdat wij bij de elementaire meetkunde bewust gewoon zijn, het continuum als intuïtief bekend te beschouwen.

Wat de stellingen over limieten betreft, krijgt het veld, waarop onze beschouwingen betrekking hebben een enorme uitbreiding, als we van varianten op functies overgaan. Evenwel zo lang het object, waarvan we het bestaan willen bewijzen een getal is (b.v. de limiet, waartoe een gegeven functie nadert onder gegeven omstandigheden) komen er geen nieuwe elementen in onze beschouwingen en kunnen we de bewijzen veelal vinden door de door mij besproken voorbeelden na te volgen. Dat geldt ook nog in vele gevallen, als we overgaan op functies van meerdere veranderlijken Wel ontmoeten we daar tal van nieuwe problemen door de beschouwing van de verschillende manieren, waarop de onafhankelijke veranderlijken tot een gegeven combinatie van waarden kunnen komen.

Bij het bewijs van het bestaan van de bepaalde integraal, als de integrand een continue functie is, heeft men feitelijk ook te doen met een limiet van een variant. Alleen wordt de definitie van bepaalde integraal gewoonlijk zo gegeven (en dat is ook nodig om er mee te kunnen werken), dat het bewijs moet aangevuld worden met het bewijs, dat een aantal varianten (zelfs een niet aftelbaar aantal) dezelfde limiet hebben. Overeenkomstige opmerkingen kunnen wij maken over meervoudige integralen. Bij de meetkundige toepassingen daarvan booglengte, oppervlak, inhoud enz. komt daar nog bij de moeilijkheid, de objecten, waarvan we het bestaan bewijzen willen, behoorlijk te definiëren.

Een nieuw element komt in onze beschouwingen, als het object, waarvan we het bestaan willen bewijzen, niet is een getal of een stel getallen, maar een functie of een stelsel functies. Als voorbeeld noem ik het theorema der impliciete functie, en het overeenkomstige theorema voor een stelsel functies. Verder de onbepaalde integraal en de existentietheorema's betreffende de oplossing van verschillende soorten differentiaalvergelijkingen of stelsels differentiaalvergelijkingen, van integraalvergelijkingen en andere functionaalvergelijkingen. Met getallen en functies zijn de objecten, waarvan men in verschillende gevallen het bestaan zou willen bewijzen, nog lang niet uitgeput.